Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
y
Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas

Instituto de Física y Matemáticas
y
Centro de Ciencias Matemáticas

Estados coherentes de SU(1,1) en espacios de Krein.

TESIS

Que para optar por el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Arley Yessit Sierra Acosta
arleysierra23@gmail.com
Matrícula: 1731301C

Director de tesis: Dr. Elmar Wagner
elmar@ifm.umich.mx
Instituto de Física y Matemáticas. UMICH

Morelia, Michoacán - 17 de abril de 2020.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme vivir seis años de matemáticas y por los que vendrán, por darme un centenar de razones para tener fe.

A mis padres, Rafael Sierra Santos y Claudia Acosta Romero, porque lo merecen todo, porque son el regalo que no escogí, porque han luchado sin cansancio por mi educación y la de mis hermanos.

A mis hermanos, porque están siempre conmigo, porque su apoyo es tan grande que de ser tangible ocuparía todo.

A ella, la que posee toda la belleza del universo en su sonrisa, la que mantiene mi mundo en sus besos; por sus 16 infinitos a mi lado: Keyla Álvarez Jove.

Al Dr. Elmar Wagner, por ser un asesor increíble, por su valiosa ayuda, por sus consejos y por convertirse en un referente académico. Gran matemático y persona.

Al Dr. Osmin Ferrer, por ser un segundo padre para mí, por enseñarme el valor de la humildad, y por mostrarme el hermoso camino de la ciencia.

A los sinodales de esta tesis, por la paciencia y el tiempo entregado, por sus enseñanzas en las aulas. A todos los profesores del posgrado, porque con sus enseñanzas nos abren la mente a este mundo tan inmenso. Especialmente al Dr. Anatoli Merzon, por brindarme clases extras un par de veces.

A mis amigos del posgrado, por hacerme sentir en casa, y por cada hora de estudio y compañía. Y en Colombia, a mi gran amigo Cristian López.

A CONACyT, por apoyarme económicamente durante éstos dos años, por confiar en mis capacidades.

Y a todos los que han aportado su granito de arena en mi vida personal, religiosa o académica y no he mencionado; gracias, muchas gracias.

Resumen

Los estados coherentes generalizados de Perelomov del grupo de matrices 2×2, pseudo-unitarias y con determinante igual a 1, $\mathrm{SU}(1,1)$, han sido muy estudiados por su importancia en la física, pero siempre sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita, pues la única representación irreducible unitaria de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita es la trivial. Es así como el eje central de ésta tesis es construir dichos estados desde la visión de Perelomov pero sobre espacios de Krein concretos, y a su vez probar que éstos definen un marco continuo de rango uno sobre el espacio de Krein determinado por el espacio vectorial de polinomios homogéneos de dos variables de grado $s,\ s\in\mathbb{N}_0$, el cual es evidentemente de dimensión finita; y para lo cual debemos construir una representación irreducible unitaria sobre dicho espacio de Krein.

Palabras Clave: Espacio de Krein, marcos continuos, estados coherentes, representación irreducible, representación unitaria.

Abstract

The generalized coherent states of Perelomov of the group pseudo-unitary 2×2-matrices with determinant equal to 1, $\mathrm{SU}(1,1)$, have been widely studied for their importance in physics, but always on Hilbert spaces of infinite dimension, since the unique irreducible unitary representation of $\mathrm{SU}(1,1)$ on a Hilbert space of finite dimension is the trivial one. Thus, the central axis of this thesis is to construct states from Perelomov's vision but on a specific Krein space, and in turn to prove that they determine a continuous frame of rank one on the Krein space determined by the vector space of homogeneous polynomials in two variables of degree $s,\ s\in\mathbb{N}_0$, which has obviously finite dimension; and on which we must construct a unitary irreducible representation.

INTRODUCCIÓN

La teoría de marcos discretos en espacios de Hilbert es relativamente reciente, fueron Duffin y Schaeffer en 1952 [**15**], quiénes introdujeron por vez primera ésta noción, cuya principal ventaja es que un buen marco discreto se puede comportar casi como una base ortonormal; con un adicional, no requieren de la unicidad de los coeficientes al escribir un vector del espacio de Hilbert como combinación lineal de los elementos del marco (Teorema de descomposición de marcos). Razón por la cual en la literatura se les suele llamar bases sobre-completas.

En el caso de los marcos continuos en espacios de Hilbert, los cuales son objetos más generales que los marcos discretos, ya que son etiquetados con índices continuos, y como lo observamos en el capítulo 1 de este manuscrito; los marcos discretos son un caso particular de los marcos continuos, pues basta considerar el espacio de medida $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ donde μ es la medida de conteo, y anotar que la familia de vectores $\eta := \{\eta(x)\}_{x\in\Omega}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un marco continuo de rango 1 respecto a un espacio de medida (Ω, Σ, ν) con ν una medida positiva σ-finita si y solamente si existen $0 < a \leq b < \infty$ tales que

$$a\|h\|^2 \leq \int_\Omega |\langle \eta(x), h\rangle|^2 d\nu \leq b\|h\|^2, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \tag{0.1}$$

y dicha definición surgió en el contexto de la teoría de estados coherentes estudiados por Ali, Antoine y Gazeau en [**7**]. Sin embargo no fueron éstos los que trabajaron por primera vez los sistemas de estados coherentes, pues en el largo camino del conocimiento fue Schrödinger en [**1926**] quién comenzó a trabajar sobre sistemas de estados coherentes aunque no de manera formal, pues trabajó con un sistema de funciones de onda no ortogonales en osciladores cuánticos; los que a su vez fueron retomados en los años [**1960-1963**] por Glauber, Klauder, y Sudarshan. En este sentido, volviendo a Ali, Antoine y Gazeau, ellos consideraron a η como un estado coherente si el mapeo $x \to \langle h, \eta(x)\rangle$ es medible para todo $h \in \mathcal{H}$ y

$$\int_\Omega \langle h_1, \eta(x)\rangle \langle \eta(x), h_2\rangle d\nu(x) = \langle h_1, Sh_2\rangle, \quad \text{para todo} \;\; h_1, h_2 \in \mathcal{H},$$

donde S es un operador autoadjunto, acotado e invertible, pero no necesariamente su inverso es acotado, pues si esto último se cumple, entonces se dice que η es un marco continuo porque (0.1) se verifica.

De este modo, puesto que los espacios de Krein son la generalización de los espacios de Hilbert, es natural pensar en extender la teoría de marcos en espacios de Hilbert a espacios de Krein, es así como en el año 2015, K. Esmeral, O. Ferrer y E. Wagner [**11**] establecen la noción de marcos discretos en espacios de Krein cuya existencia no depende de la descomposición fundamental; ganando de esta manera propiedades interesantes, en su mayoría gracias al producto interno indefinido. Desde entonces la teoría de marcos en espacios de Krein ha venido creciendo con los años, y es así como en el 2018 con la tesis de D. Carrillo [**4**], D. Carrillo y E. Wagner introducen la noción de marcos continuos en espacios de Krein.

Ahora bien, antes de Perelomov 1986, [**1**], cabe destacar que soló se habían estudiado estados coherentes para el oscilador armónico (con el grupo de Heisenberg-Weyl), sin embargo con Perelomov se estableció la definición de estados coherentes generalizados, donde básicamente es posible construir los estados coherentes de cualquier grupo de Lie, ya que siguiendo a Perelomov, es posible parametrizar dichos estados coherentes por puntos en un espacio homógeneo donde el grupo actúa, para lo cual es necesario considerar representaciones irreducibles unitarias del grupo de Lie sobre el espacio de Hilbert (Krein en nuestro caso) en consideración. Por lo tanto, es natural preguntarse si es posible trabajar los estados coherentes del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$ conformado por matrices 2×2 pseudo-unitarias y con determinante igual a 1, sobre espacios de Krein, y preguntarse también si éstos definen un marco continuo de rango 1 en el sentido de la definición acuñada en [**4**].

Es aquí donde aparecen nuestros primeros resultados, pues en [**2**] se demuestra que toda representación irreducible unitaria del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita es trivial, esto es, es la identidad en el espacio de Hilbert. Por lo cual, los físicos sólo se han preocupado por las representaciones irreducibles unitarias de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre espacios de Hilbert de dimensión infinita. Y nosotros hemos construido entre otras cosas, representaciones irreducibles unitarias de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre un espacio de Krein concreto de dimensión finita que no es para nada trivial, evidenciando con ello que los espacios de Krein como generalización de los espacios de Hilbert nos otorgan resultados bonitos e interesantes.

Este manuscrito está dividido en tres capítulos, en el capítulo 1 se establecen algunos resultados importantes de los marcos discretos y continuos sobre espacios de Krein, además de las definiciones pertinentes para dicho estudio. En el capítulo 2 repasamos algunas de las nociones más importantes de la teoría de representaciones, las que serán usadas en ésta tesis, además de enunciar algunos resultados de los grupos y álgebras de Lie. En el capítulo 3 desarrollamos la noción de representación unitaria sobre un espacio de Krein, construimos los estados coherentes generalizados de Perelomov para el grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre el espacio de Krein dado por el espacio vectorial de polinomios homogéneos de grado $s \in \mathbb{N}_0$ de dos variables con coeficientes complejos, el cual es evidentemente de dimensión finita, y demostramos que éstos definen un marco continuo de rango 1, para lo cual construimos una representación irreducible unitaria de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre dicho espacio de Krein.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se dan algunas nociones elementales de los marcos discretos y generalizados en espacios de Krein. La teoría de marcos continuos o generalizados en espacios de Krein es muy joven, a penas en 2018 en la tesis de D. Carrillo [**4**] se extendió la definición de espacios de Hilbert a espacios más generales, los espacios de Krein. Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [**12**], [**13**] y obviamente en [**4**].

1.1. Espacios de Krein

Definición 1.1. *Sea* $\mathfrak{F}$ *un espacio vectorial sobre el campo* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un* ***producto interno*** *en* $\mathfrak{F}$ *es una función*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathbb{K}$$

que satisface las siguientes:

i) $[x, \alpha y + z] = \alpha[x, y] + [x, z]$ *para todo* $x, y, z \in \mathfrak{F}$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$*.*

ii) $[x, y] = \overline{[y, x]}$ *para todo* $x, y \in \mathfrak{F}$ *.*

Típicamente a $(\mathcal{F}, [\cdot,\cdot])$ se le denomina *espacio con producto interno.* Además, el par $(\mathcal{F}, -[\cdot,\cdot])$ también es un espacio con producto interno y se llama el anti-espacio de $(\mathcal{F}, [\cdot,\cdot])$.

Note que por la propiedad *ii*) se cumple para todo $x \in \mathcal{F}$ que $[x, x] \in \mathbb{R}$, así por la ley de tricotomía, tenemos una y sóla una de las siguientes; $[x, x] > 0$, $[x, x] < 0$, o $[x, x] = 0$, a un tal x con alguna de las anteriores, se le conoce como vector **positivo**, **negativo**, o **neutral** respectivamente.

Definición 1.2. *Sea* $\mathcal{V}$ *subespacio de* $\mathcal{F}$*. Si* $\mathcal{V}$ *solo tiene vectores positivos (negativos) y el vector nulo, se dice que es* ***definido positivo (negativo)****. Además si tiene tanto elementos positivos como negativos, se dice que es un* ***espacio con producto interno indefinido****; en caso contrario se dice que es un* ***espacio con producto interno semi-definido.***

Un espacio con producto interno semi-definido ($\mathcal{V}$, $[\cdot,\cdot]$) que para todo $x \in \mathcal{V}$ cumple con $[x,x] \geq 0$, $[x,x] \leq 0$ o bien $[x,x] = 0$ se denomina espacio con producto interno semidefinido-positivo, semidefinido-negativo o neutro respectivamente.

Un producto interno indefinido tiene vectores neutrales no nulos como se prueba en **[12]** y **[13]**, lo que no sucede en un espacio definido. Además, en un espacio con producto interno semidefinido se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Definición 1.3. *Se dice que dos vectores* $x, y \in \mathcal{F}$ *son* ***ortogonales*** $(x\,[\perp]\,y)$ *si* $[x,y] = 0$ *y que dos conjuntos* $\mathcal{V}, \mathcal{W} \subseteq \mathcal{F}$ *son ortogonales* $(\mathcal{V}\,[\perp]\,\mathcal{W})$ *si* $x\,[\perp]\,y$ *para todo* $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{W}$*; en particular si* $\mathcal{V}$ *se reduce a un solo vector* x*, se escribe simplemente* $x\,[\perp]\,\mathcal{W}$*. Además, si* $\mathcal{V}$ *es subconjunto de* $\mathcal{F}$*, el* ***complemento ortogonal*** *de* $\mathcal{V}$ *está dado por* $\mathcal{V}^{\perp} := \{x \in \mathcal{F} :\ x[\perp]\mathcal{V}\}$ *de tal manera que* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}^{\perp\perp}$ *y* $\mathcal{V}^{\perp} = \mathcal{V}^{\perp\perp\perp}$*.*

El subespacio $\mathcal{V}^0 := \mathcal{V} \cap \mathcal{V}^{\perp}$ se denomina la *parte isotrópica* de $\mathcal{V}$ y sus elementos no nulos se conocen como *vectores isotrópicos*. Si $\mathcal{V}^0 = \{0\}$ se dice que $\mathcal{V}$ es un *subespacio no degenerado*, de lo contrario se dice subespacio degenerado.

Definición 1.4. *Sean* $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ *subespacios de* $\mathcal{F}$ *tales que* $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \{0\}$*. La* ***suma directa*** *de* $\mathcal{V}$ *y* $\mathcal{V}'$ *es denotada* $\mathcal{V}[\dot{+}]\mathcal{V}'$*. Además, si* $\mathcal{V}[\perp]\mathcal{V}'$ *entonces se llama* ***suma directa ortogonal*** *y escribimos* $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}'$*.*

Definición 1.5. ***(Descomposición fundamental)*** *Sea* $(\mathcal{F}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio con producto interno. Decimos que* $\mathcal{F}$ *admite una descomposición fundamental si existen subespacios* $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$*,* $\mathcal{F}^+ \subset \mathcal{F}$ *y* $\mathcal{F}^- \subset \mathcal{F}$ *de tal suerte que* $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$*, donde* $(\mathcal{F}^0, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{F}^0})$ *es un espacio neutro,* $(\mathcal{F}^+, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{F}^+})$ *es definido positivo, y* $(\mathcal{F}^-, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{F}^-})$ *es definido negativo. En este caso, llamamos a* $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^+ \oplus \mathcal{F}^-$ *una* ***descomposición fundamental****.*

Note que si $\mathcal{F}$ admite una descomposición fundamental entonces $(\mathcal{F}^+, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{F}^+})$, $(\mathcal{F}^-, -[\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{F}^-})$ son espacios pre-Hilbert y luego es posible definir una topología en $\mathcal{F}^{\pm}$ por $\|\cdot\|_{\pm} := \sqrt{\pm[\cdot,\cdot]}$.

Definición 1.6. *Un* ***Espacio de Krein*** *es un espacio con producto interno no degenerado* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *que admite una descomposición fundamental* $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ *con* $(\mathcal{K}^+, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^+})$ *y* $(\mathcal{K}^-, -[\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^-})$ *espacios de Hilbert.*

Como $(\mathcal{K}^+, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^+})$ y $(\mathcal{K}^-, -[\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^-})$ son espacios de Hilbert, tienen una topología dada por la norma. Entonces es posible asignar la topología de $\mathcal{K}$ por la norma inducida por el siguiente producto interno definido positivo,

$$(x_1, x_2) = [{x_1}^+, {x_2}^+] - [{x_1}^-, {x_2}^-],\ {x_i}^{\pm} \in \mathcal{K}^{\pm},\ x_i = {x_i}^+ + {x_i}^-,\ i = 1, 2.$$

Este producto interno define al espacio de Hilbert $(\mathcal{K}, (\cdot,\cdot))$, el cual es llamado el espacio de Hilbert asociado a $\mathcal{K}$. Además, existen proyecciones ortogonales únicas sobre $\mathcal{K}^+$ y $\mathcal{K}^-$ las cuales son denotadas por P^+ y P^- respectivamente. El operador lineal $J = P^+ - P^-$ es llamado simetría fundamental y este satisface $[x,y]_J := [x, Jy] = (x,y)$, y además $\|x\|_J := \sqrt{[x,x]_J}$, $x, y \in \mathcal{K}$ Al producto interno $[\cdot,\cdot]_J$ se le conoce comúnmente como J-producto interno, y a la norma inducida, J-norma.

Observación 1.1. ***[12, sec. 1.7]*** *En Azizov se demuestra que las diferentes J-normas sobre* $\mathcal{K}$ *son equivalentes independientemente de la descomposición fundamental.*

Siempre que no se indique lo contrario; la letra $\mathcal{K}$ denotará un espacio de Krein $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ sobre el campo $\mathbb{K}$, con descomposición fundamental $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$ y simetría fundamental asociada $J : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$.

Ejemplo 1.1. *Ilustremos con un ejemplo, sea* $\mathcal{K} = L_2([-1,1], dx)$ *el espacio de todas las funciones con valores complejos cuadrado integrables con respecto a la medida de Lebesgue usual en* $[-1,1]$. *En* $\mathcal{K} = L_2([-1,1], dx)$ *definimos el producto interno* $[\cdot,\cdot] : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$*:*

$$[f,g] := \int_{-1}^{1} \overline{f(-x)} g(x) dx$$

Así, note que $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$*, donde*

$\mathcal{K}^+ := \{f \in \mathcal{K} : f \text{ es par}\}$, $\mathcal{K}^- := \{f \in \mathcal{K} : f \text{ es impar}\}$ *y es fácil ver que* $(\mathcal{K}^+, [\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^+})$ *y* $(\mathcal{K}^-, -[\cdot,\cdot] \restriction_{\mathcal{K}^-})$ *son espacios de Hilbert, por lo tanto* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio de Krein con simetría fundamental* $(Jf)(x) = f(-x)$ *y J-producto interno dado por:*

$$[f,g]_J = [f, Jg] = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f, g\rangle$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *denota el producto interno definido positivo usual en* $L_2([-1,1], dx)$.

Definición 1.7. *Sean* $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_1})$ *y* $(\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_2})$ *espacios de Krein con simetrías fundamentales* $J_{\mathcal{K}_1}$ *y* $J_{\mathcal{K}_2}$ *respectivamente. Se define el conjunto de operadores lineales acotados como*

$$\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) := \left\{ T : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2, \text{ lineal y } \|T\| = \sup_{k \in \mathcal{K}_1 \setminus \{0\}} \frac{\|Tk\|_{J_{\mathcal{K}_2}}}{\|k\|_{J_{\mathcal{K}1}}} < \infty \right\}.$$

Ya que la continuidad no depende de la descomposición fundamental para los espacios de Krein, entonces $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2) = \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1^+ \oplus \mathcal{K}_1^-, \mathcal{K}_2^+ \oplus \mathcal{K}_2^-)$. Con ello, es fácil ver que la simetría fundamental $J_{\mathcal{K}_1}$ es un operador lineal acotado y $\|J_{\mathcal{K}_1}\| = 1$.

Definición 1.8. *Sea* T *un operador lineal con dominio denso en el espacio de Krein* $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_1})$ *y definido hacia el espacio de Krein* $(\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_2})$. *El operador adjunto* T^* *se define para* $g \in \mathcal{K}_2$ *tal que existe un* g^* *que satisface* $[g, Tk]_{\mathcal{K}_2} = [g^*, k]_{\mathcal{K}_1}$ $\forall k \in dom(T)$ *y en este caso* $T^* g := g^*$.

Observación 1.2. ***[13, sec. 6.2]*** *El operador* T^* *puede ser expresado a través del adjunto en espacios de Hilbert* $T^{[*]}$*, el cual se denomina* ***J-adjunto*** *y satisface* $[g, Tk]_{J_{\mathcal{K}_2}} = [T^{[*]} g, k]_{J_{\mathcal{K}_1}}$, $\forall k \in dom(T)$, $g \in dom(T^{[*]})$. *La relación entre dichos adjuntos está dada por*

$$T^* = J_{\mathcal{K}_1} T^{[*]} J_{\mathcal{K}_2}. \tag{1.1}$$

Definición 1.9. *Un operador* $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ *se dice* ***auto-adjunto*** *en el espacio de Krein* $\mathcal{K}$ *si* $T = T^*$ *y* ***J-autoadjunto*** *si* $T = T^{[*]}$*. Además si* T *es auto-adjunto y* $[k, Tk] \geq 0$ *para cada* $k \in \mathcal{K}$*,* T *se dice positivo. Por otro lado, si lo que se cumple es* $[k, Tk] \geq \alpha \|k\|_J^2$ *para todo* $k \in \mathcal{K}$ *y algún* $\alpha > 0$*,* T *se dice* ***uniformemente positivo*** *y escribimos* $T \geq \alpha$*.*

Definición 1.10. *Un operador lineal* $T : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *entre los espacios de Krein* $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_1})$ *y* $(\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_2})$ *se dice* ***unitario*** *si se tiene que* $TT^* = I_{\mathcal{K}_2}$ *y* $T^*T = I_{\mathcal{K}_1}$*. Por otra parte, si* $[Tk, Th]_{\mathcal{K}_2} = [k, h]_{\mathcal{K}_1}$ *para cada* $k, h \in \mathcal{K}_1$*, el operador lineal* T *se llama* ***isométrico****.*

Las pruebas de los siguientes resultados pueden encontrarse en J. Bognar [13]. La razón de mencionarlos aquí radica en su importancia para probar en el capítulo 3 de ésta tesis, que estamos trabajando sobre representaciones irreducibles unitarias del grupo $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre un espacio de Krein.

Teorema 1.1. ***(Descomposición polar)*** *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert, y* $G \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *tal que* $G^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$*. Definimos* $|G| := \sqrt{G^{[*]}G}$*. Entonces existe un único operador unitario* $\mathcal{U} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *de tal suerte que* $G = \mathcal{U}|G|$*.*

Teorema 1.2. *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert, y* $G \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *tal que* $G^{[*]} = G$*,* $G^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *y* $G = J|G|$ *es la descomposición polar. Definimos* $[x, y] := \langle x, Gy \rangle$*. Entonces* $(\mathcal{H}, [\cdot,\cdot])$ *es un espacio de Krein con descomposición fundamental* $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- = P^+(\mathcal{H}) \oplus P^-(\mathcal{H})$*, donde* $P^+ := \frac{Id+J}{2}$*,* $P^+ := \frac{Id-J}{2}$ *y* J *es la simetría fundamental.*

1.2. Marcos Discretos

Definición 1.11. ***[11]*** *Una sucesión contable* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$ *es un* ***marco discreto*** *para el espacio de Krein* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *si existen constantes* $0 < a \leq b < \infty$ *de tal manera que*

$$a\|k\|_J^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |[k, k_n]|^2 \leq b\|k\|_J^2 \quad \textit{para todo} \quad k \in \mathcal{K}.$$

Las constantes a y b son las cotas del marco. El valor más grande de a y el más pequeño de b son llamadas cota óptima inferior y superior respectivamente. Un marco discreto es ajustado si $a = b$.

Lema 1.1. *Sean* $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ *espacios de Krein con simetrías fundamentales* $J_{\mathcal{K}_1}$ *y* $J_{\mathcal{K}_2}$*. Si* $U : \mathcal{K}_1 \to \mathcal{K}_2$ *es un operador unitario tal que* $U^* J_{\mathcal{K}_2} U = J_{\mathcal{K}_1}$*, entonces para cualquier marco discreto* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathcal{K}_1$ *se tiene que* $\{Uk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco discreto en* $\mathcal{K}_2$ *con las mismas cotas del marco.*

La razón de incluir el anterior lema aquí radica en que es usado para demostrar la siguiente proposición, pues J es un operador unitario. Para los detalles de la prueba ver [**4**].

Proposición 1.1. ***[11, cap. 3]*** *Sea* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco discreto para el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$ *con cotas del marco* $A \leq B$.

ii) $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco discreto para el espacio de Krein* $\mathfrak{K}$ *con cotas del marco* $A \leq B$.

iii) $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco discreto para el espacio de Hilbert* $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ *con cotas del marco* $A \leq B$.

iv) $\{Jk_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es un marco discreto para el espacio de Hilbert* $(\mathfrak{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ *con cotas del marco* $A \leq B$.

Definición 1.12. ***(Operador Pre-marco)*** *Sean* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco discreto en* $\mathcal{K}$. *Consideremos* $\ell_2(\mathbb{N})$ *con la forma sesquilineal*

$$(\cdot,\cdot) : \ell_2(\mathbb{N}) \times \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$$

tal que $(\ell_2(\mathbb{N}), (\cdot,\cdot))$ *es un espacio de Krein, con simetría fundamental* J_{ℓ_2} *que satisface*

$$(\cdot,\cdot)_{\ell_2} = \langle\cdot,\cdot\rangle$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *es el producto interno usual en* $\ell_2(\mathbb{N})$. *El operador lineal*

$$T : \ell_2(\mathbb{N}) \to \mathcal{K}, \;\; T(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n k_n$$

es llamado el ***operador pre-marco.***

El operador T es acotado; para ver esto basta con tener en cuenta que $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un marco discreto en $\mathcal{K}$, y verificar que $\|T\| \leq \sqrt{b}$, donde $+\infty > b > 0$ es cota del marco. Además, el adjunto de T está dado por $T^*k = J_{\ell_2}([k, k_n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Se define de esta manera el **operador marco** $S : (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]) \to (\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ mediante $S := T^* J_{\ell_2} T$ tal que para todo $k \in \mathcal{K}$,

$$Sk = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, k] k_n.$$

No es difícil ver que el operador S es autoadjunto, acotado e invertible, y con inverso acotado. Obtenemos entonces uno de los resultados más trascendentales en la teoría de marcos de espacios de Krein: el teorema de descomposición de marcos.

Teorema 1.3. ***[11, cap. 3](Teorema de Descomposición de Marcos)*** *Sean* $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *un marco discreto en el espacio de Krein* $\mathcal{K}$ *y* S *el operador marco asociado, entonces para todo* $k \in \mathcal{K}$,

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [k_n, k] S^{-1} k_n,$$

$$k = \sum_{n\in\mathbb{N}} [S^{-1} k_n, k] k_n,$$

y ambas series convergen incondicionalmente.

1.3. Marcos generalizados en espacios de Krein

1.3.1. Integral Débil

Definición 1.13. *Sean* $(\mathcal{K}_1, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_1})$,$(\mathcal{K}_2, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}_2})$ *espacios de Krein y* Ω *un espacio medible. Se dice que* $F : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *es una función* ***débilmente medible*** *en* $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *si la función que envía* $x \in \Omega$ *a* $[h, F(x)k]_{\mathcal{K}_2}$ *es medible para cualesquiera* $h \in \mathcal{K}_2$ *y* $k \in \mathcal{K}_1$.

Observación 1.3. *Note que como en el caso de espacios de Hilbert, por el teorema de representacón de Riesz (para espacios de Krein), dado un espacio de Krein* $\mathcal{K}$, *es posible identificar a* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J)$ *con* $\mathcal{K}'$, *donde* $\mathcal{K}' := \mathfrak{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$, *esto es,* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_J) \cong \mathcal{K}'$. *Ahora bien, observe que para alguna función* $V : \Omega \to \mathcal{K}$ *es posible considerar* $W := \varphi \circ V : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ *donde para* $k \in \mathcal{K}$, *el funcional* $\varphi(k) := \varphi_k$ *actúa como* $\varphi_k(\cdot) = [k, \cdot]$. *Así, para cada* $k \in \mathcal{K}$,

$$\langle h, W(x)(k)\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{h}[V(x), k]_{\mathcal{K}}, \qquad \forall\, h \in \mathbb{C},$$

de esta manera, como se cumple para cada $h \in \mathbb{C}$, *deducimos que si* $W : \Omega \to \mathcal{K}'$ *es débilmente medible en* $\mathcal{K}'$ *entonces la función que envía* $x \in \Omega$ *a* $[V(x), k]_{\mathcal{K}}$ *es medible para cada* $k \in \mathcal{K}$. *Por tanto, en este caso diremos que* $V : \Omega \to \mathcal{K}$ *es* ***débilmente medible*** *en* $\mathcal{K}$.

Definición 1.14. *Sean* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ *espacios de Krein y* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida, con* μ *una medida signada* σ*-finita en* Ω. *Si* $F : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *es débilmente medible y* $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, *entonces la* ***integral débil*** *de* F *en* $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *es* A *si para cualesquiera* $h \in \mathcal{K}_2$ *y* $k \in \mathcal{K}_1$,

$$\int_\Omega [h, F(x)k]_{\mathcal{K}_2} d\mu(x) = [h, Ak]_{\mathcal{K}_2},$$

En símbolos,

$$\int_\Omega F(x) d\mu(x) = A.$$

Observación 1.4. *Si la función* $V : \Omega \to \mathcal{K}_1$ *es débilmente medible y* $W := \varphi \circ V$, *entonces como para* $b \in \mathcal{K}_1$

$$\int_\Omega \langle h, W(x)(k)\rangle_{\mathbb{C}} d\mu(x) = \langle h, \varphi_b(k)\rangle_{\mathbb{C}} \;\Leftrightarrow\; \int_\Omega [V(x), k]_{\mathcal{K}_1} d\mu(x) = [b, k]_{\mathcal{K}_1} \qquad \forall\, k \in \mathcal{K}_1, h \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

es posible definir la integral débil de V *en* $\mathcal{K}_1$ *en vitud de la integral débil de* F *en* $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$, *en el sentido,*

$$\int_\Omega V(x) d\mu(x) = b \Leftrightarrow \int_\Omega [V(x), k]_{\mathcal{K}_1} d\mu(x) = [b, k]_{\mathcal{K}_1}.$$

Por lo tanto según la función tome valores en $\mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *o solamente en* $\mathcal{K}_1$, *se le da sentido a la integral débil.*

Proposición 1.2. *Para los espacios de Krein* $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, *la función* $F : \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *débilmente medible y el operador* $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ *tal que* $\int_\Omega F\, d\mu = A$, *se cumplen las siguientes propiedades:*

i)

$$\int_\Omega F(x)k d\mu(x) = Ak \quad \forall k \in \mathcal{K}_1.$$

ii) Para $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_1)$ *y* $D \in \mathfrak{B}(\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_2)$,

$$\int_\Omega F(x)C d\mu(x) = AC \qquad y \qquad \int_\Omega DF(x) d\mu(x) = DA.$$

iii)

$$\int_\Omega F(x)^* d\mu(x) = A^*.$$

1.3.2. Marcos Continuos

Considerando el espacio de medida $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ donde μ es la medida de conteo en $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ se cumple trivialmente que cualquier sucesión $\eta : \mathbb{N} \to \mathcal{K}$ es débilmente medible en $\mathcal{K}$, esto es, la función $\eta : \mathbb{N} \to \mathcal{K}$ definida por $\eta(x) := \eta_x$ es débilmente medible y además

$$\int_{\mathbb{N}} |[\eta_x, k]|^2 d\mu(x) = \sum_{x \in \mathbb{N}} |[\eta_x, k]|^2.$$

De donde, si $\{\eta_x\}_{x \in \mathbb{N}}$ es un marco discreto en $\mathcal{K}$ con cotas $b \geq a > 0$, se cumple que

$$a\|k\|_J^2 \leq \int_{\mathbb{N}} |[\eta_x, k]|^2 d\mu(x) \leq b\|k\|_J^2. \tag{1.3}$$

Definición 1.15. *[4] Un* ***Marco Continuo*** *de rango* $n \in \mathbb{N}$ *en el espacio de Krein* $\mathcal{K}$ *respecto al espacio medible* Ω *y la medida signada* σ*-finita* μ *, es una familia* $\{\eta_x^1, \eta_x^2, \cdots, \eta_x^n\}_{x \in \Omega}$ *en* $\mathcal{K}$ *de tal manera que las funciones* $\eta^i : \Omega \to \mathcal{K}$ *con* $\eta^i(x) = \eta_x^i$ *son débilmente medibles. Además existen* $+\infty > b \geq a > 0$ *de tal suerte que para todo* $k \in \mathcal{K}$,

$$a\|k\|_J^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |[\eta_x^i, k]|^2 d|\mu|(x) \leq b\|k\|_J^2. \tag{1.4}$$

Las constantes a *y* b *son las cotas del marco y la propiedad anterior es la* ***condición del marco****. Las cotas óptimas del marco son el mayor valor posible de* a *y el menor valor posible de* b*, además si* $a = b$ *el marco continuo se dice ajustado.*

Comentario 1.1. *Lo anterior está bien definido porque al cambiar la simetría fundamental dicha condición se mantiene, sin embargo es posible que las cotas del marco cambien.*

En efecto, si J_2 *es otra simetría fundamental, existen* $+\infty > c_2 \geq c_1 > 0$ *tal que para cada* $k \in \mathcal{K}$

$$c_1\|k\|_{J_2}^2 \leq \|k\|_J^2 \leq c_2\|k\|_{J_2}^2.$$

Luego,

$$a\,c_1\|k\|_{J_2}^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}|[\eta_x^i,k]|^2 d|\mu|(x) \leq b\,c_2\|k\|_{J_2}^2,$$

de donde $\{\eta_x^1,\eta_x^2,\cdots,\eta_x^n\}_{x\in\Omega}$ *es un marco continuo con cotas* $a\,c_1>0$ *y* $b\,c_2>0$.

En virtud de la ecuación (1.3), todo marco discreto es un marco continuo de rango 1, esto es, los marcos generalizados extienden el estudio de los marcos discretos.

En ésta tesis sólo nos interesan los marcos continuos de rango 1, por lo tanto todos los siguientes resultados son en éste sentido, si el lector desea revisar dichos resultados para marcos continuos de rango $n\in\mathbb{N}$, lo invitamos a ver **[4, sec. 3.2]**.

Comentario 1.2. *Note que dado un espacio de Krein* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$, *la condición del marco continuo de rango* 1, $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$, *(en adelante simplemente marco continuo) en el espacio de Hilbert asociado* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$ *es*

$$a\|k\|_J^2 \leq \int_{\Omega}|[\eta_x,k]_J|^2 d|\mu|(x) \leq b\|k\|_J^2.$$

Teorema 1.4. ***[4, teor. 3.1]*** *Sea* $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *en el espacio de Krein* $\mathcal{K}$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *es un marco continuo para el espacio de Krein* $\mathcal{K}$,

ii) $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *es un marco continuo para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$,

iii) $\{J\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *es un marco continuo para el espacio de Krein* $\mathcal{K}$,

iv) $\{J\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *es un marco continuo para el espacio de Hilbert* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_J)$,

donde cada marco continuo tiene las mismas cotas del marco $b\geq a>0$.

Observación 1.5. *Sea* μ *una medida signada* σ*-finita en el espacio medible* (Ω,Σ), *entonces por el teorema de descomposición de Hahn existen conjuntos medibles* Ω_+ *positivo y* Ω_- *negativo con respecto a* μ *de tal suerte que* $\Omega=\Omega_+\cup\Omega_-$ *y* $\Omega_+\cap\Omega_-=\emptyset$. *Además por el teorema de descomposición de Jordan,* μ *es la diferencia de* μ_+ *y* μ_-, *medidas positivas mutuamente singulares, donde la variación total está dada por* $|\mu|=\mu_++\mu_-$.

Así, el espacio de funciones $L_2(\Omega,|\mu|)$ *con el producto interno indefinido:*

$$[\cdot,\cdot]: L_2(\Omega,|\mu|)\times L_2(\Omega,|\mu|)\to\mathbb{K}$$

dado por

$$[f,g]:=\int_{\Omega}\bar{f}g\,d\mu,$$

define un espacio de Krein simbolizado $\mathfrak{K}_2(\Omega,\mu)$ *con descomposición fundamental*

$$\mathfrak{K}_2(\Omega,\mu)=L_2(\Omega_+,\mu_+)\oplus L_2(\Omega_-,\mu_-).$$

Note además que los proyectores fundamentales son $P^{\pm}(f)=f^{\pm}=\chi_{\mathcal{M}_{\pm}}f$, *entonces la simetría fundamental se puede expresar en términos de la derivada de Radon-Nikodym (Ver* ***[14]*** *para* *nociones de teoría de la medida)* $j_\mu := \chi_{\Omega_+} - \chi_{\Omega_-}$ *de* μ *con respecto* $|\mu|$ *ya que* $J_\mu(f) := f^+ - f^-$ *y* $j_\mu f = (\chi_{\Omega_+} - \chi_{\Omega_-})f$*, luego* $J_\mu(f) = j_\mu f$ *donde* $\chi_{\Omega_\pm}$ *es la función característica en* $\Omega_\pm$*. Por consiguiente note que se cumple* $[f,g]_{J_\mu} = \langle f,g\rangle_{L_2(\Omega)}$*.*

De esta manera contamos con todo el arsenal para definir el operador pre-marco asociado a un marco continuo, y por ende el operador marco.

Definición 1.16. ***(Operador pre-marco)*** *Sean* $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein y* $\mathfrak{K}_2(\Omega,\mu)$ *el espacio de Krein de la observación anterior con simetría fundamental* J_μ*. Dado un marco continuo* $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *en* $\mathcal{K}$*, el operador*

$$T : \mathfrak{K}_2(\Omega,\mu) \to \mathcal{K}$$

dado por

$$T(f) = \int_\Omega f(x)\eta_x d\mu(x) \ \text{ para todo } f \in \mathfrak{K}_2(\Omega,\mu)$$

es llamado el ***operador pre-marco*** *asociado a* $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$*.*

Observe que T está bien definido, es lineal y acotado. Además, el operador lineal $S : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ definido por $S = TJ_\mu T^*$ se llama el **operador marco** asociado a $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$, donde $(T^*k)(x) = [\eta_x, k]$ para todo $k \in \mathcal{K}$ y $x \in \Omega$.

No es difícil probar que S es un operador autoadjunto, acotado, invertible y que para todo $k \in \mathcal{K}$ adopta la forma

$$S(k) = \int_\Omega [\eta_x, k]\eta_x d|\mu|(x).$$

Similarmente como en el caso de marcos discretos en espacios de Krein podemos enunciar el teorema de descomposición de marcos para marcos continuos en espacios de Krein.

Teorema 1.5. ***[4, teor. 3.4](Teorema de Descomposición de Marcos)***
Sea S^{-1} *el inverso del operador marco asociado a* $\{\eta_x\}_{x\in\Omega}$ *en el espacio de Krein* $\mathcal{K}$*. Luego cada* k *en* $\mathcal{K}$ *tiene las siguientes representaciones*

$$k = \int_\Omega [S^{-1}\eta_x, k]\eta_x d|\mu|(x),$$

$$k = \int_\Omega [\eta_x, k]S^{-1}\eta_x d|\mu|(x),$$

donde las integrales convergen débilmente en $\mathcal{K}'$*.*

CAPÍTULO 2

GRUPOS DE LIE Y REPRESENTACIONES

En este capítulo daremos algunas de las nociones básicas de los grupos y álgebras de Lie matriciales, además de abordar someramente algunos de los resultados más importantes de la teoría de representaciones y que serán usados en este texto. Los libros utilizados para la elaboración de este capítulo son [**5**], [**6**], [**8**], [**9**], [**10**] y muy especialmente B.C. Hall [**3**].

2.1. Grupos y acciones de grupos

Antes de entrar a definir un grupo de Lie matricial, es importante mirar algunas nociones previas, y definir en general lo que es un grupo de Lie, así, en términos poco precisos un grupo de Lie es un conjunto con estructura de variedad diferenciable y de grupo, las cuales son compatibles. Pero, ¿qué es una variedad diferenciable? Una variedad diferenciable X es en forma imprecisa un espacio topológico que localmente se asemeja al espacio euclideano $\mathbb{R}^n$ con una noción de diferenciación que puede ser establecida en X. La definición formal es como sigue:

Definición 2.1. *[**6**] Una variedad (o variedad diferenciable) de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff X con una colección de pares (U_α, ϕ_α) donde U_α (carta) es un subconjunto abierto de X y $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ es tal que:*

a) Cada ϕ_α es un homeomorfismo de U_α sobre un subconjunto abierto V_α de $\mathbb{R}^n$.

b) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$

c) Para todo α,β la función transición $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es diferenciable, en el sentido de funciones diferenciables entre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. En este caso las cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) se dicen compatibles.

d) La familia $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ es máximal relativa a las condiciones b) *y* c)*.*

De esta manera, un grupo de Lie es básicamente un conjunto dotado de una estructura de grupo y una estructura de variedad, las cuales son compatibles, es decir, si G es una variedad diferenciable, decimos que G es un grupo de Lie si

(a) G es un grupo.

(b) Las operaciones del grupo, $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$ y $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ son diferenciables.

Serán de gran interés para nosotros los grupos de Lie lineales o matriciales, por tal razón no abordaremos demasiado los grupos de Lie en general. La siguiente definición goza de gran importancia en la teoría de grupos, ya que gracias a ella aparecen los muy útiles teoremas de Sylow. Y en esta tesis juega un papel crucial pero esto sólo lo veremos más adelante.

Definición 2.2. *Sean X una variedad y G un grupo de Lie con elemento identidad 1_G. Una* ***acción*** *a izquierda de G en X es un mapeo diferenciable $\varphi : G \times X \to X$ tal que:*

i) Para todo $g, h \in G$ y todo $x \in X$,

$$\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x).$$

ii) Para todo $x \in X$,

$$\varphi(1_G, x) = x.$$

Al conjunto X se le conoce en la literatura como G-conjunto (a izquierda). Similarmente se definen las acciones a derecha.

Observe que si φ es una acción a izquierda (de ahora en adelante simplemente acción) de G en X entonces para todo $g \in G$ el mapeo $\varphi_g : X \to X$ definido por $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$ es un difeomorfismo (biyección diferenciable con inversa diferenciable) de X, entonces G es visto como un grupo de difeomorfismos o transformaciones de X. Por tal argumento, al grupo G se le suele llamar **grupo transformación** de X.

Definición 2.3. *Sean X una variedad, G un grupo de Lie y φ una acción de G en X.*

i) La acción φ de G en X es llamada ***transitiva*** *si para cualquiera dos elementos $x, y \in X$ existe $g \in G$ de tal suerte que $\varphi(g, x) = y$.*

ii) Sea $x \in X$. El conjunto

$$G_x = \{g \in G : \varphi(g, x) = x\}$$

es llamado el estabilizador de x o grupo isotrópico en x.

iii) La órbita de un punto $x \in X$ es el conjunto $\varphi(G, x) = \{\varphi(g, x) : g \in G\}$

Dado un grupo de Lie G y un subgrupo cerrado H de G es posible construir una variedad diferenciable con el conjunto $G/H := \{gH : g \in G\}$ de todas las clases a izquierda de H en G (para más detalles ver [**5, teor. 3.58**]). Así, si G/H es una variedad diferenciable, el mapeo $\hat{\psi} : G \times G/H \to G/H$ dado por $\hat{\psi}(g_1, g_2H) = g_1g_2H$ es conocido como la **acción natural** de G en G/H. Ésta acción es evidentemente transitiva.

Es natural preguntarse por la relación existente entre el estabilizador en un punto cualquiera, el grupo G, la variedad diferenciable X y la acción si ésta es transitiva. Lo cierto es que, cuando la acción es transitiva, el conjunto X puede verse como un cociente (como conjunto no como grupo) de G con G_x para un $x \in X$ fijo. Esto motiva uno de los más importantes resultados de la teoría de acciones de grupos sobre variedades diferenciables, y de indiscutible utilidad en este texto, la prueba puede encontrarse en [**5**].

Teorema 2.1. *Sea $\varphi : G \times X \to X$ una acción transitiva de un grupo de Lie G sobre una variedad X y sea $H = G_x$ el subgrupo isotrópico de un punto x. Entonces:*

i) El subgrupo H es un subgrupo cerrado de G.

ii) El mapeo natural $\hat{\varphi} : G/H \to X$ dado por $\hat{\varphi}(gH) = \varphi(g, x)$ es un difeomorfismo.

iii) La dimensión de G/H es $dim(G) - dim(H)$.

Definición 2.4. *Un **espacio homogéneo** es una variedad X con una acción transitiva de un grupo de Lie. Equivalentemente, es una variedad de la forma G/H donde G es un grupo de Lie, y H es un subgrupo cerrado de G.*

Damos a continuación una de las definiciones más importantes para ésta tesis.

Definición 2.5. *Sea H un subgrupo cerrado de G, hagamos $X = G/H$. Una sección en X es un mapeo $\sigma : X \to G$ tal que $\rho(\sigma(x)) = x$ para todo $x \in X$ donde $\rho : G \to G/H$ es la proyección canónica definida por $\rho(g) = gH$ para todo $g \in G$.*

Si bien siempre es posible encontrar secciones que sean mapas de Borel, este no es el caso si uno insiste en secciones diferenciables (en el caso de G un grupo de Lie). Por otro lado, las secciones localmente diferenciables siempre existen.

2.2. Grupos de Lie matriciales

Recordemos que $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ denota el conjunto de matrices $n \times n$ con entradas en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Y además $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de la forma habitual, isomorfo a $\mathbb{K}^{n^2}$. Equipamos $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ con su topología vectorial habitual, y por lo tanto las nociones topológicas tales como compacidad, conexidad, entre otras, son en el sentido euclideano. El subconjunto de matrices invertibles en $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ forma un grupo bajo multiplicación matricial, conocido como el grupo general lineal, denotado $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. En símbolos:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\}$$

Así, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K} \backslash \{0\})$ y por lo tanto se cumple que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ es un subconjunto abierto de $\mathrm{M}(n, \mathbb{K})$ pues $\det : \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ es continua.

Es importante anotar también que por el teorema [**5, teor. 3.42**], conocido en la literatura como teorema del subgrupo cerrado o teorema de Cartan, se cumple que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie G tiene estructura de subvariedad y por consiguiente es un grupo de Lie. Con lo cual, debido a que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ es un grupo de Lie, tenemos la siguiente importante definición:

Definición 2.6. *Un grupo de Lie matricial es cualquier subgrupo cerrado G de $GL(n, \mathbb{C})$ (Grupo de matrices invertibles con entradas en los complejos), es decir, con la propiedad: si A_m es una sucesion de matrices en G y A_m converge a una matriz A, entonces $A \in G$.*

Observación 2.1. *Como la intersección arbitraria de conjuntos cerrados en un espacio topológico es un conjunto cerrado, si $\{G_i\}_{i \in I}$ es una familia de grupos de Lie matriciales, entonces $\cap_{i \in I} G_i$ también lo es.*

Veamos algunos de los ejemplos más importantes de grupos de Lie matriciales.

Ejemplo 2.1. *[3], [6].*

1) *El* ***grupo especial lineal*** $SL(n,\mathbb{K}) := \{A \in GL(n,\mathbb{K}) : det(A) = 1\}$*, donde* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$. *Este es evidentemente un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{K})$*. En efecto, para cualquier par de matrices* $A, B \in SL(n,\mathbb{K})$ *se cumple que* $det(AB^{-1}) = det(A)det(B^{-1}) = det(A)det(B)^{-1} = 1$ *de donde* $AB^{-1} \in SL(n,\mathbb{K})$*. Además si* $\{A_m\}$ *es una sucesión de matrices en* $SL(n,\mathbb{K})$ *que converge a una matriz* A *entonces por la continuidad del determinante deducimos que* $det(A) = 1$*, y por lo tanto* $A \in SL(n,\mathbb{K})$.

2) *El* ***grupo ortogonal*** $O(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^t = I_n\}$ *donde* A^t *denota la matriz transpuesta de* A *e* I_n *la matriz identidad de orden* n*. Es fácil ver que* $O(n)$ *es un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{R})$*, además la condición* $AA^t = I_n$ *implica que* $A^{-1} = A^t$ *y por lo tanto* $O(n) = f^{-1}(0)$*, donde* $f : GL(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$*,* $f(A) = A^{-1} - A^t$.

3) *El* ***grupo unitario*** $U(n) := \{A \in GL(n,\mathbb{C}) : AA^* = I_n\}$*, donde* A^* *denota la matriz adjunta de* A*, esto es,* $A^* = \bar{A}^t$*. Trivialmente* $U(n)$ *es un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{C})$*, para ver que es cerrado basta con considerar la función continua* $A \to A^*A$ *y probar que* $U(n)$ *es la imagen inversa del conjunto cerrado* $\{I_n\}$.

4) *El* ***grupo simpléctico*** $Sp(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : A^tJA = J\}$ *donde* $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$*. Veamos que* $Sp(n,\mathbb{R})$ *es un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{R})$ *y es cerrado. En efecto, sean* $A, B \in Sp(n,\mathbb{R})$ *entonces* $(AB^{-1})^tJ = (B^{-1})^tA^tJ = (B^t)^{-1}A^tJ = (B^t)^{-1}JA^{-1} = JBA^{-1}$ *y así* $AB^{-1} \in Sp(n,\mathbb{R})$*. Para ver que es cerrado basta considerar la función continua en* $M(n,\mathbb{R})$*,* $A \to A^tJA$*. Similarmente se define el grupo simpléctico sobre* $\mathbb{C}$.

5) *El* ***grupo especial ortogonal*** $SO(n) := \{A \in O(n) : det(A) = 1\}$*, este es un grupo de lie matricial porque* $SO(n)$ *es evidentemente un subgrupo de* $GL(n,\mathbb{R})$*, y cerrado ya que* $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$.

6) *El* ***grupo especial unitario*** $SU(n) := \{A \in U(n) : det(A) = 1\}$*. Es un grupo de Lie matricial ya que* $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$

7) *Los grupos* $(\mathbb{R}^*, \cdot)$*,* $(\mathbb{C}^*, \cdot)$*,* $(S^1, \cdot)$ *y* $(\mathbb{R}^n, +)$ *son todos grupos de Lie matriciales pues* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *y* $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ *junto con la operación multiplicación son isomorfos a los grupos de Lie matriciales* $GL(1,\mathbb{R})$ *y* $GL(1,\mathbb{C})$ *respectivamente. Por otro lado es fácil ver que* S^1 *(el grupo de números complejos con módulo 1) es isomorfo a* $U(1)$*. Por último el grupo* $(\mathbb{R}^n, +)$ *es isomorfo al grupo de matrices diagonales con entradas positivas en la diagonal, lo cual puede ser obtenido mediante el mapeo* $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \to \begin{pmatrix} e^{x_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{x_n} \end{pmatrix}$.

La siguiente definición responde la pregunta de cuando dos grupos de Lie matriciales son isomorfos.

Definición 2.7. *Sean G y H grupos de Lie matriciales. Un mapeo Φ de G en H es llamado un **homomorfismo de grupos de Lie** si se cumplen: i) Φ es un homomorfismo de grupos y ii) Φ es diferenciable. Si en adición, Φ es inyectivo y sobre, y el mapeo inverso Φ^{-1} es diferenciable, entonces decimos que Φ es un **isomorfismo de grupos de Lie**.*

Si G y H son grupos de Lie matriciales y existe un isomorfismo de grupos de Lie de G a H, entonces G y H son **isomorfos**, y escribimos $G \cong H$. Dos grupos de Lie matriciales que son isomorfos son esencialmente el mismo grupo.

Ejemplo 2.2. *El mapeo determinante **det** : $GL(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un homomorfismo entre grupos de Lie. En efecto, **det** es diferenciable, y además $\boldsymbol{det}(AB) = \boldsymbol{det}(A)\boldsymbol{det}(B)$ para todo $A, B \in GL(n, \mathbb{C})$, también lo es el mapeo $f : \mathbb{R} \to SO(2)$ definido por $f(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(t) \end{pmatrix}$.*

2.3. Álgebras de Lie

En estas instancias daremos algunas propiedades de las álgebras de Lie y sus relaciones con los grupos de Lie matriciales. Pero antes es importante recordar la definición de matriz exponencial, y algunas generalidades.

Definición 2.8. *La exponencial de una matriz $X \in M(n, \mathbb{C})$, denotada algunas veces como $exp(X)$ o e^X es la serie usual,*

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Definición 2.9. *La **norma de Hilbert-Schmidt** de una matrix $n \times n$, X, está dada por:*

$$\|X\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |x_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En virtud de la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos como consecuencias inmediatas:

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|,$$

$$\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|.$$

Es muy conocido el hecho de que la serie dada en (2.1) converge uniformemente, y que el mapeo $\exp : \mathrm{M}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ es diferenciable. En efecto, dado $R > 0$, note que para todo $X \in \mathrm{M}(n, \mathbb{C})$ tal que $\|X\| \leq R$:

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|X^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!} = \exp(R) < \infty$$

entonces por el criterio M-Weiertrass la serie converge absolutamente y uniformente en $\{X \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C}) : \|X\| \leq R\}$, la diferenciabilidad es trivial.

Algunas de las propiedades más importantes de la matriz exponencial están dadas en la siguiente proposición, cuya prueba puede encontrarse en BC. Hall [3]:

Proposición 2.1. *Sean X y Y matrices arbitrarias $n \times n$. Entonces,*

1) $e^0 = I_n$.
2) $(e^X)^* = e^{X^*}$.
3) *Si* $XY = YX$ *entonces* $e^{X+Y} = e^X e^Y$.
4) e^X *es invertible, y* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
5) $e^{(a+b)X} = e^{aX}e^{bX}$ *para todo* $a, b \in \mathbb{C}$.
6) *Si C es invertible, entonces* $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$.
7) $\|e^X\| \leq e^{\|X\|}$.

El siguiente lema será muy útil a la hora de encontrar el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie matricial. Este puede encontrarse en **[3]**.

Lema 2.1. *Sea $X \in M(n,\mathbb{C})$, entonces*

$$det(e^X) = e^{tr(X)}$$

donde $tr(X)$ denota la traza de la matriz X

Las pruebas de las dos proposiciones mencionadas a continuación son detalladas en el libro B.C. Hall [3].

Proposición 2.2. *Sea $X \in M(n,\mathbb{C})$, entonces e^{tX} es una curva diferenciable en $GL(n,\mathbb{C})$ y*

$$\frac{d}{dt}e^{tX} = Xe^{tX} = e^{tX}X$$

En particular,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX} = X$$

Proposición 2.3. ***(Fórmula del producto de Lie)*** *Sean $X, Y \in M(n,\mathbb{C})$ entonces* $e^{X+Y} = \lim_{m\to\infty}\left(e^{\frac{X}{m}}e^{\frac{Y}{m}}\right)^m$.

Definición 2.10. *Un mapeo $A : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$ es llamado subgrupo uno-paramétrico de $GL(n,\mathbb{C})$ si*

1) *A es diferenciable.*

2) $A(0) = I_n$.

3) $A(t+s) = A(t)A(s)$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$

Observación 2.2. *Un resultado conocido de los subgrupos uno-paramétricos de* $GL(n, \mathbb{C})$*, afirma que si* A *es un subgrupo uno-paramétrico entonces existe una única matriz* $X \in M(n, \mathbb{C})$ *tal que* $A(t) = e^{tX}$*. En efecto, como* A *es diferenciable se obtiene*

$$\begin{aligned} A'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{A(t+s) - A(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{A(t)A(s) - A(t)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} A(t)\frac{A(s) - 1}{s} = A(t)A'(0). \end{aligned}$$

Luego tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial $A'(0) \in M(n, \mathbb{C})$*, así por el teorema de existencia y unicidad se cumple que* $A(t) = e^{tA'(0)}$ *y basta definir* $X := A'(0)$.

De esta manera, ya estamos listos para definir el álgebra de Lie de un grupo de Lie matricial.

Definición 2.11. *Un **álgebra de Lie** compleja (respectivamente real) es un espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{C}$ *(respectivamente* $\mathbb{R}$*) equipado con el mapeo bilineal*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g},$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y],$$

comúnmente conocido como corchete de Lie de X *y* Y*, tal que*

1) $[X, Y] = -[Y, X]$

2) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ *(Identidad de Jacobi)*

Notemos que en el caso de matrices, si G *es un grupo de Lie matricial, a* G *le podemos asociar el conjunto* $\mathfrak{g}$ *definido por:*

$$\mathfrak{g} = Lie(G) = \left\{ X \in M(n, \mathbb{C}) : \text{para todo } t \in \mathbb{R},\ \ e^{tX} \in G \right\}$$

luego, decimos que $\mathfrak{g}$ *es el **álgebra de Lie** de* G *con el corchete Lie* $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $[A, B] = AB - BA$ *conocido como el conmutador de matrices (Ver **[10, teor. 1.1]**).*

Algunos de los ejemplos de álgebras de Lie clásicas son:

Ejemplo 2.3. *1) Un espacio vectorial real (complejo) cualquiera* V *tiene estructura de álgebra de Lie respecto al corchete de Lie trivial* $[X, Y] = 0$ *para todo* $X, Y \in V$.

2) El espacio vectorial de matrices $M(n, \mathbb{K})$ *tiene estructura de álgebra de Lie con el conmutador de matrices, dado por* $[A, B] = AB - BA$ *dicha álgebra de Lie se simboliza mediante* $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) = M(n, \mathbb{K})$*. En efecto, en virtud del lema 2.1 para cualquier* $X \in M(n, \mathbb{K})$ *se verifica* $det(e^{tX}) = e^{trtX} \neq 0$*. Así podemos obtener muchos ejemplos de álgebras de Lie de los subespacios vectoriales de* $M(n, \mathbb{K})$ *junto con el corchete de Lie dado por el conmutador.*

3) *El álgebra de Lie de* $SL(n, \mathbb{K})$ *es*

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in M(n, \mathbb{K}) : tr(X) = 0\}$$

En efecto, $X \in Lie(G)$ *si y sólo si* $e^{tX} \in SL(n, \mathbb{K})$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *y esto sucede si y sólo si* $det(e^{tX}) = 1$, *luego por el lema 2.1,* $X \in Lie(G)$ *si y solamente si* $tr(X) = 0$.

Las pruebas de los siguientes ejemplos de álgebras de Lie son muy sencillas.

4) $U(n, \mathbb{C})$ *con álgebra de Lie* $\mathfrak{u}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^* = \bar{X}^t = -X\}$.

5) $O(n, \mathbb{C})$ *con álgebra de Lie* $\mathfrak{o}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^t = -X\}$.

6) $SU(n, \mathbb{C})$ *con álgebra de Lie* $\mathfrak{su}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : X^* = \bar{X}^t = -X, tr(X) = 0\}$.

El siguiente mapeo provee un mecanismo útil para pasar información de un álgebra de Lie a su respectivo grupo.

Definición 2.12. *Si* G *es un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$, *entonces* ***el mapeo exponencial*** *para* G *es el mapeo:*

$$exp : \mathfrak{g} \to G$$

.

Observación 2.3. *El mapeo exponencial para un grupo de Lie matricial* G *no es necesariamente sobreyectivo, para ver esto consideremos la matriz* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *en* $SL(2, \mathbb{C})$. *Afirmamos que no existe* $X \in sl(2, \mathbb{C})$ *tal que* $exp(X) = A$. *En efecto, sea* $X \in sl(2, \mathbb{C})$ *arbitraria, entonces* $tr(X) = 0$. *Luego los eigenvalores de* X *satisfacen la ecuación* $\lambda^2 + det(X) = 0$ *de donde los eigenvalores de* X *son de la forma* $(\lambda, -\lambda)$ *con* λ *un número complejo diferente de cero. Por lo tanto la matriz* X *es diagonalizable y en consecuencia* $exp(X)$ *también lo es, pero* A *no es diagonalizable.*

Para el siguiente teorema es importante tener en cuenta que si $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son álgebras de Lie de los grupos de Lie matriciales G y H respectivamente, entonces un mapeo lineal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un **homomorfismo de álgebras de Lie** si preserva el conmutador, esto es, $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Teorema 2.2. *Sean* G *y* H *grupos de Lie matriciales con álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *y* $\mathfrak{h}$ *respectivamente. Suponga que* $\Phi : G \to H$ *es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces existe un único mapeo lineal* $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *de tal suerte que:*

$$\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. *El mapeo* ϕ *tiene las siguientes propiedades adicionales:*

1) *Para todo* $X \in \mathfrak{g}$, $A \in G$ *se tiene* $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$ *y* $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$.

2) $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$

3) $\phi(X) = \frac{d}{dt}\left(\Phi(e^{tX})\right)\big|_{t=0}$, *para todo* $X \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Como $\Phi(e^{tX})$ es un subgrupo uno-paramétrico de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ por la observación 2.2 existe una única matriz $Z \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ de tal suerte que $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Así, es natural pensar en definir $\phi(X) = Z$, y de esta manera, sólo es cuestión de mirar si las propiedades se satisfacen. Haremos la prueba en 7 pasos.

1^{ero} : $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$. En efecto, sabemos que $\Phi(e^{tX}) = e^{tZ}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego por la definicón de ϕ y en particular para $t = 1$, se cumple lo que queremos trivialmente.

2^{do} : $\phi(rX) = r\phi(X)$. Note que para todo $t, r \in \mathbb{R}$,

$$e^{t\phi(rX)} = \Phi(e^{t(rX)}) \ y \ e^{t(r\phi(X))} = \Phi(e^{t(rX)})$$

Entonces por la unicidad de $\phi(rX)$ deducimos que $\phi(rX) = r\phi(X)$.

3^{ero} : $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y)$. En efecto, por los pasos anteriores, por la formula del producto de Lie y por ser Φ un homomorfismo continuo de grupos de Lie matriciales;

$$\begin{aligned} e^{t\phi(X+Y)} &= e^{\phi(t(X+Y))} = \Phi(e^{t(X+Y)}) \\ &= \Phi\left(\lim_{m\to\infty}\left(e^{t\frac{X}{m}}e^{t\frac{Y}{m}}\right)^m\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\Phi\left(e^{t\frac{X}{m}}\right)\Phi\left(e^{t\frac{Y}{m}}\right)\right)^m \\ &= \lim_{m\to\infty}\left(e^{t\frac{\phi(X)}{m}}e^{t\frac{\phi(Y)}{m}}\right)^m = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))} \end{aligned}$$

De donde, $e^{t(\phi(X+Y))} = e^{t(\phi(X)+\phi(Y))}$, luego

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t(\phi(X+Y))} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t(\phi(X)+\phi(Y))} \Longleftrightarrow \phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y).$$

4^{to} : $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$. En efecto, note primero que $Ae^{tX}A^{-1} = e^{tAXA^{-1}} \in G \ \ \forall t \in \mathbb{R}$ entonces $AXA^{-1} \in \mathfrak{g}$, además por los pasos anteriores y las propiedades de la matriz exponencial dadas en la proposición 2.1:

$$\begin{aligned} e^{t\phi(AXA^{-1})} &= e^{\phi(tAXA^{-1})} = \Phi(e^{tAXA^{-1}}) \\ &= \Phi(Ae^{tX}A^{-1}) = \Phi(A)\Phi(e^{tX})\Phi(A)^{-1} \\ &= \Phi(A)(e^{t\phi(X)})\Phi(A)^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 2.2 $\phi(AXA^{-1}) = \Phi(A)\phi(X)\Phi(A)^{-1}$.

5^{to} : $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$. Note que

$$[X,Y] = XY - YX = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}Ye^{-tX}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \phi([X,Y]) &= \phi\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{tX}Ye^{-tX}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi\left(e^{tX}Ye^{-tX}\right) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi(e^{tX})\phi(Y)\Phi(e^{-tX}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{t\phi(X)}\phi(Y)e^{-t\phi(X)} \\ &= [\phi(X), \phi(Y)] \end{aligned}$$

y por lo tanto ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

6^{to} : $\phi(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi(e^{tX})$. Es consecuencia inmediata de la proposición 2.2.

7^{mo} : ϕ es el único mapeo lineal tal que $\Phi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)}$. En efecto, supongamos que ψ es otro mapeo con la misma propiedad. Entonces, $e^{t\psi(X)} = e^{\psi(tX)} = \Phi(e^{tX})$ y por el paso 6, $\psi(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \Phi(e^{tX}) = \phi(X)$.

□

El teorema anterior nos dice que dados dos grupos de Lie matriciales G y H, y un homomorfismo $\Phi : G \to H$ entonces existe un homomorfismo entre sus respectivas álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$, la pregunta natural es si el converso también es cierto, pero esto no necesariamente es así. El teorema siguiente da una condición para resolver esta pregunta.

Teorema 2.3. *Sean G y H grupos de Lie matriciales con álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ respectivamente y sea $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Si G es simplemente conexo entonces existe un único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ tal que $\Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$.*

El siguiente corolario da una nueva forma de encontrar el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie matricial. Su prueba puede ser revisada en el libro C. Hall [3].

Corolario 2.1. *Sea $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ un grupo de Lie matricial, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces una matrix X está en $\mathfrak{g}$ si y sólo si existe una curva diferenciable γ en $M(n, \mathbb{C})$ de tal suerte que 1) $\gamma(t)$ está en G para todo t; 2) $\gamma(0) = I_n$; 3) $\frac{d}{dt}\gamma(t)\big|_{t=0} = X$.*

2.4. Representaciones

En esta sección y en la que sigue, los espacios $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ denotarán espacios vectoriales normados de dimensión finita, y $\mathfrak{B}(\mathcal{V})$ el grupo de mapeos lineales y continuos de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}$, así como GL($\mathcal{V}$) será el grupo de mapeos invertibles en $\mathfrak{B}(\mathcal{V})$.

Definición 2.13. *Una representación de un grupo de Lie matricial G sobre $\mathcal{V}$ es un mapeo*

$$\Pi : G \to GL(\mathcal{V}),$$

$$g \mapsto \Pi(g),$$

tal que

i) $\Pi(g_1 g_2) = \Pi(g_1)\Pi(g_2)$ *y* $\Pi(1_G) = Id$ *para todo* $g_1, g_2 \in G$.

ii) Para todo $x \in \mathcal{V}$, el mapeo

$$G \to \mathcal{V},$$

$$g \mapsto \Pi(g)x$$

es un mapeo continuo de G en $\mathcal{V}$.

Escribiremos $(\Pi, \mathcal{V})$ para denotar una representación de G sobre $\mathcal{V}$, el grado de una representación es la dimensión del espacio vectorial donde actúa.

Usualmente la condición ii) se conoce como continuidad fuerte.

Definición 2.14. *Sea* $(\Pi, \mathcal{V})$ *una representación de* G*. Un subespacio* U *de* $\mathcal{V}$ *se dice* Π*-invariante si* $\Pi(g)(U) \subseteq U$ *para todo* $g \in G$*.*

Toda representación tiene por lo menos dos subespacios Π-invariantes: $\{0\}$ y $\mathcal{V}$.

Definición 2.15. *Una representación* $(\Pi, \mathcal{V})$ *de* G *se dice* ***irreducible*** *si los únicos subespacios cerrados* Π*-invariantes de* $\mathcal{V}$ *son* $\{0\}$ *y* $\mathcal{V}$*.*

Como dato curioso, la importancia de las representaciones irreducibles en la física, radica en que éstas son asociadas a las partículas elementales.

Definición 2.16. *Dos representaciones* $\Pi_1 : G \to GL(\mathcal{V}_1)$ *y* $\Pi_2 : G \to GL(\mathcal{V}_2)$ *se dicen equivalentes (denotado por* $\Pi_1 \cong \Pi_2$*) si existe un mapeo lineal, continuo e invertible* $T : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ *tal que* $\Pi_2 = T\Pi_1 T^{-1}$.

Definición 2.17. *Una representación de grado* n*, de un álgebra de Lie matricial* $\mathfrak{g}$ *(real o compleja) es un homomorfismo de álgebras de Lie* $\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$*.*

La definición de representación irreducible entre álgebras de Lie es similar a la de representación irreducible entre grupos de Lie.

La importancia de ésta definición radica en que toda representación de un grupo de Lie matricial determina una representación de su álgebra de Lie asociada vía diferenciación.

Proposición 2.4. *Sea* $\Pi : G \to GL(n, \mathbb{C})$ *una representación diferenciable de un grupo de Lie matricial* G*. Entonces la derivada de* Π *en la identidad de* G *es una representación de la correspondiente álgebra de Lie real,* $\mathfrak{g}$*:*

$$D_\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$$

Demostración. Es fácil probar que D_Π es $\mathbb{R}$-lineal pues la derivada por definición es un mapeo lineal. De este modo, sólo debemos probar que D_Π preserva el corchete de Lie. En efecto, sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, por corolario 2.1, existen curvas parametrizadas $C_X, C_Y : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ de tal suerte que $C_X(0) = C_Y(0) = I$ y $\dot{C}_X(0) = X$, $\dot{C}_Y(0) = Y$. Además note que: $[X, Y] = \frac{d}{dt}\left(C_X(t) Y C_X(t)^{-1}\right)\big|_{t=0}$. Luego,

$$\begin{aligned} D_\Pi([X,Y]) &= D_\Pi\left(\frac{d}{dt}\left(C_X(t) Y C_X(t)^{-1}\right)\Big|_{t=0}\right) \\ &= \frac{d}{dt} D_\Pi\left(C_X(t) Y C_X(t)^{-1}\right)\big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es válida por ser D_Π un mapeo lineal diferenciable. Fijemos ahora t y sea $B = C_X(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} D_\Pi(BYB^{-1}) &= D_\Pi(B\dot{C}_Y(0)B^{-1}) = D_\Pi\left(\frac{d}{ds}\left(B\dot{C}_Y(s)B^{-1}\right)\Big|_{s=0}\right) \\ &= \frac{d}{ds}\,\Pi(B\dot{C}_Y(s)B^{-1})\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\,\Pi(B)\Pi(\dot{C}_Y(s))\Pi(B^{-1})\Big|_{s=0} \end{aligned}$$

$$= \Pi(B)\frac{d}{ds}\,\Pi(\dot{C}_Y(s))\Big|_{s=0}\Pi(B)^{-1} = \Pi(B)D_\Pi(Y)\Pi(B)^{-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} D_\Pi([X,Y]) &= \frac{d}{dt}\Pi(C_X(t))D_\Pi(Y)\Pi(C_X(t))^{-1}\Big|_{t=0} \\ &= D_\Pi(\dot{C}_X(0))D_\Pi(Y)\Pi(C_X(0))^{-1} - \Pi(C_X(0))D_\Pi(Y)D_\Pi(\dot{C}_X(0)) \\ &= D_\Pi(X)D_\Pi(Y) - D_\Pi(Y)D_\Pi(X) \\ &= [D_\Pi(X), D_\Pi(Y)]. \end{aligned}$$

□

Observación 2.4. *Dada una representación $\Pi : G \to GL(n,\mathbb{C})$ de un grupo de Lie matricial G con su correspondiente representación de álgebra de Lie $D_\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Pi} & GL(n,\mathbb{C}) \\ exp \uparrow & & \uparrow exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{D_\Pi} & \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) \end{array}$$

En efecto, por el teorema de existencia y unicidad, el mapeo $C : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$ definido por $C(t) = exp(tM)$ para cualquier $M \in M(n,\mathbb{C})$, es el único homomorfismo con la propiedad $\dot{C}(0) = M$. Así para $X \in M(n,\mathbb{C})$ arbitrario, si consideramos el mapeo $b : \mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{C})$ definido por $b(t) = \Pi(exp(tX))$. Entonces b es un homomorfismo de grupos diferenciable y satisface $\dot{b}(0) = D_\Pi(X)$. Luego $b(t) = exp(tD_\Pi(X))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular para $t = 1$ se cumple lo buscado.

2.5. Representaciones unitarias en espacios de Hilbert

Definición 2.18. ***(Representación unitaria en un espacio de Hilbert).*** *Sean $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert (posiblemente de dimensión finita) y $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ un grupo de Lie matricial. Se dice que $\Pi : G \to GL(\mathcal{H})$ es una representación unitaria de G en $\mathcal{H}$ si $\Pi(g)$ es unitaria para todo $g \in G$, esto es $\langle\Pi(g)h_1, \Pi(g)h_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle$ para todo $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ o equivalentemente $\Pi(g)\Pi(g)^{\langle * \rangle} = I_n = \Pi(g)^{\langle * \rangle}\Pi(g)$, donde $\Pi(g)^{\langle * \rangle}$ denota el adjunto de $\Pi(g)$ en $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

Ejemplo 2.4. *Considere el **grupo de Heisenberg** definido por*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Ahora, tomemos un número real no cero, el cual por convención histórica denotaremos por $\hbar$. Así para cada $\hbar \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definimos el operador $\Pi_\hbar$ en $L^2(\mathbb{R}, dx)$, el espacio de funciones cuadrado integrables sobre $\mathbb{R}$ con medida de Lebesgue dx, por:

$$\Pi_\hbar \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f = e^{-i\hbar b} e^{i\hbar c x} f(x - a)$$

Afirmamos que $\Pi_\hbar$ es un operador unitario.

En efecto, esto es evidente en virtud de que $\|e^{-i\hbar b}e^{i\hbar cx}f(x-a)\|_{L^2(\mathbb{R},dx)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R},dx)}$ pues la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Además para ver que el mapeo $A \to \Pi_\hbar(A)$ es un homomorfismo notemos que:

$$\begin{aligned}
\Pi_\hbar \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Pi_\hbar \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f &= e^{-i\hbar\tilde{b}}e^{i\hbar\tilde{c}x}e^{-i\hbar b}e^{i\hbar c(x-\tilde{a})}f(x-\tilde{a}-a) \\
&= e^{-i\hbar(\tilde{b}+b+c\tilde{a})}e^{i\hbar(\tilde{c}+c)x}f(x-(\tilde{a}+a)) \\
&= \Pi_\hbar \begin{pmatrix} 1 & a+\tilde{a} & b+\tilde{b}+\tilde{a}c \\ 0 & 1 & c+\tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f \\
&= \Pi_\hbar \begin{pmatrix} 1 & \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & 1 & \tilde{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} f.
\end{aligned}$$

Lo cual prueba que $\Pi_\hbar$ es un homomorfismo, además $\Pi_\hbar$ es fuertemente continuo. Por lo tanto es una representación unitaria del grupo de Heisenberg.

Ejemplo 2.5. *Sea $\mathcal{H} = M(n,\mathbb{C})$. Note que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con el producto interno definido positivo siguiente:*

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*).$$

Luego una representación unitaria A del grupo unitario $U(n)$ sobre $\mathcal{H}$ está dada por

$$A(g,X) = A_g(X) = gXg^{-1}$$

La representación A es conocida en la literatura como la representación adjunta de $U(n)$. Para ver esto, basta con probar que

$$\langle A_g(X), A_g(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$$

para todo $X, Y \in \mathcal{H}$. Esto es claro, pues

$$\begin{aligned}
\langle A_g(X), A_g(Y)\rangle &= \langle gXg^{-1}, gYg^{-1}\rangle = tr\left(gXg^{-1}(gYg^{-1})^*\right) \\
&= tr\left(gXg^{-1}(g^{-1})^*Y^*g^*\right) = tr\left(gXY^*g^*\right) \\
&= tr\left(gXY^*g^{-1}\right) = tr\left(XY^*\right) \\
&= \langle X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones serán muy útiles para probar en el capítulo 3 que estamos trabajando con representaciones irreducibles. Las demostraciones se pueden encontrar en [**3**].

Proposición 2.5. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie matricial real y $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ su complexificación, esto es, $\mathfrak{g}_\mathbb{C} \cong \mathfrak{g} + i\mathfrak{g} \subset M(n,\mathbb{C})$. Entonces toda representación compleja finita-dimensional π de $\mathfrak{g}$ tiene una única extensión a una representación $\mathbb{C}$-lineal de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ también denotada π. Además, π es irreducible como una representación de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ si y solamente si, es irreducible como una representación de $\mathfrak{g}$.*

Proposición 2.6. *Supongamos que $(\Pi, \mathcal{V})$ es una representación del grupo de Lie matricial G. Además, suponga que la correspondiente representación de álgebras de Lie $D_\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es irreducible, entonces Π es irreducible.*

CAPÍTULO 3

ESTADOS COHERENTES DE SU(1,1)

Desarrollamos en éste capítulo las nociones de representaciones unitarias en espacios de Krein, y acuñamos de forma natural la definición de estados coherentes generalizados de Perelomov sobre espacios de Krein, estudiamos además, algunas generalidades del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$.

En primera instancia nos concentramos en el estudio del álgebra de Lie $su(1,1)$, encontrando una base adecuada; pues ésta nos permitirá probar la irreducibilidad de nuestra representación. Desarrollamos estados coherentes para $\mathrm{SU}(1,1)$ en un espacio de Krein concreto, y al final del día probamos que éstos definen un marco continuo de dicho espacio de Krein.

3.1. Representaciones unitarias en espacios de Krein

Para obtener los resultados del presente trabajo, desarrollamos las nociones de representaciones unitarias en Espacios de Krein.

Definición 3.1. ***(Representación unitaria en un espacio de Krein).*** *Sean* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein con simetría fundamental* J*, y* $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ *un grupo de Lie matricial. Se dice que* $\Pi : G \to GL(\mathcal{K})$ *es una representación unitaria de* G *en* $\mathcal{K}$ *si* $\Pi(g)\Pi(g)^* = I_n = \Pi(g)^*\Pi(g)$ *para todo* $g \in G$*. Equivalentemente,* $\Pi : G \to GL(\mathcal{K})$ *es una representación unitaria de* G *en* $\mathcal{K}$ *si* $\Pi(g)J\Pi(g)^{[*]} = J = \Pi(g)^{[*]}J\Pi(g)$ *pues* $\Pi(g)^* = J\Pi(g)^{[*]}J$*.*

Definición 3.2. *Sean* $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot])$ *un espacio de Krein con simetría fundamental* J*, y* $G \subseteq GL(n,\mathbb{C})$ *un grupo de Lie matricial. Se dice que* $\Pi : G \to GL(\mathcal{K})$ *es una representación* J*-unitaria de* G *en* $\mathcal{K}$ *si* $[\Pi(g)k_1, \Pi(g)k_2]_J = [k_1, k_2]_J$ *para todo* $g \in G$*.*

3.2. Estados coherentes generalizados de Perelomov

En este apartado describimos un escenario general para la teoría de estados coherentes en un grupo de Lie arbitrario, desde el punto de vista de Perelomov.

La característica principal de la generalización propuesta por Perelomov para los estados coherentes es que puede ser aplicado para cualquier grupo de Lie permitiendo parametrizar estos estados por puntos de espacios homogéneos donde el grupo actúa.

Consideremos para todo $k \in \mathcal{K}$ el funcional lineal $\tau_k : \mathfrak{B}(\mathcal{K}) \to \mathbb{C}$, $\tau_k(A) = [k, Ak]$ para todo $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Krein. Entonces observe que dos vectores k_1, k_2 en $\mathcal{K}$ definen el mismo funcional, esto es, $\tau_{k_1} = \tau_{k_2}$ si éstos difieren por un factor fase, es decir, $k_1 = e^{i\theta}k_2$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$.

Sea $(\Pi, \mathcal{K})$ una representación irreducible unitaria del grupo de Lie G, como dos elementos del grupo G quizá correspondan al mismo funcional, no es posible parametrizar éstos con exclusivamente los elementos del grupo. Así, vale notar primero que por las líneas de arriba, dos vectores $\Pi(g_1)\psi_0$ y $\Pi(g_2)\psi_0$ en el espacio de Krein $\mathcal{K}$, corresponden al mismo funcional si y sólo si $\Pi(g_1)\psi_0 = e^{i\theta}\Pi(g_2)\psi_0$ y esto ocurre si y sólo si $\Pi(g_2^{-1}g_1)\psi_0 = e^{i\theta}\psi_0$, de esta manera, definimos un subgrupo G_0 de G mediante:

$$G_0 := \left\{ g \in G : \Pi(g)\psi_0 = e^{i\theta(g)}\psi_0,\ \theta(g) \in \mathbb{R} \right\},$$

lo cual motiva la definición de sistema de estados coherentes generalizados.

Definición 3.3. ***(Sistema de estados coherentes generalizados de Perelomov)*** *Sea $(\Pi, \mathcal{K})$ una representación irreducible unitaria de un grupo de Lie arbitrario G que actúa sobre el espacio de Krein $\mathcal{K}$. Si fijamos un vector $\psi_0 \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ y consideramos el subgrupo de G,*

$$G_0 := \left\{ g \in G : \Pi(g)\psi_0 = e^{i\theta(g)}\psi_0,\ \theta(g) \in \mathbb{R} \right\},$$

definimos un sistema de estados coherentes generalizados como el conjunto de vectores $\{\Pi(\sigma(x))\psi_0\}_{x\in G/G_0}$ en $\mathcal{K}$, donde $\sigma : G/G_0 \to$ es una sección Borel medible.

3.3. El grupo SU(1,1)

Consideremos el producto interno indefinido sobre $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ dado por $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \bar{x_1}y_1 - \bar{x_2}y_2$, donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{K}$. Luego $(\mathcal{K} = \mathbb{C}^2, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ es un espacio de Krein con decomposición fundamental $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-$, donde

$$\mathcal{K}^+ = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\},\ \ \mathcal{K}^- = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

y simetría fundamental asociada $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, además $\langle\langle x, y \rangle\rangle = \langle x, Jy \rangle_{\mathbb{C}^2}$, aquí $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ denota el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$.

De esta manera, hemos llegado a la parte más importante de ésta tesis, el subgrupo de matrices 2×2 pseudo-unitarias y con determinante igual a 1, $\mathrm{SU}(1,1)$, donde prestaremos especial interés a su álgebra de Lie asociada $su(1,1)$ y en el cual la condición de pseudo-unitariedad no es más que la unitariedad en el espacio de Krein $(\mathbb{C}^2, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$.

Definición 3.4. *El grupo de matrices 2×2 pseudo-unitarias y con determinante igual a 1 sobre los complejos está dado por*

$$\begin{aligned}
SU(1,1) &:= \left\{U \in GL(2,\mathbb{C}) : \langle\langle Ux, Uy\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle\langle x, y\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2}, \forall x, y \in \mathbb{C}^2, det(U) = 1\right\} \\
&= \{U \in M(2,\mathbb{C}) : U^*U = I_2 = UU^*,\ det(U) = 1\} \\
&= \{U \in M(2,\mathbb{C}) : U^{[*]}JU = J = UJU^{[*]},\ det(U) = 1\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = 1\right\}.
\end{aligned}$$

Observe que desde la misma definición del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$, para corroborar que una matriz es un elemento de éste, más específicamente, para ver que es pseudo-unitaria, estamos considerando el producto interno indefinido sobre $\mathbb{C}^2$ dado anteriormente, con cierto operador autoadjunto $J^* = J$ e idempotente $J^2 = I_2$, que hace las veces de una simetría fundamental, entonces es natural pensar en los estados coherentes de este grupo sobre espacios de Krein con una simetría fundamental en este sentido.

Comentario 3.1. *Para visualizar la importancia de los resultados que obtendremos en ésta tesis, basta revisar la literatura, por ejemplo, en el libro: Coherent States and Applications in Mathematical Physics [2], se prueba que cualquier representación unitaria $(\Pi, \mathcal{H})$ de $SU(1,1)$ sobre un espacio de Hilbert de dimensión finita, $\mathcal{H}$, es trivial, esto es, $\Pi(g) = I_{\mathcal{H}}$ para todo $g \in SU(1,1)$, donde $I_{\mathcal{H}}$ es la identidad en $\mathcal{H}$.*

Comenzamos el estudio del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$, encontrando generadores de su álgebra de Lie asociada $su(1,1)$, para lo cual emplearemos el corolario 2.1, esto es, encontraremos matrices Y_0, Y_1 y Y_2 tales que $su(1,1) = \mathrm{gen}\{Y_0, Y_1, Y_2\}$ pues $\dim_{\mathbb{R}}(su(1,1)) = \dim(SU(1,1)) = 3$. Obtenemos así la siguiente proposición.

Proposición 3.1. *Se cumple*

$$su(1,1) = gen\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Demostración. Aplicamos el corolario 2.1 para obtener generadores del álgebra de Lie $su(1,1)$

Así, al definir las funciones diferenciables:

$$\begin{aligned}
g_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{SU}(1,1), & g_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{SU}(1,1), & g_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{SU}(1,1), \\
t &\mapsto \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}, & t &\mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, & t &\mapsto \begin{pmatrix} \cosh(t) & i\sinh(t) \\ -i\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

se cumple trivialmente que $g_j(0) = e$ para todo $j \in \{0,1,2\}$ y además:

$$g_0'(0) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ g_1'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ g_2'(0) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Hagamos,

$$Y_0 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \;\; Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $su(1,1) = gen\{Y_0, Y_1, Y_2\}$.

□

De este modo, no es difícil probar que $su(1,1) = \{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) : X^* + X = 0,\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$ donde $X^* = JX^{[*]}J$ es el adjunto de X en el espacio de Krein $(\mathbb{C}^2, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$.

Observación 3.1. *Si consideramos otro de los grupos más importantes en la mecánica cuántica, el grupo de matrices 2×2, unitarias y unimodulares $SU(2)$, definido por*

$$\begin{aligned} SU(2) &:= \left\{U \in M(2,\mathbb{C}) : U^{[*]}U = I_2 = UU^{[*]},\ det(U) = 1\right\} \\ &= \left\{U \in GL(2,\mathbb{C}) : \langle Ux, Uy\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}^2}, \forall x, y \in \mathbb{C}^2, det(U) = 1\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{C}) : \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1\right\}, \end{aligned}$$

donde ésta última igualdad se obtiene fácilmente del hecho de que toda matriz $U \in SU(2)$ satisface $U^{[*]} = U^{-1}$ y tiene determinante 1. Note además que esta forma de escribir las matrices en $SU(2)$ nos da naturalmente un homeomorfismo entre $SU(2)$ y la esfera unitaria $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{R}^4$, por lo que, el grupo $SU(2)$ visto como grupo topológico es compacto y simplemente conexo. Propiedades topológicas bonitas en comparación con $SU(1,1)$, el cuál no es compacto ni simplemente conexo, pero sí localmente compacto.

Repitiendo el razonamiento anterior, y haciendo uso nuevamente del corolario 2.1, podemos encontrar generadores del álgebra de Lie $su(2)$. Luego,

$$su(2) = gen\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

con

$$X_0 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \;\; X_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \;\; X_2 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

y en términos más precisos $su(2) = \left\{X \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}) : X^{[*]} + X = 0,\ tr(X) = 0\right\}$.

Definimos de este modo, las matrices:

$$H := iX_0 = iY_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E := -\frac{1}{2}(X_1 + iX_2) = \frac{1}{2}(Y_1 + iY_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F := \frac{1}{2}(X_1 - iX_2) = \frac{1}{2}(Y_1 - iY_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

las cuales son una base para el álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$. Note que éstas satisfacen las siguientes reglas de conmutación: $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$ y $[E,F] = H$. En efecto,

- $[H,E] = HE - EH = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2E$
- $[H,F] = HF - FH = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2F$
- $[E,F] = EF - FE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = H$

Además, dejando correr el lápiz, es fácil probar que para todo $i = 0,1,2.$, se cumple $X_i^{[*]} = -X_i$ y $JY_i^{[*]}J = -Y_i$ donde J es la matriz definida arriba.

Recordemos del capítulo anterior que la exponencial de una matriz $n \times n$, X, está dada por la serie

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}$$

Calculemos las exponenciales de las matrices $tY_0,\ tY_1,\ tH,\ tE$ y tF con $t \in \mathbb{R}$, las cuales serán de gran utilidad más adelante a la hora de definir nuestra representación unitaria de $\mathrm{SU}(1,1)$.

- $$\begin{aligned} e^{tY_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tY_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} (i)^k & 0 \\ 0 & (-i)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(i)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-i)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} e^{tY_1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tY_1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \cosh(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ e^{tX_1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tX_1)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \cos(t)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sin(t)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\\
\bullet\ e^{tH} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tH)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^k\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}(-1)^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(-1)^k & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}\\
\bullet\ e^{tE} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tE)^k}{k!}=I_2+tE+\frac{t^2}{2!}E^2+\frac{t^3}{3!}E^3+\cdots\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\cdots\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\\
\bullet\ e^{tF} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tF)^k}{k!}=I_2+tF+\frac{t^2}{2!}F^2+\frac{t^3}{3!}F^3+\cdots\\
&= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & t\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\cdots\\
&= \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Observación 3.2. *Como el álgebra de Lie del grupo especial unitario de matrices* 2×2 *con entradas en los complejos, es el conjunto* $sl(2,\mathbb{C})=\{X\in M(2,\mathbb{C}) : tr(X)=0\}$*, un resultado muy conocido en la teoría del grupo de lie matricial* $SU(1,1)$ *es que* $sl(2,\mathbb{C})$ *es la complexificación de* $su(1,1)$*, deducimos que estudiar las representaciones irreducibles de* $sl(2,\mathbb{C})$ *es una forma de estudiar las representaciones irreducibles de* $su(1,1)$*. Afirmamos que si* $C\in sl(2,\mathbb{C})$ *entonces existen únicos* $A,B\in su(1,1)$ *de tal suerte que* $C=A+iB$*. En efecto, analicemos primero la existencia. Sea* $C\in sl(2,\mathbb{C})$*. Definimos* $A=\frac{1}{2}(C-C^*)$, $B=\frac{-i}{2}(C+C^*)$ *donde* C^* *es el adjunto de* C *en el espacio de Krein* $(\mathbb{C}^2,\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$*. Así, es claro que* $A+iB=C$ *pues*

$$A+iB=\frac{1}{2}(C-C^*)+i(\frac{-i}{2}(C+C^*))=\frac{1}{2}(C-C^*)+\frac{1}{2}(C+C^*)=C.$$

Afirmamos que A, B pertenecen a $su(1,1)$. En efecto, note que

$$A^* = \frac{1}{2}(C - C^*)^* = \frac{1}{2}(C^* - C) = -\frac{1}{2}(C - C^*) = -A$$

y además $tr(A) = \frac{1}{2}(tr(C) - tr(C^*)) = 0$. Similarmente

$$B^* = \frac{i}{2}(C + C^*)^* = \frac{i}{2}(C + C^*) = -B$$

y $tr(B) = 0$. Por lo tanto $A, B \in su(1,1)$.

Para comprobar la unicidad, sean $A_1, A_2, B_1, B_2 \in su(1,1)$ tales que

$$A_1 + iB_1 = A_2 + iB_2 = C.$$

Entonces $A_1 - A_2 = i(B_2 - B_1)$ y como $A_1 - A_2 \in su(1,1)$ se cumple que $(A_1 - A_2)^* = -(A_1 - A_2)$ pero por otro lado

$$(A_1 - A_2)^* = -i(B_2 - B_1)^* = i(B_2 - B_1) = A_1 - A_2.$$

Por lo tanto $A_1 - A_2 = 0$ y $B_1 - B_2 = 0$ y terminamos la prueba.

Proposición 3.2. *Toda matriz $g \in SU(1,1)$ se descompone como*

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosh(t) & sinh(t) \\ sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_2} \end{pmatrix} = e^{\theta_1 Y_0} e^{tY_1} e^{\theta_2 Y_0},$$

donde $t \geq 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$.

Los números t, θ_1 y θ_2 son llamados ángulos de Euler para la matriz g.

Demostración. Sea $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de tal suerte que $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ y $\mid \alpha \mid^2 - \mid \beta \mid^2 = 1$. Sean $\alpha = re^{i\zeta}$ y $\beta = \sqrt{r^2 - 1}e^{i\vartheta}$ con $r \geq 1$. Entonces

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{i\zeta} & \sqrt{r^2-1}e^{i\vartheta} \\ \sqrt{r^2-1}e^{-i\vartheta} & re^{-i\zeta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r & \sqrt{r^2-1}e^{i(\vartheta+\zeta)} \\ \sqrt{r^2-1}e^{-i(\vartheta+\zeta)} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & \sqrt{r^2-1} \\ \sqrt{r^2-1} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces haciendo $r = \cosh(t)$, $t \geq 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} \end{pmatrix} \\ &= e^{\frac{1}{2}(\vartheta+\zeta)Y_0} e^{tY_1} e^{\frac{1}{2}(\zeta-\vartheta)Y_0} \\ &= e^{\theta_1 Y_0} e^{tY_1} e^{\theta_2 Y_0}, \end{aligned}$$

donde $\theta_1 := \frac{1}{2}(\vartheta + \zeta)$ y $\theta_2 := \frac{1}{2}(\zeta - \vartheta)$. $\square$

Observación 3.3. *De manera análoga toda matriz $g \in SU(2)$ se descompone como*

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_1} \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}$.

En efecto, sea $g \in SU(2)$ entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tal que $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ y $\mid \alpha \mid^2 + \mid \beta \mid^2 = 1$. Note que podemos escribir α y β como $\alpha = re^{i\zeta}$ y $\beta = \sqrt{1-r^2}e^{i\vartheta}$ con $r \in [0,1]$. Luego se satisface:

$$\begin{aligned} g &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re^{i\zeta} & \sqrt{1-r^2}e^{i\vartheta} \\ -\sqrt{1-r^2}e^{-i\vartheta} & re^{-i\zeta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & \sqrt{1-r^2} \\ -\sqrt{1-r^2} & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces haciendo $r = cos(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ obtenemos:

$$g = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\vartheta+\zeta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) & sin(t) \\ -sin(t) & cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}(\zeta-\vartheta)} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, con $\theta_1 = \frac{\zeta-\vartheta}{2}$ y $\theta_2 = \frac{\vartheta+\zeta}{2}$ se termina la prueba.

La siguiente definición goza de una importancia enorme dentro de ésta tesis.

Definición 3.5. *Sea $\mathcal{V}^s$ el espacio de polinomios homogéneos de dos variables, con coeficientes complejos y de grado $s \in \mathbb{N}_0$, es decir,*

$$\mathcal{V}^s = gen\{f_k^s(z_1, z_2) := z_1^k z_2^{s-k} : k = 0, 1, \cdots, s\}.$$

Como $\{f_k^s(z_1, z_2) = z_1^k z_2^{s-k} : k = 0, 1, \cdots, s\}$ es una base para $\mathcal{V}^s$ se cumple que $\dim(\mathcal{V}^s) = s+1$.

Al ser $\mathrm{SU}(1,1)$ un grupo de Lie de matrices 2×2 con entradas en los complejos, es natural pensar que actúa sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}_2 = \{(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$. Típicamente dicha acción (a derecha) simbolizada $\bullet : \mathbb{C}_2 \times \mathrm{SU}(1,1) \to \mathbb{C}_2$ de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre $\mathbb{C}_2$ está dada por

$$\bullet(z, g) = z \bullet g = zg = (az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2)$$

para todo $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}_2$ y $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1)$. Dejando mover el lápiz, es fácil comprobar que $\bullet$ satisface las condiciones para ser una acción, esto es, $z(g_1 g_2) = (zg_1)g_2$ y $z1_{\mathrm{SU}(1,1)} = z$ para todo $g_1, g_2 \in \mathrm{SU}(1,1)$ y $z \in \mathbb{C}_2$. Note que ésta acción puede transferirse a espacios de funciones adecuados. Es decir, si $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial complejo de funciones en $\mathbb{C}_2$ con la propiedad de que si $f \in \mathcal{V}$ entonces la función $z \mapsto f(zg)$ también está en $\mathcal{V}$ para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ entonces es posible definir una representación Π de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre $\mathcal{V}$ por $(\Pi(g)f)(z) = f(zg)$.

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{V}^s$ el espacio de polinomios homogéneos de grado s definido anteriormente. Entonces una representación diferenciable $\Pi_s : SU(1,1) \to GL(\mathcal{V}^s)$ está definida por*

$$(\Pi_s(g)f)(z) = f(zg).$$

Demostración. Para ver que Π_s está bien definida, note que si $f \in \mathcal{V}^s$ entonces $(\Pi_s(g)f) \in \mathcal{V}^s$ pues la acción $\bullet$ es una transformación lineal homogénea de las variables z_1 y z_2. Veamos ahora que Π_s es un homomorfismo de grupos de Lie, es claro que Π_s es diferenciable porque los elementos de la matriz $\Pi_s(g)$ con respecto a la base canónica de $\mathcal{V}^s$, $\{f_k^s(z_1, z_2) : \ k = 0, \cdots, s\}$, son polinomios en la matriz con elementos a, b, c y d de $g \in \mathrm{SU}(1,1)$. Además, si $g_1, g_2 \in \mathrm{SU}(1,1)$ y $z \in \mathbb{C}_2$ lo que debemos probar es $\Pi_s(g_1 g_2) = \Pi_s(g_1) \circ \Pi_s(g_2)$. En efecto, por ser $\bullet$ una acción a derecha, se cumple:

$$\begin{aligned}
(\Pi_s(g_1 g_2)f)(z) &= f(z(g_1 g_2)) \\
&= f((z g_1) g_2) \\
&= (\Pi_s(g_2)f)(z g_1) \\
&= ((\Pi_s(g_1) \circ \Pi_s(g_2))f)(z).
\end{aligned}$$

y trivialmente $(\Pi_s(1_{\mathrm{SU}(1,1)})f)(z) = f(z 1_{\mathrm{SU}(1,1)}) = f(z) = (Idf)(z)$.

Por lo tanto Π_s es una representación del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre el espacio vectorial $\mathcal{V}^s$. □

Observación 3.4. *Las siguientes calculaciones serán de gran importancia más adelante, por lo cual, no hay que perder detalle alguno en las cuentas.*

$$\begin{aligned}
\bullet\ \Pi_s(e^{\theta Y_0} f_k^s)(z_1, z_2) &= f_k^s\left((z_1, z_2)\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\right) \\
&= f_k^s(z_1 e^{i\theta}, z_2 e^{-i\theta}) \\
&= (z_1 e^{i\theta})^k (z_2 e^{-i\theta})^{s-k} \\
&= e^{i\theta(2k-s)} z_1^k z_2^{s-k} \\
&= (e^{i\theta(2k-s)} f_k^s)(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet\ \Pi_s(e^{tY_1} f_s^s)(z_1, z_2) &= f_s^s\left((z_1, z_2)\begin{pmatrix} cosh(t) & sinh(t) \\ sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix}\right) \\
&= f_s^s(z_1 cosh(t) + z_2 sinh(t), z_1 sinh(t) z_2 cosh(t)) \\
&= (z_1 cosh(t) + z_2 sinh(t))^s \\
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} cosh^k(t) sinh^{s-k}(t) f_k^s(z_1, z_2)
\end{aligned}$$

Observación 3.5. *De hecho el mapeo Π_s se puede definir en grupos de Lie matriciales tales como $SL(2, \mathbb{C})$, e incluso en $GL(2, \mathbb{C})$ y cómo es fácil ver, sigue siendo un homomorfismo* *diferenciable. En particular,*

$$(\Pi_s(J)f_k^s)(z_1,z_2) \quad = \quad \left(\Pi_s\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) f_k^s\right)(z_1,z_2) = ((-1)^{s-k} f_k^s)(z_1,z_2).$$

Ahora bien, al ser $su(1,1)$ la complexificación de $sl(2,\mathbb{C})$ estudiar la forma en la que actúan sobre $\mathcal{V}^s$ los operadores valuados en la base de $sl(2,\mathbb{C})$, y respecto a la representación derivada de Π_s, será de gran ayuda para encontrar un producto interno indefinido en $\mathcal{V}^s$. De esta manera, recordemos que para $X \in sl(2,\mathbb{C})$ la representación diferencial está dada por

$$D_{\Pi_s}(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} \Pi_s(\exp(tX)),$$

y como H, E y F forman una base de $sl(2,\mathbb{C})$ para encontrar dicha representación diferencial basta calcular $D_{\Pi_s}(H)$, $D_{\Pi_s}(E)$ y $D_{\Pi_s}(F)$.

Proposición 3.4. *Sea $f \in \mathcal{V}^s$ entonces,*

$$\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(H)f)(z_1,z_2) &= -z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2} \\
(D_{\Pi_s}(E)f)(z_1,z_2) &= z_2\frac{\partial f}{\partial z_1} \\
(D_{\Pi_s}(F)f)(z_1,z_2) &= z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}.
\end{aligned}$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(H)f)(z_1,z_2) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} \Pi_s(\exp(tH))f(z_1,z_2) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f\left((z_1,z_2)\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f(e^{-t}z_1, e^{t}z_2) \\
&= -z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(E)f)(z_1,z_2) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} \Pi_s(\exp(tE))f(z_1,z_2) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f\left((z_1,z_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f(z_1+tz_2, z_2) \\
&= z_2\frac{\partial f}{\partial z_1}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(F)f)(z_1,z_2) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} \Pi_s(\exp(tF))f(z_1,z_2) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f\left((z_1,z_2)\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{t=0} f(z_1, tz_1+z_2) \\
&= z_1\frac{\partial f}{\partial z_2}.
\end{aligned}
$$

□

Observación 3.6. *Aplicando éstos operadores a la base de $\mathcal{V}^s$, $\{f_k^s(z_1,z_2):\ k=0,\cdots,s\}$, donde $f_k^s(z_1,z_2)=z_1^k z_2^{s-k}$, obtenemos:*

$$
\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(H)f_k^s)(z_1,z_2) &= -z_1\frac{\partial f_k^s}{\partial z_1} + z_2\frac{\partial f_k^s}{\partial z_2} \\
&= -z_1(kz_1^{k-1}z_2^{s-k}) + z_2(s-k)z_1^k z_2^{s-k-1} \\
&= -kz_1^k z_2^{s-k} + (s-k)z_1^k z_2^{s-k} \\
&= (s-2k)z_1^k z_2^{s-k} \\
&= (s-2k)f_k^s(z_1,z_2).
\end{aligned}
$$

Luego $D_{\Pi_s}(H)f_k^s = (s-2k)f_k^s$.

$$
\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(E)f_k^s)(z_1,z_2) &= z_2\frac{\partial f_k^s}{\partial z_1} = z_2(kz_1^{k-1}z_2^{s-k}) \\
&= kz_1^{k-1}z_2^{s-k+1} = kf_{k-1}^s(z_1,z_2).
\end{aligned}
$$

Entonces $D_{\Pi_s}(E)f_k^s = kf_{k-1}^s$.

$$
\begin{aligned}
(D_{\Pi_s}(F)f_k^s)(z_1,z_2) &= z_1\frac{\partial f_k^s}{\partial z_2} = z_1((s-k)z_1^k z_2^{s-k-1}) \\
&= (s-k)z_1^{k+1}z_2^{s-k-1} = (s-k)f_{k+1}^s(z_1,z_2).
\end{aligned}
$$

Luego $D_{\Pi_s}(F)f_k^s = (s-k)f_{k+1}^s$.

Comentario 3.2. *Recordemos que por la observación 3.5*

$$(J_s f_k^s)(z_1,z_2) := (\Pi_s(J)f_k^s)(z_1,z_2) = ((-1)^{s-k}f_k^s)(z_1,z_2),$$

entonces queremos encontrar un producto interno definido positivo $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{V}^s\times\mathcal{V}^s\to\mathbb{C}$ de tal suerte que $\{v_k^s(z_1,z_2):\ k=0,\cdots,s\}$ sea una base ortonormal, esto es, $\langle v_i^s, v_j^s\rangle = \delta_{i,j}$ donde $v_k^s(z_1,z_2) := \frac{f_k^s(z_1,z_2)}{\|f_k^s(z_1,z_2)\|}$ y $\delta_{i,j}$ es la delta de Kronecker. Pues en este caso note que:

$$\begin{aligned}\langle J_s(v_i^s), v_j^s\rangle &= \langle(-1)^{s-i}v_i^s, v_j^s\rangle = (-1)^{s-i}\langle v_i^s, v_j^s\rangle\\ &= (-1)^{s-i}\delta_{i,j} = (-1)^{s-j}\delta_{i,j} = \langle v_i^s, (-1)^{s-j}v_j^s\rangle\\ &= \langle v_i^s, J_s(v_j^s)\rangle,\end{aligned}$$

entonces $J_s^{[*]} = J_s$ *y además* $J_s^2 = Id$. *Por lo tanto en virtud del teorema 1.2, si definimos* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle := \langle\cdot, J_s(\cdot)\rangle$ *entonces* $(\mathcal{K}^s := \mathcal{V}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ *define un espacio de Krein con simetría fundamental* J_s *y por consiguiente el* J_s*-producto interno satisface:*

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle_{J_s} = \langle\langle\cdot, J_s(\cdot)\rangle\rangle = \langle\cdot, J_s^2(\cdot)\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle.$$

Pero además, recuerde que buscamos hacer que Π_s *defina una representación irreducible unitaria de* $SU(1,1)$ *sobre el espacio de Krein* $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ *donde el producto interno indefinido* $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ *convierte a dicha representación en unitaria, en el sentido de los espacios de Krein. La pregunta, ¿cómo encontrar tal producto interno indefinido, que sea compatible con la definición del grupo de Lie matricial* $SU(1,1)$*, esto es, que sea* Π_s*-invariante? por las líneas de arriba nuestra respuesta está en encontrar* $\|f_k^s(z_1,z_2)\|$*, y luego definir* $\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^s \|f_k^s(z_1,z_2)\|^2\bar{a}_k b_k$ *para todo* $f = \sum_{k=0}^s a_k f_k^s(z_1,z_2)$ *y* $g = \sum_{l=0}^s b_l f_l^s(z_1,z_2)$*. Pero ¿cómo calcular* $\|f_k^s(z_1,z_2)\|$*?.*

Proposición 3.5. *Sea* $f_k^s(z_1,z_2) = z_1^k z_2^{s-k} \in \mathcal{V}^s$ *y supongamos además que* $D_{\Pi_s}(E)^{[*]} = D_{\Pi_s}(F)$*. Entonces, si* $\|z_2^s\| := N \neq 0$ *se cumple que*

$$\|z_1^k z_2^{s-k}\|^2 = \binom{s}{k}^{-1} N^2 = \frac{k!\,(s-k)!}{s!}N^2,$$

para todo $k = 0, 1, \cdots, s$.

Demostración. Haremos inducción sobre k, en efecto, note que en el caso base $(k=0)$ se cumple trivialmente, pues $\|z_2^s\|^2 := N^2$ por definición. Supongamos que la afirmación es cierta para k, esto es,

$$\|z_1^k z_2^{s-k}\|^2 = \frac{k!\,(s-k)!}{s!}N^2$$

Veamos que se cumple para $k+1$, en efecto:

$$\|(D_{\Pi_s}(F)f_k^s)(z_1,z_2)\| = \left\|(s-k)z_1^{k+1}z_2^{s-(k+1)}\right\|$$

Entonces, $\left\langle D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}, D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}\right\rangle = (s-k)^2\left\|z_1^{k+1}z_2^{s-(k+1)}\right\|^2$

Y por otro lado como $D_{\Pi_s}(E)^{[*]} = D_{\Pi_s}(F)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\left\langle D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}, D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}\right\rangle &= \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, D_{\Pi_s}(F)^{[*]}D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}\right\rangle\\ &= \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, D_{\Pi_s}(E)D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}\right\rangle\\ &= \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, D_{\Pi_s}(E)D_{\Pi_s}(F)z_1^k z_2^{s-k}\right\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, (s-k) D_{\Pi_s}(E) z_1^{k+1} z_2^{s-k-1} \right\rangle \\
&= \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, (s-k)(k+1) z_1^k z_2^{s-k} \right\rangle \\
&= (s-k)(k+1) \left\langle z_1^k z_2^{s-k}, z_1^k z_2^{s-k} \right\rangle \\
&= (s-k)(k+1) \frac{k!\,(s-k)!}{s!} N^2.
\end{aligned}
$$

De esta manera, por éstas igualdades, obtenemos para $k+1$:

$$
\begin{aligned}
\left\| z_1^{k+1} z_2^{s-(k+1)} \right\|^2 &= \frac{(k+1)k!\,(s-k)!}{(s-k)s!} N^2 \\
&= \frac{(k+1)!(s-k-1)!}{s!} N^2 \\
&= \binom{s}{k+1}^{-1} N^2,
\end{aligned}
$$

lo que concluye la prueba. □

Cabe resaltar que la intención de la anterior proposición fue mostrar nuestra manera de pensar, pues pudimos asignarle casi de manera mágica el valor a la norma de f_k^s; atendiendo las cuentas anteriores sin escribirlas aquí, es decir, enseñar de golpe el producto interno definido positivo que funciona. Note así que por el comentario 3.2 y la proposición 3.5 podemos definir un producto interno sobre $\mathcal{V}^s$ mediante

$$
\left\langle\!\!\left\langle \sum_{k=0}^{s} a_k f_k^s(z_1, z_2), \sum_{l=0}^{s} b_l f_l^s(z_1, z_2) \right\rangle\!\!\right\rangle = N^2 \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}^{-1} (-1)^{s-k} \bar{a}_k b_k,
$$

y obtenemos así la siguiente proposición:

Proposición 3.6. *El conjunto de monomios* $\left\{ v_k^s = N^{-1} \binom{s}{k}^{\frac{1}{2}} f_k^s(z_1, z_2) :\ k = 0, \cdots, s \right\}$ *es una base ortonormal en el espacio de Hilbert* $(\mathcal{K}^s, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{J_s})$ *y* $D_{\Pi_s}(E)^{[*]} = D_{\Pi_s}(F)$.

Demostración. En efecto, observe que

$$
\begin{aligned}
\langle\langle v_i^s, v_j^s \rangle\rangle_{J_s} &= \left\langle\!\!\left\langle N^{-1} \binom{s}{i}^{\frac{1}{2}} f_i^s(z_1, z_2), N^{-1} \binom{s}{j}^{\frac{1}{2}} f_j^s(z_1, z_2) \right\rangle\!\!\right\rangle_{J_s} \\
&= \begin{cases} N^2 \left(\frac{1}{N^2} \binom{s}{i}^{-1} \binom{s}{i}^{\frac{1}{2}} \binom{s}{i}^{\frac{1}{2}} \right) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\
&= \delta_{i,j},
\end{aligned}
$$

y se sigue la proposición pues la prueba de $D_{\Pi_s}(E)^{[*]} = D_{\Pi_s}(F)$ es trivial. □

Proposición 3.7. *La representación* Π_s *de* $SU(1,1)$ *definida en la proposición 3.3 es una representación unitaria en el espacio de Krein* $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$.

Demostración. Note que por el comentario 3.2 el espacio con producto interno indefinido $(\mathcal{K}^s := \mathcal{V}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ define un espacio de Krein de dimensión $s+1$. Ahora bien, como el espacio $\mathbb{C}^2$ de los vectores columnas con entradas complejas es el dual del espacio $\mathbb{C}_2$ podemos definir para cada $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ el polinomio $\varphi_x^s(z_1, z_2)$ en $\mathcal{K}^s$ por

$$\varphi_x^s(z_1,z_2) = \left((z_1,z_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)^s.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_x^s(z_1,z_2) &= (z_1x_1 + z_2x_2)^s \\ &= \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k} x_1^k x_2^{s-k} z_1^k z_2^{s-k}. \end{aligned}$$

Entonces para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$, $z = (z_1,z_2) \in \mathbb{C}_2$ y $x \in \mathbb{C}^2$ cualquiera, se cumple:

$$(\Pi_s(g)\varphi_x^s)(z) = \varphi_x^s(zg) = ((zg)x)^s = (z(gx))^s = \varphi_{gx}^s(z). \tag{3.1}$$

Además para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ y todo $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tenemos por la definición 3.4:

$$\langle\langle gx, gy\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle\langle x, y\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle\langle\varphi_x^s(z), \varphi_y^s(z)\rangle\rangle &= \left\langle\left\langle \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k} x_1^k x_2^{s-k} z_1^k z_2^{s-k}, \sum_{l=0}^{s}\binom{s}{l} y_1^l y_2^{s-l} z_1^l z_2^{s-l}\right\rangle\right\rangle \\ &= N^2\sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}\binom{s}{k}^{-1}\binom{s}{k}\binom{s}{k}\bar{x_1}^k y_1^k \bar{x_2}^{s-k} y_2^{s-k} \\ &= N^2\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}^{-1}\binom{s}{k}\binom{s}{k}(\bar{x_1}y_1)^k(-\bar{x_2}y_2)^{s-k} \\ &= N^2\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(\bar{x_1}y_1)^k(-\bar{x_2}y_2)^{s-k} \\ &= N^2(\bar{x_1}y_1 - \bar{x_2}y_2)^s \\ &= N^2\left(\langle\langle x,y\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)^s. \end{aligned}$$

Luego por la ecuación (3.1),

$$\begin{aligned} \langle\langle(\Pi_s(g)\varphi_x^s)(z), (\Pi_s(g)\varphi_y^s)(z)\rangle\rangle &= \langle\langle\varphi_{gx}^s(z), \varphi_{gy}^s(z)\rangle\rangle \\ &= N^2\left(\langle\langle gx, gy\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= N^2 \left(\langle\langle x, y\rangle\rangle_{\mathbb{C}^2}\right)^s \\ &= \langle\langle \varphi_x^s(z), \varphi_y^s(z)\rangle\rangle. \end{aligned}$$

De esta manera, si probamos que el conjunto $W = \{\varphi_x^s(z) : x \in \mathbb{C}^2\}$ tiene una base para el espacio vectorial $\mathcal{K}^s$ terminamos. En efecto, para tal objetivo consideremos las raices s-ésima de la unidad, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{s}}$, entonces con $w = \begin{bmatrix} \zeta^k \\ 1 \end{bmatrix}$ y $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, los $s+1$ polinomios siguientes

$$\varphi_w^s(z_1, z_2) = (\zeta^k z_1 + z_2)^s = \sum_{l=0}^{s} \binom{s}{l} \zeta^{kl} z_1^l z_2^{s-l} \ \text{ y } \ \varphi_x^s(z_1, z_2) = z_2^s, \ \ (0 \le k \le s-1), \tag{3.2}$$

en el conjunto W son linealmente independientes y por lo tanto una base para $\mathcal{K}^s$. Para probar esto, basta con demostrar que el determinante D cuya k-ésima fila consiste de los coeficientes del k-ésimo elemento en (3.2) no es igual a cero. Así, note que si $k \le s-1$ entonces la k-ésima fila de D es

$$1, \ \binom{s}{1}\zeta^k \ \binom{s}{2}\zeta^{2k}, \cdots, \binom{s}{s}\zeta^{sk}$$

y la útima fila de D es $\ 1, 0, 0, \cdots, 0\ $ es decir,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \binom{s}{1} & \binom{s}{2} & \cdots & 1 \\ 1 & \binom{s}{1}\zeta & \binom{s}{2}\zeta^2 & \cdots & \zeta^s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{s}{1}\zeta^{s-1} & \binom{s}{2}\zeta^{2(s-1)} & \cdots & \zeta^{s(s-1)} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Luego, expandiendo D por la última fila y dividiendo la k-ésima columna por $\binom{s}{k}$ obtenemos el determinante de Vandermonde de $(\zeta, \zeta^2, \cdots, \zeta^s)$. De donde deducimos que

$$D = \prod_{k=1}^{s} \binom{s}{k} \prod_{1 \le k < l \le s} (\zeta^l - \zeta^k) \neq 0 \text{ pues } \zeta^k \neq \zeta^l$$

para cualquier k y l tal que $1 \le k < l \le s$.

Por todo lo anterior, la representación Π_s de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre el espacio de Krein $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ es unitaria. $\square$

Observación 3.7. *Observe que* $v_k^s(z_1, z_2) := \frac{f_k^s(z_1,z_2)}{\|f_k^s(z_1,z_2)\|} = \frac{1}{N}\binom{s}{k}^{\frac{1}{2}} f_k^s(z_1, z_2)$ *entonces con abuso de notación, escribiendo* $D_{\Pi_s} =: \pi_s$*, se cumple que* $\pi_s(H)$*,* $\pi_s(E)$*,* $\pi_s(F)$ *actúan sobre* v_k^s *como*

$$\pi_s(H)v_k^s = (s-2k)v_k^s, \ \ \pi_s(E)v_k^s = \lambda_k v_{k-1}^s, \ \ \pi_s(F)v_k^s = \lambda_{k+1} v_{k+1}^s$$

donde $\lambda_k = \sqrt{k(s-k+1)}$*. En efecto, esto es claro, pues por la observación 3.6:*

$$\pi_s(H)f_k^s(z_1, z_2) = (s-2k)f_k^s(z_1, z_2), \ \pi_s(E)f_k^s(z_1, z_2) = k f_{k-1}^s(z_1, z_2), \ \pi_s(F)f_k^s(z_1, z_2) = (s-k)f_{k+1}^s(z_1, z_2)$$

y sólo hay que mover el lápiz.

Con la identificación $\mathfrak{B}(\mathcal{V}^s) \cong M(s+1, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{gl}(s+1, \mathbb{C})$*, obtenemos un resultado esperado.*

Teorema 3.1. $\pi_s : sl(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{V}^s)$ *definido mediante las acciones*

$$\pi_s(H)v_k^s = (s-2k)v_k^s,$$

$$\pi_s(E)v_k^s = \lambda_k v_{k-1}^s \quad y$$

$$\pi_s(F)v_k^s = \lambda_{k+1} v_{k+1}^s$$

donde $\lambda_k = \sqrt{k(s-k+1)}$, *es una representación del álgebra de Lie* $sl(2,\mathbb{C})$.

Demostración. Claramente los operadores $\pi_s(H), \pi_s(E)$ y $\pi_s(F)$ pertenecen a $\mathcal{B}(\mathcal{V}^s)$. Veamos que π_s es un homomorfismo de álgebras de Lie. En efecto,

$$\begin{aligned}
[\pi_s(E), \pi_s(F)]v_k^s &= (\pi_s(E)\pi_s(F) - \pi_s(F)\pi_s(E))v_k^s \\
&= \pi_s(E)\pi_s(F)v_k^s - \pi_s(F)\pi_s(E)v_k^s \\
&= \pi_s(E)(\lambda_{k+1}v_{k+1}^s) - \pi_s(F)(\lambda_k v_{k-1}^s) \\
&= \lambda_{k+1}\pi_s(E)v_{k+1}^s - \lambda_k \pi_s(F)v_{k-1}^s \\
&= \lambda_{k+1}\lambda_{k+1}v_k^s - \lambda_k\lambda_k v_k^s \\
&= ((k+1)(s-k) - k(s-k+1))v_k^s \\
&= (s-2k)v_k^s = \pi_s(H)v_k^s \\
&= \pi_s([E,F])v_k^s.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\pi_s(H), \pi_s(E)]v_k^s &= (\pi_s(H)\pi_s(E) - \pi_s(E)\pi_s(H))v_k^s \\
&= \pi_s(H)\pi_s(E)v_k^s - \pi_s(E)\pi_s(H)v_k^s \\
&= \pi_s(H)(\lambda_k v_{k-1}^s) - \pi_s(E)((s-2k)v_k^s) \\
&= \lambda_k\pi_s(H)v_{k-1}^s - (s-2k)\pi_s(E)v_k^s \\
&= \lambda_k(s-2(k-1))v_{k-1}^s - (s-2k)\lambda_k v_{k-1}^s \\
&= 2\lambda_k v_{k-1}^s = 2\pi_s(E)v_k^s = \pi_s(2E)v_k^s \\
&= \pi_s([H,E])v_k^s.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\pi_s(H), \pi_s(F)]v_k^s &= (\pi_s(H)\pi_s(F) - \pi_s(F)\pi_s(H))v_k^s \\
&= \pi_s(H)\pi_s(F)v_k^s - \pi_s(F)\pi_s(H)v_k^s \\
&= \pi_s(H)(\lambda_{k+1}v_{k+1}^s) - \pi_s(F)((s-2k)v_k^s) \\
&= \lambda_{k+1}\pi_s(H)v_{k+1}^s - (s-2k)\pi_s(F)v_k^s \\
&= \lambda_{k+1}(s-2(k+1))v_{k+1}^s - (s-2k)\lambda_{k+1}v_{k+1}^s \\
&= -2\lambda_{k+1}v_{k+1}^s = -2\pi_s(F)v_k^s = \pi_s(-2F)v_k^s \\
&= \pi_s([H,F])v_k^s.
\end{aligned}$$

Por lo tanto π_s es una representación del álgebra de Lie $sl(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{V}^s$. □

Veamos ahora que Π_s es también una representación irreducible.

Proposición 3.8. *Para todo $s \in \mathbb{N}_0$, la representación unitaria $(\Pi_s, \mathcal{K}^s)$ de $SU(1,1)$ sobre el espacio de Krein $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ es irreducible.*

Demostración. Note que por la observación 3.2 se cumple $su(1,1)_{\mathbb{C}} = sl(2,\mathbb{C})$, y además por el teorema 3.1, $D_{\Pi_s} := \pi_s$ es una representación de $sl(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{K}^s$, luego por las proposiciones 2.5 y 2.6 basta probar que π_s es una representación irreducible de $sl(2,\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{K}^s$. En efecto, sea W un subespacio cerrado π_s-invariante de $\mathcal{K}^s$. Supongamos además que $W \neq \{0\}$. Debemos probar entonces que $W = \mathcal{K}^s$. Así, sea $w \in W$ entonces $w \neq 0$ y además existe $\{a_k : k = 0, \cdots, s\} \subset \mathbb{C}$ donde por lo menos uno es diferente de cero tal que w se puede escribir en la forma:

$$w = \sum_{k=0}^{s} a_k z_1^k z_2^{s-k} = a_0 z_2^s + a_1 z_1 z_2^{s-1} + \cdots + a_s z_1^s$$

Tomemos $k_0 := \min\{0 \leq k \leq s : a_k \neq 0\}$, entonces note que por la observación 3.6 se cumple que $\pi_s(F)$ actúa sobre f_k^s sumando 1 a z_1^k y en adición se observa que $\pi_s(F) f_k^s$ es cero si y sólo si $k = s$, entonces $\pi_s(F)^{s-k_0} w$ es un múltiplo distinto de cero de z_1^s. Así, en virtud de que W es π_s- invariante se cumple que $z_1^s \in W$. Por otro lado, observe que para $k = 0, \cdots, s$ por la observación 3.6 tenemos que

$$\pi_s(E)^k z_1^s = \frac{s!}{(s-k)!} z_1^{s-k} z_2^k \in W,$$

y como $\{z_1^{s-k} z_2^k\}$ es una base para $\mathcal{K}^s$ entonces $W = \mathcal{K}^s$. $\square$

Comentario 3.3. *Note que por la proposiciones 3.7 y 3.8, la representación $(\Pi_s, \mathcal{K}^s)$ de $SU(1,1)$ sobre el espacio de Krein $\mathcal{K}^s$ de dimensión $s+1$, es una representación irreducible unitaria no trivial, evidenciando los buenos resultados que se pueden obtener en espacios de Krein.*

Observación 3.8. *Note que $v_0^s = \frac{z_1^0 z_2^{s-0}}{\|z_1^0 z_2^{s-0}\|} = \frac{z_2^s}{\|z_2^s\|} = \frac{1}{N} z_2^s = \frac{\varphi_x^s(z)}{N}$ con $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z = (z_1, z_2)$ y entonces para todo $t \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ se cumple:*

$$\begin{aligned}
\Pi_s(e^{\theta Y_0} e^{t Y_1}) \frac{\varphi_x^s(z)}{N} &= \frac{1}{N} \Pi_s \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosh(t) & sinh(t) \\ sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix} \right) \varphi_x^s(z) \\
&= \frac{1}{N} \left((z_1, z_2) \begin{pmatrix} e^{i\theta} cosh(t) & e^{i\theta} sinh(t) \\ e^{-i\theta} sinh(t) & e^{-i\theta} cosh(t) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^s \\
&= \frac{1}{N} (e^{i\theta} sinh(t) z_1 + e^{-i\theta} cosh(t) z_2)^s \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} sinh^k(t) e^{ik\theta} z_1^k cosh^{s-k}(t) e^{-i(s-k)\theta} z_2^{s-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} e^{i(2k-s)\theta} sinh^k(t) cosh^{s-k}(t) z_1^k z_2^{s-k} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} e^{i(2k-s)\theta} sinh^k(t) cosh^{s-k}(t) \|z_1^k z_2^{s-k}\| v_k^s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}\binom{s}{k}^{-\frac{1}{2}} e^{i(2k-s)\theta} sinh^k(t) cosh^{s-k}(t) v_k^s \\
&= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}^{\frac{1}{2}} e^{i(2k-s)\theta} sinh^k(t) cosh^{s-k}(t) v_k^s.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.9. *$SU(1,1)$ actúa transitivamente en $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco abierto unitario del plano complejo.*

Demostración. Para probar que $\mathrm{SU}(1,1)$ actúa transitivamente en $\mathbb{D}$ definimos el mapeo $\psi : \mathrm{SU}(1,1) \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ dado por $\psi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, z\right) = \frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}$. Veamos que ψ está bien definida. En efecto, primero probaremos que para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$ y todo $z \in \mathbb{D}$; $\psi_g(z) := \psi(g,z) \in \mathbb{D}$.

Sea $w = \psi_g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}$ entonces $w\bar{\beta}z + \bar{\alpha}w = \alpha z + \beta$, lo cual implica que $(w\bar{\beta} - \alpha)z = \beta - \bar{\alpha}w$ y por lo tanto $z = \frac{\beta-\bar{\alpha}w}{w\bar{\beta}-\alpha}$. Ahora como $z \in \mathbb{D}$ por definición $|z| < 1$, y se sigue la cadena de implicaciones:

$$
\begin{aligned}
|z| < 1 &\implies \left|\frac{\beta - \bar{\alpha}w}{w\bar{\beta} - \alpha}\right| < 1 \\
&\implies \left|\frac{\beta - \bar{\alpha}w}{w\bar{\beta} - \alpha}\right|^2 < 1 \\
&\implies \frac{(\beta - \bar{\alpha}w)(\bar{\beta} - \alpha\bar{w})}{(w\bar{\beta} - \alpha)(\bar{w}\beta - \bar{\alpha})} < 1 \\
&\implies \frac{\beta\bar{\beta} - \beta\bar{w}\alpha - w\bar{\alpha}\bar{\beta} + w\bar{w}\alpha\bar{\alpha}}{w\bar{w}\beta\bar{\beta} - w\bar{\alpha}\bar{\beta} - \beta\bar{w}\alpha + \alpha\bar{\alpha}} < 1 \\
&\implies \beta\bar{\beta} - \beta\bar{w}\alpha - w\bar{\alpha}\bar{\beta} + w\bar{w}\alpha\bar{\alpha} < w\bar{w}\beta\bar{\beta} - w\bar{\alpha}\bar{\beta} - \beta\bar{w}\alpha + \alpha\bar{\alpha} \\
&\implies w\bar{w}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}) < \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \\
&\implies |w|^2 < 1 \\
&\implies w \in \mathbb{D}.
\end{aligned}
$$

Luego ψ_g está bien definida. Probemos ahora que este mapeo es una acción a izquierda de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre $\mathbb{D}$. Para ello debemos demostrar que $\psi(g, \psi(h,z)) = \psi(gh, z)$ para todo $g, h \in \mathrm{SU}(1,1)$ y $z \in \mathbb{D}$, y $\psi(I_2, z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En efecto, sean $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} \gamma & \eta \\ \bar{\eta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix}$ elementos de $\mathrm{SU}(1,1)$ y $z \in \mathbb{D}$. Como

$$
gh = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & \eta \\ \bar{\eta} & \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + \beta\bar{\eta} & \alpha\eta + \beta\bar{\gamma} \\ \overline{(\alpha\eta + \beta\bar{\gamma})} & \overline{(\alpha\gamma + \beta\bar{\eta})} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(1,1),
$$

entonces

$$
\psi(gh, z) = \frac{(\alpha\gamma + \beta\bar{\eta})z + \alpha\eta + \beta\bar{\gamma}}{\overline{(\alpha\eta + \beta\bar{\gamma})}z + \overline{(\alpha\gamma + \beta\bar{\eta})}}.
$$

Luego, note que

$$\begin{aligned}
\psi(g,\psi(h,z)) &= \psi\left(g,\frac{\gamma z+\eta}{\bar{\eta}z+\bar{\gamma}}\right)\\
&= \frac{\alpha(\frac{\gamma z+\eta}{\bar{\eta}z+\bar{\gamma}})+\beta}{\bar{\beta}(\frac{\gamma z+\eta}{\bar{\eta}z+\bar{\gamma}})+\bar{\alpha}}\\
&= \frac{(\alpha\gamma+\beta\bar{\eta})z+\alpha\eta+\beta\bar{\gamma}}{\overline{(\alpha\eta+\beta\bar{\gamma})}z+\overline{(\alpha\gamma+\beta\bar{\eta})}}\\
&= \psi(gh,z)
\end{aligned}$$

y $\psi(I_2,z)=z$ trivialmente. Por último para probar que ψ es transitiva basta mirar que 0 se puede enviar a cualquier número complejo en $\mathbb{D}$. Efectivamente, sea $z\in\mathbb{D}$ entonces si definimos $g_z=\frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}\begin{pmatrix}1 & z\\ \bar{z} & 1\end{pmatrix}$ note que $\psi(g_z,z)=z$. $\square$

Observación 3.9. *Note que en particular por el teorema 2.1, el espacio homogéneo $SU(1,1)/SU(1,1)_0$ es homeomorfo al disco unitario en el plano complejo $\mathbb{D}$, mediante el mapeo $\Phi: SU(1,1)/SU(1,1)_0\to\mathbb{D}$ definido por $\Phi(gSU(1,1)_0)=\psi(g,0)$ para todo $g\in SU(1,1)$.*

Pero además, dada la acción $\psi: SU(1,1)\times\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ anterior, el estabilizador de 0, o grupo isotrópico en 0, $SU(1,1)_0$ es:

$$\begin{aligned}
SU(1,1)_0 &= \{g\in SU(1,1):\psi(g,0)=0\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C}):\psi\left(\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix},0\right)=0\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C}):\frac{\beta}{\bar{\alpha}}=0,\ |\alpha|^2-|\beta|^2=1\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C}):|\alpha|=1\right\}\\
&= \left\{\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\in M(2,\mathbb{C}):\theta\in[0,2\pi]\right\}\\
&\cong U(1),
\end{aligned}$$

donde $U(1)$ es el subgrupo compacto máximal de $SU(1,1)$ formado por los números complejos de módulo 1 y la última linea de arriba se cumple por ser el mapeo $U(1)\ni e^{i\theta}\mapsto\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\in SU(1,1)_0$ un homeomorfismo e isomorfismo de grupos.

En cuanto a los estados coherentes generalizados de Perelomov, basta tomar v_0^s como vector fijo en $\mathcal{K}^s$, $\|v_0^s\|_{J_s}=1$, y notar que el subgrupo G_0 de SU(1,1) expuesto en la definición 3.3 es el grupo U(1) como lo veremos más adelante. Además de que es necesario encontrar una sección continua que parametrice los puntos en el espacio homogéneo SU(1,1)/U(1). Tal sección es mostrada a continuación:

Teorema 3.2. *El mapeo $\sigma \circ \Phi : SU(1,1)/U(1) \to SU(1,1)$ es una sección continua, donde $\sigma : \mathbb{D} \to SU(1,1)$ está dado por*

$$\sigma(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{pmatrix} \quad \textit{para todo } \; z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Observe que $\sigma \circ \Phi$ es continua porque σ es continua y Φ es homeomorfismo. Ahora, $\sigma \circ \Phi$ es una sección si y sólo si $\rho \circ (\sigma \circ \Phi) = Id$ donde $\rho : \mathrm{SU}(1,1) \to \mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{U}(1)$ es la proyección canónica definida por $\rho(g) = g\mathrm{U}(1)$ para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$. Pero esto es equivalente a probar que $\Phi \circ (\rho \circ \sigma) = Id$. Así, sea $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$\begin{aligned} \Phi \circ (\rho \circ \sigma)(z) &= \Phi \circ \rho(\sigma(z)) \\ &= \Phi(\sigma(z)\mathrm{U}(1)) \\ &= \psi(\sigma(z), 0) \\ &= \frac{\frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}} \\ &= z. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.10. *Dada la acción $\psi : SU(1,1) \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, denotada para mayor comodidad como $g \cdot z := \psi(g,z)$, entonces $\sigma(g \cdot z)\, U(1) = g\sigma(z)\, U(1)$.*

Demostración. Observe que al ser Φ un homeomorfismo se cumple que $g \cdot z := \psi(g,z) = \Phi(\hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z)))$ donde $\hat{\psi}$ es la acción natural de $\mathrm{SU}(1,1)$ sobre $\mathrm{SU}(1,1)/\mathrm{U}(1)$ dada por $\hat{\psi}(g_0, g\mathrm{U}(1)) = g_0 g\mathrm{U}(1)$. En efecto, note que $\psi(g, \Phi(hU(1))) = \psi(g, \psi(h,0)) = \psi(gh, 0)$ y por otro lado $\Phi(\hat{\psi}(g, hU(1))) = \Phi(ghU(1)) = \psi(gh, 0)$, entonces $\psi(g, \Phi(hU(1))) = \Phi(\hat{\psi}(g, hU(1)))$ y como Φ es un homeomorfismo, $\psi(g,z) = \Phi(\hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z)))$. Por teorema 3.2 con ρ la proyección canónica, se tiene $\rho \circ \sigma \circ \Phi = Id$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma(g \cdot z)\mathrm{U}(1) &= \sigma(\Phi(\hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z))))\mathrm{U}(1) \\ &= \rho(\sigma(\Phi(\hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z))))) \\ &= \rho \circ \sigma \circ \Phi(\hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z))) \\ &= \hat{\psi}(g, \Phi^{-1}(z)) \\ &= \hat{\psi}(g, \rho \circ \sigma \circ \Phi(\Phi^{-1}(z))) \\ &= \hat{\psi}(g, \rho(\sigma(z))) \\ &= \hat{\psi}(g, \sigma(z)\mathrm{U}(1)) \\ &= g\sigma(z)\mathrm{U}(1). \end{aligned}$$

□

3.4. Estados coherentes generalizados de Perelomov de SU(1,1)

Consideramos el espacio de Krein $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ y la representación irreducible unitaria $(\Pi_s, \mathcal{K}^s)$ del grupo de Lie matricial $\mathrm{SU}(1,1)$, con vector fijo v_0^s, tal que $\|v_0^s\|_{J_s} = 1$, entonces por Perelomov los estados coherentes generalizados pueden ser parametrizados por puntos en el espacio cociente $SU(1,1)/G_0$. La proposición siguiente nos dice que podemos mirar al subgrupo G_0 de $\mathrm{SU}(1,1)$ como el grupo de fases $\mathrm{U}(1)$.

Proposición 3.11. *Se cumple*

$$G_0 := \left\{g \in SU(1,1) : \Pi_s(g)v_0^s = e^{i\theta(g)}v_0^s,\ \theta(g) \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} e^{i\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta} \end{pmatrix} : \zeta \in \mathbb{R}\right\} \cong U(1)$$

Demostración. Note que para toda $\zeta \in \mathbb{R}$ por la proposición 3.2 y por la observación 3.4, se satisface:

$$\begin{aligned} \Pi_s(e^{\zeta Y_0}) &= \Pi_s \begin{pmatrix} e^{i\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta} \end{pmatrix} v_k^s \\ &= e^{i\zeta(2k-s)}v_k^s. \end{aligned}$$

En particular

$$\Pi_s \begin{pmatrix} e^{i\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta} \end{pmatrix} v_0^s = e^{-is\zeta}v_0^s.$$

Entonces

$$\left\{\begin{pmatrix} e^{i\zeta} & 0 \\ 0 & e^{-i\zeta} \end{pmatrix} : \zeta \in \mathbb{R}\right\} \subseteq G_0$$

Veamos ahora la otra contenencia.

Sean $s > 0$ y $t \neq 0$ entonces por la observación 3.8,

$$\Pi_s(e^{\theta Y_0}e^{tY_1}) = \Pi_s \left(\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \right) v_0^s \neq e^{i\zeta}v_0^s,$$

para todo $\zeta \in \mathbb{R}$. Así por la proposición 3.2 se verifica la proposición. $\square$

Definición 3.6. *Definimos los estados coherentes de $SU(1,1)$ sobre el espacio de Krein $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ y respecto a la representación irreducible unitaria $(\Pi_s, \mathcal{K}^s)$ por $\{\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$ donde*

$$\eta(z) := \Pi_s(\sigma(z))v_0^s.$$

Luego sólo debemos calcularlos.

Proposición 3.12.

$$\eta(z) = \frac{1}{\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k}^{\frac{1}{2}} z^k v_k^s.$$

Demostración. Sea $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Recuerde que $v_0^s = \frac{1}{N}\varphi_x^s(z_1,z_2)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\eta(z) &= \Pi_s(\sigma(z))v_0^s = \Pi_s\left(\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{array}\right)\right) v_0^s \\
&= \frac{1}{N}\Pi_s\left(\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{array}\right)\right) \varphi_x^s(z_1,z_2) = \frac{1}{N}\left((z_1,z_2)\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{z}{\sqrt{1-|z|^2}} \\ \frac{\bar{z}}{\sqrt{1-|z|^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} \end{array}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^s \\
&= \frac{1}{N\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\left((z_1,z_2)\left(\begin{array}{cc} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{array}\right)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^s \\
&= \frac{1}{N\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\left((z_1,z_2)\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}\right)^s = \frac{1}{N\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}(zz_1+z_2)^s \\
&= \frac{1}{N\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(zz_1)^k(z_2)^{s-k} \\
&= \frac{1}{N\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k} z^k f_k^s(z_1,z_2)\frac{\|f_k^s(z_1,z_2)\|}{\|f_k^s(z_1,z_2)\|} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}\binom{s}{k}^{-\frac{1}{2}} z^k v_k^s
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\eta(z) = \frac{1}{\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}^{\frac{1}{2}} z^k v_k^s$. □

Proposición 3.13. *Sean ψ la acción de $SU(1,1)$ sobre el disco abierto unitario de la proposición 3.9, $g = \left(\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{array}\right)$, $z \in \mathbb{D}$ y $\mathcal{J}(g,z) = \bar{\beta}z + \bar{\alpha}$. Entonces*

i) $\begin{cases} \mathcal{J}(g_1g_2,z) = \mathcal{J}(g_1,\psi(g_2,z))\mathcal{J}(g_2,z) \\ \mathcal{J}(1_{SU(1,1)},z) = 1 \end{cases}$

En particular $\mathcal{J}(g^{-1},\psi(g,z))^{-1} = \mathcal{J}(g,z) \neq 0$ y en adición $\frac{1}{2|\alpha|} < |\mathcal{J}(g,z)| < 2|\alpha|$.

ii) $|\mathcal{J}(g,z)|^2(1-|\psi(g,z)|^2) = 1-|z|^2$.

iii) Sea $z = x+iy$ y sea $dm(z) = dm(x,y) = dxdy$. Entonces $d\lambda(z) := (1-|z|^2)^{-2}dm(z)$ es una medida ψ-invariante en $\mathbb{D}$ bajo $SU(1,1)$.

Demostración. Sea $g_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \bar{\beta}_i & \bar{\alpha}_i \end{pmatrix}$ para $i = 1, 2$. Entonces note que

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\bar{\beta}_2 & \alpha_1\beta_2 + \beta_1\bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1\alpha_2 & \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos:

i) Es claro que $\mathcal{J}(1_{\mathrm{SU}(1,1)}, z) = 1$, veamos que $\mathcal{J}(g_1g_2, z) = \mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, \psi(g_2, z))$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(g_1g_2, z) &= (\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_2 + \bar{\beta}_1\alpha_2)z + \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\beta}_1\beta_2 \\ &= (\bar{\beta}_2 z + \bar{\alpha}_2)\left(\bar{\beta}_1 \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\bar{\beta}_2 z + \bar{\alpha}_2} + \bar{\alpha}_1\right) \\ &= \mathcal{J}(g_2, z)(\bar{\beta}_1\psi(g_2, z) + \bar{\alpha}_1) \\ &= \mathcal{J}(g_2, z)\mathcal{J}(g_1, \psi(g_2, z)) \end{aligned}$$

De este modo, por éstas propiedades se cumple en particular que $1 = \mathcal{J}(1_{\mathrm{SU}(1,1)}, z) = \mathcal{J}(g^{-1}g, z) = \mathcal{J}(g^{-1}, \psi(g, z))\mathcal{J}(g, z)$ y se obtiene que $\mathcal{J}(g^{-1}, \psi(g, z))^{-1} = \mathcal{J}(g, z) \neq 0$, además, gracias a la desigualdad triangular inversa,

$$|\mathcal{J}(g, z)| = |\bar{\beta}z + \bar{\alpha}| \geq |\bar{\alpha}| - |\bar{\beta}z| \geq |\alpha| - |\beta|.$$

Ahora, como $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ entonces $|\alpha| - |\beta| = \frac{1}{|\alpha|+|\beta|}$ y ya que $|\alpha| > |\beta|$ se tiene $2|\alpha| > |\alpha| + |\beta|$, por consiguiente

$$|\mathcal{J}(g, z)| \geq |\alpha| - |\beta| = \frac{1}{|\alpha| + |\beta|} > \frac{1}{2|\alpha|}.$$

Por otro lado en virtud de la desigualdad triangular

$$|\mathcal{J}(g, z)| \leq |\bar{\beta}z| + |\bar{\alpha}| < 2|\alpha|$$

pues $|\alpha| > |\beta|$.

ii) Tenemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}(g, z)|^2(1 - |\psi(g, z)|^2) &= |\bar{\beta}z + \bar{\alpha}|^2 \left(1 - \left|\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}\right|^2\right) \\ &= |\bar{\beta}z + \bar{\alpha}|^2 - |\alpha z + \beta|^2 \\ &= (\bar{\beta}z + \bar{\alpha})(\beta\bar{z} + \alpha) - (\alpha z + \beta)(\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}) \\ &= 1 - |z|^2 \end{aligned}$$

Donde hemos usado el hecho $\det(g) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$.

iii) Para probar éste item, escribimos $\psi(g, z) = x' + iy'$, luego el jacobiano de $z \mapsto \psi(g, z)$ es

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Así, en virtud de que $z \mapsto \psi(g,z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ por las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumple

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)} &= \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2 \\ &= \left|\frac{dz'}{dz}\right|^2 \\ &= \frac{1}{|\bar{\beta}z+\bar{\alpha}|^4}\end{aligned}$$

Por lo tanto, deducimos que $dm(\psi(g,z)) = |\mathcal{J}(g,z)|^{-4}dm(z)$ y además por $ii)$,

$$\begin{aligned}d\lambda(\psi(g,z)) &= (1-|\psi(g,z)|^2)^{-2}dm(\psi(g,z)) \\ &= (1-|\psi(g,z)|^2)^{-2}|\mathcal{J}(g,z)|^{-4}dm(z) \\ &= (1-|z|^2)^{-2}dm(z) \\ &= d\lambda(z),\end{aligned}$$

lo que concluye la proposición.

□

Definiendo para cada $s \in \mathbb{N}_0$ la medida $d\mu(z) = (1-|z|^2)^{s+2}d\lambda(z)$. Obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.14. *Sea* $A : \mathcal{K}^s \to \mathcal{K}^s$ *el operador definido por*

$$A(k) = \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle \eta(z) d\mu(z), \quad k \in \mathcal{K}^s.$$

Entonces la integral débil existe y

$$A\left(\sum_{n=0}^{s} \alpha_n v_n^s\right) = \sum_{n=0}^{s} \alpha_n A_n v_n^s, \text{ para todo } \sum_{n=0}^{s} \alpha_n v_n^s \in \mathcal{K}^s,$$

donde $A_n = (-1)^{s-n}\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n}$. *En particular,* A *es un operador diagonal.*

Demostración. Por la definición 1.14, tenemos que demostrar que

$$\int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle h, \eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) \text{ existe para todo } k, h \in \mathcal{K}^s.$$

Sean $k = \sum_{n=0}^{s} \alpha_n v_n^s$ y $h = \sum_{l=0}^{s} \beta_l v_l^s$, $\alpha_n, \beta_l \in \mathbb{C}$. Entonces, note que

$$\int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle h, \eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} \left\langle\left\langle \eta(z), \sum_{n=0}^{s} \alpha_n v_n^s \right\rangle\right\rangle \left\langle\left\langle \sum_{l=0}^{s} \beta_l v_l^s, \eta(z) \right\rangle\right\rangle d\mu(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{s}\sum_{l=0}^{s}\alpha_n\bar{\beta}_l\int_{\mathbb{D}}\langle\langle\eta(z),v_n^s\rangle\rangle\langle\langle v_l^s,\eta(z)\rangle\rangle d\mu(z),$$

como $\eta(z) = \frac{1}{\left(\sqrt{1-|z|^2}\right)^s}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}^{\frac{1}{2}}z^k v_k^s$ y $\langle\langle v_j^s, v_k^s\rangle\rangle = (-1)^{s-k}\delta_{j,k}$ por comentario 3.2 y por proposición 3.6 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}}\langle\langle\eta(z),k\rangle\rangle\langle\langle h,\eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) &= \sum_{n=0}^{s}\sum_{l=0}^{s}(-1)^{s-n}(-1)^{s-l}\binom{s}{n}^{\frac{1}{2}}\binom{s}{l}^{\frac{1}{2}}\alpha_n\bar{\beta}_l\int_{\mathbb{D}}\frac{\bar{z}^n z^l}{(1-|z|^2)^s}d\mu(z)\\
&= \sum_{n=0}^{s}\sum_{l=0}^{s}(-1)^{n+l}\binom{s}{n}^{\frac{1}{2}}\binom{s}{l}^{\frac{1}{2}}\alpha_n\bar{\beta}_l\int_{\mathbb{D}}\bar{z}^n z^l dm(z)\\
&= \sum_{n=0}^{s}\sum_{l=0}^{s}(-1)^{n+l}\binom{s}{n}^{\frac{1}{2}}\binom{s}{l}^{\frac{1}{2}}\alpha_n\bar{\beta}_l\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{i\theta(l-n)}r^{n+l+1}drd\theta\\
&= \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\alpha_n\bar{\beta}_n 2\pi\int_0^1 r^{2n+1}dr\\
&= \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}\alpha_n\bar{\beta}_n,
\end{aligned}$$

donde hemos empleado coordenadas polares para resolver la integral. De este modo, por definición 1.14 concluimos que la integral débil existe. Además, por las calculaciones anteriores,

$$\begin{aligned}
\langle\langle h, A(k)\rangle\rangle &= \left\langle\left\langle\sum_{l=0}^{s}\beta_l v_l^s, A\left(\sum_{n=0}^{s}\alpha_n v_n^s\right)\right\rangle\right\rangle\\
&= \int_{\mathbb{D}}\left\langle\left\langle\eta(z),\sum_{n=0}^{s}\alpha_n v_n^s\right\rangle\right\rangle\left\langle\left\langle\sum_{l=0}^{s}\beta_l v_l^s,\eta(z)\right\rangle\right\rangle d\mu(z)\\
&= \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}\alpha_n\bar{\beta}_n\\
&= \left\langle\left\langle\sum_{l=0}^{s}\beta_l v_l^s,\sum_{n=0}^{s}(-1)^{s-n}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}\alpha_n v_n^s\right\rangle\right\rangle\\
&= \left\langle\left\langle\sum_{l=0}^{s}\beta_l v_l^s,\sum_{n=0}^{s}\alpha_n A_n v_n^s\right\rangle\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A\left(\sum_{n=0}^{s}\alpha_n v_n^s\right) = \sum_{n=0}^{s}\alpha_n A_n v_n^s$.

□

Llegamos así al resultado más importante de ésta tesis:

Teorema 3.3. *El conjunto de estados coherentes generalizados de Perelomov* $\{\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$ *define un marco continuo en el espacio de Krein* $(\mathcal{K}^s, \langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ *con cotas*

$$0 \ < \ a := min\left\{\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n} : n = 0, \cdots, s\right\} = \frac{\pi}{s+1} \quad y$$

$$a \ \leq \ b := máx\left\{\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n} : n = 0, \cdots, s\right\} = \frac{\pi}{[\frac{s}{2}]+1}\binom{s}{[\frac{s}{2}]},$$

donde $[\frac{s}{2}] := \begin{cases} \frac{s}{2} & \text{si } s \in 2\mathbb{N}_0, \\ \frac{s-1}{2} & \text{si } s-1 \in 2\mathbb{N}_0. \end{cases}$

Demostración. Sea $k = \sum_{n=0}^{s} \alpha_n v_n^s \in \mathcal{K}^s$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Por las calculaciones de la proposición 3.14 tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} |\langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z) &= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle k, \eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) \\ &= \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}|\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a\|k\|_{J_s}^2 &= a\langle\langle k,k\rangle\rangle_{J_s} = a\left\langle\left\langle \sum_{n=0}^{s}\alpha_n v_n^s, \sum_{l=0}^{s}\alpha_l v_l^s\right\rangle\right\rangle_{J_s} = \sum_{n=0}^{s} a|\alpha_n|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}|\alpha_n|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b\|k\|_{J_s}^2 &= b\langle\langle k,k\rangle\rangle_{J_s} = b\left\langle\left\langle \sum_{n=0}^{s}\alpha_n v_n^s, \sum_{l=0}^{s}\alpha_l v_l^s\right\rangle\right\rangle_{J_s} = \sum_{n=0}^{s} b|\alpha_n|^2 \\ &\geq \sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}\frac{\pi}{n+1}|\alpha_n|^2 = \int_{\mathbb{D}} |\langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z). \end{aligned}$$

Además para todo $n = 0, \cdots, s$ se tiene $\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n} \geq \frac{\pi}{s+1}\binom{s}{s} = \frac{\pi}{s+1} = a$ y como $\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n} = \frac{\pi s!}{(n+1)!(s-n)!}$, deducimos que la sucesión finita $\left\{\frac{\pi}{n+1}\binom{s}{n} : n = 0, \cdots, s\right\}$ es creciente cuando el cociente:

$$\frac{\frac{\pi s!}{(n+1)!(s-n)!}}{\frac{\pi s!}{(n)!(s-n+1)!}} = \frac{s-n+1}{n+1},$$

es mayor o igual que 1, es decir, cuando $s \geq 2n$. Así, si $s \in 2\mathbb{N}_0$ el máximo se alcanza en $n = \frac{s}{2}$, o bien si $s-1 \in 2\mathbb{N}_0$ entonces el máximo se alcanza en $n = \frac{s-1}{2}$. Por lo tanto, $b = \frac{\pi}{[\frac{s}{2}]+1}\binom{s}{[\frac{s}{2}]}$. □

Proposición 3.15. *Si* $w : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *es una función medible tal que existen* $c, d \in (0, \infty)$ *con* $0 < c \leq |w(z)| \leq d < \infty$, $\forall z \in \mathbb{D}$ *entonces* $\{w(z)\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$ *es un marco continuo en* $\mathcal{K}^s$ *con cotas* $c^2 a \leq d^2 b$*, donde* $a \leq b$ *son las cotas del marco* $\{\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$*.*

Demostración. Note que para todo $k \in \mathcal{K}^s$. Tenemos:

$$\int_{\mathbb{D}} |\langle\langle w(z)\eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{D}} |w(z)|^2 |\langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z).$$

Por lo tanto

$$c^2 a \|k\|^2_{J_s} \leq \int_{\mathbb{D}} |\langle\langle w(z)\eta(z), k\rangle\rangle|^2 d\mu(z) \leq d^2 b \|k\|^2_{J_s},$$

lo que concluye la prueba. □

Proposición 3.16. *Para todo* $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$*, el conjunto* $\{w_g^{s+2}(z)\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$*, donde* $w_g(z) = \frac{1}{|\mathcal{J}(g,z)|}$ *y* $\mathcal{J}(g, z) = |\bar{\beta} z + \bar{\alpha}|$*, es un marco continuo en* $\mathcal{K}^s$ *con cotas* $\frac{a}{2^{2s+4}|\alpha|^{2s+4}} \leq 2^{2s+4}|\alpha|^{2s+4} b$ *y operador marco* $A_{w_g}(k) = \int_{\mathbb{D}} \langle\langle w_g^{s+2}(z)\eta(z), k\rangle\rangle w_g^{s+2}(z)\eta(z) d\mu(z)$ *.*

Demostración. En efecto, por la proposición 3.13, item *i*), se cumple que $\frac{1}{2|\alpha|} < |\mathcal{J}(g, z)| < 2|\alpha|$ pero como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2|\alpha|} < |\mathcal{J}(g,z)| < 2|\alpha| \quad &\iff \quad \frac{1}{2^{s+2}|\alpha|^{s+2}} < |\mathcal{J}(g,z)|^{s+2} < 2^{s+2}|\alpha|^{s+2} \\ &\iff \quad \frac{1}{2^{s+2}|\alpha|^{s+2}} < w_g^{s+2}(z) < 2^{s+2}|\alpha|^{s+2}, \end{aligned}$$

se tiene, en virtud de la proposición anterior, $\{w_g^{s+2}(z)\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$ es un marco continuo en $\mathcal{K}^s$ con cotas $\frac{a}{2^{2s+4}|\alpha|^{2s+4}} \leq 2^{2s+4}|\alpha|^{2s+4} b$, y además, note que:

$$\langle\langle h, A_{w_g}(k)\rangle\rangle \;\;=\;\; \int_{\mathbb{D}} \langle\langle w_g^{s+2}(z)\eta(z), k\rangle\rangle \langle\langle h, w_g^{s+2}(z)\eta(z)\rangle\rangle d\mu(z),$$

existe por la proposición 3.15 y por definición de integral débil:

$$A_{w_g}(k) = \int_{\mathbb{D}} \langle\langle w_g^{s+2}(z)\eta(z), k\rangle\rangle w_g^{s+2}(z)\eta(z) d\mu(z),$$

esto es, A_{w_g} es el operador marco asociado a $\{w_g^{s+2}(z)\eta(z)\}_{z\in\mathbb{D}}$. □

Comentario 3.4. *Si G es un grupo compacto, los estados coherentes de Perelomov definen un marco continuo con respecto a la medida invariante sobre el espacio cociente G/G_0 y se puede demostrar que el operador marco conmuta con la representación irreducible de G, y por el conocido Lema de Schur **[3]**, se puede concluir que el operador marco es un múltiplo de la identidad. Ahora bien, debido a que $SU(1,1)$ no es compacto, las funciones* $|\langle\langle h, \eta(z)\rangle\rangle|^2$, $h \neq 0$, *no son integrables con respecto a la medida invariante λ de la proposición 3.13. Por esta razón tuvimos que multiplicar la medida invariante con una densidad adecuada. La nueva medida μ no es invariante y por eso el operador marco no conmuta con los operadores de la representación irreducible de $SU(1,1)$. La próxima proposición demuestra que $\Pi(g)$, $g \in SU(1,1)$, conmuta con el operador marco por otro operador marco.*

Proposición 3.17. *Para todo $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ se cumple $A\Pi_s(g) = \Pi_s(g)A_{w_g}$.*

Demostración. Por la proposición 3.10 se cumple que $g^{-1}\sigma(z)U(1) = \sigma(g^{-1} \cdot z)U(1)$ entonces existe $g_0 \in U(1)$ de tal suerte que $g^{-1}\sigma(z)g_0 = \sigma(g^{-1} \cdot z)$. Así, por la definición 3.6 y por la proposición 3.7,

$$\begin{aligned}
\langle\langle u, A\Pi_s(g)k\rangle\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), \Pi_s(g)k\rangle\rangle\langle\langle u, \eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(\sigma(z))v_0^s, \Pi_s(g)k\rangle\rangle\langle\langle u, \Pi_s(\sigma(z))v_0^s\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(g^{-1}\sigma(z))v_0^s, k\rangle\rangle\langle\langle u, \Pi_s(\sigma(z))v_0^s\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(g^{-1}\sigma(z))v_0^s, k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \Pi_s(g^{-1}\sigma(z))v_0^s\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(g^{-1}\sigma(z)g_0)v_0^s, k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \Pi_s(g^{-1}\sigma(z)g_0)v_0^s\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(\sigma(g^{-1} \cdot z))v_0^s, k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \Pi_s(\sigma(g^{-1} \cdot z))v_0^s\rangle\rangle d\mu(z),
\end{aligned}$$

y como $d\mu(z) = (1 - |z|^2)^{s+2}d\lambda(z) = (1 - |g \cdot (g^{-1} \cdot z)|^2)^{s+2}d\lambda(z)$ entonces por la proposición 3.13, item *ii*) y *iii*):

$$\begin{aligned}
\langle\langle u, A\Pi_s(g)k\rangle\rangle &= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \Pi_s(\sigma(z))v_0^s, k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \Pi_s(\sigma(z))v_0^s\rangle\rangle(1 - |g \cdot z)|^2)^{s+2}d\lambda(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \eta(z)\rangle\rangle \left(\frac{1 - |g \cdot z|^2}{1 - |z|^2}\right)^{s+2} d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \eta(z)\rangle\rangle \left(\frac{1}{|\mathcal{J}(g, z)|}\right)^{2s+4} d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle \eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, \eta(z)\rangle\rangle w_g^{2s+4}(z)d\mu(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \langle\langle w_g^{s+2}(z)\eta(z), k\rangle\rangle\langle\langle \Pi_s(g^{-1})u, w_g^{s+2}(z)\eta(z)\rangle\rangle d\mu(z) \\
&= \langle\langle u, \Pi_s(g)A_{w_g}(k)\rangle\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $A\Pi_s(g) = \Pi_s(g)A_{w_g}$ para todo $g \in \mathrm{SU}(1,1)$. □

BIBLIOGRAFÍA

[1] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Springer, Berlin, 1986.

[2] M. Combescure, D. Robert, *Coherent States and Applications in Mathematical Physics*, Springer, New York, 2012.

[3] C. Hall, *Lie Groups, Lie Algebra and representations: An Elementary Introduction*, Springer, New York, 2003.

[4] D. Carrillo, E. Wagner, *Marcos Continuos en Espacios de Krein*, Tesis maestría, UMSNH, Morelia, 2018.

[5] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Company, London, 1971.

[6] A. Arvanitogeorgos, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 2003.

[7] S. Ali, J. Antoine, J. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and their Generalizations*, Springer, Berlin, 2000.

[8] J. Faraut, *Analysis on Lie Groups: An introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[9] S. Corry, *Symmetry and Quantum Mechanics*, CRC Press, New York, 2007.

[10] M. Ise, M. Takeuchi, *Lie Groups I, II*, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1991.

[11] K. Esmeral, O. Ferrer, E. Wagner, *Frames in Krein spaces arising from a non-regular W-metric*, Banach J. Math. Anal. 9 (2015), 1-16.

[12] T. Azizov, I. Iokhvidov, *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley and Sons, Chichester, 1989.

[13] J. Bognar, *Indefinite inner product spaces*, Springer, Berlin, 1974.

[14] R. Bartle, *The Elements of Integration*, John Wiley and Sons, Champaign, 1966.

[15] R. Duffin, A. Schaeffer, *A class of nonharmonic fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 341-366.