



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

PROTECCIÓN TOPOLÓGICA EN SISTEMAS NO-HERMÍTICOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA

Pablo Reséndiz Vázquez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Roberto de Jesús León Montiel

Instituto de Ciencias Nucleares

COMITÉ TUTOR

Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés

Dr. Pedro Quinto Su

Instituto de Ciencias Nucleares

Ciudad Universitaria, Ciudad de México

Abril 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*a Marielena y Concepción:
mis pilares y alas en la vida*

Índice general

1. Resumen	2
2. Introducción	4
3. Aislantes topológicos	7
3.1. Efecto Hall Cuántico entero	10
3.1.1. Degeneración de la energía	11
3.1.2. El rol del desorden	14
3.1.3. Conductividad y desorden	16
3.1.4. La fase de Berry y el rol de la topología	16
3.2. Modelo de Haldane	19
3.2.1. Simetrías en el modelo de Haldane	19
3.2.2. Análisis en el espacio de momentos	21
3.2.3. Número de Chern del modelo de Haldane	23
4. Sistemas cuánticos \mathcal{PT}-simétricos	26
4.1. Simetría \mathcal{PT} y su rompimiento	28
4.2. Evolución temporal de Hamiltonianos no-Hermíticos	29
5. Modelo de Haldane no-Hermítico	34
5.1. Modelo teórico	36
5.2. Aislante topológico de Haldane	37
5.2.1. Análisis en el espacio recíproco y en la base de sitios	38
6. Conclusiones	49

Bibliografía

51

Índice de figuras

3.1. Tipos de aislantes	9
3.2. Resistividad en el Efecto Hall Cuántico Entero	9
3.3. Estados de borde	12
3.4. Potencial para los bordes de la placa	13
3.5. Antisimetría de Inversión Temporal	13
3.6. Desorden en la placa	14
3.7. Niveles de Landau para el IQHE	15
3.8. El rol del desorden en los niveles energéticos	16
3.9. Celda unitaria de una red hexagonal bidimensional	20
3.10. Red de Haldane	21
3.11. Número de Chern en el modelo de Haldane	23
4.1. Esquema de un sistema \mathcal{PT} -simétrico	30
5.1. Estructura de bandas de una cinta de Haldane con terminación armchair	41
5.2. Estructura de bandas de una cinta de Haldane con terminación zigzag	42
5.3. Espectro del Hamiltoniano de Haldane para una cinta finita con terminaciones bearded/armchair	43
5.4. Espectro del Hamiltoniano de Haldane para una cinta finita con terminaciones zigzag/armchair	44
5.5. Diferentes tipos de terminaciones en una cinta de Haldane finito	45
5.6. Condiciones iniciales en el espacio de sitios	46
5.7. Evolución temporal Hermítica en el espacio de sitios	46
5.8. Γ crítico y su dependencia con el Flujo de Haldane	47

Resumen

Los fenómenos topológicos en sistemas no-Hermíticos se han convertido recientemente en un tema de gran interés en las comunidades de fotónica y materia condensada. En particular, la posibilidad de observar estados de borde protegidos topológicamente en redes no-Hermíticas ha causado una intensa búsqueda de sistemas donde existan este tipo de estados. Aquí presentamos el primer estudio sobre la aparición de estados de borde topológicos en redes de Haldane dos-dimensionales que exhiben ganancias y pérdidas equilibradas. Es importante mencionar que este tipo de redes ha sido estudiado previamente en sistemas no-Hermíticos [1–9], con ganancias y pérdidas distribuidas en regiones específicas [6,9] o en cintas uniformes de ganancias y pérdidas [7]. De hecho, en [7] Yuce et. al. estudiaron también una red con ganancias y pérdidas intercaladas como en nuestro caso pero con otro modelo de aislante topológico, sin embargo en ese trabajo no se demostró la existencia de estados de borde con eigenvalores reales. En esta tesis, como resultado principal mostramos que los estados de borde pueden ser observados cuando la fase PT -simétrica del sistema se ha roto, es decir, cuando el espectro del Hamiltoniano con pérdidas y ganancias balanceadas no es completamente real. Aún más importante, mostramos que estos estados de borde protegidos topológicamente emergen sin importar la geometría de los bordes del arreglo, ya sea zigzag, bearded o armchair. De estos resultados, concluimos que los estados de borde protegidos topológicamente sí existen en redes no-Hermíticas.

Introducción

Durante los últimos años, los fenómenos topológicos han atraído un gran interés en una variedad de disciplinas, incluyendo materia condensada [10, 11], fotónica [12–20], gases ultra fríos [21–24], acústica [25], electrónica [26], e incluso química [27]. Entre los distintos modelos en los que la protección topológica ha sido estudiada y observada, el modelo de Haldane constituye un ejemplo paradigmático de un sistema Hermítico con una transición de fase topológica [28]. De hecho, este modelo en una red hexagonal representa un sistema ideal en donde el efecto Hall Cuántico [29] se encuentra contenido como una propiedad de la estructura de la red y éste se observa sin la necesidad de un campo magnético externo intenso [30]. A pesar de que se creía imposible de realizar experimentalmente [28], el modelo de Haldane ha sido fundamental en el entendimiento de las fases topológicas aislantes y conductoras y más aún, ha sido la base de pruebas para la demostración experimental de la protección topológica de estados de borde en sistemas de Floquet modulados periódicamente [31], así como de aislantes ferromagnéticos [32].

Hasta ahora, los efectos topológicos han sido mayormente explorados en sistemas Hermíticos [33, 34]. Sin embargo existe un creciente interés en analizar estructuras topológicas en donde se introducen pérdidas y ganancias balanceadas, es decir, en sistemas \mathcal{PT} -simétricos. Como fue mostrado por Carl M. Bender y Stefan Boetcher [35], los sistemas \mathcal{PT} -simétricos constituyen un subconjunto importante de los sistemas abiertos cuánticos y clásicos, cuyos correspondientes Hamiltonianos son invariantes bajo la operación combinada de las reflexiones espaciales y temporales. Notablemente, dependiendo de la tasa de pérdida-ganancia, estos sistemas pueden exhibir un espectro energético puramente real o parcialmente complejo. En el primer caso, se dice que el sistema tiene una simetría \mathcal{PT} no rota, mientras que si el sistema tiene un espectro parcial o completamente complejo, se dice que el sistema se encuentra en la fase rota de la simetría \mathcal{PT} [1, 36–39].

Recientemente, se ha mostrado que las transiciones de fase topológicas pueden ocurrir en sistemas fotónicos no-Hermíticos \mathcal{PT} -simétricos [17, 40], así como en redes fotónicas hexagonales con terminaciones *armchair* [2]. La existencia de protección topológica en sistemas no-Hermíticos ha dado como

resultado la creación de una nueva línea de investigación la cual está enfocada en el desarrollo de *láseres topológicos* [41–43]. Debido a estos descubrimientos, se han dedicado muchos esfuerzos a investigar las características y cualidades de la interacción entre topología y la simetría \mathcal{PT} [9, 44–47]. En particular, un reciente trabajo de Xiao y colaboradores [48], ha demostrado la existencia de estados de borde protegidos topológicamente en redes fotónicas unidimensionales con simetría \mathcal{PT} rota, mostrando de este modo que la simetría \mathcal{PT} no es una condición necesaria para la observación de estados de borde unidimensionales.

En esta tesis, continuamos esta investigación y presentamos el primer estudio en la emergencia de estados de borde topológicos en redes no-Hermíticas bidimensionales con ganancias y pérdidas intercaladas. Como un modelo prototipo utilizamos una red de Haldane para mostrar que los estados de borde pueden emerger cuando el espectro energético del sistema no es totalmente real. Además, encontramos que este comportamiento es universal en el sentido de que los resultados se obtienen sin importar si el sistema tiene terminación *zigzag*, *bearded* o *armchair*. Estos resultados contrastan con otros previos, en donde la observación de los estados de borde en redes hexagonales \mathcal{PT} -simétricas estaba condicionada a bordes con terminación *armchair* [2]. Nuestros resultados por lo tanto, ayudan a esclarecer el rol de las ganancias y pérdidas en los fenómenos topológicos dos dimensionales y demuestran que la protección topológica es un fenómeno que existe incluso en configuraciones no-Hermíticas.

Aislantes topológicos

Siempre que uno se enfrenta con sistemas de muchas partículas, surgen fenómenos que no podrían ser predichos mediante la descripción de sistemas con una o dos partículas. Estos fenómenos colectivos han dado pauta para el entendimiento de la naturaleza macroscópica mediante la física estadística. En el estudio de los fenómenos emergentes es fundamental tener una definición de igualdad entre dos sistemas, la cual es esencialmente distinta a la que entendemos en sistemas de pocas partículas, debido a que en un sistema de muchas partículas es imposible notar cuando faltan una dos o cien de éstas. Una de las definiciones de igualdad que es más útil en esos sistemas es construida mediante un importante resultado (que será mencionado y utilizado más adelante) llamado el *teorema adiabático*. Si uno trata de imaginar la evolución suave de las ecuaciones de movimiento de un sistema, verificando a cada instante que los estados base y excitados han sido mapeados uno a uno a otros estados base y excitados, se dará cuenta que cuando el sistema tiene pocas partículas, esto se cumple siempre [49]. Sin embargo, cuando el número de partículas es grande, es posible que el variar un poco las ecuaciones de movimiento del sistema resulte en un cambio abrupto en los estados base y excitados, y por tanto ya no exista un mapeo uno a uno entre los sistemas antes y después de esta transición. Entonces, se dice que dos fases de la materia son las mismas si existe una transformación suave entre las dos es decir, sin que suceda una transición y que no son iguales si tal mapeo no existe. Con esta definición, conductores, semiconductores, aislantes y superconductores son fases electrónicas de la materia distintas, pero dos metales con un ligero cambio en la magnitud de la repulsión electrón-electrón, son iguales. Esta definición de igualdad en física es sumamente útil, ya que nos permite encontrar un sistema simple que se relacione adiabáticamente con uno muy complicado y estudiar en el primero las propiedades y fenómenos emergentes para después mapearlas adiabáticamente al sistema complejo. Evitando así tener que encontrar una descripción de primeros principios del sistema comunmente insoluble analíticamente.

A continuación mostraremos el ejemplo paradigmático del aislante topológico más sencillo y el primero en ser descubierto: el efecto Hall Cuántico entero (IQHE), el cual permite establecer las bases de la protección topológica que deseamos estudiar en esta tesis; a pesar de que el modelo que aquí estudiaremos sea ligeramente más complicado, dado que existe un mapeo adiabático entre ambos sistemas, la

descripción es equivalente.

El estado aislante es una clasificación de los sistemas de materia condensada el cual tiene como característica principal una brecha de energía en su estructura de bandas que es más grande que la temperatura a la cual tales materiales existen. Es decir, que pasar un electrón de la banda de valencia a la de conducción requiere una mayor cantidad de energía que fundir o destruir el material.

Algunos ejemplos de materiales aislantes dentro de esta clasificación son:

- Aislantes hechos de metales covalentes, es decir semiconductores. Los cuales se caracterizan por tener electrones disponibles para ser transferidos de la banda de valencia a la de conducción con un costo de energía bajo. A temperatura nula, sin embargo, el estado de este tipo de materiales es aislante. Un ejemplo de este tipo de aislante es el GaAs (arsenuro de galio). El tamaño de la brecha en este tipo de materiales es de aproximadamente 1eV. Ver figura 3.1 (a)
- Aislantes atómicos: Este tipo de aislantes están constituidos de átomos con enlaces iónicos, es decir enlaces generados por la fuerza de atracción entre iones cargados positiva y negativamente. En este tipo de aislantes, los electrones se encuentran ligados a los iones y por tanto existe una brecha de energía entre los electrones de valencia y los conductores. El tamaño de la brecha energética en este tipo de materiales es de aproximadamente 10eV. Ver figura 3.1 (b)
- Finalmente, podemos considerar al vacío también como un aislante, en el cual existe una brecha energética muy grande, tal que para que un electrón pase de un estado de menor a uno de mayor energía se requiere una brecha de aproximadamente 10MeV. Ver figura 3.1 (c).

Durante el siglo pasado se creía que esta era la clasificación mas general de aislantes [50]. Sin embargo en 1980, K. Von Klitzing, G. Droda y M. Pepper realizaron un experimento que posteriormente ayudó a encontrar una nueva clasificación de aislantes [29]. En éste, encontraron que la conductividad de Hall se cuantiza cuando el campo magnético que atraviesa la placa metálica es muy grande ($\approx .18T$) y la temperatura es muy baja ($\approx 1.5K$) [29].

Los resultados de la resistividad transversal y longitudinal que Von Klitzing encontró se muestran en la figura 3.2. Se encontró que la resistividad de Hall está dada por

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad \nu \in \mathcal{N}. \quad (3.1)$$

El escalar ν se ha medido actualmente con gran precisión y se ha corroborado que es un entero hasta la novena cifra decimal [51]. Es necesario mencionar que el trabajo de Von Klitzing fue totalmente experimental, es decir no pudieron encontrar una explicación teórica de los resultados que obtuvieron, de hecho la principal aplicación que encontraron de su artículo fue la de medir con alta precisión la

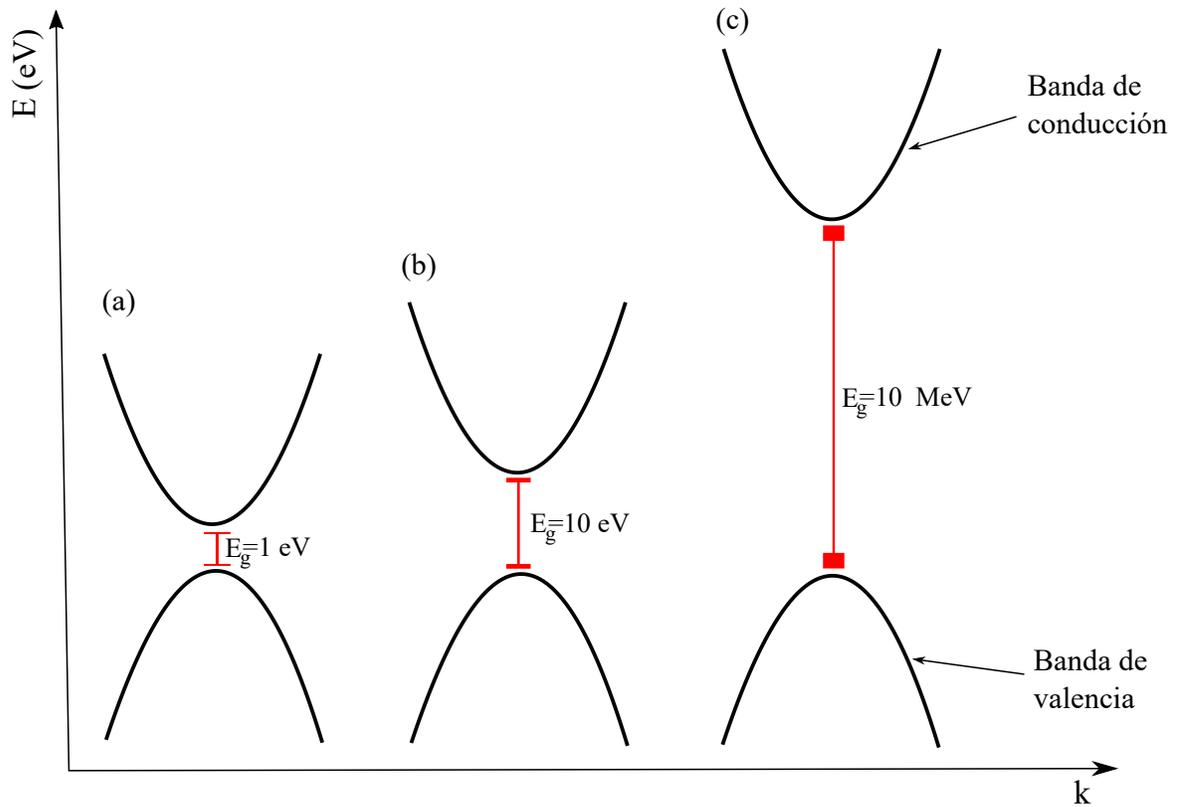


Figura 3.1: Esquema de la clasificación de aislantes de acuerdo al ancho de su brecha energética. En (a) se muestra el diagrama de bandas de un aislante covalente, en (b) se ilustra un aislante atómico, mientras que en (c) se muestra el diagrama del vacío como aislante.

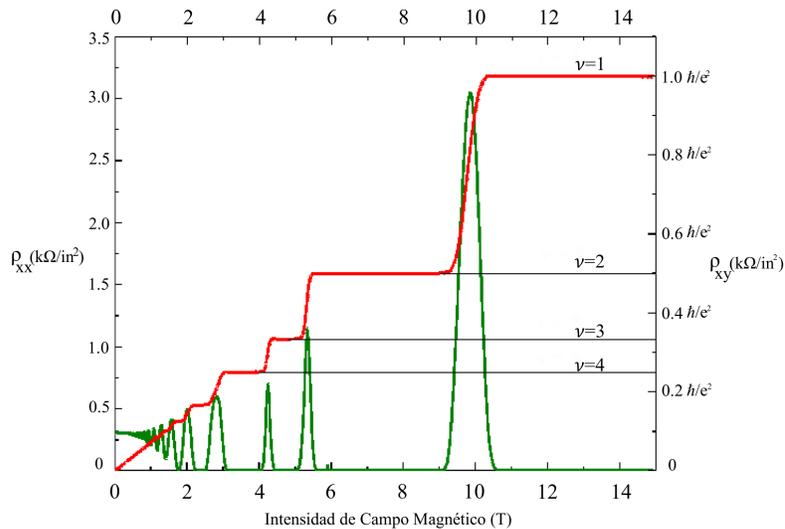


Figura 3.2: Resistividad longitudinal ρ_{xx} (en verde) y transversal ρ_{xy} (o de Hall, en rojo) en una placa metálica en función de la intensidad del campo magnético que la atraviesa.

constante de estructura fina dada por $\alpha = \frac{e^2}{hc4\pi\epsilon_0}$, o en términos de la resistividad de Hall

$$\alpha = \frac{\mu_0 c}{2\nu\rho_{xy}},$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y c la velocidad de la luz en el vacío.

Hasta ahora los resultados del experimento habían sido novedosos pero intuitivos ya que el efecto Hall clásico también predecía un comportamiento creciente de la resistividad en función de la magnitud del campo magnético. Von Klitzing, G. Dorda y M. Pepper pensaron que si eliminaban las impurezas de la placa, podrían obtener mejores resultados en cuanto a la precisión de la cuantización de la resistividad, es decir los platós de la gráfica de la resistividad de Hall, se volverían mas prominentes. Sin embargo, sorpresivamente notaron que el limpiar la placa hacía que los platós (*plateaux*) desaparecieran, y cuando le ponían más impurezas, los platós aumentaban de tamaño. Esto último sí fue totalmente contra intuitivo y un año después Robert B. Laughlin lo explicó de manera teórica [52]. La idea básica es que los niveles de Landau se ensanchan en función del desorden en el sistema. Los estados con energía mayor o menor que la del sistema sin desorden, se vuelven estados localizados (y por tanto viven en el bulto del sistema), mientras que los estados con energía parecida a la del sistema sin desorden son estados extendidos (y sólo pueden extenderse en el borde del arreglo). A continuación mostramos la deducción del IQHE, la cual es la base en la descripción de cualquier aislante topológico de Chern, como el que se estudia en esta tesis.

3.1. Efecto Hall Cuántico entero

El Hamiltoniano de un electrón en una placa 2D sujeto a un campo magnético en dirección \hat{z} es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} + e\hat{A})^2, \quad (3.2)$$

donde \hat{A} es el operador de potencial vectorial que cumple que $\nabla \times \hat{A} = B\hat{z}$. Mientras que el momento canónico está dado por

$$\hat{p} = m\hat{v} - e\hat{A}.$$

Si elegimos la norma de Landau $\hat{A} = xB\hat{y}$, obtenemos

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2]. \quad (3.3)$$

Este Hamiltoniano es invariante ante traslaciones en la dirección \hat{y} , es decir, se conserva el momento \hat{k}_y , por lo que $[\hat{H}, \hat{k}_y] = 0$. Por tanto podemos plantear el siguiente ansatz para los eigenestados de energía de (3.3)

$$\psi_{k_y}(x, y) = e^{ik_y y} f_{k_y}(x), \quad (3.4)$$

donde $e^{ik_y y}$ describe a una partícula libre en dirección y , mientras que $f_{k_y}(x)$ es una función que sólo depende de la coordenada x . Al aplicarle (3.3) a (3.4) obtenemos

$$\hat{H}_{k_y} = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{\omega_B^2}{2} (x + k_y \ell_B^2). \quad (3.5)$$

Es el Hamiltoniano de un oscilador armónico con centro en $x = -k_y \ell_B^2$ donde $\ell_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ es la *longitud magnética* del sistema. Las energías del oscilador son, propiamente,

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2).$$

Por lo tanto las eigenfunciones de (3.3) son

$$\psi_{n,k_y}(x, y) = e^{ik_y y} H_n(x + k_y \ell_B^2) e^{-\frac{(x+k_y \ell_B^2)^2}{2\ell_B^2}}, \quad (3.6)$$

donde H_n es el n-ésimo polinomio de Hermite y la función gaussiana sirve para normalizar la función alrededor de $x = -k_y \ell_B^2$, mientras que la onda plana deslocaliza al estado en la dirección y . Dado que las energías no dependen de k_y , tendrán una gran degeneración, a continuación se calcula.

3.1.1. Degeneración de la energía

Confinemos el sistema a un rectángulo de área $A = L_x L_y$. Obtenemos entonces condiciones de borde finitas, como una partícula encerrada en una caja y por tanto

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad m \in \mathcal{Z} \quad (3.7)$$

lo cual implica que $\Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y}$. Las funciones están localizadas en $x_0 = -k_y \ell_B^2$ y por condiciones de frontera $0 \leq x_0 \leq L_x$ es decir

$$-\frac{L_x}{\ell_B^2} \leq 0.$$

Por lo que la cantidad de estados por nivel de energía es

$$N = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-\frac{L_x}{\ell_B^2}}^0 dk_y = \frac{eBA}{2\pi\hbar} = \frac{\phi}{\phi_0}, \quad (3.8)$$

donde $\phi_0 \equiv \frac{2\pi\hbar}{e}$ es el cuanto de flujo y $\phi = L_x L_y B = AB$ es el flujo total del sistema. Dado que los estados están extendidos en la dirección y y localizados en x , se forman estados de borde o *edge-states*, los cuales son característicos de este tipo de sistemas los cuales son aislantes en el bulto y conductores perfectos en el borde, ver figura 3.4.

Para observar los estados de borde, debemos modificar las condiciones de frontera. Éstas deben ser finitas en al menos una dirección y periódicas en la otra. Para lograrlo, consideramos un pozo de potencial que se levanta suavemente en los bordes de la coordenada x . Ver figura 3.3.

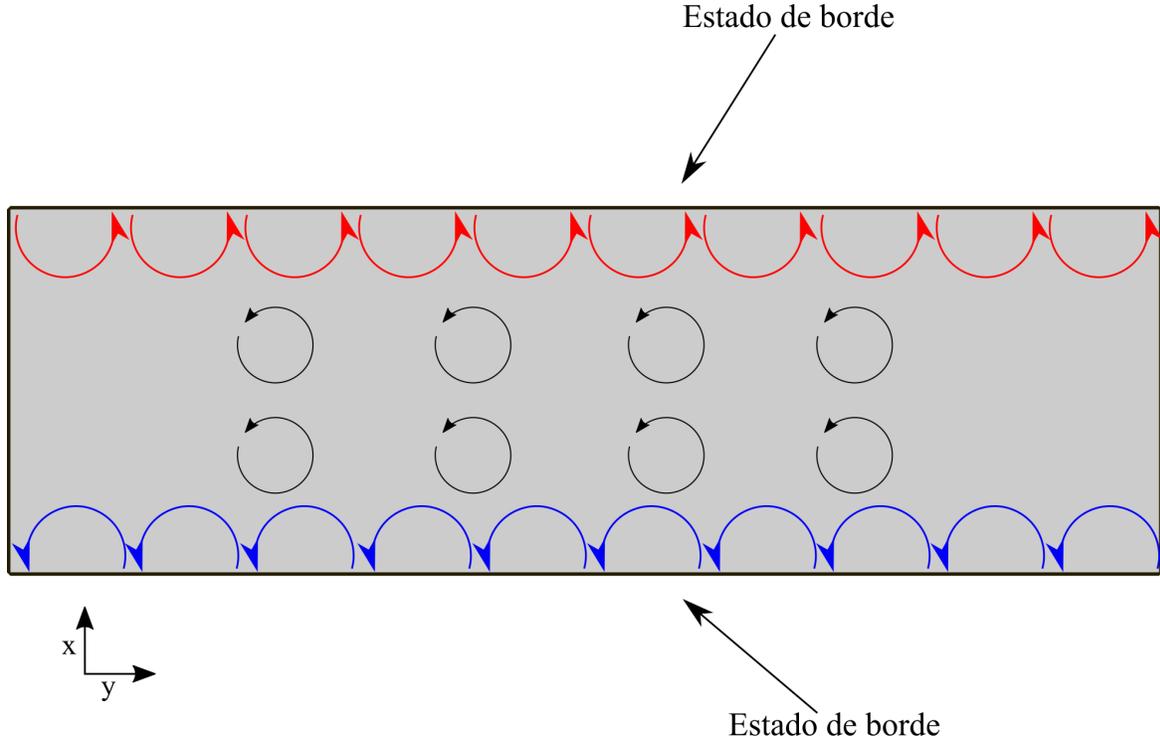


Figura 3.3: Efecto Hall cuántico entero. Estados de borde extendidos (en líneas azul y rojo) y estados localizados en el bulto (líneas negras) en una placa metálica.

Como los estados son localizados en la dirección x y extendidos en y , podemos expandir este potencial cerca del lugar donde los estados se localizan en x , es decir en $x_0 = -k_y \ell_B^2$. Y como es un potencial suave cuadrático, tenemos que su expansión de Taylor es de la forma

$$V(x_0) + x \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0} + \dots$$

por lo que el Hamiltoniano (3.5) modificado se ve

$$\hat{H}_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_B^2 (k_y \ell_B^2 + x)^2 + x \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_0}, \quad (3.9)$$

completando el cuadrado reconocemos el Hamiltoniano

$$\hat{H}_{k_y} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_B^2 \left[\left(k_y \ell_B^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{m \omega_B^2} \right) + x \right]^2 - \frac{1}{2m \omega_B^2} - k_y \ell_B^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (3.10)$$

de un oscilador armónico desplazado en x por $k_y \ell_B^2 + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{1}{m \omega_B^2}$. Las energías correspondientes son

$$E_{n, k_y} = \hbar \omega_B (n + 1/2) - \frac{1}{2m \omega_B^2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - k_y \ell_B^2 \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.11)$$

La velocidad de grupo v_y de los paquetes de onda está dada por

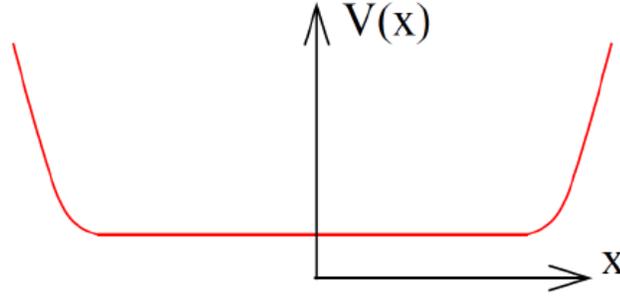


Figura 3.4: Modelo de los bordes de la placa metálica como un pozo de potencial suave en los bordes de la coordenada x . Imagen tomada de [51].

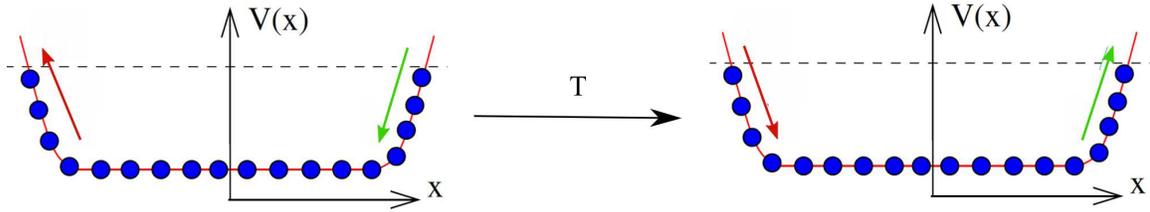


Figura 3.5: Antisimetría de Inversión Temporal debida a la presencia del campo magnético. La velocidad de grupo de las partículas depende de en qué lado de la muestra se encuentren.

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_{n,k_y}}{\partial k_y} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Notamos que en este sistema, las velocidades de las partículas son opuestas si las partículas están en extremos opuestos de la muestra. Por lo que al invertir la evolución temporal obtenemos un sistema asimétrico, ver figura 3.5. Esto se debe a la presencia del campo magnético externo [51].

Ahora introduzcamos una diferencia de potencial electro-químico $\Delta\mu$ entre los dos bordes y calculemos la corriente en la dirección y (imponiendo de nuevo condiciones de borde finitas en esta dirección),

$$dI_y = \frac{dQ}{dt} = -\frac{e}{\Delta t} = -\frac{e}{\Delta t} \frac{\Delta y}{L_y} = -\frac{e}{L_y} \frac{\Delta y}{\Delta t} = -\frac{e}{L_y} v_y = \frac{e}{L_y} \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} dk_y.$$

Supongamos que únicamente el primer nivel de Landau se encuentra lleno, entonces la corriente es

$$I_y^{(1)} = \frac{e}{L_y} \int_0^{\frac{2\pi}{L_y}} dk_y \frac{L_y}{2\pi} \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e}{2\pi\hbar} \Delta\mu.$$

El voltaje de Hall a través de la placa, V_H está dado por $\frac{\Delta\mu}{e}$, por lo que la conductividad transversal de Hall es

$$\sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}. \quad (3.13)$$

Para dos niveles de Landau llenos, la conductividad es

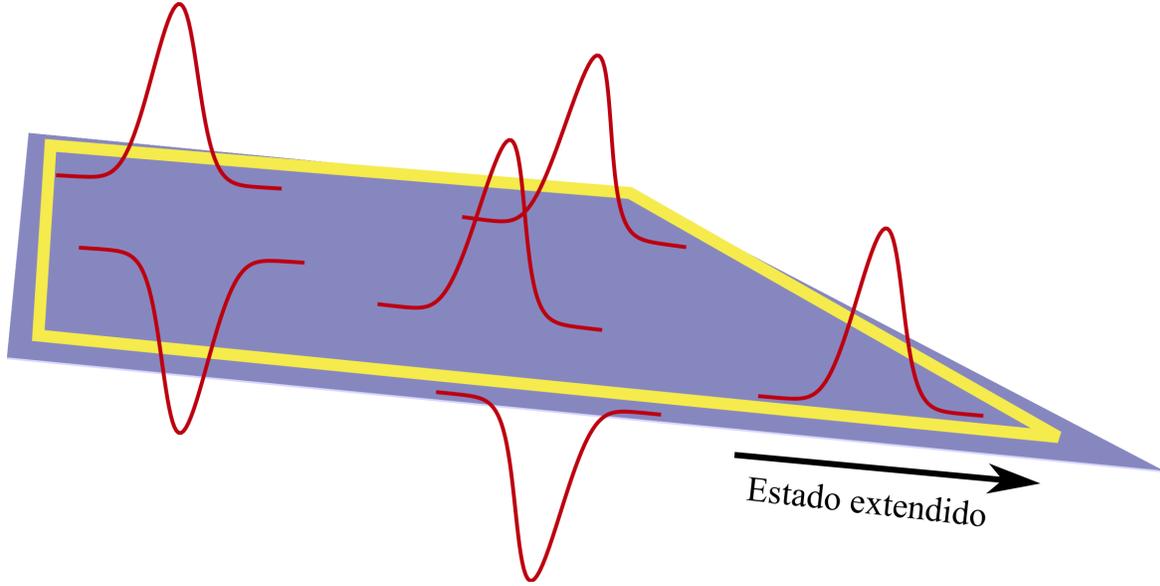


Figura 3.6: Perspectiva del potencial aleatorio (en rojo) sobre la muestra metálica. La intensidad y distribución de los defectos simula las imperfecciones del material. En amarillo se muestra un estado extendido en el borde que se propaga a pesar de las imperfecciones.

$$I_y^{(2)} = \frac{e}{L_y} \int_0^{\frac{4\pi}{L_y}} \frac{L_y}{2\pi} \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e\Delta\mu}{\pi\hbar}, \quad (3.14)$$

por lo que la conductividad transversal en este caso es

$$\sigma_{xy}^{(2)} = \frac{I^{(2)}}{V_H} = \frac{e^2}{\pi\hbar}. \quad (3.15)$$

En general, para ν niveles de Landau llenos la conductividad es

$$\sigma_{xy}^{(\nu)} = \nu \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad (3.16)$$

recuperando el resultado experimental de K. Von Klitzing.

3.1.2. El rol del desorden

Algo que no hemos tomado en cuenta en nuestro modelo del efecto Hall cuántico entero es algo inherente a cualquier sistema físico: la suciedad e imperfecciones de la muestra. El desorden causado por estas imperfecciones es comúnmente fuente de errores en un experimento. Sin embargo, como hemos comentado previamente, en el caso del IQHE el desorden juega un rol muy importante en la localización de los estados.

Las impurezas de la placa pueden ser modeladas con un potencial aleatorio que tenga máximos y mínimos suaves, V . Ver figura 3.6 (esquema).

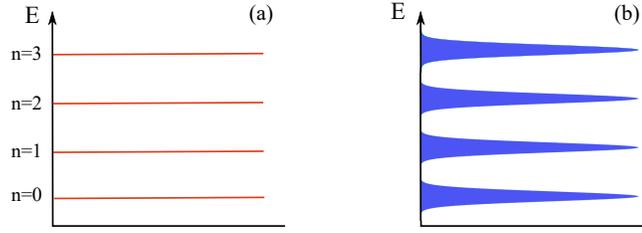


Figura 3.7: Niveles de Landau para el IQHE. Se muestra la densidad de estados por cada nivel de energía (a) para una placa metálica sin desorden y (b) para una placa metálica con desorden aleatorio.

El efecto que tendrá la inserción de este potencial, en primera instancia es romper la degeneración de los niveles energéticos y hacerlos más anchos. De modo que uno de los requisitos que debe cumplir es no hacer que éstos se encimen, lo cual se logra al pedir que

$$V \ll \hbar\omega_B \quad (3.17)$$

Es decir, la placa debe tener una cantidad finita de desorden, para cualquier fin práctico esto significa que la placa debe estar muy limpia. El desorden es importante, pero en exceso ciertamente arruina el experimento.

El espectro de energía del sistema en presencia de desorden cambia los niveles de Landau de su forma uniformemente espaciada, al espectro que se muestra en la figura 3.7(b) (esquema) [51] .

Otro de los fenómenos causados por el desorden es de particular relevancia y al igual que el rompimiento de la degeneración, será explicado fenomenológicamente. Se trata de que el desorden causa que muchos estados extendidos se localicen, debido a que la longitud de camino medio entre colisiones disminuye considerablemente [53]. Esto sucede si el potencial aleatorio varía en distancias mucho mayores a la longitud magnética del sistema, es decir,

$$\|\nabla V\| \ll \frac{\hbar\omega_B}{\ell_B}. \quad (3.18)$$

Dado que los estados con energía mayor o menor que la del nivel de Landau son posibles gracias al potencial aleatorio, todos los estados que no estén en el borde de la placa se volverán localizados, pues al encontrar un pico o un valle de V , sólo podrán girar alrededor del punto crítico en dirección horaria o antihoraria según su naturaleza. Mientras que todos los estados que se encuentran en el borde de la placa, serán débilmente afectados por el nuevo potencial y seguirán conservando la energía de su nivel de Landau correspondiente, así como su trayectoria extendida por el borde.

El resultado de esto es que los estados con energía similar a la del nivel de Landau (ya sea mayor o menor), son localizados. Mientras que sólo los estados con energía en el centro de la banda, serán extendidos [52], ver figura 3.8 (esquema).

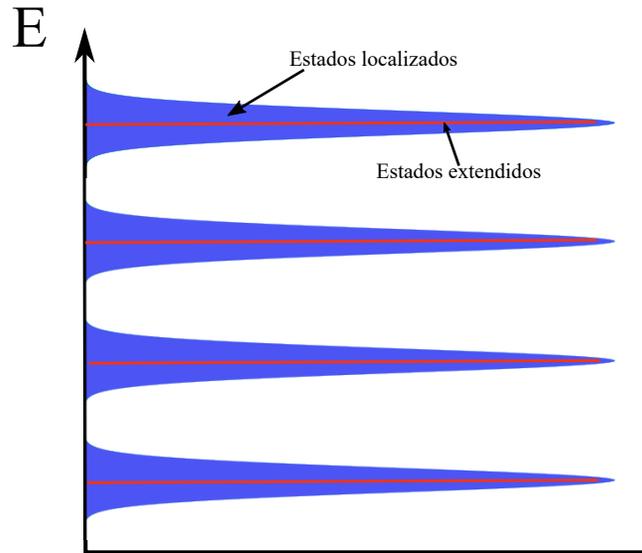


Figura 3.8: El desorden causa también que los estados localizados se acumulen fuera del nivel de Landau, mientras que los extendidos dentro de éste. Esta es la razón por la cual la conductividad transversal está cuantizada.

3.1.3. Conductividad y desorden

Dado que únicamente los estados extendidos pueden transportar carga de un lado a otro de la muestra, entonces sólo este tipo de estados contribuyen a la conductividad. Supongamos que hemos poblado todos los estados extendidos de un nivel de Landau fijo. Veamos qué sucede cuando disminuimos B con el número de electrones fijo, n . Cada nivel de Landau puede acomodar algunos electrones. Sin embargo, en vez de que éstos salten directamente al siguiente nivel de Landau, primero se comienzan a poblar los estados localizados y como éstos no contribuyen a la conductividad, esta se queda constante. Esto causa la formación de los plató que K. Von Klitzing observó experimentalmente, cuya conductividad o resistividad se queda constante para algunos valores de B [52].

3.1.4. La fase de Berry y el rol de la topología

A continuación discutimos el origen de lo *topológico* en este tipo de aislantes, que básicamente se debe a que al modificar el sistema de manera suave, no modifica las propiedades físicas que lo caracterizan, como la conductividad o como veremos a continuación, la existencia de estados que se propagan en el borde sin responder a defectos de la red.

Consideremos un sistema descrito por un Hamiltoniano que depende de un parámetro $\mathbf{R}(t)$, por ejemplo un campo eléctrico o magnético que varía en el tiempo. Nos interesa conocer la *evolución adiabática* del sistema, es decir conocer los eigenestados del sistema cuando $\mathbf{R}(t)$ varía lentamente en comparación a la escala de energía más pequeña del sistema, como se hizo en la sección anterior. Los eigenestados instantáneos $|n(\mathbf{R}(t))\rangle$ y energías $E_n(\mathbf{R}(t))$ se obtienen diagonalizando el Hamiltoniano $H(\mathbf{R}(t))$ para

cada valor de $\mathbf{R}(t)$, es decir

$$H |n(\mathbf{R}(t))\rangle = E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (3.19)$$

El teorema adiabático [54] establece que la evolución temporal de un eigenestado instantáneo al tiempo t_0 es también un eigenestado instantáneo al tiempo t , salvo una fase. Averiguemos cuánto vale esa fase, partiendo del estado inicial

$$|\psi_0\rangle = |n(\mathbf{R}(0))\rangle$$

entonces por el teorema adiabático sabemos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\phi(t)} |n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (3.20)$$

y el valor de $\phi(t)$ se obtiene al sustituir (3.20) en la ecuación de Schrödinger y (3.19)

$$E_n(\mathbf{R}(t)) |n(\mathbf{R}(t))\rangle = \hbar \frac{d\phi}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle + i\hbar \frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle.$$

Proyectando con el bra $\langle n(\mathbf{R}(t))|$ y suponiendo que los estados se encuentran normalizados obtenemos

$$\hbar \frac{d}{dt} \langle n(\mathbf{R}(t))| = E_n(\mathbf{R}(t)) - i\hbar \langle n(\mathbf{R}(t))| \frac{d}{dt} |n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (3.21)$$

lo cual al integrar nos da

$$\phi(t) = \frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{R}(t')) dt' - i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(t'))| \frac{d}{dt'} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle dt', \quad (3.22)$$

el primer sumando corresponde a la fase dada por la evolución temporal unitaria, mientras que el segundo es la fase de Berry para el eigenestado n ,

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \langle n(\mathbf{R}(t'))| \frac{d}{dt'} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle dt'. \quad (3.23)$$

La cual, en términos de la derivada del parámetro $\mathbf{R}(t)$, mediante el cambio de variable

$$\frac{d}{dt'} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle dt' = \frac{d}{d\mathbf{R}} |n(\mathbf{R}(t'))\rangle \frac{d\mathbf{R}}{dt'} dt' = \frac{d}{d\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \cdot d\mathbf{R},$$

está dada por

$$\gamma_n = i \int_{\alpha} \langle n(\mathbf{R})| \frac{d}{d\mathbf{R}} |n(\mathbf{R})\rangle \cdot d\mathbf{R}, \quad (3.24)$$

donde α es una trayectoria suave en el espacio de \mathbf{R} que varía con el tiempo de 0 a t . Podemos ver al integrando como un vector que depende de \mathbf{R} para cada n ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{R})_n \equiv i \langle n(\mathbf{R}) | \frac{d}{d\mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle \quad (3.25)$$

la cual es llamada la *conexión de Berry*. Por tanto

$$\gamma_n = \int_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{R})_n \cdot d\mathbf{R}.$$

Notamos una similitud con el caso electromagnético y el potencial vectorial. Ocupando el teorema de Stokes en el espacio de \mathbf{R} ,

$$\gamma(\mathbf{R}) = \oint_{\alpha} \mathbf{A}(\mathbf{R})_n \cdot d\mathbf{R} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{R})_n) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F}(\mathbf{R})_n \cdot d\mathbf{S}.$$

Del mismo modo que en el caso magnético podemos definir un flujo de Berry $\int_S \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}$ donde $\mathbf{F}(\mathbf{R})$ es la curvatura de Berry. De aquí, definimos análogamente al número de monopolos magnéticos, el número de *Chern* C , dado por

$$C \equiv \frac{1}{2\pi} \iint_S \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.26)$$

El número de Chern no cambia si la transformación que le hacemos al sistema no lo modifica de manera que la brecha de energías se cierre. Todos los sistemas que cumplen lo anterior se encuentran en una fase topológica no trivial (cuando $C \neq 0$).

Existe una manera alternativa de obtener el número de Chern mediante un teorema importante de geometría diferencial llamado el teorema de Gauss-Bonnet, el cual establece que

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K dA = 2(1 - g). \quad (3.27)$$

En el lado izquierdo de (3.27), (K) representa la curvatura Gaussiana total de una superficie cerrada suave y dos dimensional, mientras que del lado derecho se establece que ésta es siempre un número entero, $2(1 - g)$, donde g es el *genus*, el cual caracteriza la topología de la superficie, es decir, el número de agujeros en ella. Una prueba rigurosa de este importante teorema puede ser consultada en [55].

La siguiente tabla hace una comparación entre la fase de Berry y la fase electromagnética.

Potencial vectorial	$\mathbf{A}(\mathbf{r})$	$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \langle n(\mathbf{R}) i \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle$	Conexión de Berry
Fase electromagnética	$\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$	$\oint \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}$	Fase de Berry
Campo magnético	$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$	$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}(\mathbf{R})$	Curvatura de Berry
Flujo magnético	$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$	$\int_S \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}$	Flujo de Berry
Monopolos magnéticos	$\frac{e}{h} \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$	$C = \frac{1}{2\pi} \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{S}$	Número de Chern

Laughlin demostró en 1981 [52] que la conductividad del IQHE es un invariante topológico para cada plató diferente. Esto hizo que existiera una nueva clasificación de estados de la materia, en los que de

igual manera que en la física estadística, puede o no existir una transición de fase topológica. A pesar de que la descripción anterior del IQHE parte de un modelo particular, en realidad es útil para describir a todos los aislantes topológicos de Chern, los cuales cumplen con las siguientes características

- El sistema se encuentra descrito por un Hamiltoniano de una sola partícula, cuyo espectro se descompone en bandas, cada una de las cuales está parametrizada por un momento \mathbf{k} , el cual se encuentra sobre la superficie de un toro \mathbf{T}^2 . Esto lo cumple cualquier modelo de partículas en una red [51].
- En el sistema las partículas no interactúan entre sí.
- Existe una brecha de energía y la Energía de Fermi se encuentra en medio de ésta. Todas las bandas debajo de esta energía están llenas, mientras que las que se encuentran por arriba de ésta, están vacías. Es decir, el sistema es un aislante.

Siempre que estos criterios se cumplan, podemos asignarle al sistema un valor entero, el cual es topológicamente invariante, $C \in \mathbb{Z}$ y está dado en general por

$$C = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}^2} F_{xy} d^2k, \quad (3.28)$$

integrado sobre la primera zona de Brillouin dos dimensional, la cual es \mathbf{T}^2 .

3.2. Modelo de Haldane

En esta tesis consideramos un modelo propuesto por Duncan Haldane en 1988 [28], el cual es un modelo paradigmático de un aislante de Chern. Haldane descubrió que la pieza fundamental del IQHE es el rompimiento de la simetría de inversión temporal como consecuencia del campo magnético transversal externo. El modelo de Haldane contiene la ruptura de esta simetría como una característica intrínseca de la red sin necesidad de un campo externo y al mismo tiempo cumple con los requerimientos mencionados en la sección anterior.

3.2.1. Simetrías en el modelo de Haldane

La red de Haldane parte de un modelo de amarre fuerte en una red hexagonal y es por lo tanto invariante a traslaciones y además, para algunos valores de los parámetros (ϕ, M) se rompe la simetría de inversión temporal. Estas características y la simpleza de su descripción, le dan una gran versatilidad para estudiar aislantes de Chern en diferentes sistemas [10, 56, 57].

Este modelo describe sitios independientes en una red *honeycomb* o de panal de abeja los cuales están acoplados con sus primeros vecinos a distancia a mediante los vectores

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(1, -\sqrt{3}) \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(1, \sqrt{3}) \quad \mathbf{a}_3 = (-a, 0), \quad (3.29)$$

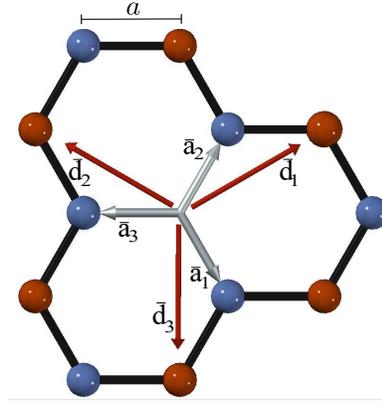


Figura 3.9: Celda unitaria de la red hexagonal. En ella se muestran los vectores de periodicidad $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ y los de desplazamiento $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, así como la constante de la red a , que en esta tesis se toma como la unidad.

como se muestra en la figura 3.9.

La red de Bravais del modelo de Haldane puede ser generada por los vectores

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{d}_2 = \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{d}_3 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \quad (3.30)$$

como se muestra en la Fig. 3.10.

Como el último vector es una combinación lineal de los otros dos ($\mathbf{d}_3 = -\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$), para crear la estructura cristalina completa, es suficiente elegir un vector \mathbf{a}_i y dos vectores \mathbf{d}_i [58]. El Hamiltoniano de Haldane en el formalismo de segunda cuantización es [28]

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3. \quad (3.31)$$

En donde

$$\hat{H}_1 \equiv t_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j \quad (3.32)$$

forma la estructura con geometría hexagonal.

En (3.32), \langle, \rangle denota la suma sobre vecinos cercanos y t_1 es la magnitud del acoplamiento constante entre primeros vecinos. Los operadores de creación y aniquilación de excitaciones se denotan por \hat{c}_i^\dagger y \hat{c}_i , respectivamente. Esta geometría es indispensable para obtener los puntos de Dirac en el espacio de momentos y romper ahí la simetría de inversión (IS) y la de inversión temporal (TRS) para obtener estados protegidos topológicamente [58,59]. Lo primero es logrado al añadir un acoplamiento a segundos vecinos en general imaginario [28], el cual está dado por

$$\hat{H}_2 \equiv t_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} e^{\pm i\phi_{i,j}} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j, \quad (3.33)$$

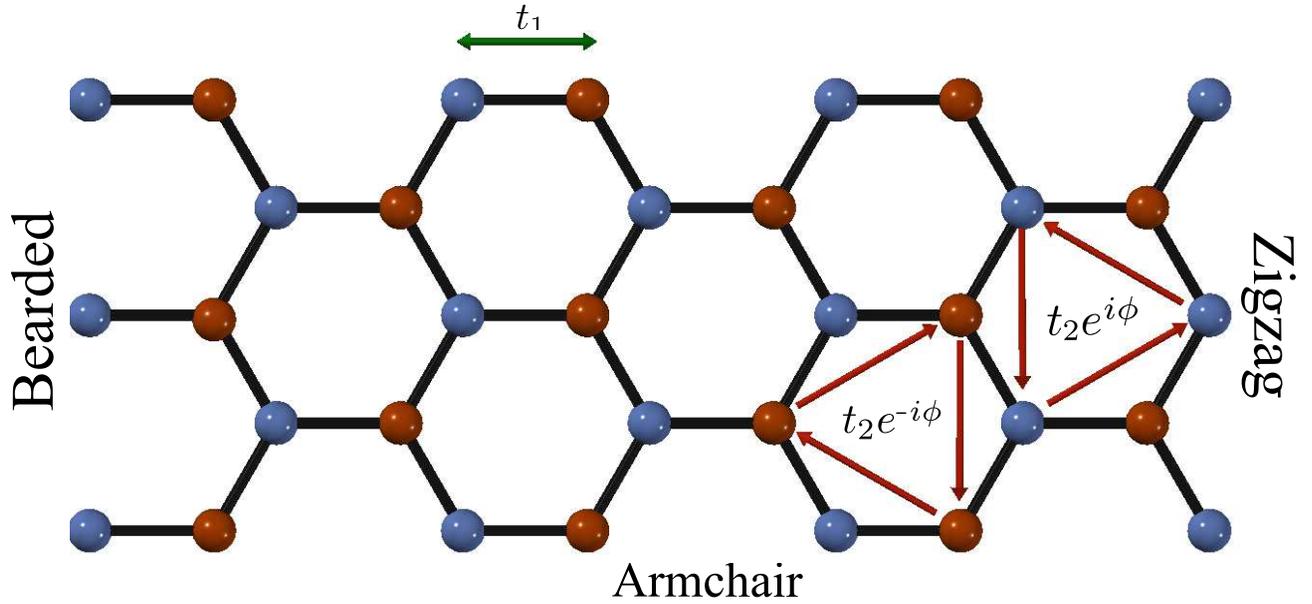


Figura 3.10: Red de Haldane. Podemos observar la distribución espacial de los sitios en el modelo de Haldane. Se trata de una red tipo grafeno con acoplamiento a primeros vecinos cercanos de magnitud t_1 y a segundos vecinos cercanos $e^{\pm i\phi}t_2$, como se discute en el texto. Con color azul (naranja) se muestran los sitios con ganancias (pérdidas). En los bordes del arreglo se muestran los tres diferentes tipos de geometrías estudiados en esta tesis. Es importante mencionar que sólo pueden ser mezclados hasta dos de éstos en un arreglo finito.

en donde la fase compleja $e^{\pm i\phi_{ij}}$ esta definida de acuerdo a la orientación del acoplamiento, siendo positiva (negativa) para el sentido horario (antihorario), como se muestra en la figura 5.5. Es importante mencionar que el acoplamiento es a segundos vecinos, lo cual está señalado en $\langle\langle, \rangle\rangle$. Este término rompe la TRS al variar ϕ . Este parámetro controla la parte imaginaria del acoplamiento y permite que el Hamiltoniano conmute con el operador de TRS, \hat{T} , para $\phi \in \{0, \pi\}$, mientras que los vuelve incompatibles para $\phi \neq \{0, \pi\}$ [58].

Finalmente, el tercer término dado por

$$\hat{H}_3 \equiv M \sum_{2j+1} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j - M \sum_{2j} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j,$$

y es útil para romper la simetría de inversión y así modificar el tamaño de la brecha energética por el parámetro M , y por tanto visualizar mejor los estados de borde. En esta tesis este término será útil para introducir las pérdidas y ganancias de energía en los sitios.

3.2.2. Análisis en el espacio de momentos

Dado que la red de Haldane es periódica, podemos escribir el Hamiltoniano de Haldane (5.1) en el espacio de momentos

$$H(\mathbf{k}) = \sum_{i=0}^3 h_i(\mathbf{k}) \sigma_i, \quad (3.34)$$

en donde

$$h_0 = 2t_2 \cos(\phi) \sum_{j=1}^3 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j) \quad (3.35)$$

$$h_1(\mathbf{k}) = t_1(1 + \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1)) + \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2), \quad (3.36)$$

$$h_2(\mathbf{k}) = t_1[\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1) - \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2)], \quad (3.37)$$

y

$$h_3(\mathbf{k}) = M - 2t_2(\sin(\phi)) \sum_{j=1}^3 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_j). \quad (3.38)$$

Mientras que σ_j son las matrices de Pauli y la identidad σ_0 . Los eigenvalores están dados por

$$E_{\pm}(\mathbf{k}) = h_0(\mathbf{k}) \pm \sqrt{\sum_{i=1}^3 h_i(\mathbf{k})^2} = h_0(\mathbf{k}) \pm \sqrt{h_3(\mathbf{k})^2 + |h(\mathbf{k})|^2}, \quad (3.39)$$

donde $h(\mathbf{k}) \equiv h_1(\mathbf{k}) + ih_2(\mathbf{k}) = t_1(1 + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_1} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_2})$.

La ecuación (3.39) define la estructura de bandas del modelo de Haldane. Con el fin de garantizar que las bandas con energía E_+ y E_- no se traslapen, es decir que $E_- \leq E_+$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$, necesitamos que $\frac{t_2}{t_1} < \frac{1}{3}$.

Si bien con esta condición, la desigualdad entre las energías no se invierte, sí existen a lo más dos puntos en donde las bandas se tocan, éstos están dados por las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^3 h_i(\mathbf{k})^2 = 0, \quad (3.40)$$

es decir, $h(\mathbf{k}) = 0$ y $h_3(\mathbf{k}) = 0$. Esto sólo sucede si $h_i(\mathbf{k}) = 0$ para todo i . A los \mathbf{k} que cumplen esta condición se les conoce como puntos de Dirac $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ y se obtienen de la ecuación $h(\mathbf{k}) = 0$.

$$e^{i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}_1} = e^{i2\pi/3} \quad (3.41)$$

$$e^{-i\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{a}_2} = e^{-i2\pi/3} \quad (3.42)$$

$$e^{i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{a}_1} = e^{-i2\pi/3} \quad (3.43)$$

$$e^{-i\mathbf{K}_2 \cdot \mathbf{a}_2} = e^{i2\pi/3}, \quad (3.44)$$

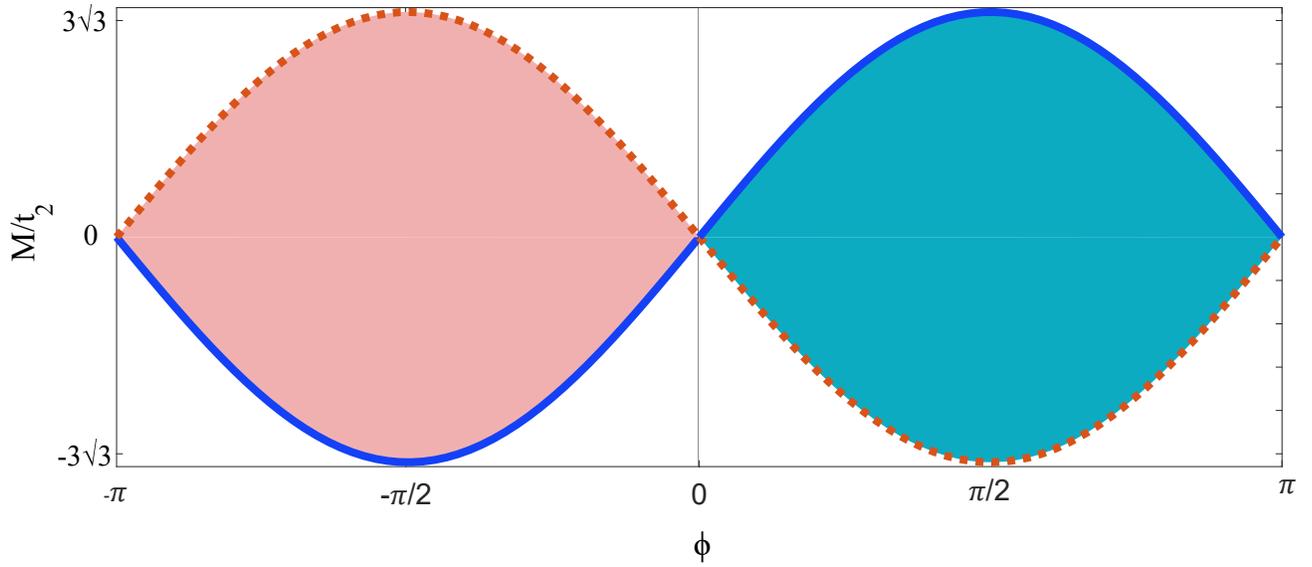


Figura 3.11: Gráfica del espacio de parámetros (ϕ, M) . Con línea punteada y naranja se muestra la gráfica de $h_3(\mathbf{k}_2) = 0$, mientras que con línea azul sólida la gráfica de $h_3(\mathbf{k}_1) = 0$. Dentro de estas gráficas, se muestran coloreadas en rosa y azul regiones en donde $h_3(\mathbf{k}) \neq 0$ y por tanto las energías no están degeneradas. Sin embargo, como se muestra en el texto, en estas regiones el número de Chern (y por tanto la fase topológica) es no nulo. Mientras que en toda la región no coloreada, el número de Chern es 0 y no existe protección topológica en el sistema.

resolviendo el sistema obtenemos como solución

$$\mathbf{K}_1 = \frac{2\pi}{3} \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{2\pi}{3} \left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.46)$$

$$(3.47)$$

Mientras que de la ecuación $h_3(\mathbf{k}) = 0$ obtenemos el conjunto de puntos de los parámetros (ϕ, M) tal que los puntos de Dirac son puntos de degeneración del diagrama de bandas del modelo de Haldane,

$$h_3(\mathbf{K}_{1,2}) = M \pm 3\sqrt{3}t_2 \sin(\phi), \quad (3.48)$$

como se ilustra en la figura 3.11.

3.2.3. Número de Chern del modelo de Haldane

Como se mencionó en la sección anterior, el número de Chern nos permite caracterizar al sistema en cuanto a si existe o no algún invariante topológico. En el caso del IQHE el número de Chern está relacionado directamente con la conductividad, pero en el modelo de Haldane no es tan sencillo

obtener una expresión que relacione el número de Chern con algún observable, sin embargo, sí es posible rastrear un conjunto de parámetros (ϕ, M) que logran hacer que el sistema se encuentre en una fase de protección topológica (y por tanto, permitir la existencia de estados de borde) y otro conjunto de parámetros en donde la protección no exista. Un estudio detallado de la deducción del número de Chern del modelo de Haldane puede ser consultado en [58]. La curvatura de Berry para el modelo de Haldane es

$$F(\mathbf{k}) = -i \text{Tr} \left(P_-(\mathbf{k}) \left[\frac{\partial P_-(\mathbf{k})}{\partial k_x}, \frac{\partial P_-(\mathbf{k})}{\partial k_y} \right] \right), \quad (3.49)$$

donde

$$P_-(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2\sqrt{h_3(\mathbf{k})^2 + |h(\mathbf{k})|^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{h_3(\mathbf{k})^2 + |h(\mathbf{k})|^2} - h_3(\mathbf{k}) & -h(\mathbf{k}) \\ -h(\mathbf{k})^* & \sqrt{h_3(\mathbf{k})^2 + |h(\mathbf{k})|^2} + h_3(\mathbf{k}) \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

De manera que el número de Chern es la integral de la curvatura de Berry sobre el toro en el espacio de momentos \mathbf{T}^2 ,

$$C = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}^2} F(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (3.51)$$

el cual toma los siguientes valores

$$C = \begin{cases} 1 & \text{si } h_3(\mathbf{k}_1) < 0 \text{ y } h_3(\mathbf{k}_2) > 0 \text{ (color rosa)} \\ -1 & \text{si } h_3(\mathbf{k}_1) > 0 \text{ y } h_3(\mathbf{k}_2) < 0 \text{ (color azul) ,} \\ 0 & \text{en otro caso (color blanco)} \end{cases} \quad (3.52)$$

como se ilustra en la figura 3.11.

Esto caracteriza el modelo de Haldane y nos proporciona la perspectiva necesaria sobre la teoría de aislantes topológicos que necesitamos para la tesis, a continuación revisaremos lo necesario sobre la teoría de sistemas cuánticos abiertos \mathcal{PT} -simétricos.

Sistemas cuánticos PT-simétricos

La conservación de energía es un concepto fundamental para entender la naturaleza. En particular, en mecánica cuántica este principio demanda que un sistema cerrado esté descrito por eigenvalores reales, lo cual lleva naturalmente a formulaciones basadas en Hamiltonianos Hermíticos. Conforme ha pasado el tiempo después del establecimiento de esta teoría, la complejidad de los sistemas aumentó. De hecho, algunos de estos sistemas son tan complicados, que ya no es de interés estudiar el sistema completo con cada uno de sus grados de libertad, pues esto puede ser tan difícil como innecesario, sino que es suficiente estudiar un subespacio de éste. En este caso, la energía (que se conserva en el sistema total), puede intercambiarse entre el subsistema y su ambiente.

Cabe mencionar que previo al desarrollo de teorías cuánticas no-Hermíticas, Hamiltonianos no-Hermíticos se habían utilizado para describir procesos disipativos como en el caso del físico estadounidense George Gamow, quien en el experimento de decaimiento alfa, con el cual fue demostrado que una partícula podía escapar del núcleo con una tasa de decaimiento que podía ser descrito efectivamente mediante un eigenvalor complejo. Sin embargo éste y otros Hamiltonianos no-Hermíticos son sólo una descripción aproximada y fenomenológica de los procesos físicos, es decir, no existe una derivación de primeros principios del Hamiltoniano no-Hermítico que describa el decaimiento. De hecho, en este caso en particular, esta teoría predice que la probabilidad total de encontrar a la partícula en el núcleo, decae en el tiempo, es decir viola la ley de conservación de probabilidad. Obviamente esto no sucede en la realidad, sino que la partícula decae en otras conservando el momento. Por lo tanto, un Hamiltoniano no-Hermítico que describe el decaimiento radiactivo puede a lo más ser una descripción simplificada, fenomenológica y no fundamental del proceso, ya que ignora la naturaleza de los productos post-decaimiento [60]. Más aún, se ha establecido directamente que “un Hamiltoniano no-Hermítico es inaceptable, por un lado porque puede tener energías complejas; y por otro lado porque esto implica que tenga una evolución no unitaria, lo cual viola la conservación de probabilidad y por tanto carece de sentido físico” [61].

Sin embargo, en 1998 se mostró que mientras que la condición $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ es suficiente para garantizar

que el espectro de energías es real y que la evolución temporal es unitaria, no es necesaria [35]. En [60] se mostró que la condición de Hermiticidad puede ser reemplazada por la condición análoga de imponer simetría de reflexión espaciotemporal, o \mathcal{PT} , donde \mathcal{P} es el operador de inversión espacial, mientras \mathcal{T} el operador de inversión temporal:

$$\hat{H} = \hat{H}^{\mathcal{PT}}, \quad (4.1)$$

sin violar ninguno de los axiomas de la mecánica cuántica. Decimos que si \hat{H} cumple (4.1), entonces el Hamiltoniano es \mathcal{PT} -simétrico.

El efecto de \mathcal{P} en el operador de posición \hat{x} y en el operador de momento \hat{p} es el de cambiar sus signos, es decir

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x} \quad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}. \quad (4.2)$$

Notemos que \mathcal{P} es un operador lineal y que deja invariante la relación de conmutación fundamental:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathcal{I},$$

con \mathcal{I} el operador identidad. El operador de inversión temporal por otro lado, está representado por el símbolo \mathcal{T} . Este operador tiene como efecto invertir el sentido del tiempo de evolución del sistema, por lo que deja invariante a \hat{x} pero cambia el signo de \hat{p} :

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = \hat{x} \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}. \quad (4.3)$$

Del mismo modo que \mathcal{P} , \mathcal{T} deja invariante la relación de conmutación pero requiere que el número complejo i cambie de signo bajo \mathcal{T} :

$$\mathcal{T}i\mathcal{T} = -i.$$

Por lo que \mathcal{T} no es un operador lineal, sino antilineal. Y como ambos son operadores de reflexión se tiene que

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{T}^2 = \mathcal{I},$$

y además claramente $[\mathcal{P}, \mathcal{T}] = 0$.

En términos de los operadores \mathcal{P} y \mathcal{T} definimos el Hamiltoniano \mathcal{PT} -reflejado, $\hat{H}^{\mathcal{PT}}$, como

$$\hat{H}^{\mathcal{PT}} = (\mathcal{PT})\hat{H}(\mathcal{PT}). \quad (4.4)$$

Un Hamiltoniano \mathcal{PT} simétrico no es necesariamente Hermítico; es decir, no necesariamente se tiene que $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$. Algunos ejemplos de estos Hamiltonianos son:

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + i\hat{x}^3 \quad \text{y} \quad \hat{H} = \hat{p}^2 - \hat{x}^4. \quad (4.5)$$

El espectro de estos Hamiltonianos es totalmente real y positivo y su evolución en el tiempo es unitaria a pesar de no ser Hermíticos. De hecho, son un caso particular del conjunto infinito no numerable de Hamiltonianos [62]

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + \hat{x}^2(i\hat{x})^\varepsilon \quad (4.6)$$

donde ε es un número real. Todos son \mathcal{PT} simétricos y para $\varepsilon \geq 0$, su espectro es real. Mientras que se vuelve imaginario para $\varepsilon < 0$, pues aunque algunos de sus eigenvalores son positivos y reales, existen otros que son totalmente complejos. La cantidad de eigenvalores reales decrece conforme $\varepsilon \rightarrow -1$, de modo que cuando $\varepsilon \leq -1$ no existen eigenvalores reales. Decimos entonces que, para en este caso particular, $\varepsilon \geq 0$ parametriza la región con simetría \mathcal{PT} , mientras que $\varepsilon < 0$ es la región de simetría \mathcal{PT} rota. Más adelante, definiremos las características de las regiones de simetría \mathcal{PT} rota y no rota en general.

4.1. Simetría \mathcal{PT} y su rompimiento

Como se ha mencionado anteriormente, el que el Hamiltoniano tenga simetría \mathcal{PT} implica que

$$[\hat{H}, \mathcal{PT}] = 0.$$

Sin embargo, la simetría \mathcal{PT} es diferente a las de observables representadas por un operador lineal, ya que el operador \mathcal{PT} no lo es. Y por tanto, aunque \hat{H} conmute con \mathcal{PT} pueden o no tener una base propia común. Probemos esto a continuación.

Supongamos que es falso, es decir que si \hat{H} y \mathcal{PT} conmutan, entonces cada eigenestado ψ de \hat{H} es eigenestado de \mathcal{PT} . Sea λ el valor propio del eigenestado ψ tal que

$$\mathcal{PT}\psi = \lambda\psi. \quad (4.7)$$

Multiplicando de ambos lados de la igualdad por \mathcal{PT} a la izquierda y utilizando la idempotencia de \mathcal{PT} ,

$$\psi = \mathcal{PT}\lambda\mathcal{PT}\psi. \quad (4.8)$$

Dado que \mathcal{PT} es antilinear entonces

$$\psi = |\lambda|^2\psi. \quad (4.9)$$

Lo cual implica que $|\lambda|^2 = 1$, de modo que el operador \mathcal{PT} tiene como eigenvalores números complejos o fases:

$$\lambda = e^{i\alpha}. \quad (4.10)$$

A continuación, multiplicamos la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo por \mathcal{PT} a la izquierda y de nuevo usando la idempotencia de \mathcal{PT} obtenemos

$$(\mathcal{PT})\hat{H}\psi = (\mathcal{PT})E(\mathcal{PT})^2\psi. \quad (4.11)$$

De esta igualdad se sigue que

$$\hat{H}\lambda\psi = (\mathcal{PT})E(\mathcal{PT})\lambda\psi. \quad (4.12)$$

Y finalmente, dado que \mathcal{T} es antilineal obtenemos

$$E\lambda\psi = E^*\lambda\psi, \quad (4.13)$$

puesto que en general $\lambda \neq 0$, entonces $E = E^*$ es decir E es real.

Podríamos pensar que sí, el enunciado anterior es falso y \hat{H} y \mathcal{PT} efectivamente conmutan y tienen una base común de eigenvectores. Sin embargo esto es falso, ya que los eigenvalores del Hamiltoniano (4.6) son complejos para $\varepsilon < 0$ a pesar de que $[\hat{H}, \mathcal{PT}] = 0$. Por tanto no es cierto que \hat{H} y \mathcal{PT} tengan una base en comun, a pesar de que sean compatibles como queríamos mostrar.

4.2. Evolución temporal de Hamiltonianos no-Hermíticos

Una manera de estudiar sistemas cuánticos abiertos con Hamiltonianos no-Hermíticos es añadir pérdidas y ganancias balanceadas en la energía de los sitios, tal como se ha hecho en trabajos anteriores [1–5, 63]. Es necesario mencionar, sin embargo, que la realización experimental de sistemas con pérdidas y energías balanceadas ha sido un reto desde la formulación de la teoría cuántica \mathcal{PT} -simétrica debido a que controlarlos simultáneamente en un sólo dispositivo no es sencillo de lograr. La primera vez que se logró observar un sistema \mathcal{PT} -simétrico experimentalmente fue en 2009 [64] mediante potenciales ópticos complejos realizados con una distribución impar del índice de refracción complejo. Recientemente se ha logrado llevar a cabo un sistema de nanoantenas con pérdidas y ganancias balanceadas [65], cuyo principal resultado es que la respuesta óptica del sistema se vuelva direccional y por tanto una posibilidad de dispositivos de control lumínico a nanoescala. Otro ejemplo de un sistema con ganancias y pérdidas balanceadas ha sido estudiado teórica y numéricamente en [66]. En este artículo, se analiza la posibilidad de obtener un sistema \mathcal{PT} -simétrico con condensados de Bose-Einstein con potenciales de pozos Gaussianos con ganancias o pérdidas en cada uno de ellos. Finalmente, en [67]

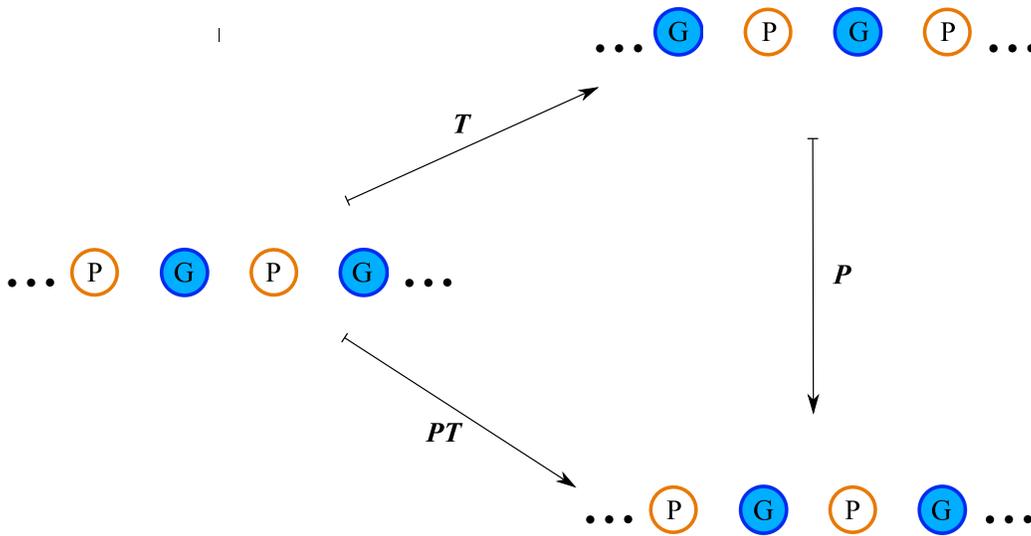


Figura 4.1: Esquema de un sistema no-Hermítico \mathcal{PT} -simétrico, en donde tenemos una red unidimensional de sitios con ganancias (azules) y pérdidas (naranjas) balanceadas. El operador de paridad \hat{P} , intercambia de lugar los sitios espacialmente, mientras que el operador de inversión temporal \hat{T} las ganancias se vuelven pérdidas y las pérdidas ganancias, logrando que el operador $\hat{P}\hat{T}$ deje invariante al sistema.

I.H. Giden et. al. demuestran numéricamente que se pueden obtener dispositivos de resonadores ópticos \mathcal{PT} -simétricos mediante un arreglo adecuado de las pérdidas y ganancias en micro anillos de modo que los diferentes modos de resonancia sean excitados dependiendo de la dirección del haz incidente. Si bien la realización experimental del modelo de Haldane con ganancias y pérdidas es aún un reto, las referencias mencionadas (entre otras) pueden ser posibles plataformas para llevarla a cabo.

En este caso, tenemos que el sistema cerrado está descrito por un Hamiltoniano Hermítico \hat{H}_0 , mientras que las ganancias (pérdidas) son añadidas por un término no-Hermítico \hat{H}_{n-H} de la forma

$$\hat{H}_{n-H} \equiv \pm i\Gamma \quad (4.14)$$

donde i es la unidad imaginaria y $\pm\Gamma$ es la tasa de ganancia (pérdida) de energía. De modo que el Hamiltoniano del sistema es

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{nH}. \quad (4.15)$$

En la figura 4.1 se ilustra la acción del operador $\hat{P}\hat{T}$ en un sistema \mathcal{PT} -simétrico. Notamos que, el añadir dos términos complejos al Hamiltoniano lo deja invariante respecto al operador $\hat{P}\hat{T}$. Esto sucede siempre y cuando la simetría no se haya roto, es decir que todas las bases que diagonalicen a \hat{H} también diagonalicen a $\hat{P}\hat{T}$. Una vez que esto deja de suceder, los operadores pueden seguir conmutando, pero existe al menos una base que no los diagonaliza simultáneamente y el espectro se vuelve parcial (o completamente) imaginario.

Ahora bien, claramente la evolución de estados en el marco de Schrödinger no va a ser unitaria en el

caso de sistemas que sólo tengan ganancias o pérdidas en la energía de sitios, ya que si

$$|\psi_0\rangle = \sum_n C_n |n\rangle,$$

es el estado inicial del sistema, donde $|n\rangle$ es tal que $\hat{H}_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$.

Entonces la evolución del sistema al tiempo t es

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi_0\rangle = e^{-i[\hat{H}_0 + \hat{H}_{n-H}]t} |\psi_0\rangle.$$

Si consideramos que

$$\hat{H}_{n-H} \equiv \pm i\Gamma \mathbb{1},$$

entonces la evolución es

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-i(\hat{H}_0 \pm i\Gamma)t} |\psi_0\rangle = \sum_n e^{-i(E_n \pm i\Gamma_n)t} C_n |n\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} C_n e^{\pm \Gamma_n t} |n\rangle.$$

Por lo que la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|\psi(t)\rangle$ es

$$|\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle|^2 = \sum_n |C_n|^2 e^{\pm 2\Gamma_n t}, \quad (4.16)$$

en contraste con el caso Hermítico, en el cual sería uno. A pesar de que la probabilidad del sistema no se conserva, es posible interpretar la física del sistema al introducir un estado auxiliar que funcione como proveedor (colector) de la energía que entra (sale) al sistema con la misma tasa con la que se gana (pierde). O bien, normalizar el sistema en cada paso de tiempo (preguntar a Roberto). Ahora bien, si la tasa de pérdidas no depende de cada sitio, tenemos que la probabilidad está dada por

$$|\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle|^2 = e^{\pm 2\Gamma} \sum_n |C_n|^2 t. \quad (4.17)$$

Existe también otra manera de estudiar la evolución temporal del sistema mediante el formalismo del operador de densidad. Dado que en este caso el operador no-Hermítico cumple que

$$\hat{H}_{nH} = -\hat{H}_{nH}^\dagger$$

y de la ecuación de Schrödinger tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = -i\hat{H} |\psi\rangle \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi| = \langle \psi| i\hat{H}^\dagger, \quad (4.18)$$

entonces la evolución temporal del operador de densidad se obtiene de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle \langle\psi| &= \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} \langle\psi| + |\psi\rangle \frac{\partial \langle\psi|}{\partial t}, \\
&= -i\hat{H} |\psi\rangle \langle\psi| + |\psi\rangle \langle\psi| i\hat{H}^\dagger, \\
&= -i(\hat{H}_0 + \hat{H}_{\text{nH}})\rho + \rho(\hat{H}_0 - \hat{H}_{\text{nH}})i, \\
&= -i(\hat{H}_0\rho - \rho\hat{H}_0) - i(\hat{H}_{\text{nH}}\rho + \rho\hat{H}_{\text{nH}}), \\
&= -i[\hat{H}_0, \rho] - i\{\hat{H}_{\text{nH}}, \rho\},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

donde $\rho \equiv |\psi\rangle \langle\psi|$ es el operador de densidad.

Una vez que hemos hecho un resumen de la teoría necesaria para abordar el problema central de la tesis tanto de aislantes topológicos como de sistemas cuánticos abiertos, mostramos los resultados obtenidos en el estudio de aislantes topológicos de Haldane no-Hermíticos. (Eigenestados derechos e izquierdos para hablar de punto excepcional).

Modelo de Haldane no-Hermítico

Después de haber consolidado la base teórica que nuestra investigación requiere en los capítulos anteriores, en este capítulo plantaremos el problema y mostraremos los resultados obtenidos.

La topología es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar las características de objetos abstractos preservadas bajo deformaciones continuas [68]. Por otro lado, los sistemas físicos que exhiben propiedades topológicas son de interés en muchas plataformas experimentales debido a su capacidad de albergar conducción electrónica libre de dispersión, así como de su robustez contra perturbaciones continuas [10]. Se han encontrado estas propiedades en sistemas de materia condensada, [17], dispositivos fotónicos [12], sistemas dinámicos modulados [13–15], fermiones ultrafríos [31], láseres topológicos [16], acústica [25], así como en arreglos de transporte excitónico en materiales orgánicos [27].

El modelo de Haldane, como se ha mencionado previamente, consiste básicamente en una red hexagonal tipo grafeno en la cual se rompen las simetrías de inversión y de reversión temporal [58]. Para romper la simetría de reversión temporal, F.D. Haldane [28] introdujo un acoplamiento complejo a segundos vecinos controlado por un parámetro de flujo el cual permite obtener tener un control sobre la transición de fase topológica. Para romper la simetría de inversión, introdujo una diferencia entre las energías de sitios vecinos. El rompimiento de ambas simetrías permite que se abra una brecha de energía en la estructura de s con dos estados que la atraviesan, permitiendo observar el comportamiento aislante-conductor de la red. Esto siempre y cuando las condiciones de borde e iniciales sean las adecuadas para observar los estados de borde. De este modo, el modelo de Haldane es uno de los más fáciles y manipulables para obtener un sistema con una transición de fase topológica [58].

Apesar de que los sistemas con fases topológicas han sido mayormente estudiados con modelos Hermíticos, en los últimos años ha habido un creciente interés en el estudio de fases topológicas en sistemas no-Hermíticos. En 1998, C.M. Bender y Boettcher estudiaron un subconjunto de los sistemas no-Hermíticos, los cuales cumplen con la característica de tener espectro real al cumplir con la simetría \mathcal{PT} [35]. Lejos de que este descubrimiento se quedara como una curiosidad matemática en los fun-

damentos de la mecánica cuántica, el interés por entender sus implicaciones en sistemas ha llevado a implementar sistemas \mathcal{PT} simétricos con implicaciones no triviales como fotónica de microondas [69], transparencia inducida con pérdidas [70], propagación de luz no recíproca [71], invisibilidad unidireccional [72], láseres de fonones \mathcal{PT} simétricos [73], láseres de absorbanza [74], modos quirales y emisión unidireccional [75], entre muchos otros. En estos sistemas la idea clave para estudiar la simetría \mathcal{PT} y su ruptura es introducir pérdidas y ganancias (o únicamente pérdidas en el caso de los sistemas pasivos) balanceadas. Lo sorprendente es que apesar de que las pérdidas y ganancias se encuentran balanceadas, existe una relación entre los parámetros del sistema y la tasa de crecimiento o pérdida, la cual predice la existencia de un punto de coalescencia de todos los eigenvalores (*exceptional point*). A diferencia de los sistemas Hermitianos, en donde también pueden existir puntos de coalescencia, los eigenvectores siguen siendo linealmente independientes debido a la Hermiticidad del Hamiltoniano, en el caso de los sistemas \mathcal{PT} simétricos, el punto excepcional deforma también el espacio de Hilbert del sistema, pues los eigenvectores también se degeneran a uno solo.

Por otro lado, es de especial relevancia el notar que a pesar de que se creía que una vez que se rompe la fase simétrica la física se termina, recientemente se han encontrado sistemas en los cuales los eigenvalores complejos tienen una interpretación física [37, 76–79] por ejemplo de disipación o de amplificación y la normalización de la función de onda se lleva a cabo por medio de añadir o quitar la energía cedida o añadida al sistema hacia o desde el medio ambiente, conservando así la probabilidad en el sistema abierto [60]. Este tipo de sistemas muestran fenómenos interesantes una vez que se ha roto la simetría, por ejemplo amplificación de la energía o amplificación de modos que inicialmente (antes del rompimiento de la simetría), decaen.

La importancia de los resultados mostrados en esta tesis yace en el hecho de que anteriormente se creía que las características observadas en una transición de fase topológica sólo podían encontrarse en sistemas Hermíticos cerrados [33, 34], pero recientemente se ha mostrado experimentalmente que las transiciones de fase topológicas pueden ocurrir en sistemas fotónicos no hermíticos \mathcal{PT} -simétricos [17], así como en arreglos hexagonales de guías de onda [2] e incluso se han llevado a cabo experimentalmente láseres topológicos con simetría \mathcal{PT} pasiva [41]. Con el objetivo de entender de una manera más precisa la relación entre topología y simetría \mathcal{PT} se han realizado muchos esfuerzos en los últimos años [9, 44–47]. En particular, un trabajo reciente de Xiao *et.al* [40] ha demostrado la existencia de estados de borde protegidos en una red unidimensional donde la simetría \mathcal{PT} se ha roto, mostrando entonces que no es necesario tener esta simetría para tener una transición de fase topológica. En esta tesis mostramos el primer estudio sobre transiciones de fase topológicas en redes hexagonales bidimensionales no-Hermíticas. Finalmente, desde el punto de vista fundamental, ya que la topología y las simetrías de un sistema son dos de los aspectos más importantes teóricos para la física, es importante ahondar en la relevancia en sistemas en donde la topología juega un rol fundamental [2] y encontrar similitudes con sistemas cerrados, así como fenómenos nuevos que los sistemas abiertos puedan mostrar.

Cabe mencionar que recientemente se ha tratado de establecer un marco teórico para estudiar formal-

mente a este tipo de sistemas. En particular, en el avance de la clasificación de las fases topológicas en sistemas no-Hermíticos, se ha creado una *tabla periódica* de este tipo de aislantes topológicos, basada en las simetrías del sistema y el número de dimensiones [80]. Sin embargo, bajo esta clasificación los sistemas no-Hermíticos 2D no deberían tener fases topológicas. Mientras que por otro lado esto ha sido refutado tanto teórica como experimentalmente [41,42,81], lo cual parece ser debido a una discrepancia en la definición de fase topológica no-Hermítica [82]. De cualquier modo, esto significa que el debate alrededor de estos sistemas aún no está concluido y nuestra investigación es un aporte relevante a la discusión.

Una parte importante de los resultados que serán mostrados, es la universalidad de los mismos, en el sentido de que todas las terminaciones (*bearded, armchair* y *zigzag*) pueden mantener la brecha energética abierta y por tanto, estados de borde con energías reales. La pregunta que nuestra investigación trata de responder es ¿cuál es el rol que juega el rompimiento de la simetría \mathcal{PT} en la existencia de estados de borde conductores? Esta pregunta ha sido previamente explorada en una red con una geometría de terminación puramente de tipo *armchair* [2], y se ha encontrado que sólo esta terminación preserva la protección topológica en el borde del arreglo, es decir, no se ha encontrado un sistema bidimensional en el que la protección topológica se mantenga sin importar la geometría de los bordes. Es entonces otra motivación para explorar el comportamiento de sistemas dos dimensionales sin restricción de una terminación.

Este capítulo está estructurado de la siguiente manera. Primero presentamos la modificación realizada al modelo de Haldane con un término extra de ganancia y pérdida balanceada de energía. Posteriormente, presentamos los resultados en donde mostramos el efecto del rompimiento de la simetría en la protección topológica, mostramos las condiciones iniciales y las geometrías tratadas y estudiamos el efecto del flujo de Haldane sobre el comportamiento del valor crítico de ganancias/pérdidas con el cual el sistema aún tiene protección topológica.

5.1. Modelo teórico

El primer ejemplo de un aislante topológico estudiado teóricamente y visualizado experimentalmente, se encuentra en el dispositivo utilizado para observar el IQHE, descubierto por K. von Klitzing, G. Dorda y M. Pepper en 1980 [29]. En este tipo de sistemas, los electrones atravesando un campo magnético transversal forman orbitas de ciclotrón con niveles energéticos discretos (niveles de Landau) [52]. Y cuando un electrón resulta tener la energía correspondiente a una de las separaciones entre estos dos niveles, su contribución a la conductancia permanece constante sin importar el tamaño del sistema, composición o pureza del mismo [59], como se mostró en el capítulo 2 de esta tesis.

Como se comentó también en el capítulo 2, el Hamiltoniano de Haldane en el formalismo de segunda cuantización es [28]

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3. \quad (5.1)$$

En donde

$$\hat{H}_1 \equiv t_1 \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j. \quad (5.2)$$

El segundo término es el acoplamiento a segundos vecinos con la fase $e^{i\pm\phi_{i,j}}$ y está dado por [28]

$$\hat{H}_2 \equiv t_2 \sum_{\langle\langle i,j \rangle\rangle} e^{\pm i\phi_{i,j}} \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_j. \quad (5.3)$$

Finalmente, con el objetivo de obtener una transición de fase topológica, F.D.M. Haldane mostró que también es necesario romper la IS [28,58]. Esto puede ser fácilmente logrado al introducir una diferencia de energía entre sitios distintos. En el modelo original de Haldane esto era logrado al añadir un término de masa $\pm M$ para sitios impares (pares) [28]. A diferencia de tomar el modelo de Haldane original, en esta tesis rompemos la IS al añadir un parámetro imaginario de pérdidas y ganancias balanceadas, $\pm i\Gamma$ en el tercer sumando

$$\hat{H}_3 \equiv i\Gamma \sum_{j \text{ impares}} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j - i\Gamma \sum_{j \text{ pares}} \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j, \quad (5.4)$$

como se ha hecho en varios sistemas no-Hermíticos \mathcal{PT} -simétricos con el objetivo de estudiar el efecto de tener un sistema cuántico abierto con tasas de ganancias y pérdidas balanceadas [1–5, 63]. Es necesario mencionar que en nuestro modelo enumeramos los sitios de abajo a arriba y de izquierda a derecha en cada renglón.

A continuación presentamos los resultados de las simulaciones y discutimos sus posibles orígenes y la importancia para futuras investigaciones.

5.2. Aislante topológico de Haldane

En este sistema consideramos el espacio de una sola excitación, ya que sólo estamos interesados en ver la propagación del estado de borde protegido topológicamente. Ya que en el modelo de Haldane las fronteras de la transición de fase topológica están localizadas en los conos de Dirac [58], una correcta modulación de los parámetros del control $\{t_1, t_2, \phi\}$ logra abrir una brecha energética la cual, en este modelo en particular, es por un lado modulada por el flujo de Haldane ϕ . Y por otro lado, la posición en el espacio de parámetros (ϕ, t_2) , determina el tamaño de la brecha energética, el cual es proporcional a $t_2 \sin(\phi)$ [42]. De modo que fijamos el valor del flujo a $\phi = \pi/2$ para obtener el valor máximo del tamaño de la brecha independientemente del valor de t_2 . Posteriormente en los resultados mostraremos la capacidad del sistema de mantener la protección topológica en función de ϕ en presencia del rompimiento de la simetría \mathcal{PT} .

Dado que para observar la protección topológica es necesario tener un borde en el sistema, debemos analizar el modelo de Haldane en una cinta o seminfinita en una dirección. Los resultados que se muestran a continuación corresponden a una cinta de Haldane finita de ~ 1800 sitios con terminaciones *armchair-bearded* y *zigzag-armchair*, el cual es equivalente para la terminación *armchair-zigzag* y se encuentra que los resultados son los mismos para las tres, concluyendo así que la geometría de las terminaciones no juega un rol en la realización del fenómeno, mientras que el sistema siga siendo una cinta finita, en contraste con los resultados presentados en la referencia [2].

5.2.1. Análisis en el espacio recíproco y en la base de sitios

Para definir el espacio recíproco necesitamos que al menos una de las coordenadas espaciales tenga condiciones de borde periódicas para poder obtener funciones de Bloch en esta dimensión. En este caso elegimos la coordenada y como coordenada finita y a x como la coordenada infinita. De modo que sea posible observar la existencia de modos de borde.

Para corroborar la existencia de los estados de borde encontramos la estructura de bandas de la nanocinta de Haldane para las dos terminaciones distintas de la red.

En las figuras 5.1(a) y 5.2 (a), se muestran las estructuras de bandas para cintas de ~ 200 sitios en dirección y y se muestra su evolución conforme Γ aumenta desde $\Gamma = 0$ hasta $\Gamma = 1$. Los parámetros elegidos nos permiten estudiar el sistema en la fase topológica, es decir cuando la brecha energética está abierta y el número de Chern es $\nu = +1$. Por lo que en el caso Hermítico se pueden observar los estados de borde que cruzan el bulto con la misma dirección pero con velocidades opuestas. La estructura de bandas del modelo de Haldane tiene una brecha abierta con dos estados de borde que atraviesan las bandas del bulto con velocidades opuestas y estos modos no pueden ser movidos de la brecha al modificar la terminación de la red [59]. Sin embargo, conforme aumentamos el valor de Γ , la brecha energética comienza a cerrarse y por tanto los estados de borde se van mezclando con los del bulto. Ver figuras 5.1 y 5.2. En ambas terminaciones esta deformación es continua y en particular notamos que en el caso de la con terminación zigzag el cierre de la brecha se da por los dos extremos de la zona de Brillouin (ver 5.2), mientras que para la cinta con terminación armchair el cierre de la brecha ocurre únicamente en un punto (ver 5.1), lo cual esperamos ya que las bandas cierran en los puntos de Dirac [58].

Una vez que hemos encontrado la existencia de estados de borde en ambas geometrías, nos interesa observar la evolución temporal del modo protegido topológicamente sobre el arreglo. Para lograr obtener una condición inicial adecuada es necesario encontrar la expresión correspondiente en la base de sitios de los estados que atraviesan el bulto en la estructura de bandas. Sin embargo, debido a que numéricamente sólo es posible utilizar redes finitas para observar la evolución, la condición inicial no puede obtenerse directamente de los estados representados en la estructura de bandas, por lo que es necesario encontrar otro modo de visualizar los estados de borde en la base de sitios. Con este objetivo, obtuvimos el espectro de energía del Hamiltoniano mostrado en la Ec.(5.1) para identificar

las energías correspondientes a los modos de borde, las cuales se encuentran ordenadas en la parte de enmedio del espectro, mientras que las energías acumuladas tanto en la parte inferior como superior, corresponden a los estados en el bulto. Ver figuras 5.3 y 5.4, análogamente a como se han analizado espectros energéticos en cristales cuasiperiódicos [2, 8], en donde la aperiodicidad no permite obtener una estructura de bandas.

Una vez que hemos identificado las energías correspondientes a los estados de borde, generamos la condición inicial $|\psi_0\rangle$ como una distribución gaussiana normalizada alrededor del estado propio central del arreglo (el sitio etiquetado como 915 en la figura 5.3).

$$|\psi_0\rangle = \sum_{i=910}^{925} p_i |i\rangle, \quad (5.5)$$

donde p_i es una distribución gaussiana centrada en el sitio 915 e $|i\rangle$ es el i -ésimo eigenestado.

De esta manera podemos obtener la condición inicial adecuada. Ver figura 5.6. Es necesario mencionar que si bien es cierto el análisis es válido para una cinta de Haldane, para tener soluciones convergentes en la base de sitios, es necesario tener un sistema finito en las dos direcciones, y por tanto esperamos ver que los estados de borde protegidos giren alrededor del rectángulo. Las geometrías estudiadas en esta tesis se muestran en la figura 5.5.

La evolución temporal del sistema entonces muestra la protección topológica de los modos de borde con una propagación unidireccional, la cual se debe al rompimiento de la simetría TRS y consecuentemente la inexistencia de modos contrapropagantes con misma frecuencia. Ya que la excitación sólo puede moverse en una dirección, la presencia de un defecto en la red no afecta su propagación y esto le permite rodear la imperfección como se muestra en la figura 5.7, en donde se muestra la evolución temporal Hermitiana ($\Gamma = 0$) de una condición inicial adecuada sobre los dos tipos de geometría. Notamos entonces que el flujo de energía permanece unidireccional tanto en las esquinas como sobre un defecto de cualquier forma.

El objetivo principal de esta tesis es analizar el comportamiento de la protección topológica en presencia de una contribución no-Hermitiana por medio de una tasa de ganancias y pérdidas balanceadas en las energías de sitio. Debido a que se requiere romper alguna de las dos simetrías para poder abrir la brecha energética, entonces cualquier perturbación no-Hermítica al sistema hace que el espectro de energías se vuelva complejo (o al menos algunos de los valores de las energías), sin embargo en este trabajo encontramos estados de borde topológicos con la simetría \mathcal{PT} rota. Y lejos de perder el significado físico de las energías complejas, podemos interpretarlas como canales de amplificación o disipación. Sin embargo, es de gran importancia señalar que a pesar de que globalmente la simetría se ha roto, encontramos una ventana de energías en las cuales la energía sigue siendo puramente real (sin amplificación ni disipación) y que además se sigue preservando la protección topológica. Estos modos existen tanto cuando el sistema es \mathcal{PT} simétrico, como cuando no lo es, lo cual responde a la pregunta abierta de R. El-Ganainy en [4]: “*An open question in this field [non-Hermitian topological systems] pertains to the existence of topological insulators in \mathcal{PT} -symmetric non-Hermitian arrangements*”. Aquí mostramos

una prueba numérica de que es posible mantener la protección topológica al menos en una región del espectro en el régimen de simetría rota. Claramente, conforme alejamos la condición inicial de los modos de borde, los modos de amplificación y disipación comienzan a jugar su rol y la protección topológica se rompe. Conforme incrementamos el valor de Γ , la ventana de protección topológica comienza a cerrarse, e incluso aunque existan algunos modos de energía positiva, estos no corresponden a estados de borde y por lo tanto, nuestra condición inicial sólo encuentra modos de propagación no conservativa y diverge exponencialmente conforme evoluciona. Ver figuras 5.3 y 5.4. Es importante mencionar que existe una relación directa entre el tamaño del sistema (el número de sitios) y la magnitud de la tasa crítica de pérdidas y ganancias con la cual el sistema aún puede soportar estados de borde unidireccionales, Γ_c : conforme más grande sea el sistema, más grande puede ser Γ_c . En el modelo aquí estudiado, la relación que rige la existencia de protección topológica está dada por $\Gamma_c = 0.7t_1$.

Finalmente, con el objetivo de proponer una posible primera aplicación a nuestros resultados, hemos encontrado una relación entre Γ_c y el flujo de Haldane, ϕ . Este resultado evalúa el valor crítico de pérdidas/ganancias, Γ_c , tal que aún sigan existiendo estados de borde con energía totalmente real (la cota que se consideró fue de veinte estados), en función de ϕ . Romper la simetría de inversión temporal abre una brecha de energía cuyo tamaño es proporcional a la magnitud del acoplamiento a segundos vecinos de cada sitio y está modulado con una función senoidal de ϕ . Fenomenológicamente, esto puede ser observado en qué tan fácil puede un estado de borde propagarse sin acoplarse con el bulto. En la figura 5.8 mostramos cómo este transporte de estados de borde es afectado por la tasa de pérdidas/ganancias en regímenes donde la simetría de inversión temporal aún no se ha roto, $\phi = \{0, \pi\}$, así como cuando $\phi \neq \{0, \pi\}$, en donde la simetría ya se ha roto y los estados de borde pueden propagarse más fácilmente conforme $\phi \rightarrow \pi/2$. Notablemente, la protección topológica, protege a los estados de borde no solamente de los modos del bulto, sino también de los modos de amplificación/disipación presentes en el ambiente. Como un resultado importante, señalamos que de manera similar al caso de sistemas Hermíticos, esta protección tiene su máximo en $\phi = \pi/2$ y también obedece un compartimiento simétrico alrededor de este valor del flujo. Ésta puede ser una de las primeras características estudiadas de un aislante topológico no-Hermítico, la cual creemos que puede encontrar su análogo en otro tipo de redes bidimensionales con transición de fase topológica. Por tanto, esta característica puede ser una manera de cuantificar la protección en un aislante topológico no-Hermítico por medio de la cantidad de pérdidas/ganancias presentes en el sistema.

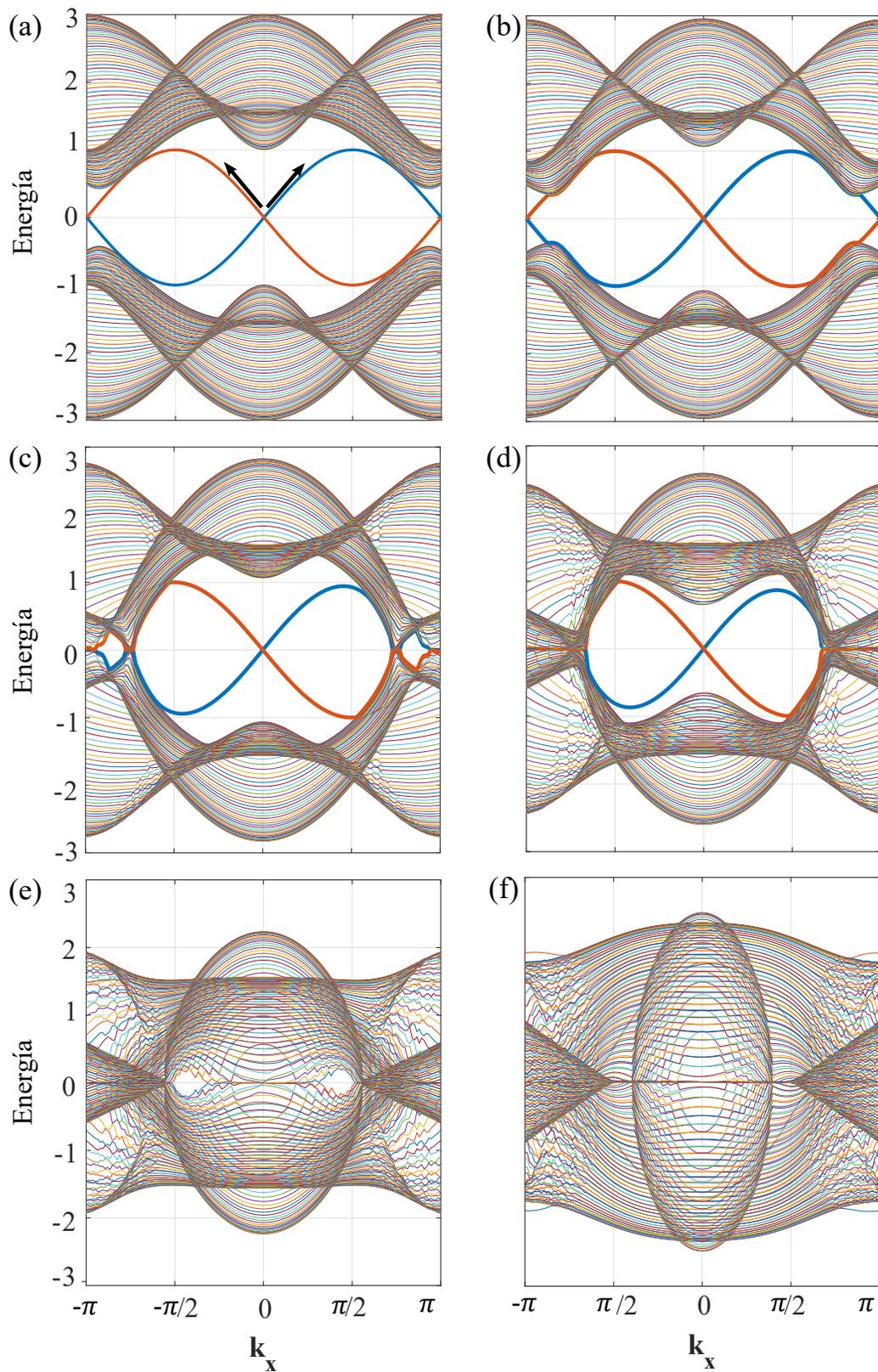


Figura 5.1: Estructura de bandas de una cinta de Haldane con terminación armchair. Los parámetros utilizados son $t_1 = 1.0$, $t_2 = 0.3$ y $\phi = \pi/2$, esto con el objetivo de explotar la visibilidad de la fase con protección topológica del modelo de Haldane [58]. En cada gráfica cambia el valor de Γ , (a) Caso Hermítico $\Gamma = 0s^{-1}$, (b) $\Gamma = 0.5s^{-1}$, (c) $\Gamma = 1.0s^{-1}$, (d) $\Gamma = 1.5s^{-1}$, (e) $\Gamma = 2.0s^{-1}$ y (f) $\Gamma = 2.5s^{-1}$. En el primer caso se ilustra la dirección de propagación de cada uno de los edge states, los cuales se han remarcado con azul y naranja.

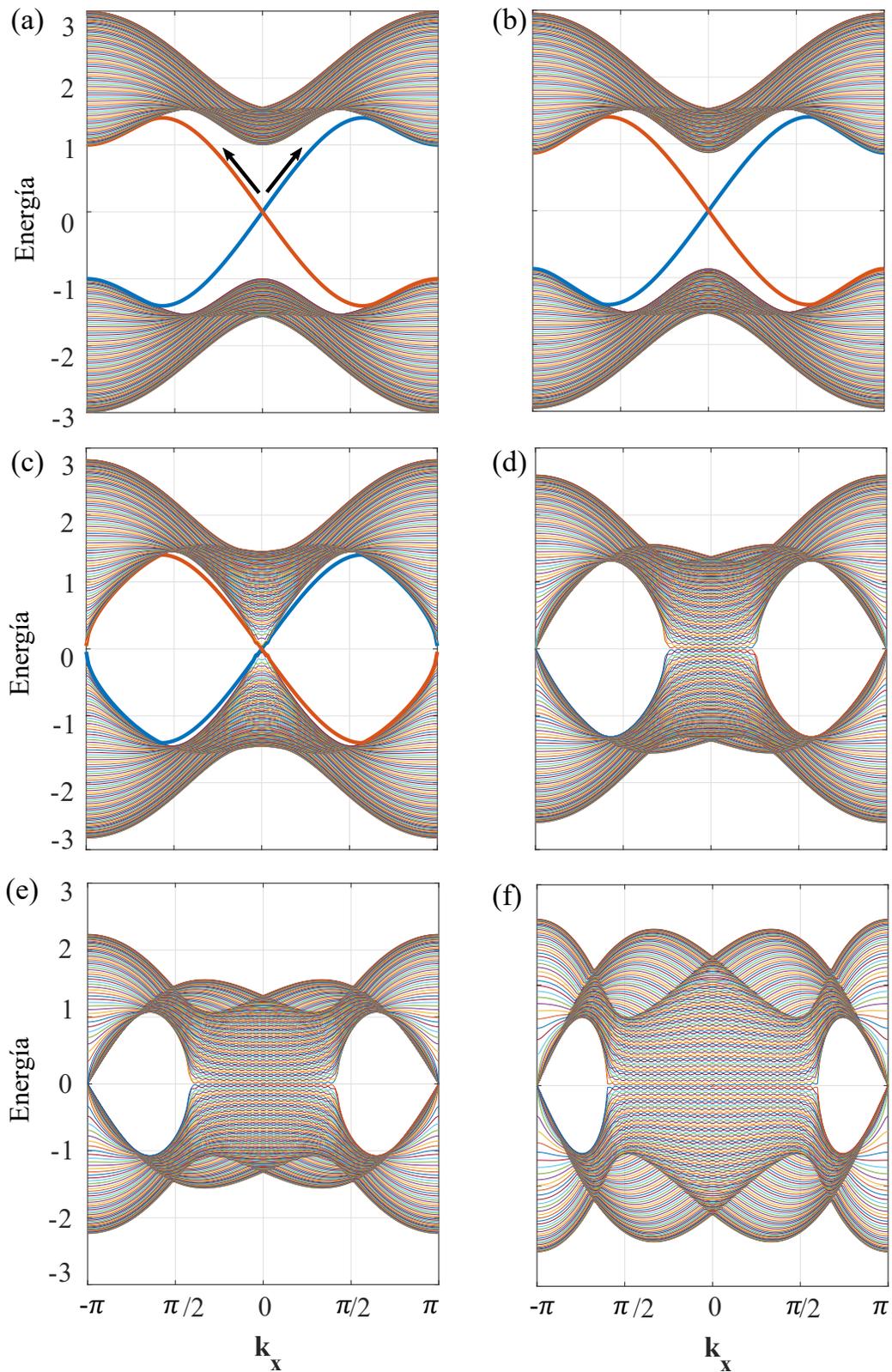


Figura 5.2: Estructura de bandas de una cinta de Haldane con terminación zigzag para los mismos parámetros que en la figura 5.1 En cada gráfica cambia el valor de Γ del mismo modo que en la figura anterior. (a) Caso Hermítico $\Gamma = 0s^{-1}$, (b) $\Gamma = 0.5s^{-1}$, (c) $\Gamma = 1.0s^{-1}$, (d) $\Gamma = 1.5s^{-1}$, (e) $\Gamma = 2.0s^{-1}$ y (f) $\Gamma = 2.5s^{-1}$. En el primer caso se ilustra la dirección de propagación de cada uno de los edge states, los cuales se han remarcado con azul y naranja.

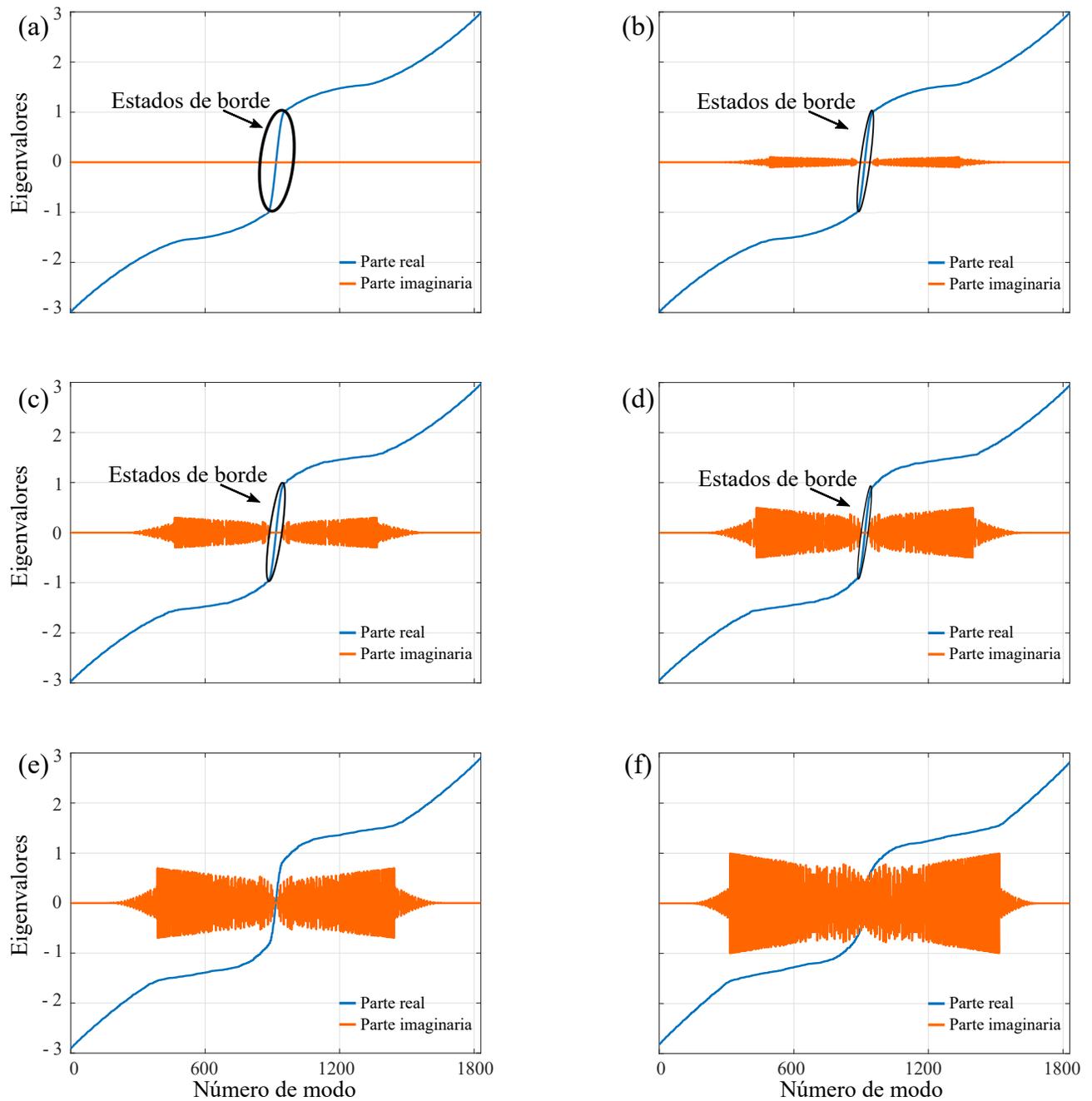


Figura 5.3: Espectro del Hamiltoniano de Haldane para una cinta finita con terminaciones bearded/armchair. Los parámetros del sistema son los mismos utilizados en los resultados anteriores y cada gráfica corresponde a un valor diferente de Γ . (a) Caso Hermítico $\Gamma = 0s^{-1}$, (b) $\Gamma = 0.1s^{-1}$, (c) $\Gamma = 0.3s^{-1}$, (d) $\Gamma = 0.5s^{-1}$, (e) $\Gamma = 0.7s^{-1}$ y (f) $\Gamma = 1.0s^{-1}$. Los estados de borde se muestran encerrados en la elipse negra.

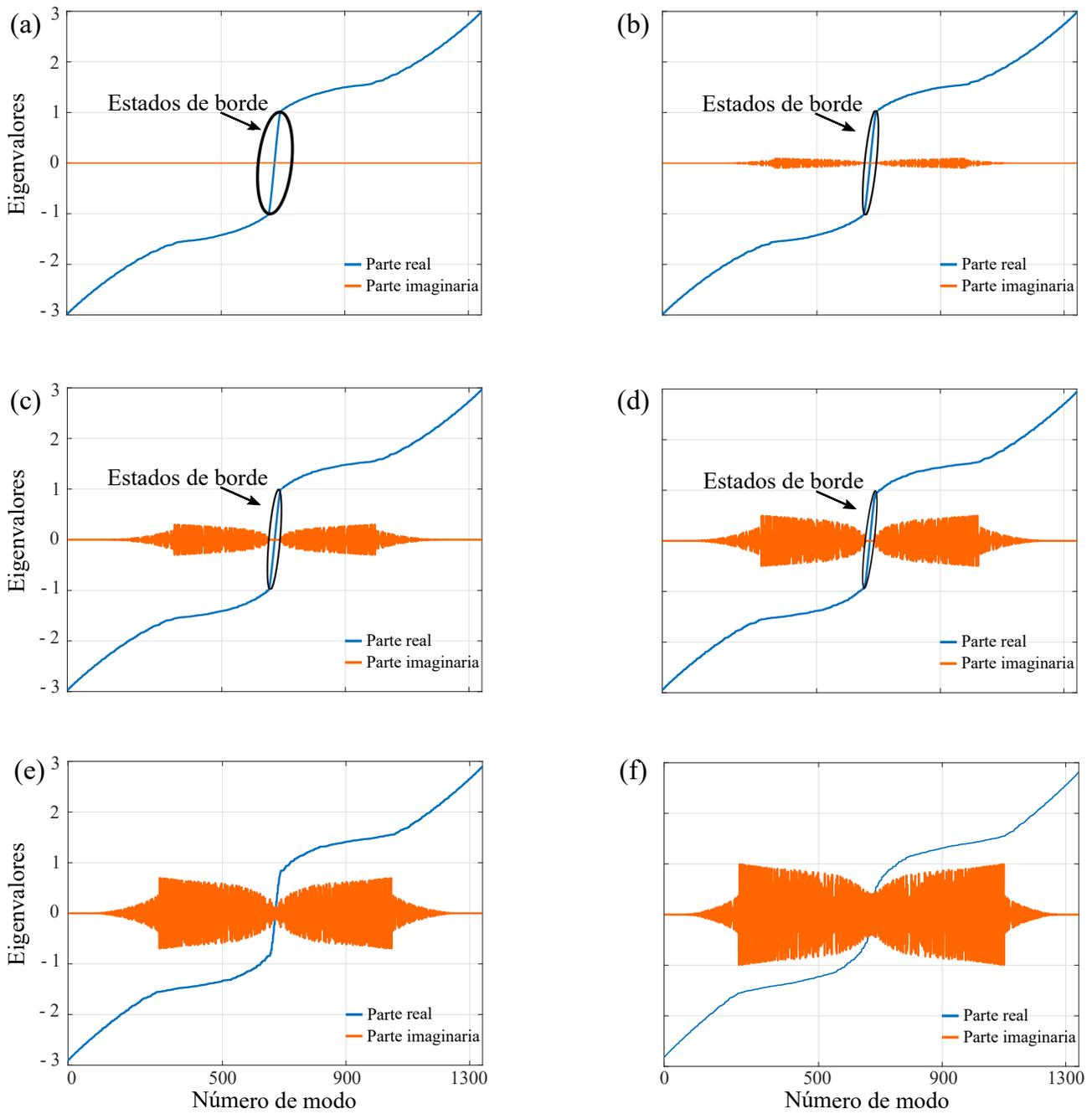


Figura 5.4: Espectro del Hamiltoniano de Haldane para una cinta finita con terminaciones zigzag/armchair. Los parámetros del sistema son los mismos utilizados en los resultados anteriores. Cada gráfica corresponde a un valor diferente de Γ . (a) Caso Hermítico $\Gamma = 0s^{-1}$, (b) $\Gamma = 0.1s^{-1}$, (c) $\Gamma = 0.3s^{-1}$, (d) $\Gamma = 0.5s^{-1}$, (e) $\Gamma = 0.7s^{-1}$ y (f) $\Gamma = 1.0s^{-1}$. Los estados de borde se muestran encerrados en la elipse negra.

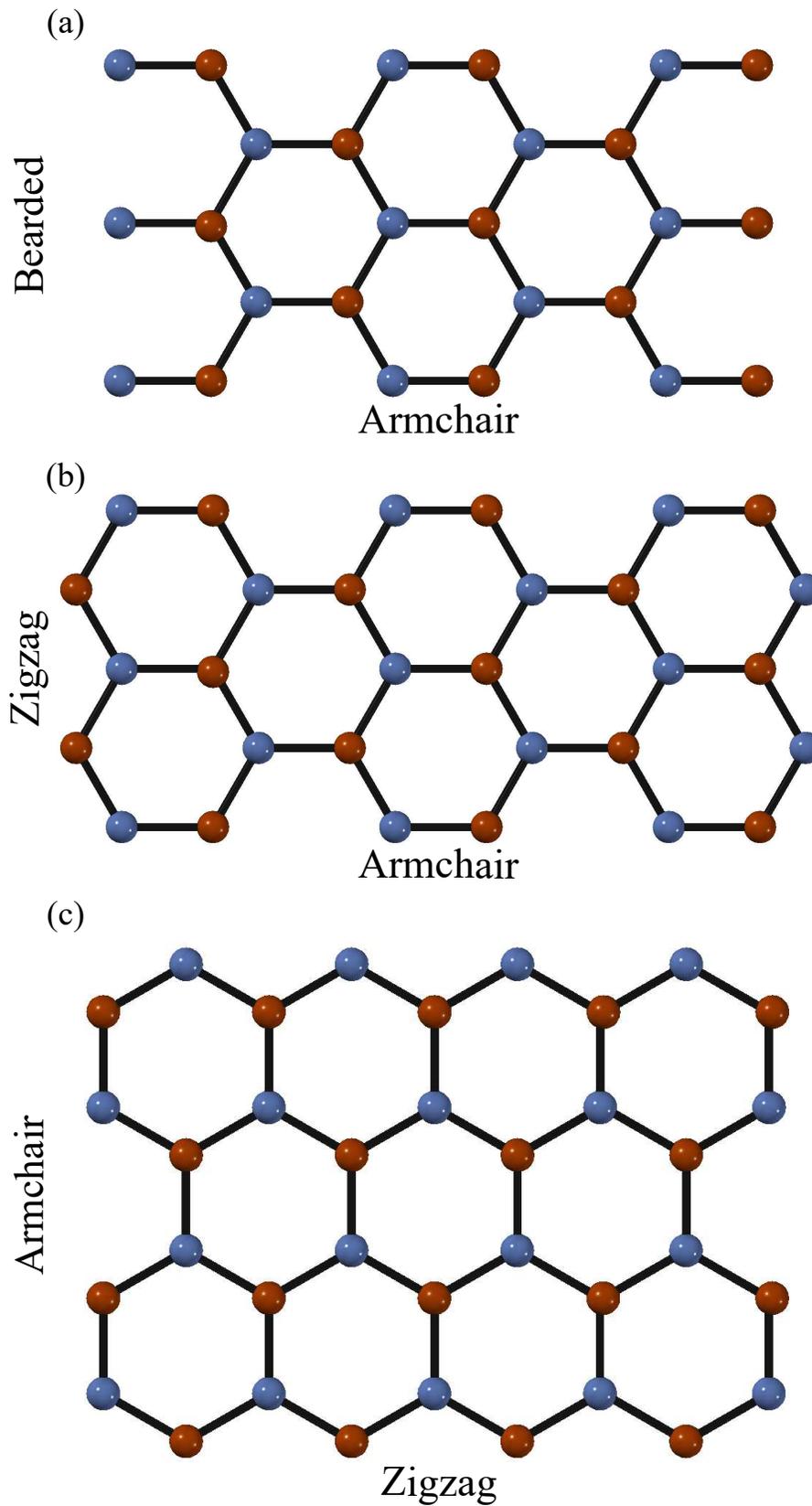


Figura 5.5: Cinta finita de Haldane con diferentes terminaciones. En azul (naranja) se muestran los sitios con ganancias (pérdidas). Fueron estos modelos los estudiados en esta tesis, en particular notamos que (b) y (c) son equivalentes mediante una rotación, por lo que los resultados entre ellos son análogos.

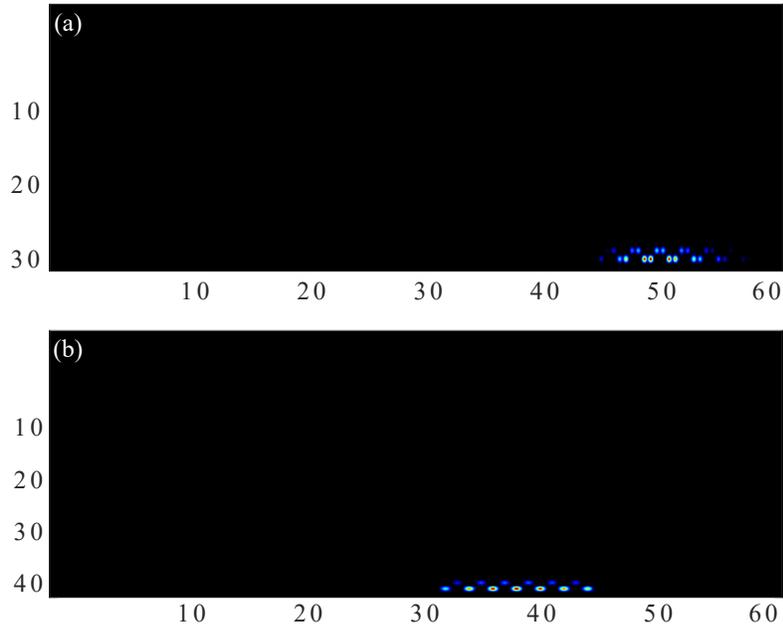


Figura 5.6: Condiciones iniciales gaussianas de poco acoplamiento con estados del bulto para (a) una red finita de 60×30 sitios con terminación *armchair-bearded* y (b) una red finita de 60×44 sitios con terminación *armchair-zigzag*. Los parámetros utilizados fueron los mismos que en las figuras anteriores.

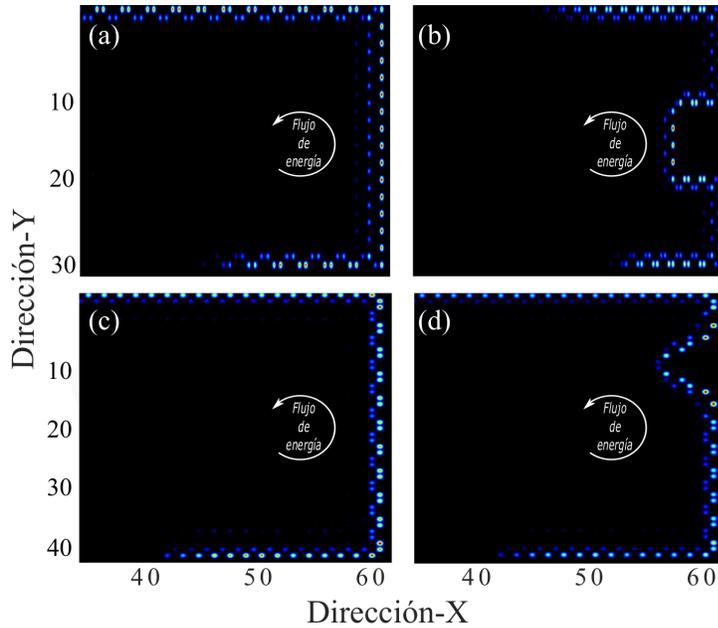


Figura 5.7: Evolución temporal hermítica ($\Gamma = 0$) de una red finita de Haldane de terminaciones (a) *armchair-bearded* y (b) *armchar-bearded* con un defecto rectangular de 5×10 sitios (c) *zigzag-armchair*, (d) *zigzag-armchair* con un defecto triangular de 6×4 sitios. En ambos casos los parámetros utilizados fueron $\phi = \pi/2$ y $t_1 = 1.0$, $t_2 = 0.3$. Una animación de estos resultados puede ser vista en <https://youtu.be/PkQMbrTbfVE> y <https://youtu.be/zL4JRLb6uGk>, respectivamente.

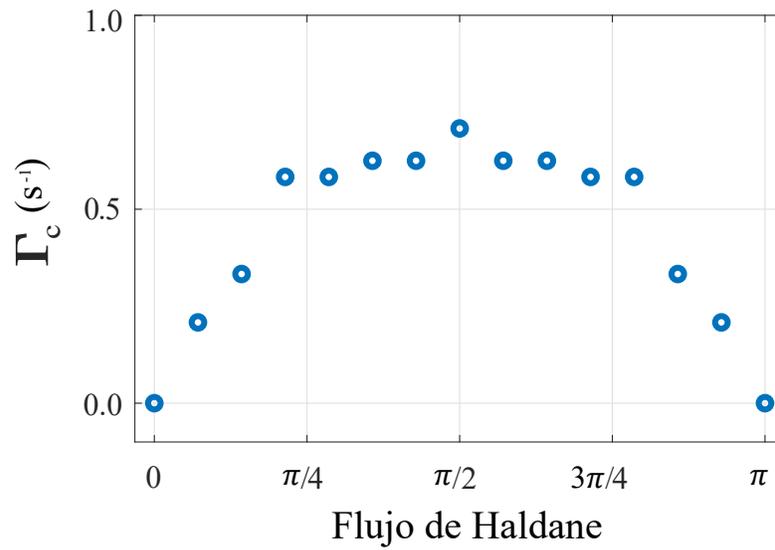


Figura 5.8: Valor crítico de la tasa de pérdida-ganancia Γ , en el cual la protección topológica se pierde en función del flujo de Haldane. Los puntos azules son los datos obtenidos numéricamente. Como se menciona en el texto, la transición de fase topológica ocurre en el sistema cuando $\phi \neq \{0, \pi\}$, que varía del mismo modo que el máximo de los valores críticos de Γ en donde protección se pierde y se pasa a la fase topológica trivial. El comportamiento es el mismo para todas las terminaciones aquí discutidas y los parámetros de la red son los que se utilizaron en los demás resultados.

Conclusiones

En conclusión, hemos mostrado la emergencia de estados de borde topológicos en redes hexagonales bidimensionales con pérdidas y ganancias balanceadas. De manera relevante, hemos encontrado que los estados de borde pueden ser observados incluso cuando la simetría \mathcal{PT} está rota, y por tanto demostrando que la protección topológica no es gobernada por la simetría \mathcal{PT} . Además, hemos encontrado que este comportamiento es universal, es decir, no depende de la geometría del borde de la red hexagonal, a diferencia de otras investigaciones en las cuales la protección topológica estaba limitada a redes con bordes *armchair*.

Si bien es cierto que el estudio de aislantes topológicos abiertos es aún joven, este trabajo nos permite concluir que bajo ciertas consideraciones es posible encontrar estados protegidos topológicamente a pesar de que haya disipación/amplificación. La investigación sobre la relevancia tecnológica de este resultado es una de las tareas pendientes y posibles trabajos futuros. Así mismo, también es necesario ampliar la búsqueda de protección topológica en otro tipo de modelos de aislantes de Chern, así como en sistemas más grandes. Esto con la finalidad de maximizar el Γ_c y relacionarlo con efectos realistas en sistemas más complejos. Finalmente, como propuesta de trabajo a futuro, se plantea investigar la preservación de las correlaciones cuánticas multipartícula mediante la evolución de un estado entrelazado y analizando su robustez ante una tasa balanceada de ganancias y pérdidas.

Este estudio contribuye a sentar las bases para la caracterización de aislantes que interactúan con el medio ambiente.

Bibliografía

- [1] M. A. Quiroz-Juárez, A. Perez-Leija, K. Tschernig, B. M. Rodriguez-Lara, O. S. Magaña-Loaiza, K. Busch, Y. N. Joglekar, and R. de J. León-Montiel, “Exceptional points of any order in a single, lossy, waveguide beamsplitter by photon-number-resolved detection,” *Photon. Res.*, vol. 7, p. 862, 2019.
- [2] G. Harari, Y. Plotnik, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. Rechtsman, and M. Segev, “Topological insulators in PT-symmetric lattices,” in *CLEO: QELS Fundamental Science*, pp. FTh3D–3, Optical Society of America, 2015.
- [3] S. Klaiman, U. Günther, and N. Moiseyev, “Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, no. 8, p. 080402, 2008.
- [4] R. El-Ganainy, K. G. Makris, M. Khajavikhan, Z. H. Musslimani, S. Rotter, and D. N. Christodoulides, “Non-Hermitian physics and PT-symmetry,” *Nat. Phys.*, vol. 14, no. 1, p. 11, 2018.
- [5] A. Szameit, M. C. Rechtsman, O. Bahat-Treidel, and M. Segev, “PT-symmetry in honeycomb photonic lattices,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, no. 2, p. 021806, 2011.
- [6] H. Zhao, X. Qiao, T. Wu, B. Midya, S. Longhi, and L. Feng, “Non-Hermitian topological light steering,” *Science*, vol. 365, no. 6458, pp. 1163–1166, 2019.
- [7] C. Yuce and H. Ramezani, “Topological states in a non-Hermitian two-dimensional Su-Schrieffer-Heeger model,” *Phys. Rev. A*, vol. 100, no. 3, p. 032102, 2019.
- [8] M. A. Bandres, M. C. Rechtsman, and M. Segev, “Topological photonic quasicrystals: Fractal topological spectrum and protected transport,” *Phys. Rev. X*, vol. 6, no. 1, p. 011016, 2016.
- [9] X. Ni, D. Smirnova, A. Poddubny, D. Leykam, Y. Chong, and A. B. Khanikaev, “Exceptional points in topological edge spectrum of PT-symmetric domain walls,” *arXiv preprint arXiv:1801.04689*, 2018.
- [10] M. Z. Hasan and C. L. Kane, “Colloquium: topological insulators,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, no. 4, p. 3045, 2010.

- [11] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, “Topological insulators and superconductors,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, p. 1057, 2011.
- [12] Y. Plotnik, M. C. Rechtsman, D. Song, M. Heinrich, J. M. Zeuner, S. Nolte, Y. Lumer, N. Malkova, J. Xu, A. Szameit, *et al.*, “Observation of unconventional edge states in «photonic graphene»,” *Nat. Mat.*, vol. 13, no. 1, p. 57, 2014.
- [13] T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, and E. Demler, “Topological characterization of periodically driven quantum systems,” *Phys. Rev. B*, vol. 82, no. 23, p. 235114, 2010.
- [14] N. H. Lindner, G. Refael, and V. Galitski, “Floquet topological insulator in semiconductor quantum wells,” *Nat. Phys.*, vol. 7, no. 6, p. 490, 2011.
- [15] K. Fang, Z. Yu, and S. Fan, “Realizing effective magnetic field for photons by controlling the phase of dynamic modulation,” *Nat. Photonics*, vol. 6, no. 11, p. 782, 2012.
- [16] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev, “Topological insulator laser: theory,” *Science*, vol. 359, no. 6381, p. eaar4003, 2018.
- [17] M. Kremer, T. Biesenthal, M. Heinrich, R. Thomale, and A. Szameit, “Demonstration of a two-dimensional PT-symmetric crystal: bulk dynamics, topology, and edge states,” *arXiv preprint arXiv:1809.00041*, 2018.
- [18] S. Weimann, M. Kremer, Y. Plotnik, Y. Lumer, S. Nolte, K. G. Makris, M. Segev, M. C. Rechtsman, and A. Szameit, “Topologically protected bound states in photonic parity–time-symmetric crystals,” *Nat. Mater.*, vol. 16, no. 4, p. 433, 2017.
- [19] K. Wang, X. Qiu, L. Xiao, X. Zhan, Z. Bian, B. C. Sanders, W. Yi, and P. Xue, “Observation of emergent momentum–time skyrmions in parity–time-symmetric non-unitary quench dynamics,” *Nat. Commun.*, vol. 10, no. 1, p. 2293, 2019.
- [20] T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto, “Topological photonics,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 91, p. 015006, 2019.
- [21] M. Aidelsburger, M. Lohse, C. Schweizer, M. Atala, J. T. Barreiro, S. Nascimbene, N. R. Cooper, I. Bloch, and N. Goldman, “Measuring the Chern number of Hofstadter bands with ultracold bosonic atoms,” *Nat. Phys.*, vol. 11, p. 162, 2015.
- [22] B. K. Stuhl, H.-I. Lu, L. M. Ayccock, D. Genkina, and I. B. Spielman, “Visualizing edge states with an atomic Bose gas in the quantum Hall regime,” *Science*, vol. 349, p. 1514, 2015.
- [23] M. Mancini, G. Pagano, G. Cappellini, L. Livi, M. Rider, J. Catani, C. Sias, P. Zoller, M. Inguscio, M. Dalmonte, and L. Fallani, “Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic Hall ribbons,” *Science*, vol. 349, p. 1510, 2015.

- [24] N. Goldman, J. C. Budich, and P. Zoller, “Topological quantum matter with ultracold gases in optical lattices,” *Nat. Phys.*, vol. 12, p. 639, 2016.
- [25] Z. Yang, F. Gao, X. Shi, X. Lin, Z. Gao, Y. Chong, and B. Zhang, “Topological acoustics,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, no. 11, p. 114301, 2015.
- [26] C. H. Lee, S. Imhof, C. Berger, F. Bayer, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, and R. Thomale, “Topoelectrical circuits,” *Commun. Phys.*, vol. 1, p. 39, 2018.
- [27] J. Yuen-Zhou, S. K. Saikin, N. Y. Yao, and A. Aspuru-Guzik, “Topologically protected excitons in porphyrin thin films,” *Nat. Mat.*, vol. 13, no. 11, p. 1026, 2014.
- [28] F. D. M. Haldane, “Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the «parity anomaly»,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, no. 18, p. 2015, 1988.
- [29] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, “New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 45, no. 6, p. 494, 1980.
- [30] C.-Z. Chang, J. Zhang, X. Feng, J. Shen, Z. Zhang, M. Guo, K. Li, Y. Ou, P. Wei, L.-L. Wang, *et al.*, “Experimental observation of the quantum anomalous Hall effect in a magnetic topological insulator,” *Science*, vol. 340, no. 6129, pp. 167–170, 2013.
- [31] G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif, and T. Esslinger, “Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions,” *Nature*, vol. 515, no. 7526, p. 237, 2014.
- [32] H.-S. Kim and H.-Y. Kee, “Realizing Haldane model in Fe-based honeycomb ferromagnetic insulators,” *npj Quantum Mater.*, vol. 2, no. 1, p. 20, 2017.
- [33] B. Peng, Ş. K. Özdemir, F. Lei, F. Monifi, M. Gianfreda, G. L. Long, S. Fan, F. Nori, C. M. Bender, and L. Yang, “Parity–time-symmetric whispering-gallery microcavities,” *Nat. Phys.*, vol. 10, no. 5, p. 394, 2014.
- [34] Y. C. Hu and T. L. Hughes, “Absence of topological insulator phases in non-Hermitian PT-symmetric Hamiltonians,” *Phys. Rev. B*, vol. 84, no. 15, p. 153101, 2011.
- [35] C. M. Bender and S. Boettcher, “Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT-symmetry,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 24, p. 5243, 1998.
- [36] W. Chen, S. K. Özdemir, G. Zhao, J. Wiersig, and L. Yang, “Exceptional points enhance sensing in an optical microcavity,” *Nature*, vol. 548, no. 7666, p. 192, 2017.
- [37] R. de J. León-Montiel, M. A. Quiroz-Juárez, J. L. Domínguez-Juárez, R. Quintero-Torres, J. L. Aragón, A. K. Harter, and Y. N. Joglekar, “Observation of slowly decaying eigenmodes without exceptional points in Floquet dissipative synthetic circuits,” *Commun. Phys.*, vol. 1, p. 88, 2018.

- [38] S. K. Özdemir, S. Rotter, F. Nori, and L. Yang, “Parity–time symmetry and exceptional points in photonics,” *Nat. Mater.*, vol. 18, no. 8, p. 783, 2019.
- [39] R. El-Ganainy, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and S. K. Özdemir, “The dawn of non-Hermitian optics,” *Commun. Phys.*, vol. 2, no. 1, p. 37, 2019.
- [40] L. Xiao, X. Zhan, Z. Bian, K. Wang, X. Zhang, X. Wang, J. Li, K. Mochizuki, D. Kim, N. Kawakami, *et al.*, “Observation of topological edge states in parity–time-symmetric quantum walks,” *Nat. Phys.*, vol. 13, no. 11, pp. 1117–1123, 2017.
- [41] M. A. Bandres, S. Wittek, G. Harari, M. Parto, J. Ren, M. Segev, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, “Topological insulator laser: Experiments,” *Science*, vol. 359, no. 6381, p. eaar4005, 2018.
- [42] G. Harari, M. A. Bandres, Y. Lumer, M. C. Rechtsman, Y. D. Chong, M. Khajavikhan, D. N. Christodoulides, and M. Segev, “Topological insulator laser: theory,” *Science*, vol. 359, no. 6381, p. eaar4003, 2018.
- [43] Y. Zeng, U. Chattopadhyay, B. Zhu, B. Qiang, J. Li, Y. Jin, L. Li, A. G. Davies, E. H. Linfield, B. Zhang, *et al.*, “Electrically pumped topological laser with valley edge modes,” *Nature*, vol. 578, no. 7794, pp. 246–250, 2020.
- [44] V. M. Alvarez, J. B. Vargas, M. Berdakin, and L. F. Torres, “Topological states of non-Hermitian systems,” *Eur. Phys. J-Spec. Top.*, vol. 227, no. 12, pp. 1295–1308, 2018.
- [45] C. Poli, M. Bellec, U. Kuhl, F. Mortessagne, and H. Schomerus, “Selective enhancement of topologically induced interface states in a dielectric resonator chain,” *Nat. Commun.*, vol. 6, p. 6710, 2015.
- [46] H. Schomerus, “Topologically protected midgap states in complex photonic lattices,” *Opt. Lett.*, vol. 38, no. 11, pp. 1912–1914, 2013.
- [47] C. Yuce and Z. Oztas, “PT-symmetry protected non-Hermitian topological systems,” *Sci. Rep.*, vol. 8, no. 1, p. 17416, 2018.
- [48] L. Xiao, X. Qiu, K. Wang, B. C. Sanders, W. Yi, and P. Xue, “Topology with broken parity-time symmetry,” *arXiv preprint arXiv:1906.07468*, 2019.
- [49] L. Landau, E. Lifshitz, and L. Pitaevskii, “Statistical physics, part 2,” *Course of theoretical physics*, vol. 9, p. 67, 1981.
- [50] W. Kohn, “Theory of the insulating state,” *Phys. Rev.*, vol. 133, no. 1A, p. A171, 1964.
- [51] D. Tong, “The Quantum Hall Effect. TIFR Infosys Lectures,” *Centre for Mathematical Sciences, Cambridge*, 2016.
- [52] R. B. Laughlin, “Quantized Hall conductivity in two dimensions,” *Phys. Rev. B*, vol. 23, no. 10, p. 5632, 1981.

- [53] B. I. Halperin, “Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential,” *Phys. Rev. B*, vol. 25, no. 4, p. 2185, 1982.
- [54] A. Ambainis and O. Regev, “An elementary proof of the quantum adiabatic theorem,” *arXiv preprint quant-ph/0411152*, 2004.
- [55] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Courier Dover Publications, 2016.
- [56] Y. Ando, “Topological insulator materials,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 82, no. 10, p. 102001, 2013.
- [57] M. Fruchart and D. Carpentier, “An introduction to topological insulators,” *C. R. Phys.*, vol. 14, no. 9-10, pp. 779–815, 2013.
- [58] G. Marcelli, D. Monaco, M. Moscolari, and G. Panati, “The Haldane model and its localization dichotomy,” vol. 9, pp. 307–327, 01 2018.
- [59] L. Lu, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, “Topological photonics,” *Nat. Photonics*, vol. 8, no. 11, p. 821, 2014.
- [60] C. M. Bender, “Making sense of non-Hermitian Hamiltonians,” *Rep. Prog. Phys.*, vol. 70, no. 6, p. 947, 2007.
- [61] G. Barton, “Introduction to advanced field theory,” *Interscience Tracts Phys. Astron.*, vol. 22, pp. 1–163, 1963.
- [62] C. M. Bender, “Introduction to PT-symmetric quantum theory,” *Contemp. Phys.*, vol. 46, no. 4, pp. 277–292, 2005.
- [63] K. G. Makris, R. El-Ganainy, D. Christodoulides, and Z. H. Musslimani, “Beam dynamics in PT-symmetric optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, no. 10, p. 103904, 2008.
- [64] A. Guo, G. Salamo, D. Duchesne, R. Morandotti, M. Volatier-Ravat, V. Aimez, G. Siviloglou, and D. Christodoulides, “Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, no. 9, p. 093902, 2009.
- [65] S. Sanders and A. Manjavacas, “Nanoantennas with balanced gain and loss,” *Nanophotonics*, vol. 9, no. 2, pp. 473–480, 2020.
- [66] S. Altinisik, D. Dizdarevic, and J. Main, “Balanced gain and loss in spatially extended non-PT-symmetric multiwell potentials,” *Phys. Rev. A*, vol. 100, no. 6, p. 063639, 2019.
- [67] I. Giden, K. Dadashi, M. Botey, R. Herrero, K. Staliunas, and H. Kurt, “Nonreciprocal light transmission in gain-loss modulated micro ring resonators,” pp. 1–3, 2015.
- [68] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. 2003.

- [69] Y. Liu, T. Hao, W. Li, J. Capmany, N. Zhu, and M. Li, “Observation of parity-time symmetry in microwave photonics,” *Light Sci. Appl.*, vol. 7, no. 1, p. 38, 2018.
- [70] H. Zhang, F. Saif, Y. Jiao, and H. Jing, “Loss-induced transparency in optomechanics,” *Opt. Express*, vol. 26, no. 19, pp. 25199–25210, 2018.
- [71] L. Feng, M. Ayache, J. Huang, Y.-L. Xu, M.-H. Lu, Y.-F. Chen, Y. Fainman, and A. Scherer, “Nonreciprocal light propagation in a silicon photonic circuit,” *Science*, vol. 333, no. 6043, p. 729, 2011.
- [72] Z. Lin, H. Ramezani, T. Eichelkraut, T. Kottos, H. Cao, and D. N. Christodoulides, “Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, no. 21, p. 213901, 2011.
- [73] H. Jing, S. Özdemir, X.-Y. Lü, J. Zhang, L. Yang, and F. Nori, “PT-symmetric phonon laser,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, no. 5, p. 053604, 2014.
- [74] S. Longhi, “PT-symmetric laser absorber,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, no. 3, p. 031801, 2010.
- [75] B. Peng, Ş. K. Özdemir, M. Liertzer, W. Chen, J. Kramer, H. Yilmaz, J. Wiersig, S. Rotter, and L. Yang, “Chiral modes and directional lasing at exceptional points,” *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 113, no. 25, p. 6845, 2016.
- [76] T. Kottos, “Optical physics: Broken symmetry makes light work,” *Nat. Phys.*, vol. 6, no. 3, p. 166, 2010.
- [77] H. Hodaei, A. U. Hassan, S. Wittek, H. Garcia-Gracia, R. El-Ganainy, D. N. Christodoulides, and M. Khajavikhan, “Enhanced sensitivity at higher-order exceptional points,” *Nature*, vol. 548, no. 7666, p. 187, 2017.
- [78] J. Schindler, A. Li, M. C. Zheng, F. M. Ellis, and T. Kottos, “Experimental study of active LRC circuits with PT-symmetries,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, no. 4, p. 040101, 2011.
- [79] M. Chitsazi, H. Li, F. Ellis, and T. Kottos, “Experimental realization of Floquet PT-symmetric systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 119, no. 9, p. 093901, 2017.
- [80] Z. Gong, Y. Ashida, K. Kawabata, K. Takasan, S. Higashikawa, and M. Ueda, “Topological phases of non-Hermitian systems,” *Phys. Rev. X*, vol. 8, no. 3, p. 031079, 2018.
- [81] H. Shen, B. Zhen, and L. Fu, “Topological band theory for non-Hermitian Hamiltonians,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 120, no. 14, p. 146402, 2018.
- [82] M. A. Bandres and M. Segev, “Non-Hermitian Topological Systems,” *Physics*, vol. 11, p. 96, 2018.