UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA INTRODUCCIÓN A LOS TOPOS DE GROTHENDIECK MEDIANTE LA EQUIVALENCIA DE GIRAUD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

LUIS DANIEL RAMOS TREJO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANK PATRICK MURPHY HERNÁNDEZ

CIUDAD DE MÉXICO, 2020

1. Datos del alumno	1. Datos del alumno
Apellido paterno	Ramos
Apellido materno	Trejo
Nombre(s)	Luis Daniel
Teléfono	56179887
Universidad Nacional Autónoma de México	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de Cuenta	313092752
2. Datos del tutor	2. Datos del tutor
Grado	Doctor
Nombre(s)	Frank Patrick
Apellido paterno	Murphy
Apellido materno	Hernández
3. Datos del sinodal 1	3. Datos del sinodal 1
Grado	Doctor
Nombre(s)	Omar
Apellido paterno	Antolín
Apellido materno	Camarena
4. Datos del sinodal 2	4. Datos del sinodal 2
Grado	Maestra en ciencias
Nombre(s)	Alma Violeta
Apellido paterno	García
Apellido materno	López
5. Datos del sinodal 3	5. Datos del sinodal 3
Grado	Doctor
Nombre(s)	Hugo Alberto
Apellido paterno	Rincón
Apellido materno	Mejía
6. Datos del sinodal 4	6. Datos del sinodal 4
Grado	Maestro en ciencias
Nombre(s)	Luis Jesús
Apellido paterno	Turcio
Apellido materno	Cuevas
7. Datos del trabajo escrito.	7. Datos del trabajo escrito
Título	Una introducción a los Topos de Grothendieck mediante la Equivalencia de Giraud
Número de páginas	113
Año	2020

Agradecimientos

A mi madre, Luz, por el gran amor, confianza y orientación. Agradezco el apoyo y consejo en las decisiones que he tomado, las cuales me han formado como persona.

A mi abuela y tío Daniel, por sus consejos y enseñanzas. Sin lugar a dudas me han llevado hasta donde estoy hoy y no dudo que los llevaré siempre conmigo.

A mis tías, tío y primos por su compañía, platica y atinadas bromas.

A mi mentor, Frank. Por la paciencia y esmero en enseñarme siempre un poco más de matemática. Todas las pláticas han sido grandes aprendizajes. Muchas gracias.

A Jaime. No cabe duda que las charlas de pasillos me formaron. Cada revisión, asesoría o charla fueron de gran motivación. Contigo aprendí a no perder el sueño lógico ni dudar de lo que se. Gracias amigo.

A Chuy y Taba, por estar en cada momento apoyándome. Desde una platica hasta ir a rescatarme cuando fuese necesario. Me siento en gran deuda con ustedes.

A mis amigos de «El Prome», sin orden en particular: Alberto, Eli, Carlos, Marco, Lore, Paty, Daysi, Emilio, Ricardo, Nakid. Todo lo que he aprendido fue con ustedes, y muy seguramente fue en «El Prome». Gracias por el tiempo, las charlas, las risas y la confianza.

A mis amigos de la prepa: Caro, Mariana y Claudio. Las platicas y consejos fueron guía cuando todo era confuso.

A Tania, por mostrarme que cuando es la hora todo llega.

A Zyan, por todos los momentos compartidos, por enseñarme a no perder lo humano.

A Adrica, no sé como agradecerte todo lo que has hecho por mi. En especial por siempre estar, por mostrarme un lado nuevo de ver las cosas y por la gran paciencia que me has tenido. Gracias por tanto.

Índice general

Notación

- $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ denotarán categorías; letras mayúsculas denotaran funtores principalmente se utilizarán F y G; letras minúsculas denotarán morfismos de la categoría, principalmente f, g, h, s y t.
- La categoría de conjuntos y funciones sera denotada por SET.
- La categoría de espacios topológicos y funciones continuas sera denotada por TOP.
- La categoría de grupos y morfismos de grupos sera denotada por Grp. La subcategoría de grupos abelianos con morfismos de grupos abelianos sera denotada por Ab.
- Dadas $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ categorías, la categoría de funtores de $\mathbb{A}$ hacia $\mathbb{B}$ será denotada $Fun(\mathbb{A}, \mathbb{B})$.
- Dada $\mathbb{A}$ una categoría, se escribirá $A \in \mathbb{A}$ para denotar que A es un objeto de $\mathbb{A}$.
- El morfismo identidad de cualquier $A \in \mathbb{A}$ sera denotado por 1_A.
- Dados A y B es una categoría $\mathbb{A}$. Se denotará por $Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$ a la colección de morfismos de A hacia B. En caso de que no haya ambigüedad sobre la categoría se omitirá el subíndice.
- Por una categoría localmente pequeña se entenderá que para cualesquiera A y B elementos de la categoría $Hom(A, B)$ es un conjunto.
- Por una categoría pequeña se entenderá que la colección de objetos de la categoría es un conjunto.
- Dada $\mathbb{A}$ una categoría localmente pequeña y $A \in \mathbb{A}$, se denotara por h_A al funtor contravariante representable asociado a A, tal que para cualquier $B \in \mathbb{A}$, $h_A(B) = Hom_{\mathbb{A}}(B, A)$.

Introducción

El concepto de *gavilla*[1] se puede encontrar por primera vez en un trabajo presentado en 1946 por J. Leray, «L'anneau d'homologie d'une representation». El definió gavilla sobre un espacio topológico localmente compacto, asignando a cada cerrado del espacio un anillo o un módulo. Después Cartan, por recomendación de su alumno Koszul, retoma el trabajo de Leray, quien dentro del «seminario Cartan», realiza exposiciones de la teoría de gavillas (1948-1950). En 1950, Cartan redefine gavilla como un espacio etalé con estructura de grupo, e hizo notar que las ideas resultan de manera natural en abiertos, en contraste a como Leray lo definió. Luego en 1953 en su artículo del coloquio de Bruselas, Cartán ve una gavilla como una asignación[2] que satisface condiciones de «pegado».

En 1949, Leray imparte un curso en el *Collége de France*, al cual acuden Armand Borel y Jean-Pierre Serre, quienes en 1950 prueban que es imposible fibrar un espacio euclideano con fibras compactas[3] siguiendo las ideas de Leray. También en 1949 André Weil postula las *Conjeturas de Weil*, junto con lo que él creía que era un camino para la prueba de estas conjeturas, la existencia de una «cohomología adecuada», la cual sería nombrada la *cohomología de Weil*. Estas conjeturas fueron de gran interés para la comunidad matemática en es momento, entre los interesados, se encontraba Serre. Él, por una sugerencia de Weil, enunció y probó una versión de las conjeturas de Weil, para variedades de Kahler [4].

El 21 de abril de 1958, Serre dio una conferencia en la Ecole Normal Superiore, dentro del seminario «Seminaire Claude Chevalley», a la cual acudió Alexander Grothendieck. En esta expuso sobre haces fibrados sobre variedades. Mostrando que con esto

[1]En español, también conocida como *haz*. Que es una traducción de *sheaf*, termino que acuño John Moore para traducir *faisceaux*.

[2]Realmente esta asignación es una *pregavilla*, aunque el término no existía en ese momento.

[3]A. Borel, J.-P. Sierre; *Impossibilité de fibrer un espace euclidien par des fibrescompactes*, CRAS 230, 1950, pp. 2258-2260.

[4]J.-P. Serre, *Analogues Kahlerienes de Certaines Conjectures de Weil*, Annals of Mathematics, vol. 71, no. 2, 1960, pp. 392–394.

se obtenían los grupos de cohomología de Weil esperados. La historia cuenta que Grothendieck al ver esta exposición, comentó que este trabajo era una buena generalización de las localizaciones usuales y que se podían obtener teorías de cohomología en todas las dimensiones. Para Grothendieck esta era la solución a las conjeturas de Weil. Para definir esta cohomología era necesario «cubrir» de manera adecuada, por lo que Grothendieck cambió la forma de cubrir, de la topológica a las cubiertas étale, más aún, encontró una generalización de la noción de cubierta, esta noción se conoce como *Topología de Grothendieck*.

La primera aparición de las *topología de Grothendieck* fue en las notas de 1962 por Michel Artin. Tituladas, «Topologías de Grothendieck», en ellas se define como lo que hoy en día es conocido como Pretopología de Grothendieck. El año siguiente Jean Giraud en «Analysis situs», una exposición del Seminario Bourbaki, presenta como Topología la definición actual, por medio de cribas. Ambas definiciones resultan estar relacionadas pues una pretopología induce una única topología (aunque 2 pretopologías pueden inducir la misma topología), ese mismo año, en el SGA 4, aparece la definición de Topología de Grothendieck, como la define Giraud. También la definición de *topos*. Ahora, para poder solucionar las conjeturas de Weil, la parte crucial era que a cada esquema se le asociara un *topos*. Así algunos invariantes de la cohomología, según Grothendieck, le darían completo significado a las conjeturas y quizás una forma de probarlas.

En el texto, Récoltes et Semailles[5] dice, en una burda traducción, que un «Espacio en el nuevo sentido » (o un *topos*), generalizando los espacios topológicos, esta dado por una categoría que tiene todas las «propiedades buenas» de una categoría de gavillas (de conjuntos). El menciona que estas propiedades buenas, están por encima de las llamadas propiedades de exactitud expuestas en su artículo «Tohoku». En este sentido resulta inmediato preguntarse, ¿cuales son estas «buenas propiedades»? Es decir, que propiedades debe tener una categoría para ser (equivalente a) una categoría de gavillas. La respuesta a esto resulta ser el *Teorema de Giraud*, el cual caracteriza a los *topos de Grothendieck*. Este teorema permite conocer *topos* sin tener que probar que, en efecto, sean equivalentes a una categoría de gavillas sobre un sitio.

[5]Grothendieck, Alexander ; Récoltes et Semailles, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier. Published in several successive volumes

El objetivo de este trabajo es probar el teorema de Giraud. La versión que se demostrara, establece una equivalencia entre varias definiciones de un *Topos de Grothendieck*. Esta permite decidir si una categoría es un topos por medio de propiedades internas de la categoría. Esto se hará pasando por las construcciones de sitios, de categorías de gavillas y de los funtores necesarias.

Para esto se dan en el primer capítulo algunas definiciones que facilitarán la lectura y se recuerdan algunas construcciones categóricas.

En el segundo capítulo se aborda el concepto de criba, dando una definición general y luego particularizando a la que resulta de utilidad en este trabajo. También se prueba la equivalencia entre distintas definiciones encontradas en la literatura, las cuales permiten trabajar en 3 formas. Se estudia la estructura reticular de estas, sus propiedades de estabilidad y de localidad. A lo largo del capitulo se dan algunos ejemplos que resaltan principalmente el orden y como es que estas «clasifican».

Un *topos de Grothendieck* originalmente se define como una categoría de gavillas sobre un *sitio*. Para entender esta definición es necesario conocer los conceptos de gavilla y de *sitio*, por tanto, en el tercer capítulo se estudian categorías de gavillas; empezando por gavillas sobre espacios topológicos. Abstrayendo la noción de cubierta, se generaliza el concepto a *pretopologías* y notando que estas no determinen al espacio base, se introducen las *Topologías de Grothendieck*. Estas resultan naturalmente del intento de que las gavillas determinen el espacio base, llegando así al concepto de *sitio* y de *gavillas sobre un sitio*, más aún, se prueba que las pretopologías inducen una topología y que de hecho estas tienen las mismas gavillas. Se dan ejemplos clásicos como la *pretopología de Zariski* y la *topología canónica*. Se calcula de manera explicita la topología más fina que hace gavilla a cualquier pregavilla. Además se prueba una equivalencia entre distintas definiciones de gavilla, las cuales se inducen naturalmente desde espacios topológicos.

Ahora dados un *sitio* y una pregavilla F, surge la cuestión ¿Existe una gavilla parecida a F? De esta manera el cuarto capitulo comienza probando que la repuesta a esta pregunta es positiva, este resultado es conocido como la «gavillificación» de F, además la asignación resulta ser una transformación natural, y más aún adjunto de la inclusión (de la categoría de gavillas en la de pregavillas). Por ser adjunto se tiene que respeta colímites y por como esta definida la asignación, resulta respetar límites finitos. Así, esta adjunción ayuda a estudiar internamente la categoría de gavillas, probando que estas resultan satisfacer las propiedades para ser un *pretopos*, estas son:

- Tiene límites finitos.
- Tiene coproductos y estos son disjuntos, pequeños y estables bajo pullback.
- Los epimorfismos son efectivos y estables bajo pullback.
- Las relaciones de equivalencia son efectivas.

Después se estudia como se ve la categoría base en la categoría de gavillas, ocupando el encaje de Yoneda, se pasa hacia la categoría de pregavillas y con esto se construye una familia generadora para la categoría de gavillas. Recuperando también que cualquier gavilla es colímite de la familia generadora.

El penúltimo capítulo se dedica a probar el teorema de Giraud, para esto se introduce la noción de *categoría de Giraud*, se encuentran una categoría y una topología, de tal manera que este sitio, resulta ser equivalente a la categoría en cuestión; de hecho, este sitio resulta tener la topología canónica. Así el resultado principal se tiene como un corolario del capítulo anterior y de este.

Para finalizar, en el último capítulo se dan algunas conclusiones y se resalta la importancia del resultado, también se dan algunas referencias para continuar con el estudio de los Topos.

Capítulo 1

Preliminares

Definición 1.1. *Sean $\mathcal{E}$ una clase de objetos de $\mathbb{A}$, $\mathcal{M}$ una clase de morfismos de $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ una subcategoría de $\mathbb{A}$*

- *Se define la categoría rebanada en objetos $\mathbb{A}/\mathcal{E}$ como:*
    - *Los objetos de $\mathbb{A}/\mathcal{E}$ son parejas (A, f) tales que $f : A \to B$ y B es un elemento de $\mathcal{E}$*
    - *Para (A, f) y (B, g) elementos de $\mathbb{A}/\mathcal{E}$ los morfismos entre ellos son:*

      $$Hom_{\mathbb{A}/\mathcal{E}}((A, f), (B, g)) = \{h \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B) | f = gh\}$$

- *Se define la categoría rebanada en morfismos $\mathbb{A}/\mathcal{M}$ como:*
    - *Los objetos de $\mathbb{A}/\mathcal{M}$ son parejas (A, f) tal que $f : A \to B$ y f pertenece a $\mathcal{M}$*
    - *Para (A, f) y (B, g) elementos de $\mathbb{A}/\mathcal{M}$ los morfismos entre ellos son:*

      $$Hom_{\mathbb{A}/\mathcal{M}}((A, f)(B, g)) = \{h \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B) | f = gh\}$$

- *Se define la categoría rebanada en la subcategoría $\mathbb{A}/\mathbb{B}$ como*
    - *Los objetos de $\mathbb{A}/\mathbb{B}$ son parejas (A, f) tales que $f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$*
    - *Para (A, f) y (B, g) elementos de $\mathbb{A}/\mathbb{B}$ los morfismos entre ellos son:*

      $$Hom_{\mathbb{A}/\mathbb{B}}((A, f)(B, g)) = \{h \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B) | f = gh\}$$

Definición 1.2. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría y $\mathbb{B}$ una subcategoría de $\mathbb{A}$. Se dice que $\mathbb{B}$ es cerrada bajo $\mathbb{A}$-precomposición, si para cualquier $B \in \mathbb{B}$ si $f \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$ entonces $A \in \mathbb{B}$ y $f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$. En caso de que no exista ambigüedad sobre $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, se escribirá «cerrada bajo precomposición».*

Proposición 1.3. *Sea $\mathbb{B}$ una subcategoría de $\mathbb{A}$. Si $\mathbb{B}$ es cerrada bajo precomposición entonces $\mathbb{B}$ es subcategoría plena*

Demostración. Sean A y B objetos de $\mathbb{B}$ y $f \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$. Por definición de $\mathbb{A}-$precomposición, $f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$. Por lo tanto $\mathbb{B}$ es puna subcategoría plena. ■

Observación 1.4. *Sin embargo el reciproco de esta proposición no es cierto. Considere $\mathbb{A}$ como la categoría con 3 puntos, como en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\ C \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

y considere $\mathbb{B}$ con objetos C, B y morfismos $h : C \to B$ y las identidades correspondientes, note que $\mathbb{B}$ es plena, pero que $g : A \to C$ y $A \notin \mathbb{B}$ por lo que no es cerrada bajo $\mathbb{A}$-precomposición
Otro ejemplo se obtiene considerando la subcategoria Ab de Grp. Dado G un grupo no abeliano,, se puede considerar la proyección en su abelianización, $P : G \to G/[G, G]$. Es claro que $G/[G, G]$ es abeliano pero que G no. Por lo que Ab es una subcategoría plena, que no es cerrada bajo $Grp-$precomposición.

Proposición 1.5. *Sea $\mathbb{B}$ subcategoría de $\mathbb{A}$ y $\mathcal{M}$ la clase de morfismos de $\mathbb{B}$. Entonces $\mathbb{A}/\mathbb{B} = \mathbb{A}/\mathcal{M}$*

Demostración. Note que en objetos se tiene que:
$(A, f) \in \mathbb{A}/\mathbb{B}$ si y solo si $f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$ si y solo si $f \in \mathcal{M}$ si y solo si $(A, f) \in \mathbb{A}/\mathcal{M}$
Para probar la igualdad en morfismos, se probará por doble contención:
$\subseteq$) Sea $h \in Hom_{\mathbb{A}/\mathbb{B}}((A, f), (B, g))$. Por definición $h \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B) \subseteq Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$ y $f = gh$. De donde $h \in Hom_{\mathbb{A}/\mathcal{M}}((A, f), (B, g))$
$\supseteq$) Sea $h \in Hom_{\mathbb{A}/\mathcal{M}}((A, f), (B, g))$. Por definición $h \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$, $f = gh$ y $h \in \mathcal{M}$. De donde $h \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$. Así por definición $h \in Hom_{\mathbb{A}/\mathbb{B}}((A, f)(B, g))$
Por tanto $\mathbb{A}/\mathbb{B} = \mathbb{A}/\mathcal{M}$ ■

Capítulo 2

Cribas

1. Cribas

Dada una categoría $\mathbb{A}$ y un objeto A de $\mathbb{A}$, una pregunta natural es ¿que tanto la categoría $\mathbb{A}$ determina a A?. Un ejemplo de esto se tiene al considerar el espacio de Sierpinski, (S, τ_S), donde $S = \{0, 1\}$ y $\tau_S = \{\emptyset, \{1\}, S\}$ y (T, τ_T) donde $T = \{0, 1, 2\}$ y $\tau_T = \{\emptyset, T, \{1\}\}$. Si son considerados en la categoría de espacios topológicos y para cualquier $X \in TOP$, se tiene que:

$$Hom(X, S) \cong Hom(X, T)$$

Este isomorfismo esta dado por $\theta_X : Hom(X, S) \to Hom(X, T)$ donde para cualquier $f \in Hom(X, S)$, $\theta_X(f) = if$ con $i : S \to T$ la inclusión, que es continua. El inverso de θ_X, $\theta_X^{-1} : Hom(X, T) \to Hom(X, S)$ dado por $\theta_X^{-1}(g) = jg$ para cualquier $g \in Hom(X, T)$ con $j : T \to S$ dada por $j(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x = 1, 2 \end{cases}$ la cual resulta ser continua. Desde este punto de vista, los objetos T y S son indistinguibles pero no homeomorfos. El enfoque categórico da luz de que lo que realmente determina al espacio topológico es la topología mas que el espacio.

Definición 2.1. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría. Una criba S en $\mathbb{A}$ es una colección de morfismos de $\mathbb{A}$ tal que, si $f : A \to B \in S$ y $g : C \to A$ en $\mathbb{A}$, entonces $fg : C \to B \in S$. Dado $A \in \mathbb{A}$, Una criba S sobre A es una criba tal que para cualquier $f \in S$, $cod(f) = A$.*

Note que la condición de criba y la de subcategoría cerrada bajo precomposición son similares, de hecho, es posible mejorar esta observación.

Definición 2.2. *Dada una criba S en $\mathbb{A}$. Se define la categoría $\mathbb{B}_S$ cuyos objetos son los objetos $A \in \mathbb{A}$, tales que existe $f \in S$ con $dom(f) = A$ y $Hom_{\mathbb{B}_S}(A, B) = \{f : A \to B | existe\ g \in S, gf \in S\}$*

Proposición 2.3. *Sea S una criba en $\mathbb{A}$. Entonces $\mathbb{B}_S$ es una categoría. Más aun, es una subcategoría de $\mathbb{A}$ cerrada bajo precomposición.*

Basta con notar que tiene identidades y respeta composiciones. Para lo primero note que si $A \in Ob(\mathbb{B}_S)$ entonces existe $f \in S$ tal que $A = dom(f)$, por lo que $f = 1_A f \in S$ y por definición $1_A \in Hom_{\mathbb{B}_S}(A, A)$.
Para la segunda parte, sean $g \in Hom_{\mathbb{B}_S}(B, A)$ y $f \in Hom_{\mathbb{B}_S}(C, B)$ note que $gf \in Hom_{\mathbb{A}}(C, A)$ y como $A \in Ob(\mathbb{B}_S)$ existe $h \in S$ tal que $dom(h) = A$ y como S es criba, $hgf \in S$ y así $gf \in Hom_{\mathbb{B}_S}(C, A)$, por lo que resulta ser una categoría y mas aun una subcategoría de $\mathbb{A}$ cerrada bajo precomposición.

Definición 2.4. *Dada $\mathbb{B}$ una subcategoría de $\mathbb{A}$ cerrada bajo $\mathbb{A}$-precomposición. Se define $S_{\mathbb{B}} = \{f : A \to B | f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)\}$*

Proposición 2.5. *Sea $\mathbb{B}$ subcategoría de $\mathbb{A}$ cerrada bajo precomposición. Entonces $S_{\mathbb{B}}$ es una criba.*

Demostración. Es casi inmediato, pues si $f : B \to A \in S_{\mathbb{B}}$ y $g : C \to B$ entonces $C \in \mathbb{B}$ y $g \in Hom_{\mathbb{B}}(C, B)$ por lo que $fg \in S_{\mathbb{B}}$ ■

Proposición 2.6. *Sea $\mathbb{B}$ cerrada bajo $\mathbb{A}$-precomposición,. Entonces $\mathbb{B}_{S_{\mathbb{B}}} = \mathbb{B}$*

Demostración. Note que $S_{\mathbb{B}} = \{f : A \to B | f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)\}$ y que los objetos son $\{dom(f) | f \in S_{\mathbb{B}}\}$ los cuales resultan ser elementos de $\mathbb{B}$.
Para la otra contención, basta notar que para cualquier $B \in \mathbb{B}$, $1_B \in S_{\mathbb{B}}$ por lo que B es un elemento de $\mathbb{B}_{S_{\mathbb{B}}}$.
Para morfismos, note que $f \in Hom_{\mathbb{B}_{S_{\mathbb{B}}}}(A, B)$ si y solo si $f \in S_{\mathbb{B}}$ si y solo si $f \in Hom_{\mathbb{B}}(A, B)$
Por tanto $\mathbb{B}_{S_{\mathbb{B}}} = \mathbb{B}$ ■

A pesar de la similitud entre las definiciones y la ultima proposición, en general no se tiene que $S_{\mathbb{B}_S} = S$, es decir, estas asignaciones no son inversas una de la otra. El problema viene de que se puede perder información en la asignación de criba a subcategoría, sin embargo, se tiene la biyectividad en cribas sobre objetos.

Definición 2.7. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$ y S criba sobre A. Se define la categoría $\bar{\mathbb{B}}_S$ dada por $Ob(\bar{\mathbb{B}}_S) = \{(dom(f), f) | f \in S\}$ y dados $(A, f), (B, g) \in \bar{\mathbb{B}}_S$, $Hom_{\bar{\mathbb{B}}_S}((A, f), (B, g)) = \{h \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B) | f = gh\}$.*

Proposición 2.8. *$\bar{\mathbb{B}}_S$ es subcategoría de $\mathbb{A}/A$ cerrada bajo precomposición*

Demostración. Dados $(C, f) \in \bar{\mathbb{B}}_S$ y $h \in Hom_{\mathbb{A}/A}((B, g), (C, f))$ se tiene que $h \in Hom_{\mathbb{A}}(B, C)$ y $g = fh$ como S es criba y $f \in S$ entonces $g = fh \in S$ por lo que por definición $(B, g) \in \bar{\mathbb{B}}_S$ y $h \in Hom_{\bar{\mathbb{B}}_S}((B, g), (C, f))$. ■

DEFINICIÓN 2.9. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ subcategoría de $\mathbb{A}/A$, cerrada bajo precomposición. Se define $\bar{S}_{\mathbb{B}} = \{fg | g \in Hom_{\mathbb{B}}((B,h),(C,f))\}$.*

PROPOSICIÓN 2.10. *$\bar{S}_{\mathbb{B}}$ es criba sobre A*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f : B \to A \in \bar{S}$ y $g : C \to B$. Entonces se sigue que $g \in Hom_{\mathbb{A}/A}((C,fg),(B,f))$. Como $\mathbb{B}$ es cerrada bajo precomposición, se sigue que $g \in Hom_{\mathbb{B}}((C,fg),(B,f))$ y por definición de $\bar{S}_{\mathbb{B}}$, $fg \in \bar{S}_{\mathbb{B}}$ ■

DEFINICIÓN 2.11. *Sean $\mathbb{A}$ localmente pequeña, $A \in \mathbb{A}$ y S una criba sobre A. Se define $F_S : \mathbb{A}^{op} \to SET$ dado por $F_S(B) = \{f \in S | dom(f) = B\}$ y para $f \in Hom_{\mathbb{A}^{op}}(B,C)$ $F_S(f)(g) = gf$.*

PROPOSICIÓN 2.12. *F_S es un funtor. Más aún es un subfuntor de $Hom(\_, A)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathbb{A}$. Entonces $F_S(1_A) : F_S(A) \to F_S(A)$. Si $g \in F_S(A)$ entonces $F_S(1_A)(g) = g1_A = g$ por lo que $F_S(1_A) = 1_{F_S(A)}$
Ahora dados $f : B \to C$ y $g : C \to D$ en $Mor(\mathbb{A}^{op})$ y $h \in F_S(B)$ entonces $F_S(g)F_S(f)(h) = F_S(g)(hf) = (hf)g = h(fg) = F_S(fg)(h)$ por lo que $F_S(fg) = F_S(g)F_S(f)$
Por tanto es un funtor. ■

OBSERVACIÓN 2.13. *En adelante se escribira indistinguidamente $Hom(\_, A)$ y h_A.*

DEFINICIÓN 2.14. *Sea $\mathbb{A}$ localmente pequeña, $A \in \mathbb{A}$ y F subfuntor de h_A. Se define $S_F = \{g : C \to A \in F(C) | sif \in h_C(B), gf \in F(B)\}_{C \in \mathbb{A}}$.*

PROPOSICIÓN 2.15. *S_F es una criba sobre A.*

DEMOSTRACIÓN. Dadas $g : C \to A \in S_F$ y $f : B \to C$. Se tiene que $f \in h_C(B)$. Como $g \in S_F$, $gf \in F(B)$. Ahora, sea $h \in h_B(D)$ note que $fh \in h_C(D)$. De la misma manera, como $g \in S_F$, $gfh \in F(D)$. Por tanto $gf \in S_F$. ■

PROPOSICIÓN 2.16. *Sean $\mathbb{A}$ categoría y $A \in \mathbb{A}$. Se tiene que:*

1. *Si S es criba sobre A entonces $\bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S} = S$.*
2. *Si $\mathbb{B}$ es subcategoría cerrada bajo $\mathbb{A}/A$-precomposición, entonces $\bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}} = \mathbb{B}$*
3. *Si $\mathbb{A}$ es localmente pequeña y S es criba sobre A, entonces $S = S_{F_S}$*
4. *Si $\mathbb{A}$ es localmente pequeña y G subfuntor de h_A entonces $G = F_{S_G}$*

Demostración. 1. $\supseteq$) Sea $f : B \to A \in S$. Entonces $(B, f) \in \bar{\mathbb{B}}_S$ de donde $f = f1_B \in \bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S}$. Por lo que $S \subseteq \bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S}$
$\subseteq$)Sea $f : B \to A \in \bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S}$. Entonces $(B, f) \in \bar{\mathbb{B}}_S$. Así $f \in S$. Por lo que $\bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S} \subseteq S$
Por lo tanto $S = \bar{S}_{\bar{\mathbb{B}}_S}$

2. $\subseteq$) Sea $(B, g) \in \mathbb{B}$. Entonces $g = g1_B \in \bar{S}_{\mathbb{B}}$. De donde $(B, g) \in \bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}}$. Por lo tanto $Ob(\mathbb{B}) \subseteq Ob(\bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}})$.
$\supseteq$) Sea $(B, g) \in \bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}}$. Entonces $g \in \bar{S}_{\mathbb{B}}$. De donde $(B, g) \in \mathbb{B}$. Por tanto $Ob(\bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}}) \subseteq Ob(\mathbb{B})$
Para morfismos note que $g \in Hom_{\mathbb{B}}((B, h), (C, f)$ si y solo si $h = fg \in \bar{S}_{\mathbb{B}}$ si y solo si $g \in Hom_{\bar{\mathbb{B}}_{\bar{S}_{\mathbb{B}}}}((B, h), (C, f))$

3. $\subseteq$) Sea $f : B \to A \in S$. Entonces $f \in F_S(B)$. Así $f \in S_{F_S}$.
$\supseteq$) Sea $f : B \to A \in S_{F_S}$. Entonces $f1_B = f \in F_S(B)$. Así $f \in S$

4. Basta ver que son iguales en cada elemento.
Sea $f \in G(B)$. Entonces $f \in S_G$. De donde $f \in F_{S_G}(B)$
Sea $f \in F_{S_G}(B)$. Entonces $f \in S_G$. Así $f1_B = f \in G(B)$

■

Corolario 2.17. *Sea $\mathbb{A}$ categoría localmente pequeña y $A \in \mathbb{A}$. Entonces existe una asignación biyectiva entre subcategorías de $\mathbb{A}/A$ cerradas bajo precomposición, cribas sobre A y subfuntores de h_A.*

En adelante dada una categoría $\mathbb{A}$, se entenderá por criba una criba sobre un objeto $A \in \mathbb{A}$. En un abuso de la notación también se entenderán por criba, un subfuntor de $h_A(\_)$ y una subcategoría de $\mathbb{A}/A$ cerrada bajo precomposición.

Ejemplo 2.18. *1. Dada $\mathbb{A}$ una categoría localmente pequeña y $A \in \mathbb{A}$. Se tienen dos cribas canónicas, $\emptyset$ y h_A donde $h_A = \{f | cod(f) = A\}$ llamadas criba vacía y criba máxima respectivamente. Estas como funtores corresponden al funtor constante $\emptyset$ y al funtor representable h_A respectivamente, además como categorías corresponden con la categoría vacía y la rebanada $\mathbb{A}/A$.*

2. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para $x \in X$, una criba S sobre x, es un subconjunto $S \subseteq X$ tal que:

a) *Para todo $y \in S$ se tiene que $y \leq x$.*

b) *Para todo $y \in S$ y $z \in X$. Si $z \leq x$ entonces $z \in S$*

Estos conjuntos son conocidos como densos debajo de x. En particular la criba máxima $S_x = x_{\leq} = \{y \in X | y \leq x\}$.

3. *Sean $(\mathbb{N}^+, |)^{op}$ y $n \in N$, la familia $S_n = \{m | m \to n\}$, es decir los pultiplos de n es una criba sobre n, de hecho, si $n|m$ entonces $S_n \supseteq S_m$ y bajo este orden, las cribas máximas resultan ser las de los primos, es decir, esta es una construcción de la criba de Eratóstenes.*
4. *Sea M un monoide. Considere la categoría con un punto y morfismos los elementos del monoide. Una criba sobre M, es un ideal derecho.*
5. *Sea $\mathbb{A} = \wp(X)$, el conjunto potencia de un conjunto X. Dada S es una criba sobre A y $B \in S$ entonces $\downarrow B = \{x | x \subseteq B\} \subseteq S$*

2. Retícula de Cribas

PROPOSICIÓN 2.19. *Sea A un objeto de $\mathbb{A}$, S y R cribas sobre A.*

1. *Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de cribas sobre A. Entonces $\bigcap_{i \in I} R_i$ es criba sobre A*
2. *Sea $\{R_i\}_{i \in I}$ una familia de cribas sobre A. Entonces $\bigcup_{i \in I} R_i$ es una criba sobre A*
3. *Si para algún $f : D \to A \in S$ existe $g : A \to D$ tal que $fg = 1_A$. Entonces $S = h_A$*
4. *Si T es una criba sobre B y $f : B \to A$ entonces $f(T) = \{fg | g \in T\}$ es criba sobre A*
5. *Si T es una criba sobre B y $f : B \to A$ es tal que $\overline{f(T)} = \{fg | g \in T\} \cup \{f\}$ es criba sobre A, entonces $T = h_B$*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $f : A \to A \in \bigcap_{i \in I} R_i$ y $g : C \to B$. Entonces $fg \in R_i$ para toda $i \in I$ R_i es criba, por tanto $fg \in \bigcap_{i \in I} R_i$

2. Sea $f \in \bigcup_{i \in I} R_i$ y $g : dom(g) \to dom(f)$, como $f \in \bigcap_{i \in I} R_i$ existe $j \in I$ tal que $f \in R_j$ entonces $fg \in R_j$ por lo tanto $fg \in \bigcup_{i \in I} R_i$
3. Sea $h : B \to A$, como $f \in S$ se tiene que $1_A = fg \in S$. Entonces $h = 1_A h \in S$. Por lo tanto $S = Hom_{\mathbb{A}}(\_, A)$
4. Sean $g \in f(T)$ y $h : dom(h) \to dom(g)$. Entonces $gh : dom(h) \to B$, como $fg \in f(T)$ $g \in T$. Por lo que $gh \in T$ y por definición, $f(gh) = (fg)h \in f(T)$
5. Suponga que $T \subsetneq Hom(\_, B)$ y sea $h \in Hom(\_, B) \setminus T$. Como $\overline{f(T)}$ es criba sobre A y $f \in \overline{f(T)}$, por el inciso 3, para toda g tal que $cod(g) = dom(f)$,

$fg \in \overline{f(T)}$, en particular $fh \in \overline{f(T)}$. Por definición esto implica que $h \in T$ lo cual es una contradicción.

■

Definición 2.20. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría y $A \in \mathbb{A}$. Se denotara por $\Omega(A)$ a la familia de cribas sobre A*

Observación 2.21. *Por los incisos 1 y 2 de 2.19, $\Omega(A)$ tiene un orden, dado por $S \leq S'$ si $S \cup S' = S'$ y más aún de retícula completa.*

Proposición 2.22. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría, $A \in \mathbb{A}$ y $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq Hom(\_, A)$. Entonces existe una criba mínima R tal que $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq R$*

Demostración. Sea

$$S = \{g \in Hom(\_, A) | \text{existen } j \in I, h \in Hom(dom(g), dom(f_j)) \text{ y } g = f_j h\}$$

note que si $f \in S$ y $g : dom(g) \to dom(f)$ entonces existen $j \in I$ y $h : dom(f) \to dom(f_j)$ tal que $f = f_j h$, de donde $fg = (f_j h)g = f_j(hg)$. Por lo que $fg \in S$, así S es una criba.
Para probar la minimalidad, sean T una criba sobre A tal que $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq T$ y $f \in S$. Como $f \in S$, existen $j \in I, g \in Hom(dom(f), dom(f_j))$ tal que $f = f_j g$. Como $f_j \in T$ y T es criba, $f = f_j g \in T$. Por lo que $S \subseteq T$ ■

Notación. *La criba mínima generada por una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ se denotara por $< \{f_i\}_{i \in I} >$*

Observación 2.23.
- *Si S es una criba entonces $\langle S \rangle = S$*
- *Si $f : B \to A$ tiene inverso derecho entonces $\langle f \rangle = Hom(\_, A)$*
- *Si $S \subseteq T$ entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$*

Ejemplo 2.24.
1. *Sean (X, τ) espacio topológico, $U \in \tau$ y $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ cubierta de U. Entonces $\rangle \{U_i\}_{i \in I} \langle = \bigcup \{V \in \tau | V \subseteq U_i\}_{i \in I}$. En este ejemplo los elementos de la criba son los abiertos contenidos en los U_i.*
2. *Sean $(\mathbb{A}, 1)$ una categoría con objeto terminal y $\{f_i\}_{i \in I}$ una colección de morfismos tal que $cod(f_j) = 1$ para toda $j \in I$. Entonces $\rangle \{f_i\}_{i \in I} \langle$ consta de los $Hom(\_, dom(f_j))$ para toda $j \in I$ junto con la colección $\{f_i\}_{i \in I}$. Note que una criba generada sobre un objeto terminal, selecciona los objetos de la categoría tales que tienen al menos un morfismo hacia el dominio de un morfismo dado.*

3. *Sean* $(\mathbb{N}^+, |)^{op}$, $n \in N$ *y* $\{m_i\}_{i=0}^{j}$ *donde* $j \in \mathbb{N}$ *tales que* $Hom(m_i, n) \neq \emptyset$ *para toda* $i = 0, \ldots, j$. *Entonces* $\rangle\{m_i\}_{i=0}^{j}\langle = S_{m.c.m\{m_i|i=0,\ldots,j\}}$ *no es mas que los múltiplos comunes de todos los* m_i.

DEFINICIÓN 2.25. *Sean* $\mathbb{A}$ *categoría ,* A *y* B *objetos de* $\mathbb{A}$, $f : B \to A$ *un morfismo y* S *una criba sobre* A. *El pullback de* S *a través de* f *es la familia,* $f^*(S) = \{g|fg \in S\}$

OBSERVACIÓN 2.26. *A esta criba se le llama pullback, pero esto no implica que la categoria tenga pullbacks*

PROPOSICIÓN 2.27. *Sean* $\mathbb{A}$ *una categoría,* S *una criba sobre* A *y* $f : B \to A$. *Entonces* $f^*(S)$ *es una criba sobre* B

DEMOSTRACIÓN. Note que para cualquier $g \in f^*(S)$ $cod(g) = B$. Si $g \in f^*(S)$ y $h : dom(h) \to dom(g)$, entonces como $fg \in S$ se tiene que $(fg)h = f(gh) \in S$ por lo que $gh \in f^*(S)$ ∎

LEMA 2.28. *Sea* $\mathbb{A}$ *una categoría,* S *y* T *cribas sobre* A *tales que* $S \subseteq T$ *y* $f : B \to A$. *Entonces* $f^*(S) \subseteq f^*(T)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $g : C \to B \in f^*(S)$. Entonces $fg \in S$. Como $S \subseteq T$, se tiene que $fg \in T$. Por definición, $g \in f^*(T)$. ∎

COROLARIO 2.29. *Sean* $\mathbb{A}$ *una categoría,* A *y* B *objetos de* $\mathbb{A}$ *y* $f : B \to A$. *Entonces* $f^* : \Omega(A) \to \Omega(B)$ *es un morfismo de retículas. Más aún* $f^*(\emptyset) = \emptyset$ *y* $f^*(h_A) = h_B$.

DEMOSTRACIÓN. La asignación esta bien definida por la proposición 2.27, es monótona por la proposición 2.28 y así, un morfismo de retículas. Además

$$f^*(\emptyset) = \{g|fg \in \emptyset\} = \emptyset$$

y también

$$f^*(h_A) = \{g|fg \in h_A\} = \{g|cod(g) = B\} = h_B$$

∎

Note que aunque a $f^*(S)$ se le llama pullback no se ha demostrado que este lo sea.

LEMA 2.30. *Sean* $\mathbb{A}$ *categoría,* A *y* B *objetos de* $\mathbb{A}$, S *una criba sobre* A *y* $f : B \to A$. *Entonces el siguiente diagrama es un pullback*

$$\begin{tikzcd} f^*(S) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\iota_B"] & S \arrow[d, "\iota_A"] \\ h_B \arrow[r, "f^*"] & h_A \end{tikzcd}$$

donde $f^*(g) = fg$.

Demostración. Se probara que para cada $C \in \mathbb{A}$, la evaluación en C es un pullback. Sea $C \in \mathbb{A}$ y X un conjunto junto con morfismos $g : X \to S(C)$ y $h : X \to h_B(C)$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, "g"] \arrow[ddr, "h"'] & & \\ & f^*(S)(C) \arrow[r, "f^*"'] \arrow[d, "\iota_B"] & S(C) \arrow[d, "\iota_A"] \\ & h_B(C) \arrow[r, "f^*"] & h_A(C) \end{tikzcd}$$

Ahora note que para $x \in X$ se tiene que

$$g(x) = \iota_A g(x) = f^*h(x) = fh(x)$$

y que $h(x) : C \to B$. Por tanto se tiene que $h(x) \in f^*(S)$. Así las cosas h se factoriza por $f^*(S)(C)$ y de hecho lo hace por h misma. Para probar que es único suponga que existe $m : X \to f^*(S)(C)$ tal que $\iota_B m = h$ y que $f^* m = g$. Como $h = \iota_B h$ entonces $\iota_B m = h = \iota_B h$. Como ι_B es monomorfismo, se tiene que $h = m$. Por tanto puntualmente el diagrama es un pullback y de esto que el diagrama sea un pullback. ■

Así las cosas, el nombre de pullback de una criba hace sentido en este contexto.
Es inmediato el siguiente resultado:

Proposición 2.31. *Sean S y R cribas sobre A, tales que $S \subseteq R$ y $f : B \to A$. Entonces el siguiente diagrama es un pullback:*

$$\begin{tikzcd} f^*(S) \arrow[r, "\iota_{f^*(R)}"] \arrow[d, "f^*"] & f^*(R) \arrow[d, "f^*"] \\ S \arrow[r, "\iota_R"] & R \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Esto es inmediato al notar que este diagrama se puede completar al siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
f^*(S) \arrow[r, "\iota_{f^*R}"] \arrow[d, "f^*"] & f^*(R) \arrow[r, "\iota_{h_B}"] \arrow[d, "f^*"] & h_B \arrow[d, "f^*"] \\
S \arrow[r, "\iota_R"] & R \arrow[r, "\iota_{h_A}"] & h_A
\end{tikzcd}
$$

Como el diagrama exterior y el de la derecha son pullbacks, entonces el de la izquierda lo es. ■

Capítulo 3

Topologías de Grothendieck

1. Gavillas

Dado un espacio topológico (X, τ) es natural preguntarse por las funciones continuas desde X hacia otro espacio topológico. Por ejemplo considere las funciones continuas hacia $\mathbb{R}$, y considere también las funciones continuas desde cualquier abierto $U \in \tau$ hacia $\mathbb{R}$. Estas resultan determinarse localmente, es decir:

1. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función continua y $V \subseteq U$ entonces la restricción de f en V, $f|_V : V \to \mathbb{R}$ es continua.
2. Dados $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta para U y para cada $i \in I$, $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ una función continua. Si para cualesquiera $i, j \in I$ la restricción de cada f_i a las intersecciones coincide, $(f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_j \cap U_i})$ entonces existe una $f : U \to \mathbb{R}$ tal que al restringirse a cada U_i resulta ser la f_i original, es decir $f|_{U_i} = f_i$
3. Dados $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U y $f, g : U \to \mathbb{R}$ un par de funciones continuas. Si $f|_{U_j} = g|_{U_j}$ para cualquier $j \in I$, entonces $f = g$.

El inciso 2 es conocido como el «lema de pegado» y el 3 como «localidad». Resulta de interés que otras propiedades pueden ser determinadas localmente. Para esto se generalizaran las 3 nociones.

Definición 3.1. *Sean $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ categorías, una pregavilla $\mathbb{B}-$valuada sobre $\mathbb{A}$ es un funtor $F : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{B}$.*
A la categoría de funtores $Fun(\mathbb{A}^{op}, \mathbb{B})$ se le llamará categoría de $\mathbb{B}-$pregavillas sobre $\mathbb{A}$. En caso que $\mathbb{B} = SET$, se denotará por $\hat{\mathbb{A}}$ y se llamara la categoría de pregavillas.

Ejemplo 3.2.
1. *Sea X un conjunto y $\mathbb{A}$ categoría arbitraria. Para todo $A \in \mathbb{A}$ se define $F(A) = X$ y para todo $f : A \to B$, $F(f) = 1_X$.*
2. *Sea $\mathbb{A} = (X, \tau)$ un espacio topológico y $U \in \tau$, se pone*

$$F(V) = \begin{cases} \{\emptyset\} & V \subseteq U \\ \emptyset & V \not\subseteq U \end{cases}$$

3. En $(\mathbb{N}, |)^{op}$*,* $F(n) = n\mathbb{N} := \{0, n, 2n, 3n, \ldots\}$
si $f : n \to m$ *entonces* $n = mk$*,* $F(f) : F(m) \to F(n)$ *tal que* $F(f)(a) = ka$

El siguiente ejemplo será útil al generalizar lo discutido en la introducción.

Ejemplo 3.3. *Sea* $\mathbb{A} = (X, \tau)$ *espacio topológico, y sea* $F : \mathbb{A}^{op} \to SET$ *dado por* $F(V) = \{g : V \to \mathbb{R} | g \text{ es continua}\}$ *y si* $\iota_U : V \to U$*, es decir,* $V \subseteq U$*,* $F(\iota_U) = res(V, U)$ *es la restricción en el dominio. Note que la noción de pregavilla sí captura la primer idea deseada.*
Para la parte 2 y 3, considere $U \in \tau$ *y* $\{U_i\}_{i\in I}$ *una cubierta abierta de* U*. El lema del pegado enuncia que dadas* $\{f_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ *una familia de funciones continuas tales que* $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ *para cualesquiera* $i, j \in I$*. Entonces existe* $f : U \to \mathbb{R}$ *tal que* $f|_{U_i} = f_i$ *para cualquier* $i \in I$*.*
Esto se puede interpretar en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & F(U_k) \arrow[r, "F(\iota_{U_k\cap U_l})"] & F(U_k \times U_l) \\
F(U) \arrow[ur, "F(\iota_{U_k})"] \arrow[r] \arrow[dr, "F(\iota_{U_l})"'] & \prod F(U_j) \arrow[u, "\pi_{F(U_k)}"'] \arrow[d, "\pi_{F(U_l)}"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod F(U_i \times U_j) \arrow[u, "\pi_{F(U_k\times U_l)}"'] \arrow[d, "\pi_{F(U_k\times U_l)}"] \\
 & F(U_l) \arrow[r, "F(\iota_{U_k\cap U_l})"] & F(U_k \times U_l)
\end{tikzcd}$$

Donde los morfismos centrales son los inducidos por la propiedad universal del producto, es decir sus componentes en cada abierto de la cubierta e intersecciones respectivamente.
Entonces la propiedad 2, puede ser pensada como sigue, si $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(U_i)$ *es tal que los morfismos hacia* $\prod_{i,j\in I} F(U_i \times U_j)$ *coinciden, entonces existe* $f \in F(U)$ *tal que* $\prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})(f) = \{f_i\}_{i\in I}$*. La propiedad 3 es inmediata de la construcción del producto.*
Más aun $F(U)$ *queda totalmente determinado por* $\prod_{i\in I} F(U_i)$ *en el siguiente sentido, considere el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r] & \prod F(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod F(U_i \times U_j) \\
A \arrow[u, dashed, "\hat{f}"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dada $f : A \to \prod_{i\in I} F(U_i)$ *tal que compuesta con las restricciones hacia* $\prod_{i,j\in I} F(U_i \times U_j)$ *coincidan, entonces existe* $\hat{f} : A \to F(U)$ *tal que* $f = \prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})\hat{f}$*. En otras palabras, es el igualador.*

Esta propiedad es conocida como que F sea una gavilla.

DEFINICIÓN 3.4. *Sean* $\mathbb{A} = (X, \tau)$ *un espacio topológico y* $F : \mathbb{A} \to SET$ *una pregavilla. Se dice que* F *es una gavilla si satisface:*

1. *(Localidad) Si* $\{U_i\}_{i\in I}$ *es una cubierta de* U *y* $s, t \in F(U)$ *son tales que* $F(\iota_{U_i})(s) = F(\iota_{U_i})(t)$ *para cualquier* $i \in I$*, entonces* $s = t$
2. *(Pegado) Dados* $\{U_i\}_{i\in I}$ *una cubierta de* U*, para cada* $i \in I$ *un elemento* $s_i \in F(U_i)$*. Si la familia de* $\{s_i\}_{i\in I}$ *son tales que* $F(\iota_{U_i\times U_j})(s_i) = F(\iota_{U_i\times U_j})(s_j)$*, entonces existe* $s \in F(U)$ *con la propiedad que* $F(\iota_{U_i})(s) = s_i$

El siguiente ejemplo da una pregavilla que no es gavilla.

EJEMPLO 3.5. *Si se considera* $\mathbb{A} = (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$ *y* $G : \mathbb{A}^{op} \to SET$ *dado por* $G(A) = \{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ es acotada}\}$ *y la restricción usual, considere la cubierta de* $\mathbb{R}$ *dada por* $\{(n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
Note que para cada $n \in \mathbb{Z}$ *la inclusión* $i_n : (n-1, n+1) \to \mathbb{R}$ *esta en* $G((n-i, n+1))$ *y que al restringirse hacia las intersecciones respectivas siguen estando en* $G((n-1, n+1) \times (n, n+2))$ *respectivamente, por lo que iguala, pero no es posible encontrar una función en* $G(\mathbb{R})$ *tal que al restringirla sea la inclusión respectiva, pues dicha función tendría que ser la identidad* $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que no es acotada.*

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean* $\mathbb{A} = (X, \tau)$ *espacio topológico y* $F : \mathbb{A} \to SET$ *una pregavilla. Son equivalentes:*

1. F *es gavilla*
2. *Para cualquier* U *y cualquier* $\{U_i\}_{i\in I}$ *cubierta abierta de* U*, el siguiente diagrama es un igualador*

$$F(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod F(U_i \times U_j)$$

DEMOSTRACIÓN. 1$\Rightarrow$ 2) Que $F(U)$ iguale, es inmediato de que F sea pregavilla. Para la propiedad universal, sea $f : A \to \prod_{i\in I} F(U_i)$, tal que conmuta con ambos morfismos hacia $\prod_{i,j\in I} F(U_i \times U_j)$. Para cada $a \in A$, se tiene que $f(a) = \{s_i\}_{i\in I}$, como f conmuta con ambos morfismos y por la parte de pegado de que F es gavilla, existe un único $s_a \in F(U)$ tal que $F(\iota_{U_i})(s_a) = s_i$. Sea $\hat{f} : A \to F(U)$ tal que $\hat{f}(a) = s_a$. Así las cosas, $f = \prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})\hat{f}$.
Ahora solo falta probar que $\hat{f}$ es única con esa propiedad. Sea g tal que $f = \prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})g$. Pero como $\prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})g = f = \prod_{i\in I} F(\iota_{U_i})\hat{f}$ por la propiedad de

localidad, esto implica que para cualquier $a \in A$, $\hat{f}(a) = g(a)$. Por tanto el diagrama es un igualador.
2⇒ 1) Reformulando localidad, se puede pensar como que el primer morfismo sea monomorfismo, lo cual lo cumple por ser igualador. Para la parte de pegado, es inmediato por definición del igualador. ■

2. Pretopologías de Grothendieck

Hasta este momento se han reformulado en un contexto más general las propiedades planteadas al inicio del capítulo, pero se sigue dependiendo del espacio topológico, como se discutió en el capitulo anterior, lo importante del espacio es la topología. Ahora se analizara como se puede llevar la noción de abierto a un contexto más general.

Definición 3.7. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría y $A \in \mathbb{A}$, una cubierta de A es una familia de morfismos $\{f_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ en $\mathbb{A}$*

Definición 3.8. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría con pullbacks. Una pretopología de Grothendieck P en $\mathbb{A}$, es una asignación que a cada objeto $A \in \mathbb{A}$ le asocia una familia de cubiertas $P(A)$ tal que:*

1. *$\{1_A : A \to A\} \in P(A)$*
2. *Si $\{f_i : A_i \to A\}_{i \in I} \in P(A)$ y para cada $i \in I$, $\{g_i^j : A_j \to A_i\}_{j \in J_i} \in P(A_i)$ entonces $\{g_i^j f_i : A_j \to A\}_{i \in I, J \in J_i} \in P(A)$*
3. *Si $f : B \to A$ y $\{f_i : A_i \to A\}_{i \in I} \in P(A)$, entonces la familia de pullbacks $\{\pi_1 : B \times A_i \to B\}_{i \in I} \in P(B)$*

Ejemplo 3.9. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría*

- *La asignación que a cada $A \in \mathbb{A}$ le corresponde $P(A) = \{1_A : A \to A\}$.*
  1. *Es claro que $\{1_A : A \to A\} \in P(A)$*
  2. *La parte 2 se satisface por vacuidad.*
  3. *Este inciso se sigue de que el pullback de la identidad por cualquier morfismo es la identidad, es decir, el siguiente diagrama es un pullback:*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow{\scriptstyle 1_B} & & \downarrow{\scriptstyle 1_A} \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

- *La asignación que a cada $A \in \mathbb{A}$ le asocia todas las familias de morfismos con codominio A.*
  Este ejemplo satisface trivialmente las propiedades, pues la asignación tiene a cualquier familia como cubierta.

- *La asignación que a cada $A \in \mathbb{A}$ le asocia las familias de monomorfismos hacia A.*
  1. *Es claro que 1_A es un monomorfismo para cualquier A, por lo que $\{1_A\} \in P(A)$*
  2. *Este inciso se sigue de que la composición de monomorfismos es monomorfismo. Por lo que la familia de composiciones resulta ser una familia de monomorfismos.*
  3. *Esto es inmediato al notar que en cualquier categoría con pullbacks, el pullback de un monomorfismo, resulta ser un monomorfismo.*

- *Este ejemplo explica el nombre de cubiertas.*
  Sea (X, τ) espacio topológico y para cada $U \in \tau$, sea

$$P(U) = \{\{V_i \subseteq U\}_{i \in I} | V_i \in \tau, U \subseteq \bigcup V_i\}$$

  1. *Es claro que $U \subseteq U$ por lo que $\{1_U\} \in P(U)$*
  2. *Sean $\{U_i\}_{i \in I} \in P(U)$ y para cada $i \in I$, sea $\{V_j\}_{j \in J_i} \in P(U_i)$. Note que $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I, j \in J_i} U_j$ por lo que $\{U_j \subseteq U\}_{i \in I, j \in J_i} \in P(A)$*
  3. *Este inciso es inmediato al notar que el pullback en esta categoría es la intersección y que un morfismo es una inclusión. Entonces si $f : B \to A$, $B \subseteq A \cap B \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \cap B$.*

- *La asignación tal que para cada $A = (X, \tau_X)$ espacio topológico, una familia de morfismos $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I} \in P(A)$ si:*
  - *f_i es abierta para todo $i \in I$*
  - *f_i es un homeomorfismo en su imagen para todo $i \in I$.*
  - *$\bigcup_{i \in I} img(f_i) = X$*

  1. *Note que 1_X es abierta, homeomorfismo y su imagen es X por lo que $\{1_X\} \in P(A)$*
  2. *Sean $\{f_i; A_i \to A\} \in P(A)$ cubierta , para cada $i \in I$, $\{g_i^j : A_j \to A_i\} \in P(A_i)$ cubierta y U un abierto de A_j.*

- *Como* g_i^j *es abierta, entonces* $g_i^j(U)$ *es abierto en* A_j. *Como* f_i *es abierta, entonces* $f_i g_i^j(U)$ *es abierto en* A. *Por tanto para cada* $i \in I$ *y* $j \in J_i$, $f_i g_i^j$ *es abierta.*
- *Como* g_i^j *es homeomorfismo en su imagen, se tiene que* $g_i^j(U) \cong U$. *Además como* g_i^j *es abierta,* $g_i^j(U)$ *es abierto en* A_i. *Como* f_i *es homeomorfismo en su imagen,* $f_i(A_i) \cong A$ *y por ser abierta,* $f_i(A_i)$ *es abierto. Como* $g_i^j(U)$ *es abierto en* A_i, *entonces existe* $V \subseteq f_i(A_i)$ *abierto en* A, *tal que* $V \cong g_i^j(U)$. *Entonces* $V \cong g_i^j(U) \cong U$. *Por tanto* $f_i g_i^j$ *es un homeomorfismo en su imagen, para cada* $i \in I$ *y cada* $j \in J_i$.
- *Note que:*

$$\begin{aligned}\bigcup_{i\in I, j\in J_i} img(f_i g_i^j) &= \bigcup_{i\in I, j\in J_i} f_i g_i^j(A_j)\\ &= \bigcup_{i\in I} f_i(\bigcup_{j\in J_i} g_i^j(A_j))\\ &= \bigcup_{i\in I} f_i(A_i)\\ &= A\end{aligned}$$

Por lo que se tiene lo deseado

3. *Para esta parte recuerde que el pullback en la categoría de espacios topológicos es un subespacio del producto de los espacios en cuestión. Sean* $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ *y* $f : B \to A$. *Entonces para cada* $i \in I$, *el pullback* $B \times_f A_i = \{(b, a) | f(b) = f_i(a)\}$.
   - *Note que por definición de producto, ambas proyecciones son abiertas.*
   - *Como cada* f_i *es homeomorfismo en su imagen, entonces son monomorfismos. Entonces como el pullback de un monomorfismo, resulta ser monomorfismo, la proyección* π_B^i *es monomorfismo. Entonces existe* $g : B \to B \times_f A_i$ *inversa de* π_B^i. *Basta probar que* g *es continua. Para esto, note que si* U *es abierto en* $B \times_f A_i$ *y como la proyección es inversa y abierta, entonces* $g^{-1}(U) = \pi_B^i(U)$ *es abierto en* B. *Por tanto* g *es continua y así* π_B^i *es homeomorfismo en su imagen.*
   - *En busca de una contradicción, suponga que existe* $b \in B$ *tal que* $b \notin \bigcup_{i\in I} img(\pi_B^i)$. *Como* $A = \bigcup_{i\in I} img(f_i)$, *existe* $j \in I$ *tal que* $f(b) \in img(f_j)$. *Así las cosas, existe* $a_j \in A_j$ *tal que* $f(b) = f_j(a_j)$.

Por definición de pullback, $(b, a_j) \in B \times_f A_j$*. Entonces* $b = \pi_B^j(b, a_j)$ *contradiciendo la suposición. Por tanto* $B = \bigcup_{i \in I} img(\pi_B^i)$.

- *La asignación tal que para cada* $A = (X, \tau)$ *espacio topológico, una familia de morfismos* $\{f_i : X_i \to X\} \in P(A)$ *si el morfismo inducido,* $f : \coprod_{i \in I} X_i \to X$*, es un homeomorfismo local.*

  1. *Note que* $\{1_A : A \to A\} \in P(A)$ *pues* $\coprod A \cong A$ *y todo espacio es localmente homeomorfo a si mismo.*

  2. *Sean* $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ *y para cada* $i \in I$, $\{g_i^j : A_j \to A_i\} \in P(A_i)$ *cubiertas. Para probar que* $f : \coprod_{i \in I, j \in J_i} A_j \to A$ *es homeomorfismo local, sea* $x \in \coprod_{i \in I, j \in J_i} A_j$*. Por definición,* $x = (a, j, i)$ *donde* $a \in A_j$ *y* $j \in J_i$*. Como* $a \in A_j$*, existe* U *un abierto en* A_j *tal que* $U \cong g_i^j(U)$ *y que* $g_i^j(U)$ *es abierto en* A_i*. Ahora como* $g_i^j(a) \in A_i$*, existe* V *un abierto de* A_i*, tal que* $V \cong f_i(V)$ *y que* $f_i(V)$ *es abierto en* A*. Sea* $S = U \cap (g_i^j)^{-1}(V)$*, que es abierto en* A_j *y como esta contenido en* U*, se sigue que* $S \cong g_i^j(S)$*. Entonces se tiene que:*

  $$\begin{aligned} f(S) &= f_i g_i^j(S) \\ &= f_i g_i^j(U \cap (g_i^j)^{-1}(V)) \\ &= f_i g_i^j(U) \cap V \\ &\cong g_i^j(U) \cap V \\ &\cong (g_i^j)^{-1}(g_i^j(U \cap V)) \\ &= U \cap (g_i^j)^{-1}(V) \\ &= S \end{aligned}$$

  Por lo que f *es un homeomorfismo local.*

  3. *Sean* $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ *una cubierta y* $f : B \to A$*. Se busca probar que* $\pi_B : \coprod_{i \in I} B \times_f A_i \to B$ *es homeomorfismo local. Sea* $x = (b, a, i) \in \coprod_{i \in I} B \times_f A_i$*, entonces como* $a \in A_i$ *existe* U *abierto en* A_i *tal que* $U \cong f_i(U)$ *y* $f_i(U)$ *es abierto de* A*. Como f es continua, entonces* $f^{-1}(f_i(U))$ *es abierto en B. Sea* $V = f^{-1}(f_i(U)) \times U$ *que es abierto en* $\coprod_{i \in I} B \times_f A_i$*. Note que basta que* $\pi_B|_V$ *sea inyectiva, pues ya es abierta y continua. Para esto, sean* (b, a, i) *y* $(b', a', i) \in V$*, tales que* $b = \pi_B((b, a, i)) = \pi_B((b', a', i)) = b'$*. Entonces por definición,* $f_i(a) = f(b) = f(b') = f_i(a')$ *y así como* f_i *es inyectiva en* U*, se tiene que* $a = a'$*. Por tanto* $(b, a, i) = (b', a', i)$ *por lo que* $\pi_B|_V$ *es inyectiva y así un homeomorfismo local.*

Ejemplo 3.10. *Sea $CR1NG$ la categoría de anillos conmutativos con 1. Para cada $R \in CR1NG^{op}$, una familia $\{f_i : A_i \to R\}_{i\in I} \in Z(R)$ si satisface:*

1. *$I = \{0, \dots, n\}$ es un conjunto finito.*
2. *Cada $A_i = R[r_i^{-1}]$, es la localización por un elemento de R.*
3. *f_i es el morfismo canónico de la localización.*
4. *Existen $\{s_i\}_{i\in I} \subseteq A$, tales que $\sum_{i\in I} s_i r_i = 1$, esto es equivalente a que $1 \in (r_0, \dots, r_n)$, el ideal generado por los r_i.*

Entonces Z es una pretopología.

- *Note que como $R \cong R[1^{-1}]$ y claramente $1 \in (1)$. Por lo que la identidad $\{1_R : R \to R\} \in Z(R)$.*
- *Sean $f : S \to R \in CR1NG^{op}$ un morfismo y $\{f_i : A_i \to R\} \in Z(R)$. Entonces para cada $i \in I$, los pullbacks $S \times_f A_i$ son el pushout en $CR1NG$. Así las cosas, como $A_i = R[r_i^{-1}]$, note que $\bar{f}_i f(r_i) = \bar{f} f_i(r_i)$ y como $f_i(r_i) \in U(A_i)$, entonces $\bar{f} f_i(r_i) \in U(S \times_f A_i)$. Por lo que existe un morfismo único $! : S[f(r_i)^{-1}] \to S \times_f A_i$. Se afirma que $S \times_f A_i \cong S[f(r_i)^{-1}]$. Para esto, sean $T \in CR1NG$ y un par de morfismo $h : A_i \to T$ y $g : S \to T$ tales que $hf_i = g\bar{f}$, en un diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "f"] & A_i \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\
S \arrow[r, "\bar{f}_i"] \arrow[drr, bend right, "g"] & S[f(r_i)^{-1}] & \\
 & & T
\end{tikzcd}$$

entonces como $gf(r_i) = hf_i(r_i) = h(\frac{r_i}{1})$ y $\frac{r_i}{1} \in U(A_i)$, se tiene que:

$$gf(r_i)h(\frac{1}{r_i}) = hf_i(r_i)h(\frac{1}{r_i}) = h(\frac{r_i}{1})h(\frac{1}{r_i}) = h(\frac{r_i}{1}\frac{1}{r_i}) = h(\frac{1}{1}) = 1$$

por lo que $gf(r_i) \in U(T)$ y por la propiedad universal de la localización, existe un único morfismo $J : S[f(r_i)^{-1}] \to T$ tal que $g = J\bar{f}_i$ y $h = J\bar{f}$. Por lo que $S[f(r_i)^{-1}] \cong S \times_f A_i$. Además como $1 = \sum s_i r_i$, entonces $1 = f(1) = f(\sum_{i\in I} s_i r_i) = \sum f(s_i) f(r_i)$, de donde $1 \in (\{f(r_i)\}_{i\in I})$. Por tanto la familia de pullbacks en $CR1NG^{op}$ $\{\bar{f}_i : S \times_f A_i \to S\} \in Z(S)$.

- *Sean $R \in CR1NG$, $\{f_i : A_i \to R\}_{i\in I} \in Z(R)$ y para cada $i \in I$, $\{g^i_j : B_j \to A_i\}_{j\in J_i} \in Z(A_i)$. Sean $i \in I$ y $j \in J_i$, entonces $A_i = R[r_i^{-1}]$ y $B_j = R[r_i^{-1}][s_j^{-1}]$. Como $s_j \in R[r_i^{-1}]$, $s_j = \frac{t_j}{r_i^k}$, con $k \in \mathbb{N}$ y $t_j \in R$. Se afirma que $R[r_i^{-1}][s_j^{-1}] \cong R[(r_it_j)^{-1}]$. Considere el siguiente diagrama en CR1NG:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h"] & R[r_i^{-1}] \arrow[r, "g^i_j"] & R[r_i^{-1}][s_j^{-1}] \\ R[(r_it_j)^{-1}] & & \end{tikzcd}$$

Como $h(r_i) = \frac{r_1}{1}$ es invertible, pues $\frac{1}{r_1} = \frac{t_j}{r_it_j} \in R[r_it_j]$, entonces existe $\bar{f}_i : R[r_i^{-1}] \to R[(r_it_j)^{-1}]$ tal que $h = \bar{f}_if_i$. De la misma manera, como $\bar{f}_i(s_j) = \bar{f}_i(\frac{t_j}{r_i^k}) = h(t_j)h(r_i^k)^{-1} = \frac{t_j}{1}\frac{1}{r_i^k} = \frac{t_j}{r_i^k}$ el cual es invertible. Entonces existe $\bar{g} : R[r_i^{-1}][s_j^{-1}] \to R[(r_it_j)^{-1}]$ tal que $\bar{f}_i = \bar{g}g^i_j$. Entonces $h = \bar{f}_if_i = \bar{g}g^i_jf_i$.
Por el otro lado, como

$$g^i_jf_i(r_it_j) = g^i_j(f_i(r_i)f_i(t_j)) = g^i_j(\frac{r_i}{1}\frac{t_j}{1}) = g^i_j(\frac{r_i}{1})g^i_j(\frac{t_j}{1})$$

y también $g^i_j(\frac{t_j}{1}) = g^i_j(\frac{t_j}{r_i^k}\frac{r_i^k}{1}) = g^i_j(s_j)g^i_j(\frac{r_i^k}{1})$, basta probar que $g^i_j(\frac{r_i^k}{1})$ es invertible. Pero esto es inmediato pues $\frac{r_i^k}{1} \in U(R[r_i^{-1}])$. Por tanto $g^i_j(r_it_j) \in U(R[r_i^{-1}][s_j^{-1}])$ y así por la propiedad universal de la localización, existe un único, $\bar{h} : R[(r_it_j)^{-1}] \to R[r_i^{-1}][s_j^{-1}]$, tal que $\bar{h}h = g^i_jf_i$.
Por lo tanto $R[r_i^{-1}][s_j^{-1}] \cong R[(r_it_j)^{-1}]$. Ahora como $1 \in (\{s_j\}_{j\in J_i})$ entonces $1 = \sum_{j=0}^{k_i} a_j\frac{t_j}{r_i^{n_j}}$. Sea $N_i = max\{n_j | j = 0, \ldots, k_i\}$, entonces

$$r_i^{N_i} = r_i^{N_i}(1) = r_i^{N_i}(\sum_{j=0}^{k_i} a_j\frac{t_j}{r_i^{n_j}}) = \sum_{j=0}^{k_i} a_jr_i^{N_i-n_j}t_j$$

Por lo que $r_i^{N_i} \in (t_0, \ldots, t_{k_i})$ para cada $i \in I = \{0, \ldots, k\}$. Ahora como $1 \in (r_0, \ldots, r_k)$, se tiene que $1 = \sum_{i=0}^{k} b_ir_i$. Sea $m = max\{N_i | i = 0 \ldots k\}k+1$, entonces $1 = 1^m = (\sum_{i=0}^{k} b_ir_i)^m$, note que por construcción, en cada termino de esta suma existe un r_i tal que su exponente sea mayor que N_i, por lo que $1 \in (\{r_i^{N_i}\}_{i\in I}) \subseteq (\{t_j\}_{i\in I, j\in J_i})$. Por tanto $\{f_ig^i_j : R[(r_it_j)^{-1}] \to R\} \in Z(R)$.

Por lo tanto Z define una pretopología de Grothendieck. A esta pretopología se le conoce como la pretopología de Zariski. La razón de esto es que las familas de $Z(R)$ estan en correspondencia con los abiertos principales de la topología de Zariski en

Spec(R). Esto es porque $R[r_i^{-1}] = \bigcap_{\mathcal{P}\in Spec(R), r_i\notin\mathcal{P}} R_{\mathcal{P}}$ *donde* $R_{\mathcal{P}}$ *es la localización en el conjunto multiplicativo* $R\setminus\mathcal{P}$.

Como se vio en 3.6 la noción de gavilla solo depende de las cubiertas, por lo que con lo discutido hasta ahora es inmediata la generalización.

DEFINICIÓN 3.11. *Sean* $(\mathbb{A}, P)$ *categoría con una pretopología y* $F \in \hat{\mathbb{A}}$, *entonces*

1. F *satisface la condición de gavilla para una familia* $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ *si*

$$F(A) \longrightarrow \prod F(A_j) \rightrightarrows \prod F(A_i \times A_j)$$

   es un igualador

2. F *es una gavilla si para cualquier* $A \in \mathbb{A}$ *y* $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I} \in P(A)$, F *satisface la condición de gavilla*

EJEMPLO 3.12.

- *Note que esta generalización respeta lo que se tenía. Sea* (X, τ) *espacio topológico,considere la pretopología* P*en* X, *de las cubiertas abiertas, es decir la que en cada objeto* $P(U) = \{\{V_i \subseteq U\}_{i\in I} | V_i \in \tau, U \subseteq \bigcup V_i\}$ *y considere* F *la pregavilla de funciones continuas,* $F(U) = \{f : U \to \mathbb{R} | f\, continua\}$ *el diagrama*

$$F(A) \longrightarrow \prod F(A_j) \rightrightarrows \prod F(A_i \times A_j)$$

  es un igualador, como se vio antes.

- *Este es un no ejemplo de gavilla. Sean* $(2, \wp(2))$ *como espacio topológico,* $R = \{0, 1\}$ *y* $F : \wp(2) \to SET$ *dado por* $F(\emptyset) = \{pt\}$, $F(0) = F(1) = R$ *y* $F(2) = R \times R \times R$ *y para* $f_i : \emptyset \to i$ *con* $i = 0, 1, 2$, $F(f_i) = pt$, $g : 0 \to 2$ $F(g) = \pi_0$ *y* $h : 1 \to 2$, $F(h) = \pi_1$. *Ahora considere el siguiente diagrama*

$$R \times R \times R \xrightarrow{\pi_0\times\pi_1} R \times R \rightrightarrows \{pt\}$$

  note que no es un igualador pues R *al tener mas de un elemento, no se tendrá la unicidad del morfismo.*

Dada una categoría, $\mathbb{A}$, en su categoría de pregavillas hay unas pregavillas destacadas, a saber, los funtores representables h_A. Es de interés bajo que condiciones estas resultan ser gavillas, para dar respuesta a esto será de utilidad la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.13. *Sean* $\mathbb{A}$ *una categoría con pullbacks y* $\{f_i : A_i \to A\}$ *una familia de morfismos. Se dice que* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una familia epimorfica efectiva si para cualquier* *familia de morfismos* $\{g_i : A_i \to B\}$ *tal que para cualesquiera* $i, j \in I$*, el diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} A_i \times_A A_j & \xrightarrow{p_i} & A_i \\ \downarrow{\scriptstyle p_j} & & \downarrow{\scriptstyle g_i} \\ A_j & \xrightarrow{g_j} & B \end{array}$$

entonces existe una única $h : A \to B$ *con la propiedad que para cualquier* $i \in I$*,* $g_i = hf_i$*.*

Note que esta definición resulta similar a la de colímite, aunque estos no necesariamente existan estas familias sí pueden ser consideradas.

Proposición 3.14. *Sean* $\mathbb{A}$ *una categoría regular*[1] *y* $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ *una familia de morfismos con colímite* $\coprod_{i\in I} A_i$ *y* $f : \coprod_{i\in I} \to A$ *la inducida por la familia. Entonces son equivalentes:*

1. *La colección* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es una familia epimorfica efectiva.*
2. *El siguiente diagrama es un coigualador*

$$(\textstyle\coprod_{i\in I} A_i) \times_A (\coprod_{j\in I} A_j) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} A_i \xrightarrow{f} A$$

3. *Si el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i\in I} A_i & \xrightarrow{f} & A \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ C & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

y $i : C \to B$ *es un monomorfismo. Entonces existe un único* $t : A \to C$ *tal que* $tf = g$ *y* $it = h$

Demostración. $1 \Rightarrow 2$) Considere el siguiente diagrama:

[1] La definición de categoría regular se puede encontrar en el apéndice C, en la definición C.9.

$$
\begin{tikzcd}
 & A_i \arrow[rr, "\iota_i"] & & \coprod A_i \arrow[dr, "f"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
A_i \times_A A_j \arrow[ur, "q_2"] \arrow[dr, "q_1"'] \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & (\coprod A_i) \times_A (\coprod A_i) \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & & A \arrow[r, dashed, "h"] & B \\
 & A_j \arrow[rr, "\iota_j"] & & \coprod A_i \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Donde g es tal que $gp_1 = gp_2$. Ahora como para cada $i \in I$, $f_i = f\iota_i$, se tiene que:

$$f\iota_i q_2 = f_i q_2 = f_j q_1 = f\iota_j q_1$$

por lo que existe una única $\beta : A_i \times_A A_j \to (\coprod A_i) \times_A (\coprod A_i)$ tal que $p_2\beta = \iota_i q_2$ y $p_1\beta = \iota_j q_1$. Como $gp_2 = gp_1$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
g\iota_i q_2 &= gp_2\beta \\
&= gp_1\beta \\
&= g\iota_j q_1
\end{aligned}
$$

por lo que existe una única $h : A \to B$ tal que $hf_i = g\iota_i$ y $hf_j = g\iota_j$. Ahora como $\coprod_{i\in I} A_i$ es un coproducto, existe una única $s : \coprod_{i\in I} A_i \to B$ tal que $s\iota_i = hf\iota_i = g\iota_i$, entonces $s = hf = g$. Ahora note que h es única con la propiedad pues que $\{f_i\}_{i\in I}$ sea familia epimorfica lo garantiza. Por lo tanto $f : \coprod_{i\in I} A_i \to A$ es un coigualador.
$2 \Rightarrow 1$) Considere el diagrama siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
A_i \times_A A_j \arrow[rr, "q_i"] \arrow[dd, "q_j"] \arrow[dr, dashed, "u_{i,j}"] & & A_i \arrow[d, "\iota^i_{\coprod A_i}"] \arrow[dddr, bend left, "g_i"] & \\
 & (\coprod A_i) \times_A (\coprod A_j) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & \coprod A_i \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
A_j \arrow[r, "\iota^j_{\coprod A_i}"] \arrow[drrr, bend right, "g_j"'] & \coprod A_i \arrow[r, "f"] \arrow[drr, bend right, "g"] & A & \\
 & & & B
\end{tikzcd}
$$

Donde $\{g_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ es una familia de morfismos compatibles, es decir, para cualesquiera $i, j \in I$, se tiene que $g_i q_i = g_j q_j$. Por construcción $u_{i,j}$ es la única inducida por el pullback, más aún, $\coprod(A_i \times_A A_j) \cong (\coprod A_i) \times_A (\coprod A_i)$. También por

la propiedad universal del coproducto, $g : \coprod A_i \times B$ es la única tal que $g_i = g\iota^i_{\coprod A_i}$. Del mismo modo existe un único morfismo $s : (\coprod A_i) \times_A (\coprod A_j) \cong \coprod (A_i \times_A A_j) \to B$ tal que $su_{i,j} = g_i q_i = g_j q_j$. Note que $gp_1 u_{i,j} = gp_2 u_{i,j}$ por lo que tanto gp_1 y gp_2 satisfacen la propiedad de s y por tanto $gp_1 = gp_2$. Como A es coigualador de p_1 y p_2, existe un único $h : A \to B$ tal que $hf = g$. De donde $g_i = g\iota^i_{\coprod A_i} = hf\iota^i_{\coprod A_i} = hf_i$. Por lo tanto $\{f_i\}_{i\in I}$ es una familia epimorfica efectiva.
$2 \Rightarrow 3$) Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\coprod A_i) \times_A (\coprod A_i) \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "h"] \arrow[dl, dashed, "t"] \\
& C \arrow[r, "i"] & B
\end{tikzcd}$$

donde $i : C \to B$ es un monomorfismo. Note que

$$igp_1 = hfp_1 = hfp_2 = igp_2$$

como i es monomorfismo, entonces $gp_1 = gp_2$. Como f es coigualador de p_1 y p_2, entonces existe un único $t : A \to C$ tal que $tf = g$. Además se tiene que

$$itf = ig = hf$$

Como f es epimorfismo, entonces $it = h$. Además t es única por la propiedad del coigualador.
$3 \Rightarrow 2$) Sea $\hat{f} : \coprod A_i \to C$ el coigualador de p_1 y p_2. Como $fp_1 = fp_2$, existe un único $i : C \to A$ tal que $f = i\hat{f}$. Entonces se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\hat{f}"] & A \arrow[d, "1_A"] \\
C \arrow[r, "i"] & A
\end{tikzcd}$$

donde i es monomorfismo. Por lo que existe $h : A \to C$ tal que $\hat{f} = hf$ y $ih = 1_A$. Por el otro lado, se tiene que $hfp_1 = hfp_2$, por lo que existe una única $s : C \to C$ tal que $s\hat{f} = hf$. De donde $s\hat{f} = hf = hi\hat{f}$, como $\hat{f}$ es epimorfismo, $s = hi$. Además como $\hat{f} = hf$, se tiene que $s = 1_C$. Como s es única con la propiedad, $1_C = hi$. Por lo tanto $C = A$ y así A es el coigualador de p_1 y p_2. ■

Definición 3.15. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría y $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ una familia de morfismos con colímite $\coprod_{i\in I} A_i$ y $f : \coprod_{i\in I} \to A$ la inducida por la familia*

- *La condición 3 de la proposición anterior, se expresa diciendo que f es un epimorfismo fuerte.*
- *La condición 2 de la proposición anterior, se expresa diciendo que f es un epimorfismo efectivo.*

OBSERVACIÓN 3.16.
- *Una familia epimórfica efectiva es epimórfica.*
- *En una categoría regular las nociones de epimorfismo fuerte y epimorfismo efectivo coinciden.*
- *En la literatura es común encontrar que una familia $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ es epimórfica efectiva si genera un epimorfismo efectivo, esto sucede si el coproducto de los A_i existe.*

COROLARIO 3.17. *Sean $\mathbb{A}$ categoría con pullbacks y $\{f_i : A_i \to A\}$ una familia epimórfica.*

1. *Si existen $C, B \in \mathbb{A}$ y $\{g_i : A_i \to B\}$ compatible tales que para cualquier $i \in I$, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "g_i"] & A \arrow[d, "j"] \\ B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

   donde h es un monomorfismo, entonces existe una única $t : A \to B$ tal que $tf_i = g_i$ y $ht = j$

2. *Si además $\mathbb{A}$ es regular y existe el coproducto $\coprod A_i$, entonces el inciso 1 es equivalente a que $\{f_i\}$ sea una familia epimorfica.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} A_i \times_A A_j \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, "p_j"] & A_i \arrow[d, "f_i"] \arrow[ddrr, bend left, "g_i"] & & \\ A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[ddrr, bend right, "g_j"'] & A \arrow[dr, "m"] & & \\ & & C & \\ & & & B \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

donde h es un monomorfismo y para todo $i \in I$ $mf_i = hg_i$. Así las cosas se tiene que
$$hg_jp_j = mf_jp_j = mf_ip_i = hg_ip_i$$
como h es epimorfismo, se tiene que $g_jp_j = g_ip_i$. Por lo tanto, existe un único $t : A \to B$ tal que $tf_i = g_i$. Además note que para cualquier $i \in I$, $htf_i = hg_i = jf_i$, como $f_i$es una familia epimorfica, se tiene que $ht = j$.

2. Se probará que lo anterior implica al inciso 3 de 3.14. Sean $C, B \in \mathbb{A}$ junto con morfismos $i : C \to B$ un monomorfismo, $g : \coprod A_i \to C$ y $h : A \to B$. Para cada $i \in I$, sean $g_i = g\iota_i$. Entonces existe un único $t : A \to C$ tal que $tf_i = g_i$ y $it = h$. De donde se tiene que $tf\iota_i = tf_i = g_i = g\iota_i$ y por la propiedad universal del coproducto $tf = g$.

■

Corolario 3.18. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría con pullbacks y $\{f_i : A_i \to A\}$ una familia epimórfica.*

- *Si existe un monomorfismo $i : B \to A$ y una familia $\{g_i : A_i \to B\}$ tales que $f_i = ig_i$, entonces $A = B$.*
- *Si además $\mathbb{A}$ es regular, existen el coproducto $\coprod A_i$, $i : B \to A$ un monomorfismo y $g : \coprod A_i \to B$ tales que $f = ig$, entonces $A = B$.*

Lema 3.19. *Sean A y B objetos de $\mathbb{A}$, $E = \{f_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ una familia epimorfica efectiva y h_B la pregavilla representable asociada a B. Entonces h_B satisface la condición de gavilla para E.*

Demostración. Note que para cualquier $C \in \mathbb{A}$, $h_B(A) = Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$. Entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$Hom(A, B) \longrightarrow \prod_{i \in I} Hom(A_i, B) \rightrightarrows \prod_{i,j \in I} Hom(A_i \times A_j, B)$$

Note que si $\{g_i : A_i \to B\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Hom(A_i, B)$ es igualada por los morfismos, entonces satisface la condición para la familia epimorfica efectiva. Así las cosas, existe un único $g : A \to B$ que lo iguala, por lo que es el igualador.
Más aun si el colímite existe, se tiene el siguiente diagrama

$$Hom(A, B) \longrightarrow Hom(\coprod A_i, B) \rightrightarrows Hom(\coprod_{i,j \in I}(A_i \times A_j), B)$$

Así como se probó en la Proposición 3.14, éste es un igualador. ■

Proposición 3.20. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría regular, para cada $A \in \mathbb{A}$ se define $Can(A)$ como la colección de familias epimórficas efectivas con codominio A. Entonces Can es una pretopología.*

Demostración. Sea $A \in \mathbb{A}$

1. Considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

   donde $h : B \to C$ es un monomorfismo. Como 1_A es un isomorfismo, tiene una inversa 1_A^{-1}. Sea $t = f1_A^{-1}$. Entonces $t1_A = f1_A^{-1}1_A = f$ y $ht = hf1_A^{-1} = g1_A1_A^{-1} = g$. Por lo tanto $\{1_A : A \to A\} \in Can(A)$.

2. Sean $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I} \in Can(A)$ y para cada $i \in I$, $\{g_i^j : B_j \to A_i\}_{j\in J_i} \in Can(A_i)$. Suponga que existen $i : C \to A$ un monomorfismo y $\{h_j : B_j \to C\}$ tales que $f_i g_i^j = ih_j$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} B_j \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "g_i^j"] \arrow[ddr, bend right, "h_j"'] & & \\ & A_i \times_A C \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & A_i \arrow[d, "f_i"] \\ & C \arrow[r, "i"] & A \end{tikzcd}$$

   Como i es monomorfismo, entonces p_1 también. Además como g_i^j se factorizan por $A_i \times_A C$, se tiene que $A_i \times_A C = A_i$. Entonces $ip_2 = f_i$, es decir f_i se factoriza a por un monomorfismo, por lo que $C = A$. Por lo tanto la colección $\{f_i g_i^j : B_j \to A\}_{i\in I, j\in J_i} \in Can(A)$.

3. La estabilidad bajo pullbacks se sigue de que en una categoría regular, el pullback de un epimorfismo efectivo es epimorfismo efectivo.

Por tanto Can es una pretopología de Grothendieck. ∎

Como se vio antes, en $(\mathbb{A}, Can)$ las pregavillas representables son gavillas. Así se tiene una primera caracterización de la pretopología que hace gavillas a las pregavillas representables.

Hasta ahora se ha visto que la noción de gavilla sobre espacios topológicos coincide con la de gavilla en categorías con una pretopología, el siguiente lema enuncia que basta coincidir en una cubierta, R, para coincidir en cualquier cubierta, S, que contenga a R.

Lema 3.21. *Sean F una pregavilla, $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ y $\{g_j : B_j \to A\}_{j\in J}$ tales que f_i se factoriza a través de al menos un $g_{j(i)}$, si F satisface la condición de gavilla para $\{f_i : A_i \to A\}$ entonces la satisface para $\{g_j : B_j \to A\}$*

Demostración. Suponga que $f_i = g_{j(i)}h_i$ para cada $i \in I$ y considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Eq \arrow[r, "eq"] & \prod_{j\in J} F(B_j) \arrow[r, shift left, "\prod F(\pi_k^B)"] \arrow[r, shift right, "\prod F(\pi_j^B)"'] \arrow[d, "\prod F(h_i)"] & \prod_{j,k\in J} F(B_j \times B_k) \arrow[d, "\prod F(h_i)\times F(h_j)"] \\
F(A) \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "\prod F(g_i)"] \arrow[r, "\prod F(f_i)"'] & \prod_{i\in I} F(A_i) \arrow[r, shift left, "\prod F(\pi_k^A)"] \arrow[r, shift right, "\prod F(\pi_j^A)"'] & \prod_{j,k\in J} F(A_j \times A_k)
\end{tikzcd}$$

Basta con probar que existe una inversa $f : Eq \to F(A)$ para que $F(A) = Eq$. Note que:

$$\begin{aligned}
\prod F(\pi_k^A) \prod F(h_i) eq &= \prod F(h_j) \times F(h_k) \prod F(\pi_k^B) eq \\
&= \prod F(h_j) \times F(h_j) \prod F(\pi_j^B) eq \\
&= \prod F(\pi_j^A) \prod F(h_i) eq
\end{aligned}$$

Por lo que existe una única $f : Eq \to F(A)$ tal que $\prod F(f_i) f = \prod F(h_i) eq$. Entonces por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}
\prod F(f_i) f u &= \prod F(h_i) equ \\
&= \prod F(h_i) \prod F(g_i) \\
&= \prod F(f_i) 1_{F(A)}
\end{aligned}$$

de donde $1_{F(A)} = fu$.
Por el otro lado

$$\begin{aligned}
equf &= \prod F(g_i) f \\
&= eq1_{Eq}
\end{aligned}$$

Por lo que $uf = 1_{Eq}$
Así las cosas, se tiene que $Eq = F(A)$ como se deseaba. ■

Definición 3.22. *Sean A un objeto de $\mathbb{A}$ y M y M' un par de cubiertas de A.*

- *Se dice que M es una subcubierta de M' si $M \subseteq M'$*
- *Se dice que M es un refinamiento de M' si para cualquier $f \in M'$ existe $g \in M$ tal que f se factoriza a través de g.*

Corolario 3.23. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría y P una pretopología sobre $\mathbb{A}$*

1. *Sea P' pretopología sobre $\mathbb{A}$ del tal manera que para cualquier $A \in \mathbb{A}$ y $M \in P(A)$ es subcubierta de alguna $M' \in P'(A)$, entonces toda gavilla sobre $(\mathbb{A}, P)$ lo son sobre $(\mathbb{A}, P')$.*
2. *Sea P' pretopología sobre $\mathbb{A}$ tal que para cualquier $A \in \mathbb{A}$ y $M \in P'(A)$ existe $M' \in P(A)$ un refinamiento de M, entonces las gavillas sobre (A, P') lo son sobre (A, P).*
3. *Sea P' la pretopología tal que para cualquier $A \in \mathbb{A}$, $M \in P'(A)$ si $M \in P(A)$ o existe un refinamiento $M' \in P(A)$ de M, entonces (A, P) y (A, P') tienen las mismas gavillas.*

Un ejemplo concreto de esto, se obtiene en la categoría de espacios topológicos.

Ejemplo 3.24. *Considere las pretopologías de homeomorfismos locales y de morfismos abiertos inyectivos. Es decir, los últimos 2 incisos del ejemplo 3.9. A la de homeomorfismos locales se le denotará por P' y a la de morfismos abiertos inyectivos por P. Entonces para cada $A \in \mathbb{A}$ se tiene que $P(A) \subseteq P'(A)$. Note que por definición, si $\{f_i : X_i \to X\}_{i \in I} \in P(A)$ entonces el morfismo inducido $f : \coprod_{i \in I} X_i \to X$ es un homeomorfismo local. Esto pasa pues si $x \in \coprod_{i \in I} X_i$ entonces existe $j \in I$ tal que $x \in X_j$. Entonces como $f|_{X_j} = f_j$, se tiene que este es un homeomorfismo en su imagen. Entonces para cualquier U abierto de X_j que contenga a x, se tiene que $f(U) \cong U$. Por tanto es un homeomorfismo local. Por lo tanto la familia $\{f_i : X_i \to X\} \in P'(A)$.*
Esta afirmación junto con el inciso 2 del corolario anterior, implica que las gavillas de $(\mathbb{A}, P)$ son las mismas que las gavillas sobre $(\mathbb{A}, P')$.

Por lo anterior, existen pretopologías que inducen las mismas gavillas, aunque por el Lema 3.21, es fácil ver que si se consideran familias sin ese tipo de factorización no se tendría ese problema, es decir basta considerar familias tales que si $f : A \to B \in J(B)$

y $g : C \to A$ entonces $fg : C \to B \in J(B)$. Note que esto coincide con la noción de criba.

3. Topologías de Grothendieck

DEFINICIÓN 3.25. *Sea $\mathbb{A}$ categoría, una topología de Grothendieck, J, en $\mathbb{A}$, se define en cada objeto A de $\mathbb{A}$ como sigue:*

Grt1. (Identidad) $h_A \in J(A)$

Grt2. (Estabilidad de base) Si $S \in J(A)$ y $f : B \to A$ entonces $f^*(S) \in J(B)$

Grt3. (Carácter local) Dados S y $R \in J(A)$ tales que $R \in J(A)$ y para cualquier $f : B \to A \in R$, $f^*(S) \in J(B)$ entonces $S \in J(A)$

EJEMPLO 3.26. *1. $J(A) = \{h_A\}$*

2. Si (X, τ) es espacio topológico, $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I} \in J(U)$ si $U \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$

PROPOSICIÓN 3.27. *Sea $(\mathbb{A}, P)$ una categoría con una pretopología. Para cada $A \in \mathbb{A}$ se define una familia de cribas, tal que $S \in J(A)$ si existe $F \in P(A)$ tal que $F \subseteq S$. Entonces J es una topología de Grothendieck.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathbb{A}$

1. Note que por definición $\{1_A\} \in P(A)$. De donde $h_A \in J(A)$, puesto que para cualquier $f : B \to A$, se tiene que $f = 1_A f$.
2. Sean $S \in J(A)$ una criba y $f : B \to A$ un morfismo. Como $S \in J(A)$, existe $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I} \in P(A)$ tal que $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq S$. Entonces la familia de pullbacks $\{\pi_1 : B \times A_i \to B\} \in P(B)$. Además $\{pi_1 : B \times A_i \to B\} \subseteq f^*(S)$. Por tanto $f^*(S) \in J(A)$.
3. Sean R, S un par de cribas sobre A, tales que $R \in J(A)$ y para cualquier $f : B \to A \in R$, se tiene que $f^*(S) \in J(B)$. Como $R \in J(A)$, existe $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ tal que $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq R$. Entonces para cada $i \in I$, la familia de pullbacks, $\{\pi^S_{f_i} : A_i \times A \to A_i\} \in P(A_i)$ y se queda contenida en $f_i^*(S)$. Por lo que la familia $\{f_i \pi^S_{f_i} : A_i \times A \to A\} \in P(A)$ y más aún se queda contenida en S. Por tanto $S \in J(A)$.

Entonces ésta es una topología y se conoce como la topología generada o asociada a la pretopología. ■

DEFINICIÓN 3.28. *Un sitio $(\mathbb{A}, J)$, es una categoría $\mathbb{A}$ junto con una topología de Grothendieck J. Si $\mathbb{A}$ es una categoría pequeña, se dirá que $(\mathbb{A}, J)$ es un sitio pequeño.*

De los últimos ejemplos es inmediato preguntarse si toda topología es una pretopología, la respuesta es negativa, pues si J es una topología, no es posible que $\{1_A\} \in J(A)$ pues eso implicaría que $\{1_A\}$ es una criba, lo cual no necesariamente es cierto. Análogamente, es posible preguntarse si dada una pretopología ésta puede ser una topología, pero esto resulta ser falso, la principal razón es la existencia de pullbacks, que no es necesaria en la definición de Topología.

Ejemplo 3.29. *Este ejemplo permite observar una diferencia entre topología y pretopología.*
Considere $\mathbb{A}$ una categoría regular y para cada $A \in \mathbb{A}$ se define la colección $P(A)$ dada por $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ si $\coprod_{i\in I} A_i \to A$ es epimorfismo.

afirmación. *P es una pretopología.*

1. *Note que $\coprod A \cong A$ de donde $1_A : \coprod A \to A$ es epimorfismo.*
2. *Sean $g : B \to A$ y $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$. Por ser categoría regular, el pullback de un epimorfismo regular resulta ser epimorfismo regular.*

$$\begin{tikzcd} B \times \coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

   Por lo que al ser $\bar{g}$ epimorfismo regular implica que $B \times \coprod_{i\in I} A_i \cong \coprod_{j\in J} B_j$. Por tanto $\{\bar{f}_j : B_j \to B\} \in P(B)$

3. *Sean $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ y $\{f_{ij} : B^i_j \to A_i\} \in P(A_i)$. Entonces se tiene el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J_i} B^i_j \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dr, dashed, two heads] & \coprod_{i\in I} A_i \\ B^i_j \arrow[u, hook] \arrow[r, "f_{ij}"] & A_i \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

   Es fácil ver que $\hat{f}$ es epimorfismo pues si se considera el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J_i} B^i_j \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dr, dashed, two heads, "f"'] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \\ & A_i \arrow[u, hook, "\iota_A"] & \end{tikzcd}$$

Si $g\hat{f} = h\hat{f}$, entonces como $\hat{f} = \iota_A f$ se tiene que:

$$g\iota_A f = g\hat{f} = h\hat{f} = h\iota_A f$$

Pero como f es un epimorfismo, se tiene que $g\iota_A = h\iota_A$. Por lo que por la propiedad universal del coproducto se sigue que $g = h$ y por tanto, $\hat{f}$ es epimorfismo. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
B^i_j \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f_{ij}"'] & \coprod_{j\in J_i} B^i_j \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads, "\hat{f}"] & \coprod_{i\in I, j\in J_i} B^i_j \arrow[d, two heads] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& A_i \arrow[r, hook] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[r, two heads] & A
\end{tikzcd}$$

y que h es epimorfismo por lo que la familia es una pretopología. Esto generaliza el caso de los espacios topológicos.
Note que si se considera la topología generada por esta pretopología, entonces $S \in J(A)$ si existen $\{f_i : A_i \to A\} \subseteq S$ tal que $\coprod_{i\in I} A_i \to A$ es epimorfismo, es decir, la topología tendrá como cubiertas a familias cuyo coproducto es «más grande», aunque esto no necesariamente de más información.

Ahora es inmediato preguntarse que propiedades tienen las topologías y más aún si existe alguna topología

Proposición 3.30. *Sean $\mathbb{A}$ categoría y J topología sobre $\mathbb{A}$, entonces*

1. *Si $S \in J(A)$ y $S \subseteq R$ entonces $R \in J(A)$*
2. *Si $R, S \in J(A)$ entonces $R \cap S \in J(A)$*

Demostración. 1. Sea $f : B \to A \in S$ y considere $f^*(R) = \{g | fg \in R\}$, note que como $S \subseteq R$ en particular $f \in R$ por lo que $f^*(R) = Hom(\_, B) \in J(B)$ por lo que $R \in J(A)$

2. Sea $f : B \to A \in S$ y considere $f^*(R\cap S) = \{g | fg \in R\cap S\} = f^*(R) \in J(B)$ por lo que $R \cap S \in J(A)$

■

Es decir $J(A)$ es un filtro en $\Omega(A)$, que como se vio en 2.21, es un orden parcial. Un resultado inmediato y que será de utilidad más adelante es el siguiente.

Corolario 3.31. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio, $A \in \mathbb{A}$ y $S, R \in \Omega(A)$. Entonces son equivalentes:*

1. *Si* $R \in J(A)$ *y para toda* $f : B \to A \in R$*, se tiene que* $f^*(S) \in J(B)$ *entonces* $S \in J(A)$
2. *Si* $S \subseteq R$*,* $R \in J(A)$ *y y para toda* $f : B \to A \in R$*, se tiene que* $f^*(S) \in J(B)$ *entonces* $S \in J(A)$

Demostración. $1 \Rightarrow 2)$ Es inmediato por ser un caso particular.
$2 \Rightarrow 1)$ Sean $S \in \Omega(A)$ y $f : B \to A \in R$. Considere $T = R \cap S \subseteq R$. Como $f^*(R), f^*(S) \in J(B)$ se tiene que $f^*(R) \cap f^*(S) = f^*(T) \in J(B)$. Entonces $T \in J(A)$. Como $T \subseteq S$ se sigue que $S \in J(A)$. ■

Note que dados $(\mathbb{A}, J)$ un sitio y $A \in \mathbb{A}$, se tiene que $J(A) \subseteq \Omega(A)$, por lo que se hereda el orden y más aun, éste se puede extender hacia topologías.

Definición 3.32. *Sean* $\mathbb{A}$ *categoría junto con J y J' dos topologías sobre* $\mathbb{A}$*. Se dice que J' es mas fina que J si para cada* $A \in \mathbb{A}$ *y* $S \in J(A)$*, se tiene que* $S \in J'(A)$*. En este caso también se dice que J es mas burda que J'.*

Proposición 3.33. *Sea* $\mathbb{A}$ *una categoría. Entonces:*

- *Si* $\{J_i\}_{i\in I}$ *es una familia de topologías sobre* $\mathbb{A}$ *entonces* $\bigcap_{i\in I} J_i$ *es una topología*
- *Se define una colección* Ω*, tal que para cada* $A \in \mathbb{A}$*:*
$$\Omega(A) = \{S | S \text{ es criba sobre } A\}$$
Entonces Ω *es topología y es la más fina.*
- *Si* $\{J_i\}_{i\in I}$ *es una familia de topologías sobre* $\mathbb{A}$ *entonces existe* $\Sigma_{i\in I} J_i$ *topología tal que para cada* $i \in I$*,* $J_i \subseteq \Sigma_{i\in I} J_i$ *y es mínima con la propiedad.*
- *Se define una colección* ω*, tal que para cada* $A \in \mathbb{A}$ $\omega(A) = \{h_A\}$*. Entonces* ω *es topología y es la más burda.*

Demostración.
- Basta demostrar que para cada $A \in \mathbb{A}$, en $\bigcap_{i\in I} J_i(A)$ se satisfacen las propiedades de topología.
  1. Como $Hom(\_, A) \in J_i$ para todo $i \in I$. Se sigue que $Hom(\_, A) \in \bigcap_{i\in I} J_i(A)$
  2. Sean $S \in \bigcap_{i\in I} J_i(A)$ y $f : B \to A$. Somo $S \in \bigcap_{i\in I} J_i(A)$ entonces $S \in J_i(A)$ para toda $i \in I$. Así $f^*(S) \in J_i(A)$ para toda $i \in I$. Por tanto $f^*(S) \in \bigcap_{i\in I} J_i(A)$

3. Sean $R \in \bigcap_{i \in I} J_i(A)$ y S una criba sobre A tal que para cualquier $f : B \to A \in R$, $f^*(S) \in \bigcap_{i \in I} J_i(B)$. Como $f^*(S) \in J_i(B)$ para toda $i \in I$ entonces $S \in J_i(A)$ para toda $i \in I$. Luego $S \in \bigcap_{i \in I} J_i(A)$.

Por tanto $\bigcap_{i \in I} J_i$ es una topología sobre $\mathbb{A}$

- Las propiedades son satisfechas inmediatamente.
- Es inmediato pues al definir $\Sigma_{i \in I} J_i = \bigcap \{J | J_i \subseteq J$ para toda $i \in I\}$. Note que esta colección resulta cumplir las propiedades por el primer inciso y que esta familia es no vacía por el inciso anterior.
- Basta notar que las partes 2 y 3 de la definición de topología, solo pueden ser satisfechas por h_A si se considera $f = 1_A$.

■

Recuerde que la noción de topología fue introducida porque la condición de gavilla no era dependiente de la pretopología, es decir, existen 2 pretopologías con las mismas gavillas. Esta condición no ha sido reinterpretada para topologías.

DEFINICIÓN 3.34. *Sean $\mathbb{B}$ una categoría, $(\mathbb{A}, J)$ un sitio, $A \in \mathbb{A}$ y $P : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{B}$ una pregavilla*

1. *Si $S \in \Omega(A)$, se dice que $\{x_f\}_{f \in S}$ es una familia compatible para S de P si una asignación tal que a cada $f : B \to A \in S$ le asigna un elemento $x_f \in P(B)$ tal que si $g : C \to B$ entonces $P(g)(x_f) = x_{fg}$. Note que $fg \in S$.*
2. *Dada $\{x_f\}_{f \in S}$ familia compatible, se dice que $x \in P(A)$ es una amalgama si $P(f)(x) = x_f$ para toda $f \in S$.*
3. *P es separada en S si para cada familia compatible de S, existe a lo más una amalgama.*
4. *P satisface la condición de gavilla para S si para cada familia compatible de S, existe una única amalgama.*
5. *P es una pregavilla separada si para cualquier $A \in A$ y cualquier $S \in J(A)$, P es separada en S.*
6. *P es una gavilla si para cualquier $A \in \mathbb{A}$ y cualquier $S \in J(A)$, P satisface la condición de gavilla.*

Es inmediato de la definición que toda gavilla es pregavilla separada y que si se satisface la condición de gavilla para S, entonces la pregavilla es separada en S.

Lema 3.35. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$, $S \in \Omega(A)$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$, entonces se tiene una correspondencia biyectiva entre familias compatibles para S y $Hom(S, F)$.*

Demostración. Note que dada $\{x_f\}_{f\in S}$ familia compatible y $f : B \to C$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S(C) \arrow[r, "x"] \arrow[d, "f_*"] & F(C) \arrow[d, "F(f)"] \\
S(B) \arrow[r, "x"] & F(B)
\end{tikzcd}$$

donde dada $g : C \to A \in S(C)$ $x(g) = x_g$ note que $F(f)x(g) = F(f)x_g = x_{gf}$ y por el otro lado $f_*(g) = gf$ de donde $xf_*(g) = x(gf) = x_{gf}$ por lo que el diagrama conmuta y mas aún, x así definida es una transformación natural.
Del mismo modo, dada $\theta : S \to F$, para cada $C \in \mathbb{A}$ y $g \in S(C)$, se define $x_g = \theta(C)(g)$ note que por como esta definido se tiene que:

$$\begin{aligned}
F(f)x_g &= F(f)\theta(C)(g) \\
&= \theta(B)f_*(g) \\
&= \theta(B)gf \\
&= x_{gf}
\end{aligned}$$

por lo que es una familia compatible. ■

Con esta correspondencia vale la pena reinterpretar las condiciones de gavillas para pretopologías, por ejemplo dada $\{x_f\}_{f\in S}$ familia compatible, $f \in S(B)$ y $g : C \to B$, se induce el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S(B) \arrow[d, "x(_)"] \arrow[dr, "x_{fg}"] & \\
F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

Donde x_{fg} es la función con valor constante x_{fg}, note que este diagrama no necesariamente es conmutativo, por lo que es posible fijarse en todas las posibles funciones constantes que pueden hacer conmutar el diagrama, es decir, fijarnos en la familia de funciones $\{x_{hg}\}_{h\in S(B)}$, de hecho estas funciones al ser constantes pueden ser inducidas desde $F(B)$, a las que se denotaran por $p_{f,g} = x_{fg}$.
En reinterpretación de la condición de gavilla para pretopologías se tiene el siguiente resultado.

LEMA 3.36. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$, $S \in \Omega(A)$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$. Si F satisface la condición de gavilla para S, el siguiente es un igualador.*

$$Hom(S,F) \xrightarrow{e} \prod_{f\in S} F(dom(f)) \underset{a}{\overset{G}{\rightrightarrows}} \prod_{g\in f^*(S), f\in S} F(dom(g))$$

donde $G(\{x_i\})_{f,g} = p_{f,g}$ y $a(\{x_i\})_{f,g} = F(g)x_f$.

DEMOSTRACIÓN. Note que por la manera como están definidos los morfismos F y a, un elemento $\{x_i\} \in \prod_{f\in S}$ será igualado si $p_{f,g} = F(g)x_f$ es decir $x_{fg} = F(g)x_f$ por lo que de hecho resultan ser las familias compatibles y por la proposición anterior estan en correspondencia con $Hom(S,F)$.
La universalidad es inmediata por la descripción del igualador en SET ∎

Ahora recuerde que dada una cria S sobre A, ésta también es un subfuntor del funtor representable h_A, por lo que surge la cuestión de que si dada una transformación natural $\theta : S \to F$ ésta se puede extender a una $\Theta : h_A \to F$, en un diagrama:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "i_A"] & F \\ h_A \arrow[ur, dashed, "\Theta"] & \end{tikzcd}$$

Note que un detalle importante al definir Θ es saber como se comportaría $\Theta(A)(1_A)$, lo cual se caracterizará en el siguiente lema.

LEMA 3.37. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$, $S \in \Omega(A)$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$. Entonces P satisface la condición de gavilla para S si y sólo si cualquier transformación natural (familia compatible) $x : S \to F$ se extiende a una transformacion natural $\Theta : h_A \to F$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} h_A(A) \arrow[d, "h_A(f)"] & S(A) \arrow[l, "i(A)"'] \arrow[r, "x"] \arrow[d, "S(f)"] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ h_A(B) \arrow[d, "h_A(g)"] & S(B) \arrow[l, "i(B)"'] \arrow[r, "x_B"] \arrow[d, "S(g)"] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_A(C) & S(C) \arrow[l, "i(C)"'] \arrow[r, "x_C"] & F(C) \end{tikzcd}$$

note que dada $f \in h_A(B)$ se tiene que $f = 1_A f = h_A(f)(1_A)$. Ahora si Θ fuera la extensión de x y $f \in S$, se tendría que:

$$\begin{aligned}\Theta_B(f) &= \Theta_B(h_A(f)(1_A))\\ &= (\Theta_B h_A(f))(1_A)\\ &= F(f)\Theta_A(1_A)\end{aligned}$$

por lo que la transformación queda determinada por la identidad en A.
Ahora suponga que F satisface la condición de gavilla para S entonces existe un único $x \in F(A)$ tal que $F(f)x = x_f$, así las cosas, se define $\Theta_A(1_A) = x$.
Note que para cualquier $B \in \mathbb{A}$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S(B) \arrow[r, "x"] \arrow[d, "i"] & F(B) \\ h_A(B) \arrow[ur, dashed, "\Theta_B"] & \end{tikzcd}$$

Pues para cualquier $f \in S(B)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Theta_B(i(f)) &= \Theta_B(f)\\ &= \Theta_B(h_A(f)(1_A))\\ &= (\Theta_B h_A(f))(1_A)\\ &= F(f)\Theta_A(1_A)\\ &= F(f)x\\ &= x_f\end{aligned}$$

como se deseaba y por tanto, se extiende la transformación de manera única.
Por el otro lado se afirma que dada una familia compatible $\{x_f\}_{f\in S}$ existe una única amalgama, esto es inmediato pues si $x \in Hom(S,F)$ entonces existe una única $\Theta \in Hom(h_A, F)$ que la extiende, por lema de Yoneda $Hom(h_A, F) \cong F(A)$ y así la amalgama es $\Theta_A(1_A)$. ■

Note que si se debilitan las condiciones sobre F, se tiene que:

1. Si F fuera separada en S, para algunas familias existiría una única extensión, es decir, que hay familias que no pueden ser extendidas.
2. Si F no fuera separada en S, para algunas familias no existiría extensión o esta no sería única.

De los Lemas 3.37, 3.36 y 3.35 se desprende el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.38. *Sean $\mathbb{A}$ categoría, $A \in \mathbb{A}$, $S \in \Omega(A)$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$ entonces son equivalentes:*

1. *F satisface la condición de gavilla para S.*
2. *$Hom(S, F) \cong Hom(h_A, F)$.*
3. *El diagrama*

$$F(A) \xrightarrow{e} \prod_{f \in S} F(dom(f)) \overset{p}{\underset{a}{\rightrightarrows}} \prod_{g \in f^*(S), f \in S} F(dom(g))$$

es un igualador.

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Note que toda criba es un subfuntor del representable, de donde se tiene la inclusión $i : S \to h_A$. Esto induce una transformación $\iota : Hom(h_A, F) \to Hom(S, F)$ y por el lema anterior, si F satisface la condición de gavilla para S, se tiene una transformación natural $\Theta : Hom(S, F) \to Hom(h_A, F)$. Note que dada $X \in Hom(S, F)$ con amalgama x, se tiene que:

$$\iota\Theta(X)(B)(f) = F(f)(x) = x_f$$

para cualquier $B \in \mathbb{A}$ y $f \in S(B)$. Por lo que $\iota\Theta = 1_{Hom(S,F)}$. Por tanto $Hom(S, F) \cong Hom(h_A, F)$.
$2 \Rightarrow 1$) Por el lema de Yoneda, el inciso 2 es equivalente a $Hom(S, F) \cong F(A)$. Si se tiene el isomorfismo del inciso 2, se tendría que cada familia compatible estría relacionada una única amalgama.
Para la ultima equivalencia, considere el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} Hom(S,F) \arrow[r, "eq"] & \prod_{f \in S} F(dom(f)) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "a"'] & \prod_{g \in f^*(S); f \in S} F(dom(g)) \\ Hom(h_A, F) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\cong"] & F(A) \arrow[u, "e"] & \end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow 3$) Es inmediato del diagrama.
$3 \Rightarrow 2$)Es inmediata del Lema 3.36. ∎

Esta condición permite relacionar las nociones de gavilla para pretopología con la de gavilla para topología. Además el siguiente resultado prueba lo esperado, es decir, que las gavillas coinciden.

PROPOSICIÓN 3.39. *Sean P una pretopología sobre $\mathbb{A}$ y J la topología generada por P. Si $F \in \hat{\mathbb{A}}$ entonces F es gavilla en $(\mathbb{A}, P)$ si y solo si F es gavilla sobre $(\mathbb{A}, J)$*

Demostración. La prueba es una aplicación de 3.21. Note que basta probar que para cada A objeto de $\mathbb{A}$ se satisface la condición de gavilla.
$\Rightarrow$) Sea $S \in J(A)$ entonces existe $\{f_i : A_i \to A\}_{i\in I} \in P(A)$ tal que se queda contenida en S. Entonces para cada $i \in I$ se tiene que $f_i \in S$. Entonces como $f_i = f_i 1_{A_i}$, cada f_i se factoriza por un morfismo de S. Por el lema 3.21 se tiene que F satisface la condición de gavilla para S,
$\Leftarrow$) Sea $\{f_i : A_i \to A\} \in P(A)$ y sea S la criba generada por esta familia. Entonces como $f : B \to A \in S$ si existen $i \in I$ y $g : B \to A_i$ tales que $f = f_i g$ se tiene que los morfismos de S, se factorizan por $\{f_i\}$. Por el lema 3.21 se tiene que F satisface la condición de gavilla para esta familia.
Por tanto F es gavilla en la pretopología P si y solo si lo es en la topología J asociada a P. ∎

Ahora sabiendo que las nociones de gavilla coinciden para pretopologías y topologías, es natural preguntarse por las condiciones que debe tener una topología para que una pregavilla sea gavilla.

Corolario 3.40. *En las mismas hipótesis de la proposición, se tiene que:*

1. *F satisface la condición de gavilla para* $S = h_A$
2. *Existe una topología que hace gavilla a F*
3. *Existe una topología más fina que hace gavilla a F*

Demostración.
1. Es inmediato pues $Hom(S, F) \cong Hom(h_A, F)$.
2. Considere la topología J sobre $\mathbb{A}$, tal que para cada $A \in \mathbb{A}$, $J(A) = \{h_A\}$. Por el inciso anterior, F es gavilla.
3. Sea J=$\{$T$|$ T es topologia y hace gavilla a F $\}$, que es no vacío por el inciso anterior y considere $\bar{J}(A) = \bigcap_{T\in J} T(A)$.

∎

El último inciso de esta proposición, aunque da la existencia de una topología, no da una buena descripción de ésta. Es posible describirla como sigue:

Proposición 3.41. *Sea* $F \in \hat{\mathbb{A}}$. *Para cada* $A \in \mathbb{A}$, *se define* $J(A)$ *tal que* $S \in J(A)$ *si para cada* $f : B \to A$; $Hom(h_B, F) \cong Hom(f^*(S), F)$. *Entonces*

1. *J es topología*
2. *F es gavilla sobre* $(\mathbb{A}, J)$

3. J es la topología mas fina que hace gavilla a F

DEMOSTRACIÓN. 1. ▪ Sean $A \in \mathbb{A}$ y $f : B \to A$. Entonces

$$f^*(h_A) = \{g : Dom(g) \to B | fg \in h_A\} = h_B$$

De donde $Hom(h_B, F) \cong Hom(f^*(h_A), F) = Hom(h_B, F)$. Por tanto $h_A \in J(A)$

- Sean $R \in J(A)$, $f : B \to A$ y $g : C \to B$. Entonces

$$\begin{aligned} g^*(f^*(R)) &= \{h : dom(h) \to C | gh \in f^*(R)\} \\ &= \{h : dom(h) \to C | fgh \in R\} \\ &= (fg)^*(R) \end{aligned}$$

Como $R \in J(A)$ se tiene que $Hom((fg)^*(R), F) = Hom(g^*(f^*(R)), F) = Hom(h_C, F)$. Por tanto $f^*(R) \in J(B)$.

- Sean $A \in \mathbb{A}$, S y R cribas sobre A, tales que $S \subseteq R$, $R \in J(A)$ y S satisface el carácter local para R.
Sean $g : B \to A$, $\phi : g^*(S) \to F$, $\alpha : C \to B \in g^*(R)$. Considere el diagrama siguiente:

$$(g\alpha)^*(S) \xrightarrow{\bar{\alpha}} g^*(S) \xrightarrow{\phi} F$$

Note que $g\alpha \in R$, por lo que $Hom((g\alpha)^*(S), F) \cong Hom(h_C, F) \cong F(C)$.
Se define $\theta_{\phi,\alpha} : (g\alpha)^*(S) \to F$ dada por $\theta_{\phi,\alpha}(f) = \phi\bar{\alpha}(f)$.

AFIRMACIÓN. *$\theta_{\phi,\alpha}$ es transformación natural.*

Sean $C, D \in \mathbb{A}$, $f : C \to D \in (g\alpha)^*(S)(D)$ y considere el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (g\alpha)^*(S)(D) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "(g\alpha)^*(S)(f)"] & g^*(S)(D) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(g)^*(S)(f)"] & F(D) \arrow[d, "F(f)"] \\ (g\alpha)^*(S)(C) \arrow[r, "\bar{\alpha}"] & g^*(S)(C) \arrow[r, "\phi"] & F(C) \end{tikzcd}$$

Note que la parte superior e inferior corresponden a $\theta_{\phi,\alpha}$, por lo que realmente es una composición de transformaciones naturales por lo que es una transformación natural.
Entonces existe $X_{\phi,\alpha} \in F(C)$ con la cual está en correspondencia, pues $Hom((g\alpha)^*(S), F) \cong F(C)$, de hecho, $X_{\phi,\alpha} = (\overline{\theta_{\phi,\alpha}})_C(1_C)$, donde $\overline{\theta_{\phi,\alpha}}$ es

la extensión de $\theta_{\phi,\alpha}$ a h_C.
Note que la construcción no dependió de α, por lo que al considerar la familia $\{X_{\phi,\alpha}\}_{\alpha\in g^*(R)}$ se tiene que:

AFIRMACIÓN. *$\{X_{\phi,\alpha}\}_{\alpha\in g^*(R)}$ es una familia compatible.*

Sean $f : C \to B \in g^*(R)$ y $h : D \to C$. Entonces se tiene que:

$$F(h)X_{\phi,f} = F(h)\overline{\theta_{\phi,f}}(1_C) = \overline{\theta_{\phi,f}}(h) = \phi f(h)$$

y que

$$X_{\phi,fh} = \overline{\theta_{\phi,fh}}(1_D) = \phi fh(1_D) = \phi fh$$

Por lo que $F(h)X_{\phi,f} = X_{\phi,fh}$ y así $\{X_{\phi,f}\}_{f\in g^*(R)}$ es familia compatible.
Entonces se concluye que $X_\phi \in Hom(g^*(R), F)$. Ademas note que esta construcción no dependió de ϕ por lo que de hecho es una asignación

$$E : Hom(g^*(S), F) \to Hom(g^*(R), F)$$

dada por $E(\phi) = X_\phi$
Así las cosas, basta probar que E es una correspondencia biyectiva.
Sea $r : Hom(g^*(R), F) \to Hom(g^*(S), F)$, la restricción usual y $\epsilon \in Hom(g^*(R), F)$ y $f : C \to B$. Note que $r(\epsilon)(f) = \epsilon(f)$. Así las cosas, se tiene que:

$$Er(\epsilon)(f) = X_{\epsilon,f} = \overline{\theta_{\epsilon,f}}(1_C) = \epsilon f(1_C) = \epsilon(f)$$

Por tanto $Er = 1_{Hom(g^*(R),F)}$
Por el otro lado sean $\epsilon \in Hom(g^*(S), F)$ y $f : C \to B$. Entonces

$$E(\epsilon)(f) = X_{\epsilon,f} = \overline{\theta_{\epsilon,f}}(1_C) = \epsilon f(1_C) = \epsilon(f)$$

De donde $rE(\epsilon)(f) = \epsilon(f)$. Por tanto $rE = 1_{Hom(g^*(S),F)}$. Por lo que $Hom(g^*(S), F) \cong Hom(g^*(R), F)$. Además como se vio antes el isomorfismo $Hom(g^*(R), F) \cong Hom(h_B, F)$ se sigue que $Hom(g^*(S), F) \cong Hom(h_B, F)$
Por tanto $g^*(S) \in J(B)$ y así $S \in J(A)$.

Por lo tanto J es una topología de Grothendieck.

2. Es inmediato pues $Hom(S, F) \cong Hom(h_A, F)$ para cualquier $A \in \mathbb{A}$ y $S \in J(A)$
3. Note que si $A \in \mathbb{A}$ y $S \in \Omega(A)$ es tal que $Hom(S, F) \cong Hom(h_A, F)$ entonces $S \in J(A)$. Por lo que cualquier criba que hace gavilla a F, pertenece a J. Por tanto es la topología más fina que hace gavilla a F.

■

Los resultados anteriores de hecho se pueden generalizar para una colección de gavillas. De hecho del inciso 2 de 3.40, se tiene que cualquier pregavilla es gavilla en esa topología. Más aún, por el inciso 3, la construcción de esa topología se puede hacer con una familia de pregavillas. Siguiendo esta idea, es natural preguntarse cual es la topología más fina que hace gavillas a las pregavillas representables.

EJEMPLO 3.42. *En 3.14, se vio que la pretopología de epimorfismos efectivos, tiene como gavillas a las representables. En ese momento no se consideró el caso en que una familia de morfismos fuese criba y una familia epimórfica efectiva. En ese caso las nociones de compatibilidad se pueden reinterpretar como sigue: Sean* $S = \{f_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ *una familia epimórfica y criba,* $\{g_i : A_i \to B\}_{i \in I}$, *para cualesquiera* $i, j \in I$ *las proyecciones canónicas del pullback* $p_i : A_i \times_A A_j \to A_i$. *Entonces* $f_i p_i \in S$ *de donde* $A_i \times_A A_j = A_k$ *para alguna* $k \in I$. *Se denotara por* ι_i^k *al morfismo correspondiente a la proyección. Considere el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} A_k \arrow[rr, "\iota_i^k"] \arrow[dr, "f_k"] \arrow[ddr, "g_k"'] & & A_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "g_i"] \\ & A \arrow[d, dashed, "h"] & \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si $\{g_i\}_{i \in I}$ *es compatibles con* S, *entonces* $g_i \iota_i^k = g_k$. *Por la condición de extensión de* $\{f_i\}_{i \in I}$, *existe una única* $h : A \to B$ *tal que* $hf_i = g_i$. *Con estas observaciones, sean* A *y* $B \in \mathbb{A}$ *y* $S \in \Omega(A)$ *tal que* h_B *satisface la condición de gavilla para* S, *es decir* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(S, h_B) \cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, h_B)$. *Entonces para cada* $x \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(S, h_B)$, *dadas* $f_j \in S(A_j)$ *y* $\iota_j^i : A_i \to A_j$, *se tiene que:*

$$x(f_j \iota_j^i) = xS(\iota_j^i)(f_j) = h_B(\iota_j^i)x(f_j) = x(f_j)\iota_j^i$$

Así las cosas, la familia $\{x(f_i)\}_{f_i \in S}$ *es compatible para la familia* S. *Además por el supuesto existe una única* $e : h_A \to h_B$ *tal que* $x = e\iota_{h_A}^S$ *donde* $\iota_{h_A}^S$ *denota la inclusión de la criba. Como* e *queda determinada por su comportamiento en* 1_A, *entonces para cualquier* $f_i : A_i \to A$ *se tiene que* $x(f_i) = e(1_A)f_i$. *Por lo tanto* S *es una criba epimórfica efectiva. Entonces la topología más fina que hace gavillas a los funtores representables es precisamente la de cribas epimórficas efectivas estables bajo pullback. Estas son conocidas como familias epimórficas estables o universales. Además que estas determinan una topología es inmediato de estas observaciones y de 3.20.*

DEFINICIÓN 3.43. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría y J una topología de Grothendieck. Se dice que:*

- *J es subcanónica si hace gavillas a las pregavillas representables. Equivalentemente si todas sus cribas son epimórficas efectivas estables.*
- *J es canónica si es la topología subcanónica más fina. Equivalentemente si toda criba epimórfica efectiva estable pertenece a J.*

EJEMPLO 3.44. *Recuerde que en el ejemplo 3.5 el problema que se tuvo, fue la existencia de cubiertas que permitiesen perder lo acotado.*
Para cada U abierto en $\mathbb{R}$, $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I} \in J(U)$ si existe una familia $\{f_j : V_j \to U\}_{j=0}^{n} \subseteq \{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ abiertos, tales que para cualquier $i \in I$, $U_i \subseteq V_j$ para algún, $j \in \{0,\dots,n\}$ y $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Es claro que esta familia es una topología de Grothendieck.
Además al considerar el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G(U) \arrow[r] \arrow[dr] & \prod_{f\in S} G(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{g\in f^*(S);f\in S} G(dom(g)) \\ & \prod_{i=0}^{n} G(V_i) \arrow[u, "\prod_{i\in I}\iota_{V_i}"'] & \end{tikzcd}$$

Se tiene que cualquier $\{x_i\} \in \prod_{f\in S} G(U_i)$ que sea igualado, también es igualado desde $\prod_{i=0}^{n} G(v_i)$. Así las cosas, $G(U)$ es igualador, para ese diagrama.
Por tanto, esta topología hace gavilla a las funciones continuas. Note que es una topología mas burda que la usual.

De este ejemplo, se puede concluir que dada G una gavilla y F una subpregavilla de G, es decir si existe $f : F \to G$ monomorfismo entonces F no necesariamente es gavilla. Es inmediato preguntarse si existen condiciones para que F sea gavilla.

PROPOSICIÓN 3.45. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio, F una pregavilla y G una gavilla tal que para cualquier $A \in \mathbb{A}$, $F(A) \subseteq G(A)$. Entonces F es una gavilla si y solo si para cualesquiera $A \in \mathbb{A}$, $x \in G(A)$ y cualquier $S \in J(A)$, $x \in F(A)$ si $G(f)x \in F(B)$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Note que esto es inmediato pues la familia $\{G(f)x\}_{f\in S}$ es una familia compatible para S de elementos de F, pues cada $G(f)x \in F(dom(f))$. Entonces como F es gavilla, existe una única amalgama en $F(A)$. Como x es una amalgama para esta familia, se tiene que $x \in F(A)$.
$\Leftarrow$) Sean $A \in \mathbb{A}$, $S \in J(A)$ y $\{x_f\}_{f\in S}$ familia compatible para S de elementos de F. Entonces $\{x_f\}_{f\in S}$ también es una familia compatible para S de elementos de G. De

esto, existe una única amalgama $x \in G(A)$ para esta familia. Entonces se tiene que $x \in F(A)$ ■

DEFINICIÓN 3.46. *Sea* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio. Se define la categoría de gavillas para el sitio* $Sh(\mathbb{A}, J)$ *como la subcategoría plena de* $\hat{\mathbb{A}}$ *cuyos objetos son gavillas y cuyos morfismos son transformaciones naturales.*

Capítulo 4

Topos de Grothendieck

En esta sección los sitios serán considerados sobre categorías pequeñas.

1. Gavillificación

Dados un sitio $(\mathbb{A}, J)$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$ una pregavilla, el que F sea una gavilla queda determinado por su comportamiento local. Es decir, F es gavilla si para cualesquiera $A \in \mathbb{A}$, $S \in J(A)$ y $\{x_f\}_{f\in S}$ una familia compatible, esta tiene una única amalgama. En particular, dadas R y $S \in J(A)$ cribas, junto con $\theta : R \to F$ y $\eta : S \to F$ transformaciones naturales, que se extiendan a h_A, con $\bar{\theta}$ y $\bar{\eta}$ respectivamente. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d, "\iota_A^R"] \arrow[dr, "\theta"] & \\
R \cap S \arrow[ur, "\iota_R^{R\cap S}"] \arrow[r, "\iota_A^{R\cap S}"] \arrow[dr, "\iota_S^{R\cap S}"'] & h_A \arrow[r, shift left, "\bar{\theta}"] \arrow[r, shift right, "\bar{\eta}"'] & F \\
 & S \arrow[u, "\iota_A^S"] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde ι_S^R denota la inclusión de la criba R en S y en un abuso de la notación, ι_A^R es la inclusión en el funtor h_A. Note que como $J(A)$ es un filtro, entonces $R\cap S \in J(A)$. Si el cuadrado exterior conmuta entonces $\bar{\eta}\iota_A^{R\cap S} = \bar{\theta}\iota_A^{R\cap S}$. Por lo que tanto $\bar{\eta}$ como $\bar{\theta}$ son amalgamas. En este espíritu para asociar a una pregavilla F, una gavilla $a(F)$ estás deberían estar relacionadas. Ahora el diagrama anterior da la intuición de que la gavilla $a(F)$, se puede construir como un colímite. De esta manera si F satisface la condición de gavilla para $R\cap S$, estas son iguales. En esta sección se busca encontrar una gavilla sobre $(\mathbb{A}, J)$ que mejor «aproxime» a la pregavilla F. Note que en la misma situación de arriba, se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(S, F) \arrow[dr, "(\iota_S^{R\cap S})_*"'] & Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F) \arrow[l, "(\iota_A^S)_*"'] \arrow[r, "(\iota_A^R)_*"] \arrow[d, "(\iota_A^{R\cap S})_*"] & Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F) \arrow[dl, "(\iota_R^{R\cap S})_*"] \\
 & Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R\cap S, F) &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos son los inducidos por las restricciones correspondientes. Entonces la existencia de amalgamas únicas, se traduce en que estos morfismos tengan una inversa. Esto último intuye a pensar que $a(F) = \varinjlim_{R \in J(A)} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F)$.
Otra de las propiedades que tienen las gavillas es el cambio de base, es decir si $f : B \to A$, $R \in J(A)$ es una criba y $\theta \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F)$ que se extiende a una de $\bar{\theta} \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$, entonces se tiene el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
f^*(R) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\iota_B"] & R \arrow[d, "\iota_A"] \arrow[dr, "\theta"] & \\
h_B \arrow[r, "f^*"] & h_A \arrow[r, "\bar{\theta}"] & F
\end{tikzcd}$$

Donde el cuadrado de la izquierda es el pullback de R a través de f, del lema 2.30. Entonces $\bar{\theta} f^*$ es una amalgama para θf^*, es decir las amalgamas se tienen que extender. La propiedad anterior, se puede interpretar como que efectivamente $a(F)$ resulte funtorial, es decir, que puede mandar morfismos en morfismos.

Definición 4.1. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio y $F \in \hat{\mathbb{A}}$, una pregavilla. Se define una asignación $L(F) : \mathbb{A}^{op} \to SET$ dada por:*

1. *Para A un elemento de $\mathbb{A}$. Note que dadas S, R y $T \in J(A)$ tales que $S \subseteq R \subseteq T$, se tiene que:*

$$(\iota_R^S)_*(\iota_T^R)_* = (\iota_T^R \iota_R^S)_* = (\iota_T^S)_*$$

Por lo que se tiene un sistema compatible. Por tanto se pone

$$L(F)(A) = \varinjlim_{R \in J(A)} Hom(R, F)$$

Este límite existe pues la categoría de conjuntos tiene todos los colímites. Además lo qe hace esta construcción es relacionar las familias compatibles que coinciden en alguna subcriba. Se denotan por $\iota^R_{L(F)(A)} : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F) \to L(F)(A)$ a las inclusiones del colímite.

2. *Para $f : B \to A$ un morfismo en $\mathbb{A}$. $L(F)(f)$ se pone como el inducido por la propiedad universal del colímite. Así recordando la definición del colímite y el resultado 2.31; dadas S y $R \in J(A)$, tales que $S \subseteq R$, se tiene el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(R,F) \arrow[rr, "(\iota^S_R)_*"] \arrow[dr, "\iota^R_{L(F)(A)}"'] \arrow[ddd, "(f^*)_*"] & & Hom(S,F) \arrow[dl, "\iota^S_{L(F)(A)}"] \arrow[ddd, "(f^*)_*"] \\
& L(F)(A) \arrow[d, dashed, "L(F)(f)"] & \\
& L(F)(B) & \\
Hom(f^*(R),F) \arrow[rr, "(\iota^{f^*S}_{f^*R})_*"] \arrow[ur, "\iota^{f^*R}_{L(F)(B)}"] & & Hom(f^*(S),F) \arrow[ul, "\iota^{f^*S}_{L(F)(B)}"']
\end{tikzcd}$$

donde por 2.31, $(f^*)_*(\iota^S_R)_* = (\iota^{f^*S}_{f^*R})_*(f^*)_*$ *y por definición del colímite se tiene que* $\iota^R_{L(F)(A)} = \iota^S_{L(F)(A)}(\iota^S_R)_*$ *y también que* $\iota^{f^R}_{L(F)(B)} = \iota^{f^*S}_{L(F)(B)}(\iota^{f^*S}_{f^*R})_*$*. Así las cosas, note que:*

$$\iota^{f^*R}_{L(F)(B)}(f^*)_* = \iota^{f^*S}_{L(F)(B)}(f^*)_*(\iota^S_R)_*$$

Así las cosas, la colección $\{\iota^{f^*R}_{L(F)(B)}(f^*)_* : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R,F) \to L(F)(B)\}_{R\in J(A)}$ *es una familia compatible. Por lo que queda definido* $L(F)(f)$ *por el morfismo único que induce la propiedad universal del colímite.*
Note que este morfismo recupera que las amalgamas se «extiendan».

OBSERVACIÓN 4.2.
1. *Para cualquier* A*, los elementos de* $L(F)(A)$ *son clases de equivalencia y serán denotados por* $[\xi]$*. Donde* ξ *es un elemento de* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R,F)$ *para algún* $R \in J(A)$*. Esto es pues las cribas de la topología sobre un elemento* A *de* $\mathbb{A}$*, son una categoría filtrante.*
2. *Dadas* R *y* $S \in J(A)$*, junto con* $\xi \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R,F)$ *y* $\chi \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(S,F)$*, se tiene que* $[\xi] = [\chi]$ *si existe* $T \in J(A)$*, tal que* $T \subseteq R \cap S$ *y* $\xi\iota^T_R = \chi\iota^T_S$*.*

De esta observación, se puede describir $L(F)$ en los morfismos de forma explicita. Dados A y B objetos de $\mathbb{A}$, $[\xi] \in L(F)(A)$ y $f : B \to A$ un morfismo, se tiene que:

$$\begin{aligned}
L(F)(f)([\xi]) &= L(F)(f)\iota^R_{L(F)(A)}(\xi) \\
&= \iota^{f^*R}_{L(F)(B)}(f^*)_*(\xi) \\
&= \iota^{f^*R}_{L(F)(B)}(\xi f^*) \\
&= [\xi f^*]
\end{aligned}$$

En otras palabras, $L(F)(f)([\xi])$, es la clase de equivalencia de la parte superior del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} f^*(R) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, hook, "\iota_B"] & R \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, hook, "\iota_A"] & F \\ h_B \arrow[r, "f^*"] & h_A & \end{tikzcd}$$

Proposición 4.3. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio y $F \in \hat{\mathbb{A}}$ una pregavilla. Entonces L(F) es una pregavilla de conjuntos, es decir, $L(F) \in \hat{\mathbb{A}}$.*

Demostración. Sean A, B y C objetos de $\mathbb{A}$; $g : C \to B$ y $f : B \to A$ morfismos en $\mathbb{A}$.

- Sea $[\xi]$ un elemento de $L(F)(A)$. Entonces:

$$L(F)(1_A)([\xi]) = [\xi 1_A^*] = [\xi]$$

  Por lo que $L(F)(1_A) = 1_{L(F)(A)}$

- Sea $[\xi]$ un elemento de $L(F)(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned} L(F)(g)L(F)(f)([\xi]) &= L(F)(g)[\xi f^*] \\ &= [(\xi f^*)g^*] \\ &= [\xi(fg)^*] \\ &= LF(fg)[\xi] \end{aligned}$$

  Por tanto $L(F)(g)L(F)(f) = L(F)(fg)$

De donde $L(F)$ es una pregavilla. ■

Esta asignación se puede realizar para cada pregavilla, por lo que da intuición que se puede extender a un endofuntor, en cuyo caso falta probar que respeta transformaciones naturales.

Definición 4.4. *Sea $(\mathbb{A}, J)$ un sitio. Se define $L : \hat{\mathbb{A}} \to \hat{\mathbb{A}}$ dado por:*

1. *Para $F \in \hat{\mathbb{A}}$ se pone $L(F)$ como en la asignación anterior.*
2. *Para $\theta : F \to G$ transformación natural y A elemento de $\mathbb{A}$. $L(\theta)_A$ se busca que sea inducido por la propiedad universal de colímite. Para esto, sean $S \subseteq R \in J(A)$ y considere el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
Hom(R,F) \arrow[rr, "(\iota_R^S)_*"] \arrow[dr, "\iota^R_{L(F)(A)}"'] \arrow[ddd, "\theta^*"'] & & Hom(S,F) \arrow[dl, "\iota^S_{L(F)(A)}"] \arrow[ddd, "\theta^*"] \\
& L(F)(A) \arrow[d, dashed, "L(\theta)_A"] & \\
& L(G)(A) & \\
Hom(R,G) \arrow[rr, "(\iota_R^S)_*"] \arrow[ur, "\iota^R_{L(G)(A)}"] & & Hom(S,G) \arrow[ul, "\iota^S_{L(G)(A)}"']
\end{tikzcd}$$

En donde $\theta^*(\iota_R^S)_* = (\iota_R^S)_*\theta^*$ y por construcción del colímite, se tiene que $\iota^R_{L(F)(A)} = \iota^S_{L(F)(A)}(\iota_R^S)_*$ y también $\iota^R_{L(G)(A)} = \iota^S_{L(G)(A)}(\iota_R^S)_*$. De donde:

$$\iota^R_{L(G)(A)}\theta^* = \iota^S_{L(G)(A)}(\iota_R^S)_*\theta^* = \iota^S_{L(G)(A)}\theta^*(\iota_R^S)_*$$

Así las cosas, la colección $\{\iota^R_{L(G)(A)}\theta^* : Hom_{\mathbb{A}}(R,F) \to L(G)(A)\}$ es una familia compatible. Por la propiedad universal del colímite, queda bien definido $L(\theta)$.

De manera más explicita, dados $\theta : F \to G$, A un elemento $\mathbb{A}$ y $[\xi]$ elemento de $L(F)(A)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}
L(\theta)_A([\xi]) &= L(\theta)_A\iota^R_{L(F)(A)}(\xi) \\
&= \iota^R_{L(G)(A)}\theta^*(\xi) \\
&= \iota^R_{L(G)(A)}(\theta\xi) \\
&= [\theta\xi]
\end{aligned}$$

Ahora de esta manera, es inmediato que $L(\theta)$ es una transformación natural. Sean A y $B \in \mathbb{A}$ y $f : A \to B$. Entonces se busca que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
L(F)(A) \arrow[r, "L(\theta)_A"] \arrow[d, "L(F)(f)"'] & L(G)(A) \arrow[d, "L(G)(f)"] \\
L(F)(B) \arrow[r, "L(\theta)_B"] & L(G)(B)
\end{tikzcd}$$

Así dado $[\xi] \in L(F)(A)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} L(G)(f)L(\theta)_A([\xi]) &= L(G)(f)([\theta\xi]) \\ &= [(\theta\xi)f^*] \\ &= [\theta(\xi f^*)] \\ &= L(\theta)_B([\xi f^*]) \\ &= L(\theta)_B L(F)(f)([\xi]) \end{aligned}$$

Por lo tanto $L(\theta)$ es en efecto una transformación natural.

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio. Entonces* L *es un funtor de* $\hat{\mathbb{A}}$ *hacia* $\hat{\mathbb{A}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean F, G y H elementos de $\hat{\mathbb{A}}$, pregavillas.

1. Sea A un elemento de $\mathbb{A}$ y $[\xi]$ un elemento de $L(F)(A)$, entonces:
$$L(1_F)_A([\xi]) = [1_F\xi] = [\xi]$$
De donde $L(1_F) = 1_{L(F)}$
2. Sean $\theta : F \to G$ y $\eta : G \to H$ transformaciones naturales; A un elemento de $\mathbb{A}$ y $[\xi]$ un elemento de $L(F)(A)$.
$$\begin{aligned} L(\eta)_A L(\theta)_A([\xi]) &= L(\eta)_A([\theta\xi]) \\ &= [\eta\theta\xi] \\ &= L(\eta\theta)_A[\xi] \end{aligned}$$
Por lo que $L(\eta)L(\theta) = L(\eta\theta)$

Por lo tanto L es un funtor. ■

En adelante se escribirá LF para denotar $L(F)$, cuando no se preste a confusión. Antes de introducir el siguiente resultado, es conveniente dar una notación.

NOTACIÓN. *Sean* $F \in \hat{\mathbb{A}}$ *una pregavilla y* A *un elemento de* $\mathbb{A}$*. Por el lema de Yoneda,* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F) \cong F(A)$*, así las cosas:*

1. *Para* ξ *un elemento de* $F(A)$*. Se denotará por* $\Phi_\xi \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$ *al elemento único, con el que* ξ *esta en correspondencia, de hecho,* $\xi = (\Phi_\xi)_A(1_A)$
2. *Para* x *un elemento de* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$*. Se denotará por* $\xi_x \in F(A)$ *al elemento único, con el que* x *está en correspondencia, análogamente al inciso anterior,* $x_A(1_A) = \xi_x$

OBSERVACIÓN 4.6.

- *Por el lema de Yoneda, estas asignaciones son inversas una de la otra. Es decir, dados* $\xi \in F(A)$ *y* $x \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$*:*
  1. $\xi_{\Phi_\xi} = (\Phi_\xi)_A(1_A) = \xi$
  2. $(\Phi_{\xi_x})_A(1_A) = \xi_x = x_A(1_A)$ *y como la correspondencia es biyectiva, se tiene que* $x = \Phi_{\xi_x}$
- *Un caso a resaltar es: dados* A *y* $B \in \mathbb{A}$*,* $f \in h_B(A)$ *y* $\beta : h_A \to h_B$
  1. $f^*_A(1_A) = f1_A = f$
  2. $(\beta_A(1_A))^*_A(1_A) = \beta_A(1_A)1_A = \beta_A(1_A)$*, por lo que,* $(\beta_A(1_A))^* = \beta$

  Por lo que $\Phi_f = f^*$ *y* $\xi_\beta = \beta_A(1_A)$

Ahora con lo discutido hasta aquí, se tiene una forma de conectar a F con LF para cada $F \in \hat{\mathbb{A}}$.

OBSERVACIÓN 4.7. *Para cada* $F \in \hat{\mathbb{A}}$*, existe un morfismo canónico* $\ell^F : F \to LF$*. Este esta definido en cada objeto* A *de* $\mathbb{A}$ *como sigue:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, dashed, "\ell^F_A"] \arrow[d, "\Phi"] & LF(A) \\ Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F) \arrow[ur, "\iota^{h_A}_{LF(A)}"'] & \end{tikzcd}$$

De hecho, la regla de correspondencia de ℓ^F se puede hacer explicita. Sean $F \in \hat{\mathbb{A}}$ una pregavilla, A un elemento de $\mathbb{A}$ y $\xi \in F(A)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \ell^F_A(\xi) &= \iota^{h_A}_{LF(A)}(\Phi_\xi) \\ &= [\Phi_\xi] \end{aligned}$$

En un abuso de notación, se denotará por $[\xi]$ a $[\Phi_\xi]$.

LEMA 4.8. *La colección de morfismos* $\{\ell^F : F \to LF\}_{F \in \hat{\mathbb{A}}}$ *define una transformación natural* $\ell : 1_{\hat{\mathbb{A}}} \to L$

DEMOSTRACIÓN. Sean F y G pregavillas y $\theta : F \to G$ una morfismo en $\hat{\mathbb{A}}$. Entonces para cada A objeto de $\mathbb{A}$ se busca que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\ell^F_A} & LF(A) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A} & & \downarrow{\scriptstyle L(\theta)_A} \\ G(A) & \xrightarrow{\ell^G_A} & LG(A) \end{array}$$

Dado ξ elemento de $F(A)$, por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} (\ell^G_A \theta_A)(\xi) &= \ell^G_A(\theta_A(\xi)) \\ &= [\Phi_{\theta_A(\xi)}] \end{aligned}$$

y por el otro, se tiene que:

$$\begin{aligned} (L(\theta)_A \ell^F_A)(\xi) &= L(\theta)_A(\ell^F_A(\xi)) \\ &= L(\theta)_A([\Phi_\xi]) \\ &= [\theta\Phi_\xi] \end{aligned}$$

Ahora note que $(\Phi_{\theta_A(\xi)})_A(1_A) = \theta_A(\xi) = \theta_A((\Phi_\xi)_A(1_A)) = (\theta\Phi_\xi)_A(1_A)$, por lo que se tiene que $\ell^G_A\theta_A = L(\theta)_A\ell^F_A$ y por lo tanto ℓ es una transformación natural. ■

Proposición 4.9. *Sean* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio y* $F \in \hat{\mathbb{A}}$ *una pregavilla:*

1. *Si* F *es separada, entonces* $\ell^F : F \to LF$ *es monomorfismo.*
2. *Si* F *es gavilla, entonces* $\ell^F : F \to LF$ *es un isomorfismo.*

Demostración. 1. Sean A elemento de $\mathbb{A}$ y ξ_θ y ξ_η en $F(A)$, tales que $\ell^F_A(\xi_\theta) = \ell^F_A(\xi_\eta)$. Entonces

$$[\eta] = \ell^F_A(\xi_\eta) = \ell^F_A(\xi_\theta) = [\theta]$$

Donde η y θ son sus correspondientes en $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$. Por definición de $LF(A)$, esta igualdad sucede si existe R criba sobre A, tal que las restricciones a R, coincidan, es decir $\theta|_R = \eta|_R$. Como F es separada y tanto η como θ son amalgamas para la restricción, se tiene que $\eta = \theta$ y por tanto $\xi_\eta = \xi_\theta$.

2. Como F es gavilla, para cada A objeto de $\mathbb{A}$ y R criba sobre A se tiene que

$$(\iota^R_A)_* : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F) \to Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F)$$

es un isomorfismo, es decir, a cada familia compatible, le corresponde una única amalgama. Para cada $R \in J(A)$, se pone

$$f_R : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F) \to Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$$

para la inversa de $(\iota_A^R)_*$, note que $f_{h_A} = 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A,F)}$. Además si $S \subseteq R$ se tiene que $(\iota_R^S)_*(\iota_A^R)_* = (\iota_A^S)_*$. De donde se tiene que:

$$\begin{aligned} f_S(\iota_R^S)_*(\iota_A^R)_* &= f_S(\iota_A^S)_* \\ &= 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A,F)} \\ &= f_R(\iota_A^R)_* \end{aligned}$$

Por lo que $f_S(\iota_R^S)_* = f_R$. Así la familia de morfismos $\{f_R\}_{R\in J(A)}$ induce un morfismo $f : LF(A) \to Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$. Además note que:

$$\begin{aligned} f\iota_{LFA}^{h_A}(\theta) &= f([\theta]) \\ &= f_{h_A}(\theta) \\ &= 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A,F)}(\theta) \\ &= \theta \end{aligned}$$

y por el otro lado se tiene que:

$$\begin{aligned} \iota_{LFA}^{h_A} f([\xi]) &= \iota_{L(F)(A)}^{h_A} f_R(\xi) \\ &= [f_R(\xi)] \end{aligned}$$

Ahora note que

$$\xi = (\iota_A^R)_* f_R(\xi) = f_R(\xi)\iota_A^R$$

y también que $\xi = \xi 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R,F)} = \xi\iota_R^R$ por lo que $[f_R(\xi)] = [\xi]$. Entonces se tiene que $LF(A) \cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F)$. Ahora como $\ell_A^F = \iota_{LFA}^{h_A}\Phi$ y tanto Φ como $\iota_{LFA}^{h_A}$ son isomorfismos, ℓ_A^F también lo es. Por lo tanto ℓ^F es un isomorfismo.

■

El siguiente lema es un resultado técnico, que será de utilidad más adelante.

LEMA 4.10. *Sean $A \in \mathbb{A}$ y $F \in \hat{\mathbb{A}}$ junto con $\theta : h_A \to F$. Entonces para cualquier $B \in \mathbb{A}$ y $g \in h_A(B)$, existe $f : h_A(A) \to h_A(B)$ tal que $f(1_A) = g$. Más aun se tiene que $F(g)\theta_A = \theta_B f$*

DEMOSTRACIÓN. Se pone $f = g_*$ donde para $h \in h_A(A)$, $g_*(h) = hg$. Entonces es claro que $f(1_A) = g_*(1_A) = 1_A g = g$. Además $\theta_B g_*(h) = F(g)\theta_A(h)$ pues θ es transformación natural. ■

La transformación natural ℓ tiene propiedades respecto a como se comporta L respecto a las cribas.

LEMA 4.11. *Sean* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio y* F *una pregavilla sobre* $\mathbb{A}$. *Dados* A *objeto de* $\mathbb{A}$ *y* $R \in J(A)$ *una criba, se tiene que:*

1. *Si* $\theta : R \to F$. *Entonces existe* $\Theta : h_A \to LF$ *tal que el siguiente diagrama conmuta. Más aún, al considerar* $\Phi_{[\theta]} \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, LF)$ *al morfismo correspondiente a* $[\theta]$ *se tiene que* $\Theta = \Phi_{[\theta]}$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, hook, "\iota_A"] & F \arrow[d, "\ell^F"] \\ h_A \arrow[r, "\Theta"] & LF \end{tikzcd}$$

2. *Si* $\Theta : h_A \to LF$. *Entonces existen* $R \in J(A)$ *criba y* $\theta : R \to F$ *tal que el diagrama del inciso 1, conmuta.*
3. *Sean* $\nu : h_A \to F$ *y* $\mu : h_A \to F$ *son morfismos tales que* $\ell^F \nu = \ell^F \mu$. *Entonces el igualador de* μ *y* ν, $R \to h_A$ *es una criba sobre* A . *Más aún* $R \in J(A)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Para esta prueba, recuerde que los elementos de $R(B)$ están en correspondencia biyectiva con $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_B, R)$. Sean B un objeto de $\mathbb{A}$ y $\beta : h_B \to R$ un morfismo. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} h_B \arrow[r, "\beta"] & R \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\iota_A"] & F \arrow[d, "\ell^F"] \\ & h_A \arrow[r, "\Phi_{[\theta]}"] & LF \end{tikzcd}$$

Ahora al evaluar en B y a su vez en 1_B. Ocupando la naturalidad de $\Phi_{[\theta]}$, el resultado 4.10 y que $\beta^*(R) = h_B$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (\Phi_{[\theta]}\iota_A\beta)_B(1_B) &= (\Phi_{[\theta]})_B(\iota_A)_B(\beta_B(1_B)) \\ &= (\Phi_{[\theta]})_B(\beta_B(1_B)) \\ &= (\Phi_{[\theta]})_B(\beta_B(1_B))_*(1_A) \\ &= LF(\beta_B(1_B))(\Phi_{[\theta]})_A(1_A) \\ &= LF(\beta_B(1_B))[\theta] \\ &= [\theta(\beta_B(1_B)^*)] \\ &= [\theta\beta] \end{aligned}$$

Por el otro lado, ocupando la naturalidad de ℓ^F (4.8)y que $\Phi_{1_B} = 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_B, h_B)}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\ell^F\theta\beta)_B(1_B) &= \ell^F_B(\theta\beta)_B(1_B)\\ &= L(\theta\beta)_B\ell^{h_B}_B(1_B)\\ &= L(\theta\beta)_B([\Phi_{1_B}])\\ &= [\theta\beta\Phi_{1_B}]\\ &= [\theta\beta 1_{Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_B,h_B)}]\\ &= [\theta\beta]\end{aligned}$$

Por tanto el diagrama conmuta para cualquier $\beta : h_B \to R$ y para cada $B \in \mathbb{A}$, por lo que lo hace para cualquier elemento de $R(B)$ y $B \in \mathbb{A}$. Así el diagrama que se quería también conmuta.

2. Basta notar que como $\Theta : h_A \to LF$, entonces por el lema de Yoneda, existe $[\theta] \in LF(A)$ con el que Θ esta en correspondencia, a saber $[\theta] = \Theta_A(1_A)$. Así se tiene que $\Theta = \Phi_{[\theta]}$. Por definición de LF, existen $R \in J(A)$ y $\theta : R \to F$ tal que $\iota^R_{LF(A)}(\theta) = [\theta]$. Entonces por el inciso anterior se tiene que

$$\ell^F\theta = \Phi_{[\theta]}\iota_A = \Theta\iota_A$$

Por lo que se tiene el resultado.

3. Note que como R es el igualador de $\nu, \mu : h_A \to F$, entonces $R \to h_A$ es un monomorfismo, entonces se pondrá ι^R_A para denotar a este morfismo. Sean $f : B \to A \in R$ y $g : C \to B$, y considere el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} h_A(B) \arrow[r, shift left, "\nu_B"] \arrow[r, shift right, "\mu_B"'] \arrow[d, "g_*"] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_A(C) \arrow[r, shift left, "\nu_C"] \arrow[r, shift right, "\mu_C"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\nu_C(fg) &= \nu_C g_*(f)\\ &= F(g)\nu_B(f)\\ &= F(g)\mu_B(f)\\ &= \mu_C g_*(f)\\ &= \mu_C(fg)\end{aligned}$$

Esto sucede pues como $f \in R$ que es igualador de μ y ν, $\nu_B(f) = \mu_B(f)$ Por tanto $fg \in R$ por lo que R es criba.

Ahora note como $\ell^F\nu = \ell^F\mu$ al poner $\Theta = \ell^F\nu$, entonces $\Theta : h_A \to LF$. Por el lema de Yoneda, este esta en correspondencia con un elemento de $LF(A)$. A saber, con $\Theta_A(1_A)$. Pero como $\theta = \ell^F\nu$, se tiene que:

$$\Theta_A(1_A) = \ell^F\nu_A(1_A) = [\Phi_{\nu_A(1_A)}] = [\nu]$$

pero también $\Theta = \ell^F\mu$, de donde:

$$\Theta_A(1_A) = \ell^F\mu_A(1_A) = [\Phi_{\mu_A(1_A)}] = [\mu]$$

Entonces se tiene que $[\nu] = [\mu]$, por tanto existe $S \in J(A)$ tal que $\nu\iota_A^S = \mu\iota_A^S$, donde $\iota_A^S : S \to h_A$ es el morfismo inclusión. Por ser R el igualador de ν y μ, existe un único $\iota_R^S : S \to R$, tal que $\iota_A^S = \iota_A^R\iota_R^S$. Así el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dd, "\iota_R^S"'] \arrow[dr, "\iota_A^S"] & & F \arrow[dd, "\ell^F"] \\
& h_A \arrow[ur, shift left, "\mu"] \arrow[ur, shift right, "\nu"'] \arrow[dr, "\Theta"'] & \\
R \arrow[ur, "\iota_A^R"'] & & LF
\end{tikzcd}$$

Ahora como $\iota_A^S = \iota_A^R\iota_R^S$ es monomorfismo, entonces ι_R^S también es monomorfismo. Como $S \in J(A)$ y $S \subseteq R$, entonces $R \in J(A)$. Por tanto se tiene el resultado buscado.

■

Lema 4.12. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio y $F \in \hat{\mathbb{A}}$ una pregavilla. Entonces LF es una pregavilla separada.*

Demostración. Sean A un objeto de $\mathbb{A}$, $\bar{R} \in J(A)$ y $\nu : \bar{R} \to LF$, tal que existen $\mu, \eta : h_A \to LF$ extensiones de ν, es decir, hacen el siguiente diagrama conmutar:

$$\begin{tikzcd}
h_A \arrow[r, shift left, "\eta"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & LF \\
\bar{R} \arrow[u, hook, "\iota_A"] \arrow[ur, "\nu"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $\eta, \mu \in Hom(h_A, LF)$ y dado que $Hom(h_A, LF) \cong LF(A)$, existen $[\xi_\eta], [\xi_\mu] \in LF(A)$ con los cuales están en correspondencia.
Por definición de $LF(A)$, existen S y T $\in J(A)$, tales que $\xi_\eta \in Hom(S, F)$ y $\xi_\mu \in$

$Hom(T,F)$ de los cuales provienen, de hecho como $J(A)$ es un filtro, $S\cap T\in J(A)$, y las restricciones se comportan bien, entonces sin perdida de generalidad y en un abuso de notación se considerará $S=T$. Ahora se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom(S,F) \arrow[rr, "(\iota_S^{S\cap\bar{R}})_*"] \arrow[dr, "\iota^S_{LF(A)}"'] & & Hom(S\cap\bar{R},F) \arrow[dl, "\iota^{S\cap\bar{R}}_{LF(A)}"] \\
& LF(A) &
\end{tikzcd}$$

Se pone $R=\bar{R}\cap S$ y en un abuso de notación, se denotara por ξ_η,ξ_μ y ν a las restricciones a R correspondientes.
Ahora, para probar que $\eta=\mu$ basta con probar que $[\xi_\eta]=[\xi_\mu]$.
Sea B un objeto de $\mathbb{A}$ y $\beta : h_B\to R$ un morfismo en $\hat{\mathbb{A}}$ y considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h_B \arrow[r, "\beta"] & R \arrow[r, shift left, "\xi_f"] \arrow[r, shift right, "\xi_g"'] \arrow[d, "\iota_A"'] \arrow[dr, "\nu"] & F \arrow[d, "\ell^F"] \\
& h_A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & LF
\end{tikzcd}$$

Usando que $\Phi_{[\xi_\eta]}=\eta$ y $\Phi_{[\xi_\theta]}$ y por el inciso 1 del lema 4.11, $\ell^F\xi_\eta=\eta\iota_A$ y $\ell^F\xi_\mu=\mu\iota_A$ de donde el diagrama anterior es conmutativo. Además como $\eta\iota_A=\mu\iota_A$, se tiene que $\ell^F\xi_\eta=\ell^F\xi_\mu$.
Ahora, como $\ell^F(\xi_\eta\beta)=\ell^F(\xi_\mu\beta)$, entonces por el inciso 3 del lema 4.11, existe una criba $R_\beta\in J(B)$ sobre B, tal que las restricciones a R_β coinciden, es decir $(\xi_\eta\beta)|_{R_\beta}=(\xi_\mu\beta)|_{R_\beta}$. Ahora para cada $B\in\mathbb{A}$ y cada $\beta : h_B\to R$. Se elije $R_\beta\in J(B)$ una criba construida como arriba y considere la familia $Crib=\{R_\beta\in J(B)|\beta : h_B\to R\}_{B\in\mathbb{A}}$ de todas ellas.
Se define R' una familia de morfismos en $\mathbb{A}$ como sigue:
Dado $f : C\to A$ morfismo en $\mathbb{A}$, $f\in R'$ si existen $R_\beta\in Crib$ y $g : C\to B$ morfismo tales que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
h_C \arrow[r, "f^*"] \arrow[dd, dashed, "(\hat{f})^*"] & h_A \\
 & R \arrow[u, "\iota_A"] \\
R_\beta \arrow[r, "\iota_B"] & h_B \arrow[u, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

es decir, $f \in R'$ si esta se factoriza por una criba. Se afirma que R' es una criba sobre A. Sean $f : C \to A \in R'$ y $g : D \to C$ un morfismo, considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h_D \arrow[r, "g^*"] \arrow[ddr, dashed, "(\hat{f}g)^*"'] & h_C \arrow[r, "f^*"] \arrow[dd, dashed, "(\hat{f})^*"] \arrow[ddr, "(\hat{f})^*"] & h_A \\
 & & R \arrow[u, "\iota_A"'] \\
 & R_\beta \arrow[r, "\iota_B"] & h_B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

El cual conmuta y satisface la propiedad para fg, entonces $fg \in R'$. Por tanto R' es criba sobre A.
Se tiene que R' es una subcriba de R. Esto se sigue de 4,10 y de que si $f : C \to B \in R'$. Entonces

$$f = f_C^*(1_C) = (\iota_A \beta (\hat{f})^*)_C(1_C) = (\iota_A)_C \beta_C (\hat{f})_C^*(1_C) = \beta_C(\hat{f} 1_C) = \beta_C(\hat{f})$$

y como $\beta : h_B \to R$, entonces $f = \beta_C(\hat{f}) \in R(C)$, por lo que R' es subcriba de R. Más aún para cada $\beta : B \to A$, R_β es subcriba de $\beta^*(R')$, pues dado $f : C \to B$ un morfismo de R_β, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
h_C \arrow[r, "(\beta_C(f))^*"] \arrow[dd, dashed, "h^*"'] \arrow[ddr, "f^*"] & h_A \\
 & R \arrow[u, "\iota_A"] \\
R_\beta \arrow[r, "\iota_B"] & h_B \arrow[u, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

Por lo que $\beta_C(f) \in R'$ de donde $f \in \beta^*(R')$. De esto y del lema 3.31, se tiene que $R' \in J(A)$. Ahora sea $\iota_R : R' \to R$ la inclusión y sea $f : C \to A \in R'$, entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h_C \arrow[r, "f^*"] \arrow[dd, "\hat{f}^*"'] & h_A \arrow[r, shift left, "\eta"] \arrow[r, shift right, "\mu"'] & LF \\
& R \arrow[u, "\iota_A"] \arrow[r, shift left, "\xi_\eta"] \arrow[r, shift right, "\xi_\mu"'] & F \arrow[u, "\ell^F"'] \\
R_\beta \arrow[r, "\iota_B"] & h_B \arrow[u, "\beta"] &
\end{tikzcd}$$

Así las cosas se tiene que las restricciones de ξ_η y ξ_μ coinciden en R'. Para hacer notar esto considere $f : C \to A \in R'$. Entonces existen $\beta : h_B \to R$ y $\hat{f} : h_C \to h_B$ tales que $f = \beta\hat{f}$ y $\hat{f} \in R_\beta$. Así las cosas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\xi_\eta\iota_R(f) =&\xi_\eta\iota_R(\beta\hat{f}) \\
&= \xi_\eta\beta\hat{f} \\
&= \xi_\mu\beta\hat{f} \\
&= \xi_\mu\iota_R(\beta\hat{f}) \\
&= \xi_\mu\iota_R(f)
\end{aligned}$$

De donde, $[\xi_\eta] = [\xi_\mu]$ y así $\eta = \mu$. Por lo tanto LF es una pregavilla separada. ■

LEMA 4.13. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio, F una pregavilla, G una pregavilla separada y $h_1, h_2 : LF \to G$ morfismos de pregavillas, tales que*

$$h_1\ell^F = h_2\ell^F$$

. Es decir si el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\ell^F"] & LF \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & G
\end{tikzcd}$$

Entonces $h_1 = h_2$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que para cualquier $\alpha : h_A \to LF$, se tiene que $h_1\alpha = h_2\alpha$. Por la parte 2 del lema 4.11, existen $R \in J(A)$ y $\theta : R \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
h_A \arrow[r, "\alpha"] & LF \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & G \\
R \arrow[u, "\iota_A"] \arrow[r, "\theta"] & F \arrow[u, "\ell^F"] &
\end{tikzcd}$$

Entonces $h_1\ell^F\theta = h_2\ell^F\theta \in Hom(R,G)$. Más aún, $h_1\alpha$ y $h_2\alpha$ son amalgamas para esta familia. Como G es separada, $h_1\alpha = h_2\alpha$. Por lo tanto $h_1 = h_2$ ■

Proposición 4.14. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio y F una pregavilla separada. Entonces LF es una gavilla.*

Demostración. Basta probar que para cualquier A objeto de $\mathbb{A}$ y $R \in J(A)$, si $\nu : R \to LF$, entonces existe $\mu : h_A \to LF$ tal que $\mu\iota_A^R = \nu$.
Se denotará por R' al pullback de ν y ℓ^F, es decir, $R' = R \times_\nu F$. Entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h_A & \\
R \arrow[u, hook, "\iota_A"] \arrow[r, "\nu"] & LF \\
R' \arrow[u, "\iota_R"] \arrow[r, "\bar{\nu}"] & F \arrow[u, "\ell^F"']
\end{tikzcd}$$

Donde los morfismos desde R', son los inducidos por el pullback. Note que como F es separada, entonces ℓ^F es monomorfismo y así ι_R también. Por construcción, R' es un subfuntor de h_A. Se afirma que $R' \in J(A)$. Para probar esto, se ocupara el carácter local. Sean $\beta : h_B \to R$ y $R'' = h_B \times_\beta R'$. Por construcción, R'' es criba sobre B. Ademas note que $\nu\beta : h_B \to LF$, así por el inciso 2 del lema 4.11, existen, $R''' \in J(B)$ y $\theta : R''' \to F$ tales que $\ell^F\theta = \nu\beta\iota_B$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R''' \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drrr, "\theta"] \arrow[ddr, "\iota_B^{R'''}"'] & & & \\
& R'' \arrow[r, "\bar{\beta}"'] \arrow[d, hook, "\iota_B^{R''}"] & R' \arrow[r, "\bar{\nu}"'] \arrow[d, hook, "\iota_R"] & F \arrow[d, hook, "\ell^F"] \\
& h_B \arrow[r, "\beta"] & R \arrow[r, "\nu"] & LF
\end{tikzcd}$$

Donde $u : R''' \to R''$ es la única inducida por el pullback. Entonces como $\iota_B^{R'''} = \iota_B^{R''} u$, es monomorfismo, se tiene que u es monomorfismo, es decir $R''' \subseteq R''$. Entonces por el carácter local se sigue que $R'' \in J(B)$. Por tanto, por el carácter local, $R' \in J(A)$. Ahora se tiene el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
R' \arrow[r, "\bar{\nu}"] \arrow[d, hook, "\iota_R"] & F \arrow[d, hook, "\ell^F"] \\
R \arrow[d, "\iota_A"] & LF \\
h_A \arrow[ur, dashed, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Donde $\mu : h_A \to LF$ es el morfismo inducido por la parte 1 del lema 4.11.
Ahora, se busca probar que $\nu = \mu\iota$. Para esto, considere un morfismo $\beta : h_B \to R$ y sea $R'' = R' \times_\beta h_B$. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
R'' \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\iota_B"] & R' \arrow[r, "\bar{\nu}"] \arrow[d, hook, "\iota_R"] & F \arrow[d, hook, "\ell^F"] \\
h_B \arrow[r, "\beta"] & R \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\iota_A"] & LF \\
& h_A \arrow[ur, dashed, "\mu"] &
\end{tikzcd}$$

Note que $\ell^F \bar{\nu}\bar{\beta} = \nu\iota_R\bar{\beta} : R'' \to LF$. Ademas se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu\iota_A\beta\iota_B &= \mu\iota_A\iota_R\bar{\beta} \\
&= \ell^F\bar{\nu}\bar{\beta} \\
&= \nu\iota_R\bar{\beta} \\
&= \nu\beta\iota_B
\end{aligned}$$

Por lo que $\nu\beta$ y $\mu\iota_A\beta$ son amalgamas para $\ell^F\bar{\nu}\bar{\beta}$. Como LF es separada, se tiene que $\nu\beta = \mu\iota_A\beta$. Así como esto sucede para cada β, se tiene que $\nu = \mu\iota_A$. Entonces ν tiene una amalgama. La condición de gavilla indica que esta sea única, pero esto es inmediato pues LF es separada. Por lo tanto LF es gavilla ■

DEFINICIÓN 4.15. *Sea* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio. Para cada* F *pregavilla, se le asocia una gavilla* $a(F)$*, dada por* $a(F) := LLF$*. A esta gavilla se le llama la gavilla asociada a* F *o la gavillificacion de* F*.*

LEMA 4.16. *Sean* $(\mathbb{A}, J)$ *un sitio,* $F \in \mathbb{A}$ *una pregavilla,* $G \in Sh(\mathbb{A}, J)$ *una gavilla. Si* $\theta \in Hom(F, G)$ *es una transformación natural, entonces existe una única* $\bar{\theta} \in Hom(LF, G)$*, transformación natural tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\ell^F"'] & G \\ LF \arrow[ur, dashed, "\bar{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Note que como ℓ es transformación natural, se tiene que el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\ell^F"] & G \arrow[d, "\ell^G"] \\ LF \arrow[r, "L(\theta)"] & LG \end{tikzcd}$$

Además, como G es una gavilla, ℓ^G es un isomorfismo, por lo que tiene una inversa, $(\ell^G)^{-1}$.
Así las cosas sea $\bar{\theta} = (\ell^G)^{-1} L(\theta)$, por construcción, esta bien definida y satisface lo deseado.
Note que esta transformación es única pues si $\eta : LF \to G$ es tal que $\theta = \eta \ell^F$. Entonces $\eta \ell^F = \theta = \bar{\theta} \ell^F$ de donde por 4.13, se tiene que $\eta = \bar{\theta}$. ■

OBSERVACIÓN 4.17. *Note que la asignación anterior es inyectiva*

$$A_G^F : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(F, G) \to Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LF, G)$$

COROLARIO 4.18. *Existe una asignación biyectiva entre las familias* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LF, G)$ *y* $Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(F, G)$

DEMOSTRACIÓN. Si $\theta \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LF, G)$ es una transformación natural, entonces $\theta \ell^F \in Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(F, G)$ hace el diagrama en el lema conmutar. Ademas por construcción, θ es la única transformación que lo hace conmutar. ■

LEMA 4.19. *Sea* H *una gavilla. Entonces la asignación* A_H^{-}*, es natural.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F y $G \in \mathbb{A}$ pregavillas y $\theta : F \to G$ una transformación natural. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(G,H) \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "A^G_H"] & Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(F,H) \arrow[d, "A^F_H"] \\
Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LG,H) \arrow[r, "(L\theta)_*"] & Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LF,H)
\end{tikzcd}$$

Sea $\eta \in Hom(G,H)$. Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} A^F_H\theta_*(\eta) &= A^F_H(\eta\theta) \\ &= \overline{\eta\theta} \end{aligned}$$

y por el otro:

$$\begin{aligned} (L\theta)_*A^G_H(\eta) &= (L\theta)_*(\overline{\eta}) \\ &= \overline{\eta}L\theta \end{aligned}$$

Para ver que estos morfismos son iguales considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, "\ell^F"'] \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, "\ell^F"] & \\
LF \arrow[d, "L\theta"'] & G \arrow[dl, "\ell^G"'] \arrow[dr, "\eta"] & LF \arrow[d, "\overline{\eta\theta}"] \\
LG \arrow[rr, "\bar{\eta}"] & & H
\end{tikzcd}$$

Note que por definición: $\eta = \bar{\eta}\ell^G$ y también que $\eta\theta = \bar{\eta}\theta\ell^G$. Ocupando que ℓ es transformación natural, se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{\eta\theta}\ell^F &= \eta\theta \\ &= \bar{\eta}\ell^G\theta \\ &= \bar{\eta}L\theta\ell^F \end{aligned}$$

de donde el diagrama anterior conmuta y por 4.13, $\overline{\eta\theta} = \bar{\eta}L\theta$. Por lo que la asignación es natural. ∎

Lema 4.20. *Sea $F \in \mathbb{A}$ una pregavilla. Entonces la asignación A^F_{-} es natural.*

Demostración. Sean G y H gavillas y $\theta : G \to H$ una transformación natural. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Hom(F,G) \arrow[r, "\theta^*"] \arrow[d, "A^F_G"] & Hom(F,H) \arrow[d, "A^F_H"] \\ Hom(LF,G) \arrow[r, "\theta^*"] & Hom(LF,H) \end{tikzcd}$$

Sea $\xi \in Hom(F,G)$. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned} A^F_H\theta^*(\xi) &= A^F_H\theta\xi \\ &= \overline{\theta\xi} \end{aligned}$$

Por el otro

$$\begin{aligned} \theta^*A^F_G(\xi) &= \theta^*\overline{\xi} \\ &= \theta\overline{\xi} \end{aligned}$$

Para probar la igualdad, considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\ell^F"] & G \arrow[r, "\theta"] & H \\ LF \arrow[ur, "\bar{\xi}"] \arrow[urr, "\overline{\theta\xi}"'] & & \end{tikzcd}$$

Note que como $\xi = \bar{\xi}\ell^F$ y $\theta\xi = \overline{\theta\xi}\ell^F$, se sigue que:

$$\begin{aligned} \overline{\theta\xi}\ell^F &= \theta\xi \\ &= \theta\bar{\xi}\ell^F \end{aligned}$$

Así, el diagrama anterior conmuta y se tiene que, $\theta\bar{\xi}\ell^F = \overline{\theta\xi}\ell^F$. Ocupando 4.13 se sigue que $\theta\bar{\xi} = \overline{\theta\xi}$. Por lo tanto la asignación es natural. ■

Corolario 4.21. *Sea $(\mathbb{A}, J)$ un sitio. Entonces la asignación $A : Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(\_, \_) \to Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(L\_, \_)$ es un isomorfismo natural en ambas entradas.*

Corolario 4.22. *El funtor $a : \hat{\mathbb{A}} \to Sh(\mathbb{A}, J)$ es adjunto izquierdo de la inclusión $\iota_{\hat{\mathbb{A}}} : Sh(\mathbb{A}, J) \to \hat{\mathbb{A}}$*

Por ser un L adjunto izquierdo es inmediato que:

Proposición 4.23. *Sean $\{F_i\}_{i\in I}$ un sistema dirigido de pregavillas y $\varinjlim_{i\in I} F_i$ su colímite. Entonces $L(\varinjlim_{i\in I} F_i) \cong \varinjlim_{i\in I} LF_i$*

Demostración. Sea G una pregavilla y note que:

$$\begin{aligned} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(\varinjlim_{i\in I} LF_i, G) &\cong \varprojlim_{i\in I} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(LF_i, G) \\ &\cong \varprojlim_{i\in I} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(F_i, G) \\ &\cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(\varinjlim_{i\in I} F_i, G) \\ &\cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(L(\varprojlim_{i\in I} F_i), G) \end{aligned}$$

Como esto sucede para cualquier G, se tiene que como funtores

$$Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(L(\varinjlim_{i\in I} F_i), \_) \cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(\varinjlim_{i\in I} LF_i, \_)$$

. Entonces por el lema de Yoneda, $L(\varinjlim_{i\in I} F_i) \cong \varinjlim_{i\in I} LF_i$ ■

Como propiedad adicional de esta adjunción se tiene que:

Lema 4.24. *Sean $\{F_i\}_{i\in I}$ una sistema dirigido de pregavillas finito y $\varprojlim_{i\in I} F_i$ su límite. Entonces $L(\varprojlim_{i\in I} F_i) \cong \varprojlim_{i\in I} LF_i$*

Demostración. Esta prueba ocupa que límites finitos conmutan con colímites filtrantes.
Note que para cada $A \in \mathbb{A}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} L(\varprojlim_{i\in I} F_i)(A) &= \varinjlim_{R\in J(A)} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, \varprojlim_{i\in I} F_i) \\ &\cong \varinjlim_{R\in J(A)} \varprojlim_{i\in I} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F_i) \\ &\cong \varprojlim_{i\in I} \varinjlim_{R\in J(A)} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(R, F_i) \\ &\cong \varprojlim_{i\in I} LF_i(A) \end{aligned}$$

Por tanto $L(\varprojlim_{i\in I} F_i) \cong \varprojlim_{i\in I} LF_i$. Es decir, L conmuta con límites finitos. ■

2. Propiedades de un Topos

Definición 4.25. *Sea $\mathbb{B}$ una categoría. Se dice que $\mathbb{B}$ es un topos de Grothendieck, si existe $(\mathbb{A}, J)$ un sitio pequeño tal que $Sh(\mathbb{A}, J) \cong \mathbb{B}$*

Es importante resaltar que el sitio no necesariamente es único. En adelante se escribirá solamente topos, para un topos de Grothendieck y $\mathscr{X}$ denotará un topos. Para facilitar la lectura, al hablar de un topos se entenderá que se habla sobre la categoría de gavillas $Sh(\mathbb{A}, J)$, a la cual este es isomorfo.

OBSERVACIÓN 4.26.
1. *Es inmediato que cualquier categoría de gavillas sobre un sitio pequeño es un topos.*
2. *Dada una colección $\{F_i\}_{i\in I} \subseteq \hat{\mathbb{A}}$ de pregavillas. Existe un topos tal que $\{F_i\}_{i\in I}$ son gavillas.*

LEMA 4.27. *Sean $(\mathbb{A}, J)$ un sitio, $\mathcal{I} : I \to \hat{\mathbb{A}}$ un diagrama de pregavillas. Si para cada $i \in I$, F_i es gavilla, entonces $\varprojlim_{i\in I} F_i$ también es gavilla. Es decir, $Sh(\mathbb{A}, J)$ es completa.*

DEMOSTRACIÓN. Como cada F_i es gavilla, entonces para cada $A \in \mathbb{A}$ y cada $S \in J(A)$ el siguiente diagrama es un igualador.

$$F_i(A) \longrightarrow \prod_{f\in S} F_i(domf) \rightrightarrows \prod_{g\in f^*(S);f\in S} F_i(domg)$$

Aplicando el limite, se tiene que:

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{i\in I} F_i(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \varprojlim_{i\in I} \prod_{f\in S} F_i(domf) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varprojlim_{i\in I} \prod_{g\in f^*(S);f\in S} F_i(domg) \\
\varprojlim_{i\in I} F_i(A) \arrow[r] & \prod_{f\in S} \varprojlim_{i\in I} F_i(domf) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\cong"] & \prod_{g\in f^*(S);f\in S)} \varprojlim_{i\in I} F_i(domg) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\varprojlim_{i\in I} F_i$ es una gavilla. ■

Es inmediato preguntarse por la cuestion dual, si $Sh(\mathbb{A}, J)$ es cocompleta.

LEMA 4.28. *Sean $\{F_i\}_{i\in I}$ un sistema dirigido y $\varinjlim_{i\in I} F_i$ su colímite. Si cada F_i es una gavilla entonces $\varinjlim_{i\in I} F_i$ también es gavilla. Es decir, $Sh(\mathbb{A}, J)$ es cocompleta.*

DEMOSTRACIÓN. Este lema es un corolario de 4.23. Note que como para cada $i \in I$, F_i es gavilla, entonces $F_i \cong aF_i$. Así por el resultado 4.23 se tiene que:

$$\varinjlim_{i\in I} F_i \cong \varinjlim_{i\in I} a(F_i) \cong a(\varinjlim_{i\in I} F_i)$$

Por tanto $\varinjlim_{i\in I} F_i$ es gavilla. ■

De estos lemas surgen las siguientes observaciones

OBSERVACIÓN 4.29.

- *Dado $f : A \to B$, se tiene que f es monomorfismo si y solo si las proyecciones del pullback de f consigo misma son iguales. Así las cosas por 4.24, se tiene que al aplicar al diagrama la gavillificación, sigue siendo un pullback y se respetan las igualdades, es decir, los monomorfismos de $Sh(\mathbb{A}, J)$ coinciden con los mismos que los de $\hat{\mathbb{A}}$.*
- *Dado $f : A \to B$, se tiene que f es epimorfismo si y solo si las inclusiones al coproducto de f consigo misma son iguales. Así las cosas, se tiene que al aplicar al diagrama la gavillificación, este no necesariamente resulta ser un coproducto y por tanto a f no necesariamente es epimorfismo. Es decir los epimorfismos de $Sh(\mathbb{A}, J)$ y de $\hat{\mathbb{A}}$ no necesariamente coinciden.*

Por la ultima observación, resulta inmediato preguntarse en que condiciones un epimorfismo en $\hat{\mathbb{A}}$ también lo es en $Sh(\mathbb{A}, J)$.

DEFINICIÓN 4.30. *Sea $\theta : F \to G$ un morfismo en $Sh(\mathbb{A}, J)$. Se dice que θ es localmente suprayectiva si para cualesquiera $A \in \mathbb{A}$, y $x \in G(A)$, existe $S \in J(A)$ tal que para cualquier $f : B \to C \in S$, $G(f)(x) \in img(\theta_B)$*

LEMA 4.31. *Sea $\theta : F \to G$ un morfismo en $Sh(\mathbb{A}, J)$. Entonces $\theta : F \to G$ es epimorfismo en $Sh(\mathbb{A}, J)$ si y solo si θ es localmente suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Sean $\theta : F \to G$ un epimorfismo. Se define $H : \mathbb{A}^{op} \to SET$ donde para cada $A \in \mathbb{A}$, $y \in H(A)$ si $y \in G(A)$ y existe $R \in J(A)$ tal que para cualquier $g : B \to A \in R$, $G(g)(y) \in img(\theta_B)$. Por definición H es una subpregavilla de G. Más aún por 3.45, H es una gavilla. Para hacer notar esto sean $A \in \mathbb{A}$ y $x \in G(A)$ tal que para cualquier $S \in J(A)$ y cualquier $f : B \to A$, $G(f)(x) \in H(B)$. Así las cosas sea $S \in J(A)$. Como para cualquier $f : B \to A \in S$, $G(f)(x) \in H(B)$, existe $R_f \in J(B)$ con la propiedad que para cualquier $g : C \to B$, $G(g)G(f)(x) \in img(\theta_C)$. Para cada $f \in S$, considere la criba $fR_f = \{fg | g \in R_f\}$ y a su vez, considere $R = \bigcup_{f \in S} fR_F$,la unión de todas estas. Note que como para cada $f \in S$, $fR_f \subseteq R$, entonces $R_f = f^*fR_f \subseteq f^*(R)$. Por lo que $R \in J(A)$. Además para cada $g : C \to A \in R$, $g = fh$ con $h \in R_f$. Así las cosas, $G(g)(x) = G(fh)(x) = G(h)G(f)(x) \in img(\theta_C)$. De donde $x \in H(A)$ y por tanto H es gavilla.
Ahora como dada $f : B \to A$, se tiene que $G(f)\theta_A = \theta_B F(f)$, entonces θ_A se factoriza por $H(A)$. Al denotar $\iota_G^H : H \to G$ a la inclusión, se tiene que $\iota_G^H \theta = 1_G \theta$. Como θ es epimorfismo, entonces $\iota_G^H = 1_G$. Por lo tanto $H = G$.
$\Leftarrow$) Sean $\alpha, \beta : G \to H$ tales que $\alpha\theta = \beta\theta$. Para cada $A \in \mathbb{A}$ y $x \in G(A)$, sea $S \in J(A)$

tal que para cualquier $f : B \to C \in S$, $G(f)(y) \in img(\theta_B)$. Entonces para cada $f \in S$, se tiene que $H(f)\alpha_A(y) = \alpha_B G(f)(y) = \beta_B G(f)(y) = H(f)\beta_A(y)$. Entonces para cada $f : B \to A \in S$ sea $x_f = H(f)\alpha_A(y) = H(f)\beta_A(y)$. Así $\{x_f\}_f \in S$ es una familia compatible para S de elementos de H. Como H es gavilla y existe una única amalgama $x \in H(A)$. Como $\alpha_A(y)$ y $\beta_A(y)$ satisfacen la condición, son iguales. Esto no dependió de la elección de A ni de x, se tiene que $\alpha = \beta$. ■

Definición 4.32. *Sea $\mathbb{A}$ categoría con limites finitos, A y R objetos de $\mathbb{A}$ y $a, b : R \to A$ un par de morfismos en $\mathbb{A}$. Se dice que $(a, b) : R \to A \times A$ es una relación de equivalencia si satisface:*

1. *$(a, b) : R \to A \times A$ es monomorfismo*
2. *La diagonal $\Delta : A \to A \times A$ se factoriza por (a, b).*
3. *Existe un morfismo $\tau : R \to R$ tal que $a\tau = b$ y $b\tau = a$*
4. *Si el diagrama es un pullback:*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & R \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ R & \xrightarrow{b} & A \end{array}$$

   Entonces $(ap, bq) : T \to A \times A$ se factoriza por (a, b)

Ejemplo 4.33. 1. *Sea X un conjunto y $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia en el sentido conjuntista. Considere $\pi_1^X, \pi_2^X : R \to X$ las proyecciones canónicas. Entonces $\iota_X : R \to X \times X$ es una relación de equivalencia.*

   a) *Note que por ser una inclusión, ι_X es un monomorfismo.*

   b) *Por ser R reflexiva, entonces la diagonal, Δ es subconjunto de R. Por lo que se factoriza por ι_X.*

   c) *Como R es simétrica, entonces la función $\tau : R \to R$ tal que $\tau(x, y) = (y, x)$ está bien definida. Así por construcción, se tiene que $\pi_1^X \tau = \pi_2^X$ y que $\pi_2^X \tau = \pi_1^X$.*

   d) *Sean $p, q : T \to R$ como en el inciso 4 de la definición. Como T es un pullback, $p = \pi_1^R$ y $q = \pi_2^R$ las proyecciones. Entonces*

$$\begin{aligned} T &= \{((x, y), (x', y')) \in R \times R | \pi_2^X(x, y) = \pi_1^X(x', y')\} \\ &= \{((x, y), (x', y')) | y = x'\}. \end{aligned}$$

Note que $\pi_1^X \pi_1^R((x,y),(x',y')) = \pi_1^X(x,y) = x$ *y* $\pi_2^X \pi_2^R((x,y),(x',y')) = y'$. *como* R *es transitiva, este morfismo se factoriza por* R.
De este ejemplo se destaca el nombre de relación de equivalencia.

2. *Sean* $f : A \to B$ *y* $eq : Eq(f) \to A$ *el igualador de* f *consigo misma. Esto induce un morfismo,* $R : Eq(f) \to A \times A$. *Entonces* R *es una relación de equivalencia.*

   a) *Es un monomorfismo por ser inducida por monomorfismos.*

   b) *La diagonal* Δ *se factoriza a través de* R *pues* $f(a) = f(a)$ *para cualquier* $a \in A$.

   c) *Para este inciso, note que* $R = (eq, eq)$ *entonces el morfismo* $\tau = 1_{Eq(f)}$.

   d) *De la misma manera que en el inciso anterior, el morfismo se factoriza por* R *pues es el dado por el pullback.*

DEFINICIÓN 4.34. *Sea* $(a,b) : R \to A \times A$ *una relación de equivalencia. Se dice que* (a,b) *es efectiva si* (a,b) *es el igualador de un par de morfismos.*

LEMA 4.35. *Toda relación de equivalencia en un topos,* $\mathscr{X}$, *es efectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $R, F \in \mathscr{X}$ junto con $a, b : R \to F$ transformaciones naturales, tales que (a,b) es una relación de equivalencia. Para cada A elemento de $\mathbb{A}$, $(a,b)_A : R(A) \to F(A) \times F(A)$ es una relación de equivalencia en SET. Así las cosas se define $G(A) = F(A)/R(A)$ el cociente dado por la relación. Note que de hecho $F(A)/R(A)$ es el colímite del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
R(A) & \xrightarrow{a} & F(A) \\
\big\downarrow b & & \big\downarrow \iota_{G(A)}^{F(A)} \\
F(A) & \xrightarrow{\iota_{G(A)}^{F(A)}} & G(A)
\end{array}$$

Además si $f : B \to A$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
& R(B) \arrow[rr, "b_B"] \arrow[dl, "a_B"'] \arrow[dd] & & F(B) \arrow[dl, "\iota^{FB}_{GB}"] \arrow[dd] \\
F(B) \arrow[rr, "\iota^{FB}_{GB}"'] \arrow[dd] & & G(B) \arrow[dd, dashed] & \\
& R(A) \arrow[rr] \arrow[dl, "a_A"'] & & F(A) \arrow[dl, "\iota^{FA}_{GA}"] \\
F(A) \arrow[rr, "\iota^{FA}_{GA}"'] & & G(A) &
\end{tikzcd}$$

Donde los morfismos verticales son los correspondientes a cada gavilla. Por lo que por la propiedad universal del colimite, queda definida $G(f)$. Por lo tanto $G \in \hat{\mathbb{A}}$. Por el lema 4.28 se tiene que $a(G)$ es el colímite para el mismo diagrama que G. Ahora, note que $R \cong F \times_G F$ y por tanto se tiene que

$$R \cong a(R) \cong a(F \times_G F) \cong a(F) \times_{a(G)} a(F) \cong F \times_{a(G)} F$$

Por lo que R es una relación de equivalencia efectiva. ∎

Definición 4.36. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría con pullbacks.*

- *Si $\mathbb{A}$ tiene objeto inicial, $\emptyset$, y $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de objetos de $\mathbb{A}$, que tienen coproducto, $\coprod_{i\in I} A_i$. Se dice que $\coprod_{i\in I} A_i$ es un coproducto disjunto si satisface:*
  1. *Los morfismos canónicos $\{\iota_j : A_j \to \coprod_{i\in I} A_i\}_{j\in I}$ son monomorfismos.*
  2. *Para cualesquiera $j, k \in I$ distintos, el pullback $A_j \times_{\coprod A_i} A_k \cong \emptyset$ es el objeto inicial.*
- *Se dice que $\mathbb{A}$ tiene coproductos disjuntos si cualquier $\{A_i\}_{i\in I}$, familia de objetos de $\mathbb{A}$, tienen un coproducto disjunto.*

Lema 4.37. *Los coproductos en un topos, $\mathscr{X}$, son disjuntos.*

Demostración. Sean F y $G \in \mathscr{X}$ con coproducto $F \coprod G$ y $F \times_{F \coprod G} G$ el pullback a través del coproducto. Entonces para cada $A \in \mathbb{A}$ se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \times_{F\coprod G} G(A) \arrow[r, "\pi_G"] \arrow[d, "\pi_F"] & G(A) \arrow[d, "\iota^G_{F\coprod G}"] \\
F(A) \arrow[r, "\iota^F_{F\coprod G}"] & F(A)\coprod G(A)
\end{tikzcd}$$

Ahora como en SET, el coproducto es la unión ajena y tanto $(\iota^F_{F\coprod G})_A$ como $(\iota^G_{F\coprod G})_A$ son monomorfismos. Entonces $F(A) \times_{F\coprod G} G(A) \cong 0$. Es decir puntualmente, el coproducto es disjunto. Así las cosas para cada $F \times_{F\coprod G} G \cong \emptyset$ y las inclusiones son monomorfismos. Ahora basta notar que $F \times_{F\coprod G} G \cong a(F) \times_{F\coprod G} a(G) \cong a(F \times_{F\coprod G} G) \cong a(\emptyset) \cong \emptyset$. Por tanto los coproductos son disjuntos en $\mathscr{X}$. ■

Definición 4.38. *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia dirigida de objetos de $\mathbb{A}$ con colímite A. Se dice que el colímite A es universal si para cualquier $f : B \to A$, se tiene que B es un colímite para $\{B \times_f A_i\}_{i\in I}$*

Lema 4.39. *Sean F y G en un topos $\mathscr{X}$, un morfismo $f : F \to G$ y una familia dirigida $\{G_i\}_{i\in I}$ de objetos de $\mathscr{X}/G$. Entonces $\varinjlim_{i\in I}(F \times_f G_i) \cong F \times_f \varinjlim_{i\in I} G_i$. Es decir, los colímites en $\mathscr{X}$ son universales.*

Demostración. Para cada $A \in \mathbb{A}$, se tiene que:

$$F(A) \times_f \varinjlim_{i\in I} G_i(A) \cong \varinjlim_{i\in I}(F(A) \times_f G_i(A))$$

. Esto es pues el pullback en SET tiene adjunto derecho. Asi las cosas $\varinjlim_{i\in I}(F \times_f G_i) \cong F \times_f \varinjlim_{i\in I} G_i$ es un isomorfismo de pregavillas. Ahora aplicando la gavillificación, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varinjlim_{i\in I}(F \times_f G_i) &\cong a(\varinjlim_{i\in I}(F \times_f G_i)) \\
&\cong a(F \times_f \varinjlim_{i\in I} G_i) \\
&\cong a(F) \times_f a(\varinjlim_{i\in I} G_i) \\
&\cong F \times_f (\varinjlim_{i\in I} a(G_i)) \\
&\cong F \times_f \varinjlim_{i\in I} G_i
\end{aligned}$$

De donde se tiene el isomorfismo en $\mathscr{X}$. Por tanto los colímites en $\mathscr{X}$ son universales. ■

Se recuerda que un morfismo f es un epimorfismo efectivo si f es el coigualador de las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : A \times_f A \to A$, como se vio en 3.14.

LEMA 4.40. *Dado un pullback en un topos $\mathscr{X}$*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & A \arrow[d, "f"] \\ B' \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

Si f es un epimorfismo efectivo, entonces f' también

DEMOSTRACIÓN. Como f es epimorfismo efectivo, f es el coigualador de las proyecciones $\pi_1, \pi_2 : A \times_f A \to A$. Entonces el siguiente diagrama es tanto un pullback, como un pushout:

$$\begin{tikzcd} A \times_f A \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ahora al considerar el pullback a través de g, se tiene que el siguiente es un pullback:

$$\begin{tikzcd} B \times_g (A \times_f A) \arrow[r, "\bar{\pi_1}"] \arrow[d, "\bar{\pi_2}"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd}$$

esto pasa pues, $B' \cong B' \times_g B$ y $A' \cong B' \times_g A$. Además B es colímite pues f es epimorfimso efectivo. De donde B' es el colímite del pullback, por el lema 4.39. Por lo tanto f' es epimorfismo efectivo. ■

DEFINICIÓN 4.41. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría. Se dice que $\mathbb{A}$ es un pretopos si satisface:*

1. *$\mathbb{A}$ tiene limites finitos.*
2. *Toda relación de equivalencia en $\mathbb{A}$ es efectiva.*
3. *$\mathbb{A}$ tiene coproductos finitos y disjuntos.*
4. *Los epimorfismos efectivos son estables bajo pullback.*
5. *Los coproductos finitos son preservados bajo pullback.*

TEOREMA 4.42. *Todo topos es un pretopos.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es inmediato por los lemas anteriores. ■

De hecho se puede generalizar este resultado.

TEOREMA 4.43. *Sea $\mathbb{A}$ un pretopos y $\mathbb{B}$ una subcategoría de $\mathbb{A}$ plena. Si la inclusión $i : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ tiene un adjunto izquierdo que preserva limites finitos, entonces $\mathbb{B}$ es un pretopos.*

Así, dado un sitio $(\mathbb{A}, J)$ y aplicar este resultado a $\hat{\mathbb{A}}$, se tiene que $Sh(\mathbb{A}, J)$ es un pretopos. En virtud del lema 4.42, resulta inmediato preguntarse si todo pretopos es un topos, la respuesta es negativa. Un ejemplo de esto es la categoría de conjuntos finitos. Además dada una categoría, el decidir si esta no un topos, es posible refutando el que esta sea un pretopos. Esto en general puede no ser de gran ayuda, pero resulta inmediato preguntarse si existe caracterización interna de la categoría para que esta sea un topos. En este espíritu, en la siguiente sección se dará una propiedad de gran interés, ya que será clave en la caracterización interna.

3. Familias Generadoras

El objetivo de esta sección es probar que los topos tienen una familia de generadores en el siguiente sentido:

DEFINICIÓN 4.44. *Sean $\mathbb{A}$ categoría y $\mathcal{G}$ una familia de objetos de $\mathbb{A}$. Se dice que $\mathcal{G}$ es una familia generadora de $\mathbb{A}$ si para cualesquiera A y $B \in \mathbb{A}$ y cualquier par de morfismos $f, g : A \to B$ distintos, existe $G \in \mathcal{G}$ y $h : G \to A$ tal que $fh \neq gh$.*

Para esto, primero se probará que $\mathbb{A}$ tiene una familia generadores y luego se asociara a esta una familia de gavillas que también generen. Se recuerda que para una categoría localmente pequeña, hay una familia de pregavillas distinguidas, a saber las representables. Estás satisfacen una propiedad particular, a saber, dado A un objeto de $\mathbb{A}$ y F una pregavilla:

$$Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, F) \cong F(A)$$

Esto da intuición que la familia de representables genera, de hecho, es inmediato al recordar que:

LEMA 4.45. *Sean F y $G \in \hat{\mathbb{A}}$ un par de pregavillas y $\eta, \theta : F \to G$ un par de transformaciones naturales. Entonces $\eta = \theta$ si y solo si para cualquier $A \in \mathbb{A}$, $\theta_A = \eta_A$*

PROPOSICIÓN 4.46. *La colección de pregavillas representables* $\{h_A | A \in \mathbb{A}\}$ *es una familia de generadores en* $\hat{\mathbb{A}}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F y $G \in \hat{\mathbb{A}}$ y $\theta, \eta : F \to G$ transformaciones naturales distintas. Note que $\theta \neq \eta$ si y solo si existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $\theta_A \neq \eta_A$. Ahora, como tanto $F(A)$ como $G(A) \in SET$, se tiene que θ_A y η_A son funciones. Por lo que son distintas si y solo si existe $x \in A$ tal que $\theta_A(x) \neq \eta_A(x)$. Por el lema de Yoneda, esto es equivalente a que exista $\Phi_x : h_A \to F$ tal que $\theta\Phi_x \neq \theta\Phi_x$. Por lo que $\{h_A | A \in \mathbb{A}\}$ es una familia de generadores. ■

Esta prueba, da sospecha que una pregavilla queda determinada por los morfismos desde la familia de generadores. La construcción de esto es conocida como «la categoría de elementos». En la literatura se pueden encontrar 2 definiciones, que resultan ser equivalentes, en este trabajo se mencionarán ambas.

DEFINICIÓN 4.47. *Sea* $F \in \hat{\mathbb{A}}$ *una pregavilla. Se define la categoría de gavillas de* F*, denotada por* $\int_C F$ *como sigue:*

- *Los objetos de* $\int_{\mathbb{A}} F$ *son parejas* (A, α)*, donde* $A \in \mathbb{A}$ *y* $\alpha : h_A \to F$*.*
- *Para* (A, α) *y* (B, β) *elementos de* $\int_{\mathbb{A}} F$*, los morfismos entre ellos son:*
$$Hom_{\int_{\mathbb{A}} F}((A, \alpha), (B, \beta)) = \{f : A \to B | \alpha = \beta f^*\}$$

La otra definición que se puede encontrar en la literatura es:

- Los objetos de $\int_{\mathbb{A}} F$ son parejas (A, a) tal que $a \in F(A)$.
- Para (A, a) y $(B, b) \in \int_{\mathbb{A}} F$, los morfismos entre ellos son:
$$Hom_{\int_{\mathbb{A}} F}((A, a), (B, b)) = \{f : A \to B | a = F(f)(b)\}$$

Note que estas definiciones son equivalentes al notar que $Hom_{\mathbb{A}}(h_A, F) \cong F(A)$, así $(A, \alpha : h_A \to F)$ esta en correspondencia con $(A, \alpha_A(1_A))$ y equivalentemente (A, a) esta en correspondencia con (A, Φ_a). Además recordando 4.10, los morfismos desde representables quedan determinados por la identidad correspondiente, de donde si $\alpha = f^*\beta$, entonces:

$$\alpha_A(1_A) = \beta_A f_A^*(1_A) = \beta_A(f) = \beta(1_A f) = \beta_A f_*(1_A) = F(f)\beta_B(1_B)$$

Por lo que se tiene la equivalencia en las definiciones. De hecho es inmediato que:

LEMA 4.48. *Sean* F *y* G *pregavillas y* $\theta : F \to G$ *una transformación natural. Entonces* θ *induce un funtor* $\int_{\mathbb{A}} \theta : \int_{\mathbb{A}} F \to \int_{\mathbb{A}} G$*.*

Demostración. La asignación esta definida como:

- Para $(A,\alpha) \in \int_{\mathbb{A}} F$, $\int_{\mathbb{A}} \theta(A,\alpha) = (A, \theta\alpha)$
- Para $f : (A,\alpha) \to (B,\beta)$ un morfísmo en $\int_{\mathbb{A}} F$, $\int_{\mathbb{A}} \theta(f) = f$

Es inmediato que es un funtor. ∎

Además al considerar los funtores:

1. El funtor que olvida, $U_F : \int_{\mathbb{A}} F \to \mathbb{A}$, tal que:
   - Para $(A,\alpha) \in \int_{\mathbb{A}} F$, $U_F(A,\alpha) = A$.
   - Si $f : (A,\alpha) \to (B,\beta)$, $U_F(f) = f$.
2. El encaje de Yoneda, $h\_ : \mathbb{A} \to \hat{\mathbb{A}}$ tal que:
   - Para $A \in \mathbb{A}$, $h\_(A) = h_A$.
   - Para $f : A \to B$, $h\_(f) = f^*$
3. Se pone $\mathfrak{P}_F$ para denotar la composición h_U_F, es decir $\mathfrak{P}_F(A,\alpha) = h_A$ y para $f : (A,\alpha) \to (B,\beta)$, $\mathfrak{P}(f) = f^*$

Proposición 4.49. *Sea $F \in \hat{\mathbb{A}}$ una pregavilla. Entonces* $F = \varinjlim_{\int_{\mathbb{A}} F} \mathfrak{P}_F$

Demostración. Primero note que si $f : (A,\alpha) \to (B,\beta) \in \int_{\mathbb{A}} F$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} h_A \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & h_B \arrow[dl, "\beta"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Por lo que la familia

$$\{\alpha : \mathfrak{P}_F(A,\alpha) \to F | (A,\alpha) \in \int_{\mathbb{A}} F\}$$

es una familia compatible. Ahora para probar que esta es universal, suponga que existe $G \in \hat{\mathbb{A}}$ y una familia de morfismos

$$\{\theta_{(A,\alpha)} : \mathfrak{P}_F(A,\alpha) \to G | (A,\alpha) \in \int_{\mathbb{A}} F\}$$

tal que si $f : (A, \alpha) \to (B, \beta) \in \int_{\mathbb{A}} F$, entonces $\theta_{(A,\alpha)} = \theta_{(B,\beta)} f^*$. Así las cosas, se define $\Theta : F \to G$ tal que

$$\Theta_A(x) = (\theta_{(A,\Phi_x)})_A(1_A)$$

Donde $\theta_{(A,\Phi_x)} : h_A \to G$ es el morfismo asociado a $\mathfrak{P}_F(A, \Phi_x)$ (recordando que Φ_x es el morfismo asociado a x por el lema de Yoneda). Primero se probará que Θ es transformación natural. Para esto sean A y $B \in \mathbb{A}$ y $f : A \to B$. Ahora se quiere probar que $G(f)\Theta_B = \Theta_A F(f)$. Sea $x \in F(B)$, entonces $(B, \Phi_x) \in \int_{\mathbb{A}} F$, de donde por 4.10:

$$\begin{aligned} F(f)(x) &= F(f)(\Phi_x)_B(1_B) \\ &= (\Phi_x)_A f_*(1_B) \\ &= (\Phi_x)_A(f) \\ &(\Phi_x)_A f_A^*(1_A) \\ &(\Phi_{F(f)(x)})_A(1_A) \end{aligned}$$

Por lo que por un lado, se tiene que:

$$\Theta_A F(f)(x) = \Theta_A((\Phi_{F(f)(x)})_A(1_A)) = (\theta_{(A,\Phi_{F(f)(x)})})_A(1_A)$$

Por el otro lado, como $\Theta_B(x) = (\theta_{(B,\Phi_x)})_B(1_B)$ y ocupando 4.10:

$$\begin{aligned} G(f)(\theta_{(B,\Phi_x)})_B(1_B) &= (\theta_{(B,\Phi_x)})_A(f_*)_A(1_B) \\ &= (\theta_{(B,\Phi_x)})_A(f) \\ &= (\theta_{(B,\Phi_x)})_A f_A^*(1_A) \\ &= (\theta_{(A,\Phi_{F(f)(x)})})_A(1_A) \end{aligned}$$

De donde $G(f)\Theta_B(x) = (\theta_{(A,\Phi_{F(f)(x)})})_A(1_A)$. Por lo tanto $\Theta_A F(f) = G(f)\Theta_B$ y así Θ es transformación natural. Para probar que es única suponga que existe $\eta : F \to G$ tal que $\theta_{(A,\alpha)} = \eta\alpha$. Sean $A \in \mathbb{A}$ y $x \in F(A)$. Entonces $(A, \Phi_x) \in \int_{\mathbb{A}} F$. Así las cosas, se tiene que:

$$\begin{aligned} \eta_A(x) &= \eta_A(\Phi_x)_A(1_A) \\ &= \theta_{(A,\Phi_x)}(1_A) \\ &= \Theta_A(\Phi_x)_A(1_A) \\ &= \Theta_A(x) \end{aligned}$$

Entonces $\Theta = \eta$ y así el morfismo es único. Por lo tanto $F = \varinjlim_{\int_{\mathbb{A}} F} \mathfrak{P}_F$ ■

De esta construcción se sigue que:

COROLARIO 4.50. *Cualquier pregavilla $F \in \hat{\mathbb{A}}$ es colímite de pregavillas representables.*

Ahora, recordando que a preserva colímites, el siguiente resultado es inmediato:

LEMA 4.51. *Sean F una gavilla y $G = \{ah_A\}_{A\in\mathbb{A}}$ la familia de gavillas asociadas a las pregavillas representables. Entonces F es colímite de $\{ah_A\}_{A\in\mathbb{A}}$*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es una aplicación de lo discutido anteriormente y de las propiedades de la adjunción.

$$F \cong a\iota_{\hat{\mathbb{A}}}F \cong a(\varinjlim_{\int_{\mathbb{A}} F} \mathfrak{P}_F) \cong a(\varinjlim_{\int_{\mathbb{A}} F} h_A) \cong \varinjlim_{\int_{\mathbb{A}} F} a(h_A)$$

■

COROLARIO 4.52. *La familia $\{ah_A\}_{A\in\mathbb{A}}$ es una familia de generadores de $Sh(A, J)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean F y G un par de gavillas, junto con $\nu, \eta : F \to G$ morfismos de gavillas. Suponga que para cualquier $A \in \mathbb{A}$ y cualquier $\alpha : h_A \to F$, se tiene que $\nu\alpha = \eta\alpha$. Note que si $f : (A, \alpha) \to (B, \beta) \in \int_{\mathbb{A}} F$, entonces $\nu\alpha = \nu\beta f^*$, por lo que la colección $\{\nu\alpha : h_A \to G | (A, \alpha) \in \int_{\mathbb{A}} F\}$ es una familia compatible, por lo que existe un único morfismo $\theta : F \to G$ tal que $\nu\alpha = \theta\alpha$. Pero tanto ν como η satisfacen esto, por lo que $\nu = \eta$. ■

Ahora note que si F es una gavilla, por la gavillificación a, se tiene que:

$$F(A) \cong (\iota_{\hat{\mathbb{A}}}F)(A) \cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(h_A, \iota_{\hat{\mathbb{A}}}F) \cong Hom_{Sh(\mathbb{A},J)}(a(h_A), F)$$

Por lo que esta caracterización de generadores que se tenía en $\hat{\mathbb{A}}$, también se tiene en $Sh(\mathbb{A}, J)$.

Capítulo 5

El Teorema de Giraud

En este capítulo se dará una caracterización de los topos en propiedades internas de la categoría.

DEFINICIÓN 5.1. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría. Se dice que $\mathbb{A}$ es una categoría de Giraud si satisface:*

Gir1) $\mathbb{A}$ *tiene limites finitos.*

Gir2) Toda relación de equivalencia en $\mathbb{A}$ *es efectiva.*

Gir3) $\mathbb{A}$ *tiene coproductos pequeños y disjuntos.*

Gir4) Los epimorfismos efectivos son estables bajo pullback.

Gir5) Los coproductos se preservan bajo pullback.

Gir6) Existe $\mathcal{G}$ *un conjunto generador de* $\mathbb{A}$.

Note que por 4.42 y 4.52 todo topos es una categoría de Giraud. El resto de este capítulo, sera probar que el reciproco es cierto, este resultado es conocido como el teorema de Giraud. Para probarlo serán de utilidad algunas proposiciones previas.

OBSERVACIÓN 5.2. *Sin perdida de generalidad, el conjunto generador, $\mathcal{G}$, puede ser pensado como la subcategoría plena de $\mathbb{A}$ cerrada bajo límites finitos que genera a $\mathbb{A}$. Esto pues siempre se puede considerar la categoría que genera una familia de objetos de $\mathbb{A}$ y como los límites son finitos, la categoría seguirá siendo conjunto.*

LEMA 5.3. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría de Giraud y $\mathcal{G}$ una subcategoría plena, cerrada bajo limites finitos. Entonces*

1. *Para cada $A \in \mathcal{G}$, se define la colección $J(A)$ de familias de morfismos de $\mathcal{G}$, tal que $\{f_i : A_i \to A\} \in J(A)$ si es una familia epimorfica. Entonces J es una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{G}$. Al sitio generado se le denotara por $Sh(\mathcal{G})$*

2. *Para cada $A \in \mathbb{A}$, la pregavilla representable h_A es gavilla en $Sh(\mathcal{G})$.*
3. *Sea $\{f_i : A_i \to A\}$ una familia epimorfica en $\mathbb{A}$. Entonces el morfismo inducido $\coprod h_{A_i} \to h_A$ es un epimorfismo efectivo en $Sh(\mathcal{G})$*

Demostración. 1. Como se vio en 3.42, esta es una topología.

2. Sean $A \in \mathbb{A}$ y $B \in \mathcal{G}$. Considere $\{f_i : B_i \to B\} \in J(B)$. Ahora note que
$$\coprod_{i\in I} B_i \times_B \coprod_{j\in I} B_j \cong \coprod_{i,j\in I} (B_i \times_B B_j)$$
y que $\coprod_{i\in I} Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(B_i, A) \cong Hom_{\hat{\mathbb{A}}}(\coprod_{i\in I} B_i, A)$. Además como $\coprod B_i \to B$ es un epimorfismo efectivo, entonces se tiene que el siguiente diagrama es un igualador:
$$\textstyle\coprod_{i\in I} B_i \times_B \coprod_{j\in I} B_J \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \coprod_{i\in I} B_i \xrightarrow{f} B$$
Por lo que al aplicar la pregavilla, se tiene que:
$$h_A(B) \longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} h_A(B_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} h_A(B_i \times_B B_j)$$
es un igualador. Por lo tanto h_A es una gavilla en $Sh(\mathcal{G})$.

3. Basta probar que es un epimorfismo, para esto se ocupara 4.31. Sean $B \in \mathbb{A}$ y $g \in h_A(B)$. Como $\{f_i\}$ es una cubierta, entonces $\coprod_{i\in I} A_i \to A$ es un epimorfismo efectivo en $\mathbb{A}$. Entonces la familia de proyecciones $\{p^i_B : A_i \times_A B \to B\}$ es una cubierta en $\mathbb{A}$. Como $\mathcal{G}$ genera a $\mathbb{A}$, para cada $i \in I$, cada $A_i \times_A C$ admite una cubierta $\{g^i_j : C^i_j \to A_i \times_A B\}_{j\in J_i}$, tal que $C^i_j \in \mathcal{G}$. Entonces las composiciones $\{p^i_B g^i_j : C^i_j \to A\}$ es una cubierta, pues composición de epimorfismos efectivos, es epimorfismo efectivo. Considere el siguiente diagrama conmutativo:
$$\begin{tikzcd} C^i_j \arrow[r, "g^i_j"] & A_i \times_A B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p^i_B"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A_i \arrow[r, "f_i"] & A \end{tikzcd}$$
Entonces se tiene que:
$$h_A(p_B g^i_j)(g) = g p_B g^i_j = f p^i_B g^i_j = f^*_{C^i_j}(g^i_j p^i_B)$$
por lo que $h_A(p_B g^i_j)(g) \in img(f^*_{C^i_j})$ Así las cosas $\coprod h_{A_i} \to h_A$ es un epimorfismo efectivo en $Sh(\mathcal{G})$.

■

COROLARIO 5.4. *En las mismas hipótesis del lema anterior, la aplicación* $h\_ : \mathbb{A} \to Sh(\mathcal{G})$ *es fiel, plena y esencialmente suprayectiva. Es decir, es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $A \in \mathbb{A}$. Se probara que para cada $B \in \mathbb{A}$, la aplicación

$$\theta_B : Hom_{\mathbb{A}}(B, A) \to Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_B, h_A)$$

es un isomorfismo.

1. Para cada $B \in \mathcal{G}$, se tiene que
$$Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_B, h_A) \cong Hom_{\hat{\mathcal{G}}}(h_B, h_A) \cong h_A(B) \cong Hom_{\mathbb{A}}(B, A)$$
2. Suponga que $B \in \mathbb{A}$ tiene una familia epimorfica $\{f_i : B_i \to B\}_{i\in I}$ tal que
$$Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_{B_i}, h_A) \cong Hom_{\mathbb{A}}(B_i, A)$$
para cada $i \in I$ y para cada $i, j \in I$,
$$Hom_{\mathbb{A}}(B_i \times_B B_j, A) \cong Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_{B_i \times_B B_j}, h_A)$$
Entonces por la parte 3 del lema 5.3, $\coprod_{i\in I} h_{B_i} \to h_B$ es epimorfismo efectivo. Además como en $\mathbb{A}$ y en $Sh(\mathcal{G})$ los coproductos se preservan bajo pullback, se tienen los coigualadores:
$$\coprod_{i,j\in I} B_i \times_B B_j \rightrightarrows \coprod_{i\in I} B_i \longrightarrow B$$
$$\coprod_{i,j\in I} h_{B_i \times_B B_j} \rightrightarrows \coprod_{i\in I} h_{B_i} \longrightarrow h_B$$
Entonces al aplicar h_A, se tiene el siguiente diagrama:
$$\begin{tikzcd} Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_B, h_A) \arrow[r] & \prod_{i\in I} Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_{B_i}, h_A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j\in I} Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_{B_i \times_B B_j}, h_A) \\ Hom_{\mathbb{A}}(B, A) \arrow[r] \arrow[u, "\theta_B"] & \prod_{i\in I} Hom_{\mathbb{A}}(B_i, A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\cong"] & \prod_{i,j\in I} Hom_{\mathbb{A}}(B_i \times_B B_j, A) \arrow[u, "\cong"] \end{tikzcd}$$
Entonces como igualan morfismos isomorfos, θ_B es un isomorfismo.
3. Sean $B \in \mathcal{G}$ y $C \in \mathbb{A}$, tales que existe un monomorfismo $f : C \to B$. Como $\mathcal{G}$ genera a $\mathbb{A}$, existe una cubierta $\{g_i : G_i \to C\}$ tal que cada $G_i \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ tiene limites finitos, se tiene que $G_i \times_C G_j \cong G_i \times_B G_j \in \mathcal{G}$, ahora aplicando el inciso anterior, se tiene que $Hom_{\mathbb{A}}(C, A) \cong Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_C, h_A)$

4. Sea $B \in \mathbb{A}$. Como $\mathcal{G}$ genera a $\mathbb{A}$, existe una cubierta $\{g_i : G_i \to B\}_{i\in I}$ tal que cada $G_i \in \mathcal{G}$. Entonces para cualesquiera $i, j \in I$, $G_i \times G_j \in \mathcal{G}$. Además considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, shift right, "h"'] \arrow[d, shift left, "f"] & \\
& G_i \times_B G_j \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "p_j"] & \\
G_i \arrow[dr, "g_i"'] & G_i \times G_j \arrow[l, "q_i"'] \arrow[r, "q_j"] & G_j \arrow[dl, "g_j"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Donde $u : G_i \times_B G_j \to G_i \times G_j$ es la única inducida por el producto y f, h son tales que $uf = uh$. Entonces se tiene que $p_i h = q_i uh = q_i uf = p_i f$ y también que $p_j h = q_j uh = q_j uf = p_j f$ de donde $g_i p_i h = g_j p_j h = g_j p_j f = g_i p_i f$. Por lo que por la propiedad universal del pullback, existe una única $s : C \to G_i \times_B G_j$ tal que $p_i s = p_i h = p_i f$ y $p_j s = p_j h = p_j f$. Entonces $f = h$ y por tanto u es un monomorfismo. Por el inciso 3, $Hom_{\mathbb{A}}(G_i \times_B G_j, A) \cong Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_{G_i \times_B G_j}, h_A)$. Por el inciso 2 $Hom_{\mathbb{A}}(B, A) \cong Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_B, h_A)$.

Por lo tanto $h\_$ es fiel y pleno.
Antes de probar que es esencialmente suprayectiva, note que como $\mathbb{A}$ tiene objeto inicial, denotado por $\emptyset$ y como $h\_$ preserva límites, se tiene que $h_\emptyset$ es inicial en $Sh(\mathcal{G})$. Además dada una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de elementos de $\mathbb{A}$, con coproducto A, se tiene que el morfismo

$$\theta : \coprod h_{A_i} \to h_A$$

es un epimorfismo efectivo y más aún se tiene que:

$$\coprod_{i\in I} h_{A_i} \times_{h_A} \coprod_{j\in I} h_{A_j} \cong \coprod_{i,j\in I} h_{A_i} \times_{h_A} h_{A_j} \cong \coprod_{i,j\in I} h_{A_i \times_A A_j}$$

Como en $\mathbb{A}$ los coproductos son disjuntos, se tiene que si $i \neq j$ entonces $A_i \times_A A_j \cong \emptyset$ y también $A_i \cong A_i \times_A A_i$. Por lo que se tiene una caracterización en $Sh(\mathcal{G})$

$$h_{A_i \times_A A_j} = \begin{cases} \emptyset & i \neq j \\ h_{A_i} & i = j \end{cases}$$

Así las cosas el morfismo $\Delta : \coprod h_{A_i} \to \coprod h_{A_i} \times_{h_A} \coprod h_{A_j}$ es un isomorfismo y por lo tanto, $h_A \cong \coprod h_{A_i}$ por lo que $h\_$ preserva coproductos.

Estas propiedades serán de utilidad para probar que $h\_$ es esencialmente suprayectiva. Sea $F \in Sh(\mathcal{G})$

1. Si existe un monomorfismo $f : F \to h_A$ para algún $A \in \mathbb{A}$. Considere un epimorfismo efectivo $\coprod h_{B_i} \to F$, con $B_i \in \mathcal{G}$, el cual existe pues la colección $\{h_B\}_{B \in \mathcal{G}}$ es generador en $Sh(\mathcal{G})$. Sea $B = \coprod B_i$, así, se tiene un epimorfismo efectivo $g : h_B \to F$. Entonces la composición $fg \in Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_B, h_A)$ corresponde a una $s : B \to A$. Entonces como en $\mathbb{A}$ existen las factorizaciones em epimorfismos(efectivos) y monomorfismo, existen $C \in \mathbb{A}$ y un par de morfismos $v : B \to C$ epimorfismo efectivo y $u : C \to A$ monomorfsimo tales que $s = uv$. Así se tiene que $h_v : h_B \to h_c$ y $h_u : h_C \to h_A$ son tales que $fg = h_u h_v$. Como la factorización es única salvo isomorfismo, se tiene que $h_C \cong F$.

2. Para el caso general, considere un epimorfismo efectivo $h_A \to F$, el cual se puede construir como en el inciso anterior. Así se puede considerar el pullback $h_A \times_F h_A$, este es un subobjeto de $h_A \times h_A \cong h_{A \times A}$, además $h_A \times_F h_A$ es una relación de equivalencia en $h_A \times h_A$. En esta situación, aplicando el inciso anterior, se tiene que $h_A \times_F h_A \cong h_B$ para algún $B \in \mathbb{A}$. Ahora como para cualquier $C \in \mathbb{A}$ se tiene que $Hom_{\mathbb{A}}(C, B) \cong Hom_{Sh(\mathcal{G})}(h_C, h_A \times_F h_A)$, entonces B es una relación de equivalencia en $A \times A$. Como las relaciones de equivalencia son efectivas, $B = A \times_C A$ para algún epimorfismo efectivo $g : A \to C$. Así las cosas, se tiene que:

$$h_C \cong coeq(h_B \rightrightarrows h_A) \cong coeq(h_A \times_F h_A \rightrightarrows h_A) \cong F$$

Así las cosas $h\_ : \mathbb{A} \to Sh(\mathcal{G})$ es un funtor fiel, pleno y esencialmente suprayectivo. Por lo que $h\_$ induce una equivalencia de categorías. ■

Teorema 5.5. *Sea $\mathscr{X}$ una categoría. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathscr{X}$ es un topos.*
2. *Existen una categoría pequeña $\mathbb{A}$ y un encaje fiel y pleno*
$$\mathscr{X} \hookrightarrow Hom(\mathbb{A}^{op}, SET)$$
tal que tiene un adjunto izquierdo
$$L : Hom(\mathbb{A}^{op}, SET) \to \mathscr{X}$$
que preserva limites finitos.
3. *$\mathscr{X}$ es una categoría de Giraud.*

4. *$\mathscr{X}$ es un topos y su sitio tiene limites finitos. Es decir, $\mathscr{X} \cong Sh(\mathbb{A}, J)$ donde $\mathbb{A}$ tiene limites finitos.*

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2$) Esto se sigue al notar que $\mathscr{X} \cong Sh(\mathbb{A}, J)$ para algún sitio pequeño y aplicar 4.22.
$2 \Rightarrow 3$) Esto se sigue de 4.52 y de 4.42
$3 \Rightarrow 4$) Esto es una aplicación de 5.4
$4 \Rightarrow 1$) Este inciso es inmediato. ■

Capítulo 6

Conclusiones

En diversos problemas matemáticos resulta de interés analizarlos desde distintos puntos de vista, esto pues permite, en algunos casos, utilizar técnicas de otras áreas para su solución, o bien reformularlo para alguna aplicación. Así el poder clasificar un objeto de distintas maneras da una ventaja para su estudio, y por esta razón es de interés buscar estas clasificaciones.

En este trabajo se estudió una clasificación conocida como «El Teorema de Giraud», el cual da 4 interpretaciones de lo que es un *Topos*. Es importante destacar que la prueba de este teorema, resulta ser casi inmediata de propiedades «deseables» de la teoría. Quizás el ejemplo más claro, sea el funtor *gavillificación*. Otra de las caras de este teorema es la clasificación axiomática, esta resulta ser interesante pues no solo establece que es un topos, si no que permite construirlo de manera explicita y más aun, con propiedades adicionales a la definición con gavillas. Otra parte a destacar del teorema, es que caracteriza de manera «interna», «externa» y «ajena», en el siguiente sentido:

- **Interna**. Clasifica con propiedades internas de la categoría. Dando también herramientas categóricas para su estudio.
- **Externa**. Clasifica subcategorías que tienen un adjunto izquierdo de la inclusión que respeta límites. De donde se tienen resultados de adjunciones y de límites.
- **Ajena**. Clasifica dando una categoría de gavillas equivalente. Es decir, se da un sitio y se trabaja la categoría de gavillas de este.

La intención del trabajo fue presentar los resultados necesarios para probar el teorema de Giraud. Recordando que el concepto de *topos*, fue introducido por Grothendieck, (buscando una cohomología adecuada para la solución de las conjeturas de Weil) resulta natural que los resultados aparezcan como pequeños pasos, que terminan resolviendo el problema. El primero de estos pasos, fue el notar el concepto de utilidad para las gavillas son las cubiertas, Grothendieck en *Récoltes et Semailles*, se refiere a estas como *la noción, técnica y crucial de los topos*. Más aún estas cubiertas al no serlo en el sentido topológico, resultan «filtrar» morfismos «buenos», en el sentido que las cribas pueden generarse partiendo de los morfismos deseados. Es necesario destacar que desde las cribas se tienen distintas visiones del concepto como familias de morfismo cerradas bajo precomposición; como subcategorías de la categoría rebanada y como subfuntores de algún funtor representable. Dando desde aquí intuición de las distintas caras de lo que se define después.

Quizás uno de los responsables del concepto de *topos* sea Serre, quien en 1958 expone, entre otros, a Grothendieck, avances sobre la conjetura de Weil, ocupando gavillas. Grothendieck resulta convencido que estas ideas dan pie a «la verdadera cohomología para probar las conjeturas de Weil» y convence a Serre[1] de ello.Por lo que se dan a la tarea de generalizar la noción de cubierta. De esta manera, al juntar las ideas se tiene la definición de gavilla sobre una pretopología de Grothendieck, para la cual se prueba que no resulta tener a las categorías de gavillas como invariantes, aunque sí permiten tener avances en las ideas de Grothendieck. Después se introduce el concepto de topología de Grothendieck, llevando la definición de gavilla en espacios topológicos a una noción de exactitud. Resultando no solo en una generalización, sino en un invariante para las topologías; lo cual, en general, no se tiene para espacios topológicos.

Aunque Grothendieck menciona que ocuparía gavillas para su demostración de las conjeturas, le resulto de interés estudiar como es que estas se relacionan[2], de hecho, en *Récoltes et Semailles*, el les llama «varas que miden», dando pie a preguntarse por que tan lejana es una pregavilla de ser gavilla, resultando así el funtor gavilla asociada, o bien, la *gavillificación*. De hecho esta es una idea que viene motivada desde el álgebra, al considerar el ismorfismo

$$\theta : Hom_R(R \otimes_{\mathbb{Z}} A, B) \to Hom_{\mathbb{Z}}(A, B)$$

donde R es un anillo considerado como $\mathbb{Z}$-módulo, A un grupo abeliano y B un $R-$módulo, el cual induce un adjunto izquierdo al funtor que olvida.
En el mismo texto, denota a un topos como una categoría con las propiedades «buenas» de una categoría de gavillas, es decir, una parte de la equivalencia de Giraud. Así, se estudian diversas condiciones sobre límites en las categorías de gavillas, haciendo énfasis en que los límites en la categoría de pregavillas no necesariamente son los mismos(aunque sí isomorfos) a los de la categoría de gavillas.

Finalmente antes de la prueba del teorema de Giraud, se estudian familias generadoras, buscando una noción similar al Encaje de Yoneda resultando que, en efecto,

[1]McLarty Colin, *The Rising Sea: Grothendieck on simplicity and generality, 2003.*
[2]ibidem

se tiene un «Encaje de Yoneda». Así el teorema depende de una construcción que depende de las familias generadoras, de hecho, esta construcción hace explicito el sitio al cual la categoría es equivalente, más aun, lo describe con la topología canónica.

Apéndice A

Algunas definiciones categóricas

DEFINICIÓN A.1. *Sea $\mathbb{A}$ localmente pequeña. Un funtor $F : \mathbb{A} \to SET$ es representable si existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $F \cong Hom(\_, A)$. A estos funtores se les denotara por h_A.*

DEFINICIÓN A.2. *Un funtor $F : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ es un encaje si es fiel, pleno e inyectivo en objetos.*

DEFINICIÓN A.3. *Sean $L : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ y $R : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ un par de funtores. Se dice que L es adjunto izquierdo de R (R es adjunto derecho de G) si existen $\epsilon : LR \to 1_{\mathbb{B}}$ y $\eta : 1_{\mathbb{A}} \to RL$ transformaciones naturales tales que hacen conmutar los siguientes diagramas:*

1. $$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "L\eta"] \arrow[dr, "1_L"] & \\ LRL \arrow[r, "\epsilon L"] & L \end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "\eta R"] \arrow[dr, "1_R"] & \\ RLR \arrow[r, "R\epsilon"] & R \end{tikzcd}$$

Estas identidades son conocidas como las identidades triangulares, a η se le conoce como la unidad y a ϵ se le conoce como la counidad.

PROPOSICIÓN A.4. *Sean $L : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ y $R : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ un par de funtores. Son equivalentes:*

1. *L es adjunto izquierdo de R.*
2. *Existe un isomorfismo natural $\theta : Hom_{\mathbb{B}}(L(\_), \_) \to Hom_{\mathbb{A}}(\_, R(\_))$.*

DEFINICIÓN A.5. *Sea $L : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor. Se dice que L es una equivalencia de categorías si existen un funtor $R : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ y dos isomorfismos naturales tales que $1_{\mathbb{A}} \cong RL$ y $1_{\mathbb{B}} \cong LR$. En este caso se dice que $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son equivalentes.*

PROPOSICIÓN A.6. *Sea $L : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ un funtor. Entonces son equivalentes:*

1. *L es una equivalencia de categorías.*
2. *L es fiel y pleno, y para cualquier $B \in \mathbb{B}$ existe $A \in \mathbb{A}$ tal que $B \cong L(A)$.*
3. *L es fiel y pleno, y tiene un adjunto derecho R fiel y pleno.*
4. *L tiene un adjunto derecho tal que la unidad y la counidad son isomorfismos.*

Apéndice B

El Lema de Yoneda

Sea $\mathbb{A}$ una categoría localmente pequeña.

Definición B.1. *Para cada $A \in \mathbb{A}$ se define la pregavilla representable $h_A : \mathbb{A}^{op} \to SET$ como $h_A(B) = Hom_{\mathbb{A}}(B, A)$ para $B \in \mathbb{A}$ y para $f : B \to C \in \mathbb{A}^{op}$, $h_A(f)(g) = gf$.*

Lema B.2. *Sean A un objeto de $\mathbb{A}$ y $F : \mathbb{A}^{op} \to SET$ un funtor, junto con $\theta : h_A \to F$ una transformación natural. Entonces θ queda determinada por $\theta_A(1_A)$.*

Demostración. Para cada $B \in \mathbb{A}$ y $f : B \to A$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} h_A(A) \arrow[r, "\theta_A"] \arrow[d, "f^*"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ h_A(B) \arrow[r, "\theta_B"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

Ahora note que se tiene:

$$\begin{aligned} \theta_B(f) &= \theta_B(f^*(1_A)) \\ &= (\theta_B f^*)(1_A) \\ &= (F(f)\theta_A)(1_A) \\ &= F(f)(\theta_A(1_A)) \end{aligned}$$

Así las cosas, θ queda determinada por $\theta_A(1_A)$. ■

Lema B.3 (Yoneda). *Sean $F : \mathbb{A}^{op} \to SET$. Entonces se tiene un isomorfismo natural en ambas entradas:*

$$Hom_{Fun(\mathbb{A},SET)}(h_A, F) \cong F(A)$$

Demostración. Primero se probará que para cada $A \in \mathbb{A}$, $Hom(h_A, F) \cong F(A)$. Para esto, se define[1] $\epsilon_A : Hom(h_A, F) \to F$ tal que $\epsilon_A(\theta) = \theta_A(1_A)$. Note que esta asignación esta bien definida. Más aun por el lema anterior, esta asignación resulta ser biyectiva.
Ahora, para probar la naturalidad, se hará en 2 partes. Sea $\theta : F \to G$ y considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Hom(h_A, F) \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, "\theta^*"'] & F(A) \arrow[d, "\theta_A"] \\ Hom(h_A, G) \arrow[r, "\epsilon_A"'] & G(A) \end{tikzcd}$$

Así, para $\eta : h_A \to F$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \theta_A(\epsilon_A(\eta)) &= \theta_A(\eta_A(1_A)) \\ &= (\theta_A \eta_A)(1_A) \\ &= (\theta\eta)_A(1_A) \\ &= \epsilon_A(\theta\eta) \\ &= \epsilon_A(\theta^*(\eta)) \end{aligned}$$

Por lo que este isomorfismo es natural en la segunda entrada.
Para la primer entrada, sea $f : B \to A$ y considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Hom(h_A, F) \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, "(f^*)_*"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ Hom(h_B, F) \arrow[r, "\epsilon_B"'] & F(B) \end{tikzcd}$$

[1]De hecho, esta asignación es para cada $A \in \mathbb{A}$.

Ahora, dado $\theta : h_A \to F$ y recordando la prueba del lema anterior, se sigue que:

$$\begin{aligned} F(f)\epsilon_A(\theta) &= F(f)(\theta_A(1_A)) \\ &= \theta_B(f) \\ &= \theta_B(f^*(1_B)) \\ &= (\theta f^*)_B(1_B) \\ &= \epsilon_B(\theta f^*) \\ &= \epsilon_B((f^*)_*(\theta)) \\ &= (\epsilon_B(f^*)_*)(\theta) \end{aligned}$$

Así las cosas, este es un isomorfismo natural la primer entrada y por tanto lo es ambas entradas. ■

Corolario B.4 (Encaje de Yoneda). *El funtor* $h_{\_} : \mathbb{A} \to Fun(\mathbb{A}, SET)$ *dado por* $h_{\_}(A) = h_A$*. Es un encaje de categorías.*

Corolario B.5. *Para cualesquiera* A *y* $B \in \mathbb{A}$*. Se tiene que*

$$A \cong B \text{ si y solo si } h_A \cong h_B$$

Definición B.6. *Sea* $F : \mathbb{A}^{op} \to SET$*. Se define la categoría de objetos de* F*,* $\int_{\mathbb{A}} F$*, cuyos objetos son parejas* (A, α) *tales que* $\alpha : h_A \to F$ *y dados* (A, α) *y* $(B, \beta) \in \int_{\mathbb{A}} F$*,* $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ *si* $f \in Hom_{\mathbb{A}}(A, B)$ *y* $\beta h_f = \alpha$*.*

Proposición B.7. *Se denota por* $U : \int_{\mathbb{A}} F \to \mathbb{A}$ *a la asignación tal que* $U(A, \alpha) = A$*. Entonces*

1. U *es un funtor.*
2. *Dado* $A \in \mathbb{A}$*,* $U^{-1}(A) = \{(A, \alpha) | \alpha \in Hom(h_A, F)\}$ *esta en correspondencia biyectiva con* $Hom(h_A, F)$*.*

Proposición B.8. *Para cada* (A, α) *y* $(B, \beta) \in \int_{\mathbb{A}} F$*, y* $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$*. Se tiene el diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} h_A \arrow[rr, "h_f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & h_B \arrow[dl, "\beta"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

Más aún $F = \varinjlim_{A \in \mathbb{A}, \int_{\mathbb{A}} F} h_A$*. Es decir todo funtor contravariante es colímite de representables.*

Apéndice C

Categorías regulares

Definición C.1. *Sea $f : A \to B$ un morfismo. Se dice que f es un epimorfismo fuerte si para cualquier diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "m"] & D \end{tikzcd}$$

donde m es un monomorfismo, existe una única $t : B \to C$ tal que $tf = g$ y $mt = h$

Proposición C.2. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría con limites finitos. Si $f : A \to B$ es un epimorfismo fuerte, entonces es un epimorfismo.*

Proposición C.3. *Un morfismo $f : A \to B$ es un isomorfismo si y solo si es un epimorfismo fuerte y un monomorfismo.*

Lema C.4. *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ un par de morfismos.*

1. *Si f y g son epimorfismos fuerte, entonces gf es epimorfismo fuerte.*
2. *Si gf es un epimorfismo fuerte, entonces g es epimorfismo fuerte.*
3. *Si $f = ig$ es un epimorfismo fuerte, entonces i es un isomorfismo.*

Definición C.5. *Sea $f : A \to B$. Se dice que f es un epimorfismo regular si existen $g, h : C \to A$ tal que $f = coeq(g, h)$. Es decir, si f es el coigualador de un par de morfismos.*

Definición C.6. *Sea $f : A \to B$ un morfismo. Se dice que f es un epimorfismo que se escinde si existe $i : B \to A$ tal que $fi = 1_B$.*

Proposición C.7. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría con límites finitos.*

1. *Todo epimorfismo que se escinde es un epimorfismo regular.*

2. *Todo epimorfismo regular es un epimorfismo fuerte.*

3. *Todo epimorfismo fuerte es un epimorfismo.*

LEMA C.8. *Sea A una categoría con límites finitos. Si $f : A \to B$ es un epimorfismo regular entonces f es el coigualador de las proyecciones $p_1, p_2 : A \times_f A \to A$.*

DEFINICIÓN C.9. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría con limites finitos. Se dice que $\mathbb{A}$ es regular si*

1. *Para cualquier morfismo $f : A \to B$ las proyecciones $p_1, p_2 : A \times_f A \to A$ tienen un coigualador.*

2. *Los epimorfismos regulares son estables bajo pullback.*

PROPOSICIÓN C.10. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría regular. Cualquier morfismo $f : A \to B$ tiene una factorización epimorfismo regular- monomorfismo; única salvo isomorfismo.*

PROPOSICIÓN C.11. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría regular, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ un par de morfismos.*

1. *Todo epimorfismo fuerte es epimorfismo regular.*

2. *Si gf es epimorfismo regular, entonces g es un epimorfismo regular.*

3. *Si g y f son epimorfismos regulares, entonces gf es un epimorfismo regular.*

4. *f es un epimorfismo si y solo si f es un epimorfismo regular y un monomorfismo.*

5. *Si $s : A \to B$ y $t : A' \to B'$ son epimorfismos regulares, entonces $s \times t : A \times A' \to B \times B'$ es un epimorfismo regular.*

DEFINICIÓN C.12. *Sea $A \in \mathbb{A}$. Se dice que $f : B \to A$ es un subobjeto de A, si f es un monomorfismo. Más aún, dados $f : B \to A$ y $g : C \to A$ son subobjetos de A si existe $h : B \to C$ un isomorfismo, entonces se dice que f y g representan el mismo subobjeto. Se escribe $Sub(A)$ a la familia de subobjetos de A.*

PROPOSICIÓN C.13. *Sea $\mathbb{A}$ categoría con límites finitos y $A \in \mathbb{A}$. Si $f, g \in Sub(A)$ entonces existe $h \in Sub(A)$ tal que se factoriza por f y por g y es máxima con la propiedad; a h se le denotará $f \wedge g$. Además $Sub(A)$ tiene un elemento máximo.*

Proposición C.14. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría con límites finitos y $f : B \to A$. Entonces f induce un morfismo de retículas $f^* : Sub(A) \to Sub(B)$*

Notación. *Dada $f : A \to B$, se escribe $img(f)$ al mínimo $g \in Sub(B)$ por el que f se factoriza.*

Proposición C.15. *Sea $\mathbb{A}$ una categoría regular. Entonces:*

1. *$f^*(g \wedge h) = f^*(g) \wedge f^*(h)$*
2. *Si el diagrama es un pullback:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"] & D \end{tikzcd}$$

   entonces $f^*(img(g)) = img(g')$.

Definición C.16. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría regular, $f : A \to B$ y $g \in Sub(A)$. Se pone $\exists_f(g)$ para denotar $img(fg)$.*

Proposición C.17. *Sean $\mathbb{A}$ una categoría regular, $f : A \to B$ y $g \in Sub(A)$.*

1. *$\exists_f : Sub(A) \to Sub(B)$ esta bien definido.*
2. *Sea $h \in Sub(B)$. Entonces $\exists_f(g) \leq h$ si y solo si $g \leq f^*(h)$. Es decir $\exists_f$ es adjunto izquierdo de f^*.*

Bibliografía

[1] Michael Artin, Alexandre Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Theorie des topos et cohomologie etale des schemas.* Springer-Verlag, 1972.

[2] Michael Francis Atiyah and Ian G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Westview Press, 2016.

[3] Michael Barr, Pierre Antoine. Grillet, and Dovonan H. van. Osdol. *Exact categories and categories of sheaves.* Springer, 1971.

[4] Michael Barr and Charles Wells. *Toposes, triples and theories.* Springer, 1985.

[5] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra.*, volume 2. Cambridge University Press, 2008.

[6] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra.*, volume 3. Cambridge University Press, 2008.

[7] Olivia Caramello. *Theories, sites, toposes: relating and studying mathematical theories through topos-theoretic bridges.* Oxford university press, 2018.

[8] Peter Freyd. *Abelian Categories an introduction to the theory of functors.* Harper and Row, 1964.

[9] P. T. Johnstone. *Topos theory.* Dover Publications, Inc., 2014.

[10] Peter T. Johnstone. *Sketches of an elephant: a topos theory compendium.* Clarendon Press, 2008.

[11] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and Sheaves.* Springer, 2006.

[12] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer, 2010.

[13] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory.* Springer, 2010.

[14] Colin McLarty. The rising sea: Grothendieck on simplicity and generality. `https://www.landsburg.com/grothendieck/mclarty1.pdf`, Consultado en 2019.

[15] Michael Makkai and Gonzalo E. Reyes. *First order categorical logic: model-theoretical methods in the theory of topoi and related categories.* Springer, 1977.

[16] Jacob Lurie. Categorical logic lecture notes. `https://www.math.ias.edu/~lurie/278x.html`, consultado en 2019.

[17] Los autores. The stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu/`, consultado en 2019.