Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

K-teoría y representaciones invariantes bajo fusión

T E S I S

que para obtener el título de:

matemático

P R E S E N T A :

Jorge Eduardo Gaspar Lara

A S E S O R :

José María Cantarero López

Ciudad de México, CDMX., 2020

Agradecimientos

A mis padres, Jorge y Belem, por amarme cada uno de los días sin importar las circunstancias. Por educarme para ser la persona que soy y por dar todo lo que estaba en sus manos para que pudiera cumplir mis metas. Gracias por darme la vida y cuidarme a lo largo de ella, los amo.

A mi asesor José María Cantarero López, por el tiempo que dedicó a mis dudas e indecifrables explicaciones en cada una de las sesiones de trabajo. Por confiar en mí para realizar este trabajo y por darme un poco del gran conocimento que tiene. Gracias por las palabras de aliento.

A todos lo miembros del sínodo, por aceptar la revisión de este trabajo y el tiempo dedicado a revisarlo.

A Estela, porque sin ella no podría seguir aquí. Por todos lo momentos felices que pasamos juntos y también por los que no tanto. Aprendí de ti tanto que no puedo devolverte ni un poco de lo que hiciste por mí. Espero que ambos podamos lograrlo todo. Gracias por darme fuerzas para poder seguir, gracias por darme un motivo, gracias por todo.

A Sandra, por haberme ayudado en todo momento en lo académico y en lo emocional. Gracias por entender cuando más frágil me sentía y por alegrarme cuando más lo necesitaba. A veces hasta los pececitos pueden ser felices.

A Fernanda (azul) y Nadia por hacer de las clases y la vida en la facultad más amenas.

Esta tesis fue apoyada por el Proyecto de Ciencia Básica SEP-CONACYT 242186: Aspectos Homotópicos de Grupos Compactos de Lie.

Índice General

Introducción

Utilizando las ideas de los K-grupos definidos por Grothendieck, los matemáticos Atiyah y Hirzebruch a finales de la década de 1950 desarrollaron una K-teoría basada en haces vectoriales sobre espacios Hausdorff y compactos. Además de definir un grupo $K^0(X)$ para cada espacio topológico X, un tiempo después Atiyah define una teoría de cohomología generalizada $\{K^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. También, como consecuencia del Teorema de Periodicidad de Bott, se prueba que esta teoría es periódica. La K-teoría dio pie a resolver preguntas que no habían sido contestadas o daba maneras más elementales de resolver problemas geométricos, además de ser un invariante homotópico. Así, la K-teoría se usó para resolver el problema del invariante de Hopf igual a uno, el cálculo de índices de operadores elípticos diferenciales, a partir del teorema del índice de Atiyah-Singer, y el número de campos vectoriales tangentes linealmente independientes sobre esferas. Sin embargo, aún cuando la K-teoría es una gran herramienta para distintas áreas de las matemáticas y resulta ser de gran importancia, en general puede llegar a ser complicada de calcular para espacios de dimensión infinita y es importante conocer herramientas que hagan más sencillo el cálculo de esta.

Un ejemplo importante en la topología algebraica de espacios de dimensión infinita son los espacios clasificantes de grupos finitos. Dado un grupo finito G existe un espacio topológico asociado a este llamado su espacio clasificante y denotado como BG. Resulta que estos espacios están definidos salvo homotopía y son relevantes para el estudio de G-haces principales. Este nombre no es ninguna coincidencia, se debe a que dado un espacio topológico X existe una biyección entre las clases de homotopía de funciones continuas de X a BG y clases de isomorfismo de G-haces principales sobre X. Aunque hay construcciones explícitas de los espacios clasificantes, a veces no son muy concretas o manejables para el estudio de sus propiedades. Sin embargo, existe el Teorema de Completación de Atiyah-Segal que relaciona la K-teoría del espacio clasificante de un grupo finito G y la completación del anillo de representaciones de G con respecto a un ideal. Este resultado es de gran ayuda, pues incluso sin conocer del todo el espacio clasificante de un grupo podemos calcular su K-teoría solo por medio de representaciones que es un concepto completamente algebraico.

Para analizar varios problemas de la topología algebraica ha resultado útil estudiar los espacios topológicos desde un punto de vista local. Un ejemplo de esto es intentar estudiar cómo se comportan ciertos espacios topológicos con respecto a un primo p, lo cual es común en el estudio de espacios clasificantes. Más concretamente, a partir de un espacio topológico X, se pueden construir espacios $X_p^\wedge$ para cada primo p y $X_\mathbb{Q}$. En el caso que los grupos de homotopía del espacio X son finitamente generados y X sea nilpotente, como se muestra en [8] podemos recuperar el espacio salvo homotopía a partir de los espacios $X_p^\wedge$ y $X_\mathbb{Q}$. En el caso de los espacios clasificantes de grupos finitos, aún cuando el grupo no sea nilpotente, podemos recuperar el espacio clasificante hasta homología entera. Para el caso de un grupo finito G, se sabe que los espacios $BG_\mathbb{Q}$ son contractibles, por lo que es suficiente estudiar en este caso a los espacios $BG_p^\wedge$. Esta técnica de estudiar los espacios con respecto a un primo se ha utilizado para solucionar el problema de Steenrod sobre la clasificación de espacios con cohomología polinomial, en la teoría de espacios de lazos finitos y en la teoría de espacios clasificantes.

En vista de la relevancia de la K-teoría, de los espacios clasificantes y los espacios $BG_p^\wedge$ es de importancia saber maneras eficientes de calcular la K-teoría de BG y $BG_p^\wedge$. Existen algunas maneras de reducir el cálculo de estos espacios a objetos algebraicos que son muy conocidos y relevantes para varias áreas de las matemáticas. En esta tesis, discutiremos teoremas de completación que relacionan la K-teoría de los espacios

BG y $BG_p^\wedge$ con anillos de representaciones de grupos finitos y con representaciones que se conocen como invariantes bajo fusión, respectivamente.

En este trabajo nos concentraremos primero en estudiar los anillos de representaciones de grupos finitos para así poder calcular la K-teoría de sus espacios clasificantes. Dado un grupo finito G, las clases de isomorfismo de representaciones complejas de dimensión finita de este tienen una suma y un producto que definen un semianillo. A partir de esto, con la construcción de Grothendieck podemos construir el anillo de representaciones de G denotado por $R(G)$. Este anillo tiene un morfismo de anillos hacia $\mathbb{Z}$ que envía a un elemento del anillo en su dimensión virtual. Al núcleo de este morfismo se le conoce como ideal de aumentación y se escribe como $I(G)$. Estos objetos son de gran importancia para el cálculo de la K-teoría del espacio clasificante de G. La K-teoría del espacio clasificante de G, denotada por $K(BG)$, se define como $[BG, \mathbb{Z} \times BU]$ donde el espacio BU es el colímite de los espacios clasificantes $BU(n)$. En [3] encontramos el siguiente resultado que corresponde al Teorema 5.1.2 de esta tesis:

Teorema (Teorema de Completación de Atiyah-Segal para grupos finitos)**.** *Sea G un grupo finito, $R(G)$ su anillo de representaciones e $I(G)$ su ideal de aumentación. Entonces $R(G)^\wedge_{I(G)}$ es isomorfo a $K(BG)$.*

En el enunciado de este teorema $R(G)^\wedge_{I(G)}$ es la completación de $R(G)$ con respecto a $I(G)$. Dentro de la tesis se probará de manera detallada el Teorema de Completación de Atiyah-Segal solamente para el caso de grupos cíclicos y solubles. En el artículo recién mencionado, se construye un morfismo del anillo de representaciones $R(G)$ a la K-teoría del espacio clasificante $K(BG)$. Este induce uno entre sus respectivas completaciones. Al ser el grupo $K(BG)$ completo, terminamos con un morfismo entre $R(G)^\wedge_{I(G)}$ y $K(BG)$. Lo que se probará es que este morfismo construido resulta ser un isomorfismo para grupos cíclicos y solubles. Para el caso de grupos cíclicos la idea es relacionar relacionar la cohomología del grupo G con el anillo graduado de $K^*(BG)$ mediante el uso de la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. A partir de esto podemos concluir que existe un isomorfismo entre sus anillos graduados y como consecuencia entre sus completaciones. Luego, utilizando el caso para grupos cíclicos se prueba que el morfismo $R(G)^\wedge_{I(G)} \to K(BG)$ es siempre un monomorfismo. Después se prueba el siguiente lema de representaciones de grupos finitos:

Lema. *Sean G y H grupos finitos tales que $H \triangleleft G$ y $G/H \cong \mathbb{Z}_q$ con q primo. Entonces la imagen del morfismo de restricción $\imath^*$ de $R(G)$ a $R(H)$ tiene como imagen $R(H)^{\mathbb{Z}_q}$, donde la acción de $\mathbb{Z}_q$ es la inducida por la conjugación de G/H sobre H.*

Bajo las mismas hipótesis de este lema se prueba que si se cumple el teorema de completación para H entonces se cumple para G utilizando como principal herramienta la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. Por último, para el caso de grupos solubles se utiliza lo anterior para usar inducción sobre la longitud de la serie de composición.

El otro propósito de la tesis es estudiar un teorema análogo al de Atiyah de Cantarero y Bárcenas en [6] que relaciona a las representaciones invariantes bajo fusión con la K-teoría de la p-completación del espacio clasificante. Dado un primo p y un grupo finito G, sea S un p-Sylow de G. Una manera de definir las representaciones de S invariantes bajo fusión es si su caracter χ es tal que para toda $s \in S$ y $g \in G$ tales que $gsg^{-1} \in S$ entonces $\chi(s) = \chi(gsg^{-1})$. Resulta que la suma y el producto tensorial de representaciones invariantes bajo fusión son de nuevo invariantes bajo fusión. Como en el caso de $R(G)$, podemos construir un anillo $R(\mathcal{F}_S(G))$ de representaciones invariantes bajo fusión. De hecho, el anillo $R(\mathcal{F}_S(G))$ es de importancia para el estudio de $K(BG_p^\wedge)$. El teorema enunciado a continuación es consecuencia de lo probado por Cantarero y Bárcenas:

Teorema. *Sean G un grupo finito y S un p-Sylow de G. Sea $R(\mathcal{F}_S(G))$ su anillo de representaciones invariantes bajo fusión e $I(\mathcal{F}_S(G))$ su ideal de aumentación. Entonces $R(\mathcal{F}_S(G))^\wedge_{I(\mathcal{F}_S(G))}$ es isomorfo a $K(BG_p^\wedge)$.*

Utilizando el resultado por Cantarero y Bárcenas calculamos primero $K(BG_p^\wedge)$ para grupos de orden pequeño. Después, centramos nuestra atención en una familia de grupos particulares que es la de grupos simétricos en p^2 letras, con p primo. Primero, utilizando resultados de Alperin y Fong encontrados en [1] analizamos el sistema de fusión en el primo p. Más explícitamente, un resultado de Alperin sobre sistemas de fusión saturados encontrado en [9] nos dice que solo debemos fijarnos en los subgrupos céntricos y radicales del p-Sylow. Para el caso del grupo simétrico en p^2 letras obtuvimos que solo existen 3 subgrupos de este tipo, uno de ellos siendo el p-Sylow mismo. Luego, nos centramos en calcular cuáles son los automorfismos de estos subgrupos bajo conjugaciones de S_{p^2}. Además de los resultados por Alperin y Fong, un resultado por Cárdenas y Lluis en [11] nos permitió calcular el normalizador del Sylow de S_{p^2} de manera explícita. Por último, utilizando lo anterior calculamos $R(\mathcal{F}_S(S_{p^2}))$ para $p = 2$ y $p = 3$, donde S es un p-Sylow de S_{p^2} y usando el teorema anterior calculamos $K((BS_{p^2})_p^\wedge)$ para los mismos primos en el capítulo cinco.

En el presente trabajo se incluye una demostración del teorema anterior que utiliza el teorema de completación de Atiyah. Durante la elaboración de esta tesis se discutió la posibilidad de dar otra prueba de este resultado que de cierta manera imitara los argumentos de Atiyah. Se estudió un primer paso que parece necesario para continuar imitando los pasos que sigue Atiyah en su prueba. Esto resultó en el siguiente problema que es análogo al lema de representaciones anteriormente mencionado, pero que no se sabe si es verdadero o falso.

Conjetura. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Si tenemos que S es p-Sylow de de G y que $G/H \cong \mathbb{Z}_p$, entonces tenemos que*

$$\iota^* R(\mathcal{F}_S(G)) = R(\mathcal{F}_{S\cap H}(H))^{\mathbb{Z}_p}$$

Sin embargo, se incluyen los casos en los que probamos que el resultado es verdadero y conjeturamos que debe serlo en general. Los casos en los que lo probamos es cuando $S \cap H \triangleleft G$ y $[G : S \cap H]$ es libre de cuadrados, y para el grupo $G = S_4$ y $H = A_4$.

En el primer capítulo se incluyen preliminares de temas que son necesarios para poder entender el contenido de este trabajo. Hablaremos un poco de completaciones de módulos y sus propiedades principales. Asimismo, hablaremos de los espacios clasificantes y de la p-completación de espacios topológicos. Por último, daremos una breve introducción a la cohomología de grupos y algunos cálculos que serán necesarios más adelante.

En el segundo capítulo desarrollamos la construcción de la K-teoría para espacios Hausdorff y compactos. También, hablamos del concepto de K-teoría para espacios en general y su definición. Al final, damos una breve introducción a sucesiones espectrales y en particular a la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch.

En el capítulo tres dedicamos nuestra atención a los sistemas de fusión. Damos resultados que serán útiles para los teoremas de completación y estudiamos de manera detallada el sistema de fusión del grupo S_{p^2} en el primo p.

En el cuarto capítulo desarrollamos los resultados principales de la teoría de representaciones. Enunciamos resultados sobre las representaciones irreducibles del producto semidirecto de grupos bajo ciertas condiciones. Por último, realizamos cálculos de anillos de representaciones de grupos de orden pequeño.

Finalmente, en el quinto capítulo, probamos el teorema de completación de Atiyah para los casos de grupos cíclicos y solubles. Además, probamos el teorema de completación para sistemas de fusión. Haciendo uso de estos dos teoremas calculamos la K-teoría de espacios clasificantes y espacios clasificantes p-completados. Para finalizar, damos dos casos en los que se probó que es verdadera la conjetura.

1 Preliminares

Durante este capítulo desarrollaremos un poco de la teoría necesaria para comprender los resultados incluidos en este trabajo.

1.1 Límites inversos y completaciones

Para un desarrollo un poco más amplio del contenido de esta sección, referimos al lector a [5].

Definición 1.1.1. *Sea M un grupo abeliano. Una filtración de M es una sucesión de subgrupos*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \supset \dots$$

Dada una filtración de M, decimos que M es filtrado con filtración M_n o simplemente filtrado en caso de que sea clara cuál es la filtración.

Definición 1.1.2. *Un homomorfismo de grupos filtrados es un homomorfismo de grupos $f : M \to N$ tal que $f(M_n) \subseteq N_n$ para cada $n \geq 0$.*

Definición 1.1.3. *Si $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ es un grupo filtrado, denotamos por*

$$GA = \bigoplus_{n \geq 0} A_n/A_{n+1}$$

al cual llamamos grupo graduado asociado a la filtración. La componente A_p/A_{p+1} será denotada por G^pA.

Dada una filtración de un grupo, podemos darle a M una estructura de grupo topológico tomando a los subgrupos M_n como una base local de vecindades del 0 (que por ende define una base local de vecindades para cada elemento en M). Denotaremos por $\widehat{M}$ (o $M^\wedge$) a la completación de M para esta topología, i.e.

$$\widehat{M} = \varprojlim M/M_n.$$

Observemos que en general la topología de M no es necesariamente Hausdorff así que el mapeo natural $M \to \widehat{M}$ puede tener núcleo no trivial. De hecho se tiene que:

$$\mathsf{Ker}(M \to \widehat{M}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Si M es un grupo finito entonces la filtración necesariamente se estaciona, i.e. $M_n = M_{n+1}$ para toda $n \geq n_0$ para algún n_0 y por lo tanto $\widehat{M} \cong M/M_n$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.1.4. *Si M es un grupo finito filtrado, entonces $M \to \widehat{M}$ es un epimorfismo.*

Lema 1.1.5. *Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de grupos filtrados. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$\widehat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ es un isomorfismo de grupos filtrados.*
2. *$Gf\colon GM \to GN$ es un isomorfismo (donde GM denota al grupo graduado de M).*

Donde $\widehat{f}\colon \widehat{M} \to \widehat{N}$ es el morfismo de la propiedad universal de $\widehat{M}$ como límite y Gf es el morfismo inducido por f entre los grupos graduados.

Lema 1.1.6. *Sea $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos abelianos. Sea M_n una filtración de M y definimos filtraciones de M', M'' de la siguiente manera: $M'_n = \alpha^{-1}(M_n), M''_n = \beta(M_n)$. Entonces $0 \longrightarrow \widehat{M'} \xrightarrow{\alpha} \widehat{M} \xrightarrow{\beta} \widehat{M''} \longrightarrow 0$ es exacta.*

Sea A un anillo Noetheriano, sea $\mathfrak{a}$ un ideal de A y sea M un A-módulo finitamente generado. Definimos una filtración en M mediante $M_n = \mathfrak{a}^n M$. La topología definida por esta filtración es llamada topología $\mathfrak{a}$-ádica de M o simplemente la $\mathfrak{a}$-topología de M. Esta topología tiene varias propiedades importantes.

Proposición 1.1.7. *Sea M un A-módulo finitamente generado y sea N un submódulo de M. Entonces la topología de N como subespacio de M con la $\mathfrak{a}$-topología de M coincide con la $\mathfrak{a}$-topología de N.*

Proposición 1.1.8. *Para A-módulos finitamente generados, la completación $\mathfrak{a}$-ádica es un funtor exacto.*

1.2 La construcción de Grothendieck

Sea M un monoide conmutativo. La construcción de Grothendieck de M es el grupo abeliano $T(M)$ cuyos elementos son clases de equivalencia $[m, n]$ de elementos $(m, n) \in M \times M$ bajo la relación $(m', n') \sim (m'', n'')$ si y solo si $m' + n'' + z = m'' + n' + z$ para algún $z \in M$. La suma en $T(M)$ está dada por $[m, n] + [m', n'] = [m + m', n + n']$, el neutro es $[0, 0]$ y los inversos está dados por $-[m, n] = [n, m]$. En el caso que M sea un semianillo podemos darle estructura de anillo a $T(M)$ con el producto dado por

$$[m, n] \cdot [m', n'] = [mm' + nn', mn' + m'n]$$

con neutro multiplicativo $1 = [1, 0]$. Además, tenemos un morfismo natural $\imath : M \to T(M)$ dado por $\imath(m) = [m, 0]$. Este morfismo preserva la estructura de monoide o semianillo respectivamente. Si resulta que M es un semianillo conmutativo, entonces $T(M)$ es un anillo conmutativo. Además, $T(M)$ tiene la siguiente propiedad universal

Teorema 1.2.1. *Sea $f : M \to G$ un morfismo de monoides conmutativos donde G es un grupo abeliano. Entonces, existe un único morfismo de grupos $h : T(M) \to G$ tal que $h\imath = f$. Sea $f : M \to R$ un morfismo de semianillos donde R es un anillo. Entonces, existe un único morfismo de anillos $h : T(M) \to R$ tal que $h\imath = f$.*

Decimos que un monoide cumple la propiedad de cancelación si $m + l = n + l$ implica que $m = n$, para todo $m, n, l \in M$. En el caso que el monoide M cumpla la propiedad de cancelación, $T(M)$ tiene como elementos clases de equivalencia $[m, n]$ de elementos $(m, n) \in M \times M$ bajo la relación $(m', n') \sim (m'', n'')$ si y solo si $m' + n'' = m'' + n'$.

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos el monoide conmutativo de los naturales $\mathbb{N}$ con la suma. En este caso $T(M)$ es el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$.*

Sin embargo, existen monoides conmutativos que no tienen la propiedad de cancelación.

Ejemplo 1.2.3. *El monoide Vect$(S^2, \mathbb{R})$ de haces vectoriales reales sobre la 2-esfera S^2 no cumple la propiedad de cancelación. El haz tangente TS^2 es un haz vectorial 2-dimensional no trivial sobre S^2 que sumado al haz trivial unidimensional es isomorfo a un haz trivial 3-dimensional.*

1.3 Espacios clasificantes y cohomología de grupos

A continuación, introducimos de manera breve el concepto de espacio clasificante para un grupo G y damos algunas propiedades de estos espacios.

Definición 1.3.1. *El producto join $A_1 * \cdots * A_n$ de n espacios topológicos $A_1, \ldots, A_n$ se puede definir como sigue. Un elemento del producto join está dado por*

1. *n números reales $t_1, \ldots, t_n$ tales que $t_i \geq 0$ para toda i, $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l = 1$, y*
2. *un elemento $a_i \in A_i$ para cada i tal que $t_i \neq 0$.*

A dicho punto en $A_1 * \cdots * A_n$ se le denota como $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l a_l$, donde omitimos los sumandos con $t_j = 0$. A este espacio se le dota de la topología más pequeña tal que las funciones coordenada

$$t_i : A_1 * \cdots * A_n \to [0, 1] \text{ y } a_i : t_i^{-1}(0, 1] \to A_i$$

son continuas. A esta topología la llamaremos topología fuerte.

Observemos que de las definiciones anteriores se sigue que una subbase para los abiertos de dicha topología está dada por los conjuntos de los siguientes dos tipos:

1. el conjunto de todos los $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l a_l$ tales que $\alpha < t_l < \beta$,
2. el conjunto de todos los $\sum\limits_{l=1}^{n} t_l a_l$ tales que $t_i \neq 0$ y $a_i \in U$, donde U es un abierto arbitrario de A_i.

Definición 1.3.2. *Sea G un grupo topológico. Definimos $E^n G = G * \cdots * G$ como el producto join de $n+1$ copias de G con la topología fuerte.*

De la definición anterior tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ si $n \leq m$ entonces $E^n G \subseteq E^m G$ o para ser más exactos podemos dar una función continua inyectiva de uno a otro que denotaremos ι^n en el caso de

$m = n+1$. En otro caso, para $n < m$ denotaremos a esta inclusión como $\imath_{m-n}$ definida de la siguiente manera

$$\imath_{m-n} : E^nG \longrightarrow E^mG$$
$$\sum_{l=0}^{n} t_l g_l \mapsto \sum_{l=0}^{m} t_l g_l$$

donde $t_i = 0$ para cada $n < i \leq m$. Por otro lado, observemos que dados $g \in G$ y $\sum_{l=0}^{n} t_l a_l \in E^nG$ entonces podemos definir $\sum_{l=0}^{n} t_l g_l \cdot g := \sum_{l=0}^{n} t_l g_l g$. Es fácil ver que esto define una acción de G en E^nG para toda $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.3.3. *Sea G un grupo topológico. Definimos B^nG como el espacio cociente E^nG/G y sea π_n la proyección correspondiente a este cociente.*

Observemos que como en el caso anterior podemos dar una función continua inyectiva de B^nG a B^mG para toda $n \leq m$ (en este caso denotamos como j_n al caso $m = n+1$). De eso, podemos construir dos espacios EG y BG como límites de los siguientes diagramas

$$E^1G \xhookrightarrow{\iota^1} E^2G \xhookrightarrow{\iota^2} E^3G \xhookrightarrow{} \cdots$$

$$B^1G \xhookrightarrow{j_1} B^2G \xhookrightarrow{j_2} B^3G \xhookrightarrow{} \cdots$$

Y además una función continua inducida por las proyecciones π_n entre EG y BG por la propiedad universal del límite.

El nombre de este espacio deriva de lo siguiente. Dado un CW-complejo X, las clases de equivalencia de haces G-principales sobre X están en biyección natural con $[X, BG]$ las clases de homotopía de funciones $X \to BG$. Además, este espacio está definido de manera única salvo homotopía débil.

Por otro lado, dados grupos finitos H, G y un homomorfismo $\varphi : H \to G$ existen un par de funciones continuas inducidas

$$E^n\varphi : E^nG \to E^nH \qquad\qquad B^n\varphi : B^nG \to B^nH$$
$$\sum_{l=0}^{n} t_l g_l \mapsto \sum_{l=0}^{n} t_l \varphi(g_l) \qquad\qquad \left[\sum_{l=0}^{n} t_l g_l\right] \mapsto \left[\sum_{l=0}^{n} t_l \varphi(g_l)\right]$$

que están bien definidas pues φ es morfismo de grupos y son continuas, con lo que inducen una función $B\varphi \colon BG \to BH$.

Ejemplo 1.3.4. *Para el grupo $\mathbb{Z}_2$ tenemos que su espacio clasificante $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^\infty$.*

1.4 Cohomología de grupos

Definición 1.4.1. *Sea G un grupo. Denotamos por $\mathbb{Z}[G]$ (o simplemente $\mathbb{Z}G$) al $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los elementos de G.*

De la definición anterior tenemos que cada elemento en $\mathbb{Z}[G]$ se escribe de manera única de la forma $\sum_{g\in G} n_g g$, con $n_g \in \mathbb{Z}$ y $a(g) = 0$ para casi toda g. Además, la multiplicación en G se extiende de manera única (pues G genera a $\mathbb{Z}[G]$ como $\mathbb{Z}$-módulo) a un producto $\mathbb{Z}$-bilineal $\mathbb{Z}[G]\times\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G]$; dicha estructura hace a $\mathbb{Z}[G]$ un anillo llamado anillo de grupo de G sobre los enteros.

Asociado a $\mathbb{Z}[G]$ tenemos un morfismo $\epsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ dado por

$$\epsilon\left(\sum_{g\in G} n_g g\right) = \sum_{g\in G} n_g$$

llamado morfismo de aumentación.

Definición 1.4.2. *Sea G un grupo. Decimos que un grupo abeliano M es un G-módulo si existe una acción de G en M de tal manera que para todo $m, m' \in M$ y $g \in G$ se tiene que $g(m + m') = gm + gm'$.*

A continuación definiremos la cohomología de un grupo G con coeficientes en un G-módulo. Escojamos una resolución $\mathbb{Z}G$-proyectiva $F \to \mathbb{Z}$ con funciones borde $\delta'\colon F_{n+1} \to F_n$, donde $\mathbb{Z}$ tiene la estructura de $\mathbb{Z}G$-módulo dada por

$$\left(\sum_{g\in G} n_g g\right) m = \sum_{g\in G} n_g m.$$

Consideremos al complejo $\mathrm{Hom}_G(F, M)$ donde M está visto como un complejo de cadena de dimensión 0. Vemos que por la definición de Hom tenemos que $\mathrm{Hom}_G(F, M)_n = \mathrm{Hom}_G(F_{-n}, M)$. Entonces podemos ver a $\mathrm{Hom}_G(F, M)$ como un complejo de cocadena cambiando los índices

$$\mathrm{Hom}_G(F, M)^n = \mathrm{Hom}_G(F, M)_{-n} = \mathrm{Hom}_G(F_n, M).$$

Este es un complejo de cocadena con funciones bordes dadas por

$$(\delta u)(x) = (-1)^{n+1} u(\delta x)$$

para cada $u \in \mathrm{Hom}_G(F, M)^n$ y $x \in F_{n+1}$. Ahora definimos

$$H^*(G, M) = H^*(\mathrm{Hom}_G(F, M)).$$

Definición 1.4.3. *Sea G un grupo y M un G-módulo. Definimos al grupo de coinvariantes de M, denotado M_G, como el cociente de M por el subgrupo aditivo generado por los elementos de la forma $gm - m$ con $g \in G$ y $m \in M$.*

Calculemos la cohomología de los grupos cíclicos. Supongamos que G es un grupo cíclico finito de orden n con generador t. Entonces tenemos la siguiente resolución:

$$\cdots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

donde $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$ y los morfismos son multiplicar por el elemento indicado. Entonces $H^*(G, M)$ es la cohomología de

$$M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} \cdots,$$

Observemos que $N : M \to M$ satisface $Ngm = Nm$ para todo $g \in G$ y $m \in M$, y $NM \subseteq M^G$. Por otro lado, el kernel del morfismo $t-1 : M \to M$ es exactamente M^G. Así, podemos pensar a N como un morfismo $M_G \to M^G$. De esto podemos ver que

$$H^{i+1}(G, M) = M^G/NM = \text{Coker } N$$

para i impar $(i \geq 1)$ y que

$$H^{i-1}(G, M) = \text{Ker } N$$

para i par $(i \geq 2)$.

Ejemplo 1.4.4. *Usando lo anterior, calcularemos $H^*(G, \mathbb{Z})$ y $H^*(G, \mathbb{Z}[G])$ donde $\mathbb{Z}$ está visto como un G-módulo con la acción trivial. Para $H^*(G, \mathbb{Z})$, tenemos que $\mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$, $N\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ y $\operatorname{Ker} N = 0$ por lo que*

$$H^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0; \\ \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n & i > 0 \text{ es par;} \\ 0 & i > 0 \text{ es impar} \end{cases}$$

Para $H^*(G, \mathbb{Z}[G])$, tenemos que la sucesión $\mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{-1} \cdots$ es exacta, por lo que

$$H^i(G, \mathbb{Z}[G]) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = 0; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea G un grupo finito y A un anillo conmutativo con unidad. Se dice que M es un A-G-módulo si es un A-módulo y un G-módulo, y si las operaciones de A y G conmutan. En el caso que M sea finitamente generado como A-módulo, entonces los grupos de cohomología $H^q(G, M)$ serán A-módulos finitamente generados y entonces podemos formar sus completaciones $\mathfrak{a}$-ádicas $H^q(G, M)^\wedge$. Ahora, por la conmutatividad de las operaciones en M tenemos que los submódulos son G-estables. Entonces $M/\mathfrak{a}^n M$ es un A-G-módulo y por lo tanto también lo es en M.

Proposición 1.4.5. *Sea M un A-G-módulo. Entonces se tiene un isomorfismo canónico*

$$H^q(G, M)^\wedge \cong H^q(G, \widehat{M}).$$

Demostración. Sea $\Lambda = Z[G]$ el anillo de grupo de G y sea $\{X_n\}$ una resolución Λ-libre de $\mathbb{Z}$. Por definición se tiene que

$$H^q(G, M) = H^q(\operatorname{Hom}_\Lambda(X_*, M)).$$

Ahora $\mathrm{Hom}_\Lambda(X_q, M)$ es, para cada q, un A-módulo finitamente generado. Entonces por la Proposición 1.1.8 tenemos que

$$H^q(\mathrm{Hom}_\Lambda(X_*, M))^\wedge \cong H^q(\mathrm{Hom}_\Lambda(X_*, M)^\wedge).$$

Dado que X_q es, para cada q, un Λ-módulo libre se sigue que

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(X_*, M)^\wedge \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(X_*, \widehat{M}).$$

De lo anterior se sigue lo buscado. □

1.5 La p-completación de un espacio topológico y sus propiedades

En esta sección se dará una breve introducción a la p-completación de un espacio topológico y algunos de los resultados que se saben de estos espacios p-completados. Para conocer más sobre esta contrucción referimos al lector a [8], a [7] y a [15]. En lo siguiente, p denotará a un número primo y los espacios serán conexos por trayectorias.

Definición 1.5.1. *Una función $\zeta : X \to Y$ es una $\mathbb{F}_p$-equivalencia si $\zeta_* : H_*(X; \mathbb{F}_p) \to H_*(Y; \mathbb{F}_p)$ es un isomorfismo.*

Ahora, veamos cómo se define la p-completación de un espacio X cuando este es nilpotente.

Definición 1.5.2. *Un espacio Z es p-completo si $\zeta^* : [Y, Z] \to [X, Z]$ es una biyección para toda $\mathbb{F}_p$-equivalencia $\zeta : X \to Y$.*

Esto nos dice que para cualquier función continua $f : X \to Z$, existe una función continua $\tilde{f}$, única hasta homotopía, que hace que el siguiente diagrama conmute salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\zeta"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & Z & \end{tikzcd} .$$

Definición 1.5.3. *Una p-completación de X es una función $\varphi : X \to X_p^\wedge$ tal que*

1. *$X_p^\wedge$ es p-completo*
2. *φ es una $\mathbb{F}_p$-equivalencia.*

Estas p-completaciones siempre existen para espacios nilpotentes y tienen una propiedad universal. Si $f : X \to Z$ es cualquier función de X a un espacio p-completo Z, entonces existe una función $\tilde{f}$, única salvo homotopía, tal que el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & X_p^\wedge \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Así, las p-completaciones son únicas salvo homotopía.

En general, a cada espacio podemos asociarle un espacio $X_p^\wedge$ llamado su p-completación junto con un morfismo natural $\zeta\colon X \to X_p^\wedge$. Este espacio $X_p^\wedge$ no necesariamente es una p-completación en el sentido de la Definición 1.5.3 pero igualmente se le llama la p-completación de X. Se puede ver a los espacios en tres distintas clases dependiendo de su semejanza a su p-completación.

Definición 1.5.4. *Decimos que un espacio X es:*

1. *p-completo si $\zeta\colon X \to X_p^\wedge$ es una equivalencia débil,*

2. *p-bueno si $\zeta : X \to X_p^\wedge$ es una $\mathbb{F}_p$-equivalencia y*

3. *p-malo si no es p-bueno.*

De hecho tenemos el siguiente resultado acerca de esta clasificación de los espacios.

Proposición 1.5.5. *Para un espacio X las siguientes condiciones son equivalentes*

1. *X es p-bueno,*

2. *$X_p^\wedge$ es p-completo,*

3. *$X_p^\wedge$ es p-bueno.*

Para un espacio p-bueno X, la $\mathbb{F}_p$-equivalencia $\zeta\colon X \to X_p^\wedge$ tiene las siguientes propiedades universales salvo homotopía:

1. Para cualquier $\mathbb{F}_p$-equivalencia $\zeta'\colon X \to Y$ existe una única $g\colon Y \to X_p^\wedge$ salvo homotopía tal que $g\zeta' \simeq \zeta$.

2. Para cualquier espacio p-completo Y y $\zeta'\colon X \to Y$ existe un único $g\colon X_p^\wedge \to Y$ salvo homotopía tal que $g\zeta \simeq \zeta'$.

Para un grupo finito G, su espacio clasificante es p-bueno por lo cual tenemos un isomorfismo $H_*(BG;\mathbb{F}_p) \cong H_*(BG_p^\wedge;\mathbb{F}_p)$ y $H^*(G,\mathbb{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbb{F}_p)$. Esto nos dice un poco de la importancia de la p-completación de espacios clasificantes y cómo nos pueden ayudar a conocer el espacio clasificante. Finalmente, el Teorema 4.3.1 de [7], nos dice que podemos recuperar a BG salvo homología entera usando solamente los espacios $BG_p^\wedge$ para cada p primo que divide a $|G|$.

2 K-teoría y la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch

Daremos una breve introducción a la K-teoría. Empezando por cómo se definió en una primera instancia para espacios topológicos compactos y Hausdorff para luego hablar de su construcción general y sus propiedades como teoría de cohomología.

2.1 K-teoría

Desarrollaremos un poco de la teoría de haces vectoriales complejos. Por ello, en esta sección siempre hablaremos de espacios vectoriales complejos.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico. Un haz vectorial sobre X es una terna (E, π, X) tal que*

1. *E es un espacio topológico*
2. *$\pi : E \to X$ es una función continua y suprayectiva*
3. *Para cada $x \in X$ se tiene un homeomorfismo de $E_x = \pi^{-1}(x)$, con su topología de subespacio de E, a un espacio vectorial de dimensión n_x.*
4. *Existe una cubierta abierta U_α de X y homeomorfismos $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_\alpha \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd} .$$

   donde π_1 es la proyección en la primera coordenada. Además, para cada $x \in U_\alpha$ se tiene que la restricción de h_α a E_x es un isomorfismo de espacios vectoriales con $\{x\} \times \mathbb{C}^{n_x}$. Cuando sea claro quién es el espacio base y la proyección nos referiremos al haz vectorial simplemente como E.

Al espacio E se le llama espacio total, a X se le llama espacio base, a π se le llama proyección, a los espacios vectoriales $\pi^{-1}(x)$ se les llama fibras y a las funciones h_α se les llama trivializaciones locales.

A continuación daremos algunos ejemplos de haces vectoriales

Ejemplo 2.1.2. *El haz trivial $E = X \times \mathbb{C}^n$ con π la proyección en la primera coordenada.*

Ejemplo 2.1.3. *Sea $\mathbb{C}P^n$ es espacio proyectivo complejo de dimensión n. Sus elementos están dados por clases de equivalencia de vectores no nulos $[z_0, \dots, z_n]$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ donde dos vectores son equivalentes si uno* *es múltiplo escalar no nulo del otro. El haz canónico de líneas $\pi\colon E \to \mathbb{C}P^n$ tiene como espacio total E al subespacio de $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ que consiste de los pares (x,v) tales que $v \in x$ o $v = 0$ y $\pi(x,v) = x$.*

Definición 2.1.4. *Sean (E_1, π_1, X) y (E_2, π_2, X) haces vectoriales. Un isomorfismo entre haces vectoriales con espacios base X es una función $h : E_1 \to E_2$ tal que $h_{|\pi_1^{-1}(x)} : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(x)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para todo $x \in X$. Si E_1 y E_2 son isomorfos lo denotaremos como $E_1 \cong E_2$*

A partir de haces vectoriales podemos construir uno nuevo a partir de ellos de diferentes maneras.

Definición 2.1.5. *Sean (E_1, π_1, X) y (E_2, π_2, X) haces vectoriales. Definimos la suma directa de E_1 y E_2 cuyo espacio total es*

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 \mid \pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}.$$

Entonces existe una proyección $E_1 \oplus E_2 \to X$ que envía (v_1, v_2) al punto $\pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)$. Las fibras de esta proyección son la suma directa de las fibras de E_1 y E_2. Este espacio con la proyección mencionada forma un nuevo haz vectorial.

Para convencernos que lo anterior define un haz vectorial observemos lo siguiente:

1. Dado un haz vectorial $\pi\colon E \to X$ y un subespacio $Y \subseteq X$, entonces $\pi\colon \pi^{-1}(Y) \to Y$ es claramente un haz vectorial. A este haz le llamamos la restricción de E sobre Y.

2. Dados dos haces vectoriales E_1 y E_2, entonces $\pi_1 \times \pi_2\colon E_1 \times E_2 \to X \times X$ es también un haz vectorial con fibras $\pi_1^{-1}(x_1) \times \pi_2^{-1}(x_2)$. Si tenemos trivializaciones locales $h_\alpha\colon \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ y $h_\beta\colon \pi_2^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{C}^m$ para E_1 y E_2, entonces $h_\alpha \times h_\beta$ es una trivialización local para $E_1 \times E_2$.

Entonces, para considerar a la suma directa de E_1 y E_2 basta con restringir el producto $E_1 \times E_2$ a la diagonal $\{(x,x) \in X \times X\}$.

Proposición 2.1.6. *Si E es un haz vectorial con espacio base compacto y $E_0 \subset E$ es un subhaz vectorial, entonces existe un subhaz $E_0^\perp \subset E$ tal que $E_0 \oplus E_0^\perp \cong E$.*

Proposición 2.1.7. *Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Entonces para cada haz vectorial E, existe un haz vectorial E' tal que $E \oplus E'$ es isomorfo a un haz trivial.*

Otra construcción de espacios vectoriales importante para la K-teoría es el producto tensorial de estos. Sean E_1 y E_2 haces vectoriales sobre X. Sea $E_1 \otimes E_2$, como conjunto, la unión disjunta de los espacios vectoriales $\pi_1^{-1}(x) \otimes \pi_2^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. La topología de este conjunto se define de la siguiente manera. Escogemos un homeomorfismo $h_i : \pi_i^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^{n_i}$ para cada abierto $U \subset X$ sobre el cual E_1 y E_2 son triviales. Entonces la topología τ_U en el conjunto $\pi_1^{-1}(U) \otimes \pi_2^{-1}(U)$ se define de tal manera que $h_1 \otimes h_2 : \pi_1^{-1}(U) \otimes \pi_2^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2})$ sea un homeomorfismo. Esta topología no depende de la elección de las h_i pues cualquier otra elección se obtiene componiendo con un homeomorfismo de $U \times \mathbb{C}^{n_i}$ de la forma $(x,v) \mapsto (x, g_i(x)(v))$ para funciones continuas $g_i : U \to GL_{n_i}(\mathbb{C})$. Este cambio haría que $h_1 \otimes h_2$ cambiara mediante una composición con un homeomorfismo correspondiente de $U \times (\mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2})$ cuyas segundas coordenadas son funciones continuas $g_1 \otimes g_2 : U \to GL_{n_1 n_2}(\mathbb{C})$, ya que las entradas de las matrices $g_1(x) \otimes g_2(x)$ son los productos de las entradas de $g_1(x)$ y $g_2(x)$. Cuando reemplazamos U por un abierto V de X, entonces la topología de $\pi_1^{-1}(V) \otimes \pi_2^{-1}(V)$ inducida por τ_U es la misma que la topología τ_V ya que las trivializaciones locales sobre U se restringen a trivializaciones locales sobre V. Entonces tenemos una topología bien definida en $E_1 \otimes E_2$ que lo hace un haz vectorial sobre X.

Definición 2.1.8. *Sean E_1 y E_2 haces vectoriales sobre X. Definimos $E_1 \otimes E_2$ como el producto tensorial de E_1 y E_2*

Consideremos los haces vectoriales sobre un espacio base fijo X. Denotaremos como ϵ^n al haz vectorial trivial n-dimensional.

Definición 2.1.9. *Sean E_1 y E_2 haces vectoriales sobre X. Decimos que E_1 y E_2 son establemente isomorfos y denotamos esta relación mediante $E_1 \simeq E_2$, si $E_1 \oplus \epsilon^n \cong E \oplus \epsilon^n$ para alguna n. Asimismo, definimos $E_1 \sim E_2$ si y solo si $E_1 \oplus \epsilon^m \cong E_2 \oplus \epsilon^n$ para alguna m y n.*

Tanto $\simeq$ como $\sim$ definen relaciones de equivalencia. Además, en clases de equivalencia la suma directa es una operación bien definida, asociativa, y conmutativa con elemento neutro ϵ^0.

Proposición 2.1.10. *Si X es un espacio Hausdorff y compacto, entonces el conjunto de clases de equivalencia bajo $\sim$ de haces vectoriales sobre X forman un grupo abeliano con respecto a $\oplus$. A este grupo se le llama $\tilde{K}(X)$.*

Para la relación $\simeq$ tenemos la propiedad de cancelación en la suma directa, ya que $E_1 \oplus E_2 \simeq E_1 \oplus E_3$ implica que $E_2 \simeq E_3$ cuando el espacio base es compacto.

Para un espacio compacto y Hausdorff X podemos construir al grupo $K(X)$ de diferencias formales $E - E'$ de haces vectoriales E y E' sobre X, con la relación de equivalencia $E_1 - E_1' = E_2 - E_2'$ si y solo si $E_1 \oplus E_2' \simeq E_2 \oplus E_1'$. Con la suma $(E_1 - E_1') + (E_2 - E_2') = (E_1 \oplus E_2) - (E_1' \oplus E_2')$ se le dota a $K(X)$ de una estructura de grupo. El elemento neutro es la clase de equivalencia de $E - E$ para cualquier E y el inverso de $E - E'$ es $E' - E$. Notemos que todo elemento de $K(X)$ se puede representar por uno de la forma $E - \epsilon^n$ ya que si tenemos un elemento de la forma $E - E'$ podemos sumar a ambos E y E' un haz E'' tal que $E' \oplus E'' \simeq \epsilon^n$.

Existe un homomorfismo natural $K(X) \to \tilde{K}(X)$ que envía $E - \epsilon^n$ a la clase de E. Esta función está bien definida ya que si $E - \epsilon^n = E' - \epsilon^m$ en $K(X)$, entonces $E \oplus \epsilon^m \simeq E' \oplus \epsilon^n$, por lo que $E \sim E'$. Esta función $K(X) \to \tilde{K}(X)$ es obviamente suprayectiva y su núcleo consiste de los elementos $E - \epsilon^n$ con $E \sim \epsilon^0$. En este caso se debe tener $E \simeq \epsilon^m$ para alguna m, así que el núcleo consiste de los elementos de la forma $\epsilon^m - \epsilon^n$. Este subgrupo $\{\epsilon^m - \epsilon^n\}$ de $K(X)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. De hecho, la restricción de haces vectoriales a un punto base $x_0 \in X$ define un homomorfismo $K(X) \to K(x_0)$ que se restringe a un isomorfismo en el subgrupo $\{\epsilon^m - \epsilon^n\}$. Entonces tenemos una escisión $K(X) \cong \tilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$, dependiendo de la elección de x_0. El grupo $\tilde{K}(X)$ es normalmente llamado reducido para distinguirlo de $K(X)$.

Además de la estructura aditiva en $K(X)$ también hay una multiplicación natural que viene del producto tensorial de haces vectoriales. Para elementos arbitrarios en $K(X)$ representados por diferencias formales, su producto está definido por la fórmula

$$(E_1 - E_1')(E_2 - E_2') = E_1 \otimes E_2 - E_1 \otimes E_2' - E_1' \otimes E_2 + E_1' \otimes E_2'$$

Las operaciones anteriormente definidas hacen a $K(X)$ un anillo conmutativo con neutro multiplicativo ϵ^1, el haz trivial de dimensión 1, usando las propiedades del producto tensorial de haces vectoriales.

Definición 2.1.11. *Sea X un espacio Hausdorff y compacto. Definimos $K(X)$ la K-teoría de X como el anillo de diferencias formales de haces vectoriales sobre X.*

Ahora, recordemos una definición clásica de la topología.

Definición 2.1.12. *Dado un espacio topológico X, definimos la suspensión SX de X como el cociente del producto $X \times I$ por la relación de equivalencia $\sim$ generada por $(x_1, 0) \sim (x_2, 0)$ y $(x_1, 1) \sim (x_2, 1)$ para toda $x_1, x_2 \in X$.*

Entonces definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ los siguientes grupos

$$\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(S^n X),$$

$$\widetilde{K}^{2n}(X) = \widetilde{K}(X)$$

y

$$\widetilde{K}^{2n+1}(X) = \widetilde{K}(SX).$$

Lo anterior define una teoría de cohomología reducida que es periódica.

Para el caso de espacios topológicos que no son necesariamente Hausdorff y compactos también se puede definir la K-teoría. Sea BU el colímite de los espacios clasificantes $BU(n)$ donde $U(n)$ es el grupo de matrices $n \times n$ unitarias . Se define la K-teoría de X como $[X, \mathbb{Z} \times BU]$ el conjunto de clases de homotopía de funciones de X a $\mathbb{Z} \times BU$ y la K-teoría reducida $\widetilde{K}(X)$ como $[X, BU]_*$ el conjuntos de clases de homotopía basada de funciones basadas de X a BU. Al igual que la construcción anterior, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ a $K^n(X) = \widetilde{K}^n(X \amalg *)$, donde $X \amalg *$ es el espacio X con un punto base disjunto $*$. Esto define una teoría de cohomología que es periódica.

Estas construcciones de la K-teoría son algo abstractas y complicadas de calcular en general. Más adelante veremos que para espacios clasificantes de grupos finitos la K-teoría se puede ver de manera muy explícita y en varios casos sencilla.

2.2 La sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch

En este apartado introduciremos el concepto de sucesión espectral y resultados importantes relacionados con estas. Estos objetos serán de utilidad para las demostraciones del teorema de completación de Atiyah en el caso de grupos cíclicos y solubles que se verán en el capítulo 5.

Definición 2.2.1. *Un módulo bigraduado diferencial sobre un anillo R, es un colección de R-módulos, $\{E^{p,q}\}$, donde $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, junto con una función R-lineal, $d\colon E^{*,*} \to E^{*,*}$, llamada función borde, de bigrado $(s, s-1)$ o $(-s, s-1)$ para algún entero s y cumple que $d \circ d = 0$.*

Definimos la homología de un módulo bigraduado diferencial como

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \operatorname{Ker} d\colon E^{p,q} \to E^{p+s,q-s+1} / \operatorname{Im} d\colon E^{p-s,q+s-1} \to E^{p,q}$$

Definición 2.2.2. *Un sucesión espectral es una sucesión de R-módulos bigraduados diferenciales $\{E_r^{*,*}\}$, donde $1 \leq r < \infty$; donde todas las diferenciales de la página E_r son de bigrado $(r, 1-r)$ y para toda p, q, r, el módulo $E_{r+1}^{p,q}$ es isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.*

Supondremos que en las sucesiones espectrales $E_r^{p,q} = 0$ para $p < 0$. Entonces cada $E_r^{*,*}$, para $2 \leq r < \infty$, se puede identificar con cociente de grupos Z_r^p/B_r^p, donde $Z_r^{*,*} = \operatorname{Ker} d_{r-1}$, $B_r^{*,*} = \operatorname{Im} d_{r-1}$ son subgrupos de $E_r^{*,*}$. Estos subgrupos se acomodan de la siguiente manera

$$B_2^{*,*} \subset \cdots \subset B_r^{*,*} \subset \cdots \subset Z_r^{*,*} \subset \cdots \subset Z_2^{*,*} = E_2^{*,*}.$$

Entonces definimos lo siguiente

$$B_\infty^{*,*} = \cup_r B_r^{*,*} = \varinjlim_r B_r^{*,*},$$

$$Z_\infty^{*,*} = \cap_r Z_r^{*,*} = \varprojlim_r Z_r^{*,*},$$

$$E_\infty^{*,*} = Z_\infty^{*,*}/B_\infty^{*,*}.$$

Definición 2.2.3. *Sea $\{E_r^{*,*}\}$ una sucesión espectral y M un grupo filtrado. Decimos que $\{E_r^{*,*}\}$ converge a M si tenemos isomorfismos $E_\infty^{p,q} \cong M_{p+q}/M_{p+q+1}$ y escribimos $E_2 \Rightarrow M$.*

Un ejemplo importante para este trabajo es la sucesión espectral de Atiyah-Hirzebruch. La siguiente proposición resume algunas de las propiedades más importantes.

Para $K^*(X)$ podemos definir la siguiente filtración cuando X es un CW-complejo. Definimos $K_p^*(X) = \operatorname{Ker}\{K^*(X) \to K^*(X^{p-1})\}$ donde X^{p-1} es el $(p-1)$-esqueleto de X. Esta filtración convierte a $K^*(X)$ en un anillo filtrado, es decir

$$K_p^*(X)K_q^*(X) \subseteq K_{p+q}^*(X).$$

Teorema 2.2.4. *Sea X un CW-complejo. Entonces existe una sucesión espectral $\{E^{*,*}(X)\}$ con $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathbb{Z})$, $E_\infty^{p,q} = K_p^*(X)/K_{p+1}^*(X)$ para q par y $E_2^{p,q} = 0$, $E_\infty^{p,q} = 0$ para q impar, con las siguientes propiedades:*

1. *Una función $f\colon Y \to X$ induce un homomorfismo de sucesiones espectrales $E_r^{p,q}(X) \to E_r^{p,q}(Y)$ que depende solamente de la clase de homotopía.*

2. *Una cubierta finita $f\colon Y \to X$ induce un homomorfismo de sucesiones espectrales $E_r^{p,q}(Y) \to E_r^{p,q}(X)$.*

3. *El producto cup en $H^*(X, \mathbb{Z})$ induce productos en cada E_r y para E_∞ el producto coincide con el producto inducido por la estructura de anillo de $K^*(X)$.*

4. *Las funciones borde pares d_{2r} son todas nulas, d_3 es la operación de Steenrod Sq^3 y $d_r(x) = 0$ para toda r y x tal que $\dim x \leq 2$.*

Para un haz fibrado $\pi\colon Y \to X$ con fibra F, podemos construir la siguiente filtración de $K^*(Y)$ con respecto a X. Consideremos a

$$K^*(Y)_X = \operatorname{Ker}\{K^*(Y) \to K^*(Y^{p-1})\}$$

donde $Y^{p-1} = \pi^{-1}(X^{p-1})$. Entonces tenemos lo siguiente:

Teorema 2.2.5. *Sea $\pi\colon Y \to X$ un haz fibrado con fibra F. Existe una generalización de la sucesión espectral anterior que calcula la K-teoría de Y a partir de la K-teoría de F y la cohomología con coeficientes locales de X. Dicha sucesión espectral $\{E_r^{p,q}\}$ con $E_2^{p,q} = H^p(X, K^*(F))$ y $E_\infty^{p,q} = K_p^*(Y)_X / K_{p+1}^*(Y)_X$ y tiene las siguientes propiedades:*

1. *Un diagrama conmutativo*
$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X & \longrightarrow & X' \end{array}$$
da lugar a un homomorfismo de sucesiones espectrales $E_r' \to E_r$;

2. *El producto cup en $H^*(X, K^*(F))$ usando la estructura de anillo de $K^*(F)$, induce un producto en cada E_r y para E_∞ coincide con el producto inducido por la estructura de anillo de $K^*(Y)$.*

3. *Si $K^1(F) = 0$ entonces toda d_{2r} es nula.*

Observación 2.2.6. *Las sucesiones espectrales de la Proposición 2.2.5 son módulos sobre las sucesiones espectrales de la Proposición 2.2.4*

La siguiente proposición es un caso particular del Teorema 2.2.5.

Proposición 2.2.7. *Sean G un grupo finito, H un subgrupo normal y $S = G/H$. Entonces $K(BG)$ tiene un filtración definida relativa a S, y una sucesión espectral convergente: $H^*(S, K(BH)) \Rightarrow K(BG)$.*

La siguiente proposición es un caso particular del Teorema 2.2.4

Proposición 2.2.8. *Sea G un grupo finito. Entonces existe una sucesión espectral convergente:*

$$E_2 \Rightarrow K^*(BG).$$

con $E_2^{p,q} = H^p(G, \mathbb{Z})$ para q par y $E_2^{p,q} = 0$ para q impar.

Corolario 2.2.9. *Si $H^q(G, \mathbb{Z}) = 0$ para toda q, entonces $H^*(G, \mathbb{Z}) \cong GK^*(BG)$ como anillos graduados.*

Corolario 2.2.10. *Si en el Teorema 2.2.7 se tiene que $H^n(S, K^*(BH)) = 0$ para toda n impar y $K^1(BH) = 0$, entonces $H^*(G, \mathbb{Z}) \cong GK^*(BG)$ (como anillos graduados).*

Las definiciones y resultados en esta sección pueden ser revisados en [3] y en [4].

3 Sistemas de fusión

En este capítulo daremos una introducción a los sistemas de fusión. Centraremos nuestra atención en los sistemas de fusión de grupos finitos y algunos de los resultados que serán utilizados más adelante. Para revisar más resultados de sistemas de fusión el lector puede consultar [9]. En lo siguiente p denotará un número primo.

3.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 3.1.1. *Un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo finito S es una subcategoría de la categoría de grupos cuyos objetos son los subgrupos de S, y cuyos conjuntos de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ satisfacen las siguientes condiciones*

(a) $\mathrm{Hom}_S(P,Q) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \subseteq \mathrm{Inj}(P,Q)$ *para toda* $P, Q \leq S$.

(b) Todo morfismo de $\mathcal{F}$ se factoriza como un isomorfismo en $\mathcal{F}$ seguido por una inclusión.

donde $\mathrm{Hom}_S(P,Q)$ *es el conjunto de morfismos de grupos de P a Q dados por conjugar por algún elemento de S* e $\mathrm{Inj}(P,Q)$ *el conjunto de morfismos inyectivos de grupos de P a Q. Asimismo,* $\mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(P,Q)$ *denotará al conjunto de isomorfismos de grupos de P a Q en $\mathcal{F}$.*

En particular, consideraremos el sistema de fusión de un grupo G. Sea $\mathrm{Syl}_p(G)$ el conjunto de subgrupos de p-Sylow de G. Para cualquier $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$, consideramos el sistema de fusión $\mathcal{F}_S(G)$ sobre S donde $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P,Q) = \mathrm{Hom}_G(P,Q)$ para todo $P, Q \leq S$.

Definición 3.1.2. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S y $P, Q \leq S$.*

1. *Decimos que P y Q son $\mathcal{F}$-conjugados si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q) \neq \emptyset$.
2. *Un subgrupo $P \leq S$ es completamente centralizado en $\mathcal{F}$ si $|C_S(P)| \geq |C_S(P')|$ para todo $P' \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-conjugado a P.*
3. *Un subgrupo $P \leq S$ es completamente normalizado en $\mathcal{F}$ si $|N_S(P)| \geq |N_S(P')|$ para todo $P' \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-conjugado a P.*
4. *Se dice que $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado si se cumple lo siguiente:*
   a) Cada subgrupo completamente normalizado $P \leq S$ es completamente centralizado y el grupo $\mathrm{Aut}_S(P)$ *es un subgrupo de p-Sylow de* $\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$ *en este caso.*

b) Si $P \leq S$ y $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$ son tales que φP es completamente centralizado y si establecemos

$$N_{\varphi} = \{g \in N_S(P) \mid \varphi c_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}_S(\varphi P)\}$$

entonces existe un $\bar{\varphi}\colon N_{\varphi} \to S$ en la categoría $\mathcal{F}$ tal que $\bar{\varphi}_{|P} = \varphi$.

Bajo esta definición tenemos que $\mathcal{F}_S(G)$ es un sistema de fusión saturado. Sin embargo, existen ejemplos de sistemas de fusión saturados $\mathcal{F}$ que no son de la forma $\mathcal{F}_S(G)$ y son llamados sistemas de fusión exóticos. Algunos ejemplos de estos sistemas de fusión exóticos se pueden encontrar en la sección 9 de [9].

Definición 3.1.3. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S. Dado $P \leq S$, decimos que P es $\mathcal{F}$-céntrico si P y todos sus $\mathcal{F}$-conjugados contienen a sus S-centralizadores.*

Definición 3.1.4. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S. Decimos que P es $\mathcal{F}$-radical si $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)$ es p-reducido, i.e. $O_p(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P)) = 1$, donde $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(P) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)/\mathrm{Inn}(P)$ y $O_p(-)$ es el p-subgrupo normal maximal.*

Definición 3.1.5. *La categoría de órbitas de un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p-grupo S es la categoría $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ cuyos objetos son los subgrupos de S y sus morfismos son*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}(P,Q) = \mathrm{Rep}_{\mathcal{F}}(P,Q) := \mathrm{Inn}(Q) \setminus \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,Q)$$

3.2 Elementos estables

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p-grupo S y D una categoría cuyos objetos son conjuntos y los morfismos son funciones. Consideremos un funtor contravariante

$$H : \mathcal{F} \to D$$

y para cada subgrupo P de S denotamos por $\imath_P^S$ la inclusión de P en S.

Definición 3.2.1. *Se dice que un elemento x en $H(S)$ es $\mathcal{F}$-estable si satisface*

$$H(f)(x) = H(\imath_P^S)(x)$$

para toda $P \leq S$ y para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P,S)$. Denotaremos al conjunto de elementos estables como $H(S)^{\mathcal{F}}$.

Como se menciona en [10] los elementos estables nos pueden ayudar a calcular la cohomología y la K-teoría de espacios clasificantes de grupos p-locales finitos y el anillo de representaciones de sistemas de fusión. Es por ello que revisaremos algunas propiedades acerca de estos elementos.

Teorema 3.2.2 (Lema de fusión de Alperin para sistemas de fusión saturados)**.** *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre S. Entonces, para cada morfismo $\varphi \in \mathrm{Iso}_{\mathcal{F}}(P,P')$ en $\mathcal{F}$, existen sucesiones de subgrupos de S*

$$P = P_0, P_1, \dots P_k = P' y \;\; Q_1, Q_2, \dots Q_k$$

y elementos $\varphi_i \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$, tales que:

(a) Q_i es completamente normalizado en $\mathcal{F}$, es $\mathcal{F}$-radical y $\mathcal{F}$-céntrico para cada $i \in \{1, \dots, k\}$;

(b) $P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ y $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$; y

(c) $\varphi(q) = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \cdots \circ \varphi_1(q)$ para toda $q \in P$.

Teorema 3.2.3. *Sea $x \in H(S)$. Los siguientes son equivalentes:*

1. *x es $\mathcal{F}$-estable*
2. *$H(f)H(\imath_Q^S)(x) = H(\imath_P^S)(x)$ para todo $P, Q \leq S$ y para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$*
3. *$H(f)H(\imath_P^S)(x) = H(\imath_P^S)(x)$ para todo $P \leq S$ que sea $\mathcal{F}$-céntrico y radical y todo $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.*

Demostración. $1) \implies 2)$

Supongamos que x es $\mathcal{F}$-estable, entonces $H(h)(x) = H(\imath_P^S)(x)$ para todo $P \leq S$ y $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$. Así, dado $Q \leq S$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ tenemos que

$$\begin{aligned} H(f)H(\imath_Q^S)(x) &= H(\imath_Q^S f)(x) \\ &= H(\imath_P^S)(x) \end{aligned}$$

ya que $\imath_Q^S f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$.

$2) \implies 3)$

Se sigue directamente ya que se cumple para todo $P \leq S$, en particular para los $\mathcal{F}$-céntricos y radicales.

$3) \implies 1)$

Sean $P \leq S$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$. Sea $h : P \to f(P)$ la restricción de f a su imagen. Por el Teorema 3.2.2 aplicado a $h : P \to f(P)$, existen $P = P_0, P_1, \dots, P_k = f(P)$ subgrupos de S, subgrupos $Q_1, Q_2, \dots Q_k$ que sean completamente normalizados en $\mathcal{F}$, son $\mathcal{F}$-radicales y $\mathcal{F}$-céntricos, y elementos $\varphi_i \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ tales que Q_i es completamente normalizado en $\mathcal{F}$, es $\mathcal{F}$-radical y $\mathcal{F}$-céntrico para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y $f(y) = h(y) = \varphi_k \varphi_{k-1} \cdots \varphi_1(y)$ para cada $y \in P$. Además $P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ y $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Para una función $F \colon A \to B$ y $F(A) \subseteq C \subseteq B$ Denotaremos por $F_{\mathsf{Im}=C}$ a la restricción de rango de F a C. Así,

$$\begin{aligned} H(f)(x) &= H(h)H(\imath_{P_k}^S)(x) \\ &= H((\varphi_k \imath_{P_{k-1}}^{Q_k})_{\mathsf{Im}=P_k} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{P_k}^S)(x) \\ &= H((\varphi_{k-1} \imath_{P_{k-2}}^{Q_{k-1}})_{\mathsf{Im}=P_{k-1}} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H((\varphi_k \imath_{P_{k-1}}^{Q_k})_{Im=P_k}) H(\imath_{P_k}^S)(x) \\ &= H((\varphi_{k-1} \imath_{P_{k-2}}^{Q_{k-1}})_{\mathsf{Im}=P_{k-1}} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{Q_k}^S \varphi_k \imath_{P_{k-1}}^{Q_k})(x) \\ &= H((\varphi_{k-1} \imath_{P_{k-2}}^{Q_{k-1}})_{\mathsf{Im}=P_{k-1}} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{P_{k-1}}^{Q_k}) H(\varphi_k) H(\imath_{Q_k}^S)(x) \\ &= H((\varphi_{k-1} \imath_{P_{k-2}}^{Q_{k-1}})_{\mathsf{Im}=P_{k-1}} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{P_{k-1}}^{Q_k}) H(\imath_{Q_k}^S)(x) \\ &= H((\varphi_{k-1} \imath_{P_{k-2}}^{Q_{k-1}})_{\mathsf{Im}=P_{k-1}} \circ \cdots \circ (\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{P_{k-1}}^S)(x) \end{aligned}$$

Por un argumento de inducción se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&= H((\varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})_{\mathsf{Im}=P_1}) H(\imath_{P_1}^S)(x) \\
&= H(\imath_{Q_1}^S \varphi_1 \imath_{P_0}^{Q_1})(x) \\
&= H(\imath_{P_0}^{Q_1}) H(\varphi_1) H(\imath_{Q_1}^S)(x) \\
&= H(\imath_{P_0}^{Q_1}) H(\imath_{Q_1}^S)(x) \\
&= H(\imath_{P_0}^S)(x) \\
&= H(\imath_P^S)(x)
\end{aligned}
$$

lo cual prueba que x es $\mathcal{F}$-estable. □

Proposición 3.2.4. *Sea $\mathcal{D}$ la categoría de R-módulos para R un anillo conmutativo con unidad. Entonces existe un isomorfismo*

$$H(S)^{\mathcal{F}} = \varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H$$

Demostración. Para cada $P \leq S$ sea $\alpha_P \colon \varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H \to P$ el morfismo asociado a $\varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H$. Veamos que $\alpha_S(\varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H) \subseteq H(S)^{\mathcal{F}}$. Denotaremos a $\varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H$ como L en lo siguiente. Para ello, sea $P \leq S$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
H(S) \arrow[d, "H(\imath_P^S)"'] & & H(S) \arrow[d, "H(f)"] \\
& L \arrow[ul, "\alpha_S"'] \arrow[ur, "\alpha_S"] \arrow[dl, "\alpha_P"] \arrow[dr, "\alpha_P"'] & \\
H(P) & & H(P)
\end{tikzcd}
.
$$

De este diagrama obtenemos que para toda $x \in L$ se tiene que $H(f)\alpha_S(x) = H(\imath_P^S)\alpha_S(x)$. Por lo tanto, $\alpha_S(L) \subseteq H(S)^{\mathcal{F}}$. Ahora, por el inciso 2 del Teorema 3.2.3 tenemos que para cualesquiera $Q, P \leq S$ y $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ el siguiente diagrama conmuta

$$
\begin{tikzcd}
& H(Q) \arrow[d, "H(f)"] \\
H(S)^{\mathcal{F}} \arrow[ur, "\mathcal{F}H(\imath_Q^S)"] \arrow[dr, "\mathcal{F}H(\imath_P^S)"'] & \\
& H(P)
\end{tikzcd}
$$

donde $\mathcal{F}H(\imath_Q^S)$ y $\mathcal{F}H(\imath_P^S)$ denotan las restricciones de $H(\imath_Q^S)$ y $H(\imath_P^S)$ a $H(S)^{\mathcal{F}}$ respectivamente. De lo anterior, por la propiedad universal del límite existe un único morfismo $\psi : H(S)^{\mathcal{F}} \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H(S)^{\mathcal{F}} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, swap, "\mathcal{F}H(\imath_P^S)"] & & L \arrow[dl, "\alpha_P"] \\ & H(P) & \end{tikzcd}$$

para todo $P \leq S$. Observemos en particular que si tomamos $P = S$, entonces tenemos

$$\begin{tikzcd} H(S)^{\mathcal{F}} \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, swap, "\mathcal{F}1_{H(S)}"] & & L \arrow[dl, "\alpha_S"] \\ & H(S) & \end{tikzcd}$$

por lo cual $\alpha_S \psi = 1_{H(S)^{\mathcal{F}}}$. Luego, para cada $P \leq S$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} H(S)^{\mathcal{F}} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\mathcal{F}H(\imath_P^S)"] & L \arrow[d, "\alpha_P"] \\ L \arrow[u, "\alpha_S"] \arrow[r, swap, "\alpha_P"] & H(P) \end{tikzcd}$$

que conmuta, pues cada triángulo es conmutativo por lo que acabamos de probar. De nuevo, por la propiedad universal del límite podemos concluir que $\psi \alpha_s = 1_L$. Por lo tanto,

$$H(S)^{\mathcal{F}} \cong \varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

3.3 El caso de S_{p^2}

En esta sección estudiaremos la estructura del p-Sylow del grupo simétrico S_{p^2} y la fusión de este. Para ello, primero conozcamos al p-subgrupo de Sylow de S_{p^2} con el que estaremos trabajando. Antes de ello, veamos unas definiciones que serán importantes.

Definición 3.3.1. *Sean A y H subgrupos de un grupo G, donde A es normal en G. Decimos que G es un producto semidirecto interno de A por H si $G = A \cdot H$ y $A \cap H = \{1\}$ y escribimos $G = A \rtimes H$.*

Definición 3.3.2. *Sean A y H grupos. Supongamos que existe un morfismo de grupos $\varphi \colon H \to \mathrm{Aut}(A)$. Entonces podemos dotar al conjunto $A \times H$ de una estructura de grupo con el producto*

$$(a_1, h_1)(a_2, h_2) = (a_1 \varphi(h_1)(a_2), h_1 h_2).$$

Al conjunto $A \times H$ con este producto se le llama producto semidirecto externo y se le denota por $A \rtimes_\varphi H$. En caso de que el morfismo φ sea claro simplemente lo denotamos por $A \rtimes H$

Definición 3.3.3. *Sea G un grupo y $H \leq S_n$. Consideremos el morfismo $\varphi\colon H \to \operatorname{Aut}(G^n)$ dado por $\varphi(h)(g_1, \ldots, g_n) = (g_{h^{-1}(1)}, \ldots, g_{h^{-1}(n)})$. Definimos $G \wr H$ el producto corona de G por H como el producto semidirecto $G^n \rtimes H$.*

Para cada $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ sean $\sigma_i = (ip+1, \ldots, (i+1)p)$ y $\tau_i = (i+1, i+1+p, \ldots, i+1+p(p-1))$. Sea $\tau = \tau_0 \cdots \tau_{p-1}$. Observemos que para cada $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ el elemento σ_i es un p-ciclo y que τ es un producto de p p-ciclos por lo que ambos tienen orden p. Sea $S = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}, \tau \rangle$. Notemos que el grupo $\langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1} \rangle$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^p$ y que τ actúa por conjugación en este subgrupo de tal manera que $\tau \sigma_i \tau^{-1} = \sigma_{i+1}$. De lo anterior podemos ver que $S = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1} \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$. De esta manera podemos ver que $|S| = p^{p+1}$ por lo que S es un p-Sylow de S_{p^2}. Por ejemplo, para $p = 2$ tenemos que S es $\langle (1,2), (3,4) \rangle \rtimes \langle (1,3)(2,4) \rangle$ isomorfo a D_8 y para $p = 3$ el grupo S es $\langle (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \rangle \rtimes \langle (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle$.

Definición 3.3.4. *Sea p un primo y sean $c_1, \ldots, c_t, d$ enteros positivos.*

(a) Sea A_d el grupo abeliano elemental de orden p^d, considerado como subgrupo transitivo de S_{p^d} a través de su acción de permutación regular.

A lo que nos referimos en este caso es que dada cualquier biyección $\varphi : (\mathbb{Z}_p)^d \to \{1, \ldots, p^d\}$ consideramos el morfismo de grupos $\varphi^* : (\mathbb{Z}_p)^d \to S_{p^d}$ dado por $\varphi^*(s)(n) = \varphi(s\varphi^{-1}(n))$. Resulta que para cualquier biyección $\varphi : (\mathbb{Z}_p)^d \to \{1, \ldots, p^d\}$ el morfismo φ^* es inyectivo (Teorema de Cayley). Así $\varphi^*((\mathbb{Z}_p)^d)$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^d$ y además para cualquier otra biyección, los grupos obtenidos son conjugados. A cualquier grupo de los anteriores lo podemos considerar como A_d, pues son conjugados entre sí.

(b) Para $\mathbf{c} = (c_1, \ldots c_t)$ definimos $A_{\mathbf{c}} = A_{c_1} \wr \cdots \wr A_{c_t} \leq S_{p^c}$ donde $c = |\mathbf{c}| = c_1 + \cdots + c_t$ es el peso de $\mathbf{c}$. Al grupo $A_{\mathbf{c}}$ se le llama subgrupo básico.

Consideremos el siguiente resultado en [2]

Teorema 3.3.5. *Sea $G = S_V$. Entonces se cumple lo siguiente*

(a) Si $R \leq G$ es radical, entonces existen descomposiciones

$$V = V_0 \cup \cdots \cup V_s \text{ y } R = R_0 \times \cdots \times R_s$$

tales que R_0 es el subgrupo trivial de S_{V_0}, los conjuntos V_i son ajenos y $R_i = A_{\mathbf{c}_i}$, es un subgrupo básico de S_{V_i} con $|V_i| = p^{|\mathbf{c}_i|}$ para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$.

(b) Supongamos que $R \leq G$ tiene una descomposición como en (a), pero que no es necesariamente radical. Para cada lista de enteros positivos $\mathbf{c}$ sea $V(\mathbf{c}) = \cup_j V_j$ y $R(\mathbf{c}) = \prod_j R_j$, donde j corre sobre los índices tales que $\mathbf{c}_j = \mathbf{c}$. Sea $t_{\mathbf{c}}$ el número de factores directos no triviales en la descomposición de $R(\mathbf{c})$. Sea $C_G(R) = S(V_0) \times Z(R)$.

$$N_G(R) = S(V_0) \times \prod_{\mathbf{c}} N_{S(V(\mathbf{c}))}(R(\mathbf{c}))$$

con $N_{S(V(\mathbf{c}))}(R(\mathbf{c})) = N_{S(p^c)}(A_{\mathbf{c}}) \wr S(t_{\mathbf{c}})$, con $\mathbf{c} = (c_1, \ldots c_t)$ y $c = |\mathbf{c}|$, y

$$N_G(R)/R = S(V_0) \times \prod_{\mathbf{c}} N_{S(V(\mathbf{c}))}(R(\mathbf{c}))/R(\mathbf{c})$$

con $N_{S(V(\mathbf{c}))}(R(\mathbf{c}))/R(\mathbf{c}) = (N_{S(p^c)}(A_{\mathbf{c}})/A_{\mathbf{c}}) \wr S(t_{\mathbf{c}})$.

Cada subgrupo básico $A_{\mathbf{c}}$ *satisface* $C_{S(p^c)}(A_{\mathbf{c}}) \leq A_{\mathbf{c}}$ *y*

$$N_{S(p^c)}(A_{\mathbf{c}})/A_{\mathbf{c}} \cong GL(c_1, p) \times \cdots \times GL(c_t, p).$$

En vista de lo anterior, consideremos $G = S_{p^2}$ donde p es primo. Antes de continuar, probaremos el siguiente lema.

Lema 3.3.6. *Definimos* $K = \langle \sigma_0, \ldots, \sigma_{p-1} \rangle$ *y* $N = \langle \tau \rangle$. *Si* $\rho \in S = KN$ *es tal que* $\rho = \sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a$ *con* $a_i \in \{1, \ldots, p\}$ *para cada* $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ *y* $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ *entonces* ρ *es un producto de* p p*-ciclos o es un* p^2*-ciclo.*

Demostración. Bastará ver que si ρ es como en el enunciado, entonces ρ no tiene puntos fijos. Como S es p-Sylow de S_{p^2}, sabemos que ρ debe tener orden una potencia de p. En el caso que ρ no tuviera puntos fijos, como $\rho \in S_{p^2}$, entonces ρ es un producto de p p-ciclos o es un p^2-ciclo. Probemos entonces que ρ no tiene puntos fijos. Sea $k \in \{1, \ldots, p^2\}$, entonces tenemos que existe una única $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ tal que $k \in \{ip+1, \ldots, (i+1)p\}$. Luego, tenemos que $\tau^a(k) \equiv k + ap \mod p^2$ y entonces existe un único $j \in \{0, \ldots, p-1\}$ tal que $j \equiv i + a \mod p$. Así, como $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ entonces $j \neq i$ y $\tau^a(k) \in \{jp+1, \ldots, (j+1)p\}$. Luego, $\rho(k) = \sigma_j \tau^a(k) \in \{jp+1, \ldots, (j+1)p\}$ y podemos concluir que $\rho(k) \neq k$. Por lo tanto, ρ no tiene puntos fijos y se cumple lo buscado. □

Lema 3.3.7. *Dos elementos en* S, *digamos* $\sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a$ *y* $\sigma_0^{b_0} \cdots \sigma_{p-1}^{b_{p-1}} \tau^b$ *son conjugados si y solo si* $a = b$ *y* $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \equiv \sum_{i=0}^{p-1} b_i \mod p$, *donde* $a, b \neq 0$. *Además,* $\sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a$ *es un producto de* p p*-ciclos si y solo si* $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \equiv 0 \mod p$.

Demostración. Al conjugar a $\sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a$ por $\sigma_0^{c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{c_{p-1}} \tau^c$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sigma_0^{c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{c_{p-1}} \tau^c \sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a \tau^{-c} \sigma_0^{-c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{-c_{p-1}} &= \sigma_0^{c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{c_{p-1}} \sigma_c^{a_0} \cdots \sigma_{p-1+c}^{a_{p-1}} \tau^c \tau^a \tau^{-c} \sigma_0^{-c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{-c_{p-1}} \\
&= \sigma_0^{c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{c_{p-1}} \sigma_c^{a_0} \cdots \sigma_{p-1+c}^{a_{p-1}} \tau^a \sigma_0^{-c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{-c_{p-1}} \\
&= \sigma_0^{c_0} \cdots \sigma_{p-1}^{c_{p-1}} \sigma_c^{a_0} \cdots \sigma_{p-1+c}^{a_{p-1}} \sigma_a^{-c_0} \cdots \sigma_{p-1+a}^{-c_{p-1}} \tau^a \\
&= \sigma_c^{a_0 + c_c - c_{c-a}} \cdots \sigma_{p-1+c}^{a_{p-1} + c_{p-1+c} - c_{p-1+c-a}} \tau^a
\end{aligned}$$

y es claro que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \equiv \sum_{i=0}^{p-1} a_i + c_{i+c} - c_{i+c-a}$. Ahora, sean $\sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^a$ y $\sigma_0^{b_0} \cdots \sigma_{p-1}^{b_{p-1}} \tau^b$ tales que $a = b$ y $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \equiv \sum_{i=0}^{p-1} b_i$. Observemos que esta última congruencia implica que $a_0 - (\sum_{i=1}^{p-1} b_{ia} - a_{ia}) \equiv b_0$. Veamos que estos elementos son conjugados. Para ello conjuguemos por el elemento

$\sigma_a^{b_a-a_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}-a_{2a}+b_a-a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia}}$ a $\sigma_0^{a_0}\cdots\sigma_{p-1}^{a_{p-1}}\tau^a$, entonces

$$\begin{aligned}
&\sigma_a^{b_a-a_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}-a_{2a}+b_a-a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia}}\sigma_0^{a_0}\cdots\sigma_{p-1}^{a_{p-1}}\tau^a\sigma_a^{-(b_a-a_a)}\sigma_{2a}^{-(b_{2a}-a_{2a}+b_a-a_a)}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{-(\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia})}\\
&=\sigma_a^{b_a-a_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}-a_{2a}+b_a-a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia}}\sigma_0^{a_0}\sigma_a^{a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{a_{(p-1)a}}\tau^a\sigma_a^{-(b_a-a_a)}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{-(\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia})}\\
&=\sigma_a^{b_a-a_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}-a_{2a}+b_a-a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia}}\sigma_0^{a_0}\sigma_a^{a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{a_{(p-1)a}}\sigma_{2a}^{-(b_a-a_a)}\cdots\sigma_0^{-(\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia})}\tau^a\\
&=\sigma_a^{b_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}+b_a-a_a}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{\sum_{i=1}^{p-2}b_{ia}-a_{ia}+b_{(p-1)a}}\sigma_{2a}^{-(b_a-a_a)}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{-(\sum_{i=1}^{p-2}b_{ia}-a_{ia})}\sigma_0^{a_0}\sigma_0^{-(\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia})}\tau^a\\
&=\sigma_a^{b_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{b_{(p-1)a}}\sigma_0^{a_0-(\sum_{i=1}^{p-1}b_{ia}-a_{ia})}\tau^a\\
&=\sigma_a^{b_a}\sigma_{2a}^{b_{2a}}\cdots\sigma_{(p-1)a}^{b_{(p-1)a}}\sigma_0^{b_0}\tau^a\\
&=\sigma_0^{b_0}\cdots\sigma_{p-1}^{b_{p-1}}\tau^b
\end{aligned}$$

de lo cual obtenemos lo buscado. □

Supongamos que $R \leq G$ es un subgrupo radical con descomposiciones

$$V = V_0 \cup \cdots \cup V_s \text{ y } R = R_0 \times \cdots \times R_s$$

como en el Teorema 3.3.5. Observemos que $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ se tiene que $|V_i| \leq p^2$ por lo que $|\mathbf{c}_i| \leq 2$ para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$. Observemos entonces que si existe j tal que $|\mathbf{c}_j| = 2$ entonces $|V_j| = p^2$. En este caso tenemos entonces que $j = 1$ y que $V_0 = \emptyset$. En este caso tenemos dos posibilidades:

1. Si $\mathbf{c}_1 = (1, 1)$ tenemos entonces que $R = A_1 \wr A_1$ por lo que $|R| = p^{p+1} = |S|$ y como $R \leq S$ entonces se tiene que $S = R$.

2. Si $\mathbf{c}_1 = (2)$ entonces se tiene que $R = A_2$. Luego, como $A_2 \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ podemos considerar la biyección $\varphi : (\mathbb{Z}_p)^2 \to \{1, \ldots, p^2\}$ dada por $\varphi(l, k) = lp + (k + 1)$ y obtenemos el monomorfismo $\varphi^* : (\mathbb{Z}_p)^2 \to S_{p^2}$ que es tal que $\varphi^*(l, k)(t) = \varphi((l, k)\varphi^{-1}(t))$. Luego, observemos que $\varphi^*(1, 0) = \tau$ y que $\varphi^*(0, 1) = \prod_{i=0}^{p-1} \sigma_i$. Así que cada A_2 debe ser conjugado del grupo generado por τ y $\prod_{i=0}^{p-1} \sigma_i$. A este grupo lo denotaremos por L. En este caso resulta que este grupo es céntrico. Por el inciso (b) del Teorema 3.3.5 se tiene que $C_{S_{p^2}}(A_2) \leq A_2$ para cada subgrupo básico A_2. Como consecuencia $C_S(A_2) \leq A_2$, lo cual implica que L es céntrico.

Ahora, si tenemos que $|c_i| = 1$ para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$ entonces tenemos que para cada i se cumple que $|V_i| = p$ y $R_i = A_1 \cong \mathbb{Z}_p$. Así, cada R_i está generado por un p-ciclo σ_i. Ahora, vemos en cuáles de estos casos resulta que R es un grupo céntrico. Si tenemos que $|c_i| = 1$ para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$, podemos considerar dos casos.

1. Si $s = p$, en cuyo caso tenemos un producto de directo de p copias de $\mathbb{Z}_p$ generadas por p-ciclos. De hecho, este grupo resulta ser el grupo K mencionado anteriormente. En este caso resulta que el grupo es céntrico pues dado un elemento $\rho = \sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^b \in S \setminus K$ con $a_i \in \{1, \ldots, p\}$ y $b \in \{1, \ldots, p-1\}$ entonces tenemos que $\sigma_0 \rho = \sigma_0^{a_0+1} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^b$ y $\rho\sigma_0 = \sigma_0^{a_0+1} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^b \sigma_0 = \sigma_0^{a_0} \cdots \sigma_b^{a_b+1} \cdots \sigma_{p-1}^{a_{p-1}} \tau^b$. Luego, como $b \in \{1, \ldots, p-1\}$ podemos concluir que $\rho\sigma_0 \neq \sigma_0\rho$. Al ser ρ

arbitrario en $S \setminus K$ obtenemos lo buscado. De hecho es su único $\mathcal{F}$-conjugado por lo visto en el Lema 3.3.7 pues los únicos p-ciclos de S están en K.

2. Si $s < p$ entonces $|R| = ps < p^2$ por lo que existe un conjunto $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ tal que $J \cap V_i = \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, ya que $0 < p^2 - ps = p(p-s)$, y $j_i < j_k$ si $i < k$. La existencia del conjunto J viene de la caracterización de los p-ciclos que podemos encontrar en el grupo S. Sea $\sigma = (j_1, \ldots, j_p)$ y consideremos al grupo $R' = R \times \langle \sigma \rangle$. Es claro que R' es abeliano, $R \subsetneq R'$ y además se tiene que $Z(R) = R \subsetneq R' = Z(R') \subseteq C_S(R)$, por lo que R no puede ser céntrico.

Ahora, para conocer los automorfismos externos de los grupos K, L y S, usaremos el inciso (b) del Teorema 3.3.5 y calcularemos los cocientes de sus normalizadores por los grupos respectivos.

Sea q un generador del grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$. Primero, para S tenemos que $\mathbf{c}_1 = (1,1)$, por lo que $c = 2$ y $t_{\mathbf{c}_1} = 1$. Luego, tenemos que $N_{S_{p^2}}(A_{\mathbf{c}_1})/A_{\mathbf{c}_1} \cong GL(1,p) \times GL(1,p)$ utilizando la última parte del inciso (b). El grupo $GL(1,p) \times GL(1,p)$ tiene como generadores a $(q,1)$ y $(1,q)$.

Para L tenemos que $\mathbf{c}_1 = (2)$, por lo que $c = 2$ y $t_{\mathbf{c}_1} = 1$. Así, $N_{S_{p^2}}(A_{\mathbf{c}_1})/A_{\mathbf{c}_1} \cong GL(2,p)$ utilizando la última parte del inciso (b). Por un resultado en [14] el grupo $GL(2,p)$ tiene como generadores a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por último, para K primero se tiene que que $\mathbf{c}_i = (1)$ para toda $i \in \{1, \ldots, p\}$. Así para $\mathbf{c} = (1)$ tenemos que $V(\mathbf{c}) = \{1, \ldots, p^2\}$, $R(\mathbf{c}) = \langle \sigma_0 \rangle \times \cdots \times \langle \sigma_{p-1} \rangle$, $c = 1$ y que $t_{\mathbf{c}} = p$. De esto tenemos que $R = R(\mathbf{c}) = K$. Entonces tenemos que $N_{S_{p^2}}K = N_{S_p}(A_1) \wr S_p$ y que $N_{S_{p^2}}K/K = (N_{S_p}(A_1)/A_1) \wr S_p$. Por último $N_{S_p}(A_1)/A_1 \cong GL(1,p)$ y así $N_{S_{p^2}}K/K$ es isomorfo a $GL(1,p) \wr S_p \cong GL(1,p)^p \rtimes S_p$. El grupo $GL(1,p)^p \rtimes S_p$ tiene como generadores a los elementos

$$((q,1,\ldots,1),(1)), ((1,q,\ldots,1),(1)), \ldots, ((1,1,\ldots,q),(1)), ((1,\ldots,1),(1,2)), ((1,\ldots,1),(1,2,\ldots,p)).$$

De lo visto en [11] obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.3.8. *Sea S el subgrupo de Sylow de de S_{p^2}, sea $\mathbb{Z}_p^*$ el grupo de unidades de $\mathbb{Z}_p$. Sea q un generador de $GL(1,p)$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\imath} N_{S_{p^2}}(S) \xrightarrow{\phi} (\mathbb{Z}_p^*)^2 \longrightarrow 0$$

donde $\imath : S \to N_{S_{p^2}}(S)$ es la inclusión. Además, existe una escisión $\psi : (\mathbb{Z}_p^*)^2 \to N_{S_{p^2}}(S)$ dada por

$$\psi(q,1)(lp + (k+1)) = qlp + (k+1)$$

y

$$\psi(1,q)(lp + (k+1)) = lp + (qk+1)$$

con $l \in \{0, \ldots, p-1\}$ y $k \in \{0, \ldots, p-1\}$. (Todo esto hay que tomarlo módulo p o p^2 según sea el caso para que tenga sentido)

Veamos cómo se ve lo anterior para el caso $p = 3$. En este caso se tiene

$$K = \langle (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \rangle$$

$$L = \langle (1,2,3)(4,5,6)(7,8,9), (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9) \rangle.$$

Del lema anterior obtenemos que los automorfismos externos de S en $\mathcal{F}_S(S_9)$ están generados por $c_{(23)(56)(89)}$ y $c_{(47)(58)(69)}$ Para K tenemos como generadores de sus automorfismos externos en $\mathcal{F}_S(S_9)$ a los elementos $c_{(23)}, c_{(56)}, c_{(89)}, c_{(14)(25)(36)}$ y $c_{(147)(258)(369)}$. Finalmente, el grupo de automorfismos externos de L en $\mathcal{F}_S(S_9)$ está generado por $c_{(23)(56)(89)}, c_{(24)(73)(68)}$ y $c_{(17)(25)(69)}$.

Para terminar esta sección, veamos que los grupos que hemos estado estudiando son todos céntricos y radicales de $\mathcal{F}_S(S_{p^2})$.

Proposición 3.3.9. *Sea p un primo y S_{p^2} el grupo simétrico en p^2 letras. Entonces los únicos subgrupos céntricos y radicales salvo conjugación de su p-Sylow S son: S, K y L, donde $K = \langle \sigma_0, \dots, \sigma_{p-1} \rangle$ y $L = \langle \sigma, \tau \rangle$*

Demostración. Solo resta ver que K y L son radicales pues S siempre es radical en cualquier sistema de fusión saturado. Como K y L son grupos abelianos tenemos que $\mathrm{Inn}(K)$ e $\mathrm{Inn}(L)$ son triviales. Además, de lo anterior podemos concluir que $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(S_{p^2})}(L) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_{p^2})}(L) \cong GL(2,p)$ y que $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}_S(S_{p^2})}(K) \cong \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_S(S_{p^2})}(K) \cong GL(1,p) \wr S_p$. Por un lado tenemos que $|GL(1,p) \wr S_p| = (p-1)^p p!$ por lo que su p-subgrupo normal maximal tiene orden a lo más p y sería un p-Sylow. Recordemos que $GL(1,p) \wr S_p \cong GL(1,p)^p \rtimes S_p$. Sabemos que $((1,\dots,1),(1,2,\dots,p))$ es un elemento de orden p en $GL(1,p) \wr S_p$. Sea q un generador de $GL(1,p)$. Ahora,

$$\begin{aligned} ((q,\dots,1),(1))((1,\dots,1),(1,2,\dots,p))((q^{-1},\dots,1),(1)) &= ((q,\dots,1),(1,2,\dots,p))((q^{-1},\dots,1),(1)) \\ &= ((q,q^{-1},\dots,1),(1,2,\dots,p)) \end{aligned}$$

es un elemento de orden p, pues es conjugado de $((1,\dots,1),(1,2,\dots,p))$. Es fácil ver que $((1,\dots,1),(1,2,\dots,p)) \neq ((q,q^{-1},\dots,1),(1,2,\dots,p))$ por lo que podemos concluir que K es radical. Para L tenemos que $|GL(2,p)| = (p^2-1)(p-1)p$ por lo que su p-subgrupo normal maximal tiene orden a lo más p y sería un p-Sylow. Sin embargo, los grupos $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ y $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ son conjugados (pues son p-Sylows al tener orden p) pero $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ por lo que L es radical. $\square$

4 Teoría de representaciones

En esta sección daremos algunos resultados básicos de teoría de representaciones y haremos cálculos para anillos de representaciones y de representaciones invariantes bajo fusión. Además de esto utilizaremos lo visto en el capítulo anterior sobre el grupo S_{p^2} para el anillo de representaciones invariantes bajo fusión. Para mayor detalle acerca de los resultados en este capítulo referimos al lector a [13] y [17]

4.1 Definiciones

En lo siguiente G denotará a un grupo finito escrito multiplicativamente y V a un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita.

Definición 4.1.1. *Una representación de un grupo G sobre un espacio vectorial V sobre $\mathbb{C}$ es un homomorfismo*

$$\varphi : G \to GL(V)$$

donde $GL(V)$ denota al grupo de automorfismos lineales de V. En caso de no haber ambigüedad sobre φ nos referiremos a la representación simplemente como V.

Observemos que dada una representación φ de G en V, el grupo G actúa en V de la siguiente manera: para cada $g \in G$ definimos $g \cdot v := \varphi(g)v$ que es una acción bien definida pues φ es un homomorfismo. Además, dicha acción cumple que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall g \in G$ y para cualesquiera $v, w \in V$ se tiene que $g\cdot(\lambda v+w) = \lambda g\cdot v+g\cdot w$.

De manera conversa, una acción de G sobre un espacio vectorial que cumpla las propiedades de linealidad anteriormente mencionadas induce una representación de G.

Ejemplo 4.1.2. *Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}^3$ y el grupo S_3. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^3$. Entonces S_3 actúa en $\mathbb{C}^3$ permutando las coordenadas, i.e. tenemos que para $g \in S_3$ $g \cdot e_i = e_{g(i)}$ o de manera equivalente*

$$g \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)})$$

que da lugar a una representación llamada representación estándar no irreducible. También para S_3 tenemos una representación llamada representación alternante dada por

$$gv = sgn(g)v$$

para $g \in S_3$ y $v \in \mathbb{C}$.

Definición 4.1.3. *Un morfismo ρ entre dos representaciones V y W es una transformación lineal $\rho : V \to W$ tal que*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "g"] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\rho"] & W \end{tikzcd}$$

conmuta para toda $g \in G$. También se puede ver como $\rho(gv) = g\rho(v)$ para toda $g \in G$ y $v \in V$. Este tipo de morfismos usualmente son llamados G-lineales para diferenciarlos de las transformaciones lineales usuales.

Definición 4.1.4. *A un morfismo de representaciones que es biyectivo le llamamos equivalencia de representaciones. Decimos que dos representaciones son equivalentes si existe una equivalencia entre ellas.*

Ejemplo 4.1.5. *Consideremos a las siguientes dos representaciones del grupo $\mathbb{Z}_2$*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{C}^2 \\ 0 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{C}^2 \\ 0 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La función $\rho : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $\rho(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$ es un morfismo de representaciones y además es una equivalencia.

Dada una representación V, pueden existir subespacios vectoriales que son por sí mismos representaciones.

Definición 4.1.6. *Si W es un subespacio de V tal que para toda $w \in W$ se tiene que $gw \in W$ para toda $g \in G$, decimos que W es invariante bajo G o G-invariante.*

Ejemplo 4.1.7. *Un ejemplo de un subespacio G-invariante no trivial en el Ejemplo 4.1.5 para la representación φ_1 es $\langle(1, 1)\rangle$.*

Definición 4.1.8. *Una subrepresentación de una representación V es un subespacio vectorial W de V que es invariante bajo G.*

Teorema 4.1.9. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación de G y sea W un subespacio G-invariante. Entonces, existe un complemento W^0 de W en V que es G-invariante.*

Si tenemos una representación V con subrepresentaciones W y W' tales que $V = W \oplus W'$ decimos que V es la suma de las representaciones W y W'. Por otra parte, dadas dos representaciones W y W', podemos considerar a $V = W \oplus W'$ con la acción de G entrada a entrada. Resulta ser una representación de G y le llamamos la suma de W y W'.

Definición 4.1.10. *Una representación se llama irreducible si no existe ningún subespacio propio W de V que sea G-invariante distinto de cero.*

Proposición 4.1.11 (Lema de Schur)**.** *Sean $\varphi^1 : G \to GL(V_1)$ y $\varphi^2 : G \to GL(V_2)$ dos representaciones irreducibles de G, y sea f una función G-lineal de V_1 a V_2. Entonces:*

1. *Si φ^1 y φ^2 no son equivalentes entonces entonces $f = 0$,*

2. *Si $V_1 = V_2$ y $\varphi^1 = \varphi^2$, entonces f es un múltiplo de la identidad.*

Corolario 4.1.12. *Si G es un grupo abeliano, entonces todas sus representaciones irreducibles son unidimensionales.*

Ejemplo 4.1.13. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G = \mathbb{Z}_n$. Supongamos que $\rho\colon G \to \mathbb{C}$ es una representación irreducible de G. Observemos que como $\rho(1)$ tiene orden que divide a n, debe ser una raíz n-ésima de la unidad. Además, ρ está totalmente determinada por $\rho(1)$ ya que $\rho(m) = \rho(1)^m$ para toda $m \in \mathbb{Z}_m$. De hecho, para cada raíz de la unidad esto define una representación y toda representación irreducible debe ser isomorfa a una de este tipo y son únicas salvo equivalencia de representaciones. A las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_n$ las solemos denotar por su evaluación en 1.*

Teorema 4.1.14. *Para cualquier representación V de un grupo finito G, existe una descomposición*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}$$

donde las V_i son distintas representaciones irreducibles. La descomposición de V en k factores es única salvo reordenamiento, así como las V_i que aparecen y sus multiplicidades a_i.

Dadas dos representaciones V y W, podemos considerar una representación en $V \otimes W$ definida en los generadores mediante $g(v \otimes w) = gw \otimes gw$.

Definición 4.1.15. *Dada una representación $\varphi : G \to GL(V)$, definimos el caracter de φ (o el carácter de V) como la función $\chi_\varphi : G \to \mathbb{C}$ dada por $\chi_\varphi(g) = Tr(\varphi_g)$.*

Por propiedades de la traza resulta que el carácter es constante en las clases de conjugación de G. Además de esto, el carácter cumple las siguientes propiedades

Proposición 4.1.16. *Si χ es el carácter de una representación φ de dimensión n, entonces se tiene que:*

1. $\chi(1) = n$
2. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ *para* $g \in G$,
3. $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$ *para* $g, h \in G$.

Para dos funciones $\Psi, \Phi : G \to \mathbb{C}$, definimos

$$(\Psi|\Phi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Psi(g)\overline{\Phi(g)}.$$

Sabemos que el conjunto de funciones de G en $\mathbb{C}$ forma un espacio vectorial. Resulta que la operación que se acaba de definir es un producto escalar en este espacio y que para cualquier función Ψ y carácter χ se tiene que $(\Psi|\chi) = \overline{(\chi|\Psi)}$.

El carácter de una representación nos puede decir cuándo una representación es irreducible.

Teorema 4.1.17. 1. *Si χ es el carácter de una representación irreducible, entonces se tiene que $(\chi|\chi) = 1$,*

2. *Si χ y χ' son caracteres de representaciones irreducibles no equivalentes entonces tenemos que $(\chi|\chi') = 0$*

Corolario 4.1.18. *Los caracteres de representaciones irreducibles forman un conjunto ortonormal.*

Proposición 4.1.19. *Dadas dos representaciones $\varphi^1 : G \to GL(V_1)$ y $\varphi^2 : G \to GL(V_2)$ de G, se tiene lo siguiente*

1. *El carácter de la suma directa $V_1 \oplus V_2$ está dado por $\chi_{\varphi^1} + \chi_{\varphi^2}$*

2. *El carácter del producto tensorial $V_1 \otimes V_2$ está dado por $\chi_{\varphi^1}\chi_{\varphi^2}$.*

Teorema 4.1.20. *El número de representaciones irreducibles de G (salvo equivalencia) es el mismo de las clases de conjugación de G.*

Ejemplo 4.1.21. *En el Ejemplo 4.1.13 tenemos n clases de equivalencia y tenemos n representaciones irreducibles de G (salvo equivalencia), una por cada raíz n-ésima de la unidad.*

Teorema 4.1.22. *Sea V una representación y Φ su carácter. Entonces, si χ es el carácter de una representación irreducible W se tiene que $(\Phi|\chi)$ es el número de veces que aparece W (de manera isomorfa) en la descomposición de V como suma de representaciones irreducibles.*

Corolario 4.1.23. *Dos representaciones con el mismo carácter son equivalentes.*

Como hemos visto, los caracteres de representaciones pueden verse como funciones del conjunto de clases de conjugación de G en $\mathbb{C}$. A raíz de esto podemos expresar la información del carácter en una tabla de caracteres. Esta tabla tiene a las clases de conjugación en la primera fila, denotadas por un representante g; en la primera columna se escribe el grupo del cual estamos calculando caracteres y por debajo una lista de las representaciones irreducibles de dicho grupo; por último dentro del recuadro aparecerá el valor del carácter en la clase de conjugación. Agregamos un ejemplo ilustrativo a continuación.

Grupo G	Clases de conjugación de G
Irreducibles	Valores en clases de conjugación

Ejemplo 4.1.24. *Para el grupo $\mathbb{Z}_3$ tenemos la siguiente tabla de representaciones*

$\mathbb{Z}_3$	0	1	2
Trivial	1	1	1
ω	1	ω	ω^2
ω^2	1	ω^2	ω

donde $\omega = e^{2\pi i/3}$

Definición 4.1.25. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Sean φ una representación de H. Definimos la representación de G inducida por φ (denotada por $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)$) como $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$, donde $\mathbb{C}[G]$ es al anillo de grupo.*

Definición 4.1.26. *Decimos que una representación ρ de G en V es inducida por una representación φ de un subgrupo H en W, si V es equivalente a $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)$.*

Consideremos el conjunto Rep(G) de clases de equivalencia de representaciones de G. Como vimos anteriormente, las representaciones tienen definidas un producto (el producto tensorial) y una suma (la suma directa). Estas dos operaciones definen operaciones de suma y producto en Rep(G) que lo hacen un semianillo.

Definición 4.1.27. *Denotamos como $R(G)$ el anillo de representaciones del grupo G a la construcción de Grothendieck del monoide de clases de equivalencia de representaciones de G.*

Ahora bien, observemos que dados grupos finitos H, G y un homomorfismo $\varphi : H \to G$ obtenemos un morfismo $\varphi^* : R(G) \to R(H)$ como la función que extiende de manera única a $\varphi' : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(H)$ dada por $\varphi'([\rho]) = [\rho\varphi]$ para cada $\rho \in \mathrm{Rep}(G)$. Es claro que esta asignación está bien definida y es un homomorfismo de semianillos, con lo cual φ^* es un homomorfismo de anillos.

4.1.1 Un lema de representaciones

Para terminar esta sección, revisaremos algunos resultados que son importantes para el desarrollo de los resultados principales del capítulo 5. Además, estos resultados motivaron a la formulación de la Conjetura 5.4.5.

Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Existen dos morfismos muy sencillos, pero muy importantes, entre sus anillos de representaciones. El primero, el morfismo $\imath^* \colon R(G) \to R(H)$ que viene del morfismo inclusión $\imath \colon H \to G$ y le llamamos restricción. El segundo, es el morfismo $\imath_* \colon R(H) \to R(G)$ que envía a la clase de una representación φ en la clase de la representación $\mathrm{Ind}_H^G(\varphi)$. Por último, el grupo G/H actúa en $R(H)$ y en $R(G)$ por conjugación, es decir, la clase de un elemento g envía a la clase de una representación φ en la clase de $c_g^*\varphi$. Esta acción está bien definida en $R(H)$ pues los caracteres de las representaciones son invariantes al conjugar por elementos de H y además actúa trivialmente en $R(G)$. Diremos que dos representaciones son conjugadas si están en la misma órbita bajo esta acción.

Sea V una representación irreducible de G. Sabemos que V también es una representación de H mediante la restricción. Sea $W \subseteq V$ una representación irreducible de H. Entonces tenemos que $\sum\limits_{g \in G} gW$ es un subespacio de V que es G-invariante. Así, al ser V una representación irreducible tenemos que $\sum\limits_{g \in G} gW = V$. Además, para cada $g \in G$ el espacio gW es claramente una representación irreducible de H. Veamos que existen $g_1, \ldots, g_m \in G$ tales que $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} g_i W$. Supongamos que $V' = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} g_i W$ es un subespacio vectorial maximal de esta forma y que $V' \subsetneq V$. Entonces, como $\sum\limits_{g \in G} gW = V$ existe $g \in G$ tal que $gW \subsetneq V'$. Luego, como gW es una representación irreducible de H se tiene que $gW \cap V' = 0$. lo cual implicaría que V' no es maximal. De lo anterior podemos concluir que existen $g_1, \ldots, g_m \in G$ tales que $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} g_i W$. Observemos que cada representación gW de H es equivalente a $g^{-1}HW$, donde $g^{-1}H$ denota a la clase lateral de g^{-1} en $G/H = K$. Esto es fácil de ver ya que la función $f \colon gW \to g^{-1}HW$ dada por $f(x) = g^{-1}x$ está bien definida y además es un isomorfismo.

Ahora, sean σ y ρ las clases de equivalencia de las representaciones V y W en $R(G)$ y $R(H)$ respectivamente. Si $k_1, \ldots, k_m$ denotan las clases de $g_1^{-1}, \ldots, g_m^{-1}$ en $K = G/H$ entonces

$$\imath^*(\rho) = \sum_{i=1}^{m} k_i \sigma.$$

Como K actúa trivialmente en $R(G)$ entonces tenemos que $\imath^*(\rho)$ debe ser invariante bajo la acción de K. Sin embargo, toda componente irreducible de $\imath^*(\rho)$ es de la forma $k\sigma$ para alguna $k \in K$. Entonces tenemos que $\imath^*(\rho) = n \sum_{j=1}^{s} \sigma_j$, donde $\{\sigma_j\}_{j=1}^{s}$ es un conjunto completo de conjugados de σ. De esto, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.28. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Sea ρ una representación irreducible de G. Entonces*

$$\imath^*(\rho) = n \sum_{j=1}^{s} \sigma_j$$

donde $\{\sigma_j\}_{j=1}^{s}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles de H conjugadas.

En vista de lo anterior, nos gustaría conocer cómo se comporta el morfismo $\imath_*$ en este caso. Primero, tenemos el siguiente resultado acerca de las representaciones inducidas encontrado en [13].

Teorema 4.1.29. *Sea G un grupo y H un subgrupo de G. Sean W y U representaciones de H y G respectivamente. Supongamos que $V = \mathrm{Ind}_H^G(W)$, entonces cualquier morfismo de representaciones $\varphi\colon W \to U$ se extiende de manera única a un morfismo $\tilde{\varphi}\colon V \to U$ es decir,*

$$\mathrm{Hom}_H(W, \mathit{Res}(U)) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G(W), U).$$

En nuestro caso particular, obtenemos los siguientes lemas sobre la restricción e inducción de representaciones.

Lema 4.1.30. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$ y sea $K = G/H$. Sea σ la clase un representación irreducible de H y K_σ el estabilizador de σ en K. Sea*

$$\imath_*(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i$$

la descomposición de $\imath_*(\sigma)$ como suma de representaciones irreducibles ρ_i de G. Entonces $\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = |K_\sigma|$.

Demostración. Como $\imath_*(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i$ entonces tenemos que $|K| \dim \sigma = \sum_{i=1}^{n} m_i \dim \rho_i$. Por el Teorema 4.1.29 tomando a σ como W y U como ρ_j, tenemos que para cada j se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_H(\sigma, \imath^*(\rho_j)) &\cong \mathrm{Hom}_G(\imath_*(\sigma), \rho_j) \\
&\cong \mathrm{Hom}_G\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \rho_i, \rho_j\right) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n} m_i \,\mathrm{Hom}_G(\rho_i, \rho_j) \\
&\cong m_j \,\mathrm{Hom}_G(\rho_j, \rho_j) \\
&\cong m_j \mathbb{C}
\end{aligned}$$

y usando el Lema 4.1.28 se cumple que

$$\imath^*(\rho_j) = n \sum_{i=1}^{s} \sigma_i$$

donde $\{\sigma_i\}_{i=1}^{s}$ es un conjunto completo de representaciones irreducibles de H conjugadas a σ. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_H(\sigma, \imath^*(\rho_j)) &\cong \mathrm{Hom}_H\left(\sigma, n_j \sum_{i=1}^{s} \sigma_i\right) \\
&\cong \bigoplus_{i=1}^{n} n_j \,\mathrm{Hom}_H(\sigma, \rho_j) \\
&\cong n_j \,\mathrm{Hom}_H(\sigma, \sigma) \\
&\cong n_j \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

De esto podemos concluir que $n_j = m_j$ para toda j y por lo tanto

$$\imath^*(\rho_i) = m_i \sum_{j=1}^{s} \sigma_j$$

para cada i. Así, $\dim \rho_i = |K : K_\sigma| m_i \dim \sigma$ lo cual implica que $|K| = |K : K_\sigma| \sum_{i=1}^{n} m_i^2$. Por lo tanto $|K_\sigma| = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$, que es lo que queríamos probar. □

Lema 4.1.31. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$ y sea $K = G/H$. Sea σ la clase un representación irreducible de H con estabilizador K_σ y $\{\sigma_j\}_{j=1}^{s}$ un conjunto completo de representaciones irreducibles de H conjugadas a σ. Supongamos que $|K_\sigma|$ es libre de cuadrados. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{s} \sigma_j \in \imath_*(R(G)).$$

Demostración. Por el Lema 4.1.30 tenemos que $|K_\sigma| = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$. Como $|K_\sigma| = \sum_{i=1}^{n} m_i^2$ es libre de cuadrados, esto implica que los m_i son primos relativos. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i m_i = 1$. Luego,

$$\imath^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \rho_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_i\right) \sum_{j=1}^{s} \sigma_j = \sum_{j=1}^{s} \sigma_j$$

que prueba lo buscado. □

Lema 4.1.32. *Supongamos que G y H son grupos tales que H es normal en G y tales que el orden de $K = G/H$ es libre de cuadrados. Entonces*

$$R(H)^K = \imath^* R(G),$$

donde $R(H)^K$ denota a los invariantes bajo la acción K.

Demostración. Del Lema 4.1.28 tenemos que $\imath^* R(G) \subseteq R(H)^K$. Ahora, una $\mathbb{Z}$-base para $R(H)^K$ está dada por sumas de conjuntos completos de conjugados de la forma $\sum_{j=1}^{s} \sigma_j$. Pero para cada $\sigma \in R(H)$, como $K_\sigma \leq K$ y $|K|$ es libre de cuadrados, tenemos que $|K_\sigma|$ es libre de cuadrados. El resultado se sigue entonces directamente de 5.3.1. □

Por último, tenemos un caso particular del Lema 4.1.32

Proposición 4.1.33. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Si tenemos que $G/H \cong \mathbb{Z}_p$, entonces*

$$\imath^* R(G) = R(H)^{\mathbb{Z}_p}.$$

Este último resultado dio lugar a la Conjetura 5.4.5 del Capítulo 5 y es utilizado para la prueba del Teorema 5.1.2 para el caso de grupos cíclicos.

4.2 Representaciones invariantes bajo fusión

Definición 4.2.1. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre un p-grupo finito S. Una representación $\rho : S \to U_n$ es $\mathcal{F}$-invariante si las representaciones $\rho_{|P}$ y $\rho_{|f(P)} \circ f$ son isomorfas para cada $P \leq S$ y para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$.*

Una representación ρ es $\mathcal{F}$-invariante si y solo si su caracter χ_ρ es $\mathcal{F}$-invariante, i.e $\chi_\rho(s) = \chi_\rho(f(s))$ para cada morfismo f en $\mathcal{F}$. Observemos que la representación regular y la representación trivial de S siempre son $\mathcal{F}$-invariantes. Observemos que el conjunto $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$ de clases de isomorfismo de representaciones de S que son $\mathcal{F}$-invariantes es un monoide bajo la operación inducida por la suma directa de representaciones. También es cerrado bajo producto tensorial. Estas dos últimas afirmaciones se cumplen debido a la fórmula del caracter para el producto y suma de representaciones.

Definición 4.2.2. *El anillo de representaciones $R(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ es el grupo de Grothendieck de $\mathrm{Rep}(\mathcal{F})$*

En [10] podemos encontrar el siguiente resultado que relaciona a $R(\mathcal{F})$ con los elementos estables de R.

Proposición 4.2.3. *Tenemos un isomorfismo*

$$R(\mathcal{F}) \cong \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathcal{F}^{op}}} R(Q)$$

Además de ello, tenemos un resultado sobre los generadores de $R(\mathcal{F})$.

Proposición 4.2.4. *El rango del grupo abeliano libre $R(\mathcal{F})$ es igual al número de clases de $\mathcal{F}$-conjugación de S.*

4.3 Representaciones de un producto de grupos

A continuación veremos una forma de calcular las representaciones irreducibles de un producto de grupos usando un resultado encontrado en [17].

Sean G y H grupos. Sea ρ_1 y ρ_2 representaciones de G y H respectivamente. Definimos una representación $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G \times H$ dada por

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g, h) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(h).$$

Observemos que a diferencia del producto tensorial definido anteriormente, estas representaciones son de grupos distintos. Sin embargo, nos referiremos a esta representación como el producto tensorial de ρ_1 y ρ_2. El caracter χ de esta representación está dado por

$$\chi(g, h) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(h).$$

En este contexto, obtenemos el siguiente resultado

Teorema 4.3.1. *1. Si ρ_1 y ρ_2 son irreducibles, entonces $\rho_1 \otimes \rho_2$ es una representación irreducible de $G \times H$.*

2. Cada representación irreducible de $G \times H$ es equivalente a una representación de la forma $\rho_1 \otimes \rho_2$ con ρ_1 y ρ_2 representaciones irreducibles de G y H respectivamente.

4.4 Representaciones de un producto semidirecto de grupos

Como vimos en la sección 3.3, el p-Sylow S de S_{p^2} es un producto semidirecto de un grupo abeliano por un grupo cíclico. Para lograr calcular una base del anillo de representaciones del sistema de fusión, primero es necesario poder calcular todas las representaciones irreducibles de S. Para ello, recurriremos a un resultado en [17].

Sean A y H dos subgrupos de un grupo G, con $A \triangleleft G$. Supongamos que estos grupos cumplen lo siguiente:

(i) A es abeliano

(ii) G es el producto semidirecto de H por A

Como A es abeliano, sus caracteres irreducibles son de grado 1 y forman un grupo $X = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C}^*)$. El grupo G actúa en X de la siguiente manera:

$$(g\chi)(a) = \chi(g^{-1}ag) \text{ para } g \in G,\ \chi \in X,\ a \in A$$

Sea $(\chi_i)_{i \in X/H}$ un sistema de representantes de las órbitas de H en X. Para cada $i \in X/H$ sea H_i el subgrupo de H de los elementos h tales que $h\chi_i = \chi_i$ y sea $G_i = A \cdot H_i$ el subgrupo correspondiente de G. Extendemos la función χ_i a G_i como sigue

$$\chi_i(ah) = \chi_i(a) \text{ para } a \in A,\ h \in H_i$$

Usando que $h\chi_i = \chi_i$ para cada $h \in H_i$, tenemos que χ_i es un caracter de grado 1 de G_i. Ahora, sea ρ una representación irreducible de H_i; componiendo a ρ con la proyección canónica $G_i \to H_i$ obtenemos una representación ρ^* de G_i. Finalmente, tomando el producto tensorial $\chi_i \otimes \rho^*$ obtenemos una representación irreducible de G_i, sea $\varphi_{i,\rho}$ la representación inducida en G correspondiente. Entonces tenemos lo siguiente:

Lema 4.4.1. *1. Cada $\varphi_{i,\rho}$ es irreducible.*

2. Si $\varphi_{i,\rho}$ y $\varphi_{i',\rho'}$ son equivalentes, entonces $i = i'$ y ρ es isomorfa a ρ'.

3. Cada representación irreducible de G es equivalente a una de la forma $\varphi_{i,\rho}$.

Ejemplo 4.4.2. *Consideremos el p-Sylow S de S_{p^2}. Sabemos que $S = K \rtimes \langle\tau\rangle$, donde K es un subgrupo isomorfo a $(\mathbb{Z}_p)^p$ generado por los elementos $\sigma_0, \ldots, \sigma_{p-1}$. Sea $\omega = e^{2\pi i/p}$. Dada una representación irreducible ρ de K, tenemos que $\rho(\sigma_i) = \omega^{a_i}$ para alguna $a_i \in \{1, \ldots, p\}$. Si para toda i se tiene que $a_i = k$ para alguna $k \in \{1, \ldots, p\}$, tenemos que la acción de S es trivial en ρ. Usando la construcción anterior extendemos ρ al grupo S pues el estabilizador de ρ en $\langle\tau\rangle$ es $\langle\tau\rangle$ mismo. Luego, tomando una representación ψ de $\langle\tau\rangle \cong \mathbb{Z}_p$ y como en la construcción anterior obtenemos una representación de ψ^* de S. Por último, tomando $\rho \otimes \psi^*$ obtenemos una representación irreducible de S. Por otro lado si existen $i < j$ tales que $a_i \neq a_j$ con $j = i + k$, entonces tenemos que $\tau^{-k}\rho(\sigma_i) = \rho(\tau^k \sigma_i \tau^{-k}) = \rho(\sigma_i j)$. De esto tenemos que $\omega^{a_j} = \tau^{-k}\rho(\sigma_i) \neq \rho(\sigma_i) = \omega^{a_i}$ por lo que $\tau^{-k}\rho \neq \rho$. Observemos que al ser $\langle\tau\rangle \cong \mathbb{Z}_p$ tenemos que la órbita de ρ por la acción de $\langle\tau\rangle$ tiene p elementos. De lo anterior se sigue que el estabilizador de ρ es trivial. Continuando con la construcción anterior, como el grupo trivial tiene solamente como representación irreducible a la representación trivial entonces solo resta inducir la representación ρ al grupo S para obtener una representación irreducible de S.*

Veamos un par de representaciones irreducibles de S en el caso $p = 3$. Sea $\omega = e^{2\pi i/3}$. Utilizando la notación del Ejemplo 4.1.13 y del Teorema 4.3.1, consideremos $\omega \otimes \omega \otimes \omega$ una representación irreducible de K. Por otro lado consideremos la representación ω de $\langle\tau\rangle$. Entonces obtenemos una representación $\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega^*$ de S. En general, escribiremos solamente $\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega$ en estos casos. Ahora, consideremos la representación $\omega \otimes 1 \otimes 1$. En este caso, como vimos anteriormente, la representación $\mathrm{Ind}_K^S(\omega \otimes 1 \otimes 1)$ es irreducible y la denotaremos por $\imath_*(\omega \otimes 1 \otimes 1)$.

4.5 Cálculo de anillos de representaciones

En esta sección calculamos algunos anillos de representaciones de grupos finitos.

Ejemplo 4.5.1. *Tabla de caracteres de las representaciones irreducibles de S_4.*

S_4	1	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
Trivial	1	1	1	1	1
X	1	-1	1	-1	1
Y	3	1	0	-1	-1
XY	3	-1	0	1	-1
Z	2	0	-1	0	2

Esta tabla de caracteres se obtuvo de [13]. De lo anterior podemos concluir que

$$R(S_4) \cong \mathbb{Z}[x,y,z]/(x^2-1, y^2-y-z-xy-1, xz-z, z^2-z-x-1, zy-y-xy)$$

Ejemplo 4.5.2. *Tabla de caracteres de las representaciones irreducibles de D_8.*

D_8	*1*	$\{r, r^3\}$	r^2	$\{s, sr^2\}$	$\{sr, sr^3\}$
Trivial	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
X	*1*	*-1*	*1*	*1*	*-1*
Y	*1*	*1*	*1*	*-1*	*-1*
XY	*1*	*-1*	*1*	*-1*	*1*
Z	*2*	*0*	*-2*	*0*	*0*

donde X, Y y XY denotan a las representaciones que vienen de componer con la proyección por los subgrupos normales $\langle r\rangle$, $\langle s, r^2\rangle$ y $\langle rs, r^2\rangle$ (pues el índice de estos subgrupos es 2 y entonces el cociente es isomorfo a $\{-1,1\}$) y Z la representación de las simetrías del cuadrado.

Ahora, de lo anterior podemos concluir que

$$R(D_8) \cong \mathbb{Z}[x,y,z]/(x^2-1, y^2-1, z^2-xy-x-y-1, xz-z, yz-z)$$

Ejemplo 4.5.3. *En la siguiente página presentamos las representaciones del 3-Sylow de S_9. Más adelante trabajaremos con este grupo para dar un ejemplo concreto del uso de los teoremas de representaciones invariantes bajo fusión para poder calcular $R(\mathcal{F})$. Recordemos que $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \tau$ y ω denotan a $(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)$, $(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$ y $e^{2\pi i/3}$ respectivamente.*

Tabla de caracteres de las representaciones irreducibles de $(\mathbb{Z}_3)^3 \rtimes \mathbb{Z}_3$.

S	1	σ_0	σ_0^2	$\sigma_0\sigma_1$	$\sigma_0\sigma_1^2$	$\sigma_0^2\sigma_1$	$\sigma_0^2\sigma_1^2$	$\sigma_0\sigma_1\sigma_2$	$\sigma_0\sigma_1\sigma_2^2$	$\sigma_0\sigma_1^2\sigma_2^2$	$\sigma_0^2\sigma_1^2\sigma_2^2$	τ	$\sigma_0\tau$	$\sigma_0^2\tau$	τ^2	$\sigma_0\tau^2$	$\sigma_0^2\tau^2$
Trivial$= a_0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \omega = a_1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2
$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \omega^2 = a_2$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	ω^2	ω^2	ω^2	ω	ω	ω
$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes 1 = b_0$	1	ω	ω^2	ω^2	1	1	ω	1	ω	ω^2	1	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2
$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega = b_1$	1	ω	ω^2	ω^2	1	1	ω	1	ω	ω^2	1	ω	ω^2	1	ω^2	1	ω
$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega^2 = b_2$	1	ω	ω^2	ω^2	1	1	ω	1	ω	ω^2	1	ω^2	1	ω	ω	ω^2	1
$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 = c_0$	1	ω^2	ω	ω	1	1	ω^2	1	ω^2	ω	1	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω
$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega = c_1$	1	ω^2	ω	ω	1	1	ω^2	1	ω^2	ω	1	ω	1	ω^2	ω^2	ω	1
$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 = c_2$	1	ω^2	ω	ω	1	1	ω^2	1	ω^2	ω	1	ω^2	ω	1	ω	1	ω^2
$\imath_*(\omega \otimes 1 \otimes 1) = x_0$	3	$\omega+2$	ω^2+2	$2\omega+1$	0	0	$2\omega^2+1$	3ω	$2\omega+\omega^2$	$2\omega^2+\omega$	$3\omega^2$	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega^2 \otimes 1 \otimes 1) = x_1$	3	ω^2+2	$\omega+2$	$2\omega^2+1$	0	0	$2\omega+1$	$3\omega^2$	$2\omega^2+\omega$	$2\omega+\omega^2$	3ω	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega \otimes \omega \otimes 1) = y_0$	3	$2\omega+1$	$2\omega^2+1$	$2\omega+\omega^2$	0	0	$2\omega^2+\omega$	$3\omega^2$	ω^2+2	$\omega+2$	3ω	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1) = y_1$	3	0	0	0	$3\omega^2$	3ω	0	3	0	0	3	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1) = y_2$	3	0	0	0	3ω	$3\omega^2$	0	3	0	0	3	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1) = y_3$	3	$2\omega^2+1$	$2\omega+1$	$2\omega^2+\omega$	0	0	$2\omega+\omega^2$	3ω	$\omega+2$	ω^2+2	$3\omega^2$	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2) = z_0$	3	$2\omega+\omega^2$	$2\omega^2+\omega$	ω^2+2	0	0	$\omega+2$	3ω	$2\omega^2+1$	$2\omega+1$	$3\omega^2$	0	0	0	0	0	0
$\imath_*(\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2) = z_1$	3	$2\omega^2+\omega$	$2\omega+\omega^2$	$\omega+2$	0	0	ω^2+2	$3\omega^2$	$2\omega+1$	$2\omega^2+1$	3ω	0	0	0	0	0	0

Esta tabla fue calculada usando el Lema 4.4.1. Entonces tenemos que

$$R(S) \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, x_0, x_1, y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1]/J$$

donde J es el ideal generado por los siguientes elementos

$$\begin{gathered} a_1a_1 - a_2 \\ a_1a_2 - 1 \\ a_1b_0 - b_1 \\ a_1b_1 - b_2 \\ a_1b_2 - b_0 \\ a_1c_0 - c_1 \\ a_1c_1 - c_2 \\ a_1c_2 - c_0 \\ a_1x_0 - x_0 \\ a_1x_1 - x_1 \\ a_1y_0 - y_0 \\ a_1y_1 - y_1 \\ a_1y_2 - y_2 \\ a_1y_3 - y_3 \\ a_1z_0 - z_0 \\ a_1z_1 - z_1 \\ a_2a_2 - a_1 \\ a_2b_0 - b_2 \\ a_2b_1 - b_0 \\ a_2b_2 - b_1 \\ a_2c_0 - c_2 \\ a_2c_1 - c_0 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a_2c_2 - c_1 \\ a_2x_0 - x_0 \\ a_2x_1 - x_1 \\ a_2y_0 - y_0 \\ a_2y_1 - y_1 \\ a_2y_2 - y_2 \\ a_2y_3 - y_3 \\ a_2z_0 - z_0 \\ a_2z_1 - z_1 \\ b_0b_0 - c_0 \\ b_0b_1 - c_1 \\ b_0b_2 - c_2 \\ b_0c_0 - 1 \\ b_0c_1 - a_1 \\ b_0c_2 - a_2 \\ b_0x_0 - z_0 \\ b_0x_1 - y_0 \\ b_0y_0 - z_1 \\ b_0y_1 - y_1 \\ b_0y_2 - y_2 \\ b_0y_3 - x_0 \\ b_0z_0 - y_3 \\ b_0z_1 - x_1 \\ b_1b_1 - c_2 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b_1b_2 - c_0 \\ b_1c_0 - a_1 \\ b_1c_1 - a_2 \\ b_1c_2 - 1 \\ b_1x_0 - z_0 \\ b_1x_1 - y_0 \\ b_1y_0 - z_1 \\ b_1y_1 - y_1 \\ b_1y_2 - y_2 \\ b_1y_3 - x_0 \\ b_1z_0 - y_3 \\ b_1z_1 - x_1 \\ b_2b_2 - c_1 \\ b_2c_0 - a_2 \\ b_2c_1 - 1 \\ b_2c_2 - a_1 \\ b_2x_0 - z_0 \\ b_2x_1 - y_0 \\ b_2y_0 - z_1 \\ b_2y_1 - y_1 \\ b_2y_2 - y_2 \\ b_2y_3 - x_0 \\ b_2z_0 - y_3 \\ b_2z_1 - x_1 \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} c_0c_0 - b_0 \\ c_0c_1 - b_1 \\ c_0c_2 - b_2 \\ c_0x_0 - y_3 \\ c_0x_1 - z_1 \\ c_0y_0 - x_1 \\ c_0y_1 - y_1 \\ c_0y_2 - y_2 \\ c_0y_3 - z_0 \\ c_0z_0 - x_0 \\ c_0z_1 - y_0 \\ c_1c_1 - b_2 \\ c_1c_2 - b_0 \\ c_1x_0 - y_3 \\ c_1x_1 - z_1 \\ c_1y_0 - x_1 \\ c_1y_1 - y_1 \\ c_1y_2 - y_2 \\ c_1y_3 - z_0 \\ c_1z_0 - x_0 \\ c_1z_1 - y_0 \\ c_2c_2 - b_1 \\ c_2x_0 - y_3 \\ c_2x_1 - z_1 \end{gathered}$$

$c_2y_0 - x_1$

$c_2y_1 - y_1$

$c_2y_2 - y_2$

$c_2y_3 - z_0$

$c_2z_0 - x_0$

$c_2z_1 - y_0$

$x_0x_0 - x_1 - 2y_0$

$$x_0x_1 - 1 - a_1 - a_2 - y_1 - y_2$$

$$x_0y_0 - b_0 - b_1 - b_2 - y_1 - y_2$$

$$x_0y_1 - y_1$$

$$x_0y_2 - y_2$$

$$x_0y_3 - z_1 - 2x_1$$

$$x_0z_0 - y_0 - 2z_1$$

$$x_0z_1 - c_0 - c_1 - c_2 - y_1 - y_2$$

$$x_1x_1 - x_0 - 2y_3$$

$$x_1y_0 - 2x_0 - z_0$$

$$x_1y_1 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$x_1y_2 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$x_1y_3 - c_0 - c_1 - c_2 - y_1 - y_2$$

$$x_1z_0 - b_0 - b_1 - b_2 - y_1 - y_2$$

$$x_1z_1 - y_3 - 2z_0$$

$$y_0y_0 - y_3 - 2z_0$$

$$y_0y_1 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$y_0y_2 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$y_0y_3 - 1 - a_1 - a_2 - y_1 - y_2$$

$$y_0z_0 - c_0 - c_1 - c_2 - y_1 - y_2$$

$$y_0z_1 - x_0 - 2y_3$$

$$y_1y_1 - 3y_2$$

$$y_1y_2 - 1 - a_1 - a_2 - b_0 - b_1 - b_2 - c_0 - c_1 - c_2$$

$$y_1y_3 - x_0 - y_3 - z_0$$

$$y_1z_0 - x_0 - y_3 - z_0$$

$$y_1z_1 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$y_2y_2 - 3y_1$$

$$y_2y_3 - x_0 - y_3 - z_0$$

$$y_2z_0 - x_0 - y_3 - z_0$$

$$y_2z_1 - x_1 - y_0 - z_1$$

$$y_3y_3 - y_0 - 2z_1$$

$$y_3z_0 - x_1 - 2y_0$$

$$y_3z_1 - b_0 - b_1 - b_2 - y_1 - y_2$$

$$z_0z_0 - 2x_1 - z_1$$

$$z_0z_1 - 1 - a_1a_2 - y_1 - y_2$$

$$z_1z_1 - 2x_0 - z_0$$

4.5.1 Invariantes bajo fusión

En la siguiente sección se usarán los cálculos de anillos de representaciones de la sección anterior para calcular los anillos de representaciones invariantes bajo fusión del sistema de fusión $\mathcal{F}_S(S_{p^2})$ para $p=2$ y $p=3$. Más adelante en el capítulo cinco utilizaremos estos resultados para calcular la K-teoría de la p-completación de los espacios clasificantes de S_4 y S_9.

Ejemplo 4.5.4. *Observemos que D_8 es 2-subgrupo de Sylow de S_4 considerando a $r=(1234)$ y $s=(13)$. Calculemos las representaciones invariantes bajo fusión de $\mathcal{F}_{D_8}(S_4)$. Primero, observemos que $N_{S_4}(D_8)=D_8$ ya que al menos $D_8 \subseteq N_{S_4}(D_8)$ y entonces 8 divide a su orden, sin embargo D_8 no es normal en S_4 cuyo orden es 24. De lo anterior, para calcular $R(\mathcal{F}_{D_8}(S_4))$ solo debemos mirar a los grupos de orden 4 y 2, pero los grupos de orden 2 no pueden ser céntricos. Ahora, los grupos de orden 4 son $Q=\{1,sr,r^2,sr^3\}=\{1,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$, $Q_1=\{1,s,r^2,sr^2\}$ y $Q_2=\{1,r,r^2,r^3\}$. Sin embargo, los últimos dos no son p-reducidos por lo que basta observar qué pasa en Q. La tabla de representaciones para Q se ve de la siguiente manera:*

Q	1	sr	r^2	sr^3
Trivial	1	1	1	1
X_1	1	1	-1	-1
Y_1	1	-1	-1	1
X_1Y_1	1	-1	1	-1

De lo anterior se sigue que $R(Q) \cong \mathbb{Z}[x_1,y_1]/(x_1^2-1,y_1^2-1)$. Ahora observemos que $\mathrm{Aut}_{S_4}(Q)=\langle c_{(23)},c_{(234)}\rangle$. Así, tenemos que

x	$c_{(23)}(x)$	$c_{(234)}(x)$
1	1	1
sr	r^2	r^2
r^2	sr	sr^3
sr^3	sr^3	sr

De lo anterior obtenemos las siguientes tablas de caracteres, donde ι denota la inclusión de Q en D_8 e ι^*,$c^*_{(23)}$ y $c^*_{(234)}$ denotan a los morfismos inducidos entre los anillos de representaciones correspondientes.

ι^*	1	sr	r^2	sr^3	
Trivial	1	1	1	1	Trivial
$\iota^*(X)$	1	-1	1	-1	X_1Y_1
$\iota^*(Y)$	1	-1	1	-1	X_1Y_1
$\iota^*(Z)$	2	0	-2	0	X_1+Y_1

$c^*_{(23)}\iota^*$	1	sr	r^2	sr^3	
Trivial	1	1	1	1	Trivial
$c^*_{(23)}\iota^*(X)$	1	1	-1	-1	X_1
$c^*_{(23)}\iota^*(Y)$	1	1	-1	-1	X_1
$c^*_{(23)}\iota^*(Z)$	2	-2	0	0	$Y_1+X_1Y_1$

$c^*_{(234)}\iota^*$	*1*	sr	r^2	sr^3	
Trivial	*1*	*1*	*1*	*1*	*Trivial*
$c^*_{(234)}\iota^*(X)$	*1*	*1*	*-1*	*-1*	X_1
$c^*_{(234)}\iota^*(Y)$	*1*	*1*	*-1*	*-1*	X_1
$c^*_{(234)}\iota^*(Z)$	*2*	*-2*	*0*	*0*	$Y_1 + X_1Y_1$

Ahora queremos buscar los $\psi \in R(D_8)$ tales que $\imath^*(\psi) = f^*\iota^*(\psi)\ \forall f \in \mathrm{Aut}_{S_4}(Q)$, por lo que basta observar el comportamiento de $c^*_{(23)}$ ya que $c^*_{(23)} = c^*_{(234)}$ vistos como morfismos inducidos.

Por lo anterior podemos ver a cualquier $\psi \in R(D_8)$ como $\psi = a + bX + cY + dXY + eZ$ con $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}$. Así

$$i^*(\psi) = a + b(X_1Y_1) + c(X_1Y_1) + d(X_1Y_1)^2 + e(X_1 + Y_1) = (a + d) + eX_1 + eY_1 + (b + c)(X_1Y_1)$$

$$c^*_{(23)}\iota^*(\psi) = a + bX_1 + cX_1 + dX_1^2 + e(Y_1 + X_1Y_1) = (a + d) + (b + c)X_1 + eY_1 + eX_1Y_1$$

Por lo cual $i^*(\psi) = c^*_{(23)}\iota^*(\psi)$ si y solo si tenemos que $b + c = e$. De esto, $\psi \in R(\mathcal{F})$ si y solo si $\psi = a + b(X + Z) + c(Y + Z) + dXY$. Así, se tiene que

$$R(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}[r, s, t]/(r^2 - r - s - t - 2, s^2 - r^2, rs - r - s - 2t, rt - t, st - r, t^2 - 1)$$

donde $r = X + Z$ y $s = Y + Z$ son representaciones de dimensión 3 y $t = XY$ de dimensión 1 y los productos se obtienen del Ejemplo 4.5.2.

Ejemplo 4.5.5. *Como vimos en la sección 3.3 para calcular $R(\mathcal{F}_S(S_9))$ basta fijar nuestra atención en los grupos $K = \langle (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\rangle$, $L = \langle (1, 2, 3)(4, 5, 6)(7, 8, 9), (1, 4, 7)(2, 5, 8)(3, 6, 9)\rangle$ y S. Primero fijemos nuestra atención en el grupo K.*

Sabemos que $\mathrm{Aut}_{S_9}(K) = \langle c_{(23)}, c_{(56)}, c_{(89)}, c_{(14)(25)(36)}, c_{(147)(258)(369)}\rangle$, pero bastará con fijarnos en el grupo $\langle c_{(23)}, c_{(56)}, c_{(89)}, c_{(14)(25)(36)}\rangle$ pues las representaciones ya son invariantes bajo $c^*_{(147)(258)(369)}$ pues $(147)(258)(369) \in S$.

x	$c_{(23)}(x)$	$c_{(56)}(x)$	$c_{(89)}(x)$	$c_{(14)(25)(36)}(x)$	$c_{(147)(258)(369)}(x)$
(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)
$(1, 2, 3)$	$(1, 3, 2)$	$(1, 2, 3)$	$(1, 2, 3)$	$(4, 5, 6)$	$(4, 5, 6)$
$(4, 5, 6)$	$(4, 5, 6)$	$(4, 6, 5)$	$(4, 5, 6)$	$(1, 2, 3)$	$(7, 8, 9)$
$(7, 8, 9)$	$(7, 8, 9)$	$(7, 8, 9)$	$(7, 9, 8)$	$(7, 8, 9)$	$(1, 2, 3)$

De esto obtenemos la siguiente tabla para elementos en $R(S)$

x	$(\iota_K^S)^*(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1$
b_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
b_1	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
b_2	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
c_0	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_2	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
x_0	$\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega$
x_1	$\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_0	$\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega$
y_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega$
y_2	$\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_3	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2$
z_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega$
z_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$

Sea

$$\psi = t_0a_0+t_1a_1+t_2a_2+t_3b_0+t_4b_1+t_5b_2+t_6c_0+t_7c_1+t_8c_2+l_0x_0+l_1x_1+l_2y_0+l_3y_1+l_4y_2+l_5y_3+l_6z_0+l_7z_1$$

un elemento de $R(S)$. *Tenemos que,*

$$\begin{aligned}
(\iota_K^S)^*(\psi) = {} & (t_0+t_1+t_2)(1 \otimes 1 \otimes 1) + (t_3+t_4+t_5)(\omega \otimes \omega \otimes \omega) + (t_6+t_7+t_8)(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2) \\
& + l_0(\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_1(\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_2(\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_3(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_4(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_5(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_6(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega) \\
& + l_7(\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega).
\end{aligned}$$

Para ver cuándo $\psi \in R(\mathcal{F}_S(S_9))$ *primero observemos qué pasa con* $c^*_{(23)}$.

x	$c^*_{(23)}(\iota^S_K)^*(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1$
b_0	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega$
b_1	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega$
b_2	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega$
c_0	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_2	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
x_0	$\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega$
x_1	$\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_0	$\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega$
y_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega$
y_2	$\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_3	$\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2$
z_0	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
z_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega$

Así, si $\psi \in R(\mathcal{F}_S(S_9))$ *tenemos que* $c^*_{(23)}(\iota^S_K)^*(\psi) = (\iota^S_K)^*(\psi)$. *Notemos que,*

$$\begin{aligned}
c^*_{(23)}(\iota^S_K)^*(\psi) = {} & (t_0+t_1+t_2)(1 \otimes 1 \otimes 1) + (t_3+t_4+t_5)(\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega) + (t_6+t_7+t_8)(\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2) \\
& + l_0(\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_1(\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_2(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_3(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_4(\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_5(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_6(\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega) \\
& + l_7(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega)
\end{aligned}$$

lo cual implica que $(t_3+t_4+t_5) = l_6$, $(t_6+t_7+t_8) = l_7$, $l_0 = l_1$, $l_3 = l_5$, $l_2 = l_4$, $l_2 = l_3$ *y* $l_6 = l_7$

x	$c^*_{(56)}(\iota_K^S)^*(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1$
b_0	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega$
b_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega$
b_2	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega$
c_0	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2$
c_1	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2$
c_2	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2$
x_0	$\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega$
x_1	$\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_0	$\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega$
y_1	$\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega$
y_2	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_3	$\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2$
z_0	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega \otimes \omega \otimes \omega$
z_1	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
c^*_{(56)}(\iota_K^S)^*(\psi) = {} & (t_0+t_1+t_2)(1 \otimes 1 \otimes 1) + (t_3+t_4+t_5)(\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega) + (t_6+t_7+t_8)(\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2) \\
& + l_0(\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_1(\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_2(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_3(\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_4(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_5(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_6(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_7(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega)
\end{aligned}$$

x	$c^*_{(89)}(\iota^S_K)^*(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1$
b_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2$
b_1	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2$
b_2	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2$
c_0	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
c_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
c_2	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
x_0	$\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
x_1	$\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega$
y_0	$\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_2	$\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega$
y_3	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega$
z_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
z_1	$\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$

Luego,

$$\begin{aligned}
c^*_{(89)}(\iota^S_K)^*(\psi) = {} & (t_0+t_1+t_2)(1 \otimes 1 \otimes 1) + (t_3+t_4+t_5)(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2) + (t_6+t_7+t_8)(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega) \\
& + l_0(\omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_1(\omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_2(\omega \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_3(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_4(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_5(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_6(\omega \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2) \\
& + l_7(\omega \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2).
\end{aligned}$$

x	$c^*_{(14)(25)(36)}(\iota_K^S)^*(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1$
b_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
b_1	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
b_2	$\omega \otimes \omega \otimes \omega$
c_0	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_2	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
x_0	$1 \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega$
x_1	$1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
y_0	$\omega \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes \omega + 1 \otimes \omega \otimes \omega$
y_1	$\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
y_2	$\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2$
y_3	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
z_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega$
z_1	$\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$

Luego,

$$\begin{aligned}
c^*_{(14)(25)(36)}(\iota_K^S)^*(\psi) = {} & (t_0+t_1+t_2)(1 \otimes 1 \otimes 1) + (t_3+t_4+t_5)(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2) + (t_6+t_7+t_8)(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega) \\
& + l_0(1 \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega) \\
& + l_1(1 \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \omega^2) \\
& + l_2(\omega \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes \omega + 1 \otimes \omega \otimes \omega) \\
& + l_3(\omega^2 \otimes \omega \otimes 1 + \omega \otimes 1 \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega) \\
& + l_4(\omega \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega + 1 \otimes \omega \otimes \omega^2) \\
& + l_5(\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1 + \omega^2 \otimes 1 \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2) \\
& + l_6(\omega \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes \omega \otimes \omega) \\
& + l_7(\omega^2 \otimes \omega \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega).
\end{aligned}$$

Las igualdades $c_r^*(\iota_K^S)^*(\psi) = (\iota_K^S)^*(\psi)$ *con* $r = (14)(25)(36), (56)$ *y* (89) *no agregan nuevas relaciones sobre los coeficientes de* ψ *por lo que tenemos que si* $\psi \in R(\mathcal{F}_S(S_9))$ *entonces*

$$\begin{aligned}
\psi = {} & t_0a_0 + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3(b_0+z_0) + t_4(b_1+z_0) + t_5(b_2+z_0) + t_6(c_0+z_1) + t_7(c_1+z_1) + t_8(c_2+z_1) \\
& + l_0(x_0+x_1) + l_1(y_0+y_1+y_2+y_3)
\end{aligned}$$

y además se debe cumplir $t_3+t_4+t_5 = t_6+t_7+t_8$. *Entonces sean,* $X = x_0 + x_1$ *y* $Y = y_0+y_1+y_2+y_3$.

Podemos escribir a ψ entonces como

$$\psi = t_0a_0 + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3(b_0 + z_0) + t_4(b_1 + z_0) + t_5(b_2 + z_0) + t_6(c_0 + z_1) + t_7(c_1 + z_1) + t_8(c_2 + z_1) + l_0X + l_1Y.$$

Ahora veamos las restricciones que nos dan los automorfismos del grupo S en $\mathcal{F}_S(S_9)$. Para S basta fijarse en el grupo de automorfismos externos, el cual está generado por $c_{(23)(56)(89)}$ y $c_{(47)(58)(69)}$.

x	$c_{(23)(56)(89)}(x)$	$c_{(47)(58)(69)}(x)$
(1)	(1)	(1)
$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(1,2,3)$
$(4,5,6)$	$(4,6,5)$	$(7,8,9)$
$(7,8,9)$	$(7,9,8)$	$(4,5,6)$
$(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(1,7,4)(2,8,5)(3,9,6)$

Observemos que las representaciones X y Y quedan fijas bajo $c^*_{(23)(56)(89)}, c^*_{(47)(58)(69)}$ ya que sus caracteres se anulan en $S \setminus K$, estos automorfismos preservan el subgrupo K y los caracteres de X y Y ya eran invariantes bajo estos automorfismos de K.

x	$c^*_{(23)(56)(89)}(x)$
Trivial	$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$
a_1	$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \omega$
a_2	$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \omega^2$
b_0	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes 1$
b_1	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega$
b_2	$\omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2 \otimes \omega^2$
c_0	$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes 1$
c_1	$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega$
c_2	$\omega \otimes \omega \otimes \omega \otimes \omega^2$
z_0	z_1
z_1	z_0

Por lo que,

$$c^*_{(23)(56)(89)}(\psi) = t_0a_0 + t_1a_1 + t_2a_2 + t_3(c_0 + z_1) + t_4(c_1 + z_1) + t_5(c_2 + z_1) + t_6(b_0 + z_0) + t_7(b_1 + z_0) + t_8(b_2 + z_0) + l_0X + l_1Y.$$

por lo cual $t_3 = t_6$, $t_4 = t_7$ y $t_5 = t_8$.

x	$c^*_{(47)(58)(69)}(\psi)$
Trivial	$1\otimes 1\otimes 1\otimes 1$
a_1	$1\otimes 1\otimes 1\otimes \omega^2$
a_2	$1\otimes 1\otimes 1\otimes \omega$
b_0	$\omega\otimes\omega\otimes\omega\otimes 1$
b_1	$\omega\otimes\omega\otimes\omega\otimes\omega^2$
b_2	$\omega\otimes\omega\otimes\omega\otimes\omega$
c_0	$\omega^2\otimes\omega^2\otimes\omega^2\otimes 1$
c_1	$\omega^2\otimes\omega^2\otimes\omega^2\otimes\omega^2$
c_2	$\omega^2\otimes\omega^2\otimes\omega^2\otimes\omega$
z_0	z_0
z_1	z_1

De esto se sigue que

$$\begin{aligned}c^*_{(23)(56)(89)}(\psi) &= t_0a_0+t_1a_2+t_2a_1+t_3(b_0+z_0)+t_4(b_2+z_0)+t_5(b_1+z_0)+t_6(c_0+z_1)+t_7(c_2+z_1)+t_8(c_1+z_1)\\ &\quad +l_0X+l_1Y\end{aligned}$$

y así $t_1=t_2$, $t_4=t_5$ *y* $t_7=t_8$. *Sea* $Z=z_0+z_1$. *Entonces podemos escribir a* ψ *como*

$$l_0a_0+l_1(a_1+a_2)+l_2(b_0+c_0+Z)+l_3(b_1+b_2+c_1+c_2+2Z)+l_4X+l_5Y.$$

Por último, consideremos los automorfismos del grupo L. *Sabemos que el grupo de automorfismos* $\mathrm{Aut}_{S_9}(L)=\langle c_{(23)(56)(89)},c_{(24)(73)(68)},c_{(17)(25)(69)}\rangle$.

x	$c_{(23)(56)(89)}(x)$	$c_{(24)(73)(68)}(x)$	$c_{(17)(25)(69)}(x)$
(1)	(1)	(1)	(1)
$A=(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$	$(1,3,2)(4,6,5)(7,9,8)$	$(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	AB^2
$B=(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)$	$(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)$	$(1,7,4)(2,8,5)(3,9,6)$

x	$\iota_L^{S*}(x)$
Trivial	$1\otimes 1$
a_1	$1\otimes\omega$
a_2	$1\otimes\omega^2$
b_0	$1\otimes 1$
b_1	$1\otimes\omega$
b_2	$1\otimes\omega^2$
c_0	$1\otimes 1$
c_1	$1\otimes\omega$
c_2	$1\otimes\omega^2$
X	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$
Y	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+2(1\otimes 1+1\otimes\omega+1\otimes\omega^2)+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$
Z	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$

Entonces

$$\begin{aligned}\iota_L^{S^*}(\psi) &= (l_0+2l_2+2l_5)(1\otimes 1)+(l_1+2l_3+2l_5)(1\otimes\omega)+(l_1+2l_3+2l_5)(1\otimes\omega^2)\\ &\quad+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega\otimes 1)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega\otimes\omega)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega\otimes\omega^2)\\ &\quad+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega^2\otimes 1)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega^2\otimes\omega)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega^2\otimes\omega^2).\end{aligned}$$

x	$c^*_{(23)(56)(89)}\iota_L^{S^*}(x)$
Trivial	$1\otimes 1$
a_1	$1\otimes\omega$
a_2	$1\otimes\omega^2$
b_0	$1\otimes 1$
b_1	$1\otimes\omega$
b_2	$1\otimes\omega^2$
c_0	$1\otimes 1$
c_1	$1\otimes\omega$
c_2	$1\otimes\omega^2$
X	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$
Y	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+2(1\otimes 1+1\otimes\omega+1\otimes\omega^2)+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$
Z	$\omega\otimes 1+\omega\otimes\omega+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes 1+\omega^2\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega^2$

Por lo que no tenemos ninguna restricción nueva.

x	$c^*_{(24)(73)(68)}\iota_L^{S^*}(x)$
Trivial	$1\otimes 1$
a_1	$\omega\otimes 1$
a_2	$\omega^2\otimes 1$
b_0	$1\otimes 1$
b_1	$\omega\otimes 1$
b_2	$\omega^2\otimes 1$
c_0	$1\otimes 1$
c_1	$\omega\otimes 1$
c_2	$\omega^2\otimes 1$
X	$1\otimes\omega+\omega\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega+1\otimes\omega^2+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes\omega^2$
Y	$1\otimes\omega+\omega\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega+2(1\otimes 1+\omega\otimes 1+\omega^2\otimes 1)+1\otimes\omega^2+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes\omega^2$
Z	$1\otimes\omega+\omega\otimes\omega+\omega^2\otimes\omega+1\otimes\omega^2+\omega\otimes\omega^2+\omega^2\otimes\omega^2$

Entonces

$$\begin{aligned}c^*_{(24)(73)(68)}\iota_L^{S^*}(\psi) &= (l_0+2l_2+2l_5)(1\otimes 1)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(1\otimes\omega)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(1\otimes\omega^2)\\ &\quad+(l_1+2l_3+2l_5)(\omega\otimes 1)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega\otimes\omega)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega\otimes\omega^2)\\ &\quad+(l_1+2l_3+2l_5)(\omega^2\otimes 1)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega^2\otimes\omega)+(l_2+2l_3+l_4+l_5)(\omega^2\otimes\omega^2).\end{aligned}$$

Esto implica que $l_1-l_2+l_5=l_4$

x	$c^*_{(17)(25)(69)}\iota_L^{S^*}(x)$
Trivial	$1 \otimes 1$
a_1	$\omega^2 \otimes \omega^2$
a_2	$\omega \otimes \omega$
b_0	$1 \otimes 1$
b_1	$\omega^2 \otimes \omega^2$
b_2	$\omega \otimes \omega$
c_0	$1 \otimes 1$
c_1	$\omega^2 \otimes \omega^2$
c_2	$\omega \otimes \omega$
X	$\omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 + \omega \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega$
Y	$\omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega + 2(1 \otimes 1 + \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega \otimes \omega) + \omega^2 \otimes 1 + \omega \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega$
Z	$\omega \otimes 1 + 1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega + \omega^2 \otimes 1 + \omega \otimes \omega^2 + 1 \otimes \omega$

Por lo que no tenemos ninguna restricción nueva. Por lo tanto $\psi \in R(\mathcal{F}_S(S_9))$ si y solo si

$$\psi = l_0 a_0 + l_1(a_1 + a_2 + X) + l_2(b_0 + c_0 + Z - X) + l_3(b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z) + l_4(X + Y).$$

Nótese que esta base tiene 5 elementos, como ya sabíamos que debía pasar por la Proposición 4.2.4. Así, se tiene que

$$R(\mathcal{F}_S(S_9)) \cong \mathbb{Z}[P, Q, R, S]/J$$

donde $P = a_1 + a_2 + X$, $Q = b_0 + c_0 + Z - X$, $R = b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + 2Z$, $S = X + Y$ y J es el ideal generado por los siguientes elementos

$$P^2 - 4 - 3P - 2S$$

$$PQ + 2 + 2P - Q - 2R$$

$$PR - 4R - 3Q - 4S$$

$$PS - 2 - 2P - Q - R - 6S$$

$$Q^2 - 6 - 4P + Q + 2R$$

$$QR - 4 - 6P + 2Q + R$$

$$QS + 2P - Q - R - 2S$$

$$R^2 - 12 - 10P - 2Q - R - 8S$$

$$RS - 4Q - 4R - 12S$$

$$S^2 - 6 - 6P - 4Q - 4R - 11S$$

A continuación veremos un ejemplo en el que la descomposición de una representación invariante bajo fusión como suma de irreducibles no es única. Consideremos a la representación

$$P + Q + S = (a_1 + a_2 + X) + (b_0 + c_0 + Z + Y) = (b_0 + c_0 + Z + a_1 + a_2) + (X + Y)$$

que es invariante bajo fusión. Veamos que las representaciones a_1+a_2+X, b_0+c_0+Z+Y, $b_0+c_0+Z+a_1+a_2$ y $X+Y$ son representaciones irreducibles invariantes bajo fusión. Supongamos que V es una subrepresentación invariante bajo fusión de a_1+a_2+X. Entonces

$$V = l + pP + qQ + rR + sS$$

para ciertos $l, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$. Observemos que las representaciones irreducibles b_0, y_0 y b_1 solo aparecen en la descomposición de Q, S y R respectivamente. Como ninguna de ellas es una subrepresentación de a_1+a_2+X tenemos que $q = s = r = 0$. De esto obtenemos que $V = l + pP$, sin embargo es claro que $l = 0$ pues la representación trivial no es subrepresentación de a_1+a_2+X. Como P y V son representaciones, p debe ser mayor o igual que cero. Luego, al ser V una subrepresentación de P, tenemos que $0 \leq p \leq 1$. Así, $V = 0$ o $V = P$ y por lo tanto P es irreducible.

Para las representaciones restantes, un argumento similar nos lleva a concluir que también deben ser irreducibles. De esto obtenemos dos descomposiciones distintas de $P+Q+S$ como suma de representaciones irreducibles invariantes bajo fusión.

Sin embargo, sí podemos encontrar una base de representaciones de S para el anillo de representaciones invariantes bajo fusión. Basta con tomar al elemento $Q+S$ en vez de S. Por lo tanto, para asegurar la unicidad de la descomposición de representaciones invariantes bajo fusión, no es suficiente con encontrar una base de representaciones invariantes bajo fusión para el anillo $R(\mathcal{F}_S(G))$.

5 Teoremas de completación

Ya estudiados los anillos de representaciones de grupos finitos y la K-teoría de espacios topológicos, en esta sección revisaremos una forma en la que se relacionan estos dos conceptos que en principio pueden parecer no relacionarse del todo. Para ello, primero contruiremos un morfismo de el anillo de representaciones $R(G)$ a $K(BG)$. Luego, veremos que este morfismo de extiende a las respectivas completaciones. Después, probaremos solamente para el caso de grupos cíclicos y solubles que este morfismo entre las completaciones es en realidad un homeomorfismo. Utilizaremos luego que el resultado en general es cierto para probar el teorema en el caso de espacios p-completados y sistemas de fusión. Para mayor detalle sobre los resultados en esta sección referimos al lector a [3]

5.1 El morfismo de completación

Teorema 5.1.1. *Sea H un subgrupo de G. Entonces la topología $I(H)$-ádica de $R(H)$ es la misma que su topología $I(G)$-ádica, considerando a $R(H)$ como un $R(G)$-módulo por el morfismo de restricción $\imath^*\colon R(G) \to R(H)$.*

En lo siguiente probaremos que el Teorema de completación es cierto para el caso de grupos cíclicos y de grupos solubles. Antes de continuar, daremos una contrucción del isomorfismo del Teorema 5.1.2. Si V es una representación de G, entonces tenemos que G actúa en el espacio $E^nG \times V$ de la siguiente manera

$$g \cdot \left(\sum_{l=0}^{n} t_l g_l, v \right) := \left(\sum_{l=0}^{n} t_l g_l g^{-1}, gv \right)$$

lo cual es fácil ver que es una acción. Existe un morfismo $\alpha_G^n\colon R(G) \to K(B^nG)$ de tal manera que $\alpha_G^n([V]) = [E^nG \times_G V]$. Además es tal que para toda n el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & R(G) \arrow[dl, "\alpha_G^n"'] \arrow[dr, "\alpha_G^{n-1}"] & \\ K(B^nG) \arrow[rr, "\imath^{n*}"] & & K(B^{n-1}G) \end{tikzcd}$$

De esto obtenemos un morfismo $\alpha : R(G) \to K(BG)$.

Luego, dado un morfismo de grupos $f\colon G \to H$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
R(G) \arrow[rrr, bend left, "\alpha_G"] & & & \\
R(H) \arrow[u, "f^*"] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[r, "\alpha_H"] \arrow[rd, "\alpha_H^n"] & K(BH) \arrow[r, "Bf^*"] \arrow[d, "\alpha_n"] & K(BG) \arrow[d, "\beta_n"] \\
 & K(B^nH) \arrow[r, "B^nf^*"] & K(B^nG) \\
R(G) \arrow[rru, bend right, "\alpha_G^n"'] & &
\end{tikzcd}.$$

lo cual muestra que el morfismo $\alpha\colon R(G) \to K(BG)$ es natural en G.

Resulta además que α es continuo si consideramos a $R(G)$ con la topología $I(G)$-ádica y a $K(BG)$ con la topología asociada a la filtración del Capítulo 2. Luego, α se extiende a un morfismo $\widehat{\alpha}\colon \widehat{R(G)} \to K^*(BG)$, ya que $K(BG)$ es completo.

Buscamos probar entonces el siguiente resultado para el caso de grupos cíclicos y solubles

Teorema 5.1.2. *Sean G un grupo finito, entonces existe un isomorfismo de anillos*

$$\widehat{\alpha} : \widehat{R(G)} \to K^*(BG)$$

que es además homeomorfismo.

Para probar el resultado para el caso cíclico y el soluble haremos uso del siguiente lema.

Lema 5.1.3. *Para probar que $\widehat{\alpha} : \widehat{R(G)} \to K(BG)$ es un homeomorfismo basta probar que:*

1. *$\widehat{\alpha}$ es un monomorfismo;*

2. *$\alpha R(G)$ es denso en $K(BG)$.*

Demostración. Tenemos la siguiente descomposición

$$R(G) = \mathbb{Z} \oplus I(G),\ K^*(BG) = \mathbb{Z} \oplus \widetilde{K}^*(BG)$$

Entonces α y $\widehat{\alpha}$ se descomponen de manera correspondiente. Consideramos entonces

$$\widehat{\alpha}\colon \widehat{I(G)} \to \widetilde{K}^*(BG)$$

Ahora, $\widehat{I(G)}$ es un límite inverso de grupos finitos y como consecuencia es un grupo Hausdorff y compacto. Lo mismo se tiene para $\widetilde{K}^*(BG)$. Ahora, 2 implica que $\widehat{\alpha}(\widehat{I(G)})$ es denso en $\widetilde{K}^*(BG)$ y entonces $\widehat{\alpha}\colon \widehat{I(G)} \to \widetilde{K}^*(BG)$ es un epimorfismo. Por 1 se sigue que esto es un isomorfismo. Como $\widehat{I(G)}$ y $\widetilde{K}^*(BG)$ son grupos compactos y Hausdorff cualquier isomorfismo continuo entre ellos debe ser un homeomorfismo. Lo mismo se tiene para $\widehat{\alpha} : \widehat{R(G)} \to K(BG)$. $\square$

5.2 El caso cíclico

Probaremos primero que el Teorema 5.1.2 es cierto para grupos cíclicos y que el inciso 1 del Lema 5.1.3 es cierto para grupos finitos en general. Sea G un grupo cíclico de orden n y sea φ la representación que envía al generador $[1]$ a $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Entonces φ corresponde a un generador de $H^2(G,\mathbb{Z})$. Sabemos que $H^*(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(nx)$, donde x tiene grado 2 y $\mathbb{Z}[x]$ denota al anillo graduado de polinomios en x. En particular, no hay cohomología de dimensión impar y entonces por el Corolario 2.2.10 tenemos un isomorfismo $H^*(G,\mathbb{Z}) \cong GK^*(BG)$. Ahora, $R(G) = \mathbb{Z}[\varphi]/(\varphi^n - 1)$. Sea $\sigma = \varphi - 1$, entonces $R(G) = \mathbb{Z}[\sigma]/((\sigma+1)^n - 1)$, e $I(G)$ es el ideal $\langle \sigma \rangle$. Como $0 = (1+\sigma)^n - 1 \equiv n\sigma \mod \sigma^2$ entonces $I(G)^k/I(G)^{k+1}$ es cíclico y de orden n generado por la clase de σ^k cuando $k > 0$. Si tomamos la filtración $R_{2k}(G) = R_{2k-1}(G) = I(G)^k$ para $R(G)$ entonces tenemos que $GR(G) = \mathbb{Z}[\overline{\sigma}]/(n\overline{\sigma})$ donde $\overline{\sigma}$ es la clase de σ en $I(G)^2$. Consideramos el homomorfismo

$$\alpha\colon R(G) \to K^*(BG).$$

Este es un homomorfismo de anillos filtrados, y entonces induce un homomorfismo de anillos graduados:

$$G\alpha\colon GR(G) \to GK^*(BG).$$

De lo anterior, podemos identificar a $GK^*(BG)$ con $H^*(G,\mathbb{Z})$ y por entonces $G\alpha(\overline{\sigma}) = c_1\alpha(\varphi) = x$. Como consecuencia $G\alpha$ es un isomorfismo. Del Lema 1.1.5 obtenemos lo siguiente

Proposición 5.2.1. *Sea G un grupo cíclico y consideremos la filtración $R_{2k}(G) = R_{2k-1}(G) = I(G)^k$ de $R(G)$. Entonces $\widehat{R(G)}$ tiene una filtración inducida y $\widehat{\alpha} : \widehat{R(G)} \to K^*(BG)$ es un isomorfismo de grupos.*

Ahora, probemos el inciso 1 del Lema 5.1.3 para cualquier grupo G.

Lema 5.2.2. *Sea G un grupo finito, $\{G_l\}$ la familia de todos los subgrupos cíclicos de G. Entonces el morfismo dado por la restricción entrada a entrada en $\imath^*\colon R(G) \to \bigoplus_l R(G_l)$ es un monomorfismo.*

Demostración. Si $\varphi \in R(G)$ es nula en cada G_l, entonces $\chi_\varphi|G_l = 0$. Como G es la unión de la familia $\{G_l\}$ esto implica que $\chi_\varphi = 0$ y entonces $\varphi = 0$. □

Utilizando la misma notación del lema anterior tenemos lo siguiente

Lema 5.2.3. *El morfismo $\imath^*\colon \widehat{R(G)} \to \bigoplus_l R(G_l)^\wedge$ es un monomorfismo.*

Demostración. Por el Lema 5.2.2 tenemos una sucesión exacta

$$0 \to R(G) \to \bigoplus_l R(G_l).$$

Por el Teorema 5.1.1 la topología $I(G_l)$-ádica de $R(G_l)$ es la misma que su $I(G)$-topología. Entonces, viendo a $R(G)$ y a $\bigoplus_l R(G_l)$ como $R(G)$-módulos y completando con respecto a la $I(G)$-topología tenemos por el Lema 1.1.8 una sucesión exacta

$$0 \to \widehat{R(G)} \to \left(\bigoplus_l R(G_l)\right)^\wedge.$$

Sin embargo, $(\bigoplus_l R(G_l))^\wedge \cong \bigoplus_l R(G_l)^\wedge$ y por lo tanto tenemos lo buscado. □

Proposición 5.2.4. *Para cualquier grupo finito G*

$$\widehat{\alpha}\colon \widehat{R(G)} \to K^*(B_G)$$

es un monomorfismo.

Demostración. Sea $\{G_l\}$ como en el Lema 5.2.2. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \widehat{R(G)} \arrow[r, "\theta"'] \arrow[d, "\widehat{\alpha}"'] & \bigoplus_l R(G_l)^\wedge \arrow[d, "\varphi"'] \\ K^*(BG) \arrow[r] & \bigoplus_l K^*(BG_l) \end{tikzcd}$$

Pero θ es un monomorfismo por el Lema 5.2.3 y por la Proposición 5.2.1, φ es un isomorfismo. Por lo tanto $\widehat{\alpha}$ es un monomorfismo. □

5.3 La prueba para grupos solubles

Antes de continuar, veamos los siguientes resultados en [3] que serán necesarios para probar el Teorema 5.1.2 en el caso de grupos solubles.

Lema 5.3.1. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Si tenemos que que $S = G/H$ y $[G : H]$ es libre de cuadrados, entonces*

$$\imath^* R(G) = R(H)^S$$

Proposición 5.3.2. *Sea H un subgrupo normal de G, con $G/H = \mathbb{Z}_q$ (con q primo). Supongamos que el morfismo $\widehat{\alpha}_H : \widehat{R(H)} \to K(BV)$ es un isomorfismo. Entonces $\widehat{\alpha}_G : \widehat{R(G)} \to K(BG)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Debido al Teorema 2.2.7 tenemos una sucesión espectral convergente:

$$E_2 \implies K(BG)$$

con $E_2^{p,q} = H^p(B\mathbb{Z}_q, K(BH))$ para toda q par y $E_2^{p,q} = 0$ para q impar. Luego, por hipótesis tenemos que $K(BH) \cong \widehat{R(H)}$, por lo que

$$E_2^{p,q} \cong H^p(\mathbb{Z}_q, \widehat{R(H)}) \cong H^p(B\mathbb{Z}_q, R(H))^\wedge \tag{5.1}$$

para q par como consecuencia de la Proposición 1.4.5. Observemos lo siguiente: $\widehat{R(H)}$ es la completación con respecto a la topología $I(H)$-ádica. Por el Teorema 5.1.1, esto es lo mismo que la topología $I(G)$-ádica, viendo a $R(H)$ como un $R(G)$-módulo. Como $\imath^*(R(G)) \subset R(H)^{\mathbb{Z}_q}$ se sigue que $R(H)$ es un $\mathbb{Z}_q$-$R(G)$-módulo como en la Proposición 1.4.5. Más aún, $H^p(B\mathbb{Z}_q, R(H))^\wedge$ denota la completación $I(G)$-ádica.

Sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de H. Supongamos que σ_i quedan invariantes bajo la acción de $\mathbb{Z}_q$, y que la órbita de σ_i tiene q elementos para $r < i$. Entonces, como $\mathbb{Z}_q$-módulo:

$$R(H) = \mathbb{Z}\sigma_1 \oplus \mathbb{Z}\sigma_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\sigma_r \oplus M$$

donde M es un $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_q]$-módulo libre. Así, $H^{2k+1}(\mathbb{Z}_q, R(H)) = 0$ por lo que $E_2^{2k+1,p} = 0$. Luego, como $R(H) \cong K(BH)$ y $K^1(BH) = 0$ se sigue del Corolario 2.2.10 y de lo anterior que

$$GK^*(BG) \cong H^*(\mathbb{Z}_q, R(H))^\wedge.$$

Para probar que $\widehat{\alpha}_G$ es un isomorfismo, basta probar por la demostración del Lema 5.1.3 que $\widehat{\alpha}\widehat{R(G)}$ es denso en $K(BG)$. Para esto, como la como la $\mathbb{Z}_q$-topología de $K(BG)$ es más fina que la G-topología, será suficiente que $\widehat{\alpha}\widehat{R(G)}$ es denso para $\mathbb{Z}_q$-topología. Esto significa que para cada n tenemos que probar que

$$G^n\widehat{R(G)} \to G^nK(BG)$$

es un epimorfismo, donde le damos a $\widehat{R(G)}$ la filtración inducida: $\widehat{R_n(G)} := \widehat{\alpha}_G^{-1}K_n(BG)$. Para $p = 0$ tenemos que probar lo siguiente

$$\widehat{R(G)} \to (R(H)^{\mathbb{Z}_q})^\wedge \to 0$$

es exacta. Pero esto se sigue de que

$$R(G) \to R(H)^{\mathbb{Z}_q} \to 0$$

es exacta por el Lema 4.1.33, y que la completación $I(G)$-ádica es un funtor exacto. Para $n = 2k+1$ es trivial. Supongamos entonces que $n = 2k$, $k > 0$. Para probar esto, bastará con probar que

$$\lambda : G^{2k}\widehat{R(\mathbb{Z}_q)} \otimes_{\mathbb{Z}} (R(H)^{\mathbb{Z}_q})^\wedge \to G^{2k}K(BG)$$

es un epimorfismo, donde λ está definido por la multiplicación. Basta probar lo anterior pues $G^{2k}\widehat{R(G)}$ tiene un estructura de $G^{2k}\widehat{R(\mathbb{Z}_q)} \otimes_{\mathbb{Z}} (R(H)^{\mathbb{Z}_q})^\wedge$-módulo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
G^{2k}\widehat{R(G)} \arrow[dr] & \\
H^{2k}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (R(H)^{\mathbb{Z}_q})^\wedge \arrow[u] \arrow[r, "\lambda"] & G^{2k}K(BG)
\end{tikzcd}$$

Tenemos, sin embargo, el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{2k}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R(H)^{\mathbb{Z}_q} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & H^{2k}(\mathbb{Z}_q, R(H)) \arrow[d, "\tau"] \\
H^{2k}(\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (R(H)^{\mathbb{Z}_q})^\wedge \arrow[r, "\lambda"] & H^{2k}(\mathbb{Z}_q, R(H))^\wedge
\end{tikzcd}$$

donde sustituimos a $G^{2k}\widehat{R(\mathbb{Z}_q)}$ y $G^{2k}K(BG)$ por el caso de grupos cíclicos, donde el morfismo μ es el morfismo de multiplicación. Sabemos que μ es un epimorfismo por lo anterior, y al ser $H^{2k}(\mathbb{Z}_q, R(H))$ finito entonces, por el Lema 1.1.4, τ es un epimorfismo. De esto, λ es un epimorfismo y por lo tanto tenemos lo buscado. □

Proposición 5.3.3. *Sea G un grupo soluble. Entonces $\widehat{\alpha} : \widehat{R(G)} \to K(BG)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por inducción sobre la longitud de la serie de composición. □

5.4 El caso p-completado

A continuación, daremos una prueba del Teorema 5.4.4 en [6] sobre la completación del anillo $R(\mathcal{F}_S(G))$ con respecto a su ideal de aumentación $I(\mathcal{F}_S(G))$ y $K(BG_p^\wedge)$. Además de ello, hablaremos un poco del trabajo que se realizó durante la elaboración de esta tesis para dar una prueba alternativa que fuera similar a la prueba del Teorema 5.1.2 en [3].

Teorema 5.4.1. *La topología $I(S)$-ádica de $R(S)$ coincide con su topología $I(\mathcal{F}_S(G))$-ádica.*

Corolario 5.4.2. *Sea P un subgrupo de S. Entonces la topología $I(P)$-ádica de $R(P)$ coincide con su topología $I(\mathcal{F}_S(G))$-ádica.*

Veamos el siguiente resultado de [16]

Teorema 5.4.3. *Si los límites $\varprojlim_I \varprojlim_J F$ y $\varprojlim_J \varprojlim_I F$ asociados a un diagrama $F\colon I \times J \to C$ existen en C, entonces son isomorfos y son isomorfos al límite $\varprojlim_{I\times J} F$.*

Teorema 5.4.4. *Dados G un grupo finito y S un p-Sylow, entonces la completación de $R(\mathcal{F}_S(G))$ con respecto al ideal de aumentación $I(\mathcal{F}_S(G))$ es isomorfa a la K-teoría de la p-completación de BG.*

Demostración. Consideremos el diagrama $F\colon \mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)\times\mathbb{N} \to \mathsf{Ab}$ tal que $F(P, n) = R(P)/I(\mathcal{F}_S(G))^n R(P)$. Utilizando el Lema 5.4.3 con el diagrama F, el Teorema 4.2 de [10] aplicado a K^*, el Teorema 5.4.4 y el Teorema 5.1.2 tenemos que

$$
\begin{aligned}
K(BG_p^\wedge) &\cong \varprojlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)} K(BP) \\
&\cong \varprojlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)} R(P)^\wedge_{I(P)} \\
&\cong \varprojlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)} R(P)^\wedge_{I(\mathcal{F}_S(G))} \\
&\cong \varprojlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)} \left(\varprojlim_n R(P)/I(\mathcal{F}_S(G))^n R(P) \right) \\
&\cong \varprojlim_n \left(\varprojlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}_S(G)^c)} R(P)/I(\mathcal{F}_S(G))^n R(P) \right) \\
&\cong \varprojlim_n R(\mathcal{F}_S(G))/I(\mathcal{F}_S(G))^n \\
&\cong R(\mathcal{F}_S(G))^\wedge_{I(\mathcal{F}_S(G))}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $K(BG_p^\wedge) \cong R(\mathcal{F}_S(G))^\wedge_{I(\mathcal{F}_S(G))}$. $\square$

En intentos de generalizar la prueba de Atiyah mostrada en la sección anterior, se intentó probar la siguiente conjetura que parecía necesaria para poder pasar al caso p-completado para ciertos grupos. Es similar a la Proposición 4.1.33.

Conjetura 5.4.5. *Supongamos que G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$. Si tenemos que S es p-Sylow de G y que $G/H \cong \mathbb{Z}_p$, entonces tenemos que*

$$\iota^* R(\mathcal{F}_S(G)) = R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{\mathbb{Z}_p}$$

donde $S' = H \cap S$.

Para que este enunciado tenga sentido, probaremos que la función $\iota^* : R(\mathcal{F}_S(G)) \to R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{\mathbb{Z}_p}$ está bien definida. Sea $\rho \in R(\mathcal{F}_S(G))$ y consideremos a $\iota^*(\rho)$. Entonces tenemos que para todo $P, Q \leq S'$ y para todo $c_h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{S'}(H)}(P, Q)$

$$c_h{}^* \iota_Q^{S'}(\iota^*(\rho)) = c_h{}^* \iota_Q^{S'} \iota_{S'}^{S}(\rho) = c_h{}^* \iota_Q^{S}(\rho) = c_h{}^* \iota_Q^{S}(\rho) = \iota_P^{S}(\rho) = \iota_P^{S'} \iota_{S'}^{S}(\rho) = \iota_P^{S'}(\iota^*(\rho))$$

Ahora, vemos que la acción de $\mathbb{Z}_p$ se restringe bien al conjunto $R(\mathcal{F}_{S'}(H))$. Sea $\rho \in R(\mathcal{F}_{S'}(H))$, entonces tenemos que si $s \in S$ entonces tenemos que como $S' \triangleleft S$ entonces $c_g^* \rho \in R(S')$. Sea $Q \leq S'$ céntrico y radical y $c_h \in \mathrm{Aut}_H(Q)$, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S' \arrow[r, "c_g"] & S' \\
Q \arrow[u, "\iota_Q^{S'}"] \arrow[r, "c_g"] & gQg^{-1} \arrow[u, "\iota_{gQg^{-1}}^{S'}"'] \\
Q \arrow[u, "c_h"] \arrow[r, "c_g"] & gQg^{-1} \arrow[u, "c_{ghg^{-1}}"']
\end{tikzcd}$$

de lo que se sigue que

$$\begin{aligned}
c_h^* \iota_Q^{S'} c_g^* \rho &= c_g^* c_{ghg^{-1}}^* \iota_{gQg^{-1}}^{S'} \rho \\
&= c_g^* \iota_{gQg^{-1}} \rho \\
&= \iota_Q^{S'} c_g^* \rho
\end{aligned}$$

De esto y del Lema 4.1.33 se sigue que ι^* está bien definida.

En intentos de probar esta conjetura se hicieron algunos ejemplos concretos para ver si podríamos encontrar algún camino en busca de una prueba.

Para la demostración de la Proposición 4.1.33, Atiyah construye para cada generador de $R(H)^{\mathbb{Z}_p}$ un elemento en su preimagen. En el siguiente ejemplo utilizamos esta contrucción para ver que la Conjetura 5.4.5 es cierta en este caso.

Ejemplo 5.4.6. *Ahora, consideremos A_4 subgrupo normal de Σ_4. Observemos que $A_4 \cap D_8 = Q$ es 2-Sylow* *de A_4. Sabemos que $D_8/Q \simeq \mathbb{Z}_2$ actúa en $R(Q)$ bajo conjugación. Observemos que podemos tomar a (13) como representante de $\mathbb{Z}_2$ y entonces*

x	$c_{(13)}(x)$
1	1
sr	sr^3
r^2	r^2
sr^3	sr

De lo que se sigue que

$c^*_{(13)}$	1	sr	r^2	sr^3	
Trivial	1	1	1	1	Trivial
$c^*_{(13)}(X_1)$	1	-1	-1	1	Y_1
$c^*_{(13)}(Y_1)$	1	1	-1	-1	X_1
$c^*_{(13)}(X_1Y_1)$	1	-1	1	-1	X_1Y_1

De lo anterior, podemos ver que si $f \in R(Q)^{\mathbb{Z}_2}$ si y solo si $c^*_{(13)}(f) = f$. Si $f = a + bx_1 + cy_1 + dx_1y_1$, se tiene que $c^*_{(13)}(f) = a + by_1 + cx_1 + dx_1y_1$. De esto se sigue que $f \in R(Q)^{\mathbb{Z}_2}$ si y solo si $f = a + b(x_1 + y_1) + cx_1y_1$.

Ahora calcularemos $\mathcal{F}_Q(A_4)$. Claramente solo debemos fijarnos en el grupo Q. Por lo visto anteriormente Q es normal en A_4 y además $\mathrm{Aut}_{A_4}(Q) = \langle c_{(234)} \rangle$. De esto, entonces tenemos que

$c^*_{(234)}$	1	sr	r^2	sr^3	
Trivial	1	1	1	1	Trivial
$c^*_{(234)}(X_1)$	1	-1	-1	1	Y_1
$c^*_{(234)}(Y_1)$	1	-1	1	-1	X_1Y_1
$c^*_{(234)}(X_1Y_1)$	1	1	-1	-1	X_1

De lo anterior, podemos ver que si $f \in R(\mathcal{F}_Q(A_4))$ si y solo si $c^*_{(234)}(f) = f$. Si $f = a+bx_1+cy_1+dx_1y_1$, se tiene que $c^*_{(234)}(f) = a + by_1 + cx_1y_1 + dx_1$. De esto se sigue que $f \in R(\mathcal{F}_Q(A_4))$ si y solo si $f = a + b(x_1 + y_1 + x_1y_1)$. Así tenemos que $R(\mathcal{F}_Q(A_4)) = R(\mathcal{F}_Q(A_4))^{\mathbb{Z}_2}$.

De lo anterior claramente $\iota^*(x + z) = x_1y_1 + x_1 + y_1$ y entonces $\iota^* : R(\mathcal{F}_{D_8}(S_4)) \to R(\mathcal{F}_Q(A_4))$ es suprayectiva.

Ahora daremos un caso en el que la Conjetura 5.4.5 es cierta.

Proposición 5.4.7. *Sean G y H son grupos tales que $H \triangleleft G$ y $G/H \cong \mathbb{Z}_p$. Sea S un p-Sylow de G y $S' = H \cap S$. Si $S' \triangleleft G$ y $[G : S]$ es libre de cuadrados entonces*

$$\iota^* R(\mathcal{F}_S(G)) = R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{\mathbb{Z}_p}.$$

Demostración. Veamos que $\iota^* \colon R(\mathcal{F}_S(G)) \to R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{\mathbb{Z}_p}$ es suprayectiva. Por el Lema 5.3.1 tenemos que $\iota^* R(G) = R(S')^{G/S'}$, sin embargo $\iota^* R(G) \subseteq R(\mathcal{F}_{S'}(H))$ por lo que $\iota^* R(G) = R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'}$. Luego, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& R(G) \arrow[dl, "\iota^*"'] \arrow[dr, "\iota^*"] & \\
R(\mathcal{F}_S(G)) \arrow[rr, "\iota^*"] & & R(\mathcal{F}_{S'}(H))
\end{tikzcd}$$

con lo cual $\iota^*\colon R(\mathcal{F}_S(G)) \to R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'}$ es suprayectiva. Claramente tenemos que $R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'} \subseteq R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{S/S'}$. Ahora veamos que $R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{S/S'} \subseteq R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'}$. Como S no está contenido en H, entonces SH/H es un subgrupo no trivial de G/H y como $G/H \cong \mathbb{Z}_p$ entonces se tiene que $SH/H = G/H$. Así, para cada $g \in G$ existen $s \in S$ y $h \in H$ tales que $g = sh$. De lo anterior se sigue que $R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{S/S'} \subseteq R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'}$ y entonces $R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{S/S'} = R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{G/S'}$. Por lo tanto $\iota^*\colon R(\mathcal{F}_S(G)) \to R(\mathcal{F}_{S'}(H))^{S/S'}$ es suprayectiva. □

5.5 Calculando K-teoría

Utilizando los cálculos realizados en la sección 4.5.1 y los resultados en la Sección 5.4 y el Capítulo 5 calcularemos la K-teoría de los espacios BG y $BG^\wedge_p$ para los ejemplos en la sección 4.5. Para ello, utilizaremos el siguiente resultado encontrado en el Capítulo 7 de [12].

Teorema 5.5.1. *Si R es noetheriano e $I = (a_1, \ldots, a_n)$ es un ideal, entonces*

$$R^\wedge_I \cong R[\![x_1, \ldots, x_n]\!]/(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Ejemplo 5.5.2. *Consideremos el caso del Ejemplo 4.5.1. El ideal de aumentación de $R(S_4)$ es $I(S_4) = (x-1, y-3, z-2)$ y por lo tanto $R(S_4)^\wedge_{I(S_4)}$ es isomorfo a*

$$\mathbb{Z}[x,y,z]/(x^2-1, y^2-y-z-xy-1, xz-z, z^2-z-x-1, zy-y-xy)[\![p,q,r]\!]/(p-x+1, q-y+3, r-z+2)$$

por el Teorema 5.5.1. Por último, tomando $p+1 = x$, $q+3 = y$ y $r+2 = z$ tenemos que $K(BS_4)$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}[\![p,q,r]\!]/J$$

donde J es el ideal generado por los elementos $(p+1)^2-1, (q+3)^2-(q+3)-(r+2)-(p+1)(q+3)-1, (p+1)(r+2)-(r+2), (r+2)^2-(r+2)-(p+1)-1, (r+2)(q+3)-(q+3)-(p+1)(q+3)$.

Ejemplo 5.5.3. *Consideremos el caso del Ejemplo 4.5.2. El ideal de aumentación de $R(D_8)$ es $I(D_8) = (x-1, y-1, z-2)$ y por lo tanto $R(D_8)^\wedge_{I(D_8)}$ es isomorfo a*

$$\mathbb{Z}[x,y,z]/(x^2-1, y^2-1, z^2-xy-x-y-1, xz-z, yz-z)[\![p,q,r]\!]/(p-x+1, q-y+1, r-z+2)$$

por el Teorema 5.5.1. Por último, tomando $p+1 = x$, $q+1 = y$ y $r+2 = z$ tenemos que $K(BD_8)$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}[\![p,q,r]\!]/J$$

donde J es el ideal generado por los elementos $(p+1)^2-1, (q+1)^2-1, (r+2)^2-(p+1)(q+1)-(p+1)-y-1, (p+1)(r+2)-(r+2), (q+1)(r+2)-(r+2))$.

Ejemplo 5.5.4. *Consideremos el caso del Ejemplo 4.5.4. El ideal de aumentación de $R(\mathcal{F}_{D_8}(S_4))$ es $I(\mathcal{F}_{D_8}(S_4)) = (r-3, s-3, t-1)$ y por lo tanto $R(\mathcal{F}_{D_8}(S_4))^{\wedge}_{I(\mathcal{F}_{D_8}(S_4))}$ es isomorfo a*

$$\mathbb{Z}[r,s,t]/(r^2-r-s-t-2, s^2-r^2, rs-r-s-2t, rt-t, st-r, t^2-1)[\![x,y,z]\!]/(x-r+3, y-s+3, z-t+1)$$

por el Teorema 5.5.1. Por último, tomando $x+3=r$, $y+3=s$ y $z+3=t$ tenemos que $K((BS_4)^{\wedge}_2)$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}[\![x,y,z]\!]/J$$

donde J es el ideal generado por los siguientes elementos $(x+3)^2-(x+3)-(y+3)-(z+3)-2, (y+3)^2-(x+3)^2, (x+3)(y+3)-(x+3)-(y+3)-2(z+3), (x+3)(z+3)-(z+3), (y+3)(z+3)-(x+3), (z+3)^2-1$.

Ejemplo 5.5.5. *Consideremos el caso del Ejemplo 4.5.5. El ideal de aumentación de $R(\mathcal{F}_S(S_9))$ es $I(\mathcal{F}_S(S_9)) = (P-8, Q-2, R-16, S-18)$.*

$$R(\mathcal{F}_S(S_9))^{\wedge}_{I\mathcal{F}_S(S_9)} \cong \mathbb{Z}[\![w,x,y,z]\!]/J'$$

donde J' es el ideal generado por los siguientes elementos

$$(w+8)^2-4-3(w+8)-2(z+18)$$

$$(w+8)(x+2)+2+2(w+8)-(x+2)-2(y+16)$$

$$(w+8)(y+16)-4(y+16)-3(x+2)-4(z+18)$$

$$(w+8)(z+18)-2-2(w+8)-(x+2)-(y+16)-6(z+18)$$

$$(x+2)^2-6-4(w+8)+(x+2)+2(y+16)$$

$$(x+2)(y+16)-4-6(w+8)+2(x+2)+(y+16)$$

$$(x+2)(z+18)+2+2(w+8)-(x+2)-(y+16)-2(z+18)$$

$$(y+16)^2-12-10(w+8)-2(x+2)-(y+16)-8(z+18)$$

$$(y+16)(z+18)-4(x+2)-4(y+16)-12(z+18)$$

$$(z+18)^2-6-6(w+8)-4(x+2)-4(y+16)-11(z+18)$$

Esto calcula $K((BS_9)^{\wedge}_3)$.

Bibliografía

[1] J. L. Alperin and P. Fong. Weights for symmetric and general linear groups. *J. Algebra*, 131(1):2–22, 1990.

[2] Jianbei An and Heiko Dietrich. The essential rank of fusion systems of blocks of symmetric groups. *Internat. J. Algebra Comput.*, 22(1):1250002, 15, 2012.

[3] M. F. Atiyah. Characters and cohomology of finite groups. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (9):23–64, 1961.

[4] M. F. Atiyah and F. Hirzebruch. Vector bundles and homogeneous spaces. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. III*, pages 7–38. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1961.

[5] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [MR0242802].

[6] Noé Bárcenas and José Cantarero. A completion theorem for fusion systems. *To appear in the Israel Journal of Mathematics*, 2019.

[7] David J. Benson and Stephen D. Smith. *Classifying spaces of sporadic groups*, volume 147 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[8] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[9] Carles Broto, Ran Levi, and Bob Oliver. The homotopy theory of fusion systems. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(4):779–856, 2003.

[10] José Cantarero, Natàlia Castellana, and Lola Morales. Vector bundles over classifying spaces of p-local finite groups and Benson–Carlson duality. *To appear in the Journal of the London Mathematical Society*.

[11] Humberto Cárdenas and Emilio Lluis. The normalizer of the Sylow p-group of the symmetric group S_{p^n}. *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)*, 9:1–6, 1964.

[12] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[13] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. A first course, Readings in Mathematics.

[14] Swati Maheshwari and R. K. Sharma. A note on presentation of general linear groups over a finite field. *Southeast Asian Bull. Math.*, 43(2):217–224, 2019.

[15] J. P. May and K. Ponto. *More concise algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2012. Localization, completion, and model categories.

[16] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Dover Modern Math Originals. Dover Publications, 2017.

[17] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.