



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIA E INENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

CARACTERIZACIÓN DE YACIMIENTOS FRACTURADOS
VUGULARES FRACTALES USANDO PRUEBAS DE
PRESIÓN DE POZO CON MANEJO DE RUIDO EN LOS
DATOS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:
GUSTAVO RAMOS BECERRA

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. SUSANA GÓMEZ GÓMEZ
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y SISTEMAS

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

Marzo 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Para mi amada esposa Alba y mis adorables hijos Maximiliano y Aztlán

Agradezco sinceramente...

*a mis padres
porque sin su apoyo no hubiera terminado esta tesis.*

*a la Dra. Susana Gómez
por su apoyo y consejos durante todo este tiempo.*

*a los Drs. Rodolfo Camacho y Jesús Carrera
por su tiempo y valiosos comentarios para enriquecer este trabajo.*

*al los Drs. Luis Miguel de la Cruz y Ernesto Rubio
por su tiempo y paciencia en la revisión de este trabajo.*

*al CONACYT
por el apoyo a través de la beca 433087*

*a la comunidad del
Posgrado en Ciencias e Ingeniería de la Computación*

al la UNAM

Resumen

En este trabajo se estudia el comportamiento de un yacimiento fracturado vugular fractal durante una prueba de pozo. Durante dicha prueba el cambio en el tiempo de la presión en el pozo está relacionado con las características físicas del yacimiento (y del mismo pozo), por lo tanto es posible identificar algunas propiedades del yacimiento, es decir, caracterizar el yacimiento. Para poder llevar a cabo la caracterización usando datos de pruebas de presión se desarrollan las siguientes herramientas: un modelo matemático de flujo para poder calcular la presión en el pozo en función de las propiedades del yacimiento y del pozo y un método de optimización global para ajustar el modelo de flujo a datos de campo.

El modelo de flujo asume un medio con tres porosidades principales, una matriz euclidiana, una red de fracturas y otra de vùgulos con geometría fractal. La solución del modelo se calcula de forma numérica usando transformada de Laplace en la variable temporal y diferencias finitas en la variable espacial.

El optimizador global usa un método de optimización local basado en derivadas (del tipo Levenverg-Marquadt) en conjunto con una heurística híbrida que combina un esquema multi-inicio con una función que evita múltiples convergencias al mismo mínimo.

Por último se presentan 3 ejemplos de ajustes de datos de campo.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Objetivos principales de la tesis | 3 |
| 1.2. Hipótesis | 4 |
| 1.3. Contribución | 4 |
| 2. Modelo Fractal | 5 |
| 2.1. Modelo de triple porosidad doble permeabilidad con fracturas y vórgulos fractales ($3\phi - 2k$) | 5 |
| 2.2. Almacenamiento en pozo | 10 |
| 2.3. Daño o piel (Skin) | 10 |
| 2.4. Modelo sin dimensiones | 13 |
| 2.5. Solución numérica | 14 |
| 2.5.1. Frontera interior | 16 |
| 2.5.2. Frontera exterior | 18 |
| 2.5.3. Sistema Lineal completo | 20 |
| 2.5.4. Inversión del espacio de Laplace | 20 |
| 2.6. Curvas tipo | 21 |
| 3. Caracterización de yacimientos usando pruebas de presión | 27 |
| 3.1. Minimización local | 28 |
| 3.2. Minimización global | 30 |
| 3.3. Derivadas | 32 |
| 3.3.1. Números duales para calcular derivadas | 34 |
| 3.4. Ejemplos sintéticos | 35 |
| 3.4.1. Doble porosidad - una permeabilidad ($2\phi - 1k$) | 37 |
| 3.4.2. Triple porosidad - una permeabilidad ($3\phi - 1k$) | 40 |
| 3.4.3. Triple porosidad - doble permeabilidad ($3\phi - 2k$) | 44 |
| 4. Ruido en los datos | 49 |
| 4.1. Solución numérica | 51 |
| 4.2. Ejemplo 1: prueba de bombeo en un acuífero ideal | 52 |
| 4.3. Ejemplo 2: prueba de pozo en un yacimiento $3\phi - 2k$ | 53 |
| 5. Casos de campo | 55 |
| 5.1. Caso 1 | 55 |
| 5.2. Caso 2 | 58 |
| 5.3. Caso 3 | 60 |

| | |
|---|-----------|
| 6. Discusión y Conclusiones | 62 |
| 6.1. Modelo | 62 |
| 6.2. Métodos de optimización y ejemplos sintéticos | 62 |
| 6.3. Ruido en los datos | 63 |
| 6.4. Casos de campo | 64 |
| 6.5. Generales | 65 |
| Bibliografía | 66 |
| A. Aproximación tiempos largos | 70 |
| A.1. Almacenamiento en la matriz $\omega_m \approx 1$ ($\omega_f \approx 0$, $\omega_v = 0$) | 70 |
| A.2. Almacenamiento en las fracturas $\omega_f \approx 1$ ($\omega_m \approx 0$, $\omega_v = 0$) | 72 |
| B. Método de programación cuadrática | 73 |
| C. Números duales | 76 |
| C.1. Números duales para derivadas de segundo orden | 77 |
| C.2. Derivadas en varias dimensiones | 79 |
| D. Calculo de derivadas de datos con ruido | 84 |
| D.1. Minimización del funcional (4.1) | 84 |
| D.2. Discretización de (4.2) | 85 |

Capítulo 1

Introducción

Un yacimiento de petróleo es un medio poroso o matriz porosa que contiene fluidos (agua, aceite y gas). El flujo en los poros del yacimiento puede describirse en términos matemáticos mediante un conjunto de ecuaciones que incluyen: ecuaciones diferenciales de balance de propiedades extensivas (masa, energía, etc.), la Ley de Darcy y ecuaciones de estado que relacionan propiedades de los fluidos, por ejemplo presión con densidad y temperatura (*Chen (2007)*).

En los yacimientos naturalmente fracturados la matriz porosa contiene pequeñas fracturas o fisuras que contribuyen en gran medida al movimiento de los fluidos y los poros de la roca sirven como un sistema de almacenamiento que proveen de fluidos a las fracturas. De la misma forma que el flujo en un medio poroso (sin fracturas) podría ser descrito a escala de poro, en un medio fracturado se podría describir el flujo a escala de las fracturas. El problema de esta descripción es que requeriría el conocimiento preciso de la red de fracturas. Sin embargo, una forma más sencilla para estudiar este tipo de sistemas es considerar propiedades promedio tanto de la roca (porosidad, permeabilidad) como del fluido (presión, velocidad) y hacer una descripción a una escala mayor. Basándose en estos principios surge el modelo de doble porosidad de *Barenblatt et al. (1960)* y *Warren and Root (1963)*. Ambos modelos tratan al medio general (una matriz porosa con una red de fracturas) como un sistema compuesto de dos medios porosos independientes que se sobrepone en el espacio y se comunican a través de la transferencia de masa, un medio representa la matriz y otro el sistema de fracturas.

El modelo de triple porosidad de *Camacho Velazquez et al. (2005)* extiende el modelo de *Warren and Root (1963)* para considerar un sistema con tres porosidades principales, la matriz porosa, un sistema de fracturas y otro de vóculos. Como se describe en el trabajo de *Camacho Velazquez et al. (2005)*, los vóculos pueden referirse a vóculos, canales y cavernas y podrían ser el resultado de la disolución de carbonatos o sulfatos.

Por otro lado, la teoría de fractales se ha usado desde hace varias décadas para describir el movimiento de fluidos en medios porosos, algunos de los primeros trabajos relacionados que consideran un modelo de flujo hacia un pozo podrían ser *Barker (1988)*; *Chang and Yortsos (1990)*; *Acuna and Yortsos (1995)*. En estos trabajos se desarrollan modelos que permiten calcular la presión en el pozo cuando el movimiento del fluido se realiza en un medio fractal. Cada uno de esos trabajos describe el flujo fractal desde puntos de vista diferentes o usando herramientas matemáticas diferentes. Una de éstas herramientas es la teoría del caminante aleatorio, donde se describe el movimiento de partículas en una red que puede tener geometría fractal. En particular los trabajos de *O'Shaughnessy and Procaccia (1985)*; *Metzler et al. (1994)*; *Metzler and Klafter (2000)* utilizan la relación entre el movimiento de un caminante aleatorio y un proceso de difusión, para posteriormente describir el proceso de difusión en un material con propiedades fractales. Una idea importante que surge de estos trabajos es que se supone que algunas propiedades físicas dependen de la escala (Ej. La conductividad).

El movimiento de un fluido ligeramente compresible en un medio poroso ligeramente compresible y que sigue la ley de Darcy también puede describirse matemáticamente como un proceso de difusión, por lo tanto las ideas de *O'Shaughnessy and Procaccia (1985)* se pueden usar para modelar el movimiento

de un fluido en un medio poroso con geometría fractal, tal es el caso del trabajo de *Chang and Yortsos* (1990).

Chang and Yortsos (1990) también consideran el caso de yacimientos naturalmente fracturados, modelando la red de fracturas como un medio poroso fractal de alta permeabilidad incrustado en un medio poroso no fractal de baja permeabilidad, es decir extienden el modelo de doble permeabilidad de *Warren and Root* (1963) cuando la red de fracturas tiene geometría fractal.

Además de del método de *Chang and Yortsos* (1990), existen otras formas de incluir la idea de fractalidad a modelos de flujo en medios porosos, por ejemplo, *Barker* (1988) resume el flujo en medios porosos de tres geometrías (flujo lineal, cilíndrico y esférico) en una sola ecuación, de ésta forma la relación intrínseca entre la geometría de flujo y la dimensión de flujo queda resumida en un parámetro de la ecuación. Esto le permite generalizar ésta ecuación para modelar flujos en geometrías en dimensiones fraccionales, que a su vez se puede relacionar con el flujo en un fractal. *Metzler and Klafter* (2000), por otro lado, usan la teoría del caminante aleatorio continuo para describir el proceso de difusión anómala usando ecuaciones diferenciales de orden fraccional. *Camacho-Velazquez et al.* (2008) también utiliza una derivada fraccional en el tiempo similar a *Metzler et al.* (1994) para describir flujo en un medio fractal. *Balankin and Elizarraraz* (2012) consideran un medio continuo fractal incrustado en un espacio Euclidiano, que les permite definir operadores diferenciales fraccionales que después utilizan para generalizar la ley de Darcy y obtener un modelo de flujo en medio porosos usando ecuaciones diferenciales fraccionales.

Otros trabajos relacionados con modelos de flujo en medios porosos con geometría fractal son: *Acuna and Yortsos* (1995) generan una red de fracturas con geometría fractal. *Henry et al.* (2006) describen un modelo de difusión anómala con un término de reacción usando derivadas fraccionales. *Ochoa-Tapia et al.* (2007) desarrolla una ley de Darcy de orden fraccional usando promedio espacial. *Raghavan* (2011) describe una ecuación de flujo en medios porosos usando derivadas de orden fraccionario. *Alaimo and Zingales* (2015) desarrolla un modelo fractal usando derivadas fraccionales. *Tarasov* (2005) considera un medio fractal continuo incrustado en un medio Euclidiano, a partir del cual desarrolla una ecuación de continuidad en términos de derivadas fraccionales.

Aunque no se realizó una búsqueda totalmente exhaustiva, solo se ha encontrado publicado el trabajo de *Jiang et al.* (2019), relacionado con modelos de triple porosidad con geometría fractal. Sin embargo, el modelo de *Jiang et al.* (2019) es para una permeabilidad.

Uno de los objetivos del presente trabajo es entonces desarrollar un modelo de triple porosidad (matriz, fracturas y vóculos) y doble permeabilidad donde el flujo puede ser en fracturas y vóculos. Además se considera que la geometría de la red de fracturas y vóculos tiene un comportamiento fractal.

El siguiente paso es usar el modelo para caracterizar un yacimiento usando pruebas de presión de pozo. Las pruebas de pozo son una herramienta fundamental para para caracterizar las propiedades físicas del yacimiento a escala de campo, una prueba consiste en mantener un flujo en el pozo durante varios periodos de gasto constante y medir el cambio de presión el pozo. La respuesta en la presión depende, entre otras cosas, de de las características físicas del yacimiento, del fluido y del mismo pozo. Por lo tanto se espera que la curva de presión contra tiempo registrada pueda usarse para identificar algunas propiedades del yacimiento o en otras palabras *caracterizar el yacimiento*. Usando un modelo que describe el flujo en el yacimiento y los datos de presión de la prueba de pozo la caracterización consiste en determinar los parámetros del modelo, es decir, se trata de un problema inverso de identificación de parámetros.

En este caso, el problema inverso se puede plantear como un problema de mínimos cuadrados no lineales, donde se minimiza una función objetivo que compara la presión predicha por el modelo con la presión registrada en la prueba de pozo.

El problema de minimizar la función objetivo en este trabajo es, por sí mismo, otro problema que lleva cierto grado complejidad, ya que los métodos de optimización basados en derivadas, como por ejemplo Levenverg-Marquardt, búsqueda lineal o región de confianza no son suficientes para encontrar una solución que ajusta los datos. En el trabajo de *Gómez et al.* (2014) muestran que para el modelo de *Camacho Velazquez et al.* (2005) se requiere un método de optimización global para poder ajustar datos de campo. En ese trabajo se usa el método del Túnel *Levy and Gómez* (1985) como optimizador global.

Entonces, otro de los objetivos primarios de este trabajo es desarrollar un método de optimización global que permita ajustar el modelo a datos de pruebas de pozo. El optimizador global que se propone

está basado en un optimizador local (del tipo Levenverg-Marquardt, búsqueda lineal o región de confianza) en conjunto con una heurística de tipo multi-inicio combinada con una función Túnel (*Levy and Gómez (1985)*) modificada.

Gómez et al. (2014) muestran que el procesamiento del ruido en los datos puede ser importante para ajustar datos de campo. El control del ruido en los datos, se vuelve más importante si en la función objetivo se agrega información de la derivada de los datos.

La curva generada al calcular la derivada del cambio de presión del pozo respecto al logaritmo del tiempo, es decir la *log-derivada*, es una herramienta fundamental en el análisis de pruebas de presión, ésta curva fue inicialmente propuesta por *Chow (1952)* y luego mejorada por *Rai (1985)* y finalmente introducida al ámbito petrolero por *Bourdet et al. (1989)* quien propuso un método efectivo para calcularla a partir de datos con ruido. La log-derivada es especialmente útil para describir regímenes de flujo en relación al tiempo ya que resalta pequeñas variaciones del cambio de presión facilitando la interpretación de la prueba, *Renard et al. (2009)* presenta un análisis de las características de la log-derivada para diferentes modelos o regímenes de flujo. Debido a la utilidad de la log-derivada, se ha vuelto una herramienta indispensable en la industria del petróleo y del agua para interpretar pruebas de pozo. La sensibilidad de la log-derivada a los cambios en la presión en el pozo, podría facilitar la convergencia de los algoritmos de optimización para resolver el problema de caracterización, por lo tanto se agrega a la función de mínimos cuadrados en el problema inverso.

Sin embargo queda por resolver el cálculo de la log-derivada; considerando que los datos de presión pueden contener diferentes tipos de ruido. La diferenciación de datos con ruido es conocido como un problema mal condicionado, debido a que pequeños errores en los datos se pueden amplificar considerablemente en el proceso de diferenciación. Por tal motivo, este problema ya ha sido estudiado exhaustivamente en la literatura, el trabajo de *Knowles and Renka (2014)* muestra una revisión de diferentes clases de métodos que existen. Una familia de métodos está basada en agregar al método de diferenciación un término de regularización, planteando el problema en términos del cálculo variacional (*Cullum (1971)*; *Knowles and Wallace (1995)*; *Chartrand (2011)*; *Knowles and Renka (2014)*). En particular *Chartrand (2011)* propone un método de derivación usando variación total regularizada (Total Variation Regularization). Este método fue desarrollado para el procesamiento de imágenes y puede manejar datos con discontinuidades. Sin embargo, se puede simplificar si se toma en cuenta el caso de que la función base sin ruido (en este caso la presión) y la derivada son funciones suaves sin discontinuidades.

Otro de los objetivos del presente trabajo es desarrollar un método variacional con regularización para calcular la derivada de datos con ruido de forma estable.

La organización del presente trabajo es la siguiente: la sección 2 extiende el modelo de *Chang and Yortsos (1990)* y *Camacho Velazquez et al. (2005)* para desarrollar un modelo de triple porosidad y doble permeabilidad considerando fracturas y vórgulos con geometría fractal. También se describe la solución numérica del modelo y se presentan curvas tipo para ver los efectos de los parámetros fractales. La sección 3 describe los métodos de optimización que se usan para resolver el problema inverso de ajuste de datos. La sección 4 describe el tratamiento del ruido en los datos para poder calcular la log-derivada de forma estable. En la sección 5 se ajustan varios datos de campo. La sección 7 presenta las conclusiones.

1.1. Objetivos principales de la tesis

1. Crear un modelo de flujo de petróleo de una sola fase en un medio con tres porosidades principales: matriz, una red de fracturas y una de vórgulos. La geometría de la red de fracturas y vórgulos tienen geometría fractal.
2. Desarrollar un método para calcular de forma estable la derivada de datos de pruebas de presión de un pozo respecto al tiempo.
3. Desarrollar un método de optimización global para poder ajustar datos de pruebas de presión de pozo con el modelo de flujo de triple porosidad doble permeabilidad fractal.

1.2. Hipótesis

En la literatura se ha observado que hay datos de presión de pruebas de pozo que tienen un comportamiento llamado ley de potencias (*Barker (1988)*; *Chang and Yortsos (1990)*; *Metzler et al. (1994)*; *Acuna and Yortsos (1995)*; *Flamenco-Lopez et al. (2003)*; *Camacho-Velazquez et al. (2008)*; *Jiang et al. (2019)*). Este comportamiento suele observarse en los datos cuando, en una gráfica log-log de la presión contra el tiempo, se presenta una línea recta en la curva de la presión o la log-derivada. Los modelos de flujo en medios porosos con geometría fractal son modelos que pueden generar una curva de presión y log-derivada que donde se observa ésta ley, por tal motivo se usan comúnmente para poder ajustar datos con este tipo de características.

Otro tipo de comportamiento que se ha observado en datos de pruebas de pozo es que la log-derivada muestra dos valles, la presencia de éstos dos valles es el resultado de la transferencia de masa entre los tres medios (*Camacho Velazquez et al. (2005, 2014)*; *Gómez et al. (2014)*).

El modelo de flujo en medios porosos que se plantea en este trabajo podrá ajustar datos de presión de pozo donde se observe una ley de potencias asociada a un flujo en un medio fractal y también tenga características de triple porosidad.

1.3. Contribución

En base a los métodos desarrollados en este trabajo se publicó el artículo:

- Ramos, Gustavo, Carrera, Jesús, Gómez, Susana, Minutti, Carlos, and Camacho, Rodolfo, A stable computation of log-derivatives from noisy drawdown data, *Water Resources Research* 53, 9 (2017), pp. 7904-7916.

Capítulo 2

Modelo Fractal

2.1. Modelo de triple porosidad doble permeabilidad con fracturas y vóculos fractales ($3\phi - 2k$)

Para desarrollar el modelo se asumen las siguientes suposiciones:

- Existen tres medios: matriz, fracturas y vóculos con diferentes permeabilidades y porosidades.
- La matriz es un medio poroso Euclidiano con permeabilidad muy baja respecto a la red de fracturas y vóculos. De modo que el fluido se mueve principalmente en estos dos últimos medios.
- Las distribución de fracturas y vóculos sigue un comportamiento fractal.

El desarrollo del modelo sigue principalmente las ideas de *Chang and Yortsos* (1990) para el balance de masa y de *Barenblatt et al.* (1960) para modelar el intercambio de masa entre los medios. Se asume que el flujo es radial cilíndrico al pozo de radio r_w situado en el origen del sistema de coordenadas. El volumen de control para realizar el balance de masa es una capa limitada por dos cilíndricos concéntricos de radios r y $r + \Delta r$ y altura h .

Para reducir un poco el desarrollo se denota con el subíndice j a un medio particular, donde j podría ser $j = m, v, f$ para matriz, fracturas o vóculos respectivamente. El cambio en el tiempo de la cantidad de masa m_j en el medio j dentro del volumen de control es:

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} = [\rho Q_j]_r - [\rho Q_j]_{r+\Delta r} + S_j \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad del fluido, Q_j es el volumen por unidad de tiempo de fluido que entra o sale del volumen de control en el medio j y S_j es la cantidad de masa que se está generando dentro del volumen por unidad de tiempo.

Si $V_j(r)$ es el volumen que ocupa el fluido en el medio j dentro del volumen de control $V(r)$ y asumimos que el fluido llena completamente los poros, entonces la porosidad puede escribirse como:

$$\phi_j(r) = \frac{V_j(r)}{V(r)}. \quad (2.2)$$

Usando la densidad se puede calcular m_j como:

$$m_j = \rho V_j(r) = \rho \phi_j(r) V(r)$$

sustituyendo en la ecuación de balance (2.1):

$$\frac{\partial (\rho \phi_j(r) V(r))}{\partial t} = [\rho Q_j]_r - [\rho Q_j]_{r+\Delta r} + S_j. \quad (2.3)$$

Por otro lado, se denota con V_s a un volumen de referencia, con el cual se va a describir la distribución de masa en el medio j , por ahora suponemos que el medio j tiene geometría fractal. La idea es cubrir al fractal asociado al medio j con pequeños volúmenes V_s ; según *O'Shaughnessy and Procaccia* (1985); *Chang and Yortsos* (1990) el número de volúmenes por unidad de longitud $n_j(r)$ (en dirección radial) a una distancia r del origen necesarios para cubrir el fractal está dado por:

$$n_j(r) = a_j r^{D_j-1} \quad (2.4)$$

donde D_j es la dimensión de masa del fractal j y a_j es una constante. Bajo la suposición de que el fluido llena completamente los poros de cada medio, entonces el volumen $V_j(r)$ que ocupa el fluido puede calcularse con:

$$V_j(r) = n_j(r) \Delta r V_s = a_j r^{D_j-1} \Delta r V_s. \quad (2.5)$$

La porosidad en el volumen de control se puede poner en términos de V_s usando la relación anterior y el volumen de control $V(r) = A(r) \Delta r$, donde $A(r) = 2\pi r h$ es el área del cilindro de radio r que define el volumen de control,

$$\phi_j(r) = \frac{V_j(r)}{V(r)} = \frac{n_j(r) \Delta r V_s}{A(r) \Delta r} = \frac{V_s a_j r^{D_j-1}}{A(r)} \quad (2.6)$$

acomodando términos, puede obtenerse la relación:

$$\frac{\phi_j(r) A(r)}{r^{D_j-1}} = V_s a_j$$

podemos notar que el lado derecho no depende de r , entonces podemos seleccionar una escala conveniente, por ejemplo si se usa el radio del pozo $r = r_w$:

$$V_s a_j = \frac{\phi(r_w) A(r_w)}{r_w^{D_j-1}} = \frac{\phi_{wj} A_w}{r_w^{D_j-1}}$$

donde ϕ_{wj} es la porosidad a escala de pozo del medio j , $A_w = 2\pi r_w h$ es el área del pozo y h es espesor del yacimiento. Sustituyendo en la ecuación (2.6) se tiene una expresión de la porosidad en términos de la dimensión fractal D_j :

$$\phi_j(r) = \phi_{wj} \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j-1} \quad (2.7)$$

sustituyendo en la ecuación (2.3)

$$\frac{\partial \rho \phi_{wj} \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j-1} V(r)}{\partial t} = [\rho Q_j]_r - [\rho Q_j]_{r+\Delta r} + S_j$$

si el volumen $V(r)$ no depende del tiempo puede salir de la derivada

$$\frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j-1} \frac{\partial \rho \phi_{wj}}{\partial t} = \frac{1}{A(r)} \frac{[\rho Q_j]_r - [\rho Q_j]_{r+\Delta r}}{\Delta r} + \frac{S_j}{V(r)}$$

tomando el límite cuando $\Delta r \rightarrow 0$ y usando nuevamente la relación $V(r) = A(r) \Delta r$:

$$\frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j-1} \frac{\partial \rho \phi_{wj}}{\partial t} = -\frac{1}{A(r)} \frac{\partial \rho Q_j}{\partial r} + \frac{s_j}{A(r)} \quad (2.8)$$

donde s_j es la cantidad de masa que se intercambia con otros medios a una distancia r del origen por unidad de tiempo por unidad de espesor de la capa ($s_j = S_j/\Delta r$).

El flujo volumétrico Q_j puede ser expresado en términos de la velocidad de flujo v_j :

$$Q_j(r) = A(r)v_j(r)$$

asumiendo que es válida la ley de Darcy se tiene

$$Q_j(r) = -A(r)\frac{k_j(r)}{\mu}\frac{\partial p_j}{\partial r} \quad (2.9)$$

donde p_j es la presión de fluido en el medio j , μ la viscosidad y la k_j la permeabilidad del medio j .

Si además se supone que la permeabilidad depende de la escala, de la misma forma que *Chang and Yortsos (1990)* entonces:

$$k_j(r) = \frac{a_j V_s}{A(r)} m_j r^{D_j - \theta_j - 1} \quad (2.10)$$

donde m_j es una constante y θ_j es otro parámetro fractal que representa anomalías en la permeabilidad (conductividad) del medio fractal. Acomodando términos:

$$\frac{k(r)A(r)}{r^{D_j - \theta_j - 1}} = a_j V_s m_j$$

el lado derecho es una constante, por lo tanto usando la misma escala que se usó para la porosidad $r = r_w$ se puede escribir:

$$a_j V_s m_j = \frac{k_{wj} A_w}{r_w^{D_j - \theta_j - 1}}$$

sustituyendo en (2.10) se tiene la siguiente expresión para la permeabilidad en función de la distancia al origen r , de la dimensión fractal D_j y de θ_j :

$$k_j(r) = k_{wj} \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - \theta_j - 1} \quad (2.11)$$

donde k_{wj} es la permeabilidad del medio j a escala de pozo. Sustituyendo en la ecuación (2.9) y en la ecuación de balance (2.8)

$$\left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - 1} \frac{\partial \rho \phi_{wj}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho \frac{k_{wj} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - \theta_j - 1}}{\mu} \frac{\partial p_j}{\partial r} \right) + \frac{s_j}{A_w}. \quad (2.12)$$

Para simplificar el la solución del sistema de ecuaciones y obtener un modelo lineal, se asume que la roca es ligeramente compresible, es decir que la porosidad depende linealmente de la presión

$$\phi_{wj} = \phi_{0j}(1 + c_r(p_j - p_{ref}))$$

donde ϕ_{0j} es la porosidad a una presión de referencia p_{ref} y c_r es la compresibilidad del medio. También se asume que el fluido es incompresible, entonces $\rho = cte$. Con estas suposiciones el modelo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - 1} c_r \phi_{0j} \frac{\partial p_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_{wj} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - \theta_j - 1}}{\mu} \frac{\partial p_j}{\partial r} \right) + \frac{s_j}{A_w \rho}. \quad (2.13)$$

Es conveniente expresar la transferencia de masa por unidad de tiempo por unidad de espesor, s_j en términos de transferencia de volumen de fluido

$$s_j = \rho q_j$$

donde q_j es el volumen de fluido que intercambian el medio j por unidad de tiempo por unidad de espesor con los otros medios. La ecuación de balance para el medio j es:

$$\left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_j-1} c_r \phi_{0j} \frac{\partial p_j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_{wj} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_j-\theta_j-1}}{\mu} \frac{\partial p_j}{\partial r} \right) + \frac{q_j}{A_w}. \quad (2.14)$$

Ahora pasamos a describir el término fuente q_j . Este término representa la transferencia de volumen de fluido entre los diferentes medios, para facilitar el tratamiento se expresa q_j como la suma del volumen transferido del medio j a los otros medios, es decir, para tres medios: matriz ($j = m$), fracturas ($j = f$) y vólugos ($j = v$) los términos fuente pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} q_m &= -q_{mf} - q_{mv} \\ q_f &= q_{mf} - q_{fv} \\ q_v &= q_{mv} + q_{fv} \end{aligned}$$

donde q_{jk} es el intercambio de volumen de fluido entre el medio j y el k . Los signos negativos expresan la conservación de masa, es decir, la cantidad de masa que sale de un medio debe ser la misma que recibe otro medio.

Si dos medios, j y k , están en contacto y al menos uno de ellos tiene geometría fractal, se puede suponer que la superficie de contacto también será un fractal y denotamos su dimensión con D_{jk}^* . Además si l_{jk} es la distancia promedio entre el medio j y el medio k , se podría asumir que esta distancia también sigue un comportamiento fractal, por lo que puede escribirse de la siguiente forma: $l_{jk} = e_{jk} r^{D_{jk}^{**}}$, donde e_{jk} es una constante de proporcionalidad. Entonces el intercambio de masa q_{jk} entre el medio j y k es (Chang and Yortsos (1990)):

$$q_{jk} = b_{jk} \frac{r^{D_{jk}^* - D_{jk}^{**} - 1} k_{jk}}{e_{jk} \mu} (p_j - p_k) \quad (2.15)$$

donde b_{jk} es una constante de proporcionalidad. En los casos de que los dos medios j y k sean Euclidianos $D_{jk}^* = 2$, $D_{jk}^{**} = 0$.

Por convención la permeabilidad k_{jk} en la ecuación (2.15) es la del medio con presión mayor, es decir:

$$k_{jk} = \begin{cases} k_j & p_j \geq p_k \\ k_k & p_j < p_k \end{cases}$$

Puesto que la permeabilidad de las fracturas y vólugos depende también de la distancia al origen (r), entonces la expresión para q_{jk} depende también de los coeficientes fractales D_j , θ_j y D_k , θ_k . Es decir, si sustituimos la ecuación de la permeabilidad (2.11):

$$k_{jk} = \begin{cases} k_{wj} \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_j-\theta_j-1} & p_j \geq p_k \\ k_{wk} \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_k-\theta_k-1} & p_j < p_k \end{cases}$$

Para simplificar la notación, se denota el término fuente como:

$$q_{jk} = \sigma_{jk} r^{\alpha_{jk}} \frac{k_{wj k}}{\mu} (p_j - p_k) \quad (2.16)$$

donde:

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} D_j - \theta_j + D_{jk}^* - D_{jk}^{**} - 3 & p_j \geq p_k \\ D_k - \theta_k + D_{jk}^* - D_{jk}^{**} - 3 & p_j < p_k \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\sigma_{jk} = \begin{cases} \frac{b_{jk}}{e_{jk}} \frac{k_{wj}}{r_w^{D_j - \theta_j - 2}} & p_j \geq p_k \\ \frac{b_{jk}}{e_{jk}} \frac{k_{wk}}{r_w^{D_k - \theta_k - 2}} & p_j < p_k \end{cases} \quad (2.18)$$

$$k_{wj} = \begin{cases} k_{wj} & p_j \geq p_k \\ k_{wk} & p_j < p_k \end{cases} \quad (2.19)$$

La ecuación (2.14) y la ecuación (2.16) nos permiten escribir el modelo de triple porosidad doble permeabilidad, considerando tres medios matriz ($j = m$), fracturas ($j = f$) y vórgulos ($j = v$), que el flujo primario puede ser en fracturas o vórgulos y que la matriz es Euclidiana ($D_m = 2, \theta_m = 0$),

$$\frac{r}{r_w} c_r \phi_{0m} \frac{\partial p_m}{\partial t} = - \frac{r^{\alpha_{mf}} \sigma_{mf} k_{wmf}}{\mu A_w} (p_m - p_f) - \frac{r^{\alpha_{mv}} \sigma_{mv} k_{wmv}}{\mu A_w} (p_m - p_v) \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_f - 1} c_r \phi_{0f} \frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_{wf} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_f - \theta_f - 1}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) + \frac{r^{\alpha_{mf}} \sigma_{mf} k_{wmf}}{\mu A_w} (p_m - p_f) - \frac{r^{\alpha_{fv}} \sigma_{fv} k_{wfv}}{\mu A_w} (p_f - p_v) \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_v - 1} c_r \phi_{0v} \frac{\partial p_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{k_{wv} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_v - \theta_v - 1}}{\mu} \frac{\partial p_v}{\partial r} \right) + \frac{r^{\alpha_{mv}} \sigma_{mv} k_{wmv}}{\mu A_w} (p_m - p_v) + \frac{r^{\alpha_{fv}} \sigma_{fv} k_{wfv}}{\mu A_w} (p_f - p_v) \quad (2.22)$$

Note que en el caso totalmente Euclidiano, $D_v = D_f = 2, \theta_v = \theta_f = 0, D_{mv}^* = D_{mf}^* = D_{fv}^* = 2, D_{mv}^{**} = D_{mf}^{**} = D_{fv}^{**} = 0$ se obtiene el modelo de *Camacho Velazquez et al.* (2005).

Para completar el modelo se consideran condiciones iniciales de equilibrio y de frontera a gasto constante.

Inicialmente se considera que el yacimiento está en equilibrio, es decir no hay flujo y las presiones de los tres medios en todo el yacimiento son iguales a una presión inicial p_i

$$p_j = p_i \quad j = m, f, v.$$

El gasto volumétrico en la cara del pozo (Q_{sf}) debe ser la suma del gasto que entra a través de las fracturas (Q_f) y de los vórgulos (Q_v), es decir:

$$Q_{sf} = Q_f + Q_v$$

usando la ecuación (2.9) para expresar Q_f y Q_v en términos del gradiente de la presión:

$$Q_{sf} = \left[-A_w \frac{k_{wf} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_f - \theta_f - 1}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} - A_w \frac{k_{wv} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_v - \theta_v - 1}}{\mu} \frac{\partial p_v}{\partial r} \right]_{r=r_w} \quad (2.23)$$

En el caso de que el flujo sea dirija desde el yacimiento hacia el pozo, es decir durante producción del pozo, entonces $\partial p_f / \partial r > 0$ y $\partial p_m / \partial r > 0$, por lo tanto, en esta notación, el signo de Q_{sf} debe ser

negativo para producción. Si consideramos de forma explícita el signo $Q_{sf} \rightarrow -Q_{sf}$ entonces la condición de frontera se puede escribir como:

$$Q_{sf} = \left[A_w \frac{k_{wf} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_f - \theta_f - 1}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} + A_w \frac{k_{wv} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_v - \theta_v - 1}}{\mu} \frac{\partial p_v}{\partial r} \right]_{r=r_w} \quad (2.24)$$

donde $Q_{sf} > 0$ es el flujo de producción en la cara del pozo.

Sin presencia de daño o piel (skin) se espera que las presiones se igualen en el pozo, entonces la presión del pozo es:

$$p_w = p_f|_{r=r_w} = p_v|_{r=r_w} \quad (2.25)$$

2.2. Almacenamiento en pozo

Se considera que el pozo tiene cierta capacidad de almacenamiento. Para considerar el efecto de este volumen de fluido en el pozo se hace un balance de masa en el pozo:

$$\rho_{sf} Q_{sf} - \rho_s Q_s = \frac{dm_w}{dt}$$

donde ρ es la densidad del fluido, $Q_{sf} > 0$ es el gasto volumétrico en el fondo del pozo y $Q_s > 0$ el gasto en la superficie y m_w es la masa del fluido contenido en el pozo. Suponemos que la presión p_w , densidad y el volumen del pozo V_w son constantes a lo largo del pozo, entonces:

$$Q_{sf} - Q_s = V_w \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

usando regla de la cadena:

$$Q_{sf} - Q_s = V_w \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp_w} \frac{dp_w}{dt}$$

Si el fluido es ligeramente compresible, con coeficiente de compresibilidad $c_f = (1/\rho)d\rho/dp$, entonces:

$$Q_{sf} - Q_s = V_w c_f \frac{dp_w}{dt}$$

Sustituyendo en la ecuación (2.24) se obtiene la condición de frontera con almacenamiento en el pozo:

$$Q_s + C_s \frac{dp_w}{dt} = \left[A_w \frac{k_{wf} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_f - \theta_f - 1}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} + A_w \frac{k_{wv} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_v - \theta_v - 1}}{\mu} \frac{\partial p_v}{\partial r} \right]_{r=r_w} \quad (2.26)$$

donde $C_s = V_w c_f$ es el coeficiente de almacenamiento.

2.3. Daño o piel (Skin)

Se asume que alrededor del pozo hay una región del yacimiento dañada; hasta un radio \tilde{r}_f para las fracturas y \tilde{r}_v para los vórgulos. El efecto de este daño es que se modifica la permeabilidad en esta zona, denotamos con \tilde{k}_f la permeabilidad modificada de las fracturas y con \tilde{k}_v la de los vórgulos. Para radios mayores ($r > \tilde{r}_f$ y $r > \tilde{r}_v$) las permeabilidades permanecen intactas (k_f y k_v).

Aunque la permeabilidad dentro de esta zona se modifica, consideramos que la geometría fractal se sigue conservando, es decir: los parámetros fractales son iguales en la zona de daño y en el resto del yacimiento.

Para desarrollar el modelo del daño o skin se calcula la presión cerca del pozo para un sistema en estado estacionario a gasto constante. Para simplificar el análisis se hace la suposición de que el flujo en cada medio también es constante, entonces:

$$-A(r) \frac{k_f(r)}{\mu} \frac{dp}{dr} = Q_f \quad (2.27)$$

$$-A(r) \frac{k_v(r)}{\mu} \frac{dp}{dr} = Q_v \quad (2.28)$$

en este caso $Q_f < 0$ y $Q_v < 0$ es el flujo volumétrico constante en cada medio, la permeabilidad en el medio j se puede expresar de la siguiente forma:

$$k_j(r) = k_{wj}(r) \frac{A_w}{A(r)} \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_j - \theta_j - 1}$$

donde

$$k_{wj}(r) = \begin{cases} \tilde{k}_{wj} & r \leq \tilde{r}_j \\ k_{wj} & r > \tilde{r}_j \end{cases}$$

sustituyendo en las ecuaciones (2.27,2.28)

$$-\frac{A_w k_{wf}(r) \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_f - \theta_f - 1}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = Q_f$$

$$-\frac{A_w k_{wv}(r) \left(\frac{r}{r_w} \right)^{D_v - \theta_v - 1}}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = Q_v$$

A partir de aquí solo se sigue el desarrollo para las fracturas, para los vórgulos es similar. Despejando el diferencial de presión e integrando en el intervalo $[r_w, r_e]$ (donde $r_e > \tilde{r}_f$) se obtiene el cambio total de presión entre el pozo y r_e :

$$\Delta p = \int_{p_w}^{p_e} dp = -\frac{\mu Q_f r_w^{D_f - \theta_f - 1}}{A_w} \int_{r_w}^{r_e} \frac{r^{-D_f + \theta_f + 1}}{k_{wf}(r)} dr$$

La integral del lado derecho se divide en la integral en intervalo $r \in [r_w, \tilde{r}_j]$ más la integral en $r \in [\tilde{r}_j, r_e]$. El caso $-D_f + \theta_f = -2$ debe considerarse de forma especial en la integración, entonces el cambio de presión entre el pozo y la distancia r_e es:

$$\Delta p = -\frac{\mu Q_f r_w}{A_w k_{wf}} \begin{cases} \left(\frac{k_{wf}}{k_{wf}} - 1 \right) \frac{(\tilde{r}_f/r_w)^{2+\theta_f-D_f-1}}{2+\theta_f-D_f} + \frac{(r_e/r_w)^{2+\theta_f-D_f-1}}{2+\theta_f-D_f} & \theta_f - D_f \neq -2 \\ \left(\frac{k_{wf}}{k_{wf}} - 1 \right) \ln \left(\frac{\tilde{r}_f}{r_w} \right) + \ln \left(\frac{r_e}{r_w} \right) & \theta_f - D_f = -2 \end{cases}$$

De donde se define el parámetro s_f :

$$s_f = \begin{cases} \left(\frac{k_{wf}}{k_{wf}} - 1 \right) \frac{(\tilde{r}_f/r_w)^{2+\theta_f-D_f-1}}{2+\theta_f-D_f} & \theta_f - D_f \neq -2 \\ \left(\frac{k_{wf}}{k_{wf}} - 1 \right) \ln \left(\frac{\tilde{r}_f}{r_w} \right) & \theta_f - D_f = -2 \end{cases}$$

La caída total de presión se puede escribir como:

$$\Delta p = \Delta p_f + \Delta p_{sf}$$

donde Δp_f representa la caída de presión en un sistema sin daño y está dada por:

$$\Delta p_f = -\frac{\mu Q_f r_w}{A_w k_{wf}} \begin{cases} \frac{(r_e/r_w)^{2+\theta_f-D_f}-1}{2+\theta_f-D_f} & 1+\theta_f-d_f \neq -1 \\ \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) & 1+\theta_f-d_f = -1 \end{cases}$$

y Δp_{sf} es la caída de presión debido al daño:

$$\Delta p_{sf} = -\frac{\mu Q_f r_w}{A_w k_{wf}} s_f \quad (2.29)$$

La caída de presión en el medio vugular tiene la expresión:

$$\Delta p_{sv} = -\frac{\mu Q_v r_w}{A_w k_{wv}} s_v \quad (2.30)$$

Estás dos últimas ecuaciones se pueden usar en el modelo general transitorio para incluir la presencia de daño cerca del pozo. Para tiempos t mayores a un tiempo t_s se puede asumir que cerca del pozo las condiciones de flujo son casi estacionarias, por lo que se puede agregar la caída de presión debido al daño a la presión de cada medio en el pozo, es decir, para el modelo transitorio se aproxima la presión en el pozo p_w como la presión en la red de fracturas o vúgulos más una caída de presión debido al daño

$$p_w = p_f + \Delta p_{sf} = p_v + \Delta p_{sv}$$

La ecuación (2.29) se desarrolló considerando un modelo estacionario, es decir: gasto constante en el pozo y también en las fracturas, sin embargo para el caso transitorio se tiene que la caída de presión debido al daño es:

$$\begin{aligned} \Delta p_{sf} &= -Q_f \frac{\mu r_w}{A_w k_{wf}} s_f \\ &= -\left(-A(r) \frac{k_f(r)}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r}\right)_{r=r_w} \frac{\mu r_w}{A_w k_{wf}} s_f \\ &= \left(A_w \frac{k_{wf} \left(\frac{r}{r_w}\right)^{D_j-\theta_j-1}}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r}\right)_{r=r_w} \frac{\mu r_w}{A_w k_{wf}} s_f \\ &= \left(\frac{\partial p_f}{\partial r}\right)_{r=r_w} r_w s_f \end{aligned}$$

Lo que puede simplificarse en:

$$\Delta p_{sf} = s_f \left[r_w \frac{\partial p_f}{\partial r} \right]_{r=r_w}$$

de forma similar para los vúgulos:

$$\Delta p_{sv} = s_v \left[r_w \frac{\partial p_v}{\partial r} \right]_{r=r_w}$$

Entonces, en presencia de daño o skin, la presión en el pozo debe cumplir las condiciones:

$$p_w = \left[p_f + s_f r_w \frac{\partial p_f}{\partial r} \right]_{r=r_w} = \left[p_v + s_v r_w \frac{\partial p_v}{\partial r} \right]_{r=r_w} \quad (2.31)$$

2.4. Modelo sin dimensiones

El modelo sin dimensiones se obtiene sustituyendo los siguientes cambios de variables:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (2.32)$$

$$p_{Dj} = a_p(p_i - p_j) = \frac{A_w(k_{wf} + k_{wv})}{\mu r_w Q_s} (p_i - p_j) \quad j = m, v, f, w \quad (2.33)$$

$$t_D = a_t t = \frac{(k_{wf} + k_{wv})}{(c_r \phi_{0w} + c_r \phi_{0f} + c_r \phi_{0v}) \mu r_w^2} t \quad (2.34)$$

$$\kappa = \frac{k_{wf}}{k_{wf} + k_{wv}} \quad (2.35)$$

$$\omega_j = \frac{c_r \phi_{0j}}{(c_r \phi_{0m} + c_r \phi_{0f} + c_r \phi_{0v})} \quad j = m, f, v \quad (2.36)$$

$$\lambda_{mf} = \frac{r_w^{\alpha_{mf}+2} k_{wmf}}{(k_{wf} + k_{wv}) A_w} \quad (2.37)$$

$$\lambda_{mv} = \frac{r_w^{\alpha_{mv}+2} k_{wmv}}{(k_{wf} + k_{wv}) A_w} \quad (2.38)$$

$$\lambda_{vf} = \frac{r_w^{\alpha_{fv}+2} k_{wfv}}{(k_{wf} + k_{wv}) A_w} \quad (2.39)$$

$$C_D = \frac{C_s a_t}{Q_s a_p} \quad (2.40)$$

De donde se obtiene:

$$\omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} = -\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{1-\alpha_{mf}}} (p_{Dm} - p_{Df}) - \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{1-\alpha_{mv}}} (p_{Dm} - p_{Dv}) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} &= \frac{\kappa}{r_D^{D_f-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) \\ &+ \frac{\lambda_{mf}}{r_D^{D_f-\alpha_{mf}-1}} (p_{Dm} - p_{Df}) - \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{D_f-\alpha_{fv}-1}} (p_{Df} - p_{Dv}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \omega_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial t_D} &= \frac{1-\kappa}{r_D^{D_v-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_v-\theta_v-1} \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right) \\ &+ \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{D_v-\alpha_{mv}-1}} (p_{Dm} - p_{Dv}) + \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{D_v-\alpha_{fv}-1}} (p_{Df} - p_{Dv}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\left[-\kappa \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1-\kappa) \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = 1 - C_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \quad (2.44)$$

$$p_{Dw} = \left[p_{Df} - s_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \left[p_{Dv} - s_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \quad (2.45)$$

$$p_{Dj} = 0 \quad \text{cuando } t_D = 0$$

2.5. Solución numérica

Para resolver el sistema de ecuaciones sin dimensiones (2.41-2.45) y obtener la presión en el pozo p_{Dw} se usa un método numérico, el primer paso es pasar las ecuaciones al espacio de Laplace y luego aplicar diferencias finitas.

Aplicando transformada de Laplace en la variable temporal al sistema de ecuaciones (2.41-2.45):

$$\omega_m u \bar{p}_{Dm} = -\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{mf}}} (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}) - \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{mv}}} (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Dv}) \quad (2.46)$$

$$\omega_f u \bar{p}_{Df} - \frac{\kappa}{r_D^{D_f-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{\beta_f} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) = \frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{mf}}} (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Df}) - \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{vf}}} (\bar{p}_{Df} - \bar{p}_{Dv}) \quad (2.47)$$

$$\omega_v u \bar{p}_{Dv} - \frac{1-\kappa}{r_D^{D_v-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{\beta_v} \frac{d\bar{p}_{Dv}}{dr_D} \right) = \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{mv}}} (\bar{p}_{Dm} - \bar{p}_{Dv}) + \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{vf}}} (\bar{p}_{Df} - \bar{p}_{Dv}) \quad (2.48)$$

donde \bar{p}_{Dj} es la transformada de Laplace de la presión:

$$\bar{p}_{Dj} = \int_0^\infty e^{-ut_D} p_{Dj} dt_D$$

y además se usan las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} \beta_f &= D_f - \theta_f - 1 \\ \beta_v &= D_v - \theta_v - 1 \\ \gamma_{mf} &= 1 - \alpha_{mf} \\ \gamma_{mv} &= 1 - \alpha_{mv} \\ \gamma_{fm} &= D_f - \alpha_{mf} - 1 \\ \gamma_{fv} &= D_f - \alpha_{fv} - 1 \\ \gamma_{vm} &= D_v - \alpha_{mv} - 1 \\ \gamma_{vf} &= D_v - \alpha_{fv} - 1 \end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación para la matriz (2.46):

$$\bar{p}_{Dm} = c_{mf} \bar{p}_{Df} + c_{mv} \bar{p}_{Dv} \quad (2.49)$$

donde se define:

$$\begin{aligned} c_{mf} &= \frac{\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{mf}}}}{\omega_m u + \frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{mf}}} + \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{mv}}}} \\ c_{mv} &= \frac{\frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{mv}}}}{\omega_m u + \frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{mf}}} + \frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{mv}}}} \end{aligned}$$

Sustituyendo \bar{p}_{Dm} en las otras dos ecuaciones y desarrollando términos:

$$-\frac{\kappa}{r_D^{D_f-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{\beta_f} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) + c_{ff} \bar{p}_{Df} + c_{fv} \bar{p}_{Dv} = 0 \quad (2.50)$$

$$-\frac{1-\kappa}{r_D^{D_v-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{\beta_v} \frac{d\bar{p}_{Dv}}{dr_D} \right) + c_{vf} \bar{p}_{Df} + c_{vv} \bar{p}_{Dv} = 0 \quad (2.51)$$

donde se usaron las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} c_{ff} &= -\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{fm}}} (c_{mf} - 1) + \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{fv}}} + \omega_f u \\ c_{fv} &= -\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{\gamma_{fm}}} c_{mv} - \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{fv}}} \\ c_{vf} &= -\frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{vm}}} c_{mf} - \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{fv}}} \\ c_{vv} &= -\frac{\lambda_{mv}}{r_D^{\gamma_{vm}}} (c_{mv} - 1) + \frac{\lambda_{vf}}{r_D^{\gamma_{fv}}} + \omega_v u \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones primero se realiza el cambio de variable $x = \ln r_D$:

$$-\frac{\kappa}{e^{x D_f}} \frac{d}{dx} \left(e^{x(\beta_f-1)} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx} \right) + c_{ff}\bar{p}_{Df} + c_{fv}\bar{p}_{Dv} = 0 \quad (2.52)$$

$$-\frac{1-\kappa}{e^{x D_v}} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x(\beta_v-1)} \frac{d\bar{p}_{Dv}}{dx} \right) + c_{vf}\bar{p}_{Df} + c_{vv}\bar{p}_{Dv} = 0 \quad (2.53)$$

El dominio de la variable x es $x \in [0, \infty)$. Sin embargo para calcular la solución numérica se considera un radio externo $r_{De} = e^{x_e}$, es decir $x \in [0, x_e]$. Si r_{eD} es lo suficientemente grande entonces la solución numérica puede aproximar la solución de un yacimiento infinito. Las condiciones de frontera que se consideran en x_e pueden ser presión constante:

$$\bar{p}_{Dj}(x_e) = 0$$

o de yacimiento cerrado

$$\left[\frac{d\bar{p}_{Dj}}{dx} \right]_{x=x_e} = 0$$

El sistema de ecuaciones (2.52,2.53) se resuelve usando el método de diferencias finitas, por lo tanto se discretiza el intervalo $[0, x_e]$ en N subintervalos de tamaño uniforme Δx , es decir:

$$\Delta x = \frac{x_e}{N}$$

Los centros de los subintervalos se calculan con la relación:

$$x_i = \left(i - \frac{1}{2} \right) \Delta x \quad i = 1 \dots N$$

aplicando diferencias finitas centrales en el nodo x_i :

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{e^{x_i D_f}} \frac{1}{\Delta x^2} \left[e^{x_{i+1/2}(\beta_f-1)} (\bar{p}_{Df,i+1} - \bar{p}_{Df,i}) - e^{x_{i-1/2}(\beta_f-1)} (\bar{p}_{Df,i} - \bar{p}_{Df,i-1}) \right] \\ + c_{ff,i}\bar{p}_{Df,i} + c_{fv,i}\bar{p}_{Dv,i} = 0 \\ -\frac{1-\kappa}{e^{x_i D_v}} \frac{1}{\Delta x^2} \left[e^{x_{i+1/2}(\beta_v-1)} (\bar{p}_{Dv,i+1} - \bar{p}_{Dv,i}) - e^{x_{i-1/2}(\beta_v-1)} (\bar{p}_{Dv,i} - \bar{p}_{Dv,i-1}) \right] \\ + c_{vf,i}\bar{p}_{Df,i} + c_{vv,i}\bar{p}_{Dv,i} = 0 \end{aligned}$$

donde la notación es: una función f evaluada en el nodo x_i se denota con f_i , por ejemplo: $\bar{p}_{Df,i} = \bar{p}_{Df}(x_i)$. También se tiene la notación caso $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 1/2\Delta x$.

Acomodando términos:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\kappa e^{x_{i+1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} \bar{p}_{Df,i+1} + \left(\frac{\kappa e^{x_{i+1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} + \frac{\kappa e^{x_{i-1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} + c_{ff,i} \right) \bar{p}_{Df,i} \\
& \quad - \frac{\kappa e^{x_{i-1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} \bar{p}_{Df,i-1} + c_{fv,i} \bar{p}_{Dv,i} = 0 \\
& -\frac{(1-\kappa) e^{x_{i+1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} \bar{p}_{Dv,i+1} + \left(\frac{(1-\kappa) e^{x_{i+1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} + \frac{(1-\kappa) e^{x_{i-1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} + c_{vv,i} \right) \bar{p}_{Dv,i} \\
& \quad - \frac{(1-\kappa) e^{x_{i-1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} \bar{p}_{Dv,i-1} + c_{vf,i} \bar{p}_{Df,i} = 0
\end{aligned}$$

Si se definen los coeficientes:

$$\begin{aligned}
E_{f,i} &= -\frac{\kappa e^{x_{i+1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} \\
W_{f,i} &= -\frac{\kappa e^{x_{i-1/2}(\beta_f-1)}}{e^{x_i D_f \Delta x^2}} \\
P_{f,i} &= -E_{f,i} - W_{f,i} + c_{ff,i} \\
E_{v,i} &= -\frac{(1-\kappa) e^{x_{i+1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} \\
W_{v,i} &= -\frac{(1-\kappa) e^{x_{i-1/2}(\beta_v-1)}}{e^{x_i D_v \Delta x^2}} \\
P_{v,i} &= -E_{v,i} - W_{v,i} + c_{vv,i}
\end{aligned}$$

Se tiene el sistema de ecuaciones lineales para la presiones:

$$E_{f,i} \bar{p}_{Df,i+1} + P_{f,i} \bar{p}_{Df,i} + W_{f,i} \bar{p}_{Df,i-1} + c_{fv,i} \bar{p}_{Dv,i} = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (2.54)$$

$$E_{v,i} \bar{p}_{Dv,i+1} + P_{v,i} \bar{p}_{Dv,i} + W_{v,i} \bar{p}_{Dv,i-1} + c_{vf,i} \bar{p}_{Df,i} = 0 \quad i = 1 \dots N \quad (2.55)$$

Para completar el sistema se deben considerar las condiciones de frontera.

2.5.1. Frontera interior

En la frontera interior se debe cumplir la ecuación (2.44)

$$\left[-\kappa r_D^{D_f - \theta_f - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1-\kappa) r_D^{D_v - \theta_v - 1} \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = 1 - C_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D}$$

que puede escribirse de la siguiente forma:

$$\left[-\kappa r_D^{D_f - \theta_f - 1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1-\kappa) r_D^{D_v - \theta_v - 1} \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = Q_D$$

donde

$$Q_D = 1 - C_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D}$$

Cuando Q_D es variable en el tiempo, es decir $Q_D = Q_D(t_D)$ se puede aplicar el principio de superposición (*Fair Jr* (1981)). Primero se resuelve el problema considerando Q_D constante. Supongamos que se obtiene la presión en el pozo para el caso $Q_D = 1$ y la denotamos con p_{Dwc} . Entonces, usando el principio de superposición, la solución para Q_D variable en tiempo es:

$$p_{Dw} = \int_0^{t_D} Q_D \frac{dp_{wDc}}{t_D}(t_D - \tau) d\tau$$

sustituyendo Q_D

$$p_{Dw} = \int_0^{t_D} \left(1 - C_D \frac{dp_{Dw}}{d\tau}(\tau)\right) \frac{dp_{Dwc}}{t_D}(t_D - \tau) d\tau$$

Aplicando transformada de Laplace se tiene

$$\bar{p}_{Dw} = \left(\frac{1}{u} - C_D u \bar{p}_{Dw}\right) u \bar{p}_{Dwc}$$

Despejando \bar{p}_{Dw} se tiene una expresión para calcular la presión en el pozo en el espacio de Laplace en términos de \bar{p}_{Dwc} :

$$\bar{p}_{Dw} = \frac{\bar{p}_{Dwc}}{1 + C_D u^2 \bar{p}_{Dwc}} \quad (2.56)$$

Esta forma de calcular \bar{p}_{Dw} es conveniente porque el sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve primero con las condiciones de frontera más sencillas de gastos constante:

$$\left[-\kappa r_D^{\beta_f} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} - (1 - \kappa) r_D^{\beta_v} \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = 1$$

$$p_{Dwc} = \left[p_{Df} - s_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} = \left[p_{Dv} - s_v \frac{\partial p_{Dv}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1}$$

Y posteriormente se evalúa la ecuación (2.56) para incluir el almacenamiento.

En el espacio de Laplace y en términos de la variable x las ecuaciones de frontera con gasto constante son:

$$\left[-\kappa \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx} - (1 - \kappa) \frac{d\bar{p}_{Dv}}{dx} \right]_{x=0} = \frac{1}{u}$$

$$\bar{p}_{Dwc} = \left[\bar{p}_{Df} - s_f \frac{d\bar{p}_{Df}}{dx} \right]_{x=0} = \left[\bar{p}_{Dv} - s_v \frac{d\bar{p}_{Dv}}{dx} \right]_{x=0}$$

La posición $x = 0$ se denota en términos de los índices i como $x_{1/2} = x = 0$. Discretizando las ecuaciones de frontera:

$$-\kappa \frac{\bar{p}_{Df,1} - \bar{p}_{Df,0}}{\Delta x} - (1 - \kappa) \frac{\bar{p}_{Dv,1} - \bar{p}_{Dv,0}}{\Delta x} = \frac{1}{u}$$

$$\bar{p}_{Df,1/2} - s_f \frac{\bar{p}_{Df,1} - \bar{p}_{Df,0}}{\Delta x} = \bar{p}_{Dv,1/2} - s_v \frac{\bar{p}_{Dv,1} - \bar{p}_{Dv,0}}{\Delta x}$$

Se calcula la presión en $x = x_{1/2}$ como el promedio entre los nodos x_0 y x_1 , entonces:

$$\frac{\bar{p}_{Df,1} + \bar{p}_{Df,0}}{2} - s_f \frac{\bar{p}_{Df,1} - \bar{p}_{Df,0}}{\Delta x} = \frac{\bar{p}_{Dv,1} + \bar{p}_{Dv,0}}{2} - s_v \frac{\bar{p}_{Dv,1} - \bar{p}_{Dv,0}}{\Delta x}$$

acomodando las ecuaciones

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\bar{p}_{Df,0}}{\Delta x} + (1-\kappa) \frac{\bar{p}_{Dv,0}}{\Delta x} &= \kappa \frac{\bar{p}_{Df,1}}{\Delta x} + (1-\kappa) \frac{\bar{p}_{Dv,1}}{\Delta x} + \frac{1}{u} \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x}\right) \bar{p}_{Df,0} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x}\right) \bar{p}_{Dv,0} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x}\right) \bar{p}_{Df,1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x}\right) \bar{p}_{Dv,1} \end{aligned}$$

este sistema se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\Delta x} & \frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ \frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x} & -\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,0} \\ \bar{p}_{Dv,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\Delta x} & \frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,1} \\ \bar{p}_{Dv,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

invirtiendo la matriz del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,0} \\ \bar{p}_{Dv,0} \end{pmatrix} &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} & -\frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} - \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{\kappa}{\Delta x} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\Delta x} & \frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,1} \\ \bar{p}_{Dv,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ W &= \frac{\kappa}{\Delta x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x}\right) - \frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \left(\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x}\right) \end{aligned}$$

de forma más compacta se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,0} \\ \bar{p}_{Dv,0} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \bar{p}_{Df,1} \\ \bar{p}_{Dv,1} \end{pmatrix} + r = \begin{pmatrix} r_{11}\bar{p}_{Df,1} + r_{12}\bar{p}_{Dv,1} + r_1 \\ r_{21}\bar{p}_{Df,1} + r_{22}\bar{p}_{Dv,1} + r_2 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

donde

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} & -\frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} - \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{\kappa}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\Delta x} & \frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} + \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} \end{pmatrix} \\ r &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{s_v}{\Delta x} & -\frac{(1-\kappa)}{\Delta x} \\ -\frac{1}{2} - \frac{s_f}{\Delta x} & \frac{\kappa}{\Delta x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La ecuación (2.57) se puede usar en las ecuaciones (2.54,2.55) cuando $i = 1$, de donde se obtiene:

$$E_{f,1}\bar{p}_{Df,2} + \tilde{P}_{f,1}\bar{p}_{Df,1} + \tilde{c}_{fv,1}\bar{p}_{Dv,1} = -W_{f1}r_1 \quad (2.58)$$

$$E_{v,1}\bar{p}_{Dv,2} + \tilde{P}_{v,1}\bar{p}_{Dv,1} + \tilde{c}_{fv,1}\bar{p}_{Df,1} = -W_{v1}r_2 \quad (2.59)$$

Los coeficientes $\tilde{P}_{f,1}$, $\tilde{P}_{v,1}$, $\tilde{c}_{fv,1}$ y $\tilde{c}_{fv,1}$ tienen la expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{f,1} &= P_{f,1} + W_{f,1}r_{11} \\ \tilde{c}_{fv,1} &= W_{f,1}r_{12} + c_{fv,1} \\ \tilde{P}_{v,1} &= P_{v,1} + W_{v,1}r_{22} \\ \tilde{c}_{fv,1} &= W_{v,1}r_{21} + c_{vf,1} \end{aligned}$$

2.5.2. Frontera exterior

En la frontera exterior se consideran dos tipos de frontera, yacimiento a presión constante y yacimiento cerrado. Para las condiciones de frontera exteriores a presión constante la condición de frontera es:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{Df}(x_e) &= 0 \\ \bar{p}_{Dv}(x_e) &= 0\end{aligned}$$

según la notación que se está usando $x_e = x_{N+1/2}$, entonces

$$\begin{aligned}\bar{p}_{Df,N+1/2} &= 0 \\ \bar{p}_{Dv,N+1/2} &= 0\end{aligned}$$

consideramos que la presión en $x_{N+1/2}$ es el promedio de las presiones en x_N y x_{N+1} , entonces:

$$\begin{aligned}0 &= \bar{p}_{Df,N+1/2} = \frac{\bar{p}_{Df,N} + \bar{p}_{Df,N+1}}{2} \\ 0 &= \bar{p}_{Dv,N+1/2} = \frac{\bar{p}_{Dv,N} + \bar{p}_{Dv,N+1}}{2}\end{aligned}$$

lo que lleva a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{Df,N+1} &= -\bar{p}_{Df,N} \\ \bar{p}_{Dv,N+1} &= -\bar{p}_{Dv,N}\end{aligned}$$

Se forma similar el caso de yacimiento cerrado se llega a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}\bar{p}_{Df,N+1} &= \bar{p}_{Df,N} \\ \bar{p}_{Dv,N+1} &= \bar{p}_{Dv,N}\end{aligned}$$

La diferencia entre una u otra condición de frontera es un signo, entonces ambas condiciones pueden escribirse en una sola ecuación:

$$\bar{p}_{Df,N+1} = \pm \bar{p}_{Df,N} \quad (2.60)$$

$$\bar{p}_{Dv,N+1} = \pm \bar{p}_{Dv,N} \quad (2.61)$$

donde el signo negativo es para yacimiento a presión constante en la frontera exterior y el positivo para yacimiento cerrado. Sustituyendo las condiciones de frontera exteriores en el sistema (2.54,2.55) para $i = N$ se tiene la expresión:

$$\tilde{P}_{f,N}\bar{p}_{Df,N} + W_{fN}\bar{p}_{Df,N-1} + c_{fv,N}\bar{p}_{Dv,N} = 0 \quad (2.62)$$

$$\tilde{P}_{v,N}\bar{p}_{Dv,N} + W_{vN}\bar{p}_{Dv,N-1} + c_{vf,N}\bar{p}_{Df,N} = 0 \quad (2.63)$$

donde

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{f,N} &= P_{fN} \pm E_{fN} \\ \tilde{P}_{v,N} &= P_{vN} \pm E_{vN}\end{aligned}$$

donde N_s es un número par y V_n son coeficientes que dependen solamente de N_s dados por:

$$V_n = (-1)^{n+N_s/2} \sum_{k=\lfloor (n+1)/2 \rfloor}^{\min(n, N_s/2)} \frac{k^{N_s/2} (2k)!}{(N_s/2 - k)! k! (k-1)! (n-k)! (2k-n)!}$$

en este trabajo se usa $N_s = 8$. Para calcular la presión en el pozo en un solo tiempo se deben evaluar N_s presiones en el espacio de Laplace, y a su vez, cada una requiere la solución del sistema lineal de ecuaciones (2.65).

2.6. Curvas tipo

Las curvas tipo se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones en su forma sin dimensiones (2.41-2.45) para obtener la presión en el pozo en función del tiempo $p_{Dw}(t_D)$.

Sin embargo, es necesario dar valores a todos los parámetros del modelo, como resumen la tabla (2.1) muestra los parámetros del modelo junto con una pequeña descripción.

| Parámetro | Descripción |
|----------------|---|
| ω_f | Coefficiente de almacenamiento de fracturas |
| ω_v | Coefficiente de almacenamiento de vóculos |
| λ_{mf} | Parámetro que controla el flujo entre matriz y fracturas |
| λ_{mv} | Parámetro que controla el flujo entre matriz y vóculos |
| λ_{vf} | Parámetro que controla el flujo entre fracturas y vóculos |
| κ | Permeabilidad relativa de fracturas |
| s_f | Daño en fracturas |
| s_v | Daño en vóculos |
| C_D | Coefficiente de almacenamiento |

(a) Parámetros del modelo no fractales

| Parámetro | Descripción |
|---------------|---|
| D_f | Dimensión de fractal de masa de fracturas |
| D_v | Dimensión de fractal de masa de vóculos |
| θ_f | Coefficiente de difusión anómala en fracturas |
| θ_v | Coefficiente de difusión anómala en vóculos |
| α_{mf} | Parámetro que agrupa varios términos relacionados con la geometría de contacto matriz-fracturas (2.17) |
| α_{mv} | Parámetro que agrupa varios términos relacionados con la geometría de contacto matriz-vóculos (2.17) |
| α_{fv} | Parámetro que agrupa varios términos relacionados con la geometría de contacto fracturas-vóculos (2.17) |

(b) Parámetros del modelo asociados a la fractalidad

Tabla 2.1: Parámetros del modelo

Además de los parámetros del modelo también se deben especificar parámetros del método numérico. Para los ejemplos mostrados a continuación se usan los siguientes valores: $r_{De} = 5e + 5$, $N = 1000$, $N_s = 8$. Los tiempos que se usan para resolver las ecuaciones diferenciales se calculan con las siguientes expresiones:

$$t_{D,k} = 10^{-2+10(k-1)/(N_t-1)} \quad k = 1 \dots N_t$$

donde $N_t = 100$, Además de la presión $p_{Dw}(t_D)$ como función del tiempo, también es necesario mostrar la *log-derivada*, que vamos a denotar como $p'_{Dw}(t_D)$ y está definida de la siguiente manera:

$$p'_{Dw} = \frac{dp_{wD}}{d \log t_D}$$

La gráfica de las curvas $p_{Dw}(t_D)$ y $p'_{Dw}(t_D)$ en función del tiempo es lo que se llama curvas tipo y una forma común de mostrarlas es en una gráfica log-log.

El modelo tiene demasiados parámetros y sería complicado observar el efecto de todos los parámetros al mismo tiempo en la presión y log-derivada, debido a esto el procedimiento para generar las curvas tipo consiste en fijar todos los parámetros en los valores de la tabla 2.2, y solo se mueve un parámetro a la vez. La gráfica (2.1) muestra las curvas de presión y log-derivada correspondiente a éstos parámetros y se compara la con la solución del modelo de *Camacho Velazquez et al. (2005)*.

Una descripción más detallada de los parámetros no fractales se puede encontrar en *Camacho Velazquez et al. (2005)*, en los siguientes ejemplos se muestra el efecto de los parámetros fractales en la presión y log-derivada sin dimensiones.

| Parámetro | valor |
|----------------|---------|
| ω_f | 0.01 |
| ω_v | 0.12 |
| λ_{mf} | 2.98e-7 |
| λ_{mv} | 1.32e-7 |
| λ_{vf} | 1.45e-4 |
| κ | 0.82 |
| s_f | 0 |
| s_v | 0 |
| C_D | 0 |

(a) Parámetros no fractales

| Parámetro | valor |
|---------------|-------|
| D_f | 2 |
| D_v | 2 |
| θ_f | 0 |
| θ_v | 0 |
| α_{mf} | 1 |
| α_{mv} | 1 |
| α_{fv} | 1 |

(b) Parámetros fractales

Tabla 2.2: Valores de los parámetros para calcular las curvas tipo

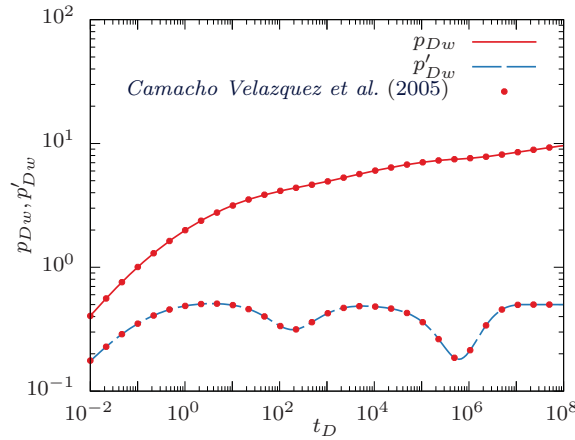


Figura 2.1: Presión de pozo (línea continua) y log-derivada (línea punteada) sin dimensiones usando los parámetros de la tabla (2.2). Se muestra también la solución del modelo de *Camacho Velazquez et al. (2005)* (puntos).

Como primer experimento la figura (2.2) muestra un conjunto de gráficas donde se observa el resultado de variar los parámetros D_f, D_v, θ_f y θ_v uno a la vez.

Uno de los principales efectos del flujo en un medio poroso con geometría fractal es que la presión a tiempos largos se observa una relación de ley de potencias (*Barker (1988); Chang and Yortsos (1990); Metzler et al. (1994); Acuna and Yortsos (1995); Flamenco-Lopez et al. (2003); Camacho-Velazquez et al. (2008); Jiang et al. (2019)*), es decir, para tiempos grandes $p_w \sim t^\nu$, y por la definición de la log-derivada este mismo comportamiento se observa en la log-derivada $p'_w \sim t^\nu$. Debido a la definición de las variables sin dimensiones (2.33,2.34) también se debe cumplir para la presión sin dimensiones y la log-derivada correspondiente $p_{Dw} \sim t_D^\nu$ y $p'_{Dw} \sim t_D^\nu$.

Se observa en la figura (2.2) que variando los parámetros fractales, no se logra apreciar claramente el comportamiento de ley de potencias esperado. En estos ejemplos se está variando un solo parámetro en cada gráfica y los otros parámetros permanecen fijos en valores Euclidianos, es decir, uno de los medios siempre es Euclidiano.

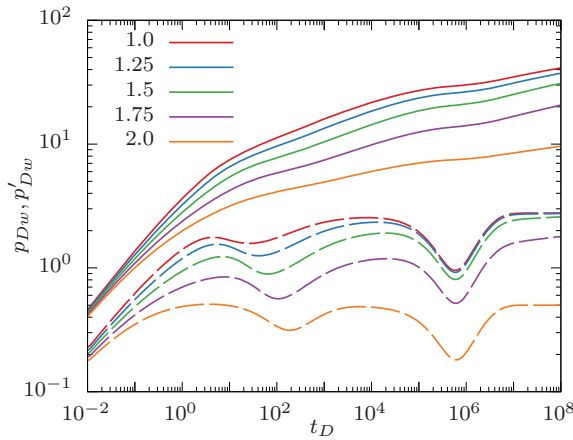
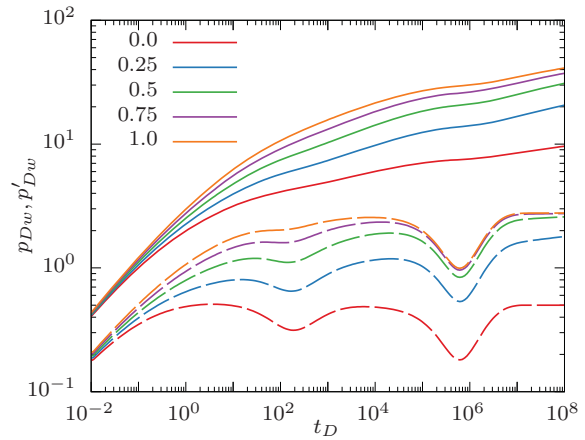
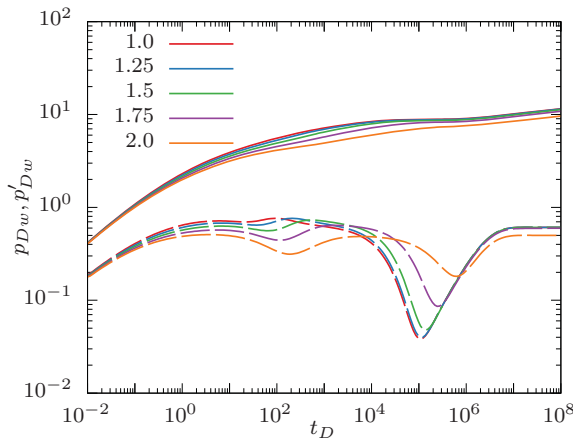
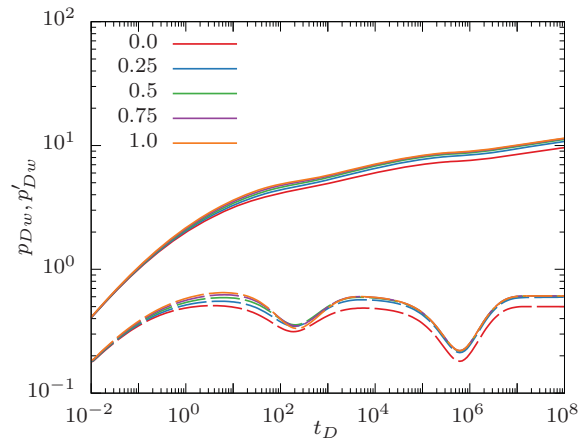
(a) Variando el parámetro D_f (b) Variando el parámetro θ_f (c) Variando el parámetro D_v (d) Variando el parámetro θ_v

Figura 2.2: Presión de pozo y log-derivada sin dimensiones usando los parámetros de la tabla 2.2 y variando un parámetro a la vez. La línea continua representa p_{Dw} mientras que la línea a trozos a p'_{Dw} .

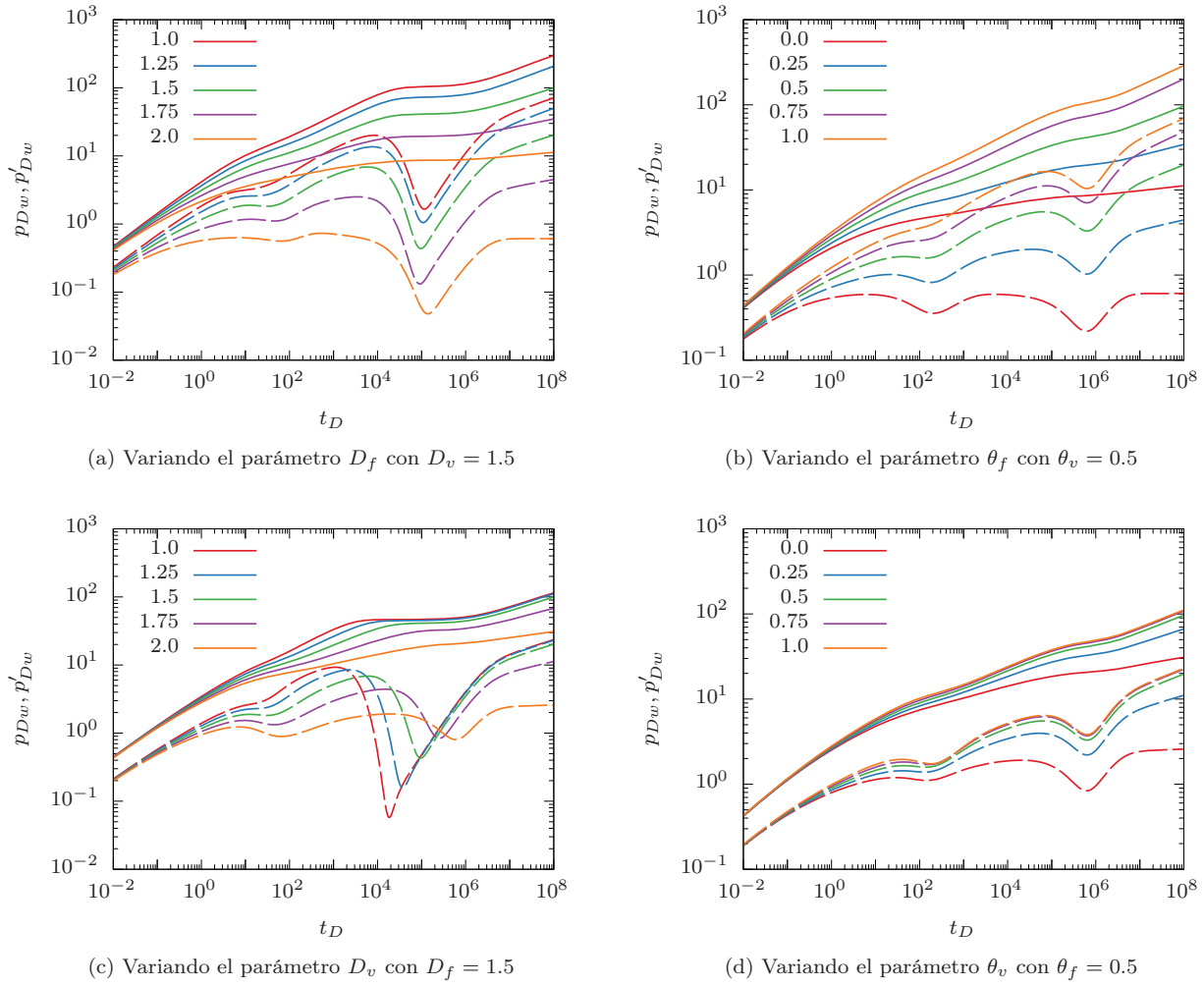


Figura 2.3: Presión de pozo y log-derivada sin dimensiones usando los parámetros de la tabla 2.2.

Para observar que pasa en el caso de que los parámetros fijos no sean Euclidianos se crean las gráficas de la figura (2.3). Por ejemplo, si se fija $D_v = 1.5$ y se varía $D_f \in [1, 2]$, en la gráfica (2.3a) se puede observar de forma más clara el comportamiento de ley de potencias a tiempos largos. Las gráficas (2.3b-2.3d) muestran mas ejemplos similares, en estos casos ambos medios tienen propiedades fractales. Esto podría indicar que para obtener ley de potencias es necesario que ambos medios sean fractales.

Para tratar de entender un poco más qué pasa a tiempos largos se calcula una aproximación a la presión p_{Dw} a tiempos largos en dos casos límite: flujo solo en fracturas y sin presencia de vórgulos y flujo solo en vórgulos y sin presencia fracturas.

Para el primer caso límite, (flujo solo en fracturas y sin presencia de vórgulos) se consideran los parámetros $\kappa = 1$, $\omega_v = 0$, $\lambda_{mv} = \lambda_{fv} = 0$ en el modelo (2.41-2.45). Usando estos valores, el modelo es similar al de *Chang and Yortsos (1990)*. Para este modelo se puede calcular una aproximación a tiempos largos de la presión, dada por $p_{Dw} \sim t_D^{\nu_f}$ (ver apéndice A) donde:

$$\nu_f = \frac{\theta_f - D_f + 2}{\theta_f - D_f + 4} \quad (2.67)$$

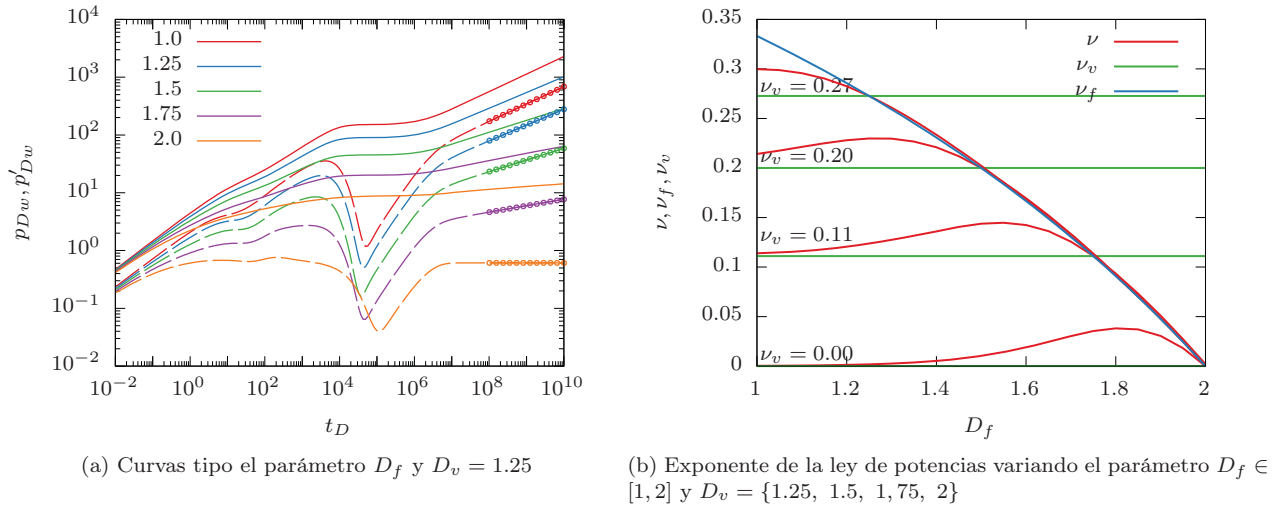


Figura 2.4: Presión de pozo y log-derivada sin dimensiones usando los parámetros de la tabla 2.2.

Para el caso de flujo solo en vórgulos sin fracturas ($\kappa = 0$, $\omega_f = 0$, $\lambda_{mf} = \lambda_{fv} = 0$) también se puede obtener una aproximación a tiempos largos $p_{Dw} \sim t_D^{\nu_v}$, donde:

$$\nu_v = \frac{\theta_v - D_v + 2}{\theta_v - D_v + 4} \quad (2.68)$$

Usando estas expresiones se realiza el siguiente experimento. Se resuelve el modelo para obtener la presión p_{Dw} variando el parámetro $D_f \in [1, 2]$ para diferentes valores de $D_v = \{1.25, 1.5, 1.75, 2\}$ el resto de parámetros quedan fijos en los valores de la tabla (2.2). El tiempo máximo de para calcular la presión se aumenta a $t_D = 10^{10}$. A partir de $t_D = 10^8$ se ajusta una recta en escala logarítmica en la log-derivada, es decir se encuentra la recta $\log p'_{Dw} = a + \nu \log t_D$ que mejor ajusta a los datos en tiempos largos. La figura (2.4a) muestra un ejemplo de los ajustes cuando $D_v = 1.25$ y D_f toma valores diferentes, los puntos son los datos que se usan para ajustar la línea. La pendiente de esta recta (ν) es el exponente de la ley de potencias $p'_{Dw} \sim t_D^{\nu}$. La gráfica (2.4b) muestra los valores obtenidos de la pendiente ν (línea roja), también el valor de ν_f (línea azul) y ν_v (línea verde) para cada valor de (D_f , D_v). Se puede observar en ésta gráfica que ν siempre está entre ν_f y ν_v , es decir:

$$\text{mín}\{\nu_f, \nu_v\} \leq \nu \leq \text{máx}\{\nu_f, \nu_v\} \quad (2.69)$$

además también se observa que ν tiende a estar más mucho más cerca de $\text{mín}\{\nu_f, \nu_v\}$. El caso dónde se nota mejor este efecto es cuando $D_v = 2$ lo que implica que $\nu_v = 0$ como se puede observar en la figura (2.2a) y en (2.4b).

Otra forma de observar claramente ley de potencias es cuando la contribución del medio fractal al flujo es mucho mayor con respecto al otro medio, esto se puede verificar cuando el parámetro κ tiene un valor cercano a cero (flujo principalmente en vórgulos) o un valor cercano a uno (flujo principalmente en fracturas). En la figura (2.5a) se muestra el caso de asignar $\kappa = 0.999$, es decir flujo casi exclusivamente en las fracturas y variar la dimensión fractal D_f . Claramente se observa la ley de potencias a tiempos largos. Ejemplos similares se muestran en las figuras (2.5b, 2.5d).

La figura (2.6) muestra el valor de la pendiente a tiempos largos de la log-derivada en función de κ . En los casos mostrados en esta gráfica siempre el valor de ν pasa de ν_v (cuando $\kappa = 0$) a ν_f (cuando $\kappa = 1$). Donde ν_f y ν_v son la pendientes dadas por las ecuaciones (2.67 y 2.67). Cuando $\nu_v = 0$ la transición $\nu_v \rightarrow \nu_f$ se da en un intervalo de κ muy pequeño al rededor de $\kappa = 1$.

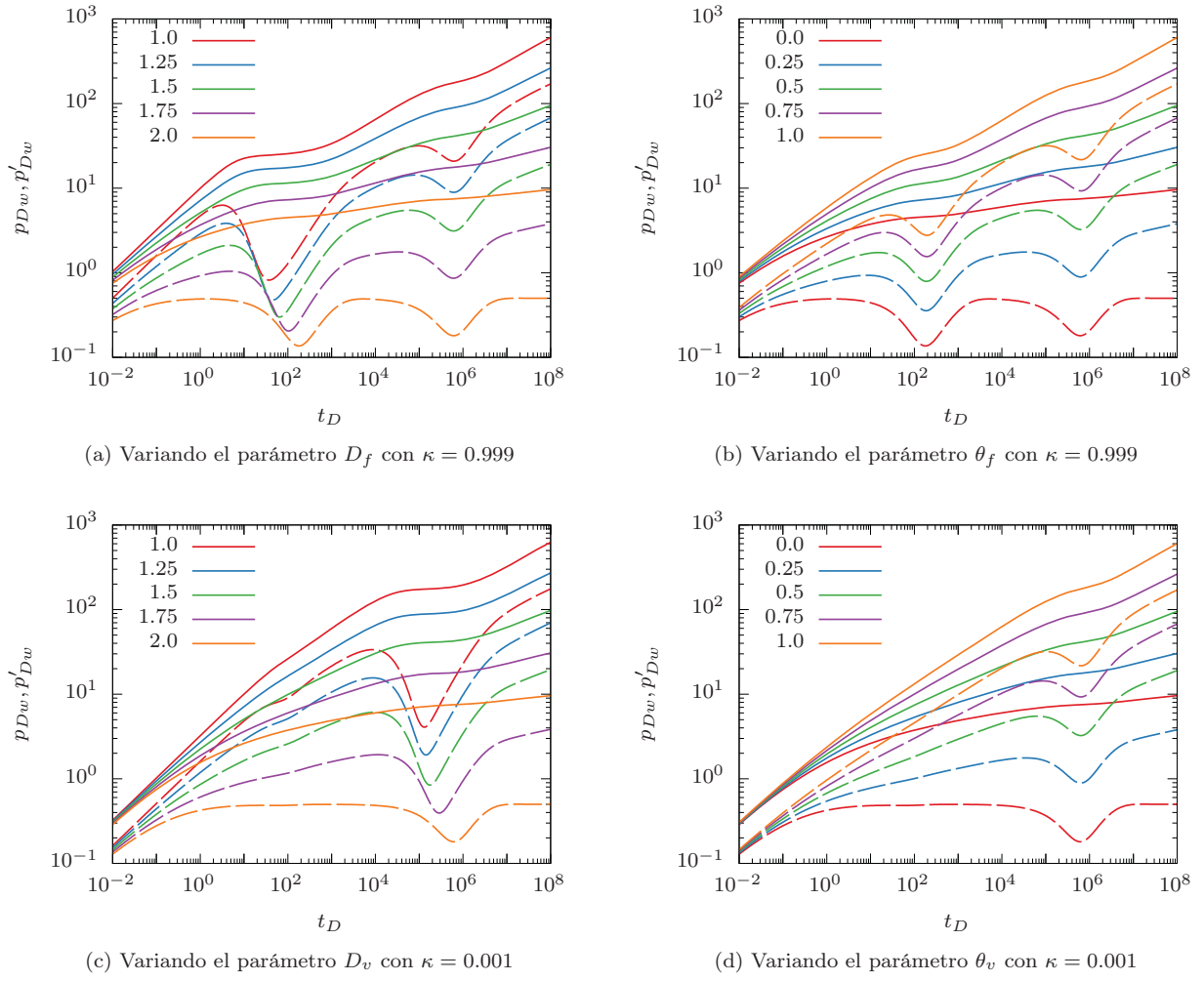


Figura 2.5: Presión de pozo y log-derivada sin dimensiones usando los parámetros de la tabla 2.2.

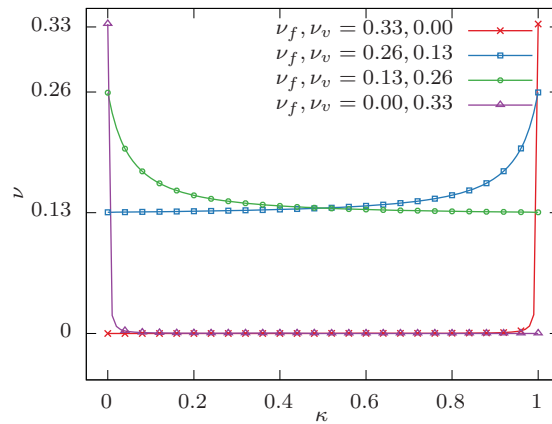


Figura 2.6: Pendiente de la log-derivada a tiempos largos en relación a κ

Capítulo 3

Caracterización de yacimientos usando pruebas de presión

El problema de caracterización de yacimientos consiste en encontrar los parámetros en las ecuaciones (2.41-2.45), de forma que la presión resultado de resolver el modelo ajusta una serie de datos de pozo medidos en campo. En una notación más precisa, si se denota con p_k a una serie de medidas de presión de pozo en los tiempos t_k (para $k = 1, \dots, N_t$), el problema de caracterización o problema inverso, consiste en encontrar los parámetros del modelo $\mathbf{x} = (\omega_f, \omega_v, \lambda_{mf}, \lambda_{mv}, \lambda_{fv}, \kappa, s_f, s_v, C_D, D_f, D_v, \theta_f, \theta_v, \alpha_{mf}, \alpha_{mv}, \alpha_{fv}, a_p, a_t)$ de tal manera que la solución $p_{wf}(\mathbf{x}, t_k)$ ajusta lo mejor posible los datos en el sentido de mínimos cuadrados (Gómez *et al.* (2014); Camacho Velazquez *et al.* (2014)). La función objetivo clásica de mínimos cuadrados que compara los datos $\{t_k, p_k\}_{k=1 \dots N_t}$ con la solución $p_{wf}(\mathbf{x}, t_k)$ es:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_t} (p_{wf}(\mathbf{x}, t_k) - p_k)^2$$

De esta forma el problema de caracterización se transforma en un problema de optimización, donde se busca encontrar el vector \mathbf{x} que minimiza la función $f(\mathbf{x})$. En este trabajo, se modifica la función objetivo para que compare el error relativo y además se usa también la log-derivada:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{N_t} \left(\frac{p_{wf}(\mathbf{x}, t_k) - p_k}{p_k} \right)^2 + \frac{1 - \alpha}{2} \sum_{k=1}^{N_t} \left(\frac{p'_{wf}(\mathbf{x}, t_k) - p'_k}{p'_k} \right)^2 \quad (3.1)$$

donde el coeficiente $0 \leq \alpha \leq 1$ es un parámetro que sirve para darle más peso a los datos de presión o a los datos de la log-derivada.

Para completar el planteamiento del problema de caracterización es necesario introducir restricciones en los parámetros. Algunas de estas restricciones surgen de la definición de los parámetros, por ejemplo $0 \leq \omega_v, \omega_f, \kappa \leq 1$, otras restricciones tienen que ver con la física que representan éstos parámetros. La tabla 3.1 muestra las cotas usadas.

Tomando en cuenta las restricciones la descripción formal del problema inverso es:

$$\begin{aligned} & \text{mín} && f(\mathbf{x}) \\ & \omega_f + \omega_v \leq 1 \\ & \mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{l} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u}$ es una notación simplificada que indica que el parámetro i -ésimo x_i está acotado por un valor mínimo l_i y un valor máximo u_i , para $i = 1 \dots n$. Este problema se resuelve usando una combinación de métodos de optimización local tipo Newton y una estrategia de optimización global de tipo multi-inicio.

| valor mínimo | Parámetro | valor máximo |
|--------------|-----------------------|--------------|
| 0 | ω_f | 1 |
| 0 | ω_v | 1 |
| 0 | $\omega_f + \omega_v$ | 1 |
| 1e-7 | λ_{mf} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{mv} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{vf} | 1e-2 |
| 0 | κ | 1 |
| 0 | s_f | 50 |
| 0 | s_v | 50 |
| 0 | C_D | 1e+4 |

(a) Cotas de los parámetros no fractales

| valor mínimo | Parámetro | valor máximo |
|--------------|---------------|--------------|
| 0 | D_f | 2 |
| 0 | D_v | 2 |
| 0 | θ_f | 1 |
| 0 | θ_v | 1 |
| 0 | α_{mf} | 1 |
| 0 | α_{mv} | 1 |
| 0 | α_{fv} | 1 |

(b) Cotas de los parámetros fractales

Tabla 3.1: Cotas de los parámetros del modelo

A continuación se describen brevemente los métodos de optimización local y global que se usan para resolver (3.2) y se muestran ejemplos sintéticos que sirven para validar y para ajustar los algoritmos.

3.1. Minimización local

El problema de minimización (3.2) se puede denotar en términos de un problema de optimización con restricciones lineales:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{Ax} \geq & \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde \mathbf{A} es una matriz con l renglones y m columnas y \mathbf{b} es un vector con l componentes. Cada renglón en el sistema $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ representa una restricción de los parámetros.

En general los algoritmos que resuelven el problema (3.3) son iterativos (*Nocedal and Wright (2006)*), de forma que comienzan con una aproximación inicial \mathbf{x}_0 y generan una secuencia de estimaciones \mathbf{x}_n que se acercan a la solución.

Una clase de algoritmos de optimización local tipo Newton puede representarse mediante el algoritmo (3.1). Donde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ es el gradiente de f respecto a los parámetros ($g_i = \partial f / \partial x_i$) y $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ es la matriz Hessiana o una aproximación ($B_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$).

Algoritmo 3.1 Método de minimización local sin restricciones

- 1: Dado un punto inicial \mathbf{x}_0
 - 2: **for** $n = 0, \dots$ **do**
 - 3: Calcular $f(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\mathbf{x}_n)$
 - 4: Calcular el paso \mathbf{s}_n
 - 5: Actualizar $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n$
 - 6: **end for**
-

Dependiendo como se calcula \mathbf{s}_n se obtienen diferentes tipos de métodos, algunos de los más comunes son:

1. Búsqueda Lineal: $\mathbf{s}_n = -\alpha_n \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{g}_n$, donde $\alpha_n = \arg \min_{\alpha} f(\mathbf{x}_n + \alpha \mathbf{B}_n^{-1} \mathbf{g}_n)$
2. Región de confianza: $\mathbf{s}_n = \arg \min_{\|\mathbf{s}\| < \delta} m_k(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^T \mathbf{g}_n + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B}_n \mathbf{s}$ donde δ es el radio de la región de confianza y el super-índice T indica transpuesta.
3. Levenverg-Marquardt: $\mathbf{s}_n = -(\mathbf{B}_n + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}_n$, donde λ_n es un parámetro de regularización.

Si la matriz \mathbf{B}_n es una aproximación a la matriz Hessiana, entonces diferentes algoritmos se pueden obtener dependiendo cómo se calcula esta matriz, por ejemplo:

1. Máximo descenso: $\mathbf{B}_n = \mathbf{I}$.
2. Cuasi-Newton: En este tipo de algoritmos la matriz \mathbf{B}_n es una aproximación a la Hessiana, por ejemplo en el método BFGS (*Fletcher (2000)*) se calcula \mathbf{B}_n de forma iterativa usando valores anteriores del gradiente \mathbf{g}_n y de \mathbf{x}_n . Si se define $\mathbf{s}_n = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n$ y $\mathbf{y}_n = \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{g}_n$ entonces:

$$\mathbf{B}_{n+1}^{BFGS} = \mathbf{B}_n - \frac{\mathbf{B}_n \mathbf{s}_n \mathbf{s}_n^T \mathbf{B}_n}{\mathbf{s}_n^T \mathbf{B}_n \mathbf{s}_n} + \frac{\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^T}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n} \quad (3.4)$$

3. Gauss-Newton: Si la función objetivo puede representarse como la suma de residuales r_k

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (r_k(\mathbf{x}))^2$$

entonces una aproximación de la Hessiana puede ser

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}(\mathbf{x}_n)$ es el Jacobiano del residual:

$$J_{ki}(x) = \frac{\partial r_k(\mathbf{x})}{\partial x_i}$$

4. La aproximación a la Hessiana (3.5) es más precisa cuando los residuales r_k están cercanos a cero o cuando la dependencia respecto a \mathbf{x} ($r_k = r_k(\mathbf{x})$) es lineal. Sin embargo, para problemas donde los residuales son grandes o el problema es muy no lineal, se puede mejorar la aproximación usando la corrección propuesta por *Dennis et al. (1977)*, de modo que la aproximación a la Hessiana es

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n + \mathbf{Q}_n$$

donde la matriz \mathbf{Q}_n se calcula iterativamente usando la ecuación:

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \tau_n \mathbf{Q}_n + \frac{(\mathbf{u}_n - \tau_n \mathbf{Q}_n \mathbf{s}_n) \mathbf{y}_n^T + \mathbf{y}_n (\mathbf{u}_n - \tau_n \mathbf{Q}_n \mathbf{s}_n)^T}{\mathbf{s}_n^T \mathbf{y}_n} - \mathbf{s}_n^T (\mathbf{u}_n - \tau_n \mathbf{Q}_n \mathbf{s}_n) \frac{\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T}{(\mathbf{s}_n^T \mathbf{y}_n)^2} \quad (3.6)$$

y $\mathbf{u}_n = \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{J}_n \mathbf{r}_{n+1}$.

Usando diferentes combinaciones entre la aproximación de la segunda derivada \mathbf{B}_n y el cálculo del paso \mathbf{s}_n , se pueden generar diferentes tipos de algoritmos: por ejemplo la actualización \mathbf{B}^{BFGS} suele usarse con el paso \mathbf{s}_n de Búsqueda Lineal (*Nocedal and Wright (2006)*), otra combinación usa la aproximación de Jacobiano $\mathbf{B}_n = \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n$ con el paso de Levenberg-Marquardt.

El algoritmo descrito en (3.1) no toma en cuenta de forma explícita las restricciones del problema. Si \mathbf{x}_n cumple las restricciones ($\mathbf{A}\mathbf{x}_n \geq \mathbf{b}$) y queremos asegurar que $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n$ también las cumpla entonces el paso \mathbf{s}_n debe satisfacer:

$$\mathbf{A}\mathbf{s}_n \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n$$

De esta forma las restricciones del problema (3.3) se transfirieron al cálculo del paso \mathbf{s}_n .

Para agregar las restricciones en el método de Búsqueda Lineal primero se calcula la dirección \mathbf{p}_k como solución del sub-problema:

$$\min_{\mathbf{A}\mathbf{p} \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n} \mathbf{p}^T \mathbf{g}_n + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{B}_n \mathbf{p} \quad (3.7)$$

y después se calcula $0 < \alpha_n \leq 1$ de forma que $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \alpha_n \mathbf{p}_n$ minimiza (aproximadamente) la función $g(\alpha) = f(\mathbf{x}_n + \alpha \mathbf{p}_n)$.

En el caso de Región de confianza, \mathbf{s}_n se obtiene al agregar las restricciones al sub-problema:

$$\min_{\substack{\mathbf{A}\mathbf{s} \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \|\mathbf{s}\|_\infty < \delta}} \mathbf{s}^T \mathbf{g}_n + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{B}_n \mathbf{s} \quad (3.8)$$

donde la norma infinito $\|\mathbf{s}\|_\infty < \delta$ es conveniente, porque de esta forma todas las restricciones se vuelven lineales.

Y en el caso de Levenverg-Marquardt el paso \mathbf{s}_n se obtiene al resolver el sub-problema:

$$\min_{\mathbf{A}\mathbf{s} \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n} \mathbf{s}^T \mathbf{g}_n + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\mathbf{B}_n + \lambda_n \mathbf{I}) \mathbf{s} \quad (3.9)$$

Entonces, considerando las restricciones, el algoritmo (3.1) se puede escribir de la siguiente forma:

Algoritmo 3.2 Método de minimización local con restricciones

- 1: Dado un punto inicial \mathbf{x}_0 que satisface las restricciones $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \geq \mathbf{b}$
 - 2: **for** $n = 0, \dots$ **do**
 - 3: Calcula $f(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{g}_n = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}(\mathbf{x}_n)$
 - 4: Calcula el paso \mathbf{s}_n sujeto a las restricciones $\mathbf{A}\mathbf{s}_n \geq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_n$
 - 5: Actualiza $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n$
 - 6: **end for**
-

En todos los métodos descritos en esta sección el calculo del paso \mathbf{s}_n (ecuaciones 3.7, 3.8, 3.9) requiere resolver un sub-problema de programación cuadrática, que de forma genérica puede escribirse de la siguiente manera:

$$\min_{\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}} \mathbf{x}^T \mathbf{c} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ y se asume que $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz simétrica. El apéndice B muestra un algoritmo para resolver este problema usando el método de puntos interiores.

3.2. Minimización global

El método de minimización (3.2) es un método de optimización local, lo cual implica que dependiendo el punto inicial converge a un mínimo local que no necesariamente sería un mínimo global.

Para aumentar la probabilidad de encontrar un mínimo global usando un optimizador local se usa un método tipo multi-inicio. La idea básica de un método multi-inicio es iniciar la optimización desde diferentes puntos iniciales y escoger como solución el punto que obtenga la función objetivo menor. Este tipo de método puede ayudar a encontrar un mínimo global si se realizan suficientes minimizaciones, sin embargo tiene la desventaja de que muchos casos podrían converger a un mismo mínimo local, lo que podría convertir esta estrategia en un método lento para lograr convergencia a un mínimo global.

El método del Tunel (*Levy and Montalvo* (1985); *Levy and Gómez* (1985)) es un algoritmo de optimización global que evita convergencia al mismo mínimo más de una vez usando una función túnel. Si \mathbf{x}^* es un mínimo local, entonces la función túnel $T(\mathbf{x})$ clásica es:

$$T(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^\alpha}$$

donde el valor de α se elige de forma apropiada para que ésta función cumpla $T(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^*$. Una vez que se ha encontrado un mínimo local \mathbf{x}^* , el método del túnel minimiza la función $T(\mathbf{x})$ hasta encontrar un punto $\hat{\mathbf{x}}$ que cumple $T(\hat{\mathbf{x}}) < 0$, esta parte del algoritmo es llamada fase de tunelización. Y una nueva fase de minimización en la función $f(\mathbf{x})$ comienza desde el punto $\hat{\mathbf{x}}$. Esta estrategia se alterna sucesivamente encontrando una serie de mínimos locales \mathbf{x}_l^* y actualizando la función túnel en cada fase. *Gómez and Barrón (1991)* proponen una función Túnel alternativa llamada función túnel exponencial.

El método multi-inicio propuesto en este trabajo retoma la misma idea de una función túnel para evitar convergencia al mismo mínimo. Sin embargo, utiliza una función ligeramente modificada, si se ha localizado un sólo mínimo local \mathbf{x}^* entonces la función es:

$$T(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - f^*) \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^\alpha} + 1 \right)$$

Si se han encontrado más mínimo locales la función T se actualiza de la siguiente forma:

$$T(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - f^*) \prod_l \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l^*\|^\alpha} + 1 \right) \quad (3.10)$$

donde $f^* = \min\{f(\mathbf{x}_1^*), f(\mathbf{x}_2^*), \dots\}$.

La idea del método multi-inicio que se propone en este trabajo es explorar el espacio de búsqueda a partir de un conjunto de puntos prueba $\{\bar{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ y luego elegir uno de estos puntos de prueba para definir un punto inicial $\hat{\mathbf{x}}$ a partir del cual comenzar una minimización local completa. Este proceso de exploración - minimización se repite iterativamente (*Hickernell and Yuan (1997)*).

La exploración del espacio consiste en llevar acabo minimizaciones de pocas iteraciones de la función $T(\mathbf{x})$. Cada una de estas minimizaciones comienza en un punto $\bar{\mathbf{x}}_m$ y termina en el punto $\hat{\mathbf{x}}_m$. Estas minimizaciones también pueden terminar si $T(\bar{\mathbf{x}}_m) < 0$.

Una vez que se realizaron estas minimizaciones "cortas", se elige el punto $\hat{\mathbf{x}} \in \{\hat{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ con la función objetivo más baja, es decir $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\hat{\mathbf{x}}_m)$, $m = 1 \dots N_p$. Si se satisface: $f(\hat{\mathbf{x}}) - f^* < tol * |f^*|$, entonces se realiza una minimización completa de la función $f(\mathbf{x})$ desde $\hat{\mathbf{x}}$.

El conjunto de puntos de exploración se puede ir modificando entre iteraciones, la modificación del conjunto consisten en conservar los N_q puntos con la función f menor y los demás se reemplazan con puntos casi-aleatorios.

Para mejorar la exploración aleatoria del espacio se usan puntos casi-aleatorios obtenidos de una secuencia de Sobol' (*Sobol' (1967)*). El algoritmo (3.3) muestra los detalles del método.

Algoritmo 3.3 Método de minimización global

-
- 1: Dado un punto inicial \mathbf{x}_0 . Un método de minimización local A , un método de minimización local B , el número de puntos de exploración N_p , el número de puntos a conservar entre iteraciones N_q , el número de iteraciones del método N_A .
 - 2: $L = 0$
 - 3: Genera N_p puntos casi-aleatorios $\{\bar{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ donde $\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_0$.
 - 4: Selecciona f^* como la función objetivo menor de los puntos $\bar{\mathbf{x}}_m$. Y define la función inicial $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f^*$
 - 5: **while do**
 - 6: **for** $m = 1, \dots, N_p$ **do**
 - 7: Ejecuta el minimizador A usando la función objetivo $T(\mathbf{x})$, desde el punto inicial $\bar{\mathbf{x}}_m$ un número máximo de iteraciones N_A . El resultado de la minimización es el punto $\hat{\mathbf{x}}_m$.
 - 8: **end for**
 - 9: Selecciona el punto $\hat{\mathbf{x}} \in \{\hat{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ tal que $f(\hat{\mathbf{x}}) \leq f(\hat{\mathbf{x}}_m)$, $m = 1 \dots N_p$.
 - 10: **if** $f(\hat{\mathbf{x}}) - f^* < tol * |f^*|$ **then**
 - 11: $L = L + 1$
 - 12: Ejecuta una minimización completa desde $\hat{\mathbf{x}}$ con el minimizador B sobre la función $f(\mathbf{x})$, el resultado es el punto \mathbf{x}_L^* .
 - 13: Actualiza $f^* = \min\{f^*, f(\mathbf{x}_L^*)\}$
 - 14: Actualiza la función

$$T(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - f^*) \prod_{l=1}^L \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l^*\|^{\alpha_l}} + 1 \right)$$
 - 15: **end if**
 - 16: Del conjunto $\{\bar{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ conserva los N_q puntos con función objetivo menor.
 - 17: Genera $N_p - N_q$ puntos casi-aleatorios y forma nuevamente el conjunto $\{\bar{\mathbf{x}}_m\}_{m=1\dots N_p}$ usando los puntos que se conservaron y los nuevos generados.
 - 18: **end while**
-

3.3. Derivadas

Para poder usar los métodos de optimización local propuestos en este trabajo es necesario calcular las derivadas de la función objetivo (3.1) respecto a los parámetros del modelo. En caso de requerir la matriz Hessiana también será necesario calcular las segundas derivadas.

Si se denotan los vectores residuales $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_{N_t})^T$ y $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_{N_t})^T$ donde:

$$r_k = \frac{p_{wf}(\mathbf{x}, t_k) - p_k}{p_k}$$

$$s_k = \frac{p'_{wf}(\mathbf{x}, t_k) - p'_k}{p'_k}$$

entonces la función objetivo (3.1) puede escribirse de forma simplificada como:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{r} + \frac{1 - \alpha}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s}$$

derivando respecto al parámetro x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial x_i} \mathbf{r} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mathbf{s}^T}{\partial x_i} \mathbf{s}$$

donde

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial x_i} \right]_k = \frac{\partial r_k}{\partial x_i} = \frac{1}{p_k} \frac{\partial p_{wf}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_i} \quad (3.11)$$

$$\left[\frac{\partial \mathbf{q}^T}{\partial x_i} \right]_k = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} = \frac{1}{p'_k} \frac{\partial p'_{wf}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_i} \quad (3.12)$$

Estas expresiones representan entradas de las matrices Jacobianas:

$$J_{k,i} = \frac{\partial r_k}{\partial x_i}$$

$$J'_{k,i} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i}$$

En notación matricial el gradiente del f en respecto a los parámetros del modelo es:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{J}^T \mathbf{r} + (1 - \alpha) \mathbf{J}'^T \mathbf{s}$$

En caso de necesitar la segunda derivada se debe calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}) = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{r}^T}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{r} + \alpha \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} + (1 - \alpha) \frac{\partial^2 \mathbf{s}^T}{\partial x_j \partial x_i} \mathbf{s} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mathbf{s}^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x_j}$$

donde:

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}^T}{\partial x_j \partial x_i} \right]_k = \left[\frac{\partial^2 r_k}{\partial x_j \partial x_i} \right]_k = \frac{1}{p_k} \frac{\partial^2 p_{wf}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_j \partial x_i} \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathbf{s}^T}{\partial x_j \partial x_i} \right]_k = \left[\frac{\partial^2 s_k}{\partial x_j \partial x_i} \right]_k = \frac{1}{p'_k} \frac{\partial^2 p'_{wf}(\mathbf{x}, t_k)}{\partial x_j \partial x_i} \quad (3.14)$$

Entonces, el cálculo del gradiente y de la Hessiana de la función objetivo requieren el cálculo de las derivadas de la presión y la log-derivada respecto a los parámetros \mathbf{x} . Sin embargo, este cálculo es complicado debido a que para calcular $p_{wf}(\mathbf{x}, t)$ en un tiempo específico se debe resolver el sistema lineal (2.64) N_s veces y luego usar el algoritmo de Stehfest (2.66).

Existen diferentes formas para calcular o aproximar las derivadas. Una opción es aproximarlas usando diferencias finitas, sin embargo el cálculo de p_{wf} es muy sensible a errores numéricos debido al uso del algoritmo de Stehfest (Stehfest (1970)) y usar diferencias finitas puede amplificar estos errores. Un ejemplo de este problema se puede ver en en la figura (3.1b), donde se calcula la derivada de p_{wf} respecto al parámetro λ_{mf} usando diferencias finitas y se muestra que la derivada contiene ruido. Otro tipo de métodos para calcular derivadas cuando la función a derivar es la solución de una ecuación diferencial es el método de la ecuación adjunta (Carrera and Neuman (1984)).

El método de diferenciación automática es otra forma de calcular derivadas de funciones que están implementadas en algún lenguaje de programación. Entre los métodos de diferenciación automática esta el de números duales (Aubert et al. (2001)), el cual se usa en este trabajo.

A continuación se describe el método de números duales para calcular derivadas de una función que se evalúa mediante un código escrito en algún lenguaje de programación. Esta técnica entra en la clase de diferenciación automática.

3.3.1. Números duales para calcular derivadas

El método de números duales para calcular derivadas entra dentro del área de diferenciación automática (*Griewank and Walther (2008)*). La idea básica es definir un tipo especial de número, llamado número dual y sus reglas aritméticas para realizar cálculos (de forma similar a los números complejos). Cuando se evalúa una función usando este tipo de números el resultado es un número dual que contiene el resultado de haber evaluado la función y también la derivada. Esta técnica permite evaluar derivadas con la misma precisión de calcular la derivada analítica. Es decir el error numérico en el calculo de la derivada es del orden del epsilon de la computadora.

Se define un número dual z de la forma:

$$z = r + d\epsilon$$

donde $r, d \in \mathbb{R}$ y ϵ es un símbolo que se usa para representar la componente dual de z . Este símbolo se define de forma que $\epsilon^i \epsilon^j = \epsilon^{i+j}$ y $\epsilon^{i+j} = 0$ para $i + j > 1$. Dados dos números duales $z_1 = r_1 + d_1\epsilon$ y $z_2 = r_2 + d_2\epsilon$ se define la suma, resta, multiplicación y división:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= r_1 + r_2 + (d_1 + d_2)\epsilon \\ z_1 - z_2 &= r_1 - r_2 + (d_1 - d_2)\epsilon \\ z_1 * z_2 &= r_1 r_2 + (r_1 d_2 + r_2 d_1)\epsilon \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2 d_1 - r_1 d_2}{r_2^2} \epsilon \end{aligned}$$

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la serie de Taylor alrededor de r es:

$$f(r + d\epsilon) = f(r) + f'(r)d\epsilon \quad (3.15)$$

los demás términos de la expansión son cero debido a la propiedad $\epsilon^n = 0$ para $n > 1$. Entonces, según (3.15) el resultado de evaluar una función en un número dual es otro número dual donde la derivada está contenida en la componente dual.

Por ejemplo, si $f(x) = x^3/(1+x)$, al evaluar esta función en $z = r + \epsilon$ y aplicar las operaciones aritméticas de número duales se tiene:

$$\begin{aligned} f(r + \epsilon) &= \frac{(r + \epsilon)^3}{1 + r + \epsilon} \\ &= \frac{r^3 + 3r^2\epsilon}{1 + r + \epsilon} \\ &= \frac{r^3}{1 + r} + \frac{3r^2(1 + r) - r^3}{(1 + r)^2} \epsilon \end{aligned}$$

la componente dual del resultado es precisamente la derivada evaluada en r .

Cuando se evalúa una función dónde se conoce la derivada se puede usar directamente la ecuación (3.15). Por ejemplo:

$$\sin(r + d\epsilon) = \sin(r) + \cos(r)d\epsilon$$

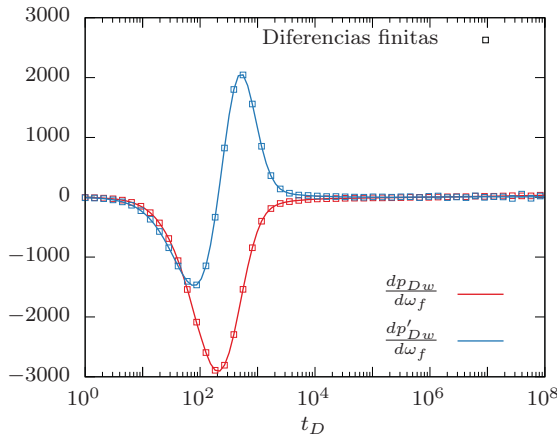
Usar estas reglas en conjunto con un lenguaje de programación adecuado permiten calcular derivadas de funciones complicadas de forma sencilla. El apéndice C detalla una forma de implementar el concepto de números duales para calcular primeras y segundas derivadas para funciones de una y varias variables usando el lenguaje de programación *C++*.

En este trabajo el cálculo de la presión $p_{wf}(\mathbf{x}, t)$ en un tiempo t es resultado de la solución de N_s sistemas lineales (2.64) debido a que se usa el algoritmo de Stehfest (2.66). Así que, evaluar $p_{wf}(\mathbf{x}, t)$ es un

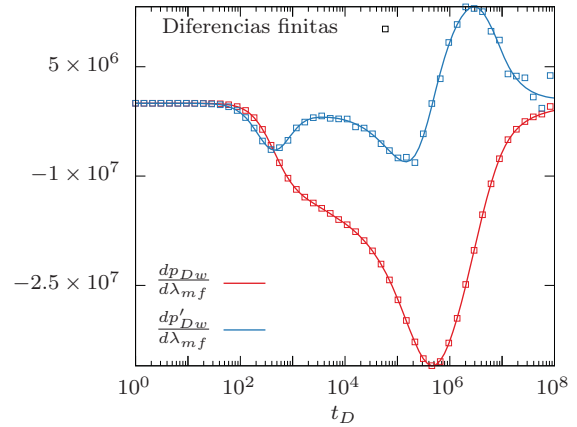
proceso complicado, sin embargo solo se requieren operaciones aritméticas básicas. Por lo tanto, se puede implementar de forma directa el uso de números duales para calcular la derivada de la presión respecto a los parámetros.

La figura (3.1) muestra la derivada de la presión y la log-derivada, en este caso sin dimensiones, respecto a los parámetros ω_f y λ_{mf} . Para comparar, también se calcula la derivada usando el método de diferencias finitas.

En la figura (3.1a) en la parte final de la derivada es posible observar, cierto nivel de ruido en el método de diferencias finitas. La figura (3.1b) muestra de forma más clara el ruido que introduce el método de diferencias finitas en la derivada de la log-derivada.



(a) Derivada de p_{Dw} y p'_{Dw} respecto al parámetro ω_f



(b) Derivada de p_{Dw} y p'_{Dw} respecto al parámetro λ_{mf}

Figura 3.1: Ejemplos de derivadas de p_{Dw} y p'_{Dw} .

3.4. Ejemplos sintéticos

Para probar y afinar los métodos de optimización descritos anteriormente se realizan experimentos sintéticos. Cada experimento sintético consiste en seleccionar valores para los parámetros del modelo (2.41-2.45) y calcular la presión (y log-derivada) a diferentes tiempos. Usando estos datos, se resuelve el problema inverso (3.2) para recuperar nuevamente los parámetros que generaron la curva de presión y log-derivada.

Los parámetros con los que se generan los datos de presión los llamaremos exactos y los obtenidos del problema inverso los llamaremos parámetros de ajuste. De forma similar se denota la presión exacta y de ajuste.

Identificar los 18 parámetros del modelo (2.41-2.45) es un problema complicado de resolver. Por lo tanto se usan algunas simplificaciones: la primera simplificación consiste en usar datos de presión del modelo sin dimensiones, lo que implica que $a_t = a_p = 1$, también se consideran fijos los parámetros $\alpha_{mf} = \alpha_{mv} = \alpha_{fv} = 1$, otra simplificación consiste en diseñar experimentos sintéticos de forma que la dificultad del problema aumenta gradualmente.

De esta forma los experimentos sintéticos se dividen en tres partes, donde cada parte corresponde a un modelo de flujo específico:

1. La primera parte consiste en un modelo de doble porosidad - una permeabilidad fractal que se denota con $(2\phi - 1k)$
2. La segunda parte consiste de un modelo de triple porosidad - una permeabilidad fractal que se denota con $(3\phi - 1k)$

3. La última parte consiste de un modelo triple porosidad - doble permeabilidad fractal ($3\phi - 2k$)

El proceso para crear los datos sintéticos es el siguiente:

1. De cada modelo se eligen valores de los parámetros de forma aleatoria pero restringiendo estos valores a sus cotas. En el caso de los parámetros λ_{mf} , λ_{mv} y λ_{fv} lo que se elige es un número l considerando $\log_{10}(\lambda_{min}) \leq l \leq \log_{10}(\lambda_{max})$ tal que $\lambda_{ij} = 10^l$.
2. Con los parámetros seleccionados se resuelve el modelo para calcular 50 datos de presión p_k en los tiempos $t_{D,k} = 10^{-2+(10/49)k}$ para $k = 0 \dots 49$. Con estos datos de presión se calcula la log-derivada usando la ecuación:

$$p'_k = \left[\frac{\partial p}{\partial \log t_D} \right]_k \approx \frac{\frac{\Delta p_L}{\Delta_R} \Delta_R + \frac{\Delta p_R}{\Delta_L} \Delta_L}{\Delta_R + \Delta_L}$$

donde $\Delta p_L = p_k - p_{k-1}$, $\Delta p_R = p_{k+1} - p_k$, $\Delta_R = \log t_{D,k} - \log t_{D,k-1}$ y $\Delta_L = \log t_{D,k+1} - \log t_{D,k}$. Esta fórmula es una versión simplificada del método de Bourdet (*Bourdet et al. (1989)*) tomando solamente los vecinos inmediatos de $(t_{D,k}, p_k)$.

3. Con los datos de presión y log-derivada se resuelve el problema inverso (3.2) para obtener los parámetros del ajuste.
4. Para probar los métodos en diferentes condiciones y para analizar si el valor exacto de los parámetros puede afectar el proceso de ajuste se prueban diferentes juegos de puntos exactos, por lo tanto, este proceso se repite 100 por cada modelo.

El proceso de optimización para resolver (3.2) es el siguiente:

1. Primero se ejecuta un minimizador local Levenverg-Marquardt desde un punto inicial \mathbf{x}_0 .
2. Si el valor de la función objetivo al terminar es mayor a $1e - 10$, entonces se ejecuta el método multi-inicio (3.3).
3. El algoritmo multi-inicio se detiene si la función objetivo está por debajo de $1e - 10$ o si se realizan 50,000 evaluaciones de la función objetivo.

En el caso de que se ejecute el método multi-inicio, se usan los siguientes parámetros:

- Minimizador A = Búsqueda Lineal
- $N_A = 10$
- Minimizador B = Región de Confianza
- $N_p = 10$
- $N_q = 3$

Cuando se minimiza la función $f(\mathbf{x})$ la aproximación a la Hessiana es la de (*Dennis et al. (1977)*) dada por $\mathbf{B}_n = \mathbf{J}_n^T \mathbf{J}_n + \mathbf{Q}_n$, donde \mathbf{Q}_n está dada por (3.6).

Cuando se minimiza la función $T(\mathbf{x})$ se usan la Hessiana $\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n^{BFGS}$ ya que la función $T(\mathbf{x})$ no es de tipo mínimos cuadrados.

El peso en la función objetivo (3.1) es $\alpha = 0.95$.

3.4.1. Doble porosidad - una permeabilidad ($2\phi - 1k$)

En este modelo los parámetros de la tabla (3.2a) permanecen fijos y los experimentos sintéticos se realizan con los parámetros de la tabla (3.2b). La selección de estos parámetros representa un modelo de doble porosidad una permeabilidad sin dimensiones, en ausencia de efecto de daño y almacenamiento en pozo.

La figura (3.2) muestra un resumen de los resultados de los 100 casos para este modelo. La gráfica (3.2 izquierda) muestra un histograma de frecuencias del valor mínimo de la función objetivo. Como se observa en todos los casos la función mínima esta por debajo de la condición de paro $1e - 10$. Como medida global se calcula la mediana de la función objetivo $f_{med} = 10^{-10.3} = 5e - 11$.

En la figura (3.2) se muestra un histograma de frecuencias de la norma del gradiente proyectado de la función objetivo en la solución. Se presentan resultados del gradiente proyectado (*Nocedal and Wright* (2006)) debido a que incorpora información sí el mínimo está en una cota de las restricciones. Como se observa en la gráfica el valor de la norma del gradiente proyectado es pequeño (valores menores a $1e - 3$) en todos los casos, de esta forma se puede asegurar que los algoritmos de minimización convergen a un mínimo local. La mediana del gradiente es $\|g_{proy}\|_{med} = 10^{-4.45} = 3.5e - 5$.

| Parámetro | Parámetro |
|--------------------|-------------------|
| $\omega_v = 0$ | $D_v = 2$ |
| $\lambda_{mv} = 0$ | $\theta_v = 1$ |
| $\lambda_{fv} = 0$ | $\alpha_{mf} = 1$ |
| $\kappa = 1$ | $\alpha_{mv} = 1$ |
| $s_f = 0$ | $\alpha_{fv} = 1$ |
| $s_v = 0$ | $a_t = 1$ |
| $C_D = 0$ | $a_p = 1$ |

(a) Parámetros fijos para el modelo $2\phi - 1k$.

| valor mínimo | Parámetro | valor máximo |
|--------------|----------------|--------------|
| 0 | ω_m | 1 |
| $1e-7$ | λ_{mf} | $1e-2$ |
| 0 | D_f | 2 |
| 0 | θ_f | 1 |

(b) Parámetros variables del modelo $2\phi - 1k$ y sus cotas.

Tabla 3.2: Valores de los parámetros para representar un modelo $2\phi - 1k$

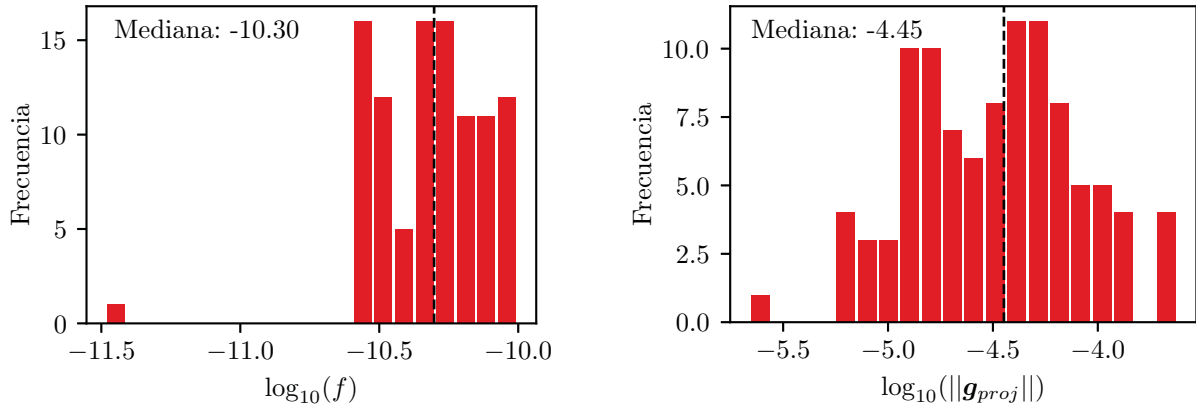


Figura 3.2: Histogramas de frecuencia de la función objetivo y gradiente proyectado de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $2\phi - 1k$

Un análisis de histogramas de frecuencia también se realiza para cada parámetro. Se realizan histogramas del logaritmo base 10 del error relativo. Es decir, para el parámetro x se crea un histograma de frecuencias usando el error:

$$e_x = \log_{10} \left(\left| \frac{x_{exacto} - x_{ajuste}}{x_{exacto}} \right| \right) \quad (3.16)$$

excepto λ_{mf} para el cual se usa el error:

$$e_x = \log_{10} \left(\left| \frac{\log_{10}(x_{exacto}) - \log_{10}(x_{ajuste})}{\log_{10}(x_{exacto})} \right| \right) \quad (3.17)$$

Las gráficas de los histogramas de los 4 parámetros se muestran en la figura (3.3). Puede observarse que en general todos los casos tienen error relativo muy pequeño, excepto un caso en el parámetro λ_{mf} . La mediana de los errores relativos es: $e_{\omega_f, med} = 5.3e - 6$, $e_{\lambda_{mf}, med} = 4.5e - 7$, $e_{D_f, med} = 3.2e - 6$ y $e_{\theta_f, med} = 1.2e - 5$.

Para analizar de forma visual si los parámetros ajustados corresponden a los exactos se crea una gráfica donde el eje x indica el valor exacto del parámetro y el eje y el parámetro recuperado con el ajuste. Cuando los parámetros recuperados están muy cerca de los exactos se observan puntos muy cercanos a una línea de pendiente 1. Si los parámetros obtenidos en el ajuste tienen diferencias sustanciales con los parámetros exactos, aparecen puntos fuera de la diagonal. La figura (3.4) muestra estas gráficas para los 4 parámetros, se puede observar que en general todos los parámetros recuperados están bastante cerca de los exactos. A excepción de un caso, en la figura para el parámetro λ_{mf} (3.4 arriba derecha) hay un punto fuera de la diagonal para $\lambda_{mf, exacto} \sim 10^{-6}$.

Para mostrar dos ejemplos de los datos y el ajuste se crea la figura (3.5), donde se muestran 2 ejemplos.

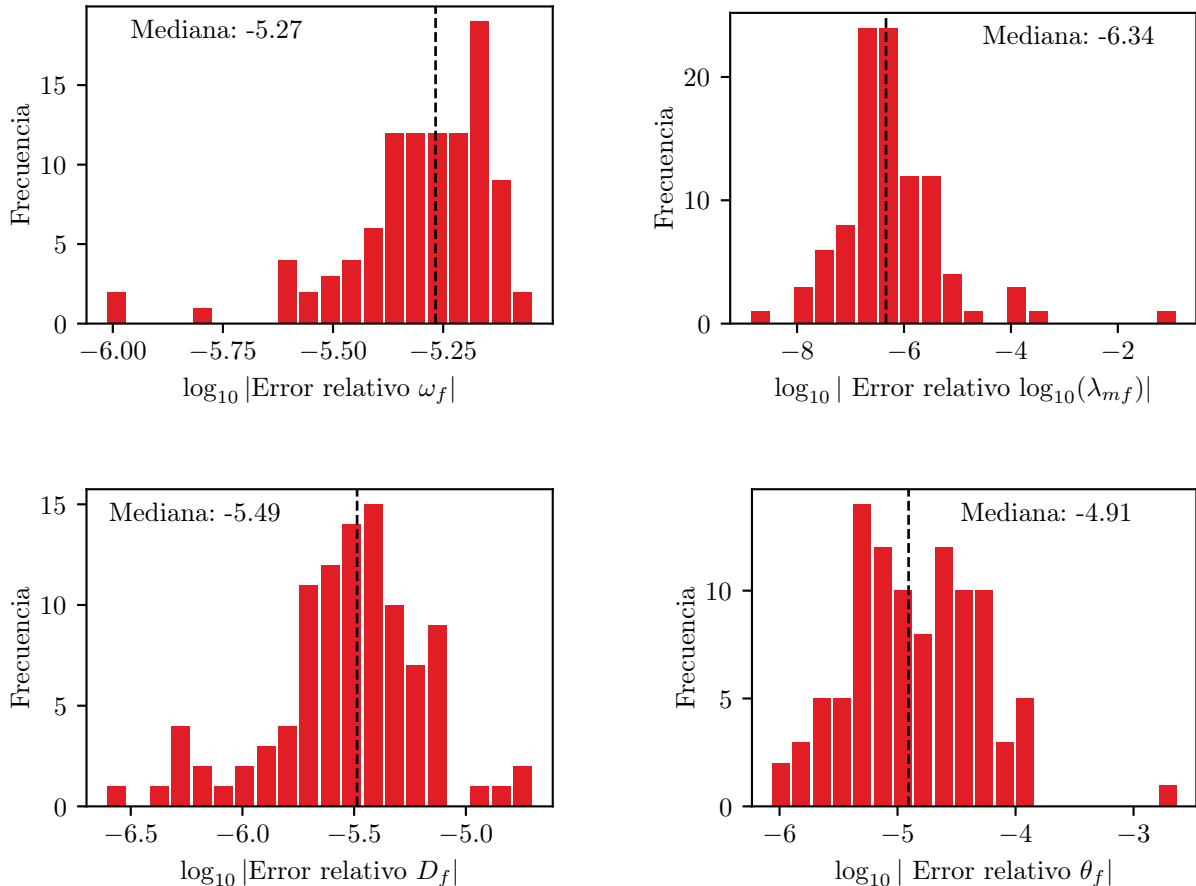


Figura 3.3: Histogramas de frecuencia del error relativo de los parámetros ajustados de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $2\phi - 1k$

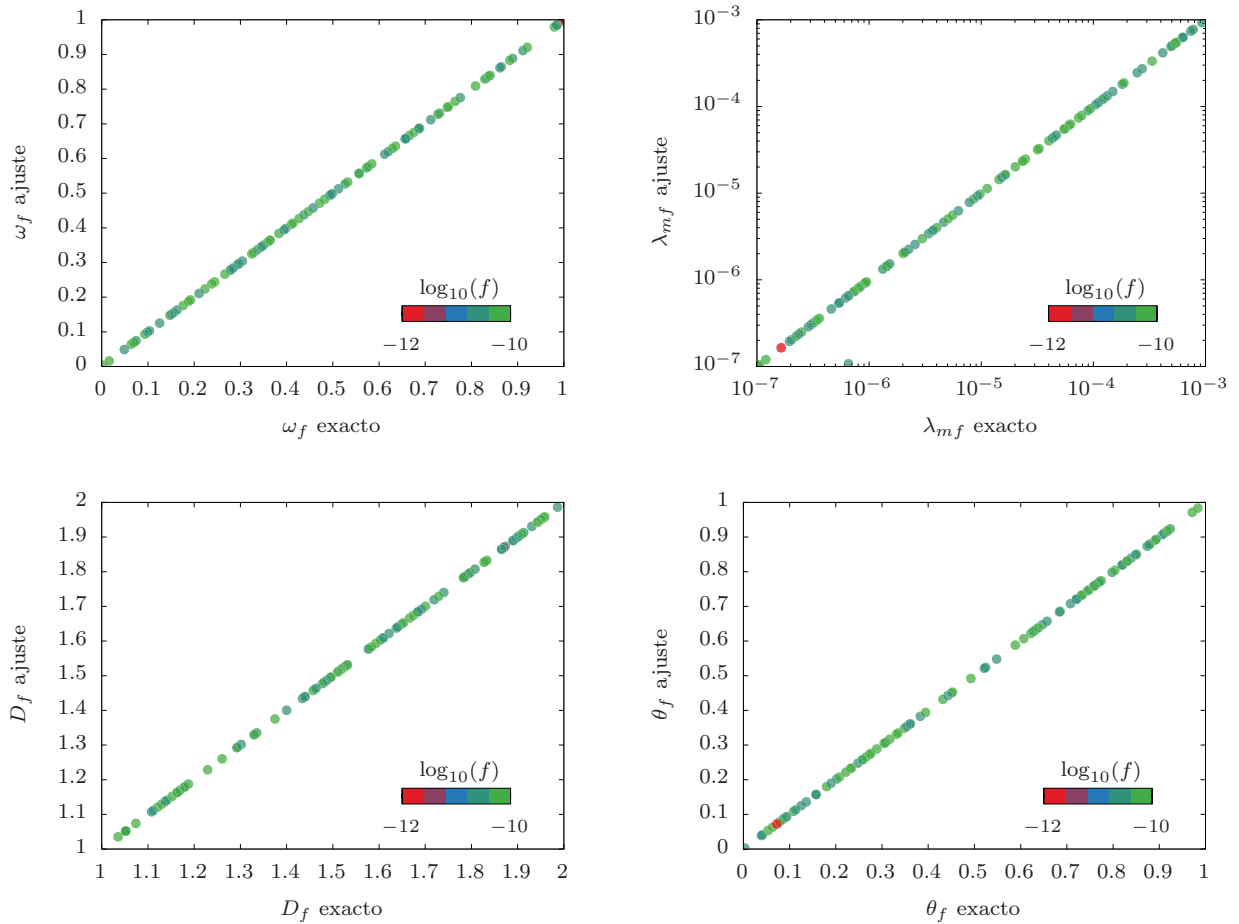


Figura 3.4: Comparación de los parámetros ajustados vs. los exactos de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $2\phi - 1k$. El color de cada punto representa el valor de función objetivo f_{obj} .

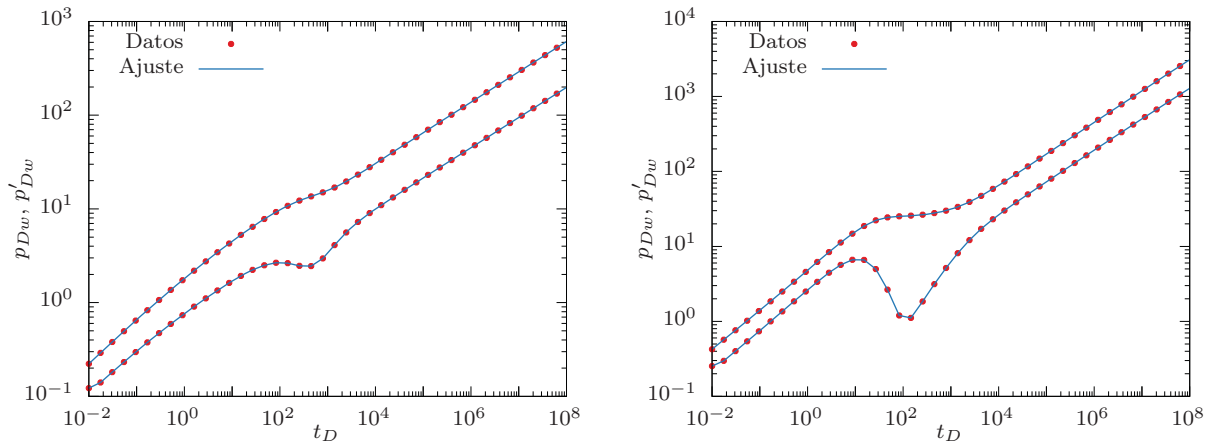


Figura 3.5: Ejemplos de 2 ajustes del modelo $2\phi - 1k$. Para este modelo los 100 casos ajustaron correctamente la presión. Estas gráficas se eligieron de forma aleatoria de los 100 casos. Las funciones objetivo son $f_{obj} = 5.05e - 11$ (izquierda) y $8.88e - 11$ (derecha).

3.4.2. Triple porosidad - una permeabilidad ($3\phi - 1k$)

En este modelo de flujo se asume que puede haber almacenamiento en los tres medios porosos pero el fluido se mueve principalmente a través de las fracturas. La tabla (3.3a) muestra los parámetros que se mantienen fijos. La tabla (3.3b) muestra los parámetros que pueden variar y sus cotas.

| Parámetro | Parámetro |
|----------------|-------------------|
| $\kappa = 1$ | $\alpha_{mf} = 1$ |
| $s_f = 0$ | $\alpha_{mv} = 1$ |
| $s_v = 0$ | $\alpha_{fv} = 1$ |
| $C_D = 0$ | $a_t = 1$ |
| $D_v = 2$ | $a_p = 1$ |
| $\theta_v = 1$ | |

(a) Parámetros fijos del modelo $3\phi - 1k$.

| valor mínimo | Parámetro | valor máximo |
|--------------|----------------|--------------|
| 0 | ω_m | 1 |
| 0 | ω_v | 1 |
| 1e-7 | λ_{mf} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{mv} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{vf} | 1e-2 |
| 0 | D_f | 2 |
| 0 | θ_f | 1 |

(b) Parámetros variables del modelo $3\phi - 1k$ y sus cotas.

Tabla 3.3: Valores de los parámetros para representar un modelo $3\phi - 1k$

De forma similar a los resultados de la sección anterior, se registra el valor de la función objetivo de cada uno de los 100 casos y también el gradiente proyectado. Con estos datos se crean los histogramas de la figura (3.6) la mediana para la función objetivo es $f_{med} = 8.7e - 11$ y en todos los casos la función objetivo está por debajo de $1e - 8$. El histograma de la norma del gradiente proyectado muestra que prácticamente todos los casos llegaron aun mínimo ya que todos los casos están por debajo de $1e - 4$, con una mediana de $\|\mathbf{g}_{proy}\|_{med} = 1.2e - 5$.

Para analizar con más detalle los resultados de cada parámetro, se grafican histogramas del error relativo de cada uno de los parámetros (el error relativo se calcula usando las ecuaciones (3.16 y 3.17). Sin embargo, para crear los histogramas se usa el logaritmo del error relativo, ya que los resultados se esparcen en varios ordenes de magnitud. De los histogramas en las figuras (3.7 y 3.8) se puede observar que los parámetros λ_{ij} son los parámetros que muestran mayor error. Incluso hay casos donde el error relativo se acerca a 1. La mediana del error por cada parámetro es: $e_{\omega_f,med} = 4e - 6$, $e_{\omega_v,med} = 2.1e - 3$, $e_{\lambda_{mf},med} = 8.6e - 4$, $e_{\lambda_{mv},med} = 1.8e - 3$, $e_{\lambda_{fv},med} = 6e - 4$, $e_{D_f,med} = 8e - 6$, $e_{\theta_f,med} = 2.7e - 6$.

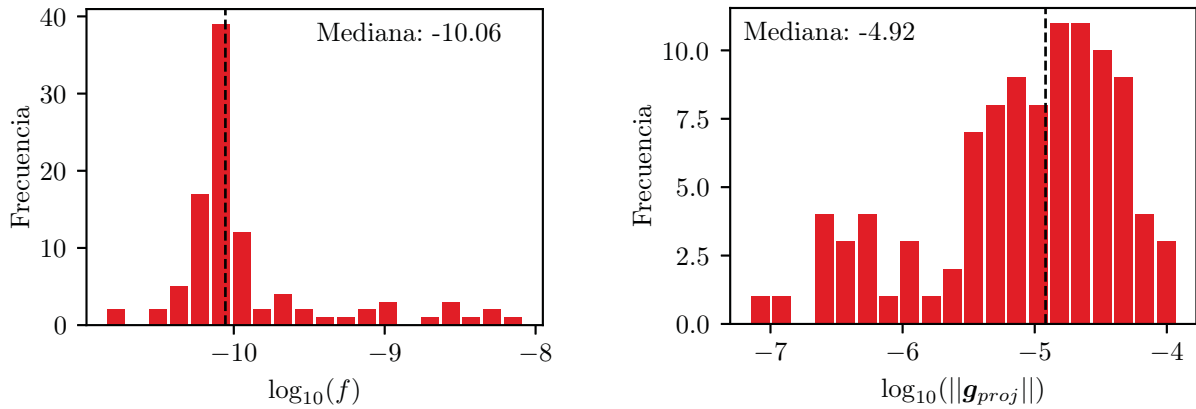


Figura 3.6: Histogramas de frecuencia de la función objetivo y gradiente proyectado de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 1k$

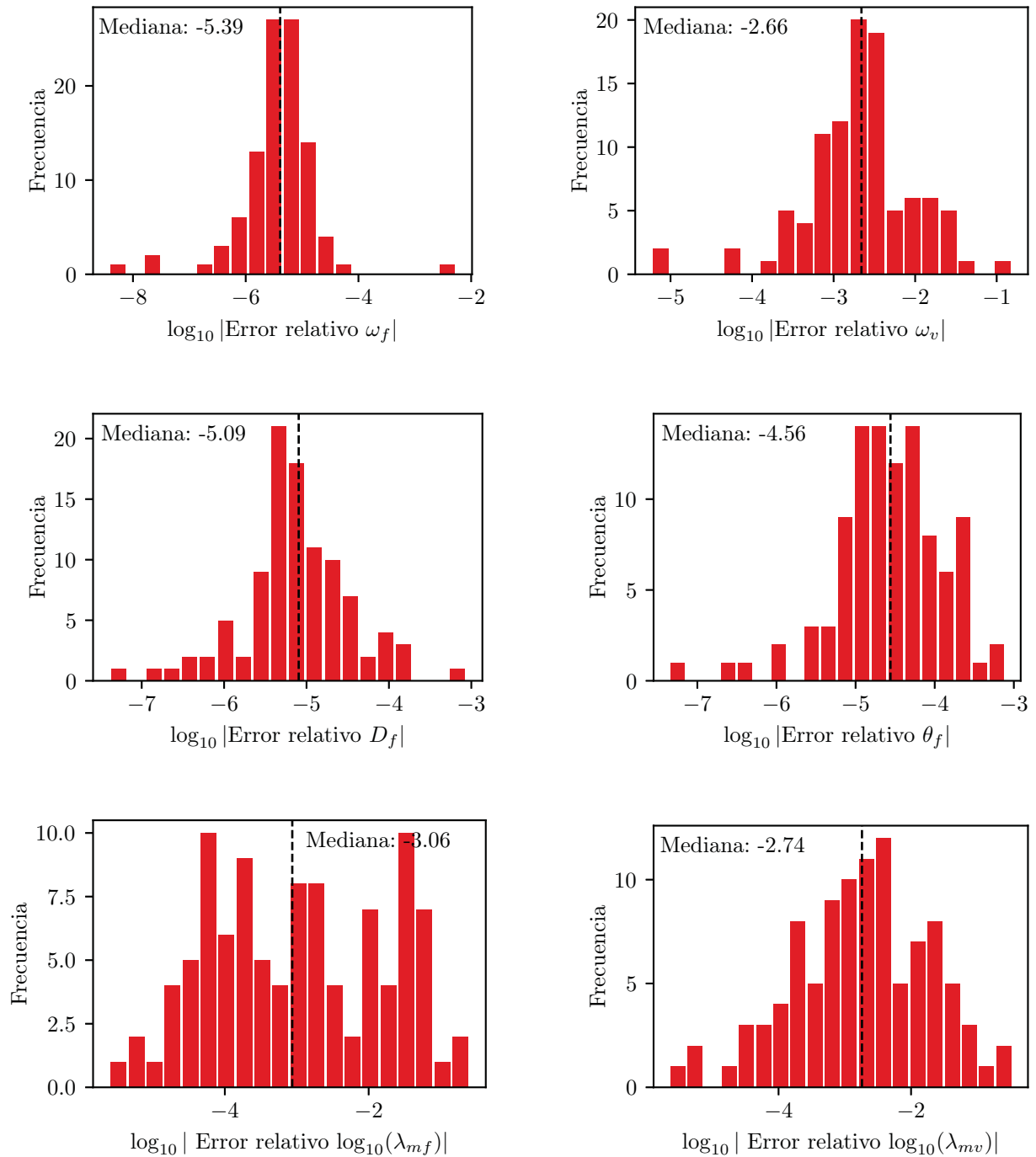


Figura 3.7: Histogramas de frecuencia del error relativo de los parámetros ajustados de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 1k$

Las gráficas en las figuras (3.9, 3.10 y 3.11) representan una forma visual para observar el comportamiento de los parámetros ajustados contra los parámetros exactos. Estas gráficas confirman los resultados de los histogramas, en general se obtuvieron buenos ajustes en la mayoría de los casos.

La información que se obtiene de estas gráficas y no se puede ver en los histogramas es que puede ser más complicado estimar con buena precisión los parámetros $\lambda_{i,j}$ cuando el valor exacto es pequeño.

Las gráficas (3.11) muestran que hay casos donde la función objetivo es pequeña (color morado) pero la precisión en λ 's puede ser grande (los puntos que se alejan de la diagonal). La presión y el ajuste para uno de estos casos se muestra en la figura (3.12a).

La función objetivo es $f = 9.2e - 10$, la norma del gradiente es $\|g\| = 3e - 6$, lo que podría indicar que se recuperaron los parámetros de forma precisa. Sin embargo, para el parámetro λ_{mv} se tiene un error relativo $e_{\lambda_{mv}} = 0.33$, el cual es grande si se compara con la mediana de los errores. En este caso el parámetro exacto es $\lambda_{mv} = 1.6e - 5$ y el obtenido con el ajuste es $\lambda_{mv} = 4.0e - 7$. Al parecer, en este ejemplo, la presión es poco sensible al parámetro λ_{mv} lo que hace difícil identificarlo con buena precisión, esto se puede observar en la figura (3.12b) donde se muestra la presión y log-derivada variando $\lambda_{mv} = 10^{-7}, 10^{-5}, 10^{-3}$, el ajuste con estos tres se ve prácticamente igual.

La figura (3.12) muestra algunos ejemplos de las curvas de presión y log-derivada con su respectivo ajuste.

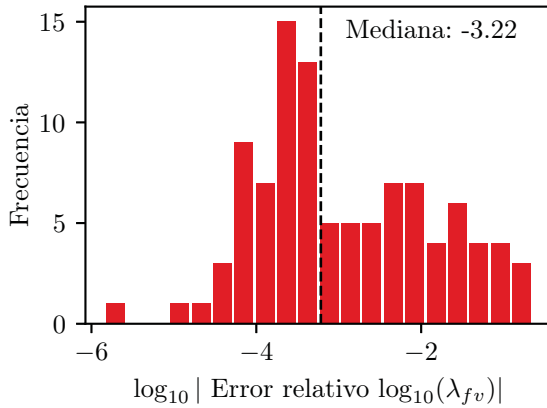


Figura 3.8: Histograma de frecuencias de λ_{fv}

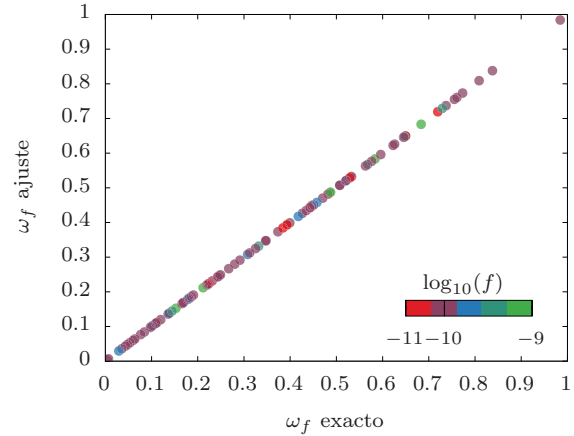


Figura 3.9: Resultados para ω_f

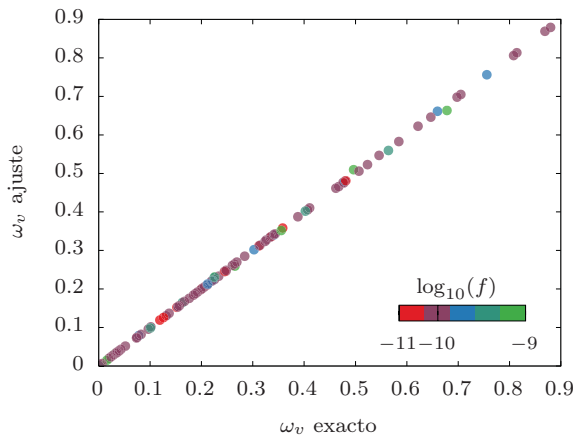
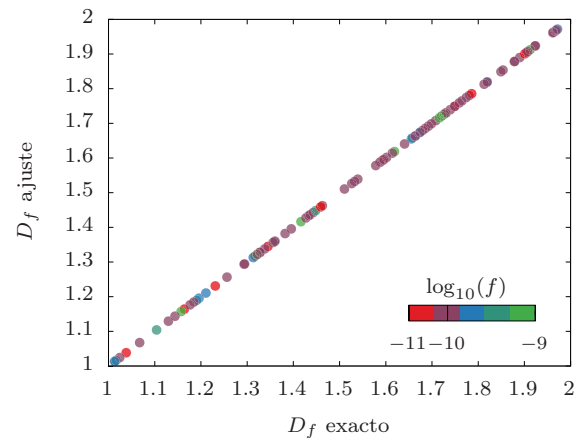


Figura 3.10: Comparación de los parámetros ajustados vs. los exactos de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 1k$. El color de cada punto representa el valor de función objetivo f_{obj} .



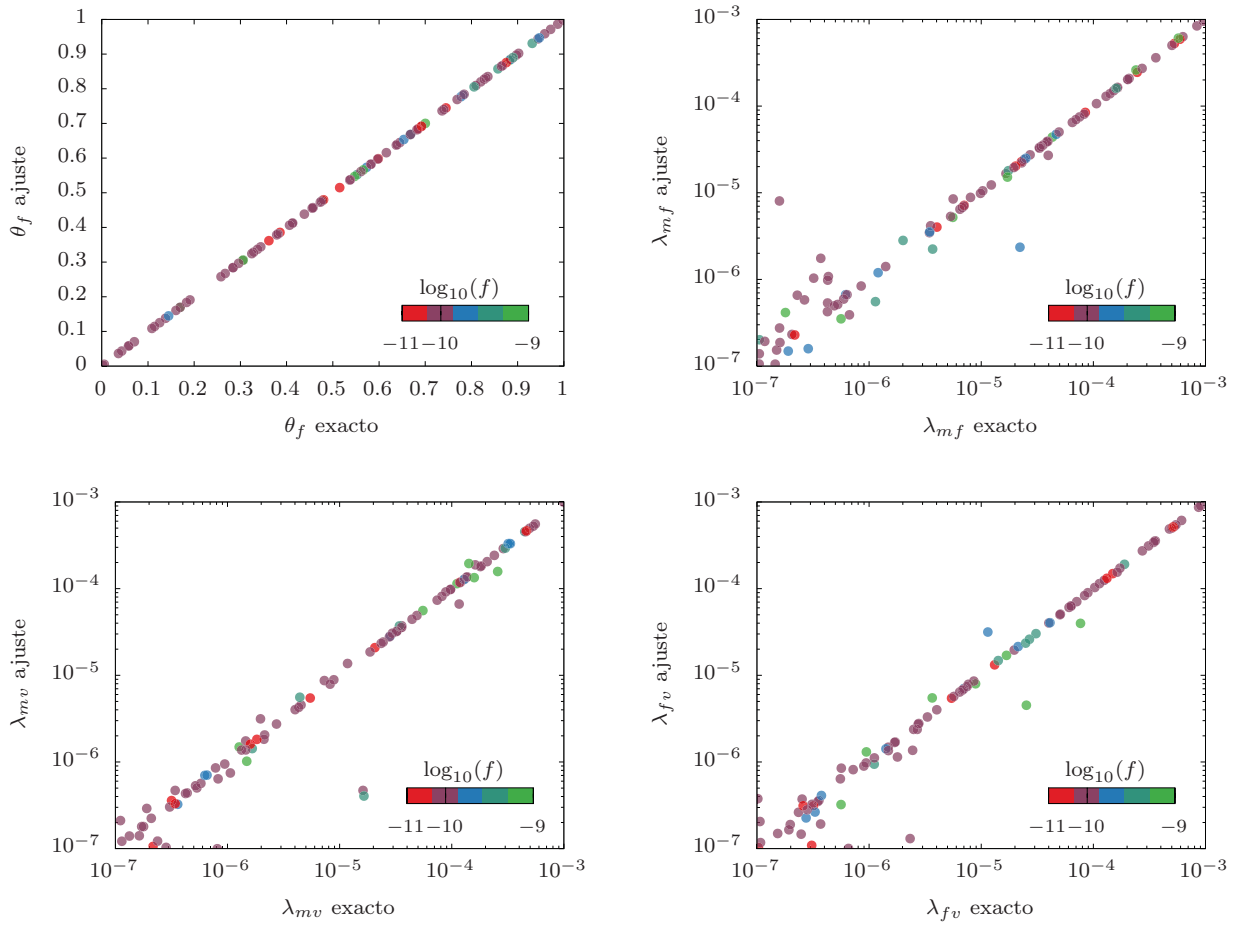
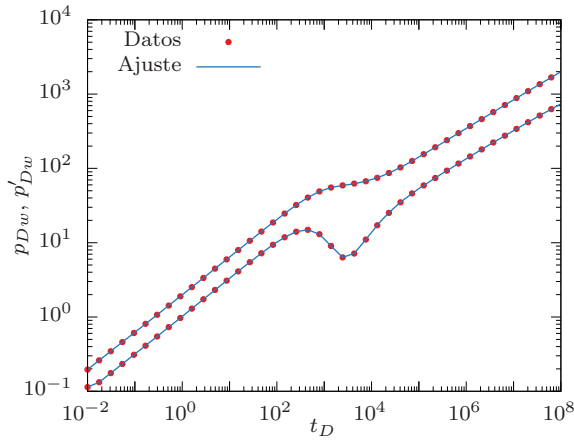
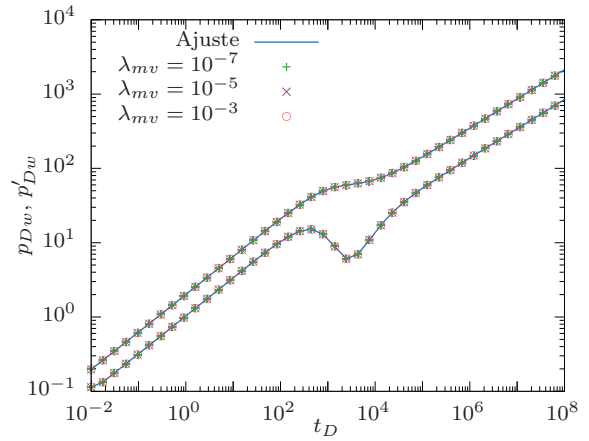


Figura 3.11: Comparación de los parámetros ajustados vs. los exactos de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $2\phi - 1k$. El color de cada punto representa el valor de función objetivo f_{obj} .



(a) Ejemplo de ajuste, $f_{obj} = 9.2e - 11$



(b) Presión y log-derivada de (a) variando λ_{mv}

Figura 3.12: Ejemplo de ajuste del modelo $3\phi - 1k$

3.4.3. Triple porosidad - doble permeabilidad ($3\phi - 2k$)

En este modelo de flujo puede haber almacenamiento en los tres medios y el flujo puede ser en fracturas y vórgulos. La tabla (3.4a) muestra los parámetros que se consideran fijos, los parámetros que pueden variar están en la tabla (3.4b).

En la figura (3.13) se muestra el histograma de los resultados de la función objetivo y norma del gradiente finales. La función objetivo final tiene una mediana de $f_{med} = 5.1e - 10$ y el gradiente $\|g_{proy}\|_{med} = 3.18e - 5$. Un total de 88 casos tienen una función objetivo menor a $1e - 7$. Pero el total de los casos tiene una norma del gradiente menor a $1e - 2$ lo que indica que aunque todos los casos llegaron a un mínimo local, no todos llegaron a uno global.

Las figuras (3.14 y 3.15) muestran los histogramas del error relativo de cada parámetro. Comparado con los resultados de los modelos $2\phi - 1k$ y $3\phi - 1k$, en este modelo hay más casos donde no se pudieron recuperar los parámetros de forma precisa. Como se observa en la figura (3.15) todos los errores de los parámetros tiene una media pequeña. Si se considera suficiente un dígito de precisión en la recuperación de un parámetro, es decir un error relativo de $1e - 1$, entonces los parámetros λ 's son los que tiene menos porcentaje de precisión con 87 casos y el parámetro D_f es el que tiene mejor porcentaje de precisión con 99 casos.

Las figuras (3.16 y 3.17) muestran las gráficas donde se compara el valor exacto de cada parámetro contra el valor recuperado. Se vuelve a repetir, como en la sección anterior, que los λ 's son los parámetros donde hay más dispersión de puntos. Y también se observa que es más difícil ajustar (con buena precisión) valores pequeños de los λ 's. En estas gráficas también se puede ver que hay casos donde la precisión en algún parámetro λ no es suficientemente buena, sin embargo la función objetivo si es pequeña (del orden de $1e - 8$ o menor, puntos color azul o morado), esto puede indicar un buen ajuste de los datos aún cuando no se pudo recuperar el valor exacto del parámetro. Estos experimentos sintéticos no tienen ruido en los datos, por lo que se esperaba recuperar todos los parámetros en todos los casos. Los resultados mostrados hasta ahora indican que podría haber condiciones donde no es posible recuperar con suficiente precisión los parámetros λ , esta hipótesis es reforzada con los resultados de la sección anterior, donde se encontró un caso en el que la presión no es lo suficientemente sensible al parámetro λ_{mv} .

En la figura (3.18) se muestran un par de ejemplos de los datos y el ajuste obtenido.

| Parámetro | Parámetro |
|-------------------|-------------------|
| $s_f = 0$ | $\alpha_{fv} = 1$ |
| $s_v = 0$ | $a_t = 1$ |
| $\alpha_{mf} = 1$ | $a_p = 1$ |
| $\alpha_{mv} = 1$ | $C_D = 1$ |

(a) Parámetros fijos del modelo $3\phi - 2k$.

| valor mínimo | Parámetro | valor máximo |
|--------------|----------------|--------------|
| 0 | ω_m | 1 |
| 0 | ω_v | 1 |
| 1e-7 | λ_{mf} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{mv} | 1e-2 |
| 1e-7 | λ_{vf} | 1e-2 |
| 0 | κ | 1 |
| 0 | D_f | 2 |
| 0 | θ_f | 1 |
| 0 | D_v | 2 |
| 0 | θ_v | 1 |

(b) Parámetros variables del modelo $3\phi - 2k$ y sus cotas.

Tabla 3.4: Valores de los parámetros para representar un modelo $3\phi - 2k$

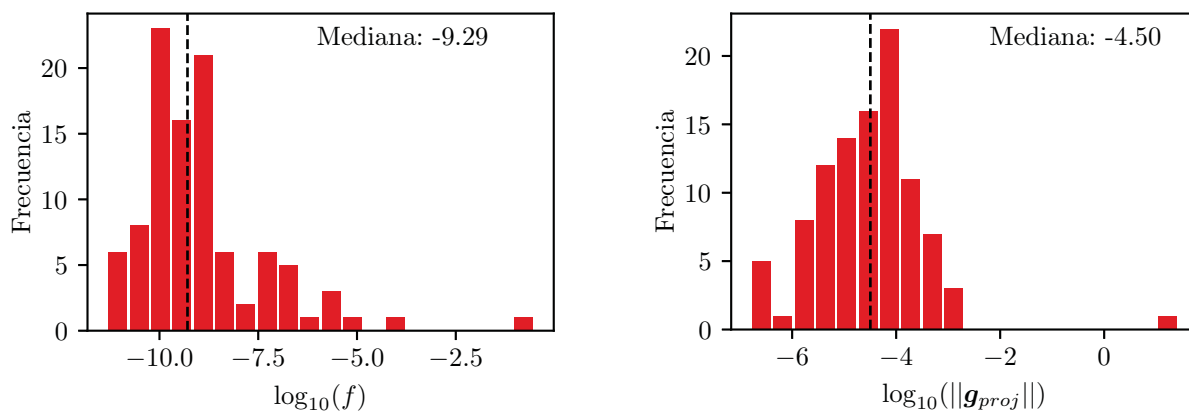


Figura 3.13: Histogramas de frecuencia de la función objetivo y gradiente proyectado de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 2k$

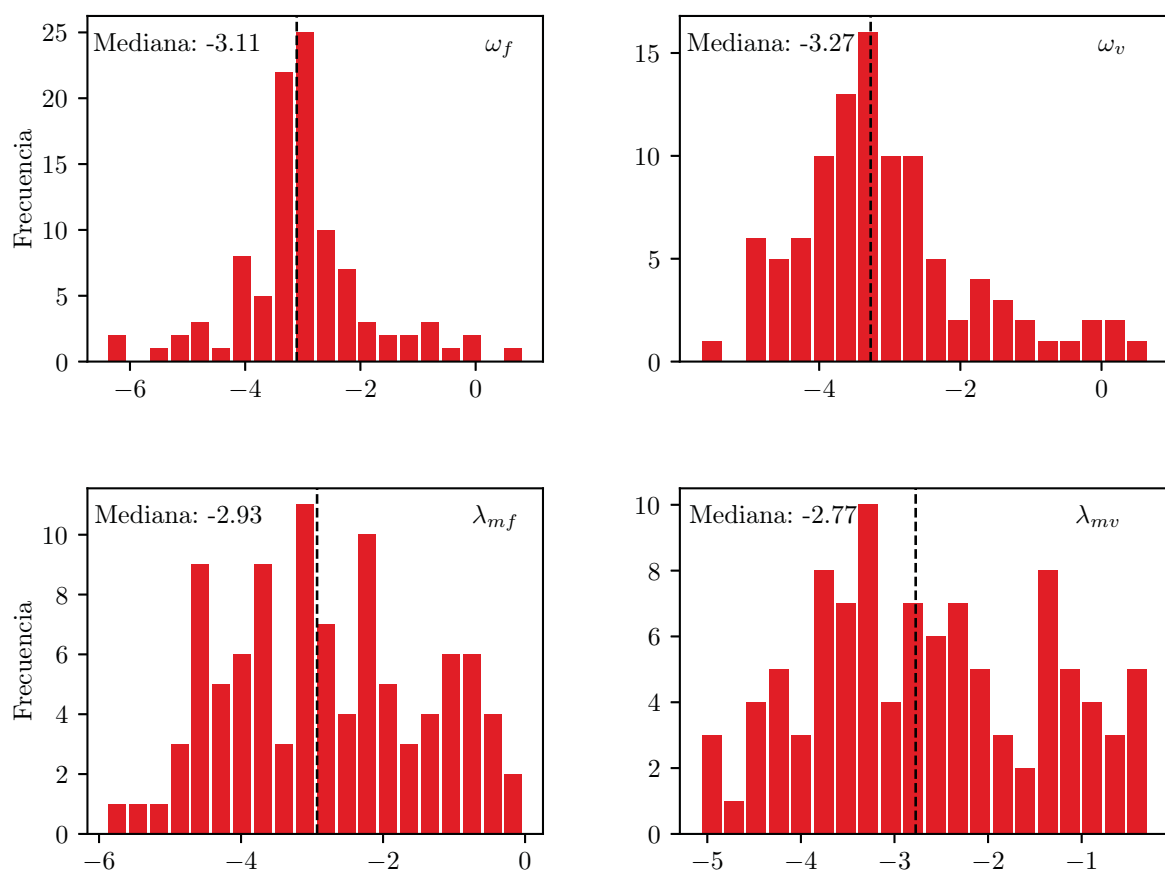


Figura 3.14: Histogramas de frecuencia del error relativo de los parámetros ajustados de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 2k$

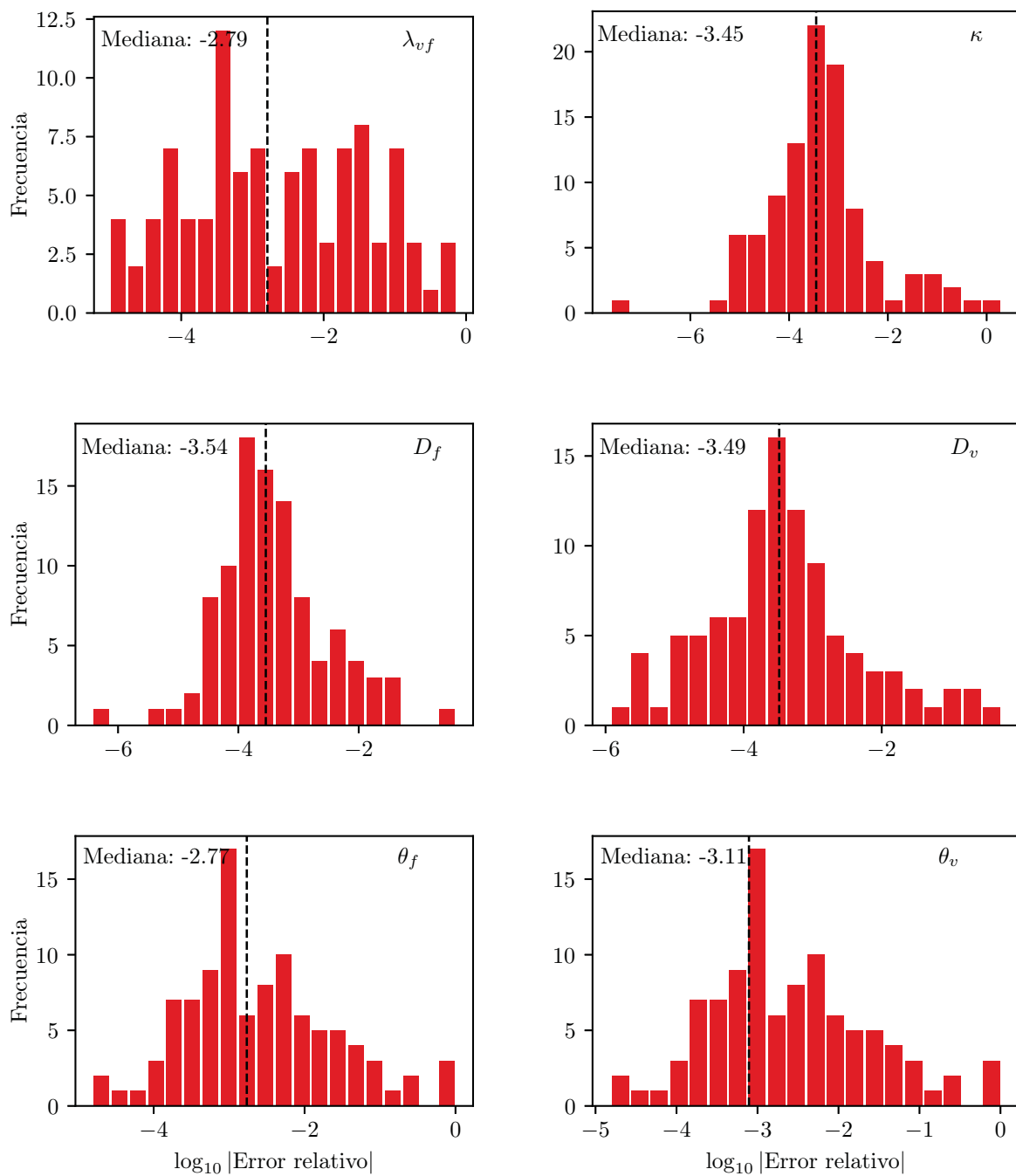


Figura 3.15: Histogramas de frecuencia del error relativo de los parámetros ajustados de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 2k$

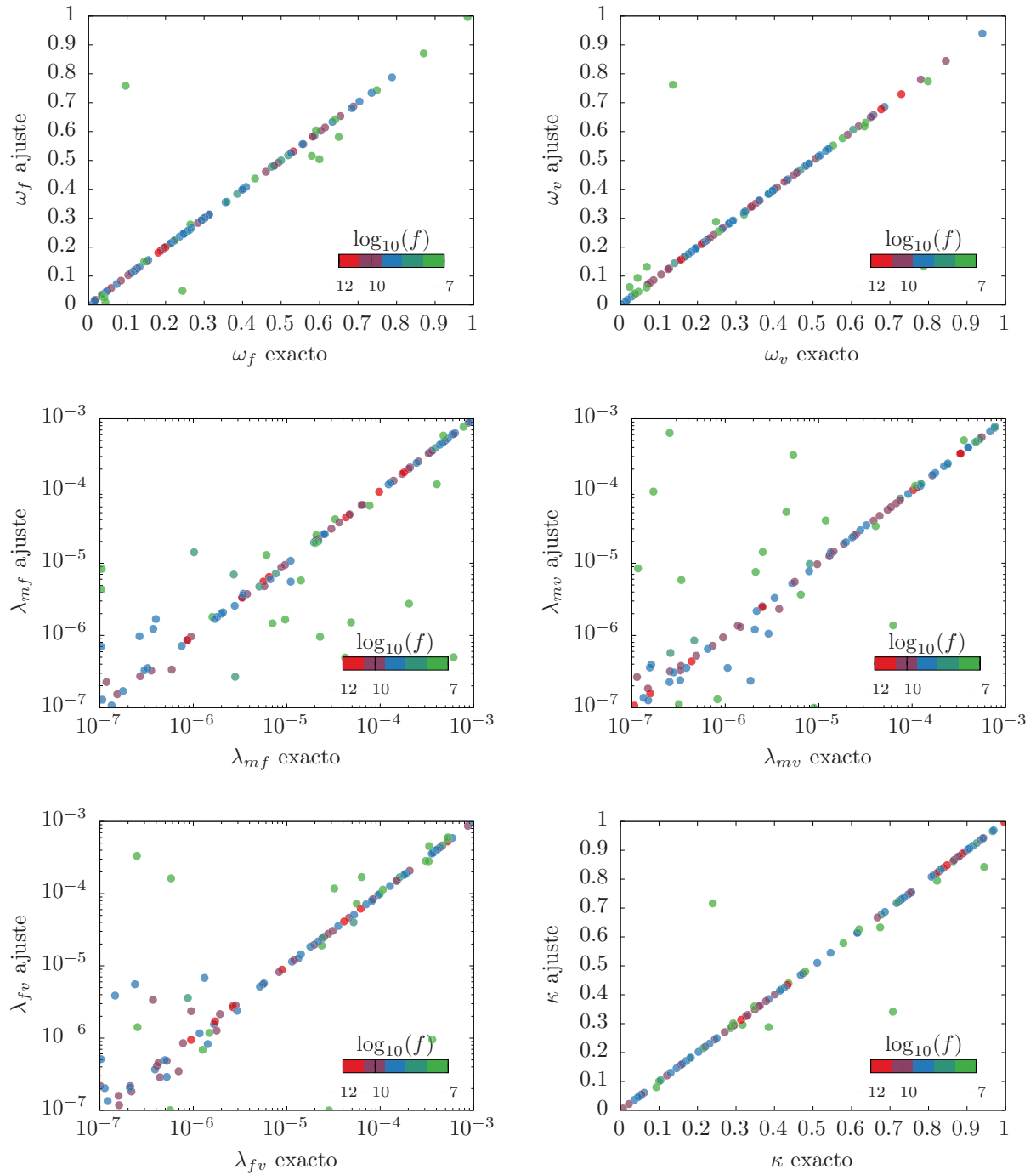


Figura 3.16: Comparación de los parámetros ajustados vs. los exactos de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 2k$. El color de cada punto representa el valor de función objetivo f_{obj}

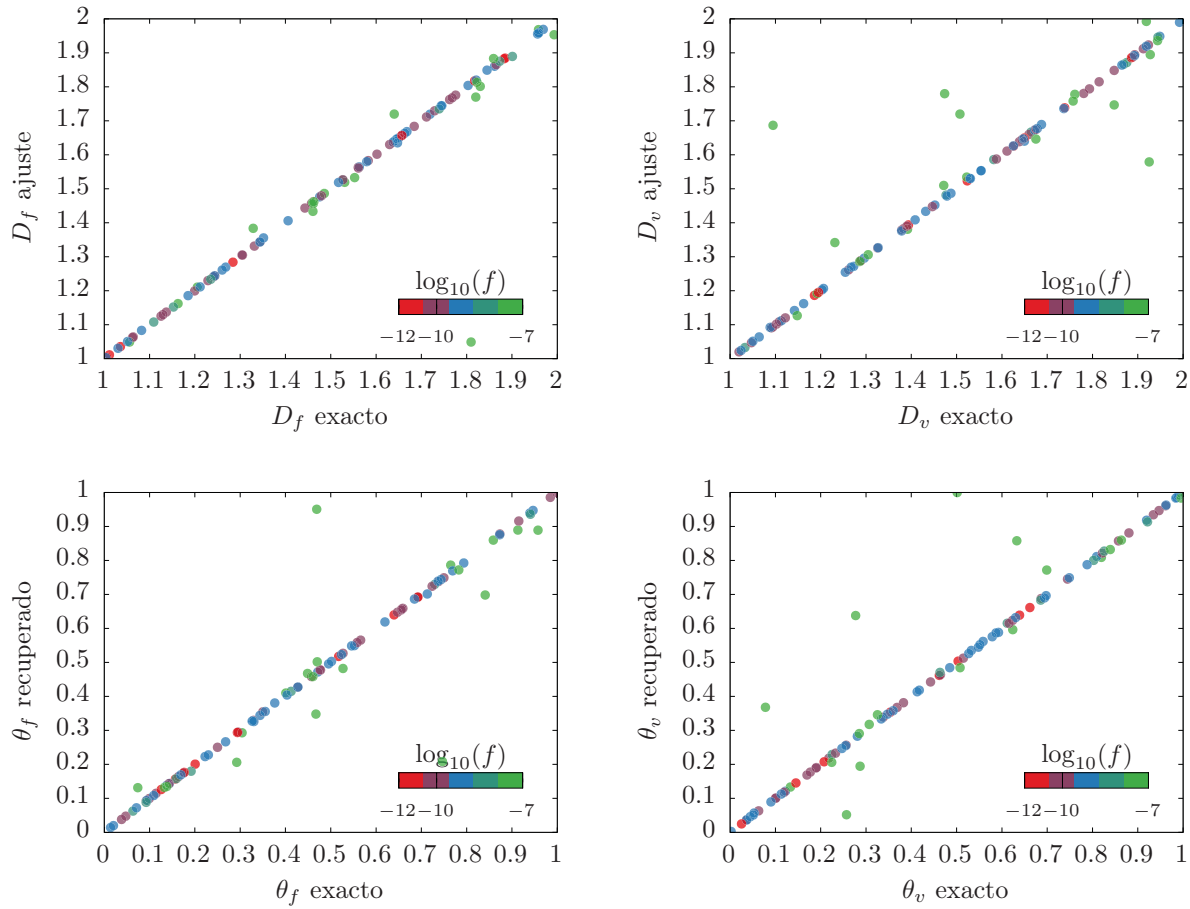


Figura 3.17: Comparación de los parámetros ajustados vs. los exactos de los 100 experimentos sintéticos para el modelo $3\phi - 2k$. El color de cada punto representa el valor de función objetivo f_{obj}

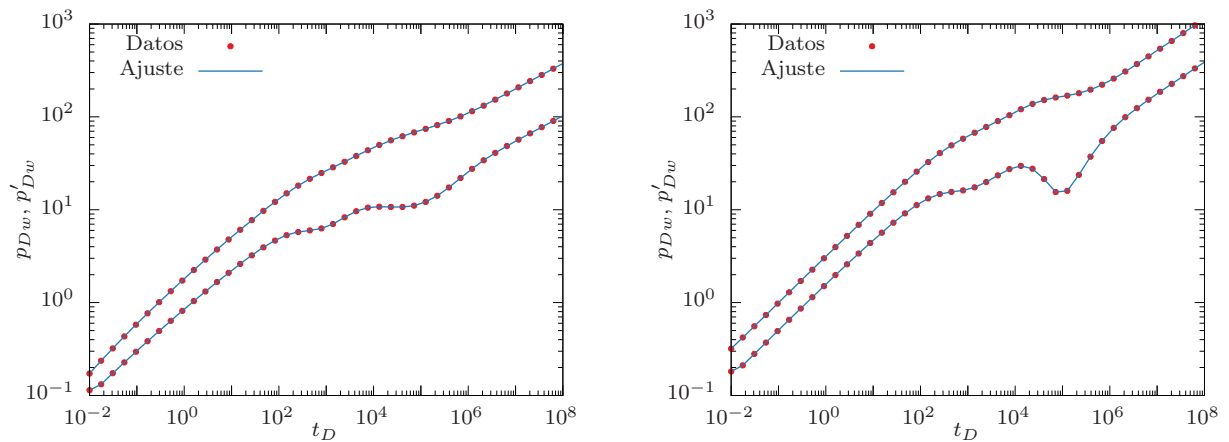


Figura 3.18: Ejemplos de ajustes del modelo $3\phi - 2k$

Capítulo 4

Ruido en los datos

Los datos de presión provenientes de instrumentos de medición en campo siempre contienen cierto nivel de ruido. Y en algunas ocasiones pueden contener diferentes tipos de ruido (*González-Tamez et al. (1999)*), como por ejemplo ruido blanco y ruido de truncamiento.

En el problema de identificación de parámetros que se quiere resolver en este trabajo, el ruido en los datos afecta principalmente el cálculo de la log-derivada ($dp/d \log t$), ya que como es conocido, el cálculo numérico de derivadas es un problema mal planteado, en el sentido de que pequeñas perturbaciones en los datos de entrada pueden llevar a grandes cambios en los resultados. Este problema puede observarse claramente en el siguiente ejemplo: supongamos que se tiene una medida de presión p_1 en $t_1 = 1hr$ y una segunda medida medida p_2 segundo después, es decir en $t_2 = 1.00028hr$, entonces la aproximación de la log-derivada usando diferencias finitas es:

$$\frac{dp}{d \log t} \approx \frac{p_2 - p_1}{\log t_2 - \log t_1}$$

Si cada medida de presión contiene cierto nivel de ruido ϵ , de forma que $p_{1,2} = \hat{p}_{1,2} + \epsilon_{1,2}$ donde \hat{p} es la presión sin ruido, entonces la aproximación a la derivada es:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d \log t} &\approx \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\log t_2 - \log t_1} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\log t_2 - \log t_1} \\ &= \hat{p}' + 8.3 \times 10^3 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \end{aligned}$$

donde el primer termino del lado derecho \hat{p}' es la aproximación a la log-derivada sin ruido y el segundo término representa el ruido en la log-derivada, es decir, el ruido en la derivada se amplifica por un factor de aproximadamente 10^4 .

Debido a la necesidad de usar la log-derivada en la función objetivo (3.1) y la sensibilidad que presenta al ruido se desarrollo un método para derivar de forma estable los datos de presión. Este método fue publicado en el artículo *Ramos et al. (2017)*.

El tema de la diferenciación numérica de datos con ruido ha sido estudiado extensivamente, por ejemplo *Knowles and Renka (2014)* muestran una revisión de diferentes clases de métodos para calcular derivadas numéricas. Este problema del ruido, es particularmente severo en datos de pruebas de pozo, donde la presión tiende a estabilizarse a tiempos largos y la resolución de los instrumentos de medición puede introducir ruido considerable.

Uno de los métodos más usados para el cálculo numérico de la log-derivada en datos de presión de pozo es el método de *Bourdet et al. (1989)*, donde: dado el parámetro L , la log-derivada en el dato i -ésimo se calcula con la fórmula:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_i \approx \frac{\frac{\Delta p_L}{\Delta x_L} \Delta x_R + \frac{\Delta p_R}{\Delta x_R} \Delta x_L}{\Delta x_R + \Delta x_L}$$

donde $x = \log t$, $\Delta p_L = p_i - p_{i-l}$, $\Delta p_R = p_{i+r} - p_i$, $\Delta x_L = x_i - x_{i-l}$, $\Delta x_R = x_{i+r} - x_i$ y los índices l, r se eligen de manera que Δx_L y Δx_R son las distancias mayores pero más cercanas L . Para controlar el grado de suavidad en el resultado se puede variar el valor de L , un valor pequeño mejora la precisión de la derivada, pero es más sensible al ruido, un valor grande reduce el ruido en la derivada pero se ve afectada la precisión. Por lo tanto elegir un valor adecuado de L podría ser importante.

Otra forma de calcular derivadas de datos con ruido es usar métodos variacionales con un término de suavizamiento que penalice soluciones con grandes oscilaciones. Este tipo de métodos se ha usado satisfactoriamente en diferentes campos de la ciencia [Cullum (1971); Chartrand (2011); Knowles and Wallace (1995); Knowles and Renka (2014) Cullum (1971); Chartrand (2011); Knowles and Wallace (1995); Knowles and Renka (2014)]

En particular Chartrand (2011) propone un método iterativo para calcular la derivada de una serie de datos usando variación total regularizada (Total Variation Regularization). Este tipo de métodos se usan en problemas de análisis de imágenes dónde la función a derivar o la derivada puede tener discontinuidades. Sin embargo, si presuponemos que tanto la función como su derivada son continuas se puede deducir un método más sencillo.

Suponemos que se tiene una serie de datos de entrada con cierto nivel de ruido $\{(x_i, p_i) | i = 1 \dots n\}$, y queremos calcular una aproximación a la derivada, que denotaremos con $u = dp/dx$ (se está usando el cambio de variable $x = \log t$). Si consideramos a $u = u(x)$ como una función a estimar, entonces se puede calcular como la función que minimiza el funcional:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_n} w(Au - y)^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{x_1}^{x_n} \beta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (4.1)$$

donde $y(x) = p(x) - p_1$, $Au(x) = \int_{x_1}^x u(x') dx'$ es un operador de anti-diferenciación, λ es el parámetro de regularización, $w(x)$ permite darle diferentes pesos a los datos y $\beta(x)$ permite darle diferentes pesos a la derivada. Versiones diferentes de este funcional se consideran en [Cullum (1971); Chartrand (2011); Knowles and Wallace (1995); Knowles and Renka (2014) Cullum (1971); Chartrand (2011); Knowles and Wallace (1995); Knowles and Renka (2014)].

Para calcular la función que minimiza el funcional (4.1) se calcula la derivada variacional respecto a u y se iguala a cero (el apéndice D muestra el detalle de la derivación) de donde se obtiene que la función u satisface la ecuación:

$$\lambda \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{du}{dx} \right) - A^T [w(Au - y)] = 0 \quad (4.2)$$

donde el operador A^T está definido por $A^T f(x) = \int_x^{x_n} f(x') dx'$. Para poder calcular la solución de esta ecuación diferencial se deben especificar condiciones de frontera. Si se conocen las derivadas en los extremos se pueden usar condiciones tipo Dirichlet, es decir: $u(x_1) = y'_1$ y $u(x_n) = y'_n$, donde y'_1 y y'_n se asumen conocidas. En datos de pruebas de pozo, y'_1 se puede conocer si hay presencia de almacenamiento en el pozo ($y'_1 \sim t$), y y'_n se puede conocer por ejemplo si el yacimiento es euclidiano, entonces la log-derivada tiende a estabilizarse a tiempos largos ($y'_n \sim 1$). Esta última condición también podría expresarse en forma de una condición de frontera tipo Neumann $u'(x_n) = 0$. Sin embargo las condiciones de frontera de Cauchy $u'(x) = \nu u$ podrían ser más apropiadas para datos donde se presentan comportamientos de ley de potencias, es decir si u es de la forma:

$$u = u_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^\nu$$

entonces:

$$\frac{du}{d \log t} = \nu u_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\nu-1} \frac{t}{t_0} = \nu u$$

En particular para yacimientos fracturados con geometría fractal se pueden usar este tipo de condiciones. Aunque los casos $\nu = 0$ y $\nu = 1$ también pueden representar flujo euclidiano radial y almacenamiento.

4.1. Solución numérica

La solución de la ecuación (4.2) se puede calcular con cualquier método numérico para ecuaciones diferenciales ordinarias, en este trabajo se usa el método de diferencias finitas. Recordamos que los datos están dados en los tiempos t_i y se usa el cambio de variable $x = \log t$, de donde se tienen los nodos $x_i = \log t_i$. Estos mismo nodos se pueden usar para discretizar la ecuación (4.2), sin embargo esto no es forzoso, si el instrumento de medición proporciona una cantidad muy grande de datos, se podría seleccionar un subconjunto de los datos x_i o definir nuevos nodos para discretizar (4.2) y reducir el número puntos donde se resuelve la ecuación diferencial.

Entonces, para calcular la solución de ecuación (4.2) se denotan de forma genérica los puntos de discretización con $\{\chi_i | i = 1 \dots m\}$ (estos nodos podrían ser los datos de observación o no).

Aplicando diferencias finitas centrales al operador de diferenciación y la regla del trapecio en los operadores de integración se tiene el sistema de ecuaciones lineales (El apéndice D muestra el detalle)

$$\begin{aligned}
 u_1 &= y'_1 && \text{si Dirichlet en } \chi_1 \\
 (1 + m(\chi_2 - \chi_1))u_1 - u_2 &= 0 && \text{si Cauchy en } \chi_1 \\
 a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} + [A^T(wAu)]_i &= [A^T(wy)]_i && i = 2 \dots n_\chi - 1 \\
 u_m &= y'_m && \text{si Dirichlet en } \chi_m \\
 u_{n-1} - (1 - \nu(\chi_m - \chi_{m-1}))u_m &= && \text{si Cauchy en } \chi_m
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Los coeficientes a_i, b_i, c_i son:

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{-2\lambda\beta_{1-1/2}}{(\chi_{i+1} - \chi_{i-1})(\chi_i - \chi_{i-1})} \\
 c_i &= \frac{-2\lambda\beta_{1+1/2}}{(\chi_{i+1} - \chi_{i-1})(\chi_i - \chi_{i-1})} \\
 b_i &= -a_i - c_i
 \end{aligned}$$

La notación $[A^T(wAu)]_i$ y $[A^T(wy)]_i$ es una notación corta de:

$$\begin{aligned}
 [A^T(wAu)]_i &= \int_{\chi_i}^{\chi_m} w(x) \left(\int_{\chi_1}^x u(x') dx' \right) dx \\
 [A^T(wy)]_i &= \int_{\chi_i}^{\chi_m} w(x) y(x) dx
 \end{aligned}$$

Usando la regla del trapecio para aproximar las integrales, los operadores A y A^T se pueden expresar en términos de matrices \mathbf{A} y \mathbf{A}^T respectivamente, (en el apéndice D se dan expresiones explícitas de estos operadores), por lo tanto el sistema (4.3) se puede expresar de forma matricial como:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{d} \tag{4.4}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ es el vector de log-derivadas en los nodos χ_i , \mathbf{D} es la matriz tridiagonal donde cada renglón está dado por los coeficientes a_i, b_i y c_i . \mathbf{W} es una matriz diagonal dada por $W_{ii} = w(\chi_i)$, $\mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$.

La solución del sistema lineal (4.3) o (4.4) se puede realizar usando un método directo si el número de nodos m es pequeño, digamos menor a 1000. Si por el contrario el número de nodos es mayor se puede usar un método iterativo. En particular se ha probado el método Bi-CGSTAB (*Van der Vorst (1992)*) con buenos resultados. En el apéndice (D) se describe un método para calcular el producto matriz-vector

$(\mathbf{D} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{v}$ sin ensamblar la matriz de forma explícita. Lo cual es útil para usar el método Bi-CGSTAB y permite resolver el sistema de forma rápida ya que la operación matriz-vector puede hacerse en el orden de $\mathcal{O}(m)$ operaciones.

Una vez que se obtiene la derivada \mathbf{u} , también se pueden obtener los datos sin ruido \mathbf{p} usando integración, en términos matriciales, esto se puede calcular con la ecuación:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{u} + p_1 \mathbf{1} \quad (4.5)$$

donde \mathbf{T} es la matriz diagonal con $T_{ii} = e^{\lambda t_i}$ y $\mathbf{1}$ es el vector con 1's en todas sus entradas.

4.2. Ejemplo 1: prueba de bombeo en un acuífero ideal

Para mostrar la aplicación del método se generan datos de descenso de nivel (s) en un pozo de un acuífero. Estos datos se generan usando la aproximación de *Srivastava and Guzman-Guzman* (1998) a la función de de pozo de *Theis* (1935). Se generan 100 datos en tiempos aumentando exponencialmente entre 10^{-4} y 1 día. Para evaluar la función de pozo se considera una transmisividad de $500 \text{ m}^2/d$, coeficiente de almacenamiento 0.01 y un gasto de $1728 \text{ m}^3/d$. Los descensos s se contaminaron con ruido aleatorio uniforme en el intervalo $[-0.05, 0.05]$.

La figura (4.1) muestra los datos (puntos cafés), también se muestra la aproximación a la log-derivada usando el método de Bourdet considerando $\Delta \log t_i = \log t_{i+2} - \log t_{i-2}$ (puntos verdes) y $\Delta \log t = \log t_{i+4} - \log t_{i-4}$ (puntos azules). En la misma gráfica se muestra la log-derivada (s') y los descensos integrados (s) resultado de aplicar el método variacional usando $\lambda = 0.001$ (línea punteada) y $\lambda = 0.25$ (línea continua). Los resultados muestran que valores pequeños de λ generan una log-derivada más afectada por el ruido. Lo cual es de esperarse debido a que el primer término del funcional (4.1) toma más importancia y por lo tanto la log-derivada tenderá a ajustar el ruido presente en los datos. Si se elije un valor mayor de λ el segundo término del funcional (4.1) tenderá a influir más en el resultado generando una log-derivada más suavizada. Este resultado ilustra la importancia de encontrar un valor adecuado de λ , aunque en la práctica no se requiere un valor preciso.

Para entender mejor el efecto de λ se calcula la log-derivada usando 100 valores de λ en el intervalo $[10^{-5}, 10^3]$. Por cada valor de λ se calcula el error cuadrático medio ($RMSE'$) entre la log-derivada aproximada con el método variacional y la log-derivada exacta. También se calcula el error cuadrático medio ($RMSE$) entre el descenso resultado de integrar la derivada con la ecuación (4.5) y el descenso exacto. Las ecuaciones de los errores son:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \hat{s}_i)^2} \quad (4.6)$$

$$RMSE' = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s'_i - \hat{s}'_i)^2} \quad (4.7)$$

donde \hat{s} y \hat{s}' son los descensos y la log-derivada exactas y s' es la log-derivada obtenida con el método variacional y s es el descenso obtenido de integrar s' . La figura (4.2a) muestra los errores respecto al parámetro λ se puede observar que hay un valor donde los errores son mínimos, el mínimo de $RMSE$ está en $\lambda = 0.083$ y el mínimo de $RMSE'$ en $\lambda = 0.25$. En casos reales no es posible calcular el $RMSE$ por lo que encontrar el valor adecuado de λ se debe hacer usando otro tipo de estrategia. El método más sencillo podría ser prueba y error.

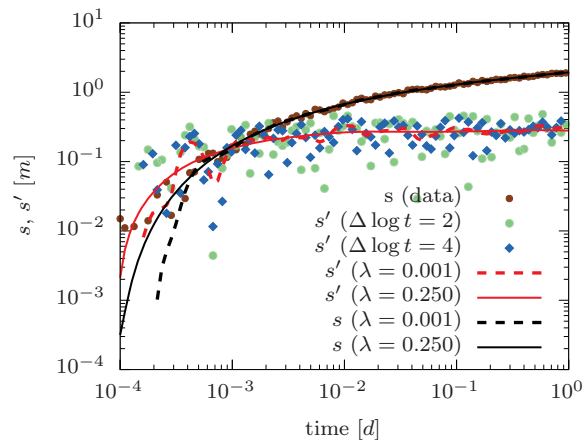


Figura 4.1: Cálculo de la log-derivada (s'). Bourdet (puntos). Variacional (líneas) usando diferentes valores del parámetro de regularización.

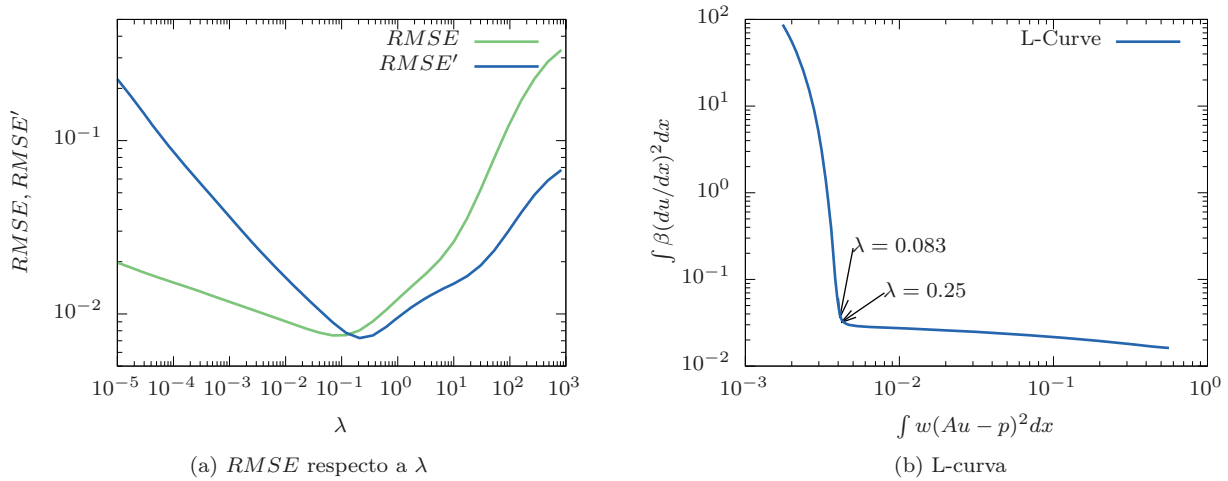


Figura 4.2: $RMSE$ y L-curva del ejemplo 1.

Otro método usual para calcular una estimación de λ es la L-curva (*Neuman and De Marsily (1976); Castellanos et al. (2002)*). Este método consiste en graficar en escala log-log los dos principales términos del funcional (4.1), es decir el criterio de suavizado $1/2 \int \beta(du/dx)^2 dx$ contra el criterio de ajuste $1/2 \int w(Au - y)^2 dx$. Se espera que la curva generada de esta forma tenga una forma de "L", de ahí su nombre. El valor óptimo para λ será el valor donde se produce la máxima curvatura de esta curva, es decir, la esquina de la "L". La gráfica de la L-curva para este ejemplo se muestra en la figura (4.2b), donde se puede observar claramente la forma de "L", los valores $\lambda = 0.083$ y 0.25 donde se minimizan los errores corresponden a puntos muy cerca de la esquina. En la práctica este método se puede usar para obtener valores adecuados de λ sin tener que ser preciso ya que este ejemplo muestra que se podría usar $\lambda = 0.083$ o 0.25 .

4.3. Ejemplo 2: prueba de pozo en un yacimiento $3\phi - 2k$

En este ejemplo se generan 5000 datos sintéticos de presión de pozo sin dimensiones en el intervalo $t_D \in [1, 10^8]$. Los tiempos se generan distribuidos exponencialmente. Los parámetros para resolver el modelo son: $\omega_f = 0.00100903$, $\omega_v = 0.189647$, $\lambda_{mf} = 2.31013e-08$, $\lambda_{vf} = 5.3367e-07$, $\lambda_{mv} = 5.3367e-07$, $\kappa = 0.95867$, $C_D = 1.82366$, $s_v = s_f = 1$, $\alpha_{mf} = \alpha_{mv} = \alpha_{fv} = 1$, la presión generada se contamina con ruido Gaussiano con desviación estándar de 0.0025 y media cero. La figura (4.3) muestra los datos en puntos cafés.

El valor de λ se calcula usando el método de la L-curva (ver figura 4.4b) dando un valor de $\lambda = 0.0057$ cuyo valor se verifica usando el $RMSE'$. La figura (4.4a) muestra la gráfica del $RMSE$ y $RMSE'$ con respecto a λ , el valor mínimo del $RMSE'$ se localiza en $\lambda = 0.0057$.

La figura (4.3) muestra el resultado de la log-derivada con el valor $\lambda = 0.0057$ dado por la L-

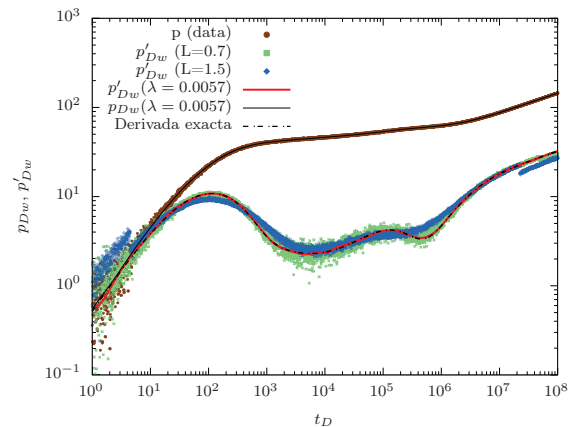
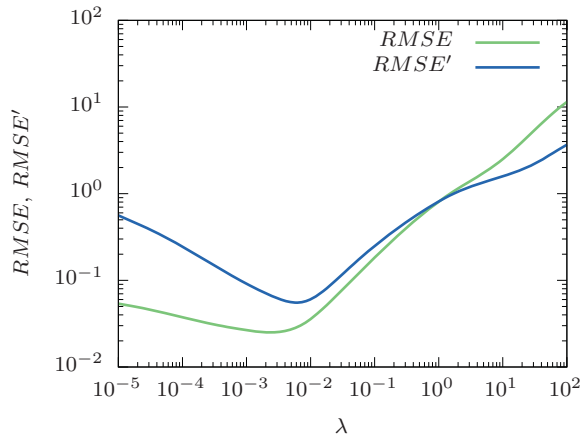
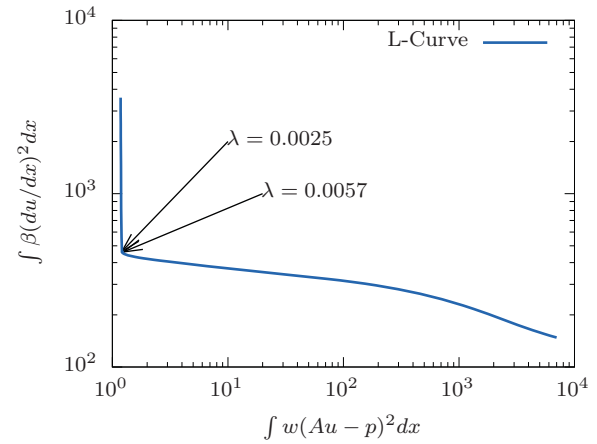


Figura 4.3: Log-derivada (p'_{Dw}). Bourdet (puntos verdes $L = 0.7$ y azules $L = 1.5$) y variacional (línea roja $\lambda = 0.0057$)

curva (línea roja). Para efectos de comparación también se muestra la derivada calculada con el método de Bourdet usando $L = 0.7$ y 1.5 . La log-derivada de Bourdet con $L = 0.7$ (puntos verdes) sigue mostrando ruido significativo y con $L = 1.5$ (puntos azules) el suavizamiento comienza a eliminar propiedades importantes de la log-derivada, como es el valle que está entre los tiempos 10^5 y 10^6 .



(a) $RMSE$ y $RMSE'$ los mínimos están localizados en $\lambda = 0.0025$ y 0.0057 respectivamente.



(b) L-curva para los datos del ejemplo 2.

Figura 4.4: $RMSE$ y L-curva del ejemplo 2.

Capítulo 5

Casos de campo

Para probar los algoritmos se realizan ajustes de datos de campo. Los siguientes casos se eligieron debido a que la log-derivada (y la presión) muestran un comportamiento que podría ser considerado como ley de potencias. Lo cual indica que el modelo fractal puede servir para ajustar los datos.

Dos de los datos que se muestran a continuación se han reportado en la literatura, uno se obtiene del trabajo de *Flamenco-Lopez et al.* (2003) y se denotará como Caso 1. Otra prueba se obtiene de la gráfica 6.6 del trabajo de *Ajayi* (2007), esta prueba se denota como Caso 2. Y finalmente se tiene acceso a otra prueba que simplemente se denota con Caso 3.

En todos estos casos se utiliza el mismo método de optimización global descrito en la sección (3.2) y con la misma configuración de los ejemplos sintéticos (3.4). Con la diferencia de que ahora se incluyen 4 parámetros más en la optimización: el almacenamiento en el pozo C_D , daño o skin s y los parámetros de cambio de dimensiones α_t y α_p .

En cada caso se detiene el optimizador cuando se realizan 50,000 evaluaciones de la función objetivo.

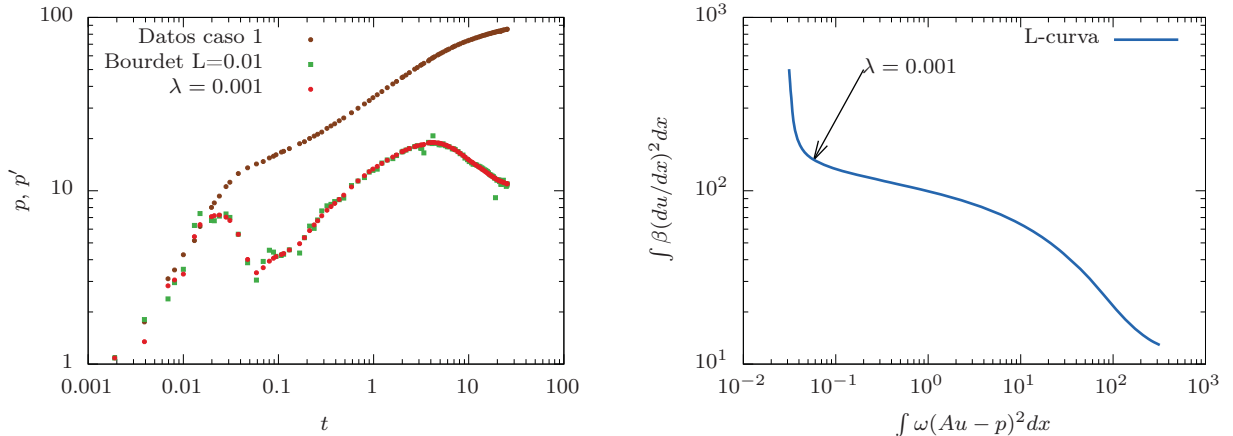
5.1. Caso 1

Los datos para el Caso 1 se muestran en la figura (5.1a). *Flamenco-Lopez et al.* (2003) indican que los datos provienen de un yacimiento naturalmente fracturado en México con un acuífero subyacente, una matriz cristalina con aproximadamente 3% de porosidad y 0.01 *md* de permeabilidad, conteniendo micro y macro fracturas y vóculos. Los datos están en unidades de horas [*hrs*] para el tiempo y libras sobre pulgadas cuadradas [*psi*] para el cambio de presión.

La gráfica (5.1a) muestra los datos y la log-derivada usando el método de Bourdet (puntos verdes) con $L = 0.01$, en la misma gráfica se muestra la log-derivada obtenida con el método variacional descrito en el capítulo (4) (puntos rojos). El valor del parámetro de regularización $\lambda = 0.001$ se elige usando la L-curva (figura 5.1b).

Los datos se ajustan usando los tres modelos de flujo descritos en la sección (3.4). Es decir, se ajusta el modelo de doble porosidad una permeabilidad ($2\phi - 1k$), el modelo de triple porosidad una permeabilidad ($3\phi - 1k$) y el modelo de triple porosidad doble permeabilidad ($3\phi - 2k$).

La gráfica (5.2) muestra los 3 ajustes y la tabla (5.1) los parámetros de ajuste de cada modelo. Se observa que el modelo ($2\phi - 1k$) es el que menos ajusta los datos (línea roja). Los otros dos ajustes se ven muy similares. Esto se confirma en la tabla (5.1) donde la función objetivo final (f_{obj}) es similar entre estos dos modelos. Si se gráfica la presión y log-derivada para tiempos mucho mayores (gráfica 5.3) se puede observar el comportamiento de ley de potencias en la log-derivada.



(a) Datos del Caso 1 (puntos negros), log-derivada usando Bourdet (puntos verdes) y el método variacional (puntos rojos)

(b) L-curva para los datos del Caso 1.

Figura 5.1: Datos del caso 1 y L-curva para calcular el parámetro de regularización.

Para los modelos $2\phi - 1k$ y $3\phi - 1k$ se asume de forma implícita que $\kappa = 1$, además si consideramos que el almacenamiento esta principalmente en la matriz ($\omega_m > \omega_f, \omega_v$) el exponente de la ley de potencias a tiempos largos se puede aproximar con la ecuación (ver apéndice A.2):

$$\nu_f = \frac{2 - D_f + \theta_f}{4 - D_f + \theta_f}$$

Para el modelo $3\phi - 2k$ se tiene $\kappa \approx 0$, por lo tanto se espera que el flujo sea principalmente en la red de vórgulos, además el almacenamiento está principalmente en la matriz, entonces la ley de potencias se obtiene con los parámetros fractales de los vórgulos:

$$\nu_v = \frac{2 - D_v + \theta_v}{4 - D_v + \theta_v}$$

Para comparar los resultados del modelo asintótico se calcula el exponente de la ley de potencias de los ajustes. Para esto, se calcula la log-derivada a tiempos muy grandes y se ajusta el modelo ($p'(t) = at^\nu$) en los puntos en el intervalo $t \in [10^4, 10^6]$, de este modo se obtiene el exponente ν del ajuste. La gráfica (5.3) muestra la log-derivada de los ajustes hasta tiempos $t = 10^7$ y los puntos que se usan para calcular el exponente de la ley de potencias.

La tabla (5.2) muestra el valor del exponente de la ley de potencias en la log-derivada calculada con a partir del modelo asintótico y a partir de los ajustes.

El modelo $2\phi - 1k$ presenta un daño muy alto, $s = 50$ que es el límite de este parámetro en la optimización, lo cual indica que posiblemente se mejore la función objetivo si se permiten valores más grandes de s . Sin embargo se debería considerar si un valor grande para el daño es físicamente posible en este caso. Con la información que se tiene de los datos no es posible responder este cuestionamiento.

De los otros dos ajustes y con la información disponible, tampoco es sencillo decidir cual representa mejor los datos. En términos de la función objetivo, después de 50,000 evaluaciones en la optimización, el modelo $3\phi - 1k$ es el que menor función objetivo tiene con $f_{obj} = 0.3470$, pero el modelo $3\phi - 2k$ tiene un valor prácticamente igual $f_{obj} = 0.3472$. Debido a los valores de κ se puede decir que en ambos modelos el flujo se mueve en un solo medio, por las fracturas en el modelo $2\phi - 1k$ y por los vórgulos en $3\phi - 2k$. El comportamiento a tiempos grades de ambos modelos también es similar (figura 5.3).

La gráfica (5.3) muestra también el ajuste a ley de potencias de los datos en el intervalo $t \in [0.3, 2.0]$, obteniendo $p' \sim t^{0.43}$. El valor del exponente esta cercano a los exponentes de la ley de potencias de los ajustes de los modelos. El modelo $3\phi - 1k$ es que tiene el exponente mas cercano.

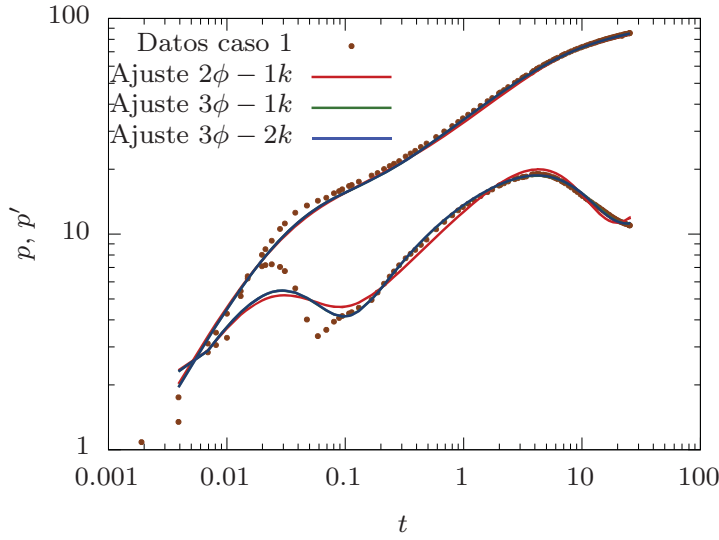


Figura 5.2: Ajustes del Caso 1 usando los modelos $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$

| Parámetro | $2\phi - 1k$ | $3\phi - 1k$ | $3\phi - 2k$ |
|----------------|--------------|--------------|--------------|
| ω_f | 0.49 | 0.012 | 0.22 |
| ω_v | (0) | 0.076 | $3.28e-6$ |
| λ_{mf} | $7.5e-6$ | $1.13e-6$ | $3.11e-8$ |
| λ_{mv} | (0) | $2.18e-7$ | $5.97e-9$ |
| λ_{vf} | (0) | $6.44e-5$ | $2.64e-6$ |
| κ | (1) | (1) | $5.85e-8$ |
| D_f | 1.19 | 1 | 1.79 |
| θ_f | 1 | 0.61 | 1 |
| D_v | (2) | (2) | 1.13 |
| θ_v | (0) | (0) | 0.45 |
| C_D | 0.44 | 2.24 | 32.13 |
| s | 50 | 0.016 | 0.85 |
| a_t | 1051.57 | 7023.5 | 255625 |
| a_p | 4.23 | 5.51 | 14.84 |
| f_{obj} | 0.4786 | 0.3470 | 0.3472 |

Tabla 5.1: Parámetros de ajuste del Caso 1

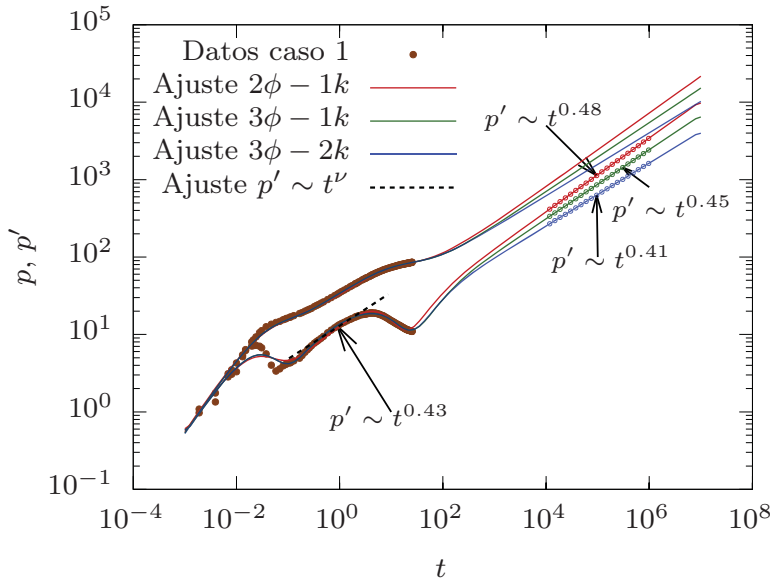


Figura 5.3: Ajustes incrementando el tiempo hasta observar la ley de potencias

| Modelo | $\hat{\nu}$ | ν |
|--------------|-------------|-------|
| $2\phi - 1k$ | 0.47 | 0.48 |
| $3\phi - 1k$ | 0.45 | 0.45 |
| $3\phi - 2k$ | 0.40 | 0.41 |

Tabla 5.2: Exponente de la ley de potencia a tiempos grandes. $\hat{\nu}$: modelo asintótico ν : ajuste ley de potencias

5.2. Caso 2

Los datos del Caso 2 se extraen directamente de la imagen de la figura 6.6 del trabajo de *Ajayi* (2007). Para extraer los datos se usa el software *Engauge Digitizer Software* (2020).

Los datos corresponden al pozo TW102, el tiempo está dado en horas [*hrs*] y la presión en libras spre pulgada cuadrada [*psi*]. *Ajayi* menciona que los datos de presión fueron corregidos por dispersión e inconsistencias, por lo tanto se asume que los datos ya tienen algún tipo de pre-procesamiento. Además del error ya contenido en los datos el proceso de extracción de los datos de la imagen introduce otro error debido a la resolución de la imagen y la precisión con la que se detectan los puntos.

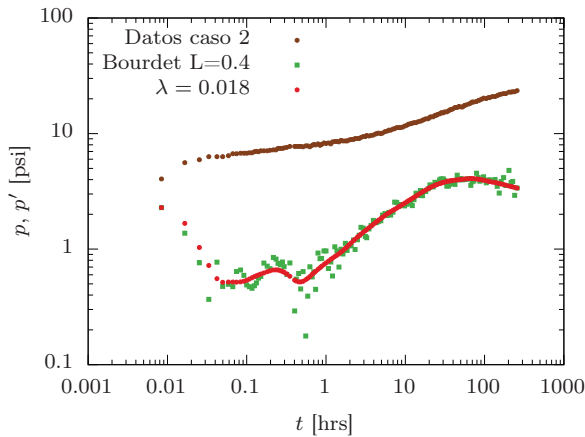
La gráfica (5.4a) muestra los datos y la log-derivada. Para efecto de comparación se muestra la log-derivada usando Bourdet con $L = 0.4$ y el método variacional con $\lambda = 0.018$. El valor de λ se escoge usando el método de la L-curva (5.4b). Es importante notar que la log-derivada muestra dos valles con el método variacional, resultado que con el método de Bourdet no es claro.

Los datos se ajustan usando los tres modelos $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$ y los resultados se muestran en la figura (5.5) y los parámetros de ajuste en la tabla (5.3). Como se observa en la gráfica (5.5) el modelo $2\phi - 1k$ es el que menos representa los datos ya que la log-derivada del ajuste no representa los dos valles de la log-derivada de los datos, los otros dos modelos ajustan los datos de forma similar.

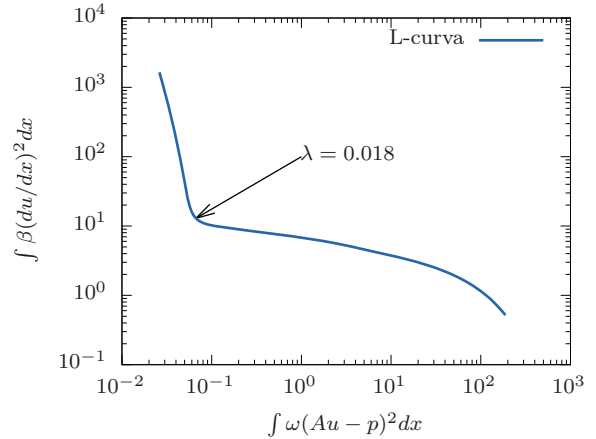
El parámetro κ del modelo $3\phi - 2k$ indica que el flujo esta dominado por los vùgulos, caso contrario al modelo $3\phi - 1k$ en el cual el flujo es sùlo a través de las fracturas.

La pendiente a tiempos largos de la log-derivada se calcula de la misma forma que en el Caso 1, dando como resultado los valores de la tabla (5.4). Se puede ver que la pendiente del modelo asintòtico y la pendiente calculada directamente en la gràfica coinciden. en este caso la ley de potencias en el ajuste (a tiempos grandes) es la misma entre los modelos de triple porosidad, ya que ambos tiene un comportamiento de $p' \sim t^{0.3}$.

De la misma forma que en el Caso 1, el ajuste del modelo $3\phi - 2k$ muestra que el flujo va de forma casi exclusiva en vùgulos al tener una valor $\kappa = 0.044$ y el modelo $3\phi - 1k$ indica que el flujo es exclusivamente en fracturas ya que $\kappa = 1$.



(a) Datos del Caso 2 (puntos negros), log-derivada usando Bourdet (puntos verdes) y el método variacional (puntos rojos).



(b) L-curva para los datos del Caso 2.

Figura 5.4: Datos del Caso 2 y L-curva para calcular el paràmetro de regularizaci3n.

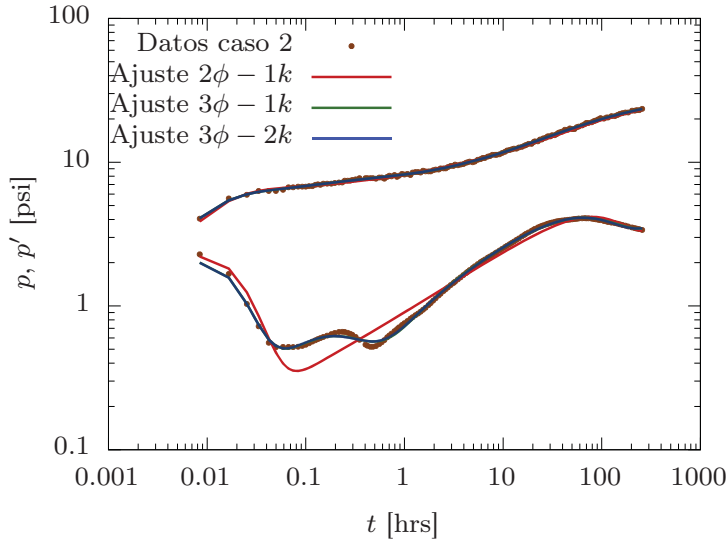
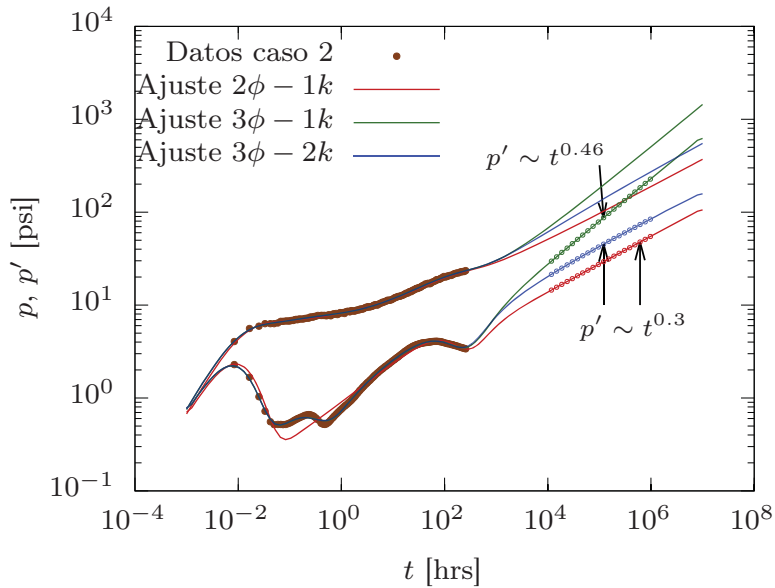


Figura 5.5: Ajustes del Caso 2 usando los modelos $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$

| Parámetro | $2\phi - 1k$ | $3\phi - 1k$ | $3\phi - 2k$ |
|----------------|--------------|--------------|--------------|
| ω_f | 0.95 | 0.14 | 0.26 |
| ω_v | (0) | 0.12 | 0.17 |
| λ_{mf} | $2.8e-7$ | $4.50e-6$ | $8.2e-08$ |
| λ_{mv} | (0) | $1.72e-5$ | $1.74e-5$ |
| λ_{vf} | (0) | $2.64e-3$ | $2.92e-3$ |
| κ | (1) | (1) | 0.044 |
| D_f | 1.15 | 1 | 1.71 |
| θ_f | 0 | 0.69 | 0.46 |
| D_v | (2) | (2) | 1 |
| θ_v | (0) | (0) | 0.82 |
| C_D | 0.064 | $7.3e-3$ | $8.98e-3$ |
| s | 50 | 50 | 50 |
| a_t | 367.04 | 49.90 | 61.48 |
| a_p | 8.1058 | 8.47 | 8.47 |
| f_{obj} | 0.8241 | 0.0373 | 0.0355 |

Tabla 5.3: Parámetros de ajuste del Caso 2



| Modelo | $\hat{\nu}$ | ν |
|--------------|-------------|-------|
| $2\phi - 1k$ | 0.30 | 0.30 |
| $3\phi - 1k$ | 0.46 | 0.46 |
| $3\phi - 2k$ | 0.30 | 0.31 |

Tabla 5.4: Exponente de la ley de potencias a tiempos grandes. $\hat{\nu}$: modelo asintótico
 ν : ajuste de ley de potencias

Figura 5.6: Ajustes incrementando el tiempo hasta observar ley de potencias.

5.3. Caso 3

En este caso solo se conocen los valores de tiempo y presión y el tiempo de producción antes de la prueba. La figura (5.7a) muestra los datos de presión y log-derivada para efectos de comparación la derivada de Bourdet se muestra con $L = 0.1$, en este caso el método de Bourdet podría ser suficiente para calcular la log-derivada ya que puede reducir significativamente el ruido.

A diferencia de los ejemplos anteriores, el número de datos en este caso es considerablemente grande teniendo 34,657 valores de tiempo y presión. Para obtener resultados del ajuste en un tiempo de cálculo aceptable (cercano a 30 minutos) se reduce el número de datos.

La reducción de los datos consisten en seleccionar un subconjunto de los datos de forma que el espaciamiento entre dos tiempos crezca exponencialmente. Asumiendo que el intervalo de tiempo entre dos datos seguidos es el mismo, la selección puede hacerse sobre los índices de los tiempos. Por ejemplo si se tiene $N \gg 1$ número total de datos con índices $i = 1, \dots, N$ y se quiere seleccionar un número n ($n \ll N$) de datos, se eligen los índices i de la serie completa de la siguiente forma:

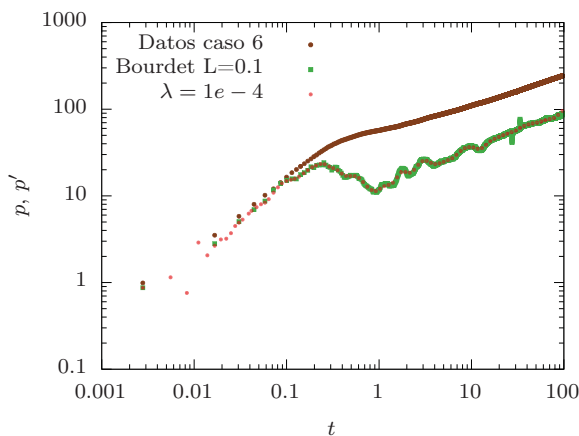
$$i = \left\lfloor \exp \left((j-1) \frac{\log N - \log 1}{n-1} \right) \right\rfloor \quad j = 1 \dots n$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función que regresa el entero menor más cercano al argumento. Cuando dos índices j diferentes generen el mismo índice i se selecciona el índice $i + 1$. En este caso se usa el valor $n = 100$.

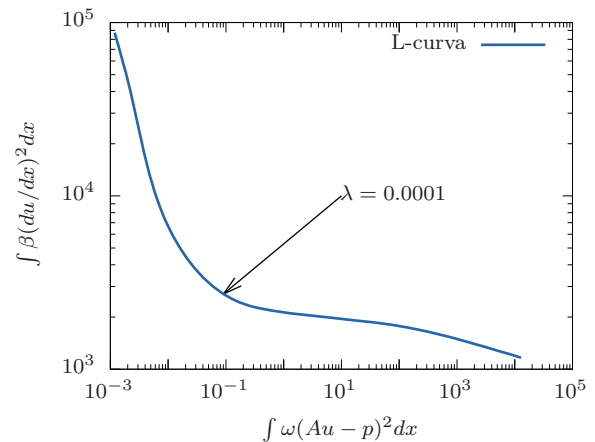
La gráfica (5.7a) muestra los datos de presión y tiempo completos (puntos cafés) la log-derivada calculada con el método de Bourdet (puntos verdes) y con el método variacional (puntos rojos). La selección del parámetro de regularización $\lambda = 5.24e - 3$ se hizo con la L-curva (ver figura 5.7b). Los puntos rojos de la log-derivada indican también los datos que se seleccionaron para ajustar.

Los datos reducidos se ajustan usando los tres modelos $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$. Las gráficas de los ajustes se muestran en la figura (5.8) y los parámetros resultado de los ajustes se muestran en la tabla (5.5).

El exponente de la ley de potencias a tiempos largos de la log-derivada se calcula de forma similar a los casos anteriores, dando como resultado los valores de la tabla (5.6). Se puede ver que la pendiente del modelo asintótico y la pendiente calculada directamente en la gráfica coinciden.



(a) Datos del Caso 3 (puntos cafés), log-derivada usando Bourdet (puntos verdes) y método variacional (puntos rojos)



(b) L-curva para los datos del Caso 3.

Figura 5.7: Datos del caso 3 y L-curva para calcular el parámetro de regularización.

En este caso las oscilaciones en la log-derivada (en los datos) tienen un periodo muy corto, lo que hace pensar que se deben a ruido en el proceso de medición y no a una característica del yacimiento. Como se puede observar en la gráfica (5.8) ninguno de los tres modelos pudo reproducir alguna de estas oscilaciones.

A simple vista la gráfica (5.8) muestra que los ajustes de los tres modelos representan los datos de una forma similar, la diferencia más perceptible en el modelo $3\phi - 2k$ sucede a tiempos muy grandes donde la ley de potencias de éste modelo muestra un exponente ligeramente menor. (figura 5.9).

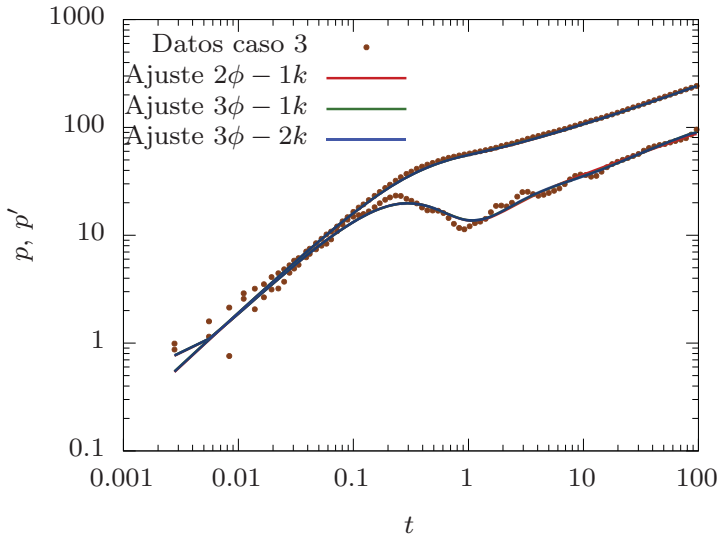


Figura 5.8: Ajustes del Caso 3 usando los modelos $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$

| Parámetro | $2\phi - 1k$ | $3\phi - 1k$ | $3\phi - 2k$ |
|----------------|--------------|--------------|--------------|
| ω_f | 0.28 | 0.35 | 0.024 |
| ω_v | (0) | 0.42 | 0.63 |
| λ_{mf} | 6.29e-6 | 1.11e-7 | 1.83e-3 |
| λ_{mv} | (0) | 4.48e-8 | 1e-9 |
| λ_{vf} | (0) | 1.74e-6 | 9.95e-3 |
| κ | (1) | (1) | 1 |
| D_f | 1 | 1 | 1 |
| θ_f | 0.26 | 0.24 | 0.0635 |
| D_v | (2) | (2) | 1.47 |
| θ_v | (0) | (0) | 0.97 |
| C_D | 140.9 | 201.10 | 1.035 |
| s | 49.53 | 1.36 | 7.75e-4 |
| a_t | 92762.9 | 150475 | 21.78 |
| a_p | 3.35 | 3.67 | 0.11 |
| f_{obj} | 0.6556 | 0.6445 | 0.6422 |

Tabla 5.5: Parámetros de ajuste del Caso 3.

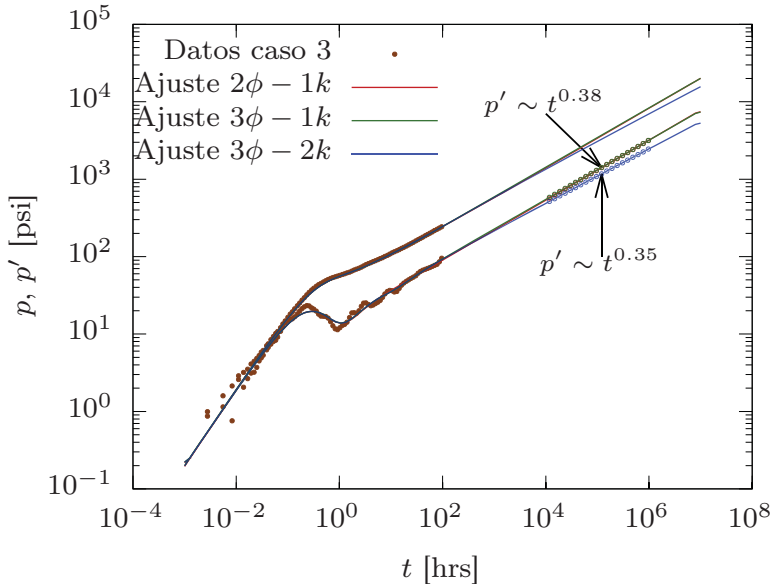


Figura 5.9: Ajustes a tiempos grandes

| Modelo | $\hat{\nu}$ | ν |
|--------------|-------------|-------|
| $2\phi - 1k$ | 0.39 | 0.38 |
| $3\phi - 1k$ | 0.38 | 0.38 |
| $3\phi - 2k$ | 0.35 | 0.35 |

Tabla 5.6: Pendientes tiempos grande.

$\hat{\nu}$: modelo asintótico
 ν : ajuste de recta en log-log

Capítulo 6

Discusión y Conclusiones

6.1. Modelo

Se desarrolló un modelo de triple porosidad doble permeabilidad para modelar yacimientos fracturados vugulares fractales. El modelo que se presenta es una extensión del modelo de triple porosidad doble permeabilidad de *Camacho Velazquez et al. (2005)* que usa el desarrollo de *Chang and Yortsos (1990)* para incluir geometría fractal en la red de fracturas y vóculos. La transferencia de masa entre medios también es una extensión entre las propuestas de *Barenblatt et al. (1960)* y *Chang and Yortsos (1990)*. La solución del modelo, para obtener la presión en el pozo, se calcula de forma numérica usando diferencias finitas para la variable espacial y transformada de Laplace para el tiempo.

Las curvas tipo muestran que a tiempos grandes se obtiene ley de potencias en la curva de la log-derivada, es decir, p'_w es proporcional al tiempo elevado a un exponente ν ($p'_w \sim t^\nu$). Además, las pruebas realizadas mostraron que el valor de ν está entre los exponentes ν_f y ν_v , es decir:

$$\text{mín}\{\nu_f, \nu_v\} \leq \nu \leq \text{máx}\{\nu_f, \nu_v\}$$

donde ν_f es el exponente de la ley de potencias que se obtiene si no hay vóculos ($\kappa = 1, \omega_v = 0$) y ν_v cuando no hay fracturas ($\kappa = 0, \omega_f = 0$). En el apéndice (A) se desarrollan las expresiones de ν_f y ν_v en términos de los parámetros fractales.

En el caso de que solo exista flujo en un medio, es decir $\kappa = 0$ o $\kappa = 1$, el valor de ν estará dado por parámetros fractales del medio de flujo. Además, considerando la gráfica (2.6) se puede suponer que ν podría ser una función de ν_f, ν_v y κ con las propiedades

$$\nu = \begin{cases} \nu_f & \kappa = 1 \\ \nu_v & \kappa = 0 \\ \text{mín}\{\nu_f, \nu_v\} \leq \nu \leq \text{máx}\{\nu_f, \nu_v\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

En los ejemplos de curvas tipo que se mostraron se observó que si uno de los medios es fractal y el otro es euclidiano, el valor del exponente de la ley de potencias ν tiende a estar cercano a cero, lo que se interpretaría como flujo en un medio Euclidiano. Por ejemplo, la gráfica (2.4b) muestra un caso donde se mantiene fijo $\nu_v = 0$ (es decir el medio vugular es Euclidiano) y se varía la dimensión fractal D_f en el intervalo $[1, 2]$, al medir ν en la log-derivada llega a tener un valor máximo de solo $\nu = 0.05$, es decir que prácticamente es flujo Euclidiano, aún cuando ν_f obtiene un valor máximo de 0.35.

6.2. Métodos de optimización y ejemplos sintéticos

Se implementaron 3 métodos de optimización local para resolver el problema inverso: región de confianza, búsqueda lineal y Levenberg-Marquardt. En todos estos métodos se consideran restricciones lineales

y la aproximación a la matriz Hessiana de *Dennis et al. (1977)* (ecuación 3.6). Para asegurar que los algoritmos mantienen las restricciones (lineales) en los parámetros se usa el método de puntos interiores.

También se desarrolló un método de optimización global del tipo multi-inicio que usa una función Túnel, el objetivo de esta función es que durante la exploración del espacio de búsqueda el optimizador se aleje de mínimos locales encontrados con anterioridad. Esta función Túnel se puede encontrar previamente en los trabajos de *Levy and Montalvo (1985)*; *Levy and Gómez (1985)*. Sin embargo, se modifica de manera que para puntos alejados de los mínimos ya localizados se comporte como la función objetivo sin necesidad de agregar una función rampa (*Gómez and Barrón (1991)*).

Estos métodos de optimización han resultado efectivos, ya que en los ejemplos sintéticos la optimización siempre convergió a un mínimo local, es decir un punto dónde el gradiente proyectado es pequeño ($\|\mathbf{g}_{proy}\| < 1e - 2$). Es importante usar el gradiente proyectado ya que considera el caso cuando el punto de convergencia está en una de las cotas o restricciones del problema.

Además de que la optimización siempre convergió a mínimos locales, la técnica de multi-inicio fue efectiva ya que los puntos de convergencia, en general, ajustan los datos de presión y log-derivada correctamente. Sin embargo, se ha observado en algunos casos que ajustar la presión (y log-derivada) con buena precisión, no es suficiente para identificar con suficiente precisión algunos parámetros. Un ejemplo es el caso de la gráfica (3.12) dónde la función objetivo al terminar la optimización es $f_{obj} = 9.2e - 11$ pero no se logró identificar correctamente el parámetro λ_{mv} .

Las figuras (3.11 y 3.17) muestran que en general puede ser complicado obtener valores precisos de los parámetros λ_{mf} , λ_{mv} y λ_{fv} . Una de las posibles razones es que la presión (y por lo tanto la log-derivada) sean poco sensibles a éstos parámetros, esto se puede ver en la gráfica (3.12), donde la curva de presión y log-derivada no presentan cambios visibles cuando el parámetro λ_{mv} toma los valores tan distintos como $\lambda_{mv} = 10^{-7}, 10^{-5}$ y 10^{-3} .

Camacho Velazquez et al. (2005) muestran que una característica importante del modelo de triple porosidad es que la log-derivada puede tener hasta 2 valles y que la posición de éstos depende en gran medida de λ_{mf} , λ_{mv} y λ_{fv} . Esto sugiere que si en los datos (como en el caso de la figura 3.12) no están presentes los dos valles en la log-derivada, podría ser difícil identificar correctamente éstos parámetros, independientemente del método de optimización que se use, es decir, se tendría un problema de identificabilidad. Un problema similar sería el de tratar de ajustar datos que no presentan ningún valle en la log-derivada con un modelo de doble porosidad.

6.3. Ruido en los datos

La función objetivo (3.1) usa una combinación de los datos de presión y log-derivada. Sin embargo, en datos reales la presión puede contener diferentes tipos de ruido, mismos que se amplifican al calcular la derivada numérica. El método usual para calcular la log-derivada es el método de *Bourdet et al. (1989)*, pero en algunos casos, el suavizamiento que provee este método no es suficiente para obtener una log-derivada suave sin perder información en el proceso de derivación. Por lo tanto se propuso un método variacional con un término de regularización para calcular la log-derivada. Este método permite calcular una log-derivada suave y además se puede controlar el grado de suavidad a través de un coeficiente de regularización, para evitar perder información. El funcional (4.1) que se define para calcular la derivada de datos con ruido tiene tres coeficientes ω , β y λ que pueden ser ajustados según sea el caso para mejorar la estimación de la derivada.

El coeficiente ω permite darle pesos diferentes a los datos de forma local. Esto puede ser útil cuando se sabe que una parte de los datos es más confiable que otra. Los otros dos coeficientes están relacionados con la suavidad de la derivada, β sirve para controlar de forma local o en una región específica la suavidad y λ tiene un efecto global.

Si se tiene una estimación de ω y β (por ejemplo en este trabajo se usó $\omega = \beta = 1$) la selección del parámetro λ puede hacerse de forma efectiva usando la L-curva, como se ha mostrado en los ejemplos sintéticos y casos de campo.

Aunque el método inicialmente se desarrolló para calcular de forma estable la log-derivada, también se

ha usado de forma efectiva para filtrar el ruido en los datos, calculando la integral de la derivada. Filtrar el ruido en datos de bombeo en un acuífero o pruebas de presión en un yacimiento puede ser una tarea difícil debido a los diferentes tipos de ruido que pueden estar presentes. La aplicación de técnicas de análisis de series de tiempo (como promedios móviles, análisis de Fourier que funcionan bien para filtrar frecuencias grandes) pueden dar resultados no deseables ya que el usuario no puede asegurar si esta filtrando ruido o la señal. Este tipo de problemas se puede presentar en pozos de observación donde la relación señal/ruido sea pequeña y en el método que aquí se propone se necesitan valores grandes de λ . Al asegurar suavidad en la derivada (no solo en la señal original) este método permite filtrar frecuencias altas y pequeñas. Sin embargo, este método podría no ser suficiente para frecuencias muy pequeñas (con un periodo similar a la duración de la prueba).

6.4. Casos de campo

Los métodos desarrollados en este trabajo, se aplicaron satisfactoriamente para ajustar casos reales de campo, como se demuestra con los 3 ejemplos del capítulo (5). En estos casos fue posible ajustar los datos con al menos uno de los modelos planteados: $2\phi - 1k$, $3\phi - 1k$ o $3\phi - 2k$.

El Caso 2 muestra que el modelo puede ajustar datos donde la log-derivada tiene 3 valles. Esto se puede observar en la gráfica (5.6) donde las curvas de ajuste de los modelos $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$ muestran los tres valles en la log-derivada. En el trabajo de *Camacho Velazquez et al.* (2005) se muestra que dos de éstos valles se deben a la transferencia de masa entre los medios porosos, pero no se menciona la posibilidad de un tercer valle. Al parecer la presencia del tercer valle se debe, en gran parte, a la interacción del coeficiente de almacenamiento C_D y la forma de calcular el efecto del daño s . Para desarrollar un poco más sobre la presencia de estos valles se crea la gráfica (6.1), donde se muestra un ejemplo de un yacimiento Euclidiano ($D_{f,v} = 2$, $\theta_{f,v} = 0$) y con tres valles en la log-derivada. En la gráfica se presenta la presión (y log-derivada) obtenida de tres formas diferentes: 1) usando la solución analítica de *Camacho Velazquez et al.* (2005) agregando el daño mediante las condiciones de frontera similares a la ecuación (2.45), 2) usando la solución analítica pero el daño se agrega usando el concepto de radio efectivo, 3) y finalmente se presenta la solución numérica del modelo de este trabajo, donde el daño también se calcula con las condiciones de frontera (2.45). Las curvas donde el daño se agrega mediante las condiciones de frontera (2.45) muestran el tercer valle en la log-derivada, mientras que la curva donde el daño se incluye mediante radio efectivo solo tiene dos valles. Esto indica que el tercer valle está muy relacionado con el daño, con la forma de como se incluye en el cálculo de la presión y con el coeficiente de almacenamiento. Si el almacenamiento es muy pequeño o muy grande tampoco se crea este tercer valle, aunque este efecto no se mostró en la gráfica.

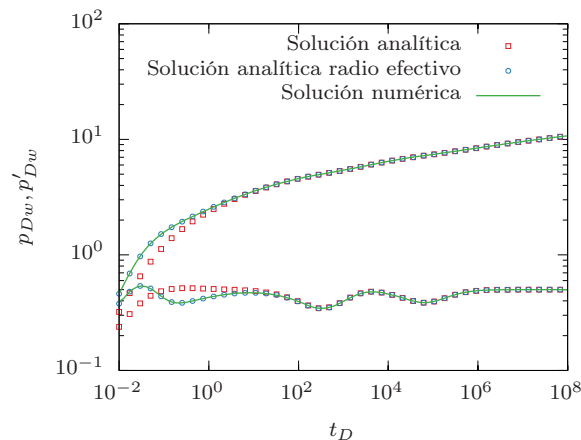


Figura 6.1: Presión y log-derivada con tres valles. Solución analítica de *Camacho Velazquez et al.* (2005) (puntos rojos), solución analítica usando radio efectivo para el daño (puntos azules) y solución numérica de éste trabajo (línea).

Por otro lado, los tres casos de campo muestran que la optimización puede localizar más de un mínimo que ajusta los datos con la misma precisión. Esto se puede observar en los ajustes de los modelos $3\phi - 1k$ y $3\phi - 2k$, en los tres casos el valor final de la función objetivo es muy similar pero hay parámetros con valores muy diferentes. Por nombrar un par de ejemplos, en el Caso 1 el ajuste con el modelo $3\phi - 1k$ muestra un valor de $\kappa = 1$ pero el resultado para el modelo $3\phi - 2k$ fue $\kappa \approx 0$, es decir una solución indica un flujo solo a través de fracturas y otra a través de vórgulos. En el Caso 3 el parámetro a_t pasa de tener un valor de $1.5e + 5$ para el modelo $3\phi - 1k$ contra un valor de 21.8 para el modelo $3\phi - 2k$. Para evitar este tipo de ambigüedades podría ser necesario tener más información de los yacimientos, de forma que algunos parámetros se pueden estimar por otros medios o que las cotas de los parámetros tengan un intervalo mas pequeño o agregar información extra en la función objetivo. Una estrategia de fijar parámetros es la de seleccionar de forma adecuada el modelo con el que se hace el ajuste, por ejemplo, los datos del Caso 3 muestran que sería suficiente usar el modelo $2\phi - 1k$ (incluso se podría usar modelo de un solo medio $1\phi - 1k$) ya que la log-derivada no presenta los valles típicos de la transferencia de masa entre dos medios. En la práctica el efecto de seleccionar un modelo u otro es que algunos parámetros quedan fijos en valores específicos.

6.5. Generales

Los métodos y algoritmos propuestos en este trabajo han mostrado ser efectivos para caracterizar yacimientos fracturados vulgares fractales usando datos de pruebas de presión que muestran comportamientos típicos de ley de potencias. Este tipo de comportamientos se han asociado en la literatura a flujo en un medios porosos con geometría fractal. Sin embargo, el modelo propuesto tiene una gran cantidad de parámetros, por lo que en algunos casos podría ser necesario que algún (o algunos de los parámetros) se identifique usando otro tipo de métodos, o al menos reducir el intervalo del parámetro para evitar multiplicidad de mínimos.

Bibliografía

- Acuna, J. A., and Y. C. Yortsos (1995), Application of fractal geometry to the study of networks of fractures and their pressure transient, *Water Resources Research*, 31(3), 527–540, doi:10.1029/94WR02260. 1, 1.2, 2.6
- Ajayi, B. (2007), Pressure transient test analysis of vuggy naturally fractured carbonate reservoir: field case study, *Master Thesis*. 5, 5.2
- Alaimo, G., and M. Zingales (2015), Laminar flow through fractal porous materials: the fractional-order transport equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3), 889–902. 1
- Aubert, P., N. Di Césaré, and O. Pironneau (2001), Automatic differentiation in c++ using expression templates and. application to a flow control problem, *Computing and Visualization in Science*, 3(4), 197–208. 3.3
- Balankin, A. S., and B. E. Elizarraraz (2012), Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow, *Phys. Rev. E*, 85, 056,314, doi:10.1103/PhysRevE.85.056314. 1
- Barenblatt, G., I. Zheltov, and I. Kochina (1960), Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata], *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 24(5), 1286 – 1303, doi:https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6. 1, 2.1, 6.1
- Barker, J. A. (1988), A generalized radial flow model for hydraulic tests in fractured rock, *Water Resources Research*, 24(10), 1796–1804, doi:10.1029/WR024i010p01796. 1, 1.2, 2.6
- Bourdet, D., J. Ayoub, Y. Pirard, et al. (1989), Use of pressure derivative in well test interpretation, *SPE Formation Evaluation*, 4(02), 293–302. 1, 2, 4, 6.3
- Camacho Velazquez, R., M. A. Vasquez-Cruz, R. Castrejon-Aivar, and V. Arana-Ortiz (2005), Pressure transient and decline curve behaviors in naturally fractured vuggy carbonate reservoirs, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 8(02), 95 – 111, doi:10.2118/77689-PA. 1, 1.2, 2.1, 2.6, ??, 2.1, 6.1, 6.2, 6.4, 6.1
- Camacho-Velazquez, R., G. Fuentes-Cruz, and M. A. Vasquez-Cruz (2008), Decline-curve analysis of fractured reservoirs with fractal geometry, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, doi:10.2118/104009-PA. 1, 1.2, 2.6
- Camacho Velazquez, R., S. Gomez, M. A. Vasquez-Cruz, N. A. Fuenleal, T. Castillo, G. Ramos, C. Minutti, A. Mesejo, G. Fuentes-Cruz, et al. (2014), Well-testing characterization of heavy-oil naturally fractured vuggy reservoirs, in *SPE Heavy and Extra Heavy Oil Conference: Latin America*, Society of Petroleum Engineers. 1.2, 3
- Carrera, J., and S. P. Neuman (1984), Adjoint state finite element estimation of aquifer parameters under steady-state and transient conditions, in *Finite Elements in Water Resources*, pp. 199–211, Springer. 3.3

- Castellanos, J. L., S. Gómez, and V. Guerra (2002), The triangle method for finding the corner of the l-curve, *Applied Numerical Mathematics*, 43(4), 359–373. 4.2
- Chang, J., and Y. C. Yortsos (1990), Pressure transient analysis of fractal reservoirs, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 5(01), 31–39, doi:10.2118/18170-PA. 1, 1.2, 2.1, 2.1, 2.1, 2.6, 2.6, 6.1
- Chartrand, R. (2011), Numerical differentiation of noisy, nonsmooth data, *ISRN Applied Mathematics*, 2011. 1, 4, 4
- Chen, Z. (2007), *Reservoir simulation: mathematical techniques in oil recovery*, vol. 77, Siam. 1
- Chow, V. T. (1952), On the determination of transmissibility and storage coefficients from pumping test data, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 33(3), 397–404. 1
- Cullum, J. (1971), Numerical differentiation and regularization, *SIAM Journal on numerical analysis*, 8(2), 254–265. 1, 4, 4
- Dennis, J. E., D. M. Gay, and R. E. Welsch (1977), An adaptive nonlinear least square algorithm. 4, 3.4, 6.2
- Engauge Digitizer Software (2020), Mark mitchell and baurzhan muftakhidinov and tobias winchen, <http://markummitche11.github.io/engauge-digitizer/>. 5.2
- Fair Jr, W. B. (1981), Pressure buildup analysis with wellbore phase redistribution, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 21(02), 259–270. 2.5.1
- Flamenco-Lopez, F., R. Camacho-Velazquez, et al. (2003), Determination of fractal parameters of fracture networks using pressure-transient data, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, 6(01), 39–47. 1.2, 2.6, 5, 5.1
- Fletcher, R. (2000), *Practical methods of optimization*, John Wiley & Sons. 2
- Gómez, S., and C. Barrón (1991), The exponential tunneling method, *Technical Report IIMAS-UNAM*, 1(3). 3.2, 6.2
- Gómez, S., G. Ramos, A. Mesejo, R. Camacho, M. Vásquez, and N. Del Castillo (2014), Well test analysis of naturally fractured vuggy reservoirs with an analytical triple porosity–double permeability model and a global optimization method, *Oil and Gas Science and Technology–Revue d’IFP Energies nouvelles*, 69(4), 653–671. 1, 1.2, 3
- González-Tamez, F., B. Boris Escalante-Ramírez, R. Camacho-Velázquez, et al. (1999), Truncation denoising in transient pressure tests, in *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Society of Petroleum Engineers. 4
- Griewank, A., and A. Walther (2008), *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*, vol. 105, Siam. 3.3.1
- Henry, B. I., T. A. M. Langlands, and S. L. Wearne (2006), Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: From continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations, *Phys. Rev. E*, 74, 031,116, doi:10.1103/PhysRevE.74.031116. 1
- Hickernell, F. J., and Y.-x. Yuan (1997), A simple multistart algorithm for global optimization. 3.2
- Jiang, R., C. Zhang, Y. Cui, Q. Wang, W. Zhang, and F. Zhang (2019), Characteristics of transient pressure performance of horizontal wells in fractured-vuggy tight fractal reservoirs considering nonlinear seepage, *Oil Gas Science and Technology*, 74, 57. 1, 1.2, 2.6
- Knowles, I., and R. J. Renka (2014), Methods for numerical differentiation of noisy data, *Electron. J. Differ. Equ*, 21, 235–246. 1, 4, 4

- Knowles, I., and R. Wallace (1995), A variational method for numerical differentiation, *Numerische Mathematik*, 70(1), 91–110. 1, 4, 4
- Levy, A. V., and S. Gómez (1985), The tunneling method applied to global optimization, *Numerical optimization, 1981*, 213–244. 1, 3.2, 6.2
- Levy, A. V., and A. Montalvo (1985), The tunneling algorithm for the global minimization of functions, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 6(1), 15–29. 3.2, 6.2
- Metzler, R., and J. Klafter (2000), The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, 339(1), 1 – 77, doi:[https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3). 1
- Metzler, R., W. G. Glockle, and T. F. Nonnenmacher (1994), Fractional model equation for anomalous diffusion, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 211(1), 13 – 24, doi:[https://doi.org/10.1016/0378-4371\(94\)90064-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(94)90064-7). 1, 1.2, 2.6
- Neuman, S. P., and G. De Marsily (1976), Identification of linear systems response by parametric programming, *Water Resources Research*, 12(2), 253–262. 4.2
- Nocedal, J., and S. Wright (2006), *Numerical optimization*, Springer Science & Business Media. 3.1, 3.1, 3.4.1, B
- Ochoa-Tapia, J. A., F. J. Valdes-Parada, and J. Alvarez-Ramirez (2007), A fractional-order darcy’s law, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 374(1), 1 – 14, doi:<https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.07.033>. 1
- O’Shaughnessy, B., and I. Procaccia (1985), Diffusion on fractals, *Phys. Rev. A*, 32, 3073–3083, doi:10.1103/PhysRevA.32.3073. 1, 2.1
- Raghavan, R. (2011), Fractional derivatives: Application to transient flow, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 80(1), 7 – 13, doi:<https://doi.org/10.1016/j.petrol.2011.10.003>. 1
- Rai, S. (1985), Numerical determination of aquifer constants, *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(7), 1110–1114. 1
- Ramos, G., J. Carrera, S. Gómez, C. Minutti, and R. Camacho (2017), A stable computation of log-derivatives from noisy drawdown data, *Water Resources Research*, 53(9), 7904–7916. 4
- Renard, P., D. Glenz, and M. Mejias (2009), Understanding diagnostic plots for well-test interpretation, *Hydrogeology Journal*, 17(3), 589–600. 1
- Sobol’, I. M. (1967), On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals, *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4), 784–802. 3.2
- Srivastava, R., and A. Guzman-Guzman (1998), Practical approximations of the well function, *Groundwater*, 36(5), 844–848. 4.2
- Stehfest, H. (1970), Algorithm 368: Numerical inversion of laplace transforms [d5], *Commun. ACM*, 13(1), 47–49, doi:10.1145/361953.361969. 2.5.4, 3.3
- Tarasov, V. E. (2005), Continuous medium model for fractal media, *Physics Letters A*, 336(2-3), 167–174. 1
- Theis, C. V. (1935), The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using ground-water storage, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 16(2), 519–524. 4.2

-
- Van der Vorst, H. A. (1992), Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing*, 13(2), 631–644.
4.1
- Warren, J. E., and P. J. Root (1963), The behavior of naturally fractured reservoirs, *Society of Petroleum Engineers Journal*, 3(03), 245 – 255, doi:10.2118/426-PA. 1

Apéndice A

Aproximación tiempos largos

Asumiendo flujo en fracturas sin vórgulos, $\kappa = 1$, $\omega_v = 0$, $\lambda_{mv} = \lambda_{fv} = 0$, el sistema de ecuaciones diferenciales (2.41-2.45) se reduce al sistema:

$$\begin{aligned}\omega_m \frac{\partial p_{Dm}}{\partial t_D} &= -\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{1-\alpha_{mf}}} (p_{Dm} - p_{Df}) \\ \omega_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial t_D} &= \frac{1}{r_D^{D_f-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right) + \frac{\lambda_{mf}}{r_D^{D_f-\alpha_{mf}-1}} (p_{Dm} - p_{Df}) \\ \left[-\frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} &= 1 - C_D \frac{dp_{Dw}}{dt_D} \\ p_{Dw} &= \left[p_{Df} - s_f \frac{\partial p_{Df}}{\partial r_D} \right]_{r_D=1} \\ p_{Dm,f} &= 0 \quad \text{cuando } t_D = 0 \\ p_{Dm,f} &= 0 \quad \text{cuando } r_D \rightarrow 0\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace en la variable temporal

$$\frac{1}{r_D^{D_f-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) = \left(\frac{\lambda_{mf}}{r_D^{D_f-\alpha_{mf}-1}} \frac{\omega_m u r_D^{1-\alpha_{mf}}}{\omega_m u r_D^{1-\alpha_{mf}} + \lambda_{mf}} + \omega_f u \right) \bar{p}_{Df}$$

Para tiempos largos (u pequeños), se puede aproximar el lado derecho de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r_D^{D_f-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) = \left(\frac{\omega_m u}{r_D^{D_f-2}} + \omega_f u \right) \bar{p}_{Df} \quad (\text{A.1})$$

A.1. Almacenamiento en la matriz $\omega_m \approx 1$ ($\omega_f \approx 0$, $\omega_v = 0$)

Si se asume que el almacenamiento está principalmente en la matriz, $\omega_m \approx 1$ ($\omega_f \approx 0$) entonces se tiene:

$$\frac{1}{r_D} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) - u \bar{p}_{Df} = 0$$

Esta ecuación tiene la solución general:

$$\bar{p}_{Df} = AR^{\nu_f} I_{\nu_f}(a\sqrt{u}R) + BR^{\nu_f} K_{\nu_f}(a\sqrt{u}R)$$

donde

$$\begin{aligned} r_D &= R^a \\ \nu_f &= \frac{2 - D_f + \theta_f}{4 - D_f + \theta_f} \\ a &= \frac{2}{4 - D_f + \theta_f} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Para aplicar las condiciones de frontera se calcula la solución sin almacenamiento y luego se agrega usando la ecuación (2.56). El coeficiente $A = 0$ debido a la condición de yacimiento infinito. Para encontrar B se considera la condición de frontera de flujo constante

$$\left[-\frac{1}{a} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dR} \right]_{R=1} = \frac{1}{u}$$

de donde se obtiene:

$$\bar{p}_{Df} = \frac{R^{\nu_f} K_{\nu_f}(a\sqrt{u}R)}{u\sqrt{u}K_{\nu_f-1}(a\sqrt{u})}$$

Considerando el daño, la presión en el pozo sin almacenamiento es

$$\bar{p}_{Dwc} = \frac{K_{\nu_f}(a\sqrt{u})}{u\sqrt{u}K_{\nu_f-1}(a\sqrt{u})} + \frac{s_f}{u}$$

considerando almacenamiento

$$\bar{p}_{Dw}(u) = \frac{\bar{p}_{Dwc}}{1 - C_D u^2 \bar{p}_{Dwc}}$$

seguimos asumiendo aproximación a tiempos largos, por lo tanto

$$\bar{p}_{Dw}(u) \approx \bar{p}_{Dwc}$$

Para seguir se usan dos aproximaciones de las funciones de Bessel para argumentos grandes:

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &\approx \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \\ K_\nu(x) &\approx \frac{1}{2}\Gamma(-\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_{Dw} &= \frac{K_{\nu_f}(a\sqrt{u})}{u\sqrt{u}K_{\nu_f-1}(a\sqrt{u})} + s_f \\ &\approx -\frac{2a}{\nu_f u} + \left(\frac{a}{2}\right)^{-2\nu_f} \frac{a2\Gamma(\nu_f)}{\Gamma(1-\nu_f)u^{\nu_f+1}} + \frac{s_f}{u} \end{aligned}$$

Invirtiendo de Laplace

$$p_{Dw} \approx s_f - \frac{2a}{\nu_f} + \left(\frac{a}{2}\right)^{-2\nu_f} \frac{a2\Gamma(\nu_f)}{\Gamma(1-\nu_f)} t_D^{\nu_f}$$

De donde se tiene obtiene la aproximación a tiempos largos de la log-derivada

$$p'_{Dw} \sim t_D^{\nu_f}$$

A.2. Almacenamiento en las fracturas $\omega_f \approx 1$ ($\omega_m \approx 0$, $\omega_v = 0$)

Usando el mismo procedimiento se puede obtener la aproximación a tiempos largos en el caso de que no haya contribución de la matriz al almacenamiento, es decir $\omega_m \approx 0$ ($\omega_f \approx 1$). Entonces la ecuación (A.1) se reduce a:

$$\frac{1}{r_D^{D_f-1}} \frac{d}{dr_D} \left(r_D^{D_f-\theta_f-1} \frac{d\bar{p}_{Df}}{dr_D} \right) = u\bar{p}_{Df}$$

En este caso se propone el cambio de variable $r_D = R^{2/(2+\theta_f)}$ y se define

$$\nu_f = \frac{2 + \theta_f - D_f}{2 + \theta_f} \quad (\text{A.3})$$

Entonces la solución general se puede escribir como:

$$\bar{p}_{Df} = AR^{\nu_f} I_{\nu_f}(a\sqrt{u}R) + BR^{\nu_f} K_{\nu_f}(a\sqrt{u}R)$$

Usando el mismo desarrollo de la sección anterior se puede probar que a tiempos largos $p_{Df} \sim t_D^{\nu_f}$.

Apéndice B

Método de programación cuadrática

En todos los métodos anteriores es necesario resolver el problema de Programación Cuadrática con restricciones lineales:

$$\min_{Ax \geq b} \mathbf{x}^T \mathbf{c} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x}$$

donde $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz simétrica, $\mathbf{x}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$.

El Lagrangiano del problema que incluye las restricciones es

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{c} - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b})$$

donde $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ son los multiplicadores de Lagrange. Derivando respecto a \mathbf{x}

$$\nabla_{\mathbf{x}} L = \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$$

derivando respecto a $\boldsymbol{\lambda}$

$$\nabla_{\boldsymbol{\lambda}} L = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}$$

igualando a cero las derivadas y reescribiendo las restricciones se tiene que el problema de minimización tiene una solución cuando:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} &= 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} &\geq 0 \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq 0 \\ \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}) &= 0 \end{aligned}$$

estas ecuaciones se les conoce como las condiciones Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Para resolver este sistema es común introducir un vector auxiliar $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \geq 0$ de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} &= 0 \\ \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} - \mathbf{y} &= 0 \\ \lambda_i y_i &= 0 \\ \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

donde $\lambda_i y_i$ es el producto de la componente i-ésima de los vectores $\boldsymbol{\lambda}$ y \mathbf{y} respectivamente. Denotando $\lambda_i y_i$ en forma matricial

$$LYe = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 y_2 \\ \vdots \\ \lambda_l y_l \end{pmatrix}$$

donde Y y L son las matrices diagonales:

$$Y = \text{diag}(y_1 \dots y_l)$$

$$L = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_l)$$

e es un vector de 1's.

$$e = (1 \dots 1)^T$$

entonces las condiciones KKT se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} Gx + c - A^T \lambda &= 0 \\ Ax - b - y &= 0 \\ LYe &= 0 \\ \lambda, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones no lineales definimos la función $F : \mathbb{R}^{n+2l} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2l}$

$$F(x, \lambda, y) = \begin{bmatrix} Gx + c - A^T \lambda \\ Ax - b - y \\ LYe \end{bmatrix}$$

Y se plantea el problema de encontrar (x^*, λ^*, y^*) tal que

$$F(x^*, \lambda^*, y^*) = 0$$

si denotamos

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} Gx + c - A^T \lambda \\ Ax - b - y \\ LYe \end{bmatrix}$$

entonces el Jacobiano de F es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x} & \frac{\partial r_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial r_1}{\partial y} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} & \frac{\partial r_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial r_2}{\partial y} \\ \frac{\partial r_3}{\partial x} & \frac{\partial r_3}{\partial \lambda} & \frac{\partial r_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -A^T & 0 \\ A & 0 & -Y \\ 0 & Y & L \end{bmatrix}$$

entonces, dada una aproximación inicial a la solución (x_0, λ_0, y_0) encontramos aproximaciones sucesivas usando el método de Newton

$$(x_{k+1}, \lambda_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, \lambda_k, y_k) + \alpha(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta y)$$

donde $(\Delta x, \Delta \lambda, \Delta y)$ es solución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} G & -A^T & 0 \\ A & 0 & -Y_k \\ 0 & Y_k & L_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Gx_k + c - A^T \lambda_k \\ Ax_k - b - y_k \\ L_k Y_k e \end{bmatrix}$$

Una estrategia que se usa para acelerar la solución del problema es plantear el problema perturbado (*Nocedal and Wright (2006)*):

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} - \mathbf{y} \\ \mathbf{L}\mathbf{Y}\mathbf{e} - \sigma\mu\mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_l \\ \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r} \end{bmatrix}$$

donde

$$\mu = \frac{\mathbf{y}^T\boldsymbol{\lambda}}{l}$$

Fijando μ y calculando el Jacobiano, el método de Newton calcula el paso resolviendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} & -\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_k \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_k & \mathbf{L}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\mathbf{y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}\mathbf{x}^k + \mathbf{c} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}_k \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{b} - \mathbf{y}_k \\ \mathbf{L}_k\mathbf{Y}_k\mathbf{e} - \sigma\mu_k\mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

y la iteración de Newton sigue siendo:

$$(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = (\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{y}_k) + \alpha(\Delta\mathbf{x}, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{y})$$

el parámetro α se escoge para mantener $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} > 0$.

El algoritmo es el siguiente:

Algoritmo B.1 Algoritmo de puntos interiores

- 1: Dado un punto inicial $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0, \mathbf{y}_0)$ y $\mathbf{G}, \mathbf{A}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$
 - 2: **for** $k = 0, \dots$ **do**
 - 3: Calcula $\mathbf{Y}_k, \mathbf{L}_k$, el lado derecho de (B.1)
 - 4: Resuelve (B.1) Para $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{y})$
 - 5: Escoge α tal que $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1} \geq 0$ donde
 - 6: $(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1}) = (\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \mathbf{y}_k) + \alpha(\Delta\mathbf{x}, \Delta\boldsymbol{\lambda}, \Delta\mathbf{y})$
 - 7: Si $\mu^{k+1} < tol$ termina.
 - 8: **end for**
-

Apéndice C

Números duales

Partiendo de las definiciones de número dual y operaciones aritméticas básicas de la sección (3.3) a continuación se describe un código ejemplo que muestra una forma de implementar este tipo de números para calcular derivadas de funciones relativamente sencillas. Para funciones más complicadas sería necesario implementar más componentes, sin embargo el objetivo es mostrar de forma sencilla como usar números duales y no crear una biblioteca robusta.

En estos ejemplos se prefiere claridad a eficiencia, es decir, se podría implementar de forma más eficiente este tipo de método, por ejemplo se podrían usar referencias en los argumentos de las funciones y técnicas como *expression templates* para las operaciones aritméticas.

Se puede definir una Clase en *C++* que representa un número dual de la siguiente forma:

```
class dual {
public:
    double r; //real part
    double d; //dual part
    dual(double a=0.0, double b=0.0):r(a),d(b){}
    dual(const dual &x):r(x.r),d(x.e){}
    void operator=(const dual &x):r(x.r),d(x.e){}
};
```

Usando esta clase se puede definir en *C++* el comportamiento de los operadores aritméticos sobre números duales, el siguiente ejemplo muestra una forma de hacerlo para las operaciones +, -, *, /.

```
dual operator+( dual x, dual y ) {
    return dual( x.r + y.r, x.d + y.d);
}
dual operator-( dual x, dual y ) {
    return dual( x.r - y.r, x.d - y.d);
}
dual operator*( dual x, dual y ) {
    return dual( x.r * y.r, x.r * y.d + x.d * y.r);
}
dual operator/( dual x, dual y ) {
    return dual( x.r / y.r, (y.r*x.d - x.r*y.d) / ( y.r*y.r ) );
}
```

Además de las operaciones aritméticas también se puede definir el comportamiento de funciones básicas cuando se evalúan en números duales, el siguiente ejemplo muestra el caso de las funciones $\sin(x)$ y \sqrt{x} .

```

dual sqrt( dual x ) {
    return dual( sqrt( x.r ), x.d * 0.5 / sqrt( x.r ) );
}
dual sin( dual x ) {
    return dual( sin( x.r ), x.d * cos( x.r ) );
}

```

Este código permite calcular la derivada de funciones más complicadas por ejemplo:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{\sin^2(x) + x^2}}{x}\right) \quad (\text{C.1})$$

El siguiente código calcula $f(x)$ usando plantillas (*templates*), esto permite que el argumento de la función a evaluar pueda ser de diferente tipo, por ejemplo un número de doble precisión o un número dual.

```

template<typename S>
S f(S x) {
    return sin( sqrt( sin( x ) * sin( x ) + x*x ) / x );
}

```

Esta función puede usarse de forma usual con números de doble precisión, por ejemplo evaluar en $x = 1.5$ se podría hacer de la siguiente forma:

```

double x = 1.5;
double z = f(x);

```

Para calcular la derivada de f lo único que hay que hacer es evaluar la misma función pero ahora usando números duales:

```

dual x(1.5, 1.0);
dual z = f(x);

```

En este caso la variable `z.d` contiene la derivada.

C.1. Números duales para derivadas de segundo orden

La misma técnica de números duales se puede usar para calcular derivadas de segundo orden. En este caso se define un número dual de la siguiente forma:

$$z = r + d\epsilon + e\frac{1}{2}\epsilon^2$$

$r, d, e \in \mathbb{R}$ y ahora se define ϵ de forma que $\epsilon^n = 0$ para $n > 2$. Note la similitud con una expansión de Taylor.

Dados dos números duales $z_1 = r_1 + d_1\epsilon + e_1\frac{1}{2}\epsilon^2$, $z_2 = r_2 + d_2\epsilon + e_2\frac{1}{2}\epsilon^2$ se definen las operaciones aritméticas:

$$\begin{aligned}
 z_1 + z_2 &= r_1 + r_2 + (d_1 + d_2)\epsilon + (e_1 + e_2)\frac{1}{2}\epsilon^2 \\
 z_1 - z_2 &= r_1 - r_2 + (d_1 - d_2)\epsilon + (e_1 - e_2)\frac{1}{2}\epsilon^2 \\
 z_1 * z_2 &= r_1 r_2 + (r_1 d_2 + r_2 d_1)\epsilon + (r_1 e_2 + 2d_1 d_2 + e_1 r_2)\frac{1}{2}\epsilon^2 \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2 d_1 - r_1 d_2}{r_2^2}\epsilon + \frac{2r_1 d_2^2 - r_1 r_2 e_2 - 2r_2 d_1 d_2 + r_2^2 e_1}{r_2^3}\frac{1}{2}\epsilon^2
 \end{aligned}$$

Calculando la expansión de Taylor alrededor de r se puede obtener una expresión para evaluar funciones de las que se conocen las derivadas.

$$f(r + d\epsilon + e\frac{1}{2}\epsilon^2) = f(r) + f'(r)d\epsilon + (f'(r)e + d^2 f''(r))\frac{1}{2}\epsilon^2$$

Para implementar este tipo de números se procede de la misma forma que la sección anterior. Se crea una clase que este tipo de números:

```
class dual2 {
public:
    double r; //real part
    double d; //dual part first deriv
    double e; //dual part second deriv
    dual2(double a=0.0, double b=0.0, double c=0.0):r(a),d(b),e(c){}
    dual2(const dual2 &x):r(x.r),d(x.d),e(x.e){}
    void operator=(const dual2 &x):r(x.r),d(x.d),e(x.e){}
};
```

También se implementan las operaciones aritméticas básicas:

```
dual2 operator+( dual2 x, dual2 y ) {
    return dual2( x.r + y.r, x.d + y.d, x.e + y.e );
}
dual2 operator-( dual2 x, dual2 y ) {
    return dual2( x.r - y.r, x.d - y.d, x.e - y.e );
}
dual2 operator*( dual2 x, dual2 y ) {
    return dual2( x.r*y.r,
                  x.d*y.r + x.r*y.d,
                  x.r*y.e + 2.0*x.d*y.d + x.e*y.r );
}
dual2 operator/( dual2 x, dual2 y ) {
    return dual2( x.r/y.r,
                  (x.d*y.r - x.r*y.d) / ( y.r*y.r ),
                  ( 2.0*x.r*y.d*y.d - x.r*y.r*y.e
                    - 2.0*y.r*x.d*y.d + y.r*y.r*x.e ) /
                  ( y.r*y.r*y.r ) );
}
```

Para funciones dónde se conoce la primera y segunda derivadas se puede implementar:

```
dual2 sqrt( dual2 x )
{
    return dual2( sqrt(x.r),
                  0.5*x.d / sqrt(x.r),
                  0.5*x.e / sqrt(x.r) - 0.25/(sqrt(x.r)*x.r) *x.d*x.d );
}
dual2 sin( dual2 x )
{
    return dual2( sin(x.r),
                  cos(x.r)*x.d,
                  cos(x.r)*x.e - sin(x.r)*x.d*x.d );
}
```

Con este código es posible evaluar la segunda derivada de funciones mucho mas complicadas, por ejemplo se puede usar la implementación de la función (C.1)

```

template<typename S>
S f(S x) {
    return sin( sqrt( sin( x ) * sin( x ) + x*x ) / x );
}

```

Esta función puede usarse de forma común para números de doble precisión, los números duales de la sección anterior para calcular la primera derivada o números duales para calcular la segunda derivada. Para calcular la segunda derivada de f se evalúa la misma función:

```

dual2 x(1.5, 1.0, 0.0);
dual2 z = f(x);

```

En este caso la variable $z.e$ contiene el valor de la segunda derivada.

C.2. Derivadas en varias dimensiones

Para evaluar derivadas de funciones de n variables, se puede generalizar el método anterior considerando números duales con n componentes para la parte de la primera derivada y con n^2 componentes para la segunda derivada. Es decir se define el número dual

$$z = r + \epsilon^T \mathbf{g} + \frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{H} \epsilon$$

donde $r \in \mathbb{R}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^T$ es un vector con n partes duales que cumplen la propiedad $\epsilon_i^k \epsilon_j^l = 0$ $k+l > 2$ además consideramos que $\epsilon_i^k \epsilon_j^l \neq \epsilon_j^l \epsilon_i^k$.

Dados dos números duales

$$z_1 = r_1 + \epsilon^T \mathbf{g}_1 + \frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{H}_1 \epsilon$$

$$z_2 = r_2 + \epsilon^T \mathbf{g}_2 + \frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{H}_2 \epsilon$$

Se definen las operaciones aritméticas

$$z_1 + z_2 = r_1 + r_2 + \epsilon^T (\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2) + \frac{1}{2} \epsilon^T (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) \epsilon$$

$$z_1 - z_2 = r_1 - r_2 + \epsilon^T (\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2) + \frac{1}{2} \epsilon^T (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \epsilon$$

$$z_1 z_2 = r_2 r_1 + \epsilon^T (\mathbf{g}_2 r_1 + r_2 \mathbf{g}_1) + \frac{1}{2} \epsilon^T (r_2 \mathbf{H}_1 + \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1^T + \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2^T + \mathbf{H}_2 r_1) \epsilon$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} + \epsilon^T \left(\frac{\mathbf{g}_1 r_2 - r_1 \mathbf{g}_2}{r_2^2} \right) + \frac{1}{2} \epsilon^T \left(\frac{r_2 \mathbf{H}_1 - \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_1^T - \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2^T - r_1 \mathbf{H}_2}{r_2^2} + \frac{2 \mathbf{g}_2 \mathbf{g}_2^T}{r_2^3} \right) \epsilon$$

Y para evaluar funciones conocidas en un número dual se puede usar

$$f(x + \epsilon^T \mathbf{g} + \frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{H} \epsilon) = f(r) + \epsilon^T \mathbf{g} f'(r) + \frac{1}{2} \epsilon^T (\mathbf{H} f'(r) + \mathbf{g} \mathbf{g}^T f''(r)) \epsilon$$

Usando estas ecuaciones se pueden calcular las derivadas de una función de n variables de dos formas diferentes, para el gradiente se puede calcular la derivada respecto a una variable a la vez y llamar a la función n -veces y para la Hessiana se llamaría a la función $n(n+1)/2$ veces. La otra forma es calcular las derivadas respecto a todas las variables a la vez en una sola llamada a la función.

La clase que representa un número dual con n componentes podría ser:

```

template<int Dim>
class dualNDim {
public:
    double r;           //real part
    double d[Dim];     //dual part first deriv
    double e[Dim][Dim]; //dual part secon deriv
    const int n = Dim;
    dualNDim(double a=0.0){
        r = a;
        for(int i =0 ; i < Dim ; i++){
            d[i] = 0;
            for(int j = 0 ; j <= i ; j++){
                e[i][j] = 0;
            }
        }
    }
    dualNDim(const dualNDim &x){
        r = x.r;
        for(int i =0 ; i < Dim ; i++){
            d[i] = x.d[i];
            for(int j = 0 ; j <= i ; j++){
                e[i][j] = x.e[i][j];
            }
        }
    }
    void operator=(const dualNDim &x){
        r = x.r;
        for(int i =0 ; i < Dim ; i++){
            d[i] = x.d[i];
            for(int j = 0 ; j <= i ; j++){
                e[i][j] = x.e[i][j];
            }
        }
    }
};

```

Las operaciones aritméticas aplicadas a estos números se pueden programar de la siguiente forma:

```

template<int Dim>
dualNDim<Dim> operator+( dualNDim<Dim> x, dualNDim<Dim> y ) {
    dualNDim<Dim> z;
    z.r = x.r + y.r;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = x.d[i] + y.d[i];
        for(int j = 0 ; j <= i ; j++){
            z.e[i][j] = x.e[i][j] + y.e[i][j];
        }
    }
    return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> operator-( dualNDim<Dim> x, dualNDim<Dim> y ) {
    dualNDim<Dim> z;
    z.r = x.r - y.r;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = x.d[i] - y.d[i];
    }
}

```

```

        for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
            z.e[i][j] = x.e[i][j] - y.e[i][j];
    }
    return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> operator-( double x, dualNDim<Dim> y ) {
    dualNDim<Dim> z;
    z.r = x - y.r;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = -y.d[i];
        for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
            z.e[i][j] = -y.e[i][j];
    }
    return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> operator*( dualNDim<Dim> x, dualNDim<Dim> y ) {
    dualNDim<Dim> z;
    z.r = x.r * y.r;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = x.d[i]*y.r + x.r*y.d[i];
        for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
            z.e[i][j] = x.r*y.e[i][j] + x.d[i]*y.d[j]
                + x.d[j]*y.d[i] + y.r*x.e[i][j];
    }
    return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> operator*( dualNDim<Dim> x, dualNDim<Dim> y ) {
    dualNDim<Dim> z;
    z.r = x.r * y.r;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = (x.d[i]*y.r - x.r*y.d[i]) / (y.r*y.r);
        for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
            z.e[i][j] =(y.r*x.e[i][j]-x.d[i]*y.d[j]
                - x.d[j]*y.d[i]-x.r*y.e[i][j])/(y.r*y.r)
                + 2.0*x.r*y.d[i]*y.d[j] / (y.r*y.r*y.r);
    }
    return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> sqrt( dualNDim<Dim> x ) {
    dualNDim<Dim> z;
    double f = sqrt(x.r);
    double df = 0.5/f;
    double ddf = -0.25/(f*x.r);
    z.r = f;

```



```

for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
    z.d[i] = x.d[i]*df;
    for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
        z.e[i][j] = x.e[i][j]*df + x.d[i]*x.d[j]*ddf;
}
return z;
}

template<int Dim>
dualNDim<Dim> sqrt( dualNDim<Dim> x ) {
    dualNDim<Dim> z;
    double f    =  sin(x.r);
    double df   =  cos(x.r);
    double ddf  = -f;
    z.r = f;
    for(int i =0 ; i < x.n ; i++){
        z.d[i] = x.d[i]*df;
        for(int j = 0 ; j <= i ; j++)
            z.e[i][j] = x.e[i][j]*df + x.d[i]*x.d[j]*ddf;
    }
    return z;
}

```

En este caso comienza a ser importante la eficiencia del método ya que en cada llamada estas funciones se crea una copia de objeto, si el número de variables es grande entonces se estarán realizando muchas copias innecesarias. Otro aspecto respecto a la eficiencia es la creación de objetos temporales cuando se evalúan expresiones aritméticas largas.

Para probar el código se podría, por ejemplo, calcular las derivadas de la función:

$$f(\mathbf{x}) = \sin \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x^2)^2}$$

Una implementación de esta función es:

```

template<typename S>
S f(const vector<S> &x){
    S z;
    z = 0.0;
    for(int i = 0 ; i < x.size() - 1; i++){
        z = z + (x[i+1]-x[i]*x[i])*
              (x[i+1]-x[i]*x[i])
              + (1.0-x[i])*
              (1.0-x[i]);
    }
    return sin(sqrt(z));
}

```

Como primer método se calculan todas las derivadas (gradiente u Hessiana) al mismo tiempo en una sola llamada a la función, se utiliza $n = 3$ en $\mathbf{x} = (2.0, 1.1, 1.3)$. El siguiente código realiza el cálculo:

```

vector< dualNDim<3> > x(3);
x[0].r = 2.0;
x[1].r = 1.1;
x[2].r = 1.3;

```

```
x[0].d[0] = 1.0;
x[1].d[1] = 1.0;
x[2].d[2] = 1.0;
dualNDim<3> z = f(x);
```

La componente i -ésima del gradiente queda en la componente $z.d[i]$ y la componente (i,j) -ésima de la Hessiana queda en $z.e[i][j]$. En este caso la dimensión del número dual es igual al número de variables de las que depende la función f .

La otra forma de calcular las derivadas es calcular la derivada respecto a una variable a la vez, el mismo resultado anterior puede obtenerse con el siguiente código.

```
vector< dualNDim<2> > x(3);
x[0].r = 2.0;
x[1].r = 1.1;
x[2].r = 1.3;
for(int i = 0; i < 3 ; i++){
    x[i].d[0] = 1.0;
    dualNDim<2> z = f( xv2 );
    //derivada respecto a xi en z.d[0]
    x[i].d[0] = 0.0;
}

for(int i = 0; i < 3 ; i++){
    for(int j = 0; j <= i ; j++){
        x[i].d[0] = 1.0;
        x[j].d[1] = 1.0;
        dualNDim<2> z = f( x );

        if(i==j)
            //segunda derivada respecto a xi xj en z.e[0][0]
        else
            //segunda derivada respecto a xi xj en z.e[1][0]

        x[i].d[0] = 0.0;
        x[j].d[1] = 0.0;
    }
}
```

Para calcular las derivadas usando éste método la dimensión del número dual siempre será de 2 no importa el número de variables de la función f . Debido a esto, en cada evaluación del gradiente o de la Hessiana se activa o desactiva la variable respecto a la cual se quiere calcular la derivada, cuando se asigna $x[i].d[0]=1.0$ se indica que se quiere derivar respecto a la variable i -ésima. Para evaluar la Hessiana deben indicar las dos variables respecto a las que se quiere derivar, por esta razón se hace $x[i].d[0]=1.0$ y $x[j].d[0]=1.0$ para calcular la derivada respecto a la variable i -ésima y luego la derivada respecto a la variable j -ésima.

Apéndice D

Calculo de derivadas de datos con ruido

D.1. Minimización del funcional (4.1)

La minimización del funcional (4.1) se hace de la forma usual para calcular extremos de una función, se calcula la derivada y se iguala a cero. Calculando la derivada de (4.1) respecto a u

$$\frac{dF(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_n} w(A(u + \varepsilon\eta) - y) \frac{dA(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} dx + \lambda \int_{x_1}^{x_n} \beta \left(\frac{du + \varepsilon\eta}{dx} \right) \frac{d\eta}{dx} dx \quad (D.1)$$

De la definición del operador A

$$\frac{dA(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{x_1}^x (u + \varepsilon\eta) dx = \int_{x_1}^x \eta dx = A\eta$$

sustituyendo en (D.1) y evaluando en $\varepsilon = 0$

$$\left[\frac{dF(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_n} w(Au - y) A\eta dx + \lambda \int_{x_1}^{x_n} \beta \frac{du}{dx} \frac{d\eta}{dx} dx \quad (D.2)$$

Para facilitar el desarrollo primero se integra por partes el primer término del lado derecho:

$$\int_{x_1}^{x_n} w(Au - y) A\eta dx = \{A\eta A[w(Au - y)]\}_{x_1}^{x_n} - \int_{x_1}^{x_n} A[w(Au - y)] \eta dx \quad (D.3)$$

Para continuar usamos la propiedad del operador A aplicado a cualquier función z

$$Az = \int_{x_1}^x z dx = \int_{x_1}^{x_n} z dx - \int_x^{x_n} z dx = \int_{x_1}^{x_n} z dx - A^T z$$

donde $A^T z = \int_x^{x_n} z dx$, sustituyendo en (D.3)

$$\int_{x_1}^{x_n} w(Au - y) A\eta dx = \{A\eta A[w(Au - y)]\}_{x_1}^{x_n} - \int_{x_1}^{x_n} \left[\int_{x_1}^{x_n} w(Au - y) dx' \right] \eta dx + \int_{x_1}^{x_n} A^T [w(Au - y)] \eta dx$$

Note que $\{A\eta A[w(Au - y)]\}_{x_1} = 0$ debido a los límites del operador A y además:

$$\{A\eta A[w(Au - y)]\}_{x_n} = \int_{x_1}^{x_n} w(Au - y) dx \int_{x_1}^{x_n} \eta dx$$

de dónde se tiene que el primer término de (D.2) es:

$$\int_{x_1}^{x_n} w(Au - y)A\eta dx = \int_{x_1}^{x_n} A^T [w(Au - y)] \eta dx \quad (D.4)$$

Para el segundo término se sigue el mismo procedimiento, se aplica integración por partes:

$$\int_{x_1}^{x_n} \beta \frac{du}{dx} \frac{d\eta}{dx} dx = \left[\beta \frac{du}{dx} \eta \right]_{x_1}^{x_n} - \int_{x_1}^{x_n} \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{du}{dx} \right) \eta dx \quad (D.5)$$

sustituyendo (D.4) y (D.5) en (D.5)

$$\left[\frac{dF(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \lambda \left[\beta \frac{du}{dx} \eta \right]_{x_1}^{x_n} + \int_{x_1}^{x_n} A^T w(Au - y) \eta dx - \lambda \int_{x_1}^{x_n} \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{du}{dx} \right) \eta dx \quad (D.6)$$

Para asegurar que

$$\left[\frac{dF(u + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = 0$$

Se satisfaga para cualquier perturbación η se pide que

$$-\lambda \frac{d}{dx} \left(\beta \frac{du}{dx} \right) + A^T [w(Au - y)] = 0$$

dando lugar a la ecuación (4.2). Además el primer término de (D.6) también debe ser cero, lo cual lleva a las condiciones de frontera. 1) Si u es conocida en alguno de los límites entonces cualquier perturbación en esos extremos debe ser cero ($[\eta]_{x_1} = 0$ o $[\eta]^{x_n} = 0$). 2) Se pide que $du/dx = 0$ sea cero en los extremos. 3) Otro tipo de condición de frontera que se ha probado exitosamente es $du/dx = \nu u$.

D.2. Discretización de (4.2)

Para resolver la ecuación (4.2) se usan los nodos $\{\chi_i \mid i = 1 \dots m\}$ donde $\chi_1 = x_1$ y $\chi_m = x_n$. Usando diferencias finitas centrales para las derivadas en el nodo i

$$-\frac{\lambda}{\chi_{i+1/2} - \chi_{i-1/2}} \left[\beta_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{\chi_{i+1} - \chi_i} - \beta_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{\chi_{i+1} - \chi_i} \right] + \{A^T [wAu]\}_i = \{A^T wy\}_i$$

Acomodando términos y usando $\chi_{i+1/2} = (\chi_{i+1} + \chi_i)/2$ y $\chi_{i-1/2} = (\chi_i + \chi_{i-1})/2$

$$\frac{2\lambda}{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}} \left[-\frac{\beta_{i+1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} u_{i+1} + \left(\frac{\beta_{i+1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} + \frac{\beta_{i-1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} \right) u_i - \frac{\beta_{i-1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} u_{i-1} \right] + \int_{\chi_i}^{\chi_n} wAu dx = \int_{\chi_i}^{\chi_n} wy dx$$

Si se definen los coeficientes

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{2\lambda}{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}} \frac{\beta_{i-1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} \\ c_i &= -\frac{2\lambda}{\chi_{i+1} - \chi_{i-1}} \frac{\beta_{i+1/2}}{\chi_{i+1} - \chi_i} \\ b_i &= -a_i - c_i \end{aligned}$$

Entonces,

$$c_i u_{i+1} + b_i u_i + a_i u_{i-1} + \{A^T [wAu]\}_i = \{A^T wy\}_i \quad (D.7)$$

Para discretizar las integrales se usa el método del trapecio, de forma genérica la aplicación de A a una función z en el punto χ_i es:

$$[Az]_i = \int_{\chi_1}^{\chi_i} z dx$$

Para $i = 1$ se tiene: $[Az]_1 = 0$. Para $i > 1$ se usa la regla del trapecio:

$$[Az]_i = \sum_{j=2}^i \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}) (\chi_j - \chi_{j-1}) \quad (\text{D.8})$$

la suma puede expresarse de la siguiente forma:

$$[Az]_i = \left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right) z_1 + \sum_{j=2}^{i-1} \left(\frac{\chi_{j+1} - \chi_{j-1}}{2} \right) z_j + \left(\frac{\chi_i - \chi_{i-1}}{2} \right) z_i$$

esta última ecuación se puede interpretar como el producto $\mathbf{A}z$, donde \mathbf{A} es una matriz triangular inferior y z el vector $z = (z_1, \dots, z_m)^T$. Las entradas de \mathbf{A} están dadas por

$$A_{ij} = \begin{cases} \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} & j = 1, i > 1 \\ \frac{\chi_{j+1} - \chi_{j-1}}{2} & 1 < j < i, i > 1 \\ \frac{\chi_j - \chi_{j-1}}{2} & j = i, i > 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

De forma similar para el operador A^T se tiene $[A^T z]_m = 0$ y para $i < m$

$$[A^T z]_i = \int_{\chi_i}^{\chi_m} z dx$$

usando la regla del trapecio

$$[A^T z]_i = \sum_{j=i+1}^m \frac{1}{2} (z_j + z_{j-1}) (\chi_j - \chi_{j-1}) \quad (\text{D.9})$$

la sumatoria puede expresarse de la siguiente manera:

$$[Az]_i = z_i \frac{\chi_2 - \chi_1}{2} + \sum_{j=i+1}^{m-1} z_j \left(\frac{\chi_{j+1} - \chi_{j-1}}{2} \right) + z_m \frac{\chi_m - \chi_{m-1}}{2}$$

de donde se puede definir la matriz triangular superior \mathbf{A}^T con entradas:

$$A_{ij}^T = \begin{cases} \frac{\chi_m - \chi_{m-1}}{2} & j = m, i < m \\ \frac{\chi_{j+1} - \chi_{j-1}}{2} & i < j < m, i < m \\ \frac{\chi_j - \chi_{j-1}}{2} & j = i, i < m \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Entonces la ecuación (D.7) puede escribirse en términos de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{A}^T como

$$c_i u_{i+1} + b_i u_i + a_i u_{i-1} + [\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}]_i = [\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}]_i \quad (\text{D.10})$$

o en forma más compacta:

$$(\mathbf{D} + \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{d} \quad (\text{D.11})$$

donde \mathbf{W} es una matriz diagonal con $W_{ii} = w(\chi_i) = w_i$, $\mathbf{u} = (u_1 \dots u_m)$, $\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$ y $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_m)$.

Si la solución del sistema lineal (4.4) o (D.11) se calcula usando un método iterativo que requiere el producto matriz-vector, entonces esta operación se puede hacer de forma eficiente sin necesidad de ensamblar explícitamente las matrices \mathbf{D} , \mathbf{A}^T , \mathbf{W} , y \mathbf{A} . Para esto se usa directamente la regla del trapecio y los coeficientes a_i , b_i y c_i .

La componente i -ésima del producto matriz vector está dada por la ecuación (D.7) solo hace falta calcular $\{A^T [wAu]\}_i$ que en notación vectorial es igual a $[A^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}]_i$.

Para esto primero se calcula $\mathbf{A} \mathbf{u}$, que, usando la regla del trapecio (D.8), se define $[\mathbf{A} \mathbf{u}]_1 = 0$ y la componente i -ésima ($i > 1$) se puede escribir como:

$$[\mathbf{A} \mathbf{u}]_i = [\mathbf{A} \mathbf{u}]_{i-1} + \frac{1}{2} (u_i + u_{i-1}) (\chi_i - \chi_{i-1})$$

Es decir la componente i -ésima es la suma de la componente $i - 1$ más otro término. Si denotamos al $\mathbf{A} \mathbf{u}$ como el vector resultado del producto, y lo guardamos en un arreglo temporal, entonces la componente i -ésima ($i < m$) del producto $\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}$ se puede calcular con:

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}]_i = [\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}]_{i+1} + \frac{1}{2} (w_{i+1} [\mathbf{A} \mathbf{u}]_{i+1} + w_i [\mathbf{A} \mathbf{u}]_i) (\chi_{i+1} - \chi_i)$$

con $[\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{u}]_m = 0$. Aplicando estas fórmulas es posible calcular el producto de forma eficiente ya que se necesitan del orden de $O(m)$ operaciones aritméticas en total.

De la misma forma se puede calcular el lado derecho $\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$, la componente i -ésima es:

$$[\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}]_i = [\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}]_{i+1} + \frac{1}{2} (w_{i+1} y_{i+1} + w_i y_i) (\chi_{i+1} - \chi_i)$$