



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TENSOR GEOMÉTRICO CUÁNTICO DESCRITO A  
PARTIR DEL FORMALISMO DE LA INTEGRAL DE  
TRAYECTORIA.

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

OCTAVIO HIDALGO ARCOS

TUTOR

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER.



CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., AGOSTO 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi familia y amigos

# Agradecimientos

Al Dr. José David Vergara Oliver por su paciencia, enseñanzas y guía para la realización de ésta tesis.

Al M. en C. Daniel Yaithd Olivas Arcos por resolver dudas técnicas y aclarar mis ideas.

A la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM, DGAPA, por el apoyo económico a la presente investigación, mediante el proyecto PAPIIT-IN-103919.

Al Dr. Chumin Wang Chen, al Dr. José Antonio Rafael, al Dr. Alberto Güijosa Hidalgo y al Dr. Mariano Chernicoff Minsberg, por su valioso tiempo invertido en la revisión y mejora del trabajo de esta tesis.

A mis padres, que entre muchas otras cosas han sufrido conmigo las pericias de éste proyecto.

A mis amigos, que de una u otra forma me apoyaron a lo largo de la carrera y la realización de ésta tesis.

# Resumen

Se introdujo un nuevo método para calcular el tensor geométrico cuántico usando la integral de trayectoria, éste procedimiento permite también calcular tanto la curvatura de Berry como la métrica de información cuántica. En el desarrollo original, hecho a partir del concepto de fidelidad, uno puede hacer éste cálculo si se conoce la función de onda del sistema cuántico correspondiente. Lo innovador de éste método es que este mismo cálculo se puede realizar a partir de las funciones de Green del sistema. Se resuelve el problema del oscilador armónico con una deformación lineal usando ambos métodos para comparar los resultados obtenidos, encontrando que ambos resultados coinciden.

Una ventaja notable de usar este método es que ahora se pueden considerar sistemas más complejos que no tienen solución exacta. El ejemplo principal en esta tesis es el oscilador anarmónico, para ello fue necesario hacer el desarrollo perturbativo de las funciones de Green. Como prueba, se regresó al problema del oscilador armónico con una deformación lineal haciendo la perturbación hasta orden  $\lambda^2$ , concluyendo que los resultados coinciden con los obtenidos previamente. Además se calculó el determinante de la métrica de información cuántica para éste problema y se concluyó que, debido a que el determinante no depende de  $J$ , que es el parámetro de deformación, el oscilador no se acopla con la perturbación hecha por el término  $Jq$ . Una vez hecho este ejemplo, se resolvió el oscilador con la deformación cuártica hasta orden  $\lambda^2$ , siendo éste un cálculo original de la tesis. Además se calculó el determinante de la métrica de información cuántica dando como resultado un polinomio de segundo grado en  $\lambda$ , se obtuvieron las raíces del polinomio y se encontró que éstas son complejas, lo que implica que la métrica es no-degenerada para todo valor de  $\lambda$ , al final se hizo una comparación con el determinante del mismo sistema pero cuya

perturbación fue hecha hasta orden  $\lambda$ .

Finalmente, se hizo la extensión del problema para una teoría cuántica de campo escalar. Primero se dedujo el tensor geométrico cuántico para esta nueva teoría y se propuso el campo escalar libre como primer ejemplo, nuevamente se calculó la métrica de información cuántica con la diferencia de que ahora se tienen variables espaciales, haciendo que un nuevo parámetro aparezca en la solución. Posteriormente, se propuso el ejemplo del campo escalar con una perturbación lineal  $J\phi$ , aquí se observó que los resultados no difieren mucho al ejemplo resuelto en mecánica cuántica y, nuevamente, el determinante de la métrica no depende de la perturbación  $J\phi$ .

# Abstract

A new method was introduced to calculate the quantum geometric tensor using the path integral, this procedure also allow us to calculate both the curvature of Berry and the metric of quantum information. In the original development, made from the concept of fidelity, one can make this calculation if the wave function of the corresponding quantum system is known. The innovative of this method is that this same calculation can be made from the Green functions of the system, the problem of the harmonic oscillator is solved with a linear deformation using both methods to compare the results obtained, it was found that both results coincide.

One notable advantage of using this method is that we can now consider more complex systems that do not have an exact solution. The main example in this thesis is the anharmonic oscillator, for this it was necessary to make the perturbative development of Green's functions. As proof, we returned to the problem of the harmonic oscillator with a linear deformation making the perturbative development up to  $\lambda^2$  orden, concluding that the results coincide with those previously obtained, the determinant of the quantum information metric was calculated for this problem and it was concluded that, because the determinant does not depend on  $J$ , which is the deformation parameter, implies that the oscillator does not match the perturbation made by the term  $Jq$ . Once this example was done, the oscillator was resolved with a quartic deformation up to  $\lambda^2$  order, this being an original calculation of the thesis, in addition the determinant of the quantum information metric was calculated resulting in a polynomial of second degree in  $\lambda$ , the roots of the polynomial were obtained and they were found to be complex, which implies that the metric is non-degenerate for all value of  $\lambda$ , at the end a comparison was made with the determinant of the same system but

whose perturbation was done up to order  $\lambda$ .

Finally, the extension of the problem for a quantum scalar field theory was made. First the quantum geometric tensor was deduced for this new theory and the free scalar field was proposed as the first example, again the quantum information metric was calculated with the difference that now there are spatial variables, making a new parameter appear in the solution. Later, the example of the scalar field with a linear perturbation  $J\phi$  was proposed, here it was observed that the results do not differ much from the quantum mechanics example and, again, the determinant of the metric does not depend on the perturbation  $J\phi$ .

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Prólogo</b>	<b>XII</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares.</b>	<b>5</b>
2.1. Integral de Trayectoria. . . . .	6
2.2. Integral de Trayectoria para la propagación de una Partícula Libre. . . . .	15
2.3. Funciones de Green. . . . .	17
<b>3. Información Cuántica</b>	<b>24</b>
3.1. Teoría de la información clásica. . . . .	24
3.1.1. Modelo estadístico. . . . .	24
3.1.2. Entropía de Shannon. . . . .	25
3.2. Teoría de la información cuántica. . . . .	26
3.2.1. Cúbit. . . . .	26
3.2.2. Entropía de Von Neumann. . . . .	26
3.3. Fase en Mecánica Cuántica. . . . .	27
3.4. Métrica de información cuántica y curvatura de Berry. . . . .	29
3.5. Deducción de la Fase de Berry. . . . .	32

3.6.	La curvatura de Berry para el oscilador armónico generalizado. . . . .	36
<b>4.</b>	<b>El tensor geométrico cuántico.</b>	<b>39</b>
4.1.	Dedución del tensor geométrico complejo cuántico con el formalismo de la integral de trayectoria. . . . .	39
4.2.	Sistemas en mecánica cuántica: la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry . . . . .	48
<b>5.</b>	<b>El oscilador armónico: una deformación lineal.</b>	<b>50</b>
5.1.	Solución de la métrica de información cuántica haciendo uso de la función de onda. . . . .	50
5.2.	Solución de la métrica de información cuántica haciendo uso de las funciones generadoras tomando a $J = cte.$ . . . . .	53
5.2.1.	Componente $g_{JJ}$ . . . . .	59
5.2.2.	Componente $g_{J\alpha}$ . . . . .	61
5.2.3.	Componente $g_{\alpha\alpha}$ . . . . .	64
<b>6.</b>	<b>La función de Green de interacción.</b>	<b>69</b>
6.1.	Desarrollo perturbativo de las funciones de Green. . . . .	69
6.2.	Solución con las funciones de Green perturbadas para el oscilador armónico con una perturbación lineal. . . . .	72
6.2.1.	Componente $g_{JJ}$ . . . . .	72
6.2.2.	Componente $g_{J\alpha}$ . . . . .	76
6.2.3.	Componente $g_{\alpha\alpha}$ . . . . .	78
<b>7.</b>	<b>El oscilador anarmónico.</b>	<b>82</b>
7.1.	Componente $g_{\alpha\alpha}$ . . . . .	83
7.2.	Componente $g_{\lambda\alpha}$ . . . . .	90
7.3.	Componente $g_{\lambda\lambda}$ . . . . .	95
<b>8.</b>	<b>El tensor geométrico cuántico para una teoría de campo cuántico escalar.</b>	<b>101</b>
8.1.	Concepto de campo. . . . .	101

8.1.1. Campo Clásico. . . . .	102
8.1.2. Campo Cuántico. . . . .	103
8.2. Deducción del tensor geométrico cuántico para una teoría cuántica de campos. . . . .	105
8.3. El tensor geométrico cuántico para un campo escalar. . . . .	110
8.4. El tensor geométrico cuántico para un campo escalar con una perturbación lineal. . . . .	112
8.4.1. Componente $g_{JJ}$ . . . . .	114
8.4.2. Componente $g_{J\alpha}$ . . . . .	115
8.4.3. Componente $g_{\alpha\alpha}$ . . . . .	116
<b>9. Conclusiones</b>	<b>118</b>
<b>A. Componente <math>g_{\alpha\alpha}</math> del oscilador anarmónico a orden <math>\lambda^2</math>.</b>	<b>121</b>
<b>B. Componente <math>g_{\lambda\alpha}</math> del oscilador anarmónico a orden <math>\lambda^2</math>.</b>	<b>123</b>
<b>C. Componente <math>g_{\lambda\lambda}</math> del oscilador anarmónico.</b>	<b>126</b>
C.1. Orden $\lambda$ . . . . .	127
C.2. Orden $\lambda^2$ . . . . .	128

# Índice de figuras

2.1. Primera partición del intervalo temporal, a este orden el intervalo esta dividido en dos . . . . .	10
2.2. Partición del intervalo temporal después de hacer este procedimiento $N$ veces, a este orden el intervalo esta dividido en $N + 1$ partes . . . . .	10
5.1. Contorno de integración para $\tau - \tau' < 0$ . . . . .	57
7.1. Diagrama de Feynman para la componente $g_{\alpha\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden 0. . . . .	87
7.2. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\alpha\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden $\lambda$ . . . . .	88
7.3. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\alpha\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden $\lambda^2$ . . . . .	90
7.4. Diagrama de Feynman para la componente $g_{\lambda\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden 0. . . . .	93
7.5. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\lambda\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden $\lambda$ . . . . .	94
7.6. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\lambda\alpha}$ de la métrica de información cuántica a orden $\lambda^2$ . . . . .	94
7.7. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\lambda\lambda}$ de la métrica de información cuántica a orden 0. . . . .	97
7.8. Diagramas de Feynman para la componente $g_{\lambda\lambda}$ de la métrica de información cuántica a orden $\lambda$ . . . . .	98

7.9. Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\lambda}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda^2$ . . . . . 99

# Prólogo

Esta tesis presenta una nueva propuesta para calcular el tensor geométrico cuántico usando la integral de trayectoria, que permite calcular también la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry.

En los capítulos dos y tres se revisará toda la teoría necesaria que será fundamental para hacer la construcción del tensor geométrico cuántico con la integral de trayectoria. Para probar este nuevo método se tratará el ejemplo de un oscilador armónico con una deformación lineal usando este método y el método tradicional, que es usando el concepto de fidelidad.

Después, se propone el problema del oscilador anarmónico para resolverse utilizando la teoría perturbativa del método propuesto y se hará una observación en el determinante de la métrica de información cuántica.

Posteriormente, se revisa el concepto de campo en el capítulo ocho y se generaliza el resultado obtenido del tensor geométrico cuántico para la teoría cuántica de campos, para probar el desarrollo obtenido se proponen los sistemas de campo escalar y campo escalar con una perturbación lineal.

Finalmente, en las conclusiones se constata que este método recupera los resultados del desarrollo hecho a partir de la fidelidad [1] y que además es un buen método para resolver problemas más complejos.

# Capítulo 1

## Introducción.

A principios del siglo XX, se descubrieron una series de problemas, tales como la radiación de cuerpo negro, el efecto Compton, entre otros, para los cuales la física no tenía una respuesta. La complejidad de los problemas abordados se tradujo en una búsqueda que abarcó varias décadas de trabajo intenso y profundamente creativo, desarrollado por una multitud de científicos, entre quienes se cuentan figuras excepcionalmente brillantes, y que culminó con el establecimiento de una nueva teoría física para describir el comportamiento de los microsistemas, ésta nueva teoría es la mecánica cuántica.

Para que la mecánica cuántica se pudiera asentar fue necesario aceptar ideas tales como la estructura atómica de la materia, la teoría de Maxwell no describe de forma rigurosa la interacción entre un átomo y un campo de radiación, etc. Tal vez la idea más radical de esta teoría es suponer que la energía para estos sistemas microscópicos necesariamente tiene que considerarse en un espectro discreto y no continuo. Esta idea fue desarrollada a partir de la catástrofe ultravioleta por Planck.

La mecánica cuántica ha sido muy útil para describir el comportamiento de los átomos, moléculas, las interacciones entre éstos e incluso algunas de las propiedades macroscópicas de algunos materiales como es el magnetismo. A pesar de ello, una de las aplicaciones más reciente y que en los últimos años ha tomado mucha fuerza es la información cuántica, que es el tema central de esta tesis.

La información cuántica ha sido utilizada recientemente en la física teórica como una herramienta para la teoría de cuerdas, así como en la rama del estado sólido y materia condensada[2]. En los últimos años se ha aplicado tanto en la fidelidad como en el tensor geométrico cuántico, objeto principal de estudio en esta tesis, para predecir transiciones de fase, la distancia entre dos estados cuánticos y la geometría del espacio de configuraciones.

Peres, en 1984[3] introdujo el concepto de fidelidad, que en un principio se pensó como una medida de la estabilidad de un sistema cuántico al ser perturbado. Sin embargo, hoy en día se entiende a la fidelidad como una medida de la “cercanía” entre dos estados cuánticos, predecir transiciones de fase cuánticas ó cuantificar la calidad de un circuito cuántico. Cabe aclarar que la fidelidad no es una métrica en el espacio de matrices de densidad, sino que se usa para definir la métrica de Bures sobre éste espacio[4].

Existen otros conceptos relacionados con la fidelidad que involucran también la noción de distancia en el espacio de parámetros como es el tensor geométrico cuántico, la métrica de Fisher y la métrica de Bures. En el tensor geométrico cuántico encontramos dos cantidades que son la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry, éstas son las partes real e imaginaria de éste tensor y se estudian en esta tesis.

En el capítulo dos, se presentan los conceptos preliminares para desarrollar esta tesis. Primero se hará la construcción de la integral de trayectoria para así poder resolver, como ejemplo ilustrativo, el problema de una partícula libre; posteriormente se hace una introducción a las funciones de Green y al concepto de producto cronológico, que serán de mucha utilidad en los últimos capítulos.

En el capítulo tres, se revisa brevemente la teoría de la información, pasando por el concepto de "fase", que está relacionado con la interferencia cuántica; después se deducen la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry a partir del concepto de fidelidad; finalmente se calcula la curvatura de Berry para el oscilador armónico generalizado.

En el capítulo cuatro, se deduce el tensor geométrico cuántico con el formalismo de la integral de trayectoria que se desarrolló en el primer capítulo y, posteriormente, se deducen nuevamente la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry pero sin hacer uso de la fidelidad, éstas se obtienen como las componentes real e imaginaria del tensor geométrico cuántico.

En el capítulo cinco, se resuelve el problema del oscilador armónico con una perturbación lineal  $Jq$ . Primero se calcula la métrica de información cuántica de manera exacta usando la función de onda del oscilador, posteriormente se resuelve el mismo problema pero haciendo uso de las funciones generadoras para así poder calcular las funciones de Green a partir de derivadas variacionales de éstas suponiendo  $J = cte.$ , esto es importante ya que la mayoría de los problemas de ésta índole se resuelven suponiendo  $J = 0$ .

En el capítulo seis, se hace el desarrollo perturbativo de las funciones de Green, la motivación de ésto es resolver problemas con perturbaciones más complejas, ésta es la función de Green de interacción y para probar su eficacia se resuelve el mismo problema del capítulo cuatro. En este capítulo se calcula el determinante de la métrica de información cuántica, mostrando que el oscilador no se acopla con la perturbación  $J$ .

En el capítulo siete, se calcula el tensor geométrico cuántico para el oscilador anarmónico. A la Lagrangiana del oscilador armónico libre se le agrega un término de la forma  $\lambda q^4/4!$ , este problema no tiene solución exacta, por lo que se usará todo lo aprendido en el capítulo seis, haciendo la expansión de las funciones de Green hasta orden  $\lambda^2$  para poder calcular el tensor geométrico cuántico. Al final del capítulo se calcula el determinante de la métrica de información cuántica y se resuelve el polinomio resultante del determinante para  $\lambda$ . El resultado obtenido se compara con la expansión a primer orden de [5].

En el capítulo ocho, se hace el desarrollo del tensor geométrico cuántico para una teoría cuántica de campo escalar. Para ello se revisan los conceptos de campo clásico y cuántico,

posteriormente se hace la deducción del tensor geométrico cuántico para una teoría cuántica de campos y obtener así las expresiones para la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry. Posteriormente, se propone la densidad Lagrangiana del campo escalar y se resuelve el tensor geométrico cuántico para éste sistema. Finalmente, al sistema anterior se le añade una perturbación lineal de la forma  $J\varphi$ , se resuelve el tensor geométrico cuántico y se calcula el determinante de éste, obteniendo resultados similares al capítulo seis.

# Capítulo 2

## Preliminares.

En este capítulo se revisan los conceptos preliminares que serán necesarios para el desarrollo de la tesis, así como una motivación para el estudio del tensor geométrico cuántico. En la primera sección se hace la construcción de la integral de trayectoria de Feynman, que es una formulación de la mecánica cuántica cuyo enfoque es medir la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague entre dos puntos  $a$  y  $b$  en un tiempo  $t$ , esta cantidad es calculada asignando una amplitud a cada trayectoria posible que puede tomar la partícula, después éstas amplitudes se suman para calcular la amplitud de probabilidad total, uno pensaría que al hacer esta suma el resultado no convergería, sin embargo recordemos que hay trayectorias con más probabilidad que otras, de modo que las diferencias de fase se cancelan con todas aquellas trayectorias con menor probabilidad.

En la segunda sección se utiliza el formalismo desarrollado en la primera sección para resolver la propagación de una partícula libre, es decir, se toma la lagrangiana  $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ .

En la sección tres se aprovecha el resultado de la sección anterior para motivar la introducción a las funciones de Green extendiendo el conocimiento de la integral de trayectoria, llegando a una expresión que nos será muy útil en el desarrollo de los capítulos posteriores.

## 2.1. Integral de Trayectoria.

En mecánica clásica, conocer la trayectoria que sigue una partícula bajo ciertas restricciones es relativamente fácil de obtener siempre y cuando se conozcan las condiciones iniciales de la partícula, como por ejemplo la posición y momento de ésta a un tiempo anterior del cual deseamos describir la trayectoria. Sin embargo en mecánica cuántica no pasa esto porque se habla de la amplitud de probabilidad correspondiente a dicha partícula. La teoría de Hamilton-Jacobi es la expresión clásica cuyo límite es el más directo para obtener la mecánica cuántica. Consideremos el siguiente Hamiltoniano:

$$-p_t = H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \quad (2.1)$$

Hay una prescripción simple para obtener la ecuación de onda de Schrödinger:

$$H(x, -i\hbar\partial_x)\psi = \left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \right) \partial_x^2 + V(x) \right] \psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (2.2)$$

La prescripción es reemplazar la aparición de  $H$  en (2.1) con  $i\hbar\partial/\partial t$  y reemplazar  $p_i$  por  $-i\hbar\partial/\partial x^i = -i\hbar\partial_x$  haciéndola actuar sobre un estado arbitrario  $\psi(x, t)$ .

Esta ecuación es diferente a la de Hamilton-Jacobi, por un lado (2.2) es lineal en  $\psi$  e involucra segundas derivadas en esta misma variable  $\psi : p^2 \rightarrow -\hbar^2\partial_x^2$ . De hecho, hay una correspondencia con la mecánica clásica; por separación de variables, la ecuación (2.2) tiene soluciones para  $\psi$  cuya dependencia temporal es  $e^{-iEt/\hbar}$  en el caso en el que la energía se conserva, además debido a que  $\hbar$  es pequeña, la frecuencia circular  $E/\hbar$  es muy grande para un sistema clásico. La tasa de cambio de  $\psi$  en la dirección espacial es también muy grande, ya que  $p/\hbar$  es grande también para un sistema macroscópico. En este punto podemos hacer la aproximación por WKB

$$\psi \sim A(x)e^{i\phi(x,t)/\hbar}. \quad (2.3)$$

La ventaja de esta aproximación es que podemos suponer que la fase  $\phi$  varía rápidamente

$$\frac{|\phi_i|}{|\phi|} \gg 1. \quad (2.4)$$

pero tanto las derivadas de  $\phi$  como de  $A(x)$  son pequeñas. Sabemos además que

$$\phi(x, t) = \phi(x) - Et. \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (A e^{i\phi(x)/\hbar - iEt/\hbar}) = e^{i\phi(x)/\hbar - iEt/\hbar} EA \\ \partial_x^2 \psi &= \partial_x \left( A i \frac{\phi_{,x}}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} + A_{,x} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} A \phi_{,xx} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} - \frac{A \phi_{,x}^2}{\hbar^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} + \frac{i \phi_{,x}}{\hbar} A_{,x} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} \\ &\quad + A_{,xx} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} + \frac{i}{\hbar} A_{,x} \phi_{,x} e^{\frac{i}{\hbar}(\phi - Et)} \\ &\Rightarrow \left\{ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left[ \frac{i}{\hbar} \phi_{,xx} - \frac{1}{\hbar^2} \phi_{,x}^2 + \frac{2i}{\hbar} \frac{A_{,x} \phi_{,x}}{A} + \frac{A_{,xx}}{A} \right] + V \right\} = E, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $\phi_{,x} = \partial_x \phi$ , y debido a las suposiciones hechas anteriormente los términos dominantes son

$$\frac{1}{2m} \phi_{,x}^2 + V = E. \quad (2.7)$$

Esta es la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo. Si se satisface la ecuación anterior, podemos exigir que el siguiente orden de  $\hbar$  también se anule, es decir

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{A_{,x}}{A} \right) + \frac{\phi_{,xx}}{\phi_{,x}} &= 0 \\ \Rightarrow A^2 &\propto \frac{1}{\phi_{,x}} \\ \Rightarrow 2AA_{,x} &\propto -\frac{\phi_{,xx}}{\phi_{,x}^2} \\ \Rightarrow 2 \frac{A_{,x}}{A} &\propto -\frac{\phi_{,xx}}{\phi_{,x}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por lo que

$$\phi_{,x} = \sqrt{2m(E - V)}. \quad (2.9)$$

Entonces

$$A = A_0[2m(E - V)]^{-1/4}. \quad (2.10)$$

Y para  $\psi$  tenemos

$$\psi \approx A_0[2m(E - V)]^{-1/4} e^{iEt/\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \int^x [2m(E-V)]^{1/2} dy} \quad (2.11)$$

En las exponenciales de (2.11) el argumento es de la forma  $p dq$ , lo cual se reescribe como  $p \dot{q} dt$ , así que, finalmente se tiene la siguiente aproximación:

$$\psi \approx A_0[2m(E - V)]^{-1/4} e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad (2.12)$$

Con esto, la ecuación de Hamilton-Jacobi corresponde solo al término de orden cero en  $\hbar$  en la aproximación WKB.

Ya hemos podido dar una expresión para la función de onda a partir de una teoría clásica, sin embargo esto aún no cumple con el hecho de que es necesario hablar de una densidad de probabilidad y no de una sola trayectoria. Motivados por este hecho, supongamos que tenemos una función de onda  $\psi(q, t)$ , en el límite clásico la fase de esta función de onda es la acción clásica. Este hecho sugiere que ambos objetos están relacionados, más aún, es bien sabido que la trayectoria clásica minimiza la acción clásica, pero en cuántica esto no tiene sentido, entonces en la relación *acción-fase* no basta considerar una sola trayectoria, sino todas las posibles trayectorias. Es decir, buscamos integrar en todo el espacio todas las trayectorias posibles con una función de peso, que es la acción, por lo que la función de onda se puede expresar como: [6]

$$\psi(q, t) \sim \sum_{\text{trayectorias}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S\right). \quad (2.13)$$

Recordemos que la acción está dada por

$$S = \int_{t_0}^t d\tau L(\tau, q, \dot{q}). \quad (2.14)$$

Esta acción satisface  $\delta S = 0$ . En el cálculo tradicional, para resolver una integral se hace una partición en el intervalo en el cual se está integrando. De manera análoga, para una integral funcional se hace exactamente lo mismo pero con la diferencia de que el intervalo está dado por  $[q_0, q]$  junto con el intervalo temporal  $[t_0, t]$  y la función a calcular es  $\psi(q, t)$  que es igual al Kernel de Schrödinger evaluado en  $K(q, t; q_0, t_0)$ .

Sabemos que el Kernel del operador de Schrödinger esta dado por

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \langle q | \hat{U}(t, t_0) | q_0 \rangle = \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | q_0 \rangle, \quad (2.15)$$

donde  $\hat{U}(t, t_0)$  es el operador de evolución y se puede escribir en términos de la exponencial para Hamiltonianos conservativos. Ahora, multiplicamos por la relación de completitud con base en el cuadro de Heisenberg en la ecuación (2.15), esta relación esta dada por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1| = 1. \quad (2.16)$$

Por lo que ahora el Kernel se escribe como

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (2.17)$$

Al agregar esta relación, dividimos el intervalo del tiempo en dos (figura 2.1) de  $t_0$  a  $t_1$  y de  $t_1$  a  $t$

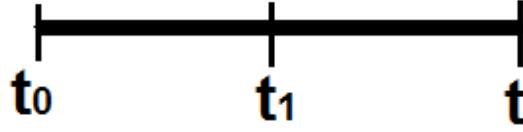


Figura 2.1: Primera partición del intervalo temporal, a este orden el intervalo esta dividido en dos

Podemos hacer este proceso una segunda vez, de modo que el Kernel queda como

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_2 dq_1 \langle q, t | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle . \quad (2.18)$$

Si esto se hace  $N$ -veces, es decir, particionamos el tiempo en  $N + 1$  pedazos, el Kernel queda finalmente como

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \dots dq_1 \langle q, t | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle , \quad (2.19)$$

y la partición en el tiempo queda como en la figura 2.1

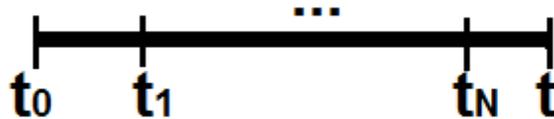


Figura 2.2: Partición del intervalo temporal después de hacer este procedimiento  $N$  veces, a este orden el intervalo esta dividido en  $N + 1$  partes

Consideremos ahora el  $i$ -ésimo término  $\langle q_{i+1}, t_{i+1} | q_i, t_i \rangle = \langle q_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_i \rangle$ , donde  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  y hagamos la expansión en serie de Taylor de la exponencial y al introducir la relación de completitud en el espacio de momentos, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle q_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_i \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_i \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} \langle q_{i+1} | p_i \rangle \langle p_i | 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}(\hat{p}_i, \hat{q}_i) | q_i \rangle.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Concentrémonos primero en el término del Hamiltoniano. Si sus términos fueran sumas de  $p$  y  $q$  independientes, entonces se tendría que

$$\langle p_i | \hat{H}(\hat{p}_i, \hat{q}_i) | q_i \rangle = H(p_i, q_i) \langle p_i | q_i \rangle. \tag{2.21}$$

Pero podría pasar que en el Hamiltoniano hubiesen términos mezclados de  $p$  y  $q$ , es por ello que se debe suponer que los términos mezclados son sumas de permutaciones de los productos de  $p$  y  $q$ . Otra forma de resolver este problema es asumir lo que se conoce como orden estándar, en donde se supone que todos los operadores  $\hat{p}$  se alinean a la izquierda y todos los operadores  $\hat{q}$  a la derecha, en este caso resulta [7]:

$$\langle p_i | \hat{H}(\hat{p}_i, \hat{q}_i) | q_i \rangle = H(p_i, q_i) \langle p_i | q_i \rangle. \tag{2.22}$$

De modo que (2.22) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\langle q_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_i \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_i (q_{i+1} - q_i)} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_i, q_i) \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_i}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_i, q_i) + \frac{i}{\hbar} p_i (q_{i+1} - q_i)}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Haciendo este procedimiento  $N + 1$  veces se tiene que

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^N p_i (q_{i+1} - q_i)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{i=0}^N H(p_i, q_i)}. \tag{2.24}$$

Sabemos que  $q_{i+1} = q(t_{i+1}) = q(t_i + \Delta t)$ , de modo que al hacer su expansión a primer orden está dada por

$$q_{i+1} = q(t_i) + \Delta t \dot{q}(t_i) = q_i + \Delta t \dot{q}_i, \quad (2.25)$$

y se define

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \dots dq_N &= \mathcal{D}q \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} &= \mathcal{D}p, \end{aligned} \quad (2.26)$$

de esta forma, al sustituir (2.25) en (2.24), e introduciendo el límite en la integral, el propagador queda como

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \lim_{N \rightarrow \infty} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^N (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i)) \Delta t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t (p \dot{q} - H(q, p))} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Es necesario hacer algunas observaciones respecto a la convergencia de la partición temporal de la amplitud en el límite continuo, donde las particiones más finas  $\frac{t_b - t_a}{N+1} \rightarrow 0$ . Esta convergencia se puede probar a partir de la energía cinética  $T = p^2/2m$  sólo si el potencial  $V(q, t)$  es lo suficientemente suave. Para potenciales independientes del tiempo, la fórmula de Trotter [8] nos ayuda a resolver esta convergencia:

$$e^{-i(t_b - t_a)\hat{H}/\hbar} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( e^{-i\frac{t_b - t_a}{N+1}\hat{V}/\hbar} e^{-i\frac{t_b - t_a}{N+1}\hat{T}/\hbar} \right)^{N+1}. \quad (2.28)$$

Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff [8] la ecuación (2.28) se reescribe como

$$e^{-i(t_b - t_a)\hat{H}/\hbar} \equiv \left( e^{-i\frac{t_b - t_a}{N+1}\hat{V}/\hbar} e^{-i\frac{t_b - t_a}{N+1}\hat{T}/\hbar} e^{-i(\frac{t_b - t_a}{N+1})^2 \hat{X}/\hbar^2} \right)^{N+1}, \quad (2.29)$$

donde el operador  $\hat{X}$  es la expansión

$$\hat{X} \equiv \frac{i}{2}[\hat{V}, \hat{T}] - \frac{t_b - t_a}{(N+1)\hbar} \left( \frac{1}{6}[\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3}[[\hat{v}, \hat{T}], \hat{T}] \right) + \mathcal{O} \left( \frac{(t_b - t_a)^2}{(N+1)^2} \right). \quad (2.30)$$

La fórmula de Trotter implica que el término del operador  $\hat{X}$  que es proporcional a  $\frac{(t_b - t_a)^2}{(N+1)^2}$  no contribuye en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$ . Para asegurar esto, es suficiente saber que la fórmula de Trotter se cumple para operadores que están acotados por debajo.

La asimetría de las integrales funcionales sobre  $q$  y  $p$  son consecuencia de mantener fijos los puntos finales en el espacio de posiciones. Existe una posibilidad de hacer esto mismo en el espacio de momentos manteniendo fijo  $p_b$  y  $p_a$ . El operador de evolución temporal asociado se obtiene de la misma forma que en el espacio de posiciones

$$\langle p, t | p_0, t_0 \rangle \equiv \langle p | \hat{U}(t, t_0) | p_0 \rangle, \quad (2.31)$$

y al igual que en el caso de las  $q$ 's, se hace una partición en el tiempo y se inserta un uno usando la relación de completitud

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} |p, t\rangle \langle p, t| = 1 \quad (2.32)$$

De modo que al insertar la relación de completitud se tiene

$$\begin{aligned} \langle p, t | p_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi\hbar} \langle p, t | p_1, t_1 \rangle \langle p_1, t_1 | p_0, t_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi\hbar)^2} \langle p, t | p_2, t_2 \rangle \langle p_2, t_2 | p_1, t_1 \rangle \langle p_1, t_1 | p_0, t_0 \rangle \\ &\vdots \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^N} \langle p, t | p_N, t_N \rangle \langle p_N, t_N | p_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \times \\ &\times \dots \langle p_1, t_1 | p_0, t_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Además se tiene que

$$\langle p_{i+1}, t_{i+1} | p_i, t_i \rangle = \langle p_{i+1} | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | p_i \rangle. \quad (2.34)$$

Así, la ecuación (2.34) se reescribe como

$$\begin{aligned} \langle p_{i+1}, t_{i+1} | p_i, t_i \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \langle p_{i+1}, t_{i+1} | q_i \rangle \langle q_i | e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | p_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \langle p_{i+1}, t_{i+1} | q_i \rangle \langle q_i | 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H} | p_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \langle p_{i+1}, t_{i+1} | q_i \rangle \left( \langle q_i | p_i \rangle - \langle q_i | \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H} | p_i \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} p_{i+1} q_i}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left( \langle q_i | p_i \rangle - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(q_i, p_i) \langle q_i | p_i \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} p_{i+1} q_i}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left( 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(q_i, p_i) \right) \langle q_i | p_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_i \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{i+1} - p_i) q_i}}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H(q_i, p_i)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_i}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} (p_{i+1} - p_i) q_i} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H(q_i, p_i)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Haciendo este procedimiento a cada subintervalo de la partición, la ecuación (2.33) esta dada por

$$\begin{aligned} \langle p, t | p_0, t_0 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \frac{dq_1 \dots dq_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} dp_N \dots dp_1 [e^{-\frac{i}{\hbar} q_N (p - p_N)} \dots \times \\ &\quad \times \dots e^{-\frac{i}{\hbar} q_0 (p_1 - p_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_N, q_N)} \dots e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H(p_0, q_0)}], \end{aligned} \quad (2.36)$$

al reagrupar todos los términos se tiene

$$\begin{aligned} \langle p, t | p_0, t_0 \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \frac{dq_1 \dots dq_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} dp_N \dots dp_1 e^{-\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^N q_i (p_{i+1} - p_i)} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{i=0}^N H(p_i, q_i)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Definamos las siguientes diferenciales:

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} dp_1 \dots dp_N &= \mathcal{D}p \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dq_0 \dots dq_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} &= \mathcal{D}q,\end{aligned}\tag{2.38}$$

y expandimos los momentos alrededor de  $t$ , es decir

$$p_{i+1} = p(t_{i+1}) = p(t_i + \Delta t) = p(t_i) + \Delta t \dot{p}(t_i).\tag{2.39}$$

Por lo tanto, la integral de trayectoria para el espacio de momentos se escribe como

$$\langle p, t | p_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt (q\dot{p} + H)}.\tag{2.40}$$

Es importante hacer la siguiente comparación: con la ecuación (2.27), se dejan fijos los estados  $|q, t\rangle$  y  $|q_0, t_0\rangle$  en la representación de coordenadas, la trayectoria puede ser cualquiera siempre y cuando estdos dos estados no se cambien. Por otro lado, con la ecuación (2.40) los estados que se dejan fijos son  $|p, t\rangle$  y  $|p_0, t_0\rangle$  en la representación de momentos.

## 2.2. Integral de Trayectoria para la propagación de una Partícula Libre.

Como ejemplo calcularemos la integral de trayectoria para una partícula libre en una dimensión. Como bien sabemos, la Lagrangiana de una partícula libre está dada por

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2,\tag{2.41}$$

por lo que debemos calcular

$$\begin{aligned}
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int \frac{m}{2} \dot{q}^2 d\tau} \\
&= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int d\tau (p\dot{q} - \frac{p^2}{2m})} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \int dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^N \Delta\tau \left( p_i \dot{q}_i - \frac{p_i^2}{2m} \right)},
\end{aligned} \tag{2.42}$$

donde  $\Delta\tau = \frac{t-t_0}{N+1}$ . Consideremos la siguiente suma:  $\sum_{i=0}^N \Delta\tau p_i \dot{q}_i$ . Ésta se puede reordenar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N \Delta\tau p_i \dot{q}_i &= \sum_{i=0}^N \Delta\tau p_i \frac{\Delta q_i}{\Delta\tau} \\
&= \sum_{i=0}^N p_i (q_{i+1} - q_i) \\
&= p_0(q_1 - q_0) + p_1(q_2 - q_1) + \dots + p_N(q - q_N) \\
&= p_0 q_0 - p_N q + q_1(p_0 - p_1) + \dots + q_N(p_{N-1} - p_N).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Además notemos que:

$$\int \frac{dq_i}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} q_i (p_{i-1} - p_i)} = \langle p_{i-1} | p_i \rangle = \delta(p_{i-1} - p_i). \tag{2.44}$$

De modo que la ecuación (2.42) se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int \frac{dp_0}{2\pi\hbar} dp_1 dp_2 \dots dp_N \delta(p_0 - p_1) \dots \delta(p_{N-1} - p_N) e^{\frac{i}{\hbar} p_N q - p_0 q_0 - \sum_{i=0}^N \Delta\tau \frac{p_i^2}{2m}} \\
&= \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_N q - p_N q_0 - (N+1)\Delta\tau \frac{p_N^2}{2m}} \\
&= \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_N (q - q_0) - (t - t_0) \frac{p_N^2}{2m}} \\
&= \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i(t-t_0)}{2m\hbar} \left( p_N^2 - \frac{2m}{t-t_0} p_N (q - q_0) + \frac{m^2}{(t-t_0)^2} (q - q_0)^2 - \frac{m^2}{(t-t_0)^2} (q - q_0)^2 \right)} \\
&= \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i(t-t_0)}{2m\hbar} \left( p_N - \frac{m}{t-t_0} (q - q_0) \right)^2} e^{\frac{im}{2\hbar(t-t_0)} (q - q_0)^2} \\
&= e^{\frac{im}{2\hbar(t-t_0)} (q - q_0)^2} \int \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i(t-t_0)}{2m\hbar} \left( p_N - \frac{m}{t-t_0} (q - q_0) \right)^2}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Notemos que la ecuación (2.45) tiene la forma de una integral Gaussiana; por lo que se tiene

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = e^{\frac{im}{2\hbar(t-t_0)} (q - q_0)^2} \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{(2\pi\hbar)^2 i(t-t_0)}}, \tag{2.46}$$

por lo tanto, el Kernel para una partícula libre está dado por

$$K_f(q, t; q_0, t_0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar (t - t_0)}} e^{\frac{im}{2\hbar(t-t_0)} (q - q_0)^2}. \tag{2.47}$$

En la expresión anterior, notemos que el término en la exponencial corresponde al valor de la acción clásica

$$S_{cl} = \frac{m}{2} \frac{(q - q_0)^2}{t - t_0}, \tag{2.48}$$

y solo aparecerán correcciones cuánticas a este factor para términos del tipo  $q^n$  con  $n > 2$ .

### 2.3. Funciones de Green.

Consideremos el elemento de matriz de un operador que actúa sobre un intervalo de tiempo  $t_0 \leq t_j \leq t$

$$\hat{Q}(t) = \langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle, \quad (2.49)$$

y agregamos la relación de completéz al tiempo  $t_j$  (2.16), de modo que el elemento de matriz se escribe como

$$\begin{aligned} \langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \langle q, t | q_j, t_j \rangle \langle q_j, t_j | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \langle q, t | q_j, t_j \rangle q(t_j) \langle q_j, t_j | q_0, t_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ahora, consideremos el braket  $\langle q, t | q_j, t_j \rangle$  y multipliquémoslo por  $N - (j + 1)$  relaciones de completéz, de modo que tenemos el siguiente arreglo

$$\langle q, t | q_j, t_j \rangle = \int dq_N \dots dq_{j+1} \langle q, t | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle. \quad (2.51)$$

De la misma forma se hace para  $\langle q_j, t_j | q_0, t_0 \rangle$ :

$$\langle q_j, t_j | q_0, t_0 \rangle = \int dq_{j-1} \dots dq_1 \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \langle q, t | q_0, t_0 \rangle, \quad (2.52)$$

por lo que el elemento de matriz se reescribe como

$$\begin{aligned} \langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle &= \int dq_j \int dq_N \dots dq_{j+1} \int dq_{j-1} \dots dq_1 \times \\ &\times \langle q, t | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle q(t_j) \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \times \\ &\times \dots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Sean

$$\begin{aligned}
\int \mathcal{D}q(\tau_2) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^t d\tau_2 L\right) &= \int dq_N \dots dq_{j+1} \langle q, t | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle \\
\int \mathcal{D}q(\tau_1) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_j} d\tau_1 L\right) &= \int dq_{j-1} \dots dq_1 \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \langle q, t | q_0, t_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

de este modo la ecuación (2.53) se reescribe como

$$\langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle = \int dq_j \int \mathcal{D}q(\tau_2) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^t d\tau_2 L\right) q(t_j) \int \mathcal{D}q(\tau_1) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_j} d\tau_1 L\right), \tag{2.55}$$

notemos que el intervalo que se está tomando no se incluye a  $q_j$ , por lo que al agregar éste se completa todo el intervalo y se tiene:

$$\mathcal{D}q(\tau) = \mathcal{D}q(\tau_2) dq_j \mathcal{D}q(\tau_1), \tag{2.56}$$

el elemento de matriz de (2.53) finalmente se escribe como

$$\begin{aligned}
\langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle &= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_j) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^t d\tau_2 L\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_j} d\tau_1 L\right) \\
&= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_j) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

El desarrollo anterior se puede generalizar al producto de dos operadores, para  $\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1)$  con  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$  el elemento de matriz queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\langle q, t | \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle &= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_2)q(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L} \\
&= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1)q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Hay una sutil diferencia en la ecuación (2.58), el primer resultado es para  $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$ , mientras que el segundo es para  $t_0 \leq t_2 \leq t_1 \leq t$ . Por ello definimos el producto cronológico  $T$  como:

$$T(\hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1)) = \begin{cases} \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) & \text{si } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (2.59)$$

Por lo que para el producto de  $n$ -operadores, el elemento de matriz es el siguiente:

$$\langle q, t | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}. \quad (2.60)$$

Una vez que ya tenemos nuestro producto cronológico, podemos definir la función de Green de la siguiente manera

$$G_n(t_1, \dots, t_n) = \langle 0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | 0 \rangle. \quad (2.61)$$

donde el estado  $|0\rangle$  es el estado de vacío del sistema cuyo Hamiltoniano  $\hat{H}$  tiene energía mínima  $E_0$ , en términos de la ecuación de eigenvalores

$$\hat{H} |0\rangle = E_0 |0\rangle. \quad (2.62)$$

Para poder calcular la función de Green (2.61) en términos de las integrales de trayectoria recordemos que:

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | q_0 \rangle, \quad (2.63)$$

si multiplicamos por un operador de unidad  $\sum_n |n\rangle \langle n|$  en (2.63), donde  $|n\rangle$  es el eigenvector de  $\hat{H}$  y cumple  $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \sum_n \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | n \rangle \langle n | q_0 \rangle \\
&= \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_n} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle \\
&= e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)E_0} \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)(E_n - E_0)} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Haciendo el siguiente cambio de variable  $T = t - t_0 \rightarrow T_\eta = T(1 - i\eta)$ , se tiene entonces:

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}T_\eta E_0} \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{i}{\hbar}T_\eta(E_n - E_0)} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle, \tag{2.65}$$

si hacemos el límite cuando  $T \rightarrow \infty$ , el único término que tomamos en cuenta es  $\langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle$ .

Dando así una aproximación a (2.64):

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta \approx e^{-\frac{i}{\hbar}T_\eta E_0} \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle. \tag{2.66}$$

Consideremos ahora  $t_a$  y  $t_b$  tales que  $t_0 < t_a < t_1 < t_n < t_b < t$ , junto con las relaciones de completitud:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a |q_a, t_a\rangle \langle q_a, t_a| \\
\mathbb{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_b |q_b, t_b\rangle \langle q_b, t_b|,
\end{aligned} \tag{2.67}$$

además supongamos que el braket  $\langle q, t | q_b, t_b \rangle$  evoluciona en el tiempo con un Hamiltoniano  $\hat{H}'$  y el braket  $\langle q_a, t_a | q_0, t_0 \rangle$  evoluciona en el tiempo con un Hamiltoniano  $\hat{H}$ , i.e.

$$\begin{aligned}
\langle q, t | q_b, t_b \rangle &= \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_b)\hat{H}'} | q_b \rangle \approx e^{-\frac{i}{\hbar}T_\eta E'_0} \langle q | \Omega_1 \rangle \langle \Omega_1 | q_b \rangle \\
\langle q_a, t_a | q_0, t_0 \rangle &= \langle q_a | e^{-\frac{i}{\hbar}(t_a-t_0)\hat{H}} | q_0 \rangle \approx e^{-\frac{i}{\hbar}T_\eta E_0} \langle q_a | \Omega_0 \rangle \langle \Omega_0 | q_0 \rangle,
\end{aligned} \tag{2.68}$$

donde  $\Omega_1$  corresponde al estado de vacío para el Hamiltoniano  $\hat{H}'$  y  $\Omega_0$  corresponde al estado de vacío para el Hamiltoniano  $\hat{H}$ ,  $T_{\eta b} = (t - t_b)(1 - i\eta)$  y  $T_{\eta a} = (t - t_a)(1 - i\eta)$ . Si insertamos las relaciones de completéz de la ecuación (2.67) en la ecuación (2.60)

$$\begin{aligned} \langle q, t | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle q, t | q_b, t_b \rangle \\ &\times \langle q_b, t_b | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_a, t_a \rangle \\ &\times \langle q_a, t_a | q_0, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.69)$$

y al usar las aproximaciones como en (2.68)

$$\begin{aligned} \langle q, t | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_0, t_0 \rangle &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_b)E'_0(1-i\eta)} \langle q | \Omega_1 \rangle \langle \Omega_1 | q_b \rangle \\ &\times \langle q_b, t_b | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_a, t_a \rangle \\ &\times e^{-\frac{i}{\hbar}(t_a-t_0)E_0(1-i\eta)} \langle q_a | \Omega_0 \rangle \langle \Omega_0 | q_0 \rangle \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b e^{-\frac{i}{\hbar}tE'_0(1-i\eta)} \langle q | \Omega_1 \rangle \langle \Omega_1 | e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}'t_b} | q_b \rangle \\ &\times \langle q_b, t_b | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_a, t_a \rangle \\ &\times \langle q_a | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_a} | \Omega_0 \rangle \langle \Omega_0 | q_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}t_0E_0(1-i\eta)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle q | \Omega_1 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar}tE'_0(1-i\eta)} \langle \Omega_1 | q_b, t_b \rangle \\ &\times \langle q_b, t_b | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_a, t_a \rangle \\ &\times \langle q_a, t_a | \Omega_0 \rangle \langle \Omega_0 | q_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}t_0E_0(1-i\eta)} \\ &= \langle q | \Omega_1 \rangle \langle \Omega_0 | q_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar}(E_0t_0(1-i\eta) - E'_0t(1-i\eta))} \langle \Omega_1 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_{\eta} \\ &= \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_{\eta}} | \Omega_1 \rangle \langle \Omega_0 | e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t_{0\eta}} | q_0 \rangle \langle \Omega_1 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_{\eta} \\ &= \langle q, t | \Omega_1 \rangle_{\eta} \langle \Omega_0 | q_0, t_0 \rangle_{\eta} \langle \Omega_1 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_{\eta} \\ &= \sqrt{Z_1} \sqrt{Z_0} \langle \Omega_1 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Donde  $t_\eta = t(1 - i\eta)$ ,  $t_{0\eta} = t_0(1 - i\eta)$ ,  $\sqrt{Z_1} = \langle q, t | \Omega_1 \rangle_\eta$  y  $\sqrt{Z_0} = \langle \Omega_0 | q_0, t_0 \rangle_\eta$ . La raíz de las  $Z_1, Z_0$  se debe a que no se está tomando todo el intervalo de integración, solo la mitad, para  $Z_0$  se está tomando de  $-\infty$  a 0 y para  $Z_1$  se toma de 0 a  $\infty$ . Además  $Z_0$  es de la forma:

$$Z_0 = \int \mathcal{D}q \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt L \right) \quad (2.71)$$

Ahora, para que nuestra función de Green esté bien definida ésta debe de estar en el mismo estado de vacío, es decir, debemos hacer  $Z_1 = Z_0$ , con lo que tendríamos:

$$\langle q_0, t_0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | q_0, t_0 \rangle = Z_0 \langle \Omega_0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_\eta. \quad (2.72)$$

Al dividir (2.72) entre  $Z_0$  obtenemos la función de Green

$$\begin{aligned} G_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle \Omega_0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_\eta \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty} \frac{\langle \Omega_0 | T(\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n)) | \Omega_0 \rangle_\eta}{\int \mathcal{D}q \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt L \right)} \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{-\frac{i}{\hbar} S[q]}}{\int \mathcal{D}q \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt L \right)}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde

$$S[q] = \int_{t_0(1-i\eta)}^{t(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q}) \quad (2.74)$$

satisface que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty(1-i\eta)} q(t) &= 0 \\ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty(1-i\eta)} q(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Se utilizan estas condiciones de frontera porque son útiles para estudiar la mecánica cuántica a temperatura cero.

# Capítulo 3

## Información Cuántica

Tanto en la mecánica cuántica como en la teoría cuántica de campos, es de vital importancia saber cómo se codifica la información. Para ello es útil contar con dos herramientas para extraer esta información: la métrica de información cuántica y las fases geométricas. La métrica de información cuántica es útil para analizar las transiciones de fase a nivel cuántico, mientras que las fases geométricas controlan un efecto que es clave en la mecánica cuántica: la interferencia cuántica. Es importante recalcar que ambas estructuras son parte del mismo operador geométrico, que es el tensor complejo de geometría cuántica, cuya parte real corresponde a la métrica de información cuántica y su parte imaginaria corresponde a la curvatura de Berry.

### 3.1. Teoría de la información clásica.

Para el estudio de la información cuántica, necesitamos un conocimiento previo de la teoría de la información clásica, tales como: entropía, estadística e información geométrica. Para ello en esta sección se revisarán brevemente dichos conceptos.

#### 3.1.1. Modelo estadístico.

Consideremos una familia  $S$  de distribuciones de probabilidad en un conjunto  $\chi$  usando funciones definidas de la siguiente forma. Si  $\chi$  es un conjunto discreto, entonces una

distribucion de probabilidad es una función  $p : \chi \rightarrow \mathbb{R}$  que cumplen con lo siguiente:

$$p(x) \geq 0, \quad \sum_{x \in \chi} p(x) = 1. \quad (3.1)$$

Supongamos que cada elemento de  $S$  puede ser parametrizado usando  $n$ -variables reales  $[\xi^1, \dots, \xi^n]$ , por lo tanto

$$S = \{p_\xi = p(x; \xi) | \xi = [\xi^1, \dots, \xi^n] \in \Xi\}, \quad (3.2)$$

donde  $\Xi$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y el mapeo  $\xi \rightarrow p_\xi$  es inyectivo y es  $C^\infty$ , de tal modo que se puede derivar respecto de los parámetros. A  $S$  se le llama un modelo estadístico  $n$ -dimensional si cumple con (3.2). Dado un modelo estadístico  $S$ , el mapeo  $\varphi(p_\xi) = \xi$  nos permite considerar a  $\varphi[\xi^i]$  como un sistema coordinado para  $S$ . Supongamos además que tenemos un difeomorfismo  $\psi$  de clase  $C^\infty$  de  $\Xi$  a  $\psi(\Xi)$ , siendo este último un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . De este modo podemos considerar a  $S$  como una variedad diferenciable de clase  $C^\infty$ , con esta propiedad a  $S$  le llamamos una variedad estadística. La idea del modelo estadístico será de utilidad en las secciones posteriores [9].

### 3.1.2. Entropía de Shannon.

La entropía de Shannon es un concepto clave para entender la información clásica. Ésta es introducida en mecánica estadística para estados clásicos  $\rho(x)$  definidos en un espacio fase continuo  $\{x\}$ , donde  $\rho(x)$  es la probabilidad de  $x$  [10]. La entropía de Shannon se define como:

$$S(\rho) = - \sum_x \rho(x) \log \rho(x). \quad (3.3)$$

La entropía de Shannon alcanza su mínimo valor 0 si el estado es puro, es decir, la distribución de probabilidad está dada por una delta de Dirac  $\rho(x) = \delta(x)$ . Toma su valor máximo si el estado es aleatorio:  $\rho(x) = cte$ .

En un estado mezcla la entropía aumenta, es decir:

$$S(w_1\rho_1 + w_2\rho_2) \geq w_1S(\rho_1) + w_2S(\rho_2); \quad w_1 + w_2 = 1 \quad (3.4)$$

La correlación hace que la entropía disminuya. La entropía en un compuesto de dos elementos es menor o igual a la suma de las entropías de cada elemento, la igualdad se tiene cuando los elementos no están correlacionados:

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B) \quad (3.5)$$

## 3.2. Teoría de la información cuántica.

La teoría de información cuántica es similar a teoría clásica. Sin embargo, existe una particular diferencia a la teoría clásica que es el cúbit, que son los portadores de información en más de un sentido. En esta sección estudiaremos el concepto de cúbit y la entropía de Von Neumann.

### 3.2.1. Cúbit.

En términos clásicos, un "bit" se refiere a dos objetos relacionados entre sí pero ambos son distintos. Al bit se le considera la unidad de la información pero en términos físicos también sirve para describir a un sistema con estados distintos. Un cúbit es un sistema cuántico que tiene dos estados ortogonales distintos, llamémoslos  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . A diferencia del bit, un cúbit puede describir la superposición de los estados del sistema cuántico, es decir,  $a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$ , donde  $a_0$  y  $a_1$  son complejos. El cúbit, por lo tanto, es el portador de la información cuántica [11].

### 3.2.2. Entropía de Von Neumann.

Definimos la entropía de Von Neumann de un estado cuántico como:

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho}). \quad (3.6)$$

donde  $\hat{\rho}$  es la matriz de densidad que describe al estado.

La entropía de Von Neumann toma su valor mínimo 0 si el estado es puro, es decir,  $S(|\psi\rangle\langle\psi|) = 0$ . Ésta toma su valor máximo en un estado mixto dado por:  $S(\hat{I}/d) = \log d$ . El estado  $\hat{\rho}$  puede ser escrito como:

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} \rho_{\lambda} |\varphi_{\lambda}\rangle\langle\varphi_{\lambda}|, \quad (3.7)$$

donde  $\rho_{\lambda}$  es la probabilidad de encontrar al sistema en el estado  $|\varphi_{\lambda}\rangle$ . A la matriz  $\hat{\rho}$  también se le llama matriz de densidad. En un estado mezcla la entropía aumenta, es decir:

$$S(w_1\hat{\rho}_1 + w_2\hat{\rho}_2) \geq w_1S(\hat{\rho}_1) + w_2S(\hat{\rho}_2); \quad w_1 + w_2 = 1. \quad (3.8)$$

Al igual que en el caso de la entropía de Shannon, se cumple la siguiente desigualdad para la entropía para la matriz de densidad:

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B). \quad (3.9)$$

### 3.3. Fase en Mecánica Cuántica.

En la aproximación estándar de la mecánica cuántica, los estados cuánticos puros son representados por vectores en un espacio de Hilbert complejo  $\mathcal{H}$ . Cada vector  $\psi \in \mathcal{H}$  describe un estado dado por la colección de valores esperados:

$$A \rightarrow \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (3.10)$$

donde  $A$  es un operador autoadjunto en  $\mathcal{H}$  que representa alguna cantidad física. Por esta razón, dos vectores  $\psi$  y  $\phi$  describen el mismo estado sí y solo sí ambos vectores son linealmente dependientes, de tal forma que  $\psi = \lambda\phi$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Si normalizamos el estado del vector, digamos por  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , entonces aún tenemos la libertad de elegir sobre todos los factores de fase  $e^{i\alpha}$ . Dos vectores normalizados  $\psi$  y  $\phi$  son equivalentes si se cumple:

$$\psi \sim \phi \Leftrightarrow \psi = e^{i\alpha} \phi. \quad (3.11)$$

Por lo tanto, normalmente decimos que el factor de fase  $e^{i\alpha}$  no tiene ningún sentido físico. Por esta razón representamos de manera equivalente los estados cuánticos puros como una proyección unidimensional en  $\mathcal{H}$ :

$$\psi \longrightarrow P_\psi := |\psi\rangle \langle\psi|. \quad (3.12)$$

Con las ecuaciones (3.11) y (3.12) podemos hallar una relación entre  $P_\psi$  y  $P_\phi$ . Sustituyendo (3.11) en (3.12) tenemos que:

$$\begin{aligned} \psi \longrightarrow P_\psi &:= e^{i\alpha} |\psi\rangle \langle\psi| e^{-i\alpha} \\ &= |\psi\rangle \langle\psi|, \end{aligned} \quad (3.13)$$

y por (3.12) tenemos que

$$\phi \longrightarrow P_\phi := |\phi\rangle \langle\phi|. \quad (3.14)$$

Por lo tanto

$$\psi \sim \phi \iff P_\psi = P_\phi. \quad (3.15)$$

Ahora, sabemos que el factor de fase es el que controla el efecto clave de la mecánica cuántica: la interferencia cuántica. Este efecto se rige por la fase relativa. Supongamos dos vectores normalizados  $\psi$  y  $\phi$  tales que  $\psi = e^{i\alpha} \phi$ , a  $\alpha$  se le conoce como la fase relativa entre  $\psi$  y  $\phi$ . La fase relativa o diferencia de fase sí tiene una interpretación física, y por lo tanto puede ser medida. La superposición de dos estados  $\psi \sim \phi$  que difieren solo en la fase  $\alpha$ , esto nos produce la siguiente fórmula de interferencia:

$$I \propto |1 + e^{i\alpha}|^2 = 2(1 + \cos \alpha) = 4 \cos^2(\alpha/2), \quad (3.16)$$

lo que nos permite medir  $\alpha$ . Aquí  $I$  es la interferencia de los estados  $\psi$  y  $\phi$ . Hay una diferencia crucial entre el factor de fase y la fase relativa: en los experimentos de interferencia los factores de fase de  $\psi$  y  $\phi$  son desconocidos y poco relevantes, mientras que  $e^{i\lambda}\psi$  y  $e^{i\lambda}\phi$  producirán la misma interferencia que  $\psi$  y  $\phi$ , de aquí lo único que importa es la fase relativa [12].

### 3.4. Métrica de información cuántica y curvatura de Berry.

En esta sección se revisará de forma breve la deducción del tensor geométrico cuántico, la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry de un sistema cuántico[13]. Para dar un poco de contexto a la métrica de información cuántica, consideremos un modelo estadístico  $n$ -dimensional  $S$ . Dado un punto  $\xi$  podemos definir la matriz de Fisher como  $G(\xi) = g_{ij}(\xi)$ , donde  $g_{ij}$  es la métrica de Fisher y se define como:

$$g_{ij}(\xi) = \int \partial_i l(x; \xi) \partial_j l(x; \xi) p(x; \xi) dx, \quad (3.17)$$

donde  $l(x; \xi) = \log p(x; \xi)$ . La matriz de Fisher es simétrica, así que si consideramos un vector  $n$ -dimensional se tiene:

$$c^T G(\xi) c = \int \left[ \sum_{i=1}^n c^i \partial_i l(x; \xi) \right]^2 p(x; \xi) dx \geq 0. \quad (3.18)$$

Podemos definir ahora un producto interno como  $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ , ésta es la métrica de Fisher o la métrica de información. Consideremos un sistema cuántico en un estado  $|\psi\rangle$ . Más aún, supongamos que el Hamiltoniano del sistema depende explícitamente de ciertos parámetros reales  $\lambda^a$ , con  $a = 1, \dots, N$ , estos parámetros pueden ser momento, masa, tiempo, etc., de modo que el estado se puede expresar en términos de estos parámetros como  $|\psi(\lambda)\rangle$ . Consideremos ahora que el sistema tiene un pequeño cambio de la forma  $\lambda + \delta\lambda$  en uno, varios o todos los parámetros de los cuales depende, por lo que el estado original cambia a  $|\psi(\lambda + \delta\lambda)\rangle$ . La fidelidad  $\mathcal{F}$  de un sistema cuántico es la medida de qué tan cerca están dos estados cuánticos en el espacio de parámetros. Ahora calcularemos esta propiedad a partir de los estos pequeños cambios en el Hamiltoniano. La fidelidad se define como:

$$\mathcal{F}(\lambda, \lambda + \delta\lambda) = |\langle \psi(\lambda + \delta\lambda) | \psi(\lambda) \rangle|. \quad (3.19)$$

Si hacemos una expansión en serie de Taylor del ket  $|\psi(\lambda + \delta\lambda)\rangle$  obtenemos:

$$|\psi(\lambda + \delta\lambda)\rangle = |\psi(\lambda)\rangle + |\partial_a \psi(\lambda)\rangle \delta\lambda^a + \frac{1}{2} |\partial_a \partial_b \psi(\lambda)\rangle \delta\lambda^a \delta\lambda^b + \dots \quad (3.20)$$

Por lo que el bracket completo de (3.19) luce como

$$\langle \psi(\lambda) | \psi(\lambda + \delta\lambda) \rangle = 1 + \langle \psi(\lambda) | \partial_a \psi(\lambda) \rangle \delta\lambda^a + \frac{1}{2} \langle \psi(\lambda) | \partial_a \partial_b \psi(\lambda) \rangle \delta\lambda^a \delta\lambda^b + \dots \quad (3.21)$$

Al sacar el módulo de (3.21) el término lineal se anula, restando solo el primer y tercer término, ya que si se hace una expansión en serie de Taylor alrededor de  $\lambda$  aparece el segundo término con signo opuesto.

$$\mathcal{F}(\lambda, \lambda + \delta\lambda) = 1 - \frac{1}{2} G_{ab} \delta\lambda^a \delta\lambda^b + \dots, \quad (3.22)$$

donde  $G_{ab}$  es el Tensor Geométrico Cuántico complejo, que esta dado por:

$$G_{ab} = \langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle - \langle \partial_a \psi | \psi \rangle \langle \psi | \partial_b \psi \rangle. \quad (3.23)$$

La ecuación (3.23) al ser una expresión compleja puede ser dividida en sus partes real e imaginaria. Recordando que la parte real de una expresión compleja está dada por:

$$\text{Re } G_{ab} = \frac{1}{2} (G_{ab} + G_{ab}^*), \quad (3.24)$$

y tomando en cuenta la hermiticidad de los operadores que constituyen al tensor, se tiene que para la parte real de (3.23)

$$g_{ab} = \text{Re } G_{ab} = \frac{1}{2} (\langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle + \langle \partial_b \psi | \partial_a \psi \rangle) - \langle \partial_a \psi | \psi \rangle \langle \psi | \partial_b \psi \rangle. \quad (3.25)$$

Ésta es la forma explícita de la métrica de información cuántica, que es usada para medir distancias a lo largo de trayectorias en el espacio de parámetros. Mientras que su parte imaginaria está dada por:

$$\text{Im } G_{ab} = \frac{1}{2i} (G_{ab} - G_{ab}^*), \quad (3.26)$$

por lo que la curvatura de Berry se reescribe explícitamente como:

$$\frac{1}{2} F_{ab} = \text{Im } G_{ab} = \frac{1}{2i} (\langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle - \langle \partial_b \psi | \partial_a \psi \rangle). \quad (3.27)$$

Consideremos ahora una cantidad puramente imaginaria  $\langle \psi | \partial_b \psi \rangle$ . Definimos la conexión de Berry como:

$$A_b = -i \langle \psi | \partial_b \psi \rangle. \quad (3.28)$$

Si sacamos la derivada de (3.28):

$$\partial_a A_b = -i \langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle. \quad (3.29)$$

De modo que, si calculamos  $\partial_a A_b - \partial_b A_a$  se tiene:

$$\text{Im } G_{ab} = \frac{1}{i} (\langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle - \langle \partial_b \psi | \partial_a \psi \rangle), \quad (3.30)$$

que es justo la curvatura de Berry de (3.28), por lo que podemos definir  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ . La conexión de Berry se relaciona directamente con la fase de Berry  $\gamma(\mathcal{C})$  de un sistema, dado como:

$$\gamma(\mathcal{C}) = \oint_{\mathcal{C}} A \quad (3.31)$$

donde hemos definido la 1-forma  $A = A_b dX^b$  y  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada en el espacio de parámetros. La fase de Berry  $\gamma(\mathcal{C})$  describe una evolución adiabática cíclica a lo largo de la trayectoria  $\mathcal{C}$ . Usando el teorema de Stokes, podemos reescribir (3.31) como:

$$\gamma_C = \int_{\Sigma} F, \quad (3.32)$$

donde  $\Sigma$  es una 2-variedad tal que  $\partial\Sigma = C$  y donde hemos definido la 2-forma[14]:

$$F = \frac{1}{2} F_{ab} dX^a \wedge dX^b. \quad (3.33)$$

### 3.5. Deducción de la Fase de Berry.

En esta sección se hará la deducción de la fase de Berry desde un punto de vista más geométrico y sin usar el concepto de fidelidad. Consideremos una curva  $C$  sobre una variedad de parámetros externos  $M$ :

$$t \rightarrow x_t \in M, \quad (3.34)$$

y sea  $H(x)$  un Hamiltoniano que depende de los parámetros físicos  $x$ , esto para garantizar la existencia de estados no-mezclados. Supongamos que  $H(x)$  cambia adiabáticamente como función del tiempo a lo largo de la curva  $C$  y que para cualquier  $x \in M$  el Hamiltoniano tiene un espectro puramente discreto, es decir, la ecuación de Schrödinger se escribe entonces como

$$H(x) |n(x)\rangle = E_n(x) |n(x)\rangle. \quad (3.35)$$

Más aún, supongamos que los eigenvectores  $|n(x)\rangle$  son inyectivos como funciones de  $M$ , i.e.,

$$x \in M \rightarrow |n(x)\rangle \in \mathcal{H}, \quad (3.36)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el espacio de Hilbert del sistema. Para encontrar el proceso adiabático del sistema supongamos que el  $n$ -ésimo eigenvalor  $E_n(x)$  es no-degenerado y sea  $P_n(x) := |n(x)\rangle \langle n(x)|$  su correspondiente proyección unidimensional en el espacio  $\mathcal{H}_n(x)$ :

$$\mathcal{H}_n(x) := \text{Rango} P_n(x) = \{\alpha |n(x)\rangle \mid \alpha \in \mathbb{C}\}. \quad (3.37)$$

Claramente el eigenvector es único módulo fases:

$$|n\rangle \rightarrow |n'(x)\rangle = e^{i\alpha_n(x)} |n(x)\rangle, \quad (3.38)$$

donde  $\alpha_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ . El cambio de fase de (3.38) no modifica el valor de  $P_n(x)$ . Supongamos que  $\psi(0) = |n(x_0)\rangle$ ,  $\psi(t)$  se mantiene en el  $n$ -ésimo eigenespacio de  $H(x_t)$  en el proceso adiabático, es decir,

$$\psi(t) \in \mathcal{H}_n(x_t). \quad (3.39)$$

Por lo tanto, si el proceso es cíclico, entonces  $\psi(0)$  y  $\psi(T)$  pertenecen al espacio  $\mathcal{H}_n(x_0)$  y esto implica que solo difieren por el factor de fase:

$$\psi(T) = e^{i\gamma} \psi(0), \quad (3.40)$$

donde  $\gamma$  está dada por

$$\gamma = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(t) dt\right) e^{i\phi_n(t)} |n(x_t)\rangle, \quad (3.41)$$

donde  $\phi_n$  satisface lo siguiente:

$$\dot{\phi}_n = i \langle n | \dot{n} \rangle. \quad (3.42)$$

En principio uno pensaría que  $\gamma$  está dada solo por el argumento de la exponencial, pero nos estamos olvidando completamente de la geometría, que es el origen de estos factores extra. Estos dependen justamente de la geometría de la variedad  $M$  y de la trayectoria  $C$ . La ecuación (3.42) define la siguiente 1-forma en  $M$ :

$$\begin{aligned}
A^{(n)} &:= i \langle n | dn \rangle \\
&= A_k^{(n)} dx^k \\
&= i \langle n | \partial_k n \rangle dx^k,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

como (3.43) es púramente imaginaria, ésta se puede reescribir como:

$$A^{(n)} = -\text{Im} \langle n | dn \rangle, \tag{3.44}$$

e integrando (3.42) se obtiene

$$\phi_n(t) = i \int_0^t \langle n(\tau) | \dot{n}(\tau) \rangle d\tau = \int_C A^{(n)}, \tag{3.45}$$

donde integramos la 1-forma  $A^{(n)}$  a lo largo de la curva  $C$  entre  $x_0$  y  $x_1$ . Por lo que la fase total se divide en dos partes:

$$\gamma = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau + \gamma_n(C), \tag{3.46}$$

donde la integral representa la fase dinámica y la segunda parte de  $\gamma$  representa la fase geométrica. La cantidad  $\gamma_n(C)$  define la *Fase de Berry*, que corresponde al proceso adiabático cerrado a lo largo de  $C$ . Con el teorema de Stokes, la Fase de Berry se reescribe como:

$$\gamma_n(C) = \int_{\Sigma} F^{(n)}, \tag{3.47}$$

donde  $\Sigma$  es una subvariedad de  $M$  arbitraria 2-dimensional, de modo que  $\partial\Sigma = C$ , y

$$F^{(n)} = dA^{(n)} = -\text{Im} \langle dn | \wedge | dn \rangle. \tag{3.48}$$

En coordenadas locales en  $M$  ( $x^1, \dots, x^n$ ), se tiene que

$$F^{(n)} = \frac{1}{2} F_{ij}^{(n)} dx^i \wedge dx^j, \tag{3.49}$$

con

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im} \left( \langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle \right). \quad (3.50)$$

Al emplear la transformación de fase de (3.38), la cantidad  $A^{(n)}$  transforma como

$$A^{(n)} \rightarrow A'^{(n)} = A^{(n)} - d\alpha_n, \quad (3.51)$$

ó

$$A'_k{}^{(n)} = A_k{}^{(n)} - \partial_k \alpha_n, \quad (3.52)$$

es decir, transforma de la misma manera que un potencial vectorial lo hace en electrodinámica clásica. Como  $d^2\alpha_n = 0$ , la 2-forma  $F^{(n)}$  es invariante de norma, y en conjunto con (3.47), la fase de Berry también es invariante de norma. Siguiendo la analogía con la electrodinámica clásica,  $F^{(n)}$  sería el campo magnético para el potencial  $A^{(n)}$  y la fase de Berry es el flujo magnético

$$\text{Fase de Berry } \gamma_n(\partial\Sigma) = \text{flujo de } F^{(n)} \text{ a traves de } \Sigma, \quad (3.53)$$

Finalmente, expresemos a  $F^{(n)}$  en términos de los eigenvalores de energía  $E_k$ . A la ecuación (3.48) insertemos una matriz identidad de la forma

$$\mathbb{I} = \sum_m |m\rangle \langle m|. \quad (3.54)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= -\text{Im} \sum_m \langle dn|m\rangle \wedge \langle m|dn\rangle \\ &= -\text{Im} \sum_{m \neq n} \langle dn|m\rangle \wedge \langle m|dn\rangle \\ &= -\text{Im} \sum_{m \neq n} \overline{\langle m|d|n\rangle} \wedge \langle m|d|n\rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

El eigenvalor de la ecuación (3.35) implica que para  $m \neq n$ ,

$$\langle m|d|n\rangle = \frac{\langle m|dH|n\rangle}{E_n - E_m}, \quad (3.56)$$

que junto con (3.55), tenemos[12]

$$F^{(n)} = -\text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle n|dH|m\rangle \wedge \langle m|dH|n\rangle}{(E_m - E_n)^2}. \quad (3.57)$$

La ecuación (3.57) muestra que  $F^{(n)}$  tiene puntos singulares en  $x \in M$ , donde  $H(x)$  sufre degeneraciones, es decir,  $E_n(x) = E_m(x)$ .

### 3.6. La curvatura de Berry para el oscilador armónico generalizado.

Consideremos el siguiente Hamiltoniano que define al oscilador armónico generalizado:

$$\hat{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{2} [X\hat{q}^2 + Y(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) + Z\hat{p}^2]. \quad (3.58)$$

Es evidente que el Hamiltoniano depende de un conjunto de parámetros externos  $\mathbf{R} := (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ . Recordemos que la ecuación de eigenvalores está dada por:

$$\hat{H}(\mathbf{R})\psi_n(\mathbf{R}) = E_n(\mathbf{R})\psi_n(\mathbf{R}). \quad (3.59)$$

Al sustituir el Hamiltoniano, (3.59) se reescribe como:

$$-\frac{Z\hbar^2}{2} \frac{d^2\psi_n}{dq^2} - i\hbar Y q \frac{d\psi_n}{dq} + \left( \frac{Xq^2}{2} - i\hbar \frac{Y}{2} \right) \psi_n = E_n \psi_n. \quad (3.60)$$

La solución normalizada a la ecuación anterior es:

$$\psi_n(q; \mathbf{R}) = \left( \frac{\omega}{Z\hbar} \right)^{1/4} \chi_n \left( q \sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}} \right) \exp \left( -\frac{iYq^2}{2Z\hbar} \right), \quad (3.61)$$

donde se ha definido

$$\omega = (XZ - Y^2)^{1/2}, \quad (3.62)$$

y  $\chi_n(x)$  está definida como:

$$\chi_n(x) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n(x) = 0. \quad (3.63)$$

con  $H_n(x)$  los polinomios de Hermite. Debido a que  $\omega$  siempre es positivo, esto implica que  $XZ > Y^2$ , lo cual significa que la correspondiente variedad  $M$  se define a partir del siguiente conjunto:

$$M := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 | XZ > Y^2\}. \quad (3.64)$$

Los eigenvalores de la energía son los usuales:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.65)$$

Ahora, si sustituimos la función de onda (3.61) en la ecuación (3.48) se tiene:

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= \text{Im } d_{\mathbf{R}} \int dq \psi_n^*(q, \mathbf{R}) d_{\mathbf{R}} \psi_n(q, \mathbf{R}) \\ &= -\frac{1}{2\hbar} d_{\mathbf{R}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dq \chi^2 \left( q \sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}} \right) q^2 d_{\mathbf{R}} \left( \frac{Y}{Z} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Haciendo el cambio de variable  $\xi = q \sqrt{\frac{\omega}{Z\hbar}}$  y usando la siguiente propiedad de la función de Hermite:

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \xi^2 \chi^2(x) = n + \frac{1}{2}, \quad (3.67)$$

obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(\mathbf{R}) &= -\frac{n + \frac{1}{2}}{2} d_{\mathbf{R}} \left( \frac{Z}{\omega} \right) \wedge d_{\mathbf{R}} \left( \frac{Y}{Z} \right) \\
&= \frac{n + \frac{1}{2}}{2} \frac{X d_{\mathbf{R}} Y \wedge d_{\mathbf{R}} Z + Y d_{\mathbf{R}} Z \wedge d_{\mathbf{R}} X + Z d_{\mathbf{R}} X \wedge d_{\mathbf{R}} Y}{4(XZ - Y^2)^{3/2}},
\end{aligned} \tag{3.68}$$

y la fase de Berry para un proceso adiabático cerrado es

$$\gamma_n(C) = \int_{\Sigma} F^{(n)}, \tag{3.69}$$

donde  $\Sigma$  es una superficie de dos dimensiones en  $M$  con  $C$  como frontera.

# Capítulo 4

## El tensor geométrico cuántico.

Como vimos en el capítulo anterior, la evolución de un proceso adiabático da lugar a una 2-forma  $F^{(n)} \in \Lambda^2(M)$ , donde  $M$  es una variedad de parámetros externos definida por (3.50). Éste es un tensor antisimétrico que es invariante bajo la transformación de norma (3.38) y define la curvatura de Berry de su correspondiente  $n$ -ésimo haz espectral. Existe otro tensor invariante de norma sobre la variedad  $M$ , a éste se le llama el tensor geométrico cuántico.

### 4.1. Deducción del tensor geométrico complejo cuántico con el formalismo de la integral de trayectoria.

Consideremos un sistema en mecánica cuántica definido por una Lagrangiana  $L_0$  en el intervalo de tiempo Euclídeo  $(-\infty, 0)$ . Entonces podemos considerar una situación en la cual se deforme el sistema original a un tiempo  $\tau = 0$ . Esta deformación se hace añadiendo a la Lagrangiana original  $L_0$  términos de la forma  $\delta\lambda^a \hat{O}_a$ , cuyos índices de los parámetros son  $a = 1, \dots, n$ , y donde  $\hat{O}_a$  representa a los operadores de deformación y  $\delta\lambda^a$  son parámetros reales asociados a estas deformaciones. En este contexto debemos considerar situaciones en las cuales la Lagrangiana original  $L_0$  tenga una dependencia explícita en los parámetros físicos  $\lambda^a$  como bien pueden serlo la posición, el momento, la frecuencia, etc. De este modo, el sistema deformado final surge de pequeñas variaciones de estos paráme-

tros de la forma  $\lambda^a \rightarrow \lambda^a + \delta\lambda^a$ , con lo que se obtiene una Lagrangiana perturbada  $L_1$  para el tiempo Euclideo restante  $(0, \infty)$ , dado explícitamente por

$$L_1 = L_0 + \delta\lambda^a \hat{O}_a. \quad (4.1)$$

Asumiendo que el sistema original con Lagrangiana  $L_0$  tiene un estado base  $|0_0\rangle$  y al sistema deformado le corresponde un estado base  $|0_1\rangle$ . Definimos la fidelidad del estado base como el valor absoluto de la superposición entre ambos estados a tiempo infinito:

$$\mathcal{F}(\lambda, \lambda + \delta\lambda) \equiv |\langle 0_1, \tau \rightarrow \infty | 0_0, \tau \rightarrow -\infty \rangle|. \quad (4.2)$$

La fidelidad nos da una medida del cambio efectuado en el sistema tomando en cuenta los términos de deformación. Ahora consideremos un estado genérico  $|q\rangle$  así como su superposición con el estado original  $|0_0\rangle$ . En el formalismo de la integral de trayectoria, esto se puede obtener de la observación realizada en (2.66), que es equivalente a evolucionar el sistema en tiempo Euclideo de  $\tau = -\infty$  donde se pone el estado original hasta  $\tau = 0$ . Podemos escribir la amplitud  $\langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle$  como:

$$\begin{aligned} \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle &= \sum_n \langle q_1, t_1 | n \rangle \langle n | q_0, t_0 \rangle \\ &= \sum_{n, n'} \langle q_1 | e^{-it_1 E_{n'}^1} | n' \rangle \langle n' | n \rangle \langle n | e^{it_0 E_n^0} | q_0 \rangle, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde los subíndices 0 y 1 se refieren a la Lagrangiana que describe la teoría. Hacemos ahora una rotación de Wick

$$t = -i\tau, \quad (4.4)$$

haciendo este cambio, las exponenciales se convierten en:

$$e^{-it_1 E_{n'}^1} \rightarrow e^{-\tau_1 E_{n'}^1}, \quad e^{-it_0 E_n^0} \rightarrow e^{\tau_0 E_n^0}, \quad (4.5)$$

debido a que siempre podemos ajustar a  $E_n^1$  y  $E_n^0$  para que sean mayores a cero, todas las exponenciales tienden a cero al hacer el los límites:

$$\tau_f \rightarrow \infty, \quad \tau_i \rightarrow -\infty, \quad (4.6)$$

y las energías en el estado base dominan en la suma, así que podemos quedarnos solo con los términos del estado base:

$$\begin{aligned} \langle q_1, \infty | q_0, -\infty \rangle &= e^{-\tau_1 E_0^1} e^{\tau_0 E_0^0} \langle q_1 | 0_1 \rangle \langle 0_1 | 0_0 \rangle \langle 0_0 | q_0 \rangle \\ &= \langle q_1, \infty | 0_1 \rangle \langle 0_1 | 0_0 \rangle \langle 0_0 | q_0, -\infty \rangle. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Con esto obtenemos:

$$\langle 0_1 | 0_0 \rangle = \frac{\langle q_1, \infty | q_0, -\infty \rangle}{\langle q_1, \infty | 0_1 \rangle \langle 0_0 | q_0, -\infty \rangle}. \quad (4.8)$$

Analizamos cada término. Al primer término le insertaremos una relación de completitud de la forma  $\mathbb{I} = \int dq^0 |q^0\rangle \langle q^0|^1$ :

$$\begin{aligned} \langle q_1, \infty | q_0, -\infty \rangle &= \int dq^0 \langle q_1, \infty | q^0 \rangle \langle q^0 | q_0, -\infty \rangle \\ &= \int dq^0 \int_{q(t=0)=q^0}^{q_1(\infty)} \mathcal{D}q e^{-\int_0^\infty d\tau' L_1} \int_{q_0(-\infty)}^{q(t=0)=q^0} \mathcal{D}q e^{-\int_{-\infty}^0 d\tau' L_0} \quad (4.9) \\ &= \int \mathcal{D}q \exp \left( - \int d\tau L_0 - \int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a \right). \end{aligned}$$

Ahora debemos aclarar que en la ecuación (4.9) y en las siguientes expresiones la Lagrangiana  $L$  corresponde a la Lagrangiana con la rotación de Wick. Ahora para el denominador, notamos que:

$$Z_1 = \int \mathcal{D}q \exp \left( - \int d\tau L_1 \right), \quad (4.10)$$

---

<sup>1</sup>Las integrales que no tienen límites de integración no son indefinidas, éstas van de  $-\infty$  a  $\infty$  pero por simplicidad éstos límites no se escriben

debido a que la teoría tiene invarianza temporal, interpretamos a  $Z_1$  como:

$$\langle q_1, \infty | 0_1 \rangle = \sqrt{Z_1}. \quad (4.11)$$

De este mismo argumento se sigue que:

$$\langle 0_0 | q_0, -\infty \rangle = \sqrt{Z_0}, \quad (4.12)$$

por lo tanto, la superposición se escribe como:

$$\langle 0_1 | 0_0 \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q \left( e^{\int d\tau L_0} e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a} \right)}{\sqrt{Z_0 Z_1}}. \quad (4.13)$$

Para simplificar más las cosas, usamos la definición del valor esperado para un operador  $A$ :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}q \left[ \exp \left( - \int d\tau L_0 \right) A(q) \right]. \quad (4.14)$$

Con esta definición, reescribimos la superposición de los estados de vacío como:

$$\langle 0_1 | 0_0 \rangle = \frac{\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a} \rangle}{\sqrt{\frac{Z_1}{Z_0}}} = \frac{\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a} \rangle}{\left( \frac{\int \mathcal{D}q e^{\int d\tau (L_0 + \delta\lambda^a \mathcal{O}_a)}}{Z_0} \right)^{1/2}}, \quad (4.15)$$

por lo tanto se tiene:

$$\langle 0_1 | 0_0 \rangle = \frac{\langle \exp \left( - \int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a(\tau) \right) \rangle}{\langle \exp \left( - \int d\tau \delta\lambda^a \mathcal{O}_a(\tau) \right) \rangle^{1/2}} \quad (4.16)$$

donde el valor esperado se toma con respecto al estado sin perturbar  $|\Omega_0\rangle$ . Ahora podemos usar la expresión anterior para expandir  $|\langle \Omega_1 | \Omega_0 \rangle|$  en series de  $\delta\lambda^a$ . Consideremos el caso en el que  $\langle \hat{\mathcal{O}}_a \rangle \neq 0$ , supongamos también que las funciones de dos puntos tienen simetría  $T$ , i.e.,  $\langle \hat{\mathcal{O}}_a(-\tau_1) \hat{\mathcal{O}}_b(-\tau_2) \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle$ . Primero, el numerador se puede reescribir

como:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle &= \frac{1}{Z_0[J]} \int \mathcal{D}q e^{-\int d\tau L_0} e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a O_a} \\
&= \frac{1}{Z_0[J]} \int \mathcal{D}q e^{-\int d\tau L_0} \left( 1 - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \hat{O}_a(\tau_1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 d\tau'_1 \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau'_1) \right) \\
&= \frac{1}{Z_0[J]} \left( 1 - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

De forma similar, el denominador se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-\int_{-\infty}^\infty d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle^{-1/2} &= \frac{1}{Z_0[J]^{1/2}} \left( 1 - \delta\lambda^a \int_{-\infty}^\infty d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^\infty d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \right)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Ahora, sea

$$x = \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle - \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle. \tag{4.19}$$

Entonces (4.18) se puede reescribir como

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3), \tag{4.20}$$

de modo que si hacemos la expansión en serie de Taylor y nos quedamos con los términos hasta segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle}{\langle e^{-\int d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle^{1/2}} &= \frac{1}{Z_0[J]^{1/2}} \left[ 1 - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle \right] \times \\
&\quad \left[ 1 + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \int d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \right], \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle}{\langle e^{-\int d\tau \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle^{1/2}} &= \frac{1}{Z_0[J]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \int d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 \int d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle \right]. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

A orden  $\lambda$  se tiene:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \delta\lambda^a \int_{-\infty}^\infty d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \delta\lambda^a \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Debido al hecho de que  $\langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle = \langle \hat{O}_a(-\tau_1) \rangle$  y haciendo el cambio  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$  en la primera integral de la segunda igualdad de la ecuación (4.23), se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\delta\lambda^a \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle + \frac{1}{2}\delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \\
& = \frac{1}{2}\delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle + \frac{1}{2}\delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \\
& = \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \\
& = \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle - \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

A orden  $\lambda^2$  se tiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle + \frac{3}{8}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle + \frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle \\
& = -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle + \frac{3}{8}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int d\tau_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle \\
& + \frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_1) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle = -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle - \frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Al usar la simetría de reversión temporal en la primera integral  $\langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle = \langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(-\tau'_2) \rangle$  y en la última integral  $\langle \hat{O}_a(\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle = \langle \hat{O}_a(-\tau_2)\hat{O}_b(\tau'_2) \rangle$  del lado derecho de la igualdad, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle = -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle - \frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle \\
& -\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^0 d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Si usamos el cambio  $\tau_2 \rightarrow \tau_1$  y  $\tau'_2 \rightarrow \tau_2$  se tiene

$$-\frac{1}{4}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle = \delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1)\hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle. \tag{4.28}$$

Por otro lado, de (4.25) se tienen tres términos con productos de la forma  $\langle \cdot \rangle \langle \cdot \rangle$ . Para el primero de estos términos se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{8}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle \\
& = \frac{3}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \int_0^{\infty} d\tau'_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_2) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_2) \rangle \\
& = \frac{3}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

para el segundo tenemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^0 d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \\
& = -\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

y para el tercer término se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau'_1 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau'_1) \rangle \\
& = \frac{1}{2}\delta\lambda^a\delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Así que, al sumar las ecuaciones (4.29), (4.30) y (4.31), se tiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \\
& + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \\
& - \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \\
& = -\delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.9) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \exp \left( - \int_0^{\infty} d\tau \delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a \right) \rangle}{\langle \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a \right) \rangle^{1/2}} \approx 1 - \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \right. \\
\left. - \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

El resultado de la expansión de la fidelidad es el siguiente:

$$|\langle 0_1 | 0_0 \rangle| \approx 1 - \frac{1}{2} G_{ab} \delta\lambda^a \delta\lambda^b + \dots, \tag{4.34}$$

donde  $G_{ab}$  es el *tensor geométrico complejo cuántico* y está dado por:

$$G_{ab} = \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_b(\tau_2) \rangle \right), \tag{4.35}$$

donde el ordenamiento temporal está implícito en la ecuación[15]<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>En el artículo original, en la deducción de (4.35) el límite superior de la primera integral es  $\epsilon$  y el límite inferior de la segunda integral es  $\epsilon$ . Esto se debe a que se introdujo una escala de corte  $\epsilon$  alrededor de  $\tau = 0$ , esto para evitar la región donde la Lagrangiana cambia repentinamente. En este caso, solo por simplicidad se asume que esta escala está presente.

## 4.2. Sistemas en mecánica cuántica: la métrica de información cuántica y la curvatura de Berry

En esta sección dividiremos la ecuación (4.35) en su parte real e imaginaria. Para ello haremos uso de simetría  $T$  en las funciones de dos puntos y el hecho de que los operadores de deformación son Hermitianos. La parte real se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \text{Re } G_{ab} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \frac{1}{2} \left( \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau_2) \rangle + \langle \hat{O}_b(\tau_1) \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \right) - \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \frac{1}{2} \langle \{ \hat{O}_a(\tau_1), \hat{O}_b(\tau_2) \} \rangle - \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle \right), \end{aligned} \quad (4.36)$$

mientras que la parte imaginaria del tensor es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{Im } G_{ab} &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_b(\tau_2) \rangle - \langle \hat{O}_b(\tau_1) \hat{O}_a(\tau_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle [ \hat{O}_a(\tau_1), \hat{O}_b(\tau_2) ] \rangle. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Cabe destacar que el ordenamiento temporal que originalmente tenía el tensor geométrico, también lo tienen  $\text{Re } G_{ab}$  y  $\text{Im } G_{ab}$ . Además, la parte real de  $G_{ab}$  es simétrica en los índices espaciales, ésta es la métrica de información cuántica y se denota como:

$$g_{ab} = \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \frac{1}{2} \langle \{ \hat{O}_a(\tau_1), \hat{O}_b(\tau_2) \} \rangle - \langle \hat{O}_a(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2) \rangle \right). \quad (4.38)$$

La métrica de información cuántica nos indica si hay una transición de fase en un sistema cuántico, así como la distancia que hay entre estados cuánticos [16], por otro lado la parte imaginaria corresponde a la curvatura de Berry, es decir:

$$\text{Im } G_{ab} = \frac{1}{2} F_{ab} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \langle [ \hat{O}_a(\tau_1), \hat{O}_b(\tau_2) ] \rangle. \quad (4.39)$$

La curvatura de Berry es una manifestación local invariante de norma de las propiedades geométricas de las funciones de onda en el espacio de parámetros.

# Capítulo 5

## El oscilador armónico: una deformación lineal.

En éste capítulo consideraremos ejemplos del cálculo de la métrica de información cuántica. Resolveremos primero un ejemplo del oscilador armónico agregando un término lineal extra a su Hamiltoniano, de modo que ahora tenemos dos parámetros libres. Lo que haremos será primero resolverlo de manera exacta usando los métodos tradicionales de la mecánica cuántica para así, posteriormente, resolverlo de manera más sofisticada haciendo uso de las funciones generadoras. Éste último método servirá como motivación para el siguiente capítulo, ya que agregaremos un término no lineal al Hamiltoniano del oscilador armónico haciendo que sea imposible resolverlo analíticamente.

### 5.1. Solución de la métrica de información cuántica haciendo uso de la función de onda.

Empezaremos estudiando el ejemplo de la deformación lineal de un oscilador armónico cuántico. Esto nos permitirá familiarizarnos con las técnicas básicas y procedimientos relacionados con el formalismo de la mecánica Lagrangiana. Consideremos el siguiente Hamiltoniano con unidades naturales ( $\hbar = 1$ ):

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha q^2 + Jq \\
&= \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{2}Q^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{J}{\sqrt{\alpha}}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Donde  $Q = q + J/\alpha$ . Sabemos que la acción está dada por:

$$S = \int dt(p\dot{q} - H_0), \tag{5.2}$$

al sacar la variación virtual de  $S$  respecto a  $p$  se obtiene

$$\frac{\delta S}{\delta p} = \frac{\partial}{\partial p}(p\dot{q} - H_0) = 0, \tag{5.3}$$

por lo que

$$\dot{q} - p = 0 \rightarrow \dot{q} = p, \tag{5.4}$$

de este modo podemos reescribir la acción como

$$S = \int dt \left( \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\alpha}{2}q^2 - Jq \right) = \int dt \left( \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\alpha}{2}q^2 - Jq \right). \tag{5.5}$$

Así que la Lagrangiana correspondiente es

$$L_0 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{\alpha}{2}q^2 - Jq, \tag{5.6}$$

y la deformación más sencilla que se le puede hacer a  $L_0$  es hacer una variación a los parámetros  $\alpha$  y  $J$ , por lo que la Lagrangiana de la teoría deformada es:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{(\alpha + \delta\alpha)}{2}q^2 - (J + \delta J)q \\
&= L_0 - \frac{\delta\alpha}{2}q^2 - \delta Jq.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

De la ecuación (5.16) es fácil ver que los operadores de deformación son  $\hat{O}_J = -q$  y  $\hat{O}_\alpha = -\frac{q^2}{2}$ . A partir de  $L_1$  podemos obtener el Hamiltoniano de la teoría deformada

$$H_1 = p\dot{q} - L_1 = H_0 + \frac{\delta\alpha}{2}q^2 + \delta Jq. \quad (5.8)$$

Sabemos que para  $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha q^2$  a partir de la ecuación de eigenvalores  $H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$  la función de onda y su correspondiente energía del estado base están dadas por

$$\begin{aligned} E_n &= \sqrt{\alpha} \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ \psi_0 &= \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} q^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

La solución de  $H_0$  está dada por [14]

$$\begin{aligned} E_n^{(0)} &= \sqrt{\alpha} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{J}{\sqrt{\alpha}} \right)^2, \\ \psi_0^{(0)} &= \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left( q + \frac{J}{\alpha} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para  $H_1$ , notemos que ambos Hamiltonianos están escritos de la misma forma, salvo por los parámetros  $J$  y  $\alpha$ , de modo que su energía y función de onda del estado base están dadas por:

$$\begin{aligned} E_m^{(1)} &= \sqrt{\Delta\alpha} \left( m + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta J}{\sqrt{\Delta\alpha}} \right)^2, \\ \psi_0^{(1)} &= \left( \frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{\sqrt{\Delta\alpha}}{2} \left( q + \frac{\Delta J}{\Delta\alpha} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $\Delta\alpha = \alpha + \delta\alpha$  y  $\Delta J = J + \delta J$ . De esta forma pasamos a hacer la superposición de los estados base

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0^{(1)} | \psi_0^{(0)} \rangle &= \left( \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \delta\alpha)}}{\pi^2} \right)^{1/4} \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp \left[ -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left( q + \frac{J}{\alpha} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{\alpha + \delta\alpha}}{2} \left( q + \frac{J + \delta J}{\alpha + \delta\alpha} \right)^2 \right] \\
&= \left( \frac{\sqrt{\alpha(\alpha + \delta\alpha)}}{\pi^2} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\alpha + \delta\alpha}} e^{-\frac{(J(\alpha + \delta\alpha) - \alpha(J + \delta J))^2}{2\alpha(\alpha + \delta\alpha)(2\alpha + \delta\alpha)}}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Aproximando por series de Taylor en  $\delta\alpha$  y  $\delta J$  se obtiene:

$$\left| \langle \psi_0^{(1)} | \psi_0^{(0)} \rangle \right| \approx 1 - \frac{1}{4\alpha^{3/2}} (\delta J)^2 + \frac{J}{2\alpha^{5/2}} \delta\alpha \delta J - \left( \frac{1}{64\alpha^2} + \frac{J^2}{4\alpha^{7/2}} \right) (\delta\alpha)^2. \tag{5.13}$$

Así que comparando con la ecuación (4.34) se obtiene

$$\begin{aligned}
g_{JJ} &= \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \\
g_{J\alpha} &= \frac{J}{\alpha^{5/2}} \\
g_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{32\alpha^2} + \frac{J^2}{2\alpha^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

## 5.2. Solución de la métrica de información cuántica haciendo uso de las funciones generadoras tomando a $J = cte.$

Ahora es posible calcular la métrica de información cuántica usando la expresión (4.38) que se ha obtenido a partir de la teoría Lagrangiana. Considerando la Lagrangiana del oscilador armónico con un término lineal:

$$L_0 = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{\alpha}{2} q^2 - Jq, \tag{5.15}$$

la deformación más sencilla que se le puede hacer a  $L_0$  es hacer una variación a los parámetros  $\alpha$  y  $J$ , por lo que la Lagrangiana de la teoría deformada es:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{(\alpha + \delta\alpha)}{2}q^2 - (J + \delta J)q \\ &= L_0 - \frac{\delta\alpha}{2}q^2 - \delta Jq. \end{aligned} \quad (5.16)$$

De la ecuación (5.16) es fácil ver que los operadores de deformación son  $\hat{O}_J = -q$  y  $\hat{O}_\alpha = -\frac{q^2}{2}$ . Una vez obtenidos los parámetros de deformación, calculamos ahora la métrica de información cuántica haciendo uso del formalismo desarrollado en el capítulo anterior:

$$\begin{aligned} g_{JJ} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \left( \langle \hat{O}_J(\tau_1) \hat{O}_J(\tau_2) \rangle - \langle \hat{O}_J(\tau_1) \rangle \langle \hat{O}_J(\tau_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \left( \langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1) q(\tau_2) | \psi_0^{(0)} \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1) | \psi_0^{(0)} \rangle \langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_2) | \psi_0^{(0)} \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 (G_2(\tau_1, \tau_2) - G_1(\tau_1)G_1(\tau_2)). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para ello hemos de calcular las funciones de Green, éstas funciones se pueden obtener a partir de derivadas funcionales de la función generatriz  $Z_0[J]$  que se define como:

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp(iS[q]), \quad (5.18)$$

donde la  $S[q]$  es la acción correspondiente a la Lagrangiana (5.15) que se escribe como:

$$S[q] = \frac{1}{2} \int_{-\infty(1-i\eta)}^{\infty(1-i\eta)} d\tau (\dot{q}^2 - \alpha q^2 - 2Jq). \quad (5.19)$$

Ésta definición de acción cumple las condiciones de borde de (2.75), veamos ahora cuál es la ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= -2\alpha q - 2J - 2\ddot{q} = 0 \\ \Rightarrow \ddot{q} + \alpha q &= J.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Para poder realizar la integral de la acción hacemos el siguiente cambio de variable:  $q(\tau) = \bar{q}(\tau) + x(\tau)$ , donde  $x$  es la solución cuántica y  $\bar{q}$  la solución clásica, además  $\bar{q}$  y  $x$  satisfacen las condiciones de borde  $\bar{q}(-\infty) = q_{-\infty} = 0$ ,  $\bar{q}(\infty) = q_{\infty} = 0$  y  $x(-\infty) = x(\infty) = 0$ . Supongamos que  $\bar{q}$  es solución de (5.20):

$$\begin{aligned}S[q] &= \frac{1}{2} \int d\tau (\dot{q}^2 - \alpha q^2 - 2Jq) = \frac{1}{2} \int d\tau [(\dot{\bar{q}} + \dot{x})^2 - \alpha(\bar{q} + x)^2 - 2J(\bar{q} + x)] \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau [(\dot{\bar{q}}^2 - \alpha \bar{q}^2 - 2J\bar{q}) + 2(\dot{\bar{q}}\dot{x} - \alpha \bar{q}x - Jx) + (\dot{x}^2 - \alpha x^2)].\end{aligned}\tag{5.21}$$

Por un lado se tiene:

$$\begin{aligned}\int d\tau (\dot{\bar{q}}\dot{x} - \alpha \bar{q}x - Jx) &= \int d\tau \left[ \frac{d(\dot{\bar{q}}x)}{d\tau} + (-\ddot{\bar{q}} - \alpha \bar{q} - J)x \right] \\ &= \int d\tau \frac{d(\dot{\bar{q}}x)}{d\tau} \\ &= \dot{\bar{q}}x \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0,\end{aligned}\tag{5.22}$$

por las condiciones de borde en  $x(\tau)$ . De modo que la función generadora se reescribe como:

$$\begin{aligned}Z_0[J] &= \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[ \frac{i}{2} \int_{-\infty(1-i\eta)}^{\infty(1-i\eta)} d\tau (\dot{\bar{q}}^2 - \alpha \bar{q}^2 - 2J\bar{q} + \dot{x}^2 - \alpha x^2) \right] \\ &= e^{iS_J(\bar{q})} \int \mathcal{D}x(\tau) e^{\frac{i}{2} \int d\tau (\dot{x}^2 - \alpha x^2)} \\ &= e^{iS_J(\bar{q})} Z_0[0].\end{aligned}\tag{5.23}$$

Donde  $S_J(\bar{q})$  es la acción clásica en presencia de una fuente arbitraria  $J(\tau)$ . Ahora solo resta calcular la solución para  $\bar{q}$ , para ello recordemos que la solución general de (5.20) es la suma de la solución particular y la homogénea.

Para hallar la solución particular se usa la función de Green de la ecuación  $\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2$ , que es:

$$q_p(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau'), \quad (5.24)$$

donde  $\Delta_F(\tau)$  es el propagador de Feynman. Veamos que se satisface la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) \Delta_F(\tau) = -\delta(\tau). \quad (5.25)$$

Definimos el propagador de Feynman como:

$$\Delta_F(\tau - \tau') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(\tau - \tau')}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\epsilon}. \quad (5.26)$$

Sustituyendo la definición del propagador de Feynman en la ecuación (5.25) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) \Delta_F(\tau) &= \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \omega_0^2 \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{d^2}{d\tau^2} \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (-i\omega)^2 \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} \\ &= -\delta(\tau). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ahora, sabemos que la solución homogénea es:

$$q(\tau)_h = Ae^{i\omega_0\tau} + Be^{-i\omega_0\tau}. \quad (5.28)$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$q(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') + Ae^{i\omega_0\tau} + Be^{-i\omega_0\tau}. \quad (5.29)$$

Solo resta ver que A y B satisfacen las condiciones de borde (2.75), para ello notemos que (5.26) se puede escribir como:

$$\Delta_F(\tau - \tau') = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(\tau - \tau')}}{(\omega - \omega_0 + \frac{i\epsilon}{2\omega_0})(\omega + \omega_0 - \frac{i\epsilon}{2\omega_0})}. \quad (5.30)$$

Si  $\tau - \tau' < 0$ , para realizar la integral cerramos el contorno en el semiplano superior como en la siguiente figura:

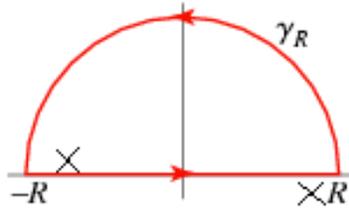


Figura 5.1: Contorno de integración para  $\tau - \tau' < 0$ .

Por lo que se tiene:

$$\Delta_F(\tau - \tau') = -\frac{i}{\omega_0} e^{i\omega_0(\tau - \tau')}. \quad (5.31)$$

Si  $\tau - \tau' > 0$ , el contorno de integración se cierra en el semiplano inferior, afectando el resultado solo en un signo:

$$\Delta_F(\tau - \tau') = \frac{i}{\omega_0} e^{-i\omega_0(\tau - \tau')}. \quad (5.32)$$

En general se tiene que:

$$\Delta_F(\tau - \tau') = \frac{i}{2\omega_0} e^{-i\omega_0|\tau - \tau'|}, \quad (5.33)$$

al sustituir (5.33) en (5.29) se tiene:

$$\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') &= -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \left[ \theta(\tau - \tau') \frac{1}{2\omega_0} e^{-i\omega_0(\tau - \tau')} \right. \\
&\quad \left. + \theta(\tau' - \tau) \frac{1}{2\omega_0} e^{i\omega_0(\tau - \tau')} \right] J(\tau').
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Notemos que cuando  $\tau \rightarrow +\infty(1 - i\eta)$  se anula el segundo término y el primero decae exponencialmente de la forma  $e^{-i\omega_0\tau}$ , en cuanto al límite  $\tau \rightarrow -\infty(1 - i\eta)$  se anula el primer término y el segundo decae exponencialmente de la forma  $e^{i\omega_0\tau}$ . Por lo tanto, para que A y B cumplan las condiciones de frontera establecidas, necesariamente  $A = B = 0$ . Por lo tanto

$$\bar{q}(\tau) = -\int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau'). \tag{5.35}$$

Finalmente se tiene

$$\begin{aligned}
S_J(\bar{q}) &= \frac{1}{2} \int d\tau (\dot{\bar{q}}^2 - \alpha \bar{q}^2 - 2J\bar{q}) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left( \frac{d(\bar{q}\dot{\bar{q}})}{d\tau} - \bar{q}\ddot{\bar{q}} - \alpha \bar{q}^2 - 2J\bar{q} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau (-\bar{q}[\ddot{\bar{q}} + \alpha \bar{q}] - 2J\bar{q}) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau (-\bar{q}J - 2J\bar{q}) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau J(\tau) \bar{q}(\tau) \\
&= -\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau').
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Por lo tanto

$$Z_0[J] = Z_0[0] e^{-\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')}. \tag{5.37}$$

Usando lo anterior, la función de Green para el oscilador armónico con un termino lineal extra está dado por:

$$\begin{aligned}
G_n(t_1, \dots, t_n) &= \frac{1}{i^n Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta^n}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} Z_0[J]|_{J=cte.} \\
&= \frac{1}{i^n \delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} e^{-\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')} |_{J=cte.}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

### 5.2.1. Componente $g_{JJ}$ .

Regresando al cálculo de la ecuación (5.17), calculemos primero  $G_1(\tau_1)$ :

$$\left\langle \psi_0^{(0)} \left| q(t_1) \right| \psi_0^{(0)} \right\rangle = G_1(\tau_1) = \frac{1}{i Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} Z_0[J]|_{J=cte.} \tag{5.39}$$

Para ello recordemos que

$$\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} Z_0[J]|_{J=cte.} = Z_0[0] \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')} |_{J=cte.} \tag{5.40}$$

Calculemos entonces la derivada

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')} |_{J=cte.} \\
&= e^{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau')} \frac{i}{2} \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') |_{J=cte.}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Veamos qué pasa con la integral del lado derecho de la igualdad

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') \\
&= \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') \frac{\delta J(\tau')}{\delta J(\tau_1)} + \int d\tau d\tau' \frac{\delta J(\tau)}{\delta J(\tau_1)} \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') \\
&= \int d\tau d\tau' J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau') \delta(\tau_1 - \tau') + \int d\tau d\tau' \delta(\tau_1 - \tau) \Delta_F(\tau - \tau') J(\tau') \\
&= \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) + \int d\tau' J(\tau') \Delta_F(\tau - \tau_1) \\
&= 2 \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1).
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Por lo tanto

$$\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} Z_0[J]|_{J=cte.} = i Z_0[J]|_{J=cte.} \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1), \quad (5.43)$$

y finalmente

$$G_1(\tau_1) = \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1). \quad (5.44)$$

Por otro lado

$$\langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1) q(\tau_2) | \psi_0^{(0)} \rangle = G_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{i^2 Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta^2}{\delta J(\tau_1) \delta J(\tau_2)} Z_0[J]|_{J=cte.} \quad (5.45)$$

Para ello recordemos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta J(\tau_1) \delta J(\tau_2)} Z_0[J] &= \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \left[ i Z_0[J] \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \right] \\ &= i \left[ Z_0[J] \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \right. \\ &\quad \left. + \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} Z_0[J] \right]. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Recordando el desarrollo de la ecuación (5.42), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) &= \int d\tau \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \\ &= \int d\tau \delta(\tau - \tau_2) \Delta_F(\tau - \tau_1) \\ &= \Delta_F(\tau_1 - \tau_2). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Por lo tanto, la función de Green correspondiente está dada por

$$G_2(\tau_1, \tau_2) = -i \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) + G_1(\tau_1) G_1(\tau_2). \quad (5.48)$$

Sustituyendo (5.44) y (5.48) en (5.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
g_{JJ} &= -i \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) \\
&= -i \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \frac{i}{2\sqrt{\alpha}} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_1 - \tau_2|}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Para hacer esta integral es necesario hacer el cambio a tiempo Euclideo, para así quitar la  $i$  y elegir el signo correcto del valor absoluto, esto se hace haciendo el cambio de variable  $\tau = -it$

$$\begin{aligned}
g_{JJ} &= \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} e^{-(t_2 - t_1)\sqrt{\alpha}} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} dt_2 e^{-\sqrt{\alpha}t_2} \\
&= \frac{1}{2\alpha^{3/2}}
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Con esto vemos que se recuperó el resultado de (5.14).

### 5.2.2. Componente $g_{J\alpha}$ .

Sigamos ahora con la componente  $g_{J\alpha}$ :

$$\begin{aligned}
g_{J\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1) q^2(\tau_2) | \psi_0^{(0)} \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1) | \psi_0^{(0)} \rangle \langle \psi_0^{(0)} | q^2(\tau_2) | \psi_0^{(0)} \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 (G_3(\tau_1, \tau_2^2) - G_1(\tau_1)G_2(\tau_2^2)).
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Calculemos  $G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1)q(\tau_2)q(\tau_3) | \psi_0^{(0)} \rangle &= G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
&= \frac{1}{i^3 Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta^3}{\delta J(\tau_1)\delta J(\tau_2)\delta J(\tau_3)} Z_0[J]|_{J=cte.}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Para ello recordemos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3}{\delta J(\tau_1)\delta J(\tau_2)\delta J(\tau_3)} Z_0[J]|_{J=cte.} &= \frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} \left[ iZ_0[J]\Delta_F(\tau_1 - \tau_2) \right. \\
&\quad \left. + i^2 Z_0[J] \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_2) \right] |_{J=cte.}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Haciendo la derivada del primer término

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} iZ_0[J]\Delta_F(\tau_1 - \tau_2) |_{J=cte.} \\
&= i\Delta_F(\tau_1 - \tau_2) \frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} Z_0[J] |_{J=cte.} \\
&= i^2 \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) Z_0[J] \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_3) |_{J=cte.}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

La derivada del segundo término:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} i^2 Z_0[J] \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_2) \\
&= i^2 \left[ Z_0[J] \frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} \left( \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau)\Delta_F(\tau - \tau_2) \frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} Z_0[J] \right].
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Veamos qué pasa con el primer término

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta J(\tau_3)} \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \\
& = \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) + \Delta_F(\tau_1 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2),
\end{aligned} \tag{5.56}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) & = G_1(\tau_1)G_1(\tau_2)G_1(\tau_3) \\
& + \frac{1}{i} \left( \Delta_F(\tau_2 - \tau_3)G_1(\tau_1) + \Delta_F(\tau_1 - \tau_3)G_1(\tau_2) \right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Haciendo  $\tau_2 = \tau_3$

$$\begin{aligned}
G_3(\tau_1, \tau_2^2) & = G_1(\tau_1)G_1^2(\tau_2) \\
& + \frac{1}{i} \left( \Delta_F(0)G_1(\tau_1) + \Delta_F(\tau_1 - \tau_2)G_1(\tau_2) \right).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Por lo que la componente  $g_{J\alpha}$  de la métrica es:

$$\begin{aligned}
g_{J\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( G_1(\tau_1) G_1^2(\tau_2) + \frac{1}{i} \left[ \Delta_F(0) G_1(\tau_1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) G_1(\tau_2) \right] - \frac{1}{i} G_1(\tau_1) \Delta_F(0) - G_1(\tau_1) G_1^2(\tau_2) \right) \\
&= -i \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) G_1(\tau_2) \\
&= -i \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \frac{i}{2\sqrt{\alpha}} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_1 - \tau_2|} \int d\tau J \Delta_F(\tau - \tau_2) \\
&= \frac{iJ}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d\tau e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau|} \\
&= \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2 - t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2 - t)} \\
&= \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2 - t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2 - t)} \\
&\quad + \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2 - t_1)} e^{\sqrt{\alpha}(t_2 - t)} \\
&= \frac{J}{\alpha^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

Que de igual forma coincide con el resultado de la ecuación (5.14).

### 5.2.3. Componente $g_{\alpha\alpha}$ .

Finalmente, calculemos la componente  $g_{\alpha\alpha}$  del tensor:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \left\langle \psi_0^{(0)} \left| q^2(\tau_1) q^2(\tau_2) \right| \psi_0^{(0)} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - \left\langle \psi_0^{(0)} \left| q^2(\tau_1) \right| \psi_0^{(0)} \right\rangle \left\langle \psi_0^{(0)} \left| q^2(\tau_2) \right| \psi_0^{(0)} \right\rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 (G_4(\tau_1^2, \tau_2^2) - G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2)).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Calculemos  $G_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_0^{(0)} | q(\tau_1)q(\tau_2)q(\tau_3)q(\tau_4) | \psi_0^{(0)} \rangle &= G_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\
&= \frac{1}{i^4 Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta^4}{\delta J(\tau_1)\delta J(\tau_2)\delta J(\tau_3)\delta J(\tau_4)} Z_0[J].
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Para ello recordemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^4}{\delta J(\tau_1)\delta J(\tau_2)\delta J(\tau_3)\delta J(\tau_4)} Z_0[J]|_{J=cte.} \\
&= \frac{\delta}{\delta J(\tau_4)} \left[ i^3 Z_0[J] \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \times \right. \\
&\times \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_3) + i^2 Z_0[J] \left[ \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \right. \\
&\left. \left. + \Delta_F(\tau_1 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \right] \right].
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Haciendo la derivada del primer término

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta J(\tau_4)} \left[ Z_0[J] \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_3) \right] \\
&= \left( \Delta_F(\tau_3 - \tau_4) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \right. \\
&+ \Delta_F(\tau_2 - \tau_4) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_3) \\
&+ \Delta_F(\tau_1 - \tau_4) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_3) \\
&+ i \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_2) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_3) \times \\
&\left. \times \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_4) \right) Z_0[J].
\end{aligned} \tag{5.63}$$

para el segundo término

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta J(\tau_4)} i^2 Z_0[J] \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \\
&= i^2 \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \left( Z_0[J] \Delta_F(\tau_1 - \tau_4) + i Z_0[J] \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \times \right. \\
&\quad \left. \times \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_4) \right) \\
&= i^2 Z_0[J] \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \Delta_F(\tau_1 - \tau_4) \\
&\quad + i^3 Z_0[J] \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_1) \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau - \tau_4).
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
& G_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \\
&= G_1(\tau_1) G_1(\tau_2) G_1(\tau_3) G_1(\tau_4) + \frac{1}{i} \left( \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) G_1(\tau_1) G_1(\tau_4) \right. \\
&\quad + \Delta_F(\tau_3 - \tau_4) G_1(\tau_1) G_1(\tau_2) + \Delta_F(\tau_2 - \tau_4) G_1(\tau_1) G_1(\tau_3) \\
&\quad + \Delta_F(\tau_1 - \tau_3) G_1(\tau_2) G_1(\tau_4) + \Delta_F(\tau_1 - \tau_4) G_1(\tau_2) G_1(\tau_3) \left. \right) \\
&\quad + \frac{1}{i^2} \left( \Delta_F(\tau_2 - \tau_3) \Delta_F(\tau_1 - \tau_4) + \Delta_F(\tau_1 - \tau_3) \Delta_F(\tau_2 - \tau_4) \right).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Haciendo  $\tau_1 = \tau_2$  y  $\tau_3 = \tau_4$

$$\begin{aligned}
& G_4(\tau_1^2, \tau_2^2) \\
&= G_1^2(\tau_1) G_1^2(\tau_2) + \frac{1}{i} \left( 4 \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) G_1(\tau_1) G_1(\tau_2) + \Delta_F(0) G_1^2(\tau_1) \right) \\
&\quad + \frac{2}{i^2} \Delta_F^2(\tau_1 - \tau_2).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Por lo que la componente de la métrica  $g_{\alpha\alpha}$  de la métrica es:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( G_1^2(\tau_1) G_1^2(\tau_2) + \frac{1}{i} \left[ 4\Delta_F(\tau_1 - \tau_2) G_1(\tau_1) G_1(\tau_2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta_F(0) G_1^2(\tau_1) + \Delta_F(0) G_1^2(\tau_2) \right] + \frac{1}{i^2} \left[ \Delta_F^2(0) + 2\Delta_F^2(\tau_1 - \tau_2) \right] \right. \\
&\quad \left. - G_1^2(\tau_1) G_1^2(\tau_2) - \frac{1}{i} \left( \Delta_F(0) G_1^2(\tau_1) + \Delta_F(0) G_1^2(\tau_2) \right) - \frac{1}{i^2} \Delta_F^2(0) \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \left( \frac{4}{i} \Delta_F(\tau_1 - \tau_2) G_1(\tau_1) G_1(\tau_2) + \frac{2}{i^2} \Delta_F^2(\tau_1 - \tau_2) \right) \\
&= \frac{4}{i} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \frac{i}{2\sqrt{\alpha}} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau_1|} \int d\tau J(\tau) \Delta_F(\tau_1 - \tau) \times \\
&\quad \times \int d\tau' J(\tau') \Delta_F(\tau_2 - \tau') + \frac{2}{i^2} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \frac{i^2}{4\alpha} e^{-2i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau_1|} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 e^{-2i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau_1|} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d\tau d\tau' e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau - \tau_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_2 - \tau'|}.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Haciendo el cambio a tiempo Euclidio de ta forma que  $\tau \rightarrow \tau_1$  y  $\tau' \rightarrow \tau_2$

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2 - t_1)} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1 - 2t_2 - t_1 - t_2)} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1 - t_1 + t_2)} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 dt_2 \int_0^{\infty} dt_1 e^{-\sqrt{\alpha}(-2t_2 + t_1 - t_2)} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1 - 2t_1 + t_1 + t_2)} \\
&= \frac{1}{32\alpha^2} + \frac{J^2}{2\alpha^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Esto de igual forma coincide con el resultado de la ecuación (5.14). Hemos visto ya que tanto el método exacto como el método de las funciones de Green coinciden, es decir, obtener la solución a partir de las funciones generadoras es igual de eficaz que el método exacto, puede que para el método de las funciones de Green se invierta un poco más de esfuerzo y tiempo, pero como veremos en el siguiente capítulo, éste método resultará verdaderamente útil para resolver problemas más difíciles.

# Capítulo 6

## La función de Green de interacción.

Como vimos en el capítulo anterior, es posible encontrar la solución de la métrica a partir de las funciones generadoras. Sin embargo, si el sistema es más complejo no se podrá encontrar una solución analítica del problema, por lo que tendremos que recurrir a la teoría de perturbaciones. Para ello en este capítulo haremos el desarrollo perturbativo de las funciones de Green considerando la Lagrangiana del oscilador armónico lineal y añadiendo un operador de deformación monómico arbitrario.

### 6.1. Desarrollo perturbativo de las funciones de Green.

Consideremos una Lagrangiana de la siguiente forma

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) - \lambda v(q) = L_0 + L_1, \quad (6.1)$$

donde  $L_0$  es la Lagrangiana del oscilador armónico,  $L_1$  es un monomio en  $q$  y  $\lambda$  una constante de acoplamiento. Entonces podemos reescribir la funcional generadora  $Z[J]$  de las funciones de Green como:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[ i \int d\tau (L_0 + J(\tau)q(\tau)) \right] \exp \left[ i \int d\tau L_1(q(\tau)) \right]. \quad (6.2)$$

Notemos que para una función dada tenemos:

$$F[q(t)] \exp \left( \int d\tau J(\tau)q(\tau) \right) = F \left[ -i \frac{\delta}{\delta J(t)} \right] \exp \left( \int d\tau J(\tau)q(\tau) \right). \quad (6.3)$$

Con el resultado de (6.3) podemos escribir a la función generadora (6.2) como:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \exp \left[ i \int d\tau L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \right] \int \mathcal{D}q(\tau) \exp \left[ i \int d\tau (L_0 + J(\tau)q(\tau)) \right] \\ &= \exp \left[ i \int d\tau L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \right] Z_0[J]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Desarrollaremos ahora el término de la exponencial en series de Taylor.

$$\begin{aligned} e^{i \int d\tau L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)} &= \left( 1 + i \int d\tau L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i^2}{2} \int d\tau d\tau' L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) L_1 \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau')} \right) + \dots \right) \\ &= \left( 1 - i\lambda \int d\tau v \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i^2}{2} \lambda^2 \int d\tau d\tau' v \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right) v \left( -i \frac{\delta}{\delta J(\tau')} \right) + \dots \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

con lo que podemos obtener la funcional  $Z[J]$  en potencias de  $\lambda$  y de ella obtener las funciones de Green con interacción dadas por:

$$G'_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS[q(\tau)]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS[q(\tau)]}}. \quad (6.6)$$

Para realizar esto, la acción total del sistema la escribimos como:

$$e^{iS} = e^{iS_0 + S_1} = e^{iS_0} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m!} S_1^m \right], \quad (6.7)$$

donde  $iS_0$  es la acción del oscilador armónico libre y  $S_1$  es la acción del término  $-\lambda \int d\tau v[q(\tau)]$ , al suponer que  $v[q(\tau)]$  es un monomio, lo podemos escribir como  $v[q(\tau)] = cq^k$ , con  $c$  constante. Consideremos el numerador de (6.6)

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m!} S_1^m \right] \\
&= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} - i\lambda \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} \int d\tau v[q] \\
&+ \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} \int d\tau_1 d\tau_2 v[q(\tau_1)] v[q(\tau_2)] + \dots \\
&= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} - i\lambda \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} \int d\tau cq^k(\tau) \\
&+ \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{iS_0} \int d\tau_1 d\tau_2 cq^k(\tau_1) cq^k(\tau_2) + \dots \\
&= G_n(t_1, \dots, t_n) \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} - i\lambda c \int d\tau G_{n+k}(t_1, \dots, t_n, \tau^k) \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} \\
&+ \frac{(-i\lambda c)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_{n+2k}(t_1, \dots, t_n, \tau_1^k, \tau_2^k) \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} + \dots \\
&= \left[ G_n(t_1, \dots, t_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{n+mk}(t_1, \dots, t_n, \tau_1^k, \dots, \tau_m^k) \right] \times \\
&\times \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Para el denominador la única diferencia es que no se tiene el término de la función de Green con  $(t_n)$ , por lo que el denominador de (6.6) es:

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{i^m}{m!} S_1^m \right] \\
&= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{iS_0} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{mk}(\tau_1^k, \dots, \tau_m^k) \right],
\end{aligned} \tag{6.9}$$

al sustituir (6.9) y (6.8) en (6.6) se tiene:

$$\begin{aligned}
& G'_n(t_1, \dots, t_n) \\
&= \frac{G_n(t_1, \dots, t_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{n+mk}(t_1, \dots, t_n, \tau_1^k, \dots, \tau_m^k)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{mk}(\tau_1^k, \dots, \tau_m^k)}. \quad (6.10)
\end{aligned}$$

## 6.2. Solución con las funciones de Green perturbadas para el oscilador armónico con una perturbación lineal.

Como un primer ejemplo para usar el método de la sección anterior, consideremos el oscilador armónico con una perturbación lineal. El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{2}q^2 + Jq, \quad (6.11)$$

cuya Lagrangiana es:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \alpha q^2) - Jq. \quad (6.12)$$

### 6.2.1. Componente $g_{JJ}$ .

Queremos calcular primero la componente  $g_{JJ}$  de la métrica, para esto observamos de (4.1) que  $\hat{O}(T) = \hat{q}(T)$ , por lo que se debe calcular<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
g_{JJ} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle \hat{O}_J(T_1) \hat{O}_J(T_2) \rangle - \langle \hat{O}_J(T_1) \rangle \langle \hat{O}_J(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle q(T_1) q(T_2) \rangle - \langle q(T_1) \rangle \langle q(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( G'_2(T_1, T_2) - G'_1(T_1) G'_1(T_2) \right). \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Veamos primero qué es  $\langle q(T_1) \rangle$ :

<sup>1</sup>A partir de aquí se tomará a  $T_i$  como el tiempo imaginario para el cual se tendrá que hacer una rotación de Wick  $T = -it$  para estar en tiempo Euclideo.

$$\begin{aligned}
\langle q(T_1) \rangle &= G'_1(T_1) \\
&= \left( G_1(T_1) - iJ \int d\tau G_2(T_1, \tau) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_3(T_1, \tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 - iJ \int d\tau G_1(\tau) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right)^{-1} \\
&= \left( -iJ \int d\tau G_2(T_1, \tau) + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Donde hemos tomando en cuenta que  $G_{2n+1}(\tau_1, \dots, \tau_{2n+1}) = 0$ , para todo  $n$ . Sea  $x = \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2)$ , expandemos en series de Taylor hasta orden 1 el término de la forma  $(1+x)^{-1}$ , ya que a orden 2 tendríamos una expansión hasta  $J^4$ , lo cuál excede el orden de expansión de la ecuación (6.14)

$$\begin{aligned}
&\left( 1 + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right)^{-1} \\
&= 1 - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

por lo que la ecuación (6.14) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
\langle q(T_1) \rangle &= \left( -iJ \int d\tau G_2(T_1, \tau) + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \\
&= -iJ \int d\tau_1 G_2(T_1, \tau_1) + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
&\quad + \frac{(-iJ)^3}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_2(T_1, \tau_1) G_2(\tau_2, \tau_3).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Ahora, para  $\langle q(T_1)q(T_2) \rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle q(T_1)q(T_2) \rangle &= G'_2(T_1, T_2) \\
&= \left( G_2(T_1, T_2) - iJ \int d\tau G_3(T_1, T_2, \tau) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_5(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 - iJ \int d\tau G_1(\tau) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right)^{-1} \\
&= \left( G_2(T_1, T_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) \right) \times \\
&\quad \times \left( 1 + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right)^{-1},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

haciendo la misma expansión en series de Taylor que en (6.15) y sustituyendo en (6.17):

$$\begin{aligned}
\langle q(T_1)q(T_2) \rangle &= \left( G_2(T_1, T_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) \right) \left( 1 - \right. \\
&\quad \left. \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \\
&= G_2(T_1, T_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) \\
&\quad - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(\tau_1, \tau_2).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Ahora, tenemos que hacer el producto de  $\langle q(T_1) \rangle \langle q(T_2) \rangle$ , que a orden  $J^3$  resulta:

$$\begin{aligned}
& \left( -iJ \int d\tau_1 G_2(T_1, \tau_1) + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_1, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \right. \\
& + \frac{(-iJ)^3}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_2(T_1, \tau_1) G_2(\tau_2, \tau_3) \left. \right) \left( -iJ \int d\tau_1 G_2(T_2, \tau_1) \right. \\
& + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3) + \frac{(-iJ)^3}{3!} \int d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 G_4(T_2, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \left. \right) \\
& = (-iJ)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2).
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Ahora se debe restar (6.18) y (6.19), para ello notemos que tenemos una  $G_4$ . Ésta se puede expresar en términos de  $G_2$  haciendo todas las combinaciones de las permutaciones posibles en productos de  $G_2$ , es decir:

$$\begin{aligned}
G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) &= G_2(T_1, T_2) G_2(\tau_1, \tau_2) + G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
&+ G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1).
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Al sustituir el resultado anterior en (6.18) y hacer la resta correspondiente

$$\begin{aligned}
& G_2(T_1, T_2) - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(\tau_1, \tau_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) - (-iJ)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& = G_2(T_1, T_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) - (-iJ)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

En el tercer término de la última igualdad de (6.21) podemos hacer el cambio  $\tau_2 \leftrightarrow \tau_1$ , ya que los límites de integración de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son los mismos, así que no habría ningún cambio

de signo, de modo que (6.21) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
& G_2(T_1, T_2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) - (-iJ)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& = G_2(T_1, T_2) \\
& = \frac{i}{2\sqrt{\alpha}} e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

En donde se usó (5.33). Recordemos que estamos trabajando en tiempo imaginario  $T_n$ , para pasar a tiempo Euclideo hagamos una rotación de Wick  $T_n = -it_n$ , por lo que para la componente  $g_{JJ}$  se tiene:

$$\begin{aligned}
g_{JJ} &= \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} dt_2 e^{-\sqrt{\alpha}t_2} \\
&= \frac{1}{2\alpha^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

### 6.2.2. Componente $g_{J\alpha}$ .

Para la componente  $g_{J\alpha}$  necesitamos

$$\begin{aligned}
g_{J\alpha} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_J(T_1) \hat{\mathcal{O}}_\alpha(T_2) \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_J(T_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle q(T_1) q^2(T_2) \rangle - \langle q(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( G'_3(T_1, T_2^2) - G'_1(T_1) G'_2(T_2^2) \right).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Para ello

$$\begin{aligned}
G'_3(T_1, T_2^2) &= \frac{-iJ \int d\tau G_4(T_1, T_2^2, \tau)}{1 + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2)} \\
&= \left( -iJ \int d\tau G_4(T_1, T_2^2, \tau) \right) \left( 1 - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \quad (6.25) \\
&= -iJ \int d\tau G_4(T_1, T_2^2, \tau).
\end{aligned}$$

Ahora, retomamos las ecuaciones (6.16) y (6.18) hacemos el producto  $\langle q^2(T_1) \rangle \langle q(T_2) \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle q(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle &= \left( -iJ \int d\tau_1 G_2(T_1, \tau_1) \right) \\
&\quad \times \left( G_2(T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_2^2, \tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \quad (6.26) \\
&= -iJ \int d\tau G_2(T_1, \tau) G_2(T_2^2),
\end{aligned}$$

en la ecuación (6.25) se tienen que expandir dos términos, para la  $G_4$  se tiene:

$$G_4(T_1, T_2^2, \tau) = 2G_2(T_1, T_2)G_2(T_2, \tau) + G_2(T_1, \tau)G_2(T_2^2). \quad (6.27)$$

Restemos ahora (6.25) con (6.26):

$$\begin{aligned}
&-iJ \int d\tau \left( 2G_2(T_1, T_2)G_2(T_2, \tau) + G_2(T_1, \tau)G_2(T_2^2) - G_2(T_1, \tau)G_2(T_2^2) \right) \\
&= -2iJ \int d\tau G_2(T_1, T_2)G_2(T_2, \tau). \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Por lo que la componente  $g_{J\alpha}$  de la métrica es:

$$\begin{aligned}
g_{J\alpha} &= -2iJ \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau) \\
&= \frac{iJ}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-\tau|} \\
&= \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}|t_2-t|} \\
&= \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&\quad + \frac{J}{4\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&= -\frac{J}{\alpha^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{6.29}$$

### 6.2.3. Componente $g_{\alpha\alpha}$ .

Para la componente  $g_{\alpha\alpha}$  necesitamos

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_1) \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_2) \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle q^2(T_1) q^2(T_2) \rangle - \langle q^2(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( G'_4(T_1^2, T_2^2) - G'_2(T_1^2) G'_2(T_2^2) \right).
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Para ello

$$\begin{aligned}
G'_4(T_1^2, T_2^2) &= \frac{G_4(T_1^2, T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_6(T_1^2, T_2^2, \tau_1, \tau_2)}{1 + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2)} \\
&= \left( G_4(T_1^2, T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_6(T_1^2, T_2^2, \tau_1, \tau_2) \right) \\
&\quad \times \left( 1 - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \\
&= G_4(T_1^2, T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_6(T_1^2, T_2^2, \tau_1, \tau_2) \\
&\quad - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1^2, T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2),
\end{aligned} \tag{6.31}$$

retomando la ecuación (6.30) hacemos el producto  $\langle q^2(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle q^2(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle &= \left( G_2(T_1^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1^2, \tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \\
&\times \left( G_2(T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_2^2, \tau_1, \tau_2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \right) \\
&= G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_4(T_2^2, \tau_1, \tau_2) \\
&\quad - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&\quad + \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(T_1^2, \tau_1, \tau_2) G_2(T_2^2) \\
&\quad - \frac{(-iJ)^2}{2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2),
\end{aligned} \tag{6.32}$$

restando (6.32) y (6.31), a orden 0 se tiene<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
G_4^{(0)}(T_1^2, T_2^2) - G_2^{(0)}(T_1^2) G_2^{(0)}(T_2^2) &= G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) + 2G_2^2(T_1, T_2) \\
&\quad - G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) \\
&= 2G_2^2(T_1, T_2).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

A orden  $J^2$  se tiene

$$\begin{aligned}
G_4^{(2)}(T_1^2, T_2^2) - G_2^{(2)}(T_1^2) G_2^{(2)}(T_2^2) &= G_6(T_1^2, T_2^2, \tau_1, \tau_2) - G_4(T_1^2, T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&\quad - G_2(T_1^2) G_4(T_2^2, \tau_1, \tau_2) + G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&\quad - G_4(T_1^2, \tau_1, \tau_2) G_2(T_2^2) + G_2(T_1^2) G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2),
\end{aligned} \tag{6.34}$$

para ello hemos de poner la  $G_6$  en términos de  $G_4$  y a su vez en términos de  $G_2$ :

---

<sup>2</sup>El superíndice entre paréntesis de las funciones de Green representa el orden la expansión que se está tomando.

$$\begin{aligned}
G_6(T_1^2, T_2^2, \tau_1, \tau_2) &= G_2(T_1^2)G_4(T_2^2, \tau_1, \tau_2) + 2G_2(T_1, T_2)G_4(T_1, T_2, \tau_1, \tau_2) \\
&\quad + 2G_2(T_1, \tau_1)G_4(T_1, T_2^2, \tau_2) \\
&= G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) + 2G_2(T_1^2)G_2(T_2, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2) \quad (6.35) \\
&\quad + 2G_2^2(T_1, T_2)G_2(\tau_1, \tau_2) + 2G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_1, \tau_2)G_2(T_2^2) \\
&\quad + 8G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2),
\end{aligned}$$

sustituyendo (6.35) en (6.34) y retomando el resultado de (6.27) tenemos:

$$\begin{aligned}
&G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) + 2G_2(T_1^2)G_2(T_2, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2) + 2G_2^2(T_1, T_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&+ 2G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_1, \tau_2)G_2(T_2^2) + 8G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2) \\
&- G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) - 2G_2^2(T_1, T_2)G_2(\tau_1, \tau_2) - G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&- 2G_2(T_1^2)G_2(T_2, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2) + G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&- G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) - 2G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_1, \tau_2)G_2(T_2^2) \\
&+ G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
&= 8G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2), \quad (6.36)
\end{aligned}$$

por lo que la componente  $g_{\alpha\alpha}$  es:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= 2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 G_2^2(T_1, T_2) \\
&\quad + 4J^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau_1)G_2(T_2, \tau_2) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 e^{-2i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau_1-T_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-\tau_2|}. \quad (6.37)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio a tiempo Euclideo de tal forma que  $\tau_1 \rightarrow \tau$  y  $\tau_2 \rightarrow \tau'$ :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int_{-\infty}^0 d\tau' e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1-2t_2-\tau-\tau')} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 d\tau \int_0^{\infty} d\tau' e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1-\tau+\tau')} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^0 d\tau' \int_0^{\infty} d\tau e^{-\sqrt{\alpha}(-2t_2+\tau-\tau')} \\
&\quad - \frac{J^2}{2\alpha^{3/2}} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau' e^{-\sqrt{\alpha}(2t_1-2t_2+\tau+\tau')} \\
&= \frac{1}{32\alpha^2} + \frac{J^2}{2\alpha^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Comparando con las componentes de la métrica de información cuántica de (5.14) coinciden con el resultado obtenido a partir de las funciones de Green perturbadas. La matriz correspondiente de ésta métrica es

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32\alpha^2} + \frac{J^2}{2\alpha^{7/2}} & -\frac{J}{2\alpha^{5/2}} \\ -\frac{J}{2\alpha^{5/2}} & \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \end{pmatrix}. \tag{6.39}$$

Calculamos ahora el determinante de (6.39):

$$\det g_{ij} = \frac{1}{64\alpha^{1/2}}, \tag{6.40}$$

éste resultado nos dice que el determinante no depende de  $J$ , es decir, el oscilador no se acopla la perturbación.

# Capítulo 7

## El oscilador anarmónico.

En el capítulo 5 resolvimos el problema del oscilador armónico con una deformación lineal de manera analítica, usando las funciones de onda del sistema y las funciones de Green, notamos que ambas soluciones coinciden. Ahora nos enfrentamos a un problema con mayor dificultad. A continuación consideraremos la Lagrangiana del oscilador armónico y le añadiremos un término extra de interacción  $q^4/4!$ . Este problema no tiene solución exacta, por lo que ni siquiera el método de las funciones generadoras será suficiente, y para ello en el capítulo anterior se hizo el desarrollo perturbativo de las funciones de Green. Como vimos antes, al utilizar éste método para resolver el oscilador armónico con una perturbación lineal se recuperó el resultado del capítulo 5, lo cual nos indica que éste método es confiable.

Ahora calcularemos el tensor geométrico cuántico para el oscilador anarmónico cuártico. La Lagrangiana para éste sistema está dada por:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \alpha q^2) - \lambda \frac{q^4}{4!}. \quad (7.1)$$

Primero es necesario hallar los parámetros de deformación de la Lagrangiana (7.1):

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2} [\dot{q}^2 - (\alpha + \delta\alpha)q^2] - (\lambda + \delta\lambda) \frac{q^4}{4!} \\ &= L - \frac{\delta\alpha}{2} q^2 - \delta\lambda \frac{q^4}{4!}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

por lo tanto los parámetros de deformación son  $\alpha$  y  $\lambda$ , y los operadores de deformación son:

$$\hat{O}_\alpha = -\frac{q^2}{2}, \quad \hat{O}_\lambda = -\frac{q^4}{4!}. \quad (7.3)$$

Ahora, procederemos a calcular las componentes de la métrica de información cuántica:

## 7.1. Componente $g_{\alpha\alpha}$ .

Sabemos que para calcular  $g_{\alpha\alpha}$  necesitamos:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \left( \langle \hat{O}_\alpha(T_1) \hat{O}_\alpha(T_2) \rangle - \langle \hat{O}_\alpha(T_1) \rangle \langle \hat{O}_\alpha(T_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \left( \langle q^2(T_1) q^2(T_2) \rangle - \langle q^2(T_1) \rangle \langle q^2(T_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \left( G'_4(T_1^2, T_2^2) - G'_2(T_1^2) G'_2(T_2^2) \right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Primero veamos la función de Green de dos puntos:

$$G'_2(T_1^2) = \frac{G_2(T_1^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_6(T_1^2, \tau^4) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4)}{1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_4(\tau^4) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_8(\tau_1^4, \tau_2^4)}. \quad (7.5)$$

Sea

$$x = \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_4(\tau^4) - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_8(\tau_1^4, \tau_2^4), \quad (7.6)$$

y notemos que  $(1 - x)^{-1} \approx 1 + x + x^2$ , por lo tanto (7.5) se reescribe como:

$$\begin{aligned}
G'_2(T_1^2) &= \left[ G_2(T_1^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_6(T_1^2, \tau^4) + \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4) \right] \\
&\times \left[ 1 + \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau G_4(\tau^4) - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\lambda^2}{(4!)^2} \int d\tau_1 d\tau_2 G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right] \\
&= G_2(T_1^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_6(T_1^2, \tau^4) - G_2(T_1^2) G_4(\tau^4) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_2(T_1^2) G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. + 2G_2(T_1^2) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) - 2G_6(T_1^2, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right).
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Utizando el resultado de (7.7) podemos calcular  $G'_4(T_1^2, T_2^4)$ :

$$\begin{aligned}
G'_4(T_1^2, T_2^4) &= G_4(T_1^2, T_2^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_8(T_1^2, T_2^2, \tau^4) - G_4(T_1^2, T_2^2) G_4(\tau^4) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{12}(T_1^2, T_2^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_4(T_1^2, T_2^2) G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. + 2G_4(T_1^2, T_2^2) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) - 2G_8(T_1^2, T_2^2, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Multipliquemos ahora (7.7) por  $G'_2(T_2^2)$ :

$$\begin{aligned}
G'_2(T_1^2)G'_2(T_2^2) &= \left[ G_2(T_1^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_6(T_1^2, \tau^4) - G_2(T_1^2)G_4(\tau^4) \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_2(T_1^2)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2G_2(T_1^2)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \right) \right] \\
&\quad \times \left[ G_2(T_2^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_6(T_2^2, \tau^4) - G_2(T_2^2)G_4(\tau^4) \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{10}(T_2^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_2(T_2^2)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. \left. + 2G_2(T_2^2)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_6(T_2^2, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \right) \right] \\
&= G_2(T_1^2)G_2(T_2^2) \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_2(T_1^2)G_6(T_2^2, \tau^4) - 2G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_4(\tau^4) \right. \\
&\quad \left. + G_6(T_1^2, \tau^4)G_2(T_2^2) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_2(T_1^2)G_{10}(T_2^2, \tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad - 2G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 6G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
&\quad - 4G_2(T_1^2)G_6(T_2^2, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 4G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_2(T_2^2)G_4(\tau_2^4) \\
&\quad \left. + 2G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_6(T_2^2, \tau_2^4) + G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4)G_2(T_2^2) \right),
\end{aligned} \tag{7.9}$$

restando (7.9) y (7.8):

$$\begin{aligned}
& G'_4(T_1^2, T_2^2) - G'_2(T_1^2)G'_2(T_2^2) \\
&= G_4(T_1^2, T_2^2) - G_2(T_1^2)G_2(T_2^2) \\
&- \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left[ G_8(T_1^2, T_2^2, \tau^4) - G_4(T_1^2, T_2^2)G_4(\tau^4) - G_2(T_1^2)G_6(T_2^2, \tau^4) \right. \\
&+ \left. 2G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_4(\tau^4) - G_6(T_1^2, \tau^4)G_2(T_2^2) \right] \\
&- \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left[ G_{12}(T_1^2, T_2^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_4(T_1^2, T_2^2)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&+ 2G_4(T_1^2, T_2^2)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_8(T_1^2, T_2^2, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - G_2(T_1^2)G_{10}(T_2^2, \tau_1^4, \tau_2^4) \\
&+ 2G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) - 6G_2(T_1^2)G_2(T_2^2)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
&+ 4G_2(T_1^2)G_6(T_2^2, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) + 4G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_2(T_2^2)G_4(\tau_2^4) \\
&\left. - 2G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_6(T_2^2, \tau_2^4) - G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4)G_2(T_2^2) \right].
\end{aligned} \tag{7.10}$$

A orden 0 se tiene<sup>1</sup>:

$$G_4^{(0)}(T_1^2, T_2^2) - G_2^{(0)}(T_1^2)G_2^{(0)}(T_2^2) = 2G_2^2(T_1, T_2). \tag{7.11}$$

Su diagrama de Feynman es el siguiente<sup>2</sup>:

<sup>1</sup>El superíndice entre paréntesis de las funciones de Green representa el orden de expansión que se está tomando.

<sup>2</sup>Las convenciones que tomaremos para dibujar los diagramas son las siguientes:

- El tiempo  $T_1$  siempre estará en la parte superior izquierda, mientras que el tiempo  $T_2$  en la parte inferior izquierda
- El tiempo  $\tau_1$  siempre estará en la parte superior derecha, mientras que el tiempo  $\tau_2$  en la parte inferior derecha
- Las pequeñas burbujas que hay en los tiempos  $T_1, T_2$  sirven para indicar que no son vértices de interacción.

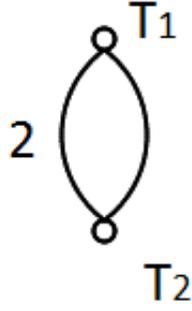


Figura 7.1: Diagrama de Feynman para la componente  $g_{\alpha\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden 0.

Resolvamos ahora la integral para (7.11)<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha}^{(0)} &= 2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 G_2^2(T_1, T_2) \\
&= -2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \frac{1}{4\alpha} e^{-2i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|} \\
&= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} \\
&= \frac{1}{32\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

A orden  $\lambda$  se tiene:

$$\begin{aligned}
&G_4'^{(1)}(T_1^2, T_2^2) - G_2'^{(1)}(T_1^2)G_2'^{(1)}(T_2^2) \\
&= 48G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2(T_2, \tau)G_2(\tau^2) + 24G_2^2(T_1, \tau)G_2^2(T_2, \tau),
\end{aligned} \tag{7.13}$$

recordemos que se tiene que dividir por un factor de 4!. Por lo tanto tenemos:

$$g_{\alpha\alpha}^{(1)} = -2i\lambda \int d\tau G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2(T_2, \tau)G_2(\tau^2) - i\lambda \int d\tau G_2^2(T_1, \tau)G_2^2(T_2, \tau). \tag{7.14}$$

<sup>3</sup>El superíndice entre paréntesis de la métrica de información cuántica representa el orden de expansión que se está tomando.

Los diagramas de Feynman correspondientes son<sup>4</sup>:

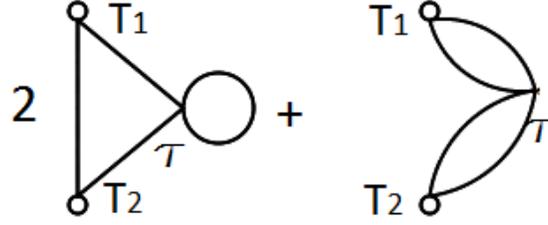


Figura 7.2: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\alpha\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda$ .

Ahora, consideremos el primer término de (7.14):

$$\begin{aligned}
& -2i\frac{1}{4}\lambda \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau) G_2(T_2, \tau) G_2(\tau^2) \\
&= \frac{1}{2i}\lambda \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{16\alpha^2} e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-T_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|\tau-T_1|} e^{-i\sqrt{\alpha}|T_2-\tau|} \\
&= \frac{\lambda}{32\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\sqrt{\alpha}|t_2-t_1|} e^{-\sqrt{\alpha}|t-t_1|} e^{-\sqrt{\alpha}|t_2-t|} \\
&= \frac{\lambda}{32\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_1} dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&+ \frac{\lambda}{32\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{t_1}^0 dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&+ \frac{\lambda}{32\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{t_2} dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{\sqrt{\alpha}(t-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&+ \frac{\lambda}{32\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{t_2}^{\infty} dt e^{-\sqrt{\alpha}(t_2-t_1)} e^{-\sqrt{\alpha}(t-t_1)} e^{\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
&= -\frac{\lambda}{64\alpha^{7/2}},
\end{aligned} \tag{7.15}$$

para el segundo término de (7.14):

<sup>4</sup>En estos diagramas se escribe toda la notación, las  $T_i$  representan los tiempos imaginarios y las  $\tau$  representan las interacciones que hay en los diagramas. En los diagramas siguientes, por simplicidad, se prescindirá completamente de ésta notación.

$$\begin{aligned}
& -i\lambda \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G_2^2(T_1, \tau) G_2^2(T_2, \tau) \\
& = \frac{\lambda}{4i} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{1}{16\alpha^2} e^{-i2\sqrt{\alpha}|T_1-\tau|} e^{-i2\sqrt{\alpha}|T_2-\tau|} \\
& = \frac{\lambda}{64\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-2\sqrt{\alpha}|t_1-t|} e^{-2\sqrt{\alpha}|t_2-t|} \\
& = \frac{\lambda}{64\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{t_1} dt e^{-2\sqrt{\alpha}(t_1-t)} e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
& + \frac{\lambda}{64\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{t_1}^0 dt e^{2\sqrt{\alpha}(t_1-t)} e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
& + \frac{\lambda}{64\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_0^{t_2} dt e^{2\sqrt{\alpha}(t_1-t)} e^{-2\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
& + \frac{\lambda}{64\alpha^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \int_{t_2}^{\infty} dt e^{2\sqrt{\alpha}(t_1-t)} e^{2\sqrt{\alpha}(t_2-t)} \\
& = -\frac{3\lambda}{512\alpha^{7/2}},
\end{aligned} \tag{7.16}$$

sumando (7.15) y (7.16) se tiene que para orden  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\alpha}^{(1)} & = -2i\lambda \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau) G_2(T_2, \tau) G_2(\tau^2) \\
& - i\lambda \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^2(T_1, \tau) G_2^2(T_2, \tau) \\
& = -\frac{11\lambda}{512\alpha^{7/2}}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Para orden  $\lambda^2$ , al igual que en (7.13) se hace la expansión de las  $G_{12}$ ,  $G_{10}$ ,  $G_8$ ,  $G_6$  y  $G_4$  en términos de  $G_2$ . Por lo que al considerar los factores  $\frac{1}{4 \cdot (4!)^2}$  y hacer las expansiones de las funciones de Green, los diagramas de Feynman correspondientes son<sup>5</sup>:

---

<sup>5</sup>Las integrales a éste orden se pueden consultar en el Apéndice A

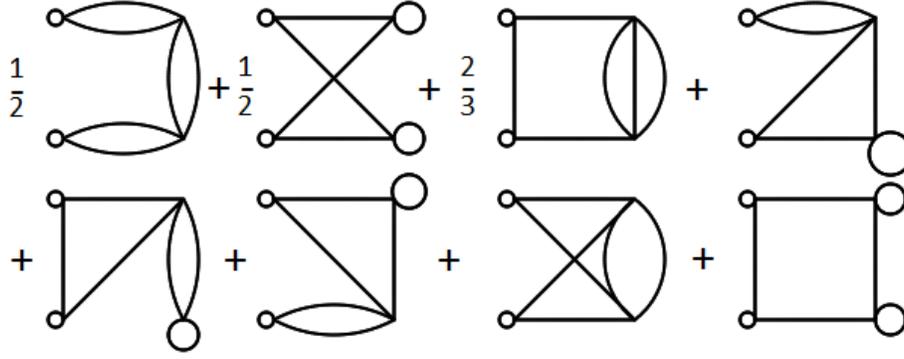


Figura 7.3: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\alpha\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda^2$ .

Por lo tanto obtenemos:

$$g_{\alpha\alpha} = \frac{1}{32\alpha^2} - \frac{11\lambda}{512\alpha^{7/2}} + \frac{785\lambda^2}{49152\alpha^5} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (7.18)$$

## 7.2. Componente $g_{\lambda\alpha}$ .

Para calcular  $g_{\lambda\alpha}$  necesitamos:

$$\begin{aligned} g_{\lambda\alpha} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_1) \hat{\mathcal{O}}_{\lambda}(T_2) \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_{\alpha}(T_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_{\lambda}(T_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4!} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle q^2(T_1) q^4(T_2) \rangle - \langle q^2(T_1) \rangle \langle q^4(T_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4!} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( G'_6(T_1^2, T_2^4) - G'_2(T_1^2) G'_4(T_2^4) \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

De la ecuación (7.7) se tiene que:

$$\begin{aligned} G'_2(T_1^2) &= G_2(T_1^2) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_6(T_1^2, \tau^4) - G_2(T_1^2) G_4(\tau^4) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_2(T_1^2) G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\ &\quad \left. + 2G_2(T_1^2) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) - 2G_6(T_1^2, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right), \end{aligned} \quad (7.20)$$

de (7.8):

$$\begin{aligned}
G'_4(T_2^4) &= G_4(T_2^4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_8(T_2^4, \tau^4) - G_4(T_2^4)G_4(\tau^4) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{12}(T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_4(T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. + 2G_4(T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_8(T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \right). \tag{7.21}
\end{aligned}$$

A partir de los resultados anteriores se puede calcular  $G_6(T_1^2, T_2^4)$ :

$$\begin{aligned}
G'_6(T_1^2, T_2^4) &= G_6(T_1^2, T_2^4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_{10}(T_1^2, T_2^4, \tau^4) - G_6(T_1^2, T_2^4)G_4(\tau^4) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{14}(T_1^2, T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_6(T_1^2, T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad \left. + 2G_6(T_1^2, T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_{10}(T_1^2, T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \right), \tag{7.22}
\end{aligned}$$

al multiplicar (7.20) con (7.21) se tiene:

$$\begin{aligned}
&G'_2(T_1^2)G'_4(T_2^4) \\
&= G_2(T_1^2)G_4(T_2^4) \\
&\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_2(T_1^2)G_8(T_2^4, \tau^4) - 2G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_4(\tau^4) \right. \\
&\quad \left. + G_6(T_1^2, \tau^4)G_4(T_2^4) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_2(T_1^2)G_{12}(T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&\quad - 2G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 6G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
&\quad - 4G_2(T_1^2)G_8(T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 4G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_2^4) \\
&\quad \left. + 2G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_8(T_2^4, \tau_2^4) + G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4)G_4(T_2^4) \right), \tag{7.23}
\end{aligned}$$

restando (7.22) y (7.23):

$$\begin{aligned}
& G'_6(T_1^2, T_2^4) - G'_2(T_1^2)G'_4(T_2^4) \\
&= G_6(T_1^2, T_2^4) - G_2(T_1^2)G_4(T_2^4) \\
&- \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left[ G_{10}(T_1^2, T_2^4, \tau^4) - G_6(T_1^2, T_2^4)G_4(\tau^4) - G_2(T_1^2)G_8(T_2^4, \tau^4) \right. \\
&+ 2G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_4(\tau^4) - G_6(T_1^2, \tau^4)G_4(T_2^4) \left. \right] \\
&- \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left[ G_{14}(T_1^2, T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_6(T_1^2, T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
&+ 2G_8(T_1^2, T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_{10}(T_1^2, T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - G_2(T_1^2)G_{12}(T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) \\
&+ 2G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) - 6G_2(T_1^2)G_4(T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
&+ 4G_2(T_1^2)G_8(T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) + 4G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_2^4) \\
&\left. - 2G_6(T_1^2, \tau_1^4)G_8(T_2^4, \tau_2^4) - G_{10}(T_1^2, \tau_1^4, \tau_2^4)G_4(T_2^4) \right].
\end{aligned} \tag{7.24}$$

A orden 0 se tiene:

$$G_6^{(0)}(T_1^2, T_2^4) - G_2^{(0)}(T_1^2)G_4^{(0)}(T_2^4) = 12G_2^2(T_1, T_2)G_2^2(T_2), \tag{7.25}$$

resolviendo la integral de (7.25)

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\alpha}^{(0)} &= 12 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2^2) \\
&= \frac{1}{128\alpha^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Su diagrama de Feynman correspondiente es:

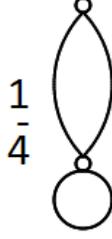


Figura 7.4: Diagrama de Feynman para la componente  $g_{\lambda\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden 0.

A orden  $\lambda$  se tiene:

$$\begin{aligned}
& G_6^{(1)}(T_1^2, T_2^4) - G_2^{(1)}(T_1^2)G_4^{(1)}(T_2^4) \\
&= 144G_2^2(T_1, \tau)G_2^2(T_2, \tau)G_2(T_2^2) + 144G_2^2(T_1, T_2)G_2^2(T_2, \tau)G_2(\tau^2) \\
&+ 192G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2^3(T_2, \tau) \\
&+ 288G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2(T_2^2)G_2(T_2, \tau)G_2(\tau^2),
\end{aligned} \tag{7.27}$$

recordemos que se debe considerar el factor  $\frac{1}{2 \cdot (4!)^2}$ . Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\alpha}^{(1)} &= -\frac{i\lambda}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^2(T_1, \tau)G_2^2(T_2, \tau)G_2(T_2^2) \\
&- \frac{i\lambda}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^2(T_1, T_2)G_2^2(T_2, \tau)G_2(\tau^2) \\
&- \frac{i\lambda}{6} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2^3(T_2, \tau) \\
&- \frac{i\lambda}{4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1, T_2)G_2(T_1, \tau)G_2(T_2^2)G_2(T_2, \tau)G_2(\tau^2) \\
&= -\frac{89\lambda}{12288\alpha^4}.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Sus diagramas correspondientes son:

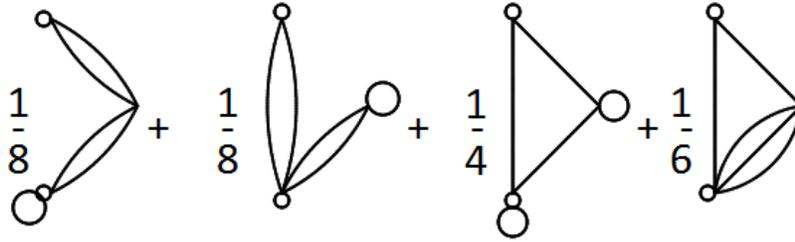


Figura 7.5: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda$ .

A orden  $\lambda^2$ , sus diagramas correspondientes son<sup>6</sup>:

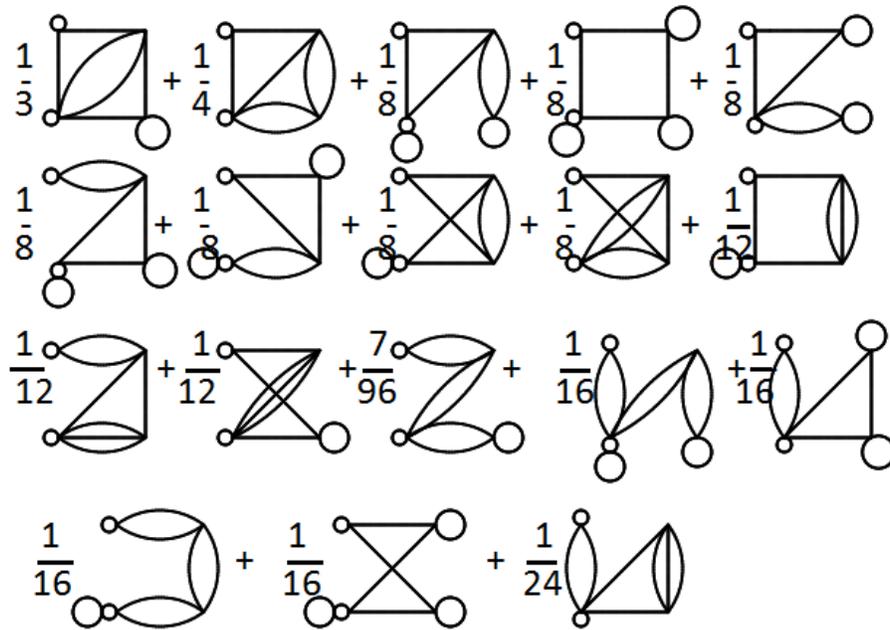


Figura 7.6: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\alpha}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda^2$ .

Por lo tanto obtenemos:

$$g_{\lambda\alpha} = \frac{1}{128\alpha^{5/2}} - \frac{89\lambda}{12288\alpha^4} + \frac{3841\lambda^2}{589824\alpha^{11/2}} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (7.29)$$

<sup>6</sup>Las integrales a este orden se pueden consultar en el Apéndice B

### 7.3. Componente $g_{\lambda\lambda}$ .

Para calcular  $g_{\lambda\lambda}$  necesitamos:

$$\begin{aligned}
 g_{\lambda\lambda} &= \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle \hat{O}_\lambda(T_1) \hat{O}_\lambda(T_2) \rangle - \langle \hat{O}_\lambda(T_1) \rangle \langle \hat{O}_\lambda(T_2) \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{(4!)^2} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( \langle q^4(T_1) q^4(T_2) \rangle - \langle q^4(T_1) \rangle \langle q^4(T_2) \rangle \right) \\
 &= \frac{1}{(4!)^4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \left( G'_8(T_1^4, T_2^4) - G'_4(T_1^4) G'_4(T_2^4) \right).
 \end{aligned} \tag{7.30}$$

De la ecuación (7.8) se tiene que :

$$\begin{aligned}
 G'_4(T_i^4) &= G_4(T_i^4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_8(T_i^4, \tau^4) - G_4(T_i^4) G_4(\tau^4) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{12}(T_i^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_4(T_i^4) G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
 &\quad \left. + 2G_4(T_i^4) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) - 2G_8(T_i^4, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right).
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

A partir del resultado anterior se puede calcular  $G_8(T_1^4, T_2^4)$ :

$$\begin{aligned}
 G'_8(T_1^4, T_2^4) &= G_8(T_1^4, T_2^4) - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_{12}(T_1^4, T_2^4, \tau^4) - G_8(T_1^4, T_2^4) G_4(\tau^4) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_{16}(T_1^4, T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_8(T_1^4, T_2^4) G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
 &\quad \left. + 2G_8(T_1^4, T_2^4) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4) - 2G_{12}(T_1^4, T_2^4, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \right).
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

Luego, de (7.23):

$$\begin{aligned}
& G'_4(T_1^4)G'_4(T_2^4) \\
& = G_4(T_1^4)G_4(T_2^4) \\
& \quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left( G_4(T_1^4)G_8(T_2^4, \tau^4) - 2G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau^4) \right. \\
& \quad \left. + G_8(T_1^4, \tau^4)G_4(T_2^4) \right) \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left( G_4(T_1^4)G_{12}(T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
& \quad - 2G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 6G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
& \quad - 4G_4(T_1^4)G_8(T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 4G_8(T_1^4, \tau_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_2^4) \\
& \quad \left. + 2G_8(T_1^4, \tau_1^4)G_8(T_2^4, \tau_2^4) + G_{12}(T_1^4, \tau_1^4, \tau_2^4)G_4(T_2^4) \right), \tag{7.33}
\end{aligned}$$

restando (7.32) y (7.33)

$$\begin{aligned}
& G'_8(T_1^4, T_2^4) - G'_4(T_1^4)G'_4(T_2^4) \\
& = G_8(T_1^4, T_2^4) - G_4(T_1^4)G_4(T_2^4) \\
& \quad - \frac{i\lambda}{4!} \int d\tau \left[ G_{12}(T_1^4, T_2^4, \tau^4) - G_8(T_1^4, T_2^4)G_4(\tau^4) - G_4(T_1^4)G_8(T_2^4, \tau^4) \right. \\
& \quad \left. + 2G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau^4) - G_8(T_1^4, \tau^4)G_4(T_2^4) \right] \\
& \quad - \frac{1}{2} \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right)^2 \int d\tau_1 d\tau_2 \left[ G_{16}(T_1^4, T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) - G_8(T_1^4, T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right. \\
& \quad + 2G_8(T_1^4, T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - 2G_{12}(T_1^4, T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) - G_4(T_1^4)G_{12}(T_2^4, \tau_1^4, \tau_2^4) \\
& \quad + 2G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) - 6G_4(T_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4) \\
& \quad + 4G_4(T_1^4)G_8(T_2^4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4) + 4G_8(T_1^4, \tau_1^4)G_4(T_2^4)G_4(\tau_2^4) \\
& \quad \left. - 2G_8(T_1^4, \tau_1^4)G_8(T_2^4, \tau_2^4) - G_{12}(T_1^4, \tau_1^4, \tau_2^4)G_4(T_2^4) \right]. \tag{7.34}
\end{aligned}$$

A orden 0 se tiene

$$G_8^{\prime(0)}(T_1^4, T_2^4) - G_4^{\prime(0)}(T_1^4)G_4^{\prime(0)}(T_2^4) = 72G_2(T_1^2)G_2^2(T_1, T_2)G_2(T_2^2) + 24G_2^4(T_1, T_2), \quad (7.35)$$

resolviendo la integral de (7.35)

$$\begin{aligned} g_{\lambda\lambda}^{(0)} &= 72 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 G_2(T_1^2)G_2^2(T_1, T_2)G_2(T_2^2) \\ &+ 24 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 G_2^4(T_1, T_2) \\ &= \frac{13}{6144\alpha^3}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Sus diagramas de Feynman correspondientes son:

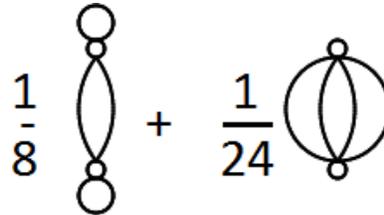


Figura 7.7: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\lambda}$  de la métrica de información cuántica a orden 0.

A orden  $\lambda$  se tienen los siguientes diagramas de Feynman<sup>7</sup>:

<sup>7</sup>Las integrales se pueden consultar en el Apéndice C

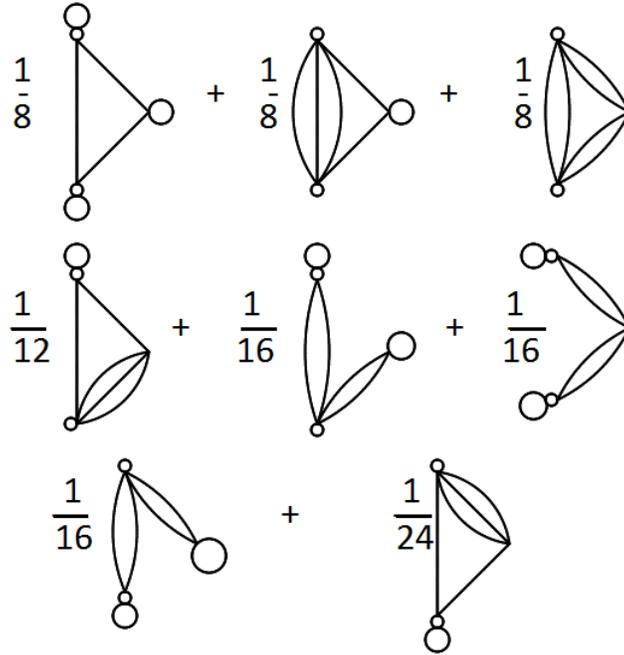
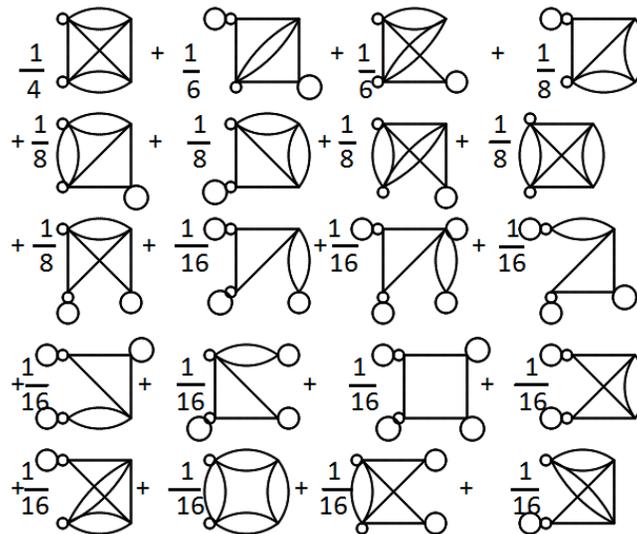


Figura 7.8: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\lambda}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda$ .

Haciendo las integrales del Apéndice C, se tiene que la componente  $g_{\lambda\lambda}$  a orden  $\lambda$  es:

$$g_{\lambda\lambda}^{(1)} = -\frac{31\lambda}{12288\alpha^{9/2}}. \quad (7.37)$$

A orden  $\lambda^2$ , se tienen los siguientes diagramas de Feynman.<sup>8</sup>:



<sup>8</sup>Las integrales correspondientes se pueden encontrar en el Apéndice C

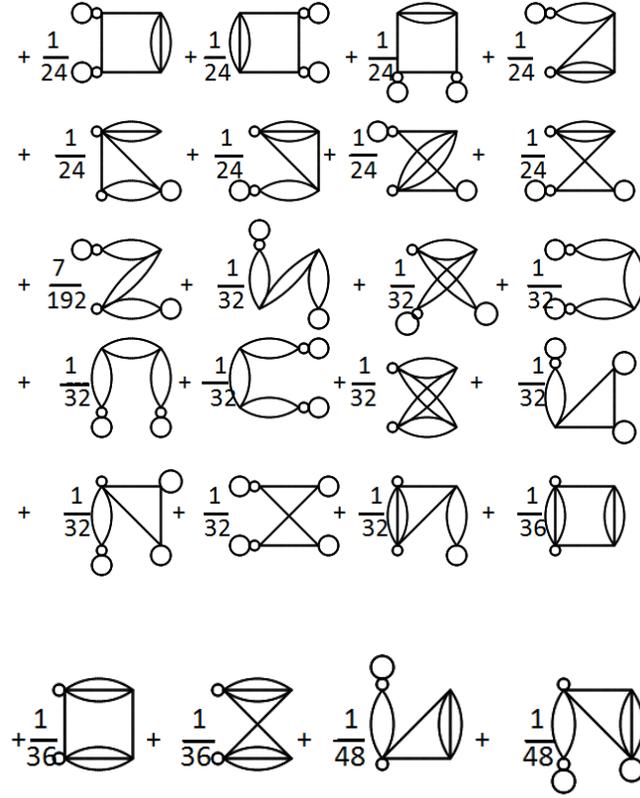


Figura 7.9: Diagramas de Feynman para la componente  $g_{\lambda\lambda}$  de la métrica de información cuántica a orden  $\lambda^2$ .

Haciendo las integrales del Apéndice C, se tiene que la componente  $g_{\lambda\lambda}$  a orden  $\lambda^2$  es:

$$g_{\lambda\lambda}^{(2)} = \frac{57227\lambda^2}{2133\alpha^6}. \quad (7.38)$$

Por lo que se tiene:

$$g_{\lambda\lambda} = \frac{13}{6144\alpha^3} - \frac{31\lambda}{12288\alpha^{9/2}} + \frac{57227\lambda^2}{2133\alpha^6} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (7.39)$$

Con los resultados anteriores, es posible escribir ahora la matriz correspondiente:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32\alpha^2} - \frac{11\lambda}{512\alpha^{7/2}} + \frac{785\lambda^2}{49152\alpha^5} + \mathcal{O}(\lambda^3) & \frac{1}{128\alpha^{5/2}} - \frac{89\lambda}{12288\alpha^4} + \frac{3841\lambda^2}{589824\alpha^{11/2}} + \mathcal{O}(\lambda^3) \\ \frac{1}{128\alpha^{5/2}} - \frac{89\lambda}{12288\alpha^4} + \frac{3841\lambda^2}{589824\alpha^{11/2}} + \mathcal{O}(\lambda^3) & \frac{13}{6144\alpha^3} - \frac{31\lambda}{12288\alpha^{9/2}} + \frac{57227\lambda^2}{2133\alpha^6} + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

Calculamos ahora el determinante de (7.39):

$$\det g_{ij} = \frac{1}{196608\alpha^5} - \frac{35\lambda}{3145728\alpha^{13/2}} + \frac{60002119463\lambda^2}{71571603456\alpha^8} + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (7.41)$$

si resolvemos para  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = \frac{48(8295 - i\sqrt{9480266068129})\alpha^{3/2}}{60002119463}, \quad \lambda_2 = \frac{48(8295 + i\sqrt{9480266068129})\alpha^{3/2}}{60002119463}, \quad (7.42)$$

debido a que las soluciones no son reales, esto implica que el determinante nunca diverge, por lo que la métrica de información cuántica es no-degenerada para todo valor de  $\lambda$ . Éste resultado es consecuencia de haber hecho la expansión hasta orden  $\lambda^2$ , ya que si comparamos con el resultado hecho hasta orden  $\lambda$  [5], notamos que hasta éste orden el determinante se vuelve singular en  $\lambda_c = \frac{16}{35}\alpha^{3/2}$ , lo cual implica que la métrica es degenerada para éste valor en los parámetros, lo cual podría indicar la presencia de una transición de fase, pero de (7.41) vemos que ésta no ocurre. Este es el resultado más importante de la tesis.

# Capítulo 8

## El tensor geométrico cuántico para una teoría de campo cuántico escalar.

El desarrollo de los capítulos anteriores se ha hecho en el concepto de la mecánica cuántica, es decir, solo se ha considerado una dimensión y una sola partícula, el siguiente paso sería considerar la generalización de 1 partícula en  $n$  dimensiones, al hacer ésta generalización no habrán muchos cambios en los resultados obtenidos, por ello surge la siguiente pregunta: ¿qué hay de aquellos sistemas de muchas partículas? El objetivo es generalizar algunos de los resultados anteriores a una teoría cuántica de campo escalar, por lo que revisaremos el concepto de campo, se deducirá el tensor geométrico cuántico para ésta teoría y se resolverá tensor geométrico cuántico para un campo escalar libre y para un campo escalar con una perturbación lineal.

### 8.1. Concepto de campo.

Antes de comenzar con la extensión de todo lo que hasta ahora se ha aprendido, es necesario primero entender el punto de vista del sistema físico en cuestión, que es un campo cuántico. Los campos son objetos definidos localmente, el campo que se definirá a continuación es una especie de subrutina que regresa el valor de  $\varphi$  para valores de  $\bar{x}$  y  $t$  que previamente fueron introducidos. El campo es local en el sentido en que no nos dice nada sobre el valor del campo en otro lugar más que en el que nos estamos refiriendo.[17]

### 8.1.1. Campo Clásico.

Un campo es una propiedad del Universo que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio para cada instante en el tiempo:

$$\varphi_{\vec{x}}(t), \quad (8.1)$$

donde el subíndice  $\vec{x}$  representa el índice continuo en  $\mathbb{R}^3$ , que corresponde a  $X_n(t)$  en un sistema con  $N$  partículas discretas. Un campo en  $0 + 1$  dimensiones  $\varphi(t)$  sería un sistema físico de una sola partícula moviéndose en una dimensión,  $y(t)$ . Un campo en  $1 + 1$  dimensiones  $\varphi_x(t)$  sería una cuerda oscilando en una dimensión transversal,  $y(t, x)$ . Un campo en  $2 + 1$  dimensiones  $\varphi(t, x_1, x_2)$  sería una sabana oscilando en una dimensión transversal,  $y(t, x_1, x_2)$ . Un campo en  $3 + 1$  dimensiones  $\varphi(t, \vec{x})$  sería una gelatina oscilando en una dimensión transversal,  $y(t, \vec{x})$ . Con ésta definición y observando los ejemplos anteriores, notamos que en un campo en  $d + 1$  dimensiones, con  $d \geq 1$ , tenemos un sistema con un número infinito no numerable de grados de libertad.

El campo que analizaremos en éste capítulo es el más sencillo: el campo escalar,  $\varphi(x)$ , tal que su regla de transformación general de coordenadas sea:

$$\varphi'(x') = \varphi(x). \quad (8.2)$$

Para ello conviene tomar la descripción Lagrangiana de la dinámica. La cantidad fundamental es la *acción*:

$$S[\varphi] = \int dt L[\varphi(t)]. \quad (8.3)$$

Para determinar  $L$  necesitamos conocer  $\varphi(t, \vec{x})$  en todos sus puntos para cierto  $t$ , por lo que para conocer  $S$  es necesario conocer al campo en todos sus puntos para toda  $t$ . La Lagrangiana  $L$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$L[\varphi(t)] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi(x)), \quad (8.4)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la *Densidad Lagrangiana*, de manera análoga se tendrán las ecuaciones de

Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi(x))} = 0. \quad (8.5)$$

### 8.1.2. Campo Cuántico.

Para llevar a cabo la cuantización del campo escalar, real y libre, consideraremos la densidad Lagrangiana más general, que es la Lagrangiana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (8.6)$$

Calculamos entonces las ecuaciones de movimiento a partir de (8.5)

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0, \quad (8.7)$$

ésta es la ecuación de Klein-Gordon. Para poder resolver ésta ecuación, es necesario cambiar de variables a través de una transformada de Fourier

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = \int d^3x e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \iff \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}), \quad (8.8)$$

donde  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  es real. La ventaja de hacer este cambio de variables es que en vez de describir al campo a un tiempo dado especificando su valor en cada punto espacial  $\vec{x}$ , ahora damos la amplitud  $\varphi(\vec{p})$  de cada uno de sus nodos de Fourier. Si sustituimos la transformación de (8.8) en la ecuación de Klein-Gordon (8.7) y recordando que  $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$  se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi &= \left( \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2 \right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (\partial_t^2 + \vec{p}^2 + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Recordando además que  $E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + m^2$ , se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}
(\partial_t^2 + E_{\vec{p}}^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) &= 0 \\
\rightarrow \partial_t^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) &= -E_{\vec{p}}^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),
\end{aligned} \tag{8.10}$$

que es la ecuación del oscilador armónico con frecuencia  $\omega = E_{\vec{p}}$  y cuya solución general es:

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = a_{\vec{p}} e^{-i\omega t} + a_{\vec{p}}^* e^{i\omega t}, \tag{8.11}$$

con lo anterior se puede concluir que los modos de Fourier son los modos del campo  $\varphi(t, \vec{x})$ , es decir, un campo libre es una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados. Para llevar a cabo la cuantización canónica, se imponen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad [\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{y})] = [\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{y})] = 0, \tag{8.12}$$

y se tiene también la ecuación de Heisenberg

$$\frac{d}{dt} \hat{O}(t) = i[\hat{H}, \hat{O}(t)] + \partial_t \hat{O}(t), \tag{8.13}$$

al igual que en (8.4) se puede definir una densidad Hamiltoniana que esta dada por:

$$H[\varphi(t), \pi(t)] = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi(x), \pi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \varphi(x), \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_m} \pi(x)), \tag{8.14}$$

donde  $\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$  es el momento generalizado. El Hamiltoniano para el campo escalar es el siguiente:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left( \hat{\pi}^2 + (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + m^2 \hat{\varphi} \right). \tag{8.15}$$

Así que, sustituyendo (8.15) y usando  $\varphi(t, \vec{x})$  en la ec. (8.13) se recupera la ecuación de Klein-Gordon

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\varphi}(x) = 0, \quad (8.16)$$

por lo que el campo puede ser descrito en términos de operadores de creación y aniquilación:

$$\hat{\varphi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}. \quad (8.17)$$

## 8.2. Deducción del tensor geométrico cuántico para una teoría cuántica de campos.

En ésta sección se hará la deducción del tensor geométrico cuántico para una teoría cuántica de campos a partir del formalismo de la integral de trayectoria. Comenzaremos considerando el caso más general de ésta teoría en  $D = d + 1$  dimensiones en tiempo Euclideo.

Consideremos una teoría cuántica de campos definida por una densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}_0$  en el intervalo de tiempo Euclideo  $(-\infty, 0)$ . Entonces podemos considerar una situación en la cual se deforme la teoría original a un tiempo  $\tau = 0$ . Esta deformación se hace añadiendo a la Lagrangiana original  $\mathcal{L}_0$  términos de la forma  $\delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a$ , cuyos índices de los parámetros son  $a = 1, \dots, n$ , y donde  $\hat{\mathcal{O}}_a$  representan a los operadores de deformación y  $\delta\lambda^a$  son parámetros reales asociados a estas deformaciones. En este contexto debemos considerar situaciones en las cuales la Lagrangiana original  $\mathcal{L}_0$  tenga una dependencia explícita en los parámetros físicos  $\lambda^a$  como bien pueden serlo la posición, el momento, la frecuencia, etc. De este modo, la teoría deformada final surge de pequeñas variaciones de estos parámetros de la forma  $\lambda^a \rightarrow \lambda^a + \delta\lambda^a$ , con lo que se obtiene una Lagrangiana perturbada  $\mathcal{L}_1$  para el tiempo Euclideo restante  $(0, \infty)$ , dado explícitamente por:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a. \quad (8.18)$$

La teoría original corresponde a un estado  $|\Omega_0\rangle$  y la teoría deformada corresponde a un estado  $|\Omega_1\rangle$ . Usaremos la definición de fidelidad dada en (4.2). Ahora consideremos un estado genérico  $|\varphi\rangle$  así como su superposición con el estado original  $|\Omega_0\rangle$ . En el formalismo de la integral de trayectoria, esto se puede obtener evolucionando el sistema en tiempo Euclideo de  $\tau = -\infty$  donde se pone el estado original hasta  $\tau = 0$  y se inserta el estado  $|\varphi\rangle$

$$\langle \varphi, \tau = 0 | \Omega_0, \tau = -\infty \rangle = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \int_{\varphi(\tau=-\infty)=\varphi(-\infty)}^{\varphi(\tau=0)=\varphi(0)} \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int_{-\infty}^0 d\tau \int d^d x \mathcal{L}_0 \right), \quad (8.19)$$

donde

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^d x \mathcal{L}_0 \right). \quad (8.20)$$

Análogamente, podemos considerar la evolución de  $\tau = 0$  a  $\tau = \infty$  siendo

$$\begin{aligned} \langle \Omega_1, \tau = \infty | \varphi, \tau = 0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z_1}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\infty)} \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int_0^{\infty} d\tau \int d^d x \mathcal{L}_1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z_1}} \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\infty)} \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int_0^{\infty} d\tau \int d^d x (\mathcal{L}_0 + \delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a) \right), \end{aligned} \quad (8.21)$$

donde

$$Z_1 = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left( - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^d x (\mathcal{L}_0 + \delta\lambda^a \hat{\mathcal{O}}_a) \right). \quad (8.22)$$

Por lo tanto, recordando el desarrollo de (4.7), la superposición de los estados se escribe como

$$\langle \Omega_1, \tau = \infty | \Omega_0, \tau = -\infty \rangle = \frac{1}{\sqrt{Z_0 Z_1}} Z_0 \left\langle \exp \left( - \int_0^\infty d\tau \int d^d x \delta \lambda^a \hat{O}_a \right) \right\rangle. \quad (8.23)$$

Donde  $\langle . \rangle$  es el valor esperado de un operador, éste valor esperado se toma para los estados base. Por otro lado, con (4.8) se tiene que

$$Z_0 Z_1 = Z_0^2 \left\langle \exp \left( - \int_{-\infty}^\infty d\tau \int d^d x \delta \lambda^a \hat{O}_a \right) \right\rangle, \quad (8.24)$$

de modo que al sacar raíz cuadrada en la ecuación (8.24) y al simplificar términos con la ecuación (8.23) queda como resultado final

$$\langle \Omega_1, \tau = \infty | \Omega_0, \tau = -\infty \rangle = \frac{\left\langle \exp \left( - \int_0^\infty d\tau \int d^d x \delta \lambda^a \hat{O}_a \right) \right\rangle}{\left\langle \exp \left( - \int_{-\infty}^\infty d\tau \int d^d x \delta \lambda^a \hat{O}_a \right) \right\rangle^{1/2}}, \quad (8.25)$$

donde el valor esperado se toma con respecto al estado sin perturbar  $|\Omega_0\rangle$ . Ahora podemos usar la expresión anterior para expandir  $|\langle \Omega_1 | \Omega_0 \rangle|$  en series de  $\delta \lambda^a$ . Consideremos el caso en el que  $\langle \hat{O}_a \rangle \neq 0$ , supongamos también que las funciones de dos puntos tienen simetría  $T$ , i.e.,  $\langle \hat{O}_a(-\tau_1) \hat{O}_a(-\tau_2) \rangle = \langle \hat{O}_a(\tau_1) \hat{O}_a(\tau_2) \rangle$ . Primero, el numerador se puede reescribir como<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \left\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \int d^d x \delta \lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle &= \frac{1}{Z_0[J]} \left( 1 - \delta \lambda^a \int_0^\infty d\tau_1 \int d^d x_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta \lambda^a \delta \lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 d\tau'_1 \int d^d x_1 d^d x'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \hat{O}_b(\tau'_1, x'_1) \rangle \right). \end{aligned} \quad (8.26)$$

De forma similar, el denominador se reescribe como:

---

<sup>1</sup>Es importante remarcar que la  $x$  representa a todas las variables espaciales y no solo a una única dimensión espacial.

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d^d x \delta\lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle^{-1/2} &= \frac{1}{Z_0[J]^{1/2}} \left( 1 - \delta\lambda^a \int d\tau_2 \int d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 d\tau'_2 \int d^d x_2 d^d x'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \hat{O}_b(\tau'_2, x'_2) \rangle \right)^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Ahora, con la aproximación de (4.20) hacemos la expansión en serie de Taylor y nos quedamos con los términos hasta segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle e^{-\int_0^{\infty} d\tau \int d^d x \delta\lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle}{\left\langle e^{-\int d\tau \int d^d x \delta\lambda^a \hat{O}_a} \right\rangle^{1/2}} &= \frac{1}{Z_0[J]^{1/2}} \left[ 1 + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \int d\tau_2 \int d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\
&\quad - \frac{1}{4} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \int d^d x_2 d^d x'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \hat{O}_b(\tau'_2, x'_2) \rangle \\
&\quad + \frac{3}{8} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \int d^d x_2 d^d x'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2, x'_2) \rangle \\
&\quad - \delta\lambda^a \int_0^{\infty} d\tau_1 \int d^d x_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int d\tau_2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau'_1 \int d^d x_1 d^d x'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_1, x'_1) \rangle \right].
\end{aligned} \tag{8.28}$$

A orden  $\lambda$ , al igual que en (4.24) se anula el término. A orden  $\lambda^2$  usando el desarrollo de (4.28) se tiene:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \int d^d x_2 d^d x'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \hat{O}_b(\tau'_2, x'_2) \rangle \\
& = \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle,
\end{aligned} \tag{8.29}$$

y de (4.32):

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int d\tau_2 d\tau'_2 \int d^d x_2 d^d x'_2 \langle \hat{O}_a(\tau_2, x_2) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_2, x'_2) \rangle \\
& - \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 \int d\tau_2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \\
& + \frac{1}{2} \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau'_1 \int d^d x_1 d^d x'_1 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau'_1, x'_1) \rangle \\
& = -\delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle.
\end{aligned} \tag{8.30}$$

Por lo tanto, la ecuación (8.28) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\frac{\langle e^{-\int_0^\infty d\tau \int d^d x \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle}{\langle e^{-\int d\tau \int d^d x \delta\lambda^a \hat{O}_a} \rangle^{1/2}} &= 1 - \delta\lambda^a \delta\lambda^b \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^d x_1 d^d x_2 \left( \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \right).
\end{aligned} \tag{8.31}$$

El resultado de la expansión de la fidelidad es el siguiente:

$$|\langle \Omega_1 | \Omega_0 \rangle| = 1 - \frac{1}{2} G_{ab} \delta\lambda^a \delta\lambda^b + \dots, \tag{8.32}$$

donde  $G_{ab}$  es el *tensor geométrico complejo cuántico* y esta dado por:

$$\begin{aligned}
G_{ab} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^d x_1 \int d^d x_2 \left( \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{O}_a(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_b(\tau_2, x_2) \rangle \right),
\end{aligned} \tag{8.33}$$

donde el ordenamiento temporal esta implícito en la ecuación (8.33)[15]

### 8.3. El tensor geométrico cuántico para un campo escalar.

Como se vio en la sección (8.1.2), la teoría de campo más sencilla está dada por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \alpha \varphi^2). \quad (8.34)$$

Como vimos, el operador de campo está dado por:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}}, \quad (8.35)$$

haciendo la variación al parámetro  $\alpha$  de (8.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - (\alpha + \delta\alpha) \varphi^2) \\ &= \mathcal{L}_0 - \frac{\delta\alpha}{2} \varphi^2, \end{aligned} \quad (8.36)$$

por lo que el operador de deformación asociado es:

$$\hat{\mathcal{O}}_\alpha = -\frac{1}{2} \varphi^2. \quad (8.37)$$

Ahora, usando la ecuación (8.33) podemos calcular la métrica de información cuántica, que está dada por:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_2, x_2) \rangle \right) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2) \rangle - \langle \varphi^2(x_1) \rangle \langle \varphi^2(x_2) \rangle \right), \end{aligned} \quad (8.38)$$

recordemos que el valor esperado se debe de obtener en los estados de vacío, es decir:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x) \rangle &= -\frac{1}{2} \langle 0 | \varphi^2(x) | 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \right|_{p^0=E_{\vec{p}}} \right. \\
&\quad \times \left. \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right) \right|_{p^0=E_{\vec{p}}} \left| 0 \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^2 e^{-2ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger 2} e^{2ip \cdot x} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \right) \right|_{p^0=E_{\vec{p}}} \left| 0 \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \langle 0 | \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \\
&= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2E_{\vec{p}}} \Big|_{p^0=E_{\vec{p}}} \\
&= -\frac{1}{4(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{\sqrt{\vec{p}^2 + \alpha}},
\end{aligned} \tag{8.39}$$

por otro lado, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_1) \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_2) \rangle &= \frac{1}{4} \langle 0 | \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{16(2\pi)^6} \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p d^3p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^2 e^{-2ip \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger 2} e^{2ip \cdot x} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \right) \left( \hat{a}_{\vec{p}'}^2 e^{-2ip' \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger 2} e^{2ip' \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger + \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} \right) \right|_{p^0=E_{\vec{p}}} \left| 0 \right\rangle \\
&= \frac{1}{16(2\pi)^6} \int \frac{d^3p d^3p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} \left( 2e^{-2i(p-p') \cdot x} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3p d^3p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} e^{-i(E_p + E_{p'})t_1 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_1} e^{-i(E_p + E_{p'})t_2 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_2} \\
&\quad + \frac{1}{16(2\pi)^6} \int \frac{d^3p d^3p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}}.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Al hacer el producto de  $\langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_1) \rangle$  con  $\langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_2) \rangle$ , se tiene:

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_2) \rangle = \frac{1}{16(2\pi)^6} \int \frac{d^3 p d^3 p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}}. \quad (8.41)$$

Por lo tanto, la diferencia de (8.40) y (8.41) es:

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_1) \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_2) \rangle - \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(x_2) \rangle \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^6} \int \frac{d^3 p d^3 p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} e^{-i(E_p + E_{p'})t_1 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_1} e^{-i(E_p + E_{p'})t_2 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_2}, \end{aligned} \quad (8.42)$$

entonces, la métrica será:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{8(2\pi)^6} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3 x_1 \int d^3 x_2 \int \frac{d^3 p d^3 p'}{E_{\vec{p}} E_{\vec{p}'}} \\ & e^{-i(E_p + E_{p'})t_1 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_1} e^{-i(E_p + E_{p'})t_2 + i(\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{x}_2} \\ &= \frac{\delta^3(0) \pi^2}{32\sqrt{\alpha}} \\ &= \frac{V}{256\pi\sqrt{\alpha}}, \end{aligned} \quad (8.43)$$

donde V es el volumen del sistema, que esta relacionado con la delta de Dirac como:

$$\delta^3(0) = \frac{V}{(2\pi)^3}. \quad (8.44)$$

## 8.4. El tensor geométrico cuántico para un campo escalar con una perturbación lineal.

Consideremos el mismo campo escalar de la sección (8.3) con una perturbación lineal, su Lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) - \alpha \varphi^2(x)) - J(x) \varphi(x), \quad (8.45)$$

donde  $J$  será tomada nuevamente como constante. La función generadora para éste caso se obtiene a partir de la ec. (5.23), la única diferencia es cambiar  $q \leftrightarrow \varphi$  y el diferencial será entonces  $d^4x$ , que es equivalente a escribir  $d\tau d^3x$  en vez de escribir solo  $d\tau$ :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^4x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\mu \varphi - \alpha \varphi^2) - J\varphi \right) \right]. \quad (8.46)$$

Los valores esperados se obtienen a partir de:

$$\langle 0|T(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n))|0\rangle = G_n(x_1, \dots, x_n), \quad (8.47)$$

que como vimos en (5.38), la función de correlación se puede expresar mediante variaciones de la función generatriz. Por lo tanto, para  $n = 1$  se tiene:

$$Z[J] = Z[0] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right], \quad (8.48)$$

donde el propagador de Feynman  $\Delta_F$  se escribe como:

$$\begin{aligned} \Delta_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (y-x)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - \alpha + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

y cumple la siguiente ecuación para teoría cuántica de campos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + \alpha) \Delta_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y), \quad (8.50)$$

con ésta información ya es posible calcular el tensor geométrico cuántico. Primero haremos la variación de la densidad Lagrangiana en sus parámetros  $J$  y  $\alpha$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \frac{(\alpha + \delta\alpha)}{2} \varphi^2 - (J + \delta J) \varphi \\ &= \mathcal{L} - \frac{\delta\alpha}{2} \varphi^2 - \delta J \varphi. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Por lo tanto, los operadores de deformación son:

$$\hat{O}_\alpha = -\frac{1}{2}\varphi^2, \quad \hat{O}_J = -\varphi. \quad (8.52)$$

### 8.4.1. Componente $g_{JJ}$ .

$$\begin{aligned} g_{JJ} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \hat{O}_J(\tau_1, x_1) \hat{O}_J(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \hat{O}_J(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{O}_J(\tau_2, x_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle - \langle \varphi(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( G_2(x_1, x_2) - G_1(x_1) G_1(x_2) \right), \end{aligned} \quad (8.53)$$

de la ecuación (5.38) obtenemos  $G_1$ :

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \frac{1}{iZ_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z_0[J]|_{J=cte.} \\ &= iJ \int d^4y \Delta_F(x-y), \end{aligned} \quad (8.54)$$

y para  $G_2(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} G_2(x_1, x_2) &= \frac{1}{i^2 Z_0[J]|_{J=cte.}} \frac{\delta}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} Z_0[J]|_{J=cte.} \\ &= -i \Delta_F(x-y) + J^2 \int d^4y d^4y' \Delta_F(x_1-y) \Delta_F(x_2-y). \end{aligned} \quad (8.55)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
G_2(x_1, x_2) - G_1(x_1)G_1(x_2) &= -i\Delta_F(x-y) + J^2 \int d^4y d^4y' \Delta_F(x_1-y) \Delta_F(x_2-y) \\
&\quad - J^2 \int d^4y d^4y' \Delta_F(x_1-y) \Delta_F(x_2-y) \\
&= -i\Delta_F(x-y),
\end{aligned} \tag{8.56}$$

tenemos que hacer la siguiente integral:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + \alpha}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + \alpha}} e^{-i(\tau_2 - \tau_1)E_p} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \frac{V}{2\sqrt{\alpha}} e^{-i(\tau_2 - \tau_1)E_p} \\
&= \frac{V}{2\alpha^{3/2}},
\end{aligned} \tag{8.57}$$

por lo tanto

$$g_{JJ} = \frac{V}{2\alpha^{3/2}}. \tag{8.58}$$

### 8.4.2. Componente $g_{J\alpha}$ .

$$\begin{aligned}
g_{J\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \hat{\mathcal{O}}_J(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_J(\tau_2, x_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \varphi^2(x_1) \varphi(x_2) \rangle - \langle \varphi^2(x_1) \rangle \langle \varphi(x_2) \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( G_3(x_1^2, x_2) - G_2(x_1^2)G_1(x_2) \right),
\end{aligned} \tag{8.59}$$

de la ecuación (5.58) tenemos el resultado de  $G_3(x_1, x_2^2)$ , por lo tanto:

$$G_3(x_1, x_2^2) - G_1(x_1)G_2(x_2^2) = -2J \int d^4x \Delta_F(x - x_1) \Delta_F(x_1 - x_2), \quad (8.60)$$

las integrales a realizar son

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x d^3x_1 d^3x_2 \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{-2J}{4\sqrt{p^2 + \alpha}\sqrt{p'^2 + \alpha}} e^{-ip \cdot (x-x_1)} e^{-ip' \cdot (x_1-x_2)} \\ &= -\frac{JV}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d\tau e^{-i(\tau-\tau_1)E_p} e^{-i(\tau_1-\tau_2)E_p} \\ &= -\frac{JV}{2\alpha^{5/2}}, \end{aligned} \quad (8.61)$$

por lo tanto

$$g_{J\alpha} = -\frac{JV}{2\alpha^{5/2}}. \quad (8.62)$$

### 8.4.3. Componente $g_{\alpha\alpha}$ .

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_2, x_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_1, x_1) \rangle \langle \hat{\mathcal{O}}_\alpha(\tau_2, x_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( \langle \varphi^2(x_1) \varphi^2(x_2) \rangle - \langle \varphi^2(x_1) \rangle \langle \varphi^2(x_2) \rangle \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x_1 \int d^3x_2 \left( G_4(x_1^2, x_2^2) - G_2(x_1^2) G_2(x_2^2) \right), \end{aligned} \quad (8.63)$$

de la ecuación (5.66) tenemos el resultado de  $G_4(x_1^2, x_2^2)$ , por lo tanto:

$$G_4(x_1^2, x_2^2) - G_2(x_1^2)G_2(x_2^2) = -\frac{4J}{\alpha^2} \Delta_F(x_1 - x_2) G_1(x_1) G_1(x_2) + 2\Delta_F^2(x_1 - x_2), \quad (8.64)$$

las integrales a realizar son

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x d^3x_1 d^3x_2 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-4J^2}{8\sqrt{p^2 + \alpha}} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} e^{-ip \cdot (x - x_2)} e^{-ip \cdot (x_1 - x)} \\
& + \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d^3x d^3x_1 d^3x_2 \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{2(p^2 + \alpha)} e^{-2ip \cdot (x_1 - x_2)} \\
& = -\frac{J^2 V}{2^{3/2}} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 \int d\tau e^{-i(\tau - \tau_1)E_p} e^{-i(\tau_1 - \tau_2)E_p} e^{-i(\tau - \tau_2)E_p} \\
& + \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^0 d\tau_1 \int_0^{\infty} d\tau_2 e^{-2i(\tau_2 - \tau_1)E_p} \\
& = \frac{J^2 V}{2\alpha^{7/2}} + \frac{V}{256\pi\alpha^{1/2}},
\end{aligned} \tag{8.65}$$

por lo tanto

$$g_{\alpha\alpha} = \frac{J^2 V}{2\alpha^{7/2}} + \frac{V}{256\pi\alpha^{1/2}}. \tag{8.66}$$

La matriz correspondiente de ésta métrica es

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{V}{256\pi\alpha^{1/2}} + \frac{J^2 V}{2\alpha^{7/2}} & -\frac{JV}{2\alpha^{5/2}} \\ -\frac{JV}{2\alpha^{5/2}} & \frac{V}{2\alpha^{3/2}} \end{pmatrix}. \tag{8.67}$$

Calculamos ahora el determinante de (8.67):

$$\det g_{ij} = \frac{V^2}{512\pi\alpha^5}, \tag{8.68}$$

éste resultado nos dice que el determinante no depende de  $J$ , es decir, el campo no se acopla con la perturbación. Para este sistema, sería interesente ahora considerar otro tipo de interacciones y analizar qué sucede con ellas.

# Capítulo 9

## Conclusiones

En ésta tesis se muestra que el tensor geométrico cuántico se puede calcular a partir de las funciones de Green, pues éste se calcula primero haciendo uso de la función de onda del sistema y posteriormente con las funciones de Green para el oscilador armónico con una perturbación lineal. Se calculan las funciones de Green a partir de derivadas variacionales de la función generatriz, éstas derivadas son evaluadas para  $J = cte.$ , en otros textos se suele evaluar para  $J = 0$ , dando a entender que inicialmente la perturbación no existe y por lo tanto la solución del problema en principio no es del todo correcta. Al evaluar en  $J = cte.$  se da a entender que la perturbación existe desde  $t = 0$ . Hacer este cambio y comparando el resultado con la literatura se puede decir que no existe ningún cambio significativo, pues cuando se hace el cálculo para la componente  $g_{JJ}$  del oscilador armónico con la perturbación lineal se encontró que  $G_1(\tau) \neq 0$  y  $G_2(\tau_1, \tau_2)$  resultó ser el propagador de Feynman más un producto de dos  $G_1(\tau)$  para distintas  $\tau$ , pero al hacer la diferencia de  $G_2(\tau_1, \tau_2)$  y  $G_1(\tau_1)G_1(\tau_2)$  nos quedamos solo con el propagador de Feynman, ya que en la suposición de  $J = 0$  la  $G_1(\tau) = 0$  y  $G_2(\tau_1, \tau_2) = \Delta_F(\tau_1, \tau_2)$ . Por lo tanto, el resultado es el mismo sin importar la condición que se imponga.

Posteriormente, se calcula el tensor geométrico cuántico para el oscilador armónico con una perturbación lineal haciendo uso de las funciones de Green perturbadas, en primer lugar encontramos que el resultado es el mismo para el caso de la función de onda, las funciones de Green y las funciones de Green perturbadas. El determinante obtenido para este

problema no depende de la perturbación  $J$ , lo cuál implica que el oscilador no se acopla a la perturbación.

Siguiendo a un problema más complicado, el tensor geométrico cuántico se calcula con éxito usando las funciones de Green perturbadas hasta orden  $\lambda^2$  para un oscilador anarmónico de orden cuártico, lo más interesante de éste problema es al calcular el determinante, ya que a pesar de que depende de  $\lambda$  éste nunca se vuelve singular, pues la solución a la ecuación cuadrática de (8.40) es compleja, lo cual implica que la métrica es no-degenerada para todo valor de  $\lambda$ , en el artículo [5] se resuelve éste problema hasta orden  $\lambda$ , encontrando así un punto singular en el determinante haciendo que la métrica sea degenerada para este valor  $\lambda_c$ , lo cual se corrige cuando se toma la perturbación a orden  $\lambda^2$ , éste resultado también se puede apreciar si observamos que todos los diagramas de Feynman son conectados, esto implica que la teoría no tiene divergencias.

Después se hizo la generalización a una teoría cuántica de campo escalar y el resultado más interesante es el campo escalar con una perturbación lineal, por un lado tanto la métrica como el determinante no difieren tanto de su contraparte en mecánica cuántica, el cambio más notorio es la aparición de un volumen que es consecuencia de la introducción de variables espaciales al sistema, además de que el determinante no depende de nuevo de  $J$ .

El siguiente paso para este trabajo sería preguntarse qué pasa a temperatura finita, pues para el desarrollo anterior se supuso siempre que  $T = 0$ . Otra cuestión a estudiar posteriormente es considerar estados mixtos y no solo estados puros. Considerar también divergencias proporcionales al volumen en el caso de teoría de campo y analizar qué tipos de divergencias aparecen cuando se consideran interacciones en el campo. Tal vez el punto más interesante sería estudiar si en una teoría de campo la métrica de información cuántica nos puede decir algo acerca del enredamiento del campo.

Un problema más interesante a abordar sería considerar un sistema cuya curvatura de Berry sea distinta de cero, como con el caso del oscilador armónico generalizado, en particular,

teorías de campo cuya curvatura de Berry sea distinta de cero. Dada la naturaleza de la simetría de las funciones de Green, el conmutador para este tipo de sistemas siempre será cero y como consecuencia, la curvatura de Berry para éstos sistemas también será siempre cero.

# Apéndice A

## Componente $g_{\alpha\alpha}$ del oscilador anarmónico a orden $\lambda^2$ .

Para realizar las integrales de (A.1) hacemos la misma estrategia que en (7.15) y (7.16), por lo que al sumar los resultados de cada término se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha}^{(2)} = & -\frac{\lambda^2}{2} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\ & -\frac{\lambda^2}{2} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\ & \times G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\ & -\frac{2\lambda^2}{3} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\ & -\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\ & \times G_2(\tau_2^2) \\ & -\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\ & \times G_2(\tau_2^2) \\ & -\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) \\ & \times G_2(\tau_2^2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
& -\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\lambda^2 \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& = \frac{785\lambda^2}{49152\alpha^5}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

# Apéndice B

## Componente $g_{\lambda\alpha}$ del oscilador anarmónico a orden $\lambda^2$ .

Para obtener el valor correcto de las integrales es considerar el factor  $\frac{1}{2 \cdot (4!)^3}$ , por lo que se tiene:

$$\begin{aligned} g_{\lambda\alpha}^{(2)} = & -\frac{\lambda^2}{3} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\ & \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\ & -\frac{\lambda^2}{4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) \\ & \times G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\ & -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) \\ & \times G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\ & -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\ & \times G_2^2(T_2, \tau_2) \\ & -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\ & \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{12} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2^2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{12} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2^3(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{12} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2^3(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{7\lambda^2}{96} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\
& = \frac{3841\lambda^2}{589824\alpha^{11/2}}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

## Apéndice C

### Componente $g_{\lambda\lambda}$ del oscilador anarmónico.

Aquí se presentan las integrales correspondientes para las componente  $g_{\lambda\lambda}$  a orden  $\lambda$  y  $\lambda^2$ .

## C.1. Orden $\lambda$ .

Para obtener el valor correcto de las integrales recordemos que se debe considerar el factor  $\frac{1}{(4!)^3}$ . Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\lambda}^{(1)} &= -\frac{i\lambda}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1) G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau) G_2(\tau^2) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^3(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau) G_2(T_2, \tau) G_2(\tau^2) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau) G_2^2(T_2, \tau) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{12} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1^2) G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau) G_2^3(T_2, \tau) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2, \tau) G_2(\tau^2) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, \tau) G_2^2(T_2, \tau) G_2(T_2^2) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau) G_2(T_2^2) G_2(\tau^2) \\
&\quad -\frac{i\lambda}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \int d\tau G_2(T_1, T_2) G_2^3(T_1, \tau) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau) \\
&= -\frac{31\lambda}{12288\alpha^{9/2}}
\end{aligned}$$

(C.1)

## C.2. Orden $\lambda^2$ .

Para obtener el valor correcto de las integrales recordemos que se debe considerar el factor  $\frac{1}{2 \cdot (4!)^4}$ . Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\lambda}^{(2)} = & -\frac{\lambda^2}{4} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(T_1, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{6} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{6} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(\tau_2^2) G_2^2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(T_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_1^2) \\
& \times G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{8} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_2) G_2(T_1, \tau_2) \\
& \times G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) \\
& \times G_2(T_2, \tau_1) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, T_2) G_2(T_2^2) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(\tau_1^2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2^2) G_2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \tag{C.3} \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& \times G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_1) \\
& \times G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2^2) \\
& \times G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(\tau_1^2) G_2(\tau_2^2) \\
& \times G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(T_2^2) G_2(\tau_2^2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{16} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) \\
& \times G_2(T_2^2) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, T_2) G_2(T_2^2) G_2(T_2 \tau_2) \\
& \times G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(T_2 \tau_1) G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& \times G_2^3(T_2, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^3(T_2, \tau_1) G_2(\tau_2^2) \\
& \times G_2(T_2 \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& \times G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, \tau_1) G_2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, \tau_1) G_2(T_1, T_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& \times G_2(T_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(T_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{24} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& \times G_2(\tau_2^2)
\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7\lambda^2}{192} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_1, \tau_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(T_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(\tau_1^2) G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_1, T_2) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^2(T_1, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_1) G_2^2(T_2, \tau_2) G_2^2(T_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2(\tau_1^2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& \times G_2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_2, \tau_1) G_2^2(\tau_1, \tau_2) G_2(\tau_2^2) \\
& -\frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(\tau_1^2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2^2) \\
& \times G_2(T_2, \tau_2) G_2(\tau_2^2) G_2(T_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{36} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2^3(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2^3(\tau_1, \tau_2) G_2(T_2, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{36} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, T_2) G_2^3(T_1, \tau_1) G_2(\tau_1, \tau_2) G_2^3(T_2, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{36} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1, \tau_2) G_2^3(T_1, \tau_1) G_2(\tau_1, T_2) G_2^3(T_2, \tau_2)
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\lambda^2}{36} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_1^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_2, \tau_1) G_2(T_2, \tau_2) G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\
& -\frac{\lambda^2}{36} \int_{-\infty}^0 dT_1 \int_0^\infty dT_2 \int d\tau_1 d\tau_2 G_2(T_2^2) G_2^2(T_1, T_2) G_2(T_1, \tau_1) G_2(T_1, \tau_2) G_2^3(\tau_1, \tau_2) \\
& = \frac{57227\lambda^2}{21233\alpha^6}
\end{aligned}
\tag{C.6}$$

# Bibliografía

- [1] PROVOST, J.P; VALLE, G. *Riemannian Structure on Manifolds of Quantum States*, *Commun. Math. Pys.* **76** (1980) 289 [inSPIRE]
- [2] SON, W.; VEDRAL V. (2018) *Solid State Quantum Information..* 1st edition. Oxford
- [3] PERES, A. (1984) *Stability of quantum motion in chaotic and regular systems.* *Phys. Rev. A* **30**, 1610-1615
- [4] NIELSEN, M.; CHUANG, I. (2000) *Quantum Computation and Quantum Information.* Cambridge University Press.
- [5] ALVAREZ-JIMENEZ, J.; VERGARA, J. D. *The quantum geometric tensor from generating functions* (2018)
- [6] LOZANO, G. (2016) *Formalismo de la Integral de Camino en Teoría de Campos.* Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires.
- [7] GREINER, W. (1996) *Field Quantization.* Springer, pp.347
- [8] KLEINERT, H. (2004) *Path Integrals in Quantum Mechanics, statistics, Polymer Physics and Financial Markets.* 3rd edition. World Scientific, pp.78,79
- [9] AMARI, S.; NAGAOKA, H. (1993) *Methods of Information Theory..* 3rd edition. Oxford, pp.25-45, 81-109
- [10] DIÓSI, L. (2007) *A Short Course in Quantum Information Theory.* 1st edition. Springer, pp.79-97

- [11] BARNETT, S. (2009) *Quantum Information*.. 1st edition. Oxford, pp.45-49
- [12] CHRUSCIŃSKI, D., JAMIOŁKOWSKI, A. (2004) *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*. Birkhäuser, pp.79,80
- [13] S.-J. GU, *Fidelity approach to quantum phase transitions*, *Int. J. Mod. Phys. B* **24** (2010) 4371 [arXiv:0811.3127]
- [14] ALVAREZ-JIMENEZ, J.; ALDO DECTOR; VERGARA, J. D. *Quantum information metric and Berry curvature from a Lagrangian approach*, *JHEP.* **03** (2017) 044 [arXiv: 1702.00058] [hep-th]
- [15] MIYAJI, M.; NUMASAWA, T.; SHIBA, N.; TAKAYANAGI, T.; WATANABE, K. *Distance between quantum states and gauge-gravity duality*, *Phys. Rev. Lett.* **115** (2015) 261602 [arXiv: 1507.07555] [inSPIRE]
- [16] MOMENI, D.; CHANNUIE, P.; AL AJMI, M. *Quantum information metric for time-dependent quantum systems and higher order corrections* (2018) [arXiv:1801.03394] [hep-th]
- [17] LANCASTER, T. (2014) *Quantum Field Theory for the Gifted Amateur*. 1st edition. Oxford, pp.49-71