UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

SEVERIDAD EN CATEGORÍAS MONOIDALES:
UNA VISTA HACIA LAS SUPER ÁLGEBRAS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JOSÉ JUAN LÓPEZ ALVARADO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FRANK PATRICK MURPHY HERNÁNDEZ
FACULTAD DE CIENCIAS

CIUDAD DE MÉXICO 14 DE ENERO DE 2020.

Introducción

El presente trabajo explorará la noción de *monoide* en una categoría, así como algunas de sus implicaciones; además, se dará una introducción al *super álgebra lineal*, la cuál es un área que tiene su origen en el concepto de *super espacio vectorial*, que es una generalización de los espacios vectoriales y un ejemplo de categoría monoidal. Una aplicación muy importante de esta área es la *super simetría*, que es parte de la teoría física de las partículas elementales y su interacción entre ellas. Esta teoría es un campo activo de investigación y uno de sus grandes propósitos es buscar una unificación de las fuerzas elementales, de manera que sea compatible con la teoría de la relatividad general y la teoría cuántica. Se recomienda el texto introductorio *Supersymmetry for Mathematicians* [19].

Una de las características más relevantes que se podrá encontrar en este trabajo, es la categorificación de muchos conceptos establecidos en la teoría de módulos. Al momento de generalizar, se trató solo de conservar las propiedades básicas que hacen funcionar la teoría de módulos. Ésto con la finalidad de tener una teoría más rica y con mayor posibilidad de ser aplicada a diferentes contextos.

Las categorías monoidales son una generalización de los monoides en la categoría de conjuntos. En 1963 Mac Lane da una definición de categoría monoidal en su artículo [14], sin ambargo, no les llama *categorías con multiplicación.* No es sino hasta su clásico libro [13], publicado por pimera vez en 1971, que les nombra como categorías monoidales. También es en este libro donde da propiedades de estas categorías; además enuncia y demuestra su *Teorema de Coherencia.* Es también en ese libro donde Mac Lane da la definición de categoria monoidal *trenzada* y categoría monoidal *simétrica.* De manera paralela, la alumna de doctorado de Grothendieck, *Hoàng Xuân Sính*, da una noción de categorías monoidales en su artículo *Gr-Catégories Strictes* [8], solo que les llama *Gr-categorías.* Hoàng usó estas categorías en el artículo *Catégories de Picard Restreintes* [7], para definir lo que es una *categoría de Picard* y así hacer cálculos homológicos.

Varias son las aplicaciones que tienen las categorías monoidales. En física, como ya lo mencionamos anteriormente, se puede modelar la Teoría de Supersimetría usando estas nociones. Más aún, en los últimos años se han usado para el área de *Teoría Cuántica de Campos Topológica*, véase *Introductory Lectures on Topological Quantum Field Theory* [4]; esta área de la física matemática se ha inspirado de este enfoque catégorico para poder formalizar la *Teoría Cuántica*. Una consecuencia de este nuevo enfoque, es la formalización categórica de la Teoría Cuántica, que se llama *Teoría Cuántica Funtorial*; se sugiere revisar el artículo de *John Baez*, *Quantum Quandaries: Category-Theoretic Persective* [3], para más información. Además de este ejemplo, las categorías monoidales han sido utilizadas en la Lógica y la computación. Una introducción a estas aplicaciones se pueden encontrar en el artículo de *John Baez*, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*.

Las nociones de categorías monoidales, categorías monoidales trenzadas y simétricas, así como muchas de sus propiedades, tienen su origen en la categoría de módulos y su producto tensorial. Como consecuencia de esto, uno se puede plantear un concepto que categorifique el análogo de anillo, ideal, álgebra y álgebra de Lie, en categorías monoidales. Uno de los objetivos del presente trabajo es dar definiciones y propiedades de algunos de estos conceptos a nivel categórico. Así como se tiene la construcción de grupo libre y álgebra libre, se verá que también se tienen en categorías monoidales. De este modo, se podrá definir la Potencia Simétrica y la Envolvente Universal en este contexto.

A partir de estas categorificaciones, se tienen las herramientas necesarias para poder demostrar el resultado principal de esta Tesis: una versión débil del *Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt*. Este teorema tiene su análogo en super espacios vectoriales y existe una generalización en [5], las cuales se usarán como guía para esta formulación.

En el Capítulo 1 se demostrarán las propiedades básicas de las categorías monoidales y se definirán los funtores entre estas categorías. El resultado principal de este capítulo será el *Teorema de Severidad de Mac Lane*, el cual establece que toda categoría monoidal es equivalente (como categoría monoidal) a una categoría monoidal severa. Más aún, se demostrará que esta equivalencia es una equivalencia adjunta, es decir, una equivalencia de categorías monoidales que también es una adjunción.

En el Capítulo 2 se darán las generalizaciones de la Teoría de Módulos y Anillos. Este enfoque permite estudiar los conceptos algebráicos de Monoide Libre, Potencia Simétrica y Envolvente Universal de una manera más sencilla, en el sentido de que no se requiere ver la estructura interna de los objetos, sino solo en la forma en que interactúan con otros objetos en la categoría. La manera en que se abordarán estos conceptos será a través del Teorema de Severidad de Mac Lane. Se demostrará este teorema en diversos contextos, con la finalidad de dar consistencia a la teoría. También se darán los conceptos y las herramientas necesarias para definir *monoide de*

Lie, que es una generalización. Por último, se demostrará que todo Monoide es un Monoide de Lie; en esta parte, se verá la utilidad de las diversas formulaciones del Teorema de Severidad de Mac Lane.

En el Capítulo 3 se demostrará que se tienen condiciones para que todo monoide de Lie esté contenido en un monoide. Se puede notar que este teorema se llama igual que el Teorema clásico de Poincaré-Birkhoff-Witt; esto es porque es una generalización de éste último. Se puede observar que en las notas de Deligne [5], se tiene una generalización de este teorema para categorías Tensoriales; sin embargo, el enfoque dado en este trabajo fue el de llevar la teoría hecha en la categoría de módulos a las categorías monoidales, de manera directa. Nótese que esta forma de pensar los conceptos algebráicos es más diagramática, pues casi todos las definiciones y pruebas se reducen a conmutatividad de diagramas.

En el Capítulo 4 se dará una introducción a la super álgebra lineal, utilizado las definiciones y notación de los capítulos anteriores. Se notará que toda la teoría dada previamente encaja perfectamente en este contexto. Así, si se consultan otros libros acerca de este tema, no habrá confusiones en la terminología, definiciones y resultados. El objetivo principal será el de definir la generalización de traza en la categoría de super espacios vectoriales: se llamará *super traza*. Éste será otro ejemplo de la utilidad de ver las cosas de manera categórica, pues se definirá el concepto de una forma bastante directa, usando adjunciones.

Índice general

Capítulo 1

Categorías Monoidales

En este capítulo se definirán las categorías monoidales y los funtores entre ellas. También se verán distintas propiedades y resultados que se usarán a lo largo del trabajo, varios de estos se pueden encontrar en [6]. Como resultado principal se demostrará el ***Teorema de Severidad de Mac Lane***.

1.1. Definición y propiedades básicas

Definición 1.1. Una ***Categoría Monoidal*** $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una quinteta, tal que $\mathcal{C}$ es una categoría y:

(a) Un bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,

(b) Un isomorfismo natural $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \longrightarrow - \otimes (- \otimes -)$ definido en cada terna $(X, Y, Z) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ como:

$$\alpha_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),$$

llamado ***restricción asociativa***,

(c) Un objeto $e \in \mathcal{C}$ junto con un isomorfismo $\iota : e \otimes e \to e$.

Además debe cumplir los siguientes axiomas:

Axioma del pentágono. El siguiente diagrama es conmutativo para cualesquiera $W, X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
& ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "\alpha_{W\otimes X,Y,Z}"'] \arrow[dr, "\alpha_{W,X,Y}\otimes 1_Z"] & \\
(W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "\alpha_{W,X,Y\otimes Z}"'] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[d, "\alpha_{W,X\otimes Y,Z}"] \\
W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[ll, "1_W\otimes \alpha_{X,Y,Z}"]
\end{tikzcd}$$

Axioma de la unidad. Los funtores $L_e : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y $R_e : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ de multiplicación a izquierda y derecha por e son equivalencias de categorías.

Al par (e, ι) se le llama el objeto unitario de $\mathcal{C}$.

Ejemplos 1.2. (a) Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos y objeto final . Se define $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ como sigue:

- $(X, Y) \mapsto X \times Y$,
- Para cualesquiera $f : X \to X', g : Y \to Y' \in \mathcal{C}$, $(f, g) \mapsto f \times g$, donde $f \times g$ se obtiene de la propiedad universal del producto.

De la definición y la propiedad universal del producto se puede verificar que $\otimes$ es un bifuntor. Ahora, como $\mathcal{C}$ tiene objeto final y por la propiedad universal del producto, se tiene lo siguiente: el isomorfismo natural α, el objeto unitario (e, ι) (donde e es el objeto final de $\mathcal{C}$) y las equivalencias de categorías L_e, R_e. De la unicidad del producto se sique que α cumple con el axioma del pentágono. Por lo tanto es una categoría monoidal. A las categorías obtenidas de este modo se les llama ***categorías cartesianas monoidales***.

(b) Sean R un anillo conmutativo con unidad y $\mathrm{Mod}(R)$ la categoría de R-módulos. Como se puede tomar productos tensoriales en $\mathrm{Mod}(R)$, se define el bifuntor $\otimes : \mathrm{Mod}(R) \times \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Mod}(R)$ como sigue:

- $(M, N) \mapsto M \otimes_R N$,
- Para cualesquiera $f : M \to M', g : N \to N' \in \mathrm{Mod}(R)$, $(f, g) \mapsto f \otimes_R g$, donde $f \otimes_R g$ se obtiene de la propiedad universal del producto tensorial.

De la definición y la propiedad universal del producto tensorial se puede verificar que $\otimes$ es un bifuntor. Por la propiedad universal del producto se obtiene el isomorfismo natural α, el objeto unitario (R, ι) y las equivalencias de categorías L_R, R_R. De la unicidad del producto tensorial se sique que α cumple con el axioma del pentágono. Por lo tanto la categoría $\mathrm{Mod}(R)$ es una categoría monoidal.

Definición 1.3. Una subcategoría monoidal de una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una subcategoria $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ que cumple las siguientes propiedades:

- $X \otimes Y \in \mathcal{D}$ para cualesquira objetos $X, Y \in \mathcal{D}$,
- $f \otimes g \in \mathcal{D}$ para cualesquiera morfismos $f, g \in \mathcal{D}$,
- $e, \iota \in \mathcal{D}$.

Ahora se darán propiedades básicas de las categorías monoidales. Primero se mostrará se pueden encontrar isomorfismos naturales que "generalicen" las equivalencias categóricas L_e y R_e. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y $\iota \otimes 1_{\mathcal{C}} : (e \otimes e) \otimes - \longrightarrow e \otimes -$ el isomorfismo natural definido en cada $X \in \mathcal{C}$ como:

$$\iota \otimes 1_X : (e \otimes e) \otimes X \to e \otimes X.$$

Entonces se puede hacer la siguiente composición de isomorfismos naturales:

$$e \otimes (e \otimes -) \xrightarrow{\alpha^{-1}_{e,e,-}} (e \otimes e) \otimes - \xrightarrow{\iota \otimes 1_{\mathcal{C}}} e \otimes -$$

y así, para cada $X \in \mathcal{C}$, se obtiene un morfismo

$$(\iota \otimes 1_X) \circ \alpha^{-1}_{e,e,X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e \otimes (e \otimes X), e \otimes X).$$

Como L_e es una equivalencia de categorías, se puede encontrar un único morfismo $l_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e \otimes X, X)$ tal que, $L_e(l_X) = (\iota \otimes 1_X) \circ \alpha^{-1}_{e,e,X}$ y en consecuencia $L_e(l_-) : e \otimes (e \otimes -) \longrightarrow e \otimes -$ es una isomorfismo natural. Por lo tanto, para todo morfismo $f : X \to Y \in \mathcal{C}$, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} e \otimes (e \otimes X) \arrow[r, "L_e(l_X)"] \arrow[d, "1_e \otimes (1_e \otimes f)"'] & e \otimes X \arrow[d, "1_e \otimes f"] \\ e \otimes (e \otimes Y) \arrow[r, "L_e(l_Y)"'] & e \otimes Y \end{tikzcd} .$$

Además, dado que $L_e(1_e \otimes f) = 1_e \otimes (1_e \otimes f)$ y $L_e(f) = 1_e \otimes f$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} L_e(l_Y \circ (1_e \otimes f)) &= L_e(l_Y) \circ L_e(1_e \otimes f) \\ &= L_e(l_Y) \circ (1_e \otimes (1_e \otimes f)) \\ &= (1_e \otimes f) \circ L_e(l_X) \\ &= L_e(f) \circ L_e(l_X) = L_e(f \circ l_X), \end{aligned}$$

y usando nuevamente que L_e es equivalencia de categorías se sigue que:

$$l_Y \circ (1_e \otimes f) = f \circ l_X.$$

En consecuencia, el siguiente diagrama es conmutativo para todo morfismo $f : X \to Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} e \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "1_e \otimes f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ e \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd} ,$$

lo que implica que $l : e\otimes - \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ es una transformación natural. Sea $X \in \mathcal{C}$, para ver que l_X es isomorfismo recuérdese que, como $L_e(l_X)$ es isomorfismo, existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(e \otimes X, e \otimes (e \otimes X))$ tal que

$$g \circ L_e(l_X) = 1_{e\otimes(e\otimes X)} \text{ y } L_e(l_X) \circ g = 1_{e\otimes X}.$$

Usando nuevamente que L_e es equivalencia, se obtiene que existe $\overline{l_X} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, e \otimes X)$. Usando que L_e es funtor, se obtienen las siguientes igualdades:

$$L_e(l_X \circ \overline{l_X}) = L_e(l_X) \circ L_e(\overline{l_X}) = L_e(l_X) \circ g = 1_{e\otimes X} = L_e(1_X).$$

Por lo tanto, dado que L_e es fiel, $l_X \circ \overline{l_X} = 1_X$. Análogamente se demuestra que $\overline{l_X} \circ l_X = 1_{e\otimes X}$ y en consecuencia l_X es un isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$. De esto se sigue que $l : e \otimes - \to 1_{\mathcal{C}}$ es un isomorfismo natural.

Si ahora se toma R_e, considérese el siguiene isomorfismo natural

$$(- \otimes e) \otimes e \xrightarrow{\alpha_{-,e,e}} - \otimes (e \otimes e) \xrightarrow{1_{\mathcal{C}}\otimes\iota} - \otimes e$$

y haciendo algo análogo a lo anterior, se obtiene que existe un isomorfismo natural $r : - \otimes e \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$ que cumple:

$$R_e(r_X) = (1_X \otimes \iota) \circ \alpha_{X,e,e}.$$

A l y r se les conocen como ***restricciones unitarias***.

Proposición 1.4. *Para cualquier objeto $X \in \mathcal{C}$ se cumplen las siguientes igualdades:*

$$l_{e\otimes X} = 1_e \otimes l_X \text{ y } r_{X\otimes e} = r_X \otimes 1_e.$$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{C}$. Como l_- es isomorfismo natural, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
e \otimes (e \otimes X) \arrow[r, "l_{e\otimes X}"] \arrow[d, "1_e\otimes l_X"'] & e \otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
e \otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}.$$

Además, como l_x es isomorfismo, se sigue que $l_{e\otimes X} = 1_e \otimes l_X$. Análogamente se demuestra que $r_{X\otimes e} = r_X \otimes 1_e$. □

Proposición 1.5 (***Axioma del Triángulo***)**.** *El siguiente diagrama es conmutativo para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes e) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{X,e,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes 1_Y"'] & & X \otimes (e \otimes Y) \arrow[dl, "1_X\otimes l_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd}, \tag{1.1}$$

en particular $r_e = l_e = \iota$.

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes e) \otimes e) \otimes Y \arrow[rrrr, "\alpha_{X,e,e} \otimes 1_Y"] \arrow[drr, "(r_X \otimes 1_e) \otimes 1_Y"'] \arrow[ddd, "\alpha_{X \otimes e,e,Y}"'] & & & & (X \otimes (e \otimes e)) \otimes Y \arrow[dll, "(1_X \otimes \iota) \otimes 1_Y"] \arrow[ddd, "\alpha_{X,e \otimes e,Y}"] \\
& & (X \otimes e) \otimes Y \arrow[d, "\alpha_{X,e,Y}"'] & & \\
& & X \otimes (e \otimes Y) & & \\
(X \otimes e) \otimes (e \otimes Y) \arrow[urr, "r_X \otimes 1_{e \otimes Y}"] \arrow[drr, "\alpha_{X,e,e \otimes Y}"'] & & & & X \otimes ((e \otimes e) \otimes Y) \arrow[ull, "1_X \otimes (\iota \otimes 1_Y)"'] \arrow[dll, "1_X \otimes \alpha_{e,e,Y}"] \\
& & X \otimes (e \otimes (e \otimes Y)) \arrow[uu, "1_X \otimes l_{e \otimes Y}"] & &
\end{tikzcd}
.
$$

El diagrama exterior es conmutativo por el ***axioma del pentágono*** y los dos cuadrángulo laterales son conmutativos por la naturalidad de α. Entonces, si se demuestra que los triángulos superior e inferior derecho conmutan, se tendría que el triángulo izquierdo conmuta:

$$
\begin{aligned}
((1_X \otimes \iota) \otimes 1_Y) \circ (\alpha_{X,e,e} \otimes 1_Y) &= ((1_X \otimes \iota) \circ \alpha_{X,e,e}) \otimes 1_Y \\
&= R_e(r_X) \otimes 1_Y \\
&= (r_X \otimes 1_e) \otimes 1_Y.
\end{aligned}
$$

Y usando la Proposición 1.4 se obtienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
(1_X \otimes l_{e \otimes Y}) \circ (1_X \otimes \alpha_{e,e,Y}) &= (1_X \otimes (1_e \otimes l_Y)) \circ (1_X \otimes \alpha_{e,e,Y}) \\
&= (1_X \otimes L_e(l_Y)) \circ (1_X \otimes \alpha_{e,e,Y}) \\
&= 1_X \otimes (L_e(l_Y) \circ \alpha_{e,e,Y}) \\
&= 1_X \otimes (\iota \otimes 1_Y).
\end{aligned}
$$

En consecuencia los triágulos superior e inferior derecho conmutan y entonces el triángulo inferior izquierdo conmuta. Ahora considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (e \otimes Y) & \\
 & X \otimes Y \arrow[u, "1_X \otimes l_Y^{-1}"'] & \\
(X \otimes e) \otimes Y \arrow[ur, "r_X \otimes 1_Y"] \arrow[rr, "\alpha_{X,e,Y}"] \arrow[d, "(1_X \otimes 1_e) \otimes l_Y^{-1}"] & & X \otimes (e \otimes Y) \arrow[ul, "1_X \otimes l_Y"'] \arrow[d, "1_X \otimes (1_e \otimes l_Y^{-1})"'] \\
(X \otimes e) \otimes (e \otimes Y) \arrow[rr, "\alpha_{X,e,e\otimes Y}"'] \arrow[uuur, bend left=70, "r_X \otimes 1_{e\otimes Y}"] & & X \otimes (e \otimes (e \otimes Y)) \arrow[uuul, bend right=70, "1_X \otimes l_{e\otimes Y}"']
\end{tikzcd}$$

Nótese que el triángulo externo conmuta, porque es el triángulo inferior izquierdo del diagrama anterior a éste, y el cudrángulo conmuta por la naturalidad de α. Entonces, para que el triángulo interior conmute, resta demostrar que los cuadriláteros laterales conmuten:

$$\begin{aligned}
(1_X \otimes l_{e\otimes Y}) \circ (1_X \otimes (1_e \otimes l_Y^{-1})) &= 1_X \otimes (l_{e\otimes Y} \circ (1_e \otimes l_Y^{-1})) \\
&= 1_X \otimes ((1_e \otimes l_Y) \circ (1_e \otimes l_Y^{-1})) \\
&= 1_X \otimes (1_e \otimes 1_Y) \\
&= 1_X \otimes 1_{e\otimes Y} \\
&= (1_X \otimes l_Y^{-1}) \circ (1_X \otimes l_Y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(r_X \otimes 1_{e\otimes Y}) \circ ((1_X \otimes 1_e) \otimes l_Y^{-1}) &= (r_X \otimes 1_{e\otimes Y}) \circ (1_{X\otimes e} \otimes l_Y^{-1}) \\
&= r_X \otimes l_Y^{-1} \\
&= (1_X \otimes l_Y^{-1}) \circ (r_X \otimes 1_Y).
\end{aligned}$$

En consecuencia los dos cuadriláteros conmutan y por lo tanto el triángulo interior conmuta. Por último, si $X = Y = e$ en (1.1), se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
L_e(\iota) \circ \alpha_{e,e,e} &= R_e(r_e) \\
&= r_e \otimes 1_e \\
&= (1_e \otimes l_e) \circ \alpha_{e,e,e} \\
&= L_e(l_e) \circ \alpha_{e,e,e}
\end{aligned}$$

y como $\alpha_{e,e,e}$ es isomorfismo se sigue que $L_e(\iota) = L_e(l_e)$. También se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R_e(r_e) &= r_e \otimes 1_e \\ &= (1_e \otimes l_e) \circ \alpha_{e,e,e} \\ &= L_e(l_e) \circ \alpha_{e,e,e} \\ &= \iota \otimes 1_e = R_e(\iota). \end{aligned}$$

Entonces, como R_e y L_e son equivalencias, $r_e = l_e = \iota$. $\square$

Proposición 1.6. *Los siguientes diagramas conmutan para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} (e \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{e,X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes 1_Y"'] & & e \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes e \arrow[rr, "\alpha_{X,Y,e}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & & X \otimes (Y \otimes e) \arrow[dl, "1_X \otimes r_Y"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

Demostración. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} ((Z \otimes e) \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "\alpha_{Z,e,X} \otimes 1_Y"] \arrow[dr, "(r_Z \otimes 1_X) \otimes 1_Y"] \arrow[ddd, "\alpha_{Z \otimes e, X, Y}"'] & & (Z \otimes (e \otimes X)) \otimes Y \arrow[dl, "(1_Z \otimes l_X) \otimes 1_Y"'] \arrow[ddd, "\alpha_{Z, e \otimes X, Y}"] \\ & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "\alpha_{Z,X,Y}"'] & \\ & Z \otimes (X \otimes Y) & \\ (Z \otimes e) \otimes (X \otimes Y) \arrow[ur, "r_Z \otimes 1_{X \otimes Y}"] \arrow[dr, "\alpha_{Z,e,X \otimes Y}"'] & & Z \otimes ((e \otimes X) \otimes Y) \arrow[ul, "1_Z \otimes (l_X \otimes 1_Y)"'] \arrow[dl, "1_Z \otimes \alpha_{e,X,Y}"] \\ & Z \otimes (e \otimes (X \otimes Y)) \arrow[uu, "1_Z \otimes l_{X \otimes Y}"] & \end{tikzcd}.$$

El diagrama exterior es conmutativo por el ***axioma del pentágono***, los dos cuadrángulo laterales son conmutativos por la naturalidad de α y los triángulos superior e inferior izquierdo conmutan por la Proposición 1.5. En consecuencia el triángulo inferior derecho conmuta y, si $Z = e$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
L_e(l_X \otimes 1_Y) &= 1_e \otimes (l_X \otimes 1_Z) \\
&= (1_e \otimes l_{X\otimes Y}) \circ (1_e \otimes \alpha_{e,X,Y}) \\
&= L_e(l_{X\otimes Y}) \circ L_e(\alpha_{e,X,Y}) \\
&= L_e(l_{X\otimes Y} \circ \alpha_{e,X,Y}),
\end{aligned}$$

y como L_e es una equivalencia, $l_X \otimes 1_Y = l_{X\otimes Y} \circ \alpha_{e,X,Y}$. Para demostrar la conmutatividad del otro triángulo considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes e) \otimes Z \arrow[rr, "\alpha_{X,Y,e}\otimes 1_Z"] \arrow[dr, "r_{X\otimes Y}\otimes 1_Z"] \arrow[ddd, "\alpha_{X\otimes Y,e,Z}"'] & & (X \otimes (Y \otimes e)) \otimes Z \arrow[dl, "(1_X\otimes r_Y)\otimes 1_Z"] \arrow[ddd, "\alpha_{X,Y\otimes e,Z}"] \\
& (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "\alpha_{X,Y,Z}"'] & \\
& X \otimes (Y \otimes Z) & \\
(X \otimes Y) \otimes (e \otimes Z) \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha_{X,Y,e\otimes Z}"'] & & X \otimes ((Y \otimes e) \otimes Z) \arrow[ul, "1_X\otimes(r_Y\otimes 1_Z)"'] \arrow[dl, "1_X\otimes\alpha_{Y,e,Z}"] \\
& X \otimes (Y \otimes (e \otimes Z)) \arrow[uu, "1_X\otimes(1_Y\otimes l_Z)"] &
\end{tikzcd},$$

donde $\beta := \alpha_{X,Y,Z} \circ (r_{X\otimes Y} \otimes 1_Z) \circ \alpha^{-1}_{X\otimes Y,e,Z}$. El diagrama exterior conmuta por el ***axioma del pentágono***, el cuadrángulo izquierdo conmuta por la naturalidad de α, el cuadrángulo derecho conmuta por la definición de β y el triángulo inferior derecho conmuta por la Proposición 1.5. Entonces, si se demuestra que el triángulo inferior izquierdo conmuta, se tendría que el triángulo superior también conmuta:

$$\begin{aligned}
\beta &= \alpha_{X,Y,Z} \circ (r_{X\otimes Y} \otimes 1_Z) \circ \alpha_{X\otimes Y,e,Z} \\
&= \alpha_{X,Y,Z} \circ ((1_{X\otimes Y} \otimes l_Z) \circ \alpha_{X\otimes Y,e,Z}) \circ \alpha^{-1}_{X\otimes Y,e,Z} \\
&= \alpha_{X,Y,Z} \circ (1_{X\otimes Y} \otimes l_Z) \\
&= (1_X \otimes (1_Y \otimes l_Z)) \circ \alpha_{X,Y,e\otimes Z},
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se usa la Proposición 1.5 y en la última igualdad la naturalidad de α. En consecuencia el triángulo superior conmuta y, si $Z = e$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$
\begin{aligned}
R_e(r_{X\otimes Y}) &= r_{X\otimes Y} \otimes 1_e \\
&= ((1_X \otimes r_Y) \otimes 1_e) \circ (\alpha_{X,Y,e} \otimes 1_e) \\
&= R_e(1_X \otimes r_Y) \circ R_e(\alpha_{X,Y,e}) \\
&= R_e((1_X \otimes r_Y) \circ \alpha_{X,Y,e}),
\end{aligned}
$$

y como R_e es una equivalencia $r_{X\otimes Y} = (1_X \otimes r_Y) \circ \alpha_{X,Y,e}$. $\square$

Proposición 1.7. *El objeto unitario de una categoría monoidal es único, salvo un único isomorfismo.*

Demostración. Sean $(e, \iota), (e', \iota')$ dos objetos unitarios y $(r, l), (r', l')$ sus restricciones unitarias, respectivamente. Considérese el isomorfismo $\eta := l_{e'} \circ (r'_e)^{-1}$. Se afirma que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
e \otimes e \arrow[r, "\eta\otimes\eta"] \arrow[d, "\iota"'] & e' \otimes e' \arrow[d, "\iota'"] \\
e \arrow[r, "\eta"'] & e'
\end{tikzcd}
.
$$

Para demostrar que esto es cierto, primero se demostrará que los siguientes diagramas conmutan:

$$
\begin{tikzcd}
X \otimes e \arrow[rr, "1_X\otimes\eta"] \arrow[dr, "r_X"'] & & X \otimes e' \arrow[dl, "r'_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

$$
\begin{tikzcd}
e \otimes Y \arrow[rr, "\eta\otimes 1_Y"] \arrow[dr, "l_Y"'] & & e' \otimes Y \arrow[dl, "l'_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
.
\tag{1.5}
$$

Conmutatividad del diagrama (1.4). Considérese el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
& X \otimes e \arrow[rr, "r_X"] & & X \\
X \otimes (e \otimes e') \arrow[ur, "1_X\otimes r'_e"] \arrow[rr, "\alpha^{-1}_{X,e,e'}"] \arrow[dr, "1_X\otimes l_{e'}"'] & & (X \otimes e) \otimes e' \arrow[ul, "r'_{X\otimes e}"'] \arrow[r, "r_X\otimes 1_{e'}"] \arrow[dl, "r_X\otimes 1_{e'}"] & X \otimes e' \arrow[u, "r'_X"'] \arrow[d, "r'_X"] \\
& X \otimes e' \arrow[rr, "r'_X"'] & & X
\end{tikzcd}
$$

Se tiene que el triángulo superior conmuta por la Proposición 1.6, el triángulo inferior conmuta por la Proposición 1.5, el cuadrilátero superior conmuta por la naturalidad de r' y el cuadrilátero inferior conmuta trivialmente. Por lo tanto el diagrama exterior conmuta y esto implica que el diagrama (1.1) también lo hace.

Conmutatividad del diagrama (1.5). Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & e \otimes Y \arrow[rr, "l_Y"] & & Y \\
(e \otimes e') \otimes Y \arrow[ur, "r'_e \otimes 1_Y"] \arrow[rr, "\alpha_{e,e',Y}"] \arrow[dr, "l_{e'} \otimes 1_Y"'] & & e \otimes (e' \otimes Y) \arrow[ul, "1_e \otimes l'_Y"'] \arrow[r, "l_{e' \otimes Y}"] \arrow[dl, "l_{e' \otimes Y}"] & e' \otimes Y \arrow[u, "l'_Y"] \arrow[d, "l'_Y"] \\
 & e' \otimes Y \arrow[rr, "l'_Y"'] & & Y
\end{tikzcd}.$$

Se tiene que el triángulo superior conmuta por la Proposición 1.5, el triángulo inferior conmuta por la Proposición 1.6, el cuadrilátero superior conmuta por la naturalidad de l y el cuadrilátero inferior conmuta trivialmente. Por lo tanto el diagrama exterior conmuta y esto implica que el diagrama (1.5) también lo hace.

Usando los diagramas (1.4) y (1.5), con $X = e$ y $Y = e'$, se obtiene el diagrama conmutativo deseado:

$$\begin{tikzcd}
e \otimes e \arrow[rr, "1_e \otimes \eta"] \arrow[dr, "\iota = r_e"'] & & e \otimes e' \arrow[rr, "\eta \otimes 1_{e'}"] \arrow[dl, "r'_e"] \arrow[dr, "l_{e'}"'] & & e' \otimes e' \arrow[dl, "\iota' = l'_{e'}"] \\
 & e \arrow[rr, "\eta"'] & & e' &
\end{tikzcd}.$$

Resta demostrar que η es el único isomorfismo que hace conmutar el diagrama anterior, para esto primero se demostrará lo siguiente: si $b : e \xrightarrow{\sim} e$ es un isomorfismo tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
e \otimes e \arrow[r, "b \otimes b"] \arrow[d, "\iota"'] & e \otimes e \arrow[d, "\iota"] \\
e \arrow[r, "b"'] & e
\end{tikzcd}, \qquad (1.6)$$

entonces $b = 1_e$. Pero este hecho se sigue de que, como $\iota = r_e$, el siguiente diagrama conmuta para todo morfimso $c : e \to e$, (por naturalidad de r_e):

$$\begin{tikzcd}
e \otimes e \arrow[r, "c\otimes 1_e"] \arrow[d, "\iota"'] & e \otimes e \arrow[d, "\iota"] \\
e \arrow[r, "c"'] & e
\end{tikzcd}.$$

Entonces $\iota \circ (b \otimes b) = b \circ \iota = \iota \circ (b \otimes 1_e)$. Y como ι es isomorfismo, se sigue $b \otimes b = b \otimes 1_e$. En consecuencia se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
L_e(1_e) &= 1_e \otimes 1_e \\
&= 1_{e \otimes e} \\
&= (b \otimes b) \circ (b \otimes 1_e)^{-1} \\
&= (b \otimes b) \circ (b^{-1} \otimes 1_e) \\
&= 1_e \otimes b = L_e(b).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Y como L_e es equivalencia de categorías se tiene que $b = 1_e$.

Supóngase que existe $\beta : e \to e'$ isomorfismo tal que el diagrama (1.6) conmuta, entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\beta^{-1} \circ \eta) \circ \iota &= \beta^{-1} \circ (\iota \circ (\eta \otimes \eta)) \\
&= (\iota \circ (\beta \otimes \beta^{-1})) \circ (\eta \otimes \eta) \\
&= \iota \circ ((\beta^{-1} \circ \eta) \otimes (\beta^{-1} \circ \eta)).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Por lo tanto, si $b := \beta^{-1} \circ \eta$, se concluye que $\beta^{-1} \circ \eta = 1_e$. □

Proposición 1.8. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. Si existe un objeto $e' \in \mathcal{C}$ y un isomorfismo $\varphi : e' \to e$, entonces (e', ι') (con $\iota' = \varphi^{-1} \circ \iota \circ (\varphi \otimes \varphi)$) es una unidad de C.*

Demostración. De la definición se sigue que ι' es un isomorfismo. Para ver que (e', ι') sea unidad de $\mathcal{C}$, se demostrará que $L_{e'}$ y $R_{e'}$ son equivalencias de categorías. Se hará solo la demostración de $L_{e'}$ ya que la de $R_{e'}$ es totalmente análoga. Sean $X, Y \in \mathcal{C}$, se verá que $L_{e'}$ es pleno, fiel y denso:

(a) Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L_{e'}(X), L_{e'}(Y))$. Considérese la siguiente composición de morfismos $(\varphi \otimes 1_Y) \circ f \circ (\varphi^{-1} \otimes 1_X) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L_e(X), L_e(Y))$. Como L_e es pleno, existe $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal que:

$$1_e \otimes g = L_e(g) = (\varphi \otimes 1_Y) \circ f \circ (\varphi^{-1} \otimes 1_X).$$

De donde $f = (\varphi^{-1} \otimes 1_Y) \circ (1_e \otimes g) \circ (\varphi \otimes 1_X) = 1_{e'} \otimes g = L_{e'}(g)$. Por lo tanto $L_{e'}$ es pleno.

(b) Sean $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tales que $1_{e'} \otimes g = L_{e'}(g) = L_{e'}(h) = 1_{e'} \otimes h$. Así se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 1_e \otimes g &= (\varphi \otimes 1_Y) \circ (1_{e'} \otimes g) \circ (\varphi^{-1} \otimes 1_X) \\ &= (\varphi \otimes 1_Y) \circ (1_{e'} \otimes h) \circ (\varphi^{-1} \otimes 1_X) \\ &= 1_e \otimes h. \end{aligned}$$

Y como L_e es fiel, $g = h$. De donde $L_{e'}$ es fiel.

(c) Sea $Y \in \mathcal{C}$, como L_e es denso existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $e \otimes X = L_e(X) \cong Y$. Además, como $\varphi \otimes 1_X : e' \otimes X \to e \otimes X$ es un isomorfismo, $e' \otimes X \cong Y$. En consecuencia $L_{F(e)}$ es denso.

De $(a), (b), (c)$ se sigue que $L_{F(e)}$ es una equivalencia de categorías. De manera análoga se demuestra que $R_{F(e)}$ es también lo es. Así (e', ι') es unidad de $\mathcal{C}$. $\square$

1.2. Funtores y equivalencias entre categorías monoidales

Definición 1.9. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ categorías monoidales. Un ***funtor monoidal*** de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ es una pareja (F, J), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es un funtor y $J = \{J_{X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \to F(X \otimes Y) \mid X, Y \in \mathcal{C}\}$ es un isomorfismo natural, que cumplen lo siguiente:

(a) $F(e) \cong e'$,

(b) ***Axioma de estructura monoidal***. El siguiente diagrama es conmutativo para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[rr, "\alpha'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "J_{X,Y} \otimes' 1_{F(Z)}"'] & & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z}"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "J_{X \otimes Y, Z}"] & & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "J_{X, Y \otimes Z}"'] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "F(\alpha_{X,Y,Z})"] & & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd} .$$

A un funtor monoidal también se le conoce como ***funtor monoidal fuerte***.

Un funtor monoidal (F, J) es una ***equivalencia de categorías monoidales*** si F es una equivalencia de categorías.

Observación 1.10. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. La pareja $(1_{\mathcal{C}}, J)$ es un funtor monoidal, donde $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ la identidad y para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$, $J_{X,Y} = 1_{X\otimes Y} : X \otimes Y \to X \otimes Y$ es la identidad.

Proposición 1.11. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ categorías monoidales y $(F, J) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor monoidal entre ellas. Entonces existe un único isomorfismo $\varphi : e' \to F(e)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} e' \otimes' F(e) \arrow[r, "l'_{F(e)}"] \arrow[d, "\varphi\otimes' 1_{F(e)}"'] & F(e) \arrow[d, "F(l_e)^{-1}"] \\ F(e) \otimes' F(e) \arrow[r, "J_{e,e}"'] & F(e \otimes e) \end{tikzcd}$$

Demostración. Considérese la siguiente composición de morfismos

$$J_{e,e}^{-1} \circ F(l_e)^{-1} \circ l'_{F(e)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(R_{F(e)}(e'), R_{F(e)}(F(e)).$$

Como (F, J) es un funtor monoidal, $F(e) \cong e'$, y por la Proposición 1.8 se sigue que $F(e)$ es una unidad de $\mathcal{C}'$, así $R_{F(e)}$ es una equivalencia de categorías. Entonces existe un único morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(e', F(e))$ tal que

$$\varphi \otimes' 1_{F(e)} = R_{F(e)}(\varphi) = J_{e,e}^{-1} \circ F(l_e)^{-1} \circ l'_{F(e)}.$$

Resta demostrar que φ es isomorfismo. Como $R_{F(e)}(\varphi)$ es isomorfismo, existe $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(R_{F(e)}(F(e)), R_{F(e)}(e'))$ inverso izquierdo y derecho de $R_{F(e)}(\varphi)$. Usando nuevamente que $R_{F(e)}$ es equivalencia de categorías, se tiene que existe un único $\bar{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(e), e')$ tal que $R_{F(e)}(\bar{\varphi}) = h$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R_{F(e)}(\bar{\varphi} \circ \varphi) &= R_{F(e)}(\bar{\varphi}) \circ R_{F(e)}(\varphi) \\ &= 1_{R_{F(e)}(e')} \\ &= R_{F(e)}(1_{e'}), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\bar{\varphi} \circ \varphi = 1_{e'}$. De manera análoga $\varphi \circ \bar{\varphi} = 1_{F(e)}$. □

Observación 1.12. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y el funtor monoidal identidad $1_{\mathcal{C}}$. De la Proposición 1.11 se sigue que $\varphi = 1_e$.

Lema 1.13. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ categorías monoidales y (F, J) un funtor monoidal entre ellas. Entonces $\varphi \otimes' \varphi^{-1} = (r'_{F(e)})^{-1} \circ l'_{F(e)}$, donde $\varphi : e' \to F(e)$ se obtiene de la Proposición 1.11.*

Demostración. De la naturalidades de l' y r' se obtienen las siguientes igualdades:

$$l'_{F(e)} \circ (1_{e'} \otimes' \varphi) \circ (\iota')^{-1} = \varphi = r'_{F(e)} \circ (\varphi \otimes' 1_{e'}) \circ (\iota')^{-1}.$$

En consecuencia $\varphi \otimes' \varphi^{-1} = (r'_{F(e)})^{-1} \circ l'_{F(e)}$. □

Proposición 1.14. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ categorías monoidales y $(F, J) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtor monoidal entre ellas. Entonces el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} F(e) \otimes' e' \arrow[r, "r'_{F(e)}"] \arrow[d, "1_{F(e)} \otimes' \varphi"'] & F(e) \arrow[d, "F(r_e)^{-1}"] \\ F(e) \otimes' F(e) \arrow[r, "J_{e,e}"'] & F(e \otimes e) \end{tikzcd},$$

donde $\varphi : e' \to F(e)$ se obtiene de la Proposición 1.11.

Demostración. De la Proposición 1.11 y el Lema 1.13 se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} J_{e,e}^{-1} \circ F(r_e)^{-1} \circ r'_{F(e)} &= (\varphi \otimes' 1_{F(e)}) \circ (l'_{F(e)})^{-1} \circ r'_{F(e)} \\ &= (\varphi \otimes' 1_{F(e)}) \circ (\varphi^{-1} \otimes' \varphi) = (1_{F(e)} \otimes' \varphi). \end{aligned}$$

En consecuencia el diagrama conmuta. □

Proposición 1.15. *Para cualquier funtor monoidal $(F, J) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, los siguientes diagramas conmutan para todo $X \in \mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} e' \otimes' F(X) \arrow[r, "l'_{F(X)}"] \arrow[d, "\varphi \otimes' 1_{F(X)}"'] & F(X) \arrow[d, "F(l_X)^{-1}"] \\ F(e) \otimes' F(X) \arrow[r, "J_{e,X}"'] & F(e \otimes X) \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes' e' \arrow[r, "r'_{F(X)}"] \arrow[d, "1_{F(X)} \otimes' \varphi"'] & F(X) \arrow[d, "F(r_X)^{-1}"] \\ F(X) \otimes' F(e) \arrow[r, "J_{X,e}"'] & F(X \otimes e) \end{tikzcd} \tag{1.10}$$

Demostración. Usando que (F, J) es un funtor monoidal, las naturalidades de J y α, la Proposiciones 1.5 y 1.14, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&L_{F(e)}(F(l_X) \circ J_{e,X} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(X)}))\\
&= (1_{F(e)} \otimes' F(l_X)) \circ (1_{F(e)} \otimes' J_{e,X}) \circ (1_{F(e)} \otimes' (\varphi \otimes' 1_{F(X)})\\
&= (1_{F(e)} \otimes' F(l_X)) \circ J^{-1}_{e,e\otimes X} \circ F(\alpha_{e,e,X}) \circ J_{e\otimes e,X} \circ (J_{e,e} \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),F(e),F(X)} \circ (1_{F(e)} \otimes' (\varphi \otimes' 1_{F(X)})\\
&= J^{-1}_{e,X} \circ F(1_e \otimes l_X) \circ F(\alpha_{e,e,X}) \circ (J_{e,e} \otimes' 1_{F(X)}) \circ ((1_{F(e)} \otimes' \varphi) \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),e',F(X)}\\
&= J^{-1}_{e,X} \circ F(r_e \otimes 1_X) \circ J_{e\otimes e,X} \circ (J_{e,e} \circ (1_{F(e)} \otimes' \varphi) \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),e',F(X)}\\
&= J^{-1}_{e,X} \circ J_{e,X} \circ (F(r_e) \otimes' 1_{F(X)}) \circ (J_{e,e} \circ (1_{F(e)} \otimes' \varphi) \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),e',F(X)}\\
&= ((F(r_e) \circ J_{e,e} \circ (1_{F(e)} \otimes' \varphi)) \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),e',F(X)}\\
&= (r'_{F(e)} \otimes' 1_{F(X)}) \circ \alpha'^{-1}_{F(e),e',F(X)} = 1_{F(e)} \otimes' l'_{F(X)} = L_{F(e)}(l'_{F(X)}).
\end{aligned}$$

Y como $L_{e'}$ es fiel, $F(l_X) \circ J_{e,X} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(X)}) = l'_{F(X)}$. La conmutatividad del otro diagrama se demuestra de manera análoga. □

Proposición 1.16. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota), (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ y $(\mathcal{C}'', \otimes'', e'', \alpha'', \iota'')$ categorías monoidales. Si (F, J) es un funtor monoidal entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, y (F', J') es un funtor monoidal entre $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$. Entonces $(F' \circ F, J' \circ J)$ es funtor monoidal.*

Demostración. Se define $F'' := F' \circ F$ y para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathcal{C}$ se define $J''_{X,Y} = J' \circ J$ con el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F'F(X) \otimes'' F'F(Y) \arrow[rr, "J'_{F(X),F(Y)}"] \arrow[dr, "J''_{X,Y}"'] & & F'(F(X) \otimes' F(Y)) \arrow[dl, "F'(J_{X,Y})"] \\
& F'F(X \otimes Y) &
\end{tikzcd}.$$

Como $J'_{F(X),F(Y)}$ y $F'(J_{X,Y})$ son isomorfismos para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$, $J''_{X,Y}$ es isomorfismo también lo es. Se verá que J'' es natural. De la definición de J'' y las naturalidades de J, J', se tienen la siguientes igualdades para cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{f} X', Y \xrightarrow{g} Y' \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
J''_{X',Y'} \circ (F''(f) \otimes'' F''(g)) &= F'(J_{X',Y'}) \circ J'_{F(X'),F(Y')} \circ (F'F(f) \otimes'' F'F(g))\\
&= F'(J_{X',Y'}) \circ F'(F(f) \otimes' F(g)) \circ J'_{F(X),F(Y)}\\
&= F'(J_{X',Y'} \circ (F(f) \otimes' F(g))) \circ J'_{(F(X),F(Y)}\\
&= F'(F(f \otimes g) \otimes J_{X,Y}) \otimes J'_{F(X),F(Y)}\\
&= F'F(f \otimes g) \circ F'(J_{X,Y}) \circ J'_{F(X),F(Y)} = F''(f \otimes g) \circ J''_{X,Y}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto J'' es un isomorfismo natural. Además cumple:

$$F''(e) = F'F(e) \cong F'(e') \cong e''.$$

Resta demostrar que (F'', J'') cumple el axioma de estructura monoidal. Usando las definiciones de F'', J'', la naturalidad de J' y la Propiedad (b) de funtor monoidal de $(F, J), (F', J')$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
&F''(\alpha_{X,Y,Z}) \circ J''_{X\otimes Y,Z} \circ (J''_{X,Y} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F''(\alpha_{X,Y,Z}) \circ F'(J_{X\otimes Y,Z}) \circ J'_{F(X\otimes Y),F(Z)} \circ (J''_{X,Y} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F'(F(\alpha_{X,Y,Z}) \circ J_{X\otimes Y,Z}) \circ J'_{F(X\otimes Y),F(Z)} \circ (F'(J_{X,Y}) \otimes'' 1_{F''(Z)}) \circ (J'_{F(X),F(Y)} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F'(F(\alpha_{X,Y,Z}) \circ J_{X\otimes Y,Z}) \circ F'(J_{X,Y} \otimes' 1_{F(Z)}) \circ J'_{F(X)\otimes' F(Y),F(Z)} \circ (J'_{F(X),F(Y)} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F'(F(\alpha_{X,Y,Z}) \circ J_{X\otimes Y,Z} \circ (J_{X,Y} \otimes' 1_{F(Z)})) \circ J'_{F(X)\otimes' F(Y),F(Z)} \circ (J'_{F(X),F(Y)} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F'(J_{X,Y\otimes Z} \circ (1_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z}) \circ \alpha'_{F(X),F(Y),F(Z)}) \circ J'_{F(X)\otimes' F(Y),F(Z)} \circ (J'_{F(X),F(Y)} \otimes'' 1_{F''(Z)})\\
&= F'(J_{X,Y\otimes Z} \circ (1_{F(X)} \otimes' J_{Y,Z})) \circ J'_{F(X),F(Y)\otimes F(Z)} \circ (1_{F''(X)} \otimes'' J'_{F(Y),F(Z)}) \circ \alpha''_{F''(X),F''(Y),F''(Z)}\\
&= F'(J_{X,Y\otimes Z}) \circ J'_{F(X),F(Y\otimes Z)} \circ (F'(1_{F(X)}) \otimes'' F'(J_{Y,Z})) \circ (1_{F''(X)} \otimes'' J'_{F(Y),F(Z)}) \circ \alpha''_{F''(X),F''(Y),F''(Z)}\\
&= J''_{X,Y\otimes Z} \circ (1_{F''(X)} \otimes'' J''_{Y,Z}) \circ \alpha''_{F''(X),F''(Y),F''(Z)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto (F'', J'') cumple con el axioma de estructura monoidal y, en consecuencia, es un funtor monoidal. □

Proposición 1.17. *Sean* $(F, J') : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *y* $(F', J') : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}'', \otimes'', e'', \alpha'', \iota'')$ *funtores entre categorías monoidales. En la Proposición 1.16 se vio que* (F'', J'') *es un funtor monoidal, donde* $F'' := F' \circ F$ *y* $J'' := J' \circ J$*. Entonces se siguen la siguiente igualdad para el isomorfismo* φ'' *que se obtiene de la Proposición 1.11 para el funtor monoidal* (F'', J'')*:*

$$\varphi'' = F'(\varphi) \circ \varphi' : e'' \to F'F(e),$$

donde $\varphi : e' \to F(e)$ *y* $\varphi' : e'' \to F'(e')$ *son los isomorfismos que se obtienen de la Proposición 1.11.*

Demostración. De la definición de J'', la naturalidad de J' y las Proposiciones 1.11, 1.15, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
J''_{e,e} \circ ((F'(\varphi) \circ \varphi') \otimes'' 1_{F'F(e)}) &= F'(J_{e,e}) \circ J'_{F(e),F(e)} \circ (F'(\varphi) \otimes'' 1_{F'F(e)}) \circ (\varphi' \otimes'' 1_{F'F(e)})\\
&= F'(J_{e,e}) \circ F'(\varphi \otimes' 1_{F(e)}) \circ J'_{e',F(e)} \circ (\varphi' \otimes'' 1_{F'F(e)})\\
&= F'(F(l_e^{-1}) \circ l'_{F(e)}) \circ J'_{e',F(e)} \circ (\varphi' \otimes'' 1_{F'F(e)})\\
&= F'F(l_e^{-1}) \circ F'(l'_{F(e)}) \circ J'_{e',F(e)} \circ (\varphi' \otimes'' 1_{F'F(e)})\\
&= F'F(l_e^{-1}) \circ l''_{F'F(e)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como φ'' es el único que satisface la Proposición 1.11, se concluye que $\varphi'' = F'(\varphi) \circ \varphi'$. □

Definición 1.18. Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota), (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ categorías monoidales y $(F^1, J^1), (F^2, J^2)$ funtores monoidales de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$. Un ***morfismo*** (o ***transformación natural***) de funtores monoidales $\eta : (F^1, J^1) \to (F^2, J^2)$ es una transformación natural $\eta : F^1 \to F^2$ tal que, η_e es isomorfismo y el siguiente diagrama es conmuta para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} F^1(X) \otimes' F^1(Y) \arrow[r, "J^1_{X,Y}"] \arrow[d, "\eta_X \otimes' \eta_Y"'] & F^1(X \otimes Y) \arrow[d, "\eta_{X \otimes Y}"] \\ F^2(X) \otimes' F^2(Y) \arrow[r, "J^2_{X,Y}"'] & F^2(X \otimes Y) \end{tikzcd} . \tag{1.11}$$

Proposición 1.19. *Si $\varphi_i : e' \xrightarrow{\sim} F^i(e)$, $i = 1, 2$, son los isomorfismos obtenidos de la Proposición 1.11, entonces $\eta_e \circ \varphi_1 = \varphi_2$.*

Demostración. Se verificará que $\eta_e \circ \varphi_1$ satisface el diagrama conmutativo de la Proposición 1.11 para el funtor monoidal (F^2, J^2), y el resultado se seguirá por unicidad. Usando la definición de η, la Proposición 1.11 para (F^1, J^1) y las naturalidades de l', η, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} J^2_{e,e} \circ ((\eta_e \circ \varphi_1) \otimes' 1_{F^2(e)}) &= J^2_{e,e} \circ (\eta_e \otimes' \eta_e) \circ (\varphi_1 \otimes' \eta_e^{-1}) \\ &= \eta_{e \otimes e} \circ J^1_{e,e} \circ (\varphi_1 \otimes' 1_{F^1(e)}) \circ (1_{e'} \otimes' \eta_e^{-1}) \\ &= \eta_{e \otimes e} \circ F^1(l_e)^{-1} \circ l'_{F^1(e)} \circ (1_{e'} \otimes' \eta_e^{-1}) \\ &= \eta_{e \otimes e} \circ F^1(l_e)^{-1} \circ \eta_e^{-1} \circ l'_{F^2(e)} \\ &= \eta_{e \otimes e} \circ \eta_{e \otimes e}^{-1} \circ F^2(l_e)^{-1} \circ l'_{F^2(e)} = F^2(l_e)^{-1} \circ l'_{F^2(e)}. \end{aligned}$$

En consecuencia $\eta_e \circ \varphi_1$ satisface el diagrama de la Proposición 1.11. $\square$

Corolario 1.20. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ y $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ funtores monoidales, tales que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$. Entonces $\overline{\varphi} = \overline{F}(\varphi^{-1}) \circ \rho_e^{-1}$ y $\varphi = F(\overline{\varphi}) \circ \theta_e^{-1}$, donde $\varphi : e' \to F(e)$ y $\overline{\varphi} : e \to \overline{F}(e')$ son los isomorfismos en la Proposición 1.11.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.17 y de la Observación 1.12. $\square$

Proposición 1.21. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ una equivalencia de categorías monoidales. Entonces existe una equivalencia de categorías monoidales $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ tal que*

$$F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'} \text{ y } \bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}},$$

como funtores monoidales.

Demostración. Como F es una equivalencia de categorías, existe un funtor $\bar{F} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tal que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$. Así, para cualesquiera objetos $X', Y' \in \mathcal{C}'$, considérese la siguiente composición de morfismos:

$$\theta^{-1}_{X' \otimes' Y'} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}) \circ J^{-1}_{\bar{F}(X'), \bar{F}(Y')},$$

que pertenece al conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(\bar{F}(X')\otimes\bar{F}(Y')), F\bar{F}(X'\otimes' Y'))$. Como F es equivalencia, existe un único morfismo

$$\bar{J}_{X',Y'}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{F}(X')\otimes\bar{F}(Y'), \bar{F}(X'\otimes Y'))$$

tal que $F(\bar{J}_{X',Y'}) = \theta^{-1}_{X'\otimes' Y'}\circ(\theta_{X'}\otimes'\theta_{Y'})\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}$. Como F es equivalencia y $F(\bar{J}_{X',Y'})$ es isomorfismo, $\bar{J}_{X',Y'}$ también lo es para cualesquiera $X',Y'\in\mathcal{C}'$. Se afirma que $\bar{J}$ es una transfomación natural. En efecto, usando la definición de $\bar{J}$ y las naturalidades de J,θ, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera morfismos $X'\xrightarrow{f}X'', Y'\xrightarrow{g}Y''\in\mathcal{C}'$:

$$\begin{aligned}
F(\bar{J}_{X'',Y''}\circ(\bar{F}(f)\otimes\bar{F}(g))) &= F(\bar{J}_{X'',Y''})\circ F(\bar{F}(f)\otimes\bar{F}(g))\\
&= \theta^{-1}_{X''\otimes' Y''}\circ(\theta_{X''}\otimes'\theta_{Y''})\circ J^{-1}_{\bar{F}(X''),\bar{F}(Y'')}\circ F(\bar{F}(f)\otimes\bar{F}(g))\\
&= \theta^{-1}_{X''\otimes' Y''}\circ(\theta_{X''}\otimes'\theta_{Y''})\circ(F\bar{F}(f)\otimes' F\bar{F}(g))\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}\\
&= \theta^{-1}_{X''\otimes' Y''}\circ((\theta_{X''}\circ F\bar{F}(f))\otimes'(\theta_{Y''}\circ F\bar{F}(g)))\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}\\
&= \theta^{-1}_{X''\otimes' Y''}\circ((f\circ\theta_{X'})\otimes'(g\circ\theta_{Y'}))\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}\\
&= \theta^{-1}_{X''\otimes' Y''}\circ(f\otimes' g)\circ(\theta_{X'}\otimes'\theta_{Y'})\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}\\
&= F\bar{F}(f\otimes' g)\circ\theta^{-1}_{X'\otimes' Y'}\circ(\theta_{X'}\otimes'\theta_{Y'})\circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}\\
&= F\bar{F}(f\otimes' g)\circ F(\bar{J}_{X',Y'}) = F(\bar{F}(f\otimes' g)\circ\bar{J}_{X',Y'}).
\end{aligned}$$

Y como F es fiel, $\bar{J}_{X'',Y''}\circ(\bar{F}(f)\otimes\bar{F}(g)) = \bar{F}(f\otimes' g)\circ\bar{J}_{X',Y'}$. En consecuencia $\bar{J}$ es un isomorfismo natural. Ahora se verá que $(\bar{F},\bar{J})$ cumple el axioma de estructura monoidal. Las siguientes igualdades,

$$\begin{aligned}
&F(\overline{F}(\alpha'_{X',Y',Z'})\circ\overline{J}_{X'\otimes' Y',Z'}\circ(\overline{J}_{X',Y'}\otimes 1_{\overline{F}(Z')}))\\
&= F\overline{F}(\alpha'_{X',Y',Z'})\circ F\overline{J}_{X'\otimes' Y',Z'}\circ F(\overline{J}_{X',Y'}\otimes 1_{\overline{F}(Z')})\\
&= F\overline{F}(\alpha'_{X',Y',Z'})\circ\theta^{-1}_{(X'\otimes' Y')\otimes' Z'}\circ(\theta_{X'\otimes' Y'}\otimes'\theta_{Z'})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X'\otimes' Y'),\overline{F}(Z')}\circ F(\overline{J}_{X',Y'}\otimes 1_{\overline{F}(Z')})\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ\alpha'_{X',Y',Z'}\circ(\theta_{X'\otimes' Y'}\otimes'\theta_{Z'})\circ(F(\overline{J}_{X',Y'})\otimes' 1_{F\overline{F}(Z')})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X')\otimes\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ\alpha'_{X',Y',Z'}\circ((\theta_{X'\otimes' Y'}\circ F(\overline{J}_{X',Y'}))\otimes'\theta_{Z'})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X')\otimes\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ\alpha'_{X',Y',Z'}\circ(((\theta_{X'}\otimes'\theta_{Y'})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')})\otimes'\theta_{Z'})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X')\otimes\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ\alpha'_{X',Y',Z'}\circ((\theta_{X'}\otimes'\theta_{Y'})\otimes'\theta_{Z'})\circ(J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}\otimes' 1_{F\overline{F}(Z')})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X')\otimes\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ(\theta_{X'}\otimes'(\theta_{Y'}\otimes'\theta_{Z'}))\circ\alpha'_{F\overline{F}(X'),F\overline{F}(Y'),F\overline{F}(Z')}\circ\\
&(J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}\otimes' 1_{F\overline{F}(Z')})\circ J^{-1}_{\overline{F}(X')\otimes\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ(\theta_{X'}\otimes'(\theta_{Y'}\otimes'\theta_{Z'}))\circ(1_{F\overline{F}(X')}\otimes' J^{-1}_{\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})\circ\\
&J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')\otimes\overline{F}(Z')}\circ F(\alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ(\theta_{X'}\otimes'((\theta_{Y'}\otimes'\theta_{Z'})\circ J^{-1}_{\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}))\circ J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')\otimes\overline{F}(Z')}\circ F(\alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})\\
&= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')}\circ(\theta_{X'}\otimes'(\theta_{Y'\otimes' Z'}\circ F(\overline{J}_{Y',Z'})))\circ J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')\otimes\overline{F}(Z')}\circ F(\alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})
\end{aligned}$$

$= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'\otimes' Z'}) \circ (1_{F\overline{F}(X')} \otimes' F(\overline{J}_{Y',Z'}))\circ$
$J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')\otimes\overline{F}(Z')} \circ F(\alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})$
$= \theta^{-1}_{X'\otimes'(Y'\otimes' Z')} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'\otimes' Z'}) \circ J^{-1}_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'\otimes' Z')} \circ F(1_{\overline{F}(X')} \otimes \overline{J}_{X',Y'}) \circ F(\alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})$
$= F(\overline{J}_{X',Y'\otimes' Z'}) \circ F((1_{\overline{F}(X')} \otimes \overline{J}_{X',Y'}) \circ \alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')})$
$= F(\overline{J}_{X',Y'\otimes' Z'} \circ (1_{\overline{F}(X')} \otimes \overline{J}_{X',Y'}) \circ \alpha_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y'),\overline{F}(Z')}),$

se siguen de la definición de $\overline{J}$, las naturalidades de θ, J, α y el axioma de estructura monoidal de (F, J), para cualesquiera $X', Y', Z' \in \mathcal{C}'$. Y como F es equivalencia de categorías, $(\overline{F}, \overline{J})$ cumple con el axioma de estructura monoidal. Además se tiene que se cumple lo siguiente:

$$\bar{F}(e') \simeq \bar{F}F(e) \overset{\theta_e}{\simeq} e.$$

Por lo tanto $(\bar{F}, \bar{J})$ es un funtor monoidal. Ahora se demostrará que θ es morfismo de funtores monoidales, es decir, se demostrará que θ cumple (1.11). En la Proposición 1.16 se definió la composición de funtores monoidales, se aplicara esto a la composición de (F, J) con $(\bar{F}, \bar{J})$ y se denotará a la composición por (F', J'). Para cualesquiera $X', Y' \in \mathcal{C}'$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\theta_{X'\otimes' Y'} \circ J'_{X',Y'} &= \theta_{X'\otimes' Y'} \circ F(\bar{J}_{X',Y'}) \circ J_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \\
&= \theta_{X'\otimes' Y'} \circ \theta^{-1}_{X'\otimes' Y'} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}) \circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ J_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \\
&= \theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}.
\end{aligned}$$

En consecuencia θ es un morfismo de funtores monoidales y análogamente se demuestra que ρ también lo es. □

Corolario 1.22. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ una equivalencia entre categorías monoidales. Entonces existe una equivalencia entre categorías monoidales $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y una adjunción $(\varepsilon, \rho) : F \dashv \overline{F}$, tal que ε y ρ son morfismos de funtores monoidales.*

Demostración. De la Proposición 1.21 existe una equivalencia entre categorías monoidales $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ tal que:

$$F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'} \text{ y } \bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}},$$

como funtores monoidales. Si ε es la composición

$$F\overline{F} \overset{F\overline{F}\theta^{-1}}{\to} F\overline{F}F\overline{F} \overset{F\rho\overline{F}}{\to} F\overline{F} \overset{\theta}{\to} 1_{\mathcal{C}'},$$

entonces (ε, ρ) es una adjunción. Por lo tanto resta demostrar que ε es morfismo de funtores monoidales, es decir, que hace conmutar el diagrama (1.11).

Del hecho de que θ y ρ hacen conmutar (1.11) y de que son transformaciones naturales, se tienen las siguientes igualdades para todo $X', Y' \in \mathcal{C}'$:

$$\varepsilon_{X'} \otimes' \varepsilon_{Y'} = (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}) \circ (F(\rho_{\overline{F}(X')}) \otimes' F(\rho_{\overline{F}(Y')})) \circ (F\overline{F}(\theta^{-1}_{X'}) \otimes' \overline{F}F(\theta^{-1}_{Y'}))$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')} \circ (F(\rho_{\overline{F}(X')}) \otimes' F(\rho_{\overline{F}(Y')})) \circ (\theta^{-1}_{\overline{F}F(X')} \otimes' \theta^{-1}_{\overline{F}F(Y')})$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ F(\rho_{\overline{F}(X')} \otimes \rho_{\overline{F}(Y')}) \circ J_{\overline{F}F\overline{F}(X'),\overline{F}F\overline{F}(Y')} \circ (\theta^{-1}_{\overline{F}F(X')} \otimes' \theta^{-1}_{\overline{F}F(Y')})$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ F(\rho_{\overline{F}(X') \otimes \overline{F}(Y')}) \circ F\overline{F}(J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}) \circ F(\overline{J}_{F\overline{F}(X'),F\overline{F}(Y')})$$
$$\circ J_{\overline{F}F\overline{F}(X'),\overline{F}F\overline{F}(Y')} \circ (\theta^{-1}_{\overline{F}F(X')} \otimes' \theta^{-1}_{\overline{F}F(Y')})$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ F(\rho_{\overline{F}(X') \otimes \overline{F}(Y')}) \circ F\overline{F}(J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}) \circ \theta^{-1}_{F\overline{F}(X'),F\overline{F}(Y')}$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ F(\rho_{\overline{F}(X') \otimes \overline{F}(Y')}) \circ F\overline{F}F(\overline{J}_{X',Y'})^{-1} \circ \theta^{-1}_{F\overline{F}(X' \otimes' Y')}$$
$$\circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}$$
$$= \theta_{X' \otimes' Y'} \circ F(\rho_{\overline{F}(X' \otimes' Y')}) \circ \theta^{-1}_{F\overline{F}(X' \otimes' Y')} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}$$
$$= \varepsilon_{X' \otimes' Y'} \circ F(\overline{J}_{X',Y'}) \circ J_{\overline{F}(X'),\overline{F}(Y')}.$$

Por lo tanto ε hace conmutar (1.11). □

1.3. Teorema de Severidad de Mac Lane

Definición 1.23. Una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es ***severa*** si para cualesquiera objetos $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

(a) Se tienen las siguientes igualdades:

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z) \text{ y } X \otimes e = X = e \otimes X,$$

(b) $\alpha_{X,Y,Z} = 1_{(X \otimes Y) \otimes Z}$ y $l_X = 1_X = r_X$.

Ejemplo 1.24. Cualquier categoría cartesiana monoidal y, en particular, $\mathrm{Mod}(R)$ (para un anillo conmutativo con unidad R) no son severas. Más adelante, en esta sección, le asociaremos a cada categoría monoidal una severa.

Proposición 1.25. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una categoría monoidal severa. Entonces $R_e = L_e = 1_{\mathcal{C}}$.*

Demostración. Se hará la demostración para L_e, ya que la de R_e es totalmente análoga. Por la naturalidad de l, se tiene el siguiente diagra conmutativo para cada $f : X \to Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} X = e \otimes X & \xrightarrow{1_X = l_X} & X \\ {\scriptstyle 1_e \otimes f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y = e \otimes Y & \xrightarrow[1_Y = l_Y]{} & Y \end{array},$$

por lo tanto $1_e \otimes f = f$. Entonces $L_e(f) = f = 1_{\mathcal{C}}(f)$ y, como consecuencia, $L_e = 1_{\mathcal{C}}$. □

Definición 1.26. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una categoría monoidal severa. Para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ defínase $X^{\otimes n} \in \mathcal{C}$ recursivamente como sigue:

$$X^{\otimes 0} := e,\ X^{\otimes 1} := X \text{ y } X^{\otimes n} := X^{\otimes n-1} \otimes X.$$

Proposición 1.27. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una categoría monoidal severa, $X \in \mathcal{C}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} = X^{\otimes n+m}$.*

Demostración. Se hará la demostración por inducción sobre n. Es claro que la Proposción se cumple para $n = 0$. Se demostrará para $n = 1$, esto se hará con inducción sobre m. Si $m = 0, 1$ se cumple de la definición. Si la Proposición se vale para $m = k$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$X \otimes X^{\otimes k+1} = X \otimes (X^{\otimes k} \otimes X) = (X \otimes X^{\otimes k}) \otimes X = X^{\otimes k+1} \otimes X = X^{\otimes k+2}.$$

En consecuencia se sigue que $X \otimes X^{\otimes m} = X^{\otimes m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora se supondrá que la Proposición se vale para $n = k$, así se tienen las siguientes igualdades para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$X^{\otimes k+1} \otimes X^{\otimes m} = (X^{\otimes k} \otimes X) \otimes X^{\otimes m} = X^{\otimes k} \otimes (X \otimes X^{\otimes m}) = X^{\otimes k+m+1}.$$

Por tanto se sigue que $X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} = X^{\otimes n+m}$. □

Considérese $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. Se define una clase de objetos y una clase de morfismos como sigue:

(a) Los objetos, $Obj(\mathbb{S}(\mathcal{C}))$, son parejas (F, c), donde $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un funtor y

$$c_{X,Y} : F(X) \otimes Y \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$$

es un isomorfismo natural, tal que el siguiente conmuta para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
& (F(X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[dl, "c_{X,Y} \otimes 1_Z"'] \arrow[dr, "\alpha_{F(X),Y,Z}"] & \\
F(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, "c_{X \otimes Y, Z}"'] & & F(X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "c_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "F(\alpha_{X,Y,Z})"'] & & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd} .$$

(b) Los morfismos, $Mor(\mathbb{S}(\mathcal{C}))$, $\theta : (F^1, c^1) \to (F^2, c^2)$ son transformaciones naturales $\theta : F^1 \to F^2$, tales que el siguiente diagrama conmuta para cualesquiera objetos $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} F^1(X) \otimes Y & \xrightarrow{c^1_{X,Y}} & F^1(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \theta_X \otimes 1_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta_{X \otimes Y}} \\ F^2(X) \otimes Y & \xrightarrow[c^2_{X,Y}]{} & F^2(X \otimes Y) \end{array} . \tag{1.12}$$

Se denotará por $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ a las clases de objetos y morfismos definidas en los párrafos anteriores.

Proposición 1.28. $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ *es una categoría.*

Demostración. Se hará la demostración en partes:

- Para cada objeto (F, c) se tiene la transformación natural identidad $1_F : F \to F$, de donde se obtien un morfismo identidad para cada objeto (F, c).
- Sean $\theta : (F^1, c^1) \to (F^2, c^2)$, $\overline{\theta} : (F^2, c^2) \to (F^3, c^3)$ dos morfismos. Usando que $\overline{\theta}$ y θ hacen conmutar el diagrama del inciso (b), en la definición de $Mor(\mathbb{S}(\mathcal{C}))$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} (\overline{\theta} \circ \theta)_{X \otimes Y} \circ c^1_{X,Y} &= \overline{\theta}_{X \otimes Y} \circ \theta_{X \otimes Y} \circ c^1_{X,Y} \\ &= \overline{\theta}_{X \otimes Y} \circ c^2_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes 1_Y) \\ &= c^3_{X,Y} \otimes (\overline{\theta}_X \otimes 1_Y) \otimes (\theta_X \otimes 1_Y) \\ &= c^3_{X,Y} \circ ((\overline{\theta}_X \circ \theta_X) \otimes 1_Y) = c^3_{X,Y} \circ ((\overline{\theta} \circ \theta)_X \otimes 1_Y). \end{aligned}$$

  Entonces la composición $\overline{\theta} \circ \theta$ hace conmutar el diagrama (1.12) y por lo tanto la composición de morfismos en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ está bien definida.
- Como la composición vertical de transformaciones naturales es asociativa, la composición de morfismos en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ es asociativa.

De los incisos anteriores se sigue que $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ es una categoría. □

Ahora se demostrará que $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal.

Definición 1.29. Se define una asignación $\otimes' : \mathbb{S}(\mathcal{C}) \times \mathbb{S}(\mathcal{C}) \to \mathbb{S}(\mathcal{C})$ como sigue:

(a) Sean $(F^1, c^1), (F^2, c^2) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$. Se define $(F^1, c^1) \otimes' (F^2, c^2) := (F^1F^2, c)$, donde c está dado en cada pareja $(X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ por la siguiente composición:

$$F^1F^2(X) \otimes Y \xrightarrow{c^1_{F^2(X),Y}} F^1(F^2(X) \otimes Y) \xrightarrow{F^1(c^2_{X,Y})} F^1F^2(X \otimes Y).$$

(b) Sean $(F^1, c^1) \xrightarrow{\theta} (F^2, c^2), (F^3, c^3) \xrightarrow{\overline{\theta}} (F^4, c^4) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$. Se define $\overline{\theta} \otimes' \theta := \overline{\theta} * \theta$, donde $\overline{\theta} * \theta$ es la composición horizontal de los isomorfismos naturales $\overline{\theta}$ y θ, es decir,

$$(\overline{\theta} * \theta)_X = \overline{\theta}_{F^2(X)} \circ F^3(\theta_X) : F^3F^1(X) \to F^4F^2(X),$$

para todo $X \in \mathcal{C}$.

Proposición 1.30. *La asignación $\otimes'$ está bien definida y es un bifuntor covariante.*

Demostración. • Se verá que $(F^1, c^1) \otimes' (F^2, c^2)$ pertenece a $\mathbb{S}(\mathcal{C})$. Como $c^1_{F^2(X),Y}$ y $F^1(c^2_{X,Y})$ son isomorfismos, $c_{X,Y}$ es un isomorfismo. De la definición de c y las naturalidades de c^1, c^2, se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera morfismos $X \xrightarrow{f} X', Y \xrightarrow{g} \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} c_{X',Y'} \circ (F^1F^2(f) \otimes g) &= F^1(c^2_{X',Y'}) \circ c^1_{F^2(X'),Y'} \circ (F^1F^2(f) \otimes g) \\ &= F^1(c^2_{X',Y'}) \circ F^1(F^2(f) \otimes g) \circ c^1_{F^2(X),Y} \\ &= F^1(c^2_{X',Y'} \circ (F^2(f) \otimes g)) \circ c^1_{F^2(X),Y} \\ &= F^1(F^2(f \otimes g) \circ c^2_{X,Y}) \circ c^1_{F^2(X),Y} \\ &= F^1F^2(f \otimes g) \circ c_{X,Y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto c es un isomorfismo natural. Ahora se demostrará que c hace conmutar el pentágono de la definición de $\mathbb{S}(\mathcal{C})$. Usando la definición de c y el hecho de que c^1, c^2 hacen conmutar el pentágono de la definición de $\mathbb{S}(\mathcal{C})$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} &F^1F^2(\alpha_{X,Y,Z}) \circ c_{X\otimes Y,Z} \circ (c_{X,Y} \otimes 1_Z) \\ &= F^1F^2(\alpha_{X,Y,Z}) \circ F^1(c^2_{X\otimes Y,Z}) \circ c^1_{F^2(X\otimes Y),Z} \circ (F^1(c^2_{X,Y}) \otimes 1_Z) \circ (c^1_{F^2(X),Y} \otimes 1_Z) \\ &= F^1(F^2(\alpha_{X,Y,Z}) \circ c^2_{X\otimes Y,Z}) \circ F^1(c^2_{X,Y} \otimes 1_Z) \circ c^1_{F^2(X)\otimes Y,Z} \circ (c^1_{F^2(X),Y} \otimes 1_Z) \\ &= F^1(F^2(\alpha_{X,Y,Z}) \circ c^2_{X\otimes Y,Z} \circ (c^2_{X,Y} \otimes 1_Z)) \circ c^1_{F^2(X)\otimes Y,Z} \circ (c^1_{F^2(X),Y} \otimes 1_Z) \\ &= F^1(c^2_{X,Y\otimes Z} \circ \alpha_{F^2(X),Y,Z}) \circ c^1_{F^2(X)\otimes Y,Z} \circ (c^1_{F^2(X),Y} \otimes 1_Z) \\ &= F^1(c^2_{X,Y\otimes Z}) \circ c^1_{F^2(X),Y\otimes Z} \circ \alpha_{F^1F^2(X),Y,Z} = c_{X,Y\otimes Z} \circ \alpha_{F^1F^2(X),Y,Z}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $(F^1F^2, c) = (F^1, c^1) \otimes' (F^2, c^2)$ es un objeto de $\mathbb{S}(\mathcal{C})$.

• Se verá que $\overline{\theta} \otimes' \theta$ es un morfismo de $\mathbb{S}(\mathcal{C})$, para ello considérense los siguientes objetos:

$$(F^3F^1, c^{3,1}) = (F^3, c^3) \otimes' (F^1, c^1) \text{ y } (F^4F^2, c^{4,2}) = (F^4, c^4) \otimes' (F^2, c^2).$$

De las definiciones de $c^{4,2}, c^{3,1}, \overline{\theta} \otimes \theta$, la propiedad (b) de la definición de morfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ aplicado a $\overline{\theta}, \theta$ y las naturalidades de $\overline{\theta}, c^3$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
c^{4,2}_{X,Y} \circ ((\overline{\theta} \otimes' \theta)_X \otimes 1_Y) &= F^4(c^2_{X,Y}) \circ c^4_{F^2(X),Y} \circ (\overline{\theta}_{F^2(X)} \otimes 1_Y) \circ (F^3(\theta_X) \otimes 1_Y) \\
&= F^4(c^2_{X,Y}) \circ \overline{\theta}_{F^2(X)\otimes Y} \circ c^3_{F^2(X),Y} \circ (F^3(\theta_X) \otimes 1_Y) \\
&= \overline{\theta}_{F^2(X\otimes Y)} \circ F^3(c^2_{X,Y}) \circ F^3(\theta_X \otimes 1_Y) \circ c^3_{F^1(X),Y} \\
&= \overline{\theta}_{F^2(X\otimes Y)} \circ F^3(c^2_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes 1_Y)) \circ c^3_{F^1(X),Y} \\
&= \overline{\theta}_{F^2(X\otimes Y)} \circ F^3(\theta_{X\otimes Y}) \circ F^3(c^1_{X,Y}) \circ c^3_{F^1(X),Y} \\
&= (\overline{\theta} \otimes' \theta)_{X\otimes Y} \circ c^{3,1}_{X,Y}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $\overline{\theta} \otimes' \theta$ es un morfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$.

De los incisos anteriores se sigue que $\otimes'$ es una asignación bien definida; resta demostrar que es un bifuntor covariante. Sean $(F^1, c^1), (F^2, c^2)$ objetos en la categoría $\mathbb{S}(\mathcal{C})$, y considérese sus morfismos identidad 1_{F^1} y 1_{F^2}, de manera que, usando la definición del bifuntor θ', se tienen las siguientes igualdades para cualquier objeto $X \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
(1_{F^1} \otimes' 1_{F^2})_X &= (1_{F^1})_{F^2(X)} \circ F^1((1_{F^2})_X) \\
&= 1_{F^1F^2(X)} \circ F^1(1_{F^2(X)}) \\
&= 1_{F^1F^2(X)} = (1_{F^1F^2})_X.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $1_{(F^1,c^1)} \otimes' 1_{(F^2,c^2)} = 1_{F^1} \otimes' 1_{F^2} = 1_{F^1F^2} = 1_{(F^1,c^1)\otimes'(F^2,c^2)}$. Además, debido a que la composición vertical y horizontal de transformaciones naturales se "distribuyen" entre sí, se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera morfismos $\overline{\theta}, \theta, \overline{\rho}, \rho \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$:

$$(\overline{\theta} \circ \overline{\rho}) \otimes' (\theta \circ \rho) = (\overline{\theta} \circ \overline{\rho}) * (\theta \circ \rho) = (\overline{\theta} * \theta) \circ (\overline{\rho} * \rho) = (\overline{\theta} \otimes' \theta) \circ (\overline{\rho} \otimes' \rho).$$

En consecuencia $\otimes'$ es un bifuntor covariante. □

Proposición 1.31. $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ *es una categoría monoidal severa.*

Demostración. Primero se demostrará que $\otimes'$ es asociativo en objetos. Usando las definiciones de $c^{(1,2),3}$ y $c^{1,(2,3)}$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $(F^1, c^1), (F^2, c^2), (F^3, c^3) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$:

$$\begin{aligned}
c^{(1,2),3} &= (F^1F^2)(c^3_{X,Y}) \circ c^{1,2}_{F^3(X),Y} \\
&= F^1(F^2(c^3_{X,Y})) \circ F^1(c^2_{F^3(X),Y}) \circ c^1_{F^2F^3(X),Y} \\
&= F^1(F^2(c^3_{X,Y}) \circ c^2_{F^3(X),Y}) \circ c^1_{F^2F^3(X),Y} \\
&= F^1(c^{2,3}_{X,Y}) \circ c^1_{F^2F^3(X),Y} = c^{1,(2,3)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tomando en cuenta que la composición de funtores es asociativa, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}((F^1, c^1) \otimes' (F^2, c^2)) \otimes' (F^3, c^3) &= (F^1F^2, c^{1,2}) \otimes' (F^3, c^3) \\ &= ((F^1F^2)F^3, c^{(1,2),3}) \\ &= (F^1(F^2F^3), c^{1,(2,3)}) \\ &= (F^1, c^1) \otimes' (F^2F^3, c^{2,3}) \\ &= (F^1, c^1) \otimes' ((F^2, c^2) \otimes' (F^3, c^3)).\end{aligned}$$

En consecuencia $\otimes'$ es asociativa en objetos.

Ahora considérese el funtor indentidad $1_{\mathcal{C}}$ y el isomorfismos natural identidad $\overline{1_{\mathcal{C}}}$ restringido a objetos en $\mathcal{C}$ de la forma $X \otimes Y$, es decir,

$$(\overline{1_{\mathcal{C}}})_{X,Y} := 1_{X \otimes Y}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$. De las definiciones se siguen las siguientes propiedades para todo morfismo $\theta : (F^1, c^1) \to (F^2, c^2) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$:

(a) $(1_{\mathcal{C}}, \overline{1_{\mathcal{C}}}) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$ y se le denotará por $e' := (1_{\mathcal{C}}, \overline{1_{\mathcal{C}}})$,

(b) $e' \otimes' e' = e'$,

(c) $(F^1, c^1) \otimes' e' = (F^1, c^1) = e' \otimes' (F^1, c^1)$,

(d) $\theta \otimes' 1_{e'} = \theta = 1_{e'} \otimes' \theta$.

De todo lo anterior se sigue que $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ es una categoría monoidal severa. □

Proposición 1.32. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ la categoría monoidal severa definida anteriormente. Si $\theta : (F^1, c^1) \to (F^2, c^2)$ es un morfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$, de manera que $\theta : F^1 \to F^2$ es un isomorfismo natural, entonces θ es un isomorfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$.*

Demostración. Se sigue de que θ_X es isomorfismo para todo $X \in \mathcal{C}$ y que θ hace conmutar (1.12). □

Teorema 1.33. ***(Teorema de Severidad de Mac Lane)*** *Cualquier categoría monoidal es equivalente a una categoría monoidal severa.*

Demostración. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. Considérese la categoría monoidal severa $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ definida en párrafos anteriores. Se define $L : \mathcal{C} \to \mathbb{S}(\mathcal{C})$ como sigue:

$$L(X) := (X \otimes -, \alpha_{X,-,-}) \text{ y } L(f) := (f \otimes -),$$

para todo $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{C}$. Se verá que L está bien definido; sea $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{C}$, entonces se tienen lo siguiente:

- Usando la definición de L y el axioma del pentágono, se sigue que $L(X) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$.

- Usando la definición de L y la naturalidad de α se sigue que $L(f) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$.

De los puntos anteriores, se sigue que L está bien definida y, usando su definición, se sigue que es un funtor covariante. Ahora se demostrará que es un funtor pleno, fiel y denso:

(a) Sea $\theta : L(X) \to L(Y) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$. Se define $f : X \to Y$ como la siguiente composición:

$$X \xrightarrow{r_X^{-1}} X \otimes e \xrightarrow{\theta_e} Y \otimes e \xrightarrow{r_Y} Y \ .$$

Se afirma que $\theta_Z = f \otimes 1_Z$ para todo $Z \in \mathcal{C}$. En efecto, considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Z \arrow[r, "r_X^{-1}\otimes 1_Z"] \arrow[d, "f\otimes 1_Z"'] & (X \otimes e) \otimes Z \arrow[r, "\alpha_{X,e,Z}"] \arrow[d, "\theta_e\otimes 1_Z"'] & X \otimes (e \otimes Z) \arrow[r, "1_X\otimes l_Z"] \arrow[d, "\theta_{e\otimes Z}"'] & X \otimes Z \arrow[d, "\theta_Z"'] \\
Y \otimes Z \arrow[r, "r_Y^{-1}\otimes 1_Z"'] & (Y \otimes e) \otimes Z \arrow[r, "\alpha_{Y,e,Z}"'] & Y \otimes (e \otimes Z) \arrow[r, "1_Y\otimes l_Z"'] & Y \otimes Z
\end{tikzcd} .$$

Las filas son la identidad debido a la Proposición 1.5, el rectángulo izquierdo conmuta por la definición de f, el rectángulo central conmuta porque $\theta \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$ y el rectángulo derecho conmuta debido a la naturalidad de θ. En consecuencia el diagrama exterior conmuta y por lo tanto $\theta_Z = f \otimes 1_Z$. Así L es pleno.

(b) Si $L(f) = L(g)$ para algunos morfimos $f, g \in \mathcal{C}$, entonces $f \otimes 1_e = g \otimes 1_e$. Y como R_e es fiel $f = g$, por lo tanto L es fiel.

(c) Sea $(F, c) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$, se afirma que $L(F(e)) = (F(e)\otimes -, \alpha_{F(e),-,-}) \cong (F, c)$. En efecto, para cada $X \in \mathcal{C}$, se define θ_X como la siguiente composición:

$$F(e) \otimes X \xrightarrow{c_{e,X}} F(e \otimes X) \xrightarrow{F(l_X)} F(X) \ ,$$

como $c_{e,X}$ y l_X son isomorfimos, θ_X es isomorfismo. Ahora se demostrará que $\theta : F(e)\otimes - \to F$ es una transformación natural; usando la definición de θ y las naturalidades de c, l, se obtienen las siguientes igualdades para todo $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned}
\theta_Y \circ (1_{F_e} \otimes f) &= F(l_Y) \circ c_{e,Y} \circ (1_{F(e)} \otimes f) \\
&= F(l_Y) \circ F(1_e \otimes f) \circ c_{e,X} \\
&= F(l_Y \circ (1_e \otimes f)) \circ c_{e,X} \\
&= F(f \circ l_X) \circ c_{e,X} \\
&= F(f) \circ F(l_X) \circ c_{e,X} = F(f) \circ \theta_X.
\end{aligned}$$

En consecuencia θ es un isomorfismo natural. Resta demostrar que θ hace conmutar el diagrama (1.12). Usando la definición de θ, la naturalidad de c, el hecho de que (F, c) satisfacen el pentágono de la definición de $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ y la Proposición 1.6, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} c_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes 1_Y) &= c_{X,Y} \circ (F(l_X) \otimes 1_Y) \circ (c_{e,X} \otimes 1_Y) \\ &= F(l_X \otimes 1_Y) \circ c_{e \otimes X,Y} \circ (c_{e,X} \otimes 1_Y) \\ &= F(l_X \otimes 1_Y) \circ F(\alpha^{-1}_{e,X,Y}) \circ c_{e,X\otimes Y} \circ \alpha_{F(e),X,Y} \\ &= F((l_X \otimes 1_Y) \circ \alpha^{-1}_{e,X,Y}) \circ c_{e,X\otimes Y} \circ \alpha_{F(e),X,Y} \\ &= F(l_{X\otimes Y}) \circ c_{e,X\otimes Y} \circ \alpha_{F(e),X,Y} = \theta_{X\otimes Y} \circ \alpha_{F(e),X,Y}. \end{aligned}$$

Por lo tanto θ hace conmutar (1.12) y por la Proposición 1.32 se sigue que θ es un isomorfismo. En consecuencia L es denso.

De $(a), (b)$ y (c) se obtiene que L es una equivalencia de categorías.

Ahora se demostrará que $L(e) \cong e'$, para esto considérese la restricción unitaria $l : e \otimes - \to 1_{\mathcal{C}}$. Se afirma que $l^{-1} : e' \to L(e) \in \mathbb{S}(\mathcal{C})$, en efecto, por la proposición 1.32 basta con probar que l^{-1} hace conmutar (1.12) y esto se sigue de la Proposición 1.6. Ahora se le dará a L una estructura de funtor monoidal, para cada $X, Y \in \mathcal{C}$ se define $J_{X,Y} : L(X) \otimes' L(Y) \to L(X \otimes Y)$ como:

$$\alpha^{-1}_{X,Y,-} : (X \otimes (Y \otimes -), (1_X \otimes \alpha_{Y,-,-}) \circ \alpha_{X,Y\otimes -,-}) \to ((X \otimes Y) \otimes -, \alpha_{X\otimes Y,-,-}).$$

Por el axioma del pentágono en $\mathcal{C}$, $J_{X,Y}$ hace conmutar (1.12). Entonces, por la Proposición 1.32, $J_{X,Y}$ es un isomorfismo en $\mathbb{S}(\mathcal{C})$ para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$. Para que (L, J) sea un funtor monoidal, resta demostrar que satisface el axioma de estructura monoidal, pero esto se sigue del axioma del pentágono en $\mathcal{C}$. Por lo tanto (L, J) es una equivalencia de categorías monoidales. $\square$

Capítulo 2

Módulos, Categorías Trenzadas y Monoides de Lie

El siguiente capítulo tiene como objetivo definir los conceptos categóricos de álgebra y módulo, en categorias monoidales. Se verá que no hay problemas al restringirnos a categorías monoidales severas. También se definirán las ***Categorías Monoidales Trenzadas y Categorías Lineales***, esto se hará para poder dar el equivalente categórico de álgebra de Lie, en categorías monoidales. Para ello se seguirán [1] y [6], aunque no todos resultados que se demuestren estén en los trabajos citados.

2.1. Monoides y Módulos sobre Monoides

Definición 2.1. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal:

(a) Un ***monoide*** en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ es una tercia (A, μ, η), donde

$$\mu : A \otimes A \to A \text{ y } \eta : e \to A$$

son morfismos en $\mathcal{C}$, llamados ***producto*** y ***unidad***, respectivamente, tales que satisfacen el ***axioma de asociatividad***:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "\alpha_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu \otimes 1_A"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "1_A \otimes \mu"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "\mu"'] & & A
\end{tikzcd} , \tag{2.1}$$

y los ***axiomas de unidad a izquierda y derecha***:

$$\begin{tikzcd}
e \otimes A \arrow[r, "\eta \otimes 1_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes e \arrow[l, "1_A \otimes \eta"'] \arrow[dl, "r_A"] \\
& A &
\end{tikzcd} . \tag{2.2}$$

(b) Sean (A, μ, η) y (A', μ', η') monoides en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Un morfismo $f : A \to A' \in \mathcal{C}$ es ***morfismo de monoides***, si los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "\mu"'] & A' \otimes A' \arrow[d, "\mu'"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} e \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & & A \arrow[dl, "f"] \\ & A' & \end{tikzcd}.$$

Notación 2.2. Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. Se denotará por $Mon(\mathcal{C})$ a la categoría de todos los monoides en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y morfismos de monoides.

Proposición 2.3. *Sean (A, μ, η) un monoide en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y $f : A' \to A$ un isomorfismo en $\mathcal{C}$. Entonces (A', μ', η') es un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, donde $\mu' := f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes f)$ y $\eta' := f^{-1} \circ \eta$.*

Demostración. Usando la definición de μ', la naturalidad de α y que μ hace conmutar (2.1), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mu' \circ (1_{A'} \otimes \mu') \circ \alpha_{A',A',A'} &= f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes f) \circ (1_{A'} \otimes f^{-1}) \circ (1_{A'} \otimes \mu) \circ \\
&\quad (1_{A'} \otimes (f \otimes f)) \circ \alpha_{A',A',A'} \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes 1_A) \circ (1_{A'} \otimes \mu) \circ \alpha_{A',A,A} \circ ((1_{A'} \otimes f) \otimes f) \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ (f \otimes 1_{A \otimes A}) \circ \alpha_{A',A,A} \circ ((1_{A'} \otimes f) \otimes f) \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} \circ ((f \otimes 1_A) \otimes 1_A) \circ ((1_{A'} \otimes f) \otimes f) \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ ((f \otimes f) \otimes f) \\
&= \mu' \circ (f^{-1} \otimes f^{-1}) \circ ((\mu \circ (f \otimes f)) \otimes f) \\
&= \mu' \circ (\mu' \otimes 1_{A'}).
\end{aligned}$$

Además, de la definición de η' y μ', por la natualidad de l y la conmutatividad de (2.2), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu' \circ (\eta' \otimes 1_{A'}) &= f^{-1} \circ \mu \circ (f \otimes f) \circ (f^{-1} \otimes 1_{A'}) \circ (\eta \otimes 1_{A'}) \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (1_A \otimes f) \circ (\eta \otimes 1_{A'}) \\
&= f^{-1} \circ \mu \circ (\eta \otimes 1_A) \circ (1_e \otimes f) \\
&= f^{-1} \circ l_A \circ (1_e \otimes f) = l_{A'}.
\end{aligned}$$

La conmutatividad del otro diagrama es análoga. Por lo tanto (A', μ', η') es un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ □

Proposición 2.4. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ un funtor monoidal entre categorías monoidales. Entonces (F, J) manda monoides en monoides.*

Demostración. Sea (A, μ, η) es un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, se define

$$\mu' : F(A) \otimes F(A) \to F(A) \text{ y } \eta' : e' \to F(A)$$

como $\mu' := F(\mu) \circ J_{A,A}$ y $\eta' := F(\eta) \circ \varphi$, donde $\varphi : e' \to F(e)$ es el isomorfismo dado por ser (F, J) funtor monoidal. Se verá que $(F(A), \mu', \eta')$ cumple el axioma de asociatividad. Usando la definición de μ', la naturalidad de J y el hecho de que (F, J) es funtor monoidal, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\mu' \circ (1_{F(A)} \otimes' \mu') \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(A)} \\
&= F(\mu) \circ J_{A,A} \circ (1_{F(A)} \otimes' F(\mu)) \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{A,A}) \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(A)} \\
&= F(\mu) \circ F(1_A \otimes \mu) \circ J_{A,A\otimes A} \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{A,A}) \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(A)} \\
&= F(\mu) \circ F(1_A \otimes \mu) \circ F(\alpha_{A,A,A}) \circ J_{A\otimes A,A} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A}) \circ J_{A\otimes A,A} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ J_{A\otimes A,A} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu) \circ F(\mu \otimes 1_A) \circ J_{A\otimes A,A} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu) \circ J_{A,A} \circ (F(\mu) \otimes' 1_{F(A)}) \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= \mu' \circ (\mu' \otimes' 1_{F(A)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(F(A), \mu', \eta')$ hace conmutar (2.1). Ahora se demostrará que $(F(A), \mu', \eta')$ cumple el axioma de unidad a izquierda. Usando las de definiciones de μ' y η', la naturalidad de J y la Proposición 1.15, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu' \circ (\eta' \otimes 1_{F(A)}) &= F(\mu) \circ J_{A,A} \circ (F(\eta) \otimes' 1_{F(A)}) \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu) \circ F(\eta \otimes 1_A) \circ J_{e,A} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(\mu \circ (\eta \otimes 1_A)) \circ J_{e,A} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(l_A) \circ J_{e,A} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= l'_{F(A)} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)})^{-1} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(A)}) = l'_{F(A)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(F(A), \mu', \eta')$ cumple con el axioma de unidad a izquierda, análogamente se demuestra que cumple con el axioma de unidad a derecha. En consecuencia $(F(A), \mu', \eta')$ es un monoide. □

Corolario 2.5. *Sea* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *un funtor monoidal entre categorías monoidales. Entonces* (F, J) *manda morfismos de monoides en morfismos de monoides.*

Demostración. Sea $f : A_1 \to A_2$ un morfismo de monoides. De la Proposición 2.4 se sabe que $(F(A_i), \mu'_i, \eta'_i)$ es monoide para $i = 1, 2$, donde $\mu'_i := F(\mu_i) \circ J_{A_i,A_i}$ y $\eta'_i := F(\eta_i) \circ \varphi$. Se verá que $F(f) : F(A_1) \to F(A_2)$ es morfismo de monoides. De la definición de μ'_i, el hecho de que f es morfismo de monoides y la naturalidad de J, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(f) \circ \mu_1' &= F(f) \circ F(\mu_1) \circ J_{A_1,A_1} \\ &= F(\mu_2) \circ F(f \otimes f) \circ J_{A_1,A_1} \\ &= F(\mu_2) \circ J_{A_2,A_2} \circ (F(f) \otimes' F(f)) \\ &= \mu_2' \circ (F(f) \otimes' F(f)). \end{aligned}$$

Y, de la definición de η_i y el hecho de que f es morfismo de monoides, se tiene lo siguiente:

$$F(f) \circ \eta_1' = F(f) \circ F(\eta_1) \circ \varphi = F(\eta_2) \circ \varphi = \eta_2'.$$

Por lo tanto $F(f)$ es morfismo de monoides. □

Notación 2.6. Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ un funtor monoidal y $f : A_1 \to A_2$ un morfismo de monoides en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Se denotará por $(F, J)(A_1, \mu_1, \eta_1)$ al monoide en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ que se obtiene de la Proposición 2.4 y por $(F, J)(f) := F(f)$ al morfismo de monoides que se obtiene del Corolario 2.5.

Proposición 2.7. *Sean* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *y* $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *funtores monoidales, tales que* $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ *y* $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ *como funtores monoidales. Entonces, para todo monoide* (A, μ, η) *en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, $(\overline{F} \circ F, \overline{J} \circ J)(A, \mu, \eta)$ *es isomorfo (como monoides) a* (A, μ, η).

Demostración. Se sabe que $\rho_A : \overline{F}F(A) \to A$ es un isomorfismo, resta ver que sea morfismo de monoides. Se denotará por $(F(A), \mu', \eta')$ al monoide $(F, J)(A, \mu, \eta)$ y $(\overline{F}F(A), \overline{\mu}, \overline{\eta})$ al monoide $(\overline{F} \circ F, \overline{J} \circ J)(A, \mu, \eta)$. De la definición de $\overline{\mu}$, la naturalida de ρ y que ρ hace conmutar (1.11), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \overline{\mu} &= \overline{F}F(\mu) \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A),} \\ &= \rho_A^{-1} \circ \mu \circ \rho_{A \otimes A} \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A),} \\ &= \rho_A^{-1} \circ \mu \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \end{aligned}$$

También, de la definición de $\overline{\eta}$, la nauralidad ρ y el Corolario 1.20, se siguen las siguientes ecuaciones:

$$\overline{\eta} = \overline{F}F(\eta) \circ \overline{F}(\varphi) \circ \overline{\varphi} = \rho_A^{-1} \circ \eta \circ \rho_e \circ \overline{F}(\varphi) \circ \overline{\varphi} = \rho_A^{-1} \circ \eta.$$

En consecuencia:

$$\rho_A \circ \overline{\mu} = \mu \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \text{ y } \rho_A \circ \overline{\eta} = \eta.$$

Por lo tanto $\rho_A : \overline{F}F(A) \to A$ es un isomorfismo de monoides. □

Proposición 2.8. *Sea* $(F,J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *una equivalencia de categorías monoidales. Entonces las categorías* $Mon(\mathcal{C})$ *y* $Mon(\mathcal{C}')$ *son equivalentes.*

Demostración. Considérese la siguiente asignación entre las categorías $Mon(\mathcal{C})$ y $Mon(\mathcal{C}')$:

- $(A, \mu, \eta) \mapsto (F,J)(A, \mu, \eta)$, para todo monoide (A, μ, η) en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$;
- $f \mapsto (F,J)(f)$, para todo morfismo de monoides $f : A_1 \to A_2$ en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$.

Es rutina checar que esta asignación define un funtor $F' : Mon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C}')$. Se demostrará que F' es una equivalencia de categorías:

(a) Sea $h : F'(A_1, \mu_1, \eta_1) \to F'(A_2, \mu_2, \eta_2)$ un morfismo de monoides en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$. Como F es pleno, existe un morfismo $f : A_1 \to A_2 \in \mathcal{C}$ tal que $F'(f) = F(f) = h$. Resta demostrar que f es morfismo de monoides. De la definición de f, el hecho de que h es morfismo de monoides y la naturalidad de J, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(f \circ \mu_1) &= h \circ F(\mu_1) \\ &= h \circ F(\mu_1) \circ J_{A_1,A_1} \circ J^{-1}_{A_1,A_1} \\ &= F(\mu_2) \circ J_{A_2,A_2} \circ (h \otimes h) \circ J^{-1}_{A_1,A_1} \\ &= F(\mu_2) \circ (h \otimes h) = F(\mu_2) \circ (f \otimes f)). \end{aligned}$$

Y como F es fiel, se sigue que $f \circ \mu_1 = \mu_2 \circ (f \otimes f)$. Además, de la definición de f y el hecho de que h es morfismo de monoides, se tiene:

$$F(f \circ \eta_1) = h \circ F(\eta_1) \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = F(\eta_2).$$

Y como F es fiel, se obtiene $f \circ \eta_1 = \eta_2$. Por lo tanto f es morfismo de monoides; y entonces F' es pleno.

(b) Sean $f, g : A_1 \to A_2$ morfismo de monoides tales que $F'(f) = F'(g)$. Por lo tanto $F(f) = F'(f) = F'(g) = F(g)$; y como F es fiel, $f = g$. En consecuencia F' es fiel.

(c) Sea (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$. Por la Proposición 1.21 existe una equivalencia de categorías monoidales

$$(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$$

tal que, $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Y de la Proposición 2.7 se obtiene que $(F \circ \overline{F}, J \circ \overline{J})(A, \mu, \eta) \simeq (A, \mu, \eta)$. En consecuencia F' es denso.

Así, de (a), (b) y (c), se concluye que F' es una equivalencia de categorías. $\square$

Corolario 2.9. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal. Entonces existe una categoría monoidal severa $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$, tal que $Mon(\mathcal{C})$ es equivalente a $Mon(\mathcal{C}')$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.33 y la Proposición 2.8. $\square$

Definición 2.10. (a) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Un A-***módulo a izquierda*** en $(\mathcal{C}$ es una pareja (M, p), donde $M \in \mathcal{C}$ es un objeto y $p : A \otimes M \to M$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes M \arrow[rr, "\alpha_{A,A,M}"] \arrow[d, "\mu \otimes 1_M"'] & & A \otimes (A \otimes M) \arrow[d, "1_A \otimes p"] \\
A \otimes M \arrow[dr, "p"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "p"] \\
& M &
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd}
e \otimes M \arrow[r, "l_M"] \arrow[d, "\eta \otimes 1_M"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\
A \otimes M \arrow[r, "p"'] & M
\end{tikzcd}. \tag{2.4}$$

De manera análoga se definen los A-***módulos a derecha*** en $\mathcal{C}$.

(b) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y (A_1, μ_1, η_1), (A_2, μ_2, η_2) monoides en $\mathcal{C}$. Un A_1-A_2-***bimódulo*** en $\mathcal{C}$ es una tercia (M, p_1, p_2), donde $M \in \mathcal{C}$, $p_1 : A_1 \otimes M \to M$ y $p_2 : M \otimes A_2 \to M$ son morfismos en $\mathcal{C}$, de manera que (M, p_1) es un A_1-módulo a izquierda y (M, p_2) es un A_2-módulo a derecha. Además el siguiente diagrama debe conmutar:

$$\begin{tikzcd}
(A_1 \otimes M) \otimes A_2 \arrow[r, "\alpha_{A_1,M,A_2}"] \arrow[d, "p_1 \otimes 1_{A_2}"'] & A_1 \otimes (M \otimes A_2) \arrow[r, "1_{A_1} \otimes p_2"] & A_1 \otimes M \arrow[d, "p_1"] \\
M \otimes A_2 \arrow[rr, "p_2"'] & & M
\end{tikzcd}. \tag{2.5}$$

(c) Sean (M, p) y (M', p') A-módulos a izquierda en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Un morfismo $f : M \to M' \in \mathcal{C}$ es un ***morfismo de*** A-***módulos a izquierda*** si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "1_A \otimes f"] \arrow[d, "p"'] & A \otimes M' \arrow[d, "p'"] \\
M \arrow[r, "f"'] & M'
\end{tikzcd}. \tag{2.6}$$

De manera análoga se definen los ***morfismos de A-módulos a derecha***.

(d) Sean (M, p_1, p_2) y (M', p'_1, p'_2) A_1-A_2-bimódulos en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Un morfismo $f : M \to M'$ es un ***morfismo de A_1-A_2-bimódulos*** si f es un morfismo de A_1-módulos a izquierda y A_2-módulos a derecha.

Observación 2.11. Todo monoide (A, μ, η) es un A-módulo izquierdo (derecho) y un A-A-bimódulo.

Proposición 2.12. *Sean (A, μ, η), (A', μ', η') monoides en una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, $f : A' \to A$ un morfismo de monoides y (M, p) un A-módulo a izquierda (derecha) en $\mathcal{C}$. Entonces se puede dar estructura de A'-módulo a izquierda (derecha) a M.*

Demostración. Considérese la siguiente composición de morfismos en $\mathcal{C}$, $p' := p \circ (f \otimes 1_M) : A' \otimes M \to M$. Se demostrará que (M, p') es un A'-módulo a izquierda. De la definición de p', la naturalidad de α, que (M, p) hace conmutar (2.3) y que f es morfismo de monoides, se sigue:

$$\begin{aligned} p' \circ (1_{A'} \otimes p') \circ \alpha_{A',A',M} &= p \circ (f \otimes 1_M) \circ (1_{A'} \otimes p) \circ (1_{A'} \otimes (f \otimes 1_M)) \circ \alpha_{A',A',M} \\ &= p \circ (1_A \otimes p) \circ (f \otimes 1_{A \otimes M}) \circ \alpha_{A',A,M} \circ ((1_{A'} \otimes f) \otimes 1_M) \\ &= p \circ (1_A \otimes p) \circ \alpha_{A,A,M} \circ ((f \otimes 1_A) \otimes 1_M) \circ ((1_{A'} \otimes f) \otimes 1_M) \\ &= p \circ (\mu \otimes 1_M) \circ ((f \otimes f) \otimes 1_M) \\ &= p \otimes ((f \circ \mu') \otimes 1_M) = p \circ (f \otimes 1_M) \circ (\mu' \otimes 1_M) \\ &= p' \circ (\mu' \otimes 1_M). \end{aligned}$$

También, de la definición de p' y que f es morfismo de monoides, se siguen las siguientes igualdades:

$$p' \circ (\eta' \otimes 1_M) = p \circ (f \otimes 1_M) \circ (\eta' \otimes 1_M) = p \circ (\eta \otimes 1_M) = l_M.$$

Por lo tanto (M, p') es un A'-módulo a izquierda en $\mathcal{C}$. Análogamente se demuestra la Proposición para A-módulos a derecha. ☐

Corolario 2.13. *Sea (M, p_1, p_2) un A-A-bimódulo y $f : A' \to A$ un morfismo de monoides. Entonces se puede dar una estructura de A'-A'-bimódulo a M.*

Demostración. De la Proposición 2.12 se tien que (M, p'_1) es un A-módulo izquierdo y (M, p'_2) es un A-módulo derecho, con $p'_1 := p_1 \circ (f \otimes 1_M)$ y $p'_2 := p_2 \circ (1_M \otimes f)$. Se demostrará que (M, p'_1, p'_2) hace conmutar (2.5). Usando las definiciones de p'_1, p'_2, la naturalidad de α y que (M, p_1, p_2) hace conmutar (2.5), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} p'_1 \circ (1_{A'} \otimes p'_2) \circ \alpha_{A',M,A'} &= p_1 \circ (f \otimes 1_M) \circ (1_{A'} \otimes p_2) \circ (1_{A'} \otimes p_2) \circ (1'_A \otimes (1_M \otimes f)) \circ \alpha_{A',M,A'} \\ &= p_1 \circ (1_A \otimes p_2) \circ (f \otimes 1_{M \otimes A}) \circ \alpha_{A',M,A} \circ ((1_{A'} \otimes 1_M) \otimes f) \\ &= p_1 \circ (1_A \otimes p_2) \circ \alpha_{A,M,A} \circ ((f \otimes 1_M) \otimes 1_A) \circ ((1_{A'} \otimes 1_M) \otimes f) \\ &= p_2 \circ (p_1 \otimes 1_A) \circ ((f \otimes 1_M) \otimes f) \\ &= p_2 \circ (p'_1 \otimes f) = p_2 \circ (1_M \otimes f) \circ (p'_1 \otimes 1_{A'}) \\ &= p'_2 \circ (p'_1 \otimes 1_{A'}. \end{aligned}$$

En consecuencia (M, p_1', p_2') es un A'-A'-bimódulo. $\square$

Proposición 2.14. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ un funtor monoidal y (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Entonces (F, J) manda A-módulos a izquierda (derecha) a $F(A)$-módulos a izquierda (derecha).*

Demostración. Sea (M, p) un A-módulo a izquierda en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. De la Proposición 2.4 se sabe que $(F(A), \mu', \eta')$ es un monoide en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$, por lo tanto, se define $p' : F(A) \otimes' F(M) \to F(M)$ como $p' := F(p) \circ J_{A,M}$. Se afirma que $(F(M), p')$ es un $F(A)$-módulo a izquierda en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$. En efecto, usando la definición de p', la naturalidad de J, el axioma de estructura monoidal para (F, J), el hecho de que (M, p) es un A-módulo a izquierda y la definición de μ', se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
&p' \circ (1_{F(A)} \otimes' p') \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(M)} \\
&= F(p) \circ J_{A,M} \circ (1_{F(A)} \otimes' F(p)) \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{A,M}) \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(M)} \\
&= F(p) \circ F(1_A \otimes p) \circ J_{A,A\otimes M} \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{A,M}) \circ \alpha'_{F(A),F(A),F(M)} \\
&= F(p \circ (1_A \otimes p)) \circ F(\alpha_{A,A,M}) \circ J_{A\otimes A,M} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(M)}) \\
&= F(p \circ (1_A \otimes p) \circ \alpha_{A,A,M}) \circ J_{A\otimes A,M} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(M)}) \\
&= F(p) \circ F(\mu \otimes 1_M) \circ J_{A\otimes A,M} \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(M)}) \\
&= F(p) \circ J_{A,M} \circ (F(\mu) \otimes' 1_{F(M)}) \circ (J_{A,A} \otimes' 1_{F(M)}) = p' \circ (\mu' \otimes' 1_{F(M)})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(F(M), p')$ hace conmutar (2.3). Además, con las definiciones de p' y η', la naturalidad de J, la Proposición 1.15 y el hecho de que (M, p) es un A-módulo a izquierda, obtemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
p' \circ (\eta' \otimes' 1_{F(M)}) &= F(p) \circ J_{A,M} \circ (F(\eta) \otimes' 1_{F(M)}) \circ (\varphi \otimes' 1_{F(M)}) \\
&= F(p) \circ F(\eta \otimes 1_M) \circ J_{e,M} \circ (\varphi \otimes' 1_{F(M)}) \\
&= F(p \circ (\eta \otimes 1_M)) \circ F(l_M)^{-1} \circ l'_{F(M)} \\
&= F(l_M) \circ F(l_M)^{-1} \circ l'_{F(M)} = l'_{F(M)}
\end{aligned}$$

En consencuencia $(F(M), p')$ hace conmutar (2.4). De donde se obtiene que $(F(M), p')$ es un A-módulo a izquierda. Análogamente se demuestra el caso para A-módulos a derecha. $\square$

Corolario 2.15. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ un funtor monoidal y (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Entonces (F, J) manda A-A-bimódulos $F(A)$-$F(A)$-bimódulos.*

Demostración. Sea (M, p_1, p_2) un A-A-bimódulo en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. De la Proposición 2.12 se sabe que $(F(M), p_1')$ es un $F(A)$-módulo izquierdo y (M, p_2') es un $F(A)$-módulo derecho, con $p_1' := F(p_1) \circ J_{A,M}$ y $p_2' := F(p_2) \circ J_{M,A}$.

De las definiciones de p'_1 y p'_2, la naturalidad de J y el axioma de estructura monoidal, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&p'_1 \circ (1_{F(A)} \otimes' p'_2) \circ \alpha'_{F(A),F(M),F(A)} \\
&= F(p_1) \circ J_{A,M} \circ (1_{F(A)} \otimes' F(p_2) \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{M,A}) \circ \alpha'_{F(A),F(M),F(A)} \\
&= F(p_1) \circ F(1_A \otimes p_2) \circ J_{A,M\otimes A} \circ (1_{F(A)} \otimes' J_{M,A}) \circ \alpha'_{F(A),F(M),F(A)} \\
&= F(p_1) \circ F(1_A \otimes p_2) \circ F(\alpha_{A,M,A}) \circ J_{A\otimes M,A} \circ (J_{A,M} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(p_2 \otimes (p_1 \otimes 1_A)) \circ J_{A\otimes M,A} \circ (J_{A,M} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= F(p_2) \circ J_{M,A} \circ (F(p_1) \otimes' 1_{F(A)}) \circ (J_{A,M} \otimes' 1_{F(A)}) \\
&= p'_2 \circ (p'_1 \otimes' 1_{F(A)}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(F(M), p'_1, p'_2)$ es un $F(A)$-$F(A)$-bimódulo. □

Notación 2.16. Sea, $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ un funtor monoidal, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y (M, p) un A-módulo a izquierda (derecha). Se denotará por $(F, J)(M, p)$ al $F(A)$-módulo a izquierda (derecha) que se obtiene de la Proposición 2.14. De manera análoga, para todo A-A-bimódulo en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, se denotará por $(F, J)(M, p_1, p_2)$ al $F(A)$-$F(A)$-bimódulo que se obtiene del Corolario 2.15.

Proposición 2.17. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ y $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ funtores monoidales, tales que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ como funtores monoidales. Entonces, para todo A-módulo a izquierda (derecha) (M, p), $(\overline{F} \circ F, \overline{J} \circ J)(M, p)$ es isomorfo como A-módulos a izquierda (derecha) a (M, p).*

Demostración. Por la Proposición 2.14 $(\overline{F}F(M), p')$ es un $\overline{F}F(A)$-módulo a izquierda, donde $p' := \overline{F}F(p) \circ \overline{F}(J_{A,M}) \circ \overline{J}_{F(A),F(M)}$. Además, como $\rho_A : \overline{F}F(A) \to A$ es un isomorfismo, la Proposición 2.12 nos da que $(\overline{F}F(M), \overline{p})$ es un A-módulo a izquierda con $\overline{p} := p' \otimes (\rho_A^{-1} \otimes 1_{\overline{F}F(M)})$. Se demostrará que el isomorfismo $\rho_M : \overline{F}F(M) \to M$ es un morfismo de A-módulos a izquierda. Usando la definición de $\overline{p}$ y p', la naturalidad de ρ y el hecho de que ρ hace conmutar (1.11), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\rho_M \circ \overline{p} &= \rho_M \circ p' \circ (\rho_A^{-1} \otimes 1_{\overline{F}F(M)}) \\
&= \rho_M \circ \overline{F}F(p) \circ \overline{F}(J_{A,M}) \circ \overline{J}_{F(A),F(M)} \circ (\rho_A^{-1} \otimes 1_{\overline{F}F(M)}) \\
&= p \circ \rho_{A\otimes M} \circ \overline{F}(J_{A,M}) \circ \overline{J}_{F(A),F(M)} \circ (\rho_A^{-1} \otimes 1_{\overline{F}F(M)}) \\
&= p \circ (\rho_A \otimes \rho_M) \circ (\rho_A^{-1} \otimes 1_{\overline{F}F(M)}) = p \circ (1_A \otimes \rho_M).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\rho_M : \overline{F}F(M) \to M$ es un isomorfismo de A-módulos a izquierda. Análogamente se demuestra la Proposición para A-módulos a derecha. □

Corolario 2.18. *Sean* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *y* $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *funtores monoidales, tales que* $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ *y* $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ *como funtores monoidales. Entonces, para todo A-A-bimódulo* (M, p_1, p_2), $(\overline{F} \circ F, \overline{J} \circ J)(M, p_1, p_2)$ *es isomorfo como A-A-bimódulos a* (M, p_1, p_2).

Demostración. Se sigue directamente de Corolario 2.15 y la Proposición 2.17. □

Definición 2.19. (a) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y (A, μ, η) un monoide en $\mathcal{C}$. Un ***ideal a izquierda*** en A es un A-módulo a izquierda (I, ι) junto con un monomorfismo de A-módulos a izquierda $\theta : (I, \iota) \hookrightarrow (A, \mu)$. La definición de ***ideal a derecha*** en A es análoga.

(b) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal y (A, μ, η) un monoide en $\mathcal{C}$. Un ***ideal bilateral*** en A es un A-A-bimódulo (I, ι_L, ι_R) junto con un monomorfismo de A-A-bimódulos $\theta : (I, \iota_L, \iota_R) \hookrightarrow (A, \mu, \mu)$.

Proposición 2.20. *Sean* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *una categoría monoidal abeliana,* (A_1, μ_1, η_1) *y* (A_2, μ_2, η_2) *monoides en* $\mathcal{C}$, *y* $f : A_1 \to A_2 \in \mathcal{C}$ *un morfismo de monoides. Entonces* $\mathrm{Nuc}(f)$ *es un ideal bilateral en* A_1.

Demostración. Considérese los siguientes morfismos:

$$\mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f) : A_1 \otimes \mathrm{Nuc}(f) \to A_1 \text{ y } \mu_1 \circ (i_f \otimes 1_{A_1}) : \mathrm{Nuc}(f) \otimes A_1 \to A_1.$$

Como f es morfismo de monoides, se tienen las siguientes igualdades:

$$f \circ \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f) = \mu_2 \circ (f \otimes f) \circ (1_{A_1} \otimes i_f) = \mu_2 \circ (f \otimes 0) = 0.$$

Por lo tanto, de la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\iota_L : A_1 \otimes \mathrm{Nuc}(f) \to \mathrm{Nuc}(f)$ tal que $i_f \circ \iota_L = \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f)$. De manera análoga, existe un único morfismo $\iota_R : \mathrm{Nuc}(f) \otimes A_1 \to \mathrm{Nuc}(f)$, tal que $i_f \circ \iota_R = \mu_1 \circ (i_f \otimes 1_{A_1})$. Además, la definición de ι_L, la naturalidad de α y la conmutatividad de (2.1), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
i_f \circ \iota_L \circ (1_{A_1} \otimes \iota_L) \circ \alpha_{A_1, A_1, \mathrm{Nuc}(f)} &= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes (i_f \circ \iota_L)) \circ \alpha_{A_1, A_1, \mathrm{Nuc}(f)} \\
&= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes \mu_1) \circ (1_{A_1} \otimes (1_{A_1} \otimes i_f)) \circ \alpha_{A_1, A_1 \, \mathrm{Nuc}(f)} \\
&= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes \mu_1) \circ \alpha_{A_1, A_1, A_1} \circ (1_{A \otimes A} \otimes i_f) \\
&= \mu_1 \circ (\mu_1 \otimes 1_{A_1}) \circ (1_{A \otimes A} \otimes i_f) \\
&= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f) \circ (\mu_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}) \\
&= i_f \circ \iota_L \circ (\mu_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}).
\end{aligned}$$

Y como i_f es un monomorfismo, se obtiene que

$$\iota_L \circ (1_{A_1} \otimes \iota_L) \circ \alpha_{A_1, A_1, \mathrm{Nuc}(f)} = \iota_L \circ (\mu_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}).$$

Ahora, de la definición de ι_L, la conmutatividad de (2.2) y la naturalidad de l, se siguen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} i_f \circ \iota_L \circ (\eta_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}) &= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f) \circ (\eta_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}) \\ &= \mu_1 \circ (\eta_1 \otimes 1_{A_1}) \circ (1_e \otimes i_f) \\ &= l_{A_1} \circ (1_e \otimes i_f) = i_f \circ l_{\mathrm{Nuc}(f)}. \end{aligned}$$

Y como i_f es monomorfismo, se sigue que $\iota_L \circ (\eta_1 \otimes 1_{\mathrm{Nuc}(f)}) = l_{\mathrm{Nuc}(f)}$. En consecuencia $(\mathrm{Nuc}(f), \iota_L)$ es un A_1-módulo a izquierda. Análogamente se demuestra que $(\mathrm{Nuc}(f), \iota_R)$ es un A_1-módulo a derecha. Ahora se demostrará que el diagrama (2.5) conmuta.

$$\begin{aligned} i_f \circ \iota_L \circ (1_{A_1} \otimes \iota_R) \circ \alpha_{A_1,\mathrm{Nuc}(f),A_1} &= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes i_f) \circ (1_{A_1} \otimes \iota_R) \circ \alpha_{A_1,\mathrm{Nuc}(f),A_1} \\ &= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes (\mu_1 \circ (i_f \otimes 1_{A_1}))) \circ \alpha_{A_1,\mathrm{Nuc}(f),A_1} \\ &= \mu_1 \circ (1_{A_1} \otimes \mu_1) \circ \alpha_{A_1,A_1,A_1} \circ ((1_{A_1} \otimes i_f) \otimes 1_{A_1}) \\ &= \mu_1 \circ (\mu_1 \otimes 1_{A_1}) \circ ((1_{A_1} \otimes i_f) \otimes 1_{A_1}) \\ &= \mu_1 \circ (i_f \otimes 1_{A_1}) \circ (\iota_L \otimes 1_{A_1}) \\ &= i_f \circ \iota_R \circ (\iota_L \otimes 1_{A_1}). \end{aligned}$$

Y como i_f es monomorfismo, se sigue que

$$\iota_L \circ (1_{A_1} \otimes \iota_R) \circ \alpha_{A_1,\mathrm{Nuc}(f),A_1} = \iota_R \circ (\iota_L \otimes 1_{A_1}).$$

Por lo tanto $(\mathrm{Nuc}(f), \iota_L, \iota_R)$ es un ideal bilateral en A_1, con $\theta := i_f$. □

Proposición 2.21. *Sean* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *un funtor monoidal que preserva monomorfismos y* (A, μ, η) *un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. *Entonces* (F, J) *manda ideales a izquierda (derecha) en* A *a ideales a izquierda (derecha) en* $F(A)$.

Demostración. Sea (I, ι) un ideal a izquierda en A, con $\theta : I \hookrightarrow A$ el monomorfismo dado de la definición. Por la Proposición 2.14, se tiene que $(F, J)(I, \iota) = (F(I), \iota')$ es un A-módulo a izquierda, con $\iota' := F(\iota) \circ J_{A,I}$; y de la Proposición 2.4 se sigue que $(F(A), \mu', \eta')$ es un monoide con $\mu' := F(\mu) \circ J_{A,A}$ y $\eta' := F(\eta) \circ \varphi$. De las hipótesis se sabe que $F(\theta) : F(I) \hookrightarrow F(A)$ es un monomorfismo, por lo que se demostrará que $F(\theta)$ es morfismo de $F(A)$-módulos a izquierda. Usando las definiciones de ι' y μ', que θ es morfismo de A-módulos a izquierda y la naturalidad de J, se tiene las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(\theta) \circ \iota' &= F(\theta) \circ F(\iota) \circ J_{A,I} \\ &= F(\theta \circ \iota) \circ J_{A,I} \\ &= F(\mu) \circ F(1_A \otimes \theta) \circ J_{A,I} \\ &= F(\mu) \circ J_{A,A} \circ (1_{F(A)} \otimes' F(\theta)) \\ &= \mu' \circ (1_{F(A)} \otimes' F(\theta)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(F(I), \iota')$ es un ideal a izquierda en $F(A)$. Análogamente se demuestra el resultado para ideales a derecha en A. □

Corolario 2.22. *Sean* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *un funtor monoidal que preserva monomorfismos y* (A, μ, η) *un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$*. Entonces* (F, J) *manda ideales bilaterales en* A *a ideales bilaterales en* $F(A)$*.*

Demostración. Es consecuencia del Corolario 2.15 y la Proposición 2.21. □

Observación 2.23. Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ y $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ funtores monoidales, tales que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ como funtores monoidales e (I, ι) un ideal izquierdo (derecho) en un monoide (A, μ, η). Usando la Proposición 2.17 y su notación, se tiene que $(\overline{F}F(I), \bar{\iota}) \simeq (I, \iota)$ como A-módulos a izquierda (derecha) en A. Además $(\overline{F}F(I), \bar{\iota})$ es un ideal izquierdo (derecho) en A con el monomorfismo

$$\overline{F}F(I) \xrightarrow{\rho_I} I \xrightarrow{\theta} A.$$

Lo mismo sucede con ideales bilaterales.

Se recordará la definición de ***intersección*** arbitraria de subobjetos.

Definición 2.24. Sean $\mathcal{C}$ una categoría, $A \in \mathcal{C}$ y $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i \in I}$ una familia de subobjetos de A. Se dice que $\mu : A' \to A$ es una ***intersección*** de dicha familia si las siguientes condiciones se satisfacen:

(a) Para toda $i \in I$ existe $\nu_i : A' \to A_i \in \mathcal{C}$, tal que $\mu_i \circ \nu_i = \mu$;

(b) ***Propiedad Universal***. Si $\theta : B \to A \in \mathcal{C}$ y una familia de morfismos $\{\eta_i : B \to A_i\}_{i \in I}$ satisfacen que $\mu_i \circ \eta_i = \theta$ para toda $i \in I$, entonces existe un único morfismo $\eta : B \to A$ tal que $\mu \circ \eta = \theta$.

Observación 2.25. Sea $\mu : A' \to A$ una intersección de $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i \in I}$. Se puede demostrar que μ es un monomorfismo.

Proposición 2.26. *Sean* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *una categoría monoidal,* (A, μ, η) *un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *y* $\{(I_j, \iota_j)\}_{j \in J}$ *una familia de ideales a izquierda (derecha) en* A*. Entonces la intersección de la familia* $\{(I_j, \iota_j)\}_{j \in J}$ *(si existe) es un ideal a izquierda (derecha) en* A*.*

Demostración. Como cada (I_j, ι_j) es un ideal izquierda en A, existe un monomorfismo de A-módulos a izquierda $\theta_j : (I_j, \iota_j) \hookrightarrow (A, \mu)$. Supongase que existe la intersección de los subobjetos $\{(I_j, \theta_j)\}_{j \in J}$, denotada por $(I, \theta) := \cap_{j \in J}(I_j, \theta_j)$, entonces existen morfismos $\nu_j : I \to I_j$ tales que $\theta_j \circ \nu_j = \theta\ \forall j \in J$.

Considérese la siguiente composición de morfismos:

$$\varphi := \mu \circ (1_A \otimes \theta) : A \otimes I \to A \text{ y } \sigma_j := \iota_j \circ (1_A \otimes \nu_j) : A \otimes I \to I_j.$$

Usando las definiciones de los morfismos anteriores y el hecho de que θ_j es monomorfismo de ideales a izquierda en A, se obtienen las siguientes igualdades para todo $j \in J$:

$$\begin{aligned}\theta_j \circ \sigma_j &= \theta_j \circ \iota_j \circ (1_A \otimes \nu_j)\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \theta_j) \circ (1_A \otimes \nu_j)\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \theta) = \varphi\end{aligned}$$

Y por la propiedad universal de la intersección existe un único morfismo $\iota : A \otimes I \to I \in \mathcal{C}$ tal que $\theta \circ \iota = \varphi$. Se demostrará que (I, ι) es un ideal a izquierda de A, para ello se hará uso de la propiedad universal de la intersección. Pare demostrar que (I, ι) hace conmutar (2.3) considérese la siguiente familia de morfismos $\{\gamma_j := \iota_j \circ (1_A \otimes \sigma_j) \circ \alpha_{A,A,I}\}_{j\in J}$. Usando las definiciones de σ_j, θ, la naturalidad de α, que (I_j, ι_j) hace conmutar (2.3) y el hecho de que θ_j es monomorfismo de A-módulos a izquierda, se tienen las siguientes igualdades para todo $j \in J$:

$$\begin{aligned}\theta_j \circ \gamma_j &= \theta_j \circ \iota_j \circ (1_A \otimes \sigma_j) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \theta_j \circ \iota_j \circ (1_A \otimes \iota_j) \circ (1_A \otimes (1_A \otimes \nu_j)) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \theta_j \circ \iota_j \circ (1_A \otimes \iota_j) \circ \alpha_{A,A,I_j} \circ ((1_A \otimes 1_A) \otimes \nu_j)\\ &= \theta_j \circ \iota_j \circ (\mu \otimes 1_{I_j}) \circ ((1_A \otimes 1_A) \otimes \nu_j)\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \theta_j) \circ (\mu \otimes \nu_j) = \mu \circ (\mu \otimes \theta).\end{aligned}$$

Ahora, de la definición de φ, de la naturalidad de α y el hecho de que que (A, μ) hace conmutar (2.1), se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\theta \circ (\iota \circ (1_A \otimes \iota) \circ \alpha_{A,A,I}) &= \varphi \circ (1_A \otimes \iota) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \theta) \circ (1_A \otimes \iota) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \varphi) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ (1_A \otimes (1_A \otimes \theta)) \circ \alpha_{A,A,I}\\ &= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} \circ ((1_A \otimes 1_A) \otimes \theta)\\ &= \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ ((1_A \otimes 1_A) \otimes \theta) = \mu \circ (\mu \otimes \theta).\end{aligned}$$

También de la definición de φ se tienen las siguientes igualdades:

$$\theta \circ (\iota \circ (\mu \otimes 1_I)) = \varphi \circ (\mu \otimes 1_I) = \mu \circ (1_A \otimes \theta) \circ (\mu \otimes 1_I) = \mu \circ (\mu \otimes \theta).$$

Por lo tanto, de la unicidad de la intersección, se tiene que (I, ι) hace conmutar (2.3); de manera análoga se puede demostrar que (I, ι) hace conmutar (2.4). En consecuencia (I, ι) es un A-módulo a izquierda. Resta demostrar que $\theta : I \hookrightarrow A$ es morfismo de A-módulos a izquierda, pero esto se sigue de las siguientes igualdades:

$$\theta \circ \iota = \varphi = \mu \circ (1_A \otimes \theta).$$

Así (I, ι) es un ideal a izquierda en A. De manera análoga se demuestra la proposición para ideales a derecha en A. $\square$

Corolario 2.27. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y $\left\{(I_j, \iota_j^1, \iota_j^2)\right\}_{j\in J}$ una familia de ideales biláterales en A. Entonces la intersección de la familia $\left\{(I_j, \iota_j^1, \iota_j^2)\right\}_{j\in J}$ (si existe) es un ideal bilateral en A.*

Demostración. Por la Proposición 2.26 se sabe que existe un objeto $I \in \mathcal{C}$ y morfismos $\iota^1 : A \otimes I \to I$, $\iota^2 : I \otimes A \to I$ y $\theta : I \hookrightarrow A$, de manera que (I, ι^1) es un ideal a izquierda en A y (I, ι^2) es un ideal a derecha en A. Para lo siguiente usaremos la notación de la Proposición 2.26. Considérese el siguiente morfismo para cada $j \in J$, $\psi_j := \nu_j \circ \iota^2 \circ (\iota^1 \otimes 1_A)$. Se tienen las siguientes igualdades para todo $j \in J$:

$$\theta_j \circ \psi_j = \theta_j \circ \nu_j \circ \iota^2 \circ (\iota^1 \otimes 1_A) = \theta \circ \iota^2 \circ (\iota^1 \otimes 1_A).$$

Además, usando la definición de ψ_j, que (A, μ) hace conmutar (2.1), la naturalidad de α y el hecho de que θ es un morfismo de ideales a izquierda y derecha , se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\theta \circ \iota^1 \circ (1_A \otimes \iota^2) \circ \alpha_{A,I,A} &= \mu \circ (1_A \otimes \theta) \circ (1_A \otimes \iota^2)\alpha_{A,I,A} \\
&= \mu \circ (1_A \otimes (\mu \circ (\theta \otimes 1_A)) \circ \alpha_{A,I,A} \\
&= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ (1_A \otimes (\theta \otimes 1_A)) \circ \alpha_{A,I,A} \\
&= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} \circ ((1_A \otimes \theta) \otimes 1_A) \\
&= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ ((1_A \otimes \theta) \otimes 1_A) \\
&= \mu \circ ((\theta \circ \iota^1) \otimes 1_A) \\
&= \mu \circ (\theta \otimes 1_A) \circ (\iota^1 \otimes 1_A) = \theta \circ \iota^2 \circ (\iota^1 \otimes 1_A).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la unicidad de la intersección, se tiene que (I, ι^1, ι^2) hace conmutar (2.5). En consecuencia (I, ι^1, ι^2) es un ideal bilateral. $\square$

Definición 2.28. (a) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal con intersecciones arbitrarias, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y $X \in \mathcal{C}$ un subobjeto de A. Defínase el ***ideal izquierdo (derecho) generado por*** X como la intersección de todos los ideales izquierdos (derechos) en A que tienen como subobjeto a X y que factorizan a la inclusión $X \hookrightarrow A$ a través de la inclusiones de X en los ideales y los ideales en A. Se le denotará por ${}_A\langle X\rangle$ ($\langle X\rangle_A$).

(b) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal con intersecciones arbitrarias, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ y $X \in \mathcal{C}$ un subobjeto de A. Se define el ***ideal generado por*** X como la intersección de todos los ideales biláterales en A que tienen como subobjeto a X y que factorizan a la inclusión $X \hookrightarrow A$ a través de la inclusiones de X en los ideales y los ideales en A. Se le denotará por $\langle X\rangle$.

Proposición 2.29. *Sean* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ *una equivalencia entre categorías monoidales con intersecciones arbitrarias y* (A, μ, η) *un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$*. Entonces* $F_A \langle X \rangle =_{F(A)} \langle F(X) \rangle$*.*

Demostración. Por la Proposición 1.21 existe un funtor monoidal $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ tal que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. De la Proposiciones 2.4, 2.7 y 2.21 se sigue que: $F(A)$ es un monoide, ρ_A es un isomorfismo de monoides y $\overline{F}(I')$ es un ideal izquierdo en A, donde (I', ι) es un ideal izquierdo en $F(A)$. Sean $(I, \Theta) =_A \langle X \rangle$, $\delta : X \hookrightarrow A$, $\vartheta : I' \hookrightarrow F(A)$ y $\nu : F(X) \hookrightarrow I'$, tal que $\vartheta \circ \nu = F(\delta)$. Considérense los siguientes monomorfismos: $\rho_A \circ \overline{F}(\vartheta) : \overline{I'} \hookrightarrow A$ y $\overline{F}(\nu) \circ \rho_X^{-1} : X \hookrightarrow \overline{F}(I')$; de la naturalidad de ρ se cumple lo siguiente:

$$\rho_A \circ \overline{F}(\vartheta) \circ \overline{F}(\nu) \circ \rho_X^{-1} = \rho_A \overline{F} F(\delta) \circ \rho_X^{-1} = \delta.$$

Así, de la definición de intersección, existe un morfismo $\nu' : X \to \overline{F}(I')$ tal que $\rho_A \circ \overline{F}(\vartheta) \circ \nu' = \Theta$. En consecuencia, de la natualidad de θ, se siguen las siguientes igualdades:

$$F(\Theta) = F(\rho_A \circ \overline{F}(\vartheta) \circ \nu') = F(\rho_A) \circ \theta_{F(A)}^{-1} \circ \vartheta \circ \theta_{I'} \circ F(\nu') = \vartheta \circ \circ \theta_{I'} \circ F(\nu').$$

Por lo tanto ϑ factoriza a $F(\Theta)$. Resta demostrar que $(F(I), F(\Theta))$ cumple la propiedad universal de la intersección. Supóngase que existen morfismos $\varrho : B \to F(A)$ y $\eta_i : B \to I_i$, donde (I_i, ι_i) son ideales izquierdos en $F(A)$ que factorizan $F(\delta)$ a través de la inclusión de $F(X)$ en I_i y $\vartheta_i : I_i \hookrightarrow F(A)$, tales que $\vartheta_i \circ \eta_i = \varrho$. Considérese $\rho_A \circ \overline{F}(\varrho) : \overline{F}(B) \to A$; entonces se tiene la siguiente ecuación para toda i:

$$\rho_A \circ \overline{F}(\varrho) = \rho_A \circ \overline{F}(\vartheta_i) \circ \overline{F}(\eta_i).$$

En consecuencia, de la propiedad de la intersección (I, Θ), existe un único morfismo $\eta' : \overline{F}(B) \to I$ tal que $\Theta \circ \eta' = \rho_A \circ \overline{F}(\varrho)$. Defínase $\eta := F(\eta') \circ \theta_B^{-1}$; de la naturalidad de θ se sigue lo siguiente:

$$F(\Theta) \circ \eta = F(\Theta) \circ F(\eta') \circ \theta_B^{-1} = F(\rho_A) \circ F\overline{F}(\varrho) \circ \theta_B^{-1} = F(\rho_A) \circ \theta_{F(A)}^{-1} \circ \varrho \circ \theta_B \circ \theta_B^{-1} = \varrho.$$

La unicidad se sigue de la de η'. En consecuencia $(F(I), F(\Theta))$ es intersección. □

Observación 2.30. Se tiene el mismo resultado de la Proposición 2.29 para ideales derechos e ideales bilaterales.

Proposición 2.31. *Sean* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *una categoría monoidal con intersecciones arbitrarias,* (A, μ, η) *un monoide en* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ *y* $\delta : X \hookrightarrow A \in \mathcal{C}$*. Entonces existe un único monomorfismo* $\gamma : X \hookrightarrow I$ *tal que* $\theta \circ \gamma = \delta$*, donde* ${}_A \langle X \rangle = (I, \iota)$ *y* $\theta : I \hookrightarrow A$*.*

Demostración. Se denotará por $\lambda_i : X \hookrightarrow I_i$ a cada inclusión de X en los ideales izquierdos (I_i, ι_i). De la definición de ${}_A\langle X\rangle$, se tiene que $\theta_i \circ \lambda_i = \delta$. Por la propiedad universal de la intersección, se tiene que existe un único morfismo $\lambda : X \to I$ tal que $\theta \circ \lambda = \delta$. Además, como δ es monomorfimo, se concluye que λ es monomorfismo. □

Observación 2.32. Se tiene el mismo resultado de la Proposición 2.31 para ideales derechos e ideales bilaterales.

2.2. Categorías Monoidales Trenzadas

Definición 2.33. (a) Una categoría monoidal ***trenzada*** es una categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, junto con un isomorfismo natural

$$\beta_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X,$$

tal que los siguientes diagramas conmutan para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\beta_{X,Y\otimes Z}"] & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "\alpha_{Y,Z,X}"] & \\ (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "\alpha_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\beta_{X,Y}\otimes 1_Z"'] & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\ & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[r, "\alpha_{Y,X,Z}"'] & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "1_Y\otimes\beta_{X,Z}"'] & \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "\beta_{X\otimes Y,Z}"] & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\ X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "\alpha^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "1_X\otimes\beta_{Y,Z}"'] & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\ & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{X,Z,Y}"'] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "\beta_{X,Z}\otimes 1_Y"'] & \end{tikzcd}. \tag{2.7}$$

El isomorfismo natural β se le conoce como ***trenza***. Se denotará por $(\mathcal{C}, \beta)$ a una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$, con trenza β.

(b) Una categoría monoidal trenzada $(\mathcal{C}, \beta)$, es ***simétrica*** si

$$\beta_{Y,X} \circ \beta_{X,Y} = 1_{X\otimes Y}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{C}$.

(c) Sea $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría monoidal trenzada. Un monoide (A,μ,η) en $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$ es ***conmutativo***, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[rr, "\beta_{A,A}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "\mu"] \\ & A & \end{tikzcd}.$$

Un morfismo entre monoides conmutativos es un morfismo de los monoides subyacentes.

Notación 2.34. Sea $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría monoidal trenzada. Se denotará por $CMon(\mathcal{C})$ a la categoría de todos los monoides conmutativos en $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$.

Observación 2.35. Sea $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría monoidal trenzada. Se tiene que $Mon(\mathcal{C})$ es una subcategoría plena de $CMon(\mathcal{C})$.

Ejemplos 2.36. (a) Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana monoidal. Por la propiedad universal del producto existe un isomorfismo natural $\beta_{X,Y}: X\otimes Y\to Y\otimes X$ que hace conmutar los diagramas (2.7). En consecuencia $\mathcal{C}$ es una categoría trenzada.

(b) Sea $\mathrm{Mod}(R)$ la categoría de R-módulos, con R un anillo conmutativo con unidad. Por la propiedad universal del producto tensorial existe un isomorfismo natural $\beta_{X,Y}: X\otimes Y\to Y\otimes X$ que hace conmutar los diagramas (2.7). En consecuencia $\mathrm{Mod}(R)$ es una categoría trenzada.

Proposición 2.37. *Sean (A,μ,η) un monoide conmutativo en una categoría trenzada $(\mathcal{C},\beta)$ y $f: A'\to A$ un isomorfismo en $\mathcal{C}$. Entonces (A',μ',η') es un monoide conmutativo en $(\mathcal{C},\beta)$, donde $\mu' := f^{-1}\circ\mu\circ(f\otimes f)$ y $\eta' := f^{-1}\circ\eta$.*

Demostración. De la Proposición 2.3 se sabe que (A',μ',η') es un monoide, resta demostrar que sea conmutativo. De la definición de μ', la naturalidad de β y el hecho de que (A,μ,η) es un monoide conmutativo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu'\circ\beta_{A',A'} &= f^{-1}\circ\mu\circ(f\otimes f)\circ\beta_{A',A'} \\ &= f^{-1}\circ\mu\circ\beta_{A,A}\circ(f\otimes f) \\ &= f^{-1}\circ\mu\circ(f\otimes f) = \mu'. \end{aligned}$$

Por lo tanto (A',μ',η') es un monoide conmutativo. □

Proposición 2.38. *Sea $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría monoidal trenzada. Entonces se tienen las siguientes igualdades para todo $X\in\mathcal{C}$:*

$$r_X\circ\beta_{e,X} = l_X \text{ y } l_X\circ\beta_{X,e} = r_X.$$

Demostración. Usando la Proposición 1.6, los diagramas (2.7), la naturalidad de r y la naturalidad de β, se obtienen las siguientes igualdades para todo $X \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} L_e(r_X \circ \beta_{e,X}) &= (1_e \otimes r_X) \circ (1_e \otimes \beta_{e,X}) \\ &= r_{e\otimes X} \circ \alpha^{-1}_{e,X,e} \circ (1_e \otimes \beta_{e,X}) \\ &= r_{e\otimes X} \circ (\beta^{-1}_{e,X} \otimes 1_e) \circ \alpha^{-1}_{X,e,e} \circ \beta_{e\otimes e,X} \circ \alpha^{-1}_{e,e,X} \\ &= \beta^{-1}_{e,X} \circ r_{X\otimes e} \circ \alpha^{-1}_{X,e,e} \circ \beta_{e\otimes e,X} \circ \alpha^{-1}_{e,e,X} \\ &= \beta^{-1}_{e,X} \circ (1_e \otimes r_e) \circ \beta_{e\otimes e,X} \circ \alpha^{-1}_{e,e,X} \\ &= (\iota \otimes 1_X) \circ \alpha^{-1}_{e,e,X} = L_e(l_X). \end{aligned}$$

Por lo tanto $l_X = r_X \circ \beta_{e,X}$ para todo $X \in \mathcal{C}$. Análogamente se demuestra que $r_X = l_X \circ \beta_{X,e}$ para todo $X \in \mathcal{C}$. □

Corolario 2.39. *Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal trenzada, con trenza β. Entonces se cumplen las siguientes igualdades para todo $X \in \mathcal{C}$:*

$$\beta_{e,X} = \beta^{-1}_{X,e} \text{ y } \beta_{e,e} = 1_{e\otimes e}.$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 2.38. □

Definición 2.40. Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías monoidales trenzadas. Un funtor monoidal (F, J) de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}'$ es ***trenzado***, si el siguiente diagrama es conmutativo para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \otimes' F(Y) \arrow[r, "\beta'_{F(X),F(Y)}"] \arrow[d, "J_{X,Y}"'] & F(Y) \otimes' F(X) \arrow[d, "J_{Y,X}"] \\ F(X \otimes Y) \arrow[r, "F(\beta_{X,Y})"'] & F(Y \otimes X) \end{tikzcd} . \tag{2.8}$$

Una ***equivalencia monoidal trezada*** entre categorías monoidales trenzadas, es un funtor monoidal trenzado, que es también, una equivalencia de categorías.

Proposición 2.41. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ un funtor monoidal trenzado. Entonces (F, J) manda monoides conmutativos en monoides conmutativos.*

Demostración. Sea (A, μ, η) un monoide conmutativo en $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$. Usando la notación y morfismos obtenidos en la Proposición 2.4, así como el hecho de que (F, J) es un funtor monoidal trenzado, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \mu' \circ \beta'_{F(A),F(A)} &= F(\mu) \circ J_{A,A} \circ \beta'_{F(A),F(A)} \\ &= F(\mu) \circ F(\beta_{A,A}) \circ J_{A,A} \\ &= F(\mu) \circ J_{A,A} = \mu'. \end{aligned}$$

En consecuencia $(F(A), \mu', \eta')$ es un monoide conmutativo. □

Proposición 2.42. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ una equivalencia monoidal trenzada. Entonces existe un funtor monoidal trenzado $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta)$ tal que $F \circ \bar{F} \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales.*

Demostración. Por la Proposición 1.21 se sabe que existe una equivalencia de categorías monoidales $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ tal que $F \circ \bar{F} \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Resta demostrar que $(\bar{F}, \bar{J})$ es un funtor monoidal trenzado. Usando que (F, J) hace conmutar (2.8), las naturalidades de β', θ y la definición de $\bar{J}$, se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera $X', Y' \in \mathcal{C}'$:

$$
\begin{aligned}
F(\bar{J}_{Y',X'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}) &= F(\bar{J}_{Y',X'}) \circ F(\beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}) \\
&= \theta^{-1}_{Y' \otimes' X'} \circ (\theta_{Y'} \otimes' \theta_{X'}) \circ J^{-1}_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X')} \circ F(\beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')}) \\
&= \theta^{-1}_{Y' \otimes' X'} \circ (\theta_{Y'} \otimes' \theta_{X'}) \circ \beta'_{F\bar{F}(X),F\bar{F}(Y')} \circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \\
&= \theta^{-1}_{Y' \otimes' X'} \circ \beta'_{X',Y'} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}) \circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \\
&= F\bar{F}(\beta'_{X',Y'}) \circ \theta^{-1}_{X',Y'} \circ (\theta_{X'} \otimes' \theta_{Y'}) \circ J^{-1}_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \\
&= F\bar{F}(\beta'_{X',Y'}) \circ F(\bar{J}_{X',Y'}) = F(\bar{F}(\beta'_{X',Y'}) \circ \bar{J}_{X',Y'}).
\end{aligned}
$$

Como F es fiel, se tiene que $(\bar{F}, \bar{J})$ hace conmutar (2.8); por lo tanto es una equivalencia de categorías monoidales trenzadas. □

Proposición 2.43. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal trenzada, $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ una categoría monoidal y $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ una equivalencia entre categorías monoidales. Entonces se puede definir una trenza β' en $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$, tal que $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ es una equivalencia monoidal trenzada.*

Demostración. Por la Proposición 1.21 se sabe que existe una equivalencia de categorías monoidales $(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ tal que $F \circ \bar{F} \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Para cada $X', Y \in \mathcal{C}'$ considérese la siguiente composición de isomorfismos:

$$
\bar{J}_{Y',X'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{F}(X' \otimes' Y'), \bar{F}(Y' \otimes' X')).
$$

Como $\bar{F}$ es fiel y pleno, existe un único isomorfismo $\beta' : X' \otimes' Y' \to Y' \otimes' X'$ tal que $\bar{F}(\beta'_{X',Y'}) = \bar{J}_{Y',X'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'}$. Se afirma que β' es un isomorfismo natural. En efecto, usando la definición de β', la naturalidad de $\bar{J}$ y el hecho de que (F, J) hace conmutar (2.8), se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera morfismos $X' \xrightarrow{f} X'', Y' \xrightarrow{g} Y'' \in \mathcal{C}'$:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\beta'_{X'',Y''} \circ (f \otimes' g)) &= \bar{F}(\beta'_{X'',Y''}) \circ \bar{F}(f \otimes' g) \\
&= \bar{J}_{Y'',X''} \circ \beta_{\bar{F}(X''),\bar{F}(Y'')} \circ \bar{J}^{-1}_{X'',Y''} \circ \bar{F}(f \otimes' g) \\
&= \bar{J}_{Y'',X''} \circ \beta_{\bar{F}(X''),\bar{F}(Y'')} \circ (\bar{F}(f) \otimes \bar{F}(g)) \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'} \\
&= \bar{J}_{Y'',X''} \circ (\bar{F}(g) \otimes \bar{F}(f)) \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{1}_{X',Y'} \\
&= \bar{F}(g \otimes' f) \circ \bar{J}_{X',Y'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{1}_{X',Y'} \\
&= \bar{F}(g \otimes' f) \circ \bar{F}(\beta'_{X',Y'}) = \bar{F}((g \otimes' f) \circ \beta'_{X',Y'}).
\end{aligned}$$

Y como $\bar{F}$ es fiel, $\beta'_{X'',Y''} \circ (f \otimes' g) = (g \otimes' f) \circ \beta'_{X',Y'}$. En consecuencia β' es isomorfismo natural. Ahora se verá que β' cumple con (2.7). Usando la deinifición de β', que $(\bar{F}, \bar{J})$ es un funtor monoidal y las naturalidades de β,$\bar{J}$, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X', Y', Z' \in \mathcal{C}'$:

$$\begin{aligned}
&\bar{F}(\alpha'_{Y',Z',X'} \circ \beta'_{X',Y'\otimes' Z'} \circ \alpha'_{X',Y',Z'}) \\
&= \bar{F}(\alpha'_{Y',Z',X'}) \circ \bar{F}(\beta'_{X',Y'\otimes' Z'}) \circ \bar{F}(\alpha'_{X',Y',Z'}) \\
&= \bar{F}(\alpha'_{Y',Z',X'}) \circ \bar{J}_{Y'\otimes' Z',X'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y'\otimes' Z')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'\otimes' Z'} \circ \bar{F}(\alpha'_{X',Y',Z'}) \\
&= \bar{J}_{Y',Z'\otimes' X'} \circ (1_{\bar{F}(Y')\otimes \bar{J}_{Z',X'}}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z'),\bar{F}(X')} \circ (\bar{J}^{-1}_{Y',Z'} \otimes 1_{\bar{F}(X')}) \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y'\otimes' Z')} \circ \\
&(1_{\bar{F}(X')} \otimes \bar{J}_{Y',Z'}) \circ \alpha_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z')} \circ (\bar{J}^{-1}_{X',Y'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{X'\otimes' Y',Z'} \\
&= \bar{J}_{Y',Z'\otimes' X'} \circ (1_{\bar{F}(Y')\otimes \bar{J}_{Z',X'}}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z'),\bar{F}(X')} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')\otimes \bar{F}(Z')} \circ (1_{\bar{F}(X')} \otimes \bar{J}^{-1}_{Y',Z'}) \circ \\
&(1_{\bar{F}(X')} \otimes \bar{J}_{Y',Z'}) \circ \alpha_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z')} \circ (\bar{J}^{-1}_{X',Y'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{X'\otimes' Y',Z'} \\
&= \bar{J}_{Y',Z'\otimes' X'} \circ (1_{\bar{F}(Y')\otimes \bar{J}_{Z',X'}}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z'),\bar{F}(X')} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')\otimes \bar{F}(Z')} \circ \\
&\alpha_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y'),\bar{F}(Z')} \circ (\bar{J}^{-1}_{X',Y'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{X'\otimes' Y',Z'} \\
&= \bar{J}_{Y',Z'\otimes' X'} \circ (1_{\bar{F}(Y')\otimes \bar{J}_{Z',X'}}) \circ (1_{\bar{F}(Y')} \otimes \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Z')}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X'),\bar{F}(Z')} \circ \\
&(\beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \circ (\bar{J}^{-1}_{X',Y'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{X'\otimes' Y',Z'} \\
&= \bar{J}_{Y',Z'\otimes' X'} \circ (1_{\bar{F}(Y')} \otimes \bar{F}(\beta'_{X',Z'})) \circ (1_{\bar{F}(Y')} \otimes \bar{J}_{X',Z'}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X'),\bar{F}(Z')} \circ \\
&(\bar{J}^{-1}_{Y',X'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ (\bar{F}(\beta'_{X',Y'}) \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{X'\otimes' Y',Z'} \\
&= \bar{F}(1_{Y'} \otimes' \beta'_{X',Z'}) \circ \bar{J}_{Y',X'\otimes' Z'} \circ (1_{\bar{F}(Y')} \otimes \bar{J}_{X',Z'}) \circ \alpha_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X'),\bar{F}(Z')} \circ \\
&(\bar{J}^{-1}_{Y',X'} \otimes 1_{\bar{F}(Z')}) \circ \bar{J}^{-1}_{Y'\otimes' X',Z'} \circ \bar{F}(\beta'_{X',Y'} \otimes' 1_{Z'}) \\
&= \bar{F}(1_{Y'} \otimes' \beta'_{X',Z'}) \circ \bar{F}(\alpha'_{Y',X',Z'}) \circ \bar{F}(\beta'_{X',Y'} \otimes' 1_{Z'}) \\
&= \bar{F}((1_{Y'} \otimes' \beta'_{X',Z'}) \circ \alpha'_{Y',X',Z'} \circ (\beta'_{X',Y'} \otimes' 1_{Z'})).
\end{aligned}$$

Y como $\bar{F}$ es fiel se tiene que β' hace conmutar el primer hexágono de (2.7); la conmutatividad del segundo hexágono es totalmente análoga. Por lo tanto $(\mathcal{C}', \otimes', e', \alpha', \iota')$ es una categoría monoidal trenzada, con trenza β'. Además, de la definición de β' se sigue que $(\bar{F}, \bar{J})$ es una equivalencia monoidal trenzada y por la Proposición 2.42 se obtiene que (F, J) también lo es. □

Corolario 2.44. *Cualquier categoría monoidal trenzada es equivalente a una categoría monoidal trenzada severa. Más aún, toda categoría simétrica es equivalente a una categoría simétrica severa.*

Demostración. Que toda categoría monoidal trenzada sea equivalente a una categoría monoidal trenzada severa, es consecuencia del Teorema 1.33 y la Proposición 2.43. Ahora se supondrá que la categoría trenzada $(\mathcal{C}, \beta)$ de la Proposición 2.43 es simetrica. Por lo tanto resta demostrar que la categoría trenzada $(\mathcal{C}', \beta')$ obtenida en la Proposición 2.43 es simétrica. De la definición de β' y del hecho de que $(\mathcal{C}, \beta)$ es simétrica, se siguen las siguientes igualdades para todo $X', Y' \in \mathcal{C}'$:

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\beta'_{Y',X'} \circ \beta'_{X',Y'}) &= \bar{F}(\beta'_{Y',X'} \circ \beta'_{X',Y'}) \\
&= \bar{J}_{X',Y'} \circ \beta_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X')} \circ \bar{J}^{-1}_{Y',X'} \circ \bar{J}_{Y',X'} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'} \\
&= \bar{J}_{X',Y'} \circ \beta_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X')} \circ 1_{\bar{F}(Y'),\bar{F}(X')} \circ \beta_{\bar{F}(X'),\bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'} \\
&= \bar{J}_{X',Y'} \circ 1_{\bar{F}(X') \otimes \bar{F}(Y')} \circ \bar{J}^{-1}_{X',Y'} = 1_{\bar{F}(X' \otimes' Y')}.
\end{aligned}$$

Como $\bar{F}$ es fiel, se tiene que $\beta'_{Y',X'} \circ \beta'_{X',Y'} = 1_{X',Y'}$. En consecuencia $(\mathcal{C}', \beta')$ es simétrica. □

Proposición 2.45. ***(Ecuación de Yang-Baxter)*** *Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal severa trenzada. Para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ se tiene la siguiente igualdad:*

$$(\beta_{Y,Z} \otimes 1_X) \circ (1_Y \otimes \beta_{X,Z}) \circ (\beta_{X,Y} \otimes 1_Z) = (1_Z \otimes \beta_{X,Y}) \circ (\beta_{X,Z} \otimes 1_Y) \circ (1_X \otimes \beta_{Y,Z}).$$

Demostración. Como $\mathcal{C}$ es severa, los diagramas (2.7) se reducen a triángulos. Considérese el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& X \otimes Y \otimes Z \arrow[r, "\beta_{X,Y} \otimes 1_Z"] \arrow[dl, "1_X \otimes \beta_{Y,Z}"'] \arrow[dd, "\beta_{X \otimes Y, Z}"] & Y \otimes X \otimes Z \arrow[dr, "1_Y \otimes \beta_{X,Z}"] \arrow[dd, "\beta_{Y \otimes X, Z}"'] & \\
X \otimes Z \otimes Y \arrow[dr, "\beta_{X,Z} \otimes 1_Y"'] & & & Y \otimes Z \otimes X \arrow[dl, "\beta_{Y,Z} \otimes 1_X"] \\
& Z \otimes X \otimes Y \arrow[r, "1_Z \otimes \beta_{X,Y}"'] & Z \otimes Y \otimes X &
\end{tikzcd}.$$

Los triángulos laterales son los diagramas (2.7) y el rectángulo central conmuta por la naturalidad de β. Por lo tanto el driagrama exterior conmuta y así se se obtiene la ecuación deseada. □

2.3. Categorías K-lineales y Monoides de Lie

Definición 2.46. (a) Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo. Una categoría $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-***lineal*** si todo conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ es un $\mathbb{K}$-módulo y la composición de morfismos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z),$$

es $\mathbb{K}$-bilineal. Un funtor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ entre categorías $\mathbb{K}$-lineales es $\mathbb{K}$-***lineal*** si, induce un morfismo de $\mathbb{K}$-módulos en cada conjunto Hom, es decir,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X),F(Y))$$

es un $\mathbb{K}$-homomorfismo, para todo $X,Y\in\mathcal{C}$. Un funtor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ $\mathbb{K}$-lineal, es una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales si F es una equivalencia de categorías.

(b) Una categoría monoidal $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$ es $\mathbb{K}$-***lineal*** si la categoría $\mathcal{C}$ es $\mathbb{K}$-lineal y el funtor $\otimes$ es $\mathbb{K}$-bilineal en morfismos, es decir,

$$\otimes:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y')\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes X',Y\otimes Y')$$

es una función $\mathbb{K}$-bilineal para cualesquiera $X,X',Y,Y'\in\mathcal{C}$.

(c) Una categoría trenzada $(\mathcal{C},\beta)$ $\mathbb{K}$-lineal es ***simétrica*** si la categoría trenzada subyacente lo es.

Proposición 2.47. *Sea $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ una equvalencia entre categorías $\mathbb{K}$-lineales. Entonces existe una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales $\bar{F}:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ tal que $F\circ\bar{F}\simeq 1_{\mathcal{C}}$ y $\bar{F}\circ F\simeq 1_{\mathcal{C}'}$.*

Demostración. Como F es una equivalencia de categorías, existe $\bar{F}:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$ tal que $F\circ\bar{F}\overset{\theta}{\simeq}1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F}\circ F\overset{\rho}{\simeq}1_{\mathcal{C}}$. Se demostrará que $\bar{F}$ es un funtor $\mathbb{K}$-lineal. Usando que $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathbb{K}$-lineal y que F es un funtor $\mathbb{K}$-lineal, se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera $X',Y'\in\mathcal{C}'$ y cualquier $k\in\mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
F\bar{F}(kf+g) &= \theta_{Y'}^{-1}\circ(kf+g)\circ\theta_{X'}\\
&= \theta_{Y'}^{-1}(k(f\circ\theta_{X'})+g\circ\theta_{X'})\\
&= k(\theta_{Y'}^{-1}\circ f\circ\theta_{X'})+\theta_{Y'}^{-1}\circ g\circ\theta_{X'}\\
&= kF\bar{F}(f)+F\bar{F}(g)=F(k\bar{F}(f)+\bar{F}(g)).
\end{aligned}$$

Como F es fiel se sique que $\bar{F}(kf+g)=k\bar{F}(f)+\bar{F}(g)$. Por lo tanto $\bar{F}$ es una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales. □

Proposición 2.48. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría $\mathbb{K}$-lineal, $\mathcal{C}'$ una categoría y $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ una equivalencia entre categorías. Entonces a $\mathcal{C}'$se le puede dar estructura de categoría $\mathbb{K}$-lineal y F resultará ser una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales.*

Demostración. Como F es una equivalencia de categorías, existe $\bar{F} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ tal que $F \circ \bar{F} \simeq 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \simeq 1_{\mathcal{C}}$. Sean $X', Y' \in \mathcal{C}$, para cada $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$ y $k \in \mathbb{K}$ se definen:

- $f + g := F(\bar{F}(f) + \bar{F}(g))$,
- $kf := F(k\bar{F}(f))$.

Usando la definición de suma y producto por escalares definida anteriormente, se puede probar que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$ es un $\mathbb{K}$-módulo para cualesquiera $X', Y' \in \mathcal{C}'$. Resta probar que F es un funtor $\mathbb{K}$-lineal. Sean $X', Y' \in \mathcal{C}'$, usando que $\mathcal{C}'$ es una categoría $\mathbb{K}$-lineal y el hecho de que F es biyectiva en morfismos, se obtienen las siguientes igualdades para todo $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$ y para todo $k \in \mathbb{K}$:

- $F(f) + F(g) = F(\bar{F}F(f) + \bar{F}F(g)) = F(f + g)$,
- $kF(f) = F(k\bar{F}F(f)) = F(kf)$.

En consecuencia F es una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales. □

Corolario 2.49. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ una equivalencia de categorías monoidales, tal que $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$ es $\mathbb{K}$-lineal. Entonces $(\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ es $\mathbb{K}$-lineal.*

Demostración. Como F es una equivalencia de categorías monoidales, la Proposición 1.21 nos dice que existe un funtor monoidal

$$(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$$

tal que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Sean $f, g : X \to Y$ y $h : X' \to Y'$ morfismos en $\mathcal{C}'$. Considérese $\overline{F}((\lambda f + g) \otimes' h)$. Dado que $\overline{F}$ es un funtor $\mathbb{K}$-lineal, por la naturalidad de J, como $\otimes$ es lineal en la entrada izquierda y $(\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$ es $\mathbb{K}$-lineal, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\overline{F}((\lambda f + g) \otimes' h) &= \overline{J}_{Y,Y'} \circ (\overline{F}(\lambda f + g) \otimes \overline{F}(h)) \circ \overline{J}^{-1}_{X,X'} \\
&= \overline{J}_{Y,Y'} \circ ((\lambda\overline{F}(f) + \overline{F}(g)) \otimes \overline{F}(h)) \circ \overline{J}^{-1}_{X,X'} \\
&= \overline{J}_{Y,Y'} \circ (\lambda(\overline{F}(f) \otimes \overline{F}(h)) + (\overline{F}(g) \otimes \overline{F}(h))) \circ \overline{J}^{-1}_{X,X'} \\
&= \lambda(\overline{J}_{Y,Y'} \circ (\overline{F}(f) \otimes \overline{F}(g)) \circ \overline{J}^{-1}_{X,X'}) + \overline{J}_{Y,Y'} \circ (\overline{F}(g) \otimes \overline{F}(h)) \circ \overline{J}^{-1}_{X,X'} \\
&= \lambda\overline{F}(f \otimes' h) + \overline{F}(g \otimes' h).
\end{aligned}$$

Aplicando F, usando que es $\mathbb{K}$-lineal y por la naturalidad de θ, se sigue que:

$$\begin{aligned}
F\overline{F}((\lambda f + g) \otimes' h) &= F(\lambda\overline{F}(f \otimes' h) + \overline{F}(g \otimes' h)) \\
&= \lambda F\overline{F}(f \otimes' h) + F\overline{F}(g \otimes' h) \\
&= \lambda\theta^{-1}_{Y,Y'} \circ (f \otimes' h) \circ \theta_{X,X'} + \theta^{-1}_{Y,Y'} \circ (g \otimes' h) \circ \theta_{X,X'} \\
&= \theta^{-1}_{Y,Y'} \circ (\lambda(f \otimes' h) + (g \otimes' h)) \circ \theta_{X,X'}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $(\lambda f + g) \otimes' h = \lambda(f \otimes' h) + (g \otimes' h)$. De manera análoga se demuestra que $\otimes'$ es $\mathbb{K}$-lineal en la variable derecha. $\square$

Corolario 2.50. *Toda categoría monoidal $\mathbb{K}$- lineal trenzada es equivalente a una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal trenzada severa. Más aún, toda categoría monoidal $\mathbb{K}$- lineal simétrica es equivalente a una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica severa.*

Demostración. Se sigue de los Corolarios 2.44 y 2.49. $\square$

Definición 2.51. Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica.

(a) Un ***monoide de Lie*** en $(\mathcal{C}, \beta)$ es una pareja (L, γ), donde $\gamma : L \otimes L \to L$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ que satisface:

- $\gamma + \gamma \circ \beta_{L,L} = 0$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ (1_{L\otimes(L\otimes L)} + \xi + \xi^2) = 0$, con

$$\xi := \alpha_{L,L,L} \circ (\beta_{L,L} \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ (1_L \otimes \beta_{L,L}).$$

(b) Sean (L, γ) y (L', γ') monoides de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Un morfismo $f : L \to L'$ en $\mathcal{C}$ es ***morfismo de monoides de Lie***, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} L \otimes L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & L \arrow[d, "f"] \\ L' \otimes L' \arrow[r, "\gamma'"'] & L' \end{tikzcd} .$$

Notación 2.52. Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica. Se denotará por $LieMon(\mathcal{C})$ a la categoría de todos los monoides de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$ y morfismos de monoides de Lie.

Proposición 2.53. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ un funtor monoidal $\mathbb{K}$-lineal trenzado, con $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías simétricas. Entonces (F, J) manda monoides de Lie en monoides de Lie.*

Demostración. Sea (L, β) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Considérese la siguiente composición de morfismos:

$$\gamma' := F(\gamma) \circ J_{L,L} : F(L) \otimes' F(L) \to F(L).$$

Se afirma que $(F(L), \gamma')$ es un monoide de Lie. De la definición de γ', que β' hace conmutar (2.8) y que F es un funtor $\mathbb{K}$-lineal, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \gamma' + \gamma \circ \beta'_{F(L),F(L)} &= (F(\gamma) \circ J_{L,L}) + (F(\gamma) \circ J_{L,L} \circ \beta'_{F(L),F(L)}) \\ &= (F(\gamma) \circ J_{L,L}) + (F(\gamma) \circ F(\beta_{L,L} \circ J_{L,L}) \\ &= (F(\gamma) + F(\gamma \circ \beta_{L,L})) \circ J_{L,L} \\ &= F(\gamma + \gamma \circ \beta_{L,L}) \circ J_{L,L} = F(0) \circ J_{L,L} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\gamma' + \gamma' \circ \beta_{F(L),F(L)} = 0$. Por hipótesis se sabe que

$$\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ (1_{L\otimes(L\otimes L)} + \xi + \xi^2) = 0,$$

donde $\xi = \alpha_{L,L,L} \circ (\beta_{L,L} \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ (1_L \otimes \beta_{L,L}) = \beta_{L\otimes L,L} \circ \alpha^{-1}_{L,L,L}$. Para la otra igualdad considérese

$$\xi' := \alpha'_{F(L),F(L),F(L)} \circ (\beta'_{F(L),F(L)} \otimes' 1_{F(L)}) \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} \circ (1_{F(L)} \otimes' \beta'_{F(L),F(L)}).$$

De las definiciones de γ y ξ, la conmutatividad de los diagramas (2.7) y (2.8), la naturalidad de β' y el axioma de estructura monoidal, se obtienen las siguientes ecuaciones:

- $\xi' = \beta'_{F(L)\otimes' F(L),F(L)} \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)}$;
- $(\xi')^2 = \beta'_{F(L)\otimes' F(L),F(L)} \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} \circ \beta'_{F(L)\otimes' F(L),F(L)} \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)}$;
- $(\xi')^3 = (\beta'_{F(L)\otimes' F(L),F(L)} \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)})^3 = 1_{F(L)\otimes'(F(L)\otimes' F(L))}$;
- $\gamma' \otimes' 1_{F(L)} = (F(\gamma) \otimes' 1_{F(L)}) \circ (J_{L,L} \otimes' 1_{F(L)})$;
- $\gamma' \circ (\gamma' \otimes' 1_{F(L)}) = F(\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L)) \circ J_{L\otimes L,L} \circ (J_{L,L} \otimes' 1_{F(L)})$;
- $\gamma' \circ (\gamma' \otimes' 1_{F(L)}) \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} = F(\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L}) \circ J_{L,L\otimes L} \circ (1_{F(L)} \otimes' J_{L,L})$;
- $\gamma' \circ (\gamma' \otimes' 1_{F(L)}) \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} \circ \xi' = F(\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ \xi) \circ J_{L,L\otimes L} \circ (1_{F(L)} \otimes' J_{L,L})$;
- $\gamma' \circ (\gamma' \otimes' 1_{F(L)}) \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} \circ (\xi')^2 = F(\gamma \circ (\gamma \otimes 1_L) \circ \alpha^{-1}_{L,L,L} \circ \xi^2) \circ J_{L,L\otimes L} \circ (1_{F(L)} \otimes' J_{L,L})$

Sumando las últimas tres igualdades y usando que F es un funtor $\mathbb{K}$-lineal se concluye que:

$$\gamma' \circ (\gamma' \otimes' 1_{F(L)}) \circ (\alpha')^{-1}_{F(L),F(L),F(L)} \circ (1_{F(L)\otimes'(F(L)\otimes' F(L))} + \xi' + (\xi')^2) = 0.$$

En consecuencia $(F(L), \gamma')$ es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}', \beta')$. □

Corolario 2.54. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ un funtor monoidal $\mathbb{K}$-lineal trenzado, con $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías simétricas. Entonces (F, J) manda morfismos de monoides de Lie en morfismos de monoides de Lie.*

Demostración. Sea $f : L_1 \to L_2$ un morfismo de monoides de Lie. De la Proposición 2.53 se sabe que $(F(L_i), \gamma'_i)$ son monoides de Lie para $i = 1, 2$, donde $\gamma'_i := F(\gamma_i) \circ J_{L_i,L_i}$. Se demostrará que $F(f) : F(L_1) \to F(L_2)$ es morfismo de monoides de Lie. De las definición de γ_i, el hecho de que f es morfismo de monoides de Lie y la naturalidad de J, se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(f) \circ \gamma'_1 &= F(f) \circ F(\gamma_1) \circ J_{L_1,L_1} \\ &= F(\gamma_2) \circ F(f \otimes f) \circ J_{L_1,L_1} \\ &= F(\gamma_2) \circ J_{L_2,L_2} \circ (F(f) \otimes' F(f)) \\ &= \gamma'_2 \circ (F(f) \otimes' F(f)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $F(f)$ es morfismo de monoides de Lie. $\square$

Notación 2.55. Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ un funtor $\mathbb{K}$-lineal trenzado (con $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ simétricas) y $f : (L_1, \gamma_1) \to (L_2, \gamma_2)$ un morfismo monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Se denotará por $(F, J)(L_1, \gamma_1)$ al monoide de Lie que se obtiene de la Proposición 2.53 y por $(F, J)(f) := F(f)$ al morfismo de monoides de Lie que se obtiene del Corolario 2.54.

Proposición 2.56. *Sean $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ y $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta)$ funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzado (con $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ simétricas) tales que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ como funtores monoidales y (L, γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Entonces $(\overline{F} \circ F, \overline{J} \circ J)(L, \gamma)$ es isomorfo (como monoides de Lie) a (L, γ).*

Demostración. Por la Proposición 2.53 se tiene que $(\overline{F}F(L), \gamma')$ es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}', \beta')$, con $\gamma' := \overline{F}F(\gamma) \circ \overline{F}(J_{L,L}) \circ \overline{J}_{F(L),F(L)}$. Además $\rho_L : \overline{F}F(L) \to L$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, por lo que se demostrará que es un morfismo de monoides de Lie. De la definición de γ' y que ρ hace conmutar (1.11), se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho_L \circ \gamma' &= \rho_L \circ \overline{F}F(\gamma) \circ \overline{F}(J_{L,L}) \circ \overline{J}_{F(L),F(L)} \\
&= \gamma \circ \rho_{L \otimes L} \circ \overline{F}(J_{L,L}) \circ \overline{J}_{F(L),F(L)} \\
&= \gamma \circ (\rho_L \otimes \rho_L).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho_L : \overline{F}F(L) \to L$ es un isomorfismo de monoides de Lie. $\square$

Proposición 2.57. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales simétricas. Entonces las categorías $LieMon(\mathcal{C})$ y $LieMon(\mathcal{C}')$ son equivalentes.*

Demostración. Considérese la siguiente asignación entre las categorías $LieMon(\mathcal{C})$ y $LieMon(\mathcal{C}')$:

- $(L, \gamma) \mapsto (F, J)(L, \gamma)$, para todo monoide de Lie (L, γ) en $(\mathcal{C}, \beta)$;
- $f \mapsto (F, J)(f)$, para todo morfismo de monoides de Lie $f : A_1 \to A_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Es rutina checar que esta asignación define un funtor

$$F' : LieMon(\mathcal{C}) \to LieMon(\mathcal{C}').$$

Se demostrará que F' es una equivalencia de categorías:

(a) Sea $h : F'(L_1, \gamma_1) \to F'(L_2, \gamma_2)$ un morfismo de monoides de Lie en $(\mathcal{C}', \beta')$. Como F es pleno, existe un morfismo $f : L_1 \to L_2 \in \mathcal{C}$ tal que $F'(f) = F(f) = h$. Resta demostrar que f es morfismo de monoides de

Lie. De la definición de f, el hecho de que h es morfismo de monoides de Lie y la naturalidad de J, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} F(f \circ \gamma_1) &= h \circ F(\gamma_1) \\ &= h \circ F(\gamma_1) \circ J_{L_1,L1} \circ J^{-1}_{L_1,L_1} \\ &= F(\gamma_2) \circ J_{L_2,L_2} \circ (h \otimes h) \circ J^{-1}_{L_1,L_1} \\ &= F(\gamma_2) \circ (h \otimes h) = F(\gamma_2) \circ (f \otimes f)). \end{aligned}$$

Y como F es fiel, se sigue que $f \circ \gamma_1 = \gamma_2 \circ (f \otimes f)$. Por lo tanto f es morfismo de monoides de Lie; y entonces F' es pleno.

(b) Sean $f, g : L_1 \to L_2$ morfismo de monoides de Lie tales que $F'(f) = F'(g)$. Por lo tanto $F(f) = F'(f) = F'(g) = F(g)$; y como F es fiel, $f = g$. En consecuencia F' es fiel.

(c) Sea (L, γ) un monoide en $(\mathcal{C}', \beta')$. Por la Proposición 2.50 existe una equivalencia de categorías $\mathbb{K}$-lineales simétricas

$$(\bar{F}, \bar{J}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta)$$

tal que, $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Y de la Proposición 2.56 se obtiene que $(F \circ \overline{F}, J \circ \overline{J})(L, \gamma) \simeq (L, \gamma)$. En consecuencia F' es denso.

Así, de (a), (b) y (c), se concluye que F' es una equivalencia de categorías. □

Corolario 2.58. *Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría $\mathbb{K}$-lineal simétrica. Entonces existe una categorías $\mathbb{K}$-lineal simétrica severa $(\mathcal{C}', \beta')$, tal que $LieMon(\mathcal{C})$ es equivalente a $LieMon(\mathcal{C}')$*

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 2.50 y el Corolario 2.57. □

Proposición 2.59. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica severa y (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$. Considérese*

$$\gamma := \mu - \mu \circ \beta_{A,A} : A \otimes A \to A.$$

Entonces (A, γ) es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Demostración. Usando que $(\mathcal{C}, \beta)$ es severa, la definición de γ y el hecho de que (C, β) es simétrica, se tienen las siguientes igualdades:

$$\gamma + \gamma \circ \beta_{A,A} = \mu - \mu \circ \beta_{A,A} + (\mu - \mu \circ \beta_{A,A}) \circ \beta_{A,A} = \mu - \mu \circ \beta_{A,A} + \mu \circ \beta_{A,A} - \mu = 0.$$

Por lo tanto $\gamma + \gamma \circ \beta_{A,A} = 0$. Para la otra igualdad se hará uso de las siguientes igualdades, que se siguen de las definiciones de γ y ξ, la naturalidad de β, el hecho de que (C, β) $\mathbb{K}$-lineal y la conmutatividad de los diagramas (2.7), (2.1):

- $\xi = (\beta_{A,A} \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \beta_{A,A}) = \beta_{A\otimes A,A}$;
- $\xi^2 = \beta_{A\otimes A,A} \circ \beta_{A\otimes A,A}$;
- $\xi^3 = \beta^3_{A\otimes A,A} = 1_{A^{\otimes 3}}$;
- $\gamma \otimes 1_A = (\mu \otimes 1_A) \circ (1_{A^{\otimes 3}} - (\beta_{A,A} \otimes 1_A)$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) = \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ (1_{A^{\otimes 3}} - (\beta_{A,A} \otimes 1_A) - \beta_{A\otimes A,A} \circ (1_{A^{\otimes 3}} - (\beta_{A,A} \otimes 1_A)))$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \xi = \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ (\beta_{A\otimes A,A} - (1_A \otimes \beta_{A,A}) - \beta^2_{A\otimes A,A} + (\beta_{A,A} \otimes 1_A))$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \xi^2 = \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ (\beta^2_{A,A} - \beta_{A\otimes A,A} \circ (\beta_{A,A} \otimes 1_A) - \beta^3_{A\otimes A,A} + (1_A \otimes \beta_{A,A}))$.

Entonces, sumando las últimas tres igualdades, se obtiene que

$$\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ (1_{A^{\otimes 3}} + \xi + \xi^2) = 0.$$

En consecuencia (A, γ) es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. □

Corolario 2.60. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica y (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$. Considérese*

$$\gamma := \mu - \mu \circ \beta_{A,A} : A \otimes A \to A.$$

Entonces (A, γ) es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Demostración. De la Proposición 2.50 se tiene que existe una categoría $\mathbb{K}$-lineal simétrica trenzada severa $(\mathcal{C}', \beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados $(F, J) : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ y $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta)$, tales que $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ como funtores monoidales. De la Proposición 2.4 se sigue que $(F(A), \mu', \eta')$ es un monoide en $(\mathcal{C}, \beta')$ y de la Proposición 2.59 se sigue que $(F(A), \gamma')$ es un monoide de Lie, donde:

$$\mu' := F(\mu) \circ J_{A,A} \text{ y } \gamma' := \mu' - \mu' \circ \beta'_{F(A),F(A)}.$$

Así, usando las definiciones de γ, μ' y que (F, J) es un funtor trenzado $\mathbb{K}$-lineal, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} \gamma' &= (F(\mu) \circ J_{A,A}) - (F(\mu) \circ J_{A,A} \circ \beta'_{F(A),F(A)}) \\ &= (F(\mu) \circ J_{A,A}) - (F(\mu) \circ F(\beta_{A,A}) \circ J_{A,A}) \\ &= F(\mu - \mu \circ \beta_{A,A}) \circ J_{A,A} = F(\gamma) \circ J_{A,A}. \end{aligned}$$

Además, de la Proposición 2.53, se tiene que $(\overline{F}F(A), \overline{\gamma})$ es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$, donde $\overline{\gamma} = \overline{F}(\gamma') \circ \overline{J}_{F(A),F(A)}$.

$$\begin{aligned} \overline{\gamma} &= \overline{F}(\gamma') \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \\ &= \overline{F}F(\gamma) \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \\ &= \rho_A^{-1} \circ \gamma \circ \rho_{A\otimes A} \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \\ &= \rho_A^{-1} \circ \gamma \circ (\rho_A \otimes \rho_A). \end{aligned}$$

En consecuencia $\gamma = \rho_A \circ \overline{\gamma} \circ (\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1})$. Como $(\overline{F}F(A), \overline{\gamma})$ es un monoide de Lie, se tiene la siguiente ecuación:

$$\overline{\gamma} \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_{\overline{F}F(A)}) \circ \alpha^{-1}_{\overline{F}F(A),\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)} \circ (1_{\overline{F}F(A)\otimes(\overline{F}F(A)\otimes\overline{F}F(A))} + \xi' + (\xi)^2) = 0,$$

donde $\xi' = \beta_{\overline{F}F(A)\otimes\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)} \circ \alpha^{-1}_{\overline{F}F(A),\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)}$. De la naturalidades de α, β y como β hace conmutar (2.7), se siguen las siguientes igualdades:

- $\xi = \beta_{A\otimes A,A} \circ \alpha^{-1}_{A,A,A}$;
- $\xi^2 = \beta_{A\otimes A,A} \circ \alpha^{-1}_{A,A,A} \circ \beta_{A\otimes A,A} \circ \alpha^{-1}_{A,A,A}$;
- $\gamma \otimes 1_A = (\rho_A \otimes 1_A) \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_A) \circ ((\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1}) \otimes 1_A)$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) = \rho_A \circ \overline{\gamma} \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_{\overline{F}F(A)}) \circ ((\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1}) \otimes \rho_A^{-1})$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{A,A,A} = \rho_A \circ \overline{\gamma} \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_{\overline{F}F(A)}) \circ \alpha^{-1}_{\overline{F}F(A),\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)} \circ (\rho_A^{-1} \otimes (\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1}))$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{A,A,A} \circ \xi = \rho_A^{-1} \circ \overline{\gamma} \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_{\overline{F}F(A)}) \circ \alpha^{-1}_{\overline{F}F(A),\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)} \circ \xi' \circ (\rho_A^{-1} \otimes (\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1}))$;
- $\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{A,A,A} \circ \xi^2 = \rho_A^{-1} \circ \overline{\gamma} \circ (\overline{\gamma} \otimes 1_{\overline{F}F(A)}) \circ \alpha^{-1}_{\overline{F}F(A),\overline{F}F(A),\overline{F}F(A)} \circ (\xi')^2 \circ (\rho_A^{-1} \otimes (\rho_A^{-1} \otimes \rho_A^{-1}))$.

Sumando las últimas tres igualdades, usando que $\overline{F}F$ es un funtor $\mathbb{K}$-lineal y tomando en cuenta la Proposición 2.59, se tiene que

$$\gamma \circ (\gamma \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{A,A,A} \circ (1_{A\otimes(A\otimes A)} + \xi + \xi^2) = 0.$$

En consecuencia (A, γ) es un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. □

Corolario 2.61. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica y $f : A_1 \to A_2$ un morfismo de monoides en $(\mathcal{C}, \beta)$. Entonces f es un morfsimo de monoides de Lie.*

Demostración. Del Cororalio 2.60 se sabe que (A_1, γ_1) y (A_2, γ_2) son monoides de Lie, donde $\gamma_i = \mu_i - \mu_i \circ \beta_{A_i,A_i}$ para $i = 1, 2$. De la definición de γ_{A_i} y el hecho de que f es morfismo de monoides, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_{A_1} &= (f \circ \mu_1) - (f \circ \mu_1 \circ \beta_{A_1,A_1}) \\ &= (\mu_{A_2} \circ (f \otimes f)) - (\mu_{A_2} \circ (f \otimes f) \circ \beta_{A_1,A_1}) \\ &= (\mu_{A_2} - \mu_{A_2} \circ \beta_{A_2,A_2}) \circ (f \otimes f) \\ &= \gamma_{A_2} \circ (f \otimes f). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es morfismo de monoides de Lie. □

Capítulo 3

Una Categorificación del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

En este capítulo se darán nociones categóricas de los conceptos de Álgebra Tensorial, Álgebra Simétrica y Álgebra Envolvente. Esto con la finalidad de dar todos los elementos necesarios para la demostración del Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Para ello se definirán las categorías de ***Grothendieck-Deligne*** y se darán algunas propiedades de éstas. De ahora en adelante, cuando se considere funtores entre categorías de Grothendieck, se estará pensando en funtores aditivos.

Notación 3.1. Sean $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y $f : X \to Y \in \mathcal{C}$. Si existen el ***núcleo*** y ***conúcleo***, se les denotará por $i_f : \mathrm{Nuc}(f) \to X$ y $\pi_f : Y \to \mathrm{CoNuc}(f)$, respectivamente.

3.1. Categorías de Grothendieck-Deligne

Observación 3.2. (a) Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal con coproductos arbitrarios, $Y \in \mathcal{C}$, $\{X_i\}_{i\in J}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ y $\{f_i : X_i \to Z\}_{i\in J}$, $g : Y \to W$ morfismos en $\mathcal{C}$. Considérese los siguientes coproductos

$$\{j_i : X_i \to \textstyle\coprod_{i\in J} X_i\}_{i\in J} \text{ y } \{\sigma_i : X_i \otimes Y \to \textstyle\coprod_{i\in J}(X_i \otimes Y)\}_{i\in J}.$$

Así, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\varphi_L : \coprod_{i\in J}(X_i \otimes Y) \to (\coprod_{i\in J} X_i) \otimes Y$ tal que $\varphi_L \circ \sigma_i = j_i \otimes 1_Y$ para todo $i \in J$. Nótese que φ_L cumple lo siguiente para toda $i \in J$:

$$((\textstyle\coprod_{i\in J} f_i)\otimes g)\circ\varphi_L\circ\sigma_i = ((\coprod_{i\in J} f_i)\otimes g)\circ(j_i\otimes 1_Y) = ((\coprod_{i\in J} f_i)\circ j_i)\otimes g = f_i\otimes g.$$

Por lo tanto, de la unicidad del coproducto, se sigue la siguiente ecuación:

$$((\coprod_{i\in J} f_i)\otimes g)\circ \varphi_L = \coprod_{i\in J}(f_i\otimes g).$$

(b) Sean $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$ una categoría monoidal con coproductos arbitrarios, $X\in\mathcal{C}$, $\{Y_i\}_{i\in J}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$ y $f:X\to Z$, $\{g_i:Y_i\to W\}_{i\in J}$ morfismos en $\mathcal{C}$. Considérese los siguientes coproductos

$$\{j_i : Y_i \to \coprod_{i\in J} Y_i\}_{i\in J} \text{ y } \{\sigma_i : X\otimes Y_i \to \coprod_{i\in J}(X\otimes Y_i)\}_{i\in J}.$$

Así, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\varphi_R : \coprod_{i\in J}(X\otimes Y_i)\to X\otimes\coprod_{i\in J} Y_i$ tal que $\varphi_R\circ\sigma_i = 1_X\otimes j_i$ para todo $i\in J$. Nótese que φ_R cumple lo siguiente para toda $i\in J$:

$$(f\otimes\coprod_{i\in J} g_i)\circ\varphi_R\circ\sigma_i = (f\otimes\coprod_{i\in J} g_i)\circ(1_X\otimes j_i) = f\otimes((\coprod_{i\in J} g_i)\circ j_i) = f\otimes g_i.$$

Por lo tanto, de la unicidad del coproducto, se sigue la siguiente ecuación:

$$(f\otimes\coprod_{i\in J} g_i)\circ\varphi_R = \coprod_{i\in J}(f\otimes g_i).$$

Convención 3.3. (a) Sean $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$ una categoría monoidal con coproductos arbitrarios, $Y\in\mathcal{C}$ y $\{X_i\}_{i\in J}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Considérese los siguientes coproductos

$$\{j_i : X_i \to \coprod_{i\in J} X_i\}_{i\in J} \text{ y } \{\sigma_i : X_i\otimes Y \to \coprod_{i\in J}(X_i\otimes Y\}_{i\in J}.$$

Se dirá que $\otimes$ preserva coproductos arbitrarios en la entrada izquierda si el morfismo $\varphi_L : \coprod_{i\in J}(X_i\otimes Y)\to(\coprod_{i\in J} X_i)\otimes Y$ obtenido en la Observación 3.2 es un isomorfismo.

(b) Sean $(\mathcal{C},\otimes,e,\alpha,\iota)$ una categoría monoidal con coproductos arbitrarios, $X\in\mathcal{C}$ y $\{Y_i\}_{i\in J}$ una familia de objetos en $\mathcal{C}$. Considérese los siguientes coproductos

$$\{j_i : Y_i \to \coprod_{i\in J} Y_i\}_{i\in J} \text{ y } \{\sigma_i : X\otimes Y_i \to \coprod_{i\in J}(X\otimes Y_i\}_{i\in J}.$$

Se dirá que $\otimes$ preserva coproductos arbitrarios en la entrada derecha si el morfismo $\varphi_R : \coprod_{i\in J}(X\otimes Y_i)\to X\otimes\coprod_{i\in J} Y_i$ obtenido en la Observación 3.2 es un isomorfismo.

Definición 3.4. Una ***Categoría de Grothendieck-Deligne*** es una una categoría de Grothendieck monoidal $\mathbb{K}$-lineal simétrica $(\mathcal{C},\beta)$, tal que el bifuntor $\otimes$ preserva coproductos arbitrarios y conúcleos en cada entrada. Además debe de cumplir la siguiente propiedad: para cualesquiera morfismos $X_1\xrightarrow{f_1} Y_1$, $X_2\xrightarrow{f_2} Y_2\in\mathcal{C}$ se cumple,

$$i_{f_1\otimes f_2} = \mathrm{Im}((1_{X_1}\otimes i_{f_2})\oplus(i_{f_1}\otimes 1_{X_2})). \tag{3.1}$$

Ejemplo 3.5. Sea $\mathbb{K}$ un campo. Entonces Mod($\mathbb{K}$) es una categoría de Grothendieck-Deligne.

Observación 3.6. Las equivalencias de categorías preservan: núcleos, conúcleos, monomorfismos, epimorfismos. Entonces, si se tiene una equivalencia de categorías $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría de Grothendieck, se obtiene que $\mathcal{D}$ es una categoría de Grothendieck. Además, F conmutará con coproductos arbitrarios, es decir: si $\coprod_{i\in J} X_i$ es un coproducto de una familia $\{X_i\}_{i\in J}$ en $\mathcal{C}$, entonces

$$F(\textstyle\coprod_{i\in J} X_i) \simeq \coprod_{i\in J} F(X_i).$$

Proposición 3.7. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ una equivalencia de categorías monoidales abelianas, tal que $\otimes$ preserva conúcleos en la variable derecha (izquierda). Entonces $\otimes'$ preserva conúcleos en la variable derecha (izquierda).*

Demostración. Sean $f : A \to B \in \mathcal{C}'$ y $\pi_f : B \to ConNuc(f)$ el conúcleo de f. Como F es una equivalencia de categorías monoidales, la Proposición 1.21 nos dice que existe un funtor monoidal $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$ tal que $F\circ\bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F}\circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Se demostrará que $1_X \otimes' \pi_f$ es conúcleo de $1_X \otimes' f$ para todo $X \in \mathcal{C}'$. Como F y $\overline{F}$ preservan conúcleos, $\overline{F}(\pi_f)$ es conúcleo de $\overline{F}(f)$. Y por hipótesis $1_{\overline{F}(X)} \otimes \overline{F}(\pi_f)$ es conúcleo de $1_{\overline{F}(X)} \otimes \overline{F}(f)$. En consecuencia $F(1_{\overline{F}(X)} \otimes \overline{F}(\pi_f))$ es conúcleo de $F(1_{\overline{F}F(X)} \otimes \overline{F}(f))$. Ahora considérese las siguientes igualdades:

- $F(1_{\overline{F}(X)} \otimes \overline{F}(\pi_f)) = J_{X,C} \circ (F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(\pi_f)) \circ J^{-1}_{X,B}$;
- $F(1_{\overline{F}(X)} \otimes \overline{F}(f)) = J_{X,B} \circ (F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(f)) \circ J^{-1}_{X,A}$.

Por lo tanto $F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(\pi_f)$ es conúcleo de $F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(f)$. Además, usando la naturalidad de θ, se tienen las siguientes igualdades:

- $F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(\pi_f) = (\theta_X^{-1} \otimes' \theta_C^{-1}) \circ (1_X \otimes' \pi_f) \circ (\theta_X \otimes' \theta_B)$;
- $F\overline{F}(1_X) \otimes' F\overline{F}(f) = (\theta_X^{-1} \otimes' \theta_B^{-1}) \circ (1_X \otimes' f) \circ (\theta_X \otimes' \theta_A)$.

En consecuencia $1_X \otimes' \pi_f$ es conúcleo de $1_X \otimes' f$. La demostración para la variable izquierda es análogo. □

Proposición 3.8. *Sea $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ una equivalencia de categorías monoidales con coproductos arbitrarios, tal que $\otimes$ preserva coproductos arbitrarios en la variable derecha (izquierda). Entonces $\otimes'$ preserva coproductos arbitrarios en la variable derecha (izquierda).*

Demostración. Sean $\{Y_i\}_{i\in J}$ una familia de obtetos en $\mathcal{C}'$ y $X \in \mathcal{C}'$. Como F es una equivalencia de categorías monoidales, la Proposición 1.21 nos dice que existe un funtor monoidal $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$ tal que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Usando el isomorfismo J y que $\overline{F}$, $\otimes$ preservan coproductos, se siguen los siguientes isomorfismos:

$$\overline{F}(X \otimes' \coprod_{i\in J} Y_i) \simeq \overline{F}(X) \otimes \overline{F}(\coprod_{i\in J} Y_i) \simeq \overline{F}(X) \otimes \coprod_{i\in J} \overline{F}(Y_i) \simeq \coprod_{i\in J}(\overline{F}(X) \otimes \overline{F}(Y_i)).$$

Por lo tanto, aplicando el funtor F, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} X \otimes' \coprod_{i\in J} Y_i &\simeq F\overline{F}(X \otimes' \coprod_{i\in J} Y_i) \\ &\simeq F(\coprod_{i\in J}(\overline{F}(X) \otimes \overline{F}(Y_i)) \\ &\simeq \coprod_{i\in J} F(\overline{F}(X) \otimes \overline{F}(Y_i)) \\ &\simeq \coprod_{i\in J}(F\overline{F}(X) \otimes' F\overline{F}(Y_i)) \simeq \coprod_{i\in J}(X \otimes' Y_i). \end{aligned}$$

La demostración para la variable izquierda es análogo. □

Proposición 3.9. *Sea* $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ *una equivalencia de categorías de Grothendieck monoidales, tal que* $\otimes$ *cumple con la ecuación (3.1) de la definición de una categoría de Grotehdieck-Deligne. Entonces* $\otimes'$ *cumple con la ecuación (3.1) de la definición de una categoría de Grotehdieck-Deligne.*

Demostración. Sean $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$, $X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2 \in \mathcal{C}'$. Como F es una equivalencia de categorías monoidales, la Proposición 1.21 nos dice que existe un funtor monoidal $(\overline{F}, \overline{J}) : (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota') \to (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota)$ tal que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$. Considérese $\overline{F}(f_1)$ y $\overline{F}(f_2)$, como $\otimes$ cumple con la ecuación (3.1) se sigue lo siguiente:

$$\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1) \otimes \overline{F}(f_2)) = \mathrm{Im}((1_{\overline{F}(X_1)} \otimes \mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_2))) \oplus (\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1)) \otimes 1_{\overline{F}(X_2)})).$$

Y usando que F preserva conúcleos y conmuta con coproductos, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc}(F(\overline{F}(f_1) \otimes \overline{F}(f_2)) &= F(\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1) \oplus \overline{F}(f_2))) \\ &= F(\mathrm{Im}((1_{\overline{F}(X_1)} \otimes \mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_2))) \oplus (\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1)) \otimes 1_{\overline{F}(X_2)}))) \\ &= \mathrm{Im}(F(1_{\overline{F}(X_1)} \otimes \mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_2))) \oplus F(\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1)) \otimes 1_{\overline{F}(X_2)})). \end{aligned}$$

Además, de la naturalidad de J, θ y que hacen conmutar (1.11), se siguen las siguientes igualdades:

- $F(1_{\overline{F}(X_1)} \otimes \mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_2)) = \theta^{-1}_{X_1 \otimes' X_2} \circ (1_{X_1} \otimes \mathrm{Nuc}(f_2)) \circ \theta_{X_1 \otimes' K_2}$;
- $F(\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1)) \otimes 1_{\overline{F}(X_2)}) = \theta^{-1}_{X_1 \otimes' X_2} \circ (\mathrm{Nuc}(f_1) \otimes' 1_{X_2}) \circ \theta_{K_1 \otimes' X_2}$.

Donde $\mathrm{Nuc}(f_1) : K_1 \to X_1$ y $\mathrm{Nuc}(f_2) : K_2 \to X_2$. Y usando la asociatividad del coproducto se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}&F(1_{\overline{F}(X_1)} \otimes \mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_2)) \oplus F(\mathrm{Nuc}(\overline{F}(f_1)) \otimes 1_{\overline{F}(X_2)})\\ &= \theta^{-1}_{X_1 \otimes' X_2} \circ ((1_{X_1} \otimes \mathrm{Nuc}(f_2)) \oplus (\mathrm{Nuc}(f_1) \otimes' 1_{X_2})) \circ (\theta_{X_1 \otimes' K_2} \oplus \theta_{K_1 \otimes' X_2}).\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\mathrm{Im}(\theta^{-1}_{X_1 \otimes' X_2} \circ ((1_{X_1} \otimes \mathrm{Nuc}(f_2)) \oplus (\mathrm{Nuc}(f_1) \otimes' 1_{X_2})) \circ (\theta_{X_1 \otimes' K_2} \oplus \theta_{K_1 \otimes' X_2}))$$

es núcleo de $F(\overline{F}(f_1) \otimes \overline{F}(f_2))$. Pero también, de la naturalidad de θ y J, se tiene:

$$F(\overline{F}(f_1) \otimes \overline{F}(f_2)) = \theta^{-1}_{Y_1 \otimes' Y_2} \circ (f_1 \otimes' f_2) \circ \theta_{X_1 \otimes' X_2}.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Nuc}(f_1 \otimes' f_2) = \mathrm{Im}((1_{X_1} \otimes \mathrm{Nuc}(f_2)) \oplus (\mathrm{Nuc}(f_1) \otimes' 1_{X_2})).$$

□

Corolario 3.10. *Toda categoría de Grothendieck-Deligne es equivalente a una categoría de Grothendieck-Deligne severa.*

Demostración. Se sigue del Corolario 2.50, la Observación 3.6 y las Proposiciones 3.7, 3.8 y 3.9. □

Proposición 3.11. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$ e (I, ι) un ideal izquierdo (derecho) en A. Entonces se puede dar estructura de A-módulo izquierdo (derecha) a A/I.*

Demostración. Considérese la siguiente composición de morfismos $\pi_\theta \circ \mu : A \otimes A \to A/I$, donde $\pi_\theta : A \to A/I$ es el conúcleo del monomorfismo $\theta : I \hookrightarrow A$ dado por la definición de ideal a izquierda. Como θ es un morfismo de A-módulos izquierdos se siguen las siguientes igualdades:

$$\pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \theta) = \pi_\theta \circ \theta \circ \iota = 0.$$

Como $(1_A \otimes \pi_\theta)$ es conúcleo de $(1_A \otimes \theta)$, existe un único morfismo

$$A \otimes A/I \xrightarrow{\overline{\mu}} A/I,$$

tal que $\overline{\mu} \circ (1_A \otimes \pi_\theta) = \pi_\theta \circ \mu$. Se afirma que $(A/I, \overline{\mu})$ es un A-módulo a izquierda; para demostrarlo usaremos que $(1_{A \otimes A} \otimes \pi_\theta)$ es conúcleo de $(1_{A \otimes A} \otimes \theta)$. Considérese la siguiente composición de morfismos,

$$\pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) : (A \otimes A) \otimes A \to A/I.$$

De la conmutatividad de (2.6) se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ (1_{A\otimes A} \otimes \theta) &= \pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes \theta)\\ &= \pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \theta) \circ (\mu \otimes 1_I)\\ &= \pi_\theta \circ \theta \circ \iota \circ (\mu \otimes 1_I) = 0.\end{aligned}$$

Ahora, por la naturalidad de α, la definición de $\overline{\mu}$ y la conmutatividad de (2.1), se siguen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}(a)\ \overline{\mu} \circ (1_A \otimes \overline{\mu}) \circ \alpha_{A,A,A/I} \circ (1_{A\otimes A} \otimes \pi_\theta) &= \overline{\mu} \circ (1_A \otimes \overline{\mu}) \circ (1_A \otimes (1_A \otimes \pi_\theta)) \circ \alpha_{A,A,A}\\ &= \overline{\mu} \circ (1_A \otimes (\pi_\theta \circ \mu)) \circ \alpha_{A,A,A}\\ &= \overline{\mu} \circ (1_A \otimes \pi_\theta) \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A}\\ &= \pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} = \pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A),\end{aligned}$$

$$(b)\ \overline{\mu}\circ(\mu\otimes 1_{A/I})\circ(1_{A\otimes A}\otimes\pi_\theta) = \overline{\mu}\circ(\mu\otimes\pi_\theta) = \overline{\mu}(1_A\otimes\pi_\theta)\circ(\mu\otimes 1_A) = \pi_\theta\circ\mu\circ(\mu\otimes 1_A).$$

Por lo tanto, de la unicidad del conúcleo, se obtiene que $(A/I, \overline{\mu})$ hace conmutar (2.3). Con esta misma idea se demuestra que el diagrama (2.4) conmuta. En consecuencia $(A/I, \overline{\mu})$ es un A-módulo izquierdo. Análogamente se demuestra la proposición para A-módulos derechos. □

Proposición 3.12. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$ e (I, ι^1, ι^2) un ideal biláteral en A. Entonces se puede dar estructura de monoide a A/I.*

Demostración. Considérese $\pi_\theta \otimes \pi_\theta : A \otimes A \to A/I \otimes A/I$, donde $\theta : I \hookrightarrow A$ es el monomorfismo dado de la definición de ideal biláteral. Dado que se trabaja en una categoría de Grothendieck-Deligne y θ es un monomorfismo, se sigue lo siguiente:

$$i_{\pi_\theta \otimes \pi_\theta} = \mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)).$$

De donde

$$CoIm(\pi_\theta \otimes \pi_\theta)) = \pi_{i_{\pi_\theta\otimes\pi_\theta}} = \pi_{\mathrm{Im}((1_A\otimes\theta)\oplus(\theta\otimes 1_A))};$$

y como $\pi_\theta \otimes \pi_\theta$ es epimorfismo se tiene que

$$\pi_\theta \otimes \pi_\theta = \pi_{(1_A\otimes\theta)\oplus(\theta\otimes 1_A)}.$$

Usando que θ es morfismo de A-A-bimódulos se siguen las siguientes igualdades:

(a) $\pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \theta) = \pi_\theta \circ \theta \circ \iota^1 = 0$,

(b) $\pi_\theta \circ \mu \circ (\theta \otimes 1_A) = \pi_\theta \circ \theta \circ \iota^2 = 0$.

Y por la unicidad del coproducto se concluye que

$$\pi_\theta \circ \mu \circ ((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) = 0.$$

Entonces, por la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo $\overline{\mu} : A/I \otimes A/I \to A/I$ tal que $\overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = \pi_\theta \circ \mu$. Se afirma que $(A/I, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ es un monoide, donde $\overline{\eta} := \pi_\theta \circ \eta : e \to A/I$. Considérese

$$(\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta : (A \otimes A) \otimes A \to (A/I \otimes A/I) \otimes A/I;$$

como se está trabajando en una categoría de Grothendieck-Deligne se sigue que:

$$i_{(\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta} = \mathrm{Im}((1_{A \otimes A} \otimes \theta) \oplus \big[\mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A\big]).$$

De donde, dado que $(\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta$ es epimorfismo, se tiene lo siguiente:

$$(\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta = \pi_{(1_{A \otimes A} \otimes \theta) \oplus \big[\mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A\big]}.$$

Usando que θ es morfismo de A-módulos a izquierda, la definición de $\overline{\mu}$ y la ecuación (3.1), se tienen las siguientes ecuaciones:

(a) $\pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ (1_{A \otimes A} \otimes \theta) = \pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \theta) \circ (\mu \otimes 1_I) = \pi_\theta \circ \theta \circ \iota_L \circ (\mu \otimes 1_I) = 0,$

(b) $\pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ \big[\mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A\big]$
$= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \mu) \otimes \pi_\theta) \circ \big[\mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A\big]$
$= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \mu \circ \mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A))) \otimes \pi_\theta)$
$= \overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes \pi_\theta) \circ (((\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ \mathrm{Im}((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A)$
$= \overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes \pi_\theta) \circ (0 \otimes 1_A) = 0.$

Y por la unicidad del coproducto se sigue que:

$$\pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ ((1_{A \otimes A} \otimes \theta) \oplus \big[((1_A \otimes \theta) \oplus (\theta \otimes 1_A)) \otimes 1_A\big]) = 0.$$

Además,

$$\begin{aligned}(a)\ \overline{\mu} \circ (1_{A/I} \otimes \overline{\mu}) \circ \alpha_{A/I,A/I,A/I} \circ ((\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta) &= \overline{\mu} \circ (1_{A/I} \otimes \overline{\mu}) \circ (\pi_\theta \otimes (\pi_\theta \otimes \pi_\theta)) \circ \alpha_{A,A,A} \\ &= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes (\pi_\theta \circ \mu)) \circ \alpha_{A,A,A} \\ &= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} \\ &= \pi_\theta \circ \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ \alpha_{A,A,A} \\ &= \pi_\theta \circ \mu \circ (\mu \otimes 1_A)\end{aligned}$$

(b) $\overline{\mu} \circ (\overline{\mu} \otimes 1_{A/I}) \circ ((\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \otimes \pi_\theta) = \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \mu) \otimes \pi_\theta) = \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (\mu \otimes 1_A) = \pi_\theta \otimes \mu \circ (\mu \otimes 1_A).$

Por lo tanto, de la unicidad del conúcleo, se concluye que $(A/I, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ hace conmutar (2.1). Con esta misma idea se demuestra la conmutatividad de (2.2). En consecuencia $(A/I, \overline{\mu}, \overline{\eta})$ es un monoide. □

3.2. Monoide Libre, Potencia Simétrica y Envolvente Universal

Ahora se generalizará la Proposición 1.27 para el caso en que la categoría monoidal $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ no es severa.

Proposición 3.13. *Sean $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, \iota)$ una categoría monoidal, $X \in \mathcal{C}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces $X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} \simeq X^{\otimes n+m}$.*

Demostración. Se hará la demostración por inducción sobre n. Es claro que la Proposición se cumple para $n = 0$. Se demostrará para $n = 1$, para ello se hará inducción sobre m. Si $m = 0, 1$ se cumple de la definición. Si la Proposición se vale para $m = k$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$X \otimes X^{\otimes k+1} = X \otimes (X^{\otimes k} \otimes X) \simeq (X \otimes X^{\otimes k}) \otimes X \simeq X^{\otimes k+1} \otimes X = X^{\otimes k+2}.$$

En consecuencia se obtiene que $X \otimes X^{\otimes m} \simeq X^{\otimes m+1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora se supondrá que la Proposición se vale para $n = k$, así se tienen las siguientes igualdades para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$X^{\otimes k+1} \otimes X^{\otimes m} = (X^{\otimes k} \otimes X) \otimes X^{\otimes m} \simeq X^{\otimes k} \otimes (X \otimes X^{\otimes m}) \simeq X^{\otimes k+m+1}.$$

Por lo tanto se sigue que $X^{\otimes n} \otimes X^{\otimes m} \simeq X^{\otimes n+m}$. □

Proposición 3.14. *Sea $F : (\mathcal{C}, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ un funtor monoidal. Entonces, para todo objeto $X \in \mathcal{C}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$,*

$$F(X^{\otimes n}) \simeq F(X)^{\otimes' n}.$$

Demostración. Se hará le demostración por inducción sobre n. Si $n = 0$ se tiene que $F(X^{\otimes 0}) = F(e) \simeq e' = F(e)^{\otimes' 0}$. Para $n = 1$ es claro que $F(X^{\otimes 1}) \simeq F(X)^{\otimes' 1}$. Supóngase que la Proposición es cierta para $n = k$, entonces se siguen las siguientes igualdades:

$$F(X^{\otimes k+1}) = F(X^{\otimes k} \otimes X) \simeq F(X^{\otimes k}) \otimes' F(X) \simeq F(X)^{\otimes' k} \otimes' F(X) = F(X)^{\otimes' k+1}.$$

En consecuencia $F(X^{\otimes n}) \simeq F(X)^{\otimes' n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Definición 3.15. Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y $X \in \mathcal{C}$. Se define el ***monoide libre generado por*** X como

$$\mathrm{T}(X) := \oplus_{i \in \mathbb{N}} X^{\otimes i}.$$

Se denotará por $\varepsilon_i : X^{\otimes i} \to \oplus_{i \in \mathbb{N}} X^{\otimes i}$ a la i-ésima inclusión.

Lema 3.16. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$, $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías de Grothendieck-Deligne, $X \in \mathcal{C}$ y $(F, J) : (\mathcal{C}, \otimes, \otimes, \alpha, e, \iota) \to (\mathcal{C}', \otimes', \alpha', e', \iota')$ un funtor monoidal que preserva coproductos arbitrarios. Entonces $\mathrm{T}(F(X)) \simeq F(\mathrm{T}(X))$.*

Demostración. Por la Proposición 3.14 existe una familia de isomorfismos $\left\{\psi_i : F(X)^{\otimes' i} \to F(X^{\otimes i})\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Considérese los siguientes coproductos:

$$\{\varepsilon_i : X^{\otimes i} \to \mathrm{T}(X)\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ y } \left\{\varepsilon'_i : F(X)^{\otimes' i} \to \mathrm{T}(F(X))\right\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

Ahora, como F preserva coproductos, se concluye que $\{F(\varepsilon_i) : F(X^{\otimes i}) \to F(\mathrm{T}(X))\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un coproducto. Entonces, por la propiedad universal del coproducto, existen morfismos $\sigma : \mathrm{T}(F(X)) \to F(\mathrm{T}(X))$ y $\overline{\sigma} : F(\mathrm{T}(X)) \to \mathrm{T}(F(X))$ tales que:

$$\sigma \circ \varepsilon'_i = F(\varepsilon_i) \circ \psi_i \text{ y } \overline{\sigma} \circ F(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i \circ \psi_i^{-1} \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Se demostrará que σ y $\overline{\sigma}$ son inversas. De las definiciones de σ y $\overline{\sigma}$ se siguen las siguientes igualdades para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$(\overline{\sigma} \circ \sigma) \circ \varepsilon'_i = \overline{\sigma} \circ F(\varepsilon_i) \circ \psi_i = \varepsilon'_i.$$

Y por la unicidad del coproducto se sigue que $\overline{\sigma}\circ\sigma = 1_{\mathrm{T}(F(X))}$. Análogamente se demuestra que $\sigma \circ \overline{\sigma} = 1_{F(\mathrm{T}(X))}$. □

Lema 3.17. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y $X \simeq X' \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathrm{T}(X) \simeq \mathrm{T}(X')$.*

Demostración. Como $X \simeq X'$, por inducción se sigue que $X^{\otimes i} \simeq (X')^{\otimes i}$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto

$$\mathrm{T}(X) = \textstyle\coprod_{i\in\mathbb{N}} X^{\otimes i} \simeq \coprod_{i\in\mathbb{N}} (X')^{\otimes i} = \mathrm{T}(X').$$

□

Lema 3.18. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y $X, V \in \mathcal{C}$. Entonces:*

$$\left\{1_V \otimes \varepsilon_i : V \otimes X^{\otimes i} \to V \otimes \mathrm{T}(X)\right\}_{i\in\mathbb{N}} \ \text{ y } \ \left\{\varepsilon_i \otimes 1_V : X^{\otimes i} \otimes V \to \mathrm{T}(X) \otimes V\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

son coproductos.

Demostración. Se sigue de que $\otimes$ preserva coproductos arbitrarios en cada entrada. □

Proposición 3.19. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa y $X \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathrm{T}(X)$ es un monoide.*

Demostración. Por el Lema 3.18 y por la propiedad universal del coproducto se sabe que $\{\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j : X^{\otimes i} \otimes X^{\otimes j} \to \mathrm{T}(X) \otimes \mathrm{T}(X)\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ es un coproducto. Por la Proposición 1.27 se tiene que $X^i \otimes X^j = X^{\otimes i+j}$ para toda $i, j \in \mathbb{N}$. En consecuencia, de la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $\mu : \mathrm{T}(X) \otimes \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}(X)$ tal que $\mu \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \varepsilon_{i+j}$ para toda $i, j \in \mathbb{N}$. Se demostrará que $(\mathrm{T}(X), \mu, \eta)$ es un monoide, con $\eta := \varepsilon_0$. De la propiedad universal del coproducto, se puede probar que

$\{(\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) \otimes \varepsilon_k\}_{i,j,k\in\mathbb{K}}$ es un coproducto. Usando la definición de μ y que la categoría es severa, se siguen las siguientes igualdades para toda $i, j, k \in \mathbb{N}$:

- $\mu \circ (1_{\mathrm{T}(X)} \otimes \mu) \circ (\varepsilon_i \otimes (\varepsilon_j \otimes \varepsilon_k)) = \mu \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_{j+k}) = \varepsilon_{i+j+k}$;
- $\mu \circ (\mu \otimes 1_{\mathrm{T}(X)}) \circ ((\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) \otimes \varepsilon_k) = \mu \circ (\varepsilon_{i+j} \otimes \varepsilon_k) = \varepsilon_{i+j+k}$.

En consecuencia, por la propiedad universal del coproducto,

$$\mu \circ (1_{\mathrm{T}(X)} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes 1_{\mathrm{T}(X)}).$$

Por el Lema 3.18 se tiene que $\{\varepsilon_i = 1_e \otimes \varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un coproducto. Entonces, de la definición de μ, se siguen las siguientes igualdades para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$\mu \circ (\varepsilon_0 \otimes 1_{\mathrm{T}(X)}) \circ (1_e \otimes \varepsilon_i) = \mu \circ (\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_i) = \varepsilon_i.$$

Así, de la propiedad universal del coproducto y la severidad de la categoría, se obtiene lo siguiente:

$$\mu \circ (\eta \otimes 1_{\mathrm{T}(X)}) = 1_{\mathrm{T}(X)} = l_{\mathrm{T}(X)}.$$

Análogamente se demuestra la conmutatividad del otro triángulo (2.2). Por lo tanto $(\mathrm{T}(X), \mu, \eta)$ es un monoide. □

Corolario 3.20. *Sean* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Deligne y* $X \in \mathcal{C}$. *Entonces* $\mathrm{T}(X)$ *es un monoide.*

Demostración. Por la Proposición 3.10 existe una categoría de Grothendieck-Deligne severa $(\mathcal{C}', \beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados

$$(F, J) : (\mathcal{C}, \beta') \to (\mathcal{C}', \beta') \text{ y } (\overline{F}, \overline{\beta}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta),$$

tales que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. Considérese los siguientes coproductos:

$$\{\varepsilon_i : X^{\otimes i} \to \mathrm{T}(X)\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ y } \left\{\varepsilon'_i : F(X)^{\otimes' i} \to \mathrm{T}(F(X))\right\}_{i\in\mathbb{N}}.$$

De la Proposición 3.14 se obtiene la siguiente familia de isomorfismos

$$\left\{\psi_i : F(X)^{\otimes' i} \to F(X^{\otimes i})\right\}_{i\in\mathbb{N}},$$

y del Lema 3.16 se sigue que el isomorfismo $\sigma : \mathrm{T}(F(X)) \to F(\mathrm{T}(X))$, que cumple la siguiente ecuación para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$F(\varepsilon_i) \circ \psi_i = \sigma \circ \varepsilon'_i.$$

De la Proposición 3.19 se sabe que $\mathrm{T}(F(X))$ es un monoide, donde el producto $\mu' : \mathrm{T}(F(X)) \otimes' \mathrm{T}(F(X)) \to \mathrm{T}(F(X))$ cumple la siguiente propiedad para toda $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\mu' \circ (\varepsilon'_i \otimes' \varepsilon'_i) = \varepsilon'_{i+j}.$$

Además, de la Proposición 2.3 se sabe que $F(\mathrm{T}(X))$ es un monoide con el producto $\mu'' : F(\mathrm{T}(X)) \otimes' F(\mathrm{T}(X)) \to F(\mathrm{T}(X))$ dado por la siguiente fórmula:

$$\mu'' := \sigma \circ \mu' \circ (\sigma^{-1} \otimes' \sigma^{-1}).$$

De la definición de μ'', σ y μ', se siguen las siguientes igualdades para toda $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mu'' \circ (F(\varepsilon_i) \otimes' F(\varepsilon_j)) &= \sigma \circ \mu' \circ (\sigma^{-1} \otimes' \sigma^{-1}) \circ (F(\varepsilon_i) \otimes' F(\varepsilon_j)) \\
&= \sigma \circ \mu' \circ (\varepsilon'_i \otimes' \varepsilon'_j) \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1}) \\
&= \sigma \circ \varepsilon'_{i+j} \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1}) \\
&= F(\varepsilon_{i+j}) \circ \psi_{i+j} \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1}).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.4 se sigue que $\overline{F}F(\mathrm{T}(X))$ es un monoide, con el producto $\overline{\mu} : \overline{F}F(\mathrm{T}(X)) \otimes \overline{F}F(\mathrm{T}(X)) \to \overline{F}F(\mathrm{T}(X))$ dado por:

$$\overline{\mu} := \overline{F}(\mu'') \circ \overline{J}_{F(\mathrm{T}(X)),F(\mathrm{T}(X))}.$$

De las definiciones de $\overline{\mu}$, μ'' y la naturalidad de $\overline{J}$, se tiene lo siguiente para cada $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu} \circ (\overline{F}F(\varepsilon_i) \otimes \overline{F}F(\varepsilon_j)) &= \overline{F}(\mu'') \circ \overline{J}_{F(\mathrm{T}(X)),F(\mathrm{T}(X))} \circ (\overline{F}F(\varepsilon_i) \otimes \overline{F}F(\varepsilon_j)) \\
&= \overline{F}(\mu'') \circ \overline{F}(F(\varepsilon_i) \otimes' F(\varepsilon_j)) \circ \overline{J}_{F(X^{\otimes i}),F(X^{\otimes j})} \\
&= \overline{F}F(\varepsilon_{i+j}) \circ \overline{F}(\psi_{i+j} \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1})) \circ \overline{J}_{F(X^{\otimes i}),F(X^{\otimes j})}.
\end{aligned}$$

También de la Proposición 2.3 se concluye que $\mathrm{T}(X)$ es un monoide, con el producto $\mu : \mathrm{T}(X) \otimes \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}(X)$ dado como sigue:

$$\mu := \rho_{\mathrm{T}(X)} \circ \overline{\mu} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}).$$

Usando las definiciones de μ, $\overline{\mu}$ y la naturalidad de ρ, se obtienen las siguientes ecuaciones para toda $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mu \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) &= \rho_{\mathrm{T}(X)} \circ \overline{\mu} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) \\
&= \rho_{\mathrm{T}(X)} \circ \overline{\mu} \circ (\overline{F}F(\varepsilon_i) \otimes \overline{F}F(\varepsilon_j)) \circ (\rho^{-1}_{X^{\otimes i}} \otimes \rho^{-1}_{X^{\otimes j}}) \\
&= \rho_{\mathrm{T}(X)} \circ \overline{F}F(\varepsilon_{i+j}) \circ \overline{F}(\psi_{i+j} \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1})) \circ \overline{J}_{F(X^{\otimes i}),F(X^{\otimes j})} \circ (\rho^{-1}_{X^{\otimes i}} \otimes \rho^{-1}_{X^{\otimes j}}) \\
&= \varepsilon_{i+j} \circ \delta,
\end{aligned}$$

donde $\delta : X^{\otimes i} \otimes X^{\otimes j} \to X^{\otimes i+j}$ es el isomorfismo definido como:

$$\delta := \rho_{X^{\otimes i+j}} \circ \overline{F}(\psi_{i+j} \circ (\psi_i^{-1} \otimes' \psi_j^{-1})) \circ \overline{J}_{F(X^{\otimes i}),F(X^{\otimes j})} \circ (\rho^{-1}_{X^{\otimes i}} \otimes \rho^{-1}_{X^{\otimes j}}).$$

□

Proposición 3.21. ***(Propiedad universal del monoide libre)*** *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$, $X \in \mathcal{C}$ y $f : X \to A \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $h : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $h \circ \varepsilon_1 = f$.*

Demostración. Considérese la familia de morfismos $\{g_i : X^{\otimes i} \to A\}$ definidos recursivamente como:

$$g_0 := \eta,\ g_1 := f \text{ y } g_{i+1} := \mu \circ (g_i \otimes f).$$

Así, por la propiedad universal del coproducto, existe un único morfismo $h : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $h \circ \varepsilon_i = g_i$. Se afirma que h es un morfismo de monoides. Pare demostrar esta última afirmación, nótese que de la Proposición 3.19, $(\mathrm{T}(X), \mu', \eta')$ es un monoide, donde $\mu' : \mathrm{T}(X) \otimes \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}(X)$ cumple la siguiente ecuación para toda $i, j \in \mathbb{N}$:

$$\mu' \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \varepsilon_{i+j}.$$

Por lo tanto se tienen las siguientes igualdades para cada $i, j \in \mathbb{N}$:

$$h \circ \mu' \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = h \circ \varepsilon_{i+j} = g_{i+j} \text{ y } \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \mu \circ (g_i \otimes g_j).$$

Se demostrará por inducción sobre i que las anteriores igualdades coinciden. Si $i = 0$, de la conmutatividad de (2.2) y la severidad de $(\mathcal{C}, \beta)$, se siguen las siguientes igualdades para toda $j \in \mathbb{N}$:

$$\mu \circ (g_0 \otimes g_j) = \mu \circ (\eta \otimes 1_A) \circ (1_e \otimes g_j) = l_A \circ g_j = 1_A \circ g_j = g_j.$$

En consecuencia $h \circ \mu' \circ (\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_j) = \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_0 \otimes \varepsilon_j)$. Se usará inducción sobre j para demostrar que las igualdades coinciden en $i = 1$. Si $j = 0$, de la conmutatividad de (2.2) y la severidad de $(\mathcal{C}, \beta)$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\mu \circ (g_1 \otimes g_0) = \mu \circ (1_A \otimes \eta) \circ (g_1 \otimes 1_e) = r_A \circ g_1 = 1_A \circ g_1 = g_1.$$

En consecuencia $h \circ \mu' \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_0) = \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_0)$. Además, de la definición de g_2, se sigue que $\mu \circ (g_1 \otimes g_1) = \mu \circ (f \otimes f) = g_2$. Por tanto $h \circ \mu' \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) = \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)$. Supóngase que las igualdades se valen para $j = k$. De la conmutatividad de (2.1) y la severidad de $(\mathcal{C}, \beta)$, se siguen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mu \circ (g_1 \otimes g_{k+1}) &= \mu \circ (g_1 \otimes (\mu \circ (g_k \otimes f))) \\
&= \mu \circ (1_A \otimes \mu) \circ (g_1 \otimes (g_k \otimes f)) \\
&= \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ ((g_1 \otimes g_k) \otimes f) \\
&= \mu \circ (g_{k+1} \otimes f) = g_{k+2}.
\end{aligned}$$

En consecuencia $h \circ \mu' \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_j) = \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_j)$.

Ahora supóngase que las igualdades coinciden para $i = k$. De la conmutatividad de (2.1) y la severidad de $(\mathcal{C}, \beta)$, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\mu \circ (g_{k+1} \otimes g_j) &= \mu \circ ((\mu \circ (g_k \otimes f)) \otimes g_j)\\ &= \mu \circ (\mu \otimes 1_A) \circ ((g_k \otimes f) \otimes g_j)\\ &= \mu \circ (1_A \circ \mu) \circ (g_k \otimes (f \otimes g_j))\\ &= \mu \circ (g_k \otimes g_{j+1}) = g_{(k+1)+j}.\end{aligned}$$

En consecuencia $h \circ \mu' \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)$, y de la unicidad del coproducto se sigue que

$$h \circ \mu' = \mu \circ (h \otimes h).$$

Además, de la definición de h, se obtienen la siguiente igualdad:

$$h \circ \varepsilon_0 = g_0 = \eta.$$

Por lo tanto h es un morfismo de monoides. Ahora supóngase que existe otro morfismo de monoides $\overline{h} : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $\overline{h} \circ \varepsilon_1 = f = g_1$. Se demostrará por inducción que $\overline{h} \circ \varepsilon_i = g_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Como $\overline{h}$ es morfimos de monoides se sigue que $\overline{h} \circ \varepsilon_0 = \eta = g_0$; y por hipótesis se sabe que $\overline{h} \circ \varepsilon_1 = g_1$. Sopóngase que $\overline{h} \circ \varepsilon_k = g_k$.

$$\begin{aligned}\overline{h} \circ \varepsilon_{k+1} &= \overline{h} \circ \mu \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_1)\\ &= \mu \circ (\overline{h} \otimes \overline{h}) \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_1)\\ &= \mu \circ (g_k \otimes g_1) = g_{k+1}.\end{aligned}$$

En consecuencia $\overline{h} \circ \varepsilon_i = g_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, de la unicidad del coproducto, se sigue que $\overline{h} = h$. □

Corolario 3.22. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, $X \in \mathcal{C}$, (A, μ_1, η_1) y (B, μ_2, η_2) monoides en $(\mathcal{C}, \beta)$, $g : \mathrm{T}(X) \to A$ un isomorfismo de monoides y $f : X \to B \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $h : A \to B$, tal que $h \circ g \circ \varepsilon_1 = f$.*

Demostración. Por la Proposición 3.21 se sabe que existe un único morfismo de monoides $h' : \mathrm{T}(X) \to B$, tal que $h' \circ \varepsilon_1 = f$. Considérese $h := h' \circ g^{-1}$. Como g^{-1} y h' son morfismos de monoides, se obtiene que h es morfismo de monoides; además se siguen las siguientes igualdades:

$$h \circ g \circ \varepsilon_1 = h' \circ g^{-1} \circ g \circ \varepsilon_1 = h' \circ \varepsilon_1 = f.$$

Para demostrar la unicidad, supóngase que existe otro morfismo de monoides $\overline{h} : A \to B$ tal que $\overline{h} \circ g \circ \varepsilon_1 = f$. De la unicidad de h' se sigue que $\overline{h} \circ g = h'$, y por lo tanto $\overline{h} = h' \circ g^{-1} = h$. □

Corolario 3.23. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, (A, μ_1, η_1) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$, $X \in \mathcal{C}$ y $f : X \to A \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $h : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $h \circ \varepsilon_1 = f$.*

Demostración. Por la Proposición 3.10 existe una categoría de Grothendieck-Deligne severa $(\mathcal{C}', \beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados

$$(F, J) : (\mathcal{C}, \beta') \to (\mathcal{C}', \beta') \text{ y } (\overline{F}, \overline{\beta}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta),$$

tales que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. De la Proposiciones 2.4 y 3.19, se sigue que $(\mathrm{T}(X), \mu_2, \eta_2)$, $(F(A), \mu_1', \eta_1')$ y $(F(\mathrm{T}(X)), \mu_2', \eta_2')$ son monoides, donde:

$$\mu_1' = F(\mu_1) \circ J_{A,A},\ \mu_2' = F(\mu_2) \circ J_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} \text{ y } \eta_i' = F(\eta_i) \circ \varphi.$$

Del Corolario 3.22 y el hecho de que $\psi_1 = 1_{F(X)}$, se sigue que existe un único morfismo de monoides $\overline{h} : F(\mathrm{T}(X)) \to F(A)$ tal que $\overline{h} \circ F(\varepsilon_1) = F(f)$. Se demostrará que el morfismo $h := \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}$ es un morfismo de monoides. Usando las definiciones de h, μ_1' y μ_2', las naturalidades de ρ y $\overline{J}$, que $\overline{h}$ es un morfismo de monoides y que ρ hace conmutar el diagrama (1.11), se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
h \circ \mu_2 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \circ \mu_2 \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \overline{F}F(\mu_2) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)\otimes\mathrm{T}(X)} \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h} \circ \mu_2') \circ \overline{F}(J^{-1}_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)\otimes\mathrm{T}(X)} \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\mu_1' \circ (\overline{h} \otimes' \overline{h})) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{T}(X)),F(\mathrm{T}(X))} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \rho_A \circ \overline{F}F(\mu_1) \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \circ (\overline{F}(\overline{h}) \otimes \overline{F}(\overline{h})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ \rho_{A\otimes A} \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \circ (\overline{F}(\overline{h}) \otimes \overline{F}(\overline{h})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (\overline{F}(\overline{h}) \otimes \overline{F}(\overline{h})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ (h \otimes h).
\end{aligned}$$

Además, de la definición de h, la naturalidad de ρ y el hecho de que $\overline{h}$ es morfismo de monoides, se sigue lo siguiente:

$$h \circ \varepsilon_0 = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \circ \varepsilon_0 = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \overline{F}F(\varepsilon_0) \circ \rho_e^{-1} = \rho_A \circ \overline{F}F(\eta_1) \circ \rho_e^{-1} = \eta_1.$$

Por lo tanto h es un morfismo de monoides. También, de la definición de h, la naturalidad de ρ y que $(F(\mathrm{T}(X)), \mu_2', \eta_2')$ cumple la propiedad universal del monoide libre, se sigue lo siguiente:

$$h \circ \varepsilon_1 = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \circ \varepsilon_1 = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h}) \circ \overline{F}F(\varepsilon_1) \circ \rho_X^{-1} = \rho_A \overline{F}F(f) \circ \rho_X^{-1} = f.$$

Para demostrar la unicidad, supóngase que existe otro morfismo de monoides $h' : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $h' \circ \varepsilon_1 = f$. En consecuencia $F(h') \circ F(\varepsilon_1) = F(f)$; y de la unicidad se se sigue que $F(h') = \overline{h}$. Por lo tanto,

$$h' = \rho_A \circ \overline{F}F(h') \circ \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{h})\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} = h.$$

□

Proposición 3.24. *Sean* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Delgine severa y* $f : X_1 \to X_2 \in \mathcal{C}$*. Entonces existe un único morfismo de monoides* $\mathrm{T}(f) : \mathrm{T}(X_1) \to \mathrm{T}(X_2)$ *tal que* $\mathrm{T}(f) \circ \varepsilon_1^1 = \varepsilon_1^2 \circ f$*.*

Demostración. Se sigue de aplicar la Proposición 3.21 al morfismo

$$\varepsilon_1^2 \circ f : X_1 \to \mathrm{T}(X_2).$$

□

Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Se definirán funtores

$$\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \text{ y } \mathrm{T} : \mathcal{C} \to Mon(\mathcal{C}).$$

Se tiene la siguiente asignación entre las categorías $Mon(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C}$:

- $(A, \mu, \eta) \mapsto A$;
- $f \mapsto f$, para todo morfismo de monoides $f : A_1 \to A_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$,

que define un funtor $\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$. Ahora, de las Proposiciones 3.19 y 3.24, se tiene la siguiente asignación entre las categorías $\mathcal{C}$ y $Mon(\mathcal{C})$:

- $X \mapsto (\mathrm{T}(X), \mu, \eta)$;
- $f \mapsto \mathrm{T}(f)$, para todo morfismo $f : X_1 \to X_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Esta asignación define un funtor $\mathrm{T} : \mathcal{C} \to Mon(\mathcal{C})$.

Proposición 3.25. *Sea* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Entonces el funtor* $\mathrm{T} : \mathcal{C} \to Mon(\mathcal{C})$ *es adjunto izquierdo del funtor* $\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$*.*

Demostración. Primero se definirá una función

$$\phi_{X,A} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathrm{U}(A)) \to \mathrm{Hom}_{Mon(\mathcal{C})}(\mathrm{T}(X), A),$$

para cada objeto X y monoide (A, μ, η) en $(\mathcal{C}, \beta)$. Sea $f : X \to \mathrm{U}(A)$ un morfismo en $(\mathcal{C}, \beta)$; por la Proposición 3.21 existe un único morfismo de monoides $\phi_{X,A}(f) : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que

$$\phi_{X,A}(f) \circ \varepsilon_1 = f.$$

Así, de la unicidad, se tiene una función $f \mapsto \phi_{X,A}(f)$. Ahora se demostrará que $\phi_{X,A}$ es biyectiva.

(a) Si $\phi_{X,A}(f) = \phi_{X,A}(g)$, entonces $f = \phi_{X,A}(f) \circ \varepsilon_1 = \phi_{X,A}(g) \circ \varepsilon_1 = g$. Por lo tanto $\phi_{X,A}$ es inyectiva.

(b) Sea $g : \mathrm{T}(X) \to A$ un morfismo de monoides. Considérese la siguiente composición de morfismos $f := g \circ \varepsilon_1 : X \to A$. De la unicidad de $\phi_{X,A}(f)$ se sigue que

$$\phi_{X,A}(f) = g.$$

Por lo tanto $\phi_{X,A}$ es surjectiva.

De (a) y (b) se obtiene que $\phi_{X,A}$ es bijectiva. Ahora se demostrará que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), A_1) & \xrightarrow{\phi^{-1}_{X_1,A_1}} & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_1)) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1),f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(X_1,\mathrm{U}(f))} \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), A_2) & \xrightarrow[\phi^{-1}_{X_1,A_2}]{} & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_2))
\end{array},$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_2), A_1) & \xrightarrow{\phi^{-1}_{X_2,A_1}} & \mathrm{Hom}(X_2, \mathrm{U}(A_1)) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{T}(g),A_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(g,\mathrm{U}(A_1))} \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), A_1) & \xrightarrow[\phi^{-1}_{X_1,A_1}]{} & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_1))
\end{array}$$

para todo morfismo de monoides $f : A_1 \to A_2$ y morfismo $g : X_1 \to X_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$. De la definición de los funtores $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), -)$, $\mathrm{Hom}(X_1, -)$ y la función ϕ, se siguen las siguientes igualdades para $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), A_1)$:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}_{X_1,A_2} \circ \mathrm{Hom}(\mathrm{T}(X_1), f)(h) &= \phi^{-1}_{X_1,A_2}(f \circ h) \\
&= (f \circ h) \circ \varepsilon_1^1 \\
&= \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(f)) \circ \phi^{-1}_{X_1,A_1}(h).
\end{aligned}$$

La demostración de la conmutatividad del otro diagrama es análoga. Por lo tanto $(\mathrm{T}, \mathrm{U}, \phi)$ es una adjunción. □

Definición 3.26. Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y $X \in \mathcal{C}$. Se define la ***potencia simétrica de*** X como

$$\mathrm{Sym}(X) := \mathrm{T}(X)/\langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle,$$

donde $\zeta := \varepsilon_2 \circ (1_{X \otimes X} - \beta_{X,X})$.

Proposición 3.27. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías de Grothendieck-Deligne, $F : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ una equivalencia $\mathbb{K}$-lineal trenzada y $X \in \mathcal{C}$. Entonces $F(\mathrm{Sym}(X)) \simeq \mathrm{Sym}(F(X))$.*

Demostración. De la definiciones de ζ y ε', que F es $\mathbb{K}$-lineal y trenzado, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
F(\zeta) &= F(\varepsilon_2(1_{X \otimes X} - \beta_{X,X})) \\
&= (\sigma \circ \varepsilon_2' \circ \psi_2^{-1}) \circ (1_{F(X \otimes X)} - (J_{X,X} \circ \beta'_{F(X),F(X)} \circ J^{-1}_{X,X})) \\
&= \sigma \circ ((\varepsilon_2' \circ J^{-1}_{X,X}) - (\varepsilon_2' \circ \beta'_{F(X),F(X)} \circ J^{-1}_{X,X})) = \sigma \circ \zeta' \circ J^{-1}_{X,X},
\end{aligned}$$

donde $\zeta' := \varepsilon_2' - \varepsilon_2' \circ \beta_{F(X),F(X)}$. Usando la propiedad universal de la imagen y el hecho de que que F preserva imágenes, se puede demostrar que existe un isomorfismo $u : \mathrm{Im}(F(\zeta)) \to \mathrm{Im}(\zeta')$ tal que

$$\delta' = \sigma^{-1} \circ F(\delta) \circ u^{-1},$$

donde $\delta : \mathrm{Im}(\zeta) \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$ y $\delta' : \mathrm{Im}(\zeta') \hookrightarrow \mathrm{T}(F(X))$. Ahora considérense los siguientes morfismos: $\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$ y $\theta' : I' \hookrightarrow \mathrm{T}(F(X))$, donde $I = \langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle$ e $I' = \langle \mathrm{Im}(\zeta') \rangle$. Por la Observación 2.32, se tiene que existen únicos monomorfismos $\gamma : \mathrm{Im}(\zeta) \hookrightarrow I$ y $\gamma' : \mathrm{Im}(\zeta') \hookrightarrow I'$ tales que

$$\theta \circ \gamma = \delta \text{ y } \theta' \circ \gamma' = \delta'.$$

De esta manera se tienen las siguientes igualdades:

$$\sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ F(\gamma) \circ u^{-1} = \delta' \text{ y } \sigma \circ \theta' \circ \gamma' \circ u = F(\delta).$$

En consecuencia, de la Observación 2.30 y la definición de intersección, existen morfismos $\lambda : I' \to F(I)$ y $\overline{\lambda} : F(I) \to I'$ tales que

$$\sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ \lambda = \theta' \text{ y } \sigma \circ \theta' \circ \overline{\lambda} = F(\theta).$$

Por lo tanto $F(\theta) = \sigma \circ \theta' \circ \overline{\lambda} = F(\theta) \circ \lambda \circ \overline{\lambda}$; y como $F(\theta)$ es monomorfismo, se sigue que $\lambda \circ \overline{\lambda} = 1_{F(I)}$. Análogamente se demuestra que $\overline{\lambda} \circ \lambda = 1_{I'}$. De estas ecuaciones se obtienen la siguiente igualdades:

$$F(\pi_\theta) \circ \sigma \circ \theta' = \pi_{F(\theta)} \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ \lambda = 0.$$

Así, de la propiedad universal del cociente, existe un único morfismo $\omega : \mathrm{Sym}(F(X)) \to F(\mathrm{Sym}(X))$ tal que $\omega \circ \pi_{\theta'} = F(\pi_\theta) \circ \sigma$. De manera análoga, existe un único morfismo $\overline{\omega} : F(\mathrm{Sym}(X)) \to \mathrm{Sym}(F(X))$ tal que $\overline{\omega} \circ F(\pi_\theta) = \pi_{\theta'} \circ \sigma^{-1}$. De la definición de ω y $\overline{\omega}$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\overline{\omega} \circ \omega \circ \pi_{\theta'} = \overline{\omega} \circ F(\pi_\theta) \circ \sigma = \pi_{\theta'} \circ \sigma^{-1} \circ \sigma = \pi_\theta';$$

y como $\pi_{\theta'}$ es epimorfismo se obtiene que $\overline{\omega} \circ \omega = 1_{\mathrm{Sym}(F(X))}$. Análogamente se demuestra que $\omega \circ \overline{\omega} = 1_{F(\mathrm{Sym}(X))}$. □

Lema 3.28. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, $X \in \mathcal{C}$ y $(I, \iota) = \langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle$. Entonces $\pi_\theta \circ \zeta = 0$, donde*

$$\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(X) \text{ y } \pi_\theta : \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}(X)/\langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle.$$

Demostración. Por la Observación 2.32 se tiene que existe un único monomorfismo $\gamma : \mathrm{Im}(\zeta) \hookrightarrow I$ tal que $\theta \circ \gamma = \delta$, donde $\delta : \mathrm{Im}(\zeta) \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$. Pero de la definición de imagen, se obtiene un morfismo $\nu : X \otimes X \to \mathrm{Im}(\zeta)$ tal que $\delta \circ \nu = \zeta$. Por lo tanto $\zeta = \theta \circ \gamma \circ \nu$, y en consecuencia

$$\pi_\theta \circ \zeta = \pi_\theta \circ \theta \circ \gamma \circ \nu = 0.$$

□

Proposición 3.29. *Sean $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa y $X\in\mathcal{C}$. Entonces* $\mathrm{Sym}(X)$ *es un monoide conmutativo.*

Demostración. De las Proposición 3.19 se sabe que $\mathrm{T}(X)$ es un monoide, donde el producto $\mu:\mathrm{T}(X)\otimes\mathrm{T}(X)\to\mathrm{T}(X)$ satisface:

$$\mu\circ(\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j)=\varepsilon_{i+j},$$

para toda $i,j\in\mathbb{N}$. Y de la Proposición 3.12 se sigue que $\mathrm{Sym}(X)$ es un monoide, donde el producto $\overline{\mu}:\mathrm{Sym}(X)\otimes\mathrm{Sym}(X)\to\mathrm{Sym}(X)$ es el único morfismo que cumple la siguiente ecuación:

$$\overline{\mu}\circ(\pi_\theta\otimes\pi_\theta)=\pi_\theta\circ\mu,$$

donde $\theta:I\hookrightarrow\mathrm{T}(X)$ e $(I,\iota^1,\iota^2)=\langle\mathrm{Im}(\zeta)\rangle$. De la naturalidad de β y la definición de $\overline{\mu}$, se tiene lo siguiente:

$$\overline{\mu}\circ\beta_{\mathrm{Sym}(X),\mathrm{Sym}(X)}\circ(\pi_\theta\otimes\pi_\theta)=\overline{\mu}\circ(\pi_\theta\otimes\pi_\theta)\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}=\pi_\theta\circ\mu\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}.$$

Se afirma que $\pi_\theta\circ\mu\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}\circ(\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j)=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_i\otimes\varepsilon_j)$ para toda $i,j\in\mathbb{N}$. En efecto, se demostrará esta última afirmación por inducción sobre i:

• Si $i=0$, usando la naturalidad de β, la definición de μ, la Proposición 2.38 y que la categoría $(\mathcal{C},\beta)$ es severa, se sigue las siguientes igualdades para toda $j\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\pi_\theta\circ\mu\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}\circ(\varepsilon_0\otimes\varepsilon_j)&=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_j\otimes\varepsilon_0)\circ\beta_{e,X^{\otimes j}}\\&=\pi_\theta\circ\varepsilon_j\circ l_{X^{\otimes j}}\circ r^{-1}_{X^{\otimes j}}=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_0\otimes\varepsilon_j).\end{aligned}$$

• Para $i=1$, se hará inducción sobre j. Si $j=0$, usando la naturalidad de β, la definición de μ, la Proposición 2.38 y que la categoría $(\mathcal{C},\beta)$ es severa, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\pi_\theta\circ\mu\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}\circ(\varepsilon_1\otimes\varepsilon_0)&=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_0\otimes\varepsilon_1)\circ\beta_{X,e}\\&=\pi_\theta\circ\varepsilon_1\circ r_X\circ l_X^{-1}=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_1\otimes\varepsilon_0).\end{aligned}$$

Si $j=1$, usando la naturalidad de β, el Lema 3.28 y la definición de μ, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\pi_\theta\circ\mu\circ\beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)}\circ(\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1)&=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1)\circ\beta_{X,X}\\&=\pi_\theta\circ\varepsilon_2\circ\beta_{X,X}\\&=\pi_\theta\circ\varepsilon_2=\pi_\theta\circ\mu\circ(\varepsilon_1\otimes\varepsilon_1).\end{aligned}$$

Supóngase que la Proposición se vale para $j=k$. De la naturalidad de β, la conmutatividad de (2.7), la definición de μ, el Lema 3.28 y la hipótesis de inducción, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_\theta \circ \mu \circ \beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{k+1}) &= \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_{k+1} \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{X,X^{\otimes k}\otimes X} \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+2} \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X}) \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_k \otimes (\varepsilon_2 \circ \beta_{X,X})) \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \varepsilon_k) \otimes (\pi_\theta \circ \varepsilon_2 \circ \beta_{X,X})) \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_2) \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+2} \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_{k+1} \otimes \varepsilon_1) \circ (\beta_{X,X^{\otimes k}} \otimes 1_X) \\
&= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{X,X^{\otimes k}}) \otimes (\pi_\theta \circ \varepsilon_1)) \\
&= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (\varepsilon_{k+1} \otimes \varepsilon_1) \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+2} = \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_{k+1}).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\pi_\theta \circ \mu \circ \beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_j) = \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

• Supóngamos que la Proposición se vale para $i = k$. De la nauralidad de β, la definiciones de μ y $\overline{\mu}$, la conmutatividad de (2.7), la hipótesis de inducción y la severidad de $(\mathcal{C}, \beta)$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_\theta \circ \mu \circ \beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} \circ (\varepsilon_{k+1} \otimes \varepsilon_j) &= \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_j \otimes \varepsilon_{k+1}) \circ \beta_{X^{\otimes k}\otimes X, X^{\otimes j}} \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+j+1} \circ (\beta_{X^{\otimes k},X^{\otimes j}} \otimes 1_X) \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \pi_\theta \circ \mu \circ ((\varepsilon_{k+j} \circ \beta_{X^{\otimes k},X^{\otimes j}}) \otimes \varepsilon_1) \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \varepsilon_{k+j} \circ \beta_{X^{\otimes k},X^{\otimes j}}) \otimes (\pi_\theta \circ \varepsilon_1)) \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (\varepsilon_{k+j} \otimes \varepsilon_1) \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+j+1} \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_{j+1}) \circ (1_{X^{\otimes k}} \otimes \beta_{X,X^{\otimes j}}) \\
&= \overline{\mu} \circ ((\pi_\theta \circ \varepsilon_k) \otimes (\pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_j \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{X,X^{\otimes j}})) \\
&= \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \circ (\varepsilon_k \otimes \varepsilon_{j+1}) \\
&= \pi_\theta \circ \varepsilon_{k+j+1} = \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_{k+1} \otimes \varepsilon_j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\pi_\theta \circ \mu \circ \beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j)$. Así, por la unicidad del coproducto, se sigue que:

$$\pi_\theta \circ \mu \circ \beta_{\mathrm{T}(X),\mathrm{T}(X)} = \pi_\theta \circ \mu.$$

Y usando la unicidad del conúcleo se concluye $\overline{\mu} \circ \beta_{\mathrm{Sym}(X),\mathrm{Sym}(X)} = \overline{\mu}$. En consecuencia $\mathrm{Sym}(X)$ es un monoide conmutativo. □

Corolario 3.30. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y $X \in \mathcal{C}$. Entonces* $\mathrm{Sym}(X)$ *es un monoide conmutativo.*

Demostración. Para esta demostración se hará uso de los morfismos y definiciones hechos en la demostración del Corolario 3.20. Por la Proposición 3.10 existe una categoría de Grothendieck-Deligne severa $(\mathcal{C}', \beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados

$$(F, J) : (\mathcal{C}, \beta') \to (\mathcal{C}', \beta') \text{ y } (\overline{F}, \overline{\beta}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta),$$

tales que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. De la Proposiciones 3.29 y 2.37 se sigue que $(\mathrm{Sym}(F(X), \mu_1, \eta_1)$ y $(F(\mathrm{Sym}(X)), \mu_2, \eta_2)$ son monoides conmutativos, donde μ_1 es el único morfismo tal que

$$\mu_1 \circ (\pi_{\theta'} \otimes' \pi_{\theta'}) = \pi_{\theta'} \circ \mu'$$

y $\mu_2 = \omega \circ \mu_1 \circ (\omega^{-1} \otimes' \omega^{-1})$ (ω es el isomorfismo definido en la Proposición 3.27). De las definiciones de μ_2, ω y μ'', se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\mu_2 \circ (F(\pi_\theta) \otimes' F(\pi_\theta)) &= \omega \circ \mu_1 \circ (\omega^{-1} \otimes' \omega^{-1}) \circ (F(\pi_\theta) \otimes' F(\pi_\theta)) \\
&= \omega \circ \mu_1 \circ (\pi_{\theta'} \times' \pi_{\theta'}) \circ (\sigma^{-1} \otimes' \sigma^{-1}) \\
&= \omega \circ \pi_{\theta'} \circ \mu' \circ (\sigma^{-1} \otimes' \sigma^{-1}) \\
&= F(\pi_\theta) \circ \sigma \circ \mu' \circ (\sigma^{-1} \otimes' \sigma^{-1}) = F(\pi_\theta) \circ \mu''.
\end{aligned}$$

Usando la Proposición 2.41, se sigue que $(\overline{F}F(\mathrm{Sym}(X)), \overline{\mu}_2 \overline{\eta}_2)$ es un monoide conmutativo, con $\overline{\mu}_2 = \overline{F}(\mu_2) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{Sym}(X)), F(\mathrm{Sym}(X))}$. Usando la definiciones de $\overline{\mu}_2$ y $\overline{\mu}$, la naturalidad de $\overline{J}$ y la ecuación que satisface μ_2, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}_2 \circ (\overline{F}F(\pi_\theta) \otimes \overline{F}F(\pi_\theta)) &= \overline{F}(\mu_2) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{Sym}(X)), F(\mathrm{Sym}(X))} \circ (\overline{F}F(\pi_\theta) \otimes \overline{F}F(\pi_\theta)) \\
&= \overline{F}(\mu_2) \circ \overline{F}(F(\pi_\theta) \otimes' F(\pi_\theta)) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{T}(X)), F(\mathrm{T}(X))} \\
&= \overline{F}F(\pi_\theta) \circ \overline{F}(\mu'') \circ \overline{J}_{F(\mathrm{T}(X)), F(\mathrm{T}(X))} \\
&= \overline{F}F(\pi_\theta) \circ \overline{\mu}.
\end{aligned}$$

Por la Proposición 2.37, $(\mathrm{Sym}(X), \widehat{\mu}, \widehat{\eta})$ es un monoide conmutativo, donde $\widehat{\mu} := \rho_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \overline{\mu}_2 \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)})$. Usando las definiciones de $\widehat{\mu}$ y μ, la naturalidad de ρ y la ecuación que satisface $\overline{\mu}_2$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) &= \rho_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \overline{\mu}_2 \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}) \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) \\
&= \rho_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \overline{\mu}_2 \circ (\overline{F}F(\pi_\theta) \otimes \overline{F}F(\pi_\theta)) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \rho_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \overline{F}F(\pi_\theta) \circ \overline{\mu} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \pi_\theta \circ \rho_{\mathrm{T}(X)} \circ \overline{\mu} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{T}(X)}) \\
&= \pi_\theta \circ \mu.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.31. ***(Propiedad Universal de la Potencia Simétrica)*** *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, $X \in \mathcal{C}$, (A, μ_1, η_1) un monoide conmutativo en $(\mathcal{C}, \beta)$ y $f : X \to A \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $g : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que $g \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$, $\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$ e $\langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle = (I, \iota^1, \iota^2)$.*

Demostración. Considérese $(\mathrm{T}(X), \mu_2, \eta_2)$ el monoide libre generado por X. Por la Proposición 3.21 existe único morfismo de monoides $h : \mathrm{T}(X) \to A$ tal que $h \circ \varepsilon_1 = f$. De la definición de μ_2, que h es morfismo de monoides y (A, μ_1, η_1) es un monoide conmutativo, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
h \circ \zeta &= h \circ \varepsilon_2 \circ (1_{X\otimes X} - \beta_{X,X}) \\
&= h \circ \mu_2 \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \circ (1_{X\otimes X} - \beta_{X,X}) \\
&= \mu_1 \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \circ (1_{X\otimes X} - \beta_{X,X}) \\
&= \mu_1 \circ (f \otimes f) \circ (1_{X\otimes X} - \beta_{X,X}) \\
&= (\mu_1 \circ (f \otimes f)) - (\mu_1 \circ \beta_{A,A} \circ (f \otimes f)) \\
&= (\mu_1 \circ (f \otimes f)) - (\mu_1 \circ (f \otimes f)) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\nu : X \otimes X \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $i_h \circ \nu = \zeta$. Así, de la definición de imagen, existe un morfismo $u : \mathrm{Im}(\zeta) \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $\delta = i_h \circ u$, donde δ es la inclusión de $\mathrm{Im}(\zeta)$ en $\mathrm{T}(X)$. Además, como δ es monomorfismo, se sigue que u es monomorfismo. Entonces, usando la Proposición 2.20 y la definición de intersección, se obtiene un morfismo $\sigma : I \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $i_h \circ \sigma = \theta$. En consecuencia $h \circ \theta = h \circ i_h \circ \sigma = 0$; y de la propiedad universal del cociente se tiene que existe un único morfismo $g : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que $g \circ \pi_\theta = h$. De donde se tienen las siguientes igualdades:

$$g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \varepsilon_1 = f.$$

Ahora supóngase que existe $\overline{g} : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que $\overline{g} \circ \pi_\theta \circ \varepsilon = f$. Entonces, por la unicidad de h, se sigue que $\overline{g} \circ \pi_\theta = h$. Y usando la unicidad del cociente se obtiene $\overline{g} = g$. Resta demostrar que g es un morfismo de monoides, para ello se recordará como esta definido el monoide $(\mathrm{Sym}(X), \overline{\mu_2}, \overline{\eta_2})$: $\overline{\mu_2}$ es el único morfismo tal que $\overline{\mu_2} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = \pi_\theta \circ \mu_2$ y $\overline{\eta_2} = \pi_\theta \circ \eta_2$. Usando la definiciones de $\overline{\mu_2}$ y g, así como el hecho de que h es morfismo de monoides, se tienen las siguientes igualdades:

$$g \circ \overline{\mu_2} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = g \circ \pi_\theta \circ \mu_2 = h \circ \mu_2 = \mu_1 \circ (h \otimes h) = \mu_1 \circ (g \otimes g) \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta).$$

Como $\pi_\theta \otimes \pi_\theta$ es epimorfismo, se concluye $g \circ \overline{\mu_2} = \mu_1 \circ (g \otimes g)$. De la definición de $\overline{\eta_2}$ y que h es morfismo de monoides, se sigue lo siguiente:

$$g \circ \overline{\eta_2} = g \circ \pi_\theta \circ \eta_2 = h \circ \eta_2 = \eta_1.$$

Por lo tanto g es morfismo de monoides. □

Corolario 3.32. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, $X \in \mathcal{C}$, (A, μ_1, η_1) y (B, μ_2, η_2) monoides conmutativos en $(\mathcal{C}, \beta)$, $\psi : \mathrm{Sym}(X) \to A$ un isomorfismo de monoides y $f : X \to B \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $g : A \to B$, tal que $g \circ \psi \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$.*

Demostración. Por la Proposición 3.31 existe un único morifismo de monoides $h : \mathrm{Sym}(X) \to B$ tal que $h \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. Considérese $g := h \circ \psi^{-1}$. Como h y ψ^{-1} son morfismo de monoides, g es morfismo de monoides; además se siguen las siguientes igualdades:

$$g \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f.$$

Para demostrar la unicidad, supóngase que existe otro morfismo de monoides $g' : A \to B$ tal que $g' \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. De la unicidad de h se sigue que $g' \circ \psi = h$ y por lo tanto $g' = h \circ \psi^{-1} = g$. □

Corolario 3.33. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, $X \in \mathcal{C}$, (A, μ_1, η_1) un monoide conmutativo en $(\mathcal{C}, \beta)$, $(\mathrm{T}(X), \mu_2, \eta_2)$ el monoide libre generado por X y $f : X \to A \in \mathcal{C}$. Entonces existe un único morfismo de monoides $g : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que $g \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$, $\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$ y $\langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle = (I, \iota^1, \iota^2)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.10 existe una categoría de Grothendieck-Deligne severa $(\mathcal{C}', \beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados

$$(F, J) : (\mathcal{C}, \beta') \to (\mathcal{C}', \beta') \text{ y } (\overline{F}, \overline{\beta}) : (\mathcal{C}', \beta') \to (\mathcal{C}, \beta),$$

tales que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. De la Proposiciones 2.4 y 3.12, se sigue que $(\mathrm{Sym}(X), \mu_2, \eta_2)$, $(F(A), \mu_1', \eta_1')$ y $(F(\mathrm{Sym}(X)), \mu_2', \eta_2')$ son monoides, donde:

$$\mu_1' = F(\mu_1) \circ J_{A,A},\ \mu_2' = F(\mu_2) \circ J_{\mathrm{Sym}(X),\mathrm{Sym}(X)} \text{ y } \eta_i' = F(\eta_i) \circ \varphi.$$

Del Corolario 3.32, la definición de $\omega : \mathrm{Sym}(F(X)) \to F(\mathrm{Sym}(X))$ dado en la Proposición 3.27 y el hecho de que $\psi_1 = 1_{F(X)}$, se sigue que existe un único morfismo de monoides $\overline{g} : F(\mathrm{Sym}(X)) \to F(A)$ tal que $\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1) = F(f)$. Se demostrará que el morfismo $g := \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}$ es un morfismo de monoides. De las definiciones de g, μ_1' y μ_2', las naturalidades de ρ y $\overline{J}$, que $\overline{g}$ es morfismo de monoides y que ρ hace conmutar (1.11), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
g \circ \mu_2 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \mu_2 \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \overline{F}F(\mu_2) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)\otimes\mathrm{Sym}(X)} \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\mu_2) \circ J_{\mathrm{Sym}(X),\mathrm{Sym}(X)}) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{Sym}(X)),F(\mathrm{Sym}(X))} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}) \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\mu_1') \circ \overline{F}(\overline{g} \otimes' \overline{g}) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{Sym}(X)),F(\mathrm{Sym}(X))} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ \rho_{A\otimes A} \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \circ (\overline{F}(\overline{g}) \otimes \overline{F}(\overline{g})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (\overline{F}(\overline{g}) \otimes \overline{F}(\overline{g})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)}) \\
&= \mu_1 \circ (h \otimes h).
\end{aligned}$$

Además, de la definición de g, la naturalidad de ρ y el hecho de que $\overline{g}$ es un morfismo de monoides, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g \circ \eta_2 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \circ (\pi_\theta \circ \varepsilon_0) \\ &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_0)) \circ \rho_e^{-1} \\ &= \rho_A \overline{F} F(\eta_1) \circ \rho_e^{-1} = \eta_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto g es un morfismo de monoides. También, de la definición de g, la nauralidad de ρ y que $(F(\mathrm{Sym}(X)), \mu_2', \eta_2')$ cumple con la propiedad universal de la potencia simétrica, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 \\ &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1)) \circ \rho_X^{-1} \\ &= \rho_A \circ \overline{F} F(f) \circ \rho_X^{-1} = f. \end{aligned}$$

Para demostrar la unicidad, supóngase que existe otro morfismo de monoides $g' : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que $g' \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. En consecuencia $F(h') \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1) = F(f)$; y de la unicidad de $\overline{g}$ se sigue que $F(g') = \overline{g}$. Por lo tanto,

$$g' = \rho_A \circ \overline{F} F(g') \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{Sym}(X)} = g.$$

□

Proposición 3.34. *Sean* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Delgine severa y* $f : X_1 \to X_2 \in \mathcal{C}$. *Entonces existe un único morfismo de monoides* $\mathrm{Sym}(f) : \mathrm{Sym}(X_1) \to \mathrm{Sym}(X_2)$ *tal que:*

$$\mathrm{Sym}(f) \circ \circ \pi_{\theta_1} \circ \varepsilon_1^1 = \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f,$$

donde $\theta_i : I_i \hookrightarrow \mathrm{T}(X_i)$ *y* $\langle \mathrm{Im}(\zeta_i) \rangle = (I_i, \iota_i^1, \iota_i^2)$, $i = 1, 2$.

Demostración. Se sigue de aplicar la Proposición 3.31 al morfismo

$$\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f : X_1 \to \mathrm{Sym}(X_2).$$

□

Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Se definirán funtores

$$\mathrm{U} : CMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C}) \text{ y } \mathrm{Sym} : Mon(\mathcal{C}) \to CMon(\mathcal{C}).$$

Se tiene la siguiente asignación entre las categorías $CMon(\mathcal{C})$ y $Mon(\mathcal{C})$:

- $(A, \mu, \eta) \mapsto (A, \mu, \eta)$;
- $f \mapsto f$, para todo morfismo de monoides conmutativos $f : A_1 \to A_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$,

que define un funtor $\mathrm{U} : CMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C})$. Ahora, de las Proposiciones 3.29 y 3.34, se tiene la siguiente asignación entre las categorías $Mon(\mathcal{C})$ y $CMon(\mathcal{C})$:

- $(X, \mu, \eta) \mapsto (\mathrm{Sym}(X), \mu', \eta')$;
- $f \mapsto \mathrm{Sym}(f)$, para todo morfismo de monoides $f : X_1 \to X_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Esta asignación define un funtor $\mathrm{Sym} : Mon(\mathcal{C}) \to CMon(\mathcal{C})$.

Proposición 3.35. *Sea* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Entonces el funtor* $\mathrm{Sym} : Mon(\mathcal{C}) \to CMon(\mathcal{C})$ *es adjunto izquierdo del funtor* $\mathrm{U} : CMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C})$.

Demostración. Primero se definirá una función

$$\phi_{X,A} : \mathrm{Hom}_{Mon(\mathcal{C})}(X, \mathrm{U}(A)) \to \mathrm{Hom}_{CMon(\mathcal{C})}(\mathrm{Sym}(X), A),$$

para cada monoide (X, μ, η) y monoide conmutativo (A, μ', η') en $(\mathcal{C}, \beta)$. Sea $f : X \to \mathrm{U}(A)$ un morfismo de monoides en $Mon(\mathcal{C})$; por la Proposición 3.31 existe un único morfismo de monoides $\phi_{X,A}(f) : \mathrm{Sym}(X) \to A$ tal que

$$\phi_{X,A}(f) \circ \varpi = f,$$

donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$, $\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$ e $\langle \mathrm{Im}(\zeta) \rangle = (I, \iota^1, \iota^2)$. Así, de la unicidad, se tiene una función $f \mapsto \phi_{X,A}(f)$. Ahora se demostrará que $\phi_{X,A}$ es biyectiva.

(a) Si $\phi_{X,A}(f) = \phi_{X,A}(g)$, entonces $f = \phi_{X,A}(f) \circ \varpi = \phi_{X,A}(g) \circ \varpi = g$. Por lo tanto $\phi_{X,A}$ es inyectiva.

(b) Sea $g : \mathrm{Sym}(X) \to A$ un morfismo de monoides conmutativos, es decir, un morfismo de monoides. Considérese la siguiente composición de morfismos $f := g \circ \varpi \to A$. De la unicidad de $\phi_{X,A}(f)$ se sigue que

$$\phi_{X,A}(f) = g.$$

Por lo tanto $\phi_{X,A}$ es surjectiva.

De (a) y (b) se obtiene que $\phi_{X,A}$ es bijectiva. Ahora se demostrará que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), A_1) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X_1,A_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1),f)"'] & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_1)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X_1,\mathrm{U}(f))"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), A_2) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X_1,A_2}"'] & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_2))
\end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_2), A_1) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X_2,A_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(g),A_1)"'] & \mathrm{Hom}(X_2, \mathrm{U}(A_1)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,\mathrm{U}(A_1))"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), A_1) \arrow[r, "\phi^{-1}_{X_1,A_1}"'] & \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(A_1))
\end{tikzcd}$$

para todo morfismo de monoides conmutativos $f : A_1 \to A_2$ y morfismo de monoides $g : X_1 \to X_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$. De la definición de los funtores $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), -)$, $\mathrm{Hom}(X_1, -)$ y la función ϕ, se siguen las siguientes igualdades para $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), A_1)$:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}_{X_1,A_2} \circ \mathrm{Hom}(\mathrm{Sym}(X_1), f)(h) &= \phi^{-1}_{X_1,A_2}(f \circ h) \\
&= (f \circ h) \circ \varpi \\
&= \mathrm{Hom}(X_1, \mathrm{U}(f)) \circ \phi^{-1}_{X_1,A_1}(h).
\end{aligned}$$

La demostración de la conmutatividad del otro diagrama es análoga. Por lo tanto $(\mathrm{Sym}, \mathrm{U}, \phi)$ es una adjunción. □

Definición 3.36. Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne y (L, γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Se define el ***monoide universal envolvente*** de L como

$$\mathrm{E}(L) := \mathrm{T}(L)/ \langle \mathrm{Im}(\tau) \rangle,$$

donde $\tau := \varepsilon_2 \circ (1_{L\otimes L} - \beta_{L,L}) - (\varepsilon_1 \circ \gamma)$.

Proposición 3.37. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(\mathcal{C}', \beta')$ categorías de Grothendieck-Deligne, $F : (\mathcal{C}, \beta) \to (\mathcal{C}', \beta')$ una equivalencia $\mathbb{K}$-lineal trenzada y (L, γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$. Entonces $F(\mathrm{E}(L)) \simeq \mathrm{E}(F(L))$.*

Demostración. Por la Proposición 2.53 $(F(L), \gamma')$ es un monoide de Lie, con $\gamma' = F(\gamma) \circ J_{L,L}$. De la definiciones de τ, ε' y γ', que F es $\mathbb{K}$-lineal y trenzado, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
F(\tau) &= F(\varepsilon_2(1_{L\otimes L} - \beta_{L,L}) - \varepsilon_1 \circ \gamma) \\
&= (\sigma \circ \varepsilon'_2 \circ \psi_2^{-1}) \circ (1_{F(L\otimes L)} - (J_{L,L} \circ \beta'_{F(L),F(L)} \circ J^{-1}_{L,L})) - (\sigma \circ \varepsilon'_1 \circ F(\gamma)) \\
&= \sigma \circ ((\varepsilon'_2 \circ J^{-1}_{L,L}) - (\varepsilon'_2 \circ \beta'_{F(L),F(L)} \circ J^{-1}_{L,L}) - (\varepsilon'_1 \circ F(\gamma) \circ J_{L,L} \circ J^{-1}_{L,L}) \\
&= \sigma \circ \tau' \circ J^{-1}_{L,L},
\end{aligned}$$

donde $\tau' := \varepsilon'_2 \circ (1_{F(L)\otimes F(L)} - \beta'_{F(L),F(L)}) - (\varepsilon'_1 \circ \gamma')$. Usando la propiedad universal de la imagen y el hecho de que que F preserva imágenes, se puede demostrar que existe un isomorfismo $u : \mathrm{Im}(F(\tau)) \to \mathrm{Im}(\tau')$ tal que

$$\delta' = \sigma^{-1} \circ F(\delta) \circ u^{-1},$$

donde $\delta : \mathrm{Im}(\tau) \hookrightarrow \mathrm{T}(L)$ y $\delta' : \mathrm{Im}(\tau') \hookrightarrow \mathrm{T}(F(L))$. Ahora considérense los siguientes morfismos: $\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(L)$ y $\theta' : I' \hookrightarrow \mathrm{T}(F(L))$, donde $I = \langle \mathrm{Im}(\tau) \rangle$ e $I' = \langle \mathrm{Im}(\tau') \rangle$. Por la Observación 2.32, se tiene que existen únicos monomorfismos $\nu : \mathrm{Im}(\tau) \hookrightarrow I$ y $\nu' : \mathrm{Im}(\tau') \hookrightarrow I'$ tales que

$$\theta \circ \nu = \delta \text{ y } \theta' \circ \nu' = \delta'.$$

De esta manera se tienen las siguientes igualdades:

$$\sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ F(\nu) \circ u^{-1} = \delta' \text{ y } \sigma \circ \theta' \circ \nu' \circ u = F(\delta).$$

En consecuencia, de la Observación 2.30 y la definición de intersección, existen morfismos $\lambda : I' \to F(I)$ y $\overline{\lambda} : F(I) \to I'$ tales que

$$\sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ \lambda = \theta' \text{ y } \sigma \circ \theta' \circ \overline{\lambda} = F(\theta).$$

Por lo tanto $F(\theta) = \sigma \circ \theta' \circ \overline{\lambda} = F(\theta) \circ \lambda \circ \overline{\lambda}$; y como $F(\theta)$ es monomorfismo, se sigue que $\lambda \circ \overline{\lambda} = 1_{F(I)}$. Análogamente se demuestra que $\overline{\lambda} \circ \lambda = 1_{I'}$. De estas ecuaciones se obtienen la siguiente igualdades:

$$F(\pi_\theta) \circ \sigma \circ \theta' = \pi_{F(\theta)} \circ \sigma \circ \sigma^{-1} \circ F(\theta) \circ \lambda = 0.$$

Así, de la propiedad universal del cociente, existe un único morfismo $\Omega : \mathrm{E}(F(L)) \to F(\mathrm{E}(L))$ tal que $\Omega \circ \pi_{\theta'} = F(\pi\theta) \circ \sigma$. De manera análoga, existe un único morfismo $\overline{\Omega} : F(\mathrm{E}(L)) \to \mathrm{E}(F(L))$ tal que $\overline{\Omega} \circ F(\pi_\theta) = \pi_{\theta'} \circ \sigma^{-1}$. De la definición de Ω y $\overline{\Omega}$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\overline{\Omega} \circ \Omega \circ \pi_{\theta'} = \overline{\Omega} \circ F(\pi_\theta) \circ \sigma = \pi_{\theta'} \circ \sigma^{-1} \circ \sigma = \pi'_\theta;$$

y como $\pi_{\theta'}$ es epimorfismo se obtiene que $\overline{\Omega} \circ \Omega = 1_{\mathrm{E}(F(L))}$. Análogamente se demuestra que $\Omega \circ \overline{\Omega} = 1_{F(\mathrm{E}(L))}$. □

Lema 3.38. *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, (L, γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$ y $(I, \iota) = \langle \mathrm{Im}(\tau) \rangle$. Entonces $\pi_\theta \circ \tau = 0$, donde*

$$\theta : I \hookrightarrow \mathrm{T}(L) \text{ y } \pi_\theta : \mathrm{T}(L) \to \mathrm{T}(L)/\left\langle \mathrm{Im}(\tau) \right\rangle.$$

Demostración. Por la Observación 2.32 se tiene que existe un único monomorfismo $\gamma : \mathrm{Im}(\tau) \hookrightarrow I$ tal que $\theta \circ \gamma = \delta$, donde $\delta : \mathrm{Im}(\tau) \hookrightarrow \mathrm{T}(L)$. Pero de la definición de imagen, se obtiene un morfismo $\nu : L \otimes L \to \mathrm{Im}(\tau)$ tal que $\delta \circ \nu = \tau$. Por lo tanto $\tau = \theta \circ \gamma \circ \nu$, y en consecuencia

$$\pi_\theta \circ \tau = \pi_\theta \circ \theta \circ \gamma \circ \nu = 0.$$

□

Proposición 3.39. ***(Propiedad Universal del Monoide Universal Envolvente)*** *Sean $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, (L, γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C}, \beta)$, (A, μ, η) un monoide en $(\mathcal{C}, \beta)$ y $f : L \to A \in \mathcal{C}$ un morfismo de monoides de Lie. Entonces existe un único morfismo $g : \mathrm{E}(L) \to A$ de monoides tal que $g \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$ y $\langle \mathrm{Im}(\tau) \rangle = (I, \theta)$. Más aún, g es morfismo de monoides de Lie.*

Demostración. De la Proposiciones 2.59, 3.19 y 3.21 se sigue que: (A, γ_A) es un monoide de Lie, $(\mathrm{T}(X), \overline{\mu}, \overline{\eta})$ es un monoide y existe un único morfismo de monoides $h : \mathrm{T}(L) \to A$ tal que $h \circ \varepsilon_1 = f$. Además, de las definiciones de τ y γ_A, del hecho de que h es morfismo de monoides, la naturalidad de β y que f es morfismo de monoides de Lie, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
h \circ \tau &= h \circ \varepsilon_2 \circ (1_{L\otimes L} - \beta_{L,L}) - (\varepsilon_1 \circ \gamma) \\
&= (h \circ \varepsilon_2) - (h \circ \varepsilon_2 \circ \beta_{L,L}) - (h \circ \varepsilon_1 \circ \gamma) \\
&= (h \circ \overline{\mu} \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)) - (h \circ \overline{\mu} \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{L,L}) - (f \circ \gamma) \\
&= (\mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1)) - (\mu \circ (h \otimes h) \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{L,L}) - (\gamma_A \circ (f \otimes f)) \\
&= (\mu \circ (f \otimes f)) - (\mu \circ \beta_{A,A} \circ (f \otimes f)) - (\gamma_A \circ (f \otimes f)) \\
&= (\mu - (\mu \circ \beta_{A,A})) \circ (f \otimes f) - (\gamma_A \circ (f \otimes f)) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de la propiedad universal del núcleo, existe un único morfismo $\nu : L \otimes L \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $i_h \circ \nu = \tau$. Así, de la definición de imagen, existe un morfismo $u : \mathrm{Im}(\tau) \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $i_h \circ u = \delta$, donde $\delta : im(\tau) \hookrightarrow \mathrm{T}(X)$. Además, como δ es monomorfismo, u es monomorfismo. Entonces, usando la Proposición 2.20 y la definición de intersección, se obtiene un morfismo $\sigma : I \to \mathrm{Nuc}(h)$ tal que $i_h \circ \sigma = \theta$. En consecuencia $h \circ \theta = h \circ i_h \circ \sigma = 0$; y de la propiedad universal de cociente se sigue que existe un único morfismo $g : \mathrm{E}(L) \to A$, tal que $g \circ \pi_\theta = h$. De donde se tienn las siguientes igualdades:

$$g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \varepsilon_1 = f.$$

Ahora supóngase que existe otro morfismo $\overline{g} : \mathrm{E}(L) \to A$ tal que $\overline{g} \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. Entonces, por la unicidad de h, se obtiene que $h = \overline{g} \circ \pi_\theta$. Y usando la unicidad del conciente se concluye que $g = \overline{g}$. Para demostrar que g es un morfismo de monoides se recordará como esta definido el monoide $(\mathrm{E}(L), \mu', \eta')$: μ' es el único morfismo tal que $\mu' \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = \pi_\theta \circ \overline{\mu}$ y $\eta' = \pi_\theta \circ \overline{\eta}$. De la definiciones de g y μ', así como el hecho de que h es morfismo de monoides, se siguen las siguientes igualdades:

$$g \circ \mu' \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = g \circ \pi_\theta \circ \overline{\mu} = h \circ \overline{\mu} = \mu \circ (h \otimes h) = \mu \circ (g \otimes g) \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta).$$

Y como $\pi_\theta \otimes \pi_\theta$ es un epimorfismo, se concluye $g \circ \mu' = \mu \circ (g \otimes g)$. De la definición de η' y que h es morfismo de monoides, se sigue lo siguiente:

$$g \circ \eta' = g \circ \pi_\theta \circ \overline{\eta} = h \circ \overline{\eta} = \eta.$$

Por lo tanto g es morfismo de monoides. Resta demostrar que g es morfismo de monoides de Lie, para esto nótese que de la Proposición 2.60 $(\mathrm{E}(L), \gamma_{\mathrm{E}(L)}$ es un monoide de Lie. Así, de las definiciones de $\gamma_{\mathrm{E}(L)}$ y γ_A, el hecho de que g es morfismo de monoides y la naturalidad de β, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
g \circ \gamma_{\mathrm{E}(L)} &= g \circ (\mu' - \mu' \circ \beta_{\mathrm{E}(L),\mathrm{E}(L)}) \\
&= (\mu \circ (g \otimes g)) - (\mu \circ (g \otimes g) \circ \beta_{\mathrm{E}(L),\mathrm{E}(L)}) \\
&= (\mu - \mu \circ \beta_{A,A}) \circ (g \otimes g) = \gamma_A \circ (g \otimes g).
\end{aligned}$$

En consecuencia g es morfismo de monoides de Lie. $\square$

Corolario 3.40. *Sean $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa, (L,γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C},\beta)$, (A,μ_1,η_1) y (B,μ_2,η_2) monoides en $(\mathcal{C},\beta)$, $\psi : \mathrm{E}(L) \to A$ un isomorfismo de monoides y $f : L \to B \in \mathcal{C}$ un morfismo de monoides de Lie. Entonces existe un único morfismo de monoides $g : A \to B$, tal que $g \circ \psi \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$ y $\langle \mathrm{Im}(\tau)\rangle = (I,\theta)$. Más aún, g es morfismo de monoides de Lie.*

Demostración. Por la Proposición 3.39 existe un único morifismo de monoides $h : \mathrm{E}(L) \to B$ tal que $h \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. Considérese $g := h \circ \psi^{-1}$. Como h y ψ^{-1} son morfismo de monoides, g es morfismo de monoides; más aún, comos son morfismos de monoides de Lie, g es morfismo de monoides de Lie. Además se siguen las siguientes igualdades:

$$g \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = h \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f.$$

Para demostrar la unicidad, supóngase que existe otro morfismo de monoides $g' : A \to B$ tal que $g' \circ \psi \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. De la unicidad de h se sigue que $g' \circ \psi = h$ y por lo tanto $g' = h \circ \psi^{-1} = g$. $\square$

Corolario 3.41. *Sean $(\mathcal{C},\beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne, (L,γ) un monoide de Lie en $(\mathcal{C},\beta)$, (A,μ,η) un monoide en $(\mathcal{C},\beta)$ y $f : L \to A \in \mathcal{C}$ un morfismo de monoides de Lie. Entonces existe un único morfismo $g : \mathrm{E}(L) \to A$ de monoides tal que $g \circ \varpi = f$, donde $\varpi := \pi_\theta \circ \varepsilon_1$ y $\langle \mathrm{Im}(\tau)\rangle = (I,\theta)$. Más aún, g es morfismo de monoides de Lie.*

Demostración. Por la Proposición 3.10 existe una categoría de Grothendieck-Deligne severa $(\mathcal{C}',\beta')$ y funtores $\mathbb{K}$-lineales trenzados

$$(F,J) : (\mathcal{C},\beta') \to (\mathcal{C}',\beta') \text{ y } (\overline{F},\overline{\beta}) : (\mathcal{C}',\beta') \to (\mathcal{C},\beta),$$

tales que $F \circ \bar{F} \overset{\theta}{\simeq} 1_{\mathcal{C}'}$ y $\bar{F} \circ F \overset{\rho}{\simeq} 1_{\mathcal{C}}$, como funtores monoidales. De la Proposiciones 2.4 y 3.12, se sigue que $(\mathrm{E}(L)),\mu_2,\eta_2)$, $(F(A),\mu_1',\eta_1')$ y $(F(\mathrm{E}(L)),\mu_2',\eta_2')$ son monoides, donde:

$$\mu_1' = F(\mu_1) \circ J_{A,A},\ \mu_2' = F(\mu_2) \circ J_{\mathrm{E}(L),\mathrm{E}(L)} \text{ y } \eta_i' = F(\eta_i) \circ \varphi.$$

Del Corolario 3.40, la definición de $\Omega : \mathrm{E}(F(L)) \to F(\mathrm{E}(L))$ dado en la Proposición 3.37 y el hecho de que $\psi_1 = 1_{F(X)}$, se sigue que existe un único morfismo de monoides $\overline{g} : F(\mathrm{E}(L)) \to F(A)$ tal que $\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1) = F(f)$. Se demostrará que el morfismo $g := \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho_{\mathrm{E}(L)}^{-1}$ es un morfismo de monoides. De las definiciones de g, μ_1' y μ_2', las naturalidades de ρ y $\overline{J}$, que $\overline{g}$ es morfismo de monoides y que ρ hace conmutar (1.11), se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
g \circ \mu_2 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \circ \mu_2 \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \overline{F}F(\mu_2) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)\otimes \mathrm{E}(L)} \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\mu_2) \circ J_{\mathrm{E}(L),\mathrm{E}(L)}) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{E}(L)),F(\mathrm{E}(L))} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)}) \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\mu_1') \circ \overline{F}(\overline{g} \otimes' \overline{g}) \circ \overline{J}_{F(\mathrm{E}(L)),F(\mathrm{E}(L))} \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)}) \\
&= \mu_1 \circ \rho_{A\otimes A} \circ \overline{F}(J_{A,A}) \circ \overline{J}_{F(A),F(A)} \circ (\overline{F}(\overline{g}) \otimes \overline{F}(\overline{g})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)}) \\
&= \mu_1 \circ (\rho_A \otimes \rho_A) \circ (\overline{F}(\overline{g}) \otimes \overline{F}(\overline{g})) \circ (\rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \otimes \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)}) \\
&= \mu_1 \circ (h \otimes h).
\end{aligned}$$

Además, de la definición de g, la naturalidad de ρ y el hecho de que $\overline{g}$ es un morfismo de monoides, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
g \circ \eta_2 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \circ (\pi_\theta \circ \varepsilon_0) \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_0)) \circ \rho_e^{-1} \\
&= \rho_A \overline{F}F(\eta_1) \circ \rho_e^{-1} = \eta_1.
\end{aligned}$$

Por lo tanto g es un morfismo de monoides. También, de la definición de g, la nauralidad de ρ y que $(F(\mathrm{E}(L)), \mu_2', \eta_2')$ cumple con la propiedad universal del monoide universal envolvente, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 &= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 \\
&= \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g} \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1)) \circ \rho_L^{-1} \\
&= \rho_A \circ \overline{F}F(f) \circ \rho_L^{-1} = f.
\end{aligned}$$

Para demostrar la unicidad, sopóngase que existe otro morfismo de monoides $g' : \mathrm{E}(L) \to A$ tal que $g' \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f$. En consecuencia $F(h') \circ F(\pi_\theta \circ \varepsilon_1) = F(f)$; y de la unicidad de $\overline{g}$ se sigue que $F(g') = \overline{g}$. Por lo tanto,

$$g' = \rho_A \circ \overline{F}F(g') \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} = \rho_A \circ \overline{F}(\overline{g}) \circ \rho^{-1}_{\mathrm{E}(L)} = g.$$

□

Proposición 3.42. *Sean* $(\mathcal{C}, \beta)$ *una categoría de Grothendieck-Deligne severa y* $f : L_1 \to L_2$ *un morfismo de monoides de Lie. Entonces existe un único morfismo de monoides* $\mathrm{E}(f) : \mathrm{E}(L_1) \to \mathrm{E}(L_2)$, *tal que*

$$\mathrm{E}(f) \circ \pi_{\theta_1} \circ \varepsilon_1^1 = \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f,$$

donde $\langle \mathrm{Im}(\tau_i) \rangle = (I_i, \theta_i)$ *para* $i = 1, 2$.

Demostración. De la Proposición 3.19 se tiene que $(\mathrm{T}(L_i), \mu_i, \eta_i)$ es un monoide, donde μ_i es el único morfismo tal que $\mu_i \circ (\varepsilon_k^i \otimes \varepsilon_l^i) = \varepsilon_{k+l}^i$ para todo $k, l \in \mathbb{N}$ e $i = 1, 2$. Y, por la Proposición 3.12, se obtiene que $(\mathrm{E}(L_i), \overline{\mu}_i, \overline{\eta}_i)$ es un monoide, donde $\overline{\mu}_i$ es el único morfismo que cumple $\overline{\mu}_i \circ (\pi_{\theta_i} \otimes \pi_{\theta_i}) = \pi_{\theta_i} \circ \mu_i$ y $\overline{\eta}_i = \pi_{\theta_i} \circ \eta_i$, para $i = 1, 2$. Se demostrará que $\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f$ es un morfismo de monoides de Lie. Del hecho de que f es morfismo de monoides de Lie, la Proposición 3.38, las definiciones de μ_2 y $\overline{\mu_2}$, la naturalidad β y la definición de $\gamma_{\mathrm{E}(L_2)}$, se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f \circ \gamma_{L_1} &= \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ \gamma_{L_2} \circ (f \otimes f) \\
&= (\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_2^2 - \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_2^2 \circ \beta_{L_2,L_2}) \circ (f \otimes f) \\
&= (\pi_{\theta_2} \circ \mu_2 \circ (\varepsilon_1^2 \otimes \varepsilon_1^2) - \pi_{\theta_2} \circ \mu_2 \circ (\varepsilon_1^2 \otimes \varepsilon_1^2) \circ \beta_{L_2,L_2}) \circ (f \otimes f) \\
&= (\overline{\mu}_2 \circ (\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \otimes \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2) - \overline{\mu}_2 \circ \beta_{\mathrm{E}(L_2),\mathrm{E}(L_2)} \circ (\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \otimes \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2)) \circ (f \otimes f) \\
&= (\overline{\mu}_2 - \overline{\mu}_2 \circ \beta_{\mathrm{E}(L_2),\mathrm{E}(L_2)}) \circ (\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f \otimes \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f) \\
&= \gamma_{\mathrm{E}(L_2)} \circ (\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f \otimes \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f$ es un morfismo de monoides de Lie. Por lo tanto, de la Proposición 3.39, existe un único morfismo $\mathrm{E}(f) : \mathrm{E}(L_1) \to \mathrm{E}(L_2)$ tal que $\mathrm{E}(f) \circ \pi_{\theta_1} \circ \varepsilon_1^1 = \pi_{\theta_2} \circ \varepsilon_1^2 \circ f$. $\square$

3.3. Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Se definirán funtores

$$\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to LieMon(\mathcal{C}) \text{ y } \mathrm{E} : LieMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C}).$$

De la Proposición 2.59 y el Corolario 2.61, se tiene la siguiente asignación entre las categorías $Mon(\mathcal{C})$ y $LieMon(\mathcal{C})$:

- $(A, \mu, \eta) \mapsto (A, \gamma_A)$, donde $\gamma_A := \mu - \mu \circ \beta_{A,A}$;
- $f \mapsto f$, para todo morfismo de monoides $f : A_1 \to A_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$,

que define un funtor $\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to LieMon(\mathcal{C})$. Ahora, de las Proposiciones 3.12 y 3.42, se tiene la siguiente asignación entre las categorías $LieMon(\mathcal{C})$ y $Mon(\mathcal{C})$:

- $(L, \gamma) \mapsto (\mathrm{E}(L), \mu, \eta)$;
- $f \mapsto \mathrm{E}(f)$, para todo morfismo de monoides de Lie $f : L_1 \to L_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Esta asignación define un funtor $\mathrm{E} : LieMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C})$.

Teorema 3.43. ***(Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt)***
Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne severa. Entonces el funtor $\mathrm{E} : LieMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C})$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathrm{U} : Mon(\mathcal{C}) \to LieMon(\mathcal{C})$. Más aún, si E es fiel, existe un monomorfismo de monoides de Lie $L \hookrightarrow \mathrm{E}(L)$, para todo monoide de Lie (L, β).

Demostración. Primero se definirá una función

$$\phi_{L,A} : \mathrm{Hom}_{LieMon(\mathcal{C})}(L, \mathrm{U}(A)) \to \mathrm{Hom}_{Mon(\mathcal{C})}(\mathrm{E}(L), A)),$$

para cada monoide de Lie (L, γ_L) y monoide (A, μ_A, η_A) en $(\mathcal{C}, \beta)$. Sea $f : L \to \mathrm{U}(A)$ un morfismo de monoides de Lie; por la Proposición 3.39 existe un único morfismo de monoides $\phi_{L,A}(f) : \mathrm{E}(L) \to A$ tal que

$$\phi_{L,A}(f) \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f,$$

donde $\langle \mathrm{Im}(\tau) \rangle = (I, \theta)$. Así, de la unicidad, se tiene una función $f \mapsto \phi_{L,A}(f)$. Ahora se demostrará que $\phi_{L,A}$ es biyectiva.

(a) Si $\phi_{L,A}(f) = \phi_{L,A}(g)$, entonces
$f = \phi_{L,A}(f) \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = \phi_{L,A}(g) \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = g$. Por lo tanto $\phi_{L,A}$ es inyectiva.

(b) Sea $g : \mathrm{E}(L) \to A$ un morfismo de monoides. Considérese la siguiente composición de morfismos $f := g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 : L \to \mathrm{U}(A)$. De las Proposiciones 3.12 y 3.19 se tiene que $(\mathrm{T}(L), \mu, \eta)$ y $(\mathrm{E}(L), \overline{\mu}, \overline{\eta})$ son monoides, donde μ es el único morfismo que satisface que $\mu \circ (\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j) = \varepsilon_{i+j}$ y $\overline{\mu}$ es el único morfismo que cumple $\overline{\mu} \circ (\pi_\theta \otimes \pi_\theta) = \pi_\theta \circ \mu$. Usando las definiciones de f, μ, $\overline{\mu}$ y γ_A, el Lema 3.38, el hecho de que g es morfismo de monoides y la naturalidad de β, se obtiene:

$$\begin{aligned} f \circ \gamma_L &= g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 \circ \gamma_L \\ &= g \circ (\pi_\theta \circ \varepsilon_2 - \pi_\theta \circ \varepsilon_2 \circ \beta_{L,L}) \\ &= g \circ (\pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) - \pi_\theta \circ \mu \circ (\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_1) \circ \beta_{L,L}) \\ &= g \circ (\overline{\mu} \circ (c\pi\theta \circ \varepsilon_1 \otimes \pi_\theta \circ \varepsilon_1) - \overline{\mu} \circ (\pi_\theta \circ \varepsilon_1 \otimes \pi_\theta \circ \varepsilon_1) \circ \beta_{L,L}) \\ &= \mu_A \circ (f \otimes f) - \mu_A \circ (f \otimes f) \circ \beta_{L,L} \\ &= (\mu_A - \mu_A \circ \beta_{A,A}) \circ (f \otimes f) \\ &= \gamma_A \circ (f \otimes f). \end{aligned}$$

En consecuencia f es un morfismo de monoides de Lie. Entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$\phi_{L,A}(f) \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1 = f = g \circ \pi_\theta \circ \varepsilon_1.$$

Y de la unicidad se sigue que $\phi_{L,A}(f) = g$. Por lo tanto $\phi_{L,A}$ es surjectiva.

De (a) y (b) se obtiene que $\phi_{L,A}$ es bijectiva. Ahora se demostrará que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), A_1) & \xrightarrow{\phi^{-1}_{L_1,A_1}} & \mathrm{Hom}(L_1, \mathrm{U}(A_1)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1),f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(L_1,\mathrm{U}(f))} \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), A_2) & \xrightarrow[\phi^{-1}_{L_1,A_2}]{} & \mathrm{Hom}(L_1, \mathrm{U}(A_2)) \end{array},$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_2), A_1) \arrow[r, "\phi^{-1}_{L_2,A_1}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{E}(g),A_1)"'] & \mathrm{Hom}(L_2, \mathrm{U}(A_1)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,\mathrm{U}(A_1))"] \\
\mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), A_1) \arrow[r, "\phi^{-1}_{L_1,A_1}"'] & \mathrm{Hom}(L_1, \mathrm{U}(A_1))
\end{tikzcd}$$

para todo morfismo de monoides $f : A_1 \to A_2$ y morfismo de monoides de Lie $g : L_1 \to L_2$ en $(\mathcal{C}, \beta)$. De la definición de los funtores $\mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), -)$, $\mathrm{Hom}(L_1, -)$ y la función ϕ, se siguen las siguientes igualdades para $h \in \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), A_1)$:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}_{L_1,A_2} \circ \mathrm{Hom}(\mathrm{E}(L_1), f)(h) &= \phi^{-1}_{L_1,A_2}(f \circ h) \\
&= (f \circ h) \circ \pi_{\theta_1} \circ \varepsilon^1_1 \\
&= \mathrm{Hom}(L_1, \mathrm{U}(f)) \circ \phi^{-1}_{L_1,A_1}(h).
\end{aligned}$$

La demostración de la conmutatividad del otro diagrama es análoga. Por lo tanto $(\mathrm{E}, \mathrm{U}, \phi)$ es una adjunción. Entonces existen transformaciones naturales $\rho : 1_{LieMon(\mathcal{C})} \to UE$ y $\theta : EU \to 1_{Mon(\mathcal{C})}$ que cumplen las identidades tringulares de adjunción. Si E es fiel, se sabe que ρ_L es monomorfismo para todo monoide de Lie (L, γ) en $(\mathcal{C}, \beta)$. □

Corolario 3.44. *Sea $(\mathcal{C}, \beta)$ una categoría de Grothendieck-Deligne. Entonces existen funtores*

$$F : LieMon(\mathcal{C}) \to Mon(\mathcal{C}) \text{ y } G : Mon(\mathcal{C}) \to LieMon(\mathcal{C}),$$

tales que F es adjunto izquierdo de G. Más aún, si F es fiel, existe un monomorfismo de monoides de Lie $L \hookrightarrow \mathrm{E}(L)$, para todo monoide de Lie (L, γ) en $(\mathcal{C}, \beta)$.

Demostración. Es consecuencia las Proposiciones 1.22, 2.50, 2.8 y 2.57, del Teorema 3.43 y el hecho de que la composición de adjunciones es adjunción. □

Capítulo 4

Super Álgebra Lineal

Como un ejemplo de categoría de Grothendieck-Deligne se tiene a los super espacios vectoriales. La importancia de esta categoría es su utilidad para la física, ya que la forma de descrbir la super simetría es a través de super espacios vectoriales El objetivo de este capítulo será dar una introducción a esta categoría, usando todo lo visto en los capítulos anteriores. De esta manera se definirán los conceptos de módulo y módulos libres, en la categoría de super espacios vectoriales. Como resultado principal se dará el concepto de ***traza*** en esta categoría, para lo cual haremos uso del enfoque categórico visto previamente.

Vale la pena mencionar que los conceptos y resultados de este capítulo son apliamente conocidos, sin embargo se les da un tratamiento bastante escueto. Un ejemplo de este enfoque se puede ver en [19], y se podrá notar que las demostraciones aquí dadas son mucho más detalladas.

4.1. Super Espacios Vectoriales

De aquí en adelante se usarán campos de característica cero.

Definición 4.1. (a) Un ***super*** $\mathbb{K}$***-espacio vectorial***, es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, $\mathbb{Z}_2$ graduado, es decir, V tiene una descomposición

$$V = V_0 \oplus V_1,$$

donde V_i es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial para $i \in \mathbb{Z}_2$. Si $\dim(V_i) = d_i$ para $i \in \mathbb{Z}_2$, entonces V tiene dimensión $d_0|d_1$. Los elementos en $V_0 \cup V_1$ son llamados ***homogéneos*** y la función $p : (V_0 \cup V_1) - \{0\} \to \mathbb{Z}_2$ definida como

$$x \mapsto 0 \text{ ó } x \mapsto 1$$

dependiendo si $x \in V_0$ ó $x \in V_1$, se llama ***paridad***. Los elementos con paridad cero se dirá que son ***pares*** y los elementos con paridad uno se dirá que son ***impares***.

(b) Sean V y W super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, un morfismo $f : V \to W$ en $\mathbb{K}$-Vec es un ***morfismo de super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales*** si se cumple lo siguiente:

$$f(V_0) \subseteq W_0 \text{ y } f(V_1) \subseteq W_1.$$

Notación 4.2. Se denotará por $\mathbb{K}\text{-Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ a la categoría de super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

Observación 4.3. A cada super espacio vectorial $V = V_0 \oplus V_1$ se le puede asociar otro super espacio vectorial $\prod V$ de la siguiente manera: como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales $V = \prod V$, pero la paridad se invierte, es decir

$$(\prod V)_i = V_{i+1} \text{ para } i \in \mathbb{Z}_2.$$

De esta manera $\prod V = V_1 \oplus V_0$.

Definición 4.4. Sean $V, W \in \mathbb{K}\text{-Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

(a) Una transformación lineal $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ***preserva el grado*** sí f es un morfismo de super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales.

(b) Una transformación lineal $f \in \mathcal{L}(V, W)$ ***intercambia el grado*** sí:

$$f(V_i) \subseteq W_{i+1}.$$

Proposición 4.5. *Para cada $V, W \in \mathbb{K}\text{-Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ considérense los siguientes conjuntos: $\mathcal{L}(V, W)_0 := \{f \in \mathcal{L}(V, W) | f \text{ preserva el grado}\}$ y $\mathcal{L}(V, W)_1 := \{f \in \mathcal{L}(V, W) | f \text{ intercambia el grado}\}$. Entonces*

$$\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(V, W)_0 \oplus \mathcal{L}(V, W)_1.$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Considérense los siguientes morfismos:

$$f_{ij} := \mu_{W_i} \pi_{W_i} \circ f \circ \mu_{V_j} \pi_{V_j} \in \mathcal{L}(V, W) \text{ para } i, j = 0, 1,$$

donde π_{V_i}, π_{W_i}, μ_{V_i} y μ_{W_i} son las proyecciones y las inclusiones, respectivamente. En consecuencia $f = f_0 + f_1$, con

$$f_0 := f_{00} + f_{11} \in \mathcal{L}(V, W)_0 \text{ y } f_1 := f_{10} + f_{01} \in \mathcal{L}(V, W)_1.$$

Por lo tanto $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(V, W)_0 + \mathcal{L}(V, W)_1$. Para ver que la suma es directa, tómese $f \in \mathcal{L}(V, W)_0 \cap \mathcal{L}(V, W)_1$. Entonces, para todo $x \in V_0$, se tiene que :

$$f(x) \in W_0 \cap W_1.$$

Así $f|_{V_0} = 0$. Análogamente se obtiene que $f|_{V_1} = 0$. En consecuencia $f = 0$, y de esta manera se sigue que:

$$\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(V, W)_0 \oplus \mathcal{L}(V, W)_1.$$

□

Definición 4.6. Sean $V = V_0 \oplus V_1$ un super espacio vectorial de dimensión finita y $f \in \mathbf{End}(V) := \mathcal{L}(V,V)$. Se define la ***super traza*** de f como:

$$str(f) := tr(f_{00}) - tr(f_{11}),$$

donde $f_{ij} := \pi_{W_i} \circ f \circ \mu_{V_j} \in \mathcal{L}(V_j, V_i)$ para $i, j = 0, 1$ y tr es la traza de transformaciones lineales.

Lema 4.7. *Sean $V \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ y $f, g \in$ **End**(V). Entonces se tiene la siguiente igualdad para cualesquiera elementos homogéneos:*

$$str(f \circ g) = (-1)^{p(f)p(g)} str(g \circ f).$$

Demostración. Se sigue de la definiciones de la super traza, $\mathcal{L}(V,V)_i$, y que $tr(X \circ Y) = tr(Y \circ Y)$ para todo morfismo $X, Y \in \mathbf{End}(V)$. □

Notación 4.8. Denotaremos por $\mathfrak{sl}(V)$ al subespacio de $\mathfrak{gl}(V)$ que consiste en transformaciones lineales con super traza nula, es decir, $f \in \mathfrak{sl}(V)$ sí $str(f) = 0$.

A continuación se verá que $\mathbb{K}$-$\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es una categoría de Grothendieck-Delinge. Primero se observará que se tienen dos bifuntores:

$$\otimes' : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2} \times \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2} \to \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$$

que harán de $\mathbb{K}$-$\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ una categoría monoidal:

(1) Se define el bifuntor $\otimes'$ como sigue:

- Para $V = V_0 \oplus V_1, W = W_0 \oplus W_1 \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$, defínase $V \otimes' W$ en cada componente como:

$$(V \otimes' W)_0 := (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1) \text{ y } (V \otimes' W)_1 := (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0),$$

- Para $f, g \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$, defínase $f \otimes' g$ en cada componente como:

$$(f \otimes' g)_0 := (f_0 \otimes g_0) \oplus (f_1 \otimes g_1) \text{ y } (f \otimes' g)_1 := (f_0 \otimes g_1) \oplus (f_1 \otimes g_0).$$

Donde $\otimes$ denota al producto tensorial en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$. Usando la propiedad universal de $\otimes$ y el hecho de que preserva coproductos, se demuestra que $\otimes'$ es un producto tensorial. También, del hecho de que $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ es una categoría monoidal, se puede verificar que $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es una categoría monoidal con $e := \mathbb{K} \oplus 0$.

(2) Se puede considera a la graduación de los super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales como suma directa interna, es decir, sí $V = V_0 \oplus V_1$, entones $V_i \subseteq V$ para $i \in \mathbb{Z}_2$ y $V_0 \cap V_1 = 0$. En consecuencia, usando que todo espacio vectorial es plano, se sigue lo siguiente para todo $V, W \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$:

$$V \otimes W = (V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1) \oplus (V_0 \otimes W_1) \oplus (V_1 \otimes W_0),$$

donde $\otimes$ es el producto tensorial en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$. Por lo tanto, de las propiedades del producto tensorial en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, se sigue puede verificar que $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es una categoría monoidal con $e := \mathbb{K}$.

Estas dos estructuras de categoría monoidal para $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ son esencialmente la misma, la diferencia solo se nota cuando se hacen cálculos, ya que en la primera se está cargando con isomorfismos. En consecuencia se usarán indistintamente y se denotará igual. Como $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es una subcategoría de $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, solo resta darle una trenza simétrica a $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ para que sea una categoría de Grothendieck-Deligne. Esto se puede hacer de dos maneras:

(a) Se le puede dar la trenza simétrica como en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, es decir por medio de la propiedad universal del producto tensorial $\otimes'$. En consecuencia se tendría la siguiente correspondencia para todo $V, W \in \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$

$$\beta_{V,W} : V \otimes' W \to W \otimes V,\ (v \otimes' w) \mapsto (w \otimes v).$$

(b) Se define la trenza simétrica $\beta_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ en los elementos homogéneos como sigue:

$$v \otimes w \mapsto (-1)^{p(v)p(w)} w \otimes v,$$

y se extenderán mediante la propiedad universal del coproducto.

En lo que resta del capítulo solo se usará la trenza (b) definida anteriormente. Así se concluye que $(\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}, \beta)$ es una categoría de Grothendieck-Deligne.

4.2. Super Álgebras y Super Módulos

Definición 4.9. Una ***super álgebra*** es un monoide (A, μ, η) en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

Observación 4.10. Sea (A, μ, η) una super álgebra.

(1) De la definición de morfismo de super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, se sigue que

$$\mu(A_i \otimes A_j) \subseteq A_{i+j} \text{ para } i, j = 0, 1.$$

En consecuencia $p(\mu(v \otimes w)) = p(v) + p(w)$.

(2) Del inciso anterior se sigue que $\mu(A_1 \otimes A_1) \subseteq A_0$.

(3) A es un anillo asociativo con unidad $\eta(1_{\mathbb{K}})$ y el producto se denotará por:

$$a \cdot b := \mu(a \otimes b),$$

para todo $a, b \in A$.

Lema 4.11. *Sea* (A, μ, η) *una super álgebra. Entonces* (A_0, μ_0, η_0) *es un monoide (álgebra) en la categoría* $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$*, donde* $\mu_0 := \mu|_{A_0 \otimes A_0}$ *y* $\eta_0 := \pi_0 \circ \eta$ *(*$\pi_0 : A \to A_0$ *es la proyección natural).*

Demostración. Se sigue del hecho de que (A, μ, η) es un monoide. □

Observación 4.12. Sea (A, μ, η) una super álgebra conmutativa, es decir, un monoide conmutativo en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

(1) $\mu \circ \beta_{A.A} = \mu$ y por lo tanto se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera elementos homogéneos:

$$\mu(v \otimes w) = \mu((-1)^{p(v)p(w)} w \otimes v) = (-1)^{p(v)p(w)} \mu(w \otimes v).$$

(2) Del inciso anterior se sigue que $\mu|_{A_1 \otimes A_1} = 0$.

El siguiente ejemplo nos dice que hay super álgebras conmutativas en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, que no son conmutativas en $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

Ejemplo 4.13. Sea $A := \mathbb{K}[t]/\langle t^2 - 1 \rangle$ el álgebra de polinomios en la variable t, tal que $\pi(t)^2 = \pi(1)$, donde $\pi : \mathbb{K}[t] \to A$ es la proyección canónica. Entonces

$$A = \pi(\mathbb{K}) \oplus \pi(\mathbb{K}t);$$

de manera que, si $A_0 := \pi(\mathbb{K})$ y $A_1 := \pi(\mathbb{K}t)$, se obtiene que A es una super álgebra. Nótese que A es una super álgebra conmutativa en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, pero no en $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ ya que $\pi(t)^2 = \pi(1) \neq 0$.

Notación 4.14. Debido Ejemplo 4.13 haremos distinción entre super álgebras conmutativas en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ y en $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$, a éstas últimas les llamaremos super álgebras ***super conmutativas***.

Definición 4.15. Una ***super álgebra de Lie*** es un monoide de Lie $(\mathfrak{g}, \gamma)$ en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

Observación 4.16. Sea $(\mathfrak{g}, \gamma)$ una super álgebra de Lie. De la definición de super álgebra de Lie se siguen las siguientes igualdades para cualesquiera elementos homogéneos:

(a) $\gamma(v \otimes w) + (-1)^{p(v)p(w)} \gamma(w \otimes v) = 0$;

(b) Se cumple la ***super identidad de Jacobi***:

$$\gamma(\gamma(v \otimes w) \otimes z) + (-1)^{p(w)p(z)+p(v)p(z)} \gamma(\gamma(z \otimes v) \otimes w) + \\ (-1)^{p(v)p(w)+p(v)p(z)} \gamma(\gamma(w \otimes z) \otimes v) = 0.$$

En consecuencia se tiene los siguientes resultados:

(1) Si $\gamma_0 := \gamma \mid_{\mathfrak{g}_0}$, entonces se obtiene un álgebra de Lie ordinaria $(\mathfrak{g}_0, \gamma_0)$;

(2) Si $\gamma_1 := \gamma \mid_{\mathfrak{g}_1}$, entonces se siguen las siguientes igualdades:

$\gamma_1(v \otimes w) = \gamma_1(w \otimes v)$ y $\gamma(\gamma(v \otimes w) \otimes z) + \gamma(\gamma(z \otimes v) \otimes w) + \gamma(\gamma(w \otimes z) \otimes v) = 0.$

Definición 4.17. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.

- Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V es un ***$\mathfrak{g}$-módulo*** si existe una función $\mathfrak{g} \times V \to V$ (denotada por $(x, v) \mapsto x \cdot v$) que satisface lo siguiente:

  (a) $(\lambda x + y) \cdot v = \lambda(x \cdot v) + y \cdot v$,

  (b) $x \cdot (\lambda v + w) = \lambda(x \cdot v) + x \cdot w$,

  (c) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$;

  para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in \mathfrak{g}$ y $v, w \in V$.

- Sean V y W $\mathfrak{g}$-módulos. Un ***morfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*** es una transformación lineal $\phi : V \to W$, tal que:

  $$\phi(x \cdot v) = x \cdot \phi(v),$$

  para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $v \in V$.

Proposición 4.18. *Sea $(\mathfrak{g}, \gamma)$ un super álgebra de Lie. Entonces $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo y $\gamma : \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ es un morfismo simétrico de $\mathfrak{g}_0$-módulos.*

Demostración. De la Observación 4.16 se tiene que $\mathfrak{g}_0$ es un álgebra de Lie en la categoría Mod($\mathbb{K}$). Consíderese la asignación $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}_0 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)$ definido como sigue:

$$\mathrm{ad}(v)(z) := \gamma(v \otimes z),$$

para todo $v \in \mathfrak{g}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$. Del hecho de que $\otimes$ es $\mathbb{K}$-bilineal y γ es $\mathbb{K}$-lineal, se sigue que ad está bien definidida y además es un morfismo $\mathbb{K}$-lineal. Se demostrará que ad es morfismo de álgebras de Lie. Usando las definiciones de $\gamma_{\mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)}$, ad y γ, se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera $v, w \in \mathfrak{g}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$:

$$\begin{aligned}
(\gamma_{\mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)} \circ (\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad})(v \otimes w))(z) &= (\gamma_{\mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)}(\mathrm{ad}(v) \otimes \mathrm{ad}(w))(z) \\
&= (\mathrm{ad}(v) \circ \mathrm{ad}(w) - \mathrm{ad}(v) \circ \mathrm{ad}(w))(z) \\
&= \mathrm{ad}(v)(\gamma(w \otimes z)) - \mathrm{ad}(w)(\gamma(v \otimes z)) \\
&= \gamma(v \otimes \gamma(w \otimes z)) - \gamma(w \otimes \gamma(v \otimes z)) \\
&= -\gamma(\gamma(z \otimes v) \otimes w) - \gamma(\gamma(w \otimes z) \otimes v) \\
&= \gamma(\gamma(v \otimes w) \otimes z) = (\mathrm{ad} \circ \gamma(v \otimes w))(z).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\gamma_{\mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)} \circ (\mathrm{ad} \otimes \mathrm{ad}) = \mathrm{ad} \circ \gamma$. Entonces se define la acción $\overline{\mathrm{ad}} : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$ como sigue:

$$\overline{\mathrm{ad}}(v,z) := \mathrm{ad}(v)(z),$$

para todo $v \in \mathfrak{g}_0$ y $z \in \mathfrak{g}_1$. De la definición se obtiene que $\overline{\mathrm{ad}}$ es $\mathbb{K}$-bilineal y usando las igualdades anteriores se puede demostrar que cumple la siguiente igualdad:

$$\overline{\mathrm{ad}}(\gamma(v \otimes w), z) = \overline{\mathrm{ad}}(v, \overline{\mathrm{ad}}(w,z)) - \overline{\mathrm{ad}}(w, \overline{\mathrm{ad}}(v,z)),$$

para cualesquiera $v, w \in \mathfrak{g}_0$ y $\mathfrak{g}_1$. Por lo tano $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo. Análogamente a como se demostró que $\mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo, se puede probar que $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ es un $\mathfrak{g}_0$-módulo vía la acción:

$$(v, (w \otimes z)) \xmapsto{\phi} \gamma(v \otimes w) \otimes z + w \otimes \gamma(v \otimes z),$$

con $v \in \mathfrak{g}_0$ y $w, z \in \mathfrak{g}_1$. Entonces, de la definición de ϕ, la linealidad de γ y la super identidad de Jacobi, se obtienen las siguientes igualdades para todo $v \in \mathfrak{g}_0$ y $w, z \in \mathfrak{g}_1$:

$$\begin{aligned}
\gamma(\phi(v, w \otimes z)) &= \gamma(\gamma(v \otimes w) \otimes z + w \otimes \gamma(v \otimes z)) \\
&= \gamma(\gamma(v \otimes w) \otimes z) + \gamma(w \otimes \gamma(v \otimes z)) \\
&= \gamma(v \otimes \gamma(w \otimes z)).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\gamma : \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_0$ es un morfismo de $\mathfrak{g}_0$-módulos. □

Definición 4.19. (a) Sea (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa. Un ***A-super módulo*** a izquierda (derecha) es un A-módulo a izquierda (derecha) en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

(b) Sean (M, q) y (N, q') A-super módulos izquierdos (derechos). Un morfismo $f : M \to N$ es de ***A-super módulos izquierdos (derechos)***, si es un morfismo de A-módulos izquierdos (derechos) en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.

Observación 4.20. Sea (A, μ, η) una super álgebra y (M, q) un A-módulo izquierdo (derecho).

(1) Entonces $q : A \otimes M \to M$ es un morfismo de super espacios vectoriales, por lo tanto se cumple que

$$p(q(a \otimes m)) = p(a) + p(m),$$

para cualesquiera elementos homogéneos $a \in A$ y $m \in M$. En particular, M_0 y M_1 son estables bajo A_0 y se intercambian bajo A_1. Más aún, $M \in \mathrm{Mod}(A_0)$.

(2) De la Observación 4.3 se tiene que $\prod M$ es un super espacio vectorial. En consecuencia $(\prod M, q')$ es un A-super módulo izquierdo (derecho) mediante la acción:

$$q'(a \otimes m) := q(a \otimes m).$$

Lema 4.21. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo a izquierda (derecha). Entonces (M_i, q_i) es un A_0-módulo en* $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$ *para $i \in \mathbb{Z}_2$. Donde $q_i : A_0 \otimes M_i \to M_i$ es la siguiente composición:*

$$A_0 \otimes M_i \xrightarrow{1_{A_0} \otimes j_i} A_0 \otimes M \xrightarrow{q} M \xrightarrow{\pi_i} M_i,$$

con j_i, π_i la inclusión y proyección natural respectivamente.

Demostración. Usando la definición de q_i, que M_i es estable bajo A_0, el hecho de que (M, q) es un A-módulo a izquierda y que (A_0, μ_0, η_0) es un monoide en $\mathrm{Mod}(\mathbb{K})$, se obtienen las siguientes igualdades para todo $a, a' \in A_0$ y $m \in M_i$:

$$\begin{aligned}
q_i \circ (1_{A_0} \otimes q_i) \circ \alpha_{A_0,A_0,M_i}((a \otimes a') \otimes m) &= q_i \circ (1_{A_0} \otimes q_i)(a \otimes (a' \otimes m)) \\
&= q_i(a \otimes q(a' \otimes m)) \\
&= q \circ (a \otimes q(a' \otimes m)) \\
&= q \circ (1_A \otimes q) \circ \alpha_{A,A,M}((a \otimes a') \otimes m) \\
&= q \circ (\mu \otimes 1_M)((a \otimes a') \otimes m) \\
&= q(\mu_0(a \otimes a') \otimes m) \\
&= q_i(\mu_0(a \otimes a') \otimes m) \\
&= q_i \circ (\mu_0 \otimes 1_{M_0})((a \otimes a') \otimes m).
\end{aligned}$$

La igualdad $q_i \otimes (\eta_0 \otimes 1_{M_i}) = l_{M_i}$ se demuestra análogamente. Por lo tanto (M_i, q_i) es un A_0-módulo a izquierda. □

Proposición 4.22. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo a izquierda. Entonces $(M, \overline{q})$ es un A-super módulo derecho, con $\overline{q} : M \otimes A \to M$ definido en elementos homogéneos como sigue:*

$$\overline{q}(m \otimes a) := (-1)^{p(a)p(m)} q(a \otimes m).$$

Demostración. Usando la definición de $\overline{q}$, el hecho de que (M, q) es un monoide y que $(A, \mu\eta)$ es una super álgebra super conmutativa, se obtienen las siguientes igualdades para elementos homogéneos $a, a' \in A$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned}
&\overline{q} \circ (\overline{q} \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{M,A,A}(m \otimes (a \otimes a') = \overline{q} \circ (\overline{q} \otimes 1_A)((m \otimes a) \otimes a') \\
&= (-1)^{p(a)p(m)} \overline{q}(q(a \otimes m) \otimes a') \\
&= (-1)^{(p(a)p(m) + p(q(a \otimes m))p(a')} q(a' \otimes q(a \otimes m)) \\
&= (-1)^{p(a)p(m) + p(q(a \otimes m))p(a')} q \circ (1_A \otimes q) \circ \alpha_{A,A,M}((a' \otimes a) \otimes m) \\
&= (-1)^{p(a)p(m) + p(a)p(a') + p(m)p(a')} q \circ (\mu \otimes 1_M)((a' \otimes a) \otimes m) \\
&= (-1)^{p(a)p(m) + p(m)p(a')} q((-1)^{p(a)p(a')} \mu(a' \otimes a) \otimes m) \\
&= (-1)^{p(m)p(\mu(a \otimes a'))} q(\mu(a \otimes a') \otimes m) \\
&= \overline{q}(m \otimes \mu(a \otimes a')) \\
&= \overline{q} \circ (1_M \otimes \mu)(m \otimes (a \otimes a')).
\end{aligned}$$

La demostración de la conmutatividad de los diagramas (2.2) es análoga. □

Corolario 4.23. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo izquierdo. Entonces M es un A-A-bimódulo en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$.*

Demostración. De la Proposición 4.22 se sabe que $(M, \overline{q})$ es un A-super módulo derecho. De la definición de $\overline{q}$, que (M, q) es un A-super módulo izquierdo y que $(M, \overline{q})$ es un A-super módulo derecho, se tienen lo siguiente para elementos homogéneos $a, a' \in A$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned}
&q \circ (1_A \otimes \overline{q}) \circ \alpha_{A,M,A}((a \otimes m) \otimes a') = q \circ (1_A \circ \overline{q})(a \otimes (m \otimes a')) \\
&= (-1)^{p(m)p(a')} q(a \otimes q(a' \otimes m)) \\
&= (-1)^{p(m)p(a')} q \circ (1_A \otimes q) \circ \alpha_{A,A,M}((a \otimes a') \otimes m) \\
&= (-1)^{p(m)p(a')} q \circ (\mu \otimes 1_M)((a \otimes a') \otimes m) \\
&= (-1)^{p(m)p(a')+p(m)p(\mu(a\otimes a'))} \overline{q}(m \otimes \mu(a \otimes a')) \\
&= (-1)^{p(m)p(a')+p(m)p(a)+p(m)p(a')} \overline{q} \circ (1_M \otimes \mu)(m \otimes (a \otimes a')) \\
&= (-1)^{p(m)p(a)} \overline{q} \circ (\overline{q} \otimes 1_A) \circ \alpha^{-1}_{M,A,A}(m \otimes (a \otimes a')) \\
&= (-1)^{p(m)p(a)} \overline{q} \circ (\overline{q} \otimes 1_M)((m \otimes a) \otimes a') \\
&= \overline{q}(q(a \otimes m) \otimes a') \\
&= \overline{q} \circ (q \otimes 1_A)((a \otimes m) \otimes a').
\end{aligned}$$

En consecuencia $(M, q, \overline{q})$ es un A-A-bimódulo en la categoría $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$. □

Observación 4.24. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo izquierdo.

(1) Por la Proposición 4.22 se tiene que (M, q') es un A-super módulo derecho. En este caso $\prod M$ es un A-super módulo derecho mediante la acción dada en la Observación 4.20 (2). Pero la estructura de $\prod M$ como A-super módulo izquierdo cambia a la siguiente:

$$q''(a \otimes m) := (-1)^{p(a)} q(a \otimes m).$$

Esto se hace con la finalidad de que la estructuras de A-super módulo izquierdo y derecho de $\prod M$ sean compatibles.

(2) Debido al Corolario 4.23, a menos que se indique lo contrario, se estará trabajando con super módulos izquierdos.

Notación 4.25. Para (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, se denotará por $SMod(A)$ a la categoría de A-super módulos.

Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y $(M, q_1), (N, q_2)$ A-super módulos. Considérese el siguiente conjunto:

$$\underline{\mathbf{Hom}}(M, N) := \{T \in \mathcal{L}(M, N) | T(q_1'(m \otimes a)) = q_2'(T(m) \otimes a) \, \forall a \in A \, \forall m \in M\},$$

donde (M, q_1') y (N, q_2') son A-super módulos a derecha, definidos en la Proposición 4.22. Es claro de la definición que $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathcal{L}(M, N)$. Más aún, la siguiente Proposición dará como resultado que es un super $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Proposición 4.26. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y $(M, q_1), (N, q_2)$ A-super módulos. Entonces $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$ es un super $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Demostración. Considérense los siguientes conjuntos:

$\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0 := \{T \in \mathcal{L}(M, N)_0 | T(q_1(a \otimes m)) = q_2(a \otimes T(m)) \, \forall a \in A \, \forall m \in M\}$;

$\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1 :=$
$\big\{T \in \mathcal{L}(M, N)_1 | \, \mathrm{T}(q_1(a \otimes m)) = (-1)^{p(a)} q_2(a \otimes T(m)) \, \forall a \in A_0 \cup A_1 \, \forall m \in M\big\}$.

De las definiciones se puede demostrar que $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_i$ es un $\mathbb{K}$-subespacio vectorial de $\mathcal{L}(M, N)_i$, para $i \in \mathbb{Z}_2$. En consecuencia

$$\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0 \cap \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1 = 0.$$

Sean $T \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0$, $a \in A$ y $m \in M$. Usando las definiciones de q_i' $(i \in \mathbb{Z}_2)$ y el hecho de que $T \in \mathcal{L}(M, N)_0$, se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} T(q_1'(m \otimes a)) &= T((-1)^{p(a)p(m)} q_1(a \otimes m)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)} T(q_1(a \otimes m)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)} q_2(a \otimes T(m)) \\ &= (-1)^{p(a)p(T(m))} q_2(a \otimes T(m)) \\ &= q_2'(T(m) \otimes a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0 \subseteq \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$. Análogamente se demuestra que $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1 \subseteq \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$. De la Proposición 4.5 se sabe que para todo $T \in \mathcal{L}\mathrm{Hom}(M, N)$ existen $T_i \in \mathbf{Hom}(M, N)_i$ tales que

$$T = T_0 + T_1.$$

Se demostrará que $T_i \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$. Usando la definición de T_0 y que $T \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$, se obtienen las siguientes igualdades para todo $a \in A$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned} &T_0(q_1'(m \otimes a)) = \mu_{W_0} \pi_{W_0} T \mu_{V_0} \pi_{V_0} q_1'(m \otimes a) + \mu_{W_1} \pi_{W_1} T \mu_{V_1} \pi_{V_1} q_1'(m \otimes a) \\ &= \mu_{W_0} \pi_{W_0} T(q_1'(m_0 \otimes a_0) + q_1'(m_1 \otimes a_1)) + \mu_{W_1} \pi_{W_1} T(q_1'(m_1 \otimes a_0) + q_1'(m_0 \otimes a_1)) \\ &= \mu_{W_0} \pi_{W_0} (q_2'(T(m_0) \otimes a_0) + q_2'(T(m_1) \otimes a_1)) + \mu_{W_1} \pi_{W_1} (q_2'(T(m_1) \otimes a_0) + q_2'(T(m_0) \otimes a_1)) \\ &= q_2'(T(m_0)_0 \otimes a_0) + q_2'(T(m_1)_1 \otimes a_1) + q_2'(T(m_1)_1 \otimes a_0) + q_2'(T(m_0)_0 \otimes a_1) \\ &= q_2'((T(m_0)_0 + T(m_1)_1) \otimes a_0) + q_2'((T(m_0)_0 + T(m_1)_1) \otimes a_1) \\ &= q_2'(T_0(m) \otimes a). \end{aligned}$$

Por lo tanto $T_0 \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$. Análogamente se demuestra para $i = 1$. Resta demostrar que $T_i \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_i$, para $i \in \mathbb{Z}_2$. Usando las definiciones de q_i' ($i \in \mathbb{Z}_2$) y el hecho de que $T_0 \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$, se tiene lo siguiente para todo $a \in A$ y $m \in M$:

$$\begin{aligned} T_0(q_1(a \otimes m)) &= T_0((-1)^{p(a)p(m)} q_1'(m \otimes a)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)} T_0(q_1'(m \otimes a)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)} q_2'(T_0(m) \otimes a) \\ &= (-1)^{p(a)p(T_0(m))} q_2'(T_0(m) \otimes a) \\ &= q_2(a \otimes T_0(m)). \end{aligned}$$

En consecuencia $T_0 \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0$. Análogamente se demuestra que $T_1 \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1$. Por lo tanto

$$\underline{\mathbf{Hom}}(M, N) = \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0 \oplus \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1.$$

□

Notación 4.27. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo. Denotaremos por $\underline{\mathbf{End}}(M) := \underline{\mathbf{Hom}}(M, M)$.

Observación 4.28. (a) Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) y (N, q') A-super módulos. Entonces $\underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$ es un A-super módulo con la acción

$$a \cdot f \longmapsto af,$$

donde $(af)(m) := q'(a \otimes f(m))$ para todo $m \in M$.

(b) Al igual que en la categoría $\mathrm{Mod}(A)$,

$$\underline{\mathbf{Hom}}(-, N) : SMod(A) \to SMod(A) \text{ y } \underline{\mathbf{Hom}}(N, -) : SMod(A) \to SMod(A)$$

son funtores para todo $N \in SMod(A)$.

Definición 4.29. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-módulo. Un A-módulo (N, q') es un A-***super submódulo*** de M, si la inclusión natural $i : N \hookrightarrow M$ es un morfismo de super espacios vectoriales y de A-módulos.

Proposición 4.30. *Sean (A, μ, η) una super álgebra y $f : (M, q) \to (M, \overline{q})$ un morfismo de A-super módulos. Entonces* $\mathrm{Nuc}(f)$ *es un A-super submódulo de M y* $\mathrm{CoNuc}(f)$ *es un A-super módulo.*

Demostración. Como $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es una categoría abeliana, $i_f : \mathrm{Nuc}(f) \to M$ y $c_f : N \to \mathrm{CoNuc}(f)$ son morfismos de super espacios vectoriales. Más aún, como $\mathbb{K}\text{-}\mathrm{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$ es categoría de Grothendieck-Deligne,

$$c_{1_A \otimes f} = 1_A \otimes c_f.$$

Solo demostrará que $\mathrm{Nuc}(f)$ es un A-super submódulo, ya que la demostración para $\mathrm{CoNuc}(f)$ es totalmente análoga. Considérese la siguiente igualdad:

$$f \circ q \circ (1_A \otimes i_f) = \overline{q} \circ (1_A \otimes f) \circ (1_A \otimes i_f) = 0.$$

De la propiedad universal del núcleo se sigue que existe un único morfismo de super espacios vectoriales $q' : A \otimes \mathrm{Nuc}(f) \to \mathrm{Nuc}(f)$ tal que,

$$i_f \circ q' = q \circ (1_A \otimes i_f).$$

Así, usando que i_f es la inclusión natural, se puede demostrar que $(\mathrm{Nuc}(f), q')$ es un A-módulo. Por lo tanto $\mathrm{Nuc}(f)$ es un A-super submódulo de M. □

Corolario 4.31. *Sean (A, μ, η) una super álgebra y $f : (M, q) \to (M, q')$ un morfismo de A-super módulos. Entonces* $\mathrm{Im}(f)$ *es un A-super submódulo de N.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.30 y el hecho de que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Nuc}(\mathrm{CoNuc}(f)).$$

□

Para (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) un A-super módulo derecho y (N, q') un A-super módulo izquierdo, se puede construir el producto tensorial $M \otimes_A N$ en $\mathrm{Mod}(A)$ de la forma usual. La siguiente proposición da como resultado que $M \otimes_A N$ es un super $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Proposición 4.32. *Sean (A, μ, η) una super álgebra, (M, q) un A-super módulo a derecha y (N, q') un A-super módulo a izquierda. Entonces*

$$M \otimes_A N \simeq (M \otimes N)/\,\mathrm{Im}(\sigma),$$

donde $\sigma := (q \otimes 1_N) - (1_M \otimes q') \circ \alpha_{M,A,N} : (M \otimes A) \otimes N \to M \otimes N.$

Demostración. Considérese las inclusiones $\iota : M \times N \to M \otimes N$ y $\iota' : M \times N \to M \otimes_A N$, que son consecuencia de la definición de producto tensorial. Defínase un morfismo $f : M \times N \to (M \otimes N)/\,\mathrm{Im}(\sigma)$ como sigue:

$$f(m, n) := \pi \circ \iota(m, n) = \pi(m \otimes n),$$

donde $\pi : M \otimes N \to (M \otimes N)/\,\mathrm{Im}(\sigma)$ es la proyección canónica. Como el producto tensorial $\otimes$ es balanceado y π es aditivo, f es balanceada. Además, de la definición de f y σ, se tienen las siguientes igualdades para todo $m \in M$, $n \in N$ y $a \in A$:

$$f(q(m \otimes a), n) = \pi(q(m \otimes a) \otimes n) = \pi(m \otimes q'(a \otimes n)) = f(m, q'(a \otimes n)).$$

Entonces, de la propiedad universal del producto tensorial $\otimes_A$, existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\overline{f} : M \otimes_A N \to (M \otimes N)/\,\mathrm{Im}(\sigma)$ tal que:

$$\overline{f} \circ \iota' = f.$$

Usando la definición de ι', que A es una $\mathbb{K}$-álgebra y la A-biaditividad de ι', se tienen las siguientes igualdades para todo $m \in M$, $n \in N$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}
\iota'((m\lambda), n) &= r_M(m \otimes \lambda) \otimes_A n \\
&= r_M(q(m \otimes \eta(1_K)) \otimes \lambda) \otimes_A n \\
&= q(m \otimes (\eta(1_K)\lambda)) \otimes_A n \\
&= m \otimes_A q'((\eta(1_K)\lambda) \otimes n) \\
&= m \otimes_A l_M(\lambda \otimes q'(\eta(1_K) \otimes n)) \\
&= m \otimes_A (\lambda n) = \iota'(m, (\lambda n)).
\end{aligned}$$

En consecuencia ι' es $\mathbb{K}$-balanceada. De donde, de la propiedad universal del producto tensorial $\otimes$, existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $g : M \otimes N \to M \otimes_A N$ tal que:

$$g \circ \iota = \iota'.$$

Además, de la definición del producto tensorial $\otimes_A$, g cumple que $g \circ \sigma = 0$. Así, de la propiedad universal del conúcleo, existe un único morfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $\overline{g} : M \otimes N/\operatorname{Im}(\sigma) \to M \otimes_A N$ tal que:

$$\overline{g} \circ \pi = g.$$

Así se tienen las siguientes igualdades,

$$\overline{g} \circ \overline{f} \circ \iota' = \overline{g} \circ f = \overline{g} \circ \pi \circ \iota = g \circ \iota = \iota'.$$

Y de la unicidad se sigue que $\overline{g} \circ \overline{f} = 1_{M \otimes_A N}$. Usando las definiciones de $\overline{g}$, $\overline{f}$ y f, se tienen lo siguiente para todo $m \otimes n \in M \otimes N$:

$$\begin{aligned}
\overline{f} \circ \overline{g} \circ \pi(m \otimes n) &= \overline{f} \circ g(m \otimes n) \\
&= \overline{f} \circ g \circ \iota(m, n) \\
&= \overline{f} \circ \iota'(m, n) = f(m, n) \\
&= \pi \circ \iota(m, n) = \pi(m \otimes n).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\overline{f} \circ \overline{g} = 1_{M \otimes N/\operatorname{Im}(\sigma)}$. □

Corolario 4.33. *Sean (A, μ, η) una super álgebra, (M, q) un A-super módulo a derecha y (N, q') un A-super módulo a izquierda. Entonces $M \otimes_A N$ es un $\mathbb{K}$-super espacio vectorial.*

Demostración. De la Proposición 4.32 se tiene que $M \otimes_A N \simeq (M \otimes N)/\operatorname{Im}(\sigma)$. Entonces, de la Proposición 4.30, se concluye que $M \otimes_A N$ es un super espacio vectorial. □

Para (A, μ, η) una super álgebra, (M, q) un A-super módulo a derecha y (N, q') un A-super módulo a izquierda, considérense el siguiente conjunto:

$S_i := \{m \otimes_A n \in M \otimes_A N | \text{m y n son homogéneos y } p(m) + p(n) = i\} \subseteq M \otimes_A N,$

con $i \in \mathbb{Z}_2$. De la biaditividad del producto tensorial $\otimes_A$ se puede demostrar que

$$M \otimes_A N = (M \otimes_A N)_0 + (M \otimes_A N)_1,$$

donde $(M \otimes_A N)_i := \langle S_i \rangle$ $i \in \mathbb{Z}_2$. Se denotará

$$\psi : M \otimes_A N \to ((M \otimes N)_0 / \operatorname{Im}(\sigma)_0) \oplus (M \otimes N)_1 / \operatorname{Im}(\sigma)_1)$$

a la siguiente composición de isomorfimos:

$$M \otimes_A N \to (M \otimes N)/\operatorname{Im}(\sigma) \to ((M \otimes N)_0/\operatorname{Im}(\sigma)_0) \oplus (M \otimes N)_1/\operatorname{Im}(\sigma)_1).$$

Entonces $\psi(M \otimes_A N)_i \subseteq (M \otimes N)_i / \operatorname{Im}(\sigma)_i$, para $i \in \mathbb{Z}_2$. En consecuencia

$$(M \otimes_A N)_0 \cap (M \otimes_A N)_1 = 0.$$

Así $M \otimes_A N = (M \otimes_A N)_0 \oplus (M \otimes_A N)_1$.

Proposición 4.34. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) y (N, q') A-super módulos. Entonces $M \otimes_A N$ es un A-super módulo.*

Demostración. Se sabe que $M \otimes_A N$ es un A-módulo izquierdo en $\operatorname{Mod}(A)$ vía la acción

$$a \cdot (m \otimes_A n) \longmapsto q(a \otimes m) \otimes_A n.$$

Usando la definición de la acción y el hecho de que (M, q) es un A-super módulo izquierdo, se demuestra que esta acción es de super espacios vectoriales. Por lo tanto $M \otimes_A N$ es un A-super módulo izquierdo. □

Nota 4.35. Para (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, se denotará por $SMod(A)$ a la categoría de A-super módulos.

Observación 4.36. $(SMod(A), \otimes_A, A, \alpha)$ es una categoría monoidal, con α el asociador que se obtiene en la categoría $\operatorname{Mod}(A)$ y $e = A$.

Proposición 4.37. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y $(N, q_2) \in SMod(A)$. Entonces se tiene la adjunción*

$$- \otimes_A N \dashv \underline{\boldsymbol{Hom}}(N, -).$$

Demostración. Primero se definirá una función

$$\phi_{M,P} : \operatorname{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P) \to \operatorname{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N, P)),$$

para cada $(M, q_1), (P, q_3) \in SMod(A)$. Sea $f \in \operatorname{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$, defínase $\phi_{M,P}(f)$ en cada $m \in M$ y $n \in N$ como:

$$\phi_{M,P}(f)(m)(n) := f(m \otimes_A n).$$

Se demostrará que $\phi_{M,P}(m) \in \underline{\mathbf{Hom}}(N,P)$ para todo $m \in M$. Usando que $\otimes_A$ es $\mathbb{K}$-balanceada, que $M \otimes_A N$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y que f es $\mathbb{K}$-lineal, se obtiene que $\phi_{M,P}(f)(m)$ es $\mathbb{K}$-lineal. Usando la A-biaditividad de $\otimes_A$, la linealidad de $\phi_{M,P}(f)(m)$ y el hecho de que $f \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$, se obtienen las siguientes igualdades para todo elemento homogéneo $a \in A$, $m \in M$ y $n \in N$:

$$\begin{aligned}
\phi_{M,P}(f)(m)(q_2'(n \otimes a)) &= f(m \otimes_A q_2'(n \otimes a)) \\
&= f((m \otimes_A n) \cdot a) \\
&= (-1)^{p(a)p(m \otimes_A n)} q_3(a \otimes f(m \otimes_A n)) \\
&= (-1)^{p(a)p(m \otimes_A n) + p(a)p(f(m \otimes_A n))} q_3'(f(m \otimes_A n) \otimes a) \\
&= q_3'(\phi_{M,P}(f)(m)(n) \otimes a).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\phi_{M,P}(m) \in \underline{\mathbf{Hom}}(N,P)$ para todo $m \in M$. Por lo que, para corroborar que $\phi_{M,P}$ esté bien definida, resta demostrar que

$$\phi_{M,P}(f)(m) \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N,P)).$$

Usando que $\otimes_A$ es balanceado, el hecho de que $M \otimes_A N$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y que f es $\mathbb{K}$-lineal, se concluye que $\phi_{M,P}(f)$ es $\mathbb{K}$-lineal. Además, usando que $M \otimes_A N$ es un A-módulo y que $f \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$, se tienen lo siguiente para todo $a \in A$, $m \in M$ y $n \in N$:

$$\begin{aligned}
\phi_{M,P}(f)(q_1(a \otimes m))(n) &= f(q_1(a \otimes m) \otimes_A n) \\
&= f(a \cdot (m \otimes_A n)) \\
&= q_3(a \otimes f(m \otimes_A n)) \\
&= q_3(a \otimes \phi_{M,P}(f)(m)(n)) \\
&= (a \cdot \phi_{M,P}(f)(m))(n).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\phi_{M,P}(f)(m)$ es A-lineal. De la $\mathbb{Z}$-linealidad de f, la graduación de $M \otimes_A N$ y el hecho de que f preserva el grado, se puede demostrar que $\phi_{M,P}(f)$ preserva el grado. De este modo $\phi_{M,P} \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N,P))$.

Ahora se definirá una función

$$\overline{\phi}_{M,P} : \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N,P)) \to \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P),$$

para cada $(M,q_1),(N,q_3) \in SMod(A)$. Sea $g \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N,P))$. Considérese la función $h : M \times N \to P$, definida en cada $(m,n) \in M \times N$ como sigue:

$$h(m,n) := g(m)(n).$$

Usando que g y $g(m)$ son lineales para todo $m \in M$, se sigue que h es balanceada. De la A-linealidad de g, las definiciones de las estructuras a derecha de $(M,q_1'$, (N,q_2'), (P,q_3') y el hecho de que g preserva la paridad, se tienen las siguientes igualdades para todo elemento homogéneo $a \in A$, $m \in M$ y $n \in N$:

$$\begin{aligned} h(q_1'(m \otimes a), n) &= g(q_1'(m \otimes a))(n) \\ &= g((-1)^{p(m)p(a)} q_1(a \otimes m))(n) \\ &= ((-1)^{p(a)p(m)} a \cdot g(m))(n) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)} q_3(a \otimes g(m)(n)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)+p(a)p(g(m)(n))} q_3'(g(m)(n) \otimes a) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)+p(a)p(g(m)(n))} g(m)(q_2'(n \otimes a)) \\ &= (-1)^{p(a)p(m)+p(a)p(g(m)(n))+p(a)p(n)} g(m)(q_2(a \otimes n)) \\ &= h(m, q_2(a \otimes n)). \end{aligned}$$

Así h es A-balanceada. Por lo tanto, de la propiedad universal del producto tensorial $\otimes_A$, existe un único morfismo $\mathbb{Z}$-lineal $\overline{\phi}_{M,P}(g) : M \otimes_A N \to P$ tal que

$$\overline{\phi}_{M,P}(g)(m \otimes_A n) = g(m)(n).$$

Resta demostrar que $\overline{\phi}_{M,P}(g) \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$. Como $M \otimes_A N$ es un A-módulo, el hecho de que g es A-lineal, que $g(m)$ es A-lineal para todo $m \in M$ y el hecho de que $\mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N, P)$ es un A-módulo, se sigue lo siguiente para todo $a \in A$, $m \in M$ y $n \in N$:

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{M,P}(a \cdot (m \otimes_A n)) &= \overline{\phi}_{M,P}(q_1(a \otimes m) \otimes_A n) \\ &= g(q_1(a \otimes m))(n) \\ &= (a \cdot g(m))(n) \\ &= q_3(a \otimes g(m)(n)) \\ &= q_3(a \otimes \overline{\phi}_{M,P}(g)(m \otimes_A n)). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{\phi}_{M,P}(g)$ es A-lineal. Mediante inspección, usando el hecho de que $\overline{\phi}(g)$ es $\mathbb{Z}$-lineal, se puede probar que $\overline{\phi}_{M,P}(g)$ preserva la paridad. En consecuencia $\overline{\phi}$ está bien definida. Ahora, de las definiciones de $\phi_{M,P}$ y $\overline{\phi}_{M,P}$, se obtiene lo siguiente para toda $f \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$ y $m \otimes_A n \in M \otimes_A N$:

$$\overline{\phi}_{M,P} \circ \phi_{M,P}(f) = \phi_{M,P}(f)(m)(n) = f(m \otimes_A n).$$

De donde $\overline{\phi}_{M,P} \circ \phi_{M,P} = 1_{\mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)}$. Análogamente se demuestra $\phi_{M,P} \circ \overline{\phi}_{M,P} = 1_{\mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \underline{\mathbf{Hom}}(N,P))}$. Por tanto $\phi_{M,P}$ es una biyección.

Ahora se demostrará que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow{\phi_{M,P}} & \mathrm{Hom}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, P)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(M\otimes_A N, f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, f))} \\ \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P') & \xrightarrow[\phi_{M,P'}]{} & \mathrm{Hom}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, P')) \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(M' \otimes_A N, P) & \xrightarrow{\phi_{M',P}} & \mathrm{Hom}(M', \mathbf{\underline{Hom}}(N, P)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(g\otimes_A N, P)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(g, \mathbf{\underline{Hom}}(N, P))} \\ \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, P) & \xrightarrow[\phi_{M,P}]{} & \mathrm{Hom}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, P)) \end{array}$$

para todo $f \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(P, P')$ y $g \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, M')$. Usando las definiciones de los funtores y la biyección ϕ, se tienen las siguientes igualdades para toda $h \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M \otimes_A N, P)$, $m \in M$ y $n \in N$:

$$\begin{aligned} (\phi_{M,P'} \circ \mathrm{Hom}(M \otimes_A N, f)(h))(m)(n) &= \phi_{M,P'}(f \circ h)(m, n) \\ &= (f \circ h)(m \otimes_A n) \\ &= (f \circ (\phi_{M,P}(h)(m)))(n) \\ &= (\mathbf{\underline{Hom}}(N, f) \circ \phi_{M,P}(h))(m)(n) \\ &= (\mathrm{Hom}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, f)) \circ \phi_{M,P}(h))(m)(n). \end{aligned}$$

En consecuencia el primer diagrama conmuta. Análogamente se demuestra la conmutatividad del otro diagrama. Por lo tanto $(- \otimes_A N, \mathbf{\underline{Hom}}(N, -), \phi)$ es una adjunción. □

Sean A-una super álgebra super conmutativa y $(M, q_1), (N, q_2) \in SMod(A)$. La Proposición 4.37 nos dice que la siguiete función es una biyeccion:

$$\mathrm{Hom}_{Smod(A)}(M\otimes_A N, N\otimes_A M) \xrightarrow{\phi_{M,N\otimes_A M}} \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, N\otimes_A M)).$$

Se definirá una función $g \in \mathrm{Hom}_{SMod(A)}(M, \mathbf{\underline{Hom}}(N, N \otimes_A M))$ en cada sumando directo de M y N de la siguiente manera:

$$g(m)(n) := (-1)^{p(m)p(n)}(n \otimes_A m).$$

Se demostrará que g está bien definida. Como el producto tensorial $\otimes_A$ es bilineal, $g(m)$ es lineal para todo elemento homogéneo $m \in M$. Usando la definición de g, el hecho de que $g(m)$ es lineal para todo elemento $m \in M$ y que $p(\lambda) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene lo siguiente para todo elmento homogéneo $m \in M$, $n \in N$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g(m)(\lambda n) &= (-1)^{p(m)p(\lambda n)}((\lambda n) \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)+p(m)p(\lambda)}\lambda \cdot (n \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)}\lambda \cdot (n \otimes_A m) \\ &= \lambda \cdot g(m)(n). \end{aligned}$$

Por lo tanto $g(m)$ es $\mathbb{K}$-lineal para todo elemento homogéneo $m \in M$. De la definición de g, la linealidad de $g(m)$ para todo elemento homogéneo $m \in M$ y las definiciones de (M, q_1'),(N, q_2'), la definición de $\otimes_A$ y que $N \otimes_A M$ es un A-módulo derecho, se tienen las siguientes igualdades para todo elemento $m \in M$, $n \in N$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned} g(m)(q_2'(n \otimes a)) &= (-1)^{p(m)p(q_2'(n\otimes a))}(q_2'(n \otimes a) \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)+p(m)p(a)}(n \otimes q_1(a \otimes m)) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)+p(m)p(a)+p(m)p(a)}(n \otimes q_1'(m \otimes a)) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)}(n \otimes_A m) \cdot a \\ &= g(m)(n) \cdot a. \end{aligned}$$

Entonces $g(m) \in \underline{\mathbf{Hom}}(N, N \otimes_A M)$ para todo elemento homogéneo $m \in M$. Ahora, dado que $\otimes_A$ es bilineal y el hecho de que $g(m)$ es lineal para todo elemento homogéneo $m \in M$, se obtiene que g es lineal en elementos homogéneos. De la definición de g, el hecho de que $\otimes_A$ es $\mathbb{K}$-balanceada y que $p(\lambda) = 0$ para toda $\lambda \in \mathbb{K}$, se sigue lo siguiente para cualesquiera elementos homogéneos $m \in M$, $n \in N$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} g(\lambda m)(n) &= (-1)^{p(\lambda m)p(n)}(n \otimes_A (\lambda m)) \\ &= (-1)^{p(\lambda)p(n)+p(m)p(n)}((n\lambda) \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)}(\lambda n) \otimes_A m) \\ &= \lambda \cdot g(m)g(n). \end{aligned}$$

De esta manera $g(m)$ es $\mathbb{K}$-lineal para cualquier elemento homogéneo $m \in M$. De la definición de g, la linealidad ed $g(m)$ para cualesquiera elementos homogénemos $m \in M$, la A-biaditividad de $\otimes_A$, las definiciones de (M, q_1'), (N, q_2') y que $N \otimes_A M$ es un A-módulo izquierdo, se siguen las siquientes igualdades para elementos homogéneos $m \in M$, $n \in N$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned} g(q_1(a \otimes m))(n) &= (-1)^{p(q_1(a\otimes m))p(n)}(n \otimes_A q_1(a \otimes m)) \\ &= (-1)^{p(a)p(n)+p(m)p(n)}(q_2'(n \otimes a) \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(a)p(n)+p(m)p(n)+p(n)p(a)}(q_2(a \otimes n) \otimes_A m) \\ &= (-1)^{p(m)p(n)}a \cdot (n \otimes_A m) \\ &= a \cdot g(m)(n). \end{aligned}$$

En consecuencia g es A-bilineal. Usando la definición de g, se puede desmostrar por inspección que preserva la paridad. Por lo tanto g está bien definida. Así, de la Proposición 4.37, se tiene una morfismo de A-super módulos

$$\overline{\phi}_{M,N\otimes_A M}(g) : M \otimes_A N \to N \otimes_A M,$$

definida como $\overline{\phi}_{M,N\otimes_A M}(g)(m \otimes_A n) = g(m)(n) = (-1)^{p(m)p(n)}(n \otimes_A m)$. Se denotará por $\beta^A_{M,N} := \overline{\phi}_{M,N\otimes_A M}(g)$.

Observación 4.38. Se puede demostrar que $\beta^A_{M,N} : M \otimes_A N \to N \otimes_A M$ es natural, más aún, es un isomorfismo natural con inversa

$$\beta^A_{N,M} : N \otimes_A M \to M \otimes_A N.$$

De esta manera $(SMod(A), \beta^A)$ es una categoría simétrica.

Definición 4.39. Sea (A, μ, η) una super álgebra. Un A-super módulo (M, q) es un ***A-super módulo libre izquierdo*** si, M tiene una ***base homogénea*** $X \subseteq M$. Es decir:

(a) Si $x \in X$, entonces $x \in M_0$ ó $x \in M_1$;

(b) Para cada $x \in M$ existen $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ y $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$, tales que

$$x = \sum_{i=1}^n q(a_i \otimes x_i);$$

(c) Si existen elementos homogéneos $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ y un subconjunto $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq A$ tales que

$$\sum_{i=1}^n q(a_i \otimes x_i) = 0,$$

entonces $a_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$.

De manera análoga se define un ***A-super módulo libre derecho***.

Observación 4.40. Sean (A, μ, η) una super álgebra y (M, q) un a A-super módulo libre izquierdo.

(1) De la definición se sigue que todo elemento $x \in M$ se escribe de manera única como combinación de elementos homogénemos $x_i \in X$ y elementos $a_i \in A$:

$$x = \sum_{i=1}^n q(a_i \otimes x_i).$$

(2) $(\prod M, q)$ es un A-super móduo libre con base X. Más aún, $x \in X \cap (\prod M)_i)$, si y sólo sí, $x \in X \cap M_{i+1}$.

Proposición 4.41. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un a A-super módulo libre izquierdo. Entonces (M, q') es un A-supermódulo derecha, con q' la estructura dada en la Proposición 4.22.*

Demostración. Sea $X \subseteq M$ una base homogénea de M. Entonces cada $x \in X$ se escribe como sigue:

$$x = \sum_{i=1}^n q(a_i \otimes x_i),$$

con $x_i \in X$ y $a_i \in A$ para toda $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, de la bilinealidad de $\otimes$, la linealidad de q y definición de q', se obtiene lo siguiente:

$$x = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{p(x_i)p(a_i)}q'(x_i \otimes a_i) = \sum_{i=1}^{n} q'(x_i \otimes (-1)^{p(a_i)p(x_i)}a_i).$$

Ahora supóngamos que existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} q'(x_i \otimes a_i) = 0.$$

Considérese la siguiente descomposición para cada $i = 1, \ldots, n$

$$a_i = a_i^0 + a_i^1 \in A = A_0 \oplus A_1.$$

En consecuencia

$$0 = \sum_{i=1}^{n} q'(x_i \otimes a_i) = \sum_{i=1}^{n} q(a_i^0 \otimes x_i) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{p(x_i)}q(a_i^1 \otimes x_i).$$

Y como X es una base de (M, q), se obtiene que $a_i^0 = (-1)^{p(x_i)+1}a_i^1$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, del hecho de que $A_0 \cap A_1 = 0$, se obtiene que $a_i^0 = a_i^1 = 0$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Así se puede concluir que X es una base homogénea de (M, q'). Entonces (M, q') es un A-super módulo libre. □

Observación 4.42. Sea (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa. Debido a la Proposición 4.41, cuando se refiera a A-super módulos libres, se estará pensando en A-super módulos libres izquierdos.

Lema 4.43. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un a A-super módulo libre. Entonces todo elemento homogeneo $m \in M_0$ se escribe como sigue:*

$$m = \sum q(a_i^0 \otimes x_i^0) + \sum q(a_i^1 \otimes x_i^1),$$

donde $x_i^j \in X \cap M_j$ y $a_i^j \in A \cap A_j$, para $j = 0, 1$.

Demostración. Sea $m \in M_0$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$, elementos $x_i \in X$ y $a_i \in A$, tales que $m = \sum_{i=1}^{n} q(a_i \otimes x_i)$. Además $a_i = a_i^0 + a_i^1 \in A_0 \oplus A_1$, para todo $i = 1, ..., n$; por lo tanto

$$m = \sum_{i=1}^{n} q(a_i^0 \otimes x_i) + \sum_{i=1}^{n} q(a_i^1 \otimes x_i).$$

Y, usando que $q(A_j \otimes M_j) \subseteq M_0$, $q(A_j \otimes M_{j+1}) \subseteq M_1$ y que $M_0 \cap M_1 = 0$, se sigue el resultado. □

Lema 4.44. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un a A-super módulo libre. Entonces todo elemento homogeneo $m \in M_0$ se escribe como sigue:*

$$m = \sum q(a_i^0 \otimes x_i^1) + \sum q(a_i^1 \otimes x_i^0),$$

donde $x_i^j \in X \cap M_j$ y $a_i^j \in A \cap A_j$, para $j = 0, 1$.

Demostración. La demostración es totalmente análoga a la del Lema 4.43. □

Proposición 4.45. ***(Propiedad Universal de los Super Módulos Libres)*** *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) un A-super módulos libre con base X, (N, q') un A-super módulo y $f : X \to N$ una función tal que $f(X \cap M_i) \subseteq N_i$ para $i \in \mathbb{Z}_2$. Entonces existe un único morfismo de A-super módulos $\overline{f} : M \to N$ tal que $\overline{q}|_X = f$.*

Demostración. Como cada $m \in M$ se escribe de manera única como $m = \sum_{i=1}^{n} q(a_i \otimes x_i)$, entonces se define $\overline{f} : M \to N$ como sigue:

$$\overline{f}(m) := \textstyle\sum_{i=1}^{n} q'(a_i \otimes f(x_i)).$$

Como $\otimes$ es $\mathbb{K}$-bilineal y q es $\mathbb{K}$-lineal, se obtiene que $\overline{f}$ es $\mathbb{K}$-lineal. Usando la definición de $\overline{f}$ y que (M, q), (N, q') son A-módulos, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\overline{f} \circ q(a \otimes \sum q(a_i \otimes x_i)) &= \sum \overline{f} \circ q \circ (1_A \otimes M) \circ \alpha_{A,A,M}((a \otimes a_i) \otimes m) \\
&= \sum \overline{f} \circ q \circ (\mu \otimes 1_M)((a \otimes a_i) \otimes x_i) \\
&= \sum \overline{f} \circ q(\mu(a \otimes a_i) \otimes x_i) \\
&= \sum q'(\mu(a \otimes a_i \otimes f(x_i)) \\
&= \sum q' \circ (\mu \otimes 1_N)((a \otimes a_i) \otimes f(x_i)) \\
&= \sum q' \circ (1_A \otimes q') \circ \alpha_{A,A,N}((a \otimes a') \otimes f(x_i)) \\
&= \sum q'(a \otimes q'(a_i \otimes f(x_i))) \\
&= q'(a \otimes \sum q'(a_i \otimes f(x_i))) \\
&= q' \circ (1_A \otimes f)(a \otimes \sum q(a_i \otimes x_i)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{f}$ es morfismo de A-módulos. Ahora se demostrará que $\overline{f}$ preserva el grado. Del Lema 4.43 se tiene que todo $m \in M_0$ se escribe como sigue:

$$m = \textstyle\sum_i q(a_i \otimes x_i) + \sum_j q(b_j \otimes y_j),$$

donde $a_i \in A_0$, $b_j \in A_1$, $x_i \in X \cap M_0$ y $y_j \in X \cap M_i$. Por lo tanto se tiene que

$$\overline{f}(m) = \textstyle\sum_i q'(a_i \otimes f(x_i)) + \sum_j q'(b_j \otimes f(y_j)).$$

Y como $q'(A_l \otimes N_l) \subseteq N_0$ para $l = 0, 1$, se obtiene que $\overline{f}(m) \in N_0$. Análogamente, usando el Lema 4.44, se demuestra que $\overline{f}(M_1) \subseteq N_1$. Ahora supóngase que existe otro morfismo de A-super módulos $\widehat{f} : M \to N$, tal que $\widehat{f}|_X = f$. Entonces, usando que $\widehat{f}$ es morfismo de A-módulos, el hecho de que $\widehat{f}|_X = f$ y de la definición de $\overline{f}$, se tienen lo siguiente para todo

$m = \sum q(a_i \otimes x_i)$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\sum q(a_i \otimes x_i)) &= \sum \widehat{f}q(a_i \otimes x_i) \\
&= \sum q'(a_i \otimes \widehat{f}(x_i)) \\
&= \sum q'(a_i \otimes f(x_i)) \\
&= \overline{f}(\sum q(a_i \otimes x_i)).
\end{aligned}$$

En consecuencia $\widehat{f} = \overline{f}$. □

Notación 4.46. Sea (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo. Denotaremos por $M^* := \underline{\mathbf{Hom}}(M, A)$.

Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre con base homogénea X. Para cada $x_i \in X$ cosidérese la función $f_i : X \to A$ definida como sigue:

$$f_i(x_j) := \delta_{i,j}.$$

De la Propiedad universal de módulos libres derechos en $\mathrm{Mod}(A)$, existe un único morfismo de A-módulos derechos

$$x_i^* : M \to A$$

tal que $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. De la definición de x_i^* se obitiene que es lineal. Ahora, de la definición de x_i^*, que (M, q') es un A-súper módulo derecho, el hecho de que $p(\lambda 1_A) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y que μ es $\mathbb{K}$-lineal, se obtienen las siguientes igualdades para todo $m \in M$:

$$\begin{aligned}
x_i^*(\lambda m) &= x_i^*(\lambda q(1_A \otimes m)) \\
&= x_i^*(q((\lambda 1_A) \otimes m) \\
&= (-1)^{p(\lambda 1_A)p(m)} x_i^*(q'(m \otimes (1_A \lambda))) \\
&= \mu(x_i^*(m) \otimes (1_A \lambda)) \\
&= \mu(x_i^*(m) \otimes 1_A)\lambda \\
&= x_i^*(m)\lambda = \lambda x_i^*(m).
\end{aligned}$$

En consecuencia x_i^* es un morfismo $\mathbb{K}$-lineal. Por lo tanto $x_i^* \in M^*$, para todo $x_i \in X$. Ahora tómese un elemento $m \in M$, entonces existen elementos homogéneos $x_i \in X$ y $a_i \in A$, tales que:

$$m = \textstyle\sum_i q(a_i \otimes x_i).$$

En consecuencia, de la definición de x_j^*, la estructura a derecha de M y la A-linealidad derecha de x_j^*, se obtienen lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_j^*(m) &= x_j^*(\sum_i q(a_i \otimes x_i)) \\ &= \sum_i x_j^*(q(a_i^0 \otimes x_i)) + \sum_i x_j^*(q(a_i^1 \otimes x_i)) \\ &= \sum_i x_j^*(q'(x_i \otimes a_i^0)) + \sum_i (-1)^{p(x_i)} x_j^*(q'(x_i \otimes a_i^1)) \\ &= a_j^0 + (-1)^{p(x_j)} a_j^1, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $a_i^k \in A_k$.

Lema 4.47. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre con base homogénea X. Entonces $\{x_i^*\}_{i \in I} \subseteq M^*$ es un conjunto linealmente independiente, donde $X = \{x_i\}_{i \in I}$.*

Demostración. Supóngase que existen $x_1^*, \ldots, x_n^* \in M^*$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$, tales que

$$\sum_i a_i \cdot x_i^* = 0.$$

Por lo tanto $0 = \sum_i \mu(a_i \otimes x_i^*(x_j)) = a_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. En consecuencia el conjunto $\{x_i^*\}_{i \in I}$ es linealmente independiente. □

Lema 4.48. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre con base homogénea X. Entonces, si $x_i \in X \cap M_j$, $x_i^* \in M_j^*$ para $j = 0, 1$.*

Demostración. De la Ecuación (4.1) se tiene que, si $x_i \in X \cap M_0$, entonces

$$x_i^*(m) = a_i^0 + a_i^1$$

para todo $m = \sum_i q(a_i \otimes x_i) \in M$. En particular, si $m \in M_0$, el Lema 4.43 nos dice que $a_i^1 = 0$. Y si $m \in M_1$, el Lema 4.44, concluye que $a_i^0 = 0$. Por lo tanto $x_i^* \in M_0^*$. Análogamente se demuestra el Lema para el caso en que $x_i \in X \cap M_1$. □

Proposición 4.49. *Sean (A, μ, η) una super álgebra supercconmutativa y (M, q) un A-super módulo libre con base X. Entonces existe un monomorfismo de A-super módulos $\psi : M \to M^*$.*

Demostración. Considérese la función $f : X \to M^*$ definida como

$$f(x_i) := x_i^*.$$

Del Lema 4.48 se sigue que $f(X \cap M_j) \subseteq M_j^*$ para $j = 0, 1$. En consecuecia, de la Proposición 4.45, se tiene que existe un único morfismo de A-super módulos $\psi : M \to M^*$ tal que $\psi|_X = f$. Para demostrar que ψ es monomorfismo tómese $m = \sum q(a_i \otimes x_i) \in M$ tal que $\psi(m) = 0$. Entonces

$$0 = \psi(m) = \psi(\sum q(a_i \otimes x_i)) = \sum \mu(a_i \otimes f(x_i)) = \sum \mu(a_i \otimes x_i^*).$$

Así, del Lema 4.47, se concluye que $a_i = 0$ para toda i. En consecuencia ψ es un monomorfismo de A-super módulos. $\square$

Para (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo, considérese la función $h : M^* \times M \to A$ definida como sigue:

$$h(\omega, m) := \omega(m).$$

De la estructura de A-super módulo de M^* y el hecho de que todo morfismo en M^* es lineal, se obtiene que h es balanceada. Usando la linealidad de h y las estructuras de A-super módulos a derecha de (A, μ), (M, q'), se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera elementos homogéneos $\omega \in M^*$, $m \in M$ y $a \in A$:

$$\begin{aligned}
h(\omega \cdot a, m) &= ((-1)^{p(\omega)p(a)} a \cdot \omega)(m) \\
&= (-1)^{p(\omega)p(a)} \mu(a \otimes \omega(m)) \\
&= (-1)^{p(\omega)p(a)+p(a)p(\omega(m))} \mu(\omega(m) \otimes a) \\
&= (-1)^{p(\omega)p(a)+p(a)p(\omega(m))} \omega(q'(m \otimes a)) \\
&= (-1)^{p(\omega)p(a)+p(a)p(\omega(m))+p(a)p(m)} \omega(q(a \otimes m)) \\
&= (-1)^{p(\omega)p(a)+p(a)p(\omega(m))+p(a)p(m)} h(\omega, q(a \otimes m)).
\end{aligned}$$

Por inspección, en los casos $p(\omega) = 0$ ó $p(\omega) = 1$, se sigue que h es A-balanceada. En consecuencia existe un único morfismo $\mathbb{Z}$-lineal

$$\mathrm{ev} : M^* \otimes_A M \to A$$

tal que $\mathrm{ev}(\omega \otimes_A m) = \omega(m)$. Usando definición de ev se puede probar por mera inspección que es un morfismo de A-super módulos. El morfismo ev se llamará ***evaluación***.

Definición 4.50. Sea (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre con base X. Se dice que (M, q) es de ***rango finito*** si $|X| = p + q \in \mathbb{N}$. En ese caso

$$X = \{x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q\},$$

donde $x_i \in M_0$ para toda $i = 1, ..., p$ y $y_j \in M_1$ para toda $j = 1, ..., q$.

Proposición 4.51. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito con base homogénea*

$$X = \{x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q\}.$$

Entonces M^* es un A-super módulo libre de rango finito con base

$$X^* := \left\{x_1^*, \ldots, x_p^*, y_1^*, \ldots, y_q^*\right\}.$$

Demostración. Del Lema 4.47 se tiene que X^* es linealmente independiente. Sea $f \in M^*$ y $m = \sum q(a_i \otimes x_i) + \sum q(a_j \otimes y_j) \in M$. De la definición de x_i^*, y_j^* y usando que son elementos de M^*, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(m) &= f(\sum q(a_i \otimes x_i) + \sum q(a_j \otimes y_j)) \\
&= \sum f(q(a_i^0 \otimes x_i)) + \sum f(q(a_i^1 \otimes x_i)) + \sum f(q(a_j^0 \otimes y_j)) + \sum f(q(a_j^1 \otimes y_j)) \\
&= \sum f(q'(x_i \otimes a_i^0)) + \sum f(q'(x_i \otimes a_i^1)) + \sum f(q'(y_j \otimes a_j^0)) - \sum f(q'(y_j \otimes a_j^1)) \\
&= \sum \mu(f(x_i) \otimes a_i^0) + \sum \mu(f(x_i) \otimes a_i^1) + \sum \mu(f(y_j) \otimes a_j^0) - \sum \mu(f(y_j) \otimes a_j^1) \\
&= \sum \mu(f(x_i) \otimes a_i) + \sum \mu(f(y_j) \otimes (a_j^0 - a_j^1)) \\
&= \sum \mu(f(x_i) \otimes x_i^*(m)) + \sum \mu(f(y_j) \otimes y_j^*(m)) \\
&= (\sum f(x_i) \cdot x_i^* + \sum f(y_j) \cdot y_j^*)(m).
\end{aligned}$$

donde $a_i^k, a_j^k \in A_k$ para toda i, j. Por lo tato X^* es una base para M^*. □

Notación 4.52. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito, con base homogénea X. A la base X^* de la Proposición 4.51 se le llamará ***base dual*** de la base X.

Para una super álgebra super conmutativa (A, μ, η) y (M, q_1), (N, q_2) A-super módulos libres, considérese la siguiente composición de morfismos de A-super módulos:

$$\epsilon := r_N \circ (1_N \otimes_A \mathrm{ev}) \circ \alpha_{N,M^*,M} \circ (\beta^A_{M^*,N} \otimes_A 1_M) : (M^* \otimes_A N) \otimes_A M \to N,$$

donde $r_N : N \otimes_A A \to N$ es el isomorfismo de A-super módulos que se obtiene del hecho de que $SMod(A)$ es una categoría monoidal. Entonces, de la Proposición 4.37, se tiene que existe morfismo de A-super módulos $\varepsilon := \phi_{M^* \otimes_A N, N}(\varepsilon) : M^* \otimes_A N \to \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$ tal que

$$\varepsilon(\omega \otimes_A n)(m) = (-1)^{p(\omega)p(n)} q_2'(n \otimes_A \omega(m)).$$

Proposición 4.53. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q_1) un A-super módulo libre de rango finito y (N, q_2) un A-super módulo libre. Entonces el morfismo $\varepsilon : M^* \otimes_A N \to \underline{\boldsymbol{Hom}}(M, N)$ de A-super módulos es un isomorfismo.*

Demostración. Considérese la función $\theta_{M,N} : \underline{\mathbf{Hom}}(M, N) \to N \otimes_A M^*$ definida como

$$\theta_{M,N}(f) := \sum(f(x_i) \otimes_A x_i^*) + \sum(f(y_j) \otimes_A y_j^*).$$

De la $\mathbb{K}$-bilinealidad de $\otimes_A$ se concluye que $\theta_{M,N}$ es un morfismo $\mathbb{K}$-lineal. Y, de la estructura de A-super módulo de $N \otimes_A M^*$, se obtiene que $\theta_{M,N}$ es un morfismo de A-lineal. Además, por inspección, se puede demostrar que θ preserva el grado. Por lo tanto $\theta_{M,N}$ es un morfismo de A-super módulos. Sea $\overline{\varepsilon} : \underline{\mathbf{Hom}}(M,N) \to M^* \otimes_A N$ el siguiente morfismo de A-super módulos:

$$\overline{\varepsilon} := \beta^A_{N,M^*} \circ \theta_{M,N}.$$

De la definición de θ y β^A_{N,M^*}, se siguen las siguientes igualdades para toda $\underline{\mathbf{Hom}}(M,N)$:

$$\begin{aligned}
\overline{\varepsilon}(f) &= \beta^A_{N,M^*}(\theta(f)) \\
&= \beta^A_{N,M^*}\left(\sum(f(x_i) \otimes_A x_i^*) + \sum(f(y_j) \otimes_A y_j^*)\right) \\
&= \sum(x_i^* \otimes_A f(x_i)) + \sum(-1)^{p(f(y_j))}(y_j^* \otimes_A f(y_j)) \\
&= \sum(x_i^* \otimes_A f(x_i)) - (-1)^{p(f)} \sum(y_j^* \otimes_A f(y_j)),
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $p(f) = p(f(y_j)) + 1$ para toda j. De las definicionee de ε y $\overline{\varepsilon}$, se tienen las siguientes igualdades para todo elemento homogéneo $f \in \underline{\mathbf{Hom}}(M,N)$:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \circ \overline{\varepsilon}(f)(m) &= \varepsilon\left(\sum(x_i^* \otimes_A f(x_i)) - (-1)^{p(f)} \sum(y_j^* \otimes_A f(y_j))\right)(m) \\
&= \sum q_2'(f(x_i) \otimes x_i^*(m)) - (-1)^{p(f)} \sum(-1)^{f(y_j)} q_2'(f(y_j) \otimes y_j^*(m)) \\
&= \sum q_2'(f(x_i) \otimes x_i^*(m)) + \sum q_2'(f(y_j) \otimes y_j^*(m)).
\end{aligned}$$

Además, usando la linealidad de g y que (N, q_2') es un A-super módulo derecho, se tiene lo siguiente:

$$f(m) = \sum q_2'(f(x_i) \otimes x_i^*(m)) + \sum q_2'(f(y_j) \otimes y_j^*(m)).$$

En consecuencia $\varepsilon \circ \overline{\varepsilon} = 1_{\underline{\mathbf{Hom}}(M,N)}$. Análogamente se demuestra que $\overline{\varepsilon} \circ \varepsilon = 1_{M^* \otimes_A N}$. Por lo tanto ε es un isomorfismo de A-super módulos. $\square$

Observación 4.54. Hay que observar que el morfismo $\overline{\varepsilon}$ de la Proposición 4.53 está definido en una base dada. Sin embargo, dado que es inverso de ε, se sigue que no depende de la base escogida. Esto último es consecuencia de la unicidad de inversos.

Los siguientes resultados nos dirán que el número elementos pares ó impares en una base homogénea X de un A-super módulo libre (M, q), es independiente de la base que se tome.

Proposición 4.55. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito, con base homogénea*

$$X = \{x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q\}.$$

Entonces, si $X' = \left\{x'_1, ..., x'_{p'}, y'_1, ..., y'_{q'}\right\}$ *es otra base homogénea para* (M, q)*, se obtiene que* $p = p'$*.*

Demostración. Primero nótese que $\mu(A_1 \otimes A_1)$ es un ideal (bilateral) de A_0 y $q(A_1 \otimes M_1)$ es un submódulo de M_0. Por lo tanto $M_0/q(A_1 \otimes M_1)$ es un $A_0/\mu(A_1 \otimes A_1)$-módulo, mediante la acción:

$$\overline{a} * \overline{m} := \overline{q(a \otimes m)},$$

para $a \in A_0$ y $m \in M_0$. Más áun, $M_0/q(A_1 \otimes M_1)$ está generado por los elementos $S := \{\overline{x}_1, ..., \overline{x}_p\}$. Se demostrará que S es linealmente independiente. Supóngase que existe una combinación

$$0 = \sum \overline{a}_i * \overline{x}_i = \sum \overline{q(a_i \otimes x_i)} = \overline{\sum q(a_i \otimes x_i)}.$$

Entonces $\sum q(a_i \otimes x_i) = \sum q(b_j \otimes m_j)$, con $b_j \in A_1$ y $m_j \in M_1$. Y, del Lema 4.44, se tiene que

$$m_j = \sum q(a^j_k \otimes x^j_k) + \sum q(b^j_l \otimes y^j_l),$$

donde $a^j_k \in A_1$ y $b^j_l \in A_0$. Por lo tanto, usando que (M, q) es un A-módulo, se obtienen la siguiente igualdad:

$$\sum q(a_i \otimes x_i) = \sum q(\mu(b_j \otimes a^j_k) \otimes x^j_k) + \sum q(\mu(b_j \otimes b^j_l) \otimes y^j_l).$$

Y como X es linealmente independiente, se tienen dos casos para cada i:

$$a_i = 0 \text{ ó } a_i = \mu(b_j \otimes a^j_k) \in \mu(A_1 \otimes A_1) \text{ para algún } k.$$

Entonces $\overline{a}_i = 0$ para cada i. Así S es un conjunto linealmente independiente y en consecuencia es una base de $M_0/q(A_1 \otimes M_1)$. Realizando este proceso para la base X' se obtendría que $M_0/q(A_1 \otimes M_1)$ tiene otra base S' con p' elementos. Pero, como $A_0/\mu(A_1 \otimes A_1)$ es un anillo asociativo conmutativo con unidad, se sigue que $p = p'$. □

Corolario 4.56. *Sean* (A, μ, η) *una super álgebra super conmutativa y* (M, q) *un* A*-super módulo libre de rango finito. Entonces cualesquiera bases homogéneas de* (M, q) *tienen el mismo número de elementos pares e impares.*

Demostración. De la Proposición 4.55 se sigue que la cantidad de elementos pares en cualquier base homogénea de (M, q) es la misma. Ahora considérese el A-super módulo libre $(\prod M, q)$ con base X. Usando la Proposición 4.55, se concluye que la cantidad de elementos impares en cualquier base homogénea de (M, q) es la misma. □

Del Corolario 4.56 se obtiene que la cardinalidad de cualquier base de un A-súper módulo libre (M, q), es constante. En consecuencia tenemos la siguiente definición.

Definición 4.57. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito. Se define el ***rango*** de (M, q), denotado por ***r(M)***, como la cardinalidad de cualquier base X. Es decir,

$$r(M) := |X|.$$

Observación 4.58. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito con base $X = \{x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q\}$. De los Lemas 4.43 y 4.44 se tiene la siguiente descomposición:

$$M = (\oplus_{i=1}^{p} A_0 x_i) \oplus (\oplus_{i=1}^{q} A_1 y_i) \oplus (\oplus_{i=1}^{p} A_1 x_i) \oplus (\oplus_{i=1}^{q} A_0 y_i).$$

Donde $A_i x_j := \{q(a \otimes x_j) | a \in A_i\}$ y $A_i y_k := \{q(a \otimes y_k) | a \in A_i\}$, para $i \in \mathbb{Z}_2$, $j = 1, ..., p$ y $k = 1, ..., q$. En consecuencia todo elemento $m \in M$ lo podemos identificar con una matriz

$$m \longleftrightarrow (a^1 \cdots a_{p+q})^t,$$

donde $(a^1 \cdots a_{p+q})^t \in M_{(p+q)\times 1}(A)$. Así se sigue lo siguiente:

(a) $m \in M_0$, sí y sólo sí, $a_i \in A_0$ para toda $i = 1, \ldots, p$ y $a_j \in A_1$ para toda $j = p + 1, \ldots, p + q$;

(b) $m \in M_1$, sí y solo sí, $a_i \in A_1$ para toda $i = 1, \ldots, p$ y $a_j \in A_0$ para toda $j = p + 1, \ldots, p + q$.

Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y $T : (M, q) \to (N, q') \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$, con (M, q) y (N, q) A-super módulos libres. Si

$$X = \{x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q\} \text{ y } X = \left\{x'_1, \ldots, x'_p, y'_1, \ldots, y'_q\right\}$$

son bases de (M, q) y (N, q'), respectivamente, entonces se tienen las siguientes igualdades:

(1) $T(x_i) = \sum_{j=1}^{p} q'(a_j^i \otimes x'_j) + \sum_{k=1}^{q} q'(b_k^i \otimes y'_k)$, para toda $i = 1, \ldots, p$;

(2) $T(y_i) = \sum_{j=1}^{p} q'(a_j^i \otimes x'_j) + \sum_{k=1}^{q} q'(b_k^i \otimes y'_k)$, para toda $i = 1, \ldots, q$.

En consecuencia se puede identificar a T con la siguiente matriz:

$$[T]_X^{X'} := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde $A \in M_{p'\times p}(A)$, $B \in M_{p'\times q}(A)$, $C \in M_{q'\times p}(A)$ y $D \in M_{q'\times q}(A)$.

Observación 4.59. Sean (A, μ, η) y $T : (M, q) \to (N, q') \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)$, con (M, q) y (N, q) A-super módulos libres. Dependiendo de si $T \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_0$ ó $T \in \underline{\mathbf{Hom}}(M, N)_1$, la matriz $[T]_X^{X'}$ tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Pares & Impares \\ Impares & Pares \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} Impares & Pares \\ Pares & Impares \end{pmatrix},$$

donde ***Pares*** e ***Impares*** denotan matrices solo con elementos pares o impares, respectivamente.

Definición 4.60. Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa y (M, q) un A-super módulo libre de rango finito con base X. Se define la ***super traza***, $str : \underline{\mathbf{End}}(M) \to A$, como

$$str := \mathrm{ev} \circ \overline{\varepsilon},$$

donde $\overline{\varepsilon}$ es el isomorfismo definido en la Proposición 4.53.

Observación 4.61. La difinición de str no depende de la base escogida ya que los morfismos ev y $\overline{\varepsilon}$ no dependen de la base.

Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) un A-super módulo libre de rango finito con base X y $T \in \underline{\mathbf{End}}(M)$ un elemento homogéneo. Usando la definicion de str se tiene lo siguiente:

$$str(T) = \sum x_i^*(T(x_i)) - (-1)^{p(T)} \sum y_j^*(T(y_j)).$$

Entonces, si se identifica a T con la matriz

$$[T]_X^X := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

se obtiene que $str(T) = tr(A) - (-1)^{p(T)} tr(D)$.

Proposición 4.62. *Sean (A, μ, η) una super álgebra super conmutativa, (M, q) un A-super módulo libre de rango finito con base X y $T, \mathrm{U} \in \underline{\mathbf{End}}(M)$ elementos homogéneos. Entonces*

$$str(TU) = (-1)^{p(T)p(\mathrm{U})} str(UT).$$

Demostración. Se sigue de la definición de super traza, identificando a los morfismos con matrices. □

Definición 4.63. Sea (A, μ, η) una super álgebra.

(a) Una ***derivación par*** es un morfismo $D : A \to A \in \mathbf{End}(A)_0$ tal que

$$D(\mu(a \otimes b)) = \mu(D(a) \otimes b) + \mu(a \otimes D(b)),$$

para cualesquiera $a, b \in A$. Al conjunto de derivaciones pares se le denotará por $\mathcal{D}(A)_0$.

(b) Una ***derivación impar*** es un morfismo $D : A \to A \in \mathbf{End}(A)_1$ tal que

$$D(\mu(a \otimes b)) = \mu(D(a) \otimes b) + (-1)^{p(a)}\mu(a \otimes D(b)),$$

para cualquier elemento homogéneo $a \in A$ y todo elemento $b \in B$. Al conjunto de derivaciones impares se le denotará por $\mathcal{D}(A)_1$.

(c) Se le llamará ***super derivaciones*** al super $\mathbb{K}$-espacio vectorial

$$\mathcal{D}(A) := \mathcal{D}(A)_0 \oplus \mathcal{D}(A)_1.$$

Observación 4.64. Es claro que los elementos homogéneos del $\mathbb{K}$-super espacio vectorial $\mathcal{D}(A)$ se pueden ver como funciones $\mathbb{K}$-lineales $D : A \to A$ tales que

$$D(\mu(a \otimes b)) = \mu(D(a) \otimes b) + (-1)^{p(a)p(D)}\mu(a \otimes D(b)),$$

para cualquier elemento homogéneo $a \in A$ y todo elemento $b \in B$.

Proposición 4.65. *Sea (A, μ, η) una super álgebra. Entonces $(\mathcal{D}(A), \gamma)$ es una super álgebra de Lie, donde $\gamma : \mathcal{D}(A) \otimes \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ está definida en elementos homogéneos como:*

$$\gamma(D_1 \otimes D_2) := D_1 \circ D_2 - (-1)^{p(D_1)p(D_2)} D_2 \circ D_1.$$

Demostración. De la definición de γ se puede probar que está bien definida y que en efecto es un morfismo de super $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. De las definición y $\mathbb{K}$-linealidad de γ, se tienen las siguientes igualdades para cualesquiera elementos homogéneos $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(A)$:

$$\begin{aligned}
&\gamma(D_1 \otimes D_2) + (-1)^{p(D_1)p(D_2)}\gamma(D_1 \otimes D_2))\\
&= D_1 \circ D_2 - (-1)^{p(D_1)p(D_2)} D_2 \circ D_1 + (-1)^{p(D_1)p(D_2)}\gamma(D_2 \otimes D_1)\\
&= D_1 \circ D_2 - (-1)^{p(D_1)p(D_2)} D_2 \circ D_1 + (-1)^{p(D_1)p(D_2)} D_2 \circ D_1 - D_1 \circ D_2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Y haciendo las cuentas se demuestra directo de la definición que γ cumple la super identidad de Jacobi. En consecuencia $(\mathcal{D}(A), \gamma)$ es una super álgebra de Lie. □

Observación 4.66. Sea (A, μ, η) una super álgebra. Se tiene que $\mathcal{D}(A)$ es un A-super módulo con la acción definida en elementos homogéneos como sigue:

$$a \cdot D \mapsto aD,$$

donde $(aD)(b) := \mu(a \otimes D(b))$ para todo $b \in A$.

Bibliografía

[1] M. Aguiar and S. Mahajan, *Monoidal Functors, Species and Hopf Algebras*, American Mathematical Society, 2010.

[2] J. Baez, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*, University of Californa, Department of Mathematics, 2009.

[3] J. Baez, *Quantum Quandaries: A Category-Theoric Perspective*, University of California, Department of Mathematics, 2004.

[4] N. Carqueville, I. Runkel, *Introductory Lectures on Topological Quantum Field Theory*, https://arxiv.org/pdf/1705.05734.pdf, 2017.

[5] P. Deligne, *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, Volumen 1, American Mathemtical Society, 1999.

[6] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych and V. Ostrik, *Tensor Categories*, American Mathematical Society, 2010.

[7] S.Hoáng Xuân, *Categories de Picard Restreintes*, Acta Mathematica Vietnamica, 1982.

[8] S. Hoàng Xuân, *Gr.Categories Strictes*, Acta Mathematica Vietnamica, 1978.

[9] J. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag New York, 1970.

[10] M. Kapranov, *Supergeometry in mathematics and physics*, https://arxiv.org/pdf/1512.07042.pdf, 2018.

[11] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer Science+Business Media New York, 1995.

[12] J. Lamers, *Algebraic Aspects of Berezinian* (Master Thesis), University Utrecht, Department of Mathematics, 2012.

[13] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Science+Business Media New York, Second Edition, 1978.

[14] S. Mac Lane, *Natural Associativity and Commutativity*, Rice Univ. Studies **49**, 1963.

[15] Y. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer Science+Business Media New York, First Reprint, 2002.

[16] M. Müger, *Tensor Categories: A Selective Guide Tour* , Revista de la Unión Matemática Argentina, Volumen 51, Número 1, 2010.

[17] E. Rhiel, *Category Theory in Context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, 2016.

[18] U. Thiel, *Seminar on Tensor Categories*, 23 de Septiembre de 2019, Sitio web: https://ulthiel.com/math/teaching-org/tensor-categories/, 2018.

[19] V.S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*, Courant Lecture Notes, 2004.