



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN ECONOMÍA
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

Caracterización de la volatilidad del rendimiento
de un portafolio de activos de mercados mexicanos
usando modelos de la familia ARCH

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN ECONOMÍA

PRESENTA:
GONZALO LÓPEZ HEREDIA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. YAMIL OMAR JORGE DÍAZ BUSTOS
FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

Ciudad Nezahualcóyotl, Estado de México, marzo de 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Introducción.....	1
Presentación del trabajo de investigación	1
Antecedentes.....	6
Metodología y organización de la tesis.....	9
Capítulo 1. Marco teórico y estado del arte	12
1.1 Introducción.....	12
1.2 Análisis fundamental y análisis técnico	12
1.3 Incertidumbre, volatilidad y riesgo.....	13
1.4 La Teoría Moderna del Portafolio.....	14
1.5 Los modelos de la familia ARCH.....	30
1.6 Comparación de pronósticos de volatilidad.....	38
1.7 Supuestos	41
1.8 Construcción del modelo.....	45
1.9 Estado del arte	45
Capítulo 2. Desarrollo de la investigación.....	53
2.1 Introducción.....	53
2.2 Método utilizado	53
2.3 Datos y condiciones	54
2.4 Construcción del portafolio.....	62
2.5 Descripción del rendimiento del portafolio.....	63
2.6 Ajuste con modelos ARCH.....	65
2.7 Ajuste con el modelo CAPM.....	70
2.8 Comparación ARCH vs CAPM.....	73
2.9 Resumen de los hallazgos clave.....	74

Capítulo 3. Resultados	75
3.1 Introducción.....	75
3.2 Método usado	76
3.3 Resultados	77
3.4 Verificación de las hipótesis	89
Conclusiones.....	90
Referencias	95

Introducción

Presentación del trabajo de investigación

El propósito de esta investigación es el de la caracterización de la volatilidad del rendimiento de un portafolio. En este trabajo, la *caracterización* de la volatilidad se refiere al proceso de identificación de las propiedades de la volatilidad de los precios de los activos y del rendimiento de un portafolio. La importancia de esta caracterización radica en que contribuye a enriquecer la administración de portafolios a través de la determinación de los peculiares atributos de la volatilidad de las series de tiempo con las que se representan los activos financieros y el rendimiento de un portafolio formado con estos activos. Con ello se obtiene el beneficio de mejorar la toma de decisión de inversión en un portafolio; en otras palabras, el de gestionar un portafolio de manera más efectiva. Además, por ser parte de la gestión de riesgos de inversión, el proceso de determinación de las propiedades de la volatilidad permite aumentar la calidad del pronóstico del comportamiento del rendimiento. Esto, a su vez, implica la mitigación de posibles efectos negativos (i.e. pérdidas indeseables) en los recursos del inversionista que resultan de las fluctuaciones inesperadas en los valores de las series de tiempo correspondientes. Es decir, se reduce la probabilidad de pérdidas y se abren oportunidades para aumentar las ganancias en vista de la información obtenida a través de la caracterización.

Este trabajo tiene también la finalidad de enfocarse a estudiar la volatilidad del rendimiento del portafolio y de sus activos componentes que cumplen con la condición de poder encontrarse específicamente en mercados mexicanos. Se busca así tipificar la conducta subjetiva¹ de los agentes económicos que realizan inversiones particularmente en México, país cuyos escenarios no son en general los mismos que en otros con diferentes condiciones políticas, económicas o de cualquier otra índole que impactan en los precios de los activos. Nuevamente nos

¹ La conducta se relaciona con la forma en que se comportan los inversionistas en los mercados en vista de componentes como apalancamiento, asimetría, persistencia, etc.

encontramos con el beneficio de una mejor administración del portafolio por existir mayor precisión en el pronóstico de la volatilidad “doméstica”.

El problema que se trata en este trabajo no es el de la optimización de portafolios. El problema que da origen a este trabajo es el del estudio de los atributos de la volatilidad presente en las series del precio de activos “mexicanos” y del rendimiento de un portafolio compuesto por los activos. En efecto, siendo la inversión el acto de asignar recursos a un activo con la expectativa de generar una ganancia, la existencia de la volatilidad de los precios y del rendimiento pone en peligro la realización de la utilidad deseada en la inversión. La dificultad consistente en no conocer la naturaleza de las peculiaridades de la volatilidad que pone en riesgo esta realización. En este contexto, el problema a resolver con este trabajo tiene los siguientes elementos. Se busca, primero, definir un procedimiento con el que un agente económico puede evaluar el rendimiento de un portafolio en términos de las cualidades de su volatilidad. Segundo, aplicar los modelos estudiados a activos que se negocian en mercados mexicanos. Tercero, probar la utilidad de los modelos ARCH² en el contexto de las características especiales de las series de tiempo financieras. Cuarto, indagar cuál de los modelos de la familia ARCH tiene la mayor capacidad de pronóstico de volatilidad. Finalmente, comparar los modelos ARCH, en cuanto a su desempeño de pronóstico de la volatilidad, con uno de los que más comúnmente se aplica, el método CAPM.³ Así, el trabajo contesta las siguientes preguntas: en circunstancias de homocedasticidad⁴ presente en las series de los valores y el rendimiento de un portafolio, (i) ¿cómo se realizan inversiones más eficientes y confiables en portafolios con valores mexicanos?, (ii) ¿cómo se aplican los modelos ARCH en portafolios del mercado mexicano?, (iii) ¿cómo se pronostica la volatilidad de un portafolio de instrumentos usando modelos

² ARCH son las siglas en inglés de *Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva*. Se emplean en este trabajo los modelos ARCH ya que éstos han sido diseñados precisamente para descubrir los atributos de varianzas de los términos de error en una serie de tiempo. Los modelos ARCH se detallan formalmente en el Capítulo 1 Marco teórico de esta tesis.

³ CAPM son las siglas en inglés de *Modelo de Valoración del Precio de Activos Financieros*.

⁴ *Homocedasticidad* es la característica del término de error de la regresión de una serie consistente en que su varianza no es constante. La ausencia de homocedasticidad se denomina *heterocedasticidad*.

ARCH?, (iv) ¿cómo se comparan los modelos ARCH con otro de uso generalizado como el modelo CAPM? y (v) ¿cuáles son los modelos ARCH que presentan la mayor calidad en el pronóstico de la volatilidad de portafolios?

El objetivo principal de este estudio es determinar la caracterización de la volatilidad del rendimiento de un portafolio; para ello se utilizan modelos ARCH. Los objetivos complementarios de este trabajo son, por un lado, demostrar que la capacidad de pronóstico de los modelos esta familia es superior a la de un modelo tradicional aplicado en la evaluación de la volatilidad del portafolio, el cual en este caso es el conocido como CAPM. Por otro lado, determinar cuál de los modelos ARCH es el que mejor pronostica la volatilidad del rendimiento del portafolio. Finalmente, y en vista de estos objetivos complementarios, se busca llegar a una descripción de la forma en que se comporta la volatilidad del rendimiento del portafolio.⁵

A diferencia de otros estudios, este trabajo se enfoca al estudio y caracterización de la volatilidad de los precios y del rendimiento de un portafolio con activos disponibles en los mercados mexicanos. Como ejemplo, se usan tres activos de los mercados nacionales, siendo estos dos de la Bolsa Mexicana de Valores y el tipo de cambio del mercado de divisas. La selección de los activos se lleva a cabo en la forma de ejercicio con una muestra de activos mexicanos.

En este escenario, las hipótesis de la investigación son las que a continuación se enumeran.

- 1) En el pronóstico de la volatilidad condicional de la serie de tiempo del rendimiento de un portafolio con activos mexicanos, los modelos de la familia ARCH muestran un desempeño con una confiabilidad de pronóstico de la volatilidad de al menos 95% por encima de la de un método tradicional de administración de portafolios, el CAPM.⁶

⁵ Se entiende que la expresión “la forma en que se comporta la volatilidad” se refiere a la conducta de los inversionistas que se explica con los valores de apalancamiento, asimetría, persistencia, etc.

⁶ Se usa el criterio de Levene (1960), que es una prueba que compara la “calidad” de las estimaciones de las varianzas condicionales.

- 2) A diferencia de los modelos tradicionales usados en la estimación de la volatilidad de los rendimientos de un portafolio, los modelos de la familia ARCH constituyen un mecanismo de caracterización de la conducta de los inversionistas en los mercados mexicanos.

Del mismo modo, cabe aquí estipular el alcance del trabajo, cuyos puntos se precisan de la siguiente manera.

- (i) Los activos cuyas series de tiempo se incluyen en esta investigación pertenecen a dos mercados diferentes, siendo éstos la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y el mercado de divisas extranjeras. De BMV se eligen las acciones de Grupo Inbursa (con etiqueta *ginb*) y de la empresa Promotora de Infraestructura (*pinfra*); del mercado de divisas se elige el tipo de cambio (*tc*). El criterio con el que se eligen estos tres activos se fundamenta, para los casos de *ginb* y *pinfra*, en el esquema de ejercicio de caracterización de la varianza de dos acciones del principal índice bursátil en México. Para el tipo de cambio *tc*, el criterio descansa en la consideración de su importancia como uno de los presuntos indicadores de la salud y de la estabilidad económicas y de tener una volatilidad especialmente sensible a los escenarios sociales y políticos.
- (ii) Se toma una muestra de 273 datos de frecuencia diaria para cada uno de los activos, siendo este tamaño de las muestras equivalentes a datos de un año de operación en los mercados. Las muestras son tomadas en el periodo anual del 2 de enero 2018 al 31 de enero 2019 con el fin de especificar las propiedades de la volatilidad en el rendimiento a lo largo de un periodo de alta incertidumbre presentado en el último año del sexenio del gobierno anterior. Los 273 datos corresponden a los precios diarios durante el periodo de un año más un mes adicional para el cual se realizarán las pruebas dentro de la muestra (*in simple*).
- (iii) Además de hacer comparaciones entre los modelos ARCH, también se hace una comparación con uno de los métodos tradicionales; se elige que éste sea el CAPM.

- (iv) La investigación es cuantitativa; usará datos aleatorios presentados de manera estructurada en la forma de series de tiempo.
- (v) Complementariamente, se busca que la contribución de este trabajo se enfoque en tres puntos. Primero, desde la perspectiva metodológica, esta investigación usa los modelos de la familia ARCH para descomponer las matrices de covarianzas condicionales de un portafolio de activos, lo que permite que el usuario o inversionista del portafolio obtenga más información acerca de la relación estructural de los activos del portafolio. Segundo, por el lado empírico, y en línea con los objetivos, se usan datos (precios) diarios del tipo de cambio y de los activos en periodo anual indicado. Esto significa aplicabilidad contemporánea a casos reales de los mercados financieros locales. Tercero, el trabajo descompone la volatilidad de cada uno de los activos individualmente al igual que la conjunta de los tres componentes del portafolio.
- (vi) El alcance de este trabajo está igualmente delimitado por los supuestos enlistados en la sección 1.7 en el Capítulo 1 - Marco Teórico. Aunque descritos con detalle en esa sección, los enumeramos aquí: (a) el estudio es un análisis técnico y no es un estudio fundamental; (b) los inversionistas son del tipo prudente, lo que significa que actúan con aversión al riesgo; (c) las series de tiempo no son de alta frecuencia (i.e., los precios son diarios; a saber, los obtenidos al final de periodo de negociación); (d) se aplica la perspectiva de Samuelson, descrita en la sección 1.4.7; (e) los activos del rendimiento no pagan dividendos; (f) los riesgos que sufren las series de tiempo de los activos considerados en este trabajo son sistemáticos y no son sistémicos; y (g) los modelos ARCH usados en este estudio son los reportados en la literatura como los más comunes y aplicables para series financieras.
- (vii) Este trabajo de investigación no se dirige a resolver un problema de optimización del portafolio. Respecto a la asignación de recursos a cada uno de los activos constituyentes del portafolio, se asume que ésta se

resuelve a partir del método de Pojarliev & Polasek (2001), descrito en la sección 1.4.4, que se fundamenta en inversiones con aversión al riesgo.

(viii) La herramienta usada para correr los modelos es el programa Stata.

Antecedentes

Como se estableció en la sección anterior, este trabajo se enfoca al problema de la caracterización de la volatilidad. Por ello, para comenzar, en esta sección se presenta un breve contexto de la Teoría de Portafolios y de estos modelos. En el caso de esta tesis nos referimos específicamente a la varianza que, en el caso de series de tiempo financieras, posee ciertas características. Definimos entonces que la caracterización es el proceso de determinar si esta varianza presenta o no atributos tales como el apalancamiento, sensibilidad a las “buenas noticias” o a las “malas noticias”, colas gordas, etc. (todas descritas en el Capítulo 1 – Marco teórico de este documento). Estas características se descubren usando modelos ARCH.

La cualidad principal de un activo financiero es el *rendimiento*. El rendimiento es considerado una variable aleatoria, por lo que posee la propiedad de dispersión. Este rasgo, denominado *volatilidad*, juega un papel muy importante en la administración de las inversiones que realizan los agentes económicos. La volatilidad de un activo —representada por la medida estadística de la desviación estándar del rendimiento o, alternativamente, por el valor cuadrático de ésta, que es la varianza— se usa para estimar los precios de los instrumentos de inversión. Todos los métodos para evaluar estos precios dependen de la estadística de volatilidad, entendiéndose que ésta es igualmente una medida de incertidumbre respecto al rendimiento futuro del activo en cuestión. Así, se espera que un agente económico decida invertir en los activos que tienen la menor volatilidad o incertidumbre respecto a su rendimiento. Se tiene entonces el problema de determinar con precisión el valor futuro de la volatilidad de un activo. La predicción se complica debido a la existencia de complejas relaciones entre los valores de los instrumentos de inversión que suelen ser no intuitivas; por ejemplo, los mercados no se mueven linealmente, sino a través de periodos de pérdidas y ganancias en

los rendimientos. Los modelos estadísticos ayudan a detectar las dependencias entre valores pasados del rendimiento de los activos y los que se observen en el futuro. Se deben, por lo tanto, investigar aspectos estadísticos como (i) la volatilidad que se presentan en los mercados y cuánto tiempo se espera que duren sus efectos, (ii) la tolerancia al riesgo del agente inversionista y (iii) las acciones que deben tomar los agentes para la mejor asignación de sus inversiones. Una estrategia adicional a la que se incurre para reducir el riesgo de una inversión es el mecanismo de inversión en un *portafolio* de activos. Éste se define como la inversión en diferentes clases de activos, de valores y de emisores con el fin de reducir el riesgo total de la inversión y para evitar el deterioro en el desempeño del portafolio. Este mecanismo de diversificación suele tener un rendimiento superior al de una inversión en la que se usa como producto un activo único. En el portafolio de inversión se pueden seleccionar instrumentos financieros de clases con incertidumbres no relacionadas entre sí, de tal manera que el fenómeno que realiza el riesgo, que es normalmente selectivo, afecta la volatilidad de un activo, mientras actúa sin afectar las de los activos de otras clases financieras. Es decir, si un activo se desempeña pobremente, la pérdida potencial en su rendimiento podrá ser compensada por la ganancia de los otros activos del portafolio.

La disciplina de la administración de portafolios de inversión fue primeramente propuesta por la teoría Markowitz (1952, 1959) en la forma de un compromiso (*tradeoff*) entre la esperanza y la varianza de un portafolio de activos. Si se mantiene constante la varianza y se optimiza el rendimiento esperado, el inversionista está en posición de elegir la combinación de activos del portafolio en términos de su nivel de apetito por el riesgo. El modelo Media-Varianza de Markowitz ha sido transformado de muchas maneras hasta llegar a la Teoría Moderna de Portafolios. Notablemente, Sharpe (1964) y Lintner (1965) crearon un modelo que ignora la covarianza entre rendimientos de valores y en el que se considera que el rendimiento de los valores depende solo del índice del mercado. Este modelo evolucionó luego hacia el desarrollo del Modelo de Precios de Activos de Capital (CAPM, por sus siglas en inglés). Después se realizaron estudios de índole variada en la Teoría Moderna de Portafolios y su correspondiente medida del riesgo. Aparte

de la varianza, se consideraron, entre otros, enfoques como la Desviación Absoluta Media (Konno et. al., 1993), entropía (Philippatos & Wilson, 1972), Valor en Riesgo (VaR⁷) (Gaivoronski & Pflug, 2005), VaR Condicional (Rockafellar & Uryasev, 2002), la medición de los riesgos sistemáticos y no sistemáticos con una tasa de rendimientos en exceso (Sharpe, 1966) y programación lineal (Sharpe, 1967). Por otro lado, Jensen (1968) propuso el índice Jensen o Alfa como una medida absoluta para medir el desempeño de un portafolio.⁸ En la Teoría Moderna de Portafolios se han introducido también cuestiones como los algoritmos genéticos (Xia et. al., 2000), los modelos fuzzy (Tanaka et. al., 2000), los procesos estocásticos (Fernholz, 2002) y la programación estocástica (Samuelson, 1969).⁹

Respecto a los modelos de la familia ARCH, se debe primero establecer el marco en el que se usan; a saber, las particularidades de las series de tiempo financieras, que son las series tratadas en este trabajo. Gujarati & Porter (2010) introducen los rasgos peculiares de estas series. Primero, que presentan el fenómeno de *acumulación de volatilidad*,¹⁰ consistente en intervalos con alta dispersión, después de los cuales se dan lapsos de dispersión baja. De hecho, Gujarati & Porter (2010) citan textualmente la descripción clave de Franses (1998):

En vista de que tales datos [las series de tiempo financieras] reflejan el resultado del comercio entre compradores y vendedores a precios del mercado, por ejemplo, diversas fuentes de noticias y otros acontecimientos exógenos pueden afectar el patrón de las series de tiempo de los precios de los valores. En vista de que las noticias tienen diversas interpretaciones y también de que los acontecimientos económicos específicos, como las crisis del petróleo, perduran cierto tiempo, a menudo vemos que las grandes observaciones positivas y negativas en las series de tiempo financieras tienden a aparecer en grupos.

⁷ *Value-at-Risk*, en inglés.

⁸ El coeficiente alfa (α) es la medida de la diferencia entre el rendimiento real y rendimiento esperado, dado un valor de riesgo específico (coeficiente beta). El coeficiente beta (β) de un activo mide el grado de variabilidad de su rendimiento respecto al rendimiento promedio en el mercado.

⁹ No se enlista en esta sección el método de Black & Scholes (1973) por no usarse regularmente para evaluación de portafolios y, además, presentar algunos sesgos sistemáticos en la predicción de la volatilidad característica (Ortiz Ramírez et. al., 2011).

¹⁰ En inglés, *volatility clustering*.

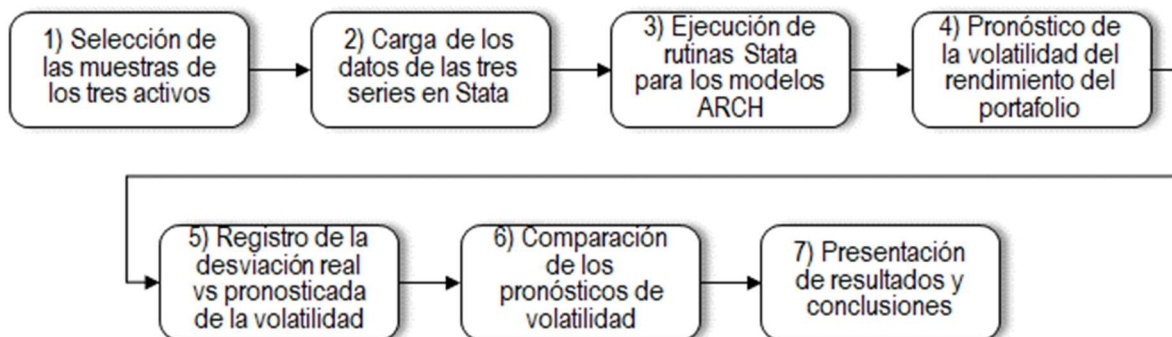
En el mismo texto, Gujarati & Porter se preguntan igualmente acerca de la manera de modelar las series de tiempo con tal volatilidad. En particular, se preocupan de que estas series de tiempo sean caminatas aleatorias en su forma de nivel, es decir, de que no sean series estacionarias. Además, si se decide examinar las series con sus primeras diferencias, éstas aún exhiben amplia volatilidad, lo que significa que su varianza cambia con el tiempo (persiste la no estacionariedad). La acumulación de volatilidad significa en la práctica que se espera que valores grandes de rendimiento sean seguidos por altos rendimientos y que rendimientos bajos sean seguidos por bajos rendimientos. Una segunda propiedad de las series financieras es que exhiben *leptocurtosis*, que es la tendencia de los rendimientos de activos financieros a exhibir colas pesadas. Por definición, una cola pesada es una distribución de probabilidad que predice que ocurran movimientos de al menos tres desviaciones estándar más frecuentemente que una distribución normal. Por último, las series tienen *efectos de apalancamiento*, que es la predisposición a incrementos de la volatilidad después de que los valores de la serie se han reducido, en lugar de exhibir un aumento en el rendimiento de la misma magnitud; este efecto fue originalmente notado por Black (1976). Dicho de otra manera, los precios de los activos tienden a correlacionarse negativamente con los cambios de volatilidad. Es aquí donde se hace la consideración de los modelos ARCH, cuya primera propuesta fue desarrollada por Engle (1982), la cual posteriormente ampliada con variantes de Bollerslev (1986), Nelson (1991) y Berra & Higgings (1993), entre otros. Estos modelos se usan frecuentemente para modelar series de tiempo con las cualidades de las series financieras bursátiles mencionadas: acumulación de volatilidad, leptocurtosis y efectos de apalancamiento. Por lo tanto, los modelos ARCH —que se describen con detalle en el Capítulo 1 de este trabajo— parecen tener las condiciones formales necesarias para describir el comportamiento de las peculiares series de tiempo financieras.

Metodología y organización de la tesis

La metodología aplicada en la investigación es la que se ilustra en la Figura 0.1. En el primer paso de la investigación se seleccionan los activos y los datos del periodo

anual enero 2018 a enero 2019. En el segundo paso se cargan los datos de los tres activos en Stata y se compone el portafolio con los tres activos. En el tercer paso se ejecutan las rutinas de Stata para descubrir las estadísticas descriptivas de las series de tiempo de los activos y del portafolio; por ejemplo, se comprueba la presencia de heterocedasticidad en los residuales de las series. También en este tercer paso se corren los programas con los que se ajustan los modelos ARCH a la volatilidad del rendimiento del portafolio. Este procedimiento de ajuste se repite para cada uno de los modelos considerados. En el cuarto paso se realiza el pronóstico de la volatilidad del rendimiento con los modelos ARCH. En el quinto paso se consigna la desviación real vs pronóstico de la volatilidad. En el sexto paso se realiza un comparativo de resultados en términos de la capacidad de predicción de la volatilidad del portafolio. Finalmente, en el séptimo paso se explican los resultados y se enlistan las conclusiones.

Figura 0.1 – Esquema de la metodología de la tesis.



La tesis se estructura de la siguiente manera. En la *Introducción* se exponen breves antecedentes para ubicar el contexto de la Teoría del Portafolio requerido para el trabajo de la investigación, la formulación del problema, los objetivos, la hipótesis y alcances de la investigación. En el Capítulo 1 – *Marco teórico* se incluye el detalle de la revisión de la literatura relevante, que es clave para entender cada uno de los modelos de la familia ARCH. Se presentan los conceptos que son necesarios para establecer claramente las bases teóricas que se aplican en el desarrollo de la investigación. En este Capítulo 1 también se exponen los supuestos de la investigación. En el Capítulo 2 – *Desarrollo de la investigación*, se presentan

los datos de las series que se van a usar como componentes del portafolio. Las series a usar serán dos de activos del IPC (Índice de Precios y Cotizaciones) de la Bolsa Mexicana de Valores y una del tipo de cambio del mercado de divisas. Se corren también en este capítulo los programas de acuerdo a los modelos presentados en el Capítulo 1. Se incluyen para cada caso el cálculo de las volatilidades individuales de los activos y del conjunto de los tres de ellos que componen el portafolio. Se usa el programa Stata como herramienta para correr los modelos. En el Capítulo 3 – *Resultados* se analizan los resultados obtenidos al aplicar los modelos sobre las series de tiempo de los tres activos. Finalmente, se presentan las *Conclusiones* de la investigación; en este apartado también se hacen comentarios sobre futuros estudios que podrían ampliar los resultados de este trabajo. El trabajo se cierra con la lista de *Referencias* citadas a lo largo del documento.

Capítulo 1. Marco teórico y estado del arte

1.1 Introducción

El marco teórico necesario para este trabajo de investigación abarca dos temas principales: la Teoría Moderna de Portafolios (TMP) y la familia de modelos ARCH. Por lo tanto, de estos dos temas se presentan en este capítulo el marco teórico y el estado de arte requeridos para desarrollar el trabajo. Se establece el marco teórico extrayendo y recopilando de las fuentes indicadas la información relevante para enmarcar la investigación. Se introduce el enfoque usado para abordar el estudio, lo cual tiene también el propósito de exponer el lenguaje teórico utilizado. Por otro lado, se muestra la perspectiva del más reciente conocimiento disponible sobre los dos temas abordados, que es lo que se denomina estado del arte. De la Teoría Moderna del Portafolio se describen sus nociones básicas; las necesarias para fundamentar este trabajo. Respecto a los modelos ARCH, se presentan los conceptos cuyo detalle se encuentra desarrollado en la literatura pertinente.

1.2 Análisis fundamental y análisis técnico

En este trabajo se usa el enfoque del análisis técnico, por lo que es importante definir este concepto, sobre todo en contraste del análisis fundamental. El *análisis fundamental*, descrito por primera vez en 1934 en el libro de Graham & Dodd,¹ presenta un esquema de cálculo del valor de un activo usando la información de balances de la empresa asociada al título.² El análisis de balances resulta en un valor real del activo, el cual, al ser comparado con el valor del activo en el mercado, deriva en un juicio relacionado con precio sobrevalorado o infravalorado. Este análisis agrega consideraciones sobre la influencia de otros factores, entre los que

¹ Se encontró y consultó la sexta edición del texto de Graham & Dodd, la cual fue publicada en 2006.

² Los balances son los relativos a los resultados financieros que describen el desempeño financiero individual de la empresa, como el balance general, el estado de resultados, el flujo de efectivo y otros.

se encuentran los políticos y los económicos.³ De este modo, el análisis fundamental abarca hoy en día exámenes de las ganancias de la empresa, sus razones financieras, sus estados financieros, sus nuevos productos y su imagen ante la sociedad, entre otros aspectos. Si el activo es un tipo de cambio —al cual no se puede asociar una empresa—, las revisiones toman en cuenta el comportamiento de variables macroeconómicas y microeconómicas (el consumo, los niveles de exportación y de importación, el crecimiento del Producto Interno Bruto, etc.) y políticas (e.g., estabilidad del partido en el poder o de los gobernantes en turno); pero estos factores económicos y políticos influyen en el valor real o comercial del título de una empresa, al igual que sus balances. Por otra parte, el *análisis técnico* hace uso de la información disponible del valor del título en el mercado. La información relacionada con el análisis técnico incluye los volúmenes de compra y venta, el precio en los mercados del activo a lo largo de periodos de tiempo y el comportamiento de índices, entre otros. Esta información se usa estadísticamente para determinar correlaciones, niveles de volatilidad, valores medios y tendencias. Surgido a finales del siglo XIX, en Estados Unidos, a manos de Charles Dow, este método prescinde del estudio de riesgo financiero (i.e. el basado en balances) propio a las sociedades y en su lugar estudia la acción del mercado, para predecir el comportamiento futuro de los precios tanto de activos individuales como portafolios o índices de los mercados. El análisis técnico se fundamenta en el estudio de datos pasados para pronosticar la dirección de los precios, principalmente precios y volúmenes.

1.3 Incertidumbre, volatilidad y riesgo

Se describe en este párrafo lo que se entenderá por *incertidumbre*, *volatilidad* y *riesgo*. Frank Hyneman Knight escribió en 1921 la obra *Riesgo, incertidumbre y ganancia*. Knight sugiere que *riesgo* se emplea para referirse a situaciones o eventos de los que no se conocen los resultados, pero a los cuales se puede asociar una probabilidad y su respectiva distribución; es decir, riesgo se liga con un sentido

³ Los factores políticos y económicos son factores sistémicos, es decir, no son exclusivos de la empresa, sino que afectan a todas las empresas y agentes económicos.

de medición. La *incertidumbre* aplica a condiciones en las que no se cuenta con toda la información necesaria para calcular valores precisos de probabilidad. En virtud de ello, la incertidumbre se relaciona con una falta de predictibilidad y de sentido de entendimiento respecto a eventos futuros. Knight enfatiza que existe una diferencia clave entre incertidumbre y riesgo: el riesgo se caracteriza por la aleatoriedad que se puede medir; a la incertidumbre no se le puede agregar este rasgo. Esta diferencia es crítica en los mercados, ya que, si el riesgo fuera la única propiedad del comportamiento de los activos en los mercados, los agentes económicos operarían los precios gestionando solamente la medición de la probabilidad. Sin embargo, existe también la incertidumbre, consistente en eventos cuya probabilidad es desconocida (Ellsberg, 1961) y que crean fricciones que los agentes podrían no ser capaces de gestionar. La *volatilidad*, por su parte, es una medida estadística de la dispersión del precio o del rendimiento de un activo o de un índice en el mercado; esto es, se refiere a la naturaleza cambiante y dinámica de las variables en los mercados. El uso de volatilidad como indicador del riesgo se remonta a Markowitz (1952) y a su análisis media-varianza. La volatilidad puede ser medida usando la desviación estándar o la varianza del rendimiento. Así, se dice que mientras más alta sea su volatilidad, más riesgoso es un activo. En los mercados, la volatilidad es visualizada como fluctuaciones por arriba o por debajo de su valor medio en el tiempo.

1.4 La Teoría Moderna del Portafolio

1.4.1 Conceptos básicos

Se define un *activo financiero* como un activo que obtiene su valor a partir de un acto contractual entre dos partes, el cual proporciona a su comprador el derecho a recibir en el futuro ingresos por parte del vendedor; en otras palabras, es un derecho sobre los activos del emisor y el efectivo que produzcan. Ejemplos de activos financieros son los bonos, los depósitos bancarios, las acciones y los derivados bursátiles. Los *bonos* son activos que se caracterizan por ser instrumentos de deuda usados por entidades privadas o públicas para obtener fondos de los

mercados. El mecanismo del bono consiste en que el emisor se compromete a devolver el capital principal junto con los intereses. Las *acciones* son los activos en los que se divide el capital social de una empresa; al comprar las acciones, un agente se convierte en accionista, i.e., en propietario de una parte de la empresa. Es decir, representan la propiedad que una persona tiene de una sociedad. La propiedad de acciones proporciona a su titular derechos (e.g., el derecho a voto en la junta de accionistas, exigir información sobre la empresa, recibir dividendos o vender las acciones de las que disponga) y obligaciones (e.g., el accionista deberá soportar pérdidas si la empresa no obtiene buenos resultados). Los *derivados*, que, como su nombre lo sugiere, son activos que derivan su precio de un instrumento subyacente. Los derivados más comunes son las opciones, los futuros y los swaps. La *opción* es un valor que proporciona el derecho, aunque no la obligación, para comprar (que es una operación designada *call*) o para vender (operación llamada *put*) el producto subyacente a un precio de ejercicio establecido por adelantado. Un contrato *futuro* es convenido entre dos partes por medio del cual el vendedor se compromete a entregar activos en un precio, un monto y una fecha determinados en el momento de firmar el contrato. Un *swap* es un contrato con el que las dos partes firmantes intercambian instrumentos financieros de cualquier naturaleza, pero que en general involucran flujos de efectivo con cuyo monto nominal es acordado por las partes. Habitualmente, el principal del swap no cambia de propiedad, ya que el flujo se compone de flujo fijo y de flujo variable; éste se basa en un tipo de interés de referencia, un tipo de cambio específico o un índice de precios. Finalmente, consideramos el activo del *tipo de cambio*, que es el instrumento que se negocia comercialmente en los mercados Forex. El mercado Forex⁴ es un mercado mundial descentralizado o de venta libre (*Over-The-Counter*, OTC) de comercio de divisas. En el mercado Forex se determina el tipo de cambio, mecanismo que contiene los aspectos de compra, venta e intercambio de monedas a precios actuales o determinados.

⁴ De *Foreign Exchange*; también conocido como mercado de divisas o FX.

Estos y muchos más tipos de activos se comercializan en mercados financieros, que son mercados en los que agentes económicos compran y venden valores en operaciones ejecutadas esencialmente de manera electrónica. En estas transacciones, los agentes económicos buscan habitualmente obtener un beneficio económico, caracterizado por el *rendimiento*,⁵ el cual se define de la siguiente manera (Monsalve & Harmath, 2015 y Casas & Cepeda, 2008). Si P_t es el precio de un activo en el periodo t y P_{t-1} es el precio del mismo activo en el periodo anterior $t - 1$, su rendimiento R_t está dado por

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} \quad (1.1)$$

donde D_t es el dividendo pagado en el periodo t . El dividendo es el valor pagado en t a los inversionistas como resultado de la utilidad de la inversión en el activo. En este trabajo se supone que el ejercicio de los activos no paga dividendo, por lo que $D_t = 0$, para todo t . Adicionalmente, se hacen las observaciones de que los valores de rendimiento son calculados como rendimientos logarítmicos y que éstos, sin unidades, se componen continuamente y son aditivos en el tiempo. El uso de valores logarítmicos se justifica a través de la primera diferencia de los precios del activo, que es una transformación habitual para convertir una serie en estacionaria, procedimiento que es un fundamento de las series de tiempo. Así, la fórmula para el rendimiento log se escribe de la siguiente manera:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

donde r_t es el rendimiento log diario del activo al final del periodo t . La consideración de rendimientos log aditivos está descrita en Tsay (2010), de acuerdo con lo cual una serie de rendimientos log tiene media estable y permite el cálculo aditivo del rendimiento compuestos en k periodos, de esta forma:

$$r_t[k] = r_t + r_{t-1} + r_{t-2} + \dots + r_{t-k}$$

⁵ En español se usa también *rentabilidad* en lugar de *rendimiento*.

El concepto de rendimiento es uno de los elementos que un agente económico toma en cuenta al tomar una decisión de inversión. El otro es el *riesgo* inherente al comportamiento del activo en el mercado, el cual, para ser un factor útil en la decisión del inversionista, debe ser cuantificado. Se presenta aquí el concepto de riesgo desde el punto de vista estadístico, de acuerdo con el cual este indicador se asocia con la varianza del rendimiento, i.e., la dispersión del rendimiento del activo alrededor de su valor medio. Es decir, la medida estadística es la varianza σ^2 o la desviación estándar σ . La varianza se expresa así:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2$$

donde T es el número de periodos sobre los cuales se toma la medición, R_t es el rendimiento en el periodo t y \bar{R} denota el retorno medio del activo sobre el conjunto de periodos. Desde las primeras formulaciones de la TMP por Markowitz, esta medida de dispersión es la más usada para representar el riesgo. De esta noción de riesgo se pasa luego al concepto de *volatilidad*. La varianza y la volatilidad proporcionan un sentido de riesgo del activo. Si la media es la rentabilidad promedio del activo, la varianza y la volatilidad pueden dar una percepción de cuándo el activo se desempeña mejor o peor que el rendimiento medio. Mientras más grandes sean estas desviaciones a lo largo del tiempo, más inestabilidad muestra la serie de tiempo del rendimiento y más riesgoso se considera el activo. La varianza consiste en el riesgo del activo durante su vida, en tanto que la volatilidad le da un sentido de la fluctuación alrededor de su valor medio en periodos recientes (e.g., el último mes). Para un inversionista a corto plazo, puede ser deseable un activo con alta volatilidad, lo que le permite comprar barato y, casi inmediatamente después, vender caro. Por lo tanto, un inversionista debe calcular el valor de la volatilidad para resolver el problema de inversión en un activo, dado su rendimiento. Otras formas del rendimiento documentadas en la literatura, por ejemplo, métodos que consideran el volumen de capital y el tiempo que éste permanece en la vida del portafolio, métodos que incluyen el efecto de las tasas internas de retorno, tasas de

retorno ponderadas por el capital y otras (Fisher, 1968) no son estudiadas en este trabajo.

La volatilidad de las series de tiempo financieras presenta algunas características que, de acuerdo a Engle & Patton (2001), son importantes modelar, en particular porque las características de esta volatilidad, que deben ser homocedásticas, es decir, tener un valor constante en el modelo clásico de regresión. Estas características peculiares son (i) concentración de la volatilidad,⁶ (ii) reversión a la media, (iii) asimetría de la volatilidad, (iv) influencia de variables exógenas y (v) distribución de probabilidad. La primera característica se refiere a la tendencia de la volatilidad que consiste en que suceden agrupamientos por intervalos; en algunos de ellos la volatilidad es alta y en otros es baja. Se atribuye este efecto a que las fluctuaciones⁷ en el rendimiento de un periodo presente influyen en el valor esperado de la volatilidad en periodos futuros. La concentración ha sido abundantemente documentada en la literatura, en la que destaca Chou (1988). La segunda característica, la reversión a la media, consiste en que, un intervalo de alta volatilidad es seguido por otro de volatilidad menor y a uno de éstos sigue otro de volatilidad más alta —y este fenómeno se debe a la concentración de volatilidad. La característica de asimetría en la volatilidad⁸ reside en el hecho de que la volatilidad no tiene la misma respuesta frente a variaciones positivas y negativas en el comportamiento del rendimiento. Casas & Cepeda (2008) mencionan para explicar este caso los ejemplos de una caída en el precio de un activo y un alza considerable en el precio del mismo. La cuarta característica, influencia de variables exógenas, sugiere que los precios de los activos financieros, en tanto se negocian en los mercados, no se comportan independientemente de variables que proporcionan información que explica la volatilidad de los activos en un mercado (ver Bollerslev & Melvin, 1994). Además, la característica de distribución de los rendimientos consiste en que ésta no es normal: presenta valores extremos de rendimiento con mayor frecuencia que lo esperado en una distribución

⁶ *Volatility clustering*; en español también se traduce como *aglomeración de volatilidad*.

⁷ Las fluctuaciones son denominadas *choques* o *innovaciones* en la literatura.

⁸ La asimetría también se conoce como *efecto de apalancamiento* o, en inglés, *leverage effect*.

normal (*colas pesadas*⁹) y ocurren rendimientos negativos extremos con mayor frecuencia que los rendimientos extremos positivos. Esta propiedad de los rendimientos también se designa como leptocurtosis.¹⁰ De la misma manera, los niveles de autocorrelación de los rendimientos tienden a ser no significativos, debido a la concentración de volatilidad. La volatilidad que cumple con las cinco características enlistadas se llama *volatilidad condicional*.

Para ilustrar la volatilidad condicional, independientemente de que ésta requiere un tratamiento más formal que se presenta en las siguientes secciones (junto con los modelos de la familia ARCH), se muestran en la Figura 1.1 y en la Figura 1.2 los precios y el rendimiento log del índice Industrial Dow Jones.¹¹ Se nota gráficamente (i) el comportamiento no estacionario de la serie de tiempo, pues al menos tiene tendencia; con ello cual se justifica aplicar primeras diferencias y (ii) la presencia de variaciones en la volatilidad, pues ocurren altos niveles de volatilidad en los años 2012, 2016 y 2018, en tanto en otros periodos la volatilidad presenta niveles bajos. (Se ignora a propósito la volatilidad de los años 2008 y 2009, años en que sucedió la crisis financiera; como se explica posteriormente en este trabajo, la volatilidad condicional de las series de tiempo financieras causadas por crisis no se incluye en el alcance del estudio.) Estas observaciones se reducen en esta sección a una mera inspección visual. Se requiere expresamente la ejecución de las pruebas relativas para demostrar lo que se percibe en las figuras. Estas pruebas se describen en las siguientes secciones y se realizan en el Capítulo 2.

⁹ *Heavy tails*, en inglés.

¹⁰ Cabe aquí hacer la siguiente observación. Una distribución de *cola pesada* es una distribución cuya cola no se limita exponencialmente, es decir, tiene cola más pesada que la distribución exponencial. Por otro lado, una *cola pesada* (*heavy tail*) y una *cola gorda* (*fat tail*) son equivalentes en el contexto de este trabajo. En efecto, una distribución con cola gorda tiene una función de densidad de distribución que se acerca a cero con la forma de la potencia x^{-a} con valores grandes de la variable aleatoria x (el valor a es una constante). Puesto que ésta tiene frontera por debajo de la función de densidad de probabilidad de una distribución exponencial, las colas gordas son siempre colas pesadas.

¹¹ Se usa Stata en este trabajo como herramienta para graficar y hacer los cálculos econométricos.

Figura 1.1 – Precio en dólares de Estados Unidos del índice Industrial Dow Jones, del 1 de octubre de 2008 al 10 de octubre de 2018. Fuente de los datos: Yahoo! Finance

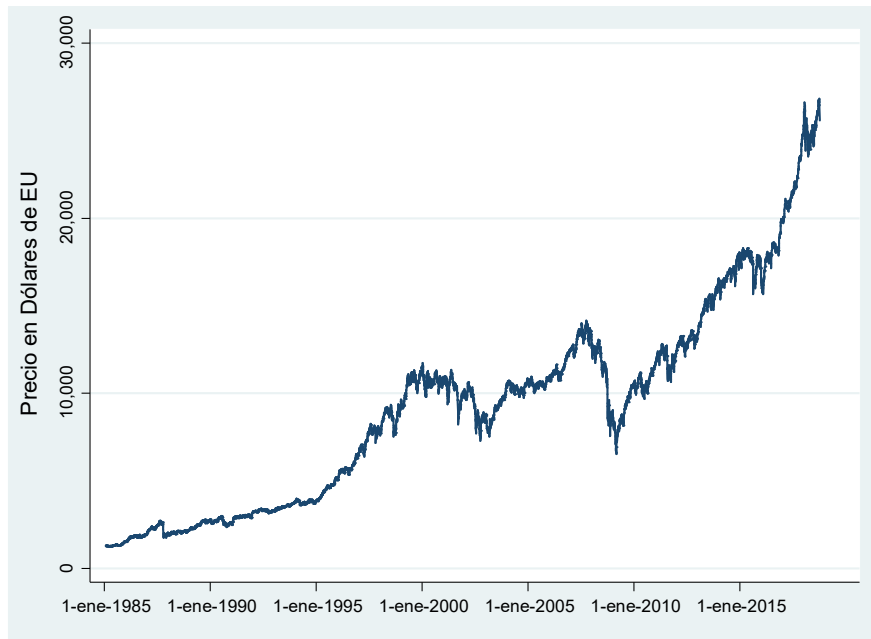
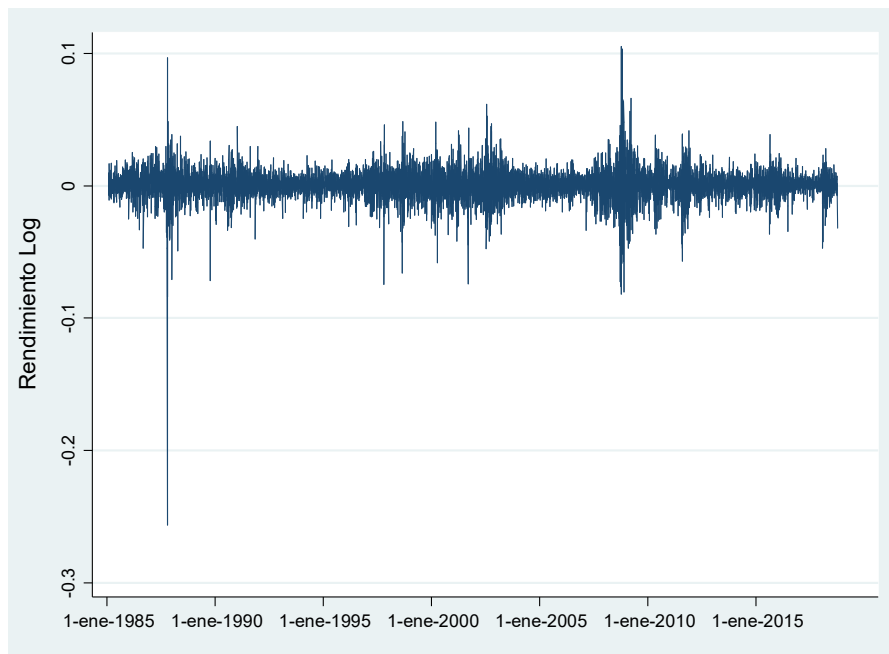


Figura 1.2 – Log Rendimiento del índice Industrial Dow Jones, del 1 de octubre de 2008 al 10 de octubre de 2018. Fuente de los datos: Yahoo! Finance.



1.4.2 Definición de portafolio y de gestión del portafolio¹²

Un *portafolio* es una estructura de compuesta a través de un agrupamiento de activos. La *estructura* del portafolio define el tipo de activos —que, como ya hemos visto, son de muchas clases—, los mercados financieros en los que se coloca la inversión, los montos de éstas, el nivel de riesgo con el que se acepta operar las inversiones en los mercados y el monto de inversión asignado a cada uno de los activos. Los portafolios son manejados a través del proceso de *gestión del portafolio*, que consiste en seleccionar y negociar los activos en los correspondientes mercados de manera que el inversionista obtenga el rendimiento máximo. La gestión del portafolio puede ser *pasiva* o *activa*. El primer tipo, el pasivo, se realiza rastreando —sin intentar anticiparlo— el comportamiento del mercado, suponiendo que aplica el principio de que los mercados financieros son perfectamente eficientes, i.e., la información es completa, y que ésta se integra inmediatamente para determinar los precios de los activos en los mercados. Por lo tanto, la mejor táctica de gestión es la de copiar el desempeño de los índices de los mercados, los cuales son tomados como referencia. En el segundo tipo de gestión del portafolio, la gestión activa, se busca “ganarle al mercado”, que es equivalente a decir que se persigue obtener rendimientos más altos que los de los índices de los mercados. Este tipo de gestión supone que los mercados financieros son imperfectos y que necesitan que transcurra un cierto tiempo antes de que la información tenga efecto sobre los precios en los mercados.¹³

Por otro lado, la gestión del portafolio se realiza en tres fases. La primera incluye la decisión de distribución de la inversión en las diferentes clases de activos, de acuerdo a los objetivos de inversión del agente económico. En la segunda fase, que se relaciona con la gestión táctica del portafolio, se ajusta regularmente la estructura del portafolio para aprovechar oportunidades de corto plazo; las modificaciones pueden ser, entre otras, cambios en el peso ponderado de cada activo en el portafolio. En la tercera fase, los administradores del portafolio, a través

¹² Ver Amenc & Le Sourd (2003), p.6ss.

¹³ Con la explicación dada, el enfoque aplicado en este trabajo se supone que es el de la gestión activa.

de herramientas casi siempre estadísticas, deciden oportunamente optimizar la selección de activos para mejorar el rendimiento del portafolio.

1.4.3 Rendimiento de un portafolio¹⁴

El rendimiento de un portafolio se determina con la expresión

$$r_p = \sum_{i=1}^n w_i r_i \quad (1.2)$$

donde n es el número de activos en el portafolio, r_p es el rendimiento del portafolio, w_i es la ponderación asignada por el inversionista y el administrador del portafolio al i -ésimo activo cuyo rendimiento es r_i . Esta ecuación se puede poner en la forma matricial siguiente:

$$r_p = \mathbf{w}'\mathbf{R}$$

donde \mathbf{w} es el vector de ponderaciones para los activos y $\mathbf{R} = [r_1 \ r_2 \ r_3]'$ es el vector de rendimientos de los activos en el portafolio. La volatilidad del portafolio se asocia con la varianza del portafolio, por lo que podemos obtener

$$Var(r_p) = Var(\mathbf{w}'\mathbf{R}) = \mathbf{w}'Cov(\mathbf{R}\mathbf{R}')\mathbf{w} = \mathbf{w}'\mathbf{H}\mathbf{w} \quad (1.3)$$

donde $\mathbf{H} = Cov(\mathbf{R}\mathbf{R}')$ es la matriz varianza-covarianza. La matriz de varianza covarianza \mathbf{H} , también denotada en la literatura como Σ , es una matriz cuadrada que presenta los valores de covarianza entre cada par de elementos de un vector aleatorio; en este caso éste es el vector de rendimientos \mathbf{R} . De esta manera, también podemos escribir

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Var_1 & Cov_{1,2} & Cov_{1,3} \\ Cov_{2,1} & Var_2 & Cov_{2,3} \\ Cov_{3,1} & Cov_{3,2} & Var_3 \end{bmatrix}$$

¹⁴ Markowitz (1952 y 1959).

en donde $Cov_{i,j}$ es la covarianza entre el rendimiento i –ésimo y j –ésimo; es decir, $Cov_{i,j} = Cov(r_i, r_j)$. Se nota también que en la diagonal principal de la matriz H los componentes Var_i son los valores de auto varianza de los rendimientos de los activos.

La desviación estándar del portafolio (i.e. la volatilidad del portafolio) σ_p es, por tanto, un escalar que se obtiene con

$$\sigma_p = \sqrt{\mathbf{w}'\mathbf{H}\mathbf{w}} \quad (1.4)$$

Por ejemplo, con $n = 3$ activos en el portafolio —que es el caso a estudiar en esta investigación—, σ_p es

$$\sigma_p = \sqrt{\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Var_1 & Cov_{1,2} & Cov_{1,3} \\ Cov_{2,1} & Var_2 & Cov_{2,3} \\ Cov_{3,1} & Cov_{3,2} & Var_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}}$$

donde $\sigma_{i,j} = Cov(r_i, r_j)$ y r_i es la serie del rendimiento del activo i –ésimo.

De acuerdo a Amenc & La Sourd (2003), el método de cálculo del rendimiento de un portafolio establecido en la ecuación (1.2) es el más adecuado cuando los datos disponibles son los datos históricos (es decir, las series de tiempo) de los precios de cada uno de los activos componentes. Esta es el contexto con el que se encuentra este trabajo; tenemos los datos históricos de los precios y, por consecuencia, de los log rendimientos de los activos.

Otros métodos para calcular el rendimiento de un portafolio, que incluyen el procedimiento del VaR (Valor en Riesgo, por sus siglas en inglés), documentado ampliamente por Jorion (2007), y consideraciones sobre flujos de capital, tasas de rendimiento, evaluación de valor presente neto y ponderaciones en el tiempo de tasas de rendimiento (Amenc & La Sourd, 2003, p. 28 ss), no son estudiados en esta investigación.

1.4.4 Construcción del portafolio

Pojarliev & Polasek (2001) reportan el proceso de construcción óptima del portafolio, que consiste en minimizar la varianza dada en la ecuación (1.3):

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}'\mathbf{H}\mathbf{w} \quad \text{sujeto a} \quad \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$$

Donde $\mathbf{1}' = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, i.e., $\mathbf{1}$ es el vector unitario. Los autores usan el habitual proceso lagrangiano para minimizar la ecuación

$$\mathcal{L} = \mathbf{w}'\mathbf{H}\mathbf{w} - \lambda(\mathbf{w}'\mathbf{1} - 1)$$

y encuentran la construcción óptima de acuerdo con el siguiente valor:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}}$$

siendo \mathbf{H}^{-1} la inversa de la matriz de varianza-covarianza de los rendimientos.

1.4.5 El modelo CAPM

Puesto que en el Capítulo 2 se hace una consideración comparativa del modelo CAPM y los modelos ARCH, se hace aquí brevemente la referencia a la Línea del Mercado de Capitales (LMC) del modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*)¹⁵ de la siguiente manera. Si la LMC se representa con la conocida relación

$$E[r_p] = r_f + s_p\sigma_p$$

donde s_p es la razón de Sharpe, r_f es el rendimiento del portafolio compuesto por activos que se operan sin riesgo y σ_p es la volatilidad del portafolio calculada con la ecuación (1.4). Entonces, la razón de Sharpe se calcula de la siguiente forma:

¹⁵ Ver Markowitz (1952), Sharpe (1964) y Linter (1965), quienes, entre otros muchos autores a lo largo de décadas, han desarrollado y mejorado el modelo CAPM, en el cual es central el concepto de Línea de Mercado de Capitales.

$$s_p = \frac{E[r_p] - r_f}{\sigma_p}$$

en la que es evidente la relación (*trade-off*) entre el riesgo σ_p y el valor esperado del rendimiento del portafolio $E[r_p]$. Esta relación de compensación es un concepto que maneja Markowitz desde los años 1950s. La compensación (*trade-off*) riesgo - rendimiento establece que el rendimiento se incrementa potencialmente al aumentar el riesgo. De acuerdo a este principio, los individuos relacionan niveles bajos de incertidumbre o riesgo con rendimientos potenciales bajos y niveles altos de incertidumbre o riesgo con altos rendimientos potenciales. En otras palabras, los recursos invertidos pueden resultar en mayores ganancias sólo si el inversionista acepta una mayor posibilidad de pérdidas.

El modelo CAPM se establece formalmente haciendo una serie de suposiciones. Se enuncian aquí con el fin de fundamentar el posterior análisis comparativo con los modelos de la familia ARCH (Arnold, 2005): Los inversionista (i) tienen el objetivo de maximizar utilidades económicas, siendo dadas y fijas las cantidades de activos, (ii) son racionales y tienen aversión al riesgo, (iii) diversifican sus decisiones de inversión a través de un rango amplio de activos y estructuras de portafolios, (iv) no pueden influir en los precios de los mercados (es decir, operan en mercados de competencia perfecta, pues son tomadores de precios), (v) pueden prestar y pedir prestadas cantidades ilimitadas con tasas de interés por debajo de la tasa de interés libre de riesgo, (vi) ejecutan operaciones comerciales sin costo de transacción o impuestos, (vii) negocian valores que son altamente divisibles (i.e., los activos son perfectamente divisibles y líquidos), (viii) tienen expectativas homogéneas y (ix) asumen que el acceso a la información es perfecto para todos los inversionistas. Estas suposiciones, sin embargo, no necesariamente son ciertas; Fama & French (2004) han documentado enfáticamente que “lo atractivo del CAPM es que ofrece predicciones poderosas e intuitivamente agradables acerca de cómo medir el riesgo y la relación entre el retorno esperado y el riesgo. Desafortunadamente, el registro empírico del modelo es pobre, lo suficientemente pobre como para invalidar la forma

en se utiliza en aplicaciones.” En particular, Fama & French hacen responsables de estas fallas en el modelo a las *suposiciones simplificadoras*.

Basándose en el modelo CAPM, Jensen (1968) definió el *alfa* como la diferencia entre el rendimiento del portafolio en exceso de la tasa libre de riesgo y el rendimiento explicado por el modelo de mercado:

$$E[r_p] - r_f = \alpha_p + \beta_p(E[r_m] - r_f)$$

que se puede calcular de manera regresiva con

$$r_{pt} - r_{ft} = \alpha_p + \beta_p(r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{pt} \quad (1.5)$$

en donde $r_{pt} - r_{ft}$ es el rendimiento en exceso¹⁶ el término $\beta_p(r_{mt} - r_{ft})$ mide el rendimiento del portafolio y α_p es la medición de la fracción del rendimiento adicional que se debe a la elección del operador del portafolio; α_p se denomina *medida de Jensen* o *alfa de Jensen*. Por otro lado, el factor β_p representa el riesgo sistemático.¹⁷ Bollerslev et. al. (1988) proponen el modelo de la ecuación (1.5) para probar la aplicación de un modelo ARCH en el esquema CAPM con heterocedasticidad.

1.4.6 La volatilidad del rendimiento

Tsay (2010) establece que la volatilidad del rendimiento de un activo no es directamente observable, pues suponiendo que los rendimientos de un activo se registran diariamente, una observación, la del día en cuestión, no es suficiente para determinar la volatilidad. Se debe tener por tanto *información*; es decir, un conjunto de observaciones presente y pasadas del valor del rendimiento: $\{r_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$, durante un conjunto de periodos T ; esta información se representa con Ω_t .

¹⁶ El rendimiento en exceso $r_{pt} - r_{ft}$ también se denomina *rendimiento residual*.

¹⁷ *Riesgo sistemático* es el riesgo residual que no puede diversificarse; depende del mercado y no puede reducirse. A su vez, el *riesgo residual* es el riesgo que subsiste después de aplicar los controles de gestión del riesgo. Compárese el concepto de riesgo sistemático con el concepto de *riesgo no sistemático*, que depende de factores intrínsecos al activo (e.g., los balances financieros), los cuales sí pueden reducirse. Ver sección 1.7.4.

Una segunda característica importante de la volatilidad, útil para las descripciones de las siguientes secciones, es que el rendimiento que se trata aquí es el denominado rendimiento residual, el cual se explica a partir del modelo CAPM. Si se recuerda a aquí la fórmula del modelo,

$$r_p - r_f = s_p(r_m - r_f) + \varepsilon_t$$

donde r_p es el rendimiento del activo (o portafolio), r_f es el rendimiento del portafolio compuesto por activos sin riesgo, s_p es la volatilidad del portafolio y ε_t es la parte del rendimiento que el modelo CAPM no explica, entonces el rendimiento residual es este valor ε_t , que es precisamente la volatilidad del rendimiento log, el cual también es llamado *alfa* en el vocabulario del modelo CAPM. Por lo tanto,

$$\varepsilon_t = r_p - r_f - s_p(r_m - r_f)$$

y

$$r_t = \varepsilon_t \tag{1.6}$$

Una forma alternativa de llegar al resultado de la ecuación (1.6) es el presentado por Fan & Yao (2015). Conforme a esta referencia, “la Hipótesis de los Mercados Eficientes (HME)¹⁸ presume que los precios son justos, que la información es accesible para todos los agentes y que se asimila rápidamente para ajustar los precios. Por lo tanto, el precio P_t incluye toda la información disponible hasta t y el cambio de precio $P_t - P_{t-1}$ deriva de las ‘noticias’ entre t y $t + 1$. Por lo tanto, los individuos no tienen oportunidades para hacer una inversión con rendimiento más grande que el pago justo por asumir el riesgo del activo.” Por consiguiente, la HME es equivalente a decir que

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2) \tag{1.7}$$

donde $\mu_t = E_{t-1}[r_t]$ y ε_t es el rendimiento resultante de *noticias impredecibles* —también denominado *innovación*— que ocurren entre $t - 1$ y t . Si se supone que

¹⁸ La Hipótesis de los Mercados Eficientes se debe a Fama (1970).

$\mu_t = \mu$ (donde μ es una constante) —tal que el rendimiento esperado es constante— y ε_t es un proceso de ruido blanco, lo que implica que $E[\varepsilon_t] = 0$ y $Var(\varepsilon_t) = \sigma^2$, donde σ^2 es una constante positiva, la ecuación (1.7) puede reescribirse (Fan & Yao, 2015) de la siguiente manera:¹⁹

$$r_t = \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

En general, se debe expresar

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^q \beta_i r_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

Sin embargo, agregamos finalmente la consideración de Tsay (2010), confirmada por Boffelli & Urga (2016), quien asume para series de rendimiento la forma lineal AR(1):

$$r_t = \mu + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2) \quad (1.8)$$

Esta forma es determinada como *razonable* para rendimientos de activos en ambas referencias, incluyendo hechos estilizados especificados por Tsay. La estructura mostrada en la ecuación (1.8) corresponde al denominado *paseo aleatorio*, en donde μ representa la tendencia en el tiempo del precio del portafolio r_t .

1.4.7 La perspectiva del mercado de Samuelson

En este trabajo se supone que aplica la perspectiva de Samuelson que describe Hyme (2003) de la siguiente manera.²⁰

¹⁹ De una manera intuitiva, si una variable es ruido blanco, cada elemento tiene una distribución idéntica, independiente y con una media de valor igual a cero. La observación de cada período de la serie de tiempo de ruido blanco es una *sorpresa*: nada en la historia anterior de la serie nos da una indicación acerca del nuevo valor de la serie; no se sabe si será positivo o negativo, o si tendrá un valor grande o pequeño.

²⁰ La perspectiva de Samuelson se presenta en cuatro artículos y textos del autor publicados en 1965, 1967, 1973 y 1983, según lo enlistado en las *Referencias* de esta tesis.

(i) De acuerdo a lo demostrado por Samuelson, los precios en los mercados financieros fluctúan aleatoriamente. El autor abunda probando la idea de que los movimientos en los mercados pueden tener regularidades (e.g. tendencias o ciclos), pero esto no asegura que un inversionista tenga ganancias al invertir, *aunque los índices no sean un paseo aleatorio*. Samuelson usa dos axiomas consistentes en que (a) el comportamiento de los precios obedece a una ley de probabilidad y (b) el precio de los valores es único y se obtiene a través de la esperanza matemática de la serie del precio.

(ii) Conforme a Hyme (2003), estos dos postulados son equivalentes a la hipótesis de expectativas racionales, la cual fue ampliamente examinada en la literatura posteriormente a que Samuelson las planteara en los años sesenta.²¹ Sin embargo, Samuelson en ningún momento usa la palabra “racional”; no da a entender que exista un sistema basado en competencia que conduzca a una asignación óptima de los recursos, condición que sólo puede ser quebrada por la aparición de un choque exógeno.

(iii) *Teorema del juego equitativo sobre los precios futuros*. Si los precios siguen una ley de probabilidad y el precio futuro se obtiene a través de la esperanza matemática de la serie de tiempo de los precios, entonces se presenta una condición de *juego equitativo*, consistente en que la esperanza de ganar a través de la especulación es nula. En palabras de Hyme, “el resultado es obvio, ya que se ha supuesto que los compradores y los vendedores de una mercancía futura están de acuerdo sobre su precio futuro, calculado a partir de la ley de probabilidad de ese precio (ley que todos conocen). Pero como el precio a plazo es, por hipótesis, la esperanza matemática del precio cuyo valor depende de la ley de probabilidad, pero también de sucesos imprevisibles (resumidos en el residual de la forma AR(1)), los inversionistas tienen siempre la posibilidad de ‘apostar’ sobre el valor del residual (con la misma probabilidad de ganar o perder).”

²¹ De acuerdo a Hyme, Samuelson ni siquiera aceptó la validez de las expectativas racionales cuando, años después, esta hipótesis se publicó y discutió con intensidad.

(iv) Contrario a Fama (1970), quien habla del mecanismo del *mercado eficiente*, Samuelson rehúye a este concepto.²² Éste, por el contrario, evita en su modelo el problema de asignación eficiente de los recursos.

1.4.8 Resumen

Se han mostrado en esta sección 1.4 los conceptos de la Teoría Moderna del Portafolio que se requieren en forma de vocabulario y marco de referencia para desarrollar los trabajos de la investigación, de acuerdo al Capítulo 2.

1.5 Los modelos de la familia ARCH

En esta sección se describen los modelos ARCH, que son los métodos estudiados en este trabajo para modelar la volatilidad de los rendimientos de un activo. Textos básicos que pueden consultarse para conocer detalladamente los modelos son Enders (2015), Hamilton (1994), Xekalaki & Degiannakis (2010) y Tsay (2010), que, en particular, describen adecuadamente para los propósitos de este trabajo la parte de la econometría que se conoce como *econometría financiera*, incluyendo los modelos ARCH. Ésta ha dado pie a la aplicación de técnicas para modelar inversiones que incluyen no sólo el rendimiento de activos financieros, sino también su riesgo asociado. Para ello, los modelos deben tener la cualidad de tratar con la volatilidad de las series de tiempo con las que se representa el comportamiento de una variable a lo largo del tiempo. Sin embargo, los análisis convencionales suponen que la varianza de los términos de perturbación es constante a lo largo del tiempo; esta condición, que se denomina *homocedasticidad*, no es necesariamente cierta para las series de tiempo financieras. Éstas presentan varianza amplia durante periodos prolongados y baja varianza en otros. Este fenómeno se observa gráficamente —aunque una gráfica no es de ninguna manera definitiva— en la Figura 1.2, que muestra el rendimiento del índice Dow Jones del 1 de enero de 2008

²² De hecho, Hyme indica que Fama atribuye equivocadamente a Samuelson la demostración “rigurosa” de la existencia de la eficiencia del mercado, a pesar de que Samuelson nunca menciona este concepto.

al 10 de octubre de 2018 (un periodo de aproximadamente diez años). Se pueden notar ciertos periodos que tienen una volatilidad más alta que otros. Estas series de tiempo especiales requieren modelos de que sean capaces de tratar con esta volatilidad peculiar. Los modelos que tienen esta capacidad son los de la familia ARCH (*Autoregressive Conditionally Heteroscedastic*), que se describen a continuación. En tanto un contexto teórico completo sobre los modelos ARCH se pueden encontrar ampliamente detallados en Enders (2015) y Gouriéroux (1997) y una reseña histórica en Bollerslev et. al. (1992), se presentan aquí estrictamente los conceptos esenciales que fundamentan teóricamente la investigación. Por lo anterior, se sigue la presentación de Tsay (2010). Los modelos descritos en las siguientes secciones son los mostrados en el Cuadro 1.1.

Cuadro 1.1 – Modelos de la familia ARCH a estudiar en este trabajo.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Autores</i>
1	ARCH	Engle (1982)
2	GARCH	Bollerslev (1986)
3	EGARCH	Nelson (1991)
4	TGARCH	Zakoian (1994)
5	SAARCH	Engle (1990)
6	GJR-GARCH	Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)
7	NGARCH	Lanne & Saikkonen (2005)
8	NGARCHK	Boffelli & Urga (2016)
9	GARCH-M	Boffelli & Urga (2016)

1.5.1 Planteamiento del modelo ARCH

Para el modelo de la ecuación (1.8), es usual tratar la varianza de la innovación ε_t como un término constante, pero con la particular heterocedasticidad en las series de tiempo financieras se permite que $Var(\varepsilon_t)$ cambie en el tiempo. Por lo tanto, la ecuación (1.8) se debe modificar a

$$r_t = \mu + \beta_1 r_{t-1} + \varepsilon_t \quad (1.9)$$

Engle (1982) representa la innovación ε_t con

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{h_t}$$

donde $\eta_t | \Omega_{t-1} \sim N(0,1)$ es iid²³, Ω_{t-1} es la información disponible hasta $t - 1$ (i.e., el conjunto de observaciones r_t hasta $t - 1$) y h_t se define con

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

$$\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim iid N(0, h_t)$$

$$E[\eta_t, \varepsilon_t] = 0$$

Los valores c y a_i son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión.

En vista de la heterocedasticidad mostrada en el comportamiento de las series de tiempo del rendimiento, Engle sugiere que la varianza de los residuales en el tiempo t depende de los cuadrados de los términos de periodos pasados. El autor propone que es preferible modelar simultáneamente la media y la varianza de las series cuando se cree que la varianza de ésta no es constante. En el modelo básico descrito por Engle (1982), el autor describe la varianza condicional $h_t = V(r_t | \Omega_{t-1})$ en términos de los valores de los errores residuales elevados al cuadrado, de la siguiente manera.

Entonces

$$E[r_t | \Omega_{t-1}] = E[\varepsilon_t | \Omega_{t-1}] = 0$$

y

²³ IID ó iid significa que una secuencia o colección de variables aleatorias es independiente y distribuida idénticamente, es decir, si y solo cada variable aleatoria tiene la misma distribución de probabilidad que las otros y todas son mutuamente independientes entre sí.

$$V(r_t|\Omega_{t-1}) = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

El término $E[r_t|\Omega_{t-1}]$ es el valor esperado condicional y representa el pronóstico del rendimiento r_t con la información disponible Ω_t . Por otro lado, el valor $V(r_t|\Omega_{t-1})$ es la varianza condicional de los errores de pronóstico, la cual en la literatura se presenta habitualmente como h_t . Los valores c y a_i son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión. Lo anterior es, por tanto, equivalente a decir que

$$\varepsilon_t \sim iid(0, h_t)$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Tsay (2010, p. 119) reporta lo que etiqueta como *debilidades* del modelo de Engle. En primer lugar, el modelo ARCH atribuye el mismo efecto a las fluctuaciones positivas y negativas del rendimiento, puesto que depende del cuadrado de las fluctuaciones. En segundo lugar, el modelo de Engle no provee ningún entendimiento de la naturaleza de las fluctuaciones de la serie financiera, pues sólo describe mecánicamente el nivel de la varianza condicional. Tercero, los modelos ARCH tienden a sobrevalorar la volatilidad porque responden lentamente a fluctuaciones aisladas en la serie del rendimiento. El propio Engle (1995) creía que el modelo ARCH parecía más un promedio móvil que una autorregresión.

1.5.2 El modelo GARCH

En vista de lo anterior, Bollerslev (1986) publica un artículo en el que propone incluir los términos rezagados de la varianza condicional. De esa manera, el modelo ARCH se convierte en GARCH,²⁴ el cual se formula de la siguiente manera:

²⁴ *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*

$$\varepsilon_t \sim iid(0, h_t)$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

Es decir, la volatilidad condicional depende ahora de los valores pasados de las fluctuaciones (términos $a_i \varepsilon_{t-i}^2$) y los valores pasados de la propia volatilidad condicional (términos $b_j h_{t-j}$).

Una primera variante de este modelo es el GARCH-M, en el que el valor medio de la media condicional depende de su propia varianza. Esto se presenta cuando, por ejemplo, un inversionista con aversión al riesgo requiere una prima por negociar un activo con riesgo. Por lo tanto, el modelo obtenido con esta consideración adicional es:

$$r_t = \mu + \beta_1 r_{t-1} + \theta h_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, h_t)$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

En una segunda variante GARCH, el riesgo se captura usando la desviación estándar de la serie; este modelo tendría la siguiente especificación.

$$r_t = \mu + \beta_1 r_{t-1} + \theta \sqrt{h_t} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid(0, h_t)$$

$$h_t = c + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

1.5.3 El modelo EGARCH²⁵

Nelson (1991) propone un efecto exponencial en lugar del cuadrático expuesto en los modelos especificados hasta aquí. Con ello, además, se asegura la observación de efectos no negativos por causa de la varianza condicional. La ecuación de la varianza condicional EGARCH es

$$\log(h_t) = c_0 + \sum_{i=1}^q c_i \left| \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}} \right| + \sum_{i=1}^q a_i \frac{\varepsilon_{t-j}}{\sqrt{h_{t-j}}} + \sum_{j=1}^p b_j \log(h_{t-j})$$

donde c_i , a_i y b_i , $\forall i$, con coeficientes a determinar. La aplicación de logaritmos garantiza que la estimación de la varianza condicional sea no negativa. Los coeficientes a_i prueban las asimetrías. Por ejemplo, si $a_i = 0$, $\forall i$, entendemos que el modelo es simétrico. Si $a_i < 0$, entonces las fluctuaciones positivas generan menos volatilidad que las fluctuaciones negativas.

1.5.4 El modelo TGARCH

Zakoian (1990) y Glosten et. al. (1993) introdujeron los modelos TGARCH²⁶ bajo la premisa de que los modelos ARCH y GARCH, como lo menciona Tsay, padecen de la restricción de la simetría. Los modelos atribuyen el mismo efecto a las fluctuaciones positivas y negativas del rendimiento por depender del cuadrado de las fluctuaciones. Es decir, dependen sólo de valor absoluto de la fluctuación; por lo tanto, reflejan el mismo efecto cuando una fluctuación de la misma magnitud es positiva que cuando es negativa. En otras palabras, los activos bursátiles que sufren *malas noticias* son afectados de la misma manera que cuando hay buenas noticias, suponiendo que las noticias son del *mismo tamaño*. Con los modelos TGARCH se busca capturar la simetría, es decir, la positividad y la negatividad de las fluctuaciones. Esto se logra a través de la siguiente especificación:

²⁵ *Exponential Generalized ARCH.*

²⁶ *Threshold GARCH; threshold se traduce al español como umbral.*

$$h_t = c_0 + \sum_{i=1}^q (c_i + ad_{t-1})\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p b_j h_{t-j}$$

donde $d_t = 1$ si $\varepsilon_t < 0$ y $d_t = 0$ si $\varepsilon_t > 0$. Con este término se incluyen distintivamente los impactos de las buenas y las malas noticias.

1.5.5 El modelo SAARCH

Llamándolo ARCH Simétrico Simple (SAARCH, por sus siglas en inglés), Engle (1990) formula el primer modelo ARCH asimétrico por medio de la consideración del efecto de apalancamiento, que es la predisposición a incrementos de la volatilidad después de que los valores de la serie han disminuido, en lugar de exhibir un aumento en el rendimiento de la misma magnitud. Engle propone la forma

$$h_t = c_0 + c_1\varepsilon_{t-1}^2 + c_2\varepsilon_{t-1} + bh_{t-1}$$

donde los valores c_i y b son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión, ε_t es la innovación y h_t es la varianza de la innovación en el periodo t . El factor c_2 representa el efecto de apalancamiento (esperándose que tome un valor negativo). La característica de simetría es capturada por el factor c_1 y significa el impacto del tamaño de las noticias sobre la volatilidad, sin hacer consideración del signo de la innovación, lo se incluye en el término $c_1\varepsilon_{t-1}^2$.

1.5.6 El modelo GJR-GARCH²⁷

Glosten et. al. (1993) plantean incluir el efecto de apalancamiento usando la estructura siguiente:

$$h_t = c_0 + c_1\varepsilon_{t-1}^2 + c_2I(\varepsilon_{t-1} < 0)\varepsilon_{t-1}^2 + bh_{t-1}$$

donde los valores c_i y b son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión, ε_t es la innovación y h_t es la varianza de la innovación en el periodo t . El factor c_2

²⁷ Los apellidos de los autores (Glosten, Jagannathan y Runkle) dan nombre a esta variación del modelo ARCH Generalizado, por lo que se denomina GJR-GARCH.

representa el efecto de apalancamiento (esperándose que éste tome un valor negativo) y la característica de simetría es capturada por el factor c_1 .

1.5.7 El modelo NGARCH

Lanne & Saikkonen (2005) propone un modelo que no toma en cuenta el efecto apalancamiento y supone que los precios se mueven sin hacer caso del efecto “si no hay noticias entonces hay buenas noticias.” En otras palabras, los precios si sufren de volatilidad aun cuando no se escuchen noticias acerca del comportamiento de los activos. Matemáticamente, esto se introduce haciendo que el impacto de las innovaciones se centre alrededor de un factor que sea diferente de cero. Por lo tanto, si se agregan factores de desplazamiento $k_i \neq 0$, se puede escribir un modelo ARCH Generalizado No Lineal de dos rezagos de la manera siguiente:

$$h_t = c_0 + c_1(\varepsilon_{t-1} - k_1)^2 + c_2(\varepsilon_{t-2} - k_2)^2 + bh_{t-1}$$

donde los valores c_i y b son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión, ε_t es la innovación y h_t es la varianza de la innovación en el periodo t . Los valores c_1 y c_2 se asocian con los factores de desplazamiento k_1 y k_2 . Por lo tanto, el modelo *acepta* que la falta de noticias podría incrementar la incertidumbre en los mercados y, de ahí, un aumento en la volatilidad.

1.5.8 El modelo NGARCHK

Boffelli & Urga (2016) presentan una variante del modelo NGARCH con la que los dos valores de desplazamiento k_1 y k_2 toman el mismo valor. Si éste es k_0 , tal que $k_1 = k_2 = k_0$ en el modelo NGARCH, entonces, en caso de dos rezagos, la variante del modelo toma la forma

$$h_t = c_0 + c_1(\varepsilon_{t-1} - k_0)^2 + c_2(\varepsilon_{t-2} - k_0)^2 + bh_{t-1}$$

donde los valores c_i y b son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión, ε_t es la innovación y h_t es la varianza de la innovación en el periodo t . Los valores c_1

y c_2 se asocian con el actor de desplazamiento k_0 correspondientes a cada uno de los rezagos. La razón por la que esta extensión del modelo NGARCH se apellida K es debido al enfoque al corrimiento k_0 .

1.6 Comparación de pronósticos de volatilidad

Se usan en este trabajo las funciones de pérdida documentadas detalladamente por Patton (2011). Este autor demuestra el sesgo en las principales características de los métodos estándar de medición de volatilidad condicional y presenta las dos funciones de pérdida más robustas, las cuales son la función QLIKE y la función MSE²⁸, que son dos de las más usadas en la literatura y las cuales se describen a continuación.

Función de pérdida. Según la definición original de Wald (1950), una función de pérdida es una función que se usa para el proceso de estimación de estadísticas y representa la desviación entre un valor estimado y su valor verdadero. Se denota habitualmente con la letra L .

Función robusta. Para Patton, una función de pérdida L es *robusta* cuando el ranking de dos pronósticos de volatilidad, h_{1t} y h_{2t} , por su valor esperado, es el mismo ya sea que el ranking se haga usando el valor verdadero de la varianza condicional, σ_t^2 , o se haga usando el proxy de una volatilidad condicional no sesgada, $\hat{\sigma}_t^2$. Es decir,

$$E[L(\sigma_t^2, h_{1t})] \lesseqgtr E[L(\sigma_t^2, h_{2t})] \Leftrightarrow E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{1t})] \lesseqgtr E[L(\hat{\sigma}_t^2, h_{2t})]$$

para cualquier $\hat{\sigma}_t^2$ tal que

$$E[\hat{\sigma}_t^2 | \Omega_{t-1}] = \sigma_t^2$$

²⁸ Patton (2011) usa QLIKE para denotar la cuasiverisimilitud (*quasilikelihood*, QL) y MSE para denotar los errores mínimos cuadrados (por sus siglas en inglés, en ambos casos).

donde Ω_{t-1} es el conjunto de información disponible hasta $t - 1$, es decir, la información consistente en los datos de la serie hasta el periodo $t - 1$, y $E[\]$ es el operador de valor esperado.

Aplicando este concepto de función robusta, Patton demuestra que, de un conjunto de funciones de pérdida usadas de manera estándar, QLIKE Y MSE son las más robustas para el pronóstico de la medición de volatilidad condicional. Esta es la razón por la que se aplican en este estudio.

Siendo h el pronóstico de volatilidad y σ^2 la volatilidad verdadera, la función QLIKE se estima con

$$L(\sigma^2, h) = \frac{\sigma^2}{h} - \log\left(\frac{\sigma^2}{h}\right) - 1$$

e, igualmente, la función MSE con

$$L(\sigma^2, h) = \frac{1}{2}(\sigma^2 - h)^2$$

Estas dos funciones son las que se aplican como *medida de bondad* del pronóstico de la volatilidad condicional de los modelos ARCH detallados con anterioridad. Boffelli & Urga (2016) reportan que la pérdida QSLIKE es menos afectada por los valores atípicos de la serie de tiempo (*outliers*) por lo que en este trabajo esta pérdida es la que se aplica preferentemente para comparar las capacidades de pronóstico de los modelos.

1.6.1 Pruebas para detectar efectos ARCH

De acuerdo a Tsay (2010), se aplican dos pruebas a las series de tiempo del rendimiento para verificar la existencia de heterocedasticidad. En la primera prueba, debida a McLeod & Li (1983), se aplica la estadística común de Ljung-Box a la serie $\{a_t^2\}$, en donde $a_t = r_t - E[r_t|\Omega_{t-1}]$. La hipótesis nula establece que los primeros m rezagos de la serie a_t^2 son cero.

La segunda prueba es la del multiplicador de Lagrange (Engle, 1982), equivalente a la estadística F para probar $\alpha_i = 0 \forall i$ en la regresión

$$a_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \alpha_2 a_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m a_{t-m}^2 + e_t$$

$$t = 1, 2, \dots, T$$

donde e_t es el término de error y T es el tamaño de la muestra. La hipótesis nula es $\alpha_i = 0 \forall i$. Si la media muestral de a_t^2 es

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T a_t^2$$

tenemos entonces la suma de residuales al cuadrado (SSR , por sus siglas en inglés) de la siguiente manera:

$$SSR_0 = \sum_{t=m+1}^T (a_t^2 - \bar{w})^2$$

y

$$SSR_1 = \sum_{t=m+1}^T \hat{e}_t^2$$

donde \hat{e}_t es el valor residual de mínimos cuadrados de la regresión previa. Por lo tanto, tenemos

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(T - m - 1)}$$

que tiene una distribución χ^2 con m grados de libertad bajo la hipótesis nula. Se rechaza la hipótesis nula si $F > \chi_m^2(\alpha)$, donde $\chi_m^2(\alpha)$ se encuentra en el $100(1 - \alpha)$ -ésimo percentil de $\chi_m^2(\alpha)$ o si el valor del estadístico p de F es menor que α .

1.6.2 Resumen de la sección

Los principales modelos de la familia ARCH han sido brevemente referidos en esta sección 1.5. No obstante lo anterior, cualquier detalle relativo a los modelos se encuentra explicado en las referencias suministradas.

1.7 Supuestos

En esta sección se presentan los supuestos con los que se realiza el estudio presentado en esta tesis.

1.7.1 Este estudio es un análisis técnico

Este trabajo es un análisis técnico y no es un análisis fundamental.²⁹ Para los tres activos considerados en este estudio, la información incluida es estrictamente la contenida en los precios diarios observados durante un año. El análisis técnico asume que, en los mercados, el precio o cotización del activo, al igual que el rendimiento asociado, es la mejor información sobre el comportamiento de los activos en los mercados correspondientes. Así, decimos que las series de tiempo de los precios de los activos en los mercados constituyen la fuente de datos para este trabajo. Los datos tomados para las series de tiempo de los tres activos corresponden al año de enero de 2018 a enero de 2019. La razón por la que se seleccionó este periodo yace en el fenómeno de perturbaciones presentes en los mercados mexicanos debidas a (i) periodos de depreciación del peso ante el dólar, (ii) preocupaciones ante la actitud proteccionista del nuevo gobierno en Estados Unidos e (iii) inquietud ante la posible victoria electoral de un partido político diferente a los predominantes durante muchos en México.

1.7.2 Los inversionistas son del tipo adversos al riesgo

En este estudio, los agentes económicos que realizan el acto de inversión son adversos al riesgo. Para estos inversionistas los altos rendimientos son menos

²⁹ Ver descripción de análisis técnico y análisis fundamental en la sección 1.2.

importantes que preservar su capital. Los inversionistas adversos al riesgo (prudentes) buscan inversiones más estables y de menor riesgo. Los activos que satisfacen a estos cautelosos inversionistas tienen una exposición al riesgo más baja que los activos que presentan mayor volatilidad, que son los que prefieren los inversionistas con altos niveles de apetito por el riesgo. Se supone, por tanto, que el criterio por medio del cual los inversionistas determinan la asignación de recursos a un portafolio es el descrito a través del método de Pojarliev & Polasek (2001), el cual se encuentra descrito en la sección 1.4.4. De acuerdo con éste, la construcción óptima de un portafolio se fundamenta en asignar una mayor proporción del total de la inversión al activo cuya volatilidad es menor.

1.7.3 Los activos no pagan dividendos

Como se adelanta en la sección 1.4.1, en este trabajo se supone que el ejercicio de los activos no paga dividendos, por lo que $D_t = 0$ para todo t . En efecto, suponiendo que el rendimiento dado por la ecuación (1.1) se escribe

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

Entonces, en realidad, el rendimiento tiene dos componentes, uno llamado *rendimiento de capital*, que es el término $(P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$, y otro componente que es la *rentabilidad del dividendo*, que es el término D_t/P_{t-1} . En este caso, con el fin de estudiar la serie de tiempo de un activo incluyendo el dividendo, se debería tener disponibilidad de la serie de tiempo de la rentabilidad del dividendo: en particular, se requiere la serie $\{D_t\}$ para cada activo —pero esto no es factible. Con el fin de justificar el supuesto de $D_t = 0, \forall t$, se usa aquí la *Teoría Irrelevante del Dividendo*, formulada por Miller & Modigliani (1961). Con esta teoría, los autores sugieren que en un mundo perfecto (e.g., no existen costos de bancarrota ni impuestos), la política de dividendos es irrelevante para el precio del título de una empresa en el mercado (y por cierto, tampoco para la estructura de capital de la misma). Miller y Modigliani indican que un inversionista reinvierte la ganancia obtenida de un dividendo superior a lo esperado y que, si el dividendo es menor a la expectativa, el

inversionista vende parte de sus títulos para igualar el flujo de caja que existiría si el dividendo fuera lo que esperaba. Es decir, el flujo de caja del inversionista ante el resultado del dividendo le quita su relevancia. La teoría de la irrelevancia del dividendo se fundamenta en suposiciones denominadas del mundo perfecto. Estas suposiciones son, entre otras, (i) no existen impuestos, (ii) no existen costos de transacción en la emisión de acciones, (iii) el presupuesto de capital no depende de la política de dividendos, (iv) la información es perfecta para todos los inversionistas y (v) el apalancamiento no tiene efecto sobre los costos de capital. Observar que, dado que se trata de un enfoque técnico y no fundamental, la justificación de Miller & Modigliani fortalece el enfoque aplicado en este trabajo, aunque lo restringe y condiciona.

1.7.4 *El riesgo es sistemático y no es sistémico*

Se supone en este trabajo que las series de tiempo de los activos y del rendimiento son afectadas por realizaciones del *riesgo sistemático*. De acuerdo a la Teoría de Portafolios, el riesgo sistemático es el riesgo residual que no puede diversificarse aunque los valores de ponderación de los activos componentes del portafolio se realicen con una combinación óptima (e.g. la de Pojarliev & Polasek (2001), descrita en la sección 1.4.4). El riesgo sistemático se estima a través de las volatilidades de los activos comercializados en el mercado. Por lo tanto, el riesgo sistemático es la base sobre la que un agente económico expresa su expectativa de rendimiento en términos del riesgo, puesto que él y todos los demás agentes pueden reducir el riesgo no sistemático combinando apropiadamente los activos del portafolio. En contraste, el *riesgo no sistemático* es el riesgo que sí se puede mitigar a través del mecanismo de diversificación. El riesgo no sistemático depende de factores intrínsecos al activo, tales como los balances, el estado de resultados, el plan de negocios, los flujos de caja, etc.

En este estudio se supone que el riesgo es no sistémico. Para entender el concepto de este tipo de riesgo, recordemos primero el del *riesgo sistémico*. Este tipo de riesgo, el cual es la posibilidad de que un evento dispare una inestabilidad

severa en una industria o en toda la economía. Este tipo de riesgos se realiza debido a estructuras del mercado o al surgimiento de choques por políticas gubernamentales, dinámicas económicas u otros eventos. El ejemplo natural de riesgo sistémico es las crisis financieras de 1980 y 2008. En la Teoría Moderna de Portafolios, este tipo de riesgo también se llama no diversificable, pues describe el riesgo que no se puede mitigar a través del mecanismo fundamental de atenuación del riesgo, que es la diversificación. Esto es, es el riesgo residual que no es diversificable, aunque los valores individuales del portafolio estén combinados óptimamente. Por otro lado, el *riesgo no sistémico*, que también se llama riesgo residual o riesgo idiosincrático, es aquel que, de hacerse realidad, solo afecta a agentes o sectores industriales particulares. Además, el riesgo no sistémico puede mitigarse a través de una estructura de portafolio diversificada. En este trabajo se supone un contexto teórico en que se presentan únicamente riesgos no sistémicos, cuya realización tiene efecto únicamente en un mercado (e.g. el financiero) y es diversificable a través del mecanismo de composición del portafolio.

1.7.5 Las series de datos no son de alta frecuencia (AF)

Se supone en este trabajo que las series de datos correspondientes a los precios y a los rendimientos de los activos en el portafolio no son de alta frecuencia. El alcance de la tesis se alinea con una gestión no ligada a datos intradía (i.e., obtenidos el mismo día), sino al precio obtenido al cierre en un día de operaciones. Por lo tanto, la estimación de la volatilidad no es en línea, sino que la gestión del portafolio se basa en decisiones tomadas fuera de línea (*off-line*).

1.7.6 Perspectiva de Samuelson

Se supone igualmente que se presenta la perspectiva de Samuelson, de acuerdo a lo detallado en la sección 1.4.7 anterior y aquí de manera resumida. Por lo descrito por Hyme (2003), la perspectiva consiste en (i) los precios de los activos en los mercados (y por consiguiente el rendimiento del portafolio) fluctúan aleatoriamente, (ii) no se hace consideración alguna sobre la denominada hipótesis de expectativas

racionales, (iii) se presenta en los mercados la condición de juego equitativo sobre los precios futuros y el rendimiento del portafolio y (iv) tampoco se hace consideración sobre el concepto de mercado eficiente.

1.7.7 Modelos de la familia ARCH usados

¿Por qué se usan sólo los modelos ARCH enlistados en el Cuadro 1.1 y no otros (e.g. los enlistados en el Cuadro 1.3), sobre todo considerando la gran cantidad de modelos de esta familia que se documentan en la literatura? En este trabajo se asume el criterio de modelos ARCH más aplicados en la literatura para análisis de series financieras de acuerdo a Bollerslev et. al. (1992), Boffelli & Urga (2016) y Tsay (2010).

1.8 Construcción del modelo

La construcción de los modelos a probar en el Capítulo 2 de este trabajo siguen los pasos descritos por Tsay (2010). La construcción de un modelo de series de rendimientos en el contexto de volatilidad condicional se realiza a través de cuatro pasos, que son los siguientes: (i) Identificar un modelo econométrico para la serie del rendimiento, (ii) probar los efectos ARCH, (iii) proponer un modelo para la volatilidad condicional, en caso de que en el segundo paso se haya comprobado la existencia de efecto ARCH y (iv) verificar y refinar el modelo.

1.9 Estado del arte

1.9.1 Teoría Moderna del Portafolio

El estado de arte de la mayoría de los enfoques complementarios de la TMP ha sido documentado con particular detalle por Ramírez Carmona & García Salgado (2016), cuyo resumen —también aparecido en el artículo de estos autores— se muestra en el Cuadro 1.2. Se exponen aquí los enfoques dominantes en la corriente principal

de la TMP, la cual fue formulada por Markowitz (1952 y 1959).³⁰ Markowitz probó el teorema media-varianza, según el cual manteniendo constante la varianza se maximiza el rendimiento esperado y, manteniendo constante el rendimiento, se minimiza la varianza. Esta disyuntiva (*trade-off*) compone la frontera de la eficiencia, que da la referencia para las decisiones de inversión en portafolios, dependiendo de preferencias basadas en riesgo. En otras palabras, el inversionista no puede —según Markowitz— basar su elección de inversión considerando las características individuales del activo, sino el contexto del mercado en que se movía junto con multitud de activos: un portafolio eficiente se forma con un esquema de diversificación, en que la elección de un activo se explica con su relación con los otros activos del portafolio y su aportación a éste, no en su desempeño individual. El modelo original de Markowitz, conforme ganó popularidad, comenzó a ser mejorado hacia extensiones o mejoras del esquema media-varianza. De particular importancia entre los enfoques ha sido el modelo CAPM, el cual se reporta en el Cuadro 1.2 como Valoración del Precio de los Activos Financieros. Los enfoques de activos libres de riesgo, Línea de Mercados de Capital y CAPM han posteriormente constituido la corriente principal de la TMP, sobre todo a partir de los trabajos de Sharpe, principalmente el publicado en 1964. Roll & Ross (1980) desarrollaron otro enfoque que ha sido ampliamente usado a lo largo de décadas: el denominado APT (*Arbitrage Pricing Theory*), que propone que se puede modelar linealmente el rendimiento esperado de un activo en términos de factores o índices de mercado teóricos, en donde la sensibilidad del rendimiento a los cambios en cada factor es determinada a partir de valores estadísticos. En los años 1990s se adoptó la aplicación del concepto VaR³¹ para la medición de riesgos de mercado en la comercialización de carteras. Los inicios de su uso se pueden establecer en el año 1922, cuando se imponían hasta 1922 como forma de requisitos de capital que la Bolsa de Valores de Nueva York imponía a sus empresas miembros. Black & Litterman (1992) propusieron el modelo BL (por los apellidos de los autores), que permite estimar un conjunto de rendimientos esperados en el marco media-

³⁰ También en 1952, Andrew Donald Roy publicó un artículo que presentó contribuciones a la TMP que se consideran paralelas a las de Markowitz (Roy, 1952).

³¹ VaR es *Value-at-Risk*.

varianza. Esto resolvía uno de los problemas del modelo de Markowitz, consistente en que es posible calcular las covarianzas de activos, pero la estimación de los rendimientos esperados no es razonable. Black & Litterman resolvieron este punto suponiendo que los rendimientos iniciales esperados son iguales a los observados en los mercados. Baule (2010) plantea un modelo con el que se incluyen los costos de transacción: las cuotas o comisiones que se deben pagar a los bancos u operadores del portafolio obligan al inversionista a un problema de optimización que contrapone estos costos de transacción y los costos de los riesgos. Este dilema es notable principalmente cuando el portafolio pertenece a un pequeño inversionista. La gestión de portafolios también ha sido impactada por las medidas restrictivas; por ejemplo, la regulación. En este sentido, Clarke et. al. (2002) escriben lo que se llamó luego la Ley Fundamental de la Gestión Activa, con la que bosquejan la manera en que los operadores pueden controlar las restricciones. A partir de 1991 se comenzó a popularizar lo que eventualmente se llamó la Teoría Post-Moderna del Portafolio (TPMP), la cual es básicamente una extensión de la TMP. Ambas teorías describen la diversificación de inversiones para optimizar el rendimiento y la definición del precio de un activo con riesgo. Sin embargo, la TPMP usa la desviación estándar de rendimientos a la baja o negativos (es decir, riesgos a la baja) para estimar el riesgo, a diferencia de la TMP que usa todos los rendimientos. Los promotores iniciales de la TPMP fueron Rom & Ferguson (1993).

1.9.2 Modelos ARCH

Si bien un bosquejo del estado del arte de los modelos ARCH ya ha sido indirectamente presentado en la sección 1.5 de este Capítulo 1, exponemos aquí el estado actual y los avances de los modelos, de acuerdo a principales reportes en la literatura. Engle, el originador de los modelos ARCH, refiere que “en los 20 años siguientes a la publicación del modelo ARCH, ha habido una enorme cantidad de investigación con la que se han descubierto las propiedades de los modelos de volatilidad. La aplicación a datos financieros ha dado lugar al descubrimiento de importantes hechos estilizados e ilustrado tanto las fortalezas y debilidades de los modelos” (Engle, 2002). En este artículo, apropiadamente denominado *Nuevas*

fronteras para los modelos ARCH, se describen aspectos que identifica como temas futuros de investigación: (i) uso en series de tiempo de alta frecuencia, (ii) modelos multivariados de gran escala, (iii) modelos para determinación del precio de derivados, (iv) procesos no negativos resultante del efecto apalancamiento y (v) mínimos cuadrados Monte Carlo para evaluar las no linealidades de *cualquier modelo que se pueda simular*. Engle incluso define y trata la “volatilidad de la volatilidad.”

Bollerslev, otro de los promotores iniciales de los modelos, editó junto con Russell y Watson una obra (Bollerslev et. al., 2010) que presenta desarrollos recientes —a ese año— por varios investigadores en el campo de la econometría de la volatilidad. Notablemente, en esta referencia se presentan desarrollos en los siguientes aspectos. En primer lugar, a los 25 años de la publicación seminal de Engle, los modelos ARCH y sus extensiones han encontrado amplia aplicación en la macroeconomía; en particular se menciona su utilidad en el pronóstico de la incertidumbre de la inflación. Estos métodos se emplean también para documentar la declinación en la persistencia y en la volatilidad de variables macroeconómicas: se señala el caso de la economía de Estados Unidos, en donde ocurrió una ruptura estructural a principios de los años 1980s. En segundo lugar, también en el contexto macroeconómico, se aplican los modelos para pronosticar las políticas de la Reserva Federal usando la regla de Taylor y la tasa de fondos de la Fed como variable dependiente e incluyendo los valores atípicos (*outliers*) de las series macro. Tercero, igualmente en macroeconomía, los modelos se aplican en volatilidad fundamental. Cuarto, utilización en condiciones de riesgo descendente. Xekalaki & Degiannakis (2004), por su parte, agrupan el destacado uso de los modelos para caracterizar el efecto apalancamiento, el efecto de no negociación —periodos de tiempo en los que ocurre acumulación de información, la cual tiene un impacto en los precios a la siguiente apertura del mercado— y el efecto de no sincronizado —se toman precios de los activos diferentes al del cierre, que es el aceptado como estándar para los índices—. En el apéndice de esta referencia se muestra también un valioso resumen del grupo principal de miembros de la familia ARCH cuyos autores explican en su revisión. Chu et. al. (2017) y Stavros & Vassilios (2017)

examinan el comportamiento de bitcoin y otras criptomonedas usando modelos ARCH. En econometría financiera, el uso de los modelos es vasta todavía.

Cuadro 1.2 - Resumen de los enfoques que complementan la TMP. Fuente: Ramírez Carmona & García Salgado (2016), en donde se identifican todas las referencias.

<i>Enfoque</i>	<i>Año</i>	<i>Autores</i>	<i>Descripción</i>
Antecedentes de la Teoría de Portafolios de Inversión	1934	Graham, Dodd y Cottle	Análisis bursátil a partir de los estados financieros
	1935	Hicks	Teoría pura de la inversión de portafolios
	1938	Marschak	Teoría de la elección bajo incertidumbre
	1938	Williams	Inversión en diversos títulos
	1945	Leavens	Beneficios de la diversificación
	1948	Friedman y Savage	Reacción de las personas ante el riesgo
Desarrollo de la Teoría de Portafolios de Inversión	1952	Markowitz	Teoría del portafolio
	1956	Markowitz	Restricción presupuestal
	1959	Markowitz	Ley de la covarianza
Métodos de contracción	1964	Sharpe	Valoración del Precio de los Activos Financieros
	1980	Roll y Ross	Modelo de Arbitraje de Precios
	1992	Black y Litterman	Estimación de los rendimientos esperados se calculados como un promedio del equilibrio del mercado y los puntos de vista del inversionista
Inclusión de los costos de transacción	2010	Baule	El inversionista se enfrenta a algunos problemas, debido a los costos de transacción en forma de comisiones bancarias
	2010	Zhang, Zhang y Xu	Modelo de tolerancia al riesgo con costos de transacción
	2011	Brown y Smith	Modelo que considera la aversión al riesgo, los rendimientos esperados y los costos de transacción
Imposición de restricciones	2015	Abad y León	Restricciones de regulación
	2015	Musto, Semeraro y Lops	Restricciones de orientación
	2015	Aiken, Clifford y Ellis	Restricciones de exposición
	2010	Rosen y Saunders	Restricciones de gestión
	2003	Jagannathan y Ma	Restricciones de los pesos
Coeficiente de transferencia	2002	Clarke, De Silva y Thorley	Coeficiente de transferencia
Desalineación de las restricciones	2013	Karels y Sun	Componentes principales de un portafolio
Impacto del error de estimación	2006	Kritzman	Impacto de pequeños errores de estimación

<i>Enfoque</i>	<i>Año</i>	<i>Autores</i>	<i>Descripción</i>
Medidas de diversificación	2011	Frahm y Wiechers	Medida de diversificación que comprende activos de riesgo
Optimización robusta	2003	Goldfarb y Iyengar	Problemas de selección robusta de portafolio
Incorporación de momentos superiores	1999	Li	Enfoque alternativo para el cálculo del VaR (VaR, por sus siglas en inglés)
	2010	Zuluaga y Cox	Los activos no se distribuyen normalmente
	1996	Morgan	Medida de Valor en Riesgo VaR
	2014	Flores, Flores y Paredes	Optimización simultánea de los objetivos particulares de media, varianza y asimetría
Métodos que usan el riesgo y no el rendimiento	2015	Maillet, Tokpavi y Vaucher	Portafolio de varianza global mínima
	2005	Glasserman	Riesgo de los componentes individuales respecto al riesgo total
	2015	Pae y Sabbaghi	Portafolios igualmente ponderados
Optimización Multiperiodo	2008	Calafiore	Decisión secuencial multiperiodo
	2012	Liu, Zhang y Xu	Modelos de lógica difusa
	2013	Liu, Zhang y Zhang	Optimización de enjambre de partículas
	2005	Johnson	Modelo GARCH
Optimización Multiobjetivo	2015	Mendes, Paiva, Peruchi et. al.	Técnicas ARMA-GARCH
	2013	Miralles, Miralles y Miralles	Modelos GARCH multivariantes
	2004	Schlottmann y Seese	Evolución diferencial para el análisis de riesgo-rendimiento de los portafolios
	2014	Pai y Michel	Evolución diferencial para diferentes clases de activos
	2007	Fernández y Gómez	Redes neuronales artificiales para trazar la frontera eficiente
	2008	Yu, Wang y Lai	Red neuronal para hacer una selección óptima
	2011	Chen y Hirasawa	Algoritmos genéticos para encontrar el portafolio más eficiente
	2014	Matsumura y Kakinoki	Tasa de inversión utilizando un algoritmo genético que optimiza la estrategia comercial
	2009	Aranha e Iba	Algoritmo memético para la optimización del portafolio
	2015	Ruiz y Suárez	Enfoque memético abordan el problema de selección del portafolio óptimo
2015	Luo, Seco y Wu	Modelo de rendimientos de los portafolios óptimos	

Cuadro 1.3 - Resumen de los esquemas ARCH más referenciados. Todas las referencias de autores se encuentran enlistadas en la fuente original, Bollerslev et. al. (2010, p. 80)

<i>Modelo</i>	<i>Autores y año</i>	<i>Descripción</i>
AARCH: ARCH Aumentado	Bera, Higgins & Lee (1992)	Varianza condicional explicada por errores rezagados y observaciones rezagadas
APARCH: ARCH de Potencia Asimétrica	Ding, Engle & Granger (1993)	Autocorrelación positiva y de memoria en las series de tiempo del rendimiento
ARCH-M: ARCH de Media	Lilien & Robins (1987)	Relación específica entre el riesgo (volatilidad condicional) y el mejor pronóstico de la serie de tiempo
FIGARCH: GARCH Fraccionalmente Integrado	Baillie, Bollerslev & Mikkelsen (1996)	El grado de integración en esquema ARIMA es una fracción (no sólo entero)
GARCH: ARCH Generalizado	Bollerslev (1986)	Se incluyen en el modelo los términos rezagados de la varianza condicional
GARCH-t: GARCH con distribución t	Bollerslev (1987)	Modelo generalizado con innovaciones con distribución t
GJR-ARCH: ARCH de Glosten, Jagannathan y Runkle	Glosten, Jagannathan & Runkle (1993)	Similar a QGARCH (ARCH Cuadrático) pero también modela la asimetría en el proceso ARCH
EGARCH: ARCH Exponencial Generalizado	Nelson (1991)	Volatilidad modelada exponencialmente en lugar de la cuadrática para incluir efectos cuadráticos
HGARCH: GARCH de Hentschel	Hentschel (1995)	Volatilidad modelada en términos del valor absoluto de los choques elevados al cubo
IGARCH: GARCH Integrado	Bollerslev and Engle (1986)	Modelos GARCH que presentan una raíz unitaria
MARCH: ARCH Modificado	Friedman, Laibson & Minsky (1989)	Modela la persistencia de la volatilidad
MARCH: ARCH Multiplicativo	Milhoj (1987)	El valor log de la varianza condicional depende linealmente de valores log rezagados de la varianza condicional y de innovaciones al cuadrado
NARCH: ARCH No lineal	Higgins & Bera (1992)	La varianza condicional tiene la forma de Elasticidad Constante de Sustitución (CES, por sus siglas en inglés)
PNP-ARCH: ARCH Parcialmente No Paramétrico	Engle & Ng (1993)	La varianza condicional es una función parcialmente lineal de las innovaciones rezagadas y de las varianzas condicionales rezagadas
QARCH: ARCH Cuadrático	Sentana (1995)	Considera la prima de riesgos junto con la volatilidad condicional; modela choques positivos y negativos
QTARCH: ARCH Cualitativo de Umbral	Gourieroux & Monfort (1992)	La media y la varianza condicionales son funciones endógenas escalonadas
SPARCH: ARCH Semiparamétrico	Engle & González-Rivera (1991)	ARCH semiparamétrico con media y varianza condicionales dadas por medias móviles y una densidad condicional aproximada
STARARCH: ARCH Estructural	Harvey, Ruiz & Sentana (1992)	La innovación se compone de varias fuentes de error con heterocedasticidad de la forma ARCH
SWARCH: ARCH de Conmutación	Hamilton & Susmel (1994)	Siguiendo una cadena de Markov, el modelo cambia entre diferentes ARCH
TARCH: ARCH de Umbral	Zakoian (1994)	Se considera la desviación estándar en lugar de la varianza para considerar el efecto asimétrico
VGARCH: GARCH de Vector	Bollerslev, Engle & Wooldrige (1988)	Modelo GARCH con varias variables

Capítulo 2. Desarrollo de la investigación

2.1 Introducción

En este capítulo se estudian las series de tiempo de los rendimientos de los activos financieros elegidos y del portafolio compuesto por los mismos activos. Utilizando los modelos de la familia ARCH¹ descritos en el capítulo anterior, se pronostican valores del rendimiento y se comparan con valores reales de los activos. Se obtiene entonces la medida cuantitativa que nos permite determinar cuál de los modelos ARCH es el mejor para medir el desempeño del portafolio. La medida cuantitativa incluye una comparación con un método *tradicional* de estimación de desempeño del portafolio, que es el CAPM.² Este desarrollo se realiza en el contexto del Marco Teórico del Capítulo 1, sus resultados se muestran en el Capítulo 3.

2.2 Método utilizado

En el procedimiento utilizado en este capítulo Inicialmente se seleccionan los tres activos a incluir en el portafolio. En seguida, se evalúan las precondiciones críticas de heterocedasticidad de las mismas. Luego, se realiza la composición óptima del portafolio y se identifica la serie de tiempo del portafolio, de la cual también se evalúan las precondiciones de varianza condicional. Las pruebas de los modelos ARCH se realizan entonces sobre la serie del tiempo del portafolio y se evalúa la capacidad de pronóstico del portafolio de cada uno de los modelos ARCH estudiados. Así, se identifica el modelo de la familia ARCH que mejor describe la volatilidad del portafolio. Después de lo anterior, se conforma el modelo CAPM, al cual se le realiza la regresión para estimar su capacidad de pronóstico de volatilidad. Ésta es comparada con la de los modelos ARCH para diferenciar a éstos respecto a CAPM en el aspecto de pronóstico de volatilidad de una serie de tiempo financiera.

¹ ARCH es *Autoregressive conditional heteroscedasticity*.

² CAPM es *Capital Asset Pricing Model*.

2.3 Datos y condiciones

2.3.1 Selección de los activos

Los activos cuyo rendimiento se estudian en este documento son las acciones de Pinfra (Promotora de Infraestructura) y de Grupo Inbursa, de acuerdo a sus cotizaciones en la Bolsa Mexicana de Valores (BVM), y el tipo de cambio del peso mexicano respecto al dólar. Los precios son los observados diariamente en un horizonte de tiempo de un año, por lo que se hace la consideración de 273 observaciones del precio de los activos al final del día, del 1 de febrero de 2018 al 31 de enero de 2019. Las fuentes de donde se han obtenido los datos son la Bolsa Mexicana de Valores y el Banco de México. En este trabajo, se usan las series de tiempo de los rendimientos log de acuerdo a lo indicado en el Cuadro 2.1.

Cuadro 2.1 – Notación de los activos usados en este trabajo.

<i>Activo</i>	<i>Nomenclatura del rendimiento log del activo</i>
Tipo de Cambio	<i>tclog</i>
Pinfra	<i>pinfralog</i>
Grupo Inbursa	<i>ginblog</i>

2.3.2 Descripción de los datos y condiciones

Los datos de precio-cotización y el respectivo rendimiento log se muestran en las Figura 2.1 a Figura 2.6. Se podría percibir visualmente si se presenta acumulación de volatilidad en las tres series; aparentemente así es. Obviamente, la inspección visual no es suficiente para asegurar esta propiedad, por lo que se deben realizar las pruebas correspondientes. Para el caso de nuestras tres series, los resultados de las estadísticas descriptivas y de las pruebas Jarque-Bera y ADF (Dickey-Fuller Aumentada) son las mostradas en el Cuadro 2.2. Primero, se debe verificar que las series son estacionarias, i.e., tienen media, varianza y autocovarianzas constantes; para ello se usa la prueba ADF. La hipótesis nula de la prueba ADF consiste en

que la serie probada tiene una raíz unitaria, por lo que rechazar el nulo es una indicación de que se presenta estacionariedad significativa en la serie de tiempo correspondiente. Por lo tanto, se acuerdo a los resultados del Cuadro 2.1, se verifica la estacionariedad las series correspondientes a los rendimientos log de los tres activos elegidos.

Cuadro 2.2 - Estadísticas descriptivas del rendimiento de los activos.

	<i>tclog</i>	<i>pinfralog</i>	<i>ginblog</i>
Observaciones	273	273	273
Media	-0.000108	0.000013	-0.000708
Desviación Estándar	0.007207	0.013791	0.017586
Varianza	0.000052	0.000190	0.000310
Asimetría (<i>skewness</i>)	0.310733	0.136553	-0.582676
Curtosis	3.570070	3.411005	8.139969
Mínimo	-0.027574	-0.039093	-0.106222
Máximo	0.022799	0.042410	0.058992
Jarque-Bera	8.09 (0.0175)	2.77 (0.250)	316.90 (0.000)
ADF	-14.566 (0.000)	-16.644 (0.000)	-16.996 (0.000)

En el Cuadro 2.2 también se observa que la media y la mediana tienen valores muy cercanos a cero. La curtosis es mayor que 3 para las tres series, por lo que tenemos una indicación de que las series son leptocúrticas. De las pruebas de Jarque-Bera, sólo *pinfralog* presenta normalidad, lo cual se puede visualizar en la Figura 2.7, en la que se notan las colas pesadas (*fat tails*) en ambos extremos de los tres histogramas.

Figura 2.1 - Tipo de Cambio (Pesos por Dólar). Fuente de los datos: Banco de México.³

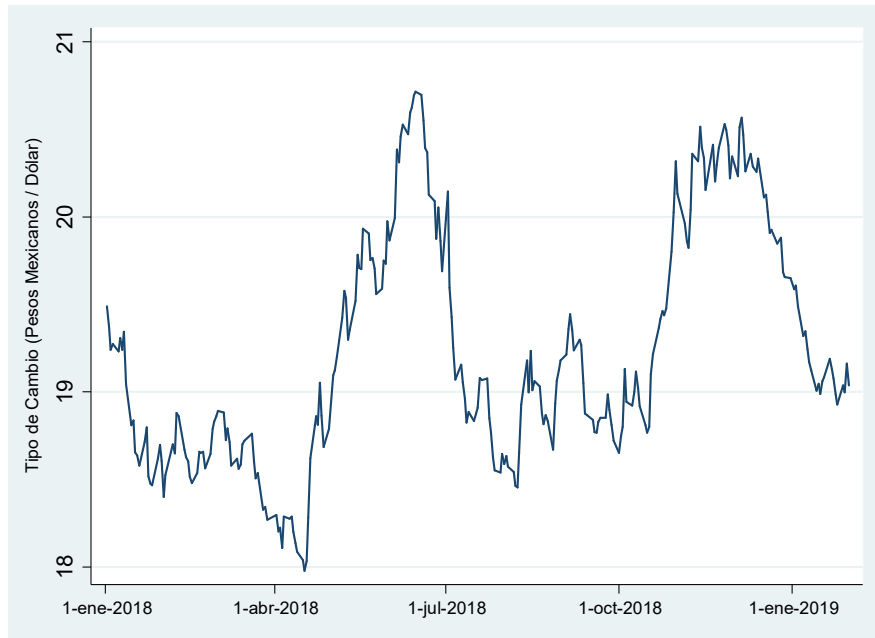
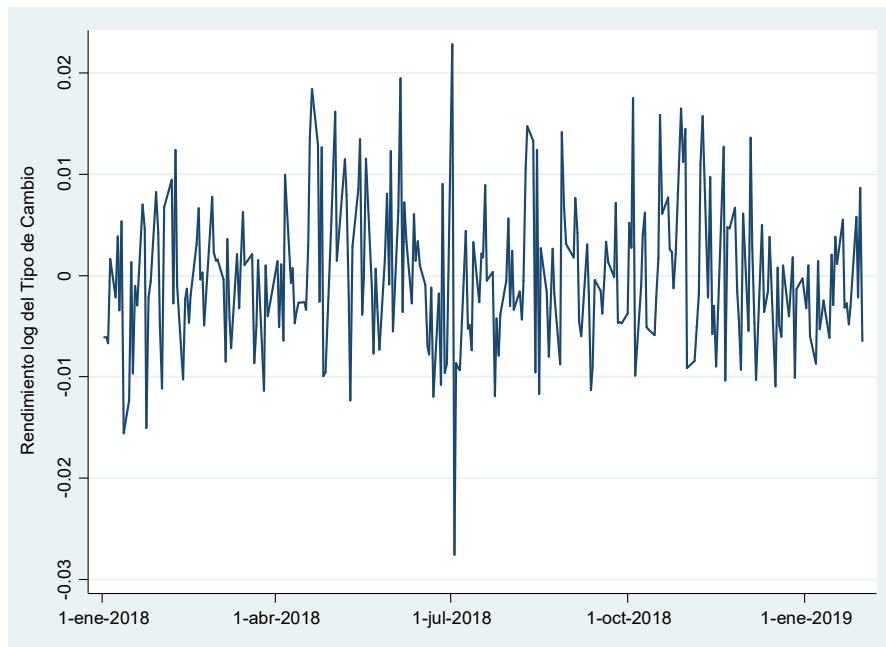


Figura 2.2 - Rendimiento log del Tipo de Cambio ($tclog$). Fuente de los datos: Banco de México.



³ Tipo de cambio para solventar obligaciones denominadas en dólares de EUA, pagaderas en la República Mexicana (Fix). Banco de México, SIE en t.ly/OR5rD.

Figura 2.3 - Precio en pesos de las acciones de Pinfra en la Bolsa Mexicana de Valores.
Fuente de los datos: BMV.

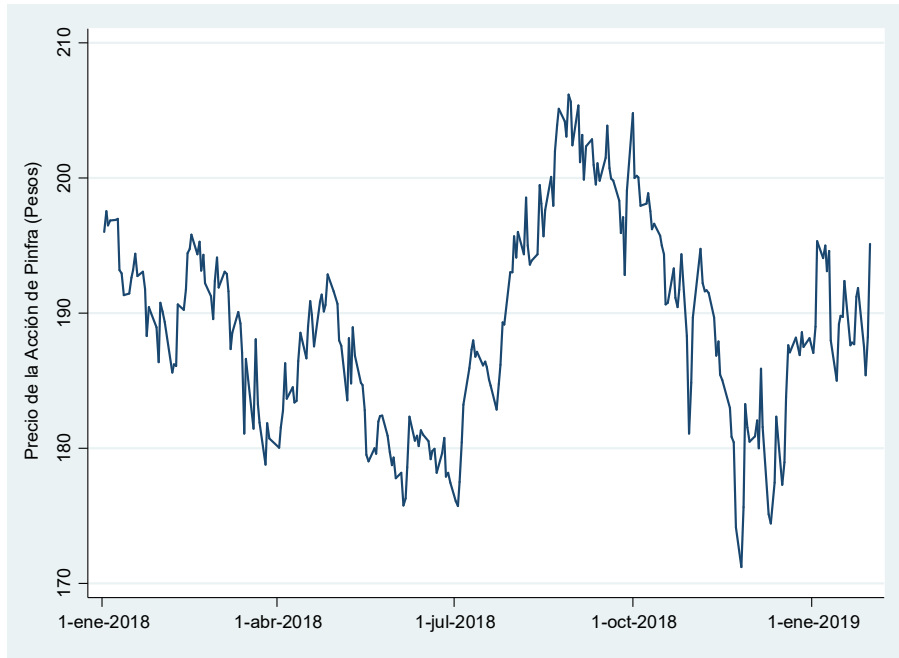


Figura 2.4 - Rendimiento log de las acciones de Pinfra (*pinfralog*) en la Bolsa Mexicana de Valores.
Fuente de los datos: BMV.

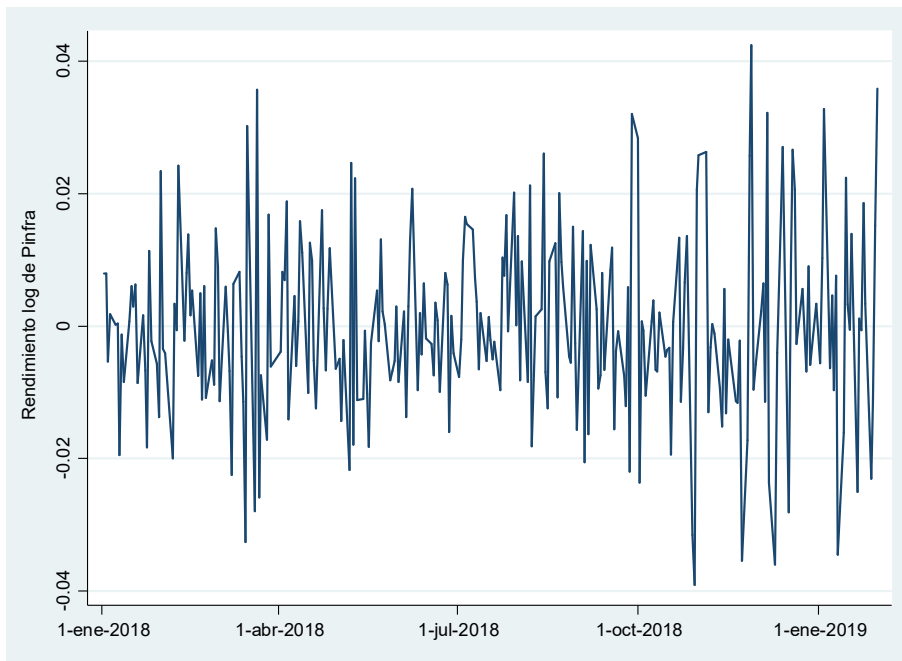


Figura 2.5 - Precio en pesos de las acciones de Grupo Inbursa en la Bolsa Mexicana de Valores. Fuente de los datos: BMV.

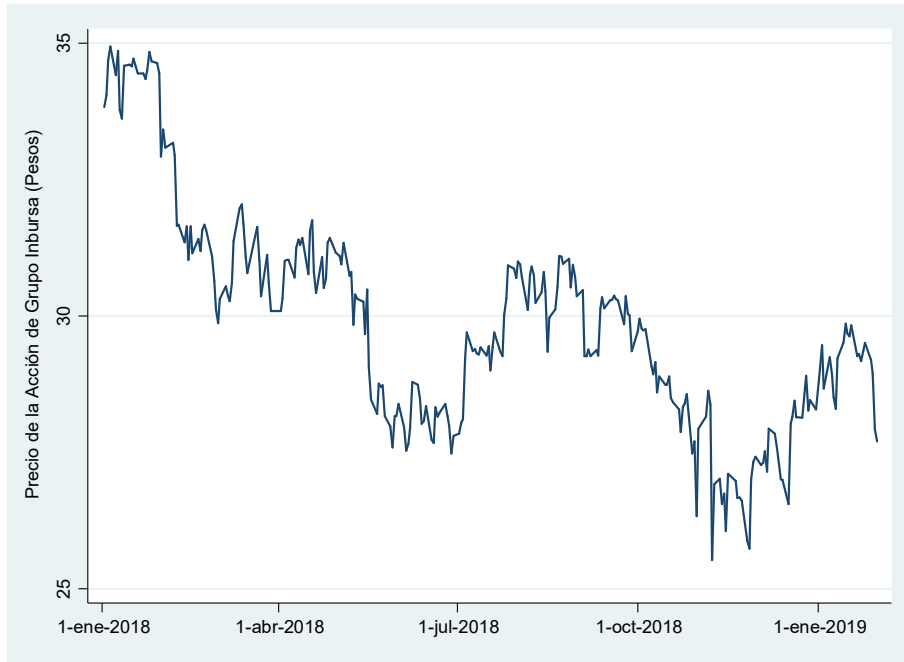


Figura 2.6 - Rendimiento log de las acciones de Grupo Inbursa (*ginblog*) en la Bolsa Mexicana de Valores. Fuente de los datos: BMV

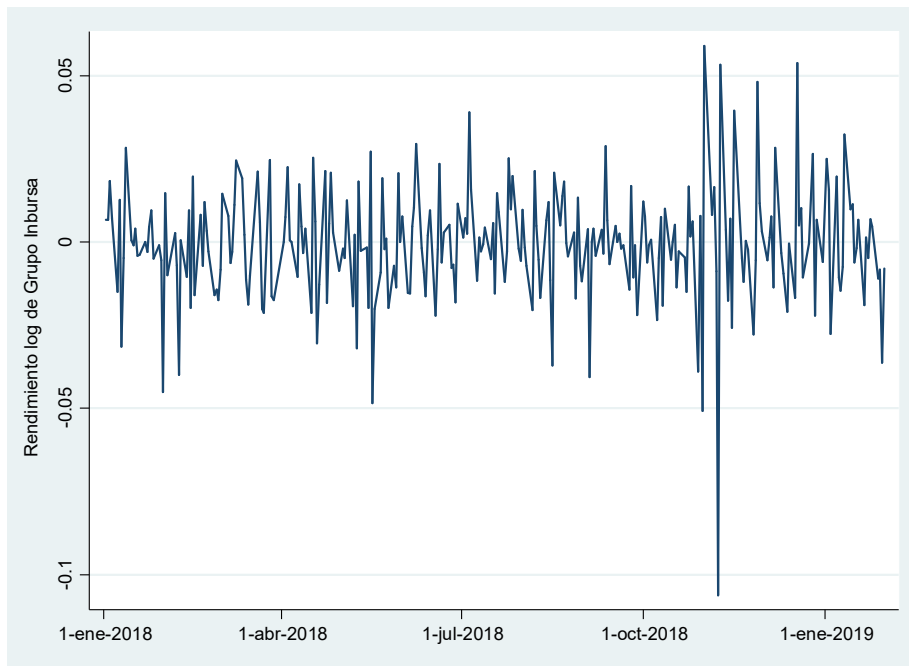
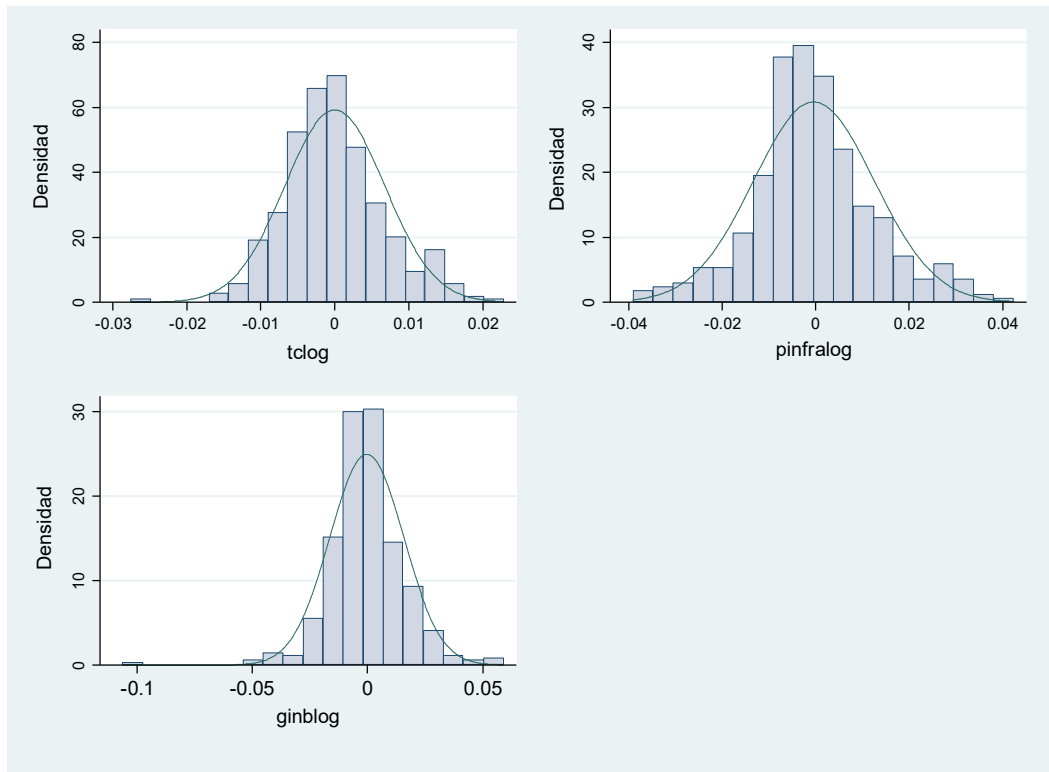


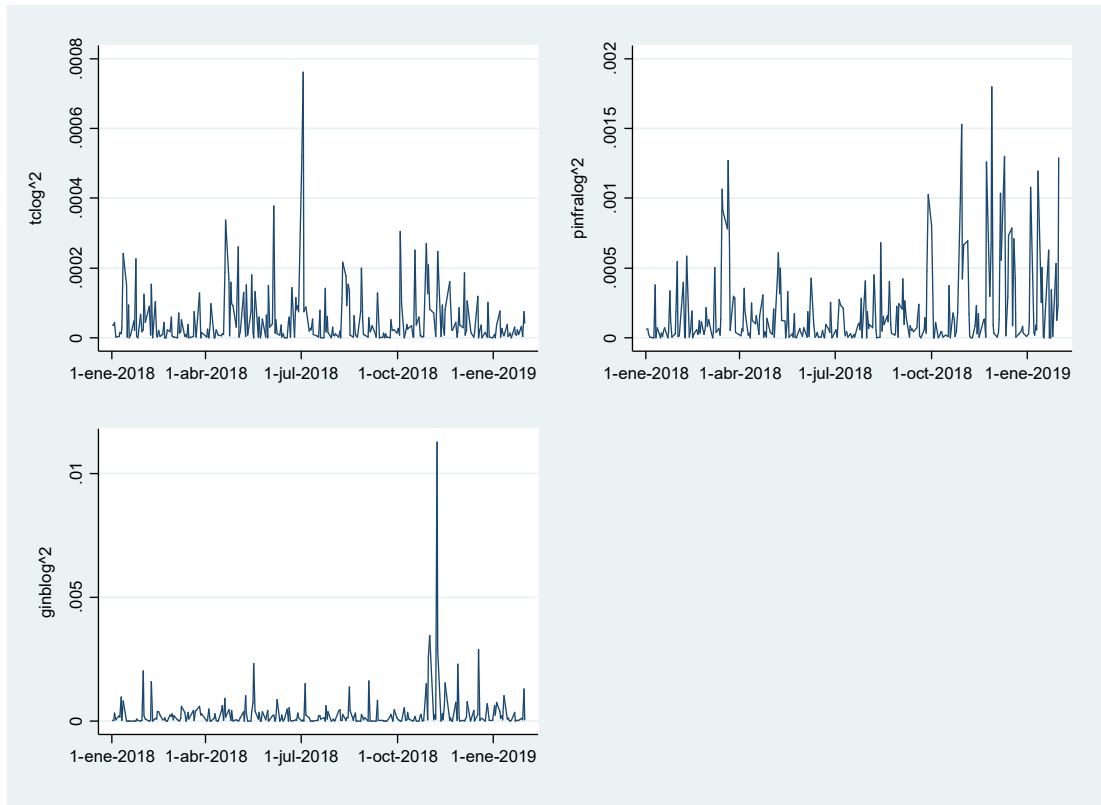
Figura 2.7 – Distribución de los rendimientos log de los tres activos.



La Figura 2.8 ilustra los valores al cuadrado de cada uno de los rendimientos log. Se usan valores elevados al cuadrado para facilitar la identificación de periodos de baja volatilidad seguidos de periodos de alta volatilidad. Se presume, por tanto, heterocedasticidad condicional.

El Cuadro 2.3 muestra los resultados de aplicar la prueba de heterocedasticidad condicional autorregresiva en los residuales de los rendimientos log usando la prueba de Engle con el multiplicador de Lagrange. Para los tres casos se confirma entonces la presencia de heterocedasticidad condicional en las series.

Figura 2.8 – Valores de los tres rendimientos log elevados al cuadrado. Se identifican visualmente periodos de baja volatilidad seguidos de periodos de alta volatilidad.



Cuadro 2.3 - Verificación de heterocedasticidad condicional autorregresiva en los residuales de los rendimientos log usando la prueba de Engle de multiplicador de Lagrange.

	<i>tclog</i>	<i>pinfralog</i>	<i>ginblog</i>
Rezagos	1	1	1
χ^2	17.614	18.460	7.685
Grados de libertad	1	1	1
$prob > \chi^2$	0.0000	0.0000	0.0056

La obtención del orden de los rezagos para cada una de las tres series se muestra en las estadísticas del Cuadro 2.4.

Cuadro 2.4 – Estadísticas de obtención del orden óptimo de rezagos de los tres rendimientos log usando los criterios FPE (Error Final de Predicción), Akaike (AIC), Hannan-Quinn (HQIC) y Schwarz (SBIC). En el cuadro, LL es valor de verosimilitud log (Log Likelihood), LR es la razón de verosimilitud (Likelihood Ratio), df son los grados de libertad, p es valor de la probabilidad de la hipótesis nula.

(a) Obtención de rezagos óptimos del rendimiento log del Tipo de Cambio (tclog)

Selection-order criteria

Sample: 12/01/2018 - 25/01/2019, but with gaps

Number of obs = 46

lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	161.348				.000055	-6.97167	-6.95678	-6.93192*
1	162.829	2.9607	1	0.085	.000054*	-6.99256*	-6.96277*	-6.91305
2	162.837	.01668	1	0.897	.000056	-6.94944	-6.90477	-6.83018
3	162.841	.00753	1	0.931	.000059	-6.90613	-6.84656	-6.74711
4	163.062	.44263	1	0.506	.000061	-6.87227	-6.79781	-6.6735

(b) Obtención de rezagos óptimos del rendimiento log de Pinfra (pinfralog)

Selection-order criteria

Sample: 12/01/2018 - 25/01/2019, but with gaps

Number of obs = 46

lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	136.9				.000159	-5.90869	-5.8938	-5.86894
1	140.981	8.1627*	1	0.004	.000139*	-6.04266*	-6.01288*	-5.96316*
2	141.15	.33683	1	0.562	.000144	-6.00651	-5.96183	-5.88725
3	141.517	.7343	1	0.391	.000148	-5.97899	-5.91943	-5.81998
4	141.695	.35577	1	0.551	.000154	-5.94325	-5.86879	-5.74448

(c) Obtención de rezagos óptimos del rendimiento log de Grupo Inbursa (ginblog)

Selection-order criteria

Sample: 12/01/2018 - 25/01/2019, but with gaps

Number of obs = 46

lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	124.107				.000277	-5.35246	-5.33757	-5.31271
1	126.692	5.1699*	1	0.023	.000259*	-5.42137*	-5.39159*	-5.34187*
2	127.109	.83398	1	0.361	.000266	-5.39602	-5.35135	-5.27676
3	128.422	2.6267	1	0.105	.000262	-5.40965	-5.35008	-5.25063
4	128.489	.13417	1	0.714	.000273	-5.36909	-5.29463	-5.17032

El Cuadro 2.4 identifica los rezagos óptimos usando los criterios de calidad de los conocidos modelos de Error Final de Predicción (FPE), Akaike (AIK), Hannan-Quinn (HIC) y Schwarz (SBIC). De las estadísticas del Cuadro 2.4 se verifican modelos AR(1) para los rendimientos log de los tres activos de este estudio. En los paneles de este cuadro, LL es valor de verosimilitud log (*Log Likelihood*), LR es la razón de verosimilitud (*Likelihood Ratio*), de acuerdo a las definiciones de Hamilton (1994) y Lutkepohl (1993) y p el habitual valor de probabilidad de la hipótesis nula.

2.4 Construcción del portafolio

Como se describe en el Marco Teórico, Pojarliev & Polasek (2001) reportan que la construcción óptima del portafolio se obtiene resolviendo la ecuación

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}}$$

donde $\mathbf{w}' = [w_1 \ w_2 \ w_3]$ es el vector de ponderaciones óptimas de inversión asignadas a cada activo, \mathbf{H} es la matriz de varianza covarianza de los rendimientos de los activos e $\mathbf{1}$ es el vector unitario. Para nuestro caso, usando σ_1 para $tclog$, σ_2 para $pinfraclog$ y σ_3 para $ginblog$, se tiene

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} Var_1 & Cov_{1,2} & Cov_{1,3} \\ Cov_{2,1} & Var_2 & Cov_{2,3} \\ Cov_{3,1} & Cov_{3,2} & Var_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.00005193 & -0.00001923 & -0.00003372 \\ -0.00001923 & +0.00019018 & +0.00003610 \\ -0.00003372 & +0.00003610 & +0.00030924 \end{bmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\mathbf{w}' = [0.6769 \ 0.1835 \ 0.1394]$$

Es decir, de manera óptima se debería asignar el 67.69% de la inversión a operaciones con el Tipo de Cambio, el 18.35% a acciones de Pinfrac y el 13.94% a Grupo Inbursa. Esta es la composición aplicada sobre los tres activos en este trabajo.

Así, el rendimiento del portafolio con los tres activos ($r_{portlog}$) con ponderación óptima es

$$r_{portlog} = \sum_{i=1}^n w_i r_i = 0.6769 * tclog + 0.1835 * pinfralog + 0.1394 * ginblog$$

2.5 Descripción del rendimiento del portafolio

Las estadísticas descriptivas del rendimiento log del portafolio se muestran en el Cuadro 2.5. Notar los valores de curtosis, de la prueba de Jarque-Bera y de la de Dickey-Fuller, por lo que se identifica la condición de estacionariedad y no normalidad y de estacionariedad de la variable de rendimiento log del portafolio.

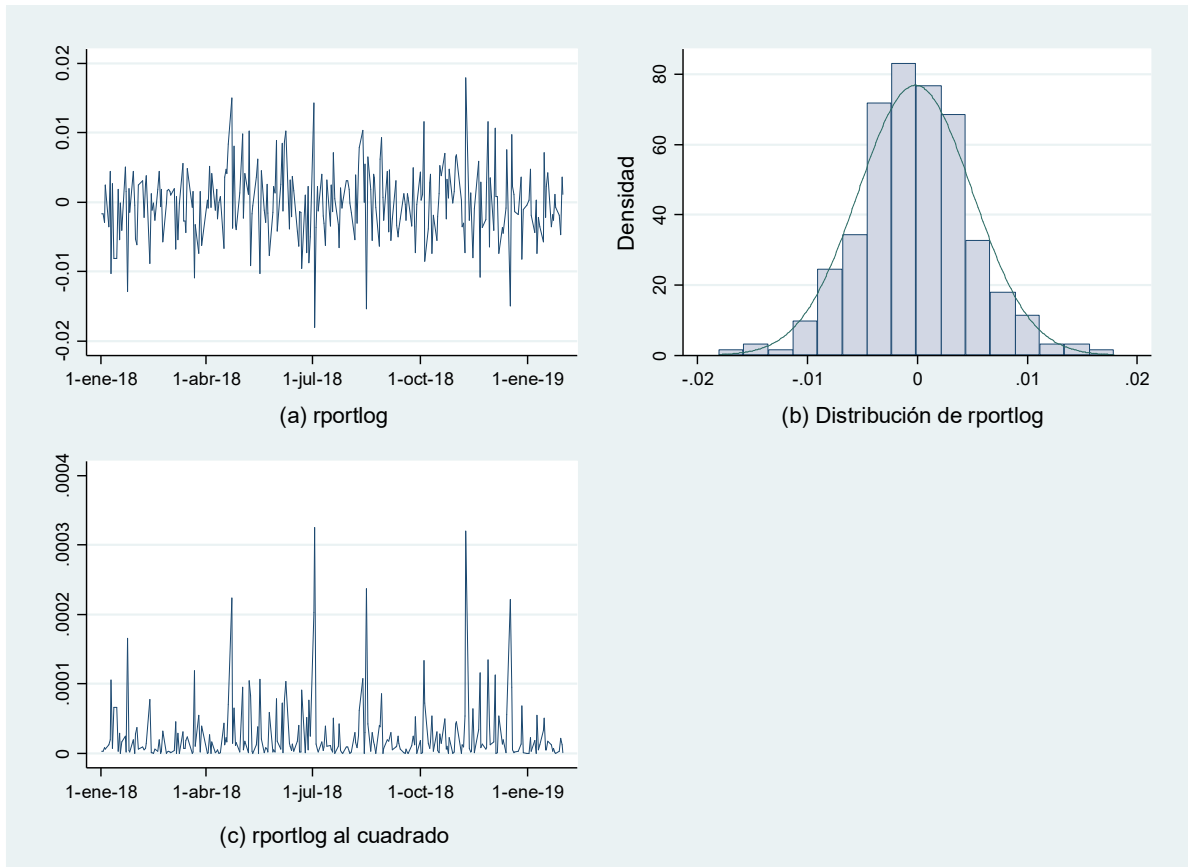
Cuadro 2.5 – Estadísticas descriptivas del rendimiento del portafolio.

	<i>rportlog</i>
Observaciones	273
Media	-0.000170
Desviación Estándar	0.005189
Varianza	0.000027
Asimetría (<i>skewness</i>)	0.033396
Curtosis	3.878567
Mínimo	-0.018044
Máximo	0.0178894
Jarque-Bera	8.83 (0.012)
ADF	-18.29 (0.000)

La percepción anterior es fortalecida por la representación gráfica del rendimiento log del portafolio (Figura 2.9). En el panel (a) se muestra el comportamiento anual (con datos diarios) de *rportlog*; en el panel (b) se muestra la no normalidad del rendimiento log del portafolio y en (c) se muestran los valores al cuadrado de *rportlog* para evidenciar, al menos visualmente, que se presentan periodos de alta volatilidad seguidos de periodos de baja volatilidad, que es la característica de heterocedasticidad. Esta condición se comprueba con la prueba de heterocedasticidad en los residuales de los rendimientos log usando la prueba

de Engle de multiplicador de Lagrange; los resultados de esta prueba se ilustran en el Cuadro 2.6. Se confirma que el rendimiento log del portafolio presenta varianza condicional y puede ser sujeta a ajustes con modelos ARCH.

Figura 2.9 – (a) Representación gráfica de los rendimientos log del portafolio en un año; (b) distribución del rendimiento log del portafolio; (c) valores cuadráticos del rendimiento log del portafolio para evidenciar visualmente la varianza condicional.



Cuadro 2.6 – Prueba de heterocedasticidad con multiplicador de Lagrange para *rportlog*, rendimiento log del portafolio.

	<i>rportlog</i>
Rezagos	1
χ^2	4.781
Grados de libertad	1
$prob > \chi^2$	0.0288

La selección del orden de rezagos en el rendimiento log del portafolio se obtiene de acuerdo a lo mostrado en el Cuadro 2.7. Notar que se obtiene un orden óptimo para rportlog de 0 (cero), por lo que aplica una forma AR(0).

Cuadro 2.7 - Estadísticas de obtención del orden óptimo de rezagos del rendimiento log del portafolio usando los criterios AIC, HQIC y SBIC.

```
Selection-order criteria
Sample: 12/01/2018 - 25/01/2019, but with gaps
Number of obs = 46
```

lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	176.53				.000028*	-7.63175*	-7.61686*	-7.592*
1	177.071	1.0808	1	0.299	.000029	-7.61177	-7.58198	-7.53226
2	177.128	.1143	1	0.735	.00003	-7.57077	-7.5261	-7.45151
3	177.363	.47072	1	0.493	.000031	-7.53753	-7.47796	-7.37851
4	177.642	.5569	1	0.456	.000032	-7.50616	-7.4317	-7.30739

2.6 Ajuste con modelos ARCH

2.6.1 Modelos aplicados

Se usan en este trabajo los modelos más comunes que se aplican para analizar las series financieras, los cuales se enlistan en el Cuadro 2.8, aunque se encuentran descritos brevemente en el Marco Teórico (Capítulo 1). Para referencia, en el Cuadro 2.8 se indican igualmente las opciones de comando que se deben usar en Stata para cada modelo con el fin de ejecutar en el programa cada uno de los modelos de la familia.

Cuadro 2.8 – Modelos ARCH aplicados a *rportlog*. Se indica la combinación de opciones de comando en el programa Stata con las que se ajusta cada uno de los modelos.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Combinación de opciones de comandos en Stata</i>
1	ARCH	arch()
2	GARCH	arch() garch()
3	EGARCH	earch() egarch()
4	TGARCH	abarch() atarch() sdgarch()
5	SAARCH	arch() saarch()
6	GJR-GARCH	arch() saarch()
7	NGARCH	narch() garch() arch0()
8	NGARCHK	narchk() garch()
9	GARCH-M	arch() garch() archm()

2.6.2 Ajuste con los modelos seleccionados

El Cuadro 2.9 muestra los ajustes de cada uno de los modelos usados en este estudio. Se reportan los rezagos p , q y r correspondientes a la forma de cada uno de los modelos. Los rezagos indicados son aquellos que han sido encontrados en la regresión como significativos al 95%. Para cada uno de los rezagos encontrados se indica entre paréntesis el valor del error estándar calculado. De la misma manera, en el Cuadro 2.9 se indica que todos los valores de las constantes (el valor ω en los modelos) son 0 o no significativos, excepto uno de ellos, el cual se encuentra también muy cerca del valor 0. Se espera este resultado dado que se usan valores de rendimiento log.

2.6.3 Comparación de los modelos

El Cuadro 2.10 muestra los resultados de las estimaciones de los criterios de verosimilitud log (LL) y de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) de los modelos ARCH aplicados. De acuerdo al criterio LL, la mejor probabilidad de ajuste

al comportamiento de la varianza condicional es observada por el modelo GARCH, mientras que para los criterios AIK y BIC, los modelos con mayor calidad son los modelos NGARCHK y GJR-GARCH, respectivamente.

Cuadro 2.9 – Ajuste de modelos ARCH para el rendimiento log del portafolio ($r_{portlog}$). En la columna de rezagos se indican para cada rezago y entre paréntesis los valores de error estándar.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Rezagos significativos con error estándar</i>	<i>Constante</i>
1	ARCH(p)	$p = 1$ (0.108), 8 (0.032)	0.0000
2	GARCH(p, q)	$p = 1$ (0.102) $q = 8$ (0.074)	0.0000
3	EGARCH(p, q, r)	$p = 2$ (0.033) $q = 1$ (0.051) $r = 1$ (0.138), 2 (0.040), 3 (0.140)	-3.5653
4	TGARCH(p, q, r)	$p = 1$ (0.093), 2 (0.209) $q = 2$ (0.149), 3 (0.176) $r = 1$ (0.470), 2 (0.570), 1 (0.470)	0.0138
5	SAARCH(p, q, r)	$p = 1$ (0.112), 2 (0.030) $q = 6$ (0.000) $r = 8$ (0.101)	0.0000
6	GJR-GARCH(p, q, r)	$p = 1$ (0.108), 2 (0.023) $r = 8$ (0.120) Sin rezagos q	0.0000
7	NGARCH(p, q, r)	$p = 3$ (0.050) $r = 1$ (0.037) Sin rezagos q	0.0000
8	NGARCHK(p, q, r)	$p = 1$ (0.101), 8 (0.030) Sin rezagos q y r	0.0000
9	GARCH-M(p, q, r)	$p = 1$ (0.120) Sin rezagos q y r	0.0000

Cuadro 2.10 – Estimaciones de los criterios de verosimilitud log (LL), de información de Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) de los modelos ARCH aplicados.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>LL</i>	<i>AIC</i>	<i>BIC</i>
1	ARCH	1581.296	-3136.592	-3084.867
2	GARCH	1582.819	-3135.639	-3075.955
3	EGARCH	1564.028	-3108.055	-3068.267
4	TGARCH	1583.886	-3133.772	-3066.131
5	SAARCH	1583.137	-3132.275	-3064.634
6	GJR-GARCH	1580.215	-3136.431	-3088.684
7	NGARCH	1556.224	-3094.449	-3058.639
8	NGARCHK	1582.473	-3136.947	-3081.242
9	GARCH-M	1576.202	-3134.406	-3098.597

2.6.4 Pronóstico de la volatilidad

Se reportan en el Cuadro 2.11 y en Cuadro 2.12 los resultados de comparación de la capacidad de los modelos QLIKE⁴ y MSE,⁵ respectivamente, para pronosticar la volatilidad a partir de muestras específicas (Patton, 2011). Se hace el pronóstico para el periodo del mes de enero de 2019 a partir de la muestra anual enero 2018 a enero 2019, por lo que el pronóstico realizado es del tipo interna a la muestra (*in sample*). Notar que el mejor resultado QLIKE es obtenido con el modelo NGARCH para el que el valor máximo de cuasiverosimilitud QL es 29.5834 e igualmente para la función de pérdida de MSE el mejor valor es el de 4.15×10^{-9} (denotado 4.15e-09), correspondiente también a NGARCH.

⁴ Patton (2011) usa las siglas QLIKE para denotar la cuasiverosimilitud (*quasilielihood*, QL)

⁵ Patton (2011) usa las siglas en inglés MSE para denotar el error mínimo cuadrado.

Cuadro 2.11 – Cálculo de la estadística de cuasiverisimilitud de varianza (QLIKE) para cada uno de los modelos (Patton, 2011).

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Media</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>Min</i>	<i>Máx</i>
1	ARCH	22.5848	7.4244	8.0508	35.4215
2	GARCH	22.7532	7.4668	8.0526	35.6406
3	EGARCH	23.0368	8.0180	8.0078	37.4541
4	TGARCH	34.9168	9.8572	9.4716	49.0900
5	SAARCH	22.5949	7.4332	8.0551	35.4366
6	GJR-GARCH	22.8847	7.5630	8.1629	35.9258
7	NGARCH	14.3139	8.3622	0.0000	29.5834
8	NGARCHK	22.7168	7.5086	8.0599	35.7622
9	GARCH-M	22.6251	7.4834	8.0444	35.5941

Cuadro 2.12 - Cálculo de la estadística de error cuadrado mínimo (MSE) de varianza para cada uno de los modelos (Patton, 2011). La notación $m \times 10^{-n}$ representa valores $m \times 10^{-n}$.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Media</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>Min</i>	<i>Máx</i>
1	ARCH	2.52e-09	1.34e-09	2.87e-10	4.22e-09
2	GARCH	2.66e-09	1.45e-09	2.88e-10	4.52e-09
3	EGARCH	2.40e-09	1.32e-09	2.63e-09	4.42e-09
4	TGARCH	7.40e-09	1.38e-09	4.92e-10	9.27e-09
5	SAARCH	2.68e-09	1.47e-09	2.89e-10	4.50e-09
6	GJR-GARCH	2.57e-09	1.35e-09	3.59e-10	4.30e-09
7	NGARCH	1.86e-09	1.34e-09	0.00e-10	4.15e-09
8	NGARCHK	2.66e-09	1.45e-09	2.92e-10	4.54e-09
9	GARCH-M	2.49e-09	1.32e-09	2.82e-10	4.18e-09

2.7 Ajuste con el modelo CAPM

La forma del modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) que se usa en este trabajo es la descrita en el Marco Teórico, que es

$$r_{pt} - r_{ft} = \alpha_p + \beta_p(r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{pt}$$

en donde r_{pt} es el rendimiento log del portafolio, r_{ft} es el rendimiento log libre de riesgo y r_{mt} es el rendimiento log del mercado. Los valores α_p , β_p y ε_{pt} son los parámetros de la regresión. En nuestro caso, el valor r_{pt} es el ya usado $rportlog$. r_{ft} es el rendimiento de un activo que opera sin volatilidad; en este trabajo es el de los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes). Esta variable es denotada como $ceteslog$ (Figura 2.10). Finalmente, r_{mt} es el rendimiento log del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, denotado $ipclog$ (Figura 2.11). De acuerdo al modelo CAPM, se usan en este trabajo las expresiones en exceso del rendimiento log del portafolio

$$rportlogx = r_{pt} - r_{ft} = rportlog - ceteslog$$

y el exceso del rendimiento log del mercado

$$ipclogx = r_{mt} - r_{ft} = ipclog - ceteslog$$

Por lo que la estructura usada del modelo CAPM aplicable es

$$rportlogx = \alpha_p + \beta_p * ipclogx + \varepsilon_{pt}$$

En vista de estas definiciones, $rportlogx$ e $ipclogx$ se presentan gráficamente en la Figura 2.12 y sus estadísticas descriptivas en el Cuadro 2.13. Para ambos casos se observan estacionariedad y leptocurtosis; $rportlogx$ muestra normalidad. Estas características de $rportlogx$ e $ipclogx$ se visualiza en la Figura 2.13. De la misma manera, la prueba de heterocedasticidad de ambas variables se ilustra en el Cuadro 2.14: se confirma la presencia de varianza condicional en $rportlogx$ e $ipclogx$.

Figura 2.10 – Rendimiento log de los Certificados de la Tesorería de la Federación (Cetes), denotado *ceteslog*. Fuente: Banco de México.

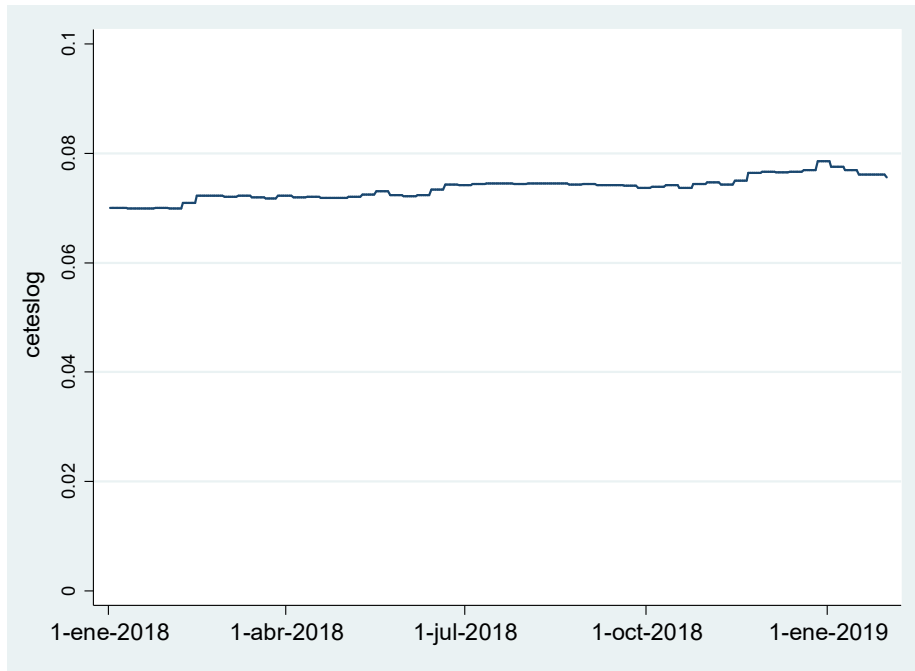


Figura 2.11 – Rendimiento log del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores, denotado *ipclog*. Fuente: BMV.

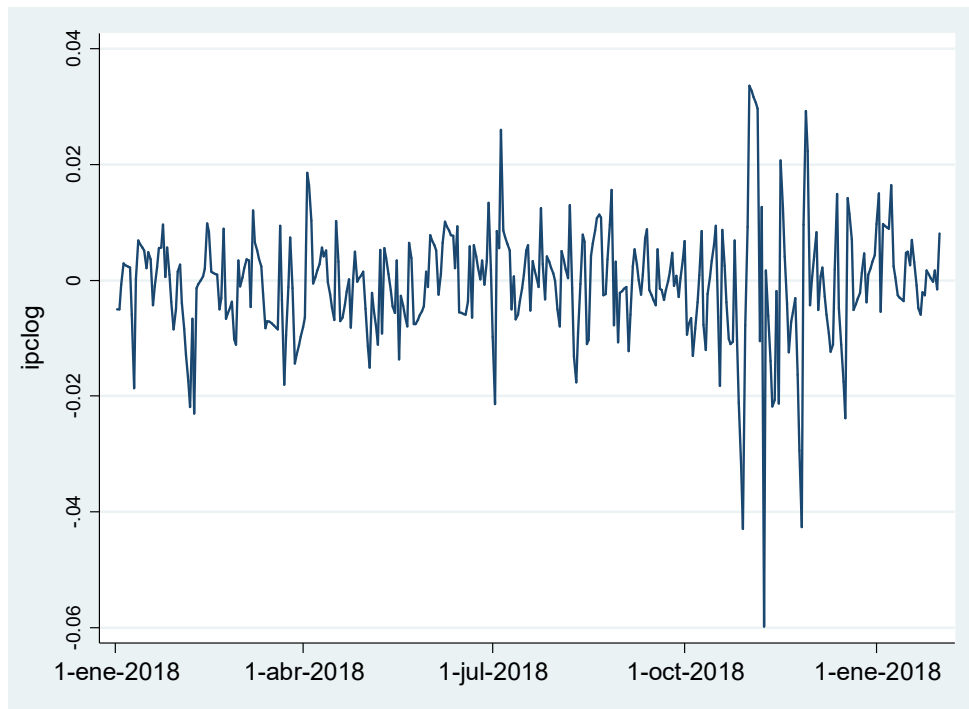


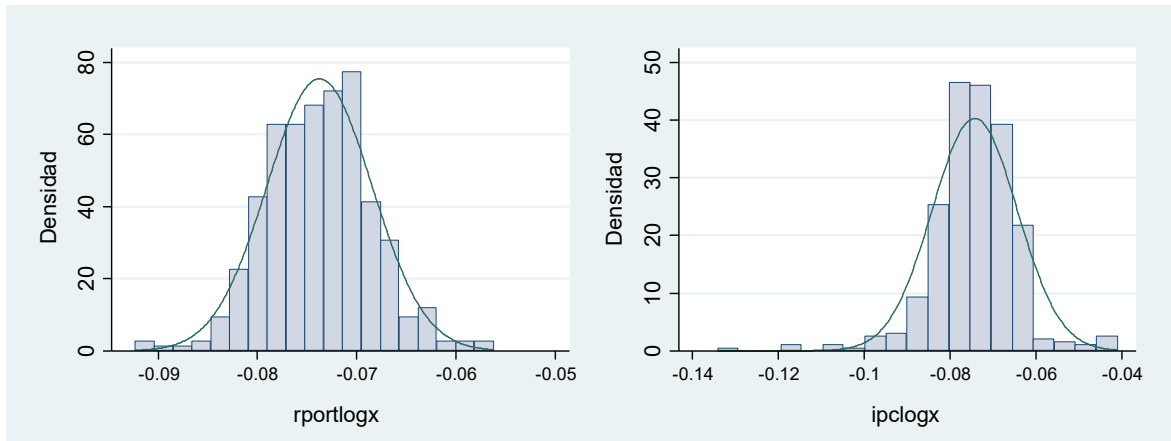
Figura 2.12 – Series *rportlogx* e *ipclogx*, correspondientes a los valores en exceso del rendimiento log del portafolio y del rendimiento log del IPC.



Cuadro 2.13 – Estadísticas descriptivas de los rendimientos log en exceso del portafolio (*rportlogx*) y del índice de Precios y Cotizaciones (*ipclogx*).

	<i>rportlogx</i>	<i>ipclogx</i>
Observaciones	273	273
Media	-0.073752	-0.074307
Desviación Estándar	0.005292	0.009912
Varianza	0.000028	0.000098
Asimetría (<i>skewness</i>)	0.023229	-0.827853
Curtosis	3.583319	8.605021
Mínimo	-0.092289	-0.134154
Máximo	-0.056247	-0.041080
Jarque-Bera	5.636 (0.0597)	562.2 (0.000)
ADF	-14.227 (0.000)	-12.291 (0.000)

Figura 2.13 – Distribución de los rendimientos log en exceso del portafolio (*rportlogx*) y del IPC (*ipclogx*).



Cuadro 2.14 – Prueba de heterocedasticidad de las variables en exceso del rendimiento log del portafolio (*rportlogx*) y del rendimiento log del IPC (*ipclogx*).

	<i>rportlogx</i>	<i>ipclogx</i>
Rezagos	1	1
χ^2	39.610	33.854
Grados de libertad	1	1
$prob > \chi^2$	0.0000	0.0000

La aplicación de la regresión a la forma

$$rportlogx = \alpha_p + \beta_p * ipclogx + \varepsilon_{pt}$$

resulta en los valores⁶ $\alpha_p = -0.0688$ (0.0020) y $\beta_p = 0.0672$ (0.0267) con confiabilidad del 95%.

2.8 Comparación ARCH vs CAPM

Al igual que en la comparación entre modelos ARCH, el cotejo entre éstos y el modelo CAPM se da en términos de la capacidad del pronóstico de la volatilidad.

⁶ Se indican los valores de los coeficientes seguidos, entre paréntesis, de los valores de error estándar correspondientes.

Por lo anterior, se procede nuevamente a las funciones de pérdida QLIKE y MSE de Patton (2011) para medir la bondad de capacidad de CAPM para pronosticar la volatilidad durante el mes de enero de 2019, que es nuevamente un pronóstico dentro de la muestra (*in sample*). Los resultados de muestran en el Cuadro 2.15. Se observan valores de calidad de pronóstico muy baja de CAPM en comparación con los obtenidos para los modelos ARCH. El detalle de este examen comparativo se encuentra analizando el Cuadro 2.11 y el Cuadro 2.12 y contrastar con el Cuadro 2.15. Se observa una diferencia abismal entre aun el peor de los modelos ARCH y los resultados de CAPM.

Cuadro 2.15 – Medidas QLIKE y MSE de acuerdo a Patton (2011) para medición de la capacidad de pronóstico de volatilidad del modelo CAPM.

	<i>Media</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>Min</i>	<i>Máx</i>
QLIKE	139511.3	92096.69	8019.0	299518.7
MSE	0.0003071	0.0001702	0.000019	0.0005772

2.9 Resumen de los hallazgos clave

Se presenta en el Capítulo 3 una discusión completa acerca de los resultados. Sin embargo, éstos se presentan sintéticamente de la siguiente manera.

- (i) Las series de tiempo financieras presentan el fenómeno de varianza condicional
- (ii) Las series de tiempo financieras presentan colas pesadas
- (iii) Las series de tiempo presentan persistencia
- (iv) De los modelos de la familia ARCH, el NGARCH es el que ofrece la mejor capacidad de pronosticar el comportamiento de volatilidad en un contexto de varianza condicional (heterocedasticidad)
- (v) El modelo CAPM, de uso tradicional, ofrece una capacidad de pronóstico de la volatilidad más baja que cualquiera de los modelos de la familia ARCH

Capítulo 3. Resultados

3.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados del estudio desarrollado en el Capítulo 2 y la forma en que se cumplen o verifican los objetivos y las hipótesis planteados para el trabajo en la Introducción. En este contexto, se debe recordar que el marco de la investigación se delimita con los nueve elementos del alcance detallado en la sección 0 y que, en resumen, son (i) se toman dos activos del índice de Precios y Cotizaciones (IPC)¹ de la Bolsa Mexicana de Valores y la cotización diaria del tipo de cambio,² (ii) se usan precios diarios de los tres valores en el año enero-2018 a enero-2019, (iii) se emplea Stata como herramienta auxiliar en los cálculos, (iv) se comparan los modelos ARCH con un método “tradicional” de estimación de la volatilidad, escogiéndose que éste sea el popular CAPM, (v) el estudio de esta tesis no se enfoca a la teoría de optimización de portafolios y (vi) los supuestos de la sección 1.7 aplican en todo momento. Por otro lado, señalemos que los objetivos del trabajo, también formulados en el 0, son, primero, lograr la caracterización de la volatilidad del rendimiento de un portafolio con el uso de modelos de la familia ARCH. Segundo, demostrar que la capacidad de pronóstico de la volatilidad de los modelos de la familia ARCH es mejor que la del modelo CAPM, que es un modelo de uso generalizado. Tercero, determinar cuál de los modelos de la familia ARCH es el que mejor pronostica la volatilidad del rendimiento del portafolio. Además, igualmente puntualizadas en el 0, las hipótesis a verificar con este trabajo consisten en que, en relación con la volatilidad del rendimiento de un portafolio con activos mexicanos, (i) con una confiabilidad de 95%, los modelos ARCH son mejores que un modelo CAPM para pronosticar la volatilidad y (ii) los modelos ARCH constituyen un razonable mecanismo de caracterización.

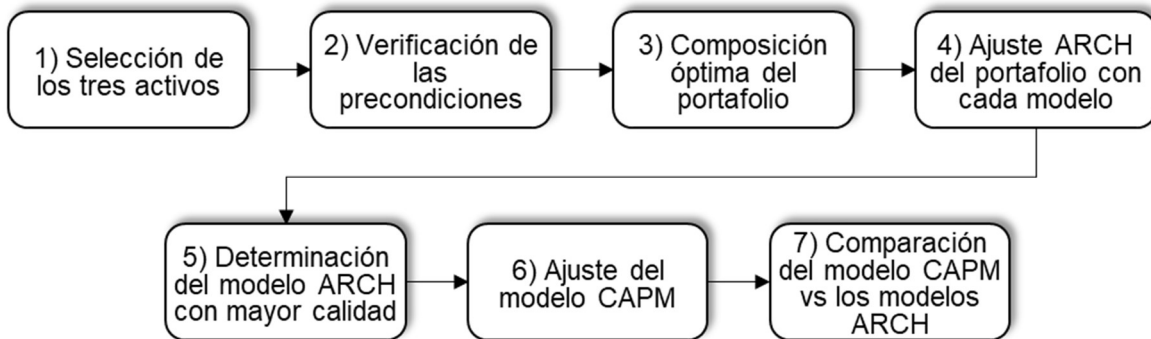
¹ Los valores son los de Promotora de Infraestructura (*Pinfra*) y Grupo Inbursa (*Ginb*).

² El tipo de cambio diario es el Fix reportado por el Banco de México en el Sistema de Información Económica (SIE).

3.2 Método usado

En primer lugar, se ha verificado que el método aplicado, el cual se muestra en la Figura 3.1, se puede utilizar para crear un portafolio de inversión con activos del mercado mexicano. El desarrollo del Capítulo 2 se realizó con tres activos; sin embargo, el procedimiento se puede extender a n activos en el portafolio.

Figura 3.1 – Método usado en el estudio



En el primer paso del método se seleccionan los tres activos que componen el portafolio. El criterio de selección de los activos se fundamenta en el principio de la indiferencia. De acuerdo con este principio, es indistinto seleccionar un activo i o un activo j . Es decir, aparte de su varianza, el inversionista (que en este trabajo asume aversión al riesgo) no distingue las diferencias en las características de los activos a considerarse en la composición del portafolio. En el segundo paso, se verifican las características de heterocedasticidad de las series de tiempo correspondientes a los tres activos. Este rasgo de no cumplimiento con la condición de homocedasticidad es necesario para aplicar ajustes con modelos ARCH. En el tercer paso se determina la composición del portafolio, i.e., la ponderación de porcentajes de inversión en cada uno de los activos que integran el portafolio. El método de composición usado es el propuesto por Pojarliev & Polasek (2001), el cual determina valores de ponderación en función de la varianza en cada una de las series, siendo el activo con la menor varianza el que obtiene el mayor factor de

ponderación.³ Esto es equivalente a suponer que el inversionista es un agente económico que actúa con prudencia al decidir qué proporción invertir en cada uno de sus activos. En los pasos cuarto y quinto se ajustan los modelos ARCH para el portafolio y se determina cuál de los modelos presenta la mejor capacidad de pronóstico de volatilidad del portafolio. En los pasos sexto y séptimo se ajusta el modelo CAPM y se compara su desempeño con los de los modelos ARCH.

3.3 Resultados

3.3.1 Hallazgos estadísticos sobre los tres activos

De acuerdo a lo indicado en el Cuadro 2.4 del Capítulo 2, se ha encontrado que las tres series de los activos estudiados cumplen con la forma autorregresiva de orden 1 —la cual se denota AR(1)—, que es la forma esperada de las series financieras.⁴ Este hallazgo se alinea con lo documentado abundantemente en la literatura (e.g., Grossman & Stiglitz (1980), Buffelli & Urga (2016), Tsay (2010) y Amenc & Le Sourd (2003), entre otros): la mayoría de las series financieras se representan en esta forma. La característica AR(1) da lugar a que los cambios en los precios de los activos (o en el rendimiento de los activos, como se trabajó en este estudio) sean independientes unos de otros, a pesar de que los cambios ocurran en periodos adyacentes. Esto significa que el cambio o la tendencia en el rendimiento de un activo no pueden usarse para predecir un precio futuro. Este rasgo de los activos se debe a su comportamiento en el tiempo aleatorio e impredecible.

Cada uno de los tres activos que componen la muestra tomada de los mercados mexicanos cumple con la característica de varianza condicional, denominada heterocedasticidad. Se probó que las formas de las volatilidades en las series de tiempo de los rendimientos obedecen a un comportamiento heterocedástico. Esto implica que las varianzas de las series presentan periodos de alta volatilidad y que

³ Como resultado de este criterio, no es relevante el monto total de recursos que el inversionista busca asignar a un portafolio, sino el porcentaje de ese total asignado a cada uno de los activos del portafolio.

⁴ La forma AR(1) simple de una serie y_t es $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es el componente estocástico y $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

éstos son seguidos de periodos de baja volatilidad. Esta conducta de varianza condicional es prerrequisito para que las series de tiempo de los rendimientos sean sujetos de aplicación de los modelos de la familia ARCH, cuyo uso configura las formas de la varianza heterocedástica.

3.3.2 Se presenta persistencia en las series de tiempo de las series de los activos

Por lo descrito en el Cuadro 2.4, se establece que las series de tiempo que representan los precios de los tres activos componentes del portafolio tienen la forma AR(1). Por lo tanto, las series tienen persistencia alta.⁵ La persistencia de una serie de tiempo se relaciona con la noción de la propiedad de *memoria* a lo largo del tiempo. Dicho de otra manera, activos con series de tiempo persistentes significa que el efecto de choques influye en el comportamiento futuro de los precios de los activos y mientras más persistente sea el efecto, éste se sentirá a más largo plazo.

3.3.3 Composición del portafolio⁶

Se aplicó el método de composición óptima de Pojarliev & Polasek (2001), el cual se fundamenta en las varianzas y covarianzas de los tres activos. En efecto, si para tres activos el portafolio se construye a través de la fórmula siguiente:⁷

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 \quad (3.1)$$

donde r_p es el rendimiento log del portafolio, r_i son los rendimientos log de cada de los tres activos y w_i son las ponderaciones asignadas por el inversionista a cada

⁵ En efecto, si en la forma simple de AR(1) se tiene que una serie y_t en el momento t se representa con $y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, entonces para cualquier momento en el futuro $t + h$ se tiene $y_{t+h} = y_t + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_{t+2} + \varepsilon_{t+3} + \dots + \varepsilon_{t+h}$ y, por lo tanto, $E[y_{t+h} | y_t] = E[y_t]$.

⁶ Por lo descrito a lo largo del Capítulo 2 y lo indicado en esta sección 3.3.3, se entiende que los rendimientos tanto del portafolio como de los activos que lo componen tienen la forma log.

⁷ Por facilidad, se modifica ligeramente la notación de los rendimientos de los activos de *tlog*, *pinfralog* y *ginblog* del Capítulo 2 a r_1 , r_2 y r_3 , respectivamente.

activo. Entonces el portafolio se optimiza, de acuerdo a estos autores, con el vector de ponderaciones siguiente:

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{1}} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]'$$

donde \mathbf{H} es la matriz varianza – covarianza correspondiente a la volatilidad de los tres activos y $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad 1]'$ es el vector unitario. El resultado de este proceso se muestra en el Cuadro 3.1.

Cuadro 3.1 – Ponderaciones y volatilidades por activo en la composición del portafolio.

Activo	Volatilidad (Desviación estándar)	Ponderación	
Tipo de Cambio r_1	0.00720661	w_1	0.68
Promotora de Infraestructura r_2	0.01379076	w_2	0.18
Grupo Financiero Inbursa r_3	0.01758523	w_3	0.14

Aplicando el mecanismo de Pojarliev & Polasek, se tienen los valores w_i que representan las ponderaciones correspondientes al porcentaje óptimo de inversión en cada activo. Es decir,

$$r_p = 0.68 r_1 + 0.18 r_2 + 0.14 r_3$$

Se observa que el tipo de cambio predomina en el portafolio: el 68% de la inversión debería ser aplicada al Tipo de Cambio, el 18% a Promotora de Infraestructura y el resto al Grupo Financiero Inbursa. El método usado para la construcción del portafolio estima las ponderaciones w_i en términos de la volatilidad. Predomina la recomendación de invertir en el Tipo de Cambio, debido a que su volatilidad es considerablemente menor. Este hallazgo se interpreta estableciendo que el Tipo de Cambio es menos riesgoso y, por lo tanto, conviene para un inversionista prudente invertir en este activo. La prudencia en la inversión se liga por tanto con una decisión a favor de un activo menos riesgoso y con una actitud de decisiones con aversión al riesgo. En general, con niveles bajo de riesgo,

los rendimientos tienden a ser también potencialmente bajos. Por otro lado, por reciprocidad, altos niveles de riesgos se asocian con rendimientos potencialmente altos. La actitud de los agentes que recurren a esta estructura de inversión se denomina inversión con apetito por el riesgo. Sin embargo, esta actitud no es la observada en el mecanismo de optimización del portafolio de Pojarliev & Polasek (2001), que es el usado en este trabajo: la construcción óptima se alcanza usando una práctica de aversión al riesgo (ver sección 1.4.4).

3.3.4 Rendimiento del portafolio con característica de paseo aleatorio

Conforme a la exposición de la volatilidad del rendimiento en la sección 1.4.6, se ha confirmado el supuesto hecho de que la forma del rendimiento tiene una forma denotada en este trabajo como AR(0), que es el resultado encontrado en la sección 2.5 (descripción del rendimiento del portafolio). Es decir, el rendimiento del portafolio r_t tiene una estructura

$$r_t = \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

que se alinea con las versiones de Tsay (2010) y Boffelli & Urga (2016). Esta forma es determinada como *razonable* para rendimientos de activos en ambas referencias, incluyendo hechos estilizados especificados por Tsay. La estructura mostrada corresponde a un paseo aleatorio. Por lo tanto, el portafolio, compuesto de acuerdo con la ecuación (3.1), se encuentra adecuado a la condición de paseo aleatorio. Por lo anterior, los cambios en los precios del portafolio son independientes y tienen la misma distribución. De la misma manera, no es posible usar un movimiento pasado para predecir un movimiento futuro, principalmente por el componente aleatorio del residual. Así, el portafolio formado con activos de mercados mexicanos toma una trayectoria impredecible, lo cual hace que no sea posible pronosticar el precio en el largo plazo.

3.3.5 Calidad de pronóstico de la volatilidad del rendimiento con modelos ARCH

El mejor modelo para describir la volatilidad del portafolio compuesto por activos mexicanos es el modelo NGARCH (*ARCH No Lineal Generalizado*, por sus siglas en inglés), formulado por Lanne & Saikkonen (2005). En este estudio se aplicaron modelos ARCH para estimar el pronóstico de la volatilidad de los activos considerados en el alcance de este trabajo. Los modelos son los mostrados en el Cuadro 3.2. Se aplicaron estos modelos en particular debido a que son los más comunes en el análisis de series financieras (e.g., Buffelli & Urga (2016) y Bollerslev et. al. (2010)). Cada uno de los modelos de la familia ARCH es adecuado para una forma de la volatilidad o para una combinación de estas formas; es decir, cada modelo se usa dependiendo de la manera en que cambia en el tiempo la volatilidad.

Cuadro 3.2 – Estadística de cuasiverisimilitud de varianza (QLIKE) de cada uno de los modelos usados para ajustar la volatilidad del rendimiento del portafolio. La lista se ordena ascendientemente respecto al valor máximo de la estadística.

	<i>Modelo ARCH</i>	<i>Media</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>Min</i>	<i>Máx</i>
1	NGARCH	14.3139	8.3622	0.0000	29.5834
2	ARCH	22.5848	7.4244	8.0508	35.4215
3	SAARCH	22.5949	7.4332	8.0551	35.4366
4	GARCH-M	22.6251	7.4834	8.0444	35.5941
5	GARCH	22.7532	7.4668	8.0526	35.6406
6	NGARCHK	22.7168	7.5086	8.0599	35.7622
7	GJR-GARCH	22.8847	7.5630	8.1629	35.9258
8	EGARCH	23.0368	8.0180	8.0078	37.4541
9	TGARCH	34.9168	9.8572	9.4716	49.0900

De acuerdo al criterio de Patton (2011), que es la estadística de cuasiverisimilitud de varianza (QLIKE), aplicado aquí para medir la calidad de los

modelos de la familia, se encontró que el mejor modelo de los analizados es el modelo NGARCH, seguido *de lejos* por los modelos ARCH y SAARCH. Así, conviene mostrar simplifícadamente el modelo NGARCH —aunque ya se ha presentado en el Marco Teórico—, el cual, de acuerdo a los hallazgos, es el más adecuado para explicar las características de los activos del mercado mexicano.

El modelo NGARCH se representa con la ecuación siguiente:

$$h_t = c_0 + c_1(\varepsilon_{t-1} - k_1)^2 + c_2(\varepsilon_{t-1} - k_2)^2 + bh_{t-1} \quad (3.2)$$

en donde h_t es el estimador en el periodo t de la volatilidad de la serie de tiempo financiera que representa el activo, ε_{t-1} es el valor residual de la regresión de h_t ; c_i y b son los coeficientes de la regresión y k_i los factores de *corrimiento* o *desplazamiento* que permiten reconocer el impacto de las innovaciones aun cuando éstas no se presenten.

Así, el principio de *no recibir noticias es buena noticia* se previene si se agrega el factor k_1 al modelo. Notar que la estructura de NGARCH es una extensión del modelo generalizado GARCH, que es, a su vez, una ampliación del modelo ARCH básico. Estos modelos se establecen de la siguiente manera:

$$h_t = c + a_1\varepsilon_{t-1}^2 \quad (\text{ARCH})$$

$$h_t = c + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1h_{t-1} \quad (\text{GARCH})$$

donde, igual que para la ecuación (3.2), h_t es el estimador en t de la volatilidad de la serie de tiempo financiera que representa el activo, ε_{t-1} es el valor residual de la regresión de h_t ; c , a_1 y b_1 son los coeficientes de la regresión.

El modelo GARCH-M, cuarto en la lista de calidad del Cuadro 3.2, se expone con

$$r_{pt} = \mu + \beta_1 r_{p,t-1} + \theta h_t + \varepsilon_t$$

$$h_t = c + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + b_1h_{t-1}$$

donde r_{pt} es el rendimiento del portafolio en t , h_t es el estimador en t de la volatilidad, ε_{t-1} es el valor residual en t de la regresión de h_t y μ , β_1 , θ , c , a_1 y b_1 son factores de regresión. Este modelo (Boffelli & Urga 2016) se propone con el fin de contabilizar la relación entre riesgo y rendimiento: aumenta la prima de riesgo conforme aumenta la volatilidad.

También contenido en los primeros lugares de la lista del Cuadro 3.2 se encuentra el modelo SAARCH, que es un modelo que se describe con

$$h_t = c_0 + c_1\varepsilon_{t-1}^2 + c_2\varepsilon_{t-1} + bh_{t-1}$$

donde los valores c_i y b son los coeficientes resultantes de aplicar la regresión, ε_t es la innovación y h_t es la varianza de la innovación en el periodo t . El factor c_2 representa el efecto de apalancamiento (esperándose que éste tome un valor negativo). La característica de simetría es capturada por el factor c_1 y significa el impacto del tamaño de las noticias sobre la volatilidad, sin hacer consideración del signo de la innovación, lo que se incluye en el término $c_1\varepsilon_{t-1}^2$.

Por considerarse menos relevantes de acuerdo los hallazgos indicados en el Cuadro 3.2, son omitidos aquí los otros modelos evaluados en este trabajo, aunque ya están presentados en el Marco Teórico (Capítulo 1).

3.3.6 *Se identificaron colas pesadas en el rendimiento del portafolio*

Tanto las series de los activos elegidos, así como la del portafolio, muestran exceso de curtosis. En particular, la serie de tiempo correspondiente al rendimiento del portafolio (r_p) exhibe un valor de curtosis de 3.878567, por lo que se dice que presenta leptocurtosis, i.e., colas pesadas. Así, la distribución de probabilidad de r_p predice la ocurrencia de movimientos de al menos tres desviaciones estándar más frecuentemente que en una distribución normal. Las colas pesadas en las series financieras son comunes pero indeseables debido al riesgo adicional que introducen. Si la distribución de la serie de un rendimiento es normal, la probabilidad de pérdida en una inversión es pequeña. Sin embargo, en el mundo real, como es el caso de los activos de este estudio y el portafolio que los activos componen,

ocurren distribuciones no normales con exceso de curtosis. En general, los activos cuyas distribuciones con colas pesadas o leptocurtosis tienen una probabilidad más alta de valores atípicos (*outliers*) en la volatilidad. La medición de estos niveles inusuales de curtosis proporciona, por lo tanto, una forma para que los inversionistas mejoren la estimación del nivel de riesgo de los activos o de un portafolio. Una distribución leptocúrtica significa que el inversionista puede observar en el portafolio fluctuaciones arriba de tres o más desviaciones estándar a partir de la media que resultan en rendimientos que potencialmente son en extremo altos o bajos. La razón de las colas pesadas se encuentra en acontecimientos inesperados que afectan el desempeño que en circunstancias regulares podría esperarse fuera el normal en los activos y en el rendimiento del portafolio. Las colas pesadas tienen también un origen conductual por parte de los agentes económicos que recurren a procesos de inversión, debido principalmente a optimismo o pesimismo excesivo que producen grandes desplazamientos en la volatilidad de los activos en los mercados. En México, las condiciones del año 2018 (lapso de tiempo correspondiente a los datos usados en este estudio) que explican las colas pesadas en las series son: incertidumbre ante el nuevo proteccionismo formulado por el nuevo gobierno de Estados Unidos y por la potencial derrota electoral del Partido Revolucionario Institucional ante un candidato de oposición que, al menos en discurso, se oponía a las políticas de libre mercado del PRI y sus partidos aliados vigentes desde décadas atrás.

3.3.7 No se presenta el efecto de apalancamiento en la volatilidad del rendimiento

Black (1976) fue el primero en explicar lo que denominó efecto de apalancamiento, que consiste en que la volatilidad de las series financieras aumenta cuando los precios disminuyen y tiende a disminuir cuando los precios aumentan; i.e., existe una correlación negativa entre los precios de los activos y la volatilidad. Black explica de la siguiente manera este fenómeno: la disminución en el precio de los activos es igual a la disminución del valor de mercado de las acciones de una empresa. Aquí, el valor de mercado es el número de acciones multiplicado por el valor de mercado, que es también igual al precio. Entonces, el valor de mercado de

la deuda no cambia, pero sí la relación deuda/capital, lo que causa un aumento en el apalancamiento. Este significa que el aumento en el riesgo de la empresa se transfiere por completo a los accionistas debido a las limitadas demandas de acreedores. El patrimonio de una empresa tiene así más riesgo, lo que a su vez implica un aumento en el riesgo medido por la volatilidad de los precios de los activos (Bollerslev et al. 1994). Por otro lado, cuando los precios de los activos aumentan, el nivel de apalancamiento se reduce, lo que resulta en la disminución del riesgo. Este proceso obedece la siguiente relación de causa - efecto: el cambio en el precio del activo (rendimiento) cambiará la volatilidad futura (varianza). De acuerdo al Cuadro 3.2, el modelo SAARCH —enunciado específicamente para hacer una consideración del efecto de apalancamiento— no es uno de los modelos que obtienen el mejor desempeño de pronóstico de la volatilidad. Por lo tanto, se entiende que el fenómeno de apalancamiento no se presenta en la volatilidad de la serie de tiempo que representa al rendimiento del portafolio. Este hallazgo se fortalece si observamos que, como se ha mencionado en la sección anterior, el modelo NGARCH —que no incluye en su estructura la consideración de apalancamiento— es el de mejor desempeño en cuanto al pronóstico de la volatilidad. Por consiguiente, en el mejor modelo de predicción de la volatilidad del rendimiento del portafolio no se registra una correlación negativa con respecto a los cambios de volatilidad. Por lo tanto, en el caso de los tres activos mexicanos y el rendimiento del portafolio que se compone de ellos, el apalancamiento no es relevante. Es decir, los aumentos en los precios de los activos y, por consiguiente, en el rendimiento del portafolio constituido por los activos, no significó una reducción de la volatilidad. Se presume que en el periodo de observación de este estudio (básicamente el año 2018), no se cumplió la correlación negativa entre aumentos de precio en los activos y en el rendimiento del portafolio y la volatilidad futura de activos y rendimiento. Los aumentos en los rendimientos no disminuyen la volatilidad y las reducciones en los rendimientos no aumentan la volatilidad. En otras palabras, se niega la hipótesis del apalancamiento, por lo que no se rechaza la hipótesis de que los aumentos en los precios sí aumenten la volatilidad y que las reducciones en los precios disminuyan la volatilidad.

3.3.8 *La asimetría en la volatilidad del rendimiento no es relevante*

El Cuadro 3.2 también muestra que los modelos asimétricos GJR-ARCH y TGARCH no son los modelos que muestren el mejor desempeño en cuanto al pronóstico de la volatilidad. Por otro lado, el modelo identificado como el de mejor calidad, el NGARCH, sí es simétrico. De la misma manera, el modelo ARCH, que es simétrico, es el segundo en la lista de calidad del Cuadro 3.2. Estos puntos son equivalentes a decir que la propiedad de asimetría de los modelos de la familia ARCH contribuye menos que la de simetría al explicar la volatilidad en el rendimiento del portafolio, puesto que dos modelos simétricos son los que mejor describen el comportamiento de la volatilidad del rendimiento del portafolio. Como lo describen Boffelli & Urga (2016, p. 114), la simetría es la característica de la volatilidad consistente en que el impacto de las innovaciones, resultado de “noticias buenas o malas” —sin importar que se contabilicen como positivas o negativas en el modelo—, se introduce con un mismo factor. Al describir la volatilidad, la particularidad de simetría asigna toda la capacidad de explicación del comportamiento de la volatilidad al tamaño de la noticia, no al signo positivo (“buena noticia”) o negativo (“mala noticia”). La intuición detrás de este comportamiento de las series correspondientes a los tres activos y al rendimiento del portafolio se encuentra en que la constante presencia de incertidumbre desde principios de 2018 motiva a los inversionistas a actuar con sensibilidad frente a cualquier fluctuación de los precios en los mercados. La respuesta de los inversionistas no toma en consideración si las noticias tienen la forma aparente de noticia buena o mala. Los inversionistas sólo consideran la dimensión de una fluctuación grande en valor, independientemente de si ésta es positiva o negativa.

3.3.9 *Ajuste del modelo CAPM*

El modelo de valoración de activos financieros CAPM se ajustó de acuerdo a la forma de Bollerslev, Engle & Wooldridge (1988), el cual se representa con

$$r_{pt} - r_{ft} = \alpha_p + \beta_p(r_{mt} - r_{ft}) + \varepsilon_{pt} \quad (3.3)$$

donde r_{pt} es el rendimiento log del portafolio, r_{ft} es el rendimiento libre de riesgo, r_{mt} es el rendimiento del mercado y α_p y β_p son los factores resultantes de la regresión. Se usaron los precios de los Cetes (Certificados de la Tesorería de la Federación) como activo libre de riesgo (r_{ft}) y el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores para obtención del rendimiento del mercado r_{mt} . Los hallazgos confirman el comportamiento no lineal de la volatilidad; es decir, el rendimiento en exceso (o residual) $r_{pt} - r_{ft}$ muestra heterocedasticidad. Éste rendimiento en exceso es equivalente al rendimiento log del portafolio estudiado en secciones previas, por lo que es razonable equiparar la predicción de la volatilidad condicional del modelo CAPM con la de los modelos de la familia ARCH ya tratados en este Capítulo 3. En efecto, haciendo la consideración de las secciones 2.7 y 2.8, se encuentra la comparativa entre la calidad de pronóstico de la volatilidad del rendimiento del portafolio de los modelos ARCH contra la del modelo CAPM. Para ello, se presenta aquí el Cuadro 3.3, que contiene al estadística de cuasiverisimilitud de varianza (QLIKE) para la medida de volatilidad del modelo CAPM comparada con la del mejor y el peor de los modelos de la familia ARCH (NGARCH y TGARCH, respectivamente). Se observa que, tal y como se había presentado en la hipótesis de esta tesis, la capacidad de pronóstico de la volatilidad condicional del rendimiento del modelo CAPM es, por mucho, menor que la de cualquiera de los modelos ARCH estudiados. Realizando la prueba de Levene (1960) sobre los valores de varianza en el Cuadro 3.3 (i.e. los valores de desviación estándar indicados al cuadrado), es obvio que se presenta una mejora más allá del 95% de los modelos ARCH con respecto al estimado con el modelo CAPM.

Cuadro 3.3 – Estadística de cuasiverisimilitud de varianza (QLIKE) para la medida de volatilidad del modelo CAPM comparada con la del mejor y el peor de los modelos de la familia ARCH estudiados (NGARCH y TGARCH, respectivamente).

	<i>Media</i>	<i>Desviación Estándar</i>	<i>Min</i>	<i>Máx</i>
CAPM	139,511.3	92,096.7	8,019.0	299,518.7
NGARCH	14.3139	8.3622	0.0000	29.5834
TGARCH	34.9168	9.8572	9.4716	49.0900

Las razones por las que CAPM se queda muy por detrás de los modelos ARCH en cuanto al pronóstico de la volatilidad son, en primer lugar, que CAPM no incluye en su configuración la volatilidad condicional, que es una característica que, como se ha visto, se presenta en el residual de las series. En segundo lugar, el modelo CAPM no incluye en su formulación las peculiaridades que se presentan en la volatilidad condicional, que se encuentran contenidas en las estructuras ARCH y las cuales son, entre otras, (i) forma de respuesta a la nueva información, (ii) capacidad de respuesta a “buenas noticias” o “malas noticias”, (iii) sin apalancamiento, (iv) colas pesadas, (v) asimetría no relevante y (vi) persistencia de la volatilidad. Adicionalmente, el modelo CAPM enfrenta, desde el momento de su formulación, desventajas que se han evidenciado en la literatura. En particular, se ha criticado que el modelo CAPM abunda en supuestos poco realistas, los cuales desvirtúan su capacidad de pronóstico. Destaca especialmente el artículo de Markowitz (2005)⁸ que expone, primero, que CAPM es una “teoría elegante que llega, gracias a supuestos simplificadores, a conclusiones dramáticas acerca de aspectos prácticos”. Segundo, Markowitz critica la naturaleza poco realista de los supuestos: (i) los inversionistas buscan siempre la eficiencia media-varianza en los portafolios —equivalente a decir que los inversionistas deciden con el criterio de bajo riesgo y alto rendimiento, dependiendo de su nivel de apetito o aversión por el riesgo—; (ii)

⁸ Más recientemente, también Rossi (2016) hace una revisión detallada de los poco realistas que son los supuestos del modelo CAPM.

se ignoran impuestos, costos de transacción y otras condiciones que causan la falta de liquidez; y (iii) todos los inversionistas tienen la misma capacidad de predicción de los precios, los rendimientos y las volatilidades de los activos. En resumen, se encuentran dos aspectos que afectan la capacidad del modelo CAPM para predecir la volatilidad. Primero, la estructura formal del modelo no abarca las propiedades particulares de la volatilidad de las series financieras como las tratadas en este trabajo. Segundo, los supuestos con los que se establece el modelo son poco realistas.

3.4 Verificación de las hipótesis

En el escenario de este trabajo y de acuerdo a lo puntualizado en la sección 0 del 0, las hipótesis de este trabajo son (1) los modelos ARCH superan la capacidad del modelo CAPM en el pronóstico de la volatilidad condicional con al menos 95% de la confiabilidad; (2) a diferencia de los modelos tradicionales usados en la estimación de la volatilidad de los rendimientos de un portafolio, los modelos de la familia ARCH sí caracterizan la conducta de los inversionistas en los mercados mexicanos. La primera hipótesis se verifica con el resultado de la sección 3.3.9 – Ajuste del modelo CAPM, que es el modelo tradicional cuya capacidad de pronóstico se compara con la de los modelos ARCH. Se confirmó que la confiabilidad de estimación de la varianza de los modelos ARCH es mucho más alta que el 95%. Por otro lado, para comprobación de la segunda hipótesis se detalla la caracterización de las propiedades *conductuales* de los inversionistas en el mercado mexicano en las secciones 3.3.2 a 3.3.8 de este Capítulo 3. En particular, se ha especificado la conducta subjetiva de los inversionistas durante el periodo anual de enero 2018 – enero 2019 a través de las siguientes propiedades identificadas, enlistadas en orden de relevancia, de (i) comportamiento orientado a evitar el principio de *no recibir noticias es buena noticia*, que equivalente a decir que los inversionistas se preocupan si no escuchan noticias, (ii) contabilización de la relación entre riesgo y rendimiento: (aumento de la prima de riesgo conforme aumenta la volatilidad), (iii) presencia no significativa de apalancamiento y (iv) ausencia de asimetría.

Conclusiones

Se presentan en este apartado las conclusiones de la investigación. Se han comprobado con este trabajo la fortaleza y la flexibilidad de los modelos ARCH para describir el peculiar comportamiento de la varianza no homocedástica de series de tiempo, en especial las financieras. Se ha encontrado una amplia variedad de modelos ARCH que es adecuada para analizar una también vasta diversidad de formas en las que se presenta la varianza condicional de las series financieras. Para cada una de las formas de la varianza se presenta al menos un modelo que apropiadamente facilite su estudio. Cada modelo, por su parte, significa al menos un tipo de disposición con el que los agentes económicos invierten.

En este trabajo se han logrado los objetivos de la investigación. Se ha determinado la caracterización del rendimiento del portafolio usando los modelos ARCH. Se ha encontrado que éstos son por mucho mejores que los modelos CAPM para pronosticar la varianza condicional de la respectiva serie del rendimiento del portafolio. A su vez, en términos de su capacidad de pronóstico de la varianza condicional, los mejores modelos para describir el comportamiento de la varianza condicional son, en ese orden, los modelos NGARCH, ARCH, SAARCH, GARCH-M y GARCH; otros modelos de la familia considerados exhiben una calidad de pronóstico menor. Es conveniente aquí hacer la observación de que las propiedades de la volatilidad no son estáticas, sino que cambian con el tiempo, debido a escenarios que afectan el comportamiento de los inversionistas. En este contexto, es también pertinente hacer la aclaración de que será, en consecuencia, necesario ejecutar el procedimiento de revelación (Figura 4.1) cada vez que se desee definir la caracterización de la volatilidad en un periodo establecido: las series de tiempo cambian y, de ahí, también las estructuras de la varianza condicional de las propias series. Se ha logrado caracterizar la conducta de los inversionistas durante el periodo enero 2018 – enero 2019 con rasgos que son específicos sólo para este periodo. Los correspondientes a este periodo son: (i) inclinación al principio de *no recibir noticias es buena noticia*, contabilización de la relación entre

riesgo y rendimiento (aumento de la prima de riesgo conforme aumenta la volatilidad), ausencia de apalancamiento y ausencia de asimetría.

Los modelos NGARCH son los de mejor calidad para determinar la forma de la volatilidad del rendimiento del portafolio con los activos elegidos y en el periodo preciso para el ejercicio de caracterización. Los modelos NGARCH se distinguen por incluir el impacto de la falta de noticias respecto al comportamiento de los mercados. Este efecto se incluye en el modelo de Lanne & Saikkonen (2005),

$$h_t = c_0 + c_1(\varepsilon_{t-1} - k_1)^2 + c_2(\varepsilon_{t-1} - k_2)^2 + bh_{t-1}$$

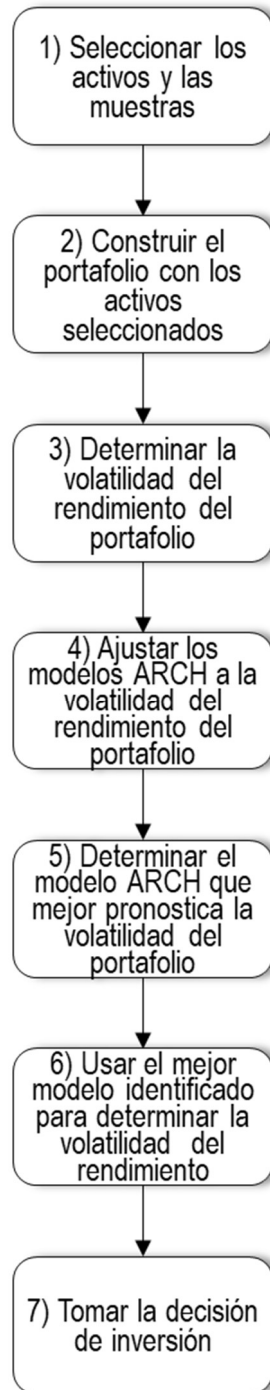
en donde los términos h_t representan la volatilidad en el momento t , los factores c_i y b resultan de la regresión y el corrimiento (*shift*) se representan con los términos k_i . En caso de $k_i = 0$, se obtiene el escenario de que no se mide el caso en que no se presentan noticias (o innovaciones) que impacten el comportamiento de las series el comportamiento de las series, lo cual puede ser percibido como buenas noticias en los mercados. Sin embargo, debido a que los inversionistas esperan siempre tener información, la falta de ésta se aprecia negativamente y se captura como mala noticia con respecto al comportamiento del activo en el mercado. ¿Por qué este modelo aplica entonces a los activos mexicanos? En el caso de México, este comportamiento se debe a las turbulencias de los mercados en el año enero de 2018 a enero de 2019, que es el lapso anual del que se recuperaron las muestras de los tres activos. Se concluye que, durante ese periodo, en consideración de estas turbulencias, los inversionistas tomaron decisiones evitando el principio de “falta de noticias son buenas noticias”: los inversionistas preferían protegerse de la volatilidad de los mercados, aun cuando la información no estuviera disponible.

Se han verificado las hipótesis establecidas al principio de la investigación. Los modelos ARCH son mejores que uno de los modelos más ampliamente usados, que son los modelos CAPM. Comparativamente, los modelos ARCH son superiores al CAPM debido a que éste no toma en cuenta las características específicas de la varianza en las series financieras (e.g. la heterocedasticidad). Por otro lado, se ha caracterizado la conducta de los inversionistas respecto a un portafolio construido

con activos financieros de mercados mexicanos, encontrándose que la conducta incluye el comportamiento ligado con el principio de “no recibir noticias es buena noticia” (*no news are good news*), contabilización de la relación riesgo-rendimiento, apalancamiento no significativa y simetría. Adicionalmente, también se observó persistencia en las series de tiempo correspondientes a los precios de los activos y al rendimiento del portafolio. La cualidad de persistencia se asoció a la forma de paseo aleatorio de las series de precios de los activos y del rendimiento del portafolio.

Como resultado de los hallazgos en este trabajo, el proceso de inversión se realiza en términos de la caracterización de la volatilidad a través de modelos ARCH. Se ha relacionado aquí la volatilidad del rendimiento con un conjunto de características del rendimiento del portafolio —que es propiamente el proceso de *caracterización*— determinado a través del uso de los modelos ARCH. Debido a que depende de las circunstancias políticas, sociales y económicas, la conducta subjetiva de los inversionistas cambia con el tiempo; sin embargo, este conjunto de características estadísticas es válido sólo para el periodo del cual se han tomados los datos; en este trabajo este periodo corresponde a enero 2018 a enero 2019. Esto implica que el ejercicio de caracterización no siempre llegará a los mismos resultados. Se prevé, por lo tanto, que la caracterización tenga resultados diferentes para periodos diferentes. Sin embargo, independientemente del periodo, se debería emplear el procedimiento para la caracterización desarrollado en este trabajo, que es el diagramado en la Figura 4.1, para alcanzar una decisión de inversión documentada. En el primer paso del proceso se seleccionan los activos. En el segundo paso se compone el portafolio con los activos elegidos; se aplica el método de Pojarliev & Polasek (2001), el cual asienta la aversión al riesgo del inversionista. En el tercer paso se determina la volatilidad y luego, en el cuarto paso, se ajustan los modelos ARCH a las características de ésta para, en el quinto paso, determinar cuál de los modelos es el que mejor pronostica la volatilidad del rendimiento. En el sexto paso se estima así la volatilidad, el cual es el criterio principal para la toma de decisión de inversión, ya que el riesgo es el criterio usado en condiciones de aversión al riesgo.

Figura 4.1 – Proceso de caracterización e inversión



Estudios complementarios. Existen oportunidades de extensión al estudio de los modelos ARCH con valores del mercado mexicano. En primer lugar, con series de tiempo financiera de alta frecuencia. En este caso, se aplicarían modelos ARCH para determinar en línea la forma de la volatilidad del portafolio y, de ahí, tomar una decisión de inversión más informada e inmediata. Para ello se debería usar un sistema de cómputo de alta velocidad (en la forma de simulador-modelador) que facilite la estimación del mejor modelo ARCH y la correspondiente decisión. En segundo lugar, tomando en cuenta que este trabajo fue un estudio univariante, éste se podría ampliar a un análisis multivariante. De esta manera, la toma de decisión de inversión permitiría seleccionar n portafolios construidos a partir de m activos de manera dinámica. Se podría entonces escoger el mejor de los n portafolios, i.e., aquel cuya volatilidad en cualquier momento sea mejor pronosticada por un conjunto de modelos ARCH. En tercer lugar, habría un reto importante en el desarrollo y aplicación de modelos ARCH para realizar la caracterización de la volatilidad de instrumentos derivados, cuyo comportamiento ofrece el desafío de no poder ser representados por una función de diferencia simple.

Referencias

- Amenc, N. & Le Sourd, V. (2003), *Portfolio theory and performance analysis*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK.
- Arnold, G. (2005), *Corporate financial management, 3th edition*, Financial Times - Prentice Hall. p. 354, New York.
- Baule, R. (2010), "Optimal portfolio selection for the small investor considering risk and transaction costs." *OR Spectrum*, 32(1), 61-76.
- Berra, A.K. & Higgins, M.L. (1993), "ARCH Models: Properties, Estimation, and Testing", *Journal of Economic Surveys*, 7, 305–62.
- Black, F. & Scholes, M. (1973), "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 (3): 637–654.
- Black, F., & Litterman, R. (1992), "Global portfolio optimization", *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43.
- Boffelli, S. & Urga, G. (2016), *Financial econometrics using Stata*, Stata Press, College Station, Texas.
- Bollerslev, T. (1986), "Generalized autoregressive Conditional Heterocedasticity", *Journal of Econometrics*, 31: 307-327.
- Bollerslev, T., Chou, R. & Kroner, K. (1992), "ARCH modeling in finance – A review of the theory and empirical evidence", *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- Bollerslev, T., Engle, R. F. & Wooldridge, J. M. (1988), "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances", *Journal of Political Economy*, 96(1):116-131.
- Bollerslev T. & Melvin M. (1994), "Bid-Ask Spreads and the Volatility in the Foreign Exchange Market: An Empirical Analysis", *Journal of International Economics*, 36: 355-372.

- Bollerslev, T., Russell, J. R. & Watson, M. W., eds., (2010), *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle*, Oxford University, Oxford, UK.
- Casas Monsegny, M. & Cepeda Cuervo, E. (2008), “Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: aplicaciones a series financieras”, *Cuadernos de Economía*, v. XXVII, n. 48, 287-319, Bogotá.
- Chou R. Y. (1988), “Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH”, *Journal of Applied Econometrics*, 3: 279-294.
- Chu, J., Chan, S. Nadarajah, S. & Osterrieder. J. (2017), “GARCH Modelling of Cryptocurrencies”, *Journal of Risk and Financial Management*, 10(4), 17.
- Clarke, R., de Silva, H. & Thorley, S. (2002), “Portfolio Constraints and the Fundamental Law of Active Management”, *Financial Analysts Journal*, Vol. 58, No. 5, 48-66.
- Ellsberg, D. (1961), “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms”, *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643—669.
- Enders, W. (2015), *Applied econometric time series, 4th Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- Engle, R. F. (1982), “Autoregressive Conditional Heterocedasticity whit Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, 50(4), 987-1008.
- Engle, R.F. (1990), “Discussion: Stock volatility and the crash of '87”, *Review of Financial Studies*: 3:103-106.
- Engle, R. F. (1995), *ARCH Selected Readings (Advanced Texts in Econometrics)*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- Engle, R. F. (2002), “New frontiers for ARCH models”, *Journal of Applied Econometrics*, 17: 425—446.
- Engle, F. R. & Patton, A. J. (2001). “What a Good is a Volatility Model?”, *Quantitative Finance*, 1(2): 237-245.

- Fama, E. F. (1970), "Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work", *The Journal of Finance*, 25(2), 383-417.
- Fama, E. F. & French, K. R. (2004), "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence", *Journal of Economic Perspectives*, 18 (3): 25–46.
- Fan, J. & Yao, Q. (2015), *The elements of financial econometrics*, Science Press, Beijing, China.
- Fernholz, R. (2002), *Stochastic Portfolio Theory*, Springer, New York.
- Fisher, L. (1968), "Measuring Rates of Return", *Measuring the Investment Performance of Pension Funds*, Bank Administration Institute.
- Franses, P.H. (1998), *Time series models for business and economic forecasting*, p. 155, Cambridge University Press, New York.
- Gaivoronski, A. A. & Pflug, G. (2005), "Value-at-risk in portfolio optimization: properties and computational approach", *Journal of Risk*, 7(2), 1-31.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. & Runkle, D. E. (1993), "On the relation between the expected value and the volatility of nominal excess return on stocks", *Journal of Finance*, 48: 1779–1801.
- Gouriéroux, C. (1997), *ARCH Models and Financial Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Graham, B. & Dodd, D. (2006), *Security analysis, Sixth edition*, McGraw-Hill Education, New York.
- Grossman, S.J. & Stiglitz, J. (1980), "On the Impossibility of Informationally Efficient Markets", *American Economic Review*, pp. 393–408.
- Gujarati, D.N. & Porter, D.C (2010), *Econometría Quinta Edición*, p. 791ss, McGraw-Hill, México.
- Hamilton, J. D. (1994), *Times series analysis*, Princeton University Press, New York.

- Hyme, P. (2003), "La teoría de los mercados de capitales eficientes. Un examen crítico", *Cuadernos de Economía*, v. XXII, n. 39, 57-83.
- Jensen, M. C. (1968), "The performance of mutual funds in the period 1945–1964", *The Journal of finance*, 23(2), 389-416.
- Jorion, P. (2007), *Value at risk, 3rd Edition*, Mc-Graw-Hill, New York.
- Knight, F. K. (1921), *Risk, uncertainty and profit*, Houghton Mifflin Company, Boston, Massachusetts.
- Konno, H., Shirakawa, H. & Yamazaki, H. (1993), "A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model", *Annals of Operations Research*, 45(1), 205-220.
- Lanne, M. & Saikkonen, P. (2005), "Non-linear GARCH models for highly persistent volatility", *Econometrics Journal*, volume 8, pp. 251–276.
- Levene, H. (1960), "Robust tests for equality of variances": Ingram Olkin; Harold Hotelling; et al. (eds.), *Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling*, Stanford University Press, California, pp. 278–292.
- Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 14(1), 13-37.
- Lutkepohl, H. (1993), *Introduction to Multiple Time Series Analysis, 2nd edition*, Springer, New York.
- Markowitz, H. (1952), "Portfolio selection", *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959), "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", *Cowles Foundation*, Monograph No. 16, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Markowitz, H. M. (2005), "Market Efficiency: A Theoretical Distinction and So What?", *Financial Analysts Journal*, Sep/Oct2005, Vol. 61 Issue 5, p17-30.

- McLeod, A. I. & Li, W. K. (1983), "Diagnostic checking ARMA time series models using squared-residual autocorrelations", *Journal of Time Series Analysis*, 4: 269–273.
- Miller, M. H. & Modigliani, F. (1961), "Dividend Policy, Growth, and the Valuation of Shares", *The Journal of Business*, Vol. 34, No. 4, 411-433.
- Monsalve, A. & Harmath, P. (2015), *Introducción al análisis de series de tiempo con aplicaciones a la econometría y finanzas*, Ediciones IVIC, Venezuela.
- Nelson, B. D. (1991), "Conditional Heterocedasticity in Asset Returns: A New Approach", *Econometrica*, 59(2): 347-370.
- Ortiz Ramírez, A., Sánchez Daza, A. & Venegas Martínez, F. (2011), "Un modelo GARCH de valuación de derivados: una aplicación a opciones europeas sobre el IPC", *Análisis Económico*, Núm. 62, vol. XXVI.
- Patton, A. J. (2011), "Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies", *Journal of Econometrics*, 160: 246-256.
- Philippatos, G. C. & Wilson, C. J. (1972), "Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios", *Applied Economics*, 4(3), 209-220.
- Pojarliev, M. & Polasek, W. (2001), "Applying Multivariate Time Series Forecasts for Active Portfolio Management", *Financial Markets and Portfolio Management*, 15(2), 201-211.
- Ramírez Carmona, N. & García Salgado, O. (2016), "Estado del arte de la Teoría de Portafolios: del análisis individual de acciones a la optimización multiobjetivo", *Economía coyuntural, Revista de temas de coyuntura y perspectivas*, vol.1, núm. 4., pp. 101- 144.
- Rockafellar, R. T. & Uryasev, S. (2002), "Conditional value-at-risk for general loss distributions", *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443-1471.
- Roll, R. & Ross, S. (1980), "An empirical investigation of the arbitrage pricing theory", *Journal of Finance*, 35 (5): 1073–1103.

- Rom, B. M., & Ferguson, K. (1993), "Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age", *Journal of Investing*, 2 (4) 27-33.
- Rossi, M. (2016), "The capital asset pricing model: a critical literature review", *Global Business and Economics Review (GBER)*, Vol. 18, No. 5.
- Roy, A. D. (1952), "Safety first and the holding of assets", *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 431-449.
- Samuelson, P.A. (1965), "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly", *Industrial Management Review*, v. 6, 41-49.
- Samuelson, P.A. (1967), "Indeterminacy of Development in Heterogeneous-Capital Models with Constant Saving Property", en *Essays on the Theory of Optimal Growth*, K. Shell, MIT Press.
- Samuelson, P. A. (1969), "Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming", *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 51, No. 3, 239-246.
- Samuelson, P.A. (1973), "Proof that Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly", *Bell Journal of Economics*, v. 4, 369-374.
- Samuelson, P.A. (1983), *Foundations of Economic Analysis*, Enlarged Edition, Harvard University Press.
- Sharpe, W. F. (1964), "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Sharpe, W. F. (1966), "Mutual fund performance", *Journal of business*, 119-138.
- Sharpe, W. F. (1967), "A linear programming algorithm for mutual fund portfolio selection", *Management Science*, 13(7), 499-510.
- Stavros, S. & Vassilios, B. (2017), "Dynamic Properties of the Bitcoin and the US Market", *SSRN*, consultado el 11-11-2018 en <https://goo.gl/fjRmmM>.

- Tanaka, H., Guo, P. & Türksen, I. B. (2000), "Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions", *Fuzzy sets and systems*, 111(3), 387-397.
- Tsay, R. S. (2010), *Analysis of Financial Time Series, Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.
- Xekalaki, E. & Degiannakis, S. (2004), "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH) Models: A Review", *Quality Technology and Quantitative Management*, Vol. 1, No. 2, pp. 271-324.
- Xekalaki, E. & Degiannakis, S. (2010), *ARCH Models for Financial Applications*, John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK.
- Xia, Y., Liu, B., Wang, S. & Lai, K. K. (2000), "A model for portfolio selection with order of expected returns", *Computers & Operations Research*, 27(5), 409-422.
- Zakoian, J. M. (1994), "Threshold heteroscedastic models", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18: 931–955.