UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE IDEALES 2-ABSORBENTES Y DÉBILMENTE 2-ABSORBENTES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

MARYDOL SOTO SANTARRIAGA

DIRECTOR DE TESIS:
DRA. BERTHA MARÍA TOMÉ ARREOLA
2020

Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

1.Datos del alumno
Soto
Santarriaga
Marydol
5539986911
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
416063848
2. Datos del tutor
Dra.
Bertha María
Tomé
Arreola
3. Datos del sinodal 1
Dra.
Diana
Avella
Alaminos
4. Datos del sinodal 2
Dr.
Alejandro
Alvarado
García
5. Datos del sinodal 3
Dr.
Hugo Alberto
Rincón
Mejía
6. Datos del sinodal 4
M. en C.
Rodrigo
Domínguez
López
7.Datos del trabajo escrito.
Sobre ideales 2-absorbentes y débilmente 2-absorbentes
39 p.
2020

Agradecimientos

Gracias a Dios por todas las bendiciones que me permitieron llegar a este momento en mi vida. Sin ti, no hubiera podido realizar este trabajo con éxito. Todo lo hago por ti.

A mis padres, sin su apoyo no hubiera podido estudiar en la UNAM. Nunca dudaron de mi capacidad y por eso tengo la confianza necesaria para perseguir mis sueños. Por su amor me he convertido en la persona que soy ahora.

A mi hermano, mi mejor amigo. Tu apoyo al mudarme a México y tu amistad que me acompaña siempre me da fortaleza y me inspira para ser una mejor persona. Con tu guía puedo aspirar siempre a algo mejor.

A la Doctora Bertha, gracias por haberme aceptado como su alumna. Su paciente y sabía guía, al igual que su ejemplo como profesora y asesora de tesis me motiva a seguir trabajando y así poder algún día ser una matemática como usted.

Tabla de Contenidos

Introducción

Sea R un anillo conmutativo con elemento unitario $1 \neq 0$. Un ideal propio P de R es primo si para cualesquier $a, b \in R$, $ab \in P$ implica $a \in P$ o $b \in P$. La noción de ideal primo es central en algunas ramas de las matemáticas, como en el Álgebra Conmutativa y en el estudio de los anillos de Dedekind.

Históricamente, el matemático Ernst Kummer (1810-1893) se percató de que ciertos anillos de enteros de campos numéricos (esto es, extensiones finitas y por lo tanto algebraicas de $\mathbb{Q}$) no eran anillos de ideales principales. Esto era inconveniente puesto que una ventaja de los anillos de ideales principales es la descomposición única en factores primos. Para evitar parcialmente este inconveniente, él y Richard Dedekind (1831-1916) introdujeron la noción de ideal e ideal primo. Luego, Dedekind estudió los anillos que llevan su nombre en los cuales la descomposición única en factores primos se logra generalizar en una única descomposición en ideales primos.

Varias generalizaciones del concepto de ideal primo han sido estudiadas. Una de ellas es la de ideal débilmente primo, a saber, un ideal propio I de R es débilmente primo si para cualesquier $a, b \in R$ con $0 \neq ab \in I$ se tiene que $a \in I$ o $b \in I$. La otra es la de ideal 2-absorbente, a saber, un ideal propio I de R es 2-absorbente si para cualesquier $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I$ se tiene $ab \in I$ o $ac \in I$ o $bc \in I$. Finalmente, está la noción de ideal débilmente 2-absorbente que puede considerarse como una generalización tanto del concepto de ideal débilmente primo como del concepto de ideal 2-absorbente ya que un ideal propio I de R es débilmente 2-absorbente si para cualesquier $a, b, c \in R$ con $0 \neq abc \in I$ se tiene que $ab \in I$ o $ac \in I$ o $bc \in I$.

Esta tesis está basada en los artículos "On 2-absorbing ideals of commutative rings" de Ayman Badawi y "On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings" de Ayman Badawi y Ahmad Y. Darani. Aún cuando la tesis pretende ser autocontenida, se requiere que el lector esté familiarizado con los resultados básicos de teoría de anillos. La tesis está dividida en 3 capítulos. En el primero se incluyen resultados básicos del álgebra conmutativa que se encuentran en [1] y [2] , así como la construcción del anillo conocido como "la idealización de un R-módulo en R", que se encuentra en [3] y [6] . El segundo capítulo incluye algunos resultados básicos sobre los ideales 2-absorbentes, sobre todo aquellos que se utilizan en el capítulo 3. Se prueba que un ideal propio no nulo I de R es 2-absorbente si siempre que $I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ para algunos ideales I_1, I_2, I_3 de R entonces $I_1 I_2 \subseteq I$ o $I_1 I_3 \subseteq I$ o $I_2 I_3 \subseteq I$. En el tercer capítulo se prueban resultados básicos de los ideales débilmente 2-absorbentes para terminar con la caracterización de los anillos R con la propiedad de que todos sus ideales propios son débilmente 2-absorbentes.

Capítulo 1. Resultados básicos de la teoría de anillos

En este capítulo se presentarán algunos resultados y temas básicos del álgebra conmutativa como son algunas propiedades básicas de ideales, los anillos de cocientes y la idealización de un R-módulo.

1.1 Algunas propiedades básicas de los ideales

En esta sección incluimos algunos resultados básicos que nos serán de utilidad más adelante. Estos resultados se encuentran en [1] y [2]. A lo largo de toda la tesis R denotará un anillo conmutativo con elemento unitario $1 \neq 0$.

Definición.1.1.1 Se dice que un ideal propio P de R es primo si $xy \in P$ implica $x \in P$ o $y \in P$. Un ideal propio M de R es máximo si no existe un ideal I de R tal que $M \subsetneq I \subsetneq R$.

Sabemos que:

- P es primo $\Longleftrightarrow R/P$ es un dominio entero
- M es máximo $\Longleftrightarrow R/M$ es un campo

Luego un ideal máximo es primo, aunque el recíproco no necesariamente se cumple (por ejemplo, (x) es un ideal primo de $\mathbb{Z}[x]$ que no es máximo).

Teorema.1.1.1 Si I es un ideal propio de R, entonces existe un ideal máximo M de R tal que $I \subseteq M$.

Demostración. Aplicaremos el Lema de Zorn a la familia de ideales propios de R que contienen I se prueba que dicho conjunto tiene elemento máximo. Luego dicho elemento máximo será el ideal máximo que contiene I.

Es claro que $A = \{J \text{ ideal de } R : I \subset J \subsetneq R\}$ es no vacío pues contiene I. Además está parcialmente ordenado por la inclusión de conjuntos. Falta ver que para toda cadena en A existe una cota superior en A. Sea $C = \{J_i\}_I$ una cadena en A y sea $M = \cup J_i$. Entonces como $1 \notin J_i$ para todo $J_i \in C$ tenemos que $M \subsetneq R$. Es claro que M contiene a I pues $I \subset J_i$ para todo $J_i \in C$.

M es ideal pues $0 \in J_i$ para todo $J_i \in C$. Además dados $a, b \in M$ tenemos que $a \in J_i$, $b \in J_k$ para algunos J_i y J_k en C. Como C es una cadena, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $J_i \subset J_k$, con lo cual sabemos que $a, b \in J_k$. Luego, por ser J_k un ideal podemos afirmar que $a - b \in J_k \subset M$. Por último, dados $x \in R$ y $a \in M$ tenemos que $a \in J_i$ para algún $J_i \in C$ y por ser J_i un ideal tenemos que $xa \in J_i \subset M$. Así que M es en efecto un ideal. Luego, por el Lema de Zorn, tenemos que existe un ideal máximo en A. $\square$

Dado que todo ideal máximo es un ideal primo, el teorema anterior asegura que si R es un anillo no trivial entonces R tiene ideales primos.

Teorema.1.1.2 Sea R un anillo. Entonces R tiene un ideal primo mínimo.

Demostración. Sea $A = \{P$ ideal de $R : P$ es primo$\}$. Por el teorema anterior A es no vacío. Además A está parcialmente ordenado por la inclusión. Sea C una cadena descendente en A y sea $Q = \cap P_i$, donde P_i es un ideal en C. Sabemos que Q es ideal de R. Veamos que Q es un ideal primo. Sean $a, b \in R$ tales que $a, b \notin Q$. Entonces $a \notin P_i$ para algún $P_i \in C$ y $b \notin P_j$ para algún $P_j \in C$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $P_j \subset P_i$. Entonces $a, b \notin P_j$ y como P_j es primo, se tiene que $ab \notin P_j$. Luego $ab \notin Q$ y por lo tanto Q es un ideal primo. Por el dual del lema de Zorn, A tiene un elemento mínimo. $\square$

Definición.1.1.2 Se dice que R es un anillo local si tiene exactamente un ideal máximo M. Denotamos al anillo local R con ideal máximo M como (R, M).

Proposición.1.1.1

1. Si R es un anillo local cuyo único ideal máximo es M, entonces $a \in R$ es unidad $\Leftrightarrow a \notin M$.
2. Si M es un ideal propio de R tal que todo elemento de $R - M$ es unidad, entonces R es un anillo local con ideal máximo M.

Demostración.

(1) Sean $a \in R$ tal que a no es unidad y J el ideal generado por a. Entonces J es un ideal propio de R y por el Teorema 1.1.1, existe un ideal máximo N de R tal que $J \subseteq N$. Como (R, M) es un anillo local entonces $N = M$ y por lo tanto $a \in M$.

Como M es un ideal propio, es claro que dado $b \in M$, b no puede ser unidad.

(2) Veamos primero que M es un ideal máximo de R. Supongamos que existe un ideal I de R tal que $M \subsetneq I \subseteq R$. Existe entonces $a \in I \setminus M$ y por hipótesis a es unidad. Entonces $R = (a) \subseteq I \subseteq R$, es decir, $R = I$. Por lo tanto, M es ideal máximo de R.

Ahora veamos que M es el único ideal máximo de R. Sea N un ideal máximo de R. Como N es un ideal propio, ningún elemento de N es unidad. Luego, si $x \in N$ entonces x no es unidad y por la hipótesis, $x \in M$. Así que $N \subset M$ y por lo tanto $N = M$.

Concluimos que (R, M) es un anillo local. $\square$

Definición.1.1.3 Sea R un anillo. Tenemos las siguientes definiciones:

- El nilradical de R se define como, $Nil(R) = \cap P$, donde P es el conjunto de los ideales primos de R.
- El radical de Jacobson de R se define como, $Jac(R) = \cap M$, donde M es el conjunto de los ideales máximos de R.

Veamos algunos resultados básicos de dichos conceptos.

Teorema.1.1.3. Sean R un anillo y $a \in R$. Entonces $a \in Jac(R) \Leftrightarrow 1 - ab$ es unidad de R para todo $b \in R$.

Demostración. Procedamos por contradicción.

[$\Rightarrow$] Sea $a \in Jac(R)$ y supongamos que existe $b \in R$ tal que $1 - ab$ no es unidad de R. Sea $I = (1 - ab)$, entonces I es un ideal propio de R. Existe entonces un ideal máximo M de R tal que $I \subseteq M$, por lo que $1 - ab \in M$. Como $a \in Jac(R)$ entonces $a \in M$. Tenemos entonces que $1 - ab + ab = 1 \in M$, lo cual es una contradicción pues M es un ideal propio de R. Por lo tanto, $1 - ab$ es unidad de R para todo $b \in R$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $1 - ab$ es unidad para todo $b \in R$ y que $a \notin Jac(R)$. Entonces $a \notin M$ para algún ideal máximo M de R. Sea $I = (a)$, entonces $M \subsetneq M + I$. Pero M es máximo, entonces $M + I = R$. Luego, existen $b \in R$ y $m \in M$ tales que $1 = m + ab$. Así obtenemos que $1 - ab = m \in M$ y como M es un ideal propio de R entonces m no es unidad de R, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a \in Jac(R)$. $\square$

Definición.1.1.4 Se dice que $a \in R$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^n = 0$.

Teorema.1.1.4 Sean R un anillo y $a \in R$. Entonces $a \in Nil(R) \Leftrightarrow a$ es nilpotente.

Demostración.

[$\Leftarrow$] Supongamos que a es nilpotente. Entonces existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^n = 0$. Como $0 \in P$ para todo ideal primo P, entonces $a^n \in P$, lo cual implica que $a \in P$ para todo ideal primo P. Así que $a \in Nil(R)$.

[$\Rightarrow$] Sea $a \in Nil\,(R)$ y supongamos que a no es nilpotente, es decir, $a^n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $S = \{I \text{ ideal de } R : \forall n \in \mathbb{Z}^+, a^n \notin I\}$. S no es vacío pues el ideal cero pertenece a S. Además S está ordenado parcialmente por la inclusión y toda cadena en S tiene una cota superior en S. Si $\{I_j\}_J$ es una cadena en S, $\cup (I_j)$ es un ideal que no contiene ninguna potencia de a. Por el Lema de Zorn existe P un elemento máximo de S.

Veamos que P es un ideal primo. Sean $x, y \notin P$, entonces $P \subsetneq P + (x)$ y $P \subsetneq P + (y)$. Como P es elemento máximo de S entonces $P + (x)$ y $P + (y)$ no pertenecen a S. Así que $a^m \in P + (x)$ y $a^n \in P + (y)$ para algunos $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Luego, $a^{m+n} = a^m a^n \in (P + (x))(P + (y)) \subseteq PP + Py + Px + xy \subseteq P + (xy)$, por lo que $P + (xy) \notin S$. Entonces $xy \notin P$ y P es primo.

Se tiene entonces un ideal primo P tal que $a \notin P$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto a es nilpotente. $\square$

Recordemos que si I y J son ideales de R, su producto se define como

$$IJ := \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i : x_i \in I, y_i \in J, 1 \leq i \leq n\}.$$

El producto puede definirse para un número finito de ideales recursivamente.

Lema.1.1.1 Sean R un anillo y P un ideal propio de R. Entonces P es primo si y sólo si para cualesquier ideales I, J de R tales que $IJ \subset P$ se tiene que $I \subset P$ o $J \subset P$.

Demostración.

[$\Rightarrow$] Sean I, J ideales de R. Supongamos que $I \nsubseteq P$ y $J \nsubseteq P$. Entonces existen $a \in I - P$ y $b \in J - P$. Como P es primo, se tiene que $ab \notin P$. Por lo tanto $IJ \nsubseteq P$.

[$\Leftarrow$] Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in P$. Entonces $aRbR \subset P$ y por la hipótesis, $aR \subset P$ o $bR \subset P$. Luego $a \in P$ o $b \in P$. $\square$

Proposición.1.1.2. Sean $I_1, \ldots, I_n$ y P ideales de R con P primo tales que $\prod_{j=1}^{n} I_j \subset P$. Entonces $I_j \subseteq P$ para algún $1 \leq j \leq n$.

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que $I_j \nsubseteq P$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Si $I_1, I_2 \nsubseteq P$, entonces $I_1 I_2 \nsubseteq P$. Si $I_1, I_2, \cdots, I_k \nsubseteq P$, como $I_{k+1} \nsubseteq P$ entonces $I_1 I_2 \cdots I_{k+1} \nsubseteq P$. Por inducción tenemos que $I_1 I_2 \cdots I_n \nsubseteq P$, lo cual contradice lo supuesto. Así que $I_j \subseteq P$ para algún $1 \leq j \leq n$. $\square$

Corolario.1.1.1 Sean $I_1, \ldots, I_n$ y P ideales de R con P primo tales que $\cap_{j=1}^{n} I_j \subset P$. Entonces $I_j \subseteq P$ para algún $1 \leq j \leq n$.

Demostración. Se sigue de la proposición anterior ya que $\prod_{j=1}^{n} I_j \subseteq \cap_{j=1}^{n} I_j$. $\square$

Teorema.1.1.5 Sean $P_1, \ldots, P_n$ ideales primos y sea I un ideal de R tal que $I \subseteq \cup_{j=1}^{n} P_j$. Entonces $I \subseteq P_j$ para algún j con $1 \leq j \leq n$.

Demostración. Probaremos la forma equivalente del enunciado por inducción sobre n. Es decir,

$$I \nsubseteq P_j \, (1 \leq j \leq n) \Rightarrow I \nsubseteq \cup_{j=1}^{n} P_j$$

Para el caso $n = 1$ es claro que se cumple.

Supongamos por hipótesis de inducción que se cumple para $n-1$ y que $I \nsubseteq P_j$ para $1 \leq j \leq n$.

Por hipótesis de inducción tenemos que $I \nsubseteq \cup_{j=1, j \neq i}^{n} P_j$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Es decir, existen $x_j \in I$ tales que $x_j \notin \cup_{i=1, j\neq i}^{n} P_i$. Por lo tanto $x_j \notin P_1, \cdots, x_j \notin P_{j-1}, x_j \notin P_{j+1}, \cdots, x_j \notin P_n$ para algún $j \in \{1, \cdots, n\}$.

Caso 1. $x_j \notin P_j$ para algún $1 \leq j \leq n$.

Entonces $x_j \notin \cup_{j=1}^{n} P_j$ y la afirmación queda demostrada.

Caso 2. $x_j \in P_j$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Consideremos

$$\begin{aligned} y &= \sum_{j=1}^{n} x_1 x_2 \cdots x_{j-1} x_{j+1} \cdots x_n \\ &= x_2 x_3 \cdots x_n + \cdots + x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \end{aligned}$$

Veamos que $y \notin \cup_{j=1}^{n} P_j$. Si $y \in P_1$, los sumandos

$x_1 x_3 \cdots x_n, \cdots, x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \in P_1$. Así, $x_2 x_3 \cdots x_n \in P_1$ pues $x_1 \in P_1$. Pero $x_2 \notin P_1$, $x_3 \notin P_1, \cdots$, $x_n \notin P_1$, entonces $x_2 \cdots x_n \notin P_1$. Esta es una contradicción que muestra que $y \notin P_1$. Análogamente, $y \notin P_j$ para toda $j \in \{1, \cdots, n\}$. Concluimos que $y \notin \cup_{j=1}^{n} P_j$, lo cual implica que $I \nsubseteq \cup_{j=1}^{n} P_j$. $\square$

Definición.1.1.5 Sean I, J dos ideales de R. Se dice que I y J son coprimos si $I + J = R$.

Lema.1.1.2 Sean R un anillo e I, J ideales coprimos de R. Entonces I^2 y J^2 al igual que I^3 y J^3 son coprimos.

Demostración. Veamos primero que $I^2+J^2 = R$. Como I y J son coprimos entonces existen $x \in I$, $y \in J$ tales que $1 = x + y$. Además $1 = 1^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Basta ver que $xy \in I^2 + J^2$ para acabar la prueba. Como $xy = xy\,(1) = xy\,(x+y) = x^2y + xy^2$ y $x^2 \in I^2$, $y^2 \in J^2$ entonces $x^2y \in I^2$ y $xy^2 \in J^2$. Por lo tanto $xy \in I^2 + J^2$. Así tenemos que $1 = x^2 + 2xy + y^2 \in I^2 + J^2$.

De la misma forma tenemos que $1 = 1^3 = (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$. Basta ver que x^2y, $xy^2 \in I^3 + J^3$. Observemos que $x^2y = x^2y\,(1) = x^2y\,(x+y) = x^3y + x^2y^2$ y $xy^2 = xy^2\,(1) = xy^2\,(x+y) = x^2y^2 + xy^3$. Claramente $x^3y \in I^3$, $xy^3 \in J^3$ y por un razonamiento similar al del párrafo anterior, $x^2y^2 = x^2y^2\,(x+y) = x^3y^2+x^2y^3 \in I^3+J^3$. Por lo tanto x^2y, $xy^2 \in I^3 + J^3$. Concluímos entonces que $1 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \in I^3 + J^3$. $\square$

Teorema.1.1.6 Sea R un anillo y sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales de R.

Definimos un homomorfismo de anillos

$$\phi : R \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} (R/I_j)\,,\ \text{por}$$

$$x \longmapsto (x + I_1, \ldots, x + I_n)\,.$$

Se tiene entonces que:

1. Si I_i, I_j son coprimos para todo $i \neq j$, entonces $\prod\limits_{j=1}^{n} I_j = \bigcap\limits_{j=1}^{n} I_j$.

2. $Ker\phi = \bigcap\limits_{j=1}^{n} I_j$, por lo que ϕ es inyectiva si y sólo si $\cap_{j=1}^{n} I_j = (0)$.

3. ϕ es suprayectiva si y sólo si I_i, I_j son coprimos para todo $i \neq j$.

   Demostración.

   (1) Procedamos por inducción sobre n. Claramente $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$. Si I_1 e I_2 son coprimos, entonces existen $x_1 \in I_1$ y $x_2 \in I_2$ tales que $1 = x_1 + x_2$. Sea $y \in I_1 \cap I_2$. Entonces $y = y\,(1) = yx_1 + yx_2 \in I_1 I_2$, por lo que $I_1 I_2 = I_1 \cap I_2$.

   Supongamos que $\prod\limits_{j=1}^{n-1} I_j = \bigcap\limits_{j=1}^{n-1} I_j = J$.

   Veamos que se cumple lo anterior para n. Como I_i, I_n son coprimos para todo $i \leq n-1$ entonces existen $x_i \in I_i$, $y_{n_i} \in I_n$ tales que $x_i + y_{n_i} = 1$, por lo que $\prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i = \prod\limits_{i=1}^{n-1} (1 - y_{n_i}) \equiv 1$ módulo I_n. Entonces $J + I_n = R$, es decir, I_n y J son coprimos. Por lo tanto, $\prod\limits_{j=1}^{n} I_j = JI_n = J \cap I_n = \bigcap\limits_{j=1}^{n} I_j$.

(2) Sabemos que $x \in ker\phi \Leftrightarrow x + I_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, lo cual pasa si y sólo si $x \in I_j$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} I_j \Leftrightarrow x \in ker\phi$.

(3) [$\Rightarrow$] Sean I_i, I_j tales que $i \neq j$.

Como $y = (0 + I_1, \ldots, 1 + I_i, \ldots, 0 + I_n) \in \prod\limits_{j=1}^{n} (R/I_j)$ y ϕ es suprayectiva existe entonces $x \in R$ tal que $\phi(x) = y$, es decir, $x + I_j = 0 + I_j$ para todo $j \neq i$ y $x + I_i = 1 + I_i$, lo cual sucede si y sólo si $x \in I_j$ para cada $j \neq i$ y $1 - x \in I_i$. Entonces $1 = (1 - x) + x \in I_i + I_j$, demostrando que I_i, I_j son coprimos para todo $i \neq j$.

[$\Leftarrow$] Veamos primero que existe $x_1 \in R$ tal que $\phi(x_1) = (1 + I_1, \ldots, 0 + I_n)$. Como I_i, I_j son coprimos para todo $i \neq j$, entonces en particular I_1, I_i son coprimos para todo $i > 1$. Luego existen $u_i \in I_1, v_i \in I_i$ tales que $u_i + v_i = 1$ y por lo tanto $\prod\limits_{i=2}^{n} v_i = \prod\limits_{i=2}^{n} (1 - u_i) \equiv 1$ módulo I_1. Sea $x_1 = \prod\limits_{i=2}^{n} v_i$. Por (1), tenemos entonces que $x_1 \in \bigcap\limits_{i=2}^{n} I_i$, lo cual implica que $x_1 \equiv 0$ módulo I_i para todo $i > 1$. Así que $\phi(x_1) = (1 + I_1, 0 + I_2 \ldots, 0 + I_n)$.

Sea $e_i = (0 + I_1, \ldots, 1 + I_i, \ldots, 0 + I_n)$. Generalizando lo anterior tenemos que existe $x_i \in R$ tal que $\phi(x_i) = e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Veamos ahora que dado $y = (y_1 + I_1, \ldots, y_n + I_n) \in \prod\limits_{j=1}^{n} (R/I_j)$ existe $x \in R$ tal que $\phi(x) = y$. Sea $x = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, donde $\phi(x_j) = e_j$. Entonces $\phi(x) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \phi(x_j y_j) = \sum_{j=1}^{n} \phi(x_j)\phi(y_j) = \sum_{j=1}^{n} e_j \phi(y_j) = y$. Por lo tanto ϕ es suprayectiva. $\square$

Definición.1.1.6 Sea I un ideal de un anillo R. Al conjunto de todos los $x \in R$ tales que $x^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ se le llama el radical de I y se denota como $Rad(I)$.

Observemos que si $\pi : R \longrightarrow R/I$ es el homomorfismo canónico entonces $Rad(I)/I = Nil(R/I)$. En efecto, $x + I \in Nil(R/I) \iff$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$ $(x + I)^n = x^n + I = 0 + I \Leftrightarrow$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$, $x^n \in I \Leftrightarrow x + I \in Rad(I)/I$.

Proposición.1.1.3 El radical de un ideal I es la intersección de todos los ideales primos que contienen I.

Demostración. Por la observación anterior tenemos que

$$Rad\,(I) = \pi^{-1}\,(Nil\,(R/I)) = \pi^{-1}(\cap\{\bar{P} : \bar{P} \text{ es ideal primo de } R/I\})$$

Por el Teorema de la correspondencia $\bar{P} = P/I$, donde P es un ideal primo de R que contiene I. Por lo tanto $Rad\,(I) = \cap\{P : P$ es ideal primo de R, $I \subset P\}$. $\square$

1.2 Anillos de cocientes

En esta sección se dará la construcción del anillo de cocientes $S^{-1}R$ a partir de un subconjunto S multiplicativamente cerrado de un anillo R, la cual se encuentra en [1]. También se verá cómo son los ideales de dicho anillo. Todo esto será de utilidad para la demostración de algunos teoremas en el siguiente capítulo.

Definición.1.2.1 Sea R un anillo. Decimos que un subconjunto S de R es multiplicativamente cerrado si $1 \in S$ y S es cerrado bajo el producto.

Definición.1.2.2 Sean R un anillo y S un subconjunto multiplicativamente cerrado de R. Definimos una relación $\sim$ en $R \times S$ de la siguiente forma:

$$(x, s) \sim (y, t) \Longleftrightarrow (xt - ys)\,u = 0 \text{ para algún } u \in S.$$

Lema.1.2.1 $\sim$ es una relación de equivalencia.

Demostración. Claramente $\sim$ es reflexiva y simétrica. Veamos que además es transitiva.

Sean $(x, s), (y, t), (z, u) \in R \times S$ tales que $(x, s) \sim (y, t)$ y $(y, t) \sim (z, u)$. Entonces existen $v, w \in S$ que cumplen $(xt - ys)\,v = (yu - zt)\,w = 0$. Multiplicando la primera igualdad por uw y la segunda por sv obtenemos al sumarlas que $(xu - zs)\,tvw = 0$. Como S es cerrado bajo el producto entonces $tvw \in S$. Luego $(x, s) \sim (z, u)$.

Así que $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Notación x/s denota la clase de equivalencia de (x, s) y $S^{-1}R$ denota el conjunto de todas las clases de equivalencia.

Definimos las siguientes operaciones en $S^{-1}R$:

1. $(x/s) + (y/t) = (xt + ys)\,/st$
2. $(x/s)\,(y/t) = (xy/st)$

Lema.1.2.2 Las operaciones anteriormente definidas no dependen de la elección de los representantes (x, s) y (y, t).

Demostración. Sean $(x_1, s_1), (x_2, s_2) \in R \times S$ y $(y_1, t_1), (y_2, t_2) \in R \times S$ tales que $(x_1, s_1) \sim (x_2, s_2)$ y $(y_1, t_1) \sim (y_2, t_2)$. Entonces existen $u, v \in S$ tales que $(x_1 s_2 - x_2 s_1) u = 0$ y $(y_1 t_2 - y_2 t_1) v = 0$. Multiplicando la primera igualdad por $t_1 t_2 v$, la segunda por $s_1 s_2 u$ y sumando obtenemos:

$$uv \left(t_2 s_2 \left(x_1 t_1 + y_1 s_1\right) - t_1 s_1 \left(x_2 t_2 + y_2 s_2\right)\right) = 0.$$

De lo anterior se sigue que $(x_1 t_1 + y_1 s_1, s_1 t_1) \sim (x_2 t_2 + y_2 s_2, s_2 t_2)$, lo que prueba que la suma en $S^{-1}R$ no depende de la elección de representantes.

Veamos ahora que el producto tampoco depende de los representantes de las clases. Multiplicando la primera igualdad por $t_2 y_1 v$, la segunda igualdad por $x_2 s_1 u$ y sumando obtenemos:

$$\left[\left(x_1 y_1\right)\left(s_2 t_2\right) - \left(x_2 y_2\right)\left(s_1 t_1\right)\right] uv = 0.$$

Concluimos que $(x_1 y_1, s_1 t_1) \sim (x_2 y_2, s_2 t_2)$, lo que completa la prueba. $\square$

Teorema.1.2.1 $S^{-1}R$ es un anillo conmutativo con uno bajo las operaciones anteriores.

Demostración. Es claro que ambas definiciones son operaciones. Como R es un anillo conmutativo y S es cerrado multiplicativamente entonces ambas operaciones son asociativas y conmutativas. El neutro aditivo es $\frac{0}{1}$, el inverso aditivo de $\frac{a}{s}$ es $\frac{-a}{s}$ y el neutro multiplicativo es $\frac{1}{1}$. Falta ver que el producto distribuye a la suma. Sean $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}, \frac{c}{u} \in S^{-1}R$. Entonces:

$$\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right)\left(\frac{c}{u}\right) = \left(\frac{at+bs}{st}\right)\left(\frac{c}{u}\right) = \frac{act+bcs}{stu} = \frac{(act+bcs)u}{(stu)u} = \frac{actu+bcsu}{(su)(tu)} = \frac{ac}{su} + \frac{bc}{tu}.$$

Por lo tanto, $S^{-1}R$ es un anillo conmutativo con uno. $\square$

Definición.1.2.3 El anillo $S^{-1}R$ se llama el anillo de cocientes de R con respecto a S.

Observemos que se tiene un homomorfismo de anillos $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ definido por $f(x) = \frac{x}{1}$. En general, f no es inyectivo.

Proposición.1.2.1 Sea $S^{-1}R$ un anillo de cocientes. Entonces los siguientes enunciados son válidos:

1. Si I es un ideal de R tal que $I \cap S$ es vacío, entonces $S^{-1}I$ es un ideal propio de $S^{-1}R$.

2. Si J es un ideal propio de $S^{-1}R$, entonces $J = S^{-1}I$, donde I es un ideal de R tal que $S \cap I$ es vacío.

   Demostración.

   (1) Si I es un ideal de R entonces es un R-módulo y por lo tanto $S^{-1}I = \left\{ \frac{a}{s} : a \in I, s \in S \right\}$ (ver [1, *pág*.44]). Veamos que es un ideal de $S^{-1}R$. Sean $\frac{a}{s_1}, \frac{b}{s_2} \in S^{-1}I$, entonces $\frac{a}{s_1} - \frac{b}{s_2} = \frac{as_2 - bs_1}{s_1 s_2} \in S^{-1}I$ pues S es cerrado multiplicativamente e I es un ideal de R. Como $0 \in I$, entonces para cualquier $s \in S$ tenemos que $\frac{0}{s} \in S^{-1}I$. Además, dados $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$ y $\frac{r}{s^{\star}} \in S^{-1}R$ tenemos que $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{r}{s^{\star}}\right) = \frac{ar}{ss^{\star}} \in S^{-1}I$. Así hemos demostrado que $S^{-1}I$ es en efecto un ideal de $S^{-1}R$. Finalmente, como $I \cap S$ es vacío, $S^{-1}I$ no contiene unidades de $S^{-1}R$. Luego $S^{-1}I$ es un ideal propio de $S^{-1}R$.

   (2) Sea $x \in J$ entonces $x = \frac{a}{s}$ con $a \in R, s \in S$ por definición de $S^{-1}R$. Como J es ideal de $S^{-1}R$ y $\frac{s}{1} \in S^{-1}R$ entonces $\left(\frac{s}{1}\right)\left(\frac{a}{s}\right) = \frac{a}{1} \in J$. Sea $I = \left\{ a : \frac{a}{1} \in J \right\}$. Veamos que I es un ideal de R. Sean $a, b \in I$, entonces $\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in J$ y como J es ideal $\frac{a-b}{1} = \frac{a}{1} - \frac{b}{1} \in J$. Luego $a - b \in I$ para todo $a, b \in I$. Además $\frac{0}{1} \in J$ pues es el neutro aditivo de $S^{-1}R$ y J es ideal. Por definición de I tenemos entonces que $0 \in I$. Sean $a \in I$ y $r \in R$, entonces $\frac{a}{1} \in J$ y $\frac{r}{1} \in S^{-1}R$. Por lo tanto $\frac{ar}{1} = \frac{a}{1}\frac{r}{1} \in J$ y así $ar \in I$, lo que prueba que I es un ideal de R. Además $J = S^{-1}I$ pues $\frac{a}{s} \in J$ si y sólo si $\frac{a}{1} \in J$ si y sólo si $a \in I$ si y sólo si $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$.

   Falta ver que $S \cap I$ es vacío. Supongamos que no lo es. Sea $a \in S \cap I$. Entonces por definición de I, $\frac{a}{1} \in J$ y por lo tanto $\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{a}{1}\right) = \frac{1}{1} \in J$, lo cual contradice que J sea un ideal propio. Por lo tanto $S \cap I$ es vacío. $\square$

Observemos que el ideal $I = \{a \in R : \frac{a}{1} \in J\}$ de la prueba de 2 es $f^{-1}(J)$, donde $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ es el homomorfismo de anillos dado por $f(x) = \frac{x}{1}$.

Proposición.1.2.2 Sea $S^{-1}R$ un anillo de cocientes. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si P es un ideal primo de R tal que $P \cap S$ es vacío, entonces $S^{-1}P$ es un ideal primo de $S^{-1}R$.

2. Si $Q = S^{-1}P$ es un ideal primo de $S^{-1}R$, entonces P es un ideal primo de R.

   Demostración.

   (1) Como $P \cap S$ es vacío, se tiene que $S^{-1}P$ es un ideal propio de $S^{-1}R$. Sean $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$ tales que $\frac{ab}{st} \in S^{-1}P$. Entonces $\frac{ab}{1} \in S^{-1}P$ y por lo tanto $\frac{ab}{1} = \frac{c}{u}$ para algunos $c \in P$ y $u \in S$. Luego existe $v \in S$ tal que $abuv = cv \in P$. Como P es primo y $P \cap S$ es vacío, se tiene que $ab \in P$, de donde $a \in P$ o $b \in P$. Concluimos que $\frac{a}{s} \in S^{-1}P$ o $\frac{b}{t} \in S^{-1}P$.

(2) Como $Q = S^{-1}P$ es un ideal propio, se tiene que $P \cap S$ es vacío. Luego $1 \notin P$ y P es un ideal propio. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in P$. Entonces $\frac{ab}{1} \in Q$ y como Q es primo, se tiene que $\frac{a}{1} \in Q$ o $\frac{b}{1} \in Q$. Luego $a \in P$ o $b \in P$.$\square$

1.3 Idealización de un R-módulo

Ahora introduciremos el concepto de idealización de un R-módulo, el cual nos facilitará la construcción de ejemplos en los siguientes capítulos. Los resultados contenidos en esta sección se encuentran en [3] y [6].

Definición.1.3.1 Sean R un anillo, M un R-módulo izquierdo y $(r, m), (s, n) \in R \times M$. Definimos lo siguiente:

1. $(r, m) = (s, n) \iff r = s$ y $m = n$.
2. $(r, m) + (s, n) = (r + s, m + n)$.
3. $(r, m)(s, n) = (rs, rn + sm)$.

Se tiene entonces que $R \times M$ con las operaciones anteriores es un anillo conmutativo con elemento unitario $(1, 0)$, al cual llamaremos la idealización de M en R o la extensión trivial de R por M y denotaremos por $R(+)M$.

Observemos que hay un homomorfismo de anillos inyectivo $\varphi : R \longrightarrow R(+)M$ dado por $\varphi(r) = (r, 0)$.

Teorema.1.3.1 Sean R un anillo, I un ideal de R, M un R-módulo izquierdo y N un submódulo de M. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. $I(+)N$ es un ideal de $R(+)M \iff IM \subset N$.
2. Si $I(+)N$ es un ideal entonces M/N es un R/I-módulo y $R(+)M/I(+)N \cong R/I(+)M/N$.

   Demostración.

   (1) [$\Rightarrow$] Sean $a \in I$ y $m \in M$. Entonces $(a, 0) \in I(+)N$ y $(1, m) \in R(+)M$. Como $I(+)N$ es ideal, $(1, m)(a, 0) = (a, am) \in I(+)N$. Se sigue que $am \in N$, de donde $IM \subset N$.

   [$\Leftarrow$] Veamos primero que $I(+)N$ es un subgrupo de $R(+)M$. Sean $(r_1, n_1), (r_2, n_2) \in I(+)N$. Entonces $(r_1, n_1) - (r_2, n_2) = (r_1 - r_2, n_1 - n_2) \in I(+)N$ pues $r_1 - r_2 \in I$ y $n_1 - n_2 \in N$. Además es claro que $(0, 0) \in I(+)N$. Ahora sean $(r, m) \in R(+)M$ y $(a, n) \in I(+)N$. Entonces $(r, m)(a, n) = (ra, rn + am) \in I(+)N$ pues $ra \in I$ y $rn+am \in N+IM \subset N$ por hipótesis.

(2) Sabemos que M/N es un R-módulo con $r(m+N) = rm+N$ para $r \in R$ y $m \in M$. Hacemos de M/N un R/I-módulo por medio de $(r+I)(m+N) = rm+N$. Esta operación está bien definida pues si $r+I = s+I$, entonces $r-s \in I$ y como $IM \subset N$ se tiene que $(r-s)m \in N$. Luego $(rm+N)-(sm+N) = (r-s)m+N = 0+N$, con lo que $(r+I)(m+N) = (s+I)(m+N)$. El que M/N sea un R/I-módulo con esta operación se sigue de que es un R-módulo con la primera operación.

Consideremos ahora la siguiente función $\psi : R(+)M \longrightarrow R/I(+)M/N$ dada por $\psi(r,m) = (r+I, m+N)$. Veamos que ψ es un homomorfismo de anillo. Claramente es un homomorfismo de grupos aditivos. Sean $(r_1,m_1),(r_2,m_2) \in R(+)M$. Entonces

$$\begin{aligned}\psi[(r_1,m_1)(r_2,m_2)] &= \psi(r_1r_2, r_1m_2+r_2m_1)\\ &= ((r_1r_2)+I, (r_1m_2+r_2m_1)+N)\\ &= ((r_1+I)(r_2+I), (r_1+I)(m_2+N)+(r_2+I)(m_1+N))\\ &= (r_1+I, m_1+N)(r_2+I, m_2+N) = \psi(r_1,m_1)\psi(r_2,m_2)\end{aligned}$$

Claramente ψ es suprayectivo y $Ker\psi = I(+)N$, así que el resultado se sigue del Primer Teorema de Isomorfismo. $\square$

Corolario.1.3.1 Sean R un anillo, M un R-módulo izquierdo y N un submódulo de M. Entonces:

1. $R(+)M/\{0\}(+)N \cong R(+)M/N$.
2. $R(+)M/\{0\}(+)M \cong R$.
3. Los ideales de $R(+)M$ que contienen a $\{0\}(+)M$ son de la forma $J(+)M$ para algún ideal J de R.

   Demostración. (1) y (2) son claras y (3) se sigue del Teorema de la Correspondencia. Por (2) hay una biyección entre el conjunto de ideales de R y el conjunto de ideales de $R(+)M$ que contienen $\{0\}(+)M$ dada por $J \longmapsto J(+)M$. $\square$

Teorema.1.3.2 Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Entonces:

1. Los ideales primos de $R(+)M$ son de la forma $P(+)M$, donde P es un ideal primo de R.
2. Los ideales máximos de $R(+)M$ son de la forma $J(+)M$, donde J es un ideal máximo de R.

   Demostración.

(1) Sean $\mathscr{Q}$ un ideal primo de $R\,(+)\,M$. Veamos que $\{0\}\,(+)\,M \subset \mathscr{Q}$. Sea $(0,m) \in \{0\}\,(+)\,M$. Entonces $(0,m)^2 = (0,0) \in \mathscr{Q}$ y como $\mathscr{Q}$ es primo, se tiene que $(0,m) \in \mathscr{Q}$. Por el corolario anterior, $\mathscr{Q} = P\,(+)\,M$ para algún ideal P de R. Veamos ahora que P es primo. Sean $a,b \in R$ con $ab \in P$. Entonces $(a,0)\,(b,0) = (ab,0) \in \mathscr{Q}$ y como $\mathscr{Q}$ es primo, se sigue que $(a,0) \in \mathscr{Q}$ o $(b,0) \in \mathscr{Q}$, de donde $a \in P$ o $b \in P$.

(2) Sea $\mathscr{M}$ un ideal máximo de $R\,(+)\,M$. Como $\mathscr{M}$ es primo, por el inciso anterior, $\mathscr{M} = J\,(+)\,M$ para algún ideal J de R. Veamos que J es un ideal máximo de R. Tomemos un ideal propio I de R que contenga J. Como $IM \subset M$, se tiene que $I\,(+)\,M$ es un ideal propio de $R\,(+)\,M$ que contiene $\mathscr{M} = J\,(+)\,M$, por el inciso 1 del teorema 1.3.1. Finalmente, como $\mathscr{M}$ es máximo, se tiene que $\mathscr{M} = I\,(+)\,M$, de donde $J = I$, lo que prueba que J es un ideal máximo de R. $\square$

Teorema.1.3.3 Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Si $\mathscr{J}$ es un ideal de $R\,(+)\,M$ entonces $I = \{r \in R : (r,m) \in \mathscr{J}$ para algún $m \in M\}$ es un ideal de R y $N = \{m \in M : (r,m) \in \mathscr{J}$ para algún $r \in R\}$ es un submódulo de M. Además $IM \subset M$.

Demostración. Veamos primero que I es un ideal de R. Sean $r_1, r_2 \in I$, entonces existen $m_1, m_2 \in M$ tales que $(r_1,m_1)\,,(r_2,m_2) \in \mathscr{J}$. Como $\mathscr{J}$ es ideal entonces $(r_1,m_1) - (r_2,m_2) = (r_1 - r_2, m_1 - m_2) \in \mathscr{J}$. Por lo tanto $r_1 - r_2 \in I$.

Claramente $(0,0) \in \mathscr{J}$, de lo que se sigue que $0 \in I$. Sean $s \in I$, $r \in R$, entonces existe $m \in M$ tal que $(s,m) \in \mathscr{J}$. Como $(r,0) \in R\,(+)\,M$ y $\mathscr{J}$ es ideal de $R\,(+)\,M$ tenemos que $(r,0)\,(s,m) = (rs,rm) \in \mathscr{J}$. Ya que $rm \in M$, se sigue que $rs \in I$. Por lo tanto I es un ideal de R.

Demostremos ahora que N es un R-submódulo de M. Sean $n_1, n_2 \in N$, entonces existen $r_1, r_2 \in R$ tales que $(r_1,n_1)\,,(r_2,n_2) \in \mathscr{J}$. Como $\mathscr{J}$ es ideal entonces $(r_1,n_1) - (r_2,n_2) = (r_1 - r_2, n_1 - n_2) \in \mathscr{J}$. Se sigue que $n_1 - n_2 \in N$. Es claro que $(0,0) \in \mathscr{J}$ y por lo tanto $0 \in N$. De lo anterior se sigue entonces que $(N,+)$ es un subgrupo abeliano de $(M,+)$.

Además $rn \in N$ para todo $r \in R$ y $n \in N$. En efecto, sea $n \in N$, entonces existe $s \in R$ tal que $(s,n) \in \mathscr{J}$. Luego, multiplicando por $(r,0)$ obtenemos que $(r,0)\,(s,n) = (rs,rn) \in \mathscr{J}$, de donde $rn \in N$. Por lo tanto N es R-submódulo de M.

La última afirmación se prueba como en el Teorema 1.3.1. $\square$

Observemos que en el teorema anterior $\mathscr{J}$ puede no ser $I\,(+)\,N$. Por ejemplo, sean $R\,(+)\,M = \mathscr{Z}\,(+)\,2\mathscr{Z}$ y $\mathscr{J} = \langle(2,2)\rangle$. Es fácil ver que en este caso $I = 2\mathscr{Z} = N$ y $\mathscr{J} \not\subseteq I\,(+)\,N$ pues $(0,2) \in I\,(+)\,N$ y $(0,2) \notin \mathscr{J}$.

Teorema.1.3.4 Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Si $I\,(+)\,N$ e $I^\star\,(+)\,N^\star$ son ideales de $R\,(+)\,M$. Entonces:

1. $(I\,(+)\,N) \cap (I^\star\,(+)\,N^\star) = (I \cap I^\star)\,(+)\,(N \cap N^\star)\,.$

2. $(I\,(+)\,N)\,(I^\star\,(+)\,N^\star) = II^\star\,(+)\,(IN^\star\,(+)\,I^\star N)\,.$

Demostración.

(1) $[\subseteq]$ Sea $(r,n) \in (I\,(+)\,N) \cap (I^\star\,(+)\,N^\star)\,,$ entonces $(r,n) \in I\,(+)\,N$ y $(r,n) \in I^\star\,(+)\,N^\star$. Como $(r,n) \in I\,(+)\,N$ entonces $r \in I$ y $n \in N$, además como $(r,n) \in I^\star\,(+)\,N^\star$ entonces $r \in I^\star$ y $n \in N^\star$. Por lo tanto $r \in I \cap I^\star$ y $n \in N \cap N^\star$, por lo cual $(r,n) \in (I \cap I^\star)\,(+)\,(N \cap N^\star)\,.$

$[\supseteq]$ Sea $(r,n) \in (I \cap I^\star)\,(+)\,(N \cap N^\star)\,.$ Entonces $r \in I \cap I^\star$, por lo cual $r \in I$ y $r \in I^\star$. Además, $n \in N \cap N^\star$, por lo cual $n \in N$ y $n \in N^\star$. Entonces $(r,n) \in I\,(+)\,N$ y $(r,n) \in I^\star\,(+)\,N^\star$. Luego $(r,n) \in (I\,(+)\,N) \cap (I^\star\,(+)\,N^\star)\,.$

(2) $[\subseteq]$ Es clara.

$[\supseteq]$ Sea $(r,n) \in II^\star\,(+)\,(IN^\star + I^\star N)\,.$ Lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$(r,n) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i, \sum_{j=1}^{m} s_j a_j^\star + s_j^\star a_j\right),$$

donde $x_i, s_j \in I$, $y_i, s_j^\star \in I^\star$, $a_j, a_j^\star \in N$ para todo $i = 1, \ldots, k$ y $j = 1, \ldots, m$.

Sean $p = min\,(m,k)$ y $q = max\,(m,k)$, entonces podemos reescribir

$$(r,n) = \sum_{i=1}^{p} (x_i y_i, s_i a_i^\star + s_i^\star a_i) + \sum_{i=p+1}^{q} (r_i, b_i)\,,$$

donde $r_i = x_i y_i$, $b_i = 0$ si $k > m$ y $r_i = 0$, $b_i = s_i a_i^\star + s_i^\star a_i$ si $m > k$.

- Para $i = 1, \ldots, p$,

$$(x_i y_i, s_i a_i^\star + s_i^\star a_i) = (x_i, 0)\,(y_i, 0) + (s_i, a_i)\,(s_i^\star, a_i^\star) - (s_i, 0)\,(s_i^\star, 0)\,.$$

- Si $m > k$ e $i = p+1, \ldots, m$,

$$(0, s_i a_i^\star + s_i^\star a_i) = (s_i, a_i)\,(s_i^\star, a_i^\star) - (s_i, 0)\,(s_i^\star, 0)\,.$$

- Si $k > m$ e $i = p+1, \ldots, k$,

$$(x_i y_i, 0) = (x_i, 0)\,(y_i, 0).$$

Luego (r,n) es una suma finita de productos de elementos en $I\,(+)\,N$ e $I^\star\,(+)\,N^\star$. $\square$

Teorema.1.3.5 Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Si $I\,(+)\,N$ es un ideal de $R\,(+)\,M$, entonces $Rad\,(I\,(+)\,N) = Rad\,(I)\,(+)\,M$.

Demostración.

[$\subseteq$] Sea $(r,n) \in Rad\,(I\,(+)\,N)$. Entonces existe $k \in \mathscr{N}$ tal que $(r,n)^k \in I\,(+)\,N$, de donde $\left(r^k, k\left(r^{k-1}n\right)\right) \in I\,(+)\,N$. En particular, $r^k \in I$, por lo que $(r,n) \in Rad\,(I)\,(+)\,M$. Luego $Rad\,(I\,(+)\,N) \subset Rad\,(I)\,(+)\,M$.

[$\supseteq$] Sea $(r,m) \in Rad\,(I)\,(+)\,M$ tal que $r^k \in I$. Entonces $(r,m)^{k+1} = \left(r^{k+1}, (k+1)\,r^k m\right) \in I\,(+)\,N$ pues $r^k m \in N$ ya que $IM \subseteq N$. Luego $(r,m) \in Rad\,(I\,(+)\,N)$ y por lo tanto $Rad\,(I)\,(+)\,M \subset Rad\,(I\,(+)\,N)$. $\square$

Proposición.1.3.1 Sean R un anillo y M un R-módulo izquierdo. Una condición necesaria y suficiente para que (r,m) sea unidad de $R\,(+)\,M$ es que r sea unidad de R.

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que (r,m) es unidad de $R\,(+)\,M$. Entonces existe $(s,n) \in R\,(+)\,M$ tal que $(r,m)\,(s,n) = (1,0)$, lo cual pasa si y sólo si $rs = 1$ y $rn + sm = 0$. Por lo tanto existe $s \in R$ tal que $rs = 1$, es decir, r es unidad de R.

[$\Leftarrow$] Sea r unidad de R, entonces existe $s \in R$ tal que $rs = 1$. Veamos que para cualquier $m \in M$, (r,m) es unidad de $R\,(+)\,M$. Como $m \in M$ y M es R-módulo entonces $-s^2 m \in M$. Afirmamos que $\left(s, -s^2 m\right)$ es el inverso de (r,m). En efecto, $(r,m)\left(s, -s^2 m\right) = (rs, sm - sm) = (1,0)$. Luego (r,m) es unidad de $R\,(+)\,M$. $\square$

Capítulo 2. Propiedades básicas de ideales 2-absorbentes y débilmente 2-absorbentes

En este capítulo se definirán los ideales 2-absorbentes y débilmente 2-absorbentes para anillos conmutativos con uno. Se demostrarán algunos teoremas básicos y se darán ejemplos de ellos.

2.1 Ideales 2-absorbentes

El concepto de ideal primo es uno de los más importantes en el álgebra conmutativa de anillos, él cual ha tenido varias generalizaciones. Entre dichas generalizaciones se encuentran los ideales 2-absorbentes, los cuales serán el objeto de estudio en esta sección. En lo siguiente se hará un breve estudio de las propiedades básicas de dichos ideales. Para profundizar más en el tema se puede consultar [4] .

Definición.2.1.1 Sean R un anillo e I un ideal propio de R. Se dice que I es un ideal 2-absorbente de R si dados $x, y, z \in R$ tales que $xyz \in I$ se tiene que $xy \in I$ o $xz \in I$ o $yz \in I$.

Observemos que si I es un ideal primo de un anillo R, entonces I es un ideal 2-absorbente. En efecto, si $xyz \in I \Rightarrow xy \in I$ o $z \in I \Rightarrow xy \in I$ o $xz \in I$ o $yz \in I$.

Ejemplo.2.1.1

1. Sean $R = \mathbb{Z}$, $I = (0)$. Se tiene que I es un ideal 2-absorbente de R pues R es un dominio entero, lo cual implica que I es de hecho un ideal primo.
2. Sean $R = \mathbb{Z}$, $I = (8)$. Es claro que I no es un ideal 2-absorbente de R pues $2^3 \in I$ pero $2^2 \notin I$.

   Luego podemos dar una generalización en el siguiente ejemplo.
3. Sea $R = \mathbb{Z}$. Todo ideal generado por una potencia cúbica de cualquier entero mayor que uno no es un ideal 2-absorbente de R. En efecto, si $I = \left(a^3\right)$ con $a > 1$, entonces $a^3 \in I$ pero $a^2 \notin I$.

Teorema.2.1.1 Sea I un ideal 2-absorbente de un anillo R. Entonces $Rad\,(I)$ es un ideal 2-absorbente de R y $x^2 \in I$ para todo $x \in Rad\,(I)$.

Demostración. Sea $x \in Rad(I)$, entonces $x^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $x \in I$ entonces $x^2 \in I$. Si $x \notin I$, sea n el menor entero natural tal que $x^n \in I$. Entonces $xxx^{n-2} = x^n \in I$ y como I es 2-absorbente se sigue que $x^2 \in I$ ó $x^{n-1} \in I$, lo cual es una contradicción. Así que $x^2 \in I$. Sean $x, y, z \in R$ tales que $xyz \in Rad(I)$. Por lo anterior tenemos que $(xyz)^2 = x^2y^2z^2 \in I$. Como I es un ideal 2-absorbente podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x^2y^2 \in I$. Por lo tanto $xy \in Rad(I)$. $\square$

Definición.2.1.2 Sean R un anillo e I un ideal propio de R. Se dice que J es un ideal primo mínimo sobre I si :

1. J es un ideal primo de R.
2. $I \subseteq J$.
3. Dado K ideal primo de R tal que $I \subseteq K \subseteq J$ tenemos que $K = I$ o $K = J$.

Ejemplo.2.1.2

1. En $R = \mathbb{Z}$, el ideal $J = (p)$ con p primo es un ideal primo mínimo sobre el ideal $I = (p^2)$.
2. Sean $R = \mathbb{Z}$ e $I = (p_1p_2)$ con p_1, p_2 primos distintos. Entonces (p_1) y (p_2) son ideales primos mínimos sobre I.

Lema.2.1.1 Sean R un anillo y P un ideal primo mínimo. Entonces para cada $x \in P$ existen $y \in R - P$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $yx^n = 0$.

Demostración. La afirmación es cierta para $x = 0$. Supongamos entonces que $x \neq 0$ y consideremos el conjunto $S = \{yx^n : y \in R - P, n \geq 0\}$.

Observemos primero que S es multiplicativamente cerrado. Como $1 \in R - P$ entonces $1 = 1(x^0) \in S$. Si $a, b \in S$ entonces existen $y_1, y_2 \in R - P$ y $n_1, n_2 \geq 0$ tales que $a = y_1x^{n_1}$ y $b = y_2x^{n_2}$. Entonces $ab = y_1y_2x^{n_1+n_2} \in S$ pues $y_1y_2 \in R - P$ por ser P primo.

Veamos ahora que $0 \in S$. Si $0 \notin S$ entonces $S^{-1}R \neq 0$ y por el Teorema 1.1.2, existe un ideal primo mínimo $\hat{Q}$ de $S^{-1}R$. Por la Proposición 1.2.2, existe Q ideal primo de R con $Q \cap S = \varnothing$ y tal que $S^{-1}Q = \hat{Q}$. Como $1 \in R - P$ se tiene que $x = 1(x^1) \in S$ y por lo tanto $x \notin Q$. Pero $x \in P$, así que $P \neq Q$. Por otro lado, $R - P \subset S$ pues si $y \in R - P$ entonces $y = y(x^0) \in S$. Entonces $Q \subset R - S \subset P$, lo que contradice la minimidad de P. Por lo tanto $0 \in S$.

Entonces existen $y \in R - P$ y $n \geq 0$ tales que $yx^n = 0 \in P$. Como $y \notin P$, entonces $n > 0$. $\square$

Proposición.2.1.1 Sean I, P ideales de un anillo R tales que $I \subseteq P$ y P es primo. Si P es un ideal primo mínimo sobre I, entonces para cada $x \in P$ existen $y \in R - P$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $yx^n \in I$.

Demostración. Consideremos el anillo R/I y su ideal P/I. Como P es un ideal primo mínimo sobre I, el ideal P/I es un ideal primo mínimo de R/I. Consideremos $\bar{x} \in P/I$. Por el lema anterior, existen $\bar{y} \in R/I - P/I$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\bar{y}\bar{x}^n = 0$. Entonces $yx^n \in I$ y $y \notin P$ pues en caso contrario $\bar{y} \in P/I$. $\square$

Teorema.2.1.2 Sean R un anillo e I un ideal 2-absorbente de R. Entonces R tiene a lo más 2 ideales primos mínimos sobre I.

Demostración. Supongamos que R tiene al menos tres ideales primos mínimos sobre I distintos. Sean J_1, J_2, J_3 tres de dichos ideales. Como $J_1 \neq J_2$ y además son ideales primos mínimos sobre I, entonces $J_1 \nsubseteq J_2$ y $J_2 \nsubseteq J_1$. Por lo tanto existen $x_1 \in J_1 \setminus J_2$ y $x_2 \in J_2 \setminus J_1$. Por el lema anterior, existen $z_2 \in R \setminus J_1$, $z_1 \in R \setminus J_2$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $z_2 x_1^{n_1} \in I$ y $z_1 x_2^{n_2} \in I$. Como $I \subseteq J_1 \cap J_2$ es un ideal 2-absorbente de R y $x_1, x_2 \notin J_1 \cap J_2$ entonces $z_2 x_1, z_1 x_2 \in I \subseteq J_1 \cap J_2$, con lo cual concluimos que $z_2 \in J_2 \setminus J_1$ y $z_1 \in J_1 \setminus J_2$. Entonces $z_1, z_2 \notin J_1 \cap J_2$. Además ya que $z_2 x_1, z_1 x_2 \in I$ se tiene que $(z_1 + z_2)(x_1 x_2) \in I$. Pero $z_1 + z_2 \notin J_1$ y $z_1 + z_2 \notin J_2$, se sigue entonces que $(z_1 + z_2)\, x_1 \notin J_2$ y $(z_1 + z_2)\, x_2 \notin J_1$. Por lo tanto $x_1 x_2 \in I$.

Como supusimos que J_3 es distinto a J_1 y J_2 entonces, por el Teorema 1.1.4, podemos elegir $y_1 \in J_1 \setminus (J_2 \cup J_3)$ y $y_2 \in J_2 \setminus (J_1 \cup J_3)$. Por el argumento anterior, sabemos que $y_1 y_2 \in I$. Como $I \subseteq J_1 \cap J_2 \cap J_3$ entonces $y_1 y_2 \in J_3$, de donde $y_1 \in J_3$ o $y_2 \in J_3$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R tiene a lo más dos ideales primos mínimos sobre I distintos. $\square$

Teorema.2.1.3 Sea I un ideal 2-absorbente de un anillo R. Entonces alguna de las siguientes afirmaciones se cumple:

1. $Rad\,(I) = P$ con P ideal primo de R y $P^2 \subseteq I$.

2. $Rad\,(I) = P_1 \cap P_2$, $P_1 P_2 \subseteq I$ y $Rad\,(I)^2 \subseteq I$, donde P_1, P_2 son los únicos ideales primos mínimos sobre I distintos.

Demostración. Por el Teorema 2.1.2 y la Proposición 1.1.3, tenemos que se cumplen los siguientes casos:

Caso 1. $Rad\,(I) = P$ con P ideal primo de R.

Sean $x, y \in P$. Entonces $x^2, y^2 \in I$ por el Teorema 2.1.1. Así que $x\,(x+y)\,y$ pertenece a I. Como I es 2-absorbente entonces $x^2 + xy \in I$ o $xy + y^2 \in I$ o $xy \in I$, de lo que se sigue que $xy \in I$. Por lo tanto $P^2 \subseteq I$.

Caso 2. $Rad\,(I) = P_1 \cap P_2$ con P_1, P_2 los únicos ideales primos mínimos sobre I distintos.

Sean $x, y \in Rad\,(I)$. Como en el caso anterior tenemos que $xy \in I$. Por lo tanto $Rad\,(I)^2 \subseteq I$. Veamos ahora que $P_1P_2 \subseteq I$. Sean $x, y \in P_1P_2$. Se tienen los siguientes subcasos:

Subcaso 2.1. $x, y \in P_1 \cap P_2$.

Entonces $x, y \in Rad\,(I)$ y por lo tanto $xy \in Rad\,(I)^2 \subseteq I$, es decir, $xy \in I$.

Subcaso 2.2. $x \in P_1 \setminus P_2$, $y \in P_2 \setminus P_1$.

Por la demostración del Teorema 2.1.2, tenemos entonces que $xy \in I$.

Subcaso 2.3. $x \in P_1 \setminus P_2, y \in Rad\,(I)$ (o el caso análogo, $x \in Rad\,(I), y \in P_2 \setminus P_1$).

Sea $z \in P_2 \setminus P_1$ que existe pues P_1, P_2 son ideales primos mínimos sobre I distintos. Entonces $xz \in I$ por la demostración del Teorema 2.1.2. Además $y + z \in P_2 \setminus P_1$, por lo que $xy + xz = (y + z)\,x \in I$, lo cual implica que $xy \in I$.

Concluímos entonces que $P_1P_2 \subseteq I$. $\square$

Teorema.2.1.4 Sea I un ideal 2-absorbente de un anillo R tal que $Rad\,(I) = P$ con P un ideal primo de R distinto a I. Para todo $x \in P \setminus I$, sea $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$. Entonces:

1. $P \subseteq B_x$.
2. B_x es un ideal primo de R.
3. Para todo $x, y \in P \setminus I$, $B_x \subseteq B_y$ o $B_y \subseteq B_x$.

Demostración.

(1) Sea $x \in P \setminus I$. Por el Teorema 2.1.3, tenemos que $P^2 \subseteq I$. Entonces dado $a \in P$, $ax \in P^2 \subseteq I$, es decir, $a \in B_x$. Concluimos que $P \subseteq B_x$.

(2) Es claro que B_x es ideal de R. En efecto, dados $a, b \in B_x$ tenemos entonces que $ax, bx \in I$. Como I es un ideal entonces $(a - b)\,x = ax - bx \in I$. Por lo tanto, $a - b \in B_x$. Además $0 \cdot x = 0 \in I$, así que $0 \in B_x$. Por otro lado, dados $r \in R$ y $a \in B_x$ tenemos que $rax \in I$ pues $ax \in I$, demostrando así que B_x es ideal de R.

Falta ver que es un ideal primo. Sean $a, b \in R$ tales que $ab \in B_x$. Si $ab \in P$ habremos terminado. Supongamos que $ab \notin P$. Como $I \subset Rad\,(I) = P$ se sigue que $ab \notin I$. Por definición de B_x tenemos que $abx \in I$ y sabemos que I es 2-absorbente, así que $ax \in I$ o $bx \in I$. Luego $a \in B_x$ o $b \in B_x$. Por lo tanto, B_x es un ideal primo de R.

(3) Sean $x, y \in P \setminus I$. Supongamos que $B_x \nsubseteq B_y$, entonces existe $z \in B_x \setminus B_y$. Por el inciso (1) tenemos que $P \subseteq B_y$, luego $z \in B_x \setminus P$. Sea

$w \in B_y$. Como $P \subseteq B_x$ podemos suponer que $w \in B_y \setminus P$. Además $zw \notin I$ pues $z \notin P$ y $w \notin P$, pero $(zx)\,w + z\,(yw) = z\,(x+y)\,w \in I$ ya que $z \in B_x$ y $w \in B_y$. Se sigue de lo anterior y del hecho de que I es 2-absorbente que $(x+y)\,w \in I$. Concluimos que $w \in B_x$, así que $B_y \subseteq B_x$. $\square$

Teorema.2.1.5 Sea I un ideal 2-absorbente de un anillo R tal que $I \neq Rad\,(I) = P_1 \cap P_2$, donde P_1 y P_2 son los únicos ideales primos mínimos sobre I distintos. Entonces para cada $x \in Rad\,(I) \setminus I$, $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$ es un ideal primo de R que contiene a P_1 y P_2. Además $B_x \subseteq B_y$ o $B_y \subseteq B_x$ para todo $x, y \in Rad\,(I) \setminus I$.

Demostración. Sea $x \in Rad\,(I) \setminus I$. Como $P_1P_2 \subseteq I$ por el Teorema 2.1.3, tenemos que $xP_1 \subseteq I$ y $xP_2 \subseteq I$. Luego $P_1, P_2 \subset B_x$. Supongamos que $yz \in B_x$ para algunos $y, z \in R$. Entonces $(yz)\,x \in I$. Como $P_1, P_2 \subset B_x$ podemos suponer que $y, z \notin P_1$ y $y, z \notin P_2$, lo cual implica que $yz \notin I$. Como I es 2-absorbente y $yz \notin I$ concluimos que $yx \in I$ o $zx \in I$. Se sigue entonces que $y \in B_x$ o $z \in B_x$, es decir, B_x es un ideal primo de R. Por un argumento similar al del inciso (3) del teorema anterior podemos concluir que $B_x \subseteq B_y$ o $B_y \subseteq B_x$ para todo $x, y \in Rad\,(I) \setminus I$. $\square$

Teorema.2.1.6 Sea I un ideal propio no cero de un anillo R. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. I es un ideal 2-absorbente de R.
2. Si $I_1I_2I_3 \subseteq I$ para algunos ideales I_1, I_2, I_3 de R, entonces $I_1I_2 \subseteq I$ o $I_1I_3 \subseteq I$ o $I_2I_3 \subseteq I$.

Demostración.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Es claro, puesto que si $abc \in I$ para algunos $a, b, c \in R$, entonces $abc \cdot xyz \in I$ para cualesquiera $x, y, z \in R$, de donde $(a)\,(b)\,(c) \subseteq I$. Por hipótesis podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(a)\,(b) \subseteq I$, lo cual implica que $ab \in I$. Por lo tanto I es un ideal 2-absorbente de R.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Sean I_1, I_2, I_3 ideales de R tales que $I_1I_2I_3 \subseteq I$. Como I es 2-absorbente, entonces por el Teorema 2.1.3, concluimos que $Rad\,(I)$ es un ideal primo de R o $Rad\,(I) = P_1 \cap P_2$, donde P_1 y P_2 son ideales primos mínimos sobre I distintos. Si $I = Rad\,(I)$, es fácil demostrar que $I_1I_2 \subseteq I$ o $I_1I_3 \subseteq I$ o $I_2I_3 \subseteq I$. Así que supongamos que $I \neq Rad\,(I)$. Consideremos los siguientes casos:

Caso 1. $Rad\,(I) = P$ con P un ideal primo de R.

Podemos suponer que $I_1 \subseteq Rad\,(I)$ e $I_1 \nsubseteq I$. Sea $x \in I_1 \setminus I$. Como $xI_2I_3 \subseteq I$, por definición de B_x tenemos entonces que $I_2I_3 \subseteq B_x$. Además por el Teorema 2.1.4 sabemos que B_x es un ideal primo, así que $I_2 \subseteq B_x$

o $I_3 \subseteq B_x$. Si para todo $z \in I_1 \setminus I$ se tiene que $I_2 \subseteq B_z$ e $I_3 \subseteq B_z$ podemos concluir que $I_1I_2, I_1I_3 \subseteq I$, con lo cual habremos terminado. Así que supongamos que existe $y \in I_1 \setminus I$ tal que $I_2 \subseteq B_y$ e $I_3 \nsubseteq B_y$. Por el Teorema 2.1.4, $B_y \subseteq B_x$ o $B_x \subseteq B_y$. En el primer caso $I_2 \subseteq B_x$ y en el segundo también pues $I_3 \nsubseteq B_y$. Concluimos que $I_2 \subseteq B_z$ para todo $z \in I_1 \setminus I$ y por lo tanto $I_1I_2 \subseteq I$.

Caso 2. $Rad\,(I) = P_1 \cap P_2$ con P_1, P_2 los únicos ideales primos mínimos sobre I distintos.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I_1 \subseteq P_1$. En caso de que I_2 o $I_3 \subseteq P_2$ tenemos que $I_1I_2 \subseteq I$ o $I_1I_3 \subseteq I$ pues $P_1P_2 \subset I$ por el Teorema 2.1.3. Supongamos ahora que $I_1 \subseteq Rad\,(I)$ e $I_1 \nsubseteq I$. Por un argumento similar al dado en el caso anterior y el Teorema 2.1.5, terminamos. $\square$

2.2 Ideales débilmente 2-absorbentes

Una generalización de los ideales 2-absorbentes es la de los ideales débilmente 2-absorbentes, los cuales serán estudiados en esta sección de manera básica y se profundizará más en el siguiente capítulo. Todo esto se puede encontrar en la primera sección del artículo [5] .

Definición.2.2.1 Sean R un anillo e I un ideal propio de R. Entonces I es un ideal débilmente primo de R si dados $x, y \in R$ tales que $0 \neq xy \in I$ tenemos que $x \in I$ o $y \in I$.

Ejemplo.2.2.1

1. En cualquier anillo R el ideal $\{0\}$ es débilmente primo y todo ideal primo es débilmente primo.
2. Sea $R = \mathbb{Z}_n$, donde $n = p^2$ con p primo o bien $n = p_1p_2$ con p_1, p_2 primos distintos. El ideal $I = (0)$ de R es un ideal débilmente primo que no es primo.

Definición.2.2.2 Sean R un anillo e I un ideal propio de R. Entonces I es un ideal débilmente 2-absorbente si dados $x, y, z \in R$ tales que $0 \neq xyz \in I$ se tiene que $xy \in I$ o $xz \in I$ o $yz \in I$.

Ejemplo.2.2.2

1. Si I es un ideal 2-absorbente o débilmente primo de R entonces I es un ideal débilmente 2-absorbente. Además el ideal $I = \{0\}$ es débilmente 2-absorbente

2. Sea $R = \mathbb{Z}_4$ e $I = \{0\}$.

   Sabemos que I es un ideal débilmente 2-absorbente. De hecho, I es también un ideal 2-absorbente de R. En efecto, dados $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I$ tenemos entonces que ambos, ab y c, no pueden ser congruentes con 1 ni con 3 pues de lo contrario $abc \neq 0$ y entonces $abc \notin I$. Se tiene que alguno es congruente con cero o bien ambos congruentes con dos.

   Si alguno es congruente con cero entonces es claro que ab o ac o bc pertenece a I. Si ambos son congruentes con dos, tenemos que a o b es congruente con dos, de lo que se sigue que ac o bc pertenece a I, demostrando así que I es 2-absorbente.

3. Sea $R = \mathbb{Z}_8$ e $I = \{0\}$.

   En este caso I no es un ideal 2-absorbente de R pues dados $a = b = c = 2$ tenemos que $abc = 8 \in I$ pero $4 \notin I$. Entonces $ab, ac, bc \notin I$.

En los ejemplos anteriores hemos visto un caso en el que un ideal es débilmente 2-absorbente y 2-absorbente. También hemos visto un caso en el que el ideal es débilmente 2-absorbente pero no es 2-absorbente. Veamos ahora un ejemplo de un ideal no cero que cumple lo mismo.

Ejemplo.2.2.3

Sean $M = \{0, 4\}$, $R = \mathbb{Z}_8 (+) M$ e $I = \{(0,0), (0,4)\}$. Como M es ideal de $\mathbb{Z}_8$ entonces es un módulo sobre $\mathbb{Z}_8$, por lo que R está bien definido con las operaciones dadas en la sección 1.3 de idealización.

Claramente I es un ideal de R. En efecto, dados $(a,b), (c,d) \in I$ tenemos que $(a,b) - (c,d) = (0,0)$ o $(0,4)$ los cuales sí pertenecen a I. Además el neutro $(0,0)$ pertenece a I y dado $(x,y) \in R$ tenemos que $(x,y) I = \{(0,0), (0,4x) : x \in \mathbb{Z}_8\}$ y para cualquier $x \in \mathbb{Z}_8$, $4x = 0$ o 4, lo cual demuestra que $(x,y) I \subseteq I$.

Veamos que I es un ideal débilmente 2-absorbente. Sean $(r,m), (s,n), (t,l)$ en R tales que $(0,0) \neq (r,m)(s,n)(t,l) \in I$. Ahora, $(r,m)(s,n)(t,l) = (rst, rsl + rnt + mst)$ y como el producto pertenece a I entonces $rst = 0$, de lo cual se derivan los siguientes casos:

Caso 1. $r = 0$ o $s = 0$ o $t = 0$

Entonces rsl o rnt o mst son distintos de cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que $rls \neq 0$, es decir, $t = 0$. Entonces $l = 4$ y por lo tanto $(t,l) \in I$. Luego $(s,n)(t,l), (r,m)(t,l) \in I$.

Caso 2. $r = s = t = 2$.

No es posible pues tendríamos que $4l+4n+4m=4$, pero $l,m,n\in M$ y por lo tanto $4l+4n+4m=0$.

Caso 3. $r=2,t=1,s=4$ o sus casos análogos.

Entonces $8l+2n+4m=4$, pero $l,m,n\in M$, luego $8l+2n+4m=0$, por lo que tampoco sucede este caso.

Concluimos entonces por los casos anteriores, y al ver que los otros casos no pueden suceder, que I es un ideal débilmente 2-absorbente. Observemos que no es 2-absorbente pues $(2,0)(2,0)(2,0)\in I$ pero $(4,0)\notin I$.

Lema.2.2.1 Sean P_1,P_2 ideales débilmente primos de un anillo R tales que $P_1\neq P_2$. Entonces $P_1\cap P_2$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R.

Demostración. Sean $x,y,z\in R$ tales que $0\neq xyz\in P_1\cap P_2$. Entonces $xyz\in P_i$ para $i=1,2$. Como $0\neq xyz=x(yz)$ y P_i es ideal débilmente primo entonces $x\in P_1$ o $yz\in P_1$ y $x\in P_2$ o $yz\in P_2$.

Si $yz\in P_1$ y $yz\in P_2$ o $x\in P_1$ y $x\in P_2$ entonces hemos terminado. Si suceden los casos $yz\in P_1$ y $x\in P_2$ o $x\in P_1$ y $yz\in P_2$ tenemos, en el primer caso, que por ser P_1 un ideal débilmente primo, o bien $y\in P_1$ o bien $z\in P_1$, con lo cual concluimos que $xy\in P_1\cap P_2$ o $xz\in P_1\cap P_2$. Análogamente en el otro caso. $\square$

Definición.2.2.3 Sea I un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R y sean $x,y,z\in R$. Decimos que (x,y,z) es un triple cero de I si $xyz=0$ y $xy\notin I, xz\notin I, yz\notin I$.

Ejemplo.2.2.4

Sean $R=\mathbb{Z}_8$ e $I=\{0\}$. Se tiene que $(2,2,2)$ es un triple cero de I pues $2^3=0\in I$ pero $2^2\notin I$. En general se tiene que si $R=\mathbb{Z}_n$ con $n=p^3$ y p primo o bien $n=p_1p_2p_3$ con p_1,p_2 y p_3 primos distintos, entonces (p,p,p) o (p_1,p_2,p_3) es triple cero respectivamente del ideal I.

Teorema.2.2.1 Sean I un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R y (x,y,z) un triple cero de I para algunos $x,y,z\in R$. Entonces:

1. $xyI=xzI=yzI=\{0\}$.
2. $xI^2=yI^2=zI^2=\{0\}$.

Demostración. En ambos casos procedamos por contradicción.

(1) Supongamos que xyI o xzI o yzI es distinto de $\{0\}$. Sin pérdida de generalidad tomemos $xyI\neq\{0\}$. Entonces existe $a\in I$ tal que $xya\neq 0$.

Como (x, y, z) es un triple cero de I por hipótesis, entonces $xyz = 0$ y $xy \notin I$, por lo que $xya + xyz = xya \neq 0$. Factorizando xy obtenemos que $0 \neq xy(a + z) \in I$. Como I es un ideal débilmente 2-absorbente y $xy \notin I$ entonces $x(a + z)$ o $y(a + z) \in I$, lo cual implica que $xz \in I$ o $yz \in I$, contradiciendo el hecho de que (x, y, z) es triple cero de I. Por lo tanto $xyI = \{0\}$. Análogamente tenemos que $yzI = xzI = \{0\}$.

(2) Supongamos que xI^2 o yI^2 o zI^2 es distinto de $\{0\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $xI^2 \neq \{0\}$. Entonces existen $a_1, a_2 \in I$ tales que $xa_1a_2 \neq 0$. Por (1) tenemos que $xyI = xzI = yzI = \{0\}$. Entonces $xyz = xya_2 = xza_1 = 0$, por lo que $xa_1a_2 = xyz + xya_2 + xza_1 + xa_1a_2$. Factorizando obtenemos que $0 \neq xa_1a_2 = x(y + a_1)(z + a_2)$. Como I es un ideal débilmente 2-absorbente entonces $x(y + a_1)$ o $x(z + a_2)$ o $(y + a_1)(z + a_2) \in I$. Si $x(y + a_1) \in I$ entonces $xy \in I$, contradiciendo el hecho de que (x, y, z) es un triple cero de I. Similarmente para los casos $x(z + a_2)$, $(y + a_1)(z + a_2) \in I$. Por lo tanto $xI^2 = \{0\}$. Análogamente demostramos que $yI^2 = zI^2 = \{0\}$. □

Teorema.2.2.2 Sea I un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R. Si I no es un ideal 2-absorbente de R, entonces $I^3 = \{0\}$.

Demostración. Procedamos por contradicción, es decir, supongamos que existen $a_1, a_2, a_3 \in I$ tales que $a_1a_2a_3 \neq 0$. Como I no es un ideal 2-absorbente entonces I tiene un triple cero (x, y, z) para algunos $x, y, z \in R$. Por el teorema anterior, tenemos que $0 \neq a_1a_2a_3 = a_1a_2a_3 + xyz + xya_3 + xza_2 + xa_2a_3 + yza_2 + ya_2a_3 = (x + a_1)(y + a_2)(z + a_3)$. Como I es un ideal débilmente 2-absorbente entonces $(x + a_1)(y + a_2)$ o bien $(x + a_1)(z + a_3)$ o bien $(y + a_2)(z + a_3) \in I$. Entonces xy o xz o $yz \in I$, lo cual contradice el hecho de que (x, y, z) es triple cero de I. Por lo tanto $I^3 = \{0\}$. □

Corolario.2.2.1 Sea I un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R. Si I no es un ideal 2-absorbente de R, entonces $I \subseteq Nil(R)$.

Demostración. Observemos que si $a \in I$, entonces $a^3 \in I^3 = \{0\}$ por el teorema anterior. Por lo tanto $a \in Nil(R)$ para todo $a \in I$, es decir, $I \subseteq Nil(R)$. □

Observemos que si I es un ideal propio de un anillo R tal que $I^3 = \{0\}$, esto no implica que I es un ideal débilmente 2-absorbente de R. Demos un ejemplo de esto.

Ejemplo.2.2.5

Sean $R = \mathbb{Z}_{16}$ e $I = \{0, 8\}$. Tenemos que I es un ideal de R tal que $I^3 = \{0\}$, pero $0 \neq 2 \cdot 2 \cdot 2 \in I$ y $4 \notin I$. Por lo tanto I no es un ideal débilmente 2-absorbente.

Teorema.2.2.3 Sea I un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R. Si I no es un ideal 2-absorbente, entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si $w \in Nil(R)$, entonces $w^2 \in I$ o $w^2 I = wI^2 = \{0\}$.
2. $(Nil(R))^2 I^2 = \{0\}$.

Demostración.

(1) Supongamos que $w^2 I \neq \{0\}$. Como $w \in Nil(R)$ entonces existe un menor entero positivo n tal que $w^n = 0$. Observemos que $n \geq 3$ pues de lo contrario w o w^2 es igual a cero, lo cual implica que $w^2 I = \{0\}$. Sea $a \in I$ tal que $w^2 a \neq 0$. Entonces $0 \neq w^2 a + w^n = w^2 \left(a + w^{n-2}\right) \in I$. Como I es un ideal débilmente 2-absorbente obtenemos los siguientes casos:

Caso 1. $w^2 \in I$.

Entonces hemos terminado.

Caso 2. $wa + w^{n-1} \in I$.

Entonces $w^{n-1} \in I$, lo cual implica que $w^2 \in I$ y así hemos terminado.

Esto demuestra que si $w \in Nil(R)$ entonces $w^2 \in I$ o $w^2 I = \{0\}$. Veamos ahora que $w^2 \in I$ o $wI^2 = \{0\}$.

Supongamos que $wI^2 \neq \{0\}$ y $w^2 \notin I$. Entonces $wa_1a_2 \neq 0$ para algunos $a_1, a_2 \in I$. Sabemos que $w^n = 0$ para $n \geq 3$ y que $w^2 I = \{0\}$ por lo demostrado anteriormente, así que $w^n = w^{n-1}a_1 = w^2 a_2 = 0$. Entonces

$$0 \neq wa_1a_2 = w^n + w^{n-1}a_1 + w^2 a_2 + wa_1a_2 = w(w + a_1)\left(w^{n-2} + a_2\right)$$

pertenece a I. Como I es un ideal débilmente 2-absorbente entonces $w^2 \in I$ o $w^{n-1} \in I$. Luego en ambos casos $w^2 \in I$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto queda demostrado (1).

(2) Sean $x, y \in Nil(R)$. Si $x^2 \notin I$ o $y^2 \notin I$, entonces $xyI^2 = \{0\}$ por lo demostrado en (1). Supongamos que $x^2 \in I$ y $y^2 \in I$. Entonces $x^2 y, xy^2 \in I$, por lo que $xy(x + y) \in I$. Se tienen dos casos:

Caso 1. $(x, y, x + y)$ es triple cero de I.

Por el Teorema 2.2.1 se tiene que $xyI = \{0\}$, lo que implica que $xyI^2 = \{0\}$.

Caso 2. $(x, y, x + y)$ no es triple cero de I.

Como I es un ideal débilmente 2-absorbente entonces xy o $x(x + y)$ o $y(x + y)$ pertenece a I. Por lo tanto $xy \in I$ y por el Teorema 2.2.2, $xyI^2 = \{0\}$. $\square$

Corolario.2.2.2 Sean I, J, K ideales débilmente 2-absorbentes de un anillo R tales que no son ideales 2-absorbentes. Entonces $I^2JK = IJ^2K = IJK^2 = I^2J^2 = I^2K^2 = J^2K^2 = \{0\}$.

Demostración. Veamos primero que $I^2JK = \{0\}$ y con eso quedan demostradas $IJ^2K = IJK^2 = \{0\}$ pues son análogas. Sean $i_1, i_2 \in I, j \in J$ y $k \in K$. Entonces $i_1i_2jk \in I^2JK$. Por el corolario 2.2.1, tenemos que $I, J, K \subseteq Nil\,(R)$. Entonces $jk \in (Nil\,(R))^2$. Luego, por el teorema anterior, como $i_1i_2 \in I^2$ y $jk \in (Nil\,(R))^2$, entonces $i_1i_2jk = \{0\}$. Por lo tanto $I^2JK = \{0\}$.

Ahora demostremos que $I^2J^2 = \{0\}$ y de manera análoga tendremos que $I^2K^2 = J^2K^2 = \{0\}$. Sean $i_1, i_2 \in I$ y $j_1, j_2 \in J$, entonces $i_1i_2j_1j_2 \in I^2J^2$. Por el Corolario 2.2.1, sabemos que $i_1i_2 \in (Nil\,(R))^2$ pues $I \subseteq Nil\,(R)$. Entonces $i_1i_2j_1j_2 = 0$ pues $(Nil\,(R))^2\, J^2 = \{0\}$. Por lo tanto $I^2J^2 = \{0\}$.

$\square$

Definición.2.2.4 Un anillo R es reducible si es isomorfo a un anillo de la forma $\prod_{i=1}^{n} R_i$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ y R_i un anillo para todo i tal que $1 \leq i \leq n$.

Teorema.2.2.4 Sean $R = R_1 \times R_2$ un anillo reducible e I un ideal propio de R_1. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $I \times R_2$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R.
2. $I \times R_2$ es un ideal 2-absorbente de R.
3. I es un ideal 2-absorbente de R_1.

Demostración.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que $I \times R_2$ es débilmente 2-absorbente. Es claro que $I \times R_2 \nsubseteq Nil\,(R)$ pues para cualquier $x \in I$ tenemos que $(x, 1) \in I \times R_2$ y $(x, 1) \notin Nil\,(R)$. Por el corolario 2.2.1, tenemos que $I \times R_2$ es un ideal 2-absorbente de R.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Supongamos que $I \times R_2$ es un ideal 2-absorbente de R. Sean $x_1, x_2, x_3 \in R_1$ tales que $x_1x_2x_3 \in I$. Entonces $(x_1, 1)(x_2, 1)(x_3, 1) \in I \times R_2$ y como $I \times R_2$ es un ideal 2-absorbente de R, tenemos entonces que x_1x_2 o x_1x_3 o $x_2x_3 \in I$, por lo que I es un ideal 2-absorbente de R_1.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Supongamos que I es un ideal 2-absorbente de R_1. Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3) \in R$ tales que $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) \in I \times R_2$. Entonces $x_1x_2x_3 \in I$ y como es un ideal 2-absorbente x_1x_2 o x_1x_3 o $x_2x_3 \in I$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1x_2 \in I$. Como R_2 es un anillo y $y_1, y_2 \in R_2$ entonces $y_1y_2 \in R_2$. Por lo tanto $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \in I \times R_2$, lo cual demuestra que es un ideal 2-absorbente de R y eso implica que es un ideal débilmente 2-absorbente. $\square$

Teorema.2.2.5 Sea $R = R_1 \times R_2$, donde R_1 y R_2 son anillos. Sean I un ideal propio no cero de R_1 y J un ideal no cero de R_2. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R.
2. $J = R_2$ e I es un ideal 2-absorbente de R_1 o bien J es un ideal primo de R_2 e I es un ideal primo de R_1.
3. $I \times J$ es un ideal 2-absorbente de R.

Demostración.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Es claro pues ser un ideal 2-absorbente implica ser un ideal débilmente 2-absorbente.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $J = R_2$.

Por el teorema anterior, tenemos que I es un ideal 2-absorbente de R_1.

Caso 2. $J \neq R_2$.

Entonces J es un ideal propio de R_2. Veamos que J e I son ideales primos de R_2 y R_1 respectivamente.

Sean $x, y \in R_2$ tales que $xy \in J$. Como I es no cero entonces existe $a \in I \setminus \{0\}$. Luego $(a, 1)(1, x)(1, y) \in (I \times J) \setminus \{(0, 0)\}$. Como $(1, xy) \notin I \times J$ pues $1 \notin I$ por ser un ideal propio de R_1, concluimos entonces que $(a, 1)(1, x)$ o $(a, 1)(1, y) \in I \times J$ pues es un ideal débilmente 2-absorbente. Por lo tanto x o $y \in J$, demostrando así que J es un ideal primo de R_2. Análogamente se demuestra que I es un ideal primo de R_1.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $J = R_2$ e I es un ideal 2-absorbente de R_1.

Por el teorema anterior, tenemos que $I \times J$ es un ideal 2-absorbente de R.

Caso 2. I es un ideal primo de R_1 y J es un ideal primo de R_2.

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in R$ tales que $(x_1, y_1)(x_2, y_2)(x_3, y_3) \in I \times J$. Entonces $x_1x_2x_3 \in I$ y $y_1y_2y_3 \in J$. Como son ambos ideales primos entonces algún $x_i \in I$ y algún $y_j \in J$ con $i, j = 1, 2, 3$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x_1 \in I$ y $y_1 \in J$, entonces $(x_1, y_1)(x_2, y_2) \in I \times J$. Por lo tanto $I \times J$ es un ideal 2-absorbente de R. $\square$

Demos un ejemplo que muestre por qué la hipótesis de que J sea distinto de cero es necesaria para que el teorema anterior se cumpla.

Ejemplo.2.2.6

Sean $M = \{0,4\}$, $R_1 = \mathbb{Z}_8 (+) M$, $I = \{0\} (+) M$ y R_2 un campo. Entonces $I \times \{0\}$ es un ideal débilmente 2-absorbente de $R_1 \times R_2$ tal que no es 2-absorbente.

Es claro que $I \times \{0\}$ es un ideal de $R_1 \times R_2$. Veamos que es un ideal débilmente 2-absorbente. Sean $((a_1, b_1), c_1), ((a_2, b_2), c_2), ((a_3, b_3), c_3) \in R_1 \times R_2$ tales que $((0,0), 0) \neq ((a_1, b_1), c_1)((a_2, b_2), c_2)((a_3, b_3), c_3) \in I \times \{0\}$. Entonces $c_1c_2c_3 = 0$ y $(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) = (0,4)$. Como R_2 es campo entonces $c_i = 0$ para algún $i = 1,2,3$.

Por lo visto en el ejemplo 2.2.3 sabemos que $a_i = 0$ para algún $i = 1,2,3$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 = 0$, entonces $(0,4) = (a_1, b_1) \in I$. Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $c_1 = 0$.

Entonces $((a_1, b_1), c_1)((a_2, b_2), c_2), ((a_1, b_1), c_1)((a_3, b_3), c_3) \in I \times \{0\}$.

Caso 2. $c_2 = 0$ o $c_3 = 0$.

Entonces $((a_1, b_1), c_1)((a_2, b_2), c_2) \in I \times \{0\}$ o $((a_1, b_1), c_1)((a_3, b_3), c_3) \in I \times \{0\}$ respectivamente.

Por los dos casos vemos que $I \times \{0\}$ es en efecto un ideal débilmente 2-absorbente. Pero $((2,0),0)((2,0),0)((2,0),0) \in I$ y $((2,0),0)((2,0),0) = ((4,0),0) \notin I$, lo cual prueba que no es un ideal 2-absorbente.

Teorema.2.2.6 Sean $R = R_1 \times R_2$ un anillo reducible, I un ideal propio no cero de R_1 y J un ideal de R_2. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R tal que no es 2-absorbente.
2. I es un ideal débilmente primo de R_1 que no es primo y $J = \{0\}$ es un ideal primo de R_2.

Demostración.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Supongamos que $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R tal que no es 2-absorbente. Si $J \neq \{0\}$ entonces, por el teorema 2.2.5, $I \times J$ es un ideal 2-absorbente, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $J = \{0\}$.

Sean $x, y \in R_2$ tales que $xy \in J$ y $a \in I \backslash \{0\}$. Entonces $(a,1)(1,x)(1,y) = (a, xy) \in (I \times J) \setminus \{(0,0)\}$. Como I es un ideal propio de R_1 entonces $1 \notin I$, por lo que $(1, xy) \notin I \times J$. Como $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente se tiene que $(a,1)(1,x)$ o $(a,1)(1,y) \in I \times J$, lo cual implica que x o $y \in J$. Por lo tanto J es un ideal primo y así tenemos que R_2 es un dominio entero.

Sea $xy \in I \backslash \{0\}$ para algunos $x, y \in R_1$. Como $(x,1)(y,1)(1,0) = (xy, 0) \in (I \times J) \setminus \{(0,0)\}$ y $(x,1)(y,1) = (xy,1) \notin I \times J$ entonces $(x,1)(1,0)$ o

$(y,1)(1,0) \in I \times J$. Por lo tanto x o $y \in I$, lo que prueba que I es débilmente primo. Veamos ahora que si I es primo entonces $I \times J$ es 2-absorbente. En efecto, sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in R$ tales que $(a,b)(c,d)(e,f) \in I \times J$. Como I y $J = \{0\}$ son ideales primos tenemos que $(a,b)(c,d)$ o $(a,b)(e,f)$ o $(c,d)(e,f) \in I \times J$, lo cual es una contradicción. Así obtenemos que I es un ideal débilmente primo que no es primo.

$[(2) \Rightarrow (1)]$ Supongamos que I es un ideal débilmente primo que no es primo y $J = \{0\}$ es un ideal primo. Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in R_1 \times R_2$ tales que $(a,b)(c,d)(e,f) \in (I \times J) - \{(0,0)\}$. Como I es débilmente primo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a \in I$. Como además R_2 es un dominio entero entonces $b = 0$ o $d = 0$ o $f = 0$.

Caso 1. $b = 0$ o $d = 0$.

Entonces $(a,b)(c,d) \in I \times J$.

Caso 2. $f = 0$.

Entonces $(a,b)(e,f) \in I \times J$.

Por lo tanto $I \times J$ es un ideal débilmente 2-absorbente.

Veamos que $I \times J$ no es un ideal 2-absorbente de R. Como I es un ideal débilmente primo de R_1 que no es primo entonces existen $x, y \in R_1$ tales que $xy = 0$ y $x, y \notin I$. Entonces $(x,1)(y,1)(1,0) = (0,0) \in I \times J$ pero $(x,1)(y,1),(x,1)(1,0),(y,1)(1,0) \notin I \times J$, por lo cual concluimos que $I \times J$ no es un ideal 2-absorbente de R. $\square$

Teorema.2.2.7 Sea $R = R_1 \times R_2 \times R_3$, donde R_1, R_2 y R_3 son anillos. Si I es un ideal débilmente 2-absorbente de R, entonces $I = \{(0,0,0)\}$ o I es un ideal 2-absorbente de R.

Demostración. Sea $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \neq \{(0,0,0)\}$. Entonces existe $(0,0,0) \neq (x,y,z) \in I$. Como $(x,y,z) = (x,1,1)(1,y,1)(1,1,z)$ y además I es un ideal débilmente 2-absorbente de R entonces $(x,y,1)$ o $(x,1,z)$ o $(1,y,z) \in I$, por lo que $1 \in I_j$ para algún $j = 1,2$ o 3, es decir, $I_1 = R_1$ o $I_2 = R_2$ o $I_3 = R_3$. Por lo tanto $I = I_1 \times I_2 \times R_3$ o $I = I_1 \times R_2 \times I_3$ o $I = R_1 \times I_2 \times I_3$. En cualquier caso tenemos que $I \nsubseteq Nil(R)$ pues $(1,0,0)$ o $(0,1,0)$ o $(0,0,1) \in I$ y $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \notin Nil(R)$. Por el Corolario 2.2.1, tenemos entonces que I es un ideal 2-absorbente de R. $\square$

Teorema.2.2.8 Sea $R = R_1 \times R_2 \times R_3$, donde R_1, R_2 y R_3 son anillos. Sean I_1 un ideal propio de R_1 e I_2 e I_3 ideales de R_2 y R_3 respectivamente, tales que $L = I_1 \times I_2 \times I_3 \neq \{(0,0,0)\}$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. L es un ideal débilmente 2-absorbente de R.

2. L es un ideal 2-absorbente de R.

3. L tiene alguna de las siguientes formas:

    a) $L = I_1 \times R_2 \times R_3$ e I_1 es un ideal 2-absorbente de R_1.

    b) $L = I_1 \times I_2 \times R_3$ con I_1, I_2 ideales primos de R_1 y R_2.

    c) $L = I_1 \times R_2 \times I_3$ con I_1, I_3 ideales primos de R_1 y R_3.

Demostración.

[(1) $\Rightarrow$ (2)] Como L es un ideal no cero débilmente 2-absorbente, por el Teorema 2.2.7, tenemos que L es un ideal 2-absorbente.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Como L es un ideal 2-absorbente de R e $I_1 \neq R_1$, por la demostración del teorema anterior, sabemos que $L = I_1 \times R_2 \times I_3$ o $L = I_1 \times I_2 \times R_3$ o $L = I_1 \times R_2 \times R_3$. Analicemos cada uno de esos casos:

Caso 1. $L = I_1 \times I_2 \times R_3$.

Veamos que I_1 es un ideal primo de R_1 y que I_2 es un ideal primo de R_2. En efecto, sean $a, b \in R_1$ y $c, d \in R_2$ tales que $ab \in I_1$ y $cd \in I_2$. Entonces:

$$(0,0,0) \neq (a,1,1)(1,cd,1)(b,1,1) = (ab,cd,1) \in L.$$

Como $(a,1,1)(b,1,1) \notin L$ pues $I_2 \neq R_2$ entonces $(a,cd,1)$ o $(b,cd,1) \in L$ y así a o $b \in I_1$. Por lo tanto I_1 es un ideal primo de R_1. Análogamente, tomando el producto $(ab,1,1)(1,c,1)(1,d,1)$, probamos que I_2 es un ideal primo de R_2.

Caso 2. $L = I_1 \times R_2 \times I_3$.

Es análogo al caso anterior. Con los productos $(a,1,1)(1,1,cd)(b,1,1)$ y $(ab,1,1)(1,1,c)(1,1,d)$ demostramos que I_1 e I_3 son ideales primos de R_1 y R_3 respectivamente.

Caso 3. $L = I_1 \times R_2 \times R_3$.

Sea $R^\star = R_2 \times R_3$. Por hipótesis, L es un ideal 2-absorbente de $R = R_1 \times R^\star$, lo cual implica que I_1 es un ideal 2-absorbente de R_1 por el Teorema 2.2.4.

Concluimos por los casos 1, 2 y 3 que $(2) \Rightarrow (3)$.

[(3) $\Rightarrow$ (1)] Tenemos los siguientes casos:

Caso 1. $L = I_1 \times R_2 \times R_3$ e I_1 es un ideal 2-absorbente de R_1.

Sea $R^\star = R_2 \times R_3$. Como I_1 es un ideal 2-absorbente de R_1 entonces $I_1 \times R^\star$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R por el Teorema 2.2.4.

Caso 2. $L = I_1 \times I_2 \times R_3$ con I_1 e I_2 ideales primos de R_1 y R_2.

Sean $(a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2), (a_3,b_3,c_3) \in R$ tales que

$$(0,0,0) \neq (a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2)(a_3,b_3,c_3) \in L.$$

Luego, $a_1a_2a_3 \in I_1$, $b_1b_2b_3 \in I_2$ y $c_1c_2c_3 \in R_3$. Como I_1 e I_2 son ideales primos de R_1 y R_2 respectivamente, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a_1 \in I_1$ y $b_2 \in I_2$. Así obtenemos que $(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) \in L$, con lo cual hemos demostrado que L es un ideal débilmente 2-absorbente.

Caso 3. $L = I_1 \times R_2 \times I_3$ con I_1 e I_3 ideales primos de R_1 y R_3.

Es análogo al caso anterior.

Por los casos 1, 2 y 3 tenemos entonces que $(3) \Rightarrow (1)$. $\square$

Terminamos este capítulo con un resultado que proporciona métodos para construir ejemplos de ideales débilmente 2-absorbentes.

Teorema.2.2.9 Sea A un ideal débilmente 2-absorbente de un anillo R. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. Si I es un ideal de R tal que $I \subseteq A$, entonces A/I es un ideal débilmente 2-absorbente de R/I.

2. Si $R_\circ$ es un subanillo de R, entonces $A \cap R_\circ$ es un ideal débilmente 2-absorbente de $R_\circ$.

3. Si S es un subconjunto multiplicativamente cerrado de R tal que $A \cap S = \emptyset$, entonces $S^{-1}A$ es un ideal débilmente 2-absorbente de $S^{-1}R$.

Demostración.

(1) Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/I$ tales que $0 \neq \overline{abc} \in A/I$. Entonces $(abc) + I = x + I$ con $x \in A - I$, de donde $abc - x = y \in I$. Luego $0 \neq abc = x + y \in A$.

Como A es un ideal débilmente 2-absorbente y $0 \neq abc \in A$ entonces ab o ac o $bc \in A$, lo cual demuestra que $\overline{ab}$ o $\overline{ac}$ o $\overline{bc} \in A/I$, es decir, A/I es un ideal débilmente 2-absorbente de R/I.

(2) Sean $a, b, c \in R_\circ$ tales que $0 \neq abc \in A \cap R_\circ$. En particular, tenemos que $abc \in A$. Como A es un ideal débilmente 2-absorbente entonces ab o ac o $bc \in A$. Y como $a, b, c \in R_\circ$ entonces $ab, ac, bc \in R_\circ$, por lo cual tenemos que ab o ac o $bc \in A \cap R_\circ$.

(3) Sean $\frac{x}{r}, \frac{y}{s}, \frac{z}{t} \in S^{-1}R$ tales que $0 \neq \frac{xyz}{rst} \in S^{-1}A$. Supongamos que $\frac{xy}{rs} \notin S^{-1}A$ y $\frac{xz}{rt} \notin S^{-1}A$. Veremos entonces que $\frac{yz}{st} \in S^{-1}A$.

En efecto, dado que $\frac{xyz}{rst} \in S^{-1}A$ existen $a \in A$ y $u \in S$ tales que $\frac{xyz}{rst} = \frac{a}{u}$. Luego existe $v \in S$ tal que $vuxyz = varst \in A$. Como $\frac{a}{u} \neq \frac{0}{1}$, entonces no existe $\tilde{v} \in S$ tal que $\tilde{v}a = \tilde{v}u\,(0) = 0$, así que $vuxyz = varst \neq 0$. Entonces $0 \neq vuxyz \in A$ y como A es un ideal débilmente 2-absorbente tenemos que $(vux)\,y \in A$ o $(vux)\,z \in A$ o $yz \in A$. Como $\frac{xy}{rs} = \frac{vuxy}{vurs}$ y $\frac{xz}{rt} = \frac{vuxz}{vurt}$, si $(vux)\,y \in A$ o $(vux)\,z \in A$ entonces $\frac{xy}{rs} \in S^{-1}A$ o $\frac{xz}{rt} \in S^{-1}A$, lo cual no es posible por hipótesis. Así que $yz \in A$ y por lo tanto $\frac{yz}{st} \in S^{-1}A$. $\square$

Capítulo 3. Anillos con la propiedad de que todos sus ideales propios son débilmente 2-absorbentes

En este capítulo se verán algunas caracterizaciones de anillos en los cuales todos sus ideales propios son ideales débilmente 2-absorbentes. Además, se concluirá con un ejemplo concreto de un anillo donde sus ideales propios tienen dicha propiedad. Todos estos resultados se pueden encontrar en la segunda sección de [5] .

Lema.3.1 Sean R un anillo e I un ideal de R tal que $I = (abc)$, donde $a, b, c \in Jac(R)$. Entonces I es un ideal débilmente 2-absorbente de R si y sólo si $abc = 0$.

Demostración.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $abc = 0$, entonces $I = \{0\}$ y es claro que I es débilmente 2-absorbente.

[$\Rightarrow$] Procedamos por contradicción. Supongamos que I es un ideal débilmente 2-absorbente y $0 \neq abc$. Como $abc \in I$ entonces ab o ac o $bc \in I$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $ab \in I$. Entonces existe $k \in R$ tal que $ab = k(abc)$, por lo cual $ab(1 - kc) = 0$. Como $c \in Jac(R)$ entonces $1 - kc$ es unidad por el Teorema 1.1.2. Por lo tanto $ab = 0$ y eso implica que $abc = 0$, lo cual es una contradicción. Así que $abc = 0$. $\square$

Teorema.3.1 Sea (R, M) un anillo local. Entonces todos los ideales propios de R son débilmente 2-absorbentes si y sólo si $M^3 = \{0\}$.

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente y sean $a, b, c \in M$. Como $I = (abc)$ es un ideal propio de R entonces es débilmente 2-absorbente por hipótesis. Luego, por el lema anterior, tenemos que $abc = 0$ y por lo tanto $M^3 = \{0\}$.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $M^3 = \{0\}$ y sea I un ideal propio de R. Si $I = \{0\}$, entonces es débilmente 2-absorbente. Sean $a, b, c \in R$ tales que $0 \neq abc \in I$. Si $a, b, c \in M$ entonces $abc \in M^3 = \{0\}$, lo cual no es posible. Por lo tanto $a \notin M$ o $b \notin M$ o $c \notin M$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \notin M$. Entonces a es una unidad de R por la Proposición 1.1.1. Por lo tanto $bc \in I$, lo que prueba que I es un ideal débilmente 2-absorbente de R. $\square$

Corolario.3.1 Sea (R, M) un anillo local tal que $M^2 = \{0\}$. Entonces todo ideal propio de R es 2-absorbente.

Demostración. Sean I un ideal propio de R y $a, b, c \in R$ tales que $abc \in I$. Como $M^3 = \{0\}$ entonces I es débilmente 2-absorbente por el teorema anterior. Así que si $abc \neq 0$ hemos terminado. Supongamos que $abc = 0$. Entonces alguno no es unidad. Veamos los siguientes casos:

Caso 1. Ninguno es unidad.

Entonces $a, b, c \in M$ y por lo tanto $ab = bc = ac = 0 \in I$ pues $M^2 = \{0\}$.

Caso 2. Uno de ellos es unidad.

Sin pérdida de generalidad supongamos que a y b no son unidades. Entonces c es unidad de R y $a, b \in M$. Por lo tanto $ab = 0 \in I$.

Caso 3. Dos de ellos son unidad.

Sin pérdida de generalidad supongamos que a y b son unidades de R. Como $abc = 0$ entonces $c = 0$ y por lo tanto $ac = bc = 0 \in I$.

Por los casos 1, 2 y 3 obtenemos que I es un ideal 2-absorbente. $\square$

Teorema.3.2 Sean (R_1, M_1) y (R_2, M_2) anillos locales y sea $R = R_1 \times R_2$. Entonces todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente si y sólo si $M_1^2 = M_2^2 = \{0\}$ y R_1 o R_2 es un campo.

Demostración.

[$\Rightarrow$] Supongamos que todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente y que $M_1^2 \neq \{0\}$. Sean $a, b \in M_1$ tales que $ab \neq 0$. Entonces $I = (ab) \times \{0\}$ es un ideal débilmente 2-absorbente pues es un ideal propio. Como $(a, 1)(b, 1)(1, 0) \in I \setminus \{(0, 0)\}$ y $(ab, 1) \notin I$ entonces $(a, 0)$ o $(b, 0) \in I$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $(a, 0) \in I$. Entonces existe $k \in R_1$ tal que $a = abk$, lo que implica que $a(1 - bk) = 0$. Como R_1 es un anillo local entonces $Jac(R_1) = M_1$ y como $b \in M_1$ entonces $1 - bk$ es unidad de R_1. Luego $a = 0$, lo cual contradice que $ab \neq 0$. Por lo tanto $M_1^2 = \{0\}$. De manera análoga vemos que $M_2^2 = \{0\}$.

Ahora supongamos que R_1 no es un campo. Entonces $M_1 \neq \{0\}$ y $J = M_1 \times \{0\}$ es un ideal propio de R; luego J es débilmente 2-absorbente. Supongamos también que R_2 no es un campo. Entonces $M_2 \neq \{0\}$ y como $M_2^2 = \{0\}$ se tiene que existe $a \in M_2$ tal que $a \neq 0$ y $a^2 = 0$. Sea $b \in M_1$ tal que $b \neq 0$. Entonces $(b, 1)(1, a)(1, a) = \left(b, a^2\right) = (b, 0) \in J \setminus \{(0, 0)\}$. Pero $(b, a) \notin J$ y $(1, 0) \notin J$, lo cual contradice que J sea débilmente 2-absorbente. Por lo tanto R_1 o R_2 es un campo.

[$\Leftarrow$] Supongamos que $M_1^2 = M_2^2 = \{0\}$ y sin pérdida de generalidad que R_2 es un campo. Notemos entonces que los únicos ideales de R_2 son $\{0\}$

y R_2. Por lo tanto los únicos ideales propios de R son de la forma $J \times R_2$ y $J \times \{0\}$ con J un ideal propio de R_1 y $R_1 \times \{0\}$.

Como $M_1^2 = \{0\}$, por el corolario anterior, tenemos que todo ideal propio de R_1 es 2-absorbente. Entonces, por el Teorema 2.2.4, tenemos que $J \times R_2$ es un ideal débilmente 2-absorbente de R, para J un ideal propio de R_1.

Como R_2 es campo, entonces $R_1 \times \{0\}$ es un ideal débilmente 2-absorbente.

Por último, veamos que $J \times \{0\}$ es un ideal débilmente 2-absorbente. Si $J = \{0\}$ es claro. Sean $J \neq \{0\}$ un ideal propio de R_1 y $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in R$ tales que $(0,0) \neq (a_1a_2a_3, b_1b_2b_3) \in J \times \{0\}$. Como $M_1^2 = \{0\}$, tenemos que $a_i \in M_1$ para un único a_i con $i = 1$ o 2 o 3. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 \in M_1$. Entonces a_3 y a_2 son unidades de R_1, lo cual implica que $a_1 \in J$. Además R_2 es un campo por lo que si $b_1b_2b_3 = 0$ entonces b_1 o b_2 o b_3 es cero. Sin pérdida de generalidad supongamos que $b_1 = 0$. Entonces $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \in J \times \{0\}$ y por lo tanto $J \times \{0\}$ es un ideal débilmente 2-absorbente. $\square$

Teorema.3.3 Sean R_1, R_2 y R_3 anillos y sea $R = R_1 \times R_2 \times R_3$. Entonces todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente si y sólo si R_1, R_2 y R_3 son campos.

Demostración.

[$\Leftarrow$] Supongamos que R_1, R_2 y R_3 son campos. Entonces todos sus ideales propios son cero. Por lo tanto, si J es un ideal propio de R, entra en alguno de los siguientes casos:

Caso 1. $J = \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$.

Es claro que J es un ideal débilmente 2-absorbente de R.

Caso 2. $J = \{0\} \times R_2 \times R_3$ o sus casos análogos $J = R_1 \times \{0\} \times R_3$ y $J = R_1 \times R_2 \times \{0\}$.

Como $\{0\}$ es un ideal 2-absorbente entonces, por el Teorema 2.2.8, tenemos que J es débilmente 2-absorbente.

Caso 3. $J = \{0\} \times \{0\} \times R_3$ o sus casos análogos $J = R_1 \times \{0\} \times \{0\}$ y $J = \{0\} \times R_2 \times \{0\}$.

De igual forma, por el Teorema 2.2.8, como $\{0\}$ es un ideal primo, tenemos que J es débilmente 2-absorbente.

Por lo tanto, por los casos 1, 2 y 3 tenemos que J es un ideal débilmente 2-absorbente de R.

[$\Rightarrow$] Supongamos que todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente. Supongamos también que algún R_i para $i = 1, 2, 3$ no es campo. Sin pérdida de generalidad supongamos que R_1 no es campo. Entonces existe un ideal propio $J \neq \{0\}$ de R_1. Sea $I = J \times \{0\} \times \{0\}$, el cual es débilmente 2-absorbente pues es un ideal propio de R. Sea $m \in J$ tal que $m \neq 0$. Entonces $(0,0,0) \neq (m,1,1)(1,0,1)(1,1,0) = (m,0,0) \in I$. Pero ni $(m,1,1)(1,0,1) = (m,0,1)$, ni $(m,1,1)(1,1,0) = (m,1,0)$, ni $(1,0,1)(1,1,0) = (1,0,0)$ pertenecen a I, lo cual contradice que I sea débilmente 2-absorbente. Por lo tanto R_1, R_2 y R_3 son campos. $\square$

Observemos que en la demostración de $[\Leftarrow]$ del teorema anterior los ideales no sólo son débilmente 2-absorbentes. Veamos en el siguiente corolario una propiedad más fuerte que cumplen los ideales, en ese caso.

Corolario.3.2 Sea R un anillo tal que $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ con R_1, R_2 y R_3 campos. Entonces todo ideal propio de R es 2-absorbente.

Demostración. Es claro que todo ideal propio J de R es de la forma dada en los tres casos de la demostración anterior. En el caso 1 tenemos que $J = \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$, el cual es también un ideal 2-absorbente. Si J es como en los casos 2 y 3, tenemos que el Teorema 2.2.8 no sólo implica que el ideal sea débilmente 2-absorbente sino que también implica que J sea un ideal 2-absorbente, con lo que queda demostrado el corolario. $\square$

Lema.3.2 Supongamos que todo ideal propio de un anillo R es débilmente 2-absorbente. Entonces R tiene a lo más tres ideales máximos distintos.

Demostración. Supongamos que existen M_1, M_2, M_3 y M_4 ideales máximos distintos de R. Sea $I = M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Observemos que M_1, M_2, M_3 son ideales primos mínimos sobre I. En efecto, sea J un ideal primo de R tal que $I \subset J \subset M_i$ con $i = 1,2,3$. Como $I = \bigcap\limits_{i=1}^{3} M_i \subset J$ entonces, por el Corolario 1.1.1, existe $j \in \{1,2,3\}$ tal que $M_j \subset J \subset M_i$. Como M_j es un ideal máximo entonces la contención sucede únicamente cuando $j = i$. Por lo tanto, $M_i \subset J \subset M_i$, lo cual implica que $J = M_i$. Luego M_1, M_2, M_3 son ideales primos mínimos sobre I.

Por el Teorema 2.1.2, I no es un ideal 2-absorbente de R, pero por hipótesis, es débilmente 2-absorbente. Entonces, por el Teorema 2.2.2, tenemos que $I^3 = \{0\}$. Como M_1, M_2, M_3 son ideales máximos entonces son coprimos por pares, así que por el Teorema 1.1.5, $I = M_1 M_2 M_3$. Entonces $I^3 = M_1^3 M_2^3 M_3^3 = \{0\} \subset M_4$. Por la Proposición 1.1.2, tenemos que $M_i \subset M_4$ para algún $i \in \{1,2,3\}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R tiene a lo más tres ideales máximos distintos. $\square$

Teorema.3.4 Sea R un anillo. Entonces R tiene la propiedad de que todo ideal propio es débilmente 2-absorbente si y sólo si alguno de los siguientes enunciados se cumple:

1. (R, M) es un anillo local, con $M^3 = \{0\}$.

2. R es isomorfo a $R_1 \times F$, donde R_1 es un anillo local cuyo ideal máximo M cumple que $M^2 = \{0\}$ y F es un campo.

3. R es isomorfo a $F_1 \times F_2 \times F_3$, donde F_1, F_2 y F_3 son campos.

   Demostración.

   [$\Leftarrow$] Si se cumple (1), entonces por el Teorema 3.1, hemos terminado. Si se cumple (2), entonces por el Teorema 3.2, también hemos terminado. Y si se cumple (3), por el Teorema 3.3, también queda demostrado.

   Por lo tanto si se cumple (1) o (2) o (3) tenemos entonces que todo ideal propio de R es un ideal débilmente 2-absorbente.

   [$\Rightarrow$] Supongamos que todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente. Por el Lema 3.2, sabemos que R tiene a lo más tres ideales máximos distintos. Veamos los siguientes casos:

   Caso 1. R tiene un único ideal máximo.

   Sea M dicho ideal. Por el Teorema 3.1, tenemos que $M^3 = \{0\}$, y tenemos (1).

   Caso 2. R tiene exactamente dos ideales máximos distintos.

   Sean M_1 y M_2 dichos ideales. Entonces $Jac(R) = M_1 \cap M_2$. Como es un ideal propio entonces es débilmente 2-absorbente, al igual que el ideal (abc), donde $a, b, c \in Jac(R)$. Por el Lema 3.1, tenemos que $abc = 0$, lo cual implica que $Jac(R)^3 = M_1^3 \cap M_2^3 = \{0\}$. Como M_1 y M_2 son ideales máximos distintos entonces son coprimos. Luego, por el lema 1.1.1, tenemos que M_1^3 y M_2^3 son coprimos.

   Por otro lado, R/M_1^3 y R/M_2^3 son anillos locales con ideales máximos M_1/M_1^3 y M_2/M_2^3 respectivamente. En efecto, de lo contrario existiría otro ideal máximo de R/M_1^3 de la forma I/M_1^3 con I un ideal de R y $M_1^3 \subset I$. Como el campo $\left(R/M_1^3\right)/\left(I/M_1^3\right)$ es isomorfo a R/I entonces I es ideal máximo de R. Luego, $I = M_2$ pues no hay otros ideales máximos en R, pero si $\pi : R \longrightarrow R/M_1^3$ es el homomorfismo canónico, entonces $\pi(M_2) = \left(M_2 + M_1^3\right)/M_1^3 = R/M_1^3$ pues M_1^3 y M_2^3 son coprimos. Luego M_1/M_1^3 es el único ideal máximo de R/M_1^3. Análogamente vemos que $\left(R/M_2^3, M_2/M_2^3\right)$ es un anillo local.

   Por el Teorema 1.1.5 tenemos entonces que R es isomorfo a $R/M_1^3 \times R/M_2^3$ y por el Teorema 3.2, sabemos que R es isomorfo a $R_1 \times F$, donde R_1 es un anillo local cuyo ideal máximo M cumple que $M^2 = \{0\}$ y F es un campo, es decir, se satisface (2).

   Caso 3. R tiene exactamente tres ideales máximos.

   Sean M_1, M_2 y M_3 dichos ideales. Entonces $Jac(R) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ es débilmente 2-absorbente. Por lo demostrado en el Lema 3.2, sabemos que M_1, M_2 y M_3 son ideales primos mínimos sobre $Jac(R)$. Por el Teorema

2.1.2, $Jac\,(R)$ no es un ideal 2-absorbente pues tiene más de dos ideales primos mínimos distintos sobre él. Por el Teorema 2.2.2, sabemos entonces que $Jac\,(R)^3 = \{0\}$. Como $Jac\,(R)^3 = M_1^3 \cap M_2^3 \cap M_3^3$ con M_1^3, M_2^3 y M_3^3 coprimos por pares, entonces por el Teorema 1.1.5, R es isomorfo a $R/M_1^3 \times R/M_2^3 \times R/M_3^3$. Por el Teorema 3.3, tenemos que para $i = 1, 2, 3$, $R/M_i^3 = F_i$, donde F_i es un campo. Por lo tanto R es isomorfo a $F_1 \times F_2 \times F_3$ con F_1, F_2 y F_3 campos, es decir, se satisface (3). $\square$

Corolario.3.3 Sea $R = \mathbb{Z}_n$ con n un entero positivo. Entonces todo ideal propio de R es débilmente 2-absorbente si y sólo si se cumple alguno de los siguientes enunciados:

1. $n = q^3$ para algún primo q.
2. $n = p^2 q$ para algunos primos distintos q y p.
3. $n = q_1 q_2 q_3$ para algunos primos distintos q_1, q_2 y q_3.

Demostración.

Basta traducir las condiciones 1, 2 y 3 del teorema anterior al anillo $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(1) dice que $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tiene un único ideal máximo $M = q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ con q primo y tal que $M^3 = \{0\}$, así que $n = q^3$.

(2) dice que $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo a un anillo de la forma $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ con p y q primos distintos, así que $n = p^2 q$.

(3) dice que $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es isomorfo a un anillo de la forma $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z}$ con q_1, q_2 y q_3 primos distintos, así que $n = q_1 q_2 q_3$. $\square$

Bibliografía

[1] Atiyah, M., & Macdonald, I. G. (1969). Introduction to commutative algebra. Oxford: Addison-Wesley Publishing company.

[2] Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). Abstract algebra. John Wiley and Sons.

[3] Huckaba, J. A. (1988). Commutative rings with zero divisors. New York: Marcel Dekker.

[4] Badawi, A. (2007). On 2-absorbing ideals of commutative rings. Bull. Austral. Math. Soc., 75, 417-428.

[5] Badawi, A., & Darani, A. Y. (2013). On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings. Houston Journal of Mathematics, 39(2), 441-452.

[6] Anderson, D. D., & Winders, M. (2009). Idealization of a Module. Journal of Commutative Algebra, Vol.1, no. 1, 3-56.