Universidad Nacional Autónoma de México

Doctorado en Ciencias Matemáticas

Centro de Ciencias Matemáticas

Propiedades Combinatorias de los Ideales y el Orde de Katětov

T E S I S

PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:
JOSÉ DE JESÚS PELAYO GÓMEZ

Director de Tesis:
Dr. Michael Hrušák
Centro de Ciencias Matemáticas

UNAM, Campus Morelia, Septiembre de 2018

Índice general

Resumen

En esta tesis lo que tratamos principalmente son temas de combinatoria infinita, para esto nos apoyamos de las herramientas de la teoría de conjuntos, como por ejemplo el *forcing*, que es simplemente la herramienta desarrollada por Paul Cohen para probar la consistencia de la negación de la hipótesis del continuo. A partir de esta herramienta desarrollada por Cohen, hubo lo que podríamos llamar un *boom* en cuanto a pruebas de consistencia se refiere. Otra herramienta muy utilizada en este trabajo es lo que se conoce como teoría de juegos, en particular utilizamos la teoría de juegos infinita. En resumen y de forma simple, lo que intentamos en este trabajo fue abordar problemas de combinatoria, en particular combinatoria de ideales sobre ω, así como temas muy relacionados.

Palabras destacadas: Forcing, combinatoria infinita, ideales, filtros, números naturales.

Preface

In this thesis we are mainly dealing with infinite combinatorial themes, for this we rely on the tools of set theory, such as *forcing*, which is simply the tool developed by Paul Cohen to test the consistency of the denial of the continuum hypothesis. From this tool developed by Cohen, there was what we could call a *boom* in terms of consistency tests. Another tool widely used in this work is what is known as game theory, in particular we use the infinite game theory. In summary and in a simple way, what we tried in this work was to address combinatorial problems, in particular combinatorial ideals about ω, as well as very related topics.

Agradecimientos

Me gustaría poner a todas las personas por las que gracias a ellas se realizó este trabajo, aunque a veces es imposible mencionarlas a todas. Antes que nada doy gracias a Dios por permitirme realizar este trabajo, dándome todos los medios necesarios para llegar a este punto de mi vida.

Doy gracias a Michael Hrušák, por asesorarme durante el doctorado, principalmente por todos sus comentarios y ayudas en todos los temas tratados en la tesis, así como las sugerencias y observaciones tanto en la tesis, como durante toda la trayectoria. También aprovecho para agradecer a David Fernández que envió bastantes comentarios y me hizo ver algunos errores no tan despreciables que tenía en la tesis. Gracias a Ariet Ramos que me ayudó a mejorar la redacción y gracias a David Meza y a Fernando Hernández por sus observaciones que me ayudaron a mejorar este trabajo y a eliminar los errores que se presentaron.

Aprovecho para dar gracias a mi familia, a mis papás que siempre me han apoyado en todo, a mis hermanos, a mis tías y tíos y a mis primos. Todos ellos siempre están disponibles cuando se necesitan y sé que cuento con su apoyo incondicional. Cada uno de ellos es importante, gracias por enseñarme todo lo que soy y mostrarme lo que me falta aprender.

Doy gracias a mis amigos, que me han ayudado muchas veces cuando no entiendo algo de matemáticas o simplemente en la vida cotidiana. Del mismo modo doy gracias a mi novia que ha estado para mí en todo momento y sobre todo gracias por sus consejos y ayudas.

También doy gracias a todos los profesores que me ayudaron a ser el matemático que soy, porque gracias a sus enseñanzas es que puedo terminar este trabajo de doctorado, lo cual no sería posible sin todos los conocimientos que me han transmitido y todo el empeño que han dedicado a su trabajo.

Aprovecho por último para dar gracias a las personas que me ayudaron en la parte administrativa, que es igualmente muy importante para concluir con esta etapa de mi vida, sobre todo gracias a Armando Sepúlveda que me ha ayudado incontables veces.

Capítulo 0

Prefacio

En esta tesis lo que tratamos principalmente son temas de combinatoria infinita, para esto nos apoyamos de las herramientas de la teoría de conjuntos, como por ejemplo el *forcing*, que es simplemente la herramienta desarrollada por Paul Cohen para probar la consistencia de la negación de la hipótesis del continuo. A partir de esta herramienta desarrollada por Cohen, hubo lo que podríamos llamar un *boom* en cuanto a pruebas de consistencia se refiere. Otra herramienta muy utilizada en este trabajo es lo que se conoce como teoría de juegos, en particular utilizamos la teoría de juegos infinita. En resumen y de forma simple, lo que intentamos en este trabajo fue abordar problemas de combinatoria, en particular combinatoria de ideales sobre ω, así como temas muy relacionados.

En el primer capítulo se ha hecho una recopilación de las herramientas que considero necesarias para poder entender los cinco capítulos subsecuentes. Un trabajo que es altamente recomendable leer, ya que contiene muchas de las proposiciones abordadas en el primer capítulo, es la tesis doctoral de David Meza Alcántara. Además, el lector deberá estar familiarizado con temas de teoría de conjuntos, como *forcing*, ya que en este trabajo no se hace ningún resumen de los conocimientos necesarios de este tema. Un libro recomendado es *Set Theory* de Kenneth Kunen, el cual contiene todo los temas básicos necesarios para entender sobre todo los capítulos cinco y seis, además sería altamente recomendable tener conocimientos acerca de teoría descriptiva de conjuntos así como teoría de juegos y temas relacionados a determinación.

Entrando ya más en el contenido de investigación que se hizo para este trabajo, se resume básicamente tal cuál está dividido por capítulos, de modo que en muchas ocasiones para entender cierta demostración o cierto teorema, es necesario estar familiarizado con la notación que se usó en secciones o capítulos previos, por lo que es recomendable una lectura secuencial y no capítulos o secciones de forma aislada.

El segundo capítulo básicamente lo dividimos en dos secciones, debido a que son dos temas en cierto modo independientes, pero estos dos temas quedaron en el mismo capítulo porque las demostraciones son muy similares y en ambos se usa el juego *corta y elige*. La primera sección es la respuesta a una pregunta de J. Zapletal. Dado un ideal sobre ω, el juego corta y elige del ideal consiste en que el jugador I parte a los naturales y el jugador II debe elegir uno de los pedazos y un número natural en el pedazo elegido, entonces el jugador parte el pedazo elegido y así sucesivamente. Hay muchas variantes que se pueden pensar de dicho juego, nosotros no sólo abordamos esa variante sino que en los capítulos cuarto y quinto usamos otras dos versiones del juego, pero todas ellas del mismo estilo. La pregunta de Zapletal es si existe un ideal Borel alto tal que el jugador II gana el juego para ese ideal, nosotros respondimos afirmativamente construyendo un ideal F_σ tal que el jugador II gana. Este ideal construido es mucho más pequeño en el orden de Katětov que los ideales que ya se conocían, por ejemplo no está encima del ideal de la gráfica de Rado, además de que es mucho más pequeño que los ideales *conv* y $\mathcal{ED}$.

En la segunda sección del capítulo segundo, encontramos ideales definibles $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ tales que $\mathcal{I}^+ \rightarrow (\mathcal{J}^+)^2_2$. La técnica usada para la demostración fue apoyarnos del juego corta y elige, además la misma herramienta utilizada permitiría construir ideales que satisfagan una propiedad un poco más fuerte como $\mathcal{I}^+ \rightarrow (\mathcal{J}^+)^2_n$. Esa propiedad no se explica de manera explícita pero el lector se puede dar cuenta fácilmente como modificar las pruebas para logar el cometido. Aún sigue abierta la pregunta de Michael Hrušák si existe $\mathcal{I}$ un ideal Borel alto tal que $\mathcal{I}^+ \rightarrow (\mathcal{I}^+)^2_2$; ninguno de los ideales construidos es candidato para ser testigo de esa propiedad (en caso de que fuera cierta), porque todos los ideales F_σ no satisfacen la propiedad fuerte de Ramsey.

En el capítulo tercero se habla acerca de los números de Ramsey, para esto, se generalizan propiedades que ya habían sido definidas por otros autores, por ejemplo la propiedad universal de la gráfica de Rado se generaliza para coloraciones con más de dos colores y también para posibles subconjuntos de tamaño mayor que dos (hiperaristas en vez de aristas). Con las definiciones correctas se hace una generalización de lo que es el ideal de la gráfica de Rado y se prueba que un ideal satisface la propiedad de Ramsey con n-hiperaristas, k colores y conjuntos $\leq l$ cromáticos si y sólo si el ideal no está por encima del ideal $\mathcal{R}^n_{k,l}$. Con estas herramientas se construyen ideales que satisfacen algunas pero no otras de las propiedades Ramsey. Por ejemplo, era una pregunta abierta si las propiedades $\omega \rightarrow (\mathcal{I}^+)^2_2$ y $\omega \rightarrow (\mathcal{I}^+)^2_3$ son equivalentes, esa pregunta fue respondida por D. Meza, M. Hrušák, C. Uzcategui y E. Thümmel ([13]), en este trabajo se demostró que no sólo esas dos propiedades no son equivalentes, sino que con cualquier cantidad de colores, las propiedades no son equivalentes.

En el capítulo cuarto continuamos estudiando propiedades de tipo Ramsey, pero ahora nos centramos en unas propiedades más débiles y que no están caracterizadas por alguna de las gráficas de Rado. En este capítulo estudiamos el ideal de Solecki y algunos ideales relacionados con este ideal, por ejemplo el ideal que llamamos $\mathcal{S}_\omega$, el cual es un ideal $F_{\sigma\delta}$ que tiene propiedades muy parecidas al ideal de Solecki, pero se diferencían justamente usando el juego parte y elige, ya que el juego con uno de los ideales el jugador I tiene estrategia ganadora y en el otro ideal es el jugador II el que tiene estrategia ganadora. En la segunda sección escribimos la respuesta a una pregunta de Michael Hrušák acerca de si el único ideal K-uniforme y F_σ es el ideal $\mathcal{ED}_{fin}$. Resulta que no es así, sino que hay otros ideales tales que todas sus restricciones son equivalentes al mismo ideal y siendo ideales F_σ. El ejemplo que dimos de nuevo tiene que ver con propiedades tipo Ramsey, en este caso usamos el teorema de Ramsey finito en la prueba y usamos el hecho que la propiedad de Fubini no la satisface el ideal G_{fc}, pero el ideal $\mathcal{ED}_{fin}$ sí. Terminamos ese capítulo con otro orden en ideales, pero estamos centrados en esta tesis en ideales definibles y resultó que el orden de Katětov-Rudin no es interesante para ideales definibles, justamente el resultado más importante de la sección es que todos los ideales definibles son equivalentes en el orden de Katětov-Rudin.

En el capítulo quinto nos centramos en otro variante del juego corta y elige. Este juego resulta muy interesante porque tal como vemos en el capítulo, si un ultrafiltro es Ramsey, entonces el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego definido por el ultrafiltro y por otro lado existen ultrafiltros Hausdorff en los cuales el jugador I tiene estrategia ganadora, por lo que el juego sirve para diferenciar entre ultrafiltros Ramsey y Hausdorff. Un ultrafiltro es Hausdorff si el ultraproducto con dicho ultrafiltro genera una topología Hausdorff, nosotros definimos otra topología interesante en el grupo booleano numerable (una topología de grupo) y esto nos da una definición natural, cuando el ultraproducto de esa topología con un ultrafiltro genera una topología Hausdorff, en este caso decimos que el ultrafiltro es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff. En el mismo capítulo damos varias propiedades intermedias entre Hausdorff y Selectivo (por ejemplo $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff) y nos apoyamos de ideales definibles para generar ultrafiltros que satisfacen cada una de las propiedades.

La tesis concluye en el capítulo sexto. La pregunta principal del capítulo es ¿Qué gráfica genérica es agregada un forcing? Respondemos la pregunta para los forcings más conocidos, por ejemplo los forcings de Cohen, Random y Hechler agregan a la gráfica de Rado. Vemos ejemplos con los forcing de Sacks, Mathias y Laver, todo estos forcings agregan a gráficas conocidas pero no la gráfica de Rado y al final vemos que existen forcings que agregan gráficas genéricas que no son isomorfas a ninguna gráfica del modelo base.

En resumen la tesis trata temas que podría parecer aislados, pero cuando vamos a los problemas, demostraciones y técnicas que estamos utilizando, nos damos cuenta que aparecen conceptos que se repiten varias veces, como por ejemplo los juegos del tipo corta y elige, gráficas tipo Rado, así como el orden de Katětov, que es una parte medular que fue estudiada el doctorado y presentada en síntesis en este trabajo de tesis.

Capítulo 1

Preliminares

La notación usada en esta tesis es la notación usual de teoría de conjuntos. Cada número natural es el conjunto de números naturales predecesores de este número y $\emptyset$ denota el conjunto vacío, que es a la vez el primer número natural ($n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$). Además ω representa los números naturales $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, con ω_1 nos referimos al primer ordinal no numerable y denotaremos por A^B como el conjunto de funciones de B en A. Así, por ejemplo 2^ω es la familia de funciones de los naturales en $\{0, 1\}$, mientras que $2^{<\omega}$ representa la familia de funciones de algún natural n en 2 (visto de otro modo, 2^ω es el conjunto de sucesiones de ω en 2 y $2^{<\omega}$ es el conjunto de sucesiones de longitud finita). De manera análoga ω^ω es el conjunto de sucesiones de ω y $\omega^{<\omega}$ es el conjunto de sucesiones de longitud finita de los naturales.

También vamos a denotar por $[A]^\kappa = \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}$ y

$$[A]^{<\kappa} = \{X \subseteq A : |X| < \kappa\},$$

para κ un cardinal cualquiera (finito o infinito).

Definición 1. *Un ideal $\mathcal{I}$ en un conjunto X es una colección de subconjuntos* *de X tal que:*

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ *pero* $X \notin \mathcal{I}$,
- *Si* $A \subseteq B$ *y* $B \in \mathcal{I}$, *entonces* $A \in \mathcal{I}$ *y*
- *Si* $A \in \mathcal{I}$ *y* $B \in \mathcal{I}$, *entonces* $A \cup B \in \mathcal{I}$.

Definición 2. *Podemos definir de manera dual la noción de filtro. Así, un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:*

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ *y* $X \in \mathcal{F}$,
- *Si* $A \supseteq B$ *y* $B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \in \mathcal{F}$ *y*
- *Si* $A \in \mathcal{F}$ *y* $B \in \mathcal{F}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Para que las definiciones anteriores tengan sentido es necesario que X sea un conjunto infinito. Los ideales (y filtros) en los que estamos interesados son los que se llaman propios, un ideal $\mathcal{I}$ es propio si $Fin(X) \subseteq \mathcal{I}$, donde $Fin(X) = X^{<\omega}$. La misma familia $Fin(X)$ es un ideal sobre X. De manera análoga sólo consideramos filtros que contengan a $Fr(X) = \{A \subseteq X : X \backslash A \in X^{<\omega}\}$, el filtro de Fréchet sobre X.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre X. El filtro dual de $\mathcal{I}$ es $\mathcal{I}^* = \{A \subseteq X : X \setminus A \in \mathcal{I}\}$ y análogamente definimos el ideal dual. Si $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}$ entonces diremos que A es un conjunto positivo de $\mathcal{I}$ y lo denotaremos por $X \in \mathcal{I}^+$.

1.1. El orden de Katětov

Los ideales en los que estamos interesados son los ideales sobre los naturales. Dado $\mathcal{I}$ un ideal sobre los naturales podemos identificar $\mathcal{P}(\omega)$ con el conjunto de Cantor 2^ω y de este modo $\mathcal{I}$ será un subconjunto del conjunto de

Cantor, por lo que podemos preguntarnos si $\mathcal{I}$ tiene propiedades topológicas o de medida (si es abierto, cerrado, analítico, Borel, F_σ, magro, de medida positiva, etc).

Vamos a decir que $\mathcal{I}$ es un ideal alto si para cada $A \in [\omega]^\omega$ existe $B \in \mathcal{I}$ tal que $A \cap B$ es infinito. Los ideales en los que estamos interesados son los ideales altos, más adelante se verá por qué.

En esta sección vamos a definir ciertos órdenes en ideales, que es lo que usaremos a lo largo de toda la tesis. El orden que más vamos a trabajar es el llamado orden de Katětov.

Definición 3. *Sea $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos ideales sobre ω. Definimos los siguientes órdenes.*

- *(Orden de Katětov) Diremos que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ si existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ siempre que $A \in \mathcal{I}$.*
- *(Orden de Katětov-Blass) Diremos que $\mathcal{I} \leq_{KB} \mathcal{J}$ si existe una función finito a uno $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ siempre que $A \in \mathcal{I}$.*
- *(Orden de Rudin-Keisler) Diremos que $\mathcal{I} \leq_{RK} \mathcal{J}$ si existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ si y sólo si $A \in \mathcal{I}$.*
- *(Orden de Rudin-Katětov) Diremos que $\mathcal{I} \leq_R \mathcal{J}$ si existe una función $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{J}$ implica que $A \in \mathcal{I}$.*

Diremos que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son Katětov equivalentes si $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$ y $\mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}$ y de modo análogo para los demás órdenes.

El único orden que no se había definio anteriormente es el orden de Rudin-Katětov, que como veremos más adelante realmente no es tan interesante en ideales definibles, por lo que estudiaremos mucho más a fondo el orden de Katětov.

Acerca del orden de Katětov hay bastantes resultados, presentaré algunos ejemplos (ya conocidos) a continuación, para que se vea el alma de este trabajo. Al inicio de la sección dije que estamos interesados sólo en ideales sobre los naturales, pero en vez de tomar los naturales podríamos tomar cualquier otro conjunto numerable y con una biyección entre ese conjunto y los naturales tendríamos una traducción del ideal a un ideal en ω.

Si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, donde la función identidad es testigo de esa desigualdad. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre ω y $A \in \mathcal{I}^+$, entonces podemos definir $\mathcal{I} \restriction A$ un ideal sobre A (un conjunto numerable) de modo que

$$\mathcal{I} \restriction A = \{I \cap A : I \in \mathcal{I}\}.$$

No es difícil notar que si $A \in \mathcal{I}^+$, entonces $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{I} \restriction A$ y la función testigo es la inclusión de A en ω (la identidad de A en A).

Lo primero que vamos a estudiar son propiedades tipo Ramsey. En los siguientes tres capítulos veremos muchas más propiedades tipo Ramsey de los ideales, se pueden consultar para más información al respecto. Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 4. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Diremos que $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ si para cada función $f : [\omega]^2 \to 2$ existe $A \in \mathcal{I}^+$ homogéneo, es decir $|f[[A]^2]| = 1$. Si no se satisface dicha propiedad escribiremos $\omega \not\to (\mathcal{I}^+)^2_2$*

El teorema clásico de Ramsey establece que $\omega \to (Fin^+)^2_2$ ([8], para más información al respecto). Una de las primeras preguntas que surgen al respecto es ¿Qué ideales satisfacen esta propiedad tipo Ramsey? Trataremos de ver ejemplos tanto de ideales que satisfacen la propiedad así como de ideales donde falla la propiedad.

Una gráfica G sobre los naturales es un subconjunto de $[\omega]^2$ (a los elementos de G se les llama usualmente aristas). En el artículo [5] se define una gráfica R llamada la gráfica de Rado que satisface que es universal, es decir, para cada gráfica G existe $f : \omega \to \omega$ tal que $f[G]$ es un encaje como subgráfica inducida de R. Dada G una gráfica sobre los naturales podemos definir $\mathcal{G}$ un ideal sobre ω, generado por los clanes (o subgráficas completas) y los anticlanes (o subgráficas vacías). Cuando la gráfica es la gráfica de Rado, el ideal generado por los clanes y anticlanes es llamado el ideal de la gráfica de Rado y denotamos a dicho ideal por $\mathcal{R}$. En el capítulo tres se estudia a profundidad el ideal de la gráfica de Rado, si se desea una definición explícita se puede consultar ese capítulo o el artículo [5].

Observación 5 ([24])**.** *Sea $\mathcal{R}$ el ideal de la gráfica de Rado, entonces $\omega \not\to (\mathcal{R}^+)^2_2$.*

La prueba de la observación anterior es muy fácil, porque coloreamos justo con la relación R y de este modo los subconjuntos monocromáticos (homogéneos) son las gráficas completas y las gráficas vacías, por lo que están en el ideal.

El siguiente teorema nos muestra que el ideal de la gráfica de Rado está muy relacionado con la propiedad Ramsey.

Proposición 6 ([24])**.** *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Entonces $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{I}$ si y sólo si $\omega \not\to (\mathcal{I}^+)^2_2$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{I}$, entonces existe $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$ siempre que A sea un homogéneo de la gráfica de Rado. Definimos $c : [\omega]^2 \to 2$ dada por $c(\{n, m\}) = 0$ si y sólo si $f(n)$ y $f(m)$ están relacionadas según R o $f(n) = f(m)$ y $c(\{n, m\}) = 1$ si $\{f(n), f(m)\}$ no es una arista de R. Observemos que si $X \in \mathcal{I}^+$ fuera un homogéneo, entonces

$f[X]$ sería un homogéneo positivo del ideal de la gráfica de Rado, cosa que es imposible.

Ahora, si $\omega \not\to (\mathcal{I}^+)^2_2$, entonces existe $c : [\omega]^2 \to 2$ una coloración tal que todos los monocromáticos están contenidos en el ideal. Podemos pensar a la coloración como una gráfica, en vez de coloración y dos vértices están relacionados en la gráfica si tienen color 0 y no están relacionados si tienen color 1. Como R es universal, entonces existe $f : \omega \to \omega$ un encaje de modo que la coloración queda encajada como subgráfica inducida en R, dicha función es testigo de $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{I}$. ■

El teorema anterior nos dice que el ideal mínimo que no satisface el teorema clásico de Ramsey es el ideal de la gráfica de Rado. Los ideales en los que estamos interesados son los ideales Borel altos, esto es porque si un ideal no es alto se tiene el siguiente resultado.

Observación 7. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre ω que no es alto, entonces $\mathcal{I}$ es Katětov equivalente a Fin.*

Demostración. Si $\mathcal{I}$ no es alto entonces existe $B \subseteq \omega$ tal que si $A \in [B]^\omega$. Cualquier función biyectiva entre B y ω es testigo de que $Fin \leq_K \mathcal{I}$ ■

Cuando $\mathcal{I}$ es un ideal no alto en particular $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$.

Para comenzar con un ejemplo veamos el ideal $\mathcal{ED}$ definido en $\omega \times \omega$ como $A \in \mathcal{ED}$ si y sólo si existe k un número natural tal que $A \subseteq k \times \omega \cup B$ donde $|B \cap \{i\} \times \omega| \leq k$. Dicho de otro modo, $\mathcal{ED}$ está generado por las columnas de $\omega \times \omega$ y funciones, y así cada elemento del ideal está cubierto por una cantidad finita de barras verticales y a partir de cierto momento sólo tiene cuando mucho k elementos en cada columna vertical.

Observación 8 ([10])**.** $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{ED}$

La observación se sigue porque dados $x, y \in \omega \times \omega$, sólo hay dos opciones para x y y, o están en la misma columna, o están en diferente columna. En caso de que estén en la misma columna entonces podemos pintarlos de color 0 y si están en distinta columna los pintamos de color 1. Esto nos da una coloración de las parejas de elementos de $\omega \times \omega$ tal que cada homogéneo está en $\mathcal{ED}$ y así tenemos el resultado deseado. A pesar de que el ideal $\mathcal{ED}$ no satisface la propiedad tipo Ramsey clásica, sí satisface una propiedad un poco más débil. En los capítulos 3 y 4 veremos ejemplos de ideales que satisfacen esa propiedad tipo Ramsey, en particular el ideal $\mathcal{ED}$ es uno de ellos.

Definición 9. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en ω, diremos que $\omega \to (\omega, \mathcal{I}^+)^2_2$ si para cada coloración $c : [\omega]^2 \to 2$ existe un A infinito de color* 0 *o un B positivo de color* 1*.*

La definición anterior a pesar de que no parece simétrica, sí lo es, porque para cada coloración, podemos colorear con los colores invertidos y tenemos otra coloración en la que los papeles se invierten. Podríamos decir que la traducción de esa propiedad en palabras es: si falla la propiedad Ramsey, entonces no puede fallar con una coloración donde los monocromáticos para alguno de los colores son conjuntos finitos.

Definición 10. *Dados $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ dos ideales sobre los naturales, podemos definir algunos otros ideales como sigue:*

- *$\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$ es el ideal en $\omega \times \{0\} \cup \omega \times \{1\}$ y decimos que X está en el ideal si restringido a cada parte está en el ideal correspondiente.*

- *([13]) $\widetilde{\mathcal{I}}$ es un ideal definido en $\omega \times \omega$ dado por $A \in \widetilde{\mathcal{I}}$ si y sólo si*

  $$(\exists k \in \omega)(\forall i > k)(|A \cap \{i\} \times \omega| \leq k) \wedge (\forall n \in \omega)(\{i \in \omega : (n, i) \in A\} \in \mathcal{I}).$$

- $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ *es el ideal en* $\omega \times \omega$ *dado por* $A \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ *si y sólo si*

$$\{i \in \omega : \{n \in \omega : (i, n) \in A\} \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}.$$

No es difícil ver que si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales altos, entonces también $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ y $\widetilde{\mathcal{I}}$ lo son. A la operación producto usualmente se le llama el producto de Fubini y la operación "tilde"se debe a E. Thümmel. Se puede consultar el artículo [13] para más información al respecto.

Se seguirán dando más ejemplos en este capítulo introductorio pero antes se hablará un poco acerca de la definibilidad de los ideales.

1.2. Definibilidad

Dado un ideal sobre los naturales, como mencioné antes, podemos pensar al ideal como un subconjunto del espacio de Cantor y de este modo podemos preguntarnos qué propiedades topológicas o de medida tiene el ideal.

Observación 11 (Folklore)**.** *Sean* $\mathcal{I}$ *un ideal sobre* ω*,* $A \in \mathcal{I}$ *y* $a, b \in [\omega]^{<\omega}$*, entonces* $A \cup a \setminus b \in \mathcal{I}$*, en particular* $\mathcal{I}$ *es un conjunto denso de* 2^ω*.*

Demostración. La primera parte de la conclusión es simplemente porque tanto A como a están en el ideal y por lo tanto también todos sus subconjuntos. Para ver que $\mathcal{I}$ es denso sea $\langle t \rangle \subseteq 2^\omega$. Sea A cualquier elemento de $\mathcal{I}$, entonces $A \cup t \setminus t^* \in \mathcal{I}$ es un elemento del ideal que intersecta a $\langle t \rangle$. ■

Usando la misma prueba que en la afirmación anterior se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 12 (Folklore)**.** *Si* $\mathcal{I}$ *es un ideal Borel, entonces* $\mathcal{I}$ *es magro y de medida* 0*.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{I}$ no es magro, entonces existe $t \in 2^{<\omega}$ tal que $\mathcal{I}$ es comagro en $\langle t \rangle$. Sea $\mathcal{I}^*$ el filtro dual.

Afirmación: Tanto $\mathcal{I}$ como $\mathcal{I}^*$ son comagros en $\langle t \rangle$. Para ver esto notemos que $\mathcal{I}^*$ es comagro en $\langle t^* \rangle$, donde t^* está dada por $t(i) = 0$ si y sólo si $t^*(i) = 1$. Esto es porque si $A \in \mathcal{I}^*$, entonces también $A \cup t \setminus t^* \in \mathcal{I}^*$. Esto es una contradicción.

Si $\mathcal{I}$ no fuera de medida 0, entonces existe $t \in 2^{<\omega}$ tal que

$$\mu(\mathcal{I} \cap \langle t \rangle) > \frac{1}{2^{|t|+1}}.$$

Se tiene que $\mu(\mathcal{I}^* \cap \langle t \rangle) > \frac{1}{2^{|t|+1}}$, porque para cada $X \in \mathcal{I}^* \cap \langle t^* \rangle$ sucede que $X \cup t \setminus t^* \in \mathcal{I}^* \cap \langle t \rangle$. ■

En el teorema anterior en realidad no usamos que el ideal (filtro) fuera Borel, sino que sólo usamos que todo conjunto Borel tiene la propiedad de Baire y es medible.

Dado $A \in [\omega]^\omega$ definimos $f_A : \omega \to \omega$, la función de enumeración de A, como $f_A(n) = m$ si m es el m-ésimo elemento más pequeño de A. Dado $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω, diremos que $\mathcal{F}$ es acotado si $F = \{f_A : A \in \mathcal{F}\}$ es $\leq^*$-acotado en ω^ω. Por la proposición anterior no es difícil ver el siguiente teorema.

Teorema 13 (Jalali-Naini [15], Talagrand [29])**.** *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Las siguientes condiciones son equivalentes*

- *$\mathcal{F}$ tiene la propiedad de Baire.*
- *$\mathcal{F}$ es magro.*
- *$\mathcal{F}$ es acotado.*

El siguiente resultado es muy conocido y es consecuencia directa del teorema de Jalali-Naini, Talagrand. Puede ser consultado [24].

Proposición 14 (Folklore)**.** *La mínima complejidad de un ideal (o un filtro) sobre ω es F_σ.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}^*$ son ajenos, densos y de la misma complejidad. $\mathcal{I}$ no puede ser cerrado porque sería el total y por el teorema de Baire, no puede ser abierto ni G_δ. ■

1.3. Submedidas en ω

Comenzamos esta sección con una definición. Diremos que $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to \omega + 1$ es una submedida inferiormente semicontinua (abreviamos smisc), si:

- $\varphi(\emptyset) = 0$.
- $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ siempre que $A \subseteq B$.
- $\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$.
- $\varphi(A) = \lim_{n\to\infty} A \cap n$.

En la definición anterior usamos una función con rango $\omega + 1$, pero podríamos haber tomado el rango contenido en $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. En principio esas dos definiciones son distintas, pero es un resultado conocido que la familia de ideales que se obtienen para el conjunto de smisc's por cualquiera de las dos definiciones son los mismos (para más información al respecto [23]).

Diremos que un ideal $\mathcal{I}$ es un P-ideal si para cada sucesión

$$\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{I}$$

existe $A \in \mathcal{I}$ tal que $A_n \subseteq^* A$, para cada $n \in \omega$.

Definición 15. *Dada φ una smisc definimos:*

$$Fin(\varphi) = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : \varphi(A) < \infty\} \text{ y}$$

$$Exh(\varphi) = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : \varphi(A \setminus n) \to 0\}.$$

Supongamos que φ es una smisc, no es difícil ver que $Fin(\varphi)$ es un ideal F_σ y $Exh(\varphi)$ es un P-ideal $F_{\sigma\delta}$. El siguiente teorema nos dice que el regreso también es cierto.

Teorema 16. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal en ω. Entonces*

- *(Mazur [23]) Si $\mathcal{I}$ es F_σ entonces existe φ una smisc tal que $Fin(\varphi) = \mathcal{I}$.*
- *(Solecki [28]) Si $\mathcal{I}$ un P-ideal analítico, entonces existe φ una smisc tal que $Exh(\varphi) = \mathcal{I}$.*
- *(Solecki [28]) Si $\mathcal{I}$ un P-ideal F_σ, entonces existe φ una smisc tal que $Fin(\varphi) = Exh(\varphi) = \mathcal{I}$.* ■

Para ver las pruebas del teorema anterior se puede consultar [23] y [28].

Los ejemplos de ideales que les he presentado hasta aquí, son ideales F_σ, esto lo probaremos en el capítulo 3. Sea 2^ω el conjunto de Cantor. La medida en el conjunto de Cantor está definida como la medida del espacio producto de 2 consigo mismo una cantidad numerable de veces, de modo que todo el espacio tiene medida 1 y si $s \in 2^{<\omega}$, entonces $\langle s \rangle$ tiene medida $\frac{1}{2^{|s|}}$. La familia de conjuntos que son cerrados y abiertos en el Cantor es numerable, porque un conjunto es cerrado y abierto si y sólo si es unión finita de conos, de este modo $\Omega = \{U \subseteq 2^\omega : U$ es cerrado, abierto y $\mu(U) = \frac{1}{2}\}$ es un conjunto numerable.

Dado $x \in 2^\omega$ definimos $I_x = \{U \in \Omega : x \in U\}$ y el ideal $\mathcal{S}$ será el ideal generado por $\{I_x : x \in 2^\omega\}$, a este ideal se le conoce como el ideal de Solecki.

Proposición 17 ([24]). *El ideal de Solecki es un ideal F_σ alto.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{S}$ es un ideal F_σ notemos que

$$\varphi : \mathcal{P}(\Omega) \to \omega + 1$$

dada por

$$\varphi(X) = \text{mín}\{\alpha \in \omega + 1 : (\exists\{x_i \in 2^\omega : i \in \alpha\})(\forall U \in X)(\exists j \in \alpha)(x_j \in U)\}$$

es una submedida inferiormente semicontinua tal que $Fin(\varphi) = \mathcal{S}$.

Sea $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq \Omega$, queremos ver que $X = \{x \in 2^\omega : (\exists_\infty n)(x \in X_n)\}$ es no vacío, porque si $x \in X$ entonces $I_x \cap \{X_n : n \in \omega\}$ es un conjunto infinito, probando que $\mathcal{S}$ es alto. Veremos que $\mu(X) \geq \frac{1}{2}$, con lo cual en particular es no vacío. Supongamos que $\mu(X) = r < \frac{1}{2}$. $\mu(X_n) \geq \frac{1}{2} - r$ para cada $n \in \omega$. Para cada $a \in [\omega]^{<\omega}$ sea $C_a = \{x \in 2^\omega : x \in X_n \Leftrightarrow n \in a\}$, entonces

$$2^\omega = X \cup \bigcup_{a \in [\omega]^{<\omega}} C_a$$

y cada C_a es medible. Sea $A \subset [\omega]^{<\omega}$ finito tal que $X \cup \bigcup_{a \in A} C_a > \frac{1}{2} + r$, esto es posible porque $\frac{1}{2} + r < 1$. Si $n \notin \bigcup A$, entonces X_n es ajeno con $X \cup \bigcup_{a \in A} C_a$, pero esto es imposible porque su medida suma más que 1.

■

En el capítulo 4 calcularemos los invariantes cardinales de estos ideales. Antes de seguir con las definiciones definimos los siguientes dos ideales.

Definición 18. *El ideal conv es el ideal generado por las sucesiones convergentes en $\mathbb{Q}$ (convergentes en los números reales). El ideal nwd es el ideal de los conjuntos nunca densos en $\mathbb{Q}$.*

Cuando digo sucesiones convergentes me refiero también a sucesiones convergentes a $+\infty$ o $-\infty$, podemos pensar que los ideales *conv* y están $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ (el cual obviamente es homeomorfo a $\mathbb{Q}$). Antes que nada notemos que $conv \subseteq nwd$ por lo que en particular $conv \leq_K nwd$. Acerca de estos ideales se tiene lo siguiente.

Proposición 19 ([24])**.** *Tanto conv como nwd son ideales altos.*

Demostración. Para ver que *conv* es alto notemos que cada $A \subseteq \mathbb{Q} \cap (0,1)$ infinito tiene un punto de acumulación en $[0,1]$, porque $[0,1]$ es compacto y por lo tanto A tiene una subsucesión convergente. Como *nwd* contiene a *conv* entonces también *nwd* es un ideal alto. ■

Muchos de los resultados de esta sección está publicados en [9] así como en la tesis doctoral de David Meza.

Proposición 20 ([24])**.** $\mathcal{R} \leq_K conv$.

Demostración. Esta es una prueba muy clásica y se debe a un truco que usó Sierpinski. Sea $f : \mathbb{Q} \to \omega$ una función biyectiva, tomamos la siguiente coloración: $c : [\mathbb{Q}]^2 \to 2$ dada por $c(\{a,b\}) = 0$ si y sólo si $f(a) < f(b)$ y $a < b$ o $f(b) < f(a)$ y $b < a$. Dicho en otras palabras, la dos números racionales tendrán color 0 cuando el orden de $\mathbb{Q}$ y buen orden dado por f coinciden, y tendrán color 1 cuando los órdenes no coinciden. Los conjuntos 0-homogéneos son sucesiones crecientes en $\mathbb{Q}$ y los conjuntos 1-homogéneos son sucesiones decrecientes. Como toda sucesión creciente o decreciente es convergente entonces ya tenemos la prueba. ■

Aún hay varios resultados que acerca del orden de Katětov que abordaremos durante los capítulos del 2 al 4.

1.4. Invariantes cardinales

Dado un ideal sobre ω definimos los siguientes invariantes cardinales asociados a $\mathcal{I}$.

$$add^*(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists J \in \mathcal{A})(|J \setminus I| = \omega)\}.$$

$$cov^*(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I} \cap [\omega]^\omega)(\exists J \in \mathcal{A})(|J \cap I| = \omega)\}.$$

$$non^*(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists J \in \mathcal{A})(|J \cap I| < \omega)\}.$$

$$cof(\mathcal{I}) = \text{mín}\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall I \in \mathcal{I})(\exists J \in \mathcal{A})(I \subseteq J)\}.$$

Acerca de los invariantes cardinales dados por un ideal tenemos las siguientes observaciones

Observación 21. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, entonces*

- $add^*(\mathcal{I}) \leq non^*(\mathcal{I})$ *y* $add^*(\mathcal{I}) \leq cov^*(\mathcal{I})$.
- $cov^*(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$ *y* $non^*(\mathcal{I}) \leq cof(\mathcal{I})$.

Observación 22. *Supongamos que tanto $\mathcal{I}$ como $\mathcal{J}$ son ideales altos. Si $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ son ideales sobre ω tales que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, entonces $non^*(\mathcal{I}) \leq non^*(\mathcal{J})$ y $cov^*(\mathcal{J}) \leq cov^*(\mathcal{I})$.*

Las observaciones anteriores nos ayudan para aproximar los invariantes conociendo el orden (de Katětov) entre dos ideales o para saber si no son comparables conociendo sus invariantes. Hasta aquí hemos dicho el orden que guardan casi todos los ideales sin embargo no sabemos lo siguiente.

Pregunta 23 (Michael Hrušák)**.** *¿Se satisface que* $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{S}$*?*

Capítulo 2

Un juego combinatorio

En este capítulo abordamos dos problemas que en un principio parecen independientes, pero al final tienen mucha relación entre sí. El primer problema se reduce a la siguiente pregunta ¿Un ideal es alto si y sólo si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego corta y elije?. También tenemos la pregunta ¿Existen $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ ideales F_σ altos tales que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$? Esta una pregunta relacionada con una vieja pregunta de Michael Hrušák: ¿Existe un ideal Borel alto que cumple el teorema de Ramsey?

La respuesta a esta pregunta es afirmativa, el último teorema del capítulo responde a dicha pregunta, sólo a pesar de poder encontrar $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ dos ideales F_σ altos y tales que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$, la respuesta no ayuda en nada a responder si existe un ideal Borel alto que satisface el teorema de Ramsey. Se puede consultar [13], para que quede más claro el contexto.

Lo que sí logramos encontrar fue un ideal F_σ alto y tal que el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego corta y elige de dicho ideal, por lo que se responde la pregunta de Zapletal en el sentido negativo. Además encontramos una familia de ideales definibles tales que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$ y para las pruebas nos auxiliamos del juego corta y elige. Comenzamos el capítulo con la siguiente definición.

Definición 24 (Juego corta y elige). *Dado un ideal $\mathcal{I}$ en ω el juego corta y elige $G_1(\mathcal{I})$ es un juego infinito definido como sigue: el jugador I empieza el juego con un partición de los naturales en dos piezas $\omega = A_0^0 \cup A_1^0$, entonces el jugador II juega $i_0 \in 2$ y $n_0 \in A_i^0$. En el $(m+1)$-ésimo movimiento el jugador I parte $A_{i_m}^m$ en A_0^{m+1} y A_1^{m+1} y el jugador II toma $i_{m+1} \in 2$ y $n_0 \in A_{i_{m+1}}^0$. El jugador I gana el juego si $\{n_i : i \in \omega\} \in \mathcal{I}$. En otro caso el jugador II gana.*

I	$\omega = A_0^0 \cup A_1^0$		$A_{i_0}^0 = A_0^1 \cup A_1^1$		...
II		$i_0 \in 2, n_0 \in A_{i_0}^0$		$i_1 \in 2, n_1 \in A_{i_1}^1$	...

Observación 25. *Note que si el jugador II elige en algún momento un elemento del ideal, entonces el jugador I gana el juego. Suponga que $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$; si el jugador I tiene estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{I})$ entonces el jugador I tiene estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{J})$ y si el jugador II tiene estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{I})$ entonces el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_1(\mathcal{J})$.*

Demostración. Sea T una estrategia ganadora para el jugador I en el juego $G_1(\mathcal{I})$ y $f : \omega \to \omega$ una función de Katětov del ideal $\mathcal{J}$ en el ideal $\mathcal{I}$. T es un árbol tal que $T(\emptyset) = A_0^0 \cup A_1^0$ es la jugada inicial del jugador I en el juego $G_1(\mathcal{I})$, para la estrategia ganadora en el juego $\mathcal{J}$, el jugador I juega $\{f^{-1}[A_0^0], f^{-1}[A_1^0]\}$, una partición de ω. Para cada posible respuesta de II, es decir $i_0 \in 2$ y $n_0 \in A_{i_0}^0$ aplicamos $f(n_0)$ y vemos la partición de $T(\emptyset, (i_0, n_0))$. Esto nos da una partición de $A_{i_0}^0$ en dos conjuntos $\{A_0^1, A_1^1\}$ y en el juego $G_1(\mathcal{J})$ el jugador I deberá jugar $\{f^{-1}[A_0^1], f^{-1}[A_1^1]\}$. En general en el i-ésimo turno del jugador I, él sólo debe verificar, según la estrategia del juego $\mathcal{I}$, qué debe jugar en el juego $\mathcal{J}$ aplicando la imagen inversa de f a cada elemento de la partición dada. La segunda parte de la observación se prueba de manera totalmente análoga. ■

Recordemos que el ideal $\mathcal{ED}$ fue definido en el primer capítulo, el cual está definido por las columnas en $\omega \times \omega$ y funciones en ω^ω (las funciones vistas como subconjuntos de $\omega \times \omega$). También recordemos que un ideal $\mathcal{I}$ es Katětov equivalente a Fin si y sólo si el ideal $\mathcal{I}$ no es alto. Entonces una primera proposición acerca de este juego e ideales conocidos es la siguiente.

Proposición 26. *El jugador I tiene una estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{ED})$ además, si $\mathcal{I}$ no es un ideal alto entonces el jugador II tiene una estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{I})$.*

Demostración. Para la primera parte de la proposición, sea $n_{-1} = 0$, el jugador I juega la partición $A_0 = \{n_{-1}\} \times \omega$ y $B_0 = \{n \in \omega : n > 0\} \times \omega$. Si el jugador II elige A_0 entonces el jugador II ya perdió el juego, porque todos los naturales que elija estarán contenidos en la primera columna de $\omega \times \omega$ y eso está en el ideal, por lo tanto debe jugar B_0 y una pareja $(n_0, m_0) \in B_0$. En cada jugada siguiente el jugador I parte a B_i como $A_i = \{n \in \omega : n_{i-2} < n \leq n_{i-1}\} \times \omega$ y $B_i = \{n \in \omega : n > n_{i-1}\} \times \omega$. Notemos que ya estoy diciendo que parte a B_i, eso es porque el jugador II siempre debe elegir a B_i porque si en algún momento elige a A_i, en ese momento el jugador II ya perdió el juego, entonces elige a B_i y una pareja (n_i, m_i). Al final el conjunto $X = \{(n_i, m_i) : i \in \omega\}$ es un subconjunto de una función $f \in \omega^\omega$, porque para cada columna, a lo mucho II tomó una pareja (n_i, m_i), por lo que de todos modos el jugador II pierde el juego.

Para la segunda parte de la proposición notemos que si $\mathcal{I}$ no es alto, entonces existe $A \in [\omega]^\omega$ tal que cada $B \in [A]^\omega$ es positivo. La estrategia para el jugador II en el juego $G_1(\mathcal{I})$ consiste en elegir (de los dos pedazos que da de opción I) el conjunto que intersecte infinitamente a A, e ir tomando naturales distintos; así, al final II se queda con un subconjunto infinito de A y por lo tanto con un positivo del ideal. ∎

Ahora en la siguiente proposición veamos que el juego tiene implicaciones en las propiedades Ramsey de los ideales.

Proposición 27. *El jugador I tiene estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{R})$.*

Demostración. Sea $c : [\omega]^2 \to 2$ la coloración dada por la gráfica de Rado. En la primera jugada I juega ω y $\emptyset$. El jugador II debe elegir ω y cualquier $n_0 \in \omega$. El jugador I parte ω como $A_0 = \{n \in \omega : n = n_0 \vee c(\{n, n_0\}) = 0\}$ y $B_0 = \{n \in \omega : c(\{n_0, n\}) = 1\}$. Entonces el jugador II juega A_0 o B_0 y un número natural n_1 en el pedazo elegido. En cada paso siguiente, el jugador I parte A_i o B_i usando la coloración c y el jugador II elige cualquiera de los dos pedazos. Al final el jugador I gana porque $\{n_k : k \in \omega\}$ es la unión de dos conjuntos c-homogéneos, porque cada que tomamos $k \in \omega$ y para cualquier elección de $k \leq i, j$ se tiene que $c(n_k, n_i) = c(n_k, n_j)$. ■

Recordemos del capítulo anterior que $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ si y sólo si $\mathcal{R} \not\leq_K \mathcal{I}$ (se puede consultar [24] para más información al respecto). Por la proposión anterior tenemos que si el jugador II tiene una estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{I})$ entonces $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$, de hecho basta que el jugador I no tenga estrategia ganadora, pero en ideales definibles ambas propiedades son equivalentes porque en ideales definibles el juego está determinado.

2.1. Pregunta de J. Zapletal

El juego con el que comenzamos el capítulo fue estudiado por J. Zapletal, él pregunta si hay algún ideal definible $\mathcal{I}$ y no equivalente (Katětov equivalente) con Fin tal que el jugador II tenga estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{I})$. En el artículo Katětov Order of Borel Ideals ([**?**]), M. Hrušák tiene un diagrama con varios ideales definibles conocidos, de los ideales ahí presentados,

$\mathcal{R}$ es de los más pequeños, y el otro ideal pequeño es $\mathcal{S}$ el ideal de Solecki. No sabemos si el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_1(\mathcal{S})$, pero creemos que el jugador I debería tener una estrategia ganadora. Todos las demás ideales definibles ya conocidos quedan descartados como candidatos para que el jugador II tenga estrategia ganadora. En lo que queda del capítulo construiremos un ideal $\mathcal{I}$ que es F_σ alto tal que el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_1(\mathcal{I})$ y así responderemos la pregunta de Zapletal.

Definimos $\{A_s \subseteq \omega : s \in \omega^{<\omega}\}$ como sigue:

- $A_\emptyset = \omega$.
- $\{A_{s^\frown n} : n \in \omega\}$ es una partición en conjuntos infinitos de A_s.
- Para cada $n \neq m$ números naturales $\exists s \neq t \in \omega^{<\omega}$ tal que $n \in A_s$ y $m \in A_t$.

Diremos que $A \subseteq \omega$ es un conjunto grade' si $|A| = \omega$ y

$$|A \cap A_s| = \omega \Rightarrow \exists_n^\infty (|A \cap A_{s^\frown n}| = \omega)$$

y diremos que B es un conjunto grande si contiene un conjunto grande'. Notemos que ω es un conjunto grande'. Definimos $Grande = \{A \subseteq \omega : A \text{ es un conjunto grande}\}$ y $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\omega) \setminus Grande$. Entonces tenemos la siguiente proposición.

Proposición 28. *$\mathcal{H}$ es un ideal.*

Demostración. Probaremos que si tomamos un conjunto grande' B y una partición de $B = C_0 \cup C_1$ entonces C_0 o C_1 contienen un conjunto grande'. Sin perdida de generalidad $B = \omega$ (más adelante en la prueba se verá el porqué no perdemos generalidad). Para $\alpha \in \omega_1 + 1$ definimos recursivamente $\phi_\alpha : \omega^{<\omega} \to 3$ como sigue:

- Caso base: para $i \in 2$, $\phi_0(s) = i$ si $|A_s \cap C_{i-1}| < \omega$ y $\phi_0(s) = 2$ en otro caso.

- Caso $\alpha = \beta + 1$: para $i \in 2$ hacemos $\phi_\alpha(s) = i$ si $\phi_\beta(s) = i$ o $\phi_b(s) = 2$ y $\exists^\infty_n(\phi_\beta(s^\frown n) = i)$. Si $\exists^\infty_n(\phi_\beta(s^\frown n) = 0)$ y $\exists^\infty_n(\phi_\beta(s^\frown n) = 1)$ ponemos $\phi_\alpha(s) = 0$ (en realidad aquí podríamos usar 0 o 1 y nos da igual en ambos casos).

- Caso límite: Para $i \in 2$, $\phi_\alpha(s) = i$ si $\exists\beta < \alpha$, $\phi_\beta(s) = i$ y $\phi_\alpha(s) = 2$ cuando para cada $\beta < \alpha$ $\phi_b(s) = 2$.

Afirmación 1. Si $\phi_{\omega_1}(\emptyset) = i$ entonces C_i es un conjunto grande.

Demostración de la afirmación 1: Queremos probar que $\phi_{\omega_1}(s) = i \Rightarrow |C_i \cap A_s| = \omega$ y $\{s \in \omega^{<\omega} : \phi_{\omega_1}(s) = i\}$ es un árbol que se ramifica infinitamente, así que C_i contiene un conjunto grande'. Supongamos que $\phi_{\omega_1}(s) = i$, entonces existe α tal que $\phi_\alpha(s) = i$ y α es un ordinal sucesor o $\alpha = 0$. Si $\phi_0(s) = i$ entonces $\phi_0(t) = i$ para cada $t \supseteq s$. Si α es mayor que 0 entonces $X = \{n \in \omega : \phi_{\alpha-1}(s^\frown n) = i\}$ es infinito siempre que $\phi_\alpha(s) = i$ por la definición recursiva. Para $n \in X$ existe $\alpha_0 > \alpha_1 > ...$ ordinales y $m_0, m_1 ...$ números naturales tales que $\phi_{\alpha_j}(s^\frown n^\frown m_0^\frown ...^\frown m_j) = i$. Como cada sucesión decreciente de ordinales tiene longitud finita entonces existe $k \in \omega$ tal que $\alpha_k = 0$ y $\phi_0(s^\frown n^\frown m_0^\frown ...^\frown m_k) = i$. En particular $|C_i \cap A_s| = |A_{s^\frown n} \cap C_i| = \omega$ porque $A_{s^\frown n^\frown m_0^\frown ...^\frown m_k} \subset A_{s^\frown n} \subset A_s$ y por la definición de ϕ_0. Esto termina la prueba de la afirmación 1.

Afirmación 2. Si $\phi_{\omega_1}(\emptyset) = 2$ entonces C_0 y C_1 son conjuntos grandes. Esto es porque

$$\phi_{\omega_1}(s) = 2 \Rightarrow |A_s \cap C_0| = |A_s \cap C_1| = \omega \wedge (\forall^\infty n \in \omega)\phi_{\omega_1}(s^\frown n) = 2$$

así que C_0 y C_1 contienen un conjunto grande'. ■

Diremos que A es grande' abajo de $s \in \omega^{<\omega}$ si $|A \cap A_s| = \omega$ y para cada $t \supseteq s$ $|A_t \cap A| = \omega \Rightarrow \exists_n^\infty(|A_{t^\frown n} \cap A| = \omega)$ y B es un conjunto grande abajo de s si contiene un conjunto grande' abajo de s. La familia de conjuntos que no contienen un conjunto grande abajo de s (para $s \in \omega^{<\omega}$) es un ideal. El que A sea grande abajo de s implica que $\exists_n^\infty$ tal que A es grande abajo de $A_{s^\frown n}$.

Definición 29. *$T \subseteq \omega^{<\omega}$ es un árbol poco-ramificado si para cada $s \in T$*

$$|\{n \in \omega : s^\frown n \in T\}| \leq |s| + 1.$$

Con la notación previa definimos

$$\mathcal{S}_0 = \{A \subseteq \omega : \exists s \in \omega^{<\omega}(A \subseteq A_s \wedge \forall n \in \omega(|A \cap A_{s^\frown n}| = 1))\} \text{ y}$$

$$\mathcal{S}_1 = \{A \subseteq \omega : \{s \in \omega^{<\omega} : A_s \cap A \neq \emptyset\} \text{ es un árbol poco-ramificado}\}.$$

$\mathcal{PC}$ es el ideal generado por $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

Para cada $A \subseteq \omega$ notemos que $T_A = \{s \in \omega^{<\omega} : A \cap A_s \neq \emptyset\}$ es un árbol bien podado.

Teorema 30. *El jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_1(\mathcal{PC})$.*

Demostración. Antes de comenzar con la descripción de la estrategia, notemos que si $A \subseteq \omega$ es tal que

$$(\forall n \in \omega)(|\{s \in \omega^n : A_s \cap A \neq \emptyset\}| \geq (n+1)!)$$

entonces A es un conjunto $\mathcal{PC}$-positivo. El jugador I comienza el juego y da una partición de $\omega = B_0 \cup C_0$. Si B_0 es un conjunto grande, entonces el jugador II elige $A_0 = B_0$, en otro caso elige $A_0 = C_0$ (en este caso C_0 tiene que ser un conjunto grande). Entonces existe n tal que $A_0 \cap A_{(n)}$ es no vacío, y el jugador II toma $n_0 \in A_0 \cap A_{(n)}$. El jugador I parte A_0 en dos piezas B_1 y C_1. El jugador II elige el conjunto que sea grande y lo llama A_1 (al menos uno de los dos es grande). De nuevo toma $n_1 \in A_1 \cap A_{(m)}$ pero se asegura que $n \neq m$, lo cual es posible porque A_1 intersecta a infinitos $A_{(m)}$ variando m en los naturales.

El jugador I juega $B_2 \cup C_2$ como partición de A_1 y el jugador II el pedazo grande y busca un $i_0 \in \omega$ tal que A_2 es grande abajo de (i_0). El jugador II toma $n \in \omega$ tal que $A_2 \cap A_{(i_0,n)}$ es no vacío, y luego toma $n_2 \in A_2 \cap A_{(i_0,n)}$. El jugador I parte en los siguientes cinco turnos al A_k correspondiente en cada momento y el jugador II elige la parte que es grande abajo de (i_0) y toma n_3, n_4, n_5, n_6 y n_7 tales que todos son diferentes están en diferentes $A_{(i_0,n)}$. El jugador I continua dando particiones y el jugador II permanece en el nivel k durante $(k+1)!$ jugadas y después de esas jugadas elige un i_k tal que A_m es grande abajo de $(i_0, i_1, \ldots, i_k)$. Al final $\{n_j : j \in \omega\}$ es $\mathcal{PC}$-positivo por construcción y la primera observación en la prueba. ■

Proposición 31. *$\mathcal{PC}$ es un ideal F_σ alto.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{PC}$ is un ideal alto fijemos $A \in [\omega]^\omega$. Hay dos casos:

- Existe $s \in T_A$ tal que $suc_{T_A}(s)$ es un conjunto infinito.

- T_A es un árbol de ramificación finita

En el primer caso A contiene un subconjunto de un selector, es decir, un elemento infinito del ideal. En el segundo caso, existe $T \subseteq T_A$ árbol tal que T es un árbol poco-ramificado y además

$$|A \cap \bigcup_{s \in T} A_s| = \omega.$$

Ahora queremos ver que $\mathcal{PC}$ es F_σ, para lograr eso queremos probar que $\mathcal{PC}$ está generado por conjuntos compactos. Definimos un subconjunto de $\mathcal{PC}$:

$$\mathcal{S}_2 = \{A \subseteq \omega : \exists s \in \omega^{<\omega}(A \subseteq A_s \wedge \forall n \in \omega(|A \cap A_{s^\frown n}| \leq 1))\}.$$

Claramente $\mathcal{S}_2 \supseteq \mathcal{S}_0$.

Afirmación 1. $\mathcal{S}_2$ es compacto.

Prueba de la afirmación 1. Tomemos $A \notin \mathcal{S}_2$. Entonces $|A| \geq 3$, existe $n \in \omega$ y $s, t \in \omega^n$ tal que $|A \cap A_s| \geq 2$ y $|A \cap A_t| \geq 1$. Sean $m_0, m_1 \in A \cap A_s$ y $m_2 \in A \cap A_t$ números naturales, entonces $\{X \subseteq \omega : m_0, m_1, m_2 \in X\}$ es un conjunto abierto que contiene a A y no intersecta a $\mathcal{S}_2$ así que A es un punto interior del complemento de $\mathcal{S}_2$ para cada A, por lo que $\mathcal{S}_2$ es cerrado en el Cantor, es decir, compacto.

Afirmación 2. $\mathcal{S}_1$ es compacto.

Prueba de la afirmación 2. Tomemos $A \notin \mathcal{S}_1$ entonces existe $n \in \omega$ tal que $|\{s \in \omega^n : A \cap A_s \neq \emptyset\}| \geq n + 2$. Fijemos $s_0, ..., s_{n+1} \in \omega^n$ y $m_0 \in A \cap A_{s_0}, ..., m_{n+1} \in A \cap A_{s_{n+1}}$. Tenemos que $A \in \{X \subseteq \omega : m_0, ..., m_{n+1} \in X\}$ es un conjunto abierto que no tiene elementos en $\mathcal{S}_1$.

Por las afirmaciones 1 y 2 $\mathcal{PC}$ está generado por conjuntos compactos así que $\mathcal{PC}$ es F_σ.

■

Ya se había comentado antes que no sabemos la respuesta para el ideal de Solecki, esta pregunta se debe a J. Zapletal.

Pregunta 32. *¿El jugador I tiene estrategia ganadora en $G_1(\mathcal{S})$?*

2.2. Ejemplos de ideales Ramsey

Estaremos considerando el juego $G_1\mathcal{I}$, para $\mathcal{I}$ un ideal. Queremos construir dos ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ definibles de modo que satisfacen la propiedad tipo Ramsey $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$. Nótese que sigue abierto si existen $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales F_σ altos con esa misma propiedad tipo Ramsey. Esto fue preguntado por M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, E. Thümmel, y C. Uzcátegui en [13].

Sea $f \in \omega^\omega$ una función no decreciente. Decimos que el árbol $T \subseteq \omega^{<\omega}$ es f-pequeño si $(\forall n \in \omega)(|\{s \in T : |s| = n\}| \leq f(n))$ y T es f-grande si para cada $s \in T$, se tiene que $|suc_T(s)| \geq f(|s|)$.

Definición 33. *Dado $f \in \omega^\omega$ una función creciente y con la notación usada en la sección anterior definimos:*

$$\mathcal{TC}(f) = \langle \{A \subseteq \omega : T_A \text{ es } f\text{-pequeño}\} \rangle$$

$$B(f) = \{A \subseteq \omega : (\exists r \in \mathbb{Q}^+)(\forall s \in T_A)(|suc_{T_A}(s)| \geq r \cdot f(|s|))\}$$

y $\mathcal{TB}(f)$ es la familia de subconjuntos de ω que no contienen conjuntos de $B(f)$.

Bajo estas definiciones tenemos el siguiente resultado.

Proposición 34. *$\mathcal{TC}(f)$ y $\mathcal{TB}(f)$ son ideales.*

Demostración. Para probar que $\mathcal{TC}(f)$ es un ideal sólo tenemos que notar que si $A_0, ..., A_n$ son tales que $T_{A_0}, ..., T_{A_n}$ son árboles f-pequeños entonces $A_0 \cup ... \cup A_n \neq \omega$.

Para la segunda parte de la proposición queremos probar que si $A \subset \omega$ es tal que T_A es un árbol f-grande y $A = B \cup C$ entonces T_B es un árbol $\lceil \frac{f}{2} \rceil$-grande o T_C es un árbol $\lceil \frac{f}{2} \rceil$-grande. Para lograr esto suponga que T_A es tal que $suc_{T_A}(s) = f(s)$ para cada $s \in T_A$ y defina $c : \omega \to 2$ como sigue:

- $c(n) = 0$ si al menos la mitad de los nodos en el n-ésimo nivel de T_A están en T_B y
- $c(n) = 1$ si al menos la mitad de los nodos en el n-ésimo nivel de T_A están en T_C.

Note que si $c(n) = 0$ entonces T_B tiene al menos la mitad de los nodos en el i-ésimo nivel de T_A para cada $i \leq n$ y lo mismo cuando $c(n) = 1$. Si existen infinitos $n \in \omega$ tales que $c(n) = 0$ entonces T_B es un árbol $\lceil \frac{f}{2} \rceil$-grande y si no entonces T_C es un árbol $\lceil \frac{f}{2} \rceil$-grande. ■

Ahora quisiéramos conocer la complejidad de $\mathcal{TC}(f)$ y $\mathcal{TB}(f)$, en este caso tenemos la siguiente proposición.

Proposición 35. *$\mathcal{TC}(f)$ es un ideal no alto y F_σ y $\mathcal{TB}(f)$ es un ideal no alto y coanalítico.*

Demostración. La prueba de que $\mathcal{TC}(f)$ es F_σ es muy similar a la prueba de que el ideal $\mathcal{PC}$ es F_σ. Sólo viendo la definición de $\mathcal{TB}(f)^+$ observamos que es un conjunto analítico y por lo tanto el ideal es coanalítico. ■

Encontramos una familia de ideales definibles tales que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$ que significa que para todo A un conjunto $\mathcal{I}$-positivo y para cada función de $[A]^2$ en 2 existe $B \subseteq A$ un conjunto c-homogéneo que es $\mathcal{J}$-positivo. Para la prueba veamos las siguientes proposiciones.

Lema 36. *Dado $f \in \omega^\omega$ una función creciente, existe $g \in \omega^\omega$ tal que para cada A que es un conjunto $\mathcal{TB}(g)$-positivo y para cada coloración $c : [A]^2 \to 2$ existe $B \subseteq A$ que es $\mathcal{TC}(f)$-positivo y c-homogéneo.*

Demostración. Defina $g \in \omega^\omega$ como

$$g(n) = 2 \cdot 2^{f(0)} \cdot 2^{2\times f(1)} \cdot ... \cdot 2^{n\times f(n)} \cdot f(0) \cdot f(1) ... \cdot f(n).$$

Probaremos que si A es $\mathcal{TB}(g)$-positivo entonces el jugador II tiene una estrategia ganadora en el juego $G_1(\mathcal{TB}(g) \restriction A)$ y entonces tendremos que $A \to (TB(f)^+)^2_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es tal que T_A es g-grande.

En la primera jugada el jugador I parte A como $B_0 \cup C_0$, entonces el jugador II elige $A_1 = B_0$ o $A_1 = C_0$ de modo que T_{A_1} es un un árbol $\lceil \frac{g}{2} \rceil$-grande y toma $n_0 \in A_1 \cap A_{(j_0)}$ para algún j_0.

En las siguientes $f(0) - 1$ jugadas el jugador I parte A_i y el jugador II toma la parte que es $\lceil \frac{g}{2^{i+1}} \rceil$-grande y toma $n_i \in A_{i+1} \cap A_{(j_i)}$ tal que j_i es diferente de $j_0, j_1, ..., j_{i-1}$.

Después de eso, el jugador II jugará algo en el segundo nivel. El jugador I parte $A_{f(0)+1}$ y el jugador II elige la parte que es $\lceil \frac{g}{2^{f(0)+2}} \rceil$-grande y algún $n_{f(0)+1} \in A_{f(0)+2} \cap A_{(k_0,k_1)}$. El jugador II se asegura de permanecer en el segundo nivel eligiendo números naturales por $2 \times f(1)$ veces; notemos que esto es posible por la definición de g.

El jugador II continua haciendo su estrategia eligiendo “la parte grande” y elementos de $A_m \cap A_{(l_0,l_1,\ldots,l_r)}$ permaneciendo por $n \times f(n)$ veces en el nivel n. Al final, el jugador II gana porque los números naturales elegidos al verlos en el árbol tienen al menos $n \times f(n)$ nodos en el nivel n y justo esto nos da un conjunto $\mathcal{TC}(f)$-positivo. ■

Observación 37. *Notemos que para cada $f, g \in \omega^\omega$ funciones crecientes $\mathcal{TB}(f)$ y $\mathcal{TC}(g)$ no son ideales altos pero podemos tomar $F \in \omega^\omega$ una función mucho más grande (que crece mucho más rápido) que ambas de modo que $A \subseteq \omega$ es un conjunto $\mathcal{TB}(F)$-positivo tal que cada conjunto en los ideales $\mathcal{TB}(f)$ y $\mathcal{TC}(g)$ está contenido en A y además $\mathcal{TB}(f) \restriction A$ y $\mathcal{TC}(g) \restriction A$ son ideales altos. Otra forma de lograr esto mismo es en vez de pensar en es de los naturales en conjuntos infinitos y cada partición tiene sus propias particiones (lo que nos da una estructura del tipo $\omega^{<\omega}$) pensamos en particiones en conjuntos infinitos pero partimos en una cantidad finita de pedazos, esto nos daría una estructura de árbol pero de ramificación finita, podríamos pensar de ramificación en F, o dicho de otro modo, cada nodo en el nivel n tiene exactamente $F(n)$ sucesores.*

La pregunta que se hizo anteriormente ya ha sido resuelta, pero en realidad la respuesta está esencialmente en el artículo [13], sólo que la repuesta no es la esperada; aclaremos el porqué. Supongamos que existe $(\mathcal{I}_n : n \in \omega)$ una sucesión de ideales F_σ altos y tales que $\mathcal{I}_{n+1} \subseteq \mathcal{I}_n$ y $\mathcal{I}_n^+ \to (\mathcal{I}_{n+1}^+)^2_2$, para cada n, entonces el ideal $\mathcal{I} = \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{I}_n$ sería tal que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ y obviamente el ideal sería Borel, incluso lo F_σ no es importante, sólo que los ideales sean Borel, pero con la construcción del siguiente teorema, no es posible construir dicha sucesión de ideales, sino que sólo son dos ideales aislados que satisfacen dicha propiedad.

Proposición 38. *Existen $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ ideales F_σ altos tales que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{J}^+)^2_2$.*

Demostración. Los ideales $Fin \times Fin$ y $\widetilde{\mathcal{ED}}$ los podemos pensar en ω junto con la estructura de particiones que dimos en este mismo capítulo, y son tales que $Fin \times Fin^+ \to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+)^2_2$. El ideal $Fin \times Fin$ no es F_σ, pero no es difícil construir una pequeña variación al resultado de modo que ambos ideales sean F_σ. ■

Bueno, en resumen la respuesta anterior no es lo que se buscaba, sí es importante saber que es posible construir ideales de tipo Ramsey, pero sería mucho más interesante saber la respuesta a la siguiente pregunta.

Pregunta 39. *¿Existe $(\mathcal{I}_n : n \in \omega)$ una sucesión de ideales F_σ altos y tales que $\mathcal{I}_{n+1} \subseteq \mathcal{I}_n$ y $\mathcal{I}_n^+ \to (\mathcal{I}_{n+1}^+)^2_2$?*

Capítulo 3

Números de Ramsey

Así como hemos definido la propiedad tipo Ramsey más clásica, también se pueden definir otras propiedades del mismo estilo, donde variamos las entradas, en principio todas estas definiciones podrían ser equivalentes, pero como estaremos viendo a lo largo del capítulo sí que tiene sentido hacerse la pregunta y además hemos visto que estas propiedades son todas diferentes ya que existen ideales que satisfacen la propiedad tipo Ramsey para algún número natural n, pero no para $n+1$. También estamos considerando en vez de coloraciones de parejas (gráficas en el sentido tradicional) a coloraciones de subconjuntos de cierto tamaño (hipergráficas).

Iniciamos este capítulo con la siguiente definición que generaliza las propiedades tipo Ramsey estudiadas hasta ahora.

Definición 40. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Diremos que $\omega \to (\mathcal{I}^+)^n_{k,l}$ si para cada coloración $c : [\omega]^n \to k$ existe $A \in \mathcal{I}^+$ tal que $|c[[A]^n]| \leq l$. Cuando $l = 1$ simplemente escribimos $\omega \to (\mathcal{I}^+)^n_k$.*

Recordemos que la propiedad Ramsey más clásica tiene que ver con estar o no más grande en el órden de Katětov que el ideal de la gráfica de Rado. A continuación presentaremos una equivalencia muy similar pero antes debemos dar algunas definiciones y proposiciones.

La siguiente definición es propia del autor, pero está basada en la definición original escrita en el artículo [5] de James Cameron, cuando define la propiedad que caracteriza a la gráfica de Rado, de modo que generalizando esa misma propiedad ahora podemos caracterizar a todas las gráficas de Rado.

Definición 41 (Propiedad estrella [5])**.** *Dado $c : [\omega]^n \to k$ diremos que A tiene la propiedad (n, k)-estrella si dados $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq [\omega]^{n-1}$ tales que $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$, son ajenos dos a dos, existe j un número natural tal que para cada $\{j_2, j_3, \ldots, j_n\} \in A_i$ sucede que:*

$$c(\{j, j_2, j_3, \ldots, j_n\}) = i.$$

La propiedad $(2, 2)$-estrella es simplemente la propiedad (*) definida en el artículo [5], de este modo estamos generalizando esa propiedad que cumple la gráfica de Rado con subconjuntos de tamaño mayor que dos y otras coloraciones con más de dos colores. Acerca de esta propiedad tenemos el siguiente resultado.

Proposición 42. *Sean n y k números naturales. Existe $R^n_k : [\omega]^n \to k$ función con la propiedad (n, k)-estrella. A R^n_k le llamaremos la n-gráfica de Rado con k colores.*

Demostración. La construcción de la función R^n_k será por recursión. Definimos $\{X_l : l \in \omega\}$ una sucesión creciente de subconjuntos finitos de números naturales tomando $X_0 = \{0, 1, \ldots, n-2\}$ y:

- Caso base. En este caso vamos a definir la primera parte de R^n_k y empezamos con X_0. Los únicos posibles k subconjuntos $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$

de $[X_0]^{n-1}$ y de modo que algún A_i no sea vacío y

$$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$$

sean ajenos por parejas son: $A_1 = X_0$ y todos los demás subconjuntos vacíos o $A_2 = X_0$ y todos los demás subconjuntos vacíos, etc. En este caso definimos $R^n_k(0, 1, 2, \ldots, n-1) = 0$, $R^n_k(0, 1, 2, \ldots, n) = 1$, $\ldots$, $R^n_k(0, 1, \ldots, n+k-2) = k-1$. Y hacemos $X_1 = \{0, 1, \ldots, n+k-2\}$.

- Caso sucesor. Supongamos que tenemos definido X_l, un subconjunto finito de los naturales y de hecho por construcción es un número natural (dicho de otro modo $|X_l| = X_l$). Tomamos $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq [X_l]^{n-1}$ no vacío al menos alguno de los A_i y de modo que los conjuntos $A_1, \ldots, A_k$ sean ajenos por parejas. Hay un número finito de elecciones de este tipo y de hecho el número de elecciones es menor que $2^{k \cdot X_l}$. Para cada una de las familias de subconjuntos de este tipo, tomamos j el primer número natural que no ha sido utilizado en la construcción y definimos $R^n_k(j, j_2, j_3, \ldots, j_n) = i$ siempre que $\{j_2, j_3, \ldots, j_n\} \in A_i$. Ahora queremos definir a X_{l+1}, lo primero que hacemos es que contenga a X_l y cada que definimos $R^n_k(j, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ agregamos a j a X_{l+1}. Simplemente por la definición de X_{l+1} podemos observar que $X_{l+1} \leq X_l + 2^{k \cdot X_l}$.

Las ecuaciones mostradas en el paso sucesor de la recursión no son necesarias que se vean explícitas, pero simplemente es para hacer notar que es un número finito lo que agregamos en cada ocasión y además vamos definiendo a R^n_k de modo que en el paso $l+1$ ya hemos definido como función total a R^n_k en $[X_l]^n$. Como $[\omega]^n = \bigcup [X_l]^n$ entonces al final definimos a R^n_k en todo $[\omega]^n$ y simplemente por construcción hemos logrado que R^n_k tenga la propiedad (n, k)-estrella. ■

La gráfica de Rado también es llamada gráfica universal, esto se debe a que satisface la siguiente propiedad.

Proposición 43. *Dada* $c : [\omega]^n \to k$ *existe* $f : \omega \to \omega$ *tal que*

$$c(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) = R_k^n(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)),$$

para cualquier elección de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *números naturales distintos.*

Demostración. La función R_k^n fue definida precisamente para que satisfaga la propiedad (n, k)-estrella, que es lo único que usaremos en la demostración. La demostración será por recursión.

- Caso base. Primero definimos $f(i) = i$ para $i \in n-1$ y supongamos que $c(n) = i$ (aquí estamos tomando a n exactamente como los primeros n números naturales), entonces por la propiedad (n, k)-estrella, existe x un número natural tal que $R_k^n(\{0, 1, \ldots, n-2, x\}) = i$ y así definimos $f(n-1) = x$.

- Caso sucesor. Supongamos que ya tenemos definida la función f hasta el natural l. Definimos $X_i = \{x \in [l+1]^n \setminus [l]^n : c(x) = i\}$, $X'_i = \{x \setminus \{l+1\} : x \in X_i\}$ y $A_i = \{f(j) : j \in X'_i\}$, para cada $i \in k$. Como R_k^n satisface la propiedad (n, k)-estrella con los conjuntos A_i entonces existe $x \in \omega$ tal que $R_k^n(\{x, j_2, \ldots, j_n\}) = i$ siempre que $j_2, \ldots, j_n \in A_i$ son naturales distintos. En este caso hacemos $f(l+1) = x$.

Por construcción, f satisface lo que queríamos demostrar. ■

Sea A un conjunto (en nuestro caso a lo más numerable). Diremos que $f : [A]^n \to k$ satisface la propiedad (n, k)-estrella en A si para cada

$$A_0, A_1, \ldots, A_{k-1} \subseteq [A]^{n-1}$$

subconjuntos finitos y ajenos dos a dos, existe $x \in A \setminus \bigcup_{i\in k}\bigcup A_i$ tal que $f(x, j_2, \ldots, j_n) = i$ siempre que $\{j_2, \ldots, j_n\} \in A_i$. Notemos que simplemente por la definición, si f satisface la propiedad (n, k)-estrella en A, entonces A tiene que ser infinito. Además tenemos la siguiente propiedad que al menos a primera vista parece más fuerte.

Lema 44. *Si f satisface la propiedad (n, k)-estrella en A y $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1} \subseteq [A]^{n-1}$ son conjuntos finitos y ajenos por pares, entonces f satisface la propiedad (n, k)-estrella en*

$$Z = \{x \in A \setminus \bigcup_{i\in k}\bigcup A_i : (\forall\{j_2, \ldots, j_n\} \in A_i)(f(x, j_2, \ldots, j_n) = i)\}.$$

En particular, el conjunto de testigos de la propiedad (n, k)-estrella tiene que ser infinito.

Demostración. Es suficiente ver que dados $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{k-1} \subseteq [A]^{n-1}$ conjuntos finitos y ajenos por pares, existe $x \in Z$ tal que $f(x, j_2, \ldots, j_n) = i$ siempre que $\{j_2, \ldots, j_n\} \in A'_i$. Tomando $B_i = A_i \cup A'_i$, vemos que debe existir x testigo de la propiedad (n, k)-estrella, pero dicho x debe ser un elemento de Z (por la definición de Z) y por lo tanto dicho x es el testigo buscado. ■

Ahora uno de los resultados más fáciles e importantes para las definiciones siguientes es el lema que enuncio.

Lema 45. *Si f satisface la propiedad (n, k)-estrella en A y se particiona a A en dos subconjuntos B y C, entonces f satisface la propiedad (n, k)-estrella en B o la satisface en C.*

Demostración. Supongamos que es falso para la partición $A = B \cup C$, entonces en B existen $B_0, \ldots, B_{k-1}$ familias de subconjuntos de tamaño $n - 1$, ajenos por pares y de modo ningún $x \in B$ cumple que $f(x, j_2, \ldots, j_n) = i$ para $\{j_2, \ldots, j_n\} \in B_i$. Tenemos algo completamente análogo en C para los conjuntos $C_0, \ldots, C_{k-1}$. Entonces en A no hay testigo para los conjuntos $A_i = B_i \cup C_i$, lo cual contradice que A satisface la propiedad (n, k)-estrella. ■

Por la proposición anterior tenemos que la familia de los $X \in \mathcal{P}(\omega)$ tales que R^n_k satisface la propiedad (n, k)-estrella es una familia de positivos para un ideal y por lo tanto podemos hacer la siguiente definición.

Definición 46. *Dados n, k, l números naturales tales que $l < k$, definimos el ideal $\mathcal{R}^n_{k,l}$ que está generado por $\{A \subseteq \omega : |c[A]| \leq l\}$.*

Notemos que el ideal $\mathcal{R}^n_{k,l}$ es un ideal propio, es decir no es todo $\mathcal{P}(\omega)$, esto es simplemente porque si tomamos una cantidad finita de conjuntos $X_0, X_1, \ldots, X_{l-1} \in \mathcal{R}^n_{k,l}$ se tiene que R^n_k no satisface la propiedad (n, k)-estrella en el conjunto $\bigcup_{i \in l} X_i$, por lo que en particular dicho conjunto no puede ser igual a ω.

Proposición 47. *Sean n, k, l números naturales tales que $l < k$, entonces $\mathcal{R}^n_{k,l}$ es un ideal F_σ alto.*

Demostración. Para ver que es F_σ, sólo tenemos que notar que $\mathcal{R}^n_{k,l}$ está generado por un cerrado. Que es un ideal alto se sigue del teorema clásico de Ramsey. ■

Observación 48.
- *Si $l < l'$ entonces $\mathcal{R}^n_{k,l} \leq_K \mathcal{R}^n_{k,l'}$ y*
- *Si $k < k'$ entonces $\mathcal{R}^n_{k',l} \leq_K \mathcal{R}^n_{k,l}$.*

La primera propiedad es debido a que $\mathcal{R}^n_{k,l} \subseteq \mathcal{R}^n_{k,l'}$ y recordemos que el orden de Katětov respeta contenciones, mientras que para la segunda parte de la observación necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 49. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, entonces $\mathcal{R}^n_{k,l} \leq_K \mathcal{I}$ si y sólo si $\omega \not\to (\mathcal{I}^+)^n_{k,l}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R}^n_{k,l} \leq_K \mathcal{I}$. Entonces existe $f : \omega \to \omega$ tal que $f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$ siempre que $A \in \mathcal{R}^n_{k,l}$. Definimos $c : [\omega]^n \to k$ como $c(\{a_0, \dots, a_{n-1}\}) = R^n_k(\{f(a_0), \dots, f(a_{n-1})\})$ siempre que esté bien definido. Cuando $|\{f(a_0), \dots, f(a_{n-1})\}| \leq n-1$ hacemos $c(\{a_0, \dots, a_{n-1}\}) = 0$. Notemos que c es una coloración tal que para cada $A \in \mathcal{P}(\omega)$ si $|c[[A]^n]| \leq l$ entonces $A \in \mathcal{I}$ porque f es una función que envía positivos de $\mathcal{I}$ en positivos de $\mathcal{R}^n_{n,k}$.

Para la otra implicación, supongamos que $\omega \not\to (\mathcal{I}^+)^n_{k,l}$, entonces existe $c : [\omega]^n \to k$ tal que si $|c[[A]^n]| \leq l$ entonces $A \in \mathcal{I}$. Por la universalidad de R^n_k tenemos que existe una función $f : \omega \to \omega$ que es encaje de c en la (n, k)-gráfica de Rado. Dicha función es testigo de que $\mathcal{R}^n_{k,l} \leq_K \mathcal{I}$. ■

La observación de arriba ahora queda clara, porque si para cada coloración con k colores se satisface la propiedad tipo Ramsey, en particular se satisface la propiedad con menos de k colores, porque las coloraciones con menos de k colores son coloraciones con k colores trivialmente (dicho de otro, modo toda función $f : [\omega]^n \to k'$ es una función $f : [\omega]^n \to k$ siempre que $k \geq k'$).

Una pregunta abierta que respondieron M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, E. Thümmel, y C. Uzcátegui en [13] es si las propiedades $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ y $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_3$ son equivalentes. Ellos construyen un ideal llamado $\widetilde{\mathcal{ED}}$ que satisface $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ pero no satisface $\omega \to (\mathcal{I}^+)^2_3$. Esta misma idea la vamos a extender para probar que existe $(\widetilde{\mathcal{ED}}_m : m \in \omega)$ una familia de ideales en ω tal que $\omega \to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+_m)^2_{m+1}$ pero $\omega \not\to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+_m)^2_{m+2}$.

Para esto, recordemos la notación usada en el capítulo anterior, donde definimos $\{A_s : s \in \omega^{<\omega}\}$, una familia de subconjuntos de ω que tiene particiones cada vez más refinadas. El ideal $\mathcal{ED}$ está definido en $\omega \times \omega$ pero podemos definirlo igualmente en ω usando las particiones y $\mathcal{ED}$ sería el ideal generado por $(A_{(l)} : l \in \omega)$ y por los $A \subseteq \omega$ tales que $|A \cap A_{(l)}| = 1$ para cada $l \in \omega$. Podemos decir que $\mathcal{ED}$ es $\widetilde{\mathcal{ED}}_0$ y justamente este ideal no satisface ninguna propiedad del tipo $\omega \rightarrow (\mathcal{I}^+)^2_n$ como ya vimos en el capítulo anterior (y esto ya era una cosa conocida por David Meza y Michael Hrušák).

Definición 50. *Definimos el ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_m$ para $m \in \omega$ como el ideal generado por $\mathcal{A}_m = \{A_s : |s| = m+1\}$ y*

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\omega) : (\exists s \in \omega^{<\omega})(A \subseteq A_s \wedge (\forall n \in \omega)(|A \cap A_{s^\frown n}| = 1|))\}.$$

Dicho de otro modo, el ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_m$ está generado por los conjuntos en el árbol que están en el nivel $m+1$ y por los selectores.

Observación 51. *El ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_m$ es un ideal F_σ para cada $m \in \omega$.*

Demostración. Basta ver que existe φ una submedida inferiormente semicontinua tal que $Fin(\varphi) = \widetilde{\mathcal{ED}}_m$. Sea $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \rightarrow \omega + 1$ dada por

$$\varphi(A) = min\{\alpha \in \omega + 1 : (\exists (A_\beta \in \mathcal{A}_m \cup \mathcal{B} : \beta \in \alpha))(A \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} A_\beta)\}.$$

No es difícil darse cuenta que φ es una submedida inferiormente semicontinua y tal que $Fin(\varphi) = \widetilde{\mathcal{ED}}_m$. ■

Otra observación que sale directo de la definición es que $\widetilde{\mathcal{ED}}_m \subseteq \widetilde{\mathcal{ED}}_n$ siempre que $m \geq n$ y en particular se tiene la relación $\widetilde{\mathcal{ED}}_m \leq_K \widetilde{\mathcal{ED}}_n$. Otra cosa a remarcar es que $\widetilde{\mathcal{ED}}_1 = \widetilde{\mathcal{ED}}$, definido en el artículo [13] (no es igualdad porque en el artículo el ideal está definido en $\omega \times \omega \times \omega$ y aquí lo defino en ω, pero hay una función biyectiva que respeta la pertenencia a cada ideal, serían KB equivalentes pero con una función biyectiva).

Proposición 52. *$R^2_{m+2} \leq_K \widetilde{\mathcal{ED}}_m$ o dicho de otro modo $\omega \not\to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+_m)^2_{m+2}$.*

Demostración. Dados n y k números naturales, definimos la coloración $c : [\omega]^2 \to m+2$ dada por: $c(\{n,k\}) = i < m+1$ si existen $s, t \in \omega^i$ de modo que $s \neq t$ y

$$n \in A_s \wedge k \in A_t \wedge (\forall j < i)((\exists s', t' \in \omega^j) n \in A_{s'} \wedge k \in A_{t'} \Rightarrow s' = t'),$$

en caso de no existir dichos s y t definimos $c(\{n,k\})$ como $m+1$.

La coloración anterior mostrada satisface que cada monocromático está contenido en los generadores del ideal y por lo tanto es testigo de que falla la propiedad Ramsey. ■

Ahora probemos la propiedad tipo Ramsey que buscamos. Para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 53. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω. Diremos que*

$$\omega \to (<\omega, \ldots, <\omega \mid \mathcal{I}^+)^2_n$$

si para cada coloración $c : [\omega]^2 \to n$ con n colores, existe $i < n$ y $A \in \mathcal{I}^+$ tal que A es i-monocromático o bien para cada $i < n$ y para cada $N \in \omega$ existe $A \subseteq \omega$ tal que $|A| = N$ y A es i-monocromático.

Teorema 54. *$\omega \to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+_m)^2_{m+1}$*

Demostración. Esta proposición la vamos a probar por inducción sobre $n \in \omega$ usando las siguientes dos propiedades:

- $\omega \to (\widetilde{\mathcal{ED}}^+_n)^2_{n+1}$.
- $\omega \to (<\omega, \ldots, <\omega \mid \widetilde{\mathcal{ED}}^+_n)^2_{n+2}$

La primera propiedad ya la hemos explicado demasiado y es justo lo que queremos probar, pero para esto nos auxiliaremos de la segunda propiedad un poco más débil que se puede leer como: para cada coloración de las parejas de ω con $n+2$ colores, existe un subconjunto positivo de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$ el cual es monocromático o para cada $N \in \omega$ existe subconjuntos monocromáticos de tamaño N para cada uno de los colores.

Para $n = 0$ la primera propiedad es trivial porque estamos coloreando las parejas de ω con un solo color. La segunda propiedad con $n = 0$ nos dice que si coloreamos las parejas de ω con dos colores, entonces existe monocromático positivo para alguno de los dos colores o bien para ambos hay monocromáticos de tamaño arbitrariamente grade, esto lo probaron Michael Hrušák y David Meza, se puede consultar una prueba en [24], aunque no es difícil de demostrar.

Supongamos que se valen ambas propiedades para cierta $n \in \omega$. Lo primero que debemos notar es que $\widetilde{\mathcal{ED}}^+_{n+1}$ contiene ω copias de $\widetilde{\mathcal{ED}}^+_n$ y cada $A \subseteq \omega$ es positivo si A intersectado con alguna de las copias de $\widetilde{\mathcal{ED}}^+_n$ es positivo, o bien si para cada $N \in \omega$ existe $M \in \omega$ tal que A intersectado con la M-ésima copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}^+_n$ tiene al menos N elementos. Con la notación que hemos estado usando, se tiene que $\widetilde{\mathcal{ED}}_{n+1}$ restringido a $A_{(N)}$ es la N-ésima copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$.

Sea $c : [\omega]^2 \to n+2$ una coloración con $n+2$ colores. Queremos probar que existe $A \subseteq \omega$ tal que A es $\widetilde{\mathcal{ED}}_{n+1}$-positivo y c-monocromático.

Hay dos casos, el primer caso es que existe $k \in \omega$ tal que $c \restriction A_{(k)}$ contiene un positivo (para el ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$) para alguno de los colores, en dicho caso ya terminamos, porque un positivo en $A_{(k)}$ para $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$ es un positivo para $\widetilde{\mathcal{ED}}_{n+1}$. Supongamos que no es el caso. Para continuar con la prueba necesitamos el siguiente lema, el cual es muy parecido al que se encuentra en [13], teorema 4.16. Justo esta parte de la demostración está basada en ese teorema (y lo generaliza en cierto modo).

Lema 55. *Sean k_0, N dos números naturales. Supongamos que $C \subseteq A_{(k_0)}$ es tal que C contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$ (en particular $C \in \widetilde{\mathcal{ED}}_n^+$), $B \in [\omega]^\omega$, $A_m \in [A_{(m)}]^\omega$, tal que A_m contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$, para cada $m \in B$. Entonces existe $a \in [C]^N$, $B' \in [B]^\omega$, $i < n+2$ y $A'_m \subseteq A_m$ tales que A'_m contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$ y $c(\{x, y\}) = i$, para cada $x \in a$ y $y \in a \cup \bigcup_{m \in B'} A'_m$ (con $x \neq y$).*

Demostración del Lema. Sea $\{x_j : j \in \omega\}$ una ennumeración de C. Para $j = 0$ y $m \in B$, podemos particionar a A_k en $n+2$ subconjuntos, dados por $X_{m,i} = \{y \in A_k : c(\{x_0, y\}) = i\}$. Para cada m existe i tal que $X_{m,i}$ contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$. Sea $i_0 < n+2$ y $B_0 \in [B]^\omega$ tal que cada X_{m,i_0} contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$, para cada $m \in B_0$ y sean $A^0_k = X_{m,i_0}$. Este mismo procedimiento lo repetimos para cada x_j, de manera recursiva variando $j \in \omega$, de modo que tenemos definido lo siguiente:

- $B_{l+1} \in [B_l]^\omega$,
- $A^{l+1}_m \in [A^l_m]^\omega$ es tal que contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$, para toda $m \in B_{l+1}$ y
- $c(x_j, y) = i_j$, para toda $y \in \bigcup_{m \in B_l} A^l_m$.

Sea $Z_i = \{x_j \in C : i_j = i\}$. Como $\{Z_i : i < n+2\}$ es una partición de C, existe $i < n+2$ número fijo tal que Z_i contiene una copia de $\widetilde{\mathcal{ED}}_n$. Sea $C' = Z_i$

Por hipótesis de inducción sobre C', existe $a \in [C']^N$ un i-monocromático. Sea $J = \max\{j : x_j \in a\}$ y sea $B' = B_J$, $A'_m = A^J_m$, para cada $m \in B'$. Por construcción, $a, B' y \{A'_m : m \in B'\}$ satisfacen lo que queríamos demostrar. ∎

Para completar la mitad de la inducción, sólo debemos aplicar el lema repetidas veces, eso nos da una sucesión creciente $\{k_j \in \omega : j \in \omega\}$, tal que existe $a_j \in [A_{(k_j)}]^j$ monocromático de color i_j y tal que $c(x, y) = i_j$ si $x \in a_j$ y $y \in a_N$, con $N > j$. Como sólo hay una cantidad finita de i_j, existe i un color fijo tal que existen infinitos $j \in \omega$ de modo que $i_j = i$. Entonces el conjunto $\bigcup_{i_j=i} a_j$ es un i-monocromático positivo del ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_{n+1}$.

La otra mitad de la inducción es probar que para cada coloración $c : [\omega]^2 \to n + 3$, existe un monocromático positivo de alguno de los colores, o bien existen monocromáticos positivos arbitrariamente grandes de todos los colores. Sea $c'[\omega]^2 \to n + 2$, dada por:

$$c'(\{a, b\}) = \begin{cases} 0 & si \quad c(a, b) = 0 \\ \\ c(a, b) - 1 & si \quad c(a, b) > 0 \end{cases}$$

Por la prueba anterior, existe $A \subseteq \omega$ monocromático positivo para la coloración c'. Si A es monocromático positivo de color $i > 0$, entonces ya no hay nada que probar porque un i-monocromático para c' es un i-monocromático para c. Si A es 0-monocromático para c', entonces c restringido a A es una coloración de un positivo de $\widetilde{\mathcal{ED}}_{n+1}$, en particular contiene una copia de $\mathcal{ED}_{fin}$ y por lo tanto hay monocromáticos tanto de color 0 como de color 1 de tamaño N, para cada $N \in \omega$, o bien hay un positivo monocromático para el color 0 o el color 1. Si es la segunda opción, ya no hay nada más que hacer, si fuera la 1a opción, entonces por un argumento análogo (definiendo coloraciones auxiliares igualando los colores 2 y 3, etc) se pueden construir monocromáticos de tamaño N para el resto de colores.

Con esto termina la inducción. ■

Además de los ideales ya definidos, podemos considerar el siguiente ideal

$\widetilde{\mathcal{ED}}_\omega = \bigcap_{n\in\omega} \widetilde{\mathcal{ED}}_n$. Algo que podemos notar fácilmente de las definiciones es que $\mathcal{PC} \subseteq \widetilde{\mathcal{ED}}_\omega$ y por lo tanto el ideal $\widetilde{\mathcal{ED}}_\omega$ es alto (y por defininción es $F_{\sigma\delta}$).

Terminamos el capítulo con el siguiente teorema (que es corolario del teorema anterior).

Teorema 56. *Sea $n \in \omega$, entonces $\omega \to (\widetilde{\mathcal{ED}}_\omega^+)^2_n$. En particular $\omega \to (\mathcal{PC}^+)^2_n$*

Sería interesante analizar qué sucede con estos mismos ideales para coloraciones que consideren en vez de parejas, ternas de números por ejemplo, o subconjuntos de tamaño k. Como los ideales de las gráficas de Rado correspondientes a n-adas son más chicos (en el orden de Katětov, tiene sentido la pregunta). Una sola pregunta (pero se podrían hacer muchas al respecto) es la siguiente.

Pregunta 57. *¿Se satisface que $\omega \to (\mathcal{PC}^+)^n_k$, para $n > 2$?*

Capítulo 4

Más sobre ideales

En este capítulo hablaremos más acerca del orden de Katětov en ideales sobre los números naturales. Primero que nada vamos a hablar exhaustivamente de todo lo que sabemos acerca del ideal de Solecki, después en la segunda sección hablaremos a cerca de una pregunta de Michael Hrušák, donde define un ideal K-uniforme, y pregunta si el único ideal que cumple dicha propiedad es el ideal $\mathcal{ED}_{fin}$, esto lo respondimos en el sentido negativo y terminaremos el capítulo con el orden de Katětov-Rudin, el cual ya definimos en el capítulo de preliminares.

4.1. El ideal de Solecki

El ideal de Solecki fue definido en el primer capítulo, en esta sección vamos a ver algunas propiedades tipo Ramsey sobre este ideal y otros ideales relacionados. Dado $U \in \Omega$, supongamos que $U = \langle x_0 \rangle \cup \langle x_1 \rangle \cup \cdots \cup \langle x_i \rangle$ definimos $\widetilde{U}_n$ como $\langle x_0 \upharpoonright |x_0| - n \rangle \cup \cdots \cup \langle x_i \upharpoonright |x_i| - n \rangle$, donde cada $\langle x_j \rangle$ es un cerrado abierto básico de 2^ω, todos son ajenos y $\langle x_j \upharpoonright |x_j| - 1 \rangle \not\subseteq U$, para cada $j \in i + 1$.

Con la notación anterior construimos los siguientes ideales que están relacionados con el ideal de Solecki.

Definición 58. *Sea $n \in \omega$. Definimos el ideal $\widetilde{\mathcal{S}}_n$ como el ideal generado por $I_x = \{U \in \Omega : x \in \widetilde{U}_n\}$, para $x \in 2^\omega$.*

También definimos

$$\widetilde{\mathcal{S}}_\omega = \bigcup_{n \in \omega} \widetilde{\mathcal{S}}_n.$$

Proposición 59. *Sea $\alpha \in \omega + 1$, entonces $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ es un ideal F_σ alto.*

Demostración. Para ver que $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ es alto basta notar que $\mathcal{S} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ y sabemos por el primer capítulo que $\mathcal{S}$ es un ideal alto. Ahora, para ver que $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ es un ideal F_σ, notemos que $\varphi_\alpha : \mathcal{P}(\omega) \to \omega + 1$ dada por

$$\varphi_n(X) = \text{mín}\{\gamma \in \omega + 1 : (\exists \{x_i \in 2^\omega : i \in \gamma\})(\forall U \in X)(\exists j \in \gamma)(x_j \in \widetilde{U}_n)\}$$

cuando n es un número natural, es una submedida inferiormente semicontinua tal que $Fin(\varphi_n) = \widetilde{\mathcal{S}}_n$.

$$\varphi_\omega(X) = \text{mín}\{\gamma \in \omega + 1 : \gamma\})(\forall U \in X)(\exists j \in \gamma)(x_j \in \widetilde{U}_m)\},$$

donde m es el mínimo natural de modo que existe $j \in \omega$ tal que $\{x_i \in 2^\omega : i \in j\}$ intersecta a cada $\widetilde{U}_m$ siempre que $U \in X$. En caso de no existir dicho m simplemente la medida es infinito y así $\widetilde{\mathcal{S}}_\omega = Fin(\varphi_\omega)$. ■

Ahora calcularemos los invariantes cardinales de $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$.

Proposición 60. *Sea $\alpha \in \omega + 1$, entonces los invariantes cardinales de $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ son los siguientes:*

- $add^*(\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha) = \aleph_0$.

- $non^*(\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha) = \aleph_0$.
- $\widetilde{\mathcal{S}}_\omega = non(\mathcal{N})$.
- $cof(\widetilde{\mathcal{S}}_\omega) = \mathfrak{c}$.

Demostración. Para el primer inciso de la primera proposición, lo que queremos probar es que existe $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ numerable de modo que para cada $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \setminus X$ es infinito. Hay dos casos: $\alpha = \omega$ y $\alpha < \omega$. Haremos el caso $\alpha = \omega$, pero el otro caso es totalmente análogo (ya se verá por qué en la prueba). Sea $Z = \{(F, n) : F \in [2^{<\omega}]^{<\omega} \wedge n \in \omega \wedge \mu(\widetilde{F}^n) \leq \frac{1}{4}\}$ (para cuando $\alpha = n$ simplemente dejamos n fijo en la definición de Z). Para cada $(F, n) \in Z$ defina $X_{(F,n)}\{A_i \in \Omega : i \in \omega\}$ de modo que para cada $i \in \omega$ se tiene que $A_i \cap \left\langle \widetilde{F}^n \right\rangle = \emptyset$ y sea $\mathcal{A} = \{X_{(F,n)} : (F, n) \in Z\}$. Supongamos que $X \in \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$, entonces existe $x_1, x_2, \ldots, x_k \in 2^\omega$ tales que cada $U \in X$ satisface que $\widetilde{U}^n \cap \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \neq \emptyset$, para algún $n \in \omega$ fijo. Sea $m \in \omega$ tal que $F = \langle x_1 \restriction m\rangle \cup \langle x_2 \restriction m\rangle \cup \cdots \cup \langle x_k \restriction m\rangle$ satisface que $\mu(\widetilde{F}^n) \leq \frac{1}{4}$. Entonces $X_{(F,n)} \setminus X$ es un conjunto infinito, por la definición de $X_{(F,n)}$, que es justo lo que queríamos demostrar.

Para el segundo inciso, la misma familia $\mathcal{A}$ definida para demostrar el primer inciso funciona y la prueba es básicamente la misma.

Para el tercer inciso, primero recordemos que $\mathcal{S} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$, entonces $non(\mathcal{N}) \geq cov^*(\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha)$ (se puede consultar la tesis doctoral de David Meza, 1er capítulo, para más información al respecto), por lo tanto basta probar que $\widetilde{\mathcal{S}}_\omega \geq non(\mathcal{N})$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ sea $F_A = \in [2^\omega]^{<\omega}$ tal que $\widetilde{A}^n \subseteq \bigcup_{x \in F_A} I_x$. Sea $X = \bigcup_{A \in \mathcal{X}} F_A$. Para terminar la prueba necesitamos la siguiente afirmación.

Afirmación. Si $\mu(X) = 0$ entonces para cada $n \in \omega$ existe un conjunto infinito $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ tal que $|I_x \cap \widetilde{\mathcal{A}}^n| < \omega$ para toda $x \in X$.

Demostración de la afirmación. Sea $U \subseteq 2^\omega$ un abierto tal que $X \subseteq U$

y $\mu(U) < \frac{1}{8}$. Sea $\{U_m : m \in \omega\}$ una familia creciente de cerrado-abiertos del cantor tal que $U = \bigcup_{m\in\omega} U_m$. Para cada $m \in \omega$ sea $A_{n,m} \in \Omega$ tal que $\widetilde{A}^n_{n,m} \cap U_m = \emptyset$, entonces si $x \in X$, existe M tal que $x \in U_M$ y por lo tanto $x \in A_{n,k}$ implica $k < M$.

Para probar que la cofinalidad es igual a $\mathfrak{c}$. Sea $\mathcal{A} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$ y usando la notación del inciso anterior consideremos $X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} F_A$. Para cada $x \in 2^\omega \setminus X$ se tiene que el básico I_x no está casi contenido en ningún elemento de $\mathcal{A}$ y por lo tanto $\mathcal{A}$ no puede ser base para el ideal. ■

Hay un ideal muy relacionado con el ideal de Solecki y con el ideal *nwd*, este nos ayudará a probar que el ideal de Solecki tiene una propiedad tipo Ramsey. Sea n un número natural, definimos $\Omega_n = \{U \in Clopen(2^\omega) : \mu(U) = \frac{1}{2^n}\}$, de este modo Ω_1 es simplemente Ω. Ahora tomamos

$$\mathcal{S}^+_n = \{A \subseteq \Omega : (\forall V \in \Omega_n)(\exists U \in A)(U \cap V = \emptyset)\}.$$

y por último definimos

$$\mathcal{S}^+_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{S}^+_n$$

Notemos que para cada n se tiene que $\mathcal{S}^+_n$ es una familia de conjuntos positivos en el ideal de Solecki (justo por esa razón en la notación le puse un signo $+$). Antes de continuar necesitamos el siguiente lema.

Lema 61. *Sea $A \in \mathcal{S}^+_n$ y $B \cup C$ una partición de A. Entonces $B \in \mathcal{S}^+_n$ o $C \in \mathcal{S}^+_n$.*

Demostración. Vayamos por contradicción, supongamos que $B \notin \mathcal{S}^+_{n+1}$ y $C \notin \mathcal{S}^+_{n+1}$, entonces existen V_1, V_2 conjuntos cerrados y abiertos del conjunto de cantor de medida $\frac{1}{2^{n+1}}$ cada uno tales que para cada $U_1 \in B$ y $U_2 \in C$ se tiene que $V_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ y $V_2 \cap U_2 \neq \emptyset$. Entonces $V = V_1 \cup V_2$ es un cerrado y abierto de medida $\frac{1}{2^n}$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$ para cada $U \in A$. ■

Por el lema anterior tenemos que si $A \in \mathcal{S}_\omega^+$ y $A = B \cup C$ entonces $B \in \mathcal{S}_\omega^+$ o $C \in \mathcal{S}_\omega^+$, además $\Omega \in \mathcal{S}_\omega^+$.

Observación 62. *$\mathcal{S}_\omega^+$ es el conjunto de positivos para el ideal definido como $\mathcal{S}_\omega = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \mathcal{S}_\omega^+$.*

La prueba de que $\mathcal{S}_\omega$ es un ideal es simplemente aplicar el lema anterior. Acerca de este ideal tenemos lo siguiente.

Proposición 63. *$\mathcal{S}_\omega$ es un ideal $F_{\sigma\delta}$ que contiene al ideal de Solecki. Más aún $\widetilde{\mathcal{S}}_\omega \subseteq \mathcal{S}_\omega$.*

Demostración. Para ver que $\mathcal{S}_\omega$ es $F_{\sigma\delta}$ basta probar que $\mathcal{S}_n^+$ es un conjunto G_δ para cada n. Eso es fácil, sólo tenemos que ver que Ω_n es un conjunto numerable y para cada $V \in \Omega_n$ y $X_V\{A \subseteq \Omega : (\exists U \in A)(U \cap V = \emptyset)\}$ es un conjunto abierto (en 2^Ω y por lo tanto $\mathcal{S}_n = \bigcap_{V \in \Omega_n} X_V$ es un conjunto G_δ.

Para la segunda parte de la prueba notemos que para cada $n, m \in \omega$ y para cada $A \in \mathcal{S}_n^+$ sucede que $A \in \widetilde{\mathcal{S}}_m^+$ y por lo tanto $A \in \widetilde{\mathcal{S}}_\omega^+$. ■

Una pregunta abierta de Michel Hrušák es si el ideal de Solecki satisface una propiedad tipo Ramsey, lo que probaré es una propiedad más débil, pero antes veremos que esta misma propiedad la satisface el ideal $\mathcal{S}_\omega$.

Diremos que $\mathcal{I}^+ \to (\mathcal{I}^+)^2_2$ si para cada $A \in \mathcal{I}^+$ se satisface que $A \to (\omega, \mathcal{I} \restriction A^+)$, donde A tiene el papel de ω. (Esta definición la vimos en el primer capítulo, se puede consultar ahí para para más información).

Teorema 64. *$\mathcal{S}_\omega^+ \to (\omega, \mathcal{S}_\omega^+)^2_2$. En particular $\omega \to (\omega, \mathcal{S}^+)^2_2$.*

Demostración. En esta prueba usaré varias veces la siguiente observación.

Observación 65. *Si $A \in \mathcal{S}_n^+$ y $B \in \mathcal{S}_\omega$, entonces $A \setminus B \in \mathcal{S}_{n+1}^+$.*

La prueba de la observación se sigue del lema que se demostró un poco más arriba. Sea $A \in \mathcal{S}_\omega^+$ y sea $c : [A]^2 \to 2$ una coloración. Definimos recursivamente (mientras sea posible) $\{A_n \in \mathcal{S}_\omega^+ : n \in \omega\}$ y $x_n \in A_n$ tales que:

- $A_0 = A$,
- $x_n \in A_n$ y
- $c(\{x_n, y\}) = 0$ para cada $y \in A_{n+1}$.

Si la recursión anterior es posible para cada $n \in \omega$, entonces $\{x_n : n \in \omega\}$ es un conjunto infinito 0-homogéneo que es lo que queríamos probar. Si no es posible la recursión, entonces para alguna n se tiene que $\{y : c(\{x, y\}) = 0\} \in \mathcal{S}_\omega$, esto para cada $x \in A_n$. Como $A \in \mathcal{S}_\omega^+$ entonces existe $m \in \omega$ tal que $A_n \in \mathcal{S}_m^+$. Sea $\{V_i : i \in \omega\} = \Omega_{m+1}$. Definimos $x_0 \in A_n$ tal que $x_0 \cap V_0 = \emptyset$, esto es posible porque $B_0 = A_n \in \mathcal{S}_m^+ \subseteq \mathcal{S}_{m+1}^+$. Sea $B_1 = \{y \in B_0 : c(\{x_i, y\}) = 1\}$, notemos que $B_1 \in \mathcal{S}_{m+1}^+$ por la observación. Para cada $i \in \omega$ definimos:

- $B_i \in \mathcal{S}_{m+1}^+$,
- $x_i \in B_i$ de modo que $x_i \cap V_i = \emptyset$ y
- $c(\{x_i, y\}) = 1$ siempre que $y \in B_{i+1}$.

La recursión es posible porque para cada $i \in \omega$ podemos tomar $B_{i+1} = A_n \setminus \{y \in B_j : j < i \wedge c(\{x_i, y\}) = 0\}$, $A_n \in \mathcal{S}_m^+$ y $\{y \in B_j : j < i \wedge c(\{x_i, y\}) = 0\} \in \mathcal{S}_\omega$. Ahora, el conjunto $\{x_i : i \in \omega\}$ es un conjunto 1-homogéneo y es $\mathcal{S}_\omega$-positivo. ■

Una conclusión fácil de la proposición anterior es la siguiente.

Corolario 66. $\Omega \to (\omega, \mathcal{S}^+)^2_2$.

Demostración. Para cada coloración de $[\Omega]^2$ existe A infinito 0-homogéneo o $A \in \mathcal{S}^+_\omega$ que es 1-homogéneo, este mismo A es testigo para la coloración porque $\mathcal{S}^+_\omega \subseteq \mathcal{S}$. ■

Ahora veremos que el ideal no satisface la propiedad Ramsey más fuerte. Primero necesitamos definir el siguiente juego, muy parecido al juego corta y elige del capítulo 2.

Definición 67 ([24] y [9])**.** *Dado un ideal $\mathcal{I}$ en ω el juego corta y elige finito $G_{fin}(\mathcal{I})$ es un juego infinito definido como sigue: el jugador I empieza el juego con un partición de los naturales en dos piezas $\omega = A^0_0 \cup A^0_1$, entonces el jugador II juega $i_0 \in 2$ y $a_0 \in [A^0_{i_0}]^{<\omega}$. En el $(n+1)$-ésimo movimiento el jugador I parte $A^n_{i_n}$ en A^{n+1}_0 y A^{n+1}_1 y el jugador II elige $i_{n+1} \in 2$ y $a_n \in [A^{n+1}_{i_{n+1}}]^{<\omega}$. El jugador I gana el juego si $\bigcup a_n \in \mathcal{I}$. En otro caso el jugador II gana.*

I	$\omega = A^0_0 \cup A^0_1$		$A^0_{i_0} = A^1_0 \cup A^1_1$		...
II		$i_0 \in 2, a_0 \in A^0_{i_0}$		$i_1 \in 2, a_1 \in A^1_{i_1}$	...

Tenemos las siguientes observaciones.

Observación 68. *Si el jugador I tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{I})$ y $\mathcal{I} \leq_K \mathcal{J}$, entonces el jugador I tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{J})$. Del mismo modo, si el jugador II tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{I})$ y $\mathcal{J} \leq_K \mathcal{I}$, entonces el jugador I tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{J})$.*

Observación 69. *Notemos que si $\mathcal{I}$ es un ideal extendible a F_σ, entonces el jugador II tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{I})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{J}$ un ideal F_σ tal que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ y ϕ una submedida inferiormente semicontinua tal que $Fin(\phi) = \mathcal{J}$. La estrategia ganadora del jugador II consiste en lo siguiente: en la jugada n el jugador I da una partición de un conjunto positivo de $\mathcal{J}$, entonces el jugador II elige uno de los dos pedazos que sea positivo según $\mathcal{J}$ y a_n contenido en dicho conjunto de modo que $\phi(a) = n$. Al final el conjunto elegido por el jugador II es un positivo. ■

Realmente no fue necesario que el ideal $\mathcal{J}$ sea un ideal F_σ sino que era suficiente que sea un ideal P^+, pero es un resultado conocido que un ideal es extendible a un ideal P^+ si y sólo si es extendible a un ideal F_σ.

Lema 70. *El jugador I tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(conv)$.*

Demostración. Sean $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$. Primero el jugador I juega con la partición $(0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, 1)$ (estos intervalos son de los racionales, no de los reales). El jugador II va a responder con $(a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ o con $(\frac{a_0+b_0}{2}, b_0)$ (y con un a_0 un conjunto finito). Construímos recursivamente dos sucesiones $\{a_n : n \in \omega\}$ y $\{b_m : n \in \omega\}$ de números racionales tales que:

- $a_0 = 0$ y $b_0 = 1$,
- si en la jugada i el jugador dos elige $(a_i, \frac{a_i+b_i}{2}]$ entonces $a_{i+1} = a_i$ y $b_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ y
- si en la jugada i el jugador dos elige $(\frac{a_i+b_i}{2}, b_i)$ entonces $a_{i+1} = \frac{a_i+b_i}{2}$ y $b_{i+1} = b_i$.

En la jugada i el jugador I particiona a (a_i, b_i) como $(a_i, \frac{a_i+b_i}{2}] \cup (\frac{a_i+b_i}{2}, b_i)$. Al final, los conjuntos finitos que elige el jugador II son una sucesión convergente, por lo que el jugador II pierde el juego sin importar qué conjuntos finitos elija. ■

Hay una variación del juego, donde el jugador II toma un conjunto finito no del pedazo que eligió, sino del pedazo antes de ser particionado. En esta variante podemos concluir también que el jugador II tiene estrategia ganadora cuando el ideal es extendible a F_σ y que el jugador II tiene estrategia ganadora con el ideal *conv*. Se sabe que ambos juegos son equivalentes en ideales definibles (E. Thümmel probó esa equivalencia). Este juego nos hace pensar la siguiente pregunta.

Pregunta 71 (Michael Hrušák [24]). *¿Para cada ideal Borel $\mathcal{I}$ se tiene que $\mathcal{I}$ es extendible a un ideal F_σ o $\mathcal{I} \geq_K conv$?*

A pesar de que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}_\omega$ son ideales muy parecidos, se tiene el siguiente resultado (que diferencía entre los dos ideales).

Proposición 72. *El jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $G_{fin}(\mathcal{S}_\omega)$, pero el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_{fin}(\mathcal{S})$.*

Demostración. Que el jugador II tiene estrategia ganadora en $G_{fin}(\mathcal{S})$ se sigue de que $\mathcal{S}$ es un ideal F_σ.

Para cada $U \in \Omega$ definimos recursivamente $x_U \in 2^\omega$ como sigue:

- $x_U(0) = 0$ si y sólo si $\mu(U \cap \langle 0\rangle \geq \mu(U \cap \langle 1\rangle)$.
- En general $x_U(n) = 0$ si y sólo si $\mu(U \cap \langle x \restriction n^\frown 0\rangle \geq \mu(U \cap \langle x \restriction n^\frown 1\rangle)$.

La estrategia del jugador I en el juego $G_{fin}(\mathcal{S}_\omega)$ consiste en lo siguiente:

- En la primera jugada particiona Ω como $A_{(0)} = \{U \in \Omega : x_U(0) = 0\}$ y $A_{(1)} = \{U \in \Omega : x_U(0) = 1\}$.
- En la jugada $n \geq 2$ el jugador II ya ha elegido

$$y = (i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}) \in 2^{<\omega},$$

el jugador I va a particionar el conjunto A_y como

$$A_{y^\frown 0} = \{U \in A_y : x_U(n) = 0\} \text{ y } A_{y^\frown 1} = \{U \in A_y : x_U(n) = 1\}.$$

Al final el jugador II ha elegido $x = (i_n : n \in \omega)$, además va eligiendo $a_n \in [A_{x\restriction n}]^{<\omega}$. Sin importar qué elección haya hecho el jugador II, veremos que:

$$\bigcup_{n\in\omega} a_n \in \mathcal{S}_\omega.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $n \in \omega$ tal que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$. Entonces para cada $U \in \bigcup_{M\geq n} a_M$ se tiene que $U \cap \langle x \restriction n+2\rangle \neq \emptyset$, además el conjunto $\bigcup_{i\leq n} a_i$ es finito, por lo que $\bigcup_{n\in\omega} a_n \notin \mathcal{S}_n^+$, pero esto fue para cualquier n, por lo tanto $\bigcup_{n\in\omega} a_n \in \mathcal{S}_\omega$. ■

Proposición 73. *conv* $\leq_K \mathcal{S}_\omega$.

Demostración. En esta prueba usaremos la notación definida en la prueba de la proposición anterior. Definimos la función (no inyectiva) $f : \Omega \to 2^{<\omega}$ dada por $f(U) = y_U$ si x_U es una sucesión infinita tal que existe $n \in \omega$ de modo que $x_U \restriction n = y_U$ y $x_U(N) = 0$ para toda $N \geq n$. Luego recordemos que $2^{<\omega}$ con el orden lexicográfico es isomorfo a $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, por lo tanto nuestra función podemos pensar que tiene imagen en $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. No es difícil notar que la preimagen de una sucesión convergente es un conjunto básico del ideal $\mathcal{S}_\omega$ y por lo tanto la función es una reducción de Katětov. ■

Dado un ideal $\mathcal{I}$ sobre ω definimos el juego $G_3(\mathcal{I})$ de modo que: en la jugada k-ésima el jugador I elige $I_k \in \mathcal{I}$ y el jugador II toma $n_k \in \omega \setminus I_k$. El jugador I gana el juego si $\{n_k : k \in \omega\} \in \mathcal{I}$.

Un resultado de Michael Hrušák es que si para cada $X \in \mathcal{I}^+$ el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_3(\mathcal{I} \restriction X)$, entonces $\mathcal{I} \leq_K$ *nwd*. Este resultado se puede consultar en la tesis doctoral de David Meza, teorema 3.4.1. Ese resultado lo usaremos para la siguiente proposición.

Proposición 74. $\mathcal{S}_\omega \leq_K nwd$

Demostración. Sea $X \in \mathcal{S}_\omega^+$. Entonces existe $n \in \omega$ tal que $X \in \mathcal{S}_n^+$. Sea $\{U_k : k \in \omega\}$ una numeración de todos los cerrado-abiertos del conjunto de Cantor de medida igual a $\frac{1}{2^{n+1}}$. Supongamos que en la jugada k del juego $G_3(\mathcal{S}_\omega \restriction X)$ el jugador I juega I_k, entonces (por el lema de este capítulo) $X \setminus I_k \in \mathcal{S}_{n+1}^+$ y así, existe $V_k \in X \setminus I_k$ tal que $V_k \cap U_k = \emptyset$, el jugador II elige juega dicho V_k. Por construcción $\{V_k : k \in \omega\} \in \mathcal{S}_{n+1}^+$ y por lo tanto el jugador II gana el juego, que es lo que queríamos demostrar. ∎

Con la proposición anterior termina esta sección, donde ya hemos clasificado por completo (en el orden de Katětov) a los ideales $\mathcal{S}_\omega$ y $\widetilde{\mathcal{S}}_\alpha$.

4.2. Ideales K-uniformes

Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, vamos a decir que $\mathcal{I}$ es K-uniforme si para cada $X \in \mathcal{I}^+$ se tiene que $\mathcal{I} \restriction X \leq_K$. El ideal $\mathcal{ED}$ tiene una restricción que es un ideal K-uniforme, su restricción es $\mathcal{ED}_{fin}$ que es el ideal $\mathcal{ED}$ restringidio a $\Delta = \{(n,m) : m \leq n\}$.

Proposición 75 ([24]). *El ideal $\mathcal{ED}_{fin}$ satisface las siguientes propiedades:*

- *$\mathcal{ED}_{fin}$ es un ideal F_σ alto.*
- *$\mathcal{ED}_{fin}$ es un ideal K-uniforme.*
- *Si $\mathcal{I}$ es un ideal F_σ alto y K-uniforme, entonces $\mathcal{ED}_{fin} \leq_K \mathcal{I}$*

Demostración. Un ideal F_σ restringido a un positivo sigue siendo un ideal F_σ, además ya habíamos visto que $\mathcal{ED}$ es un ideal F_σ. Sea $A \in \mathcal{ED}_{fin}^+$ un positivo, obviamente $\mathcal{ED}_{fin} \upharpoonright A \geq_K \mathcal{ED}_{fin}$. Como A es positivo, entonces existen $\{n_i \in \omega : i \in \omega\}$ y $\{(n_i, x_{j,i}) : j \in i\}$ tales que $(n_i, x_{j,i}) \neq (n_k, x_{l,k})$ siempre que $i \neq k$ o $j \neq l$ y $\{(n_i, x_{j,i}) : i \in \omega \wedge j \in i\} \subseteq A$. Sea $f : \Delta \to A$ dada por $f(i,j) = (n_i, x_{j,i})$. Evidéntemente f es una función de Katětov.

Todo ideal F_σ alto tiene una restricción encima (en el orden de Katětov) de $\mathcal{ED}_{fin}$, como toda restricción de cada ideal K-uniforme está en el mismo nivel también el ideal debe estar encima de $\mathcal{ED}_{fin}$. ■

Una pregunta de Michael Hrušák era si el único ideal K-uniforme alto y F_σ era $\mathcal{ED}_{fin}$, a lo cual responderemos a continuación.

Una gráfica es un conjunto de vértices con una relación irreflexiva y simétrica. Cuando pensamos en gráficas sobre el conjunto de los números naturales, omitimos el conjunto y sólo nos concentramos en la relación, que la podemos ver como un subconjunto de $[\omega]^2$.

Definición 76. *Sea (ω, G) una gráfica y sea $c : \omega \to \kappa$ una función, diremos que c es una coloración (con κ colores) si para cada $a, b \in \omega$ se tiene que $c(a) = c(b)$ implica que $\{a, b\} \notin G$. Además diremos que κ es el número cromático de G si κ es el mínimo cardinal para el cual existe una coloración de G con κ colores*

Definición 77 ([24])**.** *$\mathcal{G}_{fc}$ es el ideal sobre $[\omega]^2$ de las gráficas de número cromático finito. Este mismo ideal se puede ver como el ideal generado por las gráficas bipartitas.*

Proposición 78 ([24])**.** *$\mathcal{G}_{fc}$ es un ideal F_σ alto.*

Demostración. Veamos que es un ideal F_σ, para esto basta notar que el número cromático μ es una smisc tal que $Fin(\mu) = \mathcal{G}_{fc}$. Para ver que es alto basta notar que toda gráfica infinita contiene infinitas aristas ajeas, como las aritas ajenas tienen número cromático 2, entonces el ideal es alto. ■

K_n es la única gráfica con n vértices y todos los vértices adyacentes (salvo isomorfismo), consideremos K_n como subconjunto de $[\omega]^2$ y supongamos que las copias de los K_n son ajenas entre sí (es decir: $K_n \cap K_m = \emptyset$ siempre que $m \neq n$). Sea $K = \bigcup_{n\in\omega} K_n$. Obviamente $\mathcal{G}_{fc} \upharpoonright K \geq_K \mathcal{G}_{fc}$.

Definición 79. *Definimos el ideal $\mathcal{K}$ sobre K como $X \subseteq K$ es positivo si y sólo si existe $n \in \omega$ tal que X no contiene una copia de K_n.*

Proposición 80. *El ideal $\mathcal{K}$ es un ideal F_σ alto y K-uniforme y no equivalente a $\mathcal{ED}_{fin}$*

Demostración. La prueba de que $\mathcal{K}$ es K-uniforme es idéntica a la prueba de que $\mathcal{ED}_{fin}$ es K-uniforme, sólo basta notar que cada positivo tiene una copia del ideal. Además $\mathcal{K}$ contiene a $\mathcal{G}_{fc} \upharpoonright K$ por lo que es un ideal alto. Por otro lado $\mathcal{K}$ no es equivalente a $\mathcal{ED}_{fin}$ porque $\mathcal{K} \geq_K \mathcal{G}_{fc} \geq_K \mathcal{S}$ y $\mathcal{ED}_{fin} \not\geq_K \mathcal{S}$. ■

Con la proposición anterior terminamos esta sección, que en resumen responde a la pregunta de si existen otros ideales F_σ altos K-uniformes.

4.3. El orden de Katětov-Rudin

En esta sección vamos a clasificar los ideales Borel según un orden ya definido en el primer capítulo y que no había sido estudiado antes. Comenzamos con la siguiente observación.

Observación 81. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal sobre ω, entonces $\mathcal{I} \leq_R Fin$.*

Para la prueba de la observación anterior basta ver que la función identidad de ω en ω es una función de Katětov-Rudin. Otra observación fácil de notar es que si $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, entonces $\mathcal{J} \leq_R \mathcal{I}$ además si $X \in \mathcal{I}^+$, entonces $\mathcal{I} \upharpoonright X \leq_R \mathcal{I}$, estas tres observaciones son justamente opuestas a lo que sucede con el orden de Katětov, lo que al menos en primera instancia nos hace intuir (al menos un instante) que es el orden inverso, pero nada más lejos de la realidad.

Proposición 82. *$Fin \leq_R \mathcal{ED}$.*

Demostración. Antes de hacer la prueba sólo queda aclarar que este ejemplo nos muestra que el orden es muy diferente al orden de Katětov.

Definimos la función $f : \omega \times \omega \to \omega$ dada por $f(a, b) = b$. Esta función es una reducción de Katětov-Rudin, trivialmente testigo de lo que queríamos probar. ∎

La prueba de la proposición anterior también es la misma prueba de que $Fin \leq_R Fin \times Fin$ y de hecho se puede extender para probar que para todo α ordinal numerable se tiene que $Fin \leq_R Fin^\alpha$. Esto es totalmente contrario a lo que sucede con el orden de Katětov, porque $Fin^\alpha <_K Fin^{\alpha+1}$ para cada $\alpha \in \omega_1$, lo cual fue probado por D. Meza y O. Guzmán.

Este capítulo termina muy rápido debido al siguiente teorema, que implica en particular que todos los ideales Borel son equivalentes a Fin en el orden de Katětov-Rudin.

Teorema 83. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal magro. Entonces $Fin \leq_R \mathcal{I}$.*

Demostración. Por el teorema de Jalali-Naini-Talagrand existe una partición de intervalos $\{I_n : n \in \omega\}$ tal que para cada $F \in \mathcal{I}^*$ (en el filtro dual) existe $N \in \omega$ tal que $F \cap I_n \neq \emptyset$ para cada $n > N$. Sea $f : \omega \to \omega$ dada por $f(k) = n$ si y sólo si $k \in I_n$. Probaremos que f es una función de Katětov-Rudin, para esto lo que queremos ver es que $f^{-1}[A] \in Fin \implies A \in Fin$, pero por contrapuesta probaremos que $A \notin Fin \implies f^{-1}[A] \in \mathcal{I}$. Supongamos que A es infinito y sea $X \in \mathcal{I}^*$ un elemento del filtro dual cualquiera, por la definición de f se tiene que $f^{-1}[A] \cap X \neq \emptyset$, pero como esto sucede para todo $X \in \mathcal{I}^*$ entonces $f^{-1}[A]$ tiene que ser positivo del ideal, que es lo que queríamos probar. ■

El teorema anterior no sólo nos dice que todos los ideales Borel son equivalentes a Fin, sino que además son equivalente mediante una función finito a uno.

Corolario 84. *Sea $\mathcal{I}$ un ideal magro sobre ω. Entonces $\mathcal{I} \simeq Fin$. En particular, esta proposición es cierta para todos los ideales Borel.*

Observación 85. *El orden $\leq_R$ es equivalente al orden de Rudin-Keisler para ultrafiltros.*

Para terminar el capítulo, sólo queda mencionar que debido a los resultados anteriores, estudiar el orden de Katětov-Rudin no tiene sentido para ideales con la propiedad de Baire (lo cual es equivalente en ideales a ser magros, en particular no tiene sentido estudiar este orden para ideales definibles) y para ultrafiltros por el corolario anterior tampoco tiene mucho sentido, sólo quedaría estudiar por ejemplo el orden para ideales generados por una familia MAD o en general para ideales no magros y tampoco maximales.

Capítulo 5

Entre Hausdorff y Ramsey

Los ultrafiltros Hausdorff son una clase de ultrafiltros que han sido estudiados por diversos autores recientemente, por ejemplo M. di Nasso y M. Forti [25]. La pregunta principal que aún no ha sido respondida, es si existen en ZFC. También los ultrafiltros Ramsey ya han sido ampliamente estudiados, de los ultrafiltros Ramsey se sabe que consistentemente no existen desde hace mucho tiempo, además se sabe que un ultrafiltro Ramsey tiene que ser Hausdorff.

Michael Hrušák y David Meza probaron que un ultrafiltro es Hausdorff si y sólo si no es mayor que $\mathcal{G}_{fc}$ en el orden de Katětov [25], además probaron que un ultrafiltro Hausdorff satisface una dicotomía muy interesante: $\mathcal{U}$ es Hausdorff si y sólo si para toda pareja de funciones $f, g \in \omega^\omega$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f[U] \cap g[U] = \emptyset$ o bien $f \restriction U = g \restriction U$.

En este capítulo veremos propiedades de ultrafiltros que son intermedias entre selectivo y Hausdorff, para esto comenzamos con las definiciones pertinentes.

Definición 86. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω, diremos que $\mathcal{U}$ es Ramsey si*

$X \to (\mathcal{U} \upharpoonright X)^2_2$ *para cada* $X \in \mathcal{U}$ *y* $\mathcal{U}$ *es Hausdorff si para cada* $f, g \in \omega^\omega$ *existe* $A \in \mathcal{U}$ *tal que* $f[A] \cap g[A] = \emptyset$ *o* $f(n) = g(n)$ *para cada* $n \in A$.

Es un resultado conocido que si un ultrafiltro es Ramsey, entonces es Hausdorff. Vamos a dar algunos resultados al respecto pero para eso necesitamos el siguiente juego y algunas definiciones.

Definición 87. *Dado un ideal* $\mathcal{I}$ *en* ω *definimos el juego* $\mathcal{G}(\mathcal{I})$ *como sigue: el jugador* I *empieza el juego con un partición de los naturales en* ω *pedazos* $\omega = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ *y parte a* $A_0 = A_0^0 \cup A_0^1$*, entonces el jugador* II *juega* $i_0 \in 2$*. En el* $(m+1)$*-ésimo movimiento el jugador* I *parte* A_m *en* A_0^{m+1} *y* A_1^{m+1} *y el jugador* II *toma* $i_{m+1} \in 2$*. El jugador* I *gana el juego si* $\bigcup_{m\in\omega} A_m^{i_m} \in \mathcal{I}$*. En otro caso el jugador* II *gana.*

I	$\omega = \bigcup A_n, A_0 = A_0^0 \cup A_0^1$		$A_1 = A_1^0 \cup A_1^1$		...
II		$i_0 \in 2$		$i_1 \in 2$	...

Supongamos que X es un conjunto infinito. Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre ω la ultrapotencia de X con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto de funciones de ω en X (X^ω) con una relación de equivalencia $\sim$ donde f y g están relacionadas si y sólo si $\{n : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$ y esto lo denotamos por $Ult_{\mathcal{U}}(X)$.

Si X es un espacio topológico con topología τ, la topología de la ultrapotencia la definimos como $\tau^* = \langle\{U^* : U \in \tau\}\rangle$, donde $U^* = \{[f] : (\exists A \in \mathcal{U})(f[A] \subseteq U)\}$.

Definición 88. *Sean* (X, τ) *un espacio topológico y* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro sobre* ω*. Diremos que* $\mathcal{I}$ *es* (X, τ)*-Hausdorff si la ultrapotencia de* X *(con respecto a* $\mathcal{U}$*) es un espacio topológico Hausdorff.*

Con la definición anterior, es un resultado conocido que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es Hausdorff (con la definición inicial de este capítulo) si y sólo si la ultrapotencia de ω con la topología discreta y con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$ es un espacio topológico Hausdorff.

Consideremos a $[\omega]^{<\omega}$ como un grupo, con operación la diferencia simétrica. La topología τ_{Hom} sobre $[\omega]^{<\omega}$ es la mínima topología que hace continuas a todas las funciones de $Hom([\omega]^{<\omega}, 2)$ (la familia de funciones de $[\omega]^{<\omega}$ en 2 que son homomorfismos de grupos). Con dicha topología, claramente $([\omega]^{<\omega}, \tau_{Hom})$ es un grupo topológico booleano.

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre ω y con las definiciones anteriores, diremos que $\mathcal{U}$ es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff si $\mathcal{U}$ es $([\omega]^{<\omega}, \tau_{Hom})$-Hausdorff.

Proposición 89. *Sean τ y σ dos topologías sobre un conjunto X (infinito) tales que $\sigma \subseteq \tau$ y $p \in \omega^*$ un ultrafiltro. Si $(Ult_p(X), \sigma^*)$ es un espacio topológico Hausdorff, entonces $(Ult_p(X), \tau^*)$ también es Hausdorff.*

Demostración. Para la demostración basta observar que la ultrapotencia de X es la misma y la topología de la ultrapotencia satisface que $\sigma^* \subseteq \tau^*$; por lo tanto si σ^* es una topología Hausdorff, entonces también lo es τ^*. ■

Por la proposición anterior, si un ultrafiltro es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff, entonces dicho ultrafiltro tiene que ser Hausdorff. Al igual que con la caracterización combinatoria de los ultrafiltros Hausdorff (la definición original), tenemos una caracterización combinatoria de los ultrafiltros $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff.

Proposición 90. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Entonces $\mathcal{U}$ es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff si y sólo si para cada sucesión de conjuntos finitos $(x_n : n \in \omega)$ existe $A \subseteq \omega$ tal que $\{n : |x_n \cap A| \equiv 1 \ mod \ 2\} \in \mathcal{U}$.*

Demostración. La demostración es simplemente traducir lo que es separar a $(\emptyset, \emptyset, \dots)$ de $(a_0, a_1, \dots)$ (donde cada a_i es un finito y muchos de ellos no con el conjunto vacío) con dos abiertos básicos de la topología del ultraproducto.

■

Teorema 91. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Dadas las siguientes propiedades acerca de $\mathcal{U}$, tenemos que* (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (5).

1. *$\mathcal{U}$ es selectivo*
2. *El jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U})$.*
3. *El jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U})$.*
4. *$\mathcal{U}$ es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff.*
5. *$\mathcal{U}$ es Hausdorff.*

Demostración.

- (1) $\implies$ (2): Supongamos que $\{A_n : n \in \omega$ es la partición dada por el jugador I en la primera jugada. Hay dos opciones, existe $n \in \omega$ tal que $A_n \in \mathcal{U}$, en tal caso el jugador II ya tiene asegurado que va a ganar el juego, porque una partición en dos pedazos de A_n, al ser un elemento del ultrafiltro entonces alguno de los pedazos de la partición está en el ultrafiltro. El segundo caso es que $A_n \notin \mathcal{U}$ para toda n, en dicho caso, como $\mathcal{U}$ es selectivo existe $B \subseteq \omega$ tal que $|B \cap A| = 1$ y $B \in \mathcal{U}$. Cada que el jugador I da una partición de A_n el jugador II debe elegir el pedazo que intersecta a B y al final tendrá que lo que eligió contiene a B, por lo tanto el jugador II también gana el juego.
- (2) $\implies$ (3): No hay nada que hacer para esta implicación.
- (3) $\implies$ (4): Sea $(a_n : n \in \omega)$ una sucesión de conjuntos finitos y sea $I_n = \{k : \max a_k = n\}$. Posiblemente algunos de los I_n son vacíos, pero como sea $\{I_n : n \in \omega\}$ es una partición de ω. Supongamos que vamos a jugar el juego $G(\mathcal{U})$ y el jugador I comienza jugando $\{I_n : n \in \omega\}$ y la partición $I_0^0 \cup I_0^1$, donde $I_0^0 = \emptyset$ y $I_0^1 = I_0$. El jugador II elige o bien 0, o bien 1. Hasta antes de la jugada n. el jugador lleva elegidos n

bits, es decir, $x \in 2^n$. Usando la función característica, podemos pensar a x como un subconjunto de n. En la jugada $n > 0$ el jugador I va a particionar a I_n del siguiente modo: $I_n^0 = \{k \in I_n : |a_k \cap x| \text{ es impar}\}$ y $I_n^1 = \{k \in I_n : |a_k \cap x| \text{ es par}\}$. Por la definición de I_n^1 se tiene que $I_n^1 = \{k \in I_n : |a_k \cap (x \cup \{n\})| \text{ es impar}\}$.

Como el jugador I no tiene estrategia ganadora, existe $x \in 2^\omega$, las respuestas del jugador II, tal que cuando el jugador I juega como describimos, el jugador II gana el juego. De nuevo, la sucesión x la podemos pensar como un subconjunto de ω, con la función característica y como el jugador I pierde, entonces $\{k : |x \cap a_k| \text{ es impar}\} \in \mathcal{U}$, que es justo lo que queríamos demostar.

- (4) $\implies$ (5): Ya se mencionó en una proposición anterior. Simplemente es porque la topología discreta contiene a todas las topologías.

■

Aún sigue siendo una pregunta abierta si existe un ultrafiltro Hausdorff en ZFC y se sabe que los ultrafiltros selectivos no siempre existen en ZFC, por lo que todas las propiedades intermedias quedarían abiertas, pero lo más seguro es que sea consistente que no existen los ultrafiltros $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff en ZFC

Pregunta 92. *¿Existen los ultrafiltros* $[\omega]^{<\omega}$*-Hausdorff en ZFC?*

Como podemos probar la consistencia de la existencia de ultrafiltros selectivos y selectivo implica todas las demás propiedades, entonces obviamente existen ultrafiltros que satisfacen cada una de las cinco propiedades. Se sabe que consistentemente existen ultrafiltros Hausdorff y que no son selectivos, por lo que una pregunta natural es ¿Alguna de las implicaciones es realmente una equivalencia? o ¿Todas las implicaciones son consistentemente estrictas?

Responderemos casi al completo cada una de las preguntas para cada una de las implicaciones.

Proposición 93. *Es consistente con ZFC que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ para el cual el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U})$, pero $\mathcal{U}$ no es selectivo.*

Demostración. Ya hemos hablado del ideal $\mathcal{ED}_{fin}$ en los capítulos anteriores, sobre todo cuando hablamos de ideales K-uniformes, vamos a usar propiedades de este ideal por lo que si fuera necesaria una referencia, se pueden consultar los capítulos anteriores. Consideremos el forcing $\mathcal{P}(\Delta)/\mathcal{ED}_{fin}$, donde el orden es la contención módulo la relación de equivalencia (Δ es el subconjunto de $\omega \times \omega$ debajo de la diagonal), este forcing es un forcing σ-cerrado, porque $\mathcal{ED}_{fin}$ es un ideal F_σ y todo ideal F_σ es en particular un ideal P^+ y por lo tanto $\mathcal{P}(\Delta)/\mathcal{ED}_{fin}$ no agrega reales. Sea $\mathcal{U}_{gen}$ un filtro genérico de dicho forcing. Se tiene que $\mathcal{U}_{gen}$ es un ultrafiltro sobre Δ y tal que $\mathcal{U}_{gen} \cap \mathcal{ED}_{fin} = \emptyset$.

Probaremos que el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U}_{gen})$. Sea $B \in \mathcal{P}(\Delta)/\mathcal{ED}_{fin}$ una condición, podemos suponer que $B \in \mathcal{ED}_{fin}^+$, tomando cualquier representante de de la clase de equivalencia; de hecho el forcing $\mathcal{P}(\Delta)/\mathcal{ED}_{fin}$ lo estamos identificando con el forcing $\mathcal{ED}_{fin}^+$ (el cual no es separativo). Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una partición de Δ y supongamos que es la primera jugada del jugador I. Si existe $n \in \omega$ tal que $A_n \cap B \in \mathcal{ED}_{fin}^+$, entonces $A_n \cap B \Vdash$ "El jugador II tiene estrategia ganadora en $G(\mathcal{U}_{gen})$", por lo que sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B_n = B \cap A_n \in \mathcal{ED}_{fin}$ para cada $n \in \omega$.

Sea $C_n = \{(n,k) \in \omega \times \omega : k \in \omega\}$. Primero que nada, como el forcing es σ-cerrado, entonces $\{B_n : n \in \omega\}$ está en el modelo base. Construimos recursivamente $\{n_i, x_i : i \in \omega\}$, de modo que:

- $|x_i| = 2i+2$ y además existe $m \in \omega$ tal que $x_i = \{(m, a_j) \in B : j \in 2i+2\}$.

- (n_i) es una sucesión creciente de naturales.

Para $i = 0$, existe $m \in \omega$ tal que $|B \cap C_m| \geq 2$, tomamos $x_0 \subseteq B \cap C_m$ de tamaño 2. Existe n_0 tal que $x \subseteq \bigcup_{k \in n_0} B_k$. Supongamos que tenemos definidos n_i y x_i, como $B \setminus (\bigcup_{k \in n_i} B_k)$ es positivo, entonces existe $m \in \omega$ tal que $|C_m \cap (B \setminus (\bigcup_{k \in n_i} B_k))| \geq 2i+2$, tomamos $x_{i+1} \subseteq C_m \cap (B \setminus (\bigcup_{k \in n_i} B_k))$ del tamaño deseado y sea $n_{i+1} \in \omega$ tal que $x_i \subseteq \bigcup_{k \in n_{i+1}} B_k$.

Por la definición de x_i, es claro que $X = \bigcup_{i \in \omega} x_i$ es un positivo de $\mathcal{ED}_{fin}$. En la extensión, en la jugada k-ésima, el jugador I juega $A_k = A_k^0 \cup A_k^1$, una partición de A_k, entonces, o bien $k \leq n_0$ o existe $i \in \omega$ tal que $n_i < k \leq n_{i+1}$, en dicho caso, el jugador II debe elegir A_k^0 si $|A_k^0 \cap x_i| \geq |A_k^1 \cap x_i|$ y si no, entonces elige a A_k^1. Digamos que la elección del jugador II en la jugada k es $A_k^{j_k}$ (con $j_k \in 2$). Sea $Y = X \cap (\bigcup_{k \in \omega} A_k^{j_k})$. Como el forcing no agrega reales, entonces Y está en el modelo base y además $Y \Vdash$ "El jugador II tiene estrategia ganadora en $G(\mathcal{U}_{gen})$", que es lo que queríamos demostrar.

En la extensión, el ultrafiltro $\mathcal{U}_{gen}$ es tal que el jugador II tiene estrategia ganadora en el juego, además el ultrafiltro no puede ser Ramsey, porque si $\mathcal{U}$ es Ramsey entoces satisface que $\omega \to (\mathcal{U})^2_2$, pero $\mathcal{R} \leq_K \mathcal{ED}_{fin} \leq_K \mathcal{U}_{gen}$ y por lo tanto $\omega \not\to (\mathcal{U}_{gen})^2_2$.

■

Sea $A \subseteq \omega$, definimos $\phi(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1}$. No es difícil darse cuenta que ϕ es una medida inferiormente semicontinua. Definimos el ideal $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = Fin(\phi)$. El ideal se llama el ideal sumable y es un ideal F_σ alto.

Proposición 94. *Es consistente con ZFC la existencia de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que ni el jugador I, ni el jugador II tienen estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U})$.*

Demostración. Si hacemos el forcing $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ (otra vez el orden es la contención módulo el ideal), dicho forcing es un forcing que no agrega reales y el filtro genérico $\mathcal{U}_{gen}$ es un ultrafiltro. Probaremos que ninguno de los dos jugadores tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U}_{gen})$.

Sea $X \in \mathcal{I}_{\frac{1}{n}}$ una condición y sea τ una estrategia del jugador I (en la extensión). Supongamos que en la estrategia del jugador I inicia con la partición $\{A_n : n \in \omega\}$. En la jugada k-ésima, el jugador I particiona a $A_k = A_k^0 \cup A_k^1$, entonces, si $\phi(X \cap A_k^0) \geq \phi(X \cap A_k^1)$, el jugador II elije a A_k^0, si la desigualdad se da al revés, entonces elige a A_k^1. Digamos que el jugador II eligió a $A_k^{i_k}$, con $i_k \in 2$. Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n^{i_n}$. Entonces se tiene lo siguiente.

$$\sum_{n\in X\cap A} \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n\in X\setminus A} \frac{1}{n+1},$$

pero como

$$\sum_{n\in X} \frac{1}{n+1} = \infty,$$

entonces

$$\sum_{n\in X\cap A} \frac{1}{n+1} = \infty$$

y por lo tanto $X \cap A \Vdash$ "El jugador II gana el juego $G(\mathcal{U}_{gen})$ cuando el jugador I juega con la estrategia τ".

Por lo tanto el jugador I no tiene estrategia ganadora en el juego. Ahora supongamos que σ es una estrategia para el jugador II, en la extensión. Sea X una condición del forcing. Sea $\{A_n : n \in \omega\}$ una partición de ω tal que para cada $n \in \omega$ se tiene que:

$$\sum_{i \in A_n \cap X} \frac{1}{i+1} = \infty.$$

La partición anterior existe y no es muy difícil de construir. Si la estrategia fuera una estrategia ganadora, entonces en particular la estrategia sería ganadora cuando la primera jugada del jugador II es justamente $\{A_n : n \in \omega\}$. Digamos que el jugador I juega particionando el conjunto $A_n = B_n^0 \cup B_n^1$ de modo que tanto $B_n^0 \cap X$ como $B_n^1 \cap X$ tienen medida infinita. La estrategia del jugador II debería responder con $i_n = 0$ o $i_n = 1$. Como el forcing es σ-cerrado, entonces no agrega reales y por lo tanto $\{i_n : n \in \omega\}$ está en el modelo base, además las jugadas del jugador I también están en el modelo base, porque cada jugada es un número real y la jugada completa igualmente es un número real. Sea $j_n = 1 - i_n$

Simplemente por construcción, se tiene que $Y = X \cap \bigcup B_n^{j_n}$ es una condición del forcing y además $Y \Vdash$"El jugador II siguendo la estrategia σ pierde el juego cuando el jugador I juega $\{A_n : n \in \omega\}$ en la primera jugada y particiona a $A_n = B_n^0 \cup B_n^1$"

Dicho de otro modo, el jugador II no tiene estrategia ganadora en la extensión. ∎

Definición 95. *Sea* $\mathcal{A}_n = \{X_\sigma \in \{n\} \times [\omega]^\omega : \sigma \in 2^{n+1}\}$ *una familia independiente y cerrada bajo complementos (complemento en* $\{n\} \times \omega$*) y tal que* $X_{\tau^\frown 0}$ *es el complemento de* $X_{\tau^\frown 1}$*, para cualquier* $\tau \in 2^{<\omega}$*. Para cada* $x \in 2^\omega$ *sea* $A_y = \bigcup_{n \in \omega} X_{y \restriction n}$*. Definimos el ideal* $\mathcal{IN}$ *sobre* $\omega \times \omega$ *generado por* $\{A_y : y \in \omega\}$*.*

Observación 96. *El ideal* $\mathcal{IN}$ *es un ideal* F_σ *alto.*

Demostración. Cualquier conjunto infinito en $\omega \times \omega$ o intersecta infinito a una columna y las columnas están en el ideal o intersecta a infinitas columnas y cada selector de las columnas está contenido en un A_y, para algún $y \in 2^\omega$ y por lo tanto el ideal es alto. Para ver que es F_σ basta notar que el ideal está generado por cerrados. ■

Proposición 97. *Es consistente con ZFC que existe $\mathcal{U}$ un ultrafiltro $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff y tal que el jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U})$.*

Demostración. Vamos a forzar con $\mathcal{P}(\omega\times\omega)/\mathcal{IN}$ y con el orden la contención (módulo el ideal). Sea $\mathcal{U}_{gen}$ el ultrafiltro genérico agregado con el forcing.

Lo primero que tenemos que notar es que el jugador I tiene estrategia ganadora en el juego $G(\mathcal{U}_{gen})$, esto muy fácil de probar, porque el jugador I va a jugar con la partición $\{n\} \times \omega$ y parte a $\{0\} \times \omega$ como $X_{(0)} \cup X_{(1)}$ y el jugador II debe elegir 0 o 1 (si elige $X_{(0)}$ o $X_{(1)}$). En general en la jugada n el jugador II ya ha elegido a $\sigma \in 2^n$, entonces el jugador particiona a $\{n\} \times \omega$ como $X_{\sigma^\frown 0} \cup X_{\sigma^\frown 1}$. Al final el jugador I gana porque el jugador II termina eligiendo un $A_y \in \mathcal{IN}$.

Ahora queremos probar que el ultrafiltro genérico es $[\omega]^{<\omega}$-Hausdorff, para esto, sea $X \subseteq \omega\times\omega$ una condición y sea $\{x_{(n,m)} \in [\omega\times\omega]^{<\omega} : (n,m) \in \omega\times\omega\}$ una familia de conjuntos finitos (una sucesión, pero en vez de con índices en ω, con índices en $\omega \times \omega$).

Ignoraremos a los índices que no estén en X, por lo que estamos considerando sólo a la sucesión $\{x_{(n,m)} : (n,m) \in X\}$.

Lo que queremos probar es que existen $Y \in [X]^\omega \cap \mathcal{IN}^+$ y $A \subseteq \omega\times\omega$ tales que $\{(n,m) : |A \cap x_{(n,m)}| \text{ es impar}\} = Y$. Si logramos probar eso, habremos terminado.

Hay dos opciones, la primera es que existe $a \in [\omega\times\omega]^{<\omega}$ tal que $\{(n,m) : x_{(n,m)} \cap a\} \in \mathcal{IN}^+$, en dicho caso, sea $X_{(n,m)} = \{(i,j) : (n,m) \in x_{(i,j)}\}$. Tenemos que $X = \bigcup_{(n,m)\in a} X_{(n,m)}$ y por lo tanto existe $(n,m) \in a$ tal que

$X_{(n,m)} \in \mathcal{IN}^+$. Sean $Y = X_{(n,m)}$ y $A = \{(n,m)\}$, estos conjuntos son testigos de lo que queríamos probar.

La segunda opción es que $\{(n,m) : x_{(n,m)} \cap a\} \in \mathcal{IN}$, para cada $a \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$. Como X es un positivo del ideal, entonces existe $i_0 \in \omega$ tal que $|\{y \in 2^{i_0} : A_y \cap X \cap \{i_0\} \times \omega \neq \emptyset\}| \geq 2$. Vamos a construir recursivamente $(a_i : i \in \omega)$ y $(X_i : i \in \omega)$ una sucesión de finitos y una suceción de positivos del ideal respectivamente. Sea $a_0 \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$ tal que a_0 intersecta impar a al menos un $x_{(i_0,m)}$ de modo que $(i_0, m) \in A_y \cap X$ y sea $X_0 = X \setminus B$, donde $B = \{x_(n,m) : n \leq i_0 \wedge x_(n,m) \cap a_0 \neq \emptyset\}$. Por la suposión inicial en este segundo caso, se tiene que $X_0 \in \mathcal{IN}^+$.

En general, supongamos que ya tenemos definidos a X_n y a_n. Sea $i_n \in \omega$ tal que $|\{y \in 2^{i_n} : A_y \cap X \cap \{i_n\} \times \omega \neq \emptyset\}| \geq 2n$.

Observación 98. *Existe* $a_{n+1} \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$ *tal que el conjunto* $\{y \in 2^{i_n} : |x_(i_n, m) \cap a_{n+1}|$ *es impar* $\wedge (i_n, m) \in X_1 \cap A_y\}$ *tiene al menos tamaño* n.

La observación no es difícil de probar, pero como no tiene nada que ver con la prueba, la dejo para después del teorema.

Usando el a_{n+1} de la observación, sea $X_{n+1} = X \setminus B$, donde $B = \{x_(k,m) : k \leq i_n \wedge x_(k,m) \cap a_{n+1} \neq \emptyset\}$.

Ya terminada la recursión, sean $A = \bigcup a_n$ y $Y = \{(k,m) : |x_{k,m} \cap A|$ es impar$\}$. Por construcción, cumplen lo que queríamos probar. ■

Observación 99. *Sean* $X = \{a_i : i < 2n\}$ *una familia de conjuntos finitos no vacíos. Existe* a *tal que* $|\{i : |a \cap a_i|$ *es impar*$\}| \geq n$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad $a_i \subseteq \omega$. Sean $A = \bigcup a_i$ y $N = \max A$. Sea $X_i = \{a_k : \max a_k = i\}$. Claramente $\{X_i : i < N\}$ es una partición de X (posiblemente algunos de los X_i son vacíos). Sea $B_{-1} = \emptyset$. Recursivamente construimos $(B_i : i < N)$ de la siguiente manera: $B_{i-1} \subseteq B_i$

y $i \in B_i$ si y sólo si:

$$|\{k : a_k \in X_i \wedge |(B_{i-1} \cup \{i\}) \cap a_k| \text{ es impar}\}| \geq |\{k : a_k \in X_i \wedge |B_{i-1} \cap a_k| \text{ es impar}\}|.$$

Al final, por construcción el conjunto B_N intersecta a al menos la mitad de los x_k en una cantidad impar. ■

Capítulo 6

Gráficas genéricas

Para este capítulo es necesario tener conocimientos de *forcing*, es recomendable que el lector consulte [20], como referencia básica, usaremos principalmente la notación de dicho libro. Además es recomendable el libro [2] y consultar la lista de forcings encontrada en Wikipedia [30].

En este capítulo vamos a estudiar qué gráficas genéricas son agregadas por un forcing. Para esto nos vamos a concentrar en los forcings más conocidos, como el forcing de Cohen, el forcing de Random, el forcing de Mathias, etc. La pregunta general de todo el capítulo es ¿Qué gráfica genérica es agregada por un forcing? Aunque también podríamos hacer variaciones a la pregunta tanto de forma general como con algún forcing en particular.

Pregunta 100. *¿Qué gráficas pueden ser agregadas por algún forcing?*

Pregunta 101. *¿Qué forcings agregan una gráfica nueva?*

Sea $\mathcal{P}$ un conjunto parcialmente ordenada con elemento mínimo. Sólo vamos a estar interesados en los forcings tal que el filtro genérico es un subconjunto de los números naturales, es decir, si G es un filtro genérico para $\mathcal{P}$, entonces G es un subconjunto de ω. Como el conjunto de parejas no ordenadas de ω es un conjunto numerable (biyectable con ω), entonces podemos pensar que el real genérico (G) es un subconjunto de $[\omega]^2$, como cada subconjunto de $[\omega]^2$ es una gráfica, diremos que el real genérico es la gráfica genérica agregada por un forcing. Comencemos con el siguiente resultado (ya muy conocido), para dar un ejemplo más explícito.

Proposición 102. *La gráfica genérica agregada por el forcing de Cohen es la gráfica de Rado.*

Demostración. Primero tenemos que entender que el forcing de Cohen lo estamos pensando como el forcing de Cohen sobre $[\omega]^2$, es decir, el forcing de Cohen es el conjunto $f; [\omega]^2 \to 2$ donde f es una función parcial tal que $|dom(f)| < \omega$ y está ordenado por la contención inversa ($f \leq g$ si y sólo si $g \subseteq f$).

Lo único que tenemos que probar para ver que el real genérico es la gráfica de Rado es que satisface la propiedad (*). Sean $A, B \in [\omega]^{<\omega}$ conjuntos ajenos y sea $p; [\omega]^2 \to 2$ una condición, sea n un número natural tal que $n \notin \bigcup\bigcup dom(p)$, como $dom(p)$ es finito, dicha n existe, entonces definiendo p' como $p'(x) = p(x)$ si $x \in dom(p)$, $p'(a, n) = 0$ y $p'(b, n) = 1$ siempre que $a \in A$ y $b \in B$. Por lo tanto p' fuerza que la propiedad (*) se satisface para A y B, y por lo tanto el real genérico tiene que ser la gráfica de Rado. ■

Algo que debemos notar es que el real genérico siempre es un real nuevo (que no está en el modelo base), pero la gráfica genérica puede ser isomorfa a una gráfica del modelo base, por ejemplo al agregar un real de Cohen la gráfica genérica es la gráfica de Rado, que siempre está en todos los modelos (porque puede ser definida a partir de los números naturales y por lo tanto existe en todos los modelos).

El forcing de Hechler fue usado para probar que el axioma de Martin implica que cada famlia de tamaño menor que $\mathfrak{c}$ está dominada por una función f. $\mathbb{P}$ es el conjunto de pares (s, E) donde $s; \omega \to \omega$ es una función parcial finita y E es un conjunto finito de funciones de ω en ω. El orden está definido por $(s, E) \leq (t, F)$ si y sólo si $t \subseteq s$, $F \subseteq E$ y si $k \in dom(s) \setminus dom(t)$ entonces $s(k) > h(k)$ siempre que $h \in F$.

Con el forcing de Hechler tenemos un resultado muy parecido (y esperado) sobre la gráfica genérica que es agregada al forzar con este forcing. Antes de ir a la prueba recordemos que estamos pensando al forcing sobre $[\omega]^2$ y no sobre ω, es decir las condiciones son funciones de ω en $[\omega]^2$, además estamos pensando que $[\omega]^2$ tiene definido un orden $<$ tal que $([\omega]^2, <)$ tiene tipo de orden $(\omega, \in)$.

Proposición 103. *La gráfica genérica agregada por el forcing de Hechler es la gráfica de Rado.*

Demostración. Lo que debemos probar es que para cada condición $p \in \mathbb{P}$ y para cada A, B subconjuntos finitos de ω existe $q \leq p$ tal que:

$q \Vdash$"A y B satisfacen la propiedad (*)".

Sea $p = (s, E)$ una condición y definimos $A_n = \{(a, n) : a \in \omega\}$. Notemos que $A_n \cap A_m = \{\{n, m\}\}$, siempre que $n \neq m$, además $[\omega]^2 = \bigcup A_n$. Sea $i = min\{k : k > dom(s)\}$. Existe $n \in \omega$ tal que A_n es ajeno con $ran(s)$ y también A_n es ajeno con $\{f(k) : i \leq k < i + |A| \wedge f \in E\}$, lo cual es posible porque ambos son conjuntos finitos. Definimos $t(k)$ para $i \leq k < i + |A|$ de modo que t sea creciente y $\{(n, a) : a \in A\}$ esté en la imagen de t. Sea $x = max\{(n, b) : b \in B\}$, tal máximo lo estamos tomando en el orden $([\omega]^2, <)$, dicho máximo existe porque B es finito. Sea $f\omega \to [\omega]^2$ dada por $f(j) = x$, la función constante x y defimos $F = E \cup \{f\}$.

Por la definición de F se tiene que (n, b) no puede estar en la imagen de la función genérica (para cada $b \in B$) y (n, a) siempre está en la imagen de la función genérica, por lo tanto la condición $q = (t, F)$ satisface lo que queríamos. ■

Ya hemos visto algunos ejemplos donde la gráfica genérica es la gráfica de Rado, veremos a continuación que con el forcing de Sacks esto no es verdad, o al menos no del todo. El forcing de Sacks $\mathbb{S}$ está formado por los árboles perfectos de $2^{<\omega}$, que tienen una raíz y diremos que $(s,T) \leq (t,S)$ si $t \subseteq s$ y $T \subseteq S$.

Proposición 104. *Existe una condición $p \in \mathbb{S}$ tal que $p \Vdash$ "La gráfica genérica no es la gráfica de Rado", pero también existe una condición que fuerza que la gráfica genérica es la gráfica de Rado.*

Demostración. Primero recordemos que estamos pensando al forcing de Sacks en $[\omega]^2$ y no en ω. Usando la notación de la proposición anterior, definimos el árbol perfecto $S = \{s \in 2^{<\omega} : s(0,n) = 0\}$. Claramente S es un árbol perfecto y además $(\emptyset, S)$ fuerza que 0 es un punto aislado de la gráfica genérica, como la gráfica de Rado no tiene puntos aislados, la gráfica genérica no puede ser la gráfica de Rado.

Para la segunda parte de la proposición, sean $\{x_n : n \in \omega\}$ y $\{(a_n, b_n) : n \in \omega\}$ una ennumeración de $[\omega]^2$ y una ennumeración de todos los subconjuntos finitos y ajenos de los naturales, respectivamente. Construimos recursivamente $X_n, Y_n \subseteq [\omega]^2$ de modo que:

- X_n es ajeno con Y_m, para toda $n, m \in \omega$,
- $X_n \subseteq X_{n+1}$ y $Y_n \subseteq Y_{n+1}$,
- X_n y Y_n son tales que $(\exists i \in \omega)(\forall j \in a_n \wedge \forall k \in b_n)(\{i,j\} \in X_n \wedge \{i,k\} \in Y_n)$,
- Para cada $n \in \omega$, existe $B \in [[\omega]^2]^\omega$ tal que B es ajeno con Y_n y también es ajeno con X_n y

- $[\omega]^2 = \bigcup X_n \cup \bigcup Y_n \cup B$.

La recursión es muy fácil de hacer, simplemente ya definido X_n y Y_n consideramos a $N = \text{mín}\{i : x_i \notin X_n \cup Y_n\}$ y sea $b_n = x_N$. Sea $j \in \omega$ tal que $j \notin \bigcup(X_n \cup Y_n)$, $X_{n+1} = X_n \cup \{\{j, x\} : x \in a_n\}$ y $Y_{n+1} = Y_n \cup \{\{j, x\} : x \in b_n\}$. Sean $X = \bigcup X_n$ y $Y = \bigcup Y_n$.

Ahora definimos el árbol $T \subseteq 2^{<[\omega]^2}$, como $suc_T(x) = \{0\}$, si $lev(x) \in X$, $suc_T(x) = \{1\}$ si $lev(x) \in Y$ y $suc_T(x) = \{0, 1\}$ si $x \in B$, para todo $x \in T$. El árbol definido es un árbol de Sacks y claramente la gráfica genérica forzada por la condición T es la gráfica de Rado. ■

La prueba de la proposición anterior se puede modificar ligeramente para probar el siguiente resultado.

Proposición 105. *Sea $G \subseteq [\omega]^2$ cualquier gráfica. Existe $p \in \mathcal{S}$ una condición del forcing de Sacks tal que $p \Vdash$ "La gráfica genérica contiene a G".* ■

Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre ω definimos los forcings $\mathbb{L}(\mathcal{F})$ y $\mathbb{M}(\mathcal{F})$ de Laver y Mathias respectivamente, parametrizados por un filtro. Diremos que $(s, S) \in \mathbb{L}(\mathcal{F})$ si $S \subseteq \omega^{<\omega}$ es un árbol tal que para cada $t \in S$ se tiene que $suc_S(t) \in \mathcal{F}$ y $t \leq s$ o $s \leq t$. Del mismo modo $(s, T) \in \mathbb{M}(\mathcal{F})$ si y sólo si T es un árbol de $\omega^{<\omega}$ tal que para cada $t \in T$ sucede que $s \leq t$ o $t \leq s$ y para cada $t \geq s$ el conjunto de sucesores de t en T es un elemento de $\mathcal{F}$ y además $suc_T(s) = suc_T(t)$.

Definición 106. *Sea (ω, G) una gráfica. Diremos que es una es estrella infinita si existe $n \in \omega$ tal que $G \subseteq \{\{a, n\} : a \in \omega \setminus \{a\}\}$.*

Proposición 107. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro Ramsey sobre ω. Sea G_{gen} la gráfica genérica agregada al forzar con $\mathbb{M}(\mathcal{U})$, entonces G_{gen} casi igual a una estrella* *infinita (sólo hay un número finito de aristas que no se quedan contenidas en la estrella) o es casi igual infinitas aristas aisladas (salvo una cantidad finita de errores).*

Demostración. De nuevo estamos pensando que los números naturales son $[\omega]^2$ y estamos considerando los conjuntos $A_n = \{\{a, n\} : a \in \omega \setminus \{n\}\}$. Sea $(s, T) \in \mathbb{M}(\mathcal{U})$ una condición y $A = suc_T(s) \in \mathcal{U}$. Definimos $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i \in n} A_i$ y $C_n = B_n \cap A$.

Por definición los conjuntos C_n son una partición de A y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro Ramsey tenemos dos opciones: existe $n \in \omega$ tal que $C_n \in \mathcal{U}$ o bien existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $|U \cap C_n| = 1$. En el primer caso definimos el árbol T' con raíz s y para cada $t \geq s$ los sucesores de T son C_n. Entonces la condición (s, T') fuerza que la gráfica genérica es una estrella infinita donde cada arista tiene a n como nodo, salvo por las aristas de s. En el segundo caso U es una gráfica con infinitas componentes conexas y cada componente conexa es o bien una arista aislada o bien dos aristas con un vértice en común, pero no puede haber una componente conexa con 3 aristas o más por la definición de C_n. En este caso definimos una partición en dos pedazos de $U = U_0 \cup U_1$ como sigue: si la i-ésima componente conexa de U tiene sólo una arista; entonces U_0 tiene a esa arista, pero si tiene dos aristas, U_0 tiene a una de las aristas y U_1 tiene a la otra arista. De este modo U_0 tiene a una infinidad de aristas aisladas y U_1 tiene algunas aristas aisladas (puede ser finito o infinito el número de aristas que contenga). Como $\mathcal{U}$ es filtro, entonces $U_0 \in \mathcal{U}$ o $U_1 \in \mathcal{U}$, sin pérdida de generalidad digamos que $U_0 \in \mathcal{U}$, entonces definiendo T' el árbol con raíz s y $suc_{T'}(t) = U_0$ para cada $t \geq s$, se tiene que (s, T') fuerza que la gráfica genérica consiste de infinitas aristas aisladas, salvo por una cantidad finita de errores debidas a s. ■

Se puede demostrar directamente que el resultado anterior es válido si forzamos en vez de con el forcing de Mathias, con el forcing de Laver, pero no es necesario hacer una demostración directa porque el forcing de Laver de un ultrafiltro Ramsey y el forcing de Mathias del mismo ultrafiltro son equivalentes. Sin embargo tenemos los siguientes dos resultados.

No lo he dicho (quedó implicito), pero cada que tomo un ultrafiltro sobre ω considero una biyección entre ω y $[\omega]^2$ y de este modo puedo pensar al ultrafiltro sobre $[\omega]^2$. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no Ramsey sobre ω y consideremos una partición de ω en conjuntos infinitos $\{X_n : n \in \omega\}$ tales que $X_n \notin \mathcal{U}$ y cada selector S de $\{X_n : n \in \omega\}$ no está en $\mathcal{F}$. Usando la notación de la demostración anterior (y en general la que hemos estado usando) fijemos una biyección entre X_n y B_n.

Proposición 108. *La gráfica genérica agregada por* $\mathbb{L}(\mathcal{U})$ *es casi igual a infinitas aristas aisladas.*

Demostración. Sea (t, T) una condición. Definimos $T' \leq T$ un subárbol de T definido de tal manera que si $t \in T$, $|t| = n$ y $t \in T'$ entonces:

$$suc_{T'}(t) = suc_T(t) \setminus \bigcup_{k \in n} B_k.$$

Por la definición de T', se tiene que $(t, T') \Vdash$"La gráfica genérica es casi igual a infinitas aristas aisladas". ■

Otra forma de ver el forcing de Mathias de un ultrafiltro es con (s, A) es una condición si s es un subconjunto finito de ω y $A \in \mathcal{U}$ es tal que $max(s) < min(A)$. Además $(s, A) \leq (t, B)$ si t es segmento inicial de s, $A \subseteq B$ y $s \setminus t \subseteq B$. Claramente ambas versiones del focing son equivalentes.

Proposición 109. *Sea* n *un número natural. La gráfica genérica agregada por* $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ *contiene una estrella de tamaño exactamente* n.

Demostración. Sea (s, A) una condición del forcing $\mathbb{M}(\mathcal{U})$. Sea i un número natural tal que $s \cap A_i = \emptyset$, sea $t = s \cup \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, donde $a_j \in A_i$ son aristas todas diferentes. Definimos la condición (t, B), donde

$$B = A \setminus \bigcup_{k \in i} A_k.$$

Con estas definiciones tenemos que $(t, B) \Vdash$ "La gráfica genérica contiene una estrella de tamaño n". ∎

Las proposiciones anteriores las podemos resumir en lo siguiente.

Teorema 110. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre ω. Entonces la gráfica genérica agregada por $\mathbb{M}(\mathcal{U})$ es igual a la gráfica genérica agregada por $\mathbb{L}(\mathcal{U})$ si y sólo si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro Ramsey.*

También podríamos considerar el forcing de Mathias sin parámetros. El forcing de Mathias consiste de parejas (a, X) de modo que a es un conjunto finito (de números naturales, pero en nuestro caso de $[\omega]^2$) y X es un conjunto infinito (de nuevo de parejas de naturales). $(a, X) \leq (b, Y)$ si b contiene a a, X está contenido en Y y $a \setminus b \subseteq Y$.

Proposición 111. *La gráfica genérica agregada por el forcing de Mathias es casi igual a una estrella infinita o bien, es casi igual a infinitas aristas aisladas.*

Demostración. En esta demostración seguiremos usando la notación que llevamos usando desde que introducimos los focings de Laver y Mathias. Sea $(a, A) \in \mathbb{M}$ una condición. Hay dos opciones, existe $n \in \omega$ tal que $|A \cap B_n| = \omega$ o bien $|A \cap B_n| \neq \emptyset$ para infinitas $n \in \omega$. En el primer caso, la condición

$(a, A \cap B_n)$ fuerza que la gráfica genérica es una estrella infinita y en el segundo caso, consideremos $C \subseteq A$ tal que $|C \cap B_n| \leq 1$. En dicho caso la condición (a, C) fuerza que la gráfica genérica es igual a infinitas aristas aisladas. ■

Como vimos antes, la gráfica genérica del forcing de Sacks es casi cualquier gráfica. Obviamente la gráfica genérica no puede ser una gráfica con sólo finitas aristas, ni tampoco su complemente puede ser sólo una cantidad finita de aristas, pero de las que tienen infinitas aritas ¿Cuáles pueden ser agregadas? Tenemos las siguientes preguntas al respecto.

Pregunta 112. *Sea G una gráfica infinita y coinfinita ¿Existe $\mathbb{P}$ un forcing tal que $\mathbb{P} \Vdash$ "La gráfica genérica es G"? ¿Existe una condición de Sacks que fuerza eso mismo?*

Pregunta 113. *Sea $\mathbb{P}$ un forcing y G la gráfica genérica agregada por dicho forcing ¿Existe $p \in \mathbb{S}$ una condición del forcing de Sacks tal que $p \Vdash$ "La gráfica genérica es G"?*

Los reales genéricos siempre son reales nuevos, pero como ya vimos en demasiados ejemplos, la gráfica genérica no es nueva en muchas ocasiones, sino que es isomorfa a una gráfica del modelo base (por ejemplo la gráfica de Rado siempre está en el modelo base y muchas veces la gráfica genérica es la gráfica de Rado). Una pregunta natural en este punto es ¿Es posible que la gráfica genérica sea una gráfica nueva? Hasta ahora no hemos visto ningún ejemplo, pero es muy fácil construir muchos forcings ad hoc, de modo que la gráfica genérica sea una gráfica nueva.

Proposición 114. *Existe $\mathbb{P}$ un forcing tal que $\mathbb{P} \Vdash$ "La gráfica genérica es una gráfica nueva".*

Demostración. Sea $a_n \subset [\omega]^2$ una estrella de tamaño n y supongamos que $a_n \cap a_m = \emptyset$ para $n \neq m$ dos números naturales. Definimos el forcing $\mathbb{P} = \{(a, A, f)\}$, donde a es un subconjunto finito de $\{a_n : n \in \omega\}$, A es un subconjunto infinito de $\{a_n : n \in \omega\}$ y $f \in \omega^\omega$ es una función creciente. $(a, A, f) \leq (b, B, g)$ si a contiene a b, A está contenido en B, $g \leq f$ y si $a_n \in a \setminus b$, entonces $n \geq g(|b|)$.

Sea F un filtro genérico de $\mathbb{P}$ y sea $r_{gen} = \bigcup\{a_n : (\exists A, f)((a_n, A, f) \in F)\}$ la gráfica genérica. El real genérico es una gráfica tal que el tamaño de las estrellas no es una función acotada por ninguna función del modelo base, por lo tanto la gráfica genérica es una gráfica nueva. ■

Hay muchas maneras de definir un forcing de modo que la gráfica genérica no es una gráfica del modelo base, por ejemplo en la demostración anterior se definió una gráfica donde cada componente conexa es una estrella, pero no es difícil que la gráfica genérica tenga componentes conexas de gráficas completas de tamaño n, o bien que el tamaño de las gráficas sea un real dominante, o real no acotado y muchas otras posibilidades, tal como los forcings clásicos.

Para concluir sólo queda mencionar que aún hay algunas preguntas abiertas, las cuales fueron enunciadas en su momento, de modo que se puede continuar con el estudio que se ha emprendido en la presente tesis, ya sea por medio de las gráficas genéricas, de los ultrafiltros Hausdorff o de cualquier otro tema tratado aquí.

Bibliografía

[1] B. Balcar, F. Hernández-Hernández and M. Hrušák, *Combinatorics of dense subsets of the rationals*, Fundamenta Mathematicae, 183 (2004), 59 – 80.

[2] T. Bartoszyński and H. Judah, *Set theory: On the Structure of the Real Line*, A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] James E. Baumgartner. *Ultrafilters on ω*. J. Symbolic Logic, 60(2):624–639, 1995.

[4] J. Baumgartner and A. Taylor, *Partition theorems and ultrafilters*, Transactions AMS, 241 (1978),183–309.

[5] P. Cameron, *The random graph.* In *The mathematics of Paul Erdös II*, volume 14, pages 333 – 351, 1997.

[6] C. Di Prisco, J. Mijares, and C. Uzcátegui, *Ideal games and Ramsey sets*, Proc. Amer. Math. Soc.,140(7) (2012),2255–2265.

[7] Ilijas Farah. *Analytic quotients: theory of liftings for quotients over analytic ideals on the integers.* Mem. Amer. Math. Soc., 148(702):xvi+177, 2000.

[8] R. Graham, B. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, John Wiley and Sons, NY (1990)

[9] Michael Hrušák, *Combinatorics of filters and ideals*, Contemporary mathematics 533 (2011), no. 8, 29–69.

[10] M. Hrušák, *Katětov order on Borel ideals.*

[11] Michael Hrušák, David Meza-Alcántara, and Hiroaki Minami. *Pair-splitting, pair-reaping and cardinal invariants of F_σ ideals.* Journal of Symbolic Logic,75(2):661–677, 2010.

[12] M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, *Katětov order, Fubini property and Hausdorff ultrafilters,* Rend. Inst. Mat. Univ. Trieste 44 (2012), 503–511.

[13] M. Hrušák, D. Meza-Alcántara, E. Thümmel, and C. Uzcátegui, *Ramsey Type Properties of Ideals.* Anals of pure and applied logic.

[14] M. Hrušák and J. Verner, *Adding ultrafilters by definable quotients*, Rend. Circ. Mat. di Palermo 60 (2011), no. 3, 445–454.

[15] S.-A. Jalali-Naini. *The monotone subsets of Cantor Space*, filters and descriptive set theory. PhD thesis, Oxford, 1976.

[16] W. Just and A. Krawczyk, *On certain Boolean algebras* $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$, Transactions of the American Mathematical Society, 285 no. 1, (1984), 411–429.

[17] Vladimir Kanovei and Michael Reeken. *New Radon-Nikodym ideals.* Mathematika, 47(1-2):219–227 (2002), 2000.

[18] Miroslav Katětov. *Products of filters.* Comment. Math. Univ. Carolinae, 9:173–189, 1968.

[19] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1995.

[20] Kenneth Kunen, *Set Theory*, Studies in logic 34.

[21] Miklós Laczkovich and Ireneusz Rec law. *Ideal limits of sequences of continuous functions*. Fund. Math., 203(1):39–46, 2009.

[22] Claude Laflamme. *Filter games and combinatorial properties of strategies*. In Set theory (Boise, ID, 1992–1994), volume 192 of Contemp. Math., pages 51–67. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[23] Krzysztof Mazur. F_σ-ideals and $\omega_1\omega_1^*$-gaps in the Boolean algebras $\mathcal{P}(\omega)/\mathcal{I}$. Fundamenta Mathematicae, 138(2):103–111, 1991.

[24] D. Meza-Alcántara, *Ideals and filters on countable sets*, PhD Thesis, UNAM, Mexico (2009).

[25] M. di Nasso and M. Forti, *Hausdorff ultrafilters*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 1809–1818.

[26] Sławomir Solecki. *Analytic ideals*. Bull. Symbolic Logic, 2(3):339–348.

[27] Sławomir Solecki. *Analytic ideals and their applications*. Ann. Pure Appl. Logic, 99(1-3):51–72, 1999.

[28] Sławomir Solecki. *Filters and sequences*. Fundamenta Mathematicae, 163:215–228, 2000.

[29] Michel Talagrand. *Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables*. Studia Mathematica, 67:13–43, 1980.

[30] Wikipedia, *List of forcing notions*,

`https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_forcing_notions`