



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**Modelo de inyección de
espuma en un medio poroso
heterogéneo.**

TESIS

Que para obtener el título de
Ingeniero Petrolero

P R E S E N T A

Miguel Eduardo Jaime Velázquez

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Erick Emanuel Luna Rojero



Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Al mundo.

“El camino del conocimiento y la innovación es la educación, una educación de calidad que inspire a los mexicanos a acercarse a la ciencia desde la más temprana edad, una educación que despierte en los niños y los jóvenes el interés de investigar”

— José Mario Molina.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Erick Emanuel Luna Rojero por su tiempo, amabilidad y apoyo en la realización de este trabajo, así como sus enseñanzas y buenos momentos, gracias a eso, este trabajo ha visto la luz.

A mis sinodales: Dr. Rodolfo Camacho, Dr. Simón López, Dr. Victor Teja y al M.I. Ricardo Suárez, por tomarse el tiempo necesario en revisar y aportar sus comentarios a este trabajo.

A mis amigos y compañeros que estuvieron a lo largo de cada etapa de mi camino.

A la Gerencia del Ingeniería de Yacimientos del Instituto Mexicano del Petróleo por abrirme sus puertas, siempre estaré agradecido por todo.

Índice general

Agradecimientos	v
Lista de Figuras	ix
Índice de Tablas	xiv
Abstract	xv
Resumen	xvii
1 Antecedentes	1
1.1 Explotación de Yacimientos Heterogénos y Anisótropos	1
1.1.1 Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF)	1
1.1.2 Problemática de los Yacimientos Naturalmente Fracturados	2
1.1.3 Panorama en México	2
1.2 Recuperación secundaria y mejorada	3
1.2.1 Diferencias entre EOR e IOR	4
1.2.2 Control de Movilidad	5
2 Estado del arte	7
2.1 Espumas en un medio poroso	7
2.1.1 Definición de espuma	7
2.1.2 Calidad	8
2.1.3 Conceptos relacionados a una espuma en un medio poroso	9
2.1.4 Mecanismo de generación de espuma.	12
2.1.5 Mecanismo de entrampamiento	15
2.1.6 Mecanismo de destrucción de la espuma	15
2.1.7 Mecanismo de estabilización de espuma	17
2.2 Flujo de espuma en medio poroso	17
2.2.1 Principios de flujo en un medio poroso	17
2.2.2 Flujo de espumas en un medio poroso.	18
2.2.3 Teoría de flujo fraccional en espumas	23

2.2.4	Flujo de espumas en tubos capilares.	24
2.2.5	Flujo de espumas en un medio homogéneo.	26
2.2.6	Flujo de espumas en un medio heterogéneo.	27
2.2.7	Modelado del transporte de espumas en medio poroso.	28
3	Definición del problema	35
3.1	Modelo conceptual.	35
3.1.1	Hipótesis.	35
3.1.2	Objetivo.	36
3.1.3	Alcance.	36
3.1.4	Planteamiento del problema.	36
3.2	Modelo matemático.	37
3.2.1	Modelo de balance de lamelas.	37
3.2.2	Transporte del gas/espuma.	38
3.2.3	Transporte de la fase líquida	39
3.2.4	Ecuación de conservación de masa.	39
3.2.5	Reología.	39
3.2.6	Permeabilidad relativa.	40
3.2.7	Presión capilar	40
3.2.8	Textura	40
3.2.9	Heterogeneidad.	41
3.2.10	Permeabilidad.	41
3.2.11	Modelo en coordenadas cilíndricas 1D	42
3.2.12	Condiciones iniciales y de frontera	43
3.2.13	Condiciones iniciales	43
3.2.14	Condiciones de frontera	43
3.3	Modelo matemático adimensional.	43
3.3.1	Transformaciones adimensionales.	43
3.3.2	Presión capilar.	45
3.3.3	Textura.	45
3.3.4	Generación y coalescencia de lamelas.	45
3.3.5	Viscosidad	45
3.3.6	Movilidad	46
3.3.7	Modelo matemático adimensional	46
3.3.8	Condiciones iniciales.	47
3.3.9	Condiciones de frontera.	47
4	Solución numérica	49

4.1	Modelo numérico.	49
4.1.1	Diferencias finitas.	49
4.1.2	Metodo de solución.	53
4.1.3	Algoritmo.	54
5	Resultados	57
5.1	Introducción	57
5.2	Saturación.	57
5.2.1	Homogéneo.	58
5.2.2	Heterogéneo.	59
5.3	Textura.	62
5.3.1	Homogéneo	62
5.3.2	Heterogéneo	63
6	Conclusiones y recomendaciones	67
6.1	Conclusiones.	67
6.2	Recomendaciones.	68
A	Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas	69
B	Ecuación de la textura	71
C	Ecuaciones adimensionales	73
C.1	Presión capilar.	75
C.2	Generación y coalescencia de lamelas.	77
C.2.1	Generación de lamelas.	77
C.2.2	Para la coalescencia	78
C.3	Modelo reológico	79
C.4	Viscosidad.	80
C.5	Movilidad.	81
C.5.1	Movilidad del agua	81
D	Diferencias finitas	83
D.1	Para la textura.	83
D.1.1	Condiciones de frontera.	86
D.2	Saturación.	87
D.2.1	A la entrada.	89
D.2.2	A la salida.	89
D.3	Velocidad del agua.	92

D.3.1	A la entrada.	93
D.3.2	A la salida.	93
D.4	Velocidad del gas.	94
D.5	Formación de la espuma.	95
D.5.1	A la entrada.	95
D.5.2	A la salida.	95
D.6	Presión.	96
D.6.1	A la entrada.	97
Bibliografía		103
Índice alfabético		105
*		105

Lista de Figuras

1.1	Mecanismos de Recuperación (Adaptada de Lake L.W., Schimdt y Venuto, P.B., 1990)	3
1.2	Esquema de los métodos de recuperación mejorada adaptación de Thomas, S. Enhanced Oil Recovery-AnOverview. Oil and Gas Science and Technology-Rev.IFP, Vol 6; 2008	4
2.1	Representación esquemática del gas fluyente y gas atrapado como elementos de una espuma en un medio poroso (Kovscek and Radke 1994).) . . .	8
2.2	Características de una burbuja de gas en una espuma Weaire and Hutzler (1999)	9
2.3	Esquema de la función de la presión de ruptura Rossen et al. (1995).) . .	12
2.4	Esquema del mecanismo de generación <i>leave-behind</i> , Kovscek and Radke (1994).)	13
2.5	Esquema del mecanismo de generación <i>snap-off</i> ; (a) entrada de gas en una garganta de poro, (b) la burbuja de gas pasa al poro y (c) el líquido forma una lente en la garganta de poro, Kovscek and Radke (1994).)	14
2.6	Esquema del mecanismo de movilización y división de lamelas; Kovscek and Radke (1994).	15
2.7	Lamela a través de una garganta de poro Kovscek and Radke (1994) . . .	16
2.8	Esquema de la espuma en medios porosos Afsharpoor (2009): a) No hay lamelas presentes, por lo que el gas puede fluir libremente, b) Algunas lamelas están presentes, lo que reduce un poco la movilidad del gas, c) Un gran número de lamelas, lo que restringe severamente la capacidad de flujo del gas.	18
2.9	Sensibilidad de la espuma para (a) agua, (b) aceite y (c) surfactante Nanddar Zanganeh et al. (2013)	21
2.10	Configuración de burbujas cuando están separadas y cuando se están tocando. Hirasaki et al. (1985)	25
3.1	Modelo físico del problema	36

4.1 Diagrama de flujo del código numérico del flujo de espuma en un medio poroso heterogéneo. 55

5.1 En la Figura a) la saturación predice un buen comportamiento aunque al inicio genera un poco de ruido debido a la velocidad de inyección y la homogeneidad, en la Figura b) donde la velocidad de inyección fue 1×10^{-4} vemos que fue un barrido limpio muy cerca del pozo inyector lo que nos indica que es una velocidad en la cual la espuma se considera más estable, en la Figura c) la saturación se comporta de manera inusual y esto es debido a la velocidad de inyección porque no se logra una buena generación de espuma, por último podemos observar que en la Figura d) la saturación del yacimiento quedó en valores bajos a comparación de las otras velocidades de inyección donde la eficiencia de barrido fue buena durante todo el radio del yacimiento teniendo una buena saturación del agua. 58

5.2 Se muestra en las siguientes gráficas las velocidades $1 \times 10^{-2} \left[\frac{m}{s} \right]$, $1 \times 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$, $7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ y $1 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ respectivamente, se pudo observar que para las altas velocidades como en a) y b) este grado de heterogeneidad no hay influencia en un radio cercano al pozo ni en un radio crítico pero para velocidades mas lentas como en c) se observa que la heterogeneidad ayuda a que haya una mejor eficiencia de barrido en zonas cercanas al pozo inyector y para la velocidad mas lenta d), solo es la saturación del gas debido a que la heterogeneidad y la velocidad no son suficientes para generar una espuma. 59

5.3 Para este grado de heterogeneidad para las velocidades mayores como a) muestra un poco de ruido muy cercano al pozo, sin embargo para la segunda velocidad b), tenemos un barrido mas limpio y se vuelve un poco mas estable la espuma para c) en la zona mas cercana al pozo se generan caídas de saturación más estables que para el caso homogéneo y para el 10% de heterogeneidad pero se logra formar una espuma estable durante el frente y para la velocidad cabe resaltar que se alcanza el radio crítico en mucho menor tiempo que en los demás gastos de inyeccion, para la Figura d) la formación de espuma aún no existe, sólo hay flujo de gas en una sola fase. 60

- 5.4 Para este nivel de heterogeneidad se confirma que para altas velocidades este porcentaje es despreciable, por lo que no vemos diferencia en las Figuras a) y b) pero para las velocidades mas bajas cercanas a una velocidad crítica hay una mejora considerable en las los tiempos de saturación de agua, en c) donde tenemos una velocidad de $7x10^{-6} [\frac{m}{s}]$ se logró formar una espuma estable y se logró barrer todo el yacimiento de una manera limpia y en menor tiempo que en las velocidades altas hasta un radio propuesto, mostrando que el nivel de heterogeneidad ayuda a las velocidades mas lentas (cercanas a velocidad crítica) para tener un buen barrido y una buena saturación, en la Figura d), donde tenemos nuestra velocidad mas baja, vemos como se alcanzó a formar una espuma débil pero no fue suficiente para barrer el yacimiento. 61
- 5.5 En la Figura a) y b) hay una buena generación de espuma, debido a la velocidad de inyección al igual que la saturación, la generación de espuma se hace en un radio muy cercano al pozo de inyección y hay una buena presencia de espuma durante todo el yacimiento, en la Figura c) si hay generación de espuma pero esta sólo se logra formar hasta la mitad de nuestro yacimiento y de forma muy inestable debido que el índice de coalescencia de espumas es mayor que el índice de generación por estar en función de la presión, es decir, no hubo generación de espuma ya que la velocidad de inyección es insuficiente para que se cree espuma. 62
- 5.6 Para un 10 % en la heterogeneidad del yacimiento no hay cambios notables en las primeras dos velocidades (Figura a) y Figura b)) pero tenemos una gran diferencia en la Figura c) donde en una velocidad intermedia ($7x10^{-6} [\frac{m}{s}]$) se tiene una buena generación de espuma a lo largo de todo el yacimiento y para la velocidad mas baja (Figura d)) el grado de heterogeneidad y la velocidad de inyección no son suficientes para generar una espuma. 63
- 5.7 Para un 15 % de la heterogeneidad para la velocidad intermedia de $7x10^{-6} [\frac{m}{s}]$ se puede observar que se crea mas textura en intervalos de tiempo mas pequeños, lo que nos genera una espuma mas estable a comparación del 10 % de la heterogeneidad y para la velocidad mas baja (Figura d) no se logró generar espuma, es decir, es el gas fluyendo en una sola fase a lo largo del yacimiento. 64

5.8 Para este grado de heterogeneidad se tiene que para la Figura c) que es una velocidad de $7x10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ la generación de espuma en un radio cercano al pozo que para un grado de heterogeneidad del 10%, también podemos notar como toma mucho menos tiempo en que la espuma recorra todo el frente del yacimiento. Por último, para la velocidad mas baja no hubo generación de espuma en ningún punto del yacimiento. 65

Índice de Tablas

2.1	Tensión superficial de fluidos en relación con la espuma	10
5.1	Datos de entrada del modelo de Kam and Rossen (2003)	57

Abstract

In this thesis work the objective is to make a radial model of a foam injection at different injection costs in a heterogeneous porous medium, which simulates the process in the vicinity of the well, and thus predict the behavior of this fluid to improve its application in the field.

To propose the model, the combination of Darcy's equation for non-Newtonian fluids, the mass conservation equation, a lamella balance model that considers foam generation and coalescence, a rheological model for foam and other constitutive equations for relative permeability, capillary pressure, etc. were used. The model is dimensionless and numerically solved using time-space finite differences and a relaxation method. A direct iterative method was used to deal with non-linearity. For the heterogeneity model, porosity is considered to obey a log-normal distribution function.

We obtained the behavior of the foam along the front in the deposit where the variables of the generation of foam are the speed and the degree of heterogeneity. It was found that there is a critical radius where foam generation begins to fall because the coalescence terms are greater than the generation terms (speed-dependent).

It was found that heterogeneity favours foam generation, however foam modelling still represents a challenge due to its rheological complexity and its interaction with the porous environment.

Resumen

En este trabajo de tesis el objetivo es realizar un modelo radial de una inyección de espuma a diferentes gastos de inyección en un medio poroso heterogéneo, que simule el proceso en la vecindad del pozo, y así predecir el comportamiento de dicho fluido para mejorar su aplicación en campo.

Para plantear el modelo se usó la combinación de la ecuación de Darcy para fluidos no Newtonianos, la ecuación de conservación de masa, un modelo de balance de lamelas que considera generación y coalescencia de espuma, un modelo reológico para la espuma y otras ecuaciones constitutivas para la permeabilidad relativa, presión capilar, etc. El modelo que se adimensionaliza y se resuelve numéricamente utilizando diferencias finitas centradas en tiempo y espacio y un método de relajación. Para tratar la no linealidad se usó un método iterativo directo, para el modelo de heterogeneidad se considera que la porosidad obedece una función de distribución tipo log-normal.

Se obtuvo el comportamiento de la espuma a lo largo del frente en el yacimiento donde las variables de la generación de espuma son la velocidad y el grado de heterogeneidad que se tenga. Se encontró que existe un radio crítico donde la generación de espuma empieza a caer debido a que los términos de coalescencia son mayores que los de generación (dependientes de la velocidad).

Se encontró que la heterogeneidad favorece la generación de espuma, sin embargo el modelado de espumas aún representa un reto debido a su complejidad reológica y a su interacción con el medio poroso.

Antecedentes

1.1. Explotación de Yacimientos Heterogénos y Anisótropos

La mayoría de los yacimientos, ya sean carbonatados o siliciclásticos, presentan heterogeneidades, estos fenómenos tienen su origen en factores como el ambiente de depósito, procesos diagenéticos, tectónica regional o local (sal), térmicos, o de impacto (Chicxulub). Durante un proceso de recuperación secundaria o mejorada la trayectoria de los fluidos inyectados es gobernado en gran medida por la heterogeneidad del medio poroso, esto ocasiona que la eficiencia de barrido o de desplazamiento sea baja y queden zonas del yacimiento sin explotar, o bien se presenten canalizaciones de los fluidos inyectados hacia los pozos productores, haciendo nulo su efecto. Las propuestas para disminuir esta problemática se enfocan en inyectar baches de fluidos de alta viscosidad aparente, como lo son polímeros o geles que ayuden a bloquear las zonas de alta conductividad hidráulica, disminuyan la canalización y mejoren la eficiencia de barrido. Una segunda alternativa, que se tratará en este trabajo, son las espumas, cuyo comportamiento reológico es ideal para disminuir el efecto de la heterogeneidad.

En México, con base en las reservas y la producción actual, los principales yacimientos heterogénos y anisótropos son los naturalmente fracturados. En la siguiente sección se discute acerca de sus características y la importancia para el país.

1.1.1. Yacimientos Naturalmente Fracturados (YNF)

Un yacimiento naturalmente fracturado es aquel que contiene fracturas creadas por la naturaleza. Estas fracturas naturales pueden provocar un efecto positivo o negativo en el transporte de fluidos. Todos los yacimientos contienen cierta cantidad de fracturas natu-

rales, sin embargo, desde el punto de vista de la ingeniería de yacimientos, se consideran como yacimientos naturalmente fracturados solo a aquellos donde las fracturas tienen un efecto, positivo o negativo, en el flujo de fluido. Nelson (1985).

Los yacimientos naturalmente fracturados (YNF) son un componente importante en términos de las reservas de hidrocarburos a nivel mundial y actualmente son explotados en diversas partes del mundo, incluido Medio Oriente y México. Se ha estimado que estos yacimientos cuentan con el 60 % de las reservas mundiales de petróleo (López 2017).

1.1.2. Problemática de los Yacimientos Naturalmente Fracturados

Gran parte de la reserva remanente de hidrocarburo está en los yacimientos naturalmente fracturado (YNF), además de aportar la mayoría de la producción. Por la dificultad de comunicación hidráulica entre la fractura y la matriz, gran parte del petróleo se queda en esta última.

Uno de los mas grandes problemas de los YNF es la diferencia de permeabilidades entre los dos medios mas importantes fractura-matriz, lo que ocasiona canalizaciones del fluido inyectado y baja la eficiencia de barrido. En Cantarell se ha producido únicamente el 18 % del aceite en la matriz, mientras que en la fractura se ha agotado el 81.7 %.²

1.1.3. Panorama en México

México es uno de los países que ha sustentado su economía en la exploración y producción de hidrocarburos y cuenta con una gran oportunidad de recursos petroleros debido a las condiciones geológicas donde se encuentra ubicado el territorio mexicano.

Actualmente, en México se están explotando, bajo condiciones de producción primaria, una gran cantidad de campos maduros, los cuales podrían producirse mediante procesos de recuperación secundaria y/o mejorada, para incrementar su factor de recuperación. Es importante considerar los costos de producción, ya que también aumenta el costo asociado a la extracción por barril producido. En México la mayor parte de hidrocarburos que se producen diariamente provienen de los yacimientos naturalmente fracturados.

²Ponencia: Potencial de aplicación de la recuperación mejorada en México, UNAM, Dr. Édgar Rangel Germán. 2011.

1.2. Recuperación secundaria y mejorada

La explotación de un yacimiento petrolero, convencionalmente, se debe entender como un proceso que puede constar de tres etapas. En la etapa de recuperación primaria se usa la energía natural del yacimiento para su explotación, cuando esa energía comienza a perderse, inicia la segunda etapa del proceso, la recuperación secundaria, que consiste en la inyección de fluidos inmiscibles, que no alteren significativamente las propiedades del sistema roca-fluidos, para proporcionar energía adicional al yacimiento y con ello administrar la presión del yacimiento. Por último, la recuperación mejorada, incluye todos aquellos procesos en los cuales se inyectan fluidos que alteran las propiedades del sistema roca-fluido con la finalidad de incrementar la recuperación de hidrocarburos. Cabe aclarar que estos procedimientos no llevan un orden estricto para su uso, sino según convenga al tipo de explotación al que se desee y las características del yacimiento.

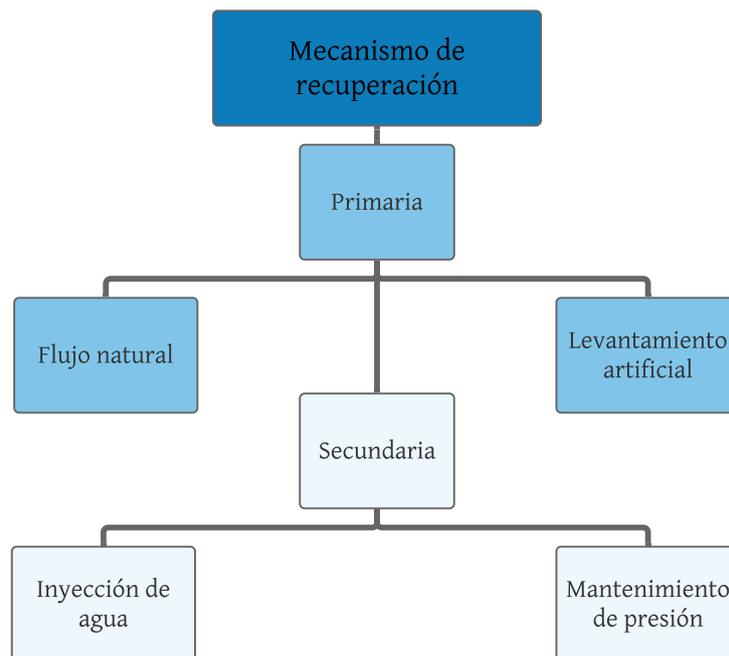


Figura 1.1: *Mecanismos de Recuperación* (Adaptada de Lake L.W., Schimdt y Venuto, P.B., 1990)

La recuperación mejorada por inyección de gas puede desplazar el aceite de manera eficiente. Sin embargo, la inyección de gas horizontal sufre de una pobre eficiencia de barrido y puede lograr recuperaciones limitadas de aceite principalmente por la baja viscosidad del gas y la heterogeneidad geológica.

1.2.1. Diferencias entre EOR e IOR

EOR (“Enhanced Oil Recovery”)

La EOR (Enhanced Oil Recovery, por sus siglas en inglés) o recuperación mejorada en español, es la recuperación de aceite mediante la inyección de materiales que normalmente no se presentan de manera natural en el yacimiento, lo más importante es que esta definición no se restringe a una frase en particular (recuperación primaria, secundaria o mejorada) en la vida productiva de un yacimiento. En la Figura (1.2) se muestran los métodos de recuperación térmicos y no térmicos que se usan en la industria petrolera así como otras alternativas.

Casi todos los procesos de recuperación mejorada se han comprobado al menos como desplazamientos secundarios Lake (1989).

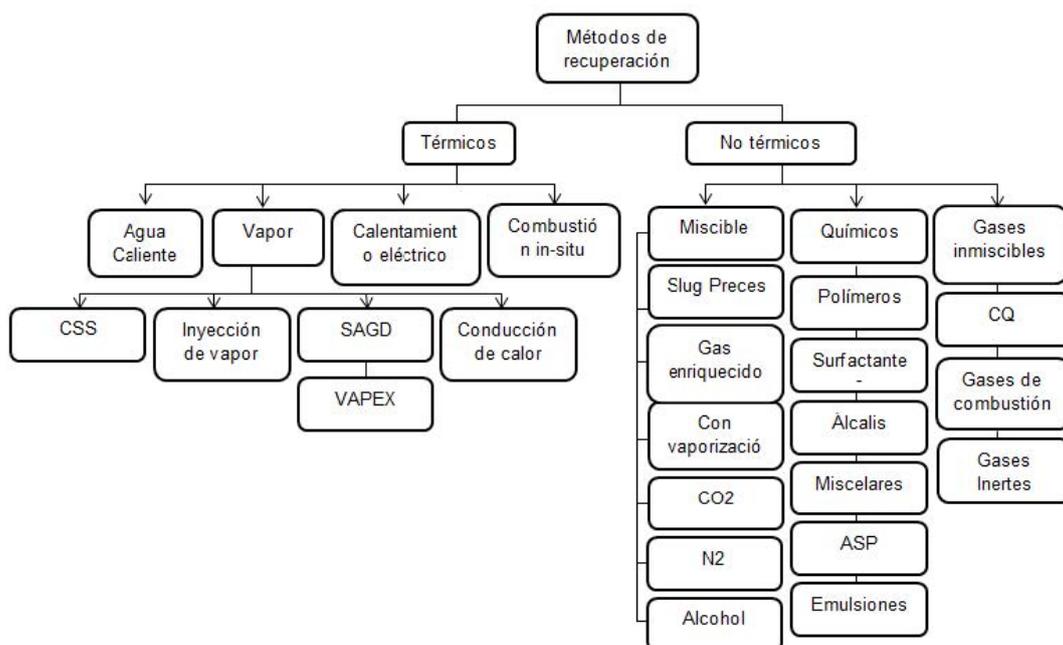


Figura 1.2: Esquema de los métodos de recuperación mejorada adaptación de Thomas, S. *Enhanced Oil Recovery-AnOverview. Oil and Gas Science and Technology-Rev.IFP, Vol 6; 2008*

IOR (“Improve Oil Recovery”)

La definición propuesta por Green and Willhite (1998) de un proceso IOR (Improved Oil Recovery, por sus siglas en Inglés) o recuperación avanzada, como suele llamarsele en español, abarca cualquier alternativa que pueda incrementar la recuperación de hidrocarburos. Dichos investigadores consideran que dentro de las prácticas de IOR se

encuentran contenidas las técnicas de EOR y además, otras que conciernen con la perforación de pozos, operaciones de producción y la caracterización estática y dinámica del yacimiento. Recientemente, también se puede considerar a la administración inteligente de yacimientos como parte de este grupo.

1.2.2. Control de Movilidad

El control de la movilidad de los fluidos inyectados es uno de los objetivos mas importantes en recuperación mejorada, se logra a partir de la inyección de fluidos de alta viscosidad aparente y reducir la permeabilidad relativa al fluido inyectado.

La movilidad está definida como la permeabilidad efectiva dividida por las viscosidad de la fase.

$$\lambda = \frac{k_g}{\mu} \quad (1.1)$$

En la recuperación de aceite, los desplazamientos estan afectados principalmente por la relación de movilidad de los fluidos inyectados, por la geometría del yacimiento y la petrofísica del yacimiento.

El proceso de control de movilidad se basa principalmente en modificarla para mejorar la eficiencia de barrido, donde lo que se busca es disminuir la movilidad del fluido inyectado sin modificar o reducir la del aceite. La movilidad está relacionada con la tensión interfacial entre el hidrocarburo y el fluido desplazante, la mojabilidad y el comportamiento reológico. El uso de espuma para el control de la movilidad es un buen pronóstico. Los primeros trabajos fueron realizados por Boud and Holbrook (1958).

Fried (1960) demostró que la espuma estabilizada con surfactantes podía reducir significativamente la movilidad del gas en medios porosos. Esta propiedad hace que la espuma sea altamente aplicable en el control de la movilidad del gas para mejorar la recuperación de aceite.

Estado del arte

2.1. Espumas en un medio poroso

2.1.1. Definición de espuma

En un medio libre, según Marfoe et al. (1987) las espumas se pueden definir de forma muy general como: una aglomeración de burbujas de gas separadas por películas delgadas. Bikerman (1973) determinó la espuma en bulto como un sistema coloidal definido mediante una aglomeración de burbujas de gas separadas entre sí por una pequeña partícula de líquido. Falls et al. (1989) la denominó como una dispersión de gas en un líquido tal que la fase líquida es continua y al menos una parte del gas es hecha discontinua por películas delgadas denominadas “lamela” o lámina por su traducción al español. Es importante resaltar la definición de Marfoe et al. (1987), donde es posible definir espumas húmedas o con gran cantidad de agua como burbujas esféricas, o caso contrario, cuando la espuma es mas seca, las burbujas toman forma de poliedro.

En un medio poroso, Rossen et al. (1995) la define como: fluidos que reducen la movilidad del gas en presencia de una disolución acuosa de surfactante, bajo las mismas condiciones de saturación de agua. Dholkawala et al. (2007) complementa las definiciones de espuma existentes, dándole la definición como una dispersión coloidal en el cual el gas esta disperso en una fase líquida que contiene surfactante. Una vez que la espuma esta contenida en un medio poroso su estabilidad depende considerablemente de la estabilidad de la lamela. Para propósitos de este trabajo de tesis, tomaremos la definición de Rossen et al. (1995).

Las espumas pueden proporcionar un medio para controlar la alta movilidad y la baja densidad del gas, hasta pueden minimizar la canalización y anular la segregación

gravitacional del gas. Desde un punto de vista dinámico, existen tres componentes de una espuma en un medio poroso, la fase líquida, la fase de gas fluyendo y la fase de gas atrapada Bravo (2017)

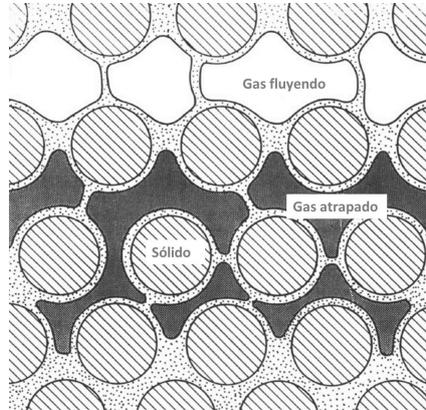


Figura 2.1: Representación esquemática del gas fluyente y gas atrapado como elementos de una espuma en un medio poroso (Kovscek and Radke 1994).

2.1.2. Calidad

La calidad de una espuma en bulto (o medio libre) se refiere a las fracciones volumétricas de gas y líquido que la componen y puede variar con el decremento de temperatura y presión e incrementa debido a la compresibilidad del gas. La calidad, x de una espuma está definida como:

$$x = \frac{v_g}{v_g + v_L} \quad (2.1)$$

donde v_g volumen de gas en la espuma y v_L volumen de líquido en la espuma.

El comportamiento físico de la espuma depende de la calidad y se puede clasificar en seca o húmeda.

Se puede definir como espuma húmeda aquella que tiene baja calidad en el cual el gradiente de presión es independiente del flujo de líquido y se considera espuma seca aquella que tiene una calidad mayor al 80% y consiste en lamelas que generan una fase gaseosa discontinua, para este tipo de espumas las burbujas estan formadas por caras en forma de polígono. Cuando una de estas caras se une con otra o con una superficie sólida se forma una línea continua en el cruce de dos planos llamados “*Borde de Plateau*”, en esta región se encuentra la mayor cantidad de líquido.

La estructura general de una espuma se muestra en la Figura (2.2) donde se observa

la composición de la espuma, la cual está contenida por una capa de líquido en el fondo y por una gaseosa en la parte superior. En la Figura (2.2) se muestra un caso particular, donde la fase de gas está separada por una capa delgada de líquido de dos interfaces y la conexión de tres lamelas en un ángulo de 120° es referida “*Borde de Plateau*”

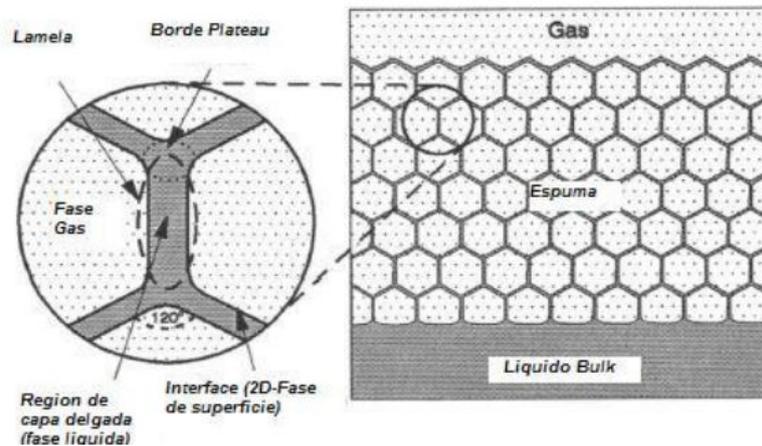


Figura 2.2: Características de una burbuja de gas en una espuma Weaire and Hutzler (1999)

2.1.3. Conceptos relacionados a una espuma en un medio poroso

Saturación (S)

En un yacimiento normalmente está presente más de un fluido. La saturación de un fluido en un medio poroso puede definirse como el volumen del fluido V_f entre el volumen del poro V_p medidos a la presión y temperatura del medio poroso.

$$S_f = \frac{V_f}{V_p} \quad (2.2)$$

donde el subíndice “ f ” puede representar agua, gas o aceite.

Tensión superficial (σ)

Es la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie libre de un líquido en equilibrio, que tiende a contener dicha superficie; las fuerzas cohesivas entre las moléculas de los líquidos generan la tensión superficial, provocando así un desequilibrio entre las fuerzas en la interfase. En la Tabla (2.1) se dan algunos valores de tensión superficial.

Sugden (1924) sugirió una relación para estimar la tensión superficial entre dos fases de un mismo fluido

$$\sigma = \left[\frac{p_{ch}(\rho_L - \rho_V)}{M_w} \right]^4 \quad (2.3)$$

donde σ es la tensión interfacial y p_{ch} es un parámetro dependiente de la temperatura, es constante y adimensional.

Líquido	Gas y Condiciones	Tensión superficial
Agua	Aire (68F y 14,7psi)	$72 \frac{mN}{m}; 45 \frac{dinas}{cm}$
Salmuera	Aire (176F y 14,7psi)	$64 \frac{mN}{m}; 46 \frac{dinas}{cm}$
Agua	Vapor (392F y 226psi)	$38 \frac{mN}{m}; 47 \frac{dinas}{cm}$
Surfactante acuoso	Aire (68F y 14,7psi)	$29 - 40 \frac{mN}{m}; 48 - 52 \frac{dinas}{cm}$
Surfactante acuoso	Aire (176F y 14,7psi)	$24 - 96 \frac{mN}{m}; 46 \frac{dinas}{cm}$
Surfactante acuoso	CO ₂ (100F y 2000psi)	$3 - 5 \frac{mN}{m}; 54 - 55 \frac{dinas}{cm}$

Tabla 2.1: *Tensión superficial de fluidos en relación con la espuma*

Textura de la espuma

Lake (1989) define a la textura de la espuma (η_f) el promedio del tamaño de burbuja en relación con el tamaño de volumen de poro y mediante análisis de imágenes es relativamente fácil medirla en un medio libre. Sin embargo, actualmente no hay técnicas experimentales confiables para medirla dentro de un medio poroso, más bien, se propone estimar la textura de la espuma de manera indirecta a partir del perfil de medición de los datos de viscosidad del gas aparente. No se puede hacer una estimación de la textura de la espuma en medios porosos sin tener una comprensión adecuada del mecanismo dinámico de la creación de lamelas in-situ y la coalescencia de las mismas.

Reología de una espuma.

La reología en las espumas puede verse desde dos enfoques diferentes: como un medio homogéneo “en bulto” y como un fluido no newtoniano donde no hay una relación lineal entre la velocidad de corte y el esfuerzo, en donde la velocidad local del gas es similar a la del líquido.

La calidad de la espuma está en función de la presión capilar y eso puede generar diversos problemas o complicaciones a la hora de hacer un modelo reológico, porque se deben considerar algunas características como son:

- Tamaño de la burbuja.
- Distribución del tamaño de la burbuja.

- Distribución espacial del tamaño de la burbuja.

Eficiencia de barrido.

En un proceso de recuperación adicional se inyectan fluidos en el medio poroso con la finalidad de desplazar a los hidrocarburos hasta los pozos productores. Idealmente, se considera el medio poroso como homogéneo, sin embargo, la realidad no es así, cada yacimiento presenta ciertas heterogeneidades que se deben considerar en la evaluación de las eficiencias de barrido.

La eficiencia global de recuperación de cualquier proceso de recuperación secundaria o mejorada, depende de la eficiencia de recuperación volumétrica y de la eficiencia de desplazamiento a nivel microscópico, definida como:

$$E = E_V * E_D \quad (2.4)$$

donde: E_V es la eficiencia de desplazamiento macroscópico que son aquellos parámetros que indican la efectividad de un barrido, asociado a la extensión real de un yacimiento y E_D es la eficiencia de desplazamiento microscópico, que se define como el volumen de aceite recuperado de los poros por donde pasa el fluido inyectado entre el volumen de aceite, ambos a condiciones estándar.

La eficiencia de desplazamiento microscópico involucra la eficiencia de desplazamiento a escala de un poro, donde ocurren los fenómenos de drene, imbibición, mojabilidad, etc.

Presión capilar (P_c)

Es la diferencia de presiones que existe en la interfase que separa a dos fluidos, uno de los cuales moja preferentemente a la roca. También se define como la capacidad que tiene el medio poroso de absorber el fluido mojante y repeler al no mojante.

$$P_c = P_{nm} - P_m \quad (2.5)$$

Para las espumas la presión capilar P_c es la diferencia entre la presión de la fase gaseosa y la presión de la fase líquida. Derjaguin et al. (1987) considera la ecuación generalizada de Young-Laplace y la función de ruptura para definir la presión capilar para espumas como:

$$P_c = 2\gamma C_m + \Pi(h) \quad (2.6)$$

donde P_c presión capilar, C_m curvatura de la lamela, γ tensión superficial, Π función de la presión de ruptura y (h) espesor de la lamela.

La presión capilar interviene tanto en la textura como en la creación de lamelas en el medio poroso, por lo mismo se requieren valores bajos de presión capilar para evitar que se colapsen Kam and Rossen (2003).

Espesor crítico

Una vez que las lamelas y el sistema se encuentran equilibrados, su espesor depende de la presión capilar mediante la curva de “presión de ruptura” (*disjoining pressure*) Π , la cual se define como el efecto combinado de las fuerzas atractivas y repulsivas dentro de la lamela. A medida que la presión capilar aumenta, la lamela adelgaza, llegando a un “espesor crítico” h_{cr} donde las fuerzas repulsivas rompen la estabilidad produciendo la unión entre dos burbujas.

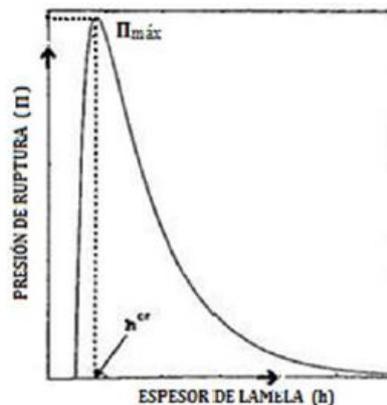


Figura 2.3: Esquema de la función de la presión de ruptura Rossen et al. (1995).

2.1.4. Mecanismo de generación de espuma.

La aplicación de espuma en medios porosos requiere la generación de ésta. Esto se puede definir como la creación de una espuma efectiva de baja movilidad en el medio poroso a partir de una condición de alta movilidad de gas.

Cuando la espuma se genera en medios porosos, las vías de flujo del gas se bloquean mediante lamelas mientras que la fase líquida permanece continua. Las lamelas que bloquean la fase del gas añaden resistencia capilar al flujo del gas y lo hacen menos móvil. La transición de una espuma fuerte a una débil requiere de un período de tiempo en el que el índice de generación de lamelas es mayor que el índice de destrucción de éstas.

Los estudios experimentales anteriores no han identificado una conexión clara entre la velocidad mínima para la generación de espuma y la concentración de surfactante. No se considera que los mecanismos individuales de generación de lamelas dependan de la presencia de surfactante. Gauglitz et al. (2002), Ransohoff and Radke (1988), Dicksen et al. (2002), sin embargo es claro que deberá estar presente para que las lamelas sean estables.

Las condiciones para la generación de espuma dependen en parte del método de inyección, para un medio poroso homogéneo, la velocidad de inyección o el gradiente de presión dependen de la resistencia capilar de una lamela para ser desplazada. En algunos casos, la generación de espuma requiere gradientes de presión muy altos.

La formación de espuma refleja la creación de una gran cantidad de lamelas que separan las burbujas de gas, las lamelas se pueden crear *“in-situ”* mediante diferentes mecanismos como *leave-behind* que genera una espuma débil, mientras que los métodos de generación de lamelas como: *“snap-off”* y *“movilización y división de lamelas”* genera una espuma fuerte. A continuación se describen dichos mecanismos.

Leave-behind

Este mecanismo describe el movimiento de dos flujos de gas al mismo tiempo a través de dos gargantas de poro, creándose una lamela en dirección al flujo como se indica en la Figura 2.4, la cual es poco resistente. La movilidad del gas en este proceso es alta, es decir que se generarán espumas débiles.

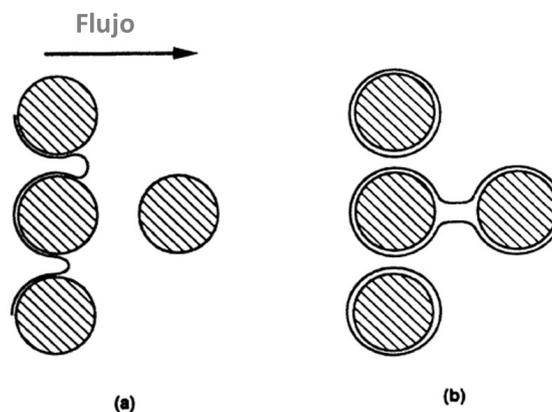


Figura 2.4: Esquema del mecanismo de generación *leave-behind*, Kowscek and Radke (1994).

Snap-off

Sucede cuando una fracción de gas pasa por una garganta de poro saturada de líquido, la cual se mueve a una zona de menor presión, de tal forma que al salir por la garganta de poro genera una burbuja de gas, de esta manera una parte del gas queda atrapado formando otra lamela, Kovscek and Radke (1994).

Es un mecanismo importante para la generación de burbujas en medios porosos. Roof et al. (1970) identificaron y explicaron este fenómeno por primera vez para comprender el origen del aceite residual. Este mecanismo no se limita a la creación de esferas de aceite atrapado.

Snap-off ocurre repetidamente durante el flujo multifásico en medios porosos, independientemente de la presencia o ausencia de surfactante, por lo tanto, este mecanismo de generación de espuma es reconocido como un proceso mecánico.

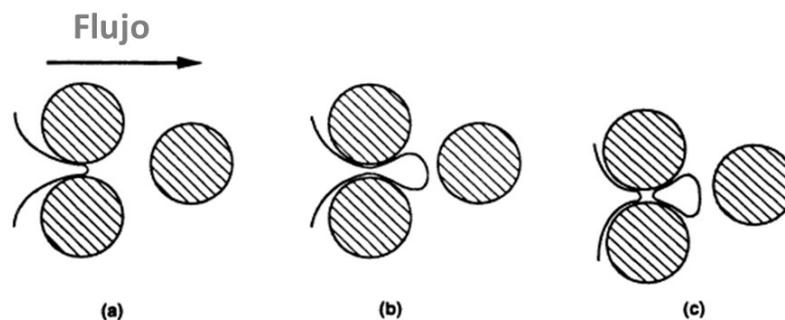


Figura 2.5: Esquema del mecanismo de generación *snap-off*; (a) entrada de gas en una garganta de poro, (b) la burbuja de gas pasa al poro y (c) el líquido forma una lente en la garganta de poro, Kovscek and Radke (1994).

Movilización y división de lamelas

Kam and Rossen (2003) asumieron que el cambio brusco en la movilidad del gas durante la formación de espumas se debe a la movilización y la división. El proceso de división de la lamela solo es posible si el gradiente de presión es lo suficientemente grande, por lo tanto, el modelo asume que la creación de burbujas está controlada por el gradiente de presión, que debe exceder un valor mínimo. Este modelo funciona bien para los gradientes de presión promedio pero muestra inestabilidad numérica para los gradientes de presión grandes.

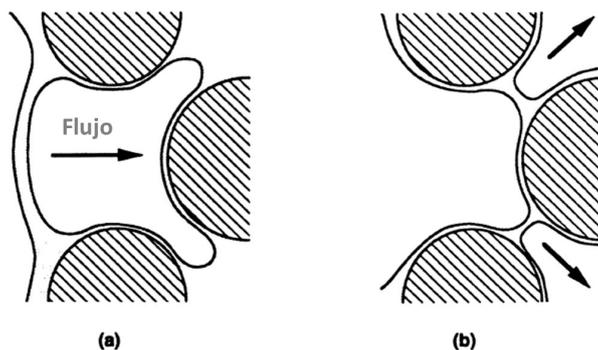


Figura 2.6: Esquema del mecanismo de movilización y división de lamelas; Kowsek and Radke (1994).

2.1.5. Mecanismo de atrapamiento

En general la saturación de espuma atrapada s_{ft} , es función del gradiente de presión, presión capilar, saturación de la fase acuosa, geometría de poro y las condiciones de inyección. Generalmente no hay atrapamiento cuando la densidad de la burbuja es cero.

La espuma atrapada influye fuertemente en la permeabilidad relativa de la espuma al reducir la saturación de la espuma móvil. La fracción de espuma atrapada generalmente se mide experimentalmente en estado estable Friedmann et al. (1991). Sin embargo, los modelos de percolación pueden determinar la dependencia funcional de s_{ft} , Rossen and Gauglitz (1990). La relación entre la saturación de espuma atrapada y la textura de la espuma se define como:

$$\chi_t^{S_w} = \chi_t^{max} \frac{\beta n_t}{1 + \beta n_t} \quad (2.7)$$

donde: S_w es la saturación de agua, χ_t es una fracción de espuma atrapada, χ_t^{max} es la máxima fracción de espuma atrapada, β es un parámetro de atrapamiento y n_t es la cantidad de lamelas atrapadas en unidad de volumen.

2.1.6. Mecanismo de destrucción de la espuma

Los dos mecanismos principales para la destrucción de la espuma son:

1. La coalescencia por succión capilar.
2. La difusión del gas debido a burbujas de diferentes tamaños.

Coalescencia por succión capilar

La existencia de una lamela se debe a la tensión superficial en la película de líquido, principalmente causada por las interacciones intermoleculares. Para la coalescencia entre

dos burbujas, se tiene una presión de ruptura que es la combinación de fuerzas de atracción y repulsión en una lamela y está en función del espesor de la misma; si dicha presión adquiere un valor negativo la lamela se colapsará, pues las fuerzas de atracción de Van der Waals son las predominan y ya no las fuerzas de atracción y repulsión.

La coalescencia debida a la succión capilar se ve afectada por la composición del surfactante. Las lamelas delgadas no son termodinámicamente estables y su creación se debe a la presión capilar en la película líquida, que son principalmente interacciones intermoleculares. Lo anterior puede describirse como la presión de ruptura (Π), ésta es una combinación de los efectos de las fuerzas de atracción y repulsión dentro de una lamela. La presión de ruptura es función del espesor de la lamela y cuando tiene un valor negativo significa que las fuerzas de atracción de Van del Waals dominan, por lo que la lamela se colapsará inmediatamente, por el contrario si algún surfactante es absorbido por la interface gas-líquido la lamela se puede estabilizar, Matias (2011).

El movimiento de la lamela también interviene en este mecanismo de destrucción. Cuando una película se encuentra estática, la presión de ruptura y la presión capilar son iguales, es decir, están en equilibrio con la interfaz que está en función de la saturación de la fase mojante.

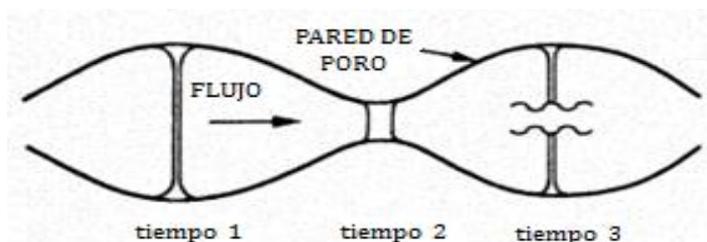


Figura 2.7: *Lamela a través de una garganta de poro Kowscek and Radke (1994)*

Singh et al. (1996) encontraron que cuando el surfactante genera una película superficial inmóvil sobre el medio poroso, una lamela en movimiento puede ser más estable que una estática por lo que la selección del surfactante es importante para la estabilidad de la espuma en un medio poroso.

Difusión de gas

Bravo (2017) propone que este mecanismo ocurre por la diferencia de energía del gas dentro de la burbuja y el gas que se encuentra en la parte cóncava de la burbuja, el cual tiene mayor presión capilar que en el lado convexo, por lo tanto, el gas del lado cóncavo se propaga hacia el lado convexo a través de la película de líquido debilitándola, esto puede ocasionar una ruptura de la lamela.

2.1.7. Mecanismo de estabilización de espuma

La estabilización de las espumas depende de un aumento de la tensión superficial en la zona afectada de una lamela. Por otro lado, la desestabilización de la espuma ocurre si la tensión superficial de una región se reduce repentinamente. Este tipo de gradiente de superficie puede causar que el área afectada de una lamela se expanda y se rompa.

Las espumas pueden inhibirse o romperse por el drene del líquido entre las interfaces de la lamela, el choque mecánico, el calentamiento local y varios rompedores de espuma (o agentes antiespumantes). La estabilidad de una lamela de espuma disminuye a medida que la película se adelgaza debido al drene del líquido que se encuentra en el interior. Con un adelgazamiento suficiente, incluso el choque mecánico de la ruptura espontánea de una lamela puede provocar la ruptura de otra.

Enfoques para la estabilización de la espuma

Existen básicamente dos enfoques diferentes que se pueden considerar para mejorar la estabilidad de la espuma.

1. Reforzar las propiedades físicas de la película de espuma de manera que sea menos susceptible a los cambios externos.
2. Modificar el entorno de formación de espuma.

2.2. Flujo de espuma en medio poroso

2.2.1. Principios de flujo en un medio poroso

Al hablar de flujo a través del medio poroso, lo primero a considerar es una red con espacios que pueden o no estar comunicados entre sí mediante gargantas de poros que permiten entre ellos, el paso de los fluidos que contiene el yacimiento. A nivel macroscópico se puede describir el flujo en un medio poroso con la ley de Darcy considerando pequeños números de Reynolds, considerando que tenemos un fluido Newtoniano. Esta ley describe que la velocidad de flujo es directamente proporcional al gradiente de presión que genera e inversamente proporcional a la viscosidad del fluido.

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p \quad (2.8)$$

El flujo de espumas en el medio poroso está relacionado con la geometría y conectividad de los poros; por lo tanto, se debe tener en cuenta que los medios permeables son caracterizados por la distribución del tamaño del cuerpo y la garganta de poro.

Una cuestión a considerar es que el flujo de espumas en medios porosos se ve afectada por el tipo de espuma, se puede tener una espuma fuerte que es gas discontinuo y se requiere un gradiente de presión grande para que la espuma pueda fluir o una espuma débil, gas continuo, la espuma fluye con mas facilidad aunque disminuye el control de movilidad del gas.

2.2.2. Flujo de espumas en un medio poroso.

El comportamiento de la espuma en el medio poroso se relaciona a la distribución del tamaño de poro, forma de poro, geometría de poro y la mojabilidad. El transporte de la espuma en el medio poroso es complicado debido a que el número de lamelas presentes, gobierna las características del flujo tal como: la viscosidad, permeabilidad relativa, distribución de fluido e interacción entre los fluidos. En la Figura (2.8) se muestra la movilidad del gas en diferentes escenarios en presencia de lamelas, por ejemplo: cuando no hay presencia de lamelas, cuando existen pocas lamelas presentes en el yacimiento y cuando el número de lamelas por unidad de volumen es grande

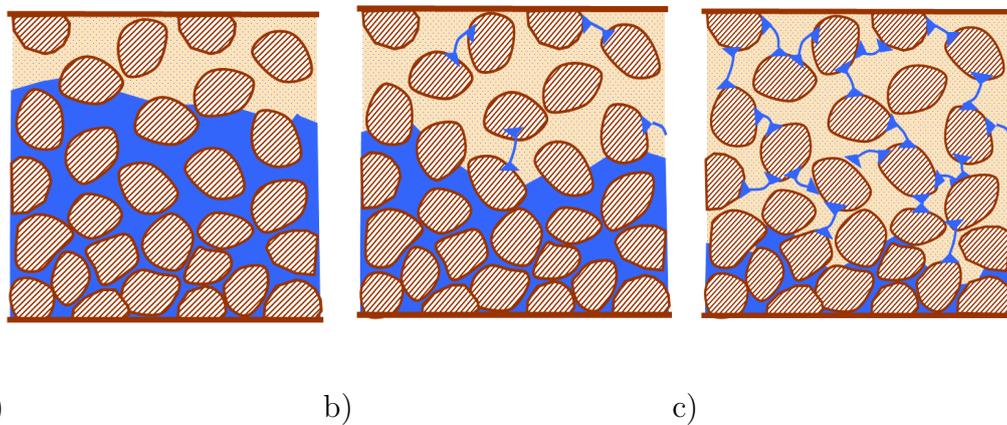


Figura 2.8: *Esquema de la espuma en medios porosos Afsharpoor (2009): a) No hay lamelas presentes, por lo que el gas puede fluir libremente, b) Algunas lamelas están presentes, lo que reduce un poco la movilidad del gas, c) Un gran número de lamelas, lo que restringe severamente la capacidad de flujo del gas.*

Hay varios modelos que describen el flujo de espuma en medios porosos, sin embargo, no siempre se basan en los mismos principios o parámetros, por ejemplo, el tiempo exacto que se tarda en formar una espuma, porque es difícil de determinarlo experimentalmente. Podemos distinguir entre tres clases de modelos de espuma: modelos de balance de población dinámica, que toman en cuenta la fuerza (tamaño de la burbuja) de la espuma, los métodos de equilibrio local, que incorporan el efecto de la espuma a través de una

función limitada¹ y la combinación de ambos modelos.

La primera clase de modelos intenta capturar la dinámica real del proceso, mientras que la segunda clase asume que solo hay un equilibrio en la resistencia de la espuma, debido a la complejidad inherente de la espuma, la primera clase es más compleja y tiene un mayor número de grados de libertad que la segunda clase. Desde un punto de vista computacional, la segunda clase de modelos es, por lo tanto, más adecuada para realizar grandes simulaciones de un yacimiento, en menos tiempo y por lo tanto, muy útil para fines experimentales.

Modelo dinámico de balance poblacional

En estos modelos, la espuma se considera como una agrupación de burbujas o lamelas, que se balancean con términos de creación o aniquilación durante su transporte. La tasa de crecimiento de las lamelas depende de varios mecanismos, tales como la tasa de afluencia, flujo de salida, creación, destrucción y atrapamiento de las lamelas. Así que, además de la ecuación de conservación de la masa hay una ecuación adicional que describe la conservación de las lamelas. Si se define a la textura de una espuma, n_D , como la densidad de burbuja, o densidad de las lamelas, dicha ecuación tiene la forma:

$$\frac{\partial n_D}{\partial t} - \nabla \cdot (f(n_D)) = q(n_D) \quad (2.9)$$

donde: f es la función de flujo y se describe la generación y coalescencia de las burbujas incorporando el término q en la ecuación de conservación de la masa.

La movilidad del gas es controlada por la densidad de las burbujas dada por las siguientes ecuaciones:

$$k_{rg}^f = \frac{k_{rg}^0}{\mu_g^f} \quad \mu_g^f = h(\mu_g^0, n_D) \quad (2.10)$$

donde k_{rg}^f y k_{rg}^0 son las permeabilidades relativas del gas en una espuma y en su forma original, respectivamente, μ_g^0 es la viscosidad inicial del gas, μ_g^f es la viscosidad aparente de la espuma y h es una función de la viscosidad del gas original y de la densidad de la lamela.

Las simulaciones con este tipo de modelos muestran que existen varias soluciones de equilibrio para un cierto rango de parámetros correspondientes a diferentes resistencias de la espuma. Esto se basa en el principio “*snap-off*”, donde las lamelas se construyen y

¹También hay una clase adicional de modelos semi-empíricos explicados en el capítulo 3

destruyen continuamente. Por este principio la movilidad del gas, que está estrechamente relacionada con la densidad de la espuma, puede sufrir un cambio repentino.

Otros autores afirman que la espuma en estado estable solo puede influir en la movilidad de gas por la movilización y división de lamelas.

En la década de los 80's, Patzek et al. (1989) y Falls et al. (1989) publicaron los trabajos que fueron precursores en la aplicación de los modelos de balance para el flujo de espumas a través de medios porosos.

A ciencia cierta se desconoce la relación exacta entre la creación de lamelas en medios porosos y el gradiente de presión, Kam and Rossen (2003) sugieren la siguiente expresión como primera aproximación:

$$r_g = C_g(\Delta p)^m \quad (2.11)$$

donde r_g es el índice de generación de la lamela por unidad de volumen en la fase gaseosa, $|\Delta p|$ es el gradiente de presión en la fase del gas y m, C_g son parámetros del modelo.

Rossen and Gauglitz (1990) propusieron una teoría para la espuma donde la generación de lamelas depende del gradiente de presión pero también de la saturación de agua o de la presión capilar, que gobierna la presencia de lamelas. Dicho de otra manera, la generación de espuma es más fácil a mayor saturación de agua, porque hay más lamelas en medio poroso, y estas pueden ser movilizadas por un menor gradiente de presión Δp , por lo tanto, se ha modificado el índice de generación de lamelas involucrando la saturación del agua en la fase de gas como se muestra a continuación:

$$r_g = C_g S_w (\Delta p)^m \quad (2.12)$$

En Kam et al. (2007) el modelo introducido se mejoró al poner una restricción en el índice de generación de burbujas para gradientes de alta presión, definiéndolo por el siguiente modelo,

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \left(\frac{C_f n_{max} n_D}{\left(\frac{\mu_g}{\varphi S_g} \right)^{\frac{1}{3}}} \right) \quad (2.13)$$

donde C_f es una constante que se adaptó a este problema, n_D es el tamaño mínimo de burbuja que está relacionado con el tamaño mínimo de poro, S_g es la saturación del gas, φ es la porosidad del medio.

La movilidad del gas en una espuma está fuertemente influenciada por la densidad de la burbuja, ya que la movilidad del gas depende del área sobre la cual puede fluir y

del gradiente de presión en esta misma área mientras las burbujas más pequeñas reducen más la movilidad del gas que las burbujas más grandes.

Factor de reducción de movilidad.

Como se mencionó anteriormente, si el gas entra en contacto con una cantidad suficiente de agua y surfactantes a una cierta presión capilar, se formará una espuma. Esto provocará una rápida disminución de la movilidad del gas, que puede modelarse disminuyendo la función de permeabilidad relativa del gas con un factor de reducción de la movilidad f_{mr} .

$$k_{rg} = \frac{k_{rg}^0}{f_{mr}} \quad (2.14)$$

donde k_{rg}^0 es la permeabilidad relativa del gas en su estado original f_{mr} esta definida por la siguiente expresión,

$$f_{mr} = 1 + R \cdot F_w \cdot F_o \cdot F_s \quad (2.15)$$

donde R es una constante que tiene en cuenta la máxima resistencia del flujo a la espuma, F_w , F_o y F_s son funciones que describen la sensibilidad de la espuma al agua, aceite y concentración del surfactante, su comportamiento se describe en la Figura (2.9).

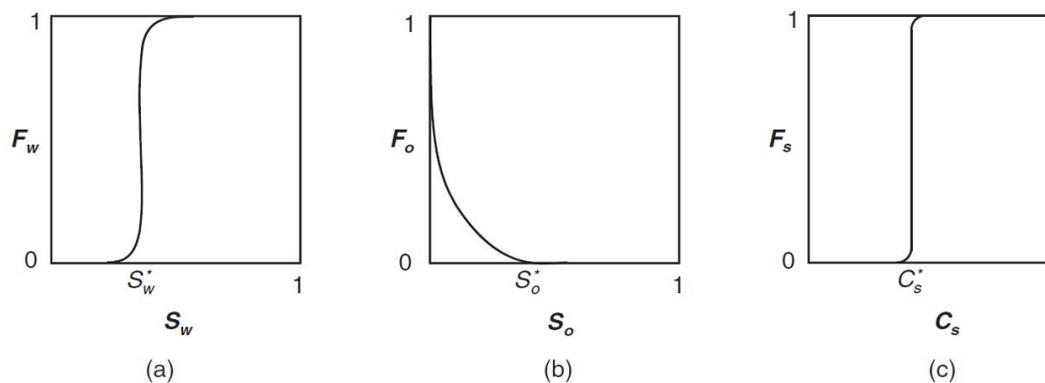


Figura 2.9: *Sensibilidad de la espuma para (a) agua, (b) aceite y (c) surfactante Nardar Zanganeh et al. (2013)*

Modelo de equilibrio local.

La segunda clase de modelos se basa en el hecho de que la espuma siempre está en un equilibrio local: o bien hay espuma o no hay espuma presente en un determinado punto del espacio y tiempo. Cuando hay espuma, la movilidad del gas se reduce en gran medida, ya que la espuma captura el gas en una burbuja. La movilidad del agua, por el contrario, no se ve influenciada por la espuma de estos modelos, por lo tanto, la relación de movilidad entre el gas y agua se reduce, dando lugar a un frente de gas (o espuma) más suave. La cuestión sigue siendo cuándo podemos esperar la generación o coalescencia

de la espuma y qué parámetros rigen este proceso. Los modelos de esta clase se basan en una ley de conservación, como la que se muestra en la Ecuación (2.16) conservando las fases presentes (generalmente gas, agua y aceite) esperando que el surfactante se mezcle en una de las dos fases anteriores. Para la formación de espuma, necesitamos al menos gas, agua y surfactante en cantidades suficientes, además se supone que si la cantidad de aceite presente en el medio poroso es alta, la espuma se romperá.

$$\frac{\partial}{\partial t} [\phi (S_{gf}n_f + S_{gt}n_t)] + \nabla \cdot (u_g n_t) = \phi S_g (R_g - R_c) + q_b \quad (2.16)$$

donde η_f es la textura de la espuma en el flujo de gas, n_t es la textura de la espuma en el flujo de gas atrapado, R_g es el índice de generación de la espuma, R_c es el índice de coalescencia de la misma, q_b es un término fuente, S_g es la saturación del gas, S_{gf} es la saturación del gas fluyendo y S_{gt} es la saturación del gas atrapado.

Cheng et al. (2000) define el modelo de la espuma de equilibrio local como una aproximación al aumento de la movilidad mediante una función continua, dada por las Ecuaciones (2.14) y (2.15),

$$F_w = \frac{1}{2} + \frac{\arctan[\kappa(S_w - S_w^*)]}{\pi} \quad (2.17)$$

donde S_w es la saturación del agua, S_w^* representa la saturación crítica de agua y κ es un parámetro positivo que controla el espesor de la frontera gas-aceite.

Combinación de ambos.

Ashoori (2012) encontró que los métodos de equilibrio local a menudo funcionan tan bien como los modelos de balance poblacional, excepto en las regiones cercanas al pozo de inyección y en el frente de choque.

Para utilizar las ventajas de ambos modelos al mismo tiempo se aplicó un modelo de equilibrio local en las regiones homogéneas, mientras se cambia a un modelo de equilibrio poblacional en las regiones críticas (cercasas al pozo), donde predominan los efectos de equilibrio no local. Cabe mencionar que ésta estrategia cuesta mas tiempo de implementación pero puede resultar en una mejor precisión y menos tiempo de cálculo.

En resumen, los factores mas importantes que intervienen en el movimiento y el entrapamiento de las espumas son: el gradiente de presión, velocidad del gas, geometría y tamaño de poro, tamaño de la burbuja y longitud de la burbuja.

2.2.3. Teoría de flujo fraccional en espumas

El análisis de flujo fraccional, junto con la simulación, ha demostrado ser útil para comprender los desplazamientos de espuma, por ejemplo, los métodos de flujo fraccional demostraron ser precisos y proporcionan información clave sobre un experimento de campo de espuma.

La teoría de flujo fraccional describe la física de los desplazamientos miscibles e inmiscibles en medios porosos, en los que la ecuación diferencial parcial hiperbólica gobernante se resuelven analíticamente por medio de una técnica matemática llamada método de las características. El método de las características (MOC, por sus siglas en inglés) aplicado a procesos de inyección con flujo de dos fases da lugar a la teoría de flujo fraccional. El método de las características es un método para resolver ecuaciones diferenciales parciales a lo largo del cual se puede integrar la solución, también expresa e ilustra el comportamiento fundamental de tales flujos.

La teoría del flujo fraccional fue aplicada por primera vez a los desplazamientos de espuma por Zhou et al. (1995). Desde entonces, una serie de investigaciones han desarrollado aún más la teoría de flujo fraccional para tener en cuenta las diferentes aplicaciones en la espuma como método de recuperación mejorada.

Las suposiciones del método de flujo fraccional incluyen fases incompresibles; desplazamiento $1D$; movilidad newtoniana; dispersión de gas, gradientes de presión capilar, digitación viscosa y el alcance inmediato del estado estacionario.

Este estudio tiene como objetivo construir curvas de flujo fraccional de espuma incorporando descripciones completamente mecánica de la física de la espuma en medios porosos. La relación no lineal entre el gasto de inyección y el gradiente de presión, que resulta de la combinación de la tasa de generación y coalescencia de las lamelas, se ha explicado en su totalidad y los resultados se comparan con la naturaleza catastrófica de la reología de la espuma en los medios porosos. Específicamente siguiendo los siguientes objetivos:

1. Incorporar $|\Delta P|$ inducido al mecanismo de generación de lamelas en el contexto de la teoría de flujo fraccional y observar cómo los tres diferentes estados de la espuma (débil, intermedio y fuerte) están definidos por la relación f_w vs S_w en un amplio rango de gastos de inyección.
2. Visualizar las curvas de flujo fraccional de espuma dependiendo de la velocidad, en un dominio 3D para capturar cómo se ven afectados los resultados por la cinemática

no lineal del mecanismo de creación y destrucción de lamelas.

3. Resolver las nuevas curvas de flujo fraccional utilizando el método de las características y compararlos con estudios de simulación en la literatura para comprender la importancia de la teoría de la catástrofe.

Tanto la viscosidad del gas como la función de permeabilidad relativa del gas pueden verse afectadas significativamente por la presencia de espuma, mientras que la función de permeabilidad relativa del líquido no se ve afectada por la espuma; Bernard et al. (1964), Sanchez and Schechter (1989) y Friedmann et al. (1991). Para la descripción mecánica de la creación de lamelas *in-situ*, seguimos la expresión de Kam and Rossen (2003) en una versión modificada Kam et al. (2007), teniendo en cuenta el gradiente de presión (ΔP) y la saturación del agua (S_w), como se muestra en la ecuación 2.12.

2.2.4. Flujo de espumas en tubos capilares.

Hirasaki et al. (1985), midieron experimentalmente la viscosidad aparente de la espuma que fluye a través de capilares lisos debido al bache de líquido en tubos capilares y desarrollaron el siguiente modelo matemático.

$$\mu_{ap}^{liq} = \mu \cdot (L_s * n_L) \quad (2.18)$$

donde: μ es la viscosidad del líquido, L_s es la longitud del bache de líquido y n_L es el número de lamelas por unidad de longitud definido como:

$$n_L = \frac{3 \Gamma \pi R^2}{2 r_B^2} \quad (2.19)$$

donde: Γ es la fracción del volumen de gas atrapado dentro de la burbuja, R es el radio capilar y r_B es el radio equivalente de la burbuja.

Hirasaki et al. (1985) desarrollaron una expresión matemática a través de una burbuja de gas que está en función del tamaño del bache del líquido como se muestra en la Figura (2.10)

$$\Delta p_{din} = 2,26 \left(\frac{\sigma}{r_c} \right) \left(3\mu \frac{U}{\sigma} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{r_c}{R} \right)^2 + 1 \right] \quad (2.20)$$

donde U es la velocidad de la burbuja, σ es la tensión superficial, r_c es el radio de curvatura de la interfase gas-líquido, R es el radio capilar y μ es la viscosidad del fluido.

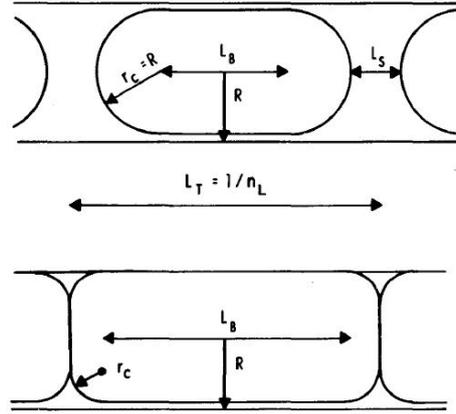


Figura 2.10: Configuración de burbujas cuando están separadas y cuando se están tocando. Hirasaki et al. (1985)

Para determinar la viscosidad aparente se basaron en el gradiente de tensión superficial y desarrollaron el siguiente modelo matemático:

$$\mu_{ap}^{liq} = (\mu \cdot R \cdot n_L) \frac{(3\mu U)^{-\frac{1}{3}}}{\sigma} \sqrt{n_s} \cdot \frac{(1 - e^{-n_L})}{(1 + e^{-n_L})} \quad (2.21)$$

donde: n_L es la longitud adimensional de la porción de la lamela (movilidad de la interfase), n_s es un número adimensional por el efecto del gradiente de la tensión superficial, U la velocidad del gas, R es el radio capilar, μ es la viscosidad de la espuma y σ es la tensión superficial.

La relación entre los dos números adimensionales es:

$$n_L = \frac{-2L_B}{P_C \left(\frac{(3\mu U)^{-\frac{1}{3}}}{\sigma} \right) \cdot r_c \sqrt{n_s}} \quad (2.22)$$

donde P_C es un coeficiente de la presión, L_B es la longitud de la lamela perteneciente a la burbuja.

Cuando n_L es grande, μ_{ap}^{liq} es independiente del valor exacto de n_L por lo que el valor de n_s se puede estimar. Para el valor del coeficiente P_C puede estimarse cuando n_L es pequeño, Matias (2011).

Con base a lo anterior se puede concluir que:

1. La textura de la espuma es un parámetro clave para determinar si la espuma existe como una espuma “a granel” o como una cadena de burbujas separadas por lamelas individuales.
2. La viscosidad aparente es la suma de tres factores: la resultante de los deslizamientos de líquido entre burbujas, la resistencia a la deformación de la interfase cuando una

burbuja pasa a través de un capilar, y el gradiente de tensión superficial que resulta cuando el material activo superficial es barrido desde el frente de la burbuja y se acumula en la parte posterior de la misma.

3. La calidad se relaciona a la viscosidad aparente al afectar el radio de curvatura de la interfaz gas/líquido, el número de lamelas por unidad de longitud y la porción de película delgada de las lamelas.
4. La dependencia de la viscosidad aparente de la velocidad es proporcional a la velocidad a la potencia $-\frac{1}{3}$ cuando la longitud de la porción delgada de la burbuja es despreciable o muy grande, y se aproxima a la potencia $-\frac{2}{3}$ de la velocidad si la longitud adimensional de la lamela, n_L , es suficientemente pequeña comparada con el diámetro capilar.

2.2.5. Flujo de espumas en un medio homogéneo.

La generación de espuma es un cambio brusco de estado de alta movilidad de gas a baja movilidad de gas, o una transición de “sin espuma” a “espuma débil” o “espuma fuerte”. La espuma débil puede ser considerada como una espuma de alta movilidad de gas debido a la inestabilidad de las lamelas o a la rápida destrucción de las mismas.

Algunos estudios experimentales observan que existe una velocidad mínima v^{min} o gradiente de presión mínimo ∇P para la generación de espuma en medios porosos homogéneos Ransohoff and Radke (1988).

Rossen and Gauglitz (1990) argumentaron que la generación de espuma es causada por la movilización de una pequeña población de lamelas presentes inicialmente en flujo constante. El gradiente de presión mínimo requerido para iniciar la movilización depende de la población inicial de lamelas en el medio poroso, que depende de la presión capilar e indirectamente del flujo fraccional del líquido. En su modelo, el gradiente de presión mínimo es inversamente proporcional a la permeabilidad.

La existencia de un gradiente de presión mínimo sustancial para la generación de espuma en medios porosos homogéneos podría limitar las aplicaciones de espuma en la recuperación mejorada debido a la textura de la espuma y a las fuerzas capilares que existen en el yacimiento, esta última gobierna el índice de generación o coalescencia de una espuma. Friedmann et al. (1991) reportaron que la generación de espuma depende del gasto de inyección y de la calidad de la espuma (fracción de volumen de gas contenido). Baghdikian and Handy (1991) observaron un lento aumento en el gradiente de presión

mientras inyectaban líquido y gas a velocidades bajas y constantes hasta que, después de muchas horas o incluso días, se produjo un salto repentino en el gradiente de presión: es decir, la “generación de espuma”. Llamaron al retraso el “efecto de incubación”. El “efecto de incubación” ilustra una cierta ambigüedad al especificar una velocidad mínima del gas o un gradiente de presión para la generación de espuma. Ransohoff and Radke (1988) reportaron una velocidad mínima de gas para la generación de espuma durante el drenaje en paquetes de microesferas inicialmente saturados al 100 % con solución surfactante. Tanzil (2001) concluyó que existe un número capilar crítico para la generación de espuma en sus experimentos de inyección de gas solamente, indicando indirectamente que existe una velocidad mínima de gas para la generación de espuma en medios porosos homogéneos. Gauglitz et al. (2002) observaron un estado inestable de la espuma entre los estados estables de espuma “fuerte” y “gruesa” en sus experimentos de gradiente de presión fija y demostraron que el gradiente de presión mínimo para la generación de espuma es inversamente proporcional a la permeabilidad en en la grava y arenisca.

2.2.6. Flujo de espumas en un medio heterogéneo.

Existen estudios donde se ha investigado la aparición de rupturas en el flujo a través de un límite de baja permeabilidad a alta permeabilidad. Ransohoff and Radke (1988) encontraron que el *snap-off* se observó a todas las velocidades probadas en el límite de las regiones de baja permeabilidad a alta permeabilidad de un paquete de lamelas sometido a drenaje. Falls et al. (1989) observaron que la generación de espuma aumentaba con la permeabilidad, aunque informaron que la generación de espuma se producía sólo cuando el flujo fraccionado de gas inyectado estaba por debajo del 80 %. Rossen et al. (1999) empleó un modelo de red de poros para estudiar el *snap-off* en un fuerte aumento de la permeabilidad. El *snap-off* requiere un contraste de permeabilidad entre los medios de alta y baja permeabilidad de al menos un factor de cuatro, con contrastes de permeabilidad más altos requeridos a un flujo fraccional de gas más alto. Esto es un primer indicio de que las heterogeneidades puedan dar origen a una generación de espuma más eficiente.

Flujo paralelo a la estratificación.

Como se discutió anteriormente, la espuma generalmente se fusiona a menor S_w^* en un medio más permeable. En otras palabras, la espuma en los medios más permeables alcanzaría una mayor saturación de gas antes de que se fusione. De hecho, una serie de estudios experimentales con espuma pre-generada mostraron que la fuerza de la espuma (su viscosidad aparente) aumenta con el aumento de la permeabilidad. Por ejemplo, Chowdiah et al. (1998) encontraron que la viscosidad efectiva de la espuma aumentaba con la permeabilidad. Este comportamiento se conoce como “reducción selectiva de la movilidad”

con una mayor movilidad de la espuma reductora en los medios más permeables.

Flujo perpendicular a la estratificación

Los efectos de la capilaridad son importantes para cualquier tipo de flujo multifásico en medios porosos heterogéneos o estratificados, especialmente cuando los flujos son pequeños, la permeabilidad varía en distancias cortas y el medio de contraste de la permeabilidad es grande. Tales condiciones existen en muchos yacimientos y acuíferos con variaciones ocasionales o periódicas en el proceso de sedimentación. La capilaridad provoca el atrapamiento de la fase no húmeda en regiones de alta permeabilidad aguas arriba de las capas de baja permeabilidad Chaouche et al. (1993), Huang and Jin (1995). Van Lingen et al. (1997) propone que este atrapamiento capilar puede afectar significativamente la recuperación de aceite incluso en la escala del yacimiento, además el atrapamiento capilar impide el flujo cruzado de fase no húmeda. Van Duijn et al. (1995) mostraron que cuando un frente de desplazamiento de aceite/agua llega a una disminución repentina de la permeabilidad, el frente se detendrá, esperando a que se genere la saturación de aceite antes de que entre en la región de baja permeabilidad. El mismo efecto de entrada crea resistencia al flujo de gas perpendicular a la estratificación.

Chaouche et al. (1993) estudiaron cómo la capilaridad afecta el flujo transversal perpendicular a la permeabilidad aguda en varios experimentos de empacamiento de arena y simulaciones de redes de poros. En las regiones de baja permeabilidad aguas arriba, la saturación de fase no húmeda disminuye continuamente cerca del aumento repentino de la permeabilidad. Esto implica que la presión capilar está disminuyendo a medida que el fluido fluye a través de dicho límite.

2.2.7. Modelado del transporte de espumas en medio poroso.

Modelo semi-empírico

Los modelos empíricos o semi-empíricos no intentan representar la relación entre la textura de la espuma y la movilidad del gas; en cambio, la movilidad del gas en estado estacionario se expresa en función de la concentración del surfactante, los gastos, la saturación del agua y posiblemente otros parámetros, Patzek et al. (1989), Fisher et al. (1990), Parlar et al. (1995).

Estos modelos proporcionan una representación realista y adecuada del comportamiento de la espuma en un medio poroso. Las espumas están adquiriendo cada vez más importancia en la industria petrolera en una serie de funciones, en particular para el control de la movilidad y/o los agentes de bloqueo en las operaciones de recuperación

mejorada de aceite. Se ha demostrado en el pasado, que usar una espuma de la manera adecuada puede mejorar la eficiencia de recuperación de un proceso dado y que las espumas pueden servir como agentes de bloqueo temporal. Aunque se han realizado muchos estudios de laboratorio para comprender la reología de las espumas y la mecánica del flujo de espuma en medios porosos, se han hecho relativamente pocos esfuerzos hacia la simulación matemática de la reología de espuma y flujo en un medio poroso.

Algunos investigadores han abordado el problema, pero a menudo no había datos experimentales disponibles para validar los resultados de la simulación numérica. Además, no se observó ningún efecto de permeabilidad absoluta, presencia de aceite o concentración óptima de surfactantes. La evidencia experimental ha demostrado que el aceite actúa como antiespumante para la mayoría de los surfactantes.

Basados en estudios experimentales, se han reconocido cinco mecanismos principales de flujo de espuma. Estos son:

1. Una gran parte del gas queda atrapada en el medio y una pequeña fracción fluye como gas libre, siguiendo la ley de Darcy.
2. La estructura de la espuma se mueve como un cuerpo; la tasa de flujo de gas es proporcional a la tasa de flujo de líquido.
3. Flujo de gas como fase discontinua depende de las condiciones de ruptura y generación de lamelas.
4. La espuma fluye como una combinación de líquido y gas en un cuerpo de espuma y el flujo de líquido en un medio poroso sigue canales fijos, estén o no presentes espumas: estos canales dependen únicamente de la saturación del líquido.
5. La espuma que fluye en un medio poroso cambia constantemente de calidad y, en algunas regiones, puede tener cuatro fases diferentes.

Algunos mecanismos empíricos y semi-empíricos Se basan en la información obtenida mediante experimentación o datos de campo, por ejemplo:

Marfoe et al. (1987)

$$\mu_f = \mu_g [1 + 0,01 C_g (S_w - S_{wr})] f \cdot u_g \quad (2.23)$$

donde μ_f es la viscosidad de la espuma, μ_g es la viscosidad del gas, C_g es la compresibilidad del gas, S_w es la saturación de agua, u_g es la velocidad del gas y S_{wr} es la saturación de agua irreductible.

Islam et al. (1988)

$$\mu_f = \frac{\mu_g[1 + Df_c C_s (S_w - S_{wr}) f_k(k) f_p(u_g)]}{1 + E S_e^2} \quad (2.24)$$

donde μ_g es la viscosidad del gas, D es una constante, f_c , f_k , f_p son funciones permiten una gran variación de la viscosidad de la espuma, u_g es la velocidad del gas, S_w es la saturación del agua, S_{wr} es la saturación de agua irreductible y E es una variable empírica del modelo.

Mohammadi et al. (1995)

$$k_{rf} = k_{rf} * MRF \quad (2.25)$$

donde:

$$MRF = \left[1 + \frac{\Delta P_{nf}}{\Delta P_f} \left(\frac{C_s}{C_s^{max}} \right)^{e_s} \right]^{-1} \quad (2.26)$$

donde C_s es la concentración de surfactante, C_s^{max} es la máxima concentración de surfactante, MRF es el factor de reducción de la movilidad a una velocidad de referencia, ΔP_f diferencia de presión de entrada y salida en una inyección de espuma del núcleo de referencia en la condición de referencia, ΔP_{nf} diferencia de presión entre la entrada y la salida en una inyección de referencia sin espuma y k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma.

Rossen et al. (1995)

$$\nabla P = u_w \frac{\mu_w}{k k_w 2} \quad (2.27)$$

$$k_w^* = k_w(S_w) \Big|_{S_w=S_w^*} \quad (2.28)$$

donde u_w es la velocidad del agua, μ_w es la viscosidad del agua, k es la permeabilidad, k_w es la permeabilidad del agua, k_w^* es la permeabilidad crítica del agua y S_w^* es la saturación crítica del agua.

Chen et al. (2005)

$$k_{rf} = k_{rf} \cdot MRF \quad (2.29)$$

$$MRF = \frac{1}{1 + f_{mmob} * F_1 * F_2 * F_3 * F_4 * F_5 * F_6 * F_7} \quad (2.30)$$

$$F_1 = \left(\frac{c_s}{f_{msurf}} \right)^{epsurf} \quad (2.31)$$

$$F_2 = \left[\frac{f_{m_{oil}} - S_o}{f_{m_{oil}} - f_{l_{oil}}} \right]^{epoil} \quad (2.32)$$

$$F_3 = \left(\frac{f_{mcap}}{Ca} \right)^{epcap} \quad (2.33)$$

$$F_4 = \left(\frac{f_{mgcp} - Ca}{f_{mgcp}} \right)^{epgcp} \quad (2.34)$$

$$F_5 = \left(\frac{f_{momf} - Co}{f_{momf}} \right)^{epgcp} \quad (2.35)$$

$$F_6 = \left(\frac{C_{salt} - f_{lsalt}}{f_{momf}} \right)^{epsalt} \quad (2.36)$$

$$F_7 = 0,5 + \frac{\arctan(epdry(S_w - fmdry))}{\pi} \quad (2.37)$$

donde k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma, MRF es el factor de reducción de movilidad a una velocidad de referencia, c_s es una concentración de surfactante, F_1 , F_2 , F_3 , F_4 , F_5 , F_6 y F_7 son parámetros de ajuste del modelo en función del surfactante, aceite, gas y salinidad.

Modelo mecanísticos

Bravo (2017) propone que los modelos mecanísticos describen el flujo de espumas en un medio poroso, contemplando tanto su comportamiento dinámico, en zonas de entrada de fluidos y en los frentes de desplazamiento, como zonas de equilibrio. Sin embargo, requiere el cálculo de parámetros que se ajusten a cada condición específica lo que vuelve su aplicación compleja en comparación con los modelos de equilibrio local.

Falls et al. (1989)

$$k_{rf} = k_{rg}\chi_f \quad (2.38)$$

donde k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma, k_{rg} es la permeabilidad relativa del gas y χ_f es la fracción de gas fluyente.

$$\mu_f = \mu_s + G\sigma n_L \frac{r}{v_g} \quad (2.39)$$

μ_f es la viscosidad del gas, μ_s es la viscosidad del surfactante, σ es la tensión superficial, n_L es el número de lamelas por unidad de volumen.

$$\frac{\eta_f}{\frac{a}{P_C^m - P_c} + \frac{L_p}{V_g}} \quad (2.40)$$

donde a es un parámetro del modelo relacionado con la presión, P_C es la presión capilar máxima, P_c es la presión capilar, L_p es la longitud característica del medio poroso y V_g es la velocidad intersticial del gas de referencia.

Huh et al. (1989)

$$k_{rf} = \frac{k_{rg}}{1 + bs_g} \quad (2.41)$$

$$k_{rf} = k_{rg}\chi_f \quad (2.42)$$

$$\mu_f = \mu_g K n_f k^{1,5} \left(\frac{u_{ref}}{u} \right)^c \quad (2.43)$$

$$k_1 \left[1 + \left(\frac{n_f}{n} \right)^{c_1} \right]^{-1} \left(\frac{V_g}{V_{gref}} \right)^{c_1} \quad (2.44)$$

$$k_2 n_f = \left(\frac{CS_{ref}}{C_s} \right)^{e_2} \left(\frac{V_g}{V_{gref}} \right)^{c_2} \quad (2.45)$$

donde k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma, k_{rg} es la permeabilidad relativa del gas, b es un parámetro de ajuste, s_g es un coeficiente de dispersión, u_{ref} es una velocidad de referencia del modelo, u es la velocidad de la burbuja, b_f es la apertura de la fractura, V_g es el volumen del gas y η_f es la textura de la espuma.

Kovscek et al. (1995)

$$k_{rf} = k_{rg} + \left(\frac{\chi s_g}{1 - S_{wc}} \right)^g \quad (2.46)$$

$$\mu_f = \mu_g + \frac{an}{v_f^c} \quad (2.47)$$

$$k_1^0 \left[1 + \left(\frac{n_f}{n} \right)^w \right]^{-1} V_w V_f^{\frac{1}{3}} \quad (2.48)$$

$$k_2^0 = V_f \left(\frac{P_c}{P_c^* - P_c} \right)^2 n_f \quad (2.49)$$

donde ΔP es un diferencial de presiones, m es un parámetro del modelo de la velocidad de creación de lamelas, P_c es la presión capilar, V_f es el volumen ocupado por la espuma con respecto a la garganta de poro y n es un parámetro para la viscosidad.

Rossen (2003)

$$\mu_f = \mu_g + \frac{c_f \eta_f}{u_g^{\frac{1}{3}}} \quad (2.50)$$

$$S_w C_g (\nabla P)^m \quad (2.51)$$

$$C_c n_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (2.52)$$

donde μ_f es la viscosidad de la espuma, μ_g es la viscosidad del gas, η_f es la textura de la espuma, S_w es la saturación de agua, S_w^* es la saturación crítica de agua, n es un modelo de la velocidad de coalescencia de lamelas, C_c es un parámetro de la velocidad de coalescencia de lamelas y m es un parámetro de la velocidad de generación de lamelas.

Kam et al. (2007)

$$k_{rf} = k_{rg} + \left(\chi_f \frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^g \quad (2.53)$$

$$\mu_f = \mu_g + \frac{c_f n_f}{u_g^{\frac{1}{3}}} \quad (2.54)$$

$$\frac{C_g}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\nabla P - \nabla P_o}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{-\nabla P_o}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (2.55)$$

$$C_c n_f \left(\frac{S_w}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (2.56)$$

donde k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma, k_{rg} es la permeabilidad relativa del gas, χ_f es la fracción de gas fluyente, S_w es la saturación de agua, S_{wc} es la saturación de agua congénita, S_{gr} es la saturación de gas residual, μ_f es la viscosidad de la espuma, μ_g es la viscosidad del gas, η_f es la textura de la espuma, u_g es la velocidad del gas, C_g es un parámetro del modelo y S_w^* es la saturación crítica del agua.

Zitha and Du (2010)

$$\mu_f = \mu_g + K_1 \mu_g^{n-1} + K_2 \frac{\tau_y}{u_g} \quad (2.57)$$

$$K_g (n_\infty - n) \quad (2.58)$$

$$K_d n \quad (2.59)$$

donde K_1 y K_2 son parámetros que involucran el coeficiente de elasticidad de Gibbs de las lamelas, μ_f es la viscosidad de la espuma, μ_g es la viscosidad del gas, u_g es la velocidad del gas, K_g es un coeficiente de generación de burbujas y K_d es el coeficiente de destrucción de burbujas.

Modelo de percolación y red de poros.

Chou et al. (1990) utilizó un modelo de red basado en la teoría de la percolación para relacionar la generación de espuma con la distribución del tamaño de los poros. En su enfoque, asumió que las lamelas de espuma son estadísticamente estacionarias o se están rompiendo y reestructurando en su lugar. La movilidad del gas depende de la fracción de gargantas bloqueadas por las lamelas, que a su vez depende de las estimaciones del tiempo que tardan las lamelas en romperse y reconstruirse. Rossen and Gauglitz (1990) también usaron la teoría de percolación para derivar una expresión del gradiente de presión mínimo para la generación de espuma. Su teoría señala la importancia de la movilización de la espuma en su creación y predice correctamente cómo la velocidad mínima del gas depende de la fracción de volumen del líquido. Sin embargo, describe las condiciones para iniciar la generación de espuma, pero no cómo evoluciona la espuma

una vez que comienza la generación. Usando modelos de percolación y de red de poros, pueden entender completamente los mecanismos de generación de espuma y aprender los detalles sobre la espuma a nivel de los poros. La desventaja es que los modelos requieren largos tiempos de cálculo, incluso a escala microscópica, y proporcionan resultados en redes de dimensiones muy reducidas.

Teoría de la catástrofe.

La teoría de la catástrofe o la teoría del caos es un proceso estocástico que se basa en el cambio de la calidad de la espuma en un medio poroso, estos cambios están fuertemente influenciados en el comportamiento de la espuma y estan relacionados de manera directa con el espesor de la espuma en función del tiempo.

La mayor aproximación fue de Kam et al. (2007) donde propone un modelo para explicar el cambio abrupto en la creación y destrucción de la espuma.

$$\phi \frac{\partial}{\partial t}(S_g n_f) + \frac{\partial}{\partial x}(n_f u_g) = \phi S_g R \quad (2.60)$$

para todo $S_w < S_w^*$ y $R = 0$

$$R_c = C_c n_f \frac{(S_w)^n}{S_w - S_w^*} \quad (2.61)$$

donde R_c es el cambio de textura por unidad de tiempo, S_w^* es la saturación crítica, S_w saturación de agua. S_g saturación del gas, n_f textura de la espuma, u_g velocidad del gas, ϕ es la porosidad, y C_c y n son parámetros de la velocidad para la coalescencia de lamelas .

Siempre y cuando: $S_w > S_w^*$.

Definición del problema

3.1. Modelo conceptual.

La recuperación mejorada por inyección de gas (CO_2 o gas natural) tiene muchas ventajas desde el punto de vista de comportamiento de fase, puede reducir la tensión superficial, reducir la viscosidad del aceite o incrementar su volumen y bajar su densidad. Sin embargo, es frecuente que durante la inyección de gas se presente una baja eficiencia de barrido, reduciendo la cantidad de aceite contactado y recuperado. Lo anterior, se debe principalmente a su baja viscosidad (y por ende alta movilidad) y a la heterogeneidad del yacimiento. Reducir la movilidad relativa del gas se convierte así en un gran reto para este tipo de procesos, y es aquí donde la espuma puede proporcionar alternativas para el control de movilidad y reducir las canalizaciones de gas.

Cuando la espuma se genera en medios porosos, las vías de flujo del gas se bloquean mediante lamelas, mientras que la fase líquida permanece continua. Las lamelas que bloquean la fase del gas añaden resistencia capilar adicional al flujo del gas, por lo tanto lo hacen menos móvil.

En este trabajo de tesis, se simula numéricamente una inyección de espumas considerando un medio poroso heterogéneo, en donde la permeabilidad y la porosidad son función de la posición con el objetivo de tener una mejor área de barrido y una mejor eficiencia de desplazamiento.

3.1.1. Hipótesis.

Durante un proceso de inyección de espuma, la heterogeneidad tiene efectos positivos en la generación de espuma.

3.1.2. Objetivo.

Simular numéricamente una inyección de espuma en un medio poroso heterogéneo bajo una geometría cilíndrica.

3.1.3. Alcance.

- Plantear un modelo matemático adimensional para describir la inyección de espumas en un medio poroso heterogéneo.
- Plantear numéricamente el modelo matemático adimensional.
- Realizar corridas numéricas para explorar los efectos en el proceso de: el gasto de inyección y las heterogeneidades.

3.1.4. Planteamiento del problema.

Considere un yacimiento de porosidad ϕ y permeabilidad k variables. Su espesor es pequeño comparado con su extensión y en su centro se ubica un pozo inyector. El sistema a estudiar será en coordenadas cilíndricas donde por simetría no hay variaciones en la dirección z y θ .

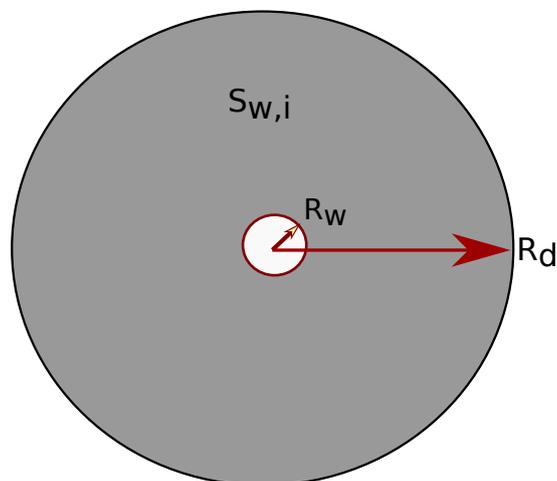


Figura 3.1: *Modelo físico del problema*

En un inicio el yacimiento está saturado con una fase líquida y al tiempo cero inicia un proceso de inyección de espuma, el modelo considera una fase líquida y una gaseosa, en donde el gas y el agua pueden estar libres o en la espuma. Para su solución se utiliza una ecuación tipo Darcy en 2 fases, la ecuación de conservación de masa y una ecuación de balance de lamelas. Para la descripción del comportamiento de la espuma se utiliza un modelo de balance de lamelas que relaciona términos de generación y coalescencia.

3.2. Modelo matemático.

3.2.1. Modelo de balance de lamelas.

Para el planteamiento matemático de este trabajo de tesis se toma en cuenta el modelo usado por Kam and Rossen (2003). En el trabajo anteriormente mencionado se analiza la movilidad de la espuma en un modelo 1D mediante modelos matemáticos que consideran la generación y coalescencia de las lamelas que están en función de la saturación y presión capilar.

Balance de lamelas

El modelo matemático de balance de lamelas (espuma) en medios porosos se propone mediante el teorema de transporte de Reynolds

$$\frac{D\alpha}{Dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha\vec{U}) \quad (3.1)$$

donde α es cualquier propiedad intensiva del medio y \vec{U} es la velocidad del medio. Si se propone a α como el número de lamelas por unidad de volumen en un medio con porosidad ϕ y parcialmente saturado:

$$\alpha = \phi S_g \eta_f \quad (3.2)$$

donde S_g es la saturación del gas y η_f el número de lamelas por unidad de volumen o textura, se obtiene:

$$\frac{D(\phi S_g \eta_f)}{Dt} = \frac{\partial(\phi S_g \eta_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_g \eta_f \vec{U}) \quad (3.3)$$

Los cambios en el número de lamelas se deben balancear con un término que represente la generación o destrucción de ellas por unidad de tiempo en el lugar que ocupa la espuma:

$$\phi S_g R$$

Si se considera a la porosidad independiente del tiempo, se utiliza la velocidad de Darcy $u_g = \phi\vec{U}$ y se define a $R = r_g - r_c$, se obtiene:

$$\frac{\partial(S_g \eta_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (u_g \eta_f) = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (3.4)$$

donde: r_c y r_g son las velocidades de coalescencia y generación de lamelas (espuma) por unidad de tiempo y volumen, respectivamente.

Modelos de generación y coalescencia de lamelas

El balance poblacional y las características geométricas de las lamelas en una espuma dependen completamente de los mecanismos de generación y coalescencia de lamelas. Khatib et al. (1988) demostraron que la espuma sufre un colapso abrupto con la caída de la presión capilar, este punto es llamado presión capilar límite P_c^* o de manera equivalente una S_w^* dada la relación entre ambas. Esto implica que la relación de coalescencia de la espuma tiene una singularidad que tiende al infinito en S_w^* .

En este trabajo se propone que el término de coalescencia sea proporcional a la textura multiplicada por una función singular en S_w^* .

$$r_c = C_c \eta_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (3.5)$$

Donde: n y C_c son parámetros de ajuste del modelo, r_c es la razón de coalescencia de la espuma y η_f es el número de lamela por unidad de volumen.

En cuanto a la generación de espuma, recientes estudios hechos por: Rossen and Gauglitz (1990), Rossen (1996), Gauglitz et al. (2002) y Kam and Rossen (2003) indican que el fenómeno más importante es la movilización de lamelas, la cual se relaciona directamente con el gradiente de presión en la espuma. Proponen que la generación de lamelas depende del gradiente de presión y la saturación de agua:

$$r_g = C_g S_w (\nabla p_g)^m \quad (3.6)$$

Donde m y C_g son parámetros de ajuste del modelo para la coalescencia de la espuma.

La generación de espumas es más fácil a mayor saturación de agua ya que existen más puentes capilares (los que preceden a la formación de lamelas) presentes en los poros y estos pueden ser desplazados por un gradiente de presión pequeño debido a su arreglo en el medio poroso. En un estado estacionario, el índice de generación y coalescencia de lamelas es el mismo.

3.2.2. Transporte del gas/espuma.

En este modelo se considera que la espuma y el gas son una sola fase cuyo comportamiento puede ser el de un gas o una espuma, dependiendo de la textura (como se definió en el Capítulo 2), si ésta es cero, el comportamiento es de un gas, en caso contrario, será el de una espuma. El transporte del gas/espuma esta dado por un modelo para fluidos no Newtonianos (en donde la viscosidad aparente depende de la textura y la velocidad de la

fase) basado en la Ley de Darcy:

$$\vec{u}_g = \frac{kk_{rg}^0(S)}{\mu_g^f(n_f, u_g)} \nabla p_g \quad (3.7)$$

donde: k es la permeabilidad absoluta; k_{rg}^0 es la permeabilidad relativa del gas/espuma y μ_g^f es la viscosidad del gas como función de la viscosidad del gas y la cantidad de lamelas.

3.2.3. Transporte de la fase líquida

Para la fase líquida que no está en forma de espuma se utiliza la Ley de Darcy:

$$\vec{u}_w = \frac{kk_{rw}(S_w)}{\mu_w} \nabla p_w \quad (3.8)$$

donde: u_w es el flujo volumétrico del agua, $k_{rw}(S_w)$ es la permeabilidad relativa de la fase líquida, que no se ve afectada por la espuma y μ_w es la viscosidad del líquido, que tampoco se ve afectada por la espuma.

3.2.4. Ecuación de conservación de masa.

Tanto la fase gaseosa como la líquida se consideran incompresibles como primera aproximación, entonces las ecuaciones que gobiernan dicho comportamiento son:

$$\phi \frac{\partial S_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_g) = 0 \quad (3.9)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}_w) = 0 \quad (3.10)$$

3.2.5. Reología.

La viscosidad de la espuma se calcula mediante un modelo similar al propuesto por Hirasaki et al. (1985) donde la viscosidad aparente resulta proporcional a la textura e inversamente proporcional a una potencia de la velocidad. La viscosidad usada por Kam and Rossen (2003) es la siguiente:

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_f}{u_g^{\frac{1}{3}}} \quad (3.11)$$

donde μ_g^0 es la viscosidad del gas en ausencia de espuma, C_f es un parámetro de ajuste que varía según las propiedades fisicoquímicas y geométricas de la espuma y la roca. El parámetro C_f varía ampliamente entre los estudios teóricos y los experimentales en tubos capilares y empacamientos de roca no consolidada. En el modelo de Kam se describe un

flujo unidireccional por lo que no existen puntos de estancamiento o velocidad cero. Sin embargo, la Ecuación (3.11) es singular en dichos puntos. De tal forma que para evitar dicho problema en este trabajo se propone:

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_f}{u_g \frac{1}{3} + \zeta} \quad (3.12)$$

donde ζ es un parámetro de ajuste para modelar la viscosidad de la espuma con textura n_f bajo condiciones de muy baja velocidad $\mu_g \rightarrow 0$

3.2.6. Permeabilidad relativa.

Kam and Rossen (2003) las permeabilidades relativas del gas y del agua con base en el modelo definido por Corey & Brooks está ajustado a través de una curva de datos obtenidos de empacamientos de arenas:

$$k_{rg} = \left(\frac{1 - S_w - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_{rg}} \quad (3.13)$$

$$k_{rw} = 0,7888 \left(\frac{S_{wc} - S_{gr}}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{n_{rw}} \quad (3.14)$$

es muy probable que k_{rg} sea función de la textura, k_{rw} es la permeabilidad relativa del agua, n_f y la velocidad del gas u_g . En este trabajo se considera independiente como primera aproximación.

3.2.7. Presión capilar

Para modelar la presión capilar se utiliza el modelo:

$$P_c = \sigma \sqrt{(\phi/k)} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-n_{pc}} \quad (3.15)$$

el cual puede ser modificado fácilmente, como se verá más adelante.

3.2.8. Textura

Considerando un balance para la textura η_f dentro de un medio poroso parcialmente saturado a través del transporte de Reynolds y tomando en cuenta la simetría que se menciona anteriormente, tenemos que:

$$\phi \frac{\partial S_g n_f}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r n_f u_{gx})}{\partial r} = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (3.16)$$

esta ecuación considera que la espuma sólo se genera o coalesce en el espacio que satura ϕS_g .

3.2.9. Heterogeneidad.

El modelo de heterogeneidad considera que la porosidad obedece a una función de distribución tipo log-normal, esto como se reporta en diversos trabajos de petrofísica. Los valores se generan a partir de la siguiente ecuación:

$$\phi = |a_e \sigma_\phi + \bar{\phi}| \quad (3.17)$$

donde ϕ es la porosidad, $\bar{\phi}$ es la porosidad promedio, σ_ϕ es la desviación estándar de la distribución y a_e está definida por el algoritmo de Box-Müller para una distribución normal. Dicho método utiliza un par de números aleatorios independientes generados a partir de una fuente de números aleatorios uniformemente distribuidos $(0, 1]$ para definir u_1 y u_2 de tal forma que:

$$a_e = \sqrt{-2 \log(u_1)} \cos(2\pi u_2) \quad (3.18)$$

Para evitar inestabilidades numéricas, la porosidad se suavizó usando la técnica del promedio móvil para una vecindad $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ del punto x :

$$\overline{\phi(x)} = \frac{1}{2\epsilon} \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \phi(x) dx \quad (3.19)$$

Cuando se usa el método de promedios móviles se está suponiendo que todas las observaciones de la serie de datos son igualmente importantes para la estimación del parámetro a pronosticar. De esta manera, se utiliza como pronóstico para el siguiente periodo el promedio de los n valores de los datos más recientes de la serie.

3.2.10. Permeabilidad.

La permeabilidad se estima a partir de la porosidad y hereda su heterogeneidad. Se calcula mediante la siguiente expresión propuesta por Johnson et al. (1959):

$$k = \frac{\phi^{n+1} (1 - \bar{\phi})^n}{(1 - \phi)^n} \quad (3.20)$$

donde k es la permeabilidad, ϕ es la porosidad, $\bar{\phi}$ es la porosidad promedio y n es

3.2.11. Modelo en coordenadas cilíndricas 1D

Considerando que existe simetría angular (en θ) y a lo largo del eje z en un sistema de coordenadas cilíndricas se tiene:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial f'_w}{\partial r} = 0 \quad (3.21)$$

donde u_t es la velocidad total $u_t = u_g + u_w$ y el flujo fraccional se define como:

$$f'_w = \frac{1 - \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \left(r \frac{\partial P_c}{\partial r} + P_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (3.22)$$

combinando estas ecuaciones se tiene:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h} \frac{1}{r} \frac{\partial f'_w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_g \lambda_w \frac{\partial (r P_c)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.23)$$

Para la generación y coalescencia de lamelas se tiene el siguiente modelo propuesto por Kam and Rossen (2003)

$$R_g = S_w \left(\frac{\partial p_w}{\partial r} \right)^m \quad (3.24)$$

$$R_c = \eta_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (3.25)$$

Para la viscosidad de la espuma se tiene que:

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f \eta_{fmax}}{\left(\frac{q_t}{2\pi h R_w} \right)^{\frac{1}{3}}} \frac{n_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (3.26)$$

La movilidad se define para ambas fases (líquido y gas).

Movilidad del agua

$$\lambda_w = \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \quad (3.27)$$

Movilidad del gas

$$\lambda_g = \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \quad (3.28)$$

3.2.12. Condiciones iniciales y de frontera

3.2.13. Condiciones iniciales

Al inicio el medio poroso está saturado con el líquido y puede haber espuma presente:

$$\begin{aligned} S_w(t=0) &= 1 \\ \eta_f(t=0) &= \eta_{ini} \end{aligned}$$

3.2.14. Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} P_w(r=r_w) &= P_{winy} \\ f_w(r=r_w) &= f_{winy} \\ \eta_f(r=r_w) &= \eta_{finy} \\ P_w(r=R) &= P_{wout} \end{aligned}$$

3.3. Modelo matemático adimensional.

3.3.1. Transformaciones adimensionales.

Considerando el sistema de ecuaciones:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h} \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(f_g \lambda_w \frac{\partial (r P_c)}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.29)$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_f) + \frac{\partial (n_f u_{gx})}{\partial r} + \frac{n_f u_{gx}}{r} = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (3.30)$$

Para el modelo matemático se usaron diferentes grupos de transformaciones adimensionales²

$$p = \frac{P}{\Delta P_{cc}} \quad (3.31)$$

donde p es la presión, P_c es la presión capilar adimensional, ΔP_{cc} es un diferencial de presión característico entre la presión de inyección y la presión del yacimiento.

$$\sigma = \frac{t}{t_c} \quad (3.32)$$

donde σ es el tiempo adimensional entre el tiempo t y t_c que representa el tiempo de llenado del sistema.

$$r_w = \frac{r}{R_d} \quad (3.33)$$

²El desarrollo se encuentra en el Apéndice C

donde R_d es el radio total del yacimiento adimensional, r es el radio de pozo y r es la distancia adimensional recorrida por la fase gaseosa (espuma).

$$\eta_f = \frac{\eta_f}{\eta_{f_{max}}} \quad (3.34)$$

donde η_f es la textura de la espuma y $\eta_{f_{max}}$ es la textura máxima en la garganta de poro en unidad de volumen.

$$U_g = \frac{u_{gx}}{u_c} \quad (3.35)$$

U_g es la velocidad del gas, u_{gx} es la velocidad del gas para un modelo cartesiano y u_c es la velocidad característica.

$$R_c = \frac{r_c}{r_{cc}} \quad (3.36)$$

donde R_c es el índice de destrucción de las lamelas, r_{cc} es el índice característico de coalescencia de lamelas y r_c es el radio de curvatura de la interfase gas-líquido.

$$R_g = \frac{r_g}{r_{gc}} \quad (3.37)$$

donde R_g es el índice de creación de las lamelas, r_{gc} es el índice característico de generación de lamelas

$$\lambda_{wa} = \frac{\lambda_w}{\lambda_c} \quad (3.38)$$

donde λ_{wa} es la movilidad característica adimensional, λ_w es la movilidad del agua y λ_c es la movilidad característica del sistema.

Grupos adimensionales.

Adicionalmente se definieron los siguientes grupos adimensionales:

$$\mathbf{Ca} = \frac{q_t}{2\pi h \lambda_c \sigma \left(\frac{\phi}{k}\right)^{0,5}} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{Da} = \frac{2\phi\pi h R_d^2 C_c n_{f_{max}}}{q_t n_{f_{max}}} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{Ga} = \frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{\mu_c q_t}{2\pi h k R_w} \right)^m \quad (3.41)$$

$$\mathbf{Br} = \frac{\mu_g^0}{\mu_c} \quad (3.42)$$

donde \mathbf{Ga} es un parámetro del modelo que compara el término de generación de la espuma contra el de coalescencia de la misma, \mathbf{Br} que es la relación entre la viscosidad del gas y la viscosidad característica (definida como la viscosidad máxima que puede

alcanzar la espuma), \mathbf{Ca} es un número capilar que representa la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas capilares y \mathbf{Da} es un parámetro del modelo que representa el tiempo característico de llenado contra los tiempos característicos de coalescencia.

3.3.2. Presión capilar.

Para modelar la presión capilar adimensional, se utilizó el modelo propuesto en la ecuación (3.15), se usaron las transformaciones adimensionales para:

$$p_c = r_w \mathbf{Ca}^{-1} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-n_{pc}} \quad (3.43)$$

3.3.3. Textura.

La ecuación adimensional para la textura de la espuma queda como:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g \eta_f) + \frac{1}{rr_w} \frac{\partial (rn_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (3.44)$$

3.3.4. Generación y coalescencia de lamelas.

Generación de lamelas.

Para la generación de lamelas se tiene la ecuación adimensional:

$$R_g = S_w \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^m \quad (3.45)$$

Coalescencia de lamelas.

Para la coalescencia de lamelas se tiene la ecuación adimensional:

$$R_c = \eta_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (3.46)$$

3.3.5. Viscosidad

Para el modelo adimensional de la viscosidad del gas se tiene:

$$v_g^f = \mathbf{Br} + \frac{n_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (3.47)$$

3.3.6. Movilidad

Movilidad del agua

La movilidad adimensional del agua queda como:

$$\lambda_{wa} = \frac{k_{rw}}{\mu_{wa}} \quad (3.48)$$

Movilidad para el gas

La movilidad adimensional para el gas está definida por:

$$\lambda_{ga} = \frac{k_{rg}}{\mu_{ga}} \quad (3.49)$$

3.3.7. Modelo matemático adimensional

El modelo matemático adimensional está definido por el conjunto de ecuaciones (3.1) - (3.20). Las siguientes ecuaciones se requieren como complemento para la solución del modelo:³

$$p_c = r_w \mathbf{Ca}^{-1} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (3.50)$$

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{1}{r} \lambda_{wa} f_g \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right) \quad (3.51)$$

$$- \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\lambda_c}{\lambda_{wa}} U_w \quad (3.52)$$

$$U_g = \frac{r_w}{r} - U_w \quad (3.53)$$

donde r_w es el radio del pozo, U_w es la velocidad del agua, U_g es la velocidad del gas, λ_{wa} es la movilidad del agua, λ_c es la movilidad característica, S_w^* es la saturación crítica del agua, S_w es la saturación inicial de agua, S_{wc} es la saturación característica del agua, S_{gr} es la saturación de gas residual, f_g es el flujo fraccional del gas, f_w es el flujo fraccional del agua, p_c es la presión característica del sistema, m es un parámetro del modelo de la velocidad de generación de lamelas, n es un parámetro del modelo de la velocidad de coalescencia de lamelas y \mathbf{Ca} es un número capilar antes definido.

³El desarrollo matemático se describe en el apéndice D

3.3.8. Condiciones iniciales.

Para la saturación.

Se supone una saturación inicial constante:

$$S_w(t = 0) = S_{w,ini} \quad (3.54)$$

Para la textura.

Se supone una textura inicial constante:

$$\eta_f(t = 0) = \eta_{f,ini} \quad (3.55)$$

3.3.9. Condiciones de frontera.

Para la saturación.

$$S_w(r = r_w) = S_{w,iny} \quad (3.56)$$

$$\left. \frac{\partial S_w}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.57)$$

Para la textura.

$$\eta_f(r = r_w) = \eta_{f,iny} \quad (3.58)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_f}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.59)$$

Solución numérica

4.1. Modelo numérico.

En el capítulo anterior se habló sobre el teorema de transporte de Reynolds considerando un balance de lamelas en coordenadas cilíndricas con simetría en z y θ teniendo así:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{1}{rr_w} \frac{\partial(r n_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (4.1)$$

donde S_g es la saturación del gas, n_f es la textura de la espuma, σ representa los tiempos de llenado del sistema, R_g es el término adimensional para la generación de espuma, R_c es el término adimensional para la coalescencia de la espuma, \mathbf{Da} es un parámetro del modelo, representa el tiempo característico de llenado contra los tiempos característicos de coalescencia y \mathbf{Ga} es un parámetro del modelo, compara el término de generación de la espuma contra el de coalescencia.

Para la ecuación de saturación se utilizó una ecuación de Darcy para fluidos no Newtonianos y la ecuación flujo fraccional en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{rr_w} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - f_w) \lambda_{wa} \frac{\partial(r p_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (4.2)$$

donde S_w es la saturación del agua, f_w el flujo fraccional del agua, λ_{wa} es la movilidad del agua, p_c es la presión capilar, éstas dos últimas son variables adimensionales definidas anteriormente en el Capítulo (3).

4.1.1. Diferencias finitas.

Para la solución por medio de diferencias finitas de las ecuaciones de saturación y textura de la espuma, se usó un esquema de diferencias finitas centrales en espacio, para hacer mas estable el código numérico.

Textura.

De la ecuación (4.3)

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{1}{rr_w} \frac{\partial(r \eta_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (4.3)$$

se realiza el proceso de discretización, se tiene:

$$\begin{aligned} \eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta \sigma (1-\gamma) U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\ &+ \frac{\Delta \sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta \sigma (1-\gamma) U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\ &+ \frac{\gamma \Delta \sigma \mathbf{Da} S_{g,i}^k (\mathbf{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k)}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta \sigma (1-\gamma) U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\ &+ \frac{\Delta \sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta \sigma (1-\gamma) U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\ &+ \frac{(1-\gamma) \Delta \sigma \mathbf{Da} S_{g,i}^{k+1} (\mathbf{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta \sigma (1-\gamma) U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Saturación.

Partiendo de la ecuación de saturación (4.5):

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{rr_w} \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - f_w) \lambda_{wa} \frac{\partial(r p_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (4.5)$$

realizando el proceso de discretización

$$\begin{aligned} S_{w,i}^{k+1} &= S_{w,i}^k + \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_i} \frac{f_{w,J}^k - f_{w,i}^k}{\Delta r} \\ &+ \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} f_{g,1}^k \lambda_{wa,1}^k [r_2^k p_{c,2}^k - r_1^k p_{c,1}^k] \\ &+ \frac{(1-\gamma) \Delta \sigma}{r_1} + \frac{f_{w,J}^{k+1} - f_{w,1}^{k+1}}{\Delta r} \\ &+ \frac{(1-\gamma) \Delta \sigma}{r_w r_1} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ f_{g,1}^{k+1} \lambda_{wa,1}^{k+1} [(r_2^{k+1} p_{c,2}^{k+1}) - (r_1^{k+1} p_{c,1}^{k+1})] \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Velocidad del gas.

Para el cálculo de la U_g se tiene que:

$$u_t = u_w + u_g \quad (4.7)$$

considerando que $u_c = \frac{qt}{2\pi h R_w}$ y desarrollando con la ecuación de Darcy, tenemos que:

$$\frac{r_w}{r} = U_w + U_g \quad (4.8)$$

Formación de la espuma.

Partiendo de la ecuación (3.45) para la formación de lamelas

$$R_g = S_w \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r} \right)^m \quad (4.9)$$

Presión.

$$P_{i+1} = P_i - \Delta r \frac{U_{w,i}}{\lambda_{wa,i}} \quad (4.10)$$

Condiciones de frontera.

Para las condiciones de frontera se utilizaron las condiciones de frontera en el primer nodo i y en el último nodo i_{max} de la malla para cada una de las variables:

Textura.

Partiendo de la ecuación de balance de lamelas (4.3) en el radio del pozo, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) \Big|_{r=r_w} + \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} \Big|_{r=r_w} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \Big|_{r=r_w} \quad (4.11)$$

las condiciones de frontera iniciales a la entrada es:

$$n_{f,i}^1 = 0$$

y a la salida:

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^k (\text{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k)}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^{k+1} (\text{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Saturación.

Para la saturación las condiciones de frontera a la entrada:

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{k+1} &= S_{w,i}^k + \frac{\gamma \Delta\sigma}{r_i} \frac{f_{w,i-1}^k - f_{w,i}^k}{\Delta r} \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_{i+1}^k p_{c,i+1}^k - r_i^k p_{c,i}^k] \right. \\
&\quad \left. - (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_i^k p_{c,i}^k - r_{i-1}^k p_{c,i-1}^k] \right\} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma}{r_i} \frac{f_{w,i-1}^{k+1} - f_{w,i}^{k+1}}{\Delta r} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ (1 - f_{w,i}^{k+1}) \lambda_{wa,i}^{k+1} [r_{i+1}^{k+1} p_{c,i+1}^{k+1} - r_i^{k+1} p_{c,i}^{k+1}] \right. \\
&\quad \left. - (1 - f_{w,i}^{k+1}) \lambda_{wa,i}^{k+1} [r_i^{k+1} p_{c,i}^{k+1} - r_{i-1}^{k+1} p_{c,i-1}^{k+1}] \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

A la salida:

$$\begin{aligned}
S_{w,i_{max}}^{k+1} &= S_{w,i_{max}}^k - \frac{2\Delta\sigma f_{w,i_{max}}}{\Delta r r_{i_{max}}} + \frac{\Delta\sigma f_{w,i_{max}-1}}{\Delta r r_{i_{max}}} + \frac{\Delta\sigma U_{w,i_{max}+1}}{\Delta r r_w} \\
&\quad - (1 - f_{w,i_{max}}) \frac{\Delta\sigma \lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r^2} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Velocidad del agua.

A la entrada el gradiente de presión capilar es cero $\frac{1}{r} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} = 0$:

$$U_{w,1} = f_{w,1} \left(\frac{r_w}{r_1} \right) \quad (4.15)$$

Considerando la condición de frontera a la salida para la saturación.

$$U_{w,imax} = f_{w,imax} r_w + \lambda_{wa,imax} \left[\frac{-r_{imax-1} p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] - \lambda_{wa,imax} f_{w,imax} \left[\frac{-r_{imax-1} p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] \quad (4.16)$$

Velocidad del gas.

Considerando la condición de frontera a la salida para la saturación y la velocidad del agua a la salida:

$$\frac{U_{w,imax+1}}{r_w} = \frac{f_{w,imax}}{r_{imax}} + \lambda_{wa,imax} \left(\frac{-2p_{c,imax}}{r_w \Delta r} \right) - \lambda_{wa,imax} f_{w,imax} \left(\frac{-2p_{c,imax}}{r_w r} \right) \quad (4.17)$$

Formación de espuma.

Para la formación de la espuma consideramos la saturación y la presión a la salida de cada celda para calcular la generación de la espuma.

$$R_g = S_w \left(\frac{\frac{1}{2}[p_{N-1} + p_N] - p_{outlet}}{\Delta r} \right)^m \quad (4.18)$$

Presión.

En la entrada

$$P_1 = P_J - \frac{\Delta r}{2} \frac{f_{w,1}}{\lambda_{wa,1}} \quad (4.19)$$

4.1.2. Metodo de solución.

El primer fue validar el modelo en coordenadas cartesianas con el propuesto por Kam and Rossen (2003). Este modelo dinámico utiliza un balance poblacional de espuma que incorpora una función de creación de lamelas contra uno de coalescencia que depende del gradiente de presión. Este modelo incorpora los tres regímenes de espuma, su aparición abrupta a una velocidad umbral o gradiente de presión, la interacción entre la estabilidad de la espuma y su generación, así como el comportamiento de la espuma en los regímenes de espuma fuerte en estado estable de alta y baja calidad. El método de solución que utiliza este modelo es diferencias finitas regresivas y sustituciones sucesivas presenta mu-

cha inestabilidad para velocidades mayores a $1 \times 10^{-5} (m/s)$ debido a que es un problema altamente no lineal. Bravo (2017) propuso un modelo radial para la inyección de espuma donde el método de solución usado fue un esquema de diferencias finitas centradas en el tiempo y espacio para solucionar los problemas de estabilidad y convergencia, usando las ecuaciones de Kam and Rossen (2003), sin embargo, se adaptaron algunas ecuaciones como la de saturación a coordenadas cilíndricas y la ecuación de balance de lamelas se dedujo a partir del teorema del transporte de Reynolds.

Una vez verificados los resultados del modelo radial homogéneo se desarrolló una modificación en el código numérico para implementar la heterogeneidad, ocasionando esto, inestabilidad en altas velocidades con 10% de heterogeneidad, por lo cual fue necesario implementar la técnica del promedio móvil, sustituciones sucesivas y un método de relajación para ayudar a la convergencia del sistema.

4.1.3. Algoritmo.

El código numérico está programado en Fortran (High Performance Fortran) y usa bibliotecas OpenMP (GNU) para la paralelización del código. En la Figura (4.1) se muestra el algoritmo diseñado con base en una distribución modular para facilitar la lectura y manejo de los mismos, el cual inicia ingresando los datos del sistema (velocidad de inyección, viscosidad del agua, verificar mas), nuestro siguiente paso es elegir el tamaño de malla y la heterogeneidad. Posteriormente se propone una solución para calcular los diferentes valores de porosidad y permeabilidad generando valores aleatorios de una distribución normal para su solución, finalmente el programa entra en un anillo de tiempo hasta que el código numérico encuentre la convergencia o bien concluya el tiempo máximo de simulación terminando el programa.

Se utilizó una máquina Linux de 12 procesadores físicos y 24 procesadores lógicos con 48 gigas de RAM. Se utilizó una malla espacial que varió de entre 50,000 y 500,000 nodos y una temporal de hasta 750,000 nodos. Las corridas tardaban hasta 16 horas y la impresión de los resultados se llevó acabo en el software QtiPlots (GNU).

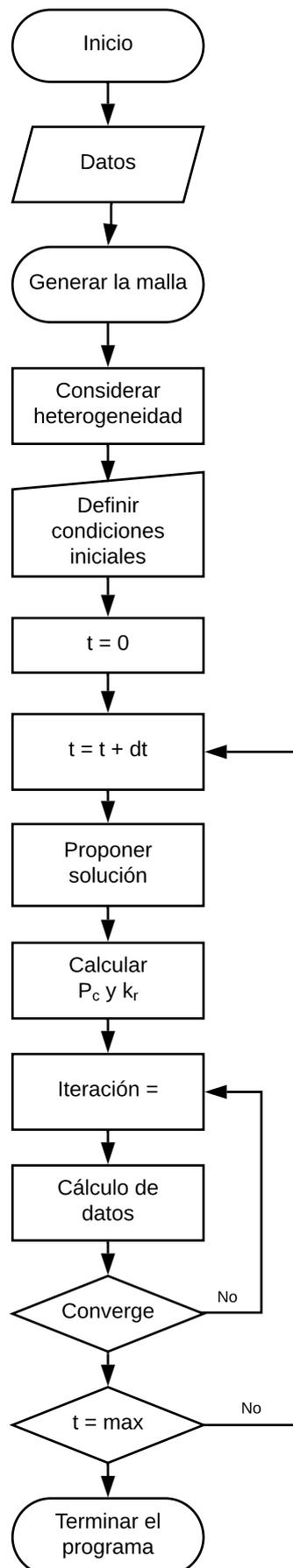


Figura 4.1: Diagrama de flujo del código numérico del flujo de espuma en un medio poroso heterogéneo.

Resultados

5.1. Introducción

Como antes se mencionó, el trabajo de tesis simula numéricamente una inyección de espuma a diferentes gastos de inyección a la entrada del yacimiento con diferentes porcentajes de heterogeneidad. En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en la simulación, como lo son: saturación de agua, textura de la espuma, velocidades del gas y del agua, presión y viscosidad del gas.

Los datos de entrada que se usaron para correr el programa de cómputo se muestran en la Tabla (5.1) a diferentes velocidades de inyección entre $1x10^{-2}$ a $1x10^{-6}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$

A partir del modelo cartesiano propuesto por Kam and Rossen (2003) se propusieron los datos de entrada para generar los resultados que se muestran a continuación:

C_g	154,88	C_f	$1,01x10^{-16}$
C_c	0,1	$R_d[m]$	0,1
$n_{f\acute{m}ax}\left[\frac{1}{m^3}\right]$	$8x10^{13}$	$\phi[\%]$	$3,10x10^{-1}$
$r_w[m]$	0,005	$\sigma\left[\frac{N}{m}\right]$	0,015
$h[m]$	0,05	$\mu_w[Pa \cdot s]$	$1x10^{-3}$
$k[m^2]$	$3,04x10^{-11}$	$\mu_g[Pa \cdot s]$	0.00001
m	2,4	$\mu_{m\acute{a}x}[Pa \cdot s]$	0.1

Tabla 5.1: *Datos de entrada del modelo de Kam and Rossen (2003)*

5.2. Saturación.

Se realizaron corridas numéricas para casos homogéneos y heterogéneos y para cada una de las velocidades propuestas, en la Figura a se muestra la velocidad de $1x10^{-2}\left[\frac{m}{s}\right]$, en la Figura b) la velocidad de inyección fue $1x10^{-4}\left[\frac{m}{s}\right]$, para la Figura c) tenemos $7x10^{-6}\left[\frac{m}{s}\right]$ y para la última Figura d) fue de $1x10^{-6}\left[\frac{m}{s}\right]$.

5.2.1. Homogéneo.

Para el caso homogéneo se realizaron corridas a velocidades de entre 1×10^{-2} y 1×10^{-6} [m/s], las cuales se muestran en la Figura (5.1).

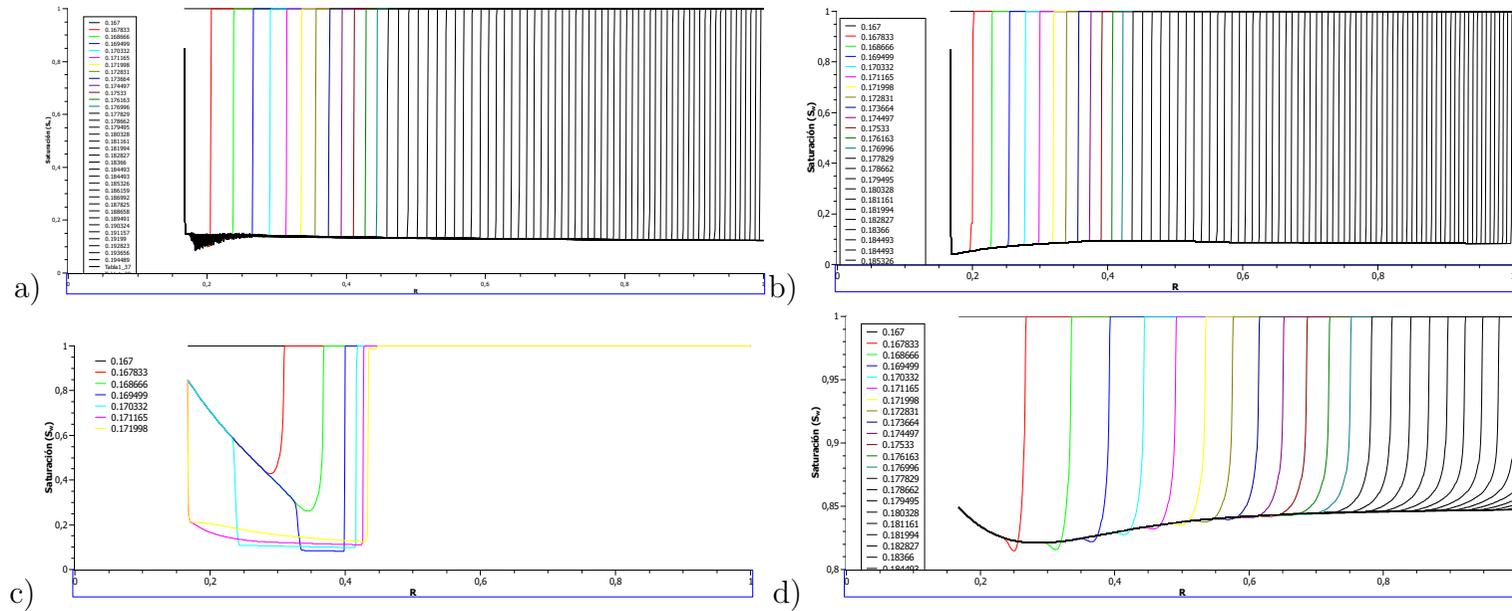


Figura 5.1: En la Figura a) la saturación predice un buen comportamiento aunque al inicio genera un poco de ruido debido a la velocidad de inyección y la homogeneidad, en la Figura b) donde la velocidad de inyección fue 1×10^{-4} vemos que fue un barrido limpio muy cerca del pozo inyector lo que nos indica que es una velocidad en la cual la espuma se considera más estable, en la Figura c) la saturación se comporta de manera inusual y esto es debido a la velocidad de inyección porque no se logra una buena generación de espuma, por último podemos observar que en la Figura d) la saturación del yacimiento quedó en valores bajos a comparación de las otras velocidades de inyección donde la eficiencia de barrido fue buena durante todo el radio del yacimiento teniendo una buena saturación del agua.

5.2.2. Heterogéneo.

Para el caso heterogeneo de la saturación se simularon distintos casos de heterogeneidad en diferentes gastos de inyección, como se muestra en las Figuras (5.2), (5.3) y (5.4)

Heterogeneidad del 10%

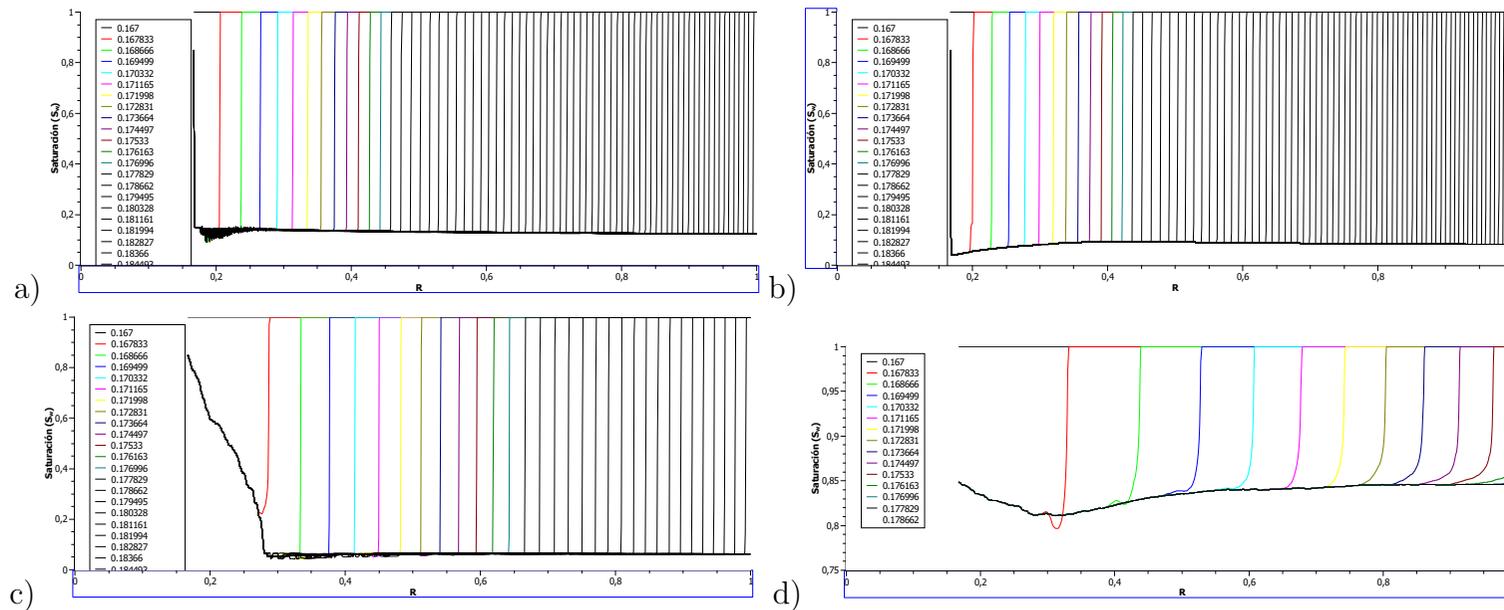


Figura 5.2: Se muestra en las siguientes gráficas las velocidades $1 \times 10^{-2} \left[\frac{m}{s} \right]$, $1 \times 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$, $7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ y $1 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ respectivamente, se pudo observar que para las altas velocidades como en a) y b) este grado de heterogeneidad no hay influencia en un radio cercano al pozo ni en un radio crítico pero para velocidades mas lentas como en c) se observa que la heterogeneidad ayuda a que haya una mejor eficiencia de barrido en zonas cercanas al pozo inyector y para la velocidad mas lenta d), solo es la saturación del gas debido a que la heterogeneidad y la velocidad no son suficientes para generar una espuma.

Heterogeneidad del 15 %

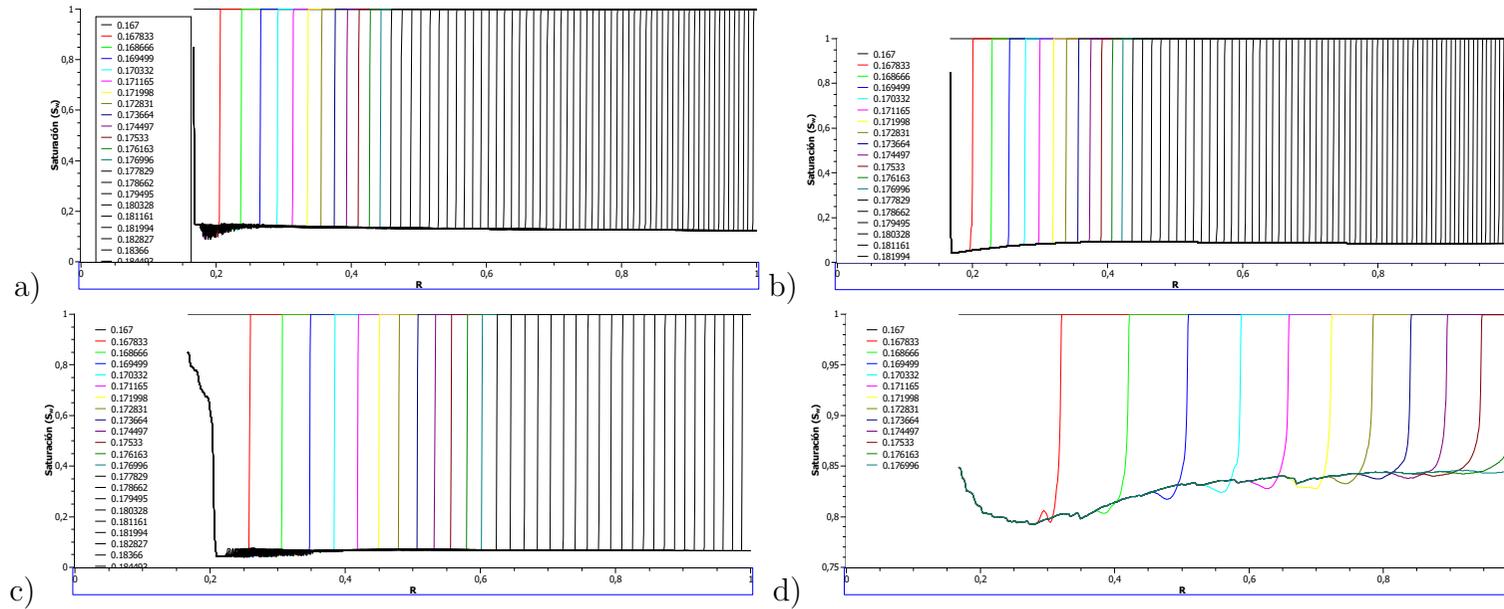


Figura 5.3: Para este grado de heterogeneidad para las velocidades mayores como a) muestra un poco de ruido muy cercano al pozo, sin embargo para la segunda velocidad b), tenemos un barrido mas limpio y se vuelve un poco mas estable la espuma para c) en la zona mas cercana al pozo se generan caídas de saturación más estables que para el caso homogéneo y para el 10 % de heterogeneidad pero se logra formar una espuma estable durante el frente y para la velocidad cabe resaltar que se alcanza el radio crítico en mucho menor tiempo que en los demás gastos de inyección, para la Figura d) la formación de espuma aún no existe, sólo hay flujo de gas en una sola fase.

Heterogeneidad del 20 %

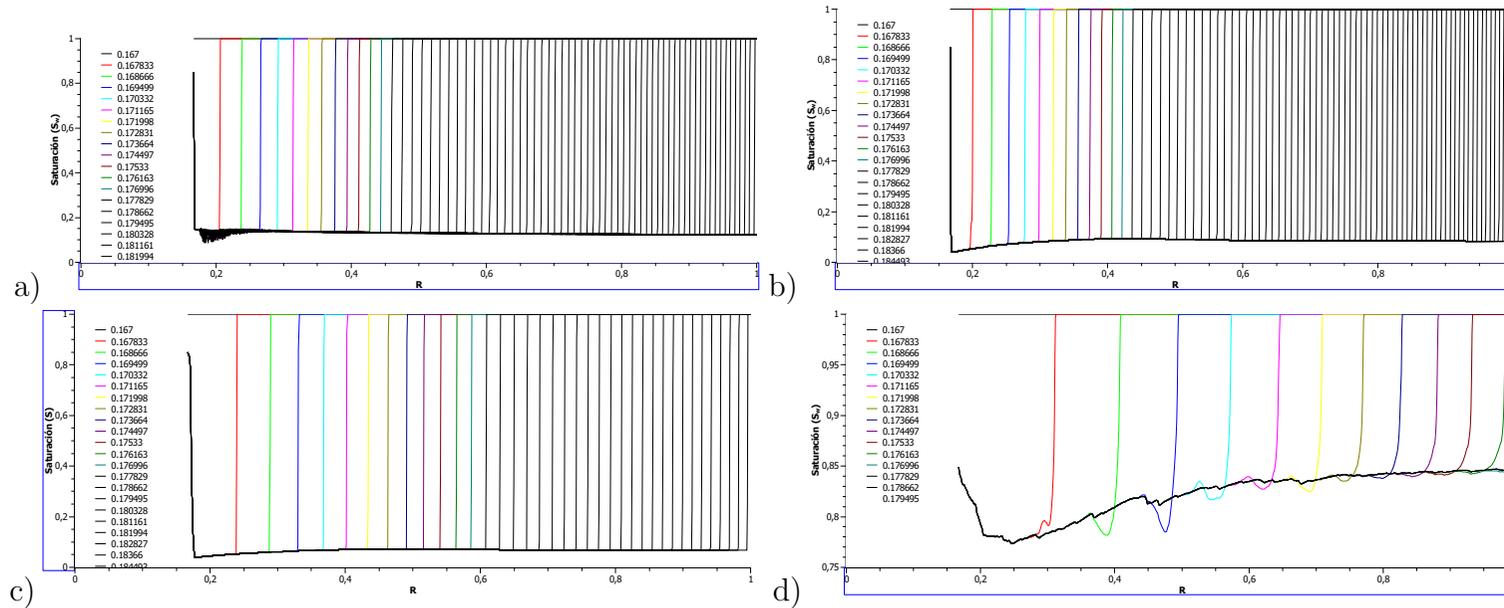


Figura 5.4: Para este nivel de heterogeneidad se confirma que para altas velocidades este porcentaje es despreciable, por lo que no vemos diferencia en las Figuras a) y b) pero para las velocidades mas bajas cercanas a una velocidad crítica hay una mejora considerable en las los tiempos de saturación de agua, en c) donde tenemos una velocidad de $7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ se logró formar una espuma estable y se logró barrer todo el yacimiento de una manera limpia y en menor tiempo que en las velocidades altas hasta un radio propuesto, mostrando que el nivel de heterogeneidad ayuda a las velocidades mas lentas (cercanas a velocidad crítica) para tener un buen barrido y una buena saturación, en la Figura d), donde tenemos nuestra velocidad mas baja, vemos como se alcanzó a formar una espuma débil pero no fue suficiente para barrer el yacimiento.

5.3. Textura.

5.3.1. Homogéneo

Para el caso de la textura η_f tenemos las mismas velocidades que la saturación.

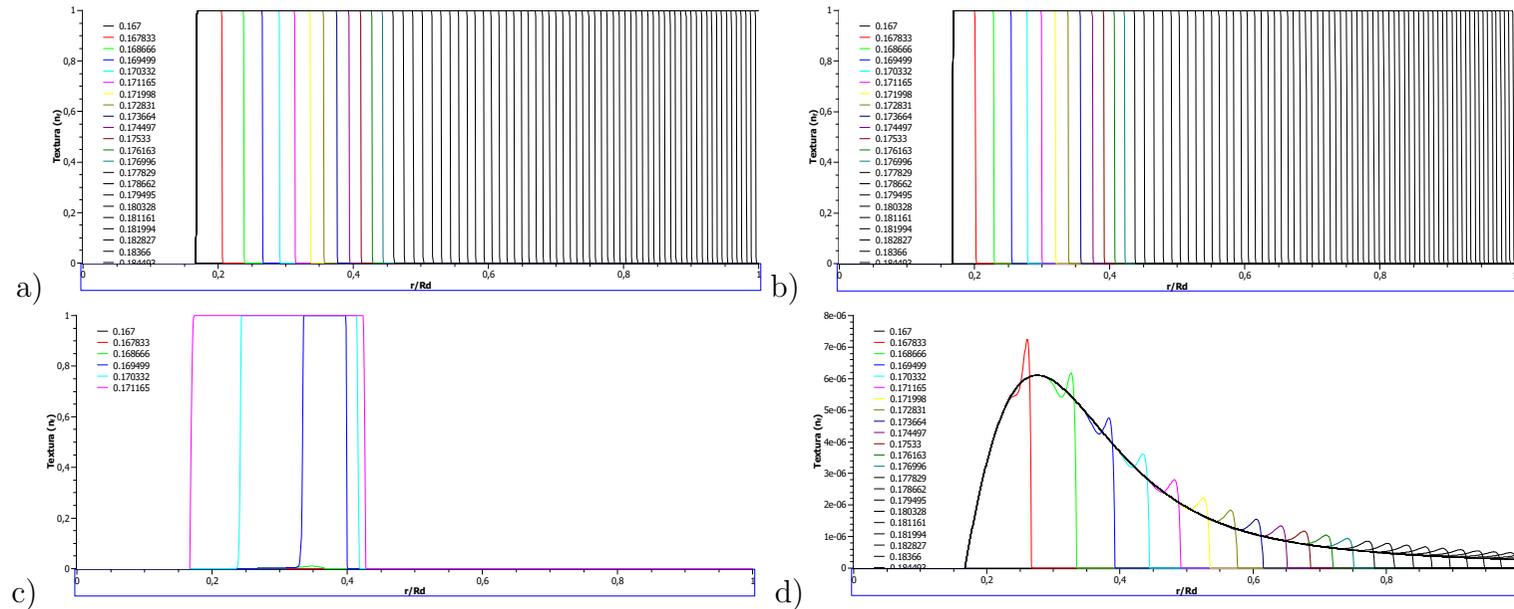


Figura 5.5: En la Figura a) y b) hay una buena generación de espuma, debido a la velocidad de inyección al igual que la saturación, la generación de espuma se hace en un radio muy cercano al pozo de inyección y hay una buena presencia de espuma durante todo el yacimiento, en la Figura c) si hay generación de espuma pero esta sólo se logra formar hasta la mitad de nuestro yacimiento y de forma muy inestable debido que el índice de coalescencia de espumas es mayor que el índice de generación por estar en función de la presión, es decir, no hubo generación de espuma ya que la velocidad de inyección es insuficiente para que se cree espuma.

5.3.2. Heterogéneo

Heterogeneidad del 10%

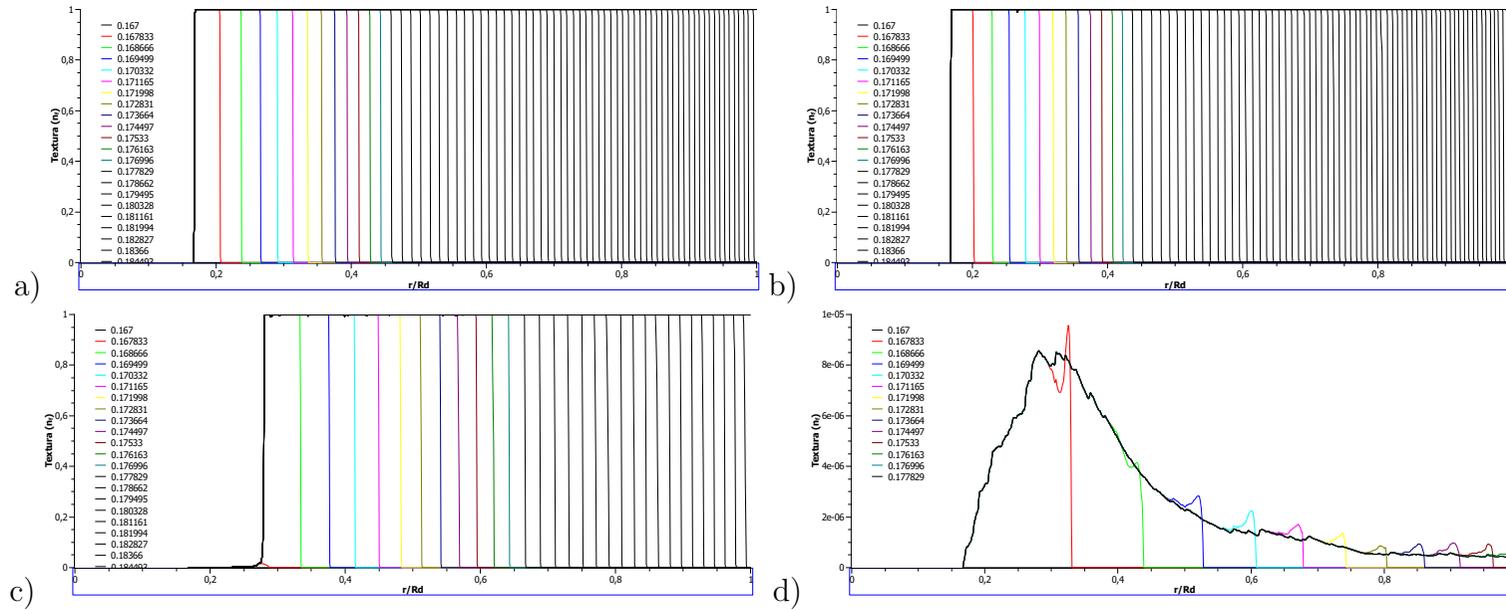


Figura 5.6: Para un 10% en la heterogeneidad del yacimiento no hay cambios notables en las primeras dos velocidades (Figura a) y Figura b)) pero tenemos una gran diferencia en la Figura c) donde en una velocidad intermedia ($7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$) se tiene una buena generación de espuma a lo largo de todo el yacimiento y para la velocidad mas baja (Figura d)) el grado de heterogeneidad y la velocidad de inyección no son suficientes para generar una espuma.

Heterogeneidad del 15 %

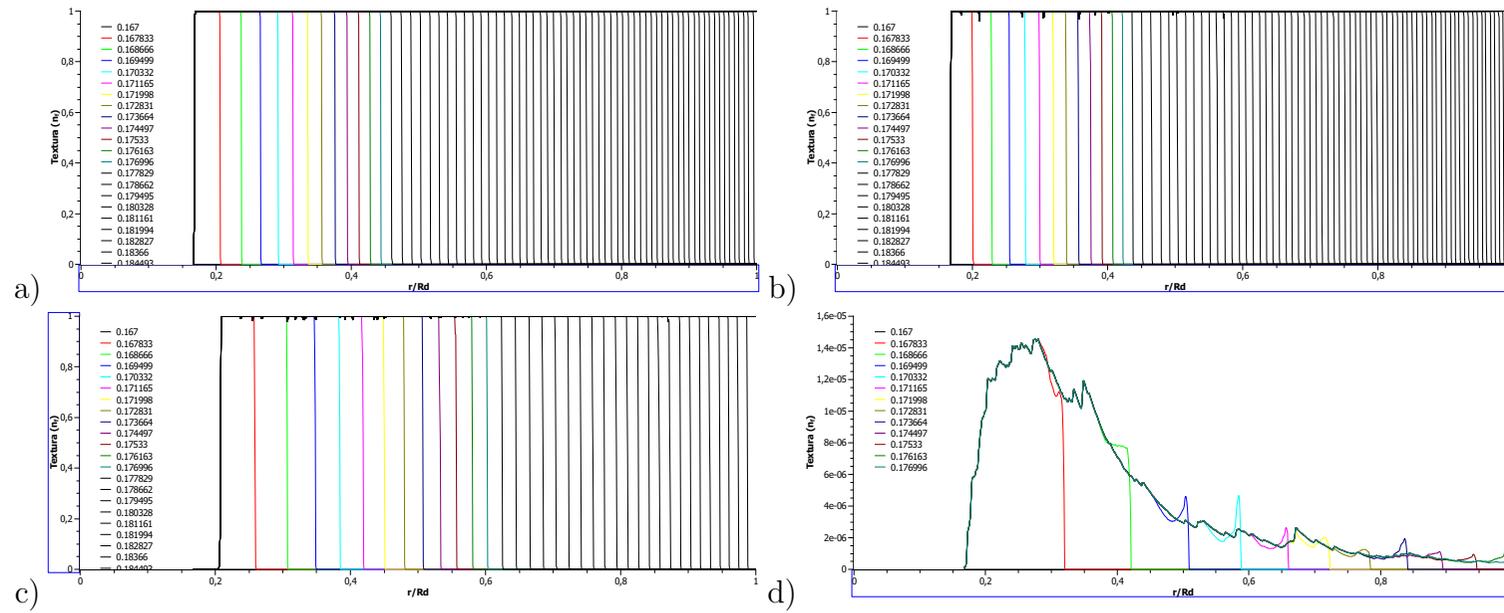


Figura 5.7: Para un 15 % de la heterogeneidad para la velocidad intermedia de $7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ se puede observar que se crea mas textura en intervalos de tiempo mas pequeños, lo que nos genera una espuma mas estable a comparación del 10 % de la heterogeneidad y para la velocidad mas baja (Figura d) no se logró generar espuma, es decir, es el gas fluyendo en una sola fase a lo largo del yacimiento.

Heterogeneidad del 20 %

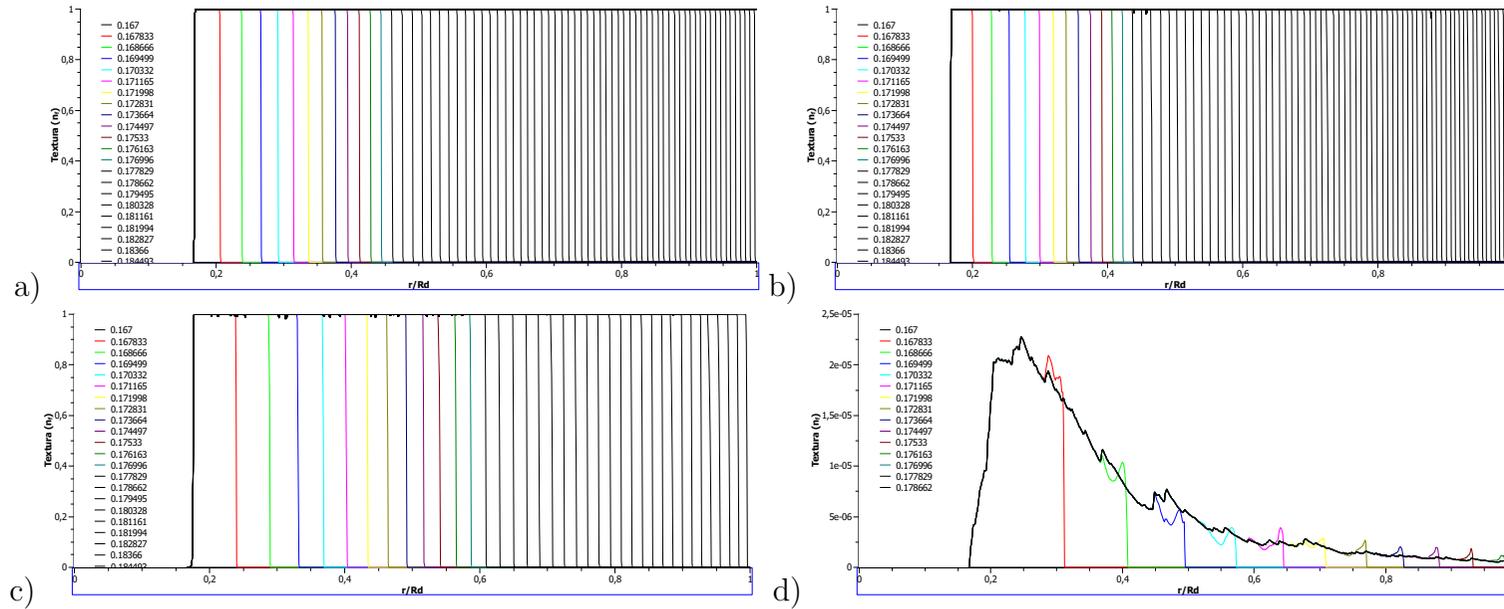


Figura 5.8: Para este grado de heterogeneidad se tiene que para la Figura c) que es una velocidad de $7 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$ la generación de espuma en un radio cercano al pozo que para un grado de heterogeneidad del 10 %, también podemos notar como toma mucho menos tiempo en que la espuma recorra todo el frente del yacimiento. Por último, para la velocidad mas baja no hubo generación de espuma en ningún punto del yacimiento.

Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones.

Se simuló el comportamiento de la espuma en un medio poroso con diferentes grados de heterogeneidad, con un método “*snap-off*” mediante un balance poblacional de lamelas, a través del teorema de transporte de Reynolds, una ecuación de Darcy para fluidos no Newtonianos para la fase gaseosa y líquida.

- El código numérico predice el comportamiento de la saturación, textura y viscosidad en todo el yacimiento a diferentes velocidades de inyección y diferentes grados de heterogeneidad.
- En el frente del yacimiento, siempre hay un punto de generación de espuma que está en función de la velocidad de inyección y es muy cercano al pozo.
- Existe un punto, llamado radio crítico donde el término de coalescencia de lamelas es mayor que el de generación debido a que el gradiente de presión capilar va disminuyendo.
- El radio crítico crece cuando el grado de heterogeneidad lo hace.
- Se puede usar cualquier modelo apropiado para las permeabilidades relativas y el modelo reológico.
- El grado de heterogeneidad influye fuertemente en la generación de espuma, entre mas heterogeneidad mayor es la velocidad de creación y por ende existe una mejor área de barrido.
- Existe una velocidad crítica para la generación de espuma, que aunque es independiente del grado de heterogeneidad que se tenga los resultados arrojaron que fue aproximadamente $1 \times 10^{-6} \left[\frac{m}{s} \right]$

- Los parámetros involucrados en el modelo de generación y coalescencia de lamelas, viscosidad y permeabilidades relativas se tienen que medir para cada tipo de surfactante y yacimiento, en este trabajo se usó el reportado por Kam and Rossen (2003)

6.2. Recomendaciones.

Este trabajo es sólo un proceso de simulación, es decir, no se ha calibrado con experimentos físicos que comprueben el comportamiento, creación y coalescencia de la espuma, es necesario hacer pruebas de laboratorio con diferentes tipos de roca y surfactantes específicos para comprobar los resultados de este modelo. Este trabajo queda como la base para trabajar en un modelo de inyección de espuma 2D que considere efectos gravitacionales sobre la espuma y sirva como mejor aproximación para estudiar el comportamiento de ésta.

Por último, se planea generar modelos 3D que incluyan un fluido multifásico o bien de porosidad múltiple (YNF) con problemas matriz-fractura que permitirá una evolución en el estudio del arte de una espuma desde el punto de vista físico.

Ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial(xu_w)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial \left(x \frac{q_w}{2\pi h x} \right)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{2\pi h x} \frac{\partial(q_w)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{1}{2\pi h x} \frac{\partial(q_t f'_w)}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Igual a Pei et al. (2015) donde:

$$\frac{2\pi h x \varphi}{q_t} \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial f'_w}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial f'_w}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.6})$$

donde

$$u_t = \frac{q_t}{2\pi h x}$$

De la teoría de flujo fraccional en coordenadas cilíndricas (véase por ejemplo Pei et al. (2015). Shale gas reservoir treatment by a CO₂-based technology. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 26, 1595-1606.)

$$f'_w = \frac{1 - \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x}}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{A.7})$$

$$f'_w = \frac{1 - \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \left(x \frac{\partial P_c}{\partial x} + P_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{A.8})$$

si se define

$$f_w = \frac{1}{1 + \frac{k_{rg}\mu_w}{k_{rw}\mu_g}} \quad (\text{A.9})$$

$$f'_w = f_w - \frac{\frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x}}{1 + \frac{k_{rg}\mu_w}{k_{rw}\mu_g}} \quad (\text{A.10})$$

$$f'_w = f_w - f_w \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

sustituyendo:

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial f'_w}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w - f_w \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial f_w}{\partial x} - u_t \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \frac{2\pi h k k_g}{q_t \mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + u_t \frac{\partial f_w}{\partial x} - u_t \frac{2\pi h}{q_t} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h} \frac{1}{x} \frac{\partial f_w}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h x} \frac{\partial f_w}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_w \lambda_g \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.17})$$

o bien

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h x} \frac{\partial f_w}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 - f_w) \lambda_w \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right) = 0 \quad (\text{A.18})$$

Ecuación de la textura

Del teorema del transporte de Reynolds se tiene

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{U}) = R \quad (\text{B.1})$$

considerando un balance para la textura n_f dentro de un medio poroso parcialmente saturado.

$$\alpha = \phi S_g n_f \quad (\text{B.2})$$

o bien

$$\frac{\partial (S_g n_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi S_g n_f \vec{U}) = R \quad (\text{B.3})$$

si la porosidad es constante y se define la velocidad de Darcy como:

$$\vec{u} = \phi S_g \vec{U} \quad (\text{B.4})$$

se tiene:

$$\phi \frac{\partial (S_g n_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_f \vec{u}) = R \quad (\text{B.5})$$

por otro lado, si se considera que la espuma sólo se genera o coalesce en el espacio que satura ϕS_g se tiene que:

$$R = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (\text{B.6})$$

finalmente:

$$\phi \frac{\partial (S_g n_f)}{\partial t} + \nabla \cdot (n_f \vec{u}) = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (\text{B.7})$$

en coordenadas cilíndricas con simetría en z y θ :

$$\phi \frac{\partial (S_g n_f)}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial (x n_f u_{gx})}{\partial x} = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (\text{B.8})$$

Ecuaciones adimensionales

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h} \frac{1}{x} \frac{\partial f_w}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_g \lambda_w \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_f) + \frac{\partial(n_f u_{gx})}{\partial x} + \frac{n_f u_{gx}}{x} = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (\text{C.2})$$

bajo las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} R_w &\leq x \leq R_d \\ t &> 0 \end{aligned}$$

mediante el siguiente conjunto de transformación:

$$\sigma = \frac{t}{t_c} \quad (\text{C.3})$$

$$r = \frac{x}{R_d} \quad (\text{C.4})$$

$$p_c = \frac{P_c}{\Delta P_{cc}} \quad (\text{C.5})$$

$$n_f = \frac{n_f}{n_{f_{max}}} \quad (\text{C.6})$$

$$U_g = \frac{u_{gx}}{u_c} \quad (\text{C.7})$$

$$R_c = \frac{r_c}{r_{cc}} \quad (\text{C.8})$$

$$R_g = \frac{r_g}{r_{gc}} \quad (\text{C.9})$$

$$\lambda_{wa} = \frac{\lambda_w}{\lambda_c} \quad (\text{C.10})$$

entonces:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{q_t}{2\pi h} \frac{1}{x} \frac{\partial f_w}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_g \lambda_w \frac{\partial(xP_c)}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{C.11})$$

usando el conjunto de términos adimensionales

$$\frac{\phi}{t_c} \frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{q_t}{2\pi h R_d^2} \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{\Delta P_{cc} \lambda_c}{R_d^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (C.12)$$

ordenando:

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{t_c q_t}{2\phi\pi h R_d^2} \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{t_c \lambda_c \Delta P_{cc}}{\phi R_d^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (C.13)$$

considerando:

$$\frac{t_c q_t}{2\phi\pi h R_d^2} = 1$$

despejando t_c queda:

$$t_c = \frac{2\phi\pi R_d^2 h}{q_t} \quad (C.14)$$

sustituyendo:

$$t_c = \frac{2\pi(0,31)(0,3)^2(0,05)}{28959 \times 10^{-8}} = 3,0267 \times 10^5 \quad (C.15)$$

donde t_c representa el tiempo de llenado del sistema.

Sustituyendo:

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{\lambda_c \Delta P_{cc}}{\phi R_d^2} \frac{2\phi\pi R_d^2 h}{q_t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (C.16)$$

agrupando y ordenando

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{2\pi h \lambda_c \Delta P_{cc}}{q_t} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (C.17)$$

sea u_c la velocidad característica a la entrada:

$$u_c \sim \frac{q_t}{2\pi h R_w} \quad (C.18)$$

de Darcy se tiene que:

$$u_c \sim \lambda_c \frac{\Delta P_{cc}}{R_d} \quad (C.19)$$

entonces

$$\Delta P_{cc} \sim \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w} \quad (C.20)$$

sustituyendo valores:

$$\frac{2,8959 \times 10^{-8} (0,3)}{2\pi(0,005)(9,9688 \times 10^{-11})(0,005)} = 55481$$

sustituyendo y definiendo $r_w = R_w/R_d$

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{2\pi h \lambda_c}{q_t} \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (C.21)$$

simplificando

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{R_d}{R_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{C.22})$$

sustituyendo:

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{r_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{C.23})$$

C.1. Presión capilar.

$$P_c = \sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.24})$$

$$p_c \Delta P_{cc} = \sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.25})$$

$$p_c = \frac{\sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}}{\Delta P_{cc}} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.26})$$

$$p_c = \frac{\sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}}{\frac{q_t R_d}{2\phi h \lambda_c R_w}} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.27})$$

si $r_w = R_w/R_d$

$$\mathbf{Ca} = \frac{\Delta P_c}{P_{cc}} \quad (\text{C.28})$$

$$\mathbf{Ca} = \frac{q_t}{2\pi h \lambda_c \sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}} = \frac{\Delta P_c}{P_{cc}} \quad (\text{C.29})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Ca}^{-1} &= \frac{2\pi h \lambda_c \sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}}{q_t} = \frac{2\pi(0,05)(9,9688x10^{-11})(0,0001) \left(\frac{0,31}{30,4x10^{-12}} \right)^{0,5}}{2 - 8959x10^{-8}} \\ &= \frac{2\pi h \lambda_c \sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}}{q_t} = 1,0921x10^{-2} \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

$$\mathbf{Ca} = \left[\frac{2\pi(0,05)(9,9688x10^{-11})(0,0001) \left(\frac{0,31}{30,4x10^{-12}} \right)^{0,5}}{2 - 8959x10^{-8}} \right]^{-1} = 91,60 \quad (\text{C.31})$$

$$p_c = \frac{\sigma \left(\frac{\phi}{k} \right)^{0,5}}{\frac{q_t R_d}{2\phi h \lambda_c R_w}} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.32})$$

$$p_c = r_w \mathbf{Ca}^{-1} \left(\frac{S_w}{1 - S_{wc} - S_{gr}} \right)^{-0,2} \quad (\text{C.33})$$

entonces en:

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{r_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{C.34})$$

si se desprecian las fuerzas capilares $\mathbf{Ca} \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} = 0 \quad (\text{C.35})$$

por otro lado, para la textura:

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} (S_g n_f) + \frac{\partial (n_f u_{gx})}{\partial x} + \frac{n_f u_{gx}}{x} = \phi S_g (r_g - r_c) \quad (\text{C.36})$$

$$\frac{\phi n_{f_{max}}}{t_c} \frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) + \frac{u_c n_{f_{max}}}{R_d} \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} + \frac{u_c n_{f_{max}}}{R_d} \frac{n_f U_g}{r} = \phi S_g (r_{gc} R_g - r_{cc} R_c) \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) + \frac{t_c u_c n_{f_{max}}}{\phi n_{f_{max}} R_d} \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} \\ + \frac{t_c u_c n_{f_{max}}}{\phi n_{f_{max}} R_d} \frac{n_f U_g}{r} \\ = \frac{\phi t_c}{\phi n_{f_{max}}} (S_g r_{cc}) \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) + \frac{t_c u_c}{\phi R_d} \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} \\ + \frac{t_c u_c}{\phi R_d} \frac{n_f U_g}{r} = \frac{t_c r_{cc}}{n_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Si $t_c = \frac{2\phi\pi R_d^2 h}{q_t}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) + \frac{2\phi\pi R_d^2 h}{q_t} \frac{u_c}{\phi R_d} \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} \\ + \frac{2\phi\pi R_d^2 h}{q_t} \frac{u_c}{\phi R_d} \frac{n_f U_g}{r} \\ = \frac{2\phi\pi R_d^2 h r_{cc}}{q_t n_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} (S_g n_f) + \frac{2\pi R_d h u_c}{q_t} \frac{\partial (n_f U_g)}{\partial r} \\ + \frac{2\pi R_d h u_c}{q_t} \frac{n_f U_g}{r} \\ = \frac{2\phi\pi R_d^2 h r_{cc}}{q_t n_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

considerando a la velocidad característica a la entrada del pozo

$$u_c = \frac{q_t}{2\pi h R_w} \quad (\text{C.42})$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g n_f) + \frac{2\pi h R_d}{q_t} \frac{q_t}{2\pi h R_w} \frac{\partial(n_f U_g)}{\partial r} \\ + \frac{2\pi h R_d}{q_t} \frac{q_t}{2\pi h R_w} \frac{n_f U_g}{r} \\ = \frac{2\phi\pi R_d^2 h r_{cc}}{q_t n_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

agrupando y simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{R_d}{R_w} \frac{\partial(\eta_f U_g)}{\partial r} + \frac{R_d}{R_w} \frac{n_f U_g}{r} \\ = \frac{2\phi\pi R_d^2 h r_{cc}}{q_t \eta_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

recordando que: $r_w = \frac{R_w}{R_d}$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{1}{r_w} \frac{\partial(\eta_f U_g)}{\partial r} + \frac{1}{r_w} \frac{n_f U_g}{r} = \frac{2\phi\pi R_d^2 h r_{cc}}{q_t \eta_{f_{max}}} S_g \left(\frac{r_{gc}}{r_{cc}} R_g - R_c \right) \quad (\text{C.45})$$

definiendo a los grupos adimensionales como:

$$\mathbf{Da} = \frac{2\phi\pi R_d^2 r_{cc}}{q_t n_{f_{max}}} \quad \mathbf{Ga} = \frac{r_{gc}}{r_{cc}}$$

se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g n_f) + \frac{1}{r_w} \frac{\partial(\eta_f U_g)}{\partial r} + \frac{1}{r_w} \frac{n_f U_g}{r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (\text{C.46})$$

sumando

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{1}{r r_w} \frac{\partial(r n_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (\text{C.47})$$

C.2. Generación y coalescencia de lamelas.

C.2.1. Generación de lamelas.

$$r_g = C_g S_w \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^m \quad (\text{C.48})$$

Donde m es un parámetro de la velocidad para la generación.

$$R_g r_{gc} = \frac{C_g \Delta P_{cc}^m}{R_d^m} S_w \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^m \quad (\text{C.49})$$

despejando la generación de lamelas

$$R_g = \frac{C_g \Delta P_{cc}^m}{r_{gc} R_d^m} S_w \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^m \quad (C.50)$$

donde

$$\frac{C_g \Delta P_{cc}^m}{r_{gc} R_d^m} = 1$$

$$r_{gc} = \frac{C_g \Delta P_{cc}^m}{r_{gc} R_d^m} = \frac{C_g}{R_d^m} \frac{q_t^m R_d^m}{2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m} \quad (C.51)$$

entonces

$$r_{gc} = \frac{C_g q_t^m}{2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m} \quad (C.52)$$

sustituyendo la ecuación (C.52) en (C.50)

$$R_g = S_w \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^m \quad (C.53)$$

donde $\Delta P_{cc}^m = \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w}$

C.2.2. Para la coalescencia

$$r_c = C_c n_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (C.54)$$

donde n es un parámetro de la velocidad para la coalescencia.

$$R_c r_{cc} = C_c n_{f_{max}} n_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (C.55)$$

despejando la coalescencia de lamelas, tenemos que:

$$R_c = \frac{C_c n_{f_{max}} n_f}{r_{cc}} \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (C.56)$$

considerando :

$$1 = \frac{C_c \eta_{f_{max}}}{r_{cc}} \quad (C.57)$$

se tiene:

$$r_{cc} = C_c \eta_{f_{max}} \quad (C.58)$$

sustituyendo la ecuación (C.58) en (C.56) tenemos

$$R_c = \eta_f \left(\frac{1}{S_w - S_w^*} \right)^n \quad (C.59)$$

de nuestro grupo adimensional tenemos

$$\mathbf{Da} = \frac{2\pi\phi h R_d 2r_{cc}}{q_t n_{f_{max}}} = \frac{2\pi\phi h R_d 2C_c n_{f_{max}}}{q_t n_{f_{max}}} = \frac{2\pi\phi h R_d 2C_c}{q_t} = t_c C_c \quad (\text{C.60})$$

$$\mathbf{Da} = t_c C_c = \frac{t_c}{C_c^{-1}} \quad (\text{C.61})$$

donde \mathbf{Da} representa los tiempos característicos de llenado contra los tiempos característicos de coalescencia $r_{gc} = \frac{C_g q_t^m}{2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m}$

$$\mathbf{Ga} = \frac{r_{gc}}{r_{cc}} = \frac{\frac{C_g q_t^m}{2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m}}{C_c n_{f_{max}}} = \frac{C_g q_t^m}{2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m C_c n_{f_{max}}} \quad (\text{C.62})$$

donde

$$\lambda_c = \frac{k}{\mu_c}$$

entonces:

$$\mathbf{Ga} = \frac{r_{gc}}{r_{cc}} = \frac{C_g q_t^m \mu_c^m}{k^m 2^m \pi^m h^m \lambda_c^m R_w^m C_c n_{f_{max}}} \quad (\text{C.63})$$

agrupando

$$\mathbf{Ga} = \frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{\mu_c q_t}{2\pi h k R_w} \right)^m \quad (\text{C.64})$$

C.3. Modelo reológico

Para la viscosidad de la espuma se tiene que:

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_f}{u_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.65})$$

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f \eta_{f_{max}} n_f}{(u_c U_g)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.66})$$

$$u_c = \frac{q_t}{2\pi h R_w} \quad (\text{C.67})$$

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f \eta_{f_{max}} n_f}{\left(\frac{q_t}{2\pi h R_w} \right)^{\frac{1}{3}} U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.68})$$

$$\mu_c = \frac{C_f \eta_{f_{max}}}{\left(\frac{q_t}{2\pi h R_w} \right)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.69})$$

$$\frac{\mu_g^f}{\mu_c} = v_g^f \quad (\text{C.70})$$

$$v_g^f = \frac{\mu_g^0}{\mu} + \frac{n_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.71})$$

definiendo el siguiente grupo adimensional:

$$\mathbf{Br} = \frac{\mu_g^0}{\mu_c} \quad (\text{C.72})$$

$$v_g^f = \mathbf{Br} + \frac{n_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.73})$$

entonces:

$$\mathbf{Ga} = \frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{\mu_c q_t}{2\pi h k R_w} \right)^m \quad (\text{C.74})$$

$$\mathbf{Ga} = \frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{\frac{C_f n_{f_{max}} q_t}{\left(\frac{q_t}{2\pi h k R_w}\right)^{\frac{1}{3}}}}{2\pi h k R_w} \right)^m \quad (\text{C.75})$$

$$\mathbf{Ga} = \frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{C_f n_{f_{max}} q_t}{2\pi h k R_w \left(\frac{q_t}{2\pi h k R_w}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)^m \quad (\text{C.76})$$

finalmente:

$$\frac{C_g}{C_c n_{f_{max}}} \left(\frac{C_f n_{f_{max}} q_t^{\frac{2}{3}}}{k(2\pi h R_w)^{\frac{2}{3}}} \right)^m \quad (\text{C.77})$$

C.4. Viscosidad.

Del modelo de Hirasaki et al. (1985)

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f \eta_f}{u_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.78})$$

sustituyendo por al definición de u_g :

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_{f_{max}} \eta_f}{(u_c U_g)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.79})$$

sustituyendo por la definición de u_c :

$$\mu_g^f = \mu_g^0 + \frac{C_f n_{f_{max}} \eta_f}{\left(\frac{q_t}{2\pi h R_w}\right)^{\frac{1}{3}} U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.80})$$

definiendo a la viscosidad adimensional como:

$$\mu_{ga}^f = \frac{\mu_g^f}{\mu_c} \quad (\text{C.81})$$

se obtiene:

$$\mu_{ga}^f = \frac{\mu_g^0}{\mu_c} + \frac{\eta_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.82})$$

sustituyendo la definición (C.72):

$$\mu_{ga}^f = \mathbf{Br} + \frac{\eta_f}{U_g^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{C.83})$$

nos queda la viscosidad adimensional del gas.

C.5. Movilidad.

C.5.1. Movilidad del agua

de la definición de movilidad para el agua:

$$\lambda_w = \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \quad (\text{C.84})$$

usando la definición de movilidad característica:

$$\lambda_c \lambda_w = \frac{k k_{rw}}{\mu_c \mu_{wa}} \quad (\text{C.85})$$

simplificando nos queda la movilidad adimensional como:

$$\lambda_{wa} = \frac{k k_{rw}}{\lambda_c \mu_c \mu_{wa}} \quad (\text{C.86})$$

usando la definición de viscosidad característica, nos queda:

$$\lambda_{wa} = \frac{k_{rw}}{\mu_{wa}} \quad (\text{C.87})$$

Movilidad del gas.

De la definición de movilidad para el agua:

$$\lambda_g = \frac{k k_{rg}}{\mu_g} \quad (\text{C.88})$$

usando la definición de movilidad característica:

$$\lambda_c \lambda_{ga} = \frac{k k_{rg}}{\mu_c \mu_{ga}} \quad (\text{C.89})$$

despejando la movilidad adimensional del gas:

$$\lambda_{wg} = \frac{k k_{rg}}{\lambda_c \mu_c \mu_{ga}} \quad (\text{C.90})$$

usando la definición de movilidad característica para el gas:

$$\lambda_{ga} = \frac{k_{rg}}{\mu_{ga}} \quad (\text{C.91})$$



Diferencias finitas

D.1. Para la textura.

Diferencias finitas en la textura:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(S_g \eta_f) + \frac{1}{rr_w} \frac{\partial(r \eta_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta \sigma} (S_{g,i}^{k+1} \eta_{f,i}^{k+1} - S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k) \frac{1}{r_i r_w \Delta r} (r_i \eta_{f,i} U_{g,i} - r_{i-1} \eta_{f,i-1} U_{g,i-1}) \\ = \mathbf{Da} \overline{S_{g,i} (\mathbf{Ga} R_{g,i} - R_{c,i})} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned} \eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{S_{g,i}^{k+1}} \\ &- \frac{\Delta \sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{1}{r_i r_w \Delta r} (r_i \eta_{f,i} U_{g,i} - r_{i-1} \eta_{f,i-1} U_{g,i-1}) \\ &+ \frac{\Delta \sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} \overline{S_{g,i} (\mathbf{Ga} R_{g,i} - R_{c,i})} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_g^k \eta_{f,i}^k}{S_g^{k+1}} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{\gamma}{r_i r_w \Delta r} (r_{i-1} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - r_i \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^k (\mathbf{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k) \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)}{r_i r_w \Delta r} (r_{i-1} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} - \eta_{f,i}^{k+1} U_{g,i}^{k+1}) \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^{k+1} (\mathbf{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{S_{g,i}^{k+1}} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} + \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^k (\mathbf{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k) \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} - \eta_{f,i}^{k+1} U_{g,i}^{k+1} \right) \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^{k+1} (\mathbf{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{1-\gamma}{r_w \Delta r} (\eta_{f,i}^{k+1} U_{g,i}^{k+1}) &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{S_{g,i}^{k+1}} + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \\
&\left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^k (\mathbf{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k) \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \mathbf{Da} S_{g,i}^{k+1} (\mathbf{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right) &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{S_{g,i}^{k+1}} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{\gamma}{r_w\Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \text{Da} S_{g,i}^k (\text{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k) \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)}{r_w\Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma)\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \text{Da} S_{g,i}^{k+1} (\text{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{S_{g,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w\Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right)} \text{Da} S_{g,i}^k (\text{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k) \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right)} \frac{(1-\gamma)}{r_w\Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma)\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1} \left(1 + \frac{\Delta\sigma}{S_{g,i}^{k+1}} \frac{(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w\Delta r} \right)} \text{Da} S_{g,i}^{k+1} (\text{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma \mathbf{Da} S_{g,i}^k (\mathbf{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k)}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma \mathbf{Da} S_{g,i}^{k+1} (\mathbf{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)}
\end{aligned} \tag{D.9}$$

D.1.1. Condiciones de frontera.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(S_g n_f) + \frac{\partial(n_f U_g)}{\partial r} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \tag{D.10}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial\sigma}(S_g n_f) \right|_{r=r_w} + \left. \frac{\partial(n_f U_g)}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \Big|_{r=r_w} \tag{D.11}$$

Considerando $r_w = 1$

$$\left. \frac{\partial}{\partial\sigma}(S_g n_f) \right|_{r=1} + \left. \frac{\partial(n_f U_g)}{\partial r} \right|_{r=1} = \mathbf{Da} S_g (\mathbf{Ga} R_g - R_c) \Big|_{r=1} \tag{D.12}$$

A la entrada

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} \left(\frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^k U_{g,i-1}^k - \eta_{f,i}^k U_{g,i}^k \right) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^k (\text{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k)}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{(1-\gamma)}{r_w \Delta r} \frac{r_{i-1}}{r_i} \eta_{f,i-1}^{k+1} U_{g,i-1}^{k+1} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^{k+1} (\text{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

se considera que a la entrada la textura es cero $\eta_{f,0}^k = 0$

$$\begin{aligned}
\eta_{f,i}^{k+1} &= \frac{S_{g,i}^k \eta_{f,i}^k}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{\Delta\sigma}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \frac{\gamma}{r_w \Delta r} (-\eta_{f,i}^k U_{g,i}^k) \\
&+ \frac{\gamma \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^k (\text{Ga} R_{g,i}^k - R_{c,i}^k)}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)} \\
&+ \frac{(1-\gamma) \Delta\sigma \text{Da} S_{g,i}^{k+1} (\text{Ga} R_{g,i}^{k+1} - R_{c,i}^{k+1})}{\left(S_{g,i}^{k+1} + \frac{\Delta\sigma(1-\gamma)U_{g,i}^{k+1}}{r_w \Delta r} \right)}
\end{aligned} \tag{D.14}$$

D.2. Saturación.

Partiendo de la ecuación

$$\frac{\partial S_w}{\partial \sigma} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_w}{\partial r} - \frac{1}{r_w} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f_g \lambda_{wa} \frac{\partial (r p_c)}{\partial r} \right] = 0 \tag{D.15}$$

usando un esquema de diferencias finitas centrales en espacio y tiempo.

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i}^{k+1} - S_{w,i}^k}{\Delta\sigma} + \frac{1}{r_i} \frac{f_{w,i} - f_{w,i-1}}{\Delta r} \\ & - \frac{1}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r} \left[f_{g,i+\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} - f_{g,i-\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial(rp_c)}{\partial r} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (D.16)$$

usando Crank-Nicholson:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i}^{k+1} - S_{w,i}^k}{\Delta\sigma} + \frac{1}{r_i} \frac{f_{w,i} - f_{w,i-1}}{\Delta r} - \frac{1}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \\ & \left[f_{g,i+\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i+\frac{1}{2}} [(r_{i+1} p_{c,i+1}) - (r_i p_{c,i})] - \right. \\ & \left. f_{g,i-\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i-\frac{1}{2}} [(r_i p_{c,i}) - (r_{i-1} p_{c,i-1})] \right] = 0 \end{aligned} \quad (D.17)$$

simplificando:

$$\begin{aligned} & S_{w,i}^{k+1} - S_{w,i}^k + \frac{\Delta\sigma}{r_i} \frac{f_{w,i} - f_{w,i-1}}{\Delta\sigma} - \frac{\Delta\sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \\ & \left[f_{g,i+\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i+\frac{1}{2}} [r_{i+1} p_{c,i+1} - r_i p_{c,i}] \right. \\ & \left. - f_{g,i-\frac{1}{2}} \lambda_{wa,i-\frac{1}{2}} [r_i p_{c,i} - r_{i-1} p_{c,i-1}] \right] = 0 \end{aligned} \quad (D.18)$$

despejando la saturación en la celda $k + 1$.

$$\begin{aligned} & S_{w,i}^k - \frac{\Delta\sigma}{r_i} \frac{f_{w,i} - f_{w,i-1}}{\Delta r} + \frac{\Delta\sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \\ & (f_{g,i+1} \lambda_{wa,i+1} [r_{i+1} p_{c,i+1} - r_i p_{c,i}] \\ & - f_{g,i} \lambda_{wa,i} [r_i p_{c,i} - r_{i-1} p_{c,i-1}]) = S_{w,i}^{k+1} \end{aligned} \quad (D.19)$$

despejando

$$\begin{aligned} & S_{w,i}^k - \frac{\Delta\sigma}{r_i} \frac{f_{w,i} - f_{w,i-1}}{\Delta r} + \frac{\Delta\sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \\ & (f_{g,i+1} \lambda_{wa,i+1} [r_{i+1} p_{c,i+1} - r_i p_{c,i}] \\ & - f_{g,i} \lambda_{wa,i} [r_i p_{c,i} - r_{i-1} p_{c,i-1}]) = S_{w,i}^{k+1} \end{aligned} \quad (D.20)$$

aplicando Crank-Nicholson

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{k+1} &= S_{w,i}^k + \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_i} \frac{f_{w,i-1}^k - f_{w,i}^k}{\Delta r} \\
&+ \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_{i+1}^k p_{c,i+1}^k - r_i^k p_{c,i}^k] \right. \\
&- (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_i^k p_{c,i}^k - r_{i-1}^k p_{c,i-1}^k] \left. \right\} \\
&+ \frac{(1 - \gamma) \Delta \sigma}{r_i} \frac{f_{w,i-1}^{k+1} - f_{w,i}^{k+1}}{\Delta r} \\
&+ \frac{(1 - \gamma) \Delta \sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ (1 - f_{w,i}^{k+1}) \lambda_{wa,i}^{k+1} [r_{i+1}^{k+1} p_{c,i+1}^{k+1} - r_i^{k+1} p_{c,i}^{k+1}] \right. \\
&- (1 - f_{w,i}^{k+1}) \lambda_{wa,i}^{k+1} [r_i^{k+1} p_{c,i}^{k+1} - r_{i-1}^{k+1} p_{c,i-1}^{k+1}] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{D.21}$$

D.2.1. A la entrada.

Considerando que a la entrada la derivada de la presión capilar ($p_{c,i-1}^{k+1} = 0$) queda:

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{k+1} &= S_{w,i}^k + \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_i} \frac{f_{w,J}^k - f_{w,i}^k}{\Delta r} \\
&+ \frac{\gamma \Delta \sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} f_{g,1}^k \lambda_{wa,1}^k [r_2^k p_{c,2}^k - r_1^k p_{c,1}^k] \\
&+ \frac{(1 - \gamma) \Delta \sigma}{r_1} + \frac{f_{w,J}^{k+1} - f_{w,1}^{k+1}}{\Delta r} \\
&+ \frac{(1 - \gamma) \Delta \sigma}{r_w r_1} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ f_{g,1}^{k+1} \lambda_{wa,1}^{k+1} [(r_2^{k+1} p_{c,2}^{k+1}) - (r_1^{k+1} p_{c,1}^{k+1})] \right\}
\end{aligned} \tag{D.22}$$

D.2.2. A la salida.

De la ecuación general

$$\begin{aligned}
S_{w,i}^{k+1} &= S_{w,i}^k + \frac{\Delta \sigma}{r_i} \frac{f_{w,i-1}^k - f_{w,i}^k}{\Delta r} \\
&+ \frac{\Delta \sigma}{r_w r_i} \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_{i+1}^k p_{c,i+1}^k - r_i^k p_{c,i}^k] \right. \\
&- (1 - f_{w,i}^k) \lambda_{wa,i}^k [r_i^k p_{c,i}^k - r_{i-1}^k p_{c,i-1}^k] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{D.23}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned}
&\frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\Delta \sigma} + \frac{1}{r} \frac{f_{w,i_{max}} - f_{w,i_{max}-1}}{\Delta r} - \frac{1}{r_w r_{i_{max}}} \frac{1}{\Delta r^2} \\
&\left([1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} \cdot 2[(r_{i_{max}+1} p_{c,i_{max}+1}) - (r_{i_{max}} p_{c,i_{max}})] \right. \\
&\left. - [1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} [(r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}) - (r_{i_{max}-1} p_{c,i_{max}-1})] \right) = 0
\end{aligned} \tag{D.24}$$

multiplicando por Δr

$$\begin{aligned} & \frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\Delta \sigma} \Delta r + \frac{f_{w,i_{max}} - f_{w,i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} - \frac{1}{r_w r_{i_{max}}} \frac{1}{\Delta r} \\ & \left([1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} \cdot 2[r_{i_{max}+1} p_{c,i_{max}+1} - (r_N p_{c,i_{max}})] \right. \\ & \left. - [1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} [r_{i_{max}} p_{c,i_{max}} - (r_{i_{max}-1} p_{c,i_{max}-1})] \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.25)$$

sumando

$$\begin{aligned} & \frac{S_w^{k+1} - S_w^k}{\Delta \sigma} \Delta r + \frac{f_{w,i_{max}}}{r} - \frac{f_{w,i_{max}-1}}{r} - \frac{1}{r_w r_{i_{max}}} \\ & \frac{1}{\Delta r} \left(\lambda_{wa,i_{max}} 2[r_{i_{max}+1} p_{c,i_{max}+1} - r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}] \right. \\ & \left. - f_{w,i_{max}} \lambda_{wa,i_{max}} 2[(r_{i_{max}+1} p_{c,i_{max}+1}) - (r_{i_{max}} p_{c,i_{max}})] \right. \\ & \left. - [1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} [r_N p_{c,i_{max}} - r_{i_{max}-1} p_{c,i_{max}-1}] \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.26)$$

si

$$U_{w,i_{max}+1} = \frac{r_w f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} - \frac{2\lambda_{wa,i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\Delta r} + \frac{2\lambda_{wa,i_{max}} f_{w,i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\Delta r} \quad (D.27)$$

multiplicando por r_w

$$\frac{U_{w,i_{max}+1}}{r_w} = \frac{f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} - \frac{2\lambda_{wa,i_{max}} p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} + \frac{2\lambda_{wa,i_{max}} f_{w,i_{max}} p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} \quad (D.28)$$

reduciendo términos:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i_{max}}^{k+1} - S_{w,i_{max}}^k}{\Delta \sigma} \Delta r + \frac{f_{w,i_{max}}}{r} - \frac{f_{w,i_{max}-1}}{r} - \frac{1}{r_w} \\ & \frac{1}{\Delta r} \left(\lambda_{wa,i_{max}} \cdot 2 \left[\frac{r_{i_{max}+1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}+1} - p_{c,i_{max}} \right] \right. \\ & \left. - f_{w,i_{max}} \lambda_{wa,i_{max}} \cdot 2 \left[\frac{r_{i_{max}+1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}+1} - p_{c,i_{max}} \right] \right. \\ & \left. - [1 - f_{w,i_{max}}] \lambda_{wa,i_{max}} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.29)$$

si la p_c a la salida es cero:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i_{max}}^{k+1} - S_{w,i_{max}}^k}{\Delta\sigma} \Delta r + \frac{f_{w,i_{max}}}{r} - \frac{f_{w,i_{max}-1}}{r} \\ & - \left(-\frac{\lambda_{wa,i_{max}} 2p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} + \frac{f_{w,i_{max}} \lambda_{wa,i_{max}} 2p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} \right. \\ & \left. - [1 - f_{w,i_{max}}] \frac{\lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.30)$$

sustituyendo la velocidad del agua a la salida:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i_{max}}^{k+1} - S_{w,i_{max}}^k}{\Delta\sigma} \Delta r + \frac{f_{w,i_{max}}}{r} - \frac{f_{w,i_{max}-1}}{r} \\ & - \left(\frac{U_{w,i_{max}+1}}{r_w} - \frac{f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} - [1 - f_{w,i_{max}}] \right. \\ & \left. \frac{\lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] \right) = 0 \end{aligned} \quad (D.31)$$

simplificando

$$\begin{aligned} & \frac{S_{w,i_{max}}^{k+1} - S_{w,i_{max}}^k}{\Delta\sigma} \Delta r + \frac{2f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} - \frac{f_{w,i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} - \frac{U_{w,i_{max}+1}}{r_w} \\ & + [1 - f_{w,i_{max}}] \frac{\lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (D.32)$$

agrupando

$$\begin{aligned} & S_{w,i_{max}}^{k+1} - S_{w,i_{max}}^k + \frac{2\Delta\sigma f_{w,i_{max}}}{\Delta r r_{i_{max}}} - \frac{\Delta\sigma f_{w,i_{max}-1}}{\Delta r r_{i_{max}}} - \frac{\Delta\sigma U_{w,i_{max}+1}}{\Delta r r_{i_{max}}} \\ & + [1 - f_{w,i_{max}}] \frac{\Delta\sigma \lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r^2} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (D.33)$$

despejando la saturación

$$\begin{aligned} S_{w,i_{max}}^{k+1} &= S_{w,i_{max}}^k - \frac{2\Delta\sigma f_{w,i_{max}}}{\Delta r r_{i_{max}}} + \frac{\Delta\sigma f_{w,i_{max}-1}}{\Delta r r_{i_{max}}} + \frac{\Delta\sigma U_{w,i_{max}+1}}{\Delta r r_{i_{max}}} \\ & - [1 - f_{w,i_{max}}] \frac{\Delta\sigma \lambda_{wa,i_{max}}}{r_w \Delta r^2} \left[p_{c,i_{max}} - \frac{r_{i_{max}-1}}{r_{i_{max}}} p_{c,i_{max}-1} \right] \end{aligned} \quad (D.34)$$

D.3. Velocidad del agua.

$$u_w = f_w u_t + \frac{u_t \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \left(x \frac{\partial p_c}{\partial x} + P_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{D.35})$$

$$U_w u_c = f_w u_t + \frac{u_t \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \left(\frac{R_d \Delta P_{cc}}{R_d} \frac{\partial p_c}{\partial r} r + \Delta P_{cc} p_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{D.36})$$

Simplificando:

$$U_w u_c = f_w u_t + \frac{u_t \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \Delta P_{cc} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{D.37})$$

definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$u_t = \frac{q_t}{2\pi x h}$$

$$u_t = \frac{q_t}{R_d 2\pi r h}$$

$$\Delta P_{cc} = \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w}$$

sustituyendo en (D.37):

$$U_w u_c = f_w \frac{q_t}{R_d 2\pi r h} + \frac{\frac{q_t}{R_d 2\pi r h} \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g}} \quad (\text{D.38})$$

despejando la velocidad del agua.

$$U_w = f_w \frac{q_t}{u_c R_d 2\pi r h} + \frac{\frac{q_t}{R_d 2\pi r h} \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{u_c \left(1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g} \right)} \quad (\text{D.39})$$

si

$$u_c = \frac{q_t}{2\pi r h R_w}$$

sustituyendo en (D.39):

$$U_w = f_w \frac{q_t}{\frac{q_t}{2\pi r h R_w} R_d 2\pi r h} + \frac{\frac{q_t}{R_d 2\pi r h} \left(\frac{2\pi h k k_{rg}}{q_t \mu_g} \right) \frac{q_t R_d}{2\pi h \lambda_c R_w} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{\frac{q_t}{2\pi r h R_w} \left(1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g} \right)} \quad (\text{D.40})$$

simplificando

$$U_w = f_w \frac{q_t}{\frac{q_t}{2\pi r h R_w} R_d 2\pi r h} + \frac{\left(\frac{k k_{rg}}{\mu_g} \right) \frac{1}{\lambda_c} \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{\left(1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g} \right)} \quad (\text{D.41})$$

agrupando y simplificando por las variables adimensionales definidas en el Apéndice C

$$U_w = f_w \frac{R_w}{r R_d} + \frac{\frac{1}{r} \left(\frac{k k_{rg}}{\mu_g} \right) \frac{1}{\lambda_c} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{\left(1 + \frac{k_{rg} \mu_w}{k_{rw} \mu_g} \right)} \quad (\text{D.42})$$

sustituyendo

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{\frac{1}{r} \lambda_g \frac{1}{\lambda_c} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{\left(1 + \frac{\lambda_g}{\lambda_w} \right)} \quad (\text{D.43})$$

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{\frac{1}{r} \lambda_g \lambda_w \frac{1}{\lambda_c} \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right)}{\lambda_g + \lambda_w} \quad (\text{D.44})$$

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{1}{r} \lambda_{wa} f_g \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right) \quad (\text{D.45})$$

sustituyendo f_g por la definición de flujo fraccional.

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{1}{r} \lambda_{wa} (1 - f_w) \left(r \frac{\partial p_c}{\partial r} + p_c \right) \quad (\text{D.46})$$

$$U_w = f_w \frac{r_w}{r} + \frac{1}{r} \lambda_{wa} (1 - f_w) \frac{\partial (r p_c)}{\partial r} \quad (\text{D.47})$$

$$U_{w,i} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_i} + \frac{1}{r_i} \lambda_{wa,i} (1 - f_{w,i}) \left[\frac{r_i p_{c,i} - r_{i-1} p_{c,i-1}}{\Delta r} \right] \quad (\text{D.48})$$

$$U_{w,i} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_i} + \lambda_{wa,i} (1 - f_{w,i}) \left[\frac{p_{c,i} - \frac{r_{i-1}}{r_i} p_{c,i-1}}{\Delta r} \right] \quad (\text{D.49})$$

$$U_{w,i} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_i} + \lambda_{wa,i} \frac{p_{c,i} - \frac{r_{i-1}}{r_i} p_{c,i-1}}{\Delta r} - \lambda_{wa,i} f_{w,i} \frac{p_{c,i} - \frac{r_{i-1}}{r_i} p_{c,i-1}}{\Delta r} \quad (\text{D.50})$$

D.3.1. A la entrada.

Para las condiciones de frontera a la entrada en $i = 1$ el gradiente de la presión capilar es cero.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r p_c)}{\partial r} = 0 \quad (\text{D.51})$$

entonces:

$$U_{w,1} = f_{w,1} \frac{r_w}{r_1} \quad (\text{D.52})$$

D.3.2. A la salida.

Para las condiciones de frontera a la salida en i_{imax} tenemos:

$$U_{w,imax} = f_{w,imax} r_w + \lambda_{wa,imax} (1 - f_{w,imax}) \left[\frac{p_{c,imax} - r_{imax-1} p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] \quad (\text{D.53})$$

$$U_{w,imax} = f_{w,imax}r_w + \lambda_{wa,imax}(1 - f_{w,imax}) \left[\frac{0 - r_{imax-1}p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] \quad (D.54)$$

$$U_{w,imax} = f_{w,imax}r_w + \lambda_{wa,imax} \left[\frac{-r_{imax-1}p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] - \lambda_{wa,imax}f_{w,imax} \left[\frac{-r_{imax-1}p_{c,imax-1}}{\Delta r} \right] \quad (D.55)$$

D.4. Velocidad del gas.

Para el cálculo de la U_g se tiene que:

$$u_t = u_w + u_g \quad (D.56)$$

$$u_t = u_c U_w + u_c U_g \quad (D.57)$$

de Darcy

$$\frac{q_t}{2\pi h x} = u_c U_w + u_c U_g \quad (D.58)$$

usando las transformaciones adimensionales:

$$\frac{q_t}{2\pi h r R_d u_c} = U_w + U_g \quad (D.59)$$

recordando la expresión (D.3)

$$\frac{q_t}{2\pi h r R_d \left(\frac{q_t}{2\pi r h R_w} \right)} = U_w + U_g \quad (D.60)$$

agrupando:

$$\frac{q_t}{2\pi h r \left(\frac{q_t}{2\pi h} \right)} \frac{R_w}{r R_d} = U_w + U_g \quad (D.61)$$

simplificando:

$$\frac{r_w}{r} = U_w + U_g \quad (D.62)$$

considerando la condición de frontera a la salida para la saturación:

$$U_{w,i} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_i} + \lambda_{wa,i} \frac{p_{c,i} - \frac{r_{i-1}}{r_i} p_{c,i-1}}{\Delta r} - \lambda_{wa,i} f_{w,i} \frac{p_{c,i} - \frac{r_{i-1}}{r_i} p_{c,i-1}}{\Delta r} \quad (D.63)$$

$$U_{w,imax+1} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_{imax}} + \frac{1}{r_{imax}} \lambda_{wa,imax} \left(\frac{r_{imax+1} p_{c,imax+1} - r_{imax} p_{c,imax}}{\frac{\Delta r}{2}} \right) - \frac{1}{r_{imax}} \lambda_{wa,imax} f_{w,imax} \left(\frac{r_{imax+1} p_{c,imax+1} - r_{imax} p_{c,imax}}{\frac{\Delta r}{2}} \right) \quad (D.64)$$

como es a la salida $r_{i_{max}+1}p_{c,i_{max}+1} = 0$

$$U_{w,i_{max}+1} = f_{w,i} \frac{r_w}{r_{i_{max}}} + \frac{1}{r_{i_{max}}} \lambda_{wa,i_{max}} \left(\frac{-r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\frac{\Delta r}{2}} \right) - \frac{1}{r_{i_{max}}} \lambda_{wa,i_{max}} f_{w,i_{max}} \left(\frac{-r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\frac{\Delta r}{2}} \right) \quad (D.65)$$

factorizando:

$$\frac{U_{w,i_{max}+1}}{r_w} = \frac{f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} + \frac{2}{r_w r_{i_{max}}} \lambda_{wa,i_{max}} \left(\frac{-r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\Delta r} \right) - \frac{2}{r_w r_{i_{max}}} \lambda_{wa,i_{max}} f_{w,i_{max}} \left(\frac{-r_{i_{max}} p_{c,i_{max}}}{\Delta r} \right) \quad (D.66)$$

agrupando y ordenando:

$$\frac{U_{w,i_{max}+1}}{r_w} = \frac{f_{w,i_{max}}}{r_{i_{max}}} + \lambda_{wa,i_{max}} \left(\frac{-2p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} \right) - \lambda_{wa,i_{max}} f_{w,i_{max}} \left(\frac{-2p_{c,i_{max}}}{r_w \Delta r} \right) \quad (D.67)$$

D.5. Formación de la espuma.

De nuestro modelo de la generación de espuma

$$R_g = S_w \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)^m \quad (D.68)$$

discretizando

$$R_g = S_w \left(\frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r} \right)^m \quad (D.69)$$

D.5.1. A la entrada.

$$R_g = S_w \left(\frac{p_J - \frac{1}{2}[p_1 + p_2]}{\Delta r} \right)^m \quad (D.70)$$

D.5.2. A la salida.

$$R_g = S_w \left(\frac{\frac{1}{2}[p_{N-1} + p_N] - p_{outlet}}{\Delta r} \right)^m \quad (D.71)$$

D.6. Presión.

Considerando la ecuación de Darcy

$$-\frac{\partial P_w}{\partial x} = \frac{u_w \mu_w}{k k_{rw}} \quad (\text{D.72})$$

usando grupos adimensionales:

$$-\frac{\Delta P_{cc}}{R_d} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{U_w u_c \mu_w}{k k_{rw}} \quad (\text{D.73})$$

despejando:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{R_d U_w u_c \mu_w}{\Delta P_{cc} k k_{rw}} \quad (\text{D.74})$$

sustituyendo por la definición de u_c y ΔP_{cc}

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{R_d U_w \mu_w \left(\frac{q_t}{2\pi r h R_w} \right)}{\left(\frac{R_d q_t}{2\pi r h \lambda_c R_w} \right) k k_{rw}} \quad (\text{D.75})$$

simplificando:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{2\pi h \lambda_c R_w R_d U_w q_t \mu_w}{2\pi h R_w q_t R_d k k_{rw}} \quad (\text{D.76})$$

reduciendo:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\lambda_c \mu_w}{k k_{rw}} U_w \quad (\text{D.77})$$

por definición:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\lambda_c}{\lambda_w} U_w \quad (\text{D.78})$$

es igual que:

$$-\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{U_w}{\lambda_{wa}} \quad (\text{D.79})$$

discretizando:

$$-\frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta r} = \frac{U_w}{\lambda_{wa}} \quad (\text{D.80})$$

despejando Δr :

$$-P_{i+1} + P_i = \Delta r \frac{U_w}{\lambda_{wa}} \quad (\text{D.81})$$

despejando la presión

$$P_{i+1} = P_i \Delta r \frac{U_w}{\lambda_{wa}} \quad (\text{D.82})$$

D.6.1. A la entrada.

$$P_1 = P_J - \frac{\Delta r}{2} \frac{U_{w,J}}{\lambda_{wa,1}} \quad (\text{D.83})$$

donde:

$$P_J = \frac{P_w^J}{\Delta P_{cc}} \quad (\text{D.84})$$

Bibliografía

- Afsharpoor, A. (2009). Mechanistic foam modeling and simulations: gas injection during surfactant-alternating-gas processes using foam-catastrophe theory.
- Ashoori, E. (2012). Foam for enhanced oil recovery: Modeling and analytical solutions.
- Baghdikian, S. Y. and L. L. Handy (1991). Transient behavior of simultaneous flow of gas and surfactant solution in consolidated porous media. Technical report, Univ. of Southern California, Los Angeles, CA (United States).
- Bernard, G. G., L. Holm, et al. (1964). Effect of foam on permeability of porous media to gas. *Society of Petroleum Engineers Journal*@(03), 267–274.
- Bikerman, J. J. (1973). *Foams-Applied physics and engineering*, Volume 1. Springer-Verlag, New York.
- Boud, D. C. and O. C. Holbrook (1958, December 30). Gas drive oil recovery process. *US Patent 2,866,507*.
- Bravo, M. D. (2017). *Modelo Radial de Inyección de Espumas en Medios Porosos*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Chaouche, M., N. Rakotomalala, D. Salin, and Y. Yortsos (1993). Capillary effects in immiscible flows in heterogeneous porous media. *EPL (Europhysics Letters)*@(1), 19.
- Chen, M., W. Rossen, and Y. C. Yortsos (2005). The flow and displacement in porous media of fluids with yield stress. *Chemical engineering science*@(15), 4183–4202.
- Cheng, L., A. Reme, D. Shan, D. Coombe, W. Rossen, et al. (2000). Simulating foam processes at high and low foam qualities. In *SPE/DOE improved oil recovery symposium*. Society of Petroleum Engineers.

- Chou, S. et al. (1990). Percolation theory of foam in porous media. In *SPE/DOE Enhanced Oil Recovery Symposium*. Society of Petroleum Engineers.
- Chowdiah, P., B. Misra, J. Kilbane II, V. Srivastava, and T. Hayes (1998). Foam propagation through soils for enhanced in-situ remediation. *Journal of hazardous materials* (3), 265–280.
- Derjaguin, B. V., N. V. Churaev, V. M. Muller, and V. Kisin (1987). *Surface forces*. Springer.
- Dholkawala, Z. F., H. Sarma, and S. Kam (2007). Application of fractional flow theory to foams in porous media. *Journal of Petroleum Science and Engineering* (1-2), 152–165.
- Dicksen, T., G. J. Hirasaki, C. A. Miller, et al. (2002). Conditions for foam generation in homogeneous porous media. In *SPE/DOE improved oil recovery symposium*. Society of Petroleum Engineers.
- Falls, A., J. Musters, J. Ratulowski, et al. (1989). The apparent viscosity of foams in homogeneous bead packs. *SPE Reservoir Engineering* (02), 155–164.
- Fisher, A., R. Foulser, S. Goodyear, et al. (1990). Mathematical modeling of foam flooding. In *SPE/DOE enhanced oil recovery symposium*. Society of Petroleum Engineers.
- Fried, A. N. (1960). Foam-drive process for increasing the recovery of oil. Technical report, Bureau of Mines, San Francisco, Calif.(USA). San Francisco Petroleum
- Friedmann, F., W. Chen, P. Gauglitz, et al. (1991). Experimental and simulation study of high-temperature foam displacement in porous media. *SPE reservoir engineering* (01), 37–45.
- Gauglitz, P. A., F. Friedmann, S. I. Kam, and W. R. Rossen (2002). Foam generation in homogeneous porous media. *Chemical Engineering Science* (19), 4037–4052.
- Green, D. and G. Willhite (1998). Enhanced oil recovery: Richardson. *Texas, SPE Texas Book Series 6*.
- Hirasaki, G. J., J. Lawson, et al. (1985). *Mechanisms of foam flow in porous media: apparent viscosity in smooth capillaries*. Society of Petroleum Engineers Journal (02), 176–190.
- Huang, X.-Z. and Y.-Q. Jin (1995). *Scattering and emission from two-scale randomly rough sea surface with foam scatterers*. IEE Proceedings-Microwaves, Antennas and Propagation (2), 109–114.

-
- Huh, D., T. Cochrane, F. Kovarik, et al. (1989). *The effect of microscopic heterogeneity on co2-foam mobility: Part 1—mechanistic study*. *Journal of Petroleum Technology* (08), 872–879.
- Islam, M., S. Ali, et al. (1988). *Numerical simulation of foam flow in porous media*. In Annual Technical Meeting. *Petroleum Society of Canada*.
- Johnson, E., D. Bossler, V. Bossler, et al. (1959). *Calculation of relative permeability from displacement experiments*.
- Kam, S. and W. Rossen (2003). *A model for foam generation in homogeneous porous media*. *spej 8 (4): 417–425*. Technical report, SPE-87334-PA.
- Kam, S. I., Q. P. Nguyen, Q. Li, W. R. Rossen, et al. (2007). *Dynamic simulations with an improved model for foam generation*. *SPE Journal* (01), 35–48.
- Khatib, Z., G. Hirasaki, A. Falls, et al. (1988). *Effects of capillary pressure on coalescence and phase mobilities in foams flowing through porous media*. *SPE reservoir engineering* (03), 919–926.
- Kovscek, A., T. W. Patzek, and C. Radke (1995). *A mechanistic population balance model for transient and steady-state foam flow in boise sandstone*. *Chemical Engineering Science* (23), 3783–3799.
- Kovscek, A. and C. Radke (1994). *Fundamentals of foam transport in porous media*. ACS Advances in Chemistry Series 242, 115–164.
- Lake, L. W. (1989). *Enhanced oil recovery*.
- Marfoe, C., H. Kazemi, W. Ramirez, et al. (1987). *Numerical simulation of foam flow in porous media*.
- Matias, C. L. (2011). *Inyección de espumas en proyectos de recuperación mejorada; control de movilidad del gas*. Technical report, Universidad Nacional Autónoma de México, DF (México).
- Mohammadi, S., J. Collins, and D. Coombe (1995). *Field application and simulation of foam for gas diversion*. In *IOR 1995-8th European Symposium on Improved Oil Recovery*.
- Namdar Zanganeh, M., W. Rossen, et al. (2013). *Optimization of foam enhanced oil recovery: balancing sweep and injectivity*. *SPE Reservoir Evaluation & Engineering* (01), 51–59.

- Parlar, M., M. Parris, R. Jasinski, J. Robert, et al. (1995). An experimental study of foam flow through berea sandstone with applications to foam diversion in matrix acidizing. In *SPE Western Regional Meeting*. Society of Petroleum Engineers.
- Patzek, T., N. Myhill, et al. (1989). Simulation of the bishop steam foam pilot. In *SPE California Regional Meeting*. Society of Petroleum Engineers.
- Pei, P., K. Ling, J. He, and Z. Liu (2015). Shale gas reservoir treatment by a co₂-based technology. *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 26, 1595–1606.
- Ransohoff, T. and C. Radke (1988). Laminar flow of a wetting liquid along the corners of a predominantly gas-occupied noncircular pore. *Journal of colloid and interface science* 92(2), 392–401.
- Roof, J. et al. (1970). Snap-off of oil droplets in water-wet pores. *Society of Petroleum Engineers Journal* 01(1), 85–90.
- Rossen, W. and P. Gauglitz (1990). Percolation theory of creation and mobilization of foams in porous media. *AIChE Journal* 38(8), 1176–1188.
- Rossen, W., S. Zeilinger, J. Shi, M. Lim, et al. (1999). Simplified mechanistic simulation of foam processes in porous media. *SPE Journal* 03(3), 279–287.
- Rossen, W., Z. Zhou, C. Mamun, et al. (1995). Modeling foam mobility in porous media. *SPE Advanced Technology Series* 01(1), 146–153.
- Rossen, W. R. (1996). Foams in enhanced oil recovery. *Foams: Theory, Measurements and Applications* 57, 413–464.
- Rossen, W. R. (2003). A critical review of roof snap-off as a mechanism of steady-state foam generation in homogeneous porous media. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects* 103(1–3), 1–24.
- Sanchez, J. and R. S. Schechter (1989). Surfactant effects on the two-phase flow of steam-water and nitrogen-water through permeable media. *Journal of Petroleum Science & Engineering* 1(1), 185–199.
- Singh, G., G. Hirasaki, and C. Miller (1996). Effect of material properties on the drainage of symmetric, plane parallel, mobile foam films. *Journal of colloid and interface science* 177(1), 92–105.
- Sugden, S. (1924). Vi.—the variation of surface tension with temperature and some related functions. *Journal of the Chemical Society, Transactions* 125, 32–41.

- Tanzil, D. (2001). Foam generation and propagation in heterogeneous porous media. Ph. D. thesis.*
- Van Duijn, C., J. Molenaar, and M. De Neef (1995). The effect of capillary forces on immiscible two-phase flow in heterogeneous porous media. Transport in porous media@1, 71–93.*
- Van Lingen, P., S. Knight, et al. (1997). Evaluation of capillary entrapment within reservoir flow units. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers.*
- Weaire, D. and S. Hutzler (1999). The physics of foams. clarendon.*
- Zhou, Z., W. Rossen, et al. (1995). Applying fractional-flow theory to foam processes at the "limiting capillary pressure". SPE Advanced Technology Series@01, 154–162.*
- Zitha, P. and D. Du (2010). A new stochastic bubble population model for foam flow in porous media. Transport in Porous Media@3, 603–621.*

*

Índice alfabético

(h) espesor de la lamela, 12

C_c es un parámetro de la velocidad de coalescencia de lamelas, 32

C_c y n son parámetros de la velocidad para la coalescencia de lamelas, 34

C_f es una constante que se adaptó a este problema, 20

C_g es la compresibilidad del gas, 29

C_g es un parámetro del modelo, 33

C_m curvatura de la lamela, 12

C_s es la concentración de surfactante, 30

C_s^{max} es la máxima concentración de surfactante, 30

D es una constante, 30

E es una variable empírica del modelo, 30

E_D es la eficiencia de desplazamiento microscópico, 11

E_V es la eficiencia de desplazamiento macroscópico, 11

$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ y F_7 son parámetros de ajuste del modelo en función del surfactante, aceite, gas y salinidad, 31

F_o es una función que describe la sensibilidad de la espuma al aceite, 21

F_s es una función que describe la sensibilidad de la espuma a la concentración de surfactante, 21

F_w es una función que describe la sensibilidad de la espuma al agua, 21

K_1 y K_2 son parámetros que involucran el coeficiente de elasticidad de Gibbs de las lamelas, 33

K_d es el coeficiente de destrucción de burbujas, 33

K_g es un coeficiente de generación de burbujas, 33

L_B es la longitud de la lamela perteneciente a la burbuja, 25

L_p es la longitud característica del medio poroso, 31

L_s es la longitud del bache de líquido, 24

MRF es el factor de reducción de la movilidad a una velocidad de referencia, 30

- MRF es el factor de reducción de movilidad a una velocidad de referencia, 31
- P_C es la presión capilar máxima, 31
- P_C es un coeficiente de la presión, 25
- P_c es la presión capilar, 32
- P_c es la presión capilar adimensional, 43
- P_c presión capilar, 12
- R es el radio capilar, 24, 25
- R es una constante que tiene en cuenta la máxima resistencia del flujo a la espuma, 21
- R_c es el índice de coalescencia de la misma, 22
- R_c es el índice de destrucción de las lamelas, 44
- R_c es el cambio de textura por unidad de tiempo, 34
- R_g es el índice de creación de las lamelas, 44
- R_g es el índice de generación de la espuma, 22
- S_w^* representa la saturación crítica de agua, 22
- S_g es la saturación del gas, 20, 22
- S_g saturación del gas, 34
- S_w es la saturación de agua, 15, 29, 32, 33
- S_w es la saturación del agua, 22, 30
- S_w saturación de agua, 34
- S_w^* es la saturación crítica, 34
- S_w^* es la saturación crítica de agua, 32
- S_w^* es la saturación crítica del agua, 30, 33
- S_{gf} es la saturación del gas fluyendo, 22
- S_{gr} es la saturación de gas residual, 33
- S_{gt} es la saturación del gas atrapado, 22
- S_{wc} es la saturación de agua congénita, 33
- S_{wr} es la saturación de agua irreductible, 29, 30
- U es la velocidad de la burbuja, 24
- U la velocidad del gas, 25
- V_f es el volumen ocupado por la espuma con respecto a la garganta de poro, 32
- V_f volumen de fluido, 9
- V_g es el volumen del gas, 32
- V_g es la velocidad intersticial del gas de referencia, 31
- V_p es volumen de poro, 9
- ΔP es un diferencial de presiones, 32
- ΔP_f diferencia de presión de entrada y salida en una inyección de espuma del núcleo de referencia en la condición de referencia, 30

- ΔP_{cc} es un diferencial de presión característico entre la presión de inyección y la presión del yacimiento, 43
- ΔP_{nf} diferencia de presión entre la entrada y la salida en una inyección de referencia sin espuma, 30
- Γ es la fracción del volumen de gas atrapado dentro de la burbuja, 24
- β es un parámetro de atrapamiento, 15
- χ_f es la fracción de gas fluyente, 31, 33
- χ_t es una fracción de espuma atrapada, 15
- χ_t^{max} es la máxima fracción de espuma atrapada, 15
- η_f es la textura de la espuma, 32, 33
- η_f es la textura de la espuma en el flujo de gas, 22
- η_t es la cantidad de lamelas atrapadas en unidad de volumen., 15
- γ tensión superficial, 12
- κ es un parámetro positivo que controla el espesor de la frontera gas-aceite, 22
- λ_c es la movilidad característica del sistema, 44
- λ_w es la movilidad del agua , 44
- λ_{wa} es la movilidad característica adimensional, 44
- μ es la viscosidad de la espuma, 25
- μ es la viscosidad del fluido, 24
- μ es la viscosidad del líquido, 24
- μ_g^0 es la viscosidad inicial del gas, 19
- μ_g^f es la viscosidad aparente de la espuma, 19
- μ_{ap}^{liq} es la viscosidad aparente del líquido, 25
- μ_f es la viscosidad de la espuma, 29, 32, 33
- μ_f es la viscosidad del gas, 31
- μ_g es la viscosidad del gas, 29, 30, 32, 33
- μ_s es la viscosidad del surfactante, 31
- μ_w es la viscosidad del agua, 30
- $\bar{\phi}$ es la porosidad promedio, 41
- ϕ es la porosidad, 34, 41
- σ es el tiempo adimensional, 43
- σ es la tensión interfacial, 10
- σ es la tensión superficial, 24, 25, 31
- σ_ϕ es la desviación estándar de la distribución, 41
- φ es la porosidad del medio, 20
- ζ es un parámetro de ajuste para modelar la viscosidad de la espuma, 40
- a es un parámetro del modelo relacionado con la presión, 31

- a_e está definida por el algoritmo de Box-Müller para una distribución normal, 41
- b es un parámetro de ajuste, 32
- b_f es la apertura de la fractura, 32
- c_s es una concentración de surfactante, 31
- f es la función de flujo, 19
- f_c, f_k, f_p son funciones permiten una gran variación de la viscosidad de la espuma, 30
- f_{mr} es factor de reducción de la movilidad, 21
- h es una función de la viscosidad del gas original, 19
- k es la permeabilidad, 30, 41
- k_{rg}^0 es la permeabilidad relativa del gas en su estado original, 21
- k_{rg}^0 es la permeabilidad relativa del gas en su forma original, 19
- k_{rg}^f es la permeabilidad relativa del gas en una espuma, 19
- k_w es la permeabilidad del agua, 30
- k_w^* es la permeabilidad crítica del agua, 30
- k_{rf} es la permeabilidad relativa de la espuma, 30–33
- k_{rg} es la permeabilidad relativa del gas, 31–33
- m es un parámetro de la velocidad de generación de lamelas, 32
- m es un parámetro del modelo de la velocidad de creación de lamelas, 32
- n es un modelo de la velocidad de coalescencia de lamelas, 32
- n es un parámetro para la viscosidad, 32
- n_D es el tamaño mínimo de burbuja que está relacionado con el tamaño mínimo de poro, 20
- n_L es el número de lamelas por unidad de longitud, 24
- n_L es el número de lamelas por unidad de volumen, 31
- n_L es la longitud adimensional de la porción de la lamela (movilidad de la interfase), 25
- n_f textura de la espuma, 34
- n_s es un número adimensional por el efecto del gradiente de la tensión superficial, 25
- n_t es la textura de la espuma en el flujo de gas atrapado, 22
- p_{ch} es un parámetro dependiente de la temperatura, es constante y adimensional, 10
- q coalescencia de las burbujas, 19
- q_b es un término fuente, 22
- r_B es el radio equivalente de la burbuja, 24
- r_c es el radio de curvatura de la interfase gas-líquido, 24, 44
- r_g es el índice de generación de la lamela por unidad de volumen en la fase gaseosa, 20
- r_{cc} es el índice característico de coalescencia de lamelas, 44
- r_{gc} es el índice característico de generación de lamelas, 44
- s_g es un coeficiente de dispersión, 32

t_c que representa el tiempo de llenado del sistema, 43

u es la velocidad de la burbuja, 32

u_g es la velocidad del gas, 29, 30, 33

u_g velocidad del gas, 34

u_w es la velocidad del agua, 30

u_{ref} es una velocidad de referencia del modelo, 32

v_L Volumen de líquido en la espuma, 8

v_g Volumen de gas en la espuma, 8

Π función de la presión de ruptura, 12

Br que es la relación entre la viscosidad del gas y la viscosidad característica (definida como la viscosidad máxima que puede alcanzar la espuma), 44

Ca es un número capilar que representa la relación entre las fuerzas viscosas y las fuerzas capilares, 45

Da es un parámetro del modelo que representa el tiempo característico de llenado contra los tiempos característicos de coalescencia, 45

Ga es un parámetro del modelo que compara el término de generación de la espuma contra el de coalescencia de la misma, 44

