



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Física de partículas en compactificaciones de la cuerda heterótica
con y sin supersimetría

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN FÍSICA

PRESENTA:
RICARDO PÉREZ MARTÍNEZ

TUTOR PRINCIPAL
Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez
Instituto de Física, UNAM

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
Dr. Alberto Güijosa Hidalgo. Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM
Dr. Paul Artur Jens Erler Weber. Instituto de Física, UNAM

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., febrero 2020



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicada a mi Madre.

Quiero agradecer al Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez por darme la oportunidad de trabajar en este interesante proyecto de tesis, así como por todas sus atenciones y apoyo en las diversas etapas del posgrado, además de sus útiles comentarios para mejorar mi trabajo de investigación. Deseo agradecer también a mis dos miembros del comité tutor, el Dr. Alberto Güijosa Hidalgo y el Dr. Paul Artur Jens Erler Weber, por formar parte de la guía que mejora mi trabajo de tesis y mi formación profesional. Además, agradezco a todos los miembros del grupo de trabajo de fenomenología de cuerdas, en particular a Yessenia Olgún Trejo y Omar Pérez Figueroa, por las comunicaciones de trabajo que tuvimos en las colaboraciones de los proyectos. Agradezco también el apoyo y comprensión por parte de mi familia.

Esta investigación recibió apoyo del Programa de Apoyo a Estudios de Posgrado (PAEP) de la UNAM, del programa de intercambio académico entre la UNAM y la UA de C, del programa de becas de posgrado del departamento de superación académica de la UA de C, de la FCFM de la UA de C, y del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN100217 “Altas energías y cuerdas tras el hallazgo del Higgs.” Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos CONACyT F-252167 y 278017, así como por el PIIF.

Índice general

Introducción	IV
0.1. Motivación	IV
0.2. Estructura	VII
0.3. Publicaciones	IX
1. Compactificación en orbifolios	1
1.1. Cuerda heterótica supersimétrica	1
1.1.1. Modos derechos	2
1.1.2. Modos izquierdos	3
1.1.3. Espectro sin masa	4
1.2. Orbifolios toroidales	5
1.2.1. Definición	5
1.2.2. Clases y puntos fijos	7
1.3. Formalismo de compactificación	8
1.3.1. Algunas especificaciones y restricciones	8
1.3.2. Compactificación de la cuerda heterótica en orbifolios	12
1.3.3. Transformación de los estados bajo el orbifolio	18
1.3.4. Compatibilidad de los estados con el orbifolio	20
1.3.5. Estados físicos invariantes bajo el orbifolio	21
1.4. $E_8 \times E_8$ en \mathbb{Z}_3	24
1.4.1. Sector no torcido	25

1.4.2. Sector torcido	30
2. Cuerda heterótica sin supersimetría	36
2.1. Construcción de $SO(16) \times SO(16)$	36
2.2. Orbifolio \mathbb{Z}_3 de la cuerda no supersimétrica	45
2.2.1. Sector no torcido	45
2.2.2. Sector torcido	51
3. Orbifolios y simetrías de sabor	56
3.1. Elementos teóricos	57
3.1.1. Invarianza del grupo de espacio	57
3.1.2. Geometría de los puntos fijos	58
3.1.3. Simetrías discretas de sabor	59
3.2. Simetrías de sabor en orbifolios	59
3.2.1. \mathbb{Z}_3 en $D = 2$	60
3.2.2. \mathbb{Z}_3 en $D = 6$	63
3.2.3. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ en $D = 6$	65
3.2.4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 2$ con rototraslaciones	66
3.2.5. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 6$	71
3.3. Búsqueda de modelos tipo MSSM	72
3.3.1. Simetrías de sabor en modelos tipo MSSM	77
4. $U(1)'$ a partir de $E_8 \times E_8$	79
4.1. Modelos MSSM y vacíos efectivos en el orbifolio \mathbb{Z}_8	80
4.2. Metodología: búsqueda de vacíos con unificación	81
4.3. Resultados: acoplamientos de $U(1)'$ a bajas energías	85
4.3.1. Vacíos efectivos de nuestro interés	85
4.3.2. Vacíos con unificación parcial	86
4.3.3. Vacíos con unificación total	89
4.4. $U(1)'$ y estabilidad del vacío de Higgs	93

5. Hacia fenomenología de cuerdas sin supersimetría	96
5.1. Modelos tipo SM	96
5.2. Vacíos efectivos	97
5.3. Análisis de acoplamientos $U(1)'$	99
5.3.1. Resultados para vacíos unificados y sin SUSY	100
5.3.2. Detalles de un vacío con un campo de Higgs	104
5.3.3. Detalles de un vacío con multi-Higgses	106
5.4. Planes	108
6. Conclusiones	109
A. Tablas de simetrías	112
A.1. Simetrías en modelos sin líneas de Wilson	112
A.2. Simetrías en modelos con líneas de Wilson	114
B. Detalles en el análisis de vacíos	120
B.1. Ecuaciones de evolución para los acoplamientos	120
B.2. Tablas para números de vacíos	123
B.3. Valores estadísticos	125
B.4. Valores en el caso sin SUSY	126

Introducción

0.1. Motivación

La teoría de cuerdas y la física de partículas son interesantes campos de estudio que, junto con las propiedades de simetría, la cosmología y las observaciones experimentales, nos han permitido un entendimiento de los fenómenos naturales presentes en el universo, así como la identificación de nuevos problemas o propiedades físicas, las cuales requieren de una explicación que usualmente necesita nuevas ideas u observaciones.

Por una parte, el Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés, Standard Model) de la física de partículas, con grupo de norma $\mathcal{G}_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, es conocido por describir exitosamente las interacciones fuertes y electrodébiles entre los quarks y leptones a energías accesibles por los actuales aceleradores de partículas (~ 100 GeV). Este modelo, aunque exitoso, es incompleto, debido a algunas cuestiones y observaciones cuya respuesta no es dada en este modelo. Por ejemplo, la razón al patrón de masas de los fermiones, el porqué existen tres familias o generaciones de fermiones en el SM y la naturaleza de la materia oscura, son solo algunas cuestiones no respondidas por este modelo. Además, el SM no incorpora la interacción gravitacional. Esto nos indica que es necesario considerar nuevas ideas o teorías como una extensión al SM.

La supersimetría (SUSY) ha sido una parte teórica importante a considerar como una extensión al SM en el llamado modelo mínimo estándar supersimétrico (MSSM, por sus siglas en inglés, Minimal Supersymmetric Standard Model). Al incluir SUSY se busca explicar, por ejemplo, el problema de la jerarquía, es decir, el porqué la intensidad de la interacción electrodébil es mucho más intensa que la gravitatoria. Otro punto teórico a favor de SUSY es que el álgebra supersimétrica es la extensión natural al álgebra de Poincaré, la cual contiene al álgebra de Lorentz, que resulta ser, junto con la simetría de norma, una simetría primordial en la construcción de teorías físicas consistentes. Como sucede en la historia de la física, toda observación, predicción o idea teórica, necesita ser confirmada experimentalmente o al menos tener indicios de una evidencia de su existencia para ser aceptada total o parcialmente (y también, como ha sucedido en la historia de la física, diversas ideas teóricas no confirmadas en su tiempo, han sido usualmente descubiertas experimentalmente en un futuro). En este sentido, SUSY, aunque sumamente atractiva, tiene la característica de que aún no ha sido

descubierta en los experimentos tales como en el colisionador de partículas LHC (Large Hadron Collider). Siendo abiertos, esto nos indica que vale la pena considerar teorías con y sin SUSY, y estudiar que tan significantes pueden resultar sus implicaciones en la física de partículas o en cosmología.

Por otra parte, la búsqueda de una teoría de unificación en las cuatro interacciones de la naturaleza (fuerte, débil, electromagnética y gravitacional) ha sido una labor teórica ambiciosa. Una de las teorías fundamentales que permiten una descripción unificada de estas interacciones es la teoría de cuerdas, la cual está definida en un espacio-tiempo de 10 dimensiones, ($D = 10$), y puede tener o no, supersimetría en el espacio-tiempo. En esta teoría se postula que las cuerdas son los constituyentes fundamentales del universo, y que entre sus diferentes modos de vibración se identifican a las partículas del SM y al gravitón. Como una teoría más completa en $D = 10$, uno podría desear estudiar cómo hacer contacto con la física en $D = 4$, y cuáles son sus implicaciones. Para obtener modelos en $D = 4$ se compactifican, en espacios compactos de radio pequeño, las 6 dimensiones espaciales adicionales de la teoría de cuerdas.

Uno de los esquemas fructíferos en esta dirección es la cuerda heterótica compactificada en orbifolios toroidales abelianos supersimétricos. Esta teoría está formada por cuerdas cerradas cuyos modos derechos e izquierdos pueden ser tratados independientemente. La construcción de esta teoría permite obtener la cuerda heterótica supersimétrica¹ con grupo de norma $E_8 \times E_8$, y la no supersimétrica con grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$ en $D = 10$. Un orbifolio es un espacio compacto que resulta de dividir el espacio real por el llamado grupo de espacio, y permiten obtener modelos prometedores en $D = 4$ con o sin supersimetría, dependiendo de la teoría de cuerda heterótica considerada en la compactificación en tales orbifolios.

En esta tesis nos interesamos en estudiar la conexión entre la cuerda heterótica en $D = 10$ con la física de partículas en los modelos tipo MSSM y tipo SM en $D = 4$ que resultan de compactificar la cuerda heterótica en los orbifolios toroidales abelianos. Consideramos ambas cuerdas heteróticas, con y sin supersimetría. Las motivaciones que nos dirigen al trabajo de investigación presentado en esta tesis son las siguientes.

Simetrías discretas de sabor y modelos tipo MSSM

El número de familias y las masas de los fermiones son algunas cuestiones que en el SM no tienen una explicación. En modelos más allá del SM, en el esquema bottom-up, se ha propuesto añadir grupos discretos al grupo de norma del SM para intentar dar explicación a estas y otras cuestiones fenomenológicas del sabor [1, 2]. Para una revisión de grupos discretos aplicados en física de partículas ver por ejemplo [3]. En estos modelos, sin embargo, no se da una razón del origen (a partir del mismo modelo) de la simetría discreta de sabor elegida. Por otra parte, en los modelos dentro del esquema top-bottom, como por ejemplo, los modelos tipo MSSM que se obtienen de las compactificaciones

¹Existe también la cuerda heterótica supersimétrica $SO(32)$, pero no la consideramos en este trabajo.

de la cuerda heterótica en orbifolios [4], es conocido que la geometría del orbifolio provee simetrías discretas de sabor, dando así una razón a su origen [5]. En este contexto de modelos de cuerdas se ha explorado la fenomenología del sabor usando algunos grupos discretos cuyo origen proviene de la geometría del orbifolio [6, 7]. Todos los orbifolios toroidales abelianos que preservan SUSY en $D = 4$ han sido clasificados en [8]. Resultaría interesante realizar una clasificación de modelos tipo MSSM que provengan de la compactificación de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en estos orbifolios usando el `orbifolder` [9], y conocer las simetrías discretas de sabor que estos modelos heredan de la geometría del orbifolio. Los modelos tipo MSSM requieren, usualmente, la inclusión de líneas de Wilson (LW) en las geometrías de los orbifolios usados para obtener tales modelos. Las LW tienen, a la vez, una influencia en la estructura del grupo de sabor. Por estas razones, nos interesa realizar una búsqueda amplia de modelos tipo MSSM en los orbifolios toroidales supersimétricos, y clasificarlos de acuerdo a la estructura de las LW y la simetría de sabor correspondiente.

Simetrías abelianas adicionales $U(1)'$

Una extensión natural al SM es considerar una o varias simetrías abelianas $U(1)'$. Estas simetrías aparecen en diversos modelos teóricos, por ejemplo, en las teorías de gran unificación E_6 [10, 11], en las construcciones de modelos derivados de la cuerda heterótica en la formulación fermiónica [12]. En particular, en los modelos tipo MSSM que se obtienen de la compactificación de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ en la formulación bosónica, es usual obtener un grupo de norma en $D = 4$ con varias simetrías adicionales $U(1)'$ [13, 14]. Las implicaciones fenomenológicas de estas simetrías en física de partículas y en cosmología son diversas, para una revisión general ver [15] y las referencias ahí citadas. Algunas de sus aplicaciones son en física de neutrinos [16], en la metaestabilidad del vacío de Higgs [17], o en la materia oscura [18]. Con el interés de estudiar las implicaciones de estas simetrías $U(1)'$ provenientes de cuerdas, consideramos los modelos tipo MSSM que surgen de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en orbifolios toroidales abelianos. En particular, nos interesa explorar el corrimiento de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ que aparece en tales modelos, para dar una predicción de su valor a bajas energías.

Modelos tipo SM de la cuerda heterótica sin SUSY

La supersimetría es altamente llamativa y ha sido útil en la construcción de teorías más allá del SM. Sin embargo, al no tener todavía una evidencia de su existencia en la naturaleza, vale la pena estudiar modelos sin SUSY. En la fenomenología de cuerdas normalmente se estudian los modelos supersimétricos, por ejemplo, los que provienen de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en orbifolios. Por otra parte, resulta interesante que la construcción de la cuerda heterótica permite la existencia de la cuerda no supersimétrica en $D = 10$ y con grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$ [19, 20, 21]. Por lo tanto, la teoría $SO(16) \times SO(16)$ toma un papel

especial para explorar la fenomenología no supersimétrica de los modelos obtenidos mediante su compactificación. En este trabajo nos interesamos en las compactificaciones de esta teoría en los orbifolios toroidales abelianos, donde modelos tipo SM pueden ser obtenidos [22], para investigar que tan factible puede ser la fenomenología de estos modelos. Una primera actividad es desarrollar una búsqueda amplia de modelos tipo SM a partir de las compactificaciones de esta teoría en orbifolios toroidales abelianos \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ usando el `orbifolder` adaptado al caso sin SUSY. El grupo de norma en $D = 4$ de estos modelos tipo SM tiene una estructura general que es similar a la del caso supersimétrico, por ejemplo, se tiene también la presencia de simetrías $U(1)'$ en el grupo de norma efectivo. Los aspectos fenomenológicos que pueden ser estudiados en estos modelos son diversos, por ejemplo, la influencia de las simetrías abelianas $U(1)'$ en la materia oscura, la constante de acoplamiento de la $U(1)'$, o estudios estadísticos de vacíos de cuerdas [23].

0.2. Estructura

En el capítulo 1 se presenta el formalismo teórico usado en la compactificación de la cuerda heterótica en orbifolios. Comenzamos por una descripción de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$, incluyendo el espectro de estados sin masa de esta teoría. Después, damos los detalles de lo que es un orbifolio toroidal, su construcción y su geometría. Los aspectos formales del proceso de compactificación de la cuerda heterótica en orbifolios son presentados, donde las transformaciones de los estados de la cuerda heterótica bajo la simetría del orbifolio, resultan ser fundamentales para obtener el espectro resultante en los llamados sectores no torcidos y torcidos del orbifolio. Además, se desarrolla el caso particular de la compactificación de la teoría $E_8 \times E_8$ en el orbifolio \mathbb{Z}_3 como una aplicación de las herramientas aprendidas, y para ganar algunas habilidades de cálculo que nos permiten tratar otros casos.

En el capítulo 2 se desarrolla la construcción de la cuerda heterótica sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$ en la formulación bosónica. Esta teoría no supersimétrica se obtiene a partir de la cuerda $E_8 \times E_8$ utilizando un orbifolio \mathbb{Z}_2 que mantiene (remueve) algunos estados de la cuerda $E_8 \times E_8$ que resultan ser invariantes (no invariantes) ante la simetría \mathbb{Z}_2 y que forman parte del sector no torcido del orbifolio, mientras que en el sector torcido se tienen nuevos estados. Después de obtener y presentar el espectro sin masa para esta teoría no supersimétrica en $D = 10$, se realiza su compactificación en el orbifolio \mathbb{Z}_3 , donde obtenemos el grupo de norma y el espectro no supersimétrico resultante en $D = 4$. Las retículas de pesos para las cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ y $SO(16) \times SO(16)$, y algunos elementos de teoría de grupos tales como raíces simples, coeficientes y diagramas de Dynkin, entre otros, son algunas herramientas adicionales frecuentemente usadas en estos desarrollos.

En el capítulo 3 presento mis contribuciones al trabajo sobre simetrías de sabor. Esta parte corresponde a un trabajo de investigación que resultó en una publicación. Se comienza con una revisión de los elementos teóricos usados para determinar las simetrías de sabor a partir de la geometría

del orbifoldo, específicamente por la regla de selección del grupo de espacio y por la localización de los puntos fijos en el orbifoldo. Se presentan algunos ejemplos sin y con rototraslaciones, donde se remarca la influencia de las líneas de Wilson (LW) en la estructura de los grupos discretos de sabor. La relación que le da cierta importancia a esta propiedad es que los modelos tipo MSSM requieren usualmente LW no triviales en las geometrías de los orbifoldos usados en las compactificaciones. Ya que uno de los intereses de este trabajo es determinar las simetrías de sabor que los modelos tipo MSSM pueden tener, me enfoco a realizar una búsqueda de estos modelos a partir de las compactificaciones de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ en los orbifoldos toroidales abelianos clasificados en [8]. Para esta búsqueda se usa el `orbifolder`. Después, realizo una clasificación de modelos de acuerdo al número de LW no triviales presentes en sus definiciones. Se presentan los resultados de esta búsqueda y clasificación de modelos. Para estos modelos se determinaron las simetrías de sabor y los resultados son presentados en el apéndice A. Los detalles de todos los modelos (vectores de desplazamiento y LW), como son requeridos por el `orbifolder`, se reportan en nuestra página web [24], donde están clasificados por el número de LW no nulas y por la simetría de sabor correspondiente. Esta es la búsqueda de modelos tipo MSSM más extensa realizada hasta la fecha.

En el capítulo 4 presento mis contribuciones en el proyecto de investigación sobre estudios de $U(1)'$ s que provienen de las compactificaciones de cuerdas y que resultó en una publicación. Comienzo por dar algunos detalles y propiedades sobre los modelos tipo MSSM que obtuvimos en las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica en los orbifoldos \mathbb{Z}_8 que resultan ser relevantes para nuestro estudio de simetrías $U(1)'$. En estos modelos estudiamos vacíos efectivos especiales con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)'$, donde \mathcal{G}_{SM} es el grupo del SM. Utilizando las ecuaciones del grupo de renormalización (RGE) a un lazo, seleccionamos vacíos efectivos que presentan unificación en las cuatro constantes de acoplamiento (de los grupos factores en \mathcal{G}_{eff}) en una escala M_{GUT} y con acoplamiento unificado α_{GUT} . Usamos, además, los valores conocidos para los acoplamientos del SM a bajas energías. En estos vacíos efectivos especiales nos enfocamos en determinar los valores para el acoplamiento de la $U(1)'$ en la escala $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$, considerando tres diferentes escalas de rompimiento de SUSY, $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV . Los resultados para los valores del acoplamiento de la $U(1)'$ a bajas energías, $g_4(\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV})$, de la escala de unificación, M_{GUT} , y del acoplamiento unificado, α_{GUT} , son presentados para las tres escalas Λ_{SUSY} consideradas. Los detalles de estos vacíos efectivos (vectores de desplazamiento, LW, espectro sin masa, generador de la $U(1)'$) pueden ser encontrados en nuestra página web [25]. Otros detalles para el análisis de vacíos efectivos tales como ecuaciones y tablas de datos usados para los resultados de este proyecto se presentan en el apéndice B. Como un estudio secundario, analizamos en un vacío particular, la utilidad de la $U(1)'$ para resolver el problema de la metaestabilidad del vacío de Higgs.

En el capítulo 5 presento mis resultados preliminares de la primera búsqueda extensiva de modelos tipo SM a partir de las compactificaciones de la cuerda heterótica sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$ en las 138 geometrías de orbifoldos toroidales abelianos, \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, clasificadas en [8]. Para esta actividad uso el `orbifolder` en la versión sin supersimetría. Para los modelos de los orbifoldos \mathbb{Z}_N encuentro los vacíos efectivos en $D = 4$ con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)'$, así como

detalles de estos, tales como el vector de desplazamiento, las líneas de Wilson, el generador de la $U(1)'$ y el espectro de los estados sin masa. En los modelos de los orbifolds con grupo de punto \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_8 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ efectúo una búsqueda de vacíos con unificación total, en el mismo sentido que en el capítulo 4 pero ahora sin SUSY. Realizo el análisis respectivo para los acoplamientos del grupo de norma en \mathcal{G}_{eff} para determinar los valores del acoplamiento de la simetría adicional $U(1)'$ a bajas energías, en $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$, y los comparo con los resultados obtenidos del caso sin SUSY del capítulo 4. Los detalles para dos vacíos con unificación total son presentados. Se remarca que el primero de ellos resulta ser muy cercano al SM. Con estos resultados preliminares realizaré un estudio fenomenológico detallado, por ejemplo en estudiar las simetrías adicionales $U(1)'$ y sus implicaciones en la materia oscura, estudios del corrimiento de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ en otros orbifolds, o estudios estadísticos de vacíos de cuerdas donde *machine learning* podría ser de ayuda.

Finalmente, en el capítulo 6 presento las conclusiones de este proyecto de tesis así como los planes de trabajo en un futuro cercano.

0.3. Publicaciones

El trabajo presentado en los capítulos 3 y 4 ha contribuido a los artículos publicados en las siguientes revistas científicas:

- Y. Olgún-Trejo, R. Pérez-Martínez and S. Ramos-Sánchez, “Charting the flavor landscape of MSSM-like Abelian heterotic orbifolds,” *Phys. Rev. D* **98**, no. 10, 106020 (2018) doi:10.1103/PhysRevD.98.106020 [arXiv:1808.06622 [hep-th]].
- Y. Olgún-Trejo, O. Pérez-Figueroa, R. Pérez-Martínez and S. Ramos-Sánchez, “ $U(1)'$ coupling constant at low energies from heterotic orbifolds,” *Phys. Lett. B* **795**, 673 (2019) doi:10.1016/j.physletb.2019.06.065 [arXiv:1901.10102 [hep-ph]].

Capítulo 1

Compactificación en orbifolios

Este capítulo tiene como objetivo presentar el formalismo de compactificación en orbifolios de la cuerda heterótica. Presento primero una breve descripción de la cuerda heterótica supersimétrica para pasar a la compactificación en orbifolios y al caso \mathbb{Z}_3 como un ejemplo.

1.1. Cuerda heterótica supersimétrica

La cuerda heterótica es una teoría en 10 dimensiones formada por cuerdas cerradas cuyas condiciones de frontera implican que los modos derechos e izquierdos no se mezclan permitiendo así que ambos modos puedan ser tratados independientemente. En la formulación bosónica la parte izquierda está formada por 26 grados de libertad bosónicos mientras que la parte derecha consiste en 10 grados de libertad supersimétricos como se muestra enseguida

$$(X_L^0, X_L^1, X_L^2, X_L^3, X_L^4, \dots, X_L^9, X_L^{10}, \dots, X_L^{25}), \quad (1.1)$$

$$(X_R^0, X_R^1, X_R^2, X_R^3, X_R^4, \dots, X_R^9), \quad (1.2)$$

$$(\psi_R^0, \psi_R^1, \psi_R^2, \psi_R^3, \psi_R^4, \dots, \psi_R^9). \quad (1.3)$$

Estos grados de libertad son las coordenadas de la cuerda y son funciones de los parámetros τ y σ que definen la hoja de mundo. Las coordenadas de la cuerda son entonces un mapeo de la hoja de mundo al espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones. Las coordenadas bosónicas X_L^I , con $I = 10, 11, \dots, 25$, son compactificadas en un toro de 16 dimensiones donde la invarianza modular, la cual garantiza una teoría libre de anomalías, impone que la retícula del toro debe ser la retícula de raíces del grupo de norma $E_8 \times E_8$ o $SO(32)$ para una teoría supersimétrica, o la del grupo $SO(16) \times SO(16)$ para una teoría no supersimétrica. En esta tesis consideramos las cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ y $SO(16) \times SO(16)$. En este capítulo nos referimos a la primera, y en el capítulo 2 se trata la construcción de la segunda. A las coordenadas X_L^I se les llama coordenadas de

norma. Las coordenadas del espacio usual de Minkowski en 4 dimensiones tienen índices que van de 0 a 3. Las coordenadas adicionales, con índices que van de 4 a 9, son las que serán compactificadas en un orbifold de seis dimensiones. Nos concentraremos en estados físicos sin masa. Como es usual, en este caso se tiene que no todos los grados de libertad son independientes por lo que es posible usar la norma cono de luz, donde las dos primeras coordenadas, las de índices 0 y 1, son fijas. En esta norma tenemos los grados de libertad transversales o físicos del espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones que corresponden a X_L^i , ψ_R^i , X_R^i , donde $i = 2, 3, \dots, 9$. Utilizamos esta norma en el resto del capítulo.

1.1.1. Modos derechos

En este sector tenemos la supercuerda. Las soluciones a las ecuaciones de movimiento, para los campos bosónicos y fermiónicos, con la condición de frontera para cuerdas cerradas son los modos de expansión

$$X_R^i(\tau - \sigma) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (1.4)$$

$$\psi_R^i(\tau - \sigma) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^i e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (1.5)$$

$$\psi_R^i(\tau - \sigma) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^i e^{-2ir(\tau - \sigma)}, \quad (1.6)$$

donde $i = 2, 3, \dots, 9$. La expansión (1.5) corresponde a la condición de frontera periódica o de Ramond (R) y (1.6) a la condición antiperiódica o de Neveu-Schwarz (NS). Para cuantizar estas soluciones, se emplea un proceso de cuantización canónica, en el que los modos de expansión se promueven a operadores y se les imponen relaciones de (anti-)conmutación, provenientes de la relación básica entre los operadores de posición y momento de la mecánica cuántica. De esta forma, se obtiene que las soluciones corresponden a las de osciladores armónicos (bosónicos y fermiónicos) cuánticos desacoplados, y que los modos de oscilación ($\alpha_{-n}^i, d_{-n}^i, b_{-r}^i$) con $n, r > 0$ corresponden a operadores de creación y (α_n^i, d_n^i, b_r^i) con $n, r > 0$ a operadores de aniquilación, actuando sobre un estado vacío $|0\rangle$.

El estado sin masa en el sector de NS (R) corresponde a $b_{-1/2}^i|0\rangle$ ($d_0^i|0\rangle$) y se transforma como un vector (espinor) de $SO(8)$, el cual es el grupo pequeño o transversal del grupo de Lorentz $SO(9, 1)$ para los estados no masivos. Una manera conveniente de denotar a ambos estados es por $|q\rangle$, donde q corresponde a los pesos de la representación vectorial $\mathbf{8}_v$ de $SO(8)$ para el sector de NS, y a los pesos de la representación espinorial $\mathbf{8}_s$ de $SO(8)$ para el sector de R, entonces

$$|q\rangle = \begin{cases} |(\pm 1, 0, 0, 0)\rangle & \text{NS,} \\ |(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})\rangle & \text{R,} \end{cases} \quad (1.7)$$

donde la línea de subrayado en $(\underline{\pm 1}, 0, 0, 0)$ indica que se toman las permutaciones de sus elementos y en $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$ se toma un número par de $+\frac{1}{2}$'s. En esta notación, la condición para los momentos de estados no masivos en el sector derecho está dada por

$$\frac{1}{4}M_R^2 = \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2} = 0. \quad (1.8)$$

1.1.2. Modos izquierdos

En este sector tenemos la cuerda bosónica. Los modos de expansión son

$$X_L^i(\tau + \sigma) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}p^i(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^i e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (1.9)$$

$$X_L^I(\tau + \sigma) = x^I + p^I(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (1.10)$$

donde $i = 2, \dots, 9$, $I = 10, \dots, 25$. Como antes, al imponer la cuantización canónica de estas soluciones, los modos de oscilación bosónicos $\tilde{\alpha}_{-n}^i$ y $\tilde{\alpha}_{-n}^I$ ($\tilde{\alpha}_n^i$ y $\tilde{\alpha}_n^I$) con $n > 0$ son interpretados como operadores de creación (aniquilación). La condición para los estados izquierdos sin masa está dada por

$$\frac{1}{4}M_L^2 = \frac{1}{2}p^2 + \tilde{N} - 1 = 0, \quad (1.11)$$

donde \tilde{N} es el operador de número, el cual cuenta el número de osciladores izquierdos de creación que actúan en un estado base. Por ejemplo, $\tilde{N}(\tilde{\alpha}_{-n}^i|0\rangle) = n(\tilde{\alpha}_{-n}^i|0\rangle)$, $\tilde{N}(\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_{-m}^j|0\rangle) = (n + m)(\tilde{\alpha}_{-n}^i \tilde{\alpha}_{-m}^j|0\rangle)$, $i \neq j$. Los subíndices n y m , en los operadores de creación, denotan el nivel (energético) del estado. Además, $p^2 = p \cdot p = \sum_I p^I p^I$, con p el momento de las coordenadas de norma X_L^I , las cuales fueron compactificadas en un toro de 16 dimensiones resultando en que p es un elemento de $\Lambda_{E_8 \times E_8}$, la retícula de raíces de $E_8 \times E_8$. La ecuación (1.11) establece que los estados no masivos corresponden a tener $\tilde{N} = 1$ y $p = 0$ además de $\tilde{N} = 0$ y $p^2 = 2$. Por lo tanto, los estados izquierdos sin masa son

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \quad \text{y} \quad |p\rangle \quad \text{con} \quad p^2 = 2. \quad (1.12)$$

Los estados $\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle$ se transforman en la representación vectorial $\mathbf{8}_v$ de $SO(8)$ y son singuletes bajo el grupo de norma $E_8 \times E_8$. Los 16 estados de norma izquierdos, $\tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle$ con $p^2 = 0$, tienen momentos nulos, $p^2 = 0$, que corresponden a las 16 raíces nulas de $E_8 \times E_8$. Los estados de norma $|p\rangle$, con $p^2 = 2$, tienen momentos p que corresponden a las 480 raíces no nulas de $E_8 \times E_8$ dados por

$$p = \begin{cases} (\pm 1, \pm 1, 0^6)(0^8), \\ (0^8)(\pm 1, \pm 1, 0^6), \\ ((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8), \\ (0^8)((\pm \frac{1}{2})^8), \end{cases} \quad (1.13)$$

donde la notación 0^n indica que n componentes son 0. La línea de subrayado indica, como antes, que se toma la permutación de los elementos subrayados. En $(\pm\frac{1}{2})^8$ se toma un número par de $+\frac{1}{2}$'s. En conjunto, todas estas raíces p (nulas y no nulas) corresponden a la representación adjunta $(\mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{248})$ de $E_8 \times E_8$.

1.1.3. Espectro sin masa

El espectro no masivo de la cuerda heterótica se obtiene al construir el producto directo de los estados izquierdos con los derechos sujeto a la condición de empatamiento de niveles $M_L = M_R = 0$. Usando (1.7) y (1.12) se obtienen los siguientes estados sin masa

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle \times |q\rangle, \quad i = 2, 3, \dots, 9, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle \times |q\rangle, \quad I = 10, 11, \dots, 25, \quad (1.15)$$

$$|p\rangle \times |q\rangle, \quad \text{con } p^2 = 2. \quad (1.16)$$

Los estados derechos $|q\rangle$ pueden ser de NS (R), formando la representación vectorial (espinorial) $\mathbf{8}_v$ ($\mathbf{8}_s$) de $SO(8)$, como se indicó en (1.7). Cada uno de los estados en (1.14), (1.15) y (1.16) están entonces formados por compañeros supersimétricos. Por ejemplo, en el estado dado en (1.14) se tiene

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle \times |q\rangle \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}_v & \text{NS,} \\ \mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s = \mathbf{8}_c + \mathbf{56}_c & \text{R,} \end{cases} \quad (1.17)$$

donde los estados se han expresado en términos de las representaciones del grupo transversal $SO(8)$. Lo anterior muestra que el contenido de partículas es el correspondiente al multiplete de supergravedad en el espacio-tiempo de 10 dimensiones con $\mathcal{N} = 1$, es decir, en la parte bosónica se tiene al dilatón (1 grado de libertad), el campo de Kalb Ramond (28 grados de libertad), al gravitón (35 grados de libertad) y en la parte fermiónica al dilatino (8 grados de libertad) y el gravitino (56 grados de libertad). El número de grados de libertad bosónicos y fermiónicos en el espacio-tiempo de 10 dimensiones es el mismo. Para los estados de norma, tenemos que el estado

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle \times |q\rangle, \quad I = 10, 11, \dots, 25 \quad (1.18)$$

representa, en la parte bosónica (NS), a 16 bosones de norma no cargados en la subálgebra de Cartan de $E_8 \times E_8$. La parte fermiónica (R) es análoga para los norminos. El estado

$$|p\rangle \times |q\rangle, \quad \text{con } p^2 = 2 \quad (1.19)$$

representa a 480 bosones de norma cargados en el álgebra complemento de la subálgebra de Cartan de $E_8 \times E_8$ además de sus 480 compañeros supersimétricos, los norminos. En total se tienen $480 + 16 = 496$ bosones de norma y norminos formando la representación adjunta del grupo $E_8 \times E_8$.

Tipo	$\mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8, \mathcal{N} = 1, \mathbf{D} = 10$
B	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle_{\text{NS}} (\phi, B_{ij}, G_{ij})$ $(\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v; \mathbf{1}, \mathbf{1})$ dilatón, Kalb-Ramond, gravitón
F	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle_{\text{R}} (\chi_\alpha, \psi_\alpha)$ $(\mathbf{8}_s \times \mathbf{8}_v; \mathbf{1}, \mathbf{1})$ dilatino, gravitino
B	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle + p\rangle) \times q\rangle_{\text{NS}} (A_i^{(I)}, A_i^{(p)})$ $(\mathbf{8}_v; (\mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{248}))$ 496 bosones de norma
F	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle + p\rangle) \times q\rangle_{\text{R}} (\chi_\alpha^{(I)}, \chi_\alpha^{(p)})$ $(\mathbf{8}_s; (\mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{248}))$ 496 norminos

Tabla 1.1: Espectro de los estados no masivos para la cuerda heterótica supersimétrica $\mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8$. En la primera columna B (F) indica bosones (fermiones). En los estados derechos $|q\rangle$ la etiqueta NS y R indica que los estados pertenecen al sector de Neveu-Schwarz y de Ramond. La notación en las representaciones es sobre los grupos $(\text{SO}(8); \mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8)$.

En la tabla 1.1 se presenta el espectro sin masa para la cuerda heterótica supersimétrica el cual es libre de taquiones debido a la condición de empatamiento de niveles. En resumen, los estados sin masa de la cuerda heterótica $\mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8$ representan a 496 bosones de norma y norminos transformando en la representación adjunta $(\mathbf{248}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{248})$ de $\mathbf{E}_8 \times \mathbf{E}_8$, el espectro es libre de taquiones y tiene $\mathcal{N} = 1$ supersimetría en el espacio-tiempo de 10 dimensiones.

1.2. Orbifolios toroidales

1.2.1. Definición

Un orbifolio en D -dimensiones, \mathcal{O}_D , es definido por

$$\mathcal{O}_D = \frac{\mathbb{R}^D}{S}, \quad (1.20)$$

donde \mathbb{R}^D es el espacio real euclidiano en D -dimensiones y S es el grupo de espacio definido por

$$S = \langle (\mathbb{1}, n_\alpha e_\alpha), (\vartheta, r_\alpha e_\alpha) \rangle, \quad (1.21)$$

lo que indica que S es generado por:

- $(\mathbb{1}, n_\alpha e_\alpha)$, traslaciones en una retícula de D -dimensiones definida por $\Lambda_D = \{n_\alpha e_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$, donde e_α son los vectores base y $\alpha = 1, \dots, D$.
- $(\vartheta, r_\alpha e_\alpha)$, donde ϑ es un elemento de un grupo discreto abeliano o no abeliano llamado el grupo de punto y denotado por P , el cual debe ser una simetría de la retícula Λ_D . P es un subgrupo del grupo ortogonal en D dimensiones, $P \subset O(D)$, por lo que sus elementos pueden ser rotaciones, inversiones y reflexiones. Cuando $r_\alpha \neq 0$ y $r_\alpha \notin \mathbb{Z}$ las traslaciones $r_\alpha e_\alpha \notin \Lambda_D$. A los elementos generados por $(\vartheta, r_\alpha e_\alpha)$ se les llama rototraslaciones.

Los elementos del grupo de espacio, S , se denotan por $g = (\vartheta, \mu)$ con $\mu \notin \Lambda_D$ o $\mu \in \Lambda_D$. El primer caso corresponde a S definido por (1.21) i.e. con rototraslaciones y el segundo a $S = \langle (\mathbb{1}, n_\alpha e_\alpha), (\vartheta, 0) \rangle$, i.e. con traslaciones $\mu = n_\alpha e_\alpha \in \Lambda_D$, ya que $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. La definición (1.20) establece que la manera en la que los elementos $g \in S$ actúan sobre las coordenadas $x \in \mathbb{R}^D$ está dada por la identificación

$$x \xrightarrow{g} x' = gx = (\vartheta, \mu)x = \vartheta x + \mu. \quad (1.22)$$

Una manera equivalente de definir al orbifolio es

$$\mathcal{O}_D = \frac{\mathbb{T}^D}{G}, \quad (1.23)$$

donde \mathbb{T}^D es el toro en D -dimensiones definido por

$$\mathbb{T}^D = \frac{\mathbb{R}^D}{\Lambda_D}, \quad (1.24)$$

implicando la identificación

$$x \rightarrow x' = x + n_\alpha e_\alpha, \quad (1.25)$$

donde $n_\alpha e_\alpha \in \Lambda_D$, ya que $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. A Λ_D se le llama la retícula del toro. Por esta razón, a los orbifolios definidos por (1.20) o (1.23) se les llama orbifolios toroidales.

Además, G es el grupo orbifolding, el cual incluye los casos con y sin rototraslaciones. En este último caso, i.e. $S = \langle (\mathbb{1}, n_\alpha e_\alpha), (\vartheta, 0) \rangle$, se tiene que, en vez de (1.23), el orbifolio puede ser definido como

$$\mathcal{O}_D = \frac{\mathbb{T}^D}{P}, \quad (1.26)$$

donde P es el grupo de punto. En este caso, el grupo de espacio, S , está dado por el producto semidirecto del grupo de punto, P , con las traslaciones en Λ_D ($S = P \ltimes \Lambda_D$) ya que $P \subset S$ y Λ_D es un subgrupo normal¹ del grupo de espacio S ($\Lambda_D \triangleleft S$).

Los elementos g de S de la forma $g = (\mathbb{1}, \mu)$, $\mu \in \Lambda_D$, tienen una acción trivial en el toro pues estos elementos actúan como en (1.25). En el caso $g = (\vartheta, \mu)$, $\mu \in \Lambda_D$, se tiene que ϑ ejerce una acción

¹Sea H un subgrupo de G , entonces H es normal en G ($H \triangleleft G$) si y solo si $ghg^{-1} \in H$, $\forall h \in H$ y $\forall g \in G$.

no trivial en el toro, pero si $\mu \notin \Lambda_D$ (caso con rototraslaciones) entonces tanto ϑ como μ actúan en forma no trivial en el toro. Una propiedad adicional para los elementos $g \in S$ es que tienen un orden N tal que $g^N = (\mathbb{1}, \lambda)$, donde $\lambda \in \Lambda_D$, lo cual impone las restricciones $\vartheta^N = \mathbb{1}$ y que el vector $\mu \notin \Lambda_D$ que efectúa las rototraslaciones cumpla que $\sum_{j=1}^{N-1} \vartheta^j \mu \in \Lambda_D$. En particular, si $\vartheta \mu = \mu$, ($\mu \neq 0$), entonces $\mu = \frac{1}{N} \lambda$, con $\lambda \in \Lambda_D$. El caso sin rototraslaciones es el más usual en la literatura. En esta tesis estudiamos orbifolios con y sin rototraslaciones para el trabajo presentado en el capítulo 3 sobre búsqueda de modelos tipo MSSM y simetrías de sabor.

Por otra parte, la operación producto en el grupo de espacio se define como sigue. Sean $g = (\vartheta, \mu)$ y $g' = (\vartheta', \mu') \in S$ entonces

$$gg' = (\vartheta, \mu)(\vartheta', \mu') = (\vartheta\vartheta', \vartheta\mu' + \mu) \in S. \quad (1.27)$$

Dado este producto (cerrado) en S , se puede verificar que los axiomas que definen a un grupo (asociatividad, elemento neutro y elemento inverso) se cumplen. Por ejemplo, para cada $g = (\vartheta, \mu) \in S$ su elemento inverso es $g^{-1} = (\vartheta^{-1}, -\vartheta^{-1}\mu) \in S$, ya que $gg^{-1} = (\mathbb{1}, 0) \in S$.

1.2.2. Clases y puntos fijos

Conjugación y clase conjugada

Sean \tilde{g}, g y $g' \in S$, entonces el elemento \tilde{g} es conjugado de g , con respecto al elemento g' , si y solo si están relacionados por la operación de conjugación $g' g g'^{-1} = \tilde{g}$. También se puede decir que \tilde{g} es equivalente a g .

La conjugación permite organizar los elementos de S en clases disjuntas ya que es una relación de equivalencia. Una clase asociada a algún elemento $g \in S$ es un conjunto de elementos de S denotado por $[g]$ que se define de la manera siguiente

$$[g] = \{g_a g g_a^{-1}\}, \quad \forall g_a \in S. \quad (1.28)$$

Para otro elemento $g' \in S$ tal que $g' \notin [g]$ se obtiene otra clase $[g'] = \{g_a g' g_a^{-1}\} \forall g_a \in S$ con la propiedad $[g] \cap [g'] = \emptyset$. Se obtienen todas las clases del grupo al repetir lo anterior para todo $g \in S$.

Explícitamente, la clase conjugada de $g = (\vartheta_1, \mu_1) \in S$ con respecto a $g' = (\vartheta_2, \mu_2) \in S$ tiene la forma

$$[g] = \{g' g g'^{-1}\} = \{(\vartheta_1, (\mathbb{1} - \vartheta_1) \mu_2 + \vartheta_2 \mu_1)\}. \quad (1.29)$$

Todos los elementos de una clase conjugada tienen una acción equivalente sobre $x \in \mathbb{R}^D$.

Puntos fijos

De la identificación (1.22) que define el orbifolio se tiene que pueden existir puntos fijos para $g = (\vartheta, \mu) \in S$ con ϑ no trivial. Un punto fijo x es aquel que queda invariante ante un elemento

$g \in S$, es decir, se cumple que

$$x = gx = (\vartheta, \mu)x = \vartheta x + \mu \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{1} - \vartheta)x = \mu. \quad (1.30)$$

Es conveniente referirse a un punto fijo por el elemento g de S que lo caracteriza y el cual es llamado el elemento constructor. Un orbifolio es plano excepto en sus puntos fijos, los cuales son singularidades de curvatura. Se cumple que los puntos fijos asociados a elementos de una clase de S son equivalentes en el orbifolio en el sentido de estar identificados por la acción de un elemento g de S . Es decir, si g' y g'' son elementos de una clase de S , entonces $g' = gg''g^{-1}$ para algún $g \in S$. Si $g'x' = x'$ y $g''x'' = x''$ entonces se verifica que $x' = gx''$, es decir, $x' \sim x''$ (x' es equivalente a x'') en el orbifolio ya que son identificados por la acción del grupo de espacio S . De esta forma, el número de puntos fijos inequivalentes en el orbifolio corresponde al número de clases de S .

Elementos constructores y puntos fijos equivalentes

De las dos definiciones anteriores, conjugación y puntos fijos, se concluye que para conocer si dos elementos constructores son conjugados (o equivalentes) se debe verificar lo siguiente. Sea $g = (\vartheta, \mu) \in S$ entonces g es equivalente a otro elemento $g' \in S$ si ambos difieren por una traslación en $(\mathbb{1} - \vartheta)\Lambda_D$, es decir,

$$g = (\vartheta, \mu) \sim g' = (\vartheta, \mu + (\mathbb{1} - \vartheta)\Lambda_D), \quad (1.31)$$

donde \sim indica 'equivalente'. A $(\mathbb{1} - \vartheta)\Lambda_D$ se le llama la retícula invariante de los puntos fijos. Además, dos puntos fijos x y x' son equivalentes si

$$x \sim x' = x + \Lambda_D, \quad (1.32)$$

es decir, si difieren por una traslación en Λ_D .

1.3. Formalismo de compactificación

1.3.1. Algunas especificaciones y restricciones

Nos interesamos ahora en el formalismo de compactificación de la cuerda heterótica en orbifolios. Comencemos por considerar los grados de libertad de la cuerda heterótica en la norma del cono de luz

$$(X_L^2, X_L^3, X_L^4, X_L^5, X_L^6, X_L^7, X_L^8, X_L^9, X_L^{10}, \dots, X_L^{25}), \quad (1.33)$$

$$(X_R^2, X_R^3, X_R^4, X_R^5, X_R^6, X_R^7, X_R^8, X_R^9), \quad (1.34)$$

$$(\psi_R^2, \psi_R^3, \psi_R^4, \psi_R^5, \psi_R^6, \psi_R^7, \psi_R^8, \psi_R^9), \quad (1.35)$$

donde se ha omitido escribir las dos primeras coordenadas, fijas en esta norma. El espacio transversal del espacio-tiempo de Minkowski en 10 dimensiones corresponde a las coordenadas con índices que van de 2 a 9. Las coordenadas de norma, X_L^I con $I = 10, \dots, 25$, están compactificadas en el toro de 16 dimensiones dando origen al grupo de norma $E_8 \times E_8$. Las campos en la parte transversal del espacio-tiempo usual de Minkowski en 4 dimensiones corresponden a $X_L^{2,3}$, $X_R^{2,3}$ y $\psi_R^{2,3}$. Las coordenadas que vamos a compactificar en un orbifoldo de 6 dimensiones son las que tienen índices que van de 4 a 9, correspondiente a los campos X_L^i , X_R^i y ψ_R^i , donde ahora $i = 4, \dots, 9$. De acuerdo a la subsección 1.2.1, un orbifoldo toroidal en 6 dimensiones está definido por

$$\mathcal{O}_6 = \frac{\mathbb{R}^6}{S}, \quad (1.36)$$

donde \mathbb{R}^6 corresponde al espacio donde los campos X_L^i , X_R^i y ψ_R^i , con $i = 4, \dots, 9$, residen. El grupo de espacio es generado por las traslaciones en Λ_6 (la retícula del toro \mathbb{T}^6), los elementos del grupo de punto $P \subset O(6)$ (grupo ortogonal en seis dimensiones) y rototraslaciones. El toro es definido por $\mathbb{T}^6 = \frac{\mathbb{R}^6}{\Lambda_6}$, donde Λ_6 es la retícula del toro definida por $\Lambda_6 = \{n_\alpha e_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$ donde e_α , con $\alpha = 4, \dots, 9$, son los vectores base de Λ_6 . Un toro \mathbb{T}^6 es factorizable si se puede escribir como $\mathbb{T}^6 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ y no factorizable de otra forma. Respecto al grupo discreto $P \subset O(6)$ nos enfocamos a grupos abelianos. El generador del grupo de punto P puede ser entonces denotado por

$$\theta = \text{diag}(e^{2\pi i v^1}, e^{2\pi i v^2}, e^{2\pi i v^3}), \quad (1.37)$$

donde $0 < |v^a| \leq 1$, $a = 1, 2, 3$. El operador θ actúa como $\theta(Z^1, Z^2, Z^3)^T$ sobre las coordenadas complejas $Z^a = X^{2a+2} + i X^{2a+3}$, $a = 1, 2, 3$, definidas en términos de las coordenadas reales $X^i = X_L^i + X_R^i \in \mathbb{R}$, $i = 4, \dots, 9$. El operador θ en forma real es equivalente a rotaciones, por cada bloque de 2×2 , sobre las coordenadas reales. Al vector $v = (v^1, v^2, v^3)$ se le llama el vector de torcimiento y caracteriza el ángulo de rotación en cada plano complejo o real.

Nos interesamos en los orbifolios toroidales abelianos que preservan $\mathcal{N} = 1$ en el espacio-tiempo de dimensión $D = 4$ al compactificar la cuerda heterótica supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ en $D = 10$. Si $v = (v^1, v^2, v^3)$ es el vector de torcimiento, entonces tales orbifolios cumplen que $v^1 + v^2 + v^3 = 0$, lo cual equivale a que $P \subset \text{SU}(3)$, la condición conocida para $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$. La clasificación completa de estos orbifolios fue desarrollada en [8]. El resultado es que los grupos de punto abelianos que son admisibles en estas construcciones son los grupos cíclicos \mathbb{Z}_N o $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ que se muestran en la tabla 1.2. En tal trabajo las diferentes retículas Λ_6 que son invariantes bajo el grupo de punto P corresponden a las clases \mathbb{Z} . Las diferentes traslaciones μ que pueden ser definidas en el grupo de espacio y que son compatibles con el grupo de punto P corresponden a las clases afines. En total, considerando las diferentes traslaciones y las diferentes retículas que son compatibles con cada grupo de punto, se tienen 138 orbifolios toroidales abelianos. Usualmente se hace referencia al orbifoldo por su grupo de punto. Todos estos orbifolios pueden ser usados en la compactificación de la cuerda heterótica para obtener modelos prometedores con $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$. En el caso de comenzar con la cuerda heterótica sin supersimetría, $\mathcal{N} = 0$ en $D = 10$, estos orbifolios producen modelos prometedores en $D = 4$ con $\mathcal{N} = 0$, i.e. no supersimétricos.

Etiqueta del orbifolio	Vector(es) de torcimiento	# de clases \mathbb{Z}	# de clases afines
\mathbb{Z}_3	$\frac{1}{3}(1, 1, -2)$	1	1
\mathbb{Z}_4	$\frac{1}{4}(1, 1, -2)$	3	3
\mathbb{Z}_6 -I	$\frac{1}{6}(1, 1, -2)$	2	2
\mathbb{Z}_6 -II	$\frac{1}{6}(1, 2, -3)$	4	4
\mathbb{Z}_7	$\frac{1}{7}(1, 2, -3)$	1	1
\mathbb{Z}_8 -I	$\frac{1}{8}(1, 2, -3)$	3	3
\mathbb{Z}_8 -II	$\frac{1}{8}(1, 3, -4)$	2	2
\mathbb{Z}_{12} -I	$\frac{1}{12}(1, 4, -5)$	2	2
\mathbb{Z}_{12} -II	$\frac{1}{12}(1, 5, -6)$	1	1
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\frac{1}{2}(0, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 0, -1)$	12	35
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{2}(0, 1, -1), \frac{1}{4}(1, 0, -1)$	10	41
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I	$\frac{1}{2}(0, 1, -1), \frac{1}{6}(1, 0, -1)$	2	4
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -II	$\frac{1}{2}(0, 1, -1), \frac{1}{6}(1, 1, -2)$	4	4
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	$\frac{1}{3}(0, 1, -1), \frac{1}{3}(1, 0, -1)$	5	15
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	$\frac{1}{3}(0, 1, -1), \frac{1}{6}(1, 0, -1)$	2	4
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	$\frac{1}{4}(0, 1, -1), \frac{1}{4}(1, 0, -1)$	5	15
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	$\frac{1}{6}(0, 1, -1), \frac{1}{6}(1, 0, -1)$	1	1

Tabla 1.2: Grupos de punto abelianos, \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, para los orbifolios toroidales en 6 dimensiones que dan $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$ en la compactificación de la cuerda heterótica supersimétrica. Usualmente se hace referencia al orbifolio por su grupo de punto. La segunda columna muestra los vectores de torcimiento asociados a los generadores del grupo de punto. En la tercera y cuarta columna se presenta, respectivamente, el número de retículas (o clases \mathbb{Z}) y las traslaciones en el grupo de espacio (clases afines) que son compatibles con cada grupo de punto. Los detalles de cada grupo de espacio están dados en [8].

Para la investigación de simetrías de sabor, presentada en el capítulo 3, consideramos las 138 geometrías de orbifolios presentadas en la tabla 1.2, y en particular consideramos 64 geometrías para la búsqueda de modelos tipo MSSM. Para la investigación de la constante de acoplamiento de simetrías $U(1)'$, presentada en el capítulo 4, nos enfocamos a los orbifolios \mathbb{Z}_8 ya que son los orbifolios que ofrecen el mayor número de modelos prometedores tipo MSSM, como se discutirá más adelante en el capítulo 3. Para la búsqueda de modelos tipo SM que provienen de la cuerda heterótica sin SUSY considero las 138 geometrías, como se presentará en el capítulo 5.

Veamos ahora la acción del grupo de espacio sobre las coordenadas de la cuerda. La definición de $P = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ está dada por

$$\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M = \{\theta^k \omega^l, k = 0, 1, \dots, N-1, l = 0, 1, \dots, M-1 \mid \theta^{0 \bmod N} = \mathbb{1}, \omega^{0 \bmod M} = \mathbb{1}\}, \quad (1.38)$$

donde

$$\theta = \text{diag}(e^{2\pi i v_1^1}, e^{2\pi i v_1^2}, e^{2\pi i v_1^3}), \quad \omega = \text{diag}(e^{2\pi i v_2^1}, e^{2\pi i v_2^2}, e^{2\pi i v_2^3}) \quad (1.39)$$

son los generadores de \mathbb{Z}_N y \mathbb{Z}_M respectivamente. Los dos vectores de torcimiento son

$$v_1 = (v_1^1, v_1^2, v_1^3), \quad v_2 = (v_2^1, v_2^2, v_2^3) \quad (1.40)$$

con la condición $\mathcal{N} = 1$, i.e. $\sum_{a=1}^3 v_j^a = 0$, para $j = 1$ y 2 . El caso $P = \mathbb{Z}_N$ puede ser entendido a partir de lo expuesto para $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, tomando v_2 igual al vector nulo, i.e. $\omega^l = \mathbb{1}$.

Ahora, sean $X^i = X_L^i + X_R^i$, $i = 4, \dots, 9$, las coordenadas bosónicas de cuerdas cerradas a compactificar, entonces la acción de $g = (\theta^k \omega^l, \mu) \in S$ sobre las coordenadas X^i está dada por

$$X^i \xrightarrow{g} X'^i = gX^i = (\theta^k \omega^l, \mu)X^i = \theta^k \omega^l X^i + \mu, \quad (1.41)$$

donde $\mu = n_\alpha e_\alpha + r_\alpha e_\alpha$ con $n_\alpha e_\alpha \in \Lambda_6$ (ya que $n_\alpha \in \mathbb{Z}$) y $r_\alpha e_\alpha \notin \Lambda_6$ (ya que $r_\alpha \notin \mathbb{Z}$). Debido a la rotación $\theta^k \omega^l$ en X^i se tiene para las coordenadas fermiónicas

$$\psi_R^i \xrightarrow{g} \psi'_R^i = \pm \theta^k \omega^l \psi_R^i, \quad (1.42)$$

donde $+$ ($-$) corresponde a la condición periódica o de Ramond (antiperiódica o de Neveu-Schwarz).

La invarianza modular requiere que la acción del grupo de espacio S sea embebida en un grupo G que actúa sobre las coordenadas de norma, X_L^I con $I = 10, \dots, 25$, donde G es llamado el grupo de norma torcido. En general, es un subgrupo de los automorfismos del álgebra de Lie de $E_8 \times E_8$. En este trabajo nos restringimos al caso de automorfismos internos, donde se tiene la correspondencia

$$g = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha) \in S \quad \leftrightarrow \quad \tilde{g} = (\mathbb{1}, V_g) = (\mathbb{1}, kV_1 + lV_2 + m_\alpha W_\alpha) \in G, \quad (1.43)$$

donde V_g es llamado el vector local de desplazamiento asociado al elemento g . Se tiene que la acción de los elementos $\tilde{g} \in G$ sobre las coordenadas de norma X_L^I es un desplazamiento por el vector V_g , i.e.

$$X_L^I \xrightarrow{\tilde{g}} X'^I = \tilde{g}X_L^I = X_L^I + \pi V_g^I = X_L^I + \pi(kV_1^I + lV_2^I + m_\alpha W_\alpha^I), \quad (1.44)$$

donde $I = 10, \dots, 25$, $k, l \in \mathbb{Z}$, los coeficientes m_α , con $\alpha = 4, \dots, 9$, son números enteros o no enteros dependiendo de si el elemento del grupo de espacio es una rotación o rototraslación. Los dos vectores V_1 y V_2 son llamados vectores de desplazamiento y los seis vectores W_α son llamados líneas de Wilson (LW), ambos tienen 16 componentes. Las LW son los embebimientos de los vectores base e_α de la retícula del toro en los grados de libertad de norma y corresponden a las transformaciones de norma asociadas a los lazos no contractibles [26].

Debido al embebimiento del grupo de espacio S en el grupo de norma torcido G se tiene que las coordenadas de norma son compactificadas en el orbifoldio $\mathcal{O}_{16} = \mathbb{T}^{16}/G$. En conjunto, se define el llamado orbifoldio heterótico como $\mathcal{O}_{\text{het}} = \mathbb{R}^6/S \times \mathbb{T}^{16}/G$ y al grupo orbifoldio como $S \times G$.

El embebimiento de S en G está sujeto a las siguientes restricciones.

- Ya que los generadores de $P = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ satisfacen $\theta^N = \mathbb{1} = \omega^M$, se tiene que la acción de los vectores de desplazamiento correspondientes a θ^N y ω^M debe ser trivial en los grados de libertad de norma. Esto implica que los vectores de desplazamiento cumplen $NV_1, MV_2 \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$. Se dice entonces que V_1 (V_2) es de orden N (M).
- Las LW deben ser consistentes con la geometría del toro y la acción del orbifoldio sobre este. Para un generador ϑ de algún grupo de punto se tiene que $\vartheta e_\alpha = \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} e_\beta$, $\alpha, \beta = 4, \dots, 9$, para algunos coeficientes enteros $\gamma_{\alpha\beta}$. Esto implica que las LW deben de cumplir las relaciones $W_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} W_\beta$ salvo traslaciones en $\Lambda_{E_8 \times E_8}$. El conjunto de las ecuaciones resultantes de este tipo pueden ser reducidas a condiciones para las LW; algunas de ellas deben ser nulas y otras LW W_α tienen ordenes no triviales N_α , tal que $N_\alpha W_\alpha \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$ (sin suma en α).
- La restricción final proviene de la invarianza modular, la cual requiere que [27]

$$\begin{aligned}
N(V_1^2 - v_1^2) &= 0 \pmod{2}, & N_\alpha(V_1 \cdot W_\alpha) &= 0 \pmod{2}, & \alpha &= 4, \dots, 9, \\
M(V_2^2 - v_2^2) &= 0 \pmod{2}, & N_\alpha(V_2 \cdot W_\alpha) &= 0 \pmod{2}, & & \\
M(V_1 \cdot V_2 - v_1 \cdot v_2) &= 0 \pmod{2}, & N_\alpha W_\alpha^2 &= 0 \pmod{2}, & & \\
&& Q_{\alpha\beta}(W_\alpha \cdot W_\beta) &= 0 \pmod{2}, & \alpha &\neq \beta,
\end{aligned} \tag{1.45}$$

donde $Q_{\alpha\beta} = \text{mcd}(N_\alpha, N_\beta)$ denota al máximo común divisor de N_α y N_β . Las condiciones (1.45) para el caso \mathbb{Z}_N se obtienen al tomar $V_2 = 0$ y $v_2 = 0$. El caso sin LW corresponde a $W_\alpha = 0$.

El grupo de espacio junto con el correspondiente grupo de norma torcido, cumpliendo todos los requerimientos previos, permiten construir una compactificación admisible de la cuerda heterótica en orbifoldios toroidales abelianos.

1.3.2. Compactificación de la cuerda heterótica en orbifoldios

Nuestro objetivo ahora es presentar el formalismo de compactificación de la cuerda heterótica en los orbifoldios toroidales abelianos supersimétricos cuyo grupo de espacio y su correspondiente embebimiento en el grupo de norma torcido son consistentes con los requerimientos de invarianza modular para obtener modelos prometedores en $D = 4$. Nos enfocamos al espectro de estados sin masa ya que los estados masivos tienen masas alrededor de la masa de Planck resultando demasiado pesados para ser observados a bajas energías. Algunos comentarios se dan enseguida. Uno, los estados físicos en el espectro ahora no solo son los que corresponden al producto directo de estados izquierdos con derechos cumpliendo la condición de empatamiento de niveles ($M_L = M_R$) sino que además, deben ser invariantes ante la simetría del orbifoldio usado en la compactificación. Es decir, si los estados no son compatibles con la simetría del orbifoldio, entonces tales estados son removidos del espectro. Dos, debido a la acción no trivial de los elementos del grupo de espacio y del grupo

de norma torcido sobre las coordenadas de la cuerda heterótica, se tienen ahora nuevas condiciones de frontera para las cuerdas cerradas que en la cuantización separan el espectro en los llamados sectores no torcidos y torcidos. El primer sector está formado por los estados no masivos originales de la cuerda heterótica que resultan ser invariantes ante la simetría del orbifolio. También, en este sector no torcido, se obtiene el rompimiento del grupo de norma $E_8 \times E_8$ en $D = 10$ al grupo de norma en $D = 4$. Por otra parte, el sector torcido está formado por nuevos estados que provienen de cuerdas que son cerradas solo bajo la acción no trivial del grupo de espacio y cuyo centro de masa está atado en los puntos fijos (inequivalentes) del orbifolio.

Condiciones de frontera y modos de expansión

La acción del grupo de espacio y del grupo de norma torcido sobre las coordenadas de la cuerda a compactificar modifican sus usuales condiciones de frontera de cuerdas cerradas y, por lo tanto, los modos de expansión. Consideremos las coordenadas presentadas al inicio de la subsección 1.3.1, es decir,

$$(X_L^2, X_L^3, X_L^4, X_L^5, X_L^6, X_L^7, X_L^8, X_L^9, X_L^{10}, \dots, X_L^{25}), \quad (1.46)$$

$$(X_R^2, X_R^3, X_R^4, X_R^5, X_R^6, X_R^7, X_R^8, X_R^9), \quad (1.47)$$

$$(\psi_R^2, \psi_R^3, \psi_R^4, \psi_R^5, \psi_R^6, \psi_R^7, \psi_R^8, \psi_R^9). \quad (1.48)$$

Definimos ahora las coordenadas complejas

$$Z^a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^{2a+2} + iX^{2a+3}), \quad (1.49)$$

donde $a = 0, 1, 2, 3$ y $X^i = X_L^i + X_R^i$ con $i = 2, \dots, 9$ (además de su compleja conjugada $Z^{\bar{a}}$ donde $\bar{a} = 0, 1, 2, 3$). Para los ocho campos fermiónicos ψ_R^i usamos la bosonización, la cual establece que la teoría conforme de $2n$ campos fermiónicos reales es equivalente a la de n campos bosónicos reales. Tenemos entonces

$$\tilde{\psi}_R^a = (\psi_R^{2a+2} + i\psi_R^{2a+3}) = e^{2iH_R^a}, \quad (1.50)$$

donde se han definido cuatro campos fermiónicos complejos, $\tilde{\psi}_R^a$, a partir de los ocho campos fermiónicos reales, ψ_R^i , cuya teoría conforme es equivalente a la de cuatro campos bosónicos reales, H_R^a , $a = 0, 1, 2, 3$.

Notamos que el caso $a = 0$ es equivalente al de las coordenadas con índices 2,3, las cuales no son compactificadas, ya que corresponden a la parte transversal del espacio-tiempo observable en $D = 4$. En este espacio de dos dimensiones no hay acción definida del grupo de espacio ya que solo actúa en el espacio de seis dimensiones donde las coordenadas con índices de 4 a 9 se compactifican. Para garantizar una acción trivial del grupo de espacio (más precisamente, del grupo de punto P) sobre las coordenadas sin compactificar, se toma ahora al vector de torcimiento como $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ con $v^0 = 0$, tal que $\theta = \text{diag}(1, e^{2\pi i v^1}, e^{2\pi i v^2}, e^{2\pi i v^3})$, donde se ha considerado el caso $P = \mathbb{Z}_N$.

Lo anterior resulta ser compatible con los elementos del grupo $SO(8)$, el cual es el grupo pequeño o transversal del grupo de Lorentz en 10 dimensiones $SO(9,1)$ para los estados sin masa. En la compactificación deseada aquí, el grupo transversal se rompe primeramente a $SO(8) \rightarrow SO(2) \times SO(6) \sim U(1) \times SU(4)$. En términos de espacios, esto corresponde a $\mathbb{R}^8 \sim \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^6$ ($\mathbb{C}^4 \sim \mathbb{C}^1 \times \mathbb{C}^3$). En la compactificación se tiene $\mathbb{R}^8 \sim \mathbb{R}^2 \times \frac{\mathbb{R}^6}{S} = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{O}_6$ ($\mathbb{C}^4 \sim \mathbb{C}^1 \times \frac{\mathbb{C}^3}{S} = \mathbb{C}^1 \times \mathcal{O}_6$). Entonces el vector de torcimiento definido por $v = (0, v^1, v^2, v^3)$ implica que $\theta = \text{diag}(1, e^{2\pi i v^1}, e^{2\pi i v^2}, e^{2\pi i v^3})$ actúa apropiadamente en todo \mathbb{R}^8 (\mathbb{C}^4), es decir, trivialmente en \mathbb{R}^2 (\mathbb{C}^1) y efectuando la acción del orbifolio en las coordenadas a compactificar en \mathbb{R}^6 (\mathbb{C}^3).

Por otra parte, los pesos q de los estados derechos no masivos forman las representaciones $\mathbf{8}_v$ (bosones) y $\mathbf{8}_s$ (fermiones) de $SO(8)$. Estos pesos son vectores de 4 componentes $q = (q^0, q^1, q^2, q^3)$, pues el rango de $SO(8)$ es 4. Como veremos más adelante, las condiciones de frontera en el sector torcido para los campos bosónicos H_R^a implican que su momento q es desplazado por un múltiplo entero del vector de torcimiento $v = (0, v^1, v^2, v^3)$, ahora también con 4 componentes.

Tenemos ahora las coordenadas

$$(Z^0, Z^1, Z^2, Z^3; X_L^{10}, \dots, X_L^{25}), \quad (1.51)$$

$$(H_R^0, H_R^1, H_R^2, H_R^3). \quad (1.52)$$

Respecto a las coordenadas de norma X_L^I , $I = 10, \dots, 25$, recordemos que estas son inicialmente compactificadas en el toro \mathbb{T}^{16} dando el grupo de norma $E_8 \times E_8$.

En la compactificación, la acción del grupo de espacio sobre las coordenadas X^i, ψ_R^i , $i = 4, \dots, 9$, y las del grupo de norma torcido sobre X_L^I , $I = 10, \dots, 25$, fueron presentadas en (1.41), (1.42) y (1.44), respectivamente. Con la definición de Z^a y de H_R^a dadas en (1.49) y (1.50) se tienen las identificaciones

$$Z^a \xrightarrow{g} Z'^a = gZ^a = (\theta^k \omega^l, \mu)Z^a = \theta^k \omega^l Z^a + \mu, \quad (1.53)$$

$$H_R^a \xrightarrow{g} H_R'^a = H_R^a + \pi v_g, \quad (1.54)$$

donde $a = 1, 2, 3$, la traslación $\mu = m_\alpha e_\alpha$ está en términos de los vectores base e_α en forma compleja y $v_g = kv_1 + lv_2$ es llamado el vector local de torcimiento. La identificación para las coordenadas de norma X_L^I se presentó en (1.44). Las identificaciones en (1.53), (1.54) y (1.44) modifican las usuales condiciones de frontera de cuerdas cerradas, las cuales son ahora

$$Z^a(\tau, \sigma + \pi) = \vartheta Z^a(\tau, \sigma) + m_\alpha e_\alpha, \quad (1.55)$$

$$H_R^a(\sigma^- - \pi) = H_R^a(\sigma^-) + \pi v_g, \quad (1.56)$$

$$X_L^I(\sigma^+ + \pi) = X_L^I(\sigma^+) + \pi V_g, \quad (1.57)$$

donde $\vartheta = \theta^k \omega^l$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, $l = 0, 1, \dots, M-1$, $v_g = kv_1 + lv_2$, $V_g = kV_1 + lV_2 + m_\alpha W_\alpha$, $m_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 4, 5, \dots, 9$, $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ y $a = 0, 1, 2, 3$. En particular, para el caso $a = 0$ se entiende que no hay acción del grupo de espacio para Z^0 y H_R^0 dejando entonces las condiciones de frontera

usuales, i.e. $Z^0(\tau, \sigma + \pi) = Z^0(\tau, \sigma)$ y $H_R^0(\sigma^- - \pi) = H_R^0(\sigma^-)$. Hemos también considerado que $P = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ con vectores de torcimiento $v_1 = (0, v_1^1, v_1^2, v_1^3)$ y $v_2 = (0, v_2^1, v_2^2, v_2^3)$. El sector no torcido corresponde a tener $k = 0 \bmod N$ y $l = 0 \bmod M$. Los sectores torcidos surgen cuando $k = 1, \dots, N-1$ y $l = 1, \dots, M-1$, en las condiciones de frontera anteriores.

Las soluciones a las ecuaciones de movimiento, con las previas condiciones de frontera, son los modos de expansión siguientes. Para los campos complejos Z^a se tiene

$$Z^a(\tau, \sigma) = z^a + \frac{i}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n + \eta^a} \beta_{n+\eta^a}^a e^{-2i(n+\eta^a)\sigma^-} + \frac{1}{n - \eta^a} \tilde{\beta}_{n-\eta^a}^a e^{-2i(n-\eta^a)\sigma^+} \right) \quad (1.58)$$

y para la campos conjugados $Z^{\bar{a}}$ se tiene

$$Z^{\bar{a}}(\tau, \sigma) = z^{\bar{a}} + \frac{i}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n - \eta^a} \beta_{n-\eta^a}^{\bar{a}} e^{-2i(n-\eta^a)\sigma^-} + \frac{1}{n + \eta^a} \tilde{\beta}_{n+\eta^a}^{\bar{a}} e^{-2i(n+\eta^a)\sigma^+} \right), \quad (1.59)$$

donde $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$, $\eta^a = v_g^a = kv_1^a + lv_2^a \bmod 1$ tal que $0 < \eta^a \leq 1$. Por la condición de frontera para Z^a , las coordenadas del centro de masa z^a son un punto fijo z_f asociado al elemento $g = (\vartheta, m_\alpha e_\alpha) \in S$, el momento interno p^a es nulo, además se tuvo que introducir modos de oscilación fraccionarios para satisfacer las fases adicionales que las coordenadas Z^a adquieren bajo la acción de los elementos ϑ del grupo de punto P .

Para $a = 0$ se tienen los usuales modos de expansión para X^2 y X^3 , entonces

$$Z^0(\tau, \sigma) = z^0 + p^0 \tau + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\beta_n^0 e^{-2in\sigma^-} + \tilde{\beta}_n^0 e^{-2in\sigma^+}), \quad (1.60)$$

donde $z^0 = (x^2 + ix^3)$, $p^0 = (p^2 + ip^3)$, $\beta_n^0 = (\alpha_n^2 + i\alpha_n^3)$, $\tilde{\beta}_n^0 = (\tilde{\alpha}_n^2 + i\tilde{\alpha}_n^3)$ corresponden a las coordenadas del centro de masa de la cuerda, el momento total, y los modos de oscilación derechos e izquierdos, respectivamente.

Para los campos H_R^a se tiene

$$H_R^a(\sigma^-) = h^a + \frac{1}{2} (q^a + v_g^a) \sigma^- + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-2in\sigma^-}, \quad (1.61)$$

donde $a = 0, 1, 2, 3$, $v_g = kv_1 + lv_2$, $v_j = (0, v_j^1, v_j^2, v_j^3)$ para $j = 1$ y 2 . Para $a = 0$ se tiene que $v_g^0 = 0$. Además, q es el momento de los campos bosónicos asociados a los campos fermiónicos por el proceso de bosonización y está en la retícula vectorial (espinorial) de $SO(8)$ formando la representación $\mathbf{8}_v$ ($\mathbf{8}_s$) en el sector de Neveu-Schwarz (Ramond). Es conveniente definir $q_{\text{sh}} = q + v_g$, donde el subíndice sh indica que se toma el momento q desplazado (de shifted en inglés) por v_g , que es la manera estándar de referenciarlo.

Para las coordenadas de norma X_L^I se tiene

$$X_L^I(\sigma^+) = x^I + \frac{1}{2}(p^I + V_g^I)\sigma^+ + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^I e^{-2in\sigma^+}, \quad (1.62)$$

donde $V_g = kV_1 + lV_2 + m_\alpha W_\alpha$ es el vector local de desplazamiento asociado al elemento g . Es conveniente definir al momento desplazado (shifted) $p_{\text{sh}} = p + V_g$. De (1.61) y (1.62) notamos que el efecto sobre los momentos q y p , que proviene de las condiciones de frontera en el sector torcido, es desplazar a tales momentos por v_g y V_g respectivamente, es decir, $q \rightarrow q + v_g = q_{\text{sh}}$ y $p \rightarrow p + V_g = p_{\text{sh}}$.

Como antes, al imponer la cuantización canónica de estas soluciones, los modos de oscilación cumplen las relaciones de conmutación de osciladores armónicos desacoplados tales que pueden ser interpretados como operadores de creación y de aniquilación. Por ejemplo, los osciladores izquierdos para los campos complejos Z^a cumplen

$$[\tilde{\beta}_{m-\eta^a}^a, \tilde{\beta}_{n+\eta^b}^b] = (m - \eta^a) \delta_{m+n,0} \delta^{ab}, \quad (1.63)$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $0 < \eta^a, \eta^b \leq 1$. Los operadores $\tilde{\beta}_{-n-\eta^a}^a$ para $n \geq 0$ y su complejo conjugado $\tilde{\beta}_{-n+\eta^a}^{\bar{a}}$ para $n \geq 1$ son operadores de creación mientras que $\tilde{\beta}_{n-\eta^a}^a$ para $n \geq 1$ y su complejo conjugado $\tilde{\beta}_{n+\eta^a}^{\bar{a}}$ para $n \geq 0$ son operadores de aniquilación para los estados izquierdos. De manera similar, se obtienen operadores de creación y de aniquilación para los osciladores asociados a los campos bosónicos H_R^a y X_L^I , $I = 10, \dots, 25$. Por ejemplo, para X_L^I se tiene el conmutador $[\tilde{\alpha}_m^I, \tilde{\alpha}_n^J] = m \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}$, donde $\tilde{\alpha}_{-n}^I$ ($\tilde{\alpha}_n^I$) con $n > 0$ son operadores de creación (aniquilación) para los estados izquierdos de norma.

Ecuaciones para el operador de masa y estados sin masa

Sector no torcido

Las ecuaciones del operador de masa para los modos derechos e izquierdos son las usuales de la cuerda heterótica, presentadas en (1.8) y (1.11) respectivamente, por lo que los estados sin masa son también los usuales y corresponden a los mostrados en (1.14), (1.15) y (1.16), es decir,

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle \quad \text{y} \quad |p\rangle \times |q\rangle, \quad (1.64)$$

donde se ha usado $\tilde{\beta}_{-1}^a = (\tilde{\alpha}_{-1}^{2a+2} + i \tilde{\alpha}_{-1}^{2a+3})$, y su complejo conjugado $\tilde{\beta}_{-1}^{\bar{a}}$, con $a(\bar{a}) = 0, 1, 2, 3$, para reescribir a (1.14), $\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle \times |q\rangle$, $i = 2, \dots, 9$. Además, $I = 10, \dots, 25$ y $p^2 = 2$. Los estados en (1.64) están asociados al elemento constructor $g = (\mathbb{1}, 0) \in S$.

Sector torcido

Los efectos de la compactificación en el orbifold modifican la expresión para los operadores de masa. En el sector derecho se tiene que la ecuación para los estados sin masa está dada por

$$\frac{1}{4}M_R^2 = \frac{1}{2}(q + v_g)^2 - \frac{1}{2} + \delta_c = 0, \quad (1.65)$$

donde $q + v_g = q_{\text{sh}}$, $v_g = kv_1 + lv_2$ y

$$\delta_c = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \eta^a (1 - \eta^a) \quad (1.66)$$

es la modificación o el desplazamiento a la energía del vacío debido a la presencia de operadores de creación y de aniquilación con números de nivel fraccionarios. $\eta^a = v_g^a = kv_1^a + lv_2^a \pmod{1}$ tal que $0 < \eta^a \leq 1$. Para los estados izquierdos sin masa se tiene

$$\frac{1}{4}M_L^2 = \frac{1}{2}(p + V_g)^2 + \tilde{N} - 1 + \delta_c = 0, \quad (1.67)$$

donde $V_g = kV_1 + lV_2 + m_\alpha W_\alpha$ y δ_c es definido en (1.66). El operador de número \tilde{N} indica el nivel de excitación del estado, el cual ahora puede ser fraccionario. Este operador puede ser escrito, para los estados no masivos, como

$$\tilde{N} = \sum_{a=1}^3 \eta^a \tilde{N}_g^a + \bar{\eta}^a \tilde{N}_g^{*a} \quad (1.68)$$

donde los operadores \tilde{N}_g^a y \tilde{N}_g^{*a} cuentan respectivamente el número de excitaciones en las direcciones $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$, y $\bar{\eta}^a = -v_g^a \pmod{1}$ tal que $0 < \bar{\eta}^a \leq 1$. Recordando que los estados de la cuerda heterótica están dados por el producto directo de los estados izquierdos por los derechos sujetos a la condición de empatamiento de niveles $M_L^2 = M_R^2$, se tienen los estados sin masa

$$\tilde{\beta} |p + V_g\rangle \times |q + v_g\rangle, \quad (1.69)$$

donde $\tilde{\beta}$ indica un producto de osciladores de la forma $\tilde{\beta}_{-\eta^a}^a$ (o $\tilde{\beta}_{-1+\eta^a}^a$). Los estados en (1.69) están asociados al elemento constructor $g = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha) \in S$, con $k, l \neq 0$, ya que tales estados corresponden a cuerdas que son cerradas solo bajo la acción no trivial del grupo de espacio. Además, su centro de masa está atado a los puntos fijos (inequivalentes), los cuales están caracterizados por sus respectivos elementos constructores.

Los estados no masivos en (1.64) y (1.69) deben ser, además, invariantes ante la simetría impuesta por el orbifold para formar parte del espectro, de otra forma, son removidos.

1.3.3. Transformación de los estados bajo el orbifolio

Nos interesa conocer la manera en la que los estados sin masa en el sector no torcido (asociados al elemento constructor $g = (\mathbb{1}, 0) \in S$) y en el sector torcido (asociados al elemento constructor $g = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha) \in S$, donde $k, l \neq 0$), dados en (1.64) y (1.69), se transforman bajo $h = (\theta^{k'} \omega^{l'}, m'_\alpha e_\alpha) \in S$ ($h \neq g$).

Sector no torcido

Los estados sin masa en el sector no torcido fueron presentados en (1.64) y están asociados al elemento constructor $g = (\mathbb{1}, 0) \in S$. Los osciladores $\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}$ se transforman bajo $h \in S$ como

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}} \xrightarrow{h} e^{\pm 2\pi i v_h^a} \tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}, \quad (1.70)$$

donde el signo $+$ ($-$) en el exponente corresponde a la dirección $a(\bar{a}) = 0, 1, 2, 3$ en la cual el oscilador actúa. La transformación en (1.70) se obtiene al considerar el modo de expansión para los campos Z^a y efectuar la acción de $h \in S$ sobre Z^a , es decir, $hZ^a \rightarrow e^{2\pi i v_h^a} Z^a + m'_\alpha e_\alpha$ y lo mismo para su complejo conjugado $Z^{\bar{a}}$. En particular, cuando $a(\bar{a}) = 0$ se tiene que $v_h^0 = 0$, ya que los vectores de torcimiento son de la forma $v_j = (0, v_j^1, v_j^2, v_j^3)$, $j = 1, 2$. Entonces, en este caso,

$$\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}} \xrightarrow{h} \tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}. \quad (1.71)$$

Por otra parte, los osciladores con índices de norma, $\tilde{\alpha}_{-1}^I$, $I = 10 \dots, 25$, se transforman trivialmente bajo $h \in S$, i.e.

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I \xrightarrow{h} \tilde{\alpha}_{-1}^I. \quad (1.72)$$

Para conocer la transformación de los estados $|p\rangle$ y $|q\rangle$ los reescribimos como estados de momento

$$|p\rangle =: e^{2ip \cdot X_L} : |0\rangle, \quad (1.73)$$

$$|q\rangle =: e^{-2iq \cdot H_R} : |0\rangle, \quad (1.74)$$

donde el signo menos en (1.74) es debido a que los momentos derechos, q , e izquierdos, p , están en una retícula par y auto-dual con métrica lorentziana (22,6) [28], implicando un signo relativo entre las fases de ambos estados.

De acuerdo a las ecuaciones (1.44) y (1.54), se tiene que los campos X_L y H_R se transforman bajo $h = (\theta^{k'} \omega^{l'}, m'_\alpha e_\alpha) \in S$ como

$$X_L \xrightarrow{h} X_L + \pi V_h, \quad (1.75)$$

$$H_R \xrightarrow{h} H_R + \pi v_h, \quad (1.76)$$

donde $V_h = k'V_1 + l'V_2 + m'_\alpha W_\alpha$ y $v_h = k'v_1 + l'v_2$. Substituyendo (1.75) y (1.76) en (1.73) y (1.74) se obtiene que los estados $|p\rangle$ y $|q\rangle$ se transforman bajo $h \in S$ de la siguiente manera

$$|p\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i p \cdot V_h} |p\rangle, \quad (1.77)$$

$$|q\rangle \xrightarrow{h} e^{-2\pi i q \cdot v_h} |q\rangle. \quad (1.78)$$

Por lo tanto, las transformaciones de los estados en (1.64) bajo $h \in S$ están dadas por

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i(-q \cdot v_h \pm v_h^a)} \tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.79)$$

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i(-q \cdot v_h)} \tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.80)$$

$$|p\rangle \times |q\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i(p \cdot V_h - q \cdot v_h)} |p\rangle \times |q\rangle. \quad (1.81)$$

En particular, cuando $a(\bar{a}) = 0$ en (1.79), se tiene

$$\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |q\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i(-q \cdot v_h)} \tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |q\rangle. \quad (1.82)$$

Sector torcido

Los estados sin masa en el sector torcido están dados en (1.69), los cuales están asociados al elemento constructor $g = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha) \in S$, con $k, l \neq 0$. Los osciladores izquierdos se transforman bajo $h \in S$ como

$$\tilde{\beta}_{-\eta^a}^a \xrightarrow{h} e^{2\pi i v_h^a} \tilde{\beta}_{-\eta^a}^a, \quad (1.83)$$

$$\tilde{\beta}_{-1+\eta^a}^{\bar{a}} \xrightarrow{h} e^{-2\pi i v_h^a} \tilde{\beta}_{-1+\eta^a}^{\bar{a}}, \quad (1.84)$$

donde $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$. Las transformaciones para los estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ y $|q_{\text{sh}}\rangle$ se obtienen de manera similar a como se obtuvieron (1.77) y (1.78) pero reemplazando p por $p_{\text{sh}} = p + V_g$ y q por $q_{\text{sh}} = q + v_g$, entonces

$$|p_{\text{sh}}\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i p_{\text{sh}} \cdot V_h} |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (1.85)$$

$$|q_{\text{sh}}\rangle \xrightarrow{h} e^{-2\pi i q_{\text{sh}} \cdot v_h} |q_{\text{sh}}\rangle, \quad (1.86)$$

donde el factor de fase depende de $g, h \in S$, por ejemplo $q_{\text{sh}} \cdot v_h = (q + kv_1 + lv_2) \cdot (k'v_1 + l'v_2)$.

Existe una fase adicional correspondiente a la fase del vacío y está dada por

$$\Phi_{\text{vacío}} = e^{2\pi i(-\frac{1}{2}(V_g \cdot V_h - v_g \cdot v_h))}, \quad (1.87)$$

bajo la acción de $h \in S$. Esta fase proviene de las propiedades geométricas de las cuerdas torcidas [27]. Esta fase puede ser la unidad para ciertas elecciones de vectores de desplazamiento V y líneas de Wilson W_α .

Por lo tanto, la transformación de los estados en el sector torcido, presentados en (1.69), bajo $h \in S$, está dada por

$$\tilde{\beta}|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle \xrightarrow{h} e^{2\pi i((\tilde{N}_g - \tilde{N}_g^*) \cdot v_h + p_{\text{sh}} \cdot V_h - q_{\text{sh}} \cdot v_h)} \Phi_{\text{vacío}} \tilde{\beta}|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle. \quad (1.88)$$

El primer término en la fase proviene del producto de osciladores de la forma $\tilde{\beta}_{-\eta^a}^a$ y $\tilde{\beta}_{-1+\eta^a}^a$, lo cual fue denotado por $\tilde{\beta}$. Los operadores \tilde{N}_g y \tilde{N}_g^* cuentan el número de operadores de creación izquierdos, $\tilde{\beta}_{-\eta^a}^a$ y $\tilde{\beta}_{-1+\eta^a}^a$, que actúan en $|p_{\text{sh}}\rangle$. El segundo y tercer término de la fase corresponden a la transformación de los estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ y $|q_{\text{sh}}\rangle$, presentadas en (1.85) y (1.86), respectivamente. Finalmente, la fase del vacío, $\Phi_{\text{vacío}}$, está dada en (1.87).

1.3.4. Compatibilidad de los estados con el orbifolio

Consideremos los estados asociados a la condición de frontera

$$Z(\tau, \sigma + \pi) = gZ(\tau, \sigma), \quad (1.89)$$

donde $gZ(\tau, \sigma) = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha)Z = \theta^k \omega^l Z + m_\alpha e_\alpha$ en el sector torcido y $gZ(\tau, \sigma) = (\mathbb{1}, 0)Z = Z$ en el sector no torcido. Los estados provenientes de (1.89) están definidos en un espacio de Fock que denotamos por H_g .

Sea $h = (\theta^{k'} \omega^{l'}, m'_\alpha e_\alpha) \in S$ un elemento arbitrario con $h \neq g$, la acción de h en (1.89) conduce a

$$hZ(\tau, \sigma + \pi) = hgZ(\tau, \sigma) = hgh^{-1}hZ(\tau, \sigma). \quad (1.90)$$

Suponiendo que h y g conmutan², $[h, g] = 0$, entonces $hgh^{-1} = g$, luego

$$hZ(\tau, \sigma + \pi) = ghZ(\tau, \sigma). \quad (1.91)$$

Comparando (1.89) y (1.91) se tiene que Z y hZ están identificados por el mismo elemento constructor $g \in S$ y por lo tanto Z y hZ son equivalentes, dando lugar a los mismos estados definidos en H_g . Entonces

$$Z \xrightarrow{h} Z' = hZ = Z \quad (1.92)$$

implica que h actúa en el espacio de Fock como

$$|\Omega\rangle \xrightarrow{h} |\Omega\rangle' = e^{2\pi i(\dots)} |\Omega\rangle = 1 |\Omega\rangle, \quad (1.93)$$

donde $|\Omega\rangle$ denota estados sin masa en el espectro de la cuerda heterótica, por ejemplo a $|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle$. De esta forma, (1.93) se aplica a los casos (1.79), (1.80), (1.81) y (1.88) para determinar los estados compatibles con el orbifolio al imponer las condiciones que den un término de fase igual a la unidad.

²Nos referimos al sector torcido ya que en el sector no torcido sería trivial que $[h, g] = 0$ pues g es la identidad.

En conclusión, los estados en el sector torcido o no torcido asociados al elemento $g \in S$ son compatibles con el orbifolio si y solo si son invariantes bajo el centro \mathcal{Z} del elemento $g \in S$, donde el centro de g se define como el subgrupo normal de S que consiste de todos los elementos $h \in S$ que conmutan con g , es decir, $\mathcal{Z}[g] = \{h \in S \mid [h, g] = 0\}$.

Consideremos ahora el caso en que $[h, g] \neq 0$. Un estado en el sector torcido asociado al elemento constructor $g = (\theta^k \omega^l, m_\alpha e_\alpha)$ está definido en el espacio de Fock H_g , y le corresponde la condición de frontera

$$Z(\tau, \sigma + \pi) = gZ(\tau, \sigma). \quad (1.94)$$

Denotemos a tal estado por $|\rangle_g$, donde el subíndice g indica que está asociado al elemento g . Sea $h = (\theta^{k'} \omega^{l'}, m'_\alpha e_\alpha) \in S$ con $hg \neq gh$. La acción de h sobre (1.94) se expresa como

$$hZ(\tau, \sigma + \pi) = hgh^{-1}hZ(\tau, \sigma) = g' hZ(\tau, \sigma). \quad (1.95)$$

En este caso hZ corresponde a un estado en el espacio $H_{g'}$, donde g' es el conjugado de g ya que $g' = hgh^{-1}$ para algún $h \in S$. Cuando se toman todos los elementos $h \in S$ tal que hgh^{-1} se forma la clase de conjugación de g . En el espacio de estados esto nos dice que cuando h actúa en $|\rangle_g \in H_g$, entonces este estado es mandado a otro estado $|\rangle_{g'} \in H_{g'}$. La acción de h sobre (1.95) implica que $|\rangle_{g'}$ es mandado a otro estado $|\rangle_{g''} \in H_{g''}$ donde $g'' = hg'h^{-1} = h^2gh^{-2}$. El proceso continúa indefinidamente a menos de que se tenga $h^n = (\mathbb{1}, 0)$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

El estado invariante bajo $h \in S$ está dado, en este caso, por una combinación lineal de estados que pertenecen a los espacios $H_g, H_{g'}, H_{g''}, \dots$, la cual es finita si $h^n = (\mathbb{1}, 0)$ con algún $n \in \mathbb{N}$. Los coeficientes de la combinación lineal están dados por las propiedades de transformación con respecto al elemento h .

1.3.5. Estados físicos invariantes bajo el orbifolio

Se determinan las condiciones de invarianza de los estados no masivos bajo $h \in S$ con $[h, g] = 0$ para conocer los estados que forman parte del espectro en la compactificación de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$.

Sector no torcido

Del multiplete de SUGRA en $D = 10$,

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}} |0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.96)$$

donde $a(\bar{a}) = 0, 1, 2, 3$, se tiene que los estados que forman parte del espectro en $D = 4$ son aquellos que cumplen la condición de invarianza

$$-q \cdot v_h \pm v_h^a = 0 \pmod{1}, \quad (1.97)$$

la cual proviene de exigir una fase trivial en la transformación presentada en (1.79). Cuando $a(\bar{a}) = 0$ se tiene que $v_h^0 = 0$, ya que $v = (0, v^1, v^2, v^3)$. Analizamos por separado los casos $a(\bar{a}) = 0$ y $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$.

- *Multiplete de SUGRA $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$.*

Está formado por los estados

$$\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |q\rangle \quad (1.98)$$

que cumplen la condición de invarianza

$$q \cdot v_h = 0 \pmod{1}, \quad (1.99)$$

la cual es satisfecha cuando

$$q = \begin{cases} \pm(1, 0, 0, 0), & \text{NS,} \\ \pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & \text{R,} \end{cases} \quad (1.100)$$

donde se ha usado la condición $\mathcal{N} = 1$ en el vector de torcimiento, i.e. $v^1 + v^2 + v^3 = 0$. En (1.98) se tiene que $\tilde{\beta}^{0/\bar{0}}|0\rangle$ (o equivalentemente $\tilde{\alpha}_{-1}^{2,3}|0\rangle$) se transforma como un vector en el espacio de cuatro dimensiones. Los estados $\tilde{\beta}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |\pm 1, 0, 0, 0\rangle$ representan al gravitón y al dilatón. Los estados $\tilde{\beta}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle$ representan al gravitino y al dilatino.

- *Módulos geométricos.*

Los estados

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.101)$$

donde $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$, sujetos a la condición de invarianza

$$-q \cdot v_h \pm v_h^a = 0 \pmod{1}, \quad (1.102)$$

representan, en $D = 4$, módulos geométricos, los cuales describen variaciones en la métrica y en la estructura compleja. El número de módulos depende del grupo de punto. La interpretación de los módulos como ángulos y radios depende de la retícula del toro.

De los 16 bosones de norma y norminos no cargados en $D = 10$ se obtienen los siguientes estados en $D = 4$.

- *Preservación del rango = 16.*

De la transformación (1.80) se tiene que los estados

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle \quad (1.103)$$

con la condición de invarianza

$$q \cdot v_h = 0 \pmod{1}, \quad (1.104)$$

i.e. con los pesos q presentados en (1.100), representan a los 16 bosones de norma y norminos correspondientes a los generadores de Cartan del grupo de norma en $D = 4$ denotado por G_{4D} . Por lo tanto, el rango del grupo de norma original, $E_8 \times E_8$, no es reducido en el proceso de compactificación que estamos considerando.³

De los 480 bosones de norma y norminos cargados en $D = 10$ obtenemos lo siguiente en $D = 4$.

- *Grupo de norma G_{4D} y estados de materia.*

La transformación (1.81) implica que los estados

$$|p\rangle \times |q\rangle \quad (1.105)$$

que son invariantes cumplen las condiciones siguientes

$$p \cdot V_h = 0 \pmod{1} \text{ y } q \cdot v_h = 0 \pmod{1}, \quad (1.106)$$

$$p \cdot V_h - q \cdot v_h = 0 \pmod{1}. \quad (1.107)$$

En el caso (1.106), los estados invariantes $|p\rangle \times |q\rangle$ representan a bosones de norma y norminos, los cuales se transforman en la representación adjunta del grupo de norma en 4 dimensiones, G_{4D} . Las raíces de G_{4D} están dadas por los momentos p que satisfacen la condición de invarianza $p \cdot V_h = 0 \pmod{1}$. Los pesos q , de la condición (1.106), están dados en (1.100). Estos estados forman multipletes vectoriales. Por otra parte, con la condición en (1.107), se tiene que los estados $|p\rangle \times |q\rangle$ corresponden a campos de materia que se transforman bajo representaciones del grupo G_{4D} , las cuales son denotadas por los momentos p , que en este caso corresponden a los pesos de la representación. Tales estados forman multipletes quirales.

Sector torcido

- *Estados de materia.* Los estados sin masa en el sector torcido y sus transformaciones bajo $h \in S$ están dadas en (1.88). Entonces, los estados compatibles con la simetría del orbifold son los que cumplen la condición de invarianza

$$(\tilde{N}_g - \tilde{N}_g^*) \cdot v_h + p_{sh} \cdot V_h - q_{sh} \cdot v_h - \frac{1}{2}(V_g \cdot V_h - v_g \cdot v_h) = 0 \pmod{1}. \quad (1.108)$$

Tales estados representan estados de materia y forman multipletes quirales en $D = 4$. Sus propiedades de transformación de norma, con respecto a G_{4D} , dependen del momento p_{sh} .

³Es posible reducir el rango si se considera al embebimiento del generador θ del grupo de punto como una rotación Θ en vez de un desplazamiento V .

1.4. $E_8 \times E_8$ en \mathbb{Z}_3

En esta sección aplico el formalismo de la compactificación de la cuerda heterótica supersimétrica $\mathcal{N} = 1$ en $D = 10$ con grupo de norma $E_8 \times E_8$ en el orbifoldo \mathbb{Z}_3 sin líneas de Wilson (LW) con el objetivo de obtener el espectro sin masa en $D = 4$ en los sectores no torcidos y torcidos. Este modelo ha sido estudiado y usado en diversas referencias por ejemplo en [29, 30]. Aunque no reproduce una fenomenología completamente aceptable, sí proporciona un modelo básico y útil que permite aplicar los conocimientos vistos en secciones anteriores, lo que ayuda también a considerar generalizaciones más prometedoras.

Orbifoldo \mathbb{Z}_3

El orbifoldo \mathbb{Z}_3 está definido por

$$\mathcal{O}_6 = \frac{\mathbb{R}^6}{S} = \frac{\mathbb{T}^6}{\mathbb{Z}_3}, \quad (1.109)$$

donde el grupo de espacio, S , es generado por las traslaciones en la retícula del toro y las rotaciones del grupo de punto $P = \mathbb{Z}_3$. Los elementos de S son denotados por $g = (\theta^k, n_\alpha e_\alpha)$, donde $k = 0, 1, 2$, y $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ con⁴ $\alpha = 1, \dots, 6$. El toro está definido por $\mathbb{T}^6 = \mathbb{R}^6/\Lambda_6 = \mathbb{R}^2/\Lambda_2^{(1)} \times \mathbb{R}^2/\Lambda_2^{(2)} \times \mathbb{R}^2/\Lambda_2^{(3)}$. La retícula del toro, Λ_6 , corresponde a la retícula de raíces del grupo $SU(3) \times SU(3) \times SU(3)$ con rango 6. Cada retícula de dimensión dos $\Lambda_2^{(a)}$, con $a = 1, 2, 3$, corresponde a la retícula de raíces de $SU(3)$. Los dos vectores base en cada retícula están dados por las raíces simples de $SU(3)$: $e_1^{(a)} = \sqrt{2}(1, 0) = \sqrt{2}e^{2\pi i}$ y $e_2^{(a)} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{2}e^{2\pi i/3}$. El generador del grupo de punto, $P = \mathbb{Z}_3$, es

$$\theta = \text{diag}(e^{2\pi i v^0}, e^{2\pi i v^1}, e^{2\pi i v^2}, e^{2\pi i v^3}) \quad (1.110)$$

con el vector de torcimiento $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ dado por

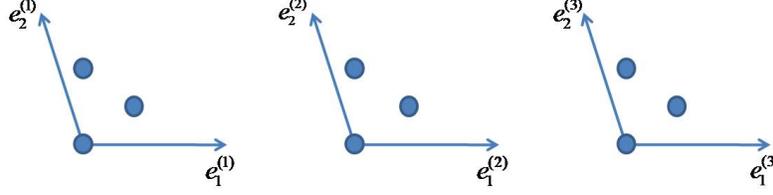
$$v = \frac{1}{3}(0, 1, 1, -2), \quad (1.111)$$

el cual cumple la condición $v^1 + v^2 + v^3 = 0$ para obtener $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$. La acción del grupo de espacio en los sectores torcidos, i.e. con $k = 1, 2$, deja tres puntos fijos en cada plano complejo de los tres toros y están dados por $z^1 = 0$, $z^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{6}}$ y $z^3 = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\pi/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}i$. Ver figura 1.1. Ya que las tres retículas son independientes y mutuamente ortogonales, se tienen en total $3 \times 3 \times 3 = 27$ puntos fijos, los cuales son los mismos para $k = 1$ y $k = 2$.

En el embebimiento del grupo de espacio S en el grupo de norma torcido G se tiene

$$(\theta^k, n_\alpha e_\alpha) \hookrightarrow (\mathbb{1}, kV), \quad (1.112)$$

⁴Notar que aquí se usa la enumeración $\alpha = 1, \dots, 6$ dando a entender, por simplicidad, la enumeración $\alpha = 4, \dots, 9$ asociada a las coordenadas con índices que van de 4 a 9 en el espacio en seis dimensiones a compactificar.

Figura 1.1: Puntos fijos en el orbifolio \mathbb{Z}_3 .

donde no se están incluyendo LW. El vector de desplazamiento V está dado por

$$V = \frac{1}{3}(1, 1, -2, 0^5) (0^8) \quad (1.113)$$

en el llamado embebimiento estándar donde las tres primeras componentes de V corresponden a las componentes v^a , $a = 1, 2, 3$, del vector de torcimiento, mientras que el resto de las componentes de V son cero.

Las condiciones de consistencia para el embebimiento del grupo de espacio S en el grupo de norma torcido G , presentadas al final de la subsección 1.3.1, se verifican. En este caso tenemos \mathbb{Z}_N con $N = 3$ y sin LW. Entonces, al ser θ de orden 3, $\theta^3 = \mathbb{1}$, se verifica que $3V \in \Lambda_{E_8 \times E_8}$. Además, se cumple la condición de invarianza modular $3(V^2 - v^2) = 0 \pmod{2}$, lo cual garantiza una teoría con un espectro libre de anomalías.

1.4.1. Sector no torcido

El espectro sin masa en $D = 10$ de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ está formado por el multiplete de supergravedad $\mathcal{N} = 1$ y 496 bosones de norma y norminos que se transforman en la representación adjunta de $E_8 \times E_8$. Estos estados fueron presentados en (1.64), donde los momentos q y p están dados en (1.7) y (1.13).

En la compactificación, los estados en (1.64) son proyectados de tal forma que los únicos estados que forman el espectro en 4 dimensiones son aquellos que son invariantes ante la simetría del orbifolio, es decir, los que cumplen las condiciones de invarianza presentadas en la subsección 1.3.5 para el sector no torcido. Enseguida determinamos el espectro resultante en $D = 4$.

Del sector de gravedad

Multiplete de SUGRA $\mathcal{N} = 1$.

Está formado por los estados dados en (1.98), es decir,

$$\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}} |0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.114)$$

con la condición de invarianza presentada en (1.99), la cual se cumple con los pesos q mostrados en (1.100). Estos estados representan el multiplete de SUGRA $\mathcal{N} = 1$ en $D = 4$, formado por el gravitón, el dilatón y sus compañeros supersimétricos, el gravitino y dilatino.

Módulos geométricos.

Está formado por los estados presentados en (1.101) que cumplen la condición (1.102). Para conocer los estados invariantes bajo \mathbb{Z}_3 procedemos como sigue. Sea $\rho = e^{2\pi i/3}$ el generador de \mathbb{Z}_3 , entonces los osciladores $\tilde{\beta}_{-1}^a$ se transforman como ρ^1 , y su complejo conjugado $\tilde{\beta}_{-1}^{\bar{a}}$ como ρ^2 , esto porque $v = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Entonces, el producto invariante en $\beta_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle$ se logra cuando los estados $|q\rangle$ se transforman como ρ^2 y ρ^1 , respectivamente. De esta forma tenemos el producto de estados invariante $\rho^1\rho^2$ y $\rho^2\rho^1$ en \mathbb{Z}_3 , los cuales son conjugados uno de otro, i.e. $\tilde{\beta}_{-1}^a|0\rangle \times |q\rangle \leftrightarrow \rho^1\rho^2$ es conjugado de $\tilde{\beta}_{-1}^{\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle \leftrightarrow \rho^2\rho^1$.

Por lo tanto, tenemos los estados

$$\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.115)$$

donde los estados $|q\rangle$ son del tipo ρ^2 o ρ^1 de acuerdo a los pesos q presentados en las tablas 1.3 (para q en NS) y 1.4 (para q en R). En cada estado conjugado se tienen 3 estados por cada dirección compleja en $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$. Por lo tanto, ya que los estados conjugados forman un solo estado físico, se tienen 9 estados, los cuales representan módulos geométricos y son singletes de norma.

Del sector de norma

16 bosones de norma y norminos.

De los estados (1.103) con la condición de invarianza (1.104) se tienen los 16 bosones de norma y norminos asociados a los generadores de Cartan del grupo de norma en 4 dimensiones. Estos estados son denotados por

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle, \quad (1.116)$$

donde $I = 10, \dots, 25$, y los pesos q están dados en las tablas 1.3 y 1.4 en la columna de ρ^0 , lo cual indica que son los pesos q que cumplen la condición (1.104).

Rompimiento de G_{10D} a G_{4D} y estados de materia.

Nos enfocamos a los estados dados en (1.105) y buscamos que las condiciones de invarianza (1.106) y (1.107) se cumplan. La transformación para los estados $|q\rangle$ y $|p\rangle$ fue presentada en (1.81), entonces

$$|q\rangle \rightarrow e^{-2\pi i q \cdot v}|q\rangle \quad \text{y} \quad |p\rangle \rightarrow e^{2\pi i p \cdot V}|p\rangle. \quad (1.117)$$

Nos interesa ahora conocer cuáles estados $|q\rangle \times |p\rangle$ son invariantes ante la simetría \mathbb{Z}_3 del orbifold. Entonces, sea $\rho = e^{2\pi i/3}$ el generador de \mathbb{Z}_3 . Los productos invariantes en este grupo están dados por $\rho^0\rho^0$, $\rho^1\rho^2$ y $\rho^2\rho^1$. Necesitamos una clasificación de los estados $|q\rangle$ y $|p\rangle$, de acuerdo a (1.117), en

términos de ρ^j , $j = 0, 1, 2$, bajo \mathbb{Z}_3 , para determinar los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que resultan ser invariantes bajo esta simetría.

Los estados $|p\rangle$ se clasifican como ρ^0 si $p \cdot V = 0 \pmod{1}$, como ρ^1 si $p \cdot V = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$, y como ρ^2 si $p \cdot V = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. De forma similar se tiene una clasificación para los estados $|q\rangle$, notando el signo menos en el exponente para este estado en (1.117). En las tablas 1.3, 1.4 y 1.5 se presenta esta clasificación.

ρ^0	#	ρ^1	#	ρ^2	#
$(\pm 1, 0, 0, 0)$	2	$(0, \underline{-1}, 0, 0)$	3	$(0, \underline{1}, 0, 0)$	3

Tabla 1.3: Clasificación de los pesos $q = (\pm 1, 0, 0, 0)$ para la representación vectorial, $\mathbf{8}_v$, de $SO(8)$. Estos pesos corresponden al sector de Neveu-Schwarz (NS). El signo de # indica el número de pesos.

ρ^0	#	ρ^1	#	ρ^2	#
$(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$	2	$(-\frac{1}{2}, \underline{-\frac{1}{2}}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	3	$(+\frac{1}{2}, \underline{+\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	3

Tabla 1.4: Clasificación de los pesos $q = ((\pm)^4)$, con un número par de $+\frac{1}{2}$'s, para la representación espinorial, $\mathbf{8}_s$, de $SO(8)$. Estos pesos corresponden al sector de Ramond (R). El signo de # indica el número de pesos.

Los estados invariantes están entonces determinados por los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que cumplen el producto invariante en \mathbb{Z}_3 , es decir: $\rho^0\rho^0$, $\rho^1\rho^2$ y $\rho^2\rho^1$. El primero ($\rho^0\rho^0$) corresponde a tener $q \cdot v = 0 \pmod{1}$ y $p \cdot V = 0 \pmod{1}$ (la condición de invarianza (1.106)), aquí es donde se obtiene el grupo de norma en cuatro dimensiones. Los dos siguientes ($\rho^1\rho^2$ y $\rho^2\rho^1$) corresponden a tener $q \cdot v \neq 0$ y $p \cdot V \neq 0$ pero cumpliendo $p \cdot V - q \cdot v = 0 \pmod{1}$ (la condición de invarianza (1.107)), aquí se obtienen estados de materia.

Enseguida presento explícitamente los estados invariantes usando la información de las tablas 1.3, 1.4 y 1.5.

Estados invariantes $|q\rangle \times |p\rangle$ del tipo $\rho^0\rho^0$

ρ^0	#	ρ^1	#	ρ^2	#
$\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8)$	6	$(-1, -1, 0, 0^5; 0^8)$	3	$(1, 1, 0, 0^5; 0^8)$	3
$(0^3, \pm 1, \pm 1, 0^3; 0^8)$	40	$(1, 0, 0, \pm 1, 0^4; 0^8)$	30	$(-1, 0, 0, \mp 1, 0^4; 0^8)$	30
$(0^8; \pm 1, \pm 1, 0^6)$	112				
$(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$	16	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$	48	$(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$	48
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$	16				
$(0^8; (\pm\frac{1}{2})^8)$	128				

Tabla 1.5: Clasificación de los pesos p dados en (1.13). En $(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$ y $(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$ se tiene un número impar de $+\frac{1}{2}$'s para $(\pm\frac{1}{2})^5$. En $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$ y $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)$ se tiene un número par de $+\frac{1}{2}$'s para $(\pm\frac{1}{2})^5$. El signo de # indica el número de pesos.

$$|q\rangle \times |p\rangle \longrightarrow \begin{matrix} |\pm 1, 0, 0, 0\rangle \\ |(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})\rangle \end{matrix} \times \begin{cases} |\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8)\rangle, \\ |(0^3, \pm 1, \pm 1, 0^3; 0^8)\rangle, \\ |(0^8; \pm 1, \pm 1, 0^6)\rangle, \\ |(+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)\rangle, \\ |(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)\rangle, \\ |(0^8; (\pm\frac{1}{2})^8)\rangle. \end{cases} \quad (1.118)$$

Las raíces p invariantes ($p \cdot V = 0 \pmod{1}$) corresponden a las raíces del grupo de norma en cuatro dimensiones G_{4D} . En este caso se tiene el rompimiento

$$G_{10D} = E_8 \times E_8 \longrightarrow SU(3) \times E_6 \times E_8 = G_{4D}. \quad (1.119)$$

Prueba. Para raíces de la forma $p = (p_1; 0^8)$, donde p_1 denota raíces asociadas al primer grupo factor E_8 y es por lo tanto un vector de ocho componentes (rango de E_8 es 8), se tienen 6 raíces que denoto como el conjunto $A = \{(\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8))\}$ y 72 raíces que denoto como el conjunto $B = \{(0^3, \pm 1, \pm 1, 0^3; 0^8), (+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8)\}$. Las raíces en los conjuntos A y B son mutuamente ortogonales, indicando un producto directo de dos grupos simples compactos. La observación anterior permite identificar el rompimiento $E_8 \rightarrow SU(3) \times E_6$ ya que $SU(3) \times E_6$ tiene justamente $6 + 72$ raíces (no nulas), que sumando las 8 raíces nulas del primer grupo factor E_8 en la forma $6 + (2) + 72 + (6) = 8 + 78 = 86$, se obtiene la dimensión de $SU(3) \times E_6$. La notación de escribir los números 2 y 6 entre paréntesis en la suma anterior es solo para indicar que estamos sumando las 8 raíces nulas del primer E_8 repartidas en una suma de 2 raíces nulas a las 6 raíces no nulas de $SU(3)$ y una suma de las restantes 6 raíces nulas a las 72

raíces no nulas de E_6 , obteniendo así las 8 raíces para $SU(3)$ y las 78 raíces para E_6 , es decir, la dimensión de cada uno de estos dos grupos.

Sin embargo, para identificar a los grupos explícitamente es conveniente determinar las raíces simples, las cuales serán necesarias también para calcular los coeficientes de Dynkin y conocer la manera en que se transforman los estados de materia. En el conjunto A se tienen dos raíces simples $\alpha_1 = (0, 1, -1, 0^5; 0^8)$ y $\alpha_2 = (1, -1, 0, 0^5; 0^8)$ que generan la matriz de Cartan (y diagrama de Dynkin) de $SU(3)$. Al calcular los coeficientes de Dynkin ($\alpha_1 \cdot p_i, \alpha_2 \cdot p_i$) para $i = 1, \dots, 6$ (las 6 raíces p del conjunto A) se puede identificar a $(1, 1)$ que corresponde al peso máximo de la representación adjunta **8** de $SU(3)$. Para una lista de relaciones entre los coeficientes de Dynkin y las representaciones correspondientes para un grupo de Lie simple compacto, ver la referencia [31]. Similarmente, en el conjunto B se encuentran 6 raíces simples $\alpha_1 = ((+\frac{1}{2})^3, -\frac{1}{2}, (+\frac{1}{2})^3, -\frac{1}{2}; 0^8)$, $\alpha_2 = (0^3, 1, -1, 0^3; 0^8)$, $\alpha_3 = ((-\frac{1}{2})^4, (+\frac{1}{2})^2, (-\frac{1}{2})^2; 0^8)$, $\alpha_4 = (0^5, -1, 1, 0; 0^8)$, $\alpha_5 = (0^5, 1, 0, 1; 0^8)$ y $\alpha_6 = ((+\frac{1}{2})^5, (-\frac{1}{2})^2, +\frac{1}{2}; 0^8)$ [32]. Al calcular los coeficientes de Dynkin ($\alpha_1 \cdot p_i, \dots, \alpha_6 \cdot p_i$) para las 72 raíces p del conjunto B , $i = 1, \dots, 72$, se puede identificar a $(0^5, 1)$ que corresponde al peso máximo de la representación adjunta **78** de E_6 . Para las raíces de la forma $p = (0^8; p_2)$, donde p_2 denota raíces asociadas al segundo grupo factor E_8 y es por lo tanto un vector de ocho componentes, se tiene que todas las $112 + 128 = 240$ raíces ($\{(0^8; \pm 1, \pm 1, 0^6), (0^8; (\pm \frac{1}{2})^8)\}$) originales del segundo E_8 sobreviven, entonces en $4D$ el (segundo) grupo E_8 permanece. Por lo tanto, se tiene el rompimiento dado en (1.119).

Estados invariantes $|q\rangle \times |p\rangle$ del tipo $\rho^1 \rho^2$

Los estados de materia son

$$|q\rangle \times |p\rangle \longrightarrow \begin{array}{c} |0, -1, 0, 0\rangle \\ |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \end{array} \times \left\{ \begin{array}{l} |1, 1, 0, 0^5; 0^8\rangle, \\ |-\frac{1}{2}, 0, 0, \mp 1, 0^4; 0^8\rangle, \\ |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8\rangle. \end{array} \right. \quad (1.120)$$

Las raíces p son ahora los pesos de representaciones de $G_{4D} = SU(3) \times E_6 \times E_8$. Los estados en (1.120) se transforman bajo G_{4D} como $3(\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1})_L$ donde el factor de multiplicidad 3 es debido a los tres estados $|q\rangle$ que se tienen tanto en NS y R. La quiralidad del estado está dada por la primera componente de $|q\rangle$ en el sector de Ramond, $-\frac{1}{2}(+\frac{1}{2})$ quiralidad izquierda (derecha). En este caso, quiralidad izquierda, la cual es denotada por el subíndice L .

Prueba. Se calculan los coeficientes de Dynkin ($\alpha_1 \cdot p_i, \dots, \alpha_n \cdot p_i$) donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son las n raíces simples del grupo con rango n , y p_i , con $i = 1, \dots, 82$, son los pesos p que etiquetan los estados en (1.120). Para el caso de $SU(3)$ se identifica el peso máximo $(1, 0)$ que corresponde a la **3**; para E_6 el peso máximo $(1, 0^5)$ que corresponde a la **27**, y para E_8 a (0^8) que corresponde a un singulete **1**. Por lo tanto, los estados en (1.120) se transforman bajo $SU(3) \times E_6 \times E_8$ como $3(\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1})$, donde el factor 3 es por los tres estados $|q\rangle$ que se tienen en cada sector, NS y R. Los pesos q para los estados sin masa en el sector de Ramond (fermiones) forman la representación **8_s** (espinorial) de $SO(8)$. En la compactificación $SO(8) \rightarrow SO(2) \times SO(6) \sim U(1) \times SU(4)$ (donde \sim indica que los grupos son localmente isomórficos), por lo que la primera componente de q , en el sector de Ramond, está

asociada al espacio transversal del espacio-tiempo en 4 dimensiones, indicando la quiralidad del estado.

Estados invariantes $|q\rangle \times |p\rangle$ del tipo $\rho^2\rho^1$

Aquí se tienen los estados conjugados de materia del sector anterior ($\rho^1\rho^2$), entonces

$$|q\rangle \times |p\rangle \longrightarrow \begin{array}{l} |0, 1, 0, 0\rangle \\ |+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \end{array} \times \left\{ \begin{array}{l} |-1, -1, 0, 0^5; 0^8\rangle, \\ |1, 0, 0, \pm 1, 0^4; 0^8\rangle, \\ |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm\frac{1}{2})^5; 0^8\rangle. \end{array} \right. \quad (1.121)$$

Estos estados se transforman bajo $SU(3) \times E_6 \times E_8$ como $3(\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{27}}, \mathbf{1})_R$.

Prueba. Ya que los pesos q y p que etiquetan a los estados en (1.121) son los negativos de los presentados en (1.120) se tiene que, de los pesos p , los coeficientes de Dynkin corresponden a las representaciones conjugadas del caso en (1.120), y de los pesos q , que la quiralidad es ahora derecha, indicada por el subíndice R .

1.4.2. Sector torcido

Los estados en este sector están asociados al elemento constructor $g = (\theta^k, n_\alpha e_\alpha) \in S$ con $k = 1, 2$. Las condiciones para estados sin masa se obtienen a partir de (1.65) y (1.67), considerando $P = \mathbb{Z}_3$ y sin LW, i.e. $v_g = kv$ y $V_g = kV$, respectivamente. Entonces, tenemos

$$\frac{1}{4}M_R^2 = \frac{1}{2}(q + kv)^2 - \frac{1}{2} + \delta_c = 0, \quad (1.122)$$

$$\frac{1}{4}M_L^2 = \frac{1}{2}(p + kV)^2 + \tilde{N} - 1 + \delta_c = 0, \quad (1.123)$$

donde $v = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ y $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^5; 0^8)$. Se tienen dos sectores torcidos correspondientes a $k = 1$ y $k = 2$. El término δ_c , definido en (1.66), es igual a $1/3$.

Sector $k = 1$

A partir de las ecuaciones (1.122) y (1.123) se tiene que las condiciones para estados sin masa son

$$\text{a) } (q + v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{N} = 0 \text{ y } (p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{4}{3},$$

$$\text{b) } (q + v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}, \quad \tilde{N} = \frac{1}{3} \text{ y } (p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{2}{3}.$$

En la parte derecha, los pesos q , que denotan a los estados $|q\rangle$, están dados en (1.7) y se chequea cuáles resultan en $(q + v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$. Notar que es la misma condición para los q_{sh} en a) y en b).

Los resultados se presentan en la tabla 1.6. En la parte izquierda, los pesos p , que etiquetan a los estados $|p\rangle$, están dados en (1.13) y se verifica cuáles cumplen las condiciones $(p+V)^2 = \frac{4}{3}$ del caso a), y $(p+V)^2 = \frac{2}{3}$ del caso b). Del hecho que $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^5; 0^8)$ y que los pesos p sean de la forma $p = (p_1; 0^8)$ o $p = (0^8; p_2)$, implica considerar solamente a los pesos p de la forma $p = (p_1; 0^8)$. Los resultados para los p_{sh} que cumplen las condiciones en a) y b) se presentan en las tablas 1.7 y 1.8, respectivamente.

q	$q + v = q_{\text{sh}}$
$(0, 0, 0, 1)$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$

Tabla 1.6: Pesos q de las representaciones $\mathbf{8}_v$ (en NS) y $\mathbf{8}_s$ (en R) de $SO(8)$, dados en (1.7), que al ser desplazados por $v = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ cumplen $(q+v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$. Se tiene que $q_{\text{sh}} \cdot v = 0$, por lo que los 2 estados $|q_{\text{sh}}\rangle$ son del tipo ρ^0 .

Caso a) $(q+v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$, $\tilde{N} = 0$ y $(p+V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{4}{3}$.

Los estados $|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle$ que son invariantes bajo \mathbb{Z}_3 son de la forma $\rho^0 \rho^0$ y están dados por

$$|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle \longrightarrow \begin{matrix} |0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \\ |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\rangle \end{matrix} \times |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (1.124)$$

donde los q_{sh} y p_{sh} son los de las tablas 1.6 y 1.7, respectivamente. Los estados $|q_{\text{sh}}\rangle$ y $|p_{\text{sh}}\rangle$ son ambos del tipo ρ^0 bajo \mathbb{Z}_3 . Los estados en (1.124) se transforman bajo $G_{4D} = SU(3) \times E_6 \times E_8$ como $27(\mathbf{1}, \mathbf{27}, \mathbf{1})_R$, donde el factor de multiplicidad 27 es debido al número de puntos fijos que se tienen en el orbifold \mathbb{Z}_3 . La quiralidad es derecha, indicada por el subíndice R , ya que la primera componente en $|q_{\text{sh}}\rangle$ es $+\frac{1}{2}$. La manera de obtener las representaciones bajo G_{4D} es similar al proceso usado en el sector no torcido, es decir, se calculan los coeficientes de Dynkin pero ahora con los momentos desplazados p_{sh} , i.e. $(\alpha_1 \cdot p_{\text{sh}}, \dots, \alpha_n \cdot p_{\text{sh}})$, donde n indica el rango del grupo factor en G_{4D} .

Caso b) $(q+v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$, $\tilde{N} = \frac{1}{3}$ y $(p+V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{2}{3}$.

En este caso $\tilde{N} = \frac{1}{3}$ implica la presencia de los osciladores de creación izquierdos $\tilde{\beta}_{-1/3}^a$ y $\tilde{\beta}_{-1/3}^{\bar{a}}$. El primero (segundo) es de tipo ρ^1 (ρ^2) bajo \mathbb{Z}_3 . Los estados invariantes bajo \mathbb{Z}_3 son

$$|q_{\text{sh}}\rangle \times \tilde{\beta}_{-1/3}^a |p_{\text{sh}}\rangle \longrightarrow \begin{matrix} |0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \\ |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\rangle \end{matrix} \times \tilde{\beta}_{-1/3}^a |p_{\text{sh}}\rangle. \quad (1.125)$$

Esto es porque los estados $|q_{\text{sh}}\rangle$ y $|p_{\text{sh}}\rangle$ son del tipo ρ^0 y ρ^2 , dando lugar a que los estados en (1.125) son del tipo invariante $\rho^0 \rho^1 \rho^2$ bajo \mathbb{Z}_3 . Los pesos desplazados q_{sh} y p_{sh} que cumplen las condiciones $q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$ y $p_{\text{sh}}^2 = \frac{2}{3}$ están dados en las tablas 1.6 y 1.8, respectivamente. Los estados en (1.125)

p	$p + V = p_{\text{sh}}$
$(-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -1, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 1, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, -1, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 1, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, -1, 0; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 1; 0^8)$
$(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, -1; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$

Tabla 1.7: Pesos p de (1.13) que al ser desplazados por $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^5; 0^8)$ cumplen $(p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{4}{3}$. Se tiene que $p_{\text{sh}} \cdot V = 0$, por lo que los 27 estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ son del tipo ρ^0 .

se transforman bajo G_{4D} como $27 \times 3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_R$, donde el factor de multiplicidad 3 proviene del operador de creación en las tres direcciones complejas $a = 1, 2, 3$, y el factor 27 es por el número de puntos fijos.

p	$p + V = p_{\text{sh}}$
$(-1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$
$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$

Tabla 1.8: Pesos p de (1.13) que al ser desplazados por $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^5; 0^8)$ cumplen $(p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{2}{3}$. Se tiene que $p_{\text{sh}} \cdot V = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, por lo que los 3 estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ son del tipo ρ^2 .

Sector $k = 2$

Los estados en el sector torcido $k = 2$ son los conjugados de los estados en el sector torcido $k = 1$ ya que $\theta^2 = (\theta^1)^{-1}$ en \mathbb{Z}_3 . Por lo tanto, de los estados en (1.124), se tienen ahora a los estados

$$|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle \longrightarrow \begin{array}{l} |0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\rangle \end{array} \times |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (1.126)$$

donde los momentos desplazados, p_{sh} , son los negativos de los presentados en la tabla 1.7. Los estados en (1.126) se transforman bajo $G_{4D} = \text{SU}(3) \times E_6 \times E_8$ como $27(\mathbf{1}, \mathbf{27}, \mathbf{1})_L$ y son del tipo invariante $\rho^0 \rho^0$ bajo \mathbb{Z}_3 . Además, de los estados en (1.125), se tienen ahora a los estados

$$|q_{\text{sh}}\rangle \times \tilde{\beta}_{-1/3}^{\bar{a}} |p_{\text{sh}}\rangle \longrightarrow \begin{array}{l} |0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\rangle \\ |-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\rangle \end{array} \times \tilde{\beta}_{-1/3}^{\bar{a}} |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (1.127)$$

donde los momentos desplazados, p_{sh} , son los negativos de los de la tabla 1.8. Los estados en (1.127) se transforman bajo G_{4D} como $27 \times 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_L$ y son del tipo invariante $\rho^0 \rho^2 \rho^1$ bajo \mathbb{Z}_3 .

Espectro

En resumen, tenemos el rompimiento

$$G_{10D} = E_8 \times E_8 \longrightarrow \text{SU}(3) \times E_6 \times E_8 = G_{4D}. \quad (1.128)$$

Sector no torcido

- Los 334 bosones de norma y norminos, (1.116) y (1.118), en la representación adjunta de G_{4D} .
- El multiplete de SUGRA $\mathcal{N} = 1$ y los 9 módulos geométricos presentados en (1.114) y (1.115), respectivamente.
- Los estados de materia $3(\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1})_L$ y su conjuado $3(\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{27}}, \mathbf{1})_R$.

Sector torcido

- En el sector torcido $k = 1$ se tienen los estados de materia $27(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{27}}, \mathbf{1})_R$ y $81(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_R$.
- En el sector torcido $k = 2$ se tienen los estados conjugados del sector $k = 1$, es decir, $27(\mathbf{1}, \mathbf{27}, \mathbf{1})_L$ y $81(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_L$.

Los estados de materia forman multipletes quirales. Los bosones de norma y norminos forman multipletes vectoriales. Ya que los estados conjugados forman un solo estado físico, presentamos el espectro resultante en la tabla 1.9.

Rompimiento	$E_8 \times E_8 \rightarrow SU(3) \times E_6 \times E_8$
Sector no torcido	
Multiplete de SUGRA	(1.114)
Módulos geométricos	(1.115)
334 bosones de norma y norminos	(1.116), (1.118)
Estados de materia	$3(\mathbf{3}, \mathbf{27}, \mathbf{1})$
Sector torcido	
Estados de materia	$27(\mathbf{1}, \mathbf{27}, \mathbf{1})$ $81(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$

Tabla 1.9: Espectro en la compactificación de $E_8 \times E_8$ en el orbifolio \mathbb{Z}_3 .

Líneas de Wilson

Los efectos de incluir líneas de Wilson (LW) en el espectro obtenido en la compactificación en orbifolios son modificar

- el rompimiento del grupo de norma G_{10D} a G_{4D} ,
- las representaciones de los estados bajo G_{4D} ,
- la degeneración en las ecuaciones para los estados izquierdos sin masa en correspondencia con los puntos fijos o sus elementos constructores.

Lo anterior puede ser entendido al recordar que V_g , el vector local de desplazamiento asociado al elemento g , está dado por $V_g = (\mathbb{1}, kV + m_\alpha W_\alpha)$ para orbifolios \mathbb{Z}_N , o $V_g = (\mathbb{1}, kV_1 + lV_2 + m_\alpha W_\alpha)$ para orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, como vimos en (1.43).

- De acuerdo a (1.106), las raíces p de G_{10D} ahora tienen que cumplir, adicionalmente a $p \cdot V = 0 \pmod{1}$ (en el caso \mathbb{Z}_N), la condición de invarianza $p \cdot W_\alpha = 0 \pmod{1}$, resultando en un nuevo conjunto de raíces para el grupo G_{4D} . Por lo tanto, se tiene una modificación al rompimiento de

G_{10D} a G_{4D} . Por ejemplo, de $p \cdot V = 0 \pmod{1}$ tenemos un primer rompimiento G_{10D} a G_{4D} , y por la nueva condición $p \cdot W_\alpha = 0 \pmod{1}$, tenemos otro rompimiento hacia un nuevo G_{4D} .

b) Las transformaciones de los estados $|p_{\text{sh}}\rangle$, donde $p_{\text{sh}} = p + V_g$, en el sector torcido, dada en (1.85), junto con las condición de invarianza en (1.108), dan como resultado que al incluir LW obtengamos un conjunto de pesos desplazados p_{sh} diferente al caso de no incluir LW, y por lo tanto, los estados en el espectro con estos momentos de norma $|p_{\text{sh}}\rangle$, tienen diferentes representaciones bajo G_{4D} (comparado al caso sin LW). Recordemos que tales representaciones se obtienen al calcular los coeficientes de Dynkin, los cuales dependen de los pesos p o de los pesos desplazados p_{sh} que aparecen en los estados de norma en el espectro.

c) De acuerdo a (1.43), el embebimiento de los elementos constructores de los puntos fijos a los elementos del grupo de norma torcido dan como resultado una modificación en esta degeneración, pues ahora V_g ya no es de la forma $V_g = (\mathbb{1}, kV)$, en el caso \mathbb{Z}_N sin LW, para todos los elementos constructores, sino que, de acuerdo a las relaciones entre las LW y el número máximo de LW no nulas independientes que se consideren, se tiene que un cierto número de elementos constructores resultan estar asociados a un mismo tipo de $V_g = (\mathbb{1}, kV + m_\alpha W_\alpha)$ mientras que otro cierto número de elementos constructores son asociados a otro cierto tipo de $V_g = (\mathbb{1}, kV + m'_\alpha W_\alpha)$, diferente al anterior en la combinación lineal de LW, etc., resultando así, en una modificación a la degeneración original del caso sin LW. Además, en cada uno de estos conjuntos de elementos constructores se tiene a la vez, un diferente momento $p_{\text{sh}} = p + V_g$, i.e. los correspondientes estados torcidos tienen diferentes representaciones bajo G_{4D} (comparado al caso sin LW), por la observación en b).

La observación en c) resultará ser importante para las simetrías de permutación, que veremos en el capítulo 3, de los estados torcidos que están atados a los puntos fijos. Por ejemplo, si n estados torcidos tienen idénticas representaciones o números cuánticos bajo G_{4D} , como en el caso de no contar con LW, entonces los estados torcidos atados a esos n puntos fijos son invariantes ante el grupo de permutación S_n . Esta simetría sería rota si los estados torcidos fueran distinguidos por sus números cuánticos, lo cual corresponde a tener algunas o todas las LW con valores no nulos.

Finalmente, notamos que los estados asociados al multiplete de SUGRA (1.98), los módulos geométricos (1.101) y los 16 bosones de norma y norminos asociados a los 16 generadores de Cartan de G_{4D} (1.103), son inalterados por la presencia de LW, ya que sus condiciones de invarianza para formar parte del espectro, presentadas en (1.99), (1.102) y (1.104) respectivamente, no dependen del vector local de desplazamiento V_g , sino del vector local de torcimiento v_g .

Capítulo 2

Cuerda heterótica sin supersimetría

En este capítulo presento la construcción y el espectro de la cuerda heterótica no supersimétrica con grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$, usando la formulación bosónica. Muestro también la compactificación de esta teoría en el orbifolio \mathbb{Z}_3 .

2.1. Construcción de $SO(16) \times SO(16)$

La cuerda heterótica sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$ se obtiene al aplicar un orbifolio con simetría \mathbb{Z}_2 a la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ [20]. El orbifolio \mathbb{Z}_2 usado en esta construcción tiene los vectores

$$v_0 = (0, 1, 1, 1) \quad \text{y} \quad V_0 = (1, 0^7; 1, 0^7), \quad (2.1)$$

donde v_0 es el vector de torcimiento, i.e. una rotación trivial o con acción libre (sin puntos fijos), y V_0 es el vector de desplazamiento. En \mathbb{Z}_2 se tiene el sector no torcido ($l = 0$) y el sector torcido ($l = 1$).

Retículas de pesos y estados en la cuerda $E_8 \times E_8$

Conocer las retículas de pesos en la cuerda heterótica supersimétrica resulta ser útil en la construcción de la cuerda sin supersimetría, así como en su compactificación en orbifolios.

De acuerdo al espectro no masivo de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$, presentado en (1.14), (1.15) y (1.16) con pesos q y p dados en (1.7) y (1.13), y la definición para las retículas de pesos del grupo $SO(2n)$ presentada en la tabla 2.1, se tiene que las retículas de pesos en esta teoría están dadas por $(V_4 + S_4) \times [(R_8 + S_8) \times (R_8 + S_8)]$. En la tabla 2.2, se muestran las retículas, estados, representaciones y pesos asociados al espectro de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$.

Retícula de pesos	Símbolo	Vector (en la retícula)	Condición
Raíz	R_n	(n_1, \dots, n_n)	$\sum n_i$ es par
Vectorial	V_n	(n_1, \dots, n_n)	$\sum n_i$ es impar
Espinorial	S_n	$(n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_n + \frac{1}{2})$	$\sum n_i$ es par
Coespinorial	C_n	$(n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_n + \frac{1}{2})$	$\sum n_i$ es impar

Tabla 2.1: Las cuatro retículas conjugadas para el grupo $SO(2n)$.

Sector no torcido

Los estados que forman parte del espectro en el sector no torcido, $l = 0$, corresponden a los estados originales de la cuerda $E_8 \times E_8$ que tienen una fase trivial en las transformaciones presentadas en (1.79), (1.80) y (1.81) usando la simetría \mathbb{Z}_2 con vector de torcimiento y vector de desplazamiento dados en (2.1).

En el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{\rho^l; l = 0, 1 | \rho = -1\}$, los productos invariantes están dados por $\rho^0 \rho^0 = \rho^0$ y $\rho^1 \rho^1 = \rho^0$, los que no son invariantes por $\rho^0 \rho^1 = \rho^1$ y $\rho^1 \rho^0 = \rho^1$. Necesitamos conocer la transformación (ρ^0 o ρ^1) que presentan las componentes izquierdas y derechas de los estados que forman el espectro de la cuerda heterótica.

Para los estados $|q\rangle$ y $|p\rangle$ tenemos, de acuerdo a la transformación (1.81), que el estado $|q\rangle$ es de tipo ρ^0 si $q \cdot v_0 \in \mathbb{Z}$ y de tipo ρ^1 si $q \cdot v_0 \in \mathbb{Z} + 1/2$. Se obtiene una clasificación similar para los estados $|p\rangle$ usando V_0 en vez de v_0 . Por lo tanto,

$$|q\rangle = |\underline{\pm 1, 0, 0, 0}\rangle, q \in V_4, \text{ es de tipo } \rho^0, \quad (2.2)$$

$$|q\rangle = |(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})\rangle, q \in S_4, \text{ es de tipo } \rho^1, \quad (2.3)$$

$$|p\rangle = \begin{cases} |(\underline{\pm 1, \pm 1, 0^6})(0^8)\rangle, p \in R_8 \times R_8, \text{ es de tipo } \rho^0, \\ |(0^8)(\underline{\pm 1, \pm 1, 0^6})\rangle, p \in R_8 \times R_8, \text{ es de tipo } \rho^0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$|p\rangle = \begin{cases} |((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8)\rangle, p \in S_8 \times R_8, \text{ es de tipo } \rho^1, \\ |(0^8)((\pm \frac{1}{2})^8)\rangle, p \in R_8 \times S_8, \text{ es de tipo } \rho^1. \end{cases} \quad (2.5)$$

De hecho, vectores generales en las retículas y, en consecuencia, las propias retículas V_n y R_n (S_n y C_n) son de tipo ρ^0 (ρ^1). En nuestro caso, $n = 4$ y $n = 8$ para los espacios de configuración y de norma, respectivamente. Por otra parte, los estados excitados izquierdos tienen, de acuerdo a (1.79) y (1.80), una transformación trivial, es decir,

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I |0\rangle, I = 10, \dots, 25, \text{ son de tipo } \rho^0, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i |0\rangle, i = 2 \dots, 9, \text{ son de tipo } \rho^0. \quad (2.7)$$

Tipo	Retículas	Estados, representaciones y pesos
B	$V_4 \times R_8 \times R_8$	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle \times p\rangle) \times q\rangle, \quad I = 10, \dots, 25$ $(\mathbf{8}_v; (\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}))$, 240 bosones de norma $q = (\pm 1, 0, 0, 0), p = \begin{cases} (\pm 1, \pm 1, 0^6)(0^8) \\ (0^8)(\pm 1, \pm 1, 0^6) \end{cases}$
	$V_4 \times S_8 \times R_8$ $V_4 \times R_8 \times S_8$	$ p\rangle \times q\rangle$ $(\mathbf{8}_v; (\mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128}))$, 256 bosones de norma $q = (\pm 1, 0, 0, 0), p = \begin{cases} ((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8) \\ (0^8)((\pm \frac{1}{2})^8) \end{cases}$
	$V_4 \times S_8 \times S_8$	
F	$S_4 \times R_8 \times R_8$	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle \times p\rangle) \times q\rangle, \quad I = 10, \dots, 25$ $(\mathbf{8}_s; (\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}))$, 240 norminos $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), p = \begin{cases} (\pm 1, \pm 1, 0^6)(0^8) \\ (0^8)(\pm 1, \pm 1, 0^6) \end{cases}$
	$S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$	$ p\rangle \times q\rangle$ $(\mathbf{8}_s; (\mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128}))$, 256 norminos $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), p = \begin{cases} ((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8) \\ (0^8)((\pm \frac{1}{2})^8) \end{cases}$
	$S_4 \times S_8 \times S_8$	
B	V_4	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle, \quad i = 2, \dots, 9$ $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$, dilatón, Kalb-Ramond, gravitón $q = (\pm 1, 0, 0, 0)$
F	S_4	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle, \quad i = 2, \dots, 9$ $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_s = \mathbf{8} + \mathbf{56}$, dilatino, gravitino $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$

Tabla 2.2: Espectro y retículas para la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$. En la primera columna B y F indican bosones y fermiones. En la segunda columna se muestran las retículas para $SO(8) \times E_8 \times E_8$ y $SO(8)$. Los estados sin masa, junto con las representaciones y pesos, se presentan en la tercera columna, donde los estados en los renglones superiores son estados de norma y los estados en los dos últimos renglones son estados del multiplete de SUGRA. En los pesos q o p con elementos $\pm \frac{1}{2}$'s se toma un número par de $+\frac{1}{2}$'s. Los pesos p , en los estados sin masa $|p\rangle$, cumplen $p^2 = 2$, por lo que no hay estados con $p = ((\pm \frac{1}{2})^8)((\pm \frac{1}{2})^8)$ o $p = (\pm 1, \pm 1, 0^6)(\pm 1, \pm 1, 0^6)$ en las retículas $S_8 \times S_8$ o $R_8 \times R_8$.

Tipo	Retículas	Estados, representaciones y pesos
B	$V_4 \times R_8 \times R_8$ $V_4 \times S_8 \times S_8$	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle \times p\rangle) \times q\rangle, \quad I = 10, \dots, 25$ $(\mathbf{8}_v; (\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}))$, 240 bosones de norma $q = (\pm 1, 0, 0, 0), p = \begin{cases} (\pm 1, \pm 1, 0^6)(0^8) \\ (0^8)(\pm 1, \pm 1, 0^6) \end{cases}$
F	$S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$	$ p\rangle \times q\rangle$ $(\mathbf{8}_s; (\mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128}))$, 256 espinores $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), p = \begin{cases} ((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8) \\ (0^8)((\pm \frac{1}{2})^8) \end{cases}$
B	V_4	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle, \quad i = 2, \dots, 9$ $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$, dilatón, Kalb-Ramond, gravitón $q = (\pm 1, 0, 0, 0)$

Tabla 2.3: Las retículas de pesos, estados y representaciones que forman el espectro en el sector no torcido de \mathbb{Z}_2 para la cuerda heterótica sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$.

Con la información mostrada en las ecuaciones (2.2)-(2.7) se puede determinar cuáles estados de la cuerda $E_8 \times E_8$ son invariantes bajo \mathbb{Z}_2 . Estos estados invariantes forman el sector no torcido de la cuerda heterótica $SO(16) \times SO(16)$ y son presentados en la tabla 2.3. El espectro, en este sector, está formado por 240 bosones de norma que se transforman en la representación adjunta, $(\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120})$ de $SO(16) \times SO(16)$, 256 fermiones cargados bajo el grupo de norma, el dilatón, el campo antisimétrico de dos índices y el gravitón. Al comparar con la tabla 2.2 se nota que el gravitino ha sido removido y que, en general, el número de fermiones y de bosones no coincide, lo cual es un signo del rompimiento explícito de supersimetría debido al cociente \mathbb{Z}_2 aplicado a la cuerda $E_8 \times E_8$.

Sector torcido

En el sector torcido, $l = 1$, se tienen nuevos estados y también nuevas combinaciones de retículas. Para determinar lo anterior, consideremos las ecuaciones para los estados no masivos presentadas en (1.65) y (1.67), usando ahora el vector de torcimiento $v_0 = (0, 1, 1, 1)$ y el vector de desplazamiento $V_0 = (1, 0^7; 1, 0^7)$ del orbifold \mathbb{Z}_2 . Tenemos entonces

$$\frac{1}{4}M_R^2 = \frac{1}{2}(q + v_0)^2 - \frac{1}{2} + \delta_c = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{4}M_L^2 = \frac{1}{2}(p + V_0)^2 + \tilde{N} - 1 + \delta_c = 0, \quad (2.9)$$

donde δ_c es definido en (1.66) y \tilde{N} es el operador de número dado en (1.68). En este caso se tiene que $\delta_c = 0$. Las condiciones para obtener los estados no masivos son

$$(q + v_0)^2 = q_{\text{sh}}^2 = 1 \quad \text{y} \quad (p + V_0)^2 = p_{\text{sh}}^2 = 2, \quad (2.10)$$

con $\tilde{N} = 0$. Se tiene que \tilde{N} puede tomar los valores $0, 1/2, 1, \dots$, pero solo $\tilde{N} = 0$ permite obtener estados sin masa. La transformación de los estados sin masa $|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle$ está dada, de acuerdo a (1.88), por

$$|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle \longrightarrow e^{2\pi i(p_{\text{sh}} \cdot V_0 - q_{\text{sh}} \cdot v_0)} e^{2\pi i(-\frac{1}{2}(V_0 \cdot V_0 - v_0 \cdot v_0))} |p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.11)$$

donde ahora no se tienen operadores de creación izquierdos, ya que $\tilde{N} = 0$ para los estados sin masa. Notamos que la fase del vacío $\Phi_{\text{vacío}} = e^{2\pi i(-\frac{1}{2}(V_0 \cdot V_0 - v_0 \cdot v_0))} = -1$, i.e. contribuye un factor de tipo ρ^1 bajo \mathbb{Z}_2 .

Antes de analizar la solución a las ecuaciones en (2.10) para los momentos q y p , enfoquémonos a conocer cuáles son las retículas invariantes en el sector torcido para la cuerda heterótica sin supersimetría $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$. Esto nos permitirá conocer cuáles estados $|p + V_0\rangle \times |q + v_0\rangle$ pueden ser definidos en correspondencia con las retículas invariantes en el sector torcido de \mathbb{Z}_2 .

Para esto, consideremos lo siguiente:

- $|p + V_0\rangle = |p_{\text{sh}}\rangle$ es de tipo ρ^0 si $(p + V_0) \cdot V_0 \in \mathbb{Z}$ y es de tipo ρ^1 si $(p + V_0) \cdot V_0 \in \mathbb{Z} + 1/2$. De manera análoga para $|q + v_0\rangle = |q_{\text{sh}}\rangle$, usando v_0 en vez de V_0 y q en vez de p .
- Las retículas R_n y V_n (S_n y C_n) son del tipo ρ^0 (ρ^1).
- La acción de \mathbb{Z}_2 transforma las retículas espacio-temporales como $V_4 + v_0 = R_4$, $S_4 + v_0 = C_4$,
- y las retículas de norma como $(R_8 \times R_8) + V_0 = V_8 \times V_8$, $(S_8 \times R_8) + V_0 = C_8 \times V_8$, $(S_8 \times S_8) + V_0 = C_8 \times C_8$.

Entonces, las retículas invariantes en el sector torcido para la cuerda $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ corresponden a las retículas de la cuerda $E_8 \times E_8$ que al ser desplazadas por v_0 (las de $\text{SO}(8)$) y V_0 (las de $E_8 \times E_8$) son invariantes ante \mathbb{Z}_2 , tomando en cuenta la fase del vacío, como aparece en la transformación de estados presentada en (2.11). Tenemos entonces

$$V_4 \times R_8 \times R_8 \longrightarrow (V_4 + v_0) \times [(R_8 \times R_8) + V_0] = R_4 \times V_8 \times V_8 \quad : \quad \rho^1 \quad (2.12)$$

$$V_4 \times S_8 \times R_8 \longrightarrow (V_4 + v_0) \times [(S_8 \times R_8) + V_0] = R_4 \times C_8 \times V_8 \quad : \quad \rho^0 \quad (2.13)$$

$$V_4 \times R_8 \times S_8 \longrightarrow (V_4 + v_0) \times [(R_8 \times S_8) + V_0] = R_4 \times V_8 \times C_8 \quad : \quad \rho^0 \quad (2.14)$$

$$V_4 \times S_8 \times S_8 \longrightarrow (V_4 + v_0) \times [(S_8 \times S_8) + V_0] = R_4 \times C_8 \times C_8 \quad : \quad \rho^1 \quad (2.15)$$

$$S_4 \times R_8 \times R_8 \longrightarrow (S_4 + v_0) \times [(R_8 \times R_8) + V_0] = C_4 \times V_8 \times V_8 \quad : \quad \rho^0 \quad (2.16)$$

$$S_4 \times S_8 \times R_8 \longrightarrow (S_4 + v_0) \times [(S_8 \times R_8) + V_0] = C_4 \times C_8 \times V_8 \quad : \quad \rho^1 \quad (2.17)$$

$$S_4 \times R_8 \times S_8 \longrightarrow (S_4 + v_0) \times [(R_8 \times S_8) + V_0] = C_4 \times V_8 \times C_8 \quad : \quad \rho^1 \quad (2.18)$$

$$S_4 \times S_8 \times S_8 \longrightarrow (S_4 + v_0) \times [(S_8 \times S_8) + V_0] = C_4 \times C_8 \times C_8 \quad : \quad \rho^0 \quad (2.19)$$

donde después de “ : ” se ha escrito el resultado final al producto en \mathbb{Z}_2 de acuerdo a la retícula y tomando en cuenta la fase del vacío que es de tipo ρ^1 . Por ejemplo, en $S_4 \times R_8 \times R_8 \longrightarrow C_4 \times V_8 \times V_8$ tenemos $\rho^1 \rho^0 \rho^0 \rho^1 = \rho^0$, i.e. es invariante; en $V_4 \times R_8 \times R_8 \longrightarrow R_4 \times V_8 \times V_8$, tenemos $\rho^0 \rho^0 \rho^0 \rho^1 = \rho^1$, i.e. es no invariante. Por lo tanto, las retículas en el sector torcido para la cuerda $SO(16) \times SO(16)$ que resultan ser invariantes ante la transformación (2.11) son las que se transforman como ρ^0 , es decir,

$$R_4 \times C_8 \times V_8, \quad R_4 \times V_8 \times C_8, \quad C_4 \times V_8 \times V_8, \quad C_4 \times C_8 \times C_8, \quad (2.20)$$

las cuales provienen de las retículas $V_4 \times S_8 \times R_8$, $V_4 \times R_8 \times S_8$, $S_4 \times R_8 \times R_8$ y $S_4 \times S_8 \times S_8$ de $E_8 \times E_8$, respectivamente. Esto nos dice que las soluciones a (2.10) para los pesos $q + v_0$ y $p + V_0$ deben ser tales que los estados torcidos $|p + V_0\rangle \times |q + v_0\rangle$ sean definidos en correspondencia con la combinación de retículas $SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$ presentadas en (2.20), es decir, que tengan pesos $p + v_0$ y $q + V_0$ solo en esas retículas. Las demás combinaciones son no invariantes en este sector torcido, y por lo tanto, estados formados en esas retículas no invariantes son removidos del espectro.

Las soluciones para las ecuaciones (2.10) son

$$q_{\text{sh}} = q + v_0 = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), \text{ con un número impar de } + \frac{1}{2}'\text{s, i.e. } q_{\text{sh}} \in C_4, \quad (2.21)$$

$$p_{\text{sh}} = p + V_0 = (\pm 1, 0^7; \pm 1, 0^7), \text{ i.e. } p_{\text{sh}} \in V_8 \times V_8. \quad (2.22)$$

Los pesos q_{sh} en (2.21) forman la representación coespinores $\mathbf{8}_c$ de $SO(8)$. Se tiene que $q_{\text{sh}} \in C_4$ y proviene de $q + v_0$ con $q \in S_4$. Los pesos p_{sh} en (2.22) forman la representación vectorial, $(\mathbf{16}, \mathbf{16})$, de $SO(16) \times SO(16)$. Los pesos $p_{\text{sh}} \in V_8 \times V_8$ y provienen de $p + V_0$ donde $p \in R_8 \times R_8$. Por lo tanto, el estado $|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle$ está definido en la retícula $C_4 \times V_8 \times V_8$ de (2.20). Para las otras tres retículas en (2.20) no se encuentran soluciones a (2.10).

Por lo tanto, en el sector torcido, tenemos el estado sin masa $|p_{\text{sh}}\rangle \times |q_{\text{sh}}\rangle$ en la retícula $C_4 \times V_8 \times V_8$, con pesos q_{sh} y p_{sh} dados en (2.21) y (2.22), respectivamente. Este estado se transforma bajo $SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$ como $(\mathbf{8}_c; (\mathbf{16}, \mathbf{16}))$ y representa a 256 coespinores. En la tabla 2.4 se presentan las retículas y estados que forman el sector torcido de la cuerda sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$.

Las retículas de esta teoría se presentan en la tabla 2.5, donde se ha incluido también a las retículas de la cuerda supersimétrica $E_8 \times E_8$, así como a las retículas en el sector no torcido y torcido de $SO(16) \times SO(16)$, con la finalidad de notar la transición que se tiene en las retículas en esta construcción.

Tipo	Retículas	Estados, representaciones y pesos
B	$R_4 \times C_8 \times V_8$ $R_4 \times V_8 \times C_8$	
F	$C_4 \times V_8 \times V_8$ $C_4 \times C_8 \times C_8$	$ p_{\text{sh}}\rangle \times q_{\text{sh}}\rangle = p + V_0\rangle \times q + v_0\rangle$ $(\mathbf{8}_c; (\mathbf{16}, \mathbf{16}))$, 256 coespinores $q_{\text{sh}} = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ (# impar de $+\frac{1}{2}$'s) $p_{\text{sh}} = (\pm 1, 0^7; \pm 1, 0^7)$

Tabla 2.4: Las retículas de pesos en el sector torcido para la cuerda heterótica sin supersimetría $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ son presentadas en la segunda columna. Se tienen 256 coespinores donde sus representaciones y pesos son presentados en la tercera columna. En este caso, los pesos $q_{\text{sh}} = q + v_0 \in C_4$ y $p_{\text{sh}} = p + V_0 \in V_8 \times V_8$. La notación B y F, en la primera columna, indica bosones y fermiones.

Tipo	Retículas $E_8 \times E_8$	Cuerda sin supersimetría		
		Sector no torcido $\mathbb{Z}_2 (l = 0)$	Sector torcido $\mathbb{Z}_2 (l = 1)$	Retículas $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$
B	$V_4 \times R_8 \times R_8$ $V_4 \times S_8 \times R_8$ $V_4 \times R_8 \times S_8$ $V_4 \times S_8 \times S_8$	$V_4 \times R_8 \times R_8$ $V_4 \times S_8 \times S_8$	$R_4 \times C_8 \times V_8$ $R_4 \times V_8 \times C_8$	$V_4 \times R_8 \times R_8$ $R_4 \times C_8 \times V_8$ $R_4 \times V_8 \times C_8$ $V_4 \times S_8 \times S_8$
F	$S_4 \times R_8 \times R_8$ $S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$ $S_4 \times S_8 \times S_8$	$S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$	$C_4 \times V_8 \times V_8$ $C_4 \times C_8 \times C_8$	$C_4 \times V_8 \times V_8$ $S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$ $C_4 \times C_8 \times C_8$
B	Retículas $\text{SO}(8)$ V_4	V_4		V_4
F	S_4			

Tabla 2.5: Transición de retículas en la construcción de la cuerda $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ a partir de la cuerda $E_8 \times E_8$ usando la simetría \mathbb{Z}_2 . En la primera columna B y F denotan bosones y fermiones, indicando que los estados que pueden ser definidos en esas retículas representan partículas de tipo bosónico o fermiónico en el espacio-tiempo en $D = 10$.

Espectro en $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$

La cuerda heterótica sin supersimetría $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ tiene un espectro formado por

- 240 bosones de norma en la representación adjunta de $SO(16) \times SO(16)$
- 256 espinores y 256 coespinores
- dilatón, gravitón y campo de Kalb-Ramond

Los estados sin masa y las retículas en esta teoría se muestran en la tabla 2.6, donde ya no se hace referencia al sector no torcido o torcido de \mathbb{Z}_2 , i.e la teoría y su espectro son presentados como una teoría ya construida. Es importante destacar que el cociente por \mathbb{Z}_2 que conduce a esta teoría no es una compactificación y no conduce a singularidades.

Tipo	Retículas	Estados, representaciones y pesos	Sector
B	$V_4 \times R_8 \times R_8$ $R_4 \times C_8 \times V_8$ $R_4 \times V_8 \times C_8$ $V_4 \times S_8 \times S_8$	$(\tilde{\alpha}_{-1}^I 0\rangle \times p\rangle) \times q\rangle$, $I = 10, \dots, 25$ $(\mathbf{8}_v; (\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120}))$, 240 bosones de norma $q = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $p = \begin{cases} (\pm 1, \pm 1, 0^6)(0^8) \\ (0^8)(\pm 1, \pm 1, 0^6) \end{cases}$	Sector de norma
F	$C_4 \times V_8 \times V_8$ $S_4 \times S_8 \times R_8$ $S_4 \times R_8 \times S_8$ $C_4 \times C_8 \times C_8$	$ p\rangle \times q\rangle$ $(\mathbf{8}_c; (\mathbf{16}, \mathbf{16}))$, 256 coespinores $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, (# impar de $+\frac{1}{2}$'s) $p = (\pm 1, 0^7; \pm 1, 0^7)$ $ p\rangle \times q\rangle$ $(\mathbf{8}_s; (\mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128}))$, 256 espinores $q = (\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$, $p = \begin{cases} ((\pm \frac{1}{2})^8)(0^8) \\ (0^8)((\pm \frac{1}{2})^8) \end{cases}$ (# par de $+\frac{1}{2}$'s)	Sector de materia
B	V_4	$\tilde{\alpha}_{-1}^i 0\rangle \times q\rangle$, $i = 2, \dots, 9$ $\mathbf{8}_v \times \mathbf{8}_v = \mathbf{1} + \mathbf{28} + \mathbf{35}$, dilatón, Kalb-Ramond, gravitón $q = (\pm 1, 0, 0, 0)$	Sector de gravedad

Tabla 2.6: Espectro y retículas para la cuerda heterótica sin supersimetría $SO(16) \times SO(16)$. La notación B y F indica bosones y fermiones. Las representaciones de los estados son con respecto a $SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$. El renglón inferior corresponde a los estados de gravedad. En la última columna se clasifica a los estados por sectores, de acuerdo al tipo de partículas que los estados representan. En esta teoría no se tiene al gravitino y todo el espectro es no supersimétrico, teniéndose así, una teoría con $\mathcal{N} = 0$ en $D = 10$.

2.2. Orbifolio \mathbb{Z}_3 de la cuerda no supersimétrica

Presento la compactificación de la cuerda heterótica sin supersimetría $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ en el orbifolio \mathbb{Z}_3 con vector de torcimiento $v = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ y vector de desplazamiento $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^6; 0^8)$, correspondiente al embebimiento estándar de v en los grados de libertad de norma. La geometría de este orbifolio es la misma que presentamos en la subsección 1.4. En el orbifolio \mathbb{Z}_3 se tiene el sector no torcido $k = 0$ y los dos sectores torcidos $k = 1, 2$.

2.2.1. Sector no torcido

El sector no torcido de la compactificación está formado por los estados originales de la cuerda no supersimétrica $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$, presentados en la tabla 2.6, que son invariantes ante la simetría del orbifolio. Para esto usamos las transformaciones de estados que presentamos en la sección 1.3.3 con las condiciones de invarianza de la subsección 1.3.5. Necesitamos conocer, además, la clasificación de los estados $|q\rangle$ y $|p\rangle$ bajo \mathbb{Z}_3 de acuerdo a $\rho^n = (e^{2\pi i/3})^n$, $n = 0, 1, 2$, donde ρ^1 es el generador de esta simetría, ya que los productos invariantes en \mathbb{Z}_3 están dados por $\rho^0 \rho^0 = \rho^0$, $\rho^1 \rho^2 = \rho^0$ y $\rho^2 \rho^1 = \rho^0$.

De acuerdo a la transformación (1.81), tenemos que el estado $|p\rangle$ es de tipo ρ^0 si $p \cdot V = 0 \pmod{1}$, de tipo ρ^1 si $p \cdot V = \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$ y de tipo ρ^2 si $p \cdot V = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. De manera análoga para el estado $|q\rangle$, notando el signo menos en la transformación (1.81) para este estado, ρ^1 si $q \cdot v = -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Aquí $v = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ y $V = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0^6; 0^8)$.

Esta clasificación está dada en la tabla 2.7 para los estados $|q\rangle$ y $|p\rangle$, en términos de los pesos q y p de los estados sin masa presentados en la tabla 2.6.

Analícemos enseguida los estados que forman parte del espectro, en este sector no torcido, como resultado de la compactificación.

Del sector de gravedad

Consideremos el sector formado por los estados en la parte inferior de la tabla 2.6, es decir, los correspondientes a la retícula V_4 .

Gravedad.

De acuerdo a la transformación (1.82), la condición de invarianza (1.99) y la tabla 2.7 (primer renglón) tenemos que el estado

$$\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |q\rangle, \text{ con } |q\rangle = |\pm 1, 0, 0, 0\rangle \quad (2.23)$$

es invariante del tipo $\rho^0 \rho^0$. Este estado representa la parte bosónica del multiplete de gravedad, i.e. al gravitón, dilatón y campo de Kalb-Ramond en $D = 4$.

ρ^0	#	ρ^1	#	ρ^2	#
$(\pm 1, 0, 0, 0)$	2	$(0, \underline{-1}, 0, 0)$	3	$(0, \underline{1}, 0, 0)$	3
$(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$	2	$(-\frac{1}{2}, \underline{-\frac{1}{2}}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	3	$(+\frac{1}{2}, \underline{+\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	3
$(\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$	2	$(+\frac{1}{2}, \underline{-\frac{1}{2}}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$	3	$(-\frac{1}{2}, \underline{+\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	3
$\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8)$ $(0^3, \underline{\pm 1}, \underline{\pm 1}, 0^3; 0^8)$ $(0^8; \underline{\pm 1}, \underline{\pm 1}, 0^6)$	6 40 112	$(-1, -1, 0, 0^5; 0^8)$ $(\underline{1}, 0, 0, \underline{\pm 1}, 0^4; 0^8)$	3 30	$(1, 1, 0, 0^5; 0^8)$ $(\underline{-1}, 0, 0, \underline{\mp 1}, 0^4; 0^8)$	3 30
$(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8)$ $(0^8; (\pm \frac{1}{2})^8)$	32 128	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8)$	48	$(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8)$	48
$(0^3, \underline{\pm 1}, 0^4; \underline{\pm 1}, 0^7)$	160	$(\underline{1}, 0, 0, 0^5; \underline{\pm 1}, 0^7)$	48	$(\underline{-1}, 0, 0, 0^5; \underline{\pm 1}, 0^7)$	48

Tabla 2.7: Clasificación de los pesos q y p de los estados sin masa en el espectro de la cuerda sin supersimetría. Del primer al tercer renglón se presenta, respectivamente, la clasificación de los pesos $q = (\pm 1, 0, 0, 0) \in V_4$, $q = ((\pm \frac{1}{2})^4) \in S_4$ (con un número par de $+\frac{1}{2}$'s) y $q = ((\pm \frac{1}{2})^4) \in C_4$ (con un número impar de $+\frac{1}{2}$'s) para las representaciones $\mathbf{8}_v$, $\mathbf{8}_s$ y $\mathbf{8}_c$ de $SO(8)$. Del cuarto al sexto renglón se tiene, respectivamente, la clasificación de los pesos p para las representaciones $(\mathbf{120}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{120})$, $(\mathbf{128}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{128})$ y $(\mathbf{16}, \mathbf{16})$ de $SO(16) \times SO(16)$. Estos pesos p están, respectivamente, en la retículas $R_8 \times R_8$, $S_8 \times R_8$ y $R_8 \times S_8$, y $V_8 \times V_8$ de $SO(16) \times SO(16)$, ver tabla 2.6. El símbolo # indica el número de pesos que se tienen.

(Recordar que $\tilde{\beta}_{-1}^{0/\bar{0}}|0\rangle \times |q\rangle$ denota a $\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle \times |q\rangle$, para $i = 2, 3$.)

Módulos geométricos.

Tomando en cuenta la transformación (1.79), la condición de invarianza (1.102) y la tabla 2.7 (primer renglón), se tiene que los estados

$$\tilde{\beta}_{-1}^a|0\rangle \times |q\rangle, \text{ con } |q\rangle = |0, \underline{1}, 0, 0\rangle \quad (2.24)$$

y su conjugado

$$\tilde{\beta}_{-1}^{\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle, \text{ con } |q\rangle = |0, \underline{-1}, 0, 0\rangle, \quad (2.25)$$

donde $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$, son del tipo invariante $\rho^1\rho^2 = \rho^0$ y $\rho^2\rho^1 = \rho^0$, respectivamente. Los estados (2.24) y (2.25) representan a nueve módulos geométricos, que resultan de tener tres estados por cada una de las tres direcciones $a = 1, 2, 3$.

(Recordar que $\tilde{\beta}_{-1}^{a/\bar{a}}|0\rangle \times |q\rangle$, con $a(\bar{a}) = 1, 2, 3$, denota a $\tilde{\alpha}_{-1}^i|0\rangle \times |q\rangle$, para $i = 4, \dots, 9$.)

Del sector de norma

Nos referimos a los estados en la retícula $V_4 \times R_8 \times R_8$ de la tabla 2.6.

16 bosones de norma no cargados.

Tomando en cuenta la transformación (1.80), la condición de invarianza (1.104) y la tabla 2.7 (primer renglón) tenemos que el estado

$$\tilde{\alpha}_{-1}^I|0\rangle \times |q\rangle, \text{ con } |q\rangle = |\pm 1, 0, 0, 0\rangle, \quad (2.26)$$

donde $I = 10, \dots, 25$, es del tipo invariante $\rho^0\rho^0 = \rho^0$, y representa a 16 bosones de norma no cargados correspondientes a los generadores de Cartan del grupo de norma en $D = 4$.

Rompimiento de G_{10D} a G_{4D} : 158 bosones de norma cargados y escalares complejos.

Usamos la transformación (1.81), las condiciones de invarianza (1.106) y (1.107), y la tabla 2.7 (primer y cuarto renglón).

Estados $\rho^0\rho^0$

Se tiene que los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ invariantes del tipo $\rho^0\rho^0$ son

$$|\pm 1, 0, 0, 0\rangle \times \begin{cases} \pm|1, -1, 0, 0^5; 0^8\rangle, \\ |0^3, \pm 1, \pm 1, 0^3; 0^8\rangle, \\ |0^8; \pm 1, \pm 1, 0^6\rangle. \end{cases} \quad (2.27)$$

Esto indica que tenemos el rompimiento del grupo de norma en 10 dimensiones, G_{10D} , al grupo de norma en 4 dimensiones, G_{4D} , dado por

$$G_{10D} = \text{SO}(16) \times \text{SO}(16) \longrightarrow G_{4D} = \text{SU}(3) \times \text{SO}(10) \times \text{U}(1) \times \text{SO}(16). \quad (2.28)$$

Para mostrar lo anterior, consideremos lo siguiente. Sea $A = \{\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8)\}$ el conjunto de 6 raíces, $B = \{(0^3, \pm 1, \pm 1, 0^3; 0^8)\}$ el conjunto de 40 raíces y $C = \{(0^8; \pm 1, \pm 1, 0^6)\}$ el conjunto de 112 raíces, presentadas en (2.27). Los conjuntos de raíces son mutuamente ortogonales entre ellos, indicando un producto directo de grupos simples compactos. Enseguida uso esta notación: las (n, m) raíces de $G_a \times G_b$ significa las n raíces de G_a y las m raíces de G_b . De las originales (112, 112) raíces de $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ tenemos que estas fueron distribuidas en $(6+40+0, 112)$ raíces invariantes (las que cumplieron $p \cdot V = 0 \pmod{1}$ y que son entonces del tipo ρ^0) para el grupo de norma en $D = 4$. Sumando a estas raíces invariantes las $8 + 8$ raíces nulas del sector de Cartan de (2.26), en la forma (indicada en paréntesis) $(6+(2) + 40 + (5) + 0 + (1), 112 + (8)) = (8 + 45 + 1, 120)$, obtenemos un conjunto de raíces que tiene la misma dimensionalidad y estructura que $G_{4D} = \text{SU}(3) \times \text{SO}(10) \times \text{U}(1) \times \text{SO}(16)$, ya que $\text{SU}(3)$ tiene dimensión 8, $\text{SO}(10)$ tiene dimensión 45, $\text{U}(1)$ tiene dimensión 1 y $\text{SO}(16)$ tiene dimensión 120. En total, G_{4D} es de dimensión 174 y por lo tanto, los 158 estados en (2.27), junto con los 16 estados en (2.26), representan a los 174 bosones de norma en la representación adjunta de G_{4D} .

De una forma precisa, se puede determinar a G_{4D} usando las raíces simples, las cuales están definidas como las raíces positivas que no pueden ser escritas como una suma de otras raíces positivas, donde una raíz positiva es aquella cuya primera componente no nula es positiva. Por ejemplo, del conjunto $A = \{\pm(1, -1, 0, 0^5; 0^8)\}$ tenemos 6 raíces, de las cuales 3 son positivas, estas son, $\alpha_1 = (0, 1, -1, 0^5; 0^8)$, $\alpha_2 = (1, -1, 0, 0^5; 0^8)$ y $\alpha_3 = (1, 0, -1, 0^5; 0^8)$, luego se tiene que α_1 y α_2 son las raíces simples, pues cada una de estas dos raíces positivas no puede ser escrita como una suma de las otras dos raíces positivas, además, ya que $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$, se tiene que α_3 no es una raíz simple. Empleamos el mismo procedimiento para el conjunto B . Entonces, del conjunto A tenemos dos raíces simples que agrupamos en el conjunto

$$A_2 = \{\alpha_1 = (0, 1, -1, 0^5; 0^8), \alpha_2 = (1, -1, 0, 0^5; 0^8)\},$$

y del conjunto B tenemos cinco raíces simples que agrupamos en el conjunto

$$B_5 = \{\alpha_1 = (0^3, 1, -1, 0, 0, 0; 0^8), \alpha_2 = (0^3, 0, 1, -1, 0, 0; 0^8), \alpha_3 = (0^3, 0, 0, 1, -1, 0; 0^8), \\ \alpha_4 = (0^3, 0, 0, 0, 1, -1; 0^8), \alpha_5 = (0^3, 0, 0, 0, 1, 1; 0^8)\}.$$

El conjunto de raíces simples en A_2 (B_5) genera la matriz de Cartan y diagrama de Dynkin de $\text{SU}(3)$ ($\text{SO}(10)$). Por ejemplo, del conjunto A_2 se obtiene la matriz de Cartan de tamaño 2×2 con el número 2 en la diagonal y el número -1 fuera de la diagonal. Utilizando el diagrama de Dynkin para el primer grupo factor $\text{SO}(16)$ (rango 8) se puede obtener de manera gráfica e inmediata el subgrupo $\text{SO}(10) \times \text{SU}(3)$ al remover un círculo en su diagrama como se muestra en la figura 2.1. El grupo $\text{U}(1)$ está asociado a una de la 8 raíces nulas del primer grupo factor $\text{SO}(16)$, como vimos en el párrafo que sigue a (2.28). Además, notamos que todas las 112 raíces del segundo grupo factor $\text{SO}(16)$ sobreviven en la condición de invarianza ($p \cdot V = 0 \pmod{1}$), junto con sus 8 raíces nulas, por lo que en $D = 4$ este grupo permanece. Lo anterior muestra el rompimiento en (2.28).

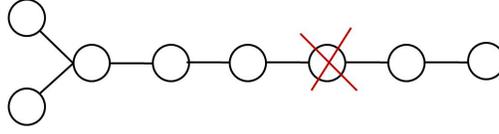


Figura 2.1: Diagrama de Dynkin de $SO(16)$ (rango 8). Al remover un círculo (marcado con una cruz) se obtienen dos diagramas desconectados, el de la izquierda corresponde al diagrama de Dynkin de $SO(10)$ (rango 5) y el de la derecha a $SU(3)$ (rango 2). Esto indica que de $SO(16)$ se obtiene el subgrupo $SO(10) \times SU(3)$.

Estados $\rho^1 \rho^2$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^1 \rho^2$ son

$$|0, \underline{-1, 0, 0}\rangle \times \begin{cases} |\underline{1, 1, 0, 0^5}; 0^8\rangle & \longrightarrow 3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2, \\ |\underline{-1, 0, 0, \mp 1, 0^4}; 0^8\rangle & \longrightarrow 3(\mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_{-1}, \end{cases} \quad (2.29)$$

donde $\longrightarrow 3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2$ indica la transformación de los respectivos estados bajo $SU(3) \times SO(10) \times SO(16) \times U(1)$, con la carga de $U(1)$ en subíndice. Como la primera componente en el estado $|q\rangle = |0, \underline{-1, 0, 0}\rangle$ es cero, los estados en (2.29) representan a escalares complejos en $D = 4$. El factor de multiplicidad 3 proviene de los tres estados $|q\rangle$ que se tienen.

Las representaciones se obtienen al calcular los coeficientes de Dynkin (CD). Por ejemplo, la representación $\mathbf{3}$ de $SU(3)$ en $3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2$ resulta de calcular $CD_{SU(3)} = (\alpha_1 \cdot p_i, \alpha_2 \cdot p_i)$ donde los pesos p_i , $i = 1, 2, 3$, denotan los 3 pesos en $(\underline{1, 1, 0, 0^5}; 0^8)$, y α_1 y α_2 son las dos raíces simples del conjunto A_2 . De esto obtenemos los coeficientes $\{(1, 0), (-1, 1), (0, 1)\}$, de donde se identifica al coeficiente $(1, 0)$ asociado al peso más alto que caracteriza a la representación fundamental $\mathbf{3}$ de $SU(3)$.

En forma análoga, obtenemos la $\mathbf{10}$ de $SO(10)$ en $3(\mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_{-1}$, al calcular $CD_{SO(10)} = (\alpha_1 \cdot p_i, \dots, \alpha_5 \cdot p_i)$, donde p_i , $i = 1, \dots, 30$, indica los 30 pesos $p = (\underline{-1, 0, 0, \mp 1, 0^4}; 0^8)$, y α_j , $j = 1, \dots, 5$, denota las 5 raíces simples de $SO(10)$ dadas en el conjunto B_5 . En este caso identificamos al coeficiente $(1, 0, 0, 0, 0)$, asociado al peso más alto de la representación $\mathbf{10}$ de $SO(10)$.

Para conocer el valor de carga bajo $U(1)$ de los estados en el espectro con momento de norma p , necesitamos conocer el generador t de $U(1)$, el cual es un vector de 16 componentes que es ortogonal a todas las raíces simples de cada uno de los demás grupos factores en el grupo G_{4D} . La carga de los estados bajo $U(1)$ está dada por¹ $t \cdot p$.

¹Los campos de norma de n simetrías $U(1)^a$, $a = 1, \dots, n$, son generados por combinaciones lineales de los generadores de Cartan, H^I , $I = 1, \dots, 16$, del grupo de norma de la cuerda heterótica como $Q_a = t_a \cdot H = t_a^I H^I$, (suma en I). Por lo tanto, la carga q_a bajo $U(1)^a$ del estado con momento de norma p está dada por $Q_a |p\rangle = t_a \cdot H |p\rangle = t_a \cdot p |p\rangle$, entonces $q_a = t_a \cdot p$. Por esta razón al vector t_a se le llama el generador de la simetría $U(1)^a$. El vector t_a tiene que ser ortogonal a todas las raíces simples, α_b^I , de los demás grupos no Abelianos presentes en G_{4D} , $t_a \cdot \alpha_b = 0$, y entre ellos mismos, $t_a \cdot t_b = 0$.

En nuestro caso, un generador t (salvo normalización) que es ortogonal a las raíces simples de $SU(3)$, $SO(10)$ y $SO(16)$ es $t = (1, 1, 1, 0^5; 0^8)$. Entonces, el valor de carga igual a 2 bajo $U(1)$, que aparece como subíndice en los estados $3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2$, surge de $t \cdot p = (1, 1, 1, 0^5; 0^8) \cdot (1, 1, 0, 0^5; 0^8) = 2$. De igual forma, el valor de carga -1 bajo $U(1)$ que aparece como subíndice en $3(\mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_{-1}$, resulta de $t \cdot p = (1, 1, 1, 0^5; 0^8) \cdot (-1, 0, 0, \mp 1, 0^4; 0^8) = -1$.

Realizamos este tipo de cálculos en los demás estados que forman el espectro. En el sector torcido es similar, solo que usamos p_{sh} en vez de p .

Estados $\rho^2 \rho^1$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^2 \rho^1$ son los conjugados de (2.29). Tenemos entonces

$$|0, \underline{1}, 0, 0\rangle \times \begin{cases} | \underline{-1}, \underline{-1}, 0, 0^5; 0^8 \rangle \longrightarrow 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-2}, \\ | \underline{1}, 0, 0, \pm 1, 0^4; 0^8 \rangle \longrightarrow 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1. \end{cases} \quad (2.30)$$

La representación $\mathbf{10}$ de $SO(10)$ es su propia conjugada. El factor de multiplicidad 3 proviene de los tres estados $|q\rangle$ que se tienen. Los estados en (2.30) representan escalares complejos.

Del sector de materia

Nos referimos primero a los estados en la retícula $C_4 \times V_8 \times V_8$ de la tabla 2.6.

Usamos la transformación (1.81), las condiciones de invarianza (1.106) y (1.107), y la tabla 2.7 (tercer y sexto renglón).

Estados $\rho^0 \rho^0$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^0 \rho^0$ son

$$| \mp \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \rangle \times |0^3, \underline{\pm 1}, 0^4; \underline{\pm 1}, 0^7\rangle \longrightarrow L : (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{16})_0, R : (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{16})_0. \quad (2.31)$$

Estos estados representan a fermiones con quiralidad izquierda, L , y derecha, R . La primera entrada $\mp \frac{1}{2}$ en el estado $|q\rangle$ indica las quiralidades anteriores. Las representaciones $\mathbf{10}$ y $\mathbf{16}$ de $SO(10)$ y $SO(16)$, respectivamente, son reales y por lo tanto son sus propias conjugadas.

Estados $\rho^1 \rho^2$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^1 \rho^2$ son

$$| + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle \times | \underline{-1}, 0, 0, 0^5; \underline{\pm 1}, 0^7 \rangle \longrightarrow R : 3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_{-1}, \quad (2.32)$$

los cuales denotan a fermiones con quiralidad derecha, R . El factor de multiplicidad 3 proviene de los tres estados $|q\rangle = | + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \rangle$ que se tienen.

Estados $\rho^2 \rho^1$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^2 \rho^1$ son los conjugados de (2.32), es decir,

$$| -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \times | \underline{1}, 0, 0, 0^5; \underline{\pm 1}, 0^7 \rangle \longrightarrow L : 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1, \quad (2.33)$$

y representan fermiones con quiralidad izquierda, L .

Ahora consideramos a los estados de materia en las retículas $S_4 \times S_8 \times R_8$ y $S_4 \times R_8 \times S_8$, mostrados en la tabla 2.6.

Usamos la transformación (1.81), las condiciones de invarianza (1.106) y (1.107), y la tabla 2.7 (segundo y cuarto renglón).

Estados $\rho^0\rho^0$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^0\rho^0$ son

$$|\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle \times \left\{ \begin{array}{l} |\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8\rangle, \\ |0^8; (\pm \frac{1}{2})^8\rangle. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Estos estados denotan a fermiones con quiralidad izquierda, L , y derecha, R . Los primeros se transforman bajo G_{4D} en las representaciones $(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{3/2}$, $(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{-3/2}$ y $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})_0$, mientras que los fermiones con quiralidad derecha se transforman como $(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{-3/2}$, $(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{3/2}$ y $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})_0$.

Estados $\rho^1\rho^2$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^1\rho^2$ son

$$|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle \times |-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8\rangle \longrightarrow L : 3(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{1/2}, \quad (2.35)$$

donde el factor de multiplicidad 3 es debido a los tres estados $|q\rangle$ que se tienen. L indica quiralidad izquierda debido al valor $-\frac{1}{2}$ de la primera componente en $|q\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$.

Estados $\rho^2\rho^1$

Los estados $|q\rangle \times |p\rangle$ que se transforman como $\rho^2\rho^1$ son los conjugados de (2.35), es decir,

$$|+\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle \times |+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, (\pm \frac{1}{2})^5; 0^8\rangle \longrightarrow R : 3(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{-1/2}, \quad (2.36)$$

por lo que ahora tenemos fermiones con quiralidad derecha, R , que se transforman en la representación conjugada de (2.35).

2.2.2. Sector torcido

Sector $k = 1$

De las ecuaciones (1.122) y (1.123) se tiene que las condiciones para los estados sin masa son

- a) $(q + v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$, $\tilde{N} = 0$ y $(p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{4}{3}$,
- b) $(q + v)^2 = q_{\text{sh}}^2 = \frac{1}{3}$, $\tilde{N} = \frac{1}{3}$ y $(p + V)^2 = p_{\text{sh}}^2 = \frac{2}{3}$.

q	$q_{\text{sh}} = q + v$
$(0, 0, 0, 1) \in V_4$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \in S_4$	$(+\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$
$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \in C_4$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$

Tabla 2.8: Pesos $q \in V_4, S_4$ y C_4 que cumplen $q_{\text{sh}}^2 = (q + v)^2 = 1/3$. Los tres estados $|q_{\text{sh}}\rangle$ se transforman como ρ^0 bajo \mathbb{Z}_3 .

Los pesos q y p de $\text{SO}(8)$ y $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$, respectivamente, que cumplen las condiciones en a) y b) se presentan en las tablas 2.8 y 2.9.

Con esta información, y conociendo las retículas de la cuerda $\text{SO}(16) \times \text{SO}(16)$ (ver tabla 2.5, última columna), podemos construir estados invariantes con pesos q y p en las retículas $V_4 \times R_8 \times R_8$, $S_4 \times S_8 \times R_8$ y $C_4 \times V_8 \times V_8$.

Caso a)

En la retícula $V_4 \times R_8 \times R_8$ formamos los estados invariantes $|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle$ del tipo $\rho^0 \rho^0 = \rho^0$ donde q_{sh} está dado en la tabla 2.8 para $q \in V_4$, y los pesos desplazados p_{sh} están dados en la tabla 2.9 para $p \in R_8 \times R_8$ del primer renglón. Tenemos entonces

$$|0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.37)$$

y representan escalares complejos que se transforman bajo G_{4D} como $27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-2}$ y $27(\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1$. El factor de multiplicidad 27 proviene de los 27 puntos fijos que se tienen en la geometría del orbifold \mathbb{Z}_3 .

En la retícula $S_4 \times S_8 \times R_8$ tenemos los estados $|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle$ del tipo $\rho^0 \rho^0 = \rho^0$ donde q_{sh} está dado en la tabla 2.8 para $q \in S_4$, y los pesos desplazados p_{sh} están dados en la tabla 2.9 para $p \in S_8 \times R_8$ del segundo renglón. Tenemos entonces

$$|+\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.38)$$

los cuales representan a fermiones con quiralidad derecha (R) que se transforman bajo G_{4D} como $27(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{-1/2}$, donde el factor de multiplicidad 27 proviene de los 27 puntos fijos que se tienen en la geometría del orbifold \mathbb{Z}_3 .

En la retícula $C_4 \times V_8 \times V_8$ tenemos los estados invariantes $|q_{\text{sh}}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle$ del tipo $\rho^0 \rho^0 = \rho^0$ donde q_{sh} está dado en la tabla 2.8 para $q \in C_4$, y los pesos desplazados p_{sh} están dados en la tabla 2.9 para $p \in V_8 \times V_8$ del tercer renglón. Estos estados son

$$|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\rangle \times |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.39)$$

y representan a fermiones con quiralidad izquierda (L) que se transforman como $27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1$ bajo G_{4D} .

p	$p_{\text{sh}} = p + V$
$p \in R_8 \times R_8$ $(-1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, 0, -1, 0; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1; 0^8)$ $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1; 0^8)$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, -1, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 1, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, -1, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 1, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, -1, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 1; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, -1; 0^8)$
$p \in S_8 \times R_8$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}; 0^8)$	$(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$ $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 0^8)$
$p \in V_8 \times V_8$ $(0, 0, 1, 0^5; \pm 1, 0^7)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0^5; \pm 1, 0^7)$
$p \in R_8 \times R_8$ $(-1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$	$(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$ $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0, 0, 0, 0, 0; 0^8)$

Tabla 2.9: Pesos p que cumplen $p_{\text{sh}}^2 = (p + V)^2 = \frac{4}{3}$ se presentan en el primer renglón para $p \in R_8 \times R_8$, en el segundo renglón para $p \in S_8 \times R_8$ y en el tercer renglón para $p \in V_8 \times V_8$. Los correspondientes estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ se transforman como ρ^0 bajo \mathbb{Z}_3 . En el último renglón se muestran los pesos $p \in R_8 \times R_8$ que cumplen $p_{\text{sh}}^2 = (p + V)^2 = \frac{2}{3}$. Los correspondientes estados $|p_{\text{sh}}\rangle$ se transforman como ρ^2 bajo \mathbb{Z}_3 .

Caso b)

En la retícula $V_4 \times R_8 \times R_8$ se tienen los estados $|q_{\text{sh}}\rangle \times \tilde{\beta}_{-1/3}^a |p_{\text{sh}}\rangle$ del tipo $\rho^0 \rho^1 \rho^2 = \rho^0$, donde q_{sh} está dado en la tabla 2.8 para $q \in V_4$, y los pesos desplazados p_{sh} están dados en la tabla 2.9 para $p \in R_8 \times R_8$ del último renglón. Tenemos entonces a los estados

$$|0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\rangle \times \tilde{\beta}_{-1/3}^a |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.40)$$

y representan escalares complejos que se transforman bajo G_{4D} como $81(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0$. El factor de multiplicidad 81 proviene de la multiplicación de los 27 puntos fijos por cada una de las tres direcciones complejas $a = 1, 2, 3$ en las cuales el operador de creación actúa.

Sector $k = 2$

Está formado por los estados conjugados de los casos a) y b) obtenidos en el sector $k = 1$, ya que $\theta^2 = (\theta^1)^{-1}$ en \mathbb{Z}_3 . Por ejemplo, en el caso b) ahora se tiene

$$|0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\rangle \times \tilde{\beta}_{-1/3}^{\bar{a}} |p_{\text{sh}}\rangle, \quad (2.41)$$

donde los pesos desplazados q_{sh} , con q en V_4 , son los negativos de los presentados en la tabla 2.8 (para $q \in V_4$), y los pesos desplazados p_{sh} son los negativos de los de la tabla 2.9 para $p \in R_8 \times R_8$ del último renglón. Los estados en (2.41) son del tipo invariante $\rho^0 \rho^2 \rho^1 = \rho^0$ y representan a escalares complejos que se transforman como $81(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ bajo G_{4D} .

Espectro

En resumen, tenemos el rompimiento

$$G_{10D} = \text{SO}(16) \times \text{SO}(16) \longrightarrow \text{SU}(3) \times \text{SO}(10) \times \text{U}(1) \times \text{SO}(16) = G_{4D} \quad (2.42)$$

Sector no torcido

- 174 bosones de norma, (2.26) y (2.27), en la adjunta de G_{4D}
- Gravedad y módulos geométricos, presentados en (2.23), (2.24) y (2.25)
- Escalares complejos
 $3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2 \oplus 3(\mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1$ y sus conjugados $3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2 \oplus 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1$
- Fermiones
 $(L) : (\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{3/2} \oplus (1, \bar{\mathbf{16}} \oplus \mathbf{1})_{-3/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})_0 \oplus 3(\mathbf{3}, \bar{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{1/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{16})_0 \oplus 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1$
 $(R) : (1, \bar{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{-3/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{3/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})_0 \oplus 3(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{-1/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{16})_0 \oplus 3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_{-1}$

Sector torcido $k = 1$

- Escalares complejos
 $27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-2} \oplus 27(\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1 \oplus 81(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0$
- Fermiones
 $(L) : 27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1$
 $(R) : 27(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{-1/2}$

Sector torcido $k = 2$ (los conjugados del sector $k = 1$)

- Escalares complejos
 $27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2 \oplus 27(\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_{-1} \oplus 81(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0$
- Fermiones
 $(R) : 27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_{-1}$
 $(L) : 27(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{1/2}$

Presento el espectro resultante en la tabla 2.10.

Rompimiento	$SO(16) \times SO(16) \rightarrow SU(3) \times SO(10) \times U(1) \times SO(16)$
Sector no torcido	
Gravedad	(2.23)
Módulos geométricos	(2.24), (2.25)
174 bosones de norma	(2.26), (2.27)
Escalares	
Fermiones	$3(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_2 \oplus 3(\mathbf{3}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_{-1}$ $(\mathbf{1}, \mathbf{16}, \mathbf{1})_{3/2} \oplus (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{-3/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{128})_0$ $3(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{1/2} \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{16})_0 \oplus 3(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1$
Sector torcido	
Escalares	
Fermiones	$27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{-2} \oplus 27(\mathbf{1}, \mathbf{10}, \mathbf{1})_1 \oplus 81(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_0$ $27(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{16})_1 \oplus 27(\mathbf{1}, \overline{\mathbf{16}}, \mathbf{1})_{1/2}$

Tabla 2.10: Espectro en la compactificación de $SO(16) \times SO(16)$ en el orbifoldio \mathbb{Z}_3 .

Capítulo 3

Orbifolios y simetrías de sabor

En este capítulo presento mis contribuciones al proyecto sobre simetrías de sabor provenientes de cuerdas publicado en Physical Review D [33].

El propósito de este trabajo es determinar las simetrías de sabor que los modelos prometedores fenomenológicamente pueden tener, donde estos modelos provienen de las compactificaciones de la cuerda heterótica en orbifolios. Los objetivos en las diferentes etapas del proyecto son los siguientes. Uno: determinar las simetrías de sabor que resultan de las 138 geometrías de orbifolios clasificados en la referencia [8], y que se presentaron en la tabla 1.2. Las simetrías de sabor encontradas en esta parte corresponden al caso de geometrías sin líneas de Wilson (LW). Dos: desarrollar una búsqueda de modelos tipo MSSM en las geometrías que dieron lugar a simetrías de sabor no abelianas en la actividad anterior. Los modelos prometedores tipo MSSM tienen, usualmente, LW no triviales en las geometrías de los orbifolios usados en la compactificación de la cuerda heterótica. Como la estructura de las LW puede modificar las simetrías de sabor, clasificamos los modelos tipo MSSM de acuerdo al número de LW no nulas. Tres: determinar las simetrías de sabor para todos los modelos tipo MSSM que obtuvimos en nuestra búsqueda de modelos prometedores. En la sección 3.3 expongo principalmente las partes en las que mi participación fue mayor.

El contenido del presente capítulo es como sigue. En la sección 3.1 muestro los elementos teóricos que nos ayudan a determinar las simetrías de sabor a partir de la geometría de los orbifolios. En la sección 3.2, aplico estas técnicas a algunas geometrías de orbifolios, incluyendo un ejemplo en $D = 2$ con rototraslaciones. La sección 3.3 trata la búsqueda de modelos tipo MSSM a partir de las compactificaciones de la cuerda $E_8 \times E_8$ usando el `orbifolder` [9]. Exploramos 64 geometrías, que son las que presentaron una simetría de sabor no abeliana en la ausencia de LW cuando se determinaron la simetrías de sabor en las 138 geometrías presentadas en la tabla 1.2. Estos resultados, previos a la búsqueda de modelos tipos MSSM, se presentan en la tabla A.1 del apéndice A. Los modelos tipo MSSM usualmente requieren LW no triviales, las cuales tienen una influencia importante en la simetría de sabor obtenida de la geometría del orbifolio. Por esta razón, es conveniente

realizar una clasificación de modelos tipo MSSM de acuerdo al número de LW no triviales. En las tablas 3.1 y 3.2 presento los resultados para el número total de modelos tipo MSSM que encontramos en nuestra búsqueda para los orbifolios \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ respectivamente, donde además se incluye el número total de modelos de acuerdo al número de LW no triviales. Esta es la búsqueda más extensa realizada hasta la fecha. El mayor número de modelos prometedores los encontramos en los orbifolios \mathbb{Z}_8 y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. La subsección 3.3.1 trata brevemente sobre las simetrías de sabor encontradas en los modelos prometedores, donde los resultados totales se presentan en las tablas A.2 y A.2 del apéndice A. Se presenta, además, la distribución en porcentajes de los tipos de simetrías de sabor encontradas previamente. En nuestra página web [24] proveemos todos los modelos tipo MSSM, clasificados por el número de LW no triviales y su correspondiente simetría de sabor, que encontramos en nuestra búsqueda de modelos prometedores fenomenológicamente.

3.1. Elementos teóricos

Las simetrías de sabor se determinan mediante la invarianza de los acoplamientos entre los campos de la teoría bajo las transformaciones del grupo de espacio, y las restricciones debidas a la geometría (localización) de los puntos fijos del orbifolio.

3.1.1. Invarianza del grupo de espacio

Consideremos la interacción de n estados sin masa de cuerdas atadas en los puntos fijos $x^{(i)}$ del orbifolio. Estos puntos fijos están asociados a los elementos constructores $g^{(i)} = (\theta^{k_i}, \mu^{(i)}) \in S$, donde $i = 1, \dots, n$, y S denota al grupo de espacio formado por $\theta^{k_i} \in P = \mathbb{Z}_N$ y $\mu^{(i)} \in \Lambda$. La regla de selección del grupo de espacio establece que, si el producto de los n elementos constructores $g^{(i)}$ asociados a los n estados de cuerdas resulta ser trivial o invariante en S , entonces el acoplamiento de los n estados de cuerdas es permitido¹. A esta regla se le conoce también como la invarianza del grupo de espacio. En términos del producto en S , esta regla se establece por

$$\prod_{i=1}^n g^{(i)} = \prod_{i=1}^n (\theta^{k_i}, \mu^{(i)}) = (\mathbb{1}, 0) \sim (\mathbb{1}, \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}^{(i)}), \quad \tilde{\lambda}^{(i)} \in \tilde{\Lambda}_i = (\mathbb{1} - \theta^{k_i})\Lambda, \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\Lambda}$ es la retícula invariante de los puntos fijos y Λ es la retícula del toro. Los vectores $\mu \in \Lambda$ y $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$ son expresados como combinaciones lineales en los vectores base de Λ . En este punto es importante recordar las relaciones presentadas en (1.31) y (1.32) de la subsección 1.2.2. Por ejemplo, (1.31) es la razón por la cual se tiene la equivalencia (\sim) para el elemento identidad en

¹Otras reglas de selección que las amplitudes de interacción de n estados de cuerdas deben satisfacer, además de la invarianza del grupo de espacio, son la invarianza de norma y la conservación del momento- H . Sin embargo, estas no conducen a simetrías de sabor.

S . Usando (1.27) se tiene que las condiciones que resultan de (3.1) son las siguientes. De la parte rotacional o del grupo de punto se tiene que $\prod_{i=1}^n \theta^{k_i} = \mathbb{1}$ se cumple cuando

$$\sum_{i=1}^n k_i = 0 \pmod{N}. \quad (3.2)$$

La parte traslacional en (3.1) implica la condición

$$\mu^{(1)} + \sum_{i=2}^n \left(\prod_{i'=1}^{i-1} \theta^{k_{i'}} \right) \mu^{(i)} = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}^{(i)}, \quad \tilde{\lambda}^{(i)} \in \tilde{\Lambda}_i. \quad (3.3)$$

Por lo tanto, si (3.2) y (3.3) se cumplen, entonces la amplitud de interacción de los n estados de cuerdas es permitida y no nula. La manera en la que las simetrías discretas de sabor surgen de la regla de selección del grupo de espacio dada en (3.1) se muestra enseguida. De (3.2) se obtiene una simetría discreta \mathbb{Z}_N indicando que los campos efectivos no masivos del espectro obtenido en la compactificación se transforman bajo esta simetría con cargas k_i . La condición (3.3) provee otro conjunto de, a lo más, seis simetrías discretas \mathbb{Z}_{M_α} , $\alpha = 1, \dots, 6$, debidas al carácter discreto de $\tilde{\Lambda}$. Al usar que $\mu^{(i)} \sim \mu^{(i)} + \tilde{\Lambda}_i$, y sabiendo que los vectores $\mu^{(i)}$ y $\tilde{\lambda}^{(i)}$ están dados en términos de los vectores base e_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, de la retícula del toro Λ , se tiene que (3.3) es un conjunto de a lo más seis condiciones independientes similares a (3.2), las cuales dependen de los detalles de los elementos del grupo de espacio. Esto da lugar a las simetrías cíclicas \mathbb{Z}_{M_α} , bajo las cuales los campos efectivos están cargados.

Para generalizar al caso $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ reemplazamos θ^{k_i} por $\theta^{k_i} \omega^{l_i}$ (ver (1.38)) en las ecuaciones (3.1) y (3.3), por lo que en vez de (3.2) se tiene ahora

$$\sum_{i=1}^n k_i = 0 \pmod{N} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n l_i = 0 \pmod{M}, \quad (3.4)$$

dando lugar a la simetría $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. El caso con rototraslaciones, i.e. cuando $\mu \notin \Lambda$, será presentado en un ejemplo de la sección 3.2, donde veremos cómo aplicar (3.1) en estos casos.

3.1.2. Geometría de los puntos fijos

En el orbifolio, con una acción del grupo de punto no trivial en las coordenadas $x \in \mathbb{R}^6$, se puede tener la existencia de puntos fijos, o singularidades, dados por (1.30). Un número m de puntos fijos inequivalentes conduce a una simetría de permutación S_m cuando los estados sin masa atados a los puntos fijos son indistinguibles. Al tomar en cuenta el embebimiento del grupo de espacio S en el grupo de norma torcido G , representado en (1.43), tenemos que si todas las LW son nulas, entonces todos los elementos constructores $g = (\theta^k, n_\alpha e_\alpha) \in S$ asociados a los puntos fijos inequivalentes tienen un embebimiento similar en el grupo de norma torcido G , dado por $\tilde{g} = (\mathbb{1}, V_g) \in G$, donde

el vector local de desplazamiento es $V_g = kV$, implicando que $p_{\text{sh}} = p + V_g = p + kV$ para todos los estados torcidos atados a los puntos fijos con tales elementos constructores. Luego, como vimos en las compactificaciones de la cuerda heterótica en orbifolios (ver, por ejemplo, la discusión presentada debajo de la ecuación (2.29)), sabemos que las representaciones bajo las cuales los estados torcidos se transforman en el grupo de norma en $D = 4$ (G_{4D}) están determinadas por los coeficientes de Dynkin (CD) dados por $\text{CD}_{G_{4D}} = (\alpha_1 \cdot p_{\text{sh}}^a, \dots, \alpha_r \cdot p_{\text{sh}}^a)$ para los $a = 1, \dots, n$ pesos p_{sh} (en los estados $|q_{\text{sh}}\rangle \times \tilde{\beta}|p_{\text{sh}}\rangle$), aquí r es el rango de G_{4D} y α_i son las $i = 1, \dots, r$ raíces simples de G_{4D} . Los CD son independientes de la base elegida para las raíces simples y por lo tanto solo dependen de los pesos desplazados $p_{\text{sh}} = p + V_g$. Entonces, si p_{sh} no incluye LW los m estados torcidos localizados en los m puntos fijos no son distinguibles por sus números cuánticos (representaciones en este caso) dando lugar a la simetría de permutación S_m . Sin embargo, esta simetría es rota si algunas o todas las LW (dependiendo de la geometría del orbifolio) son no nulas, pues en este caso se tiene, por ejemplo, que $p_{\text{sh}} = kV + n_\alpha W_\alpha$ para algunos estados torcidos y $p_{\text{sh}} = kV + n'_\alpha W'_\alpha$ para otros estados torcidos, donde $n_\alpha W_\alpha$ y $n'_\alpha W'_\alpha$ indican que estas combinaciones lineales son diferentes, dando lugar a que los $\text{CD}_{G_{4D}}$ indiquen diferentes representaciones para los m estados tal que ahora tales estados son distinguibles por sus números cuánticos, rompiendo así la simetría original de permutación S_m . Esto se mostrará explícitamente mediante un ejemplo en la subsección 3.2.1.

3.1.3. Simetrías discretas de sabor

El grupo de simetría discreta de sabor, denotado por G_s con subíndice s de sabor, que proviene de la geometría y simetría del orbifolio, está determinada por la cerradura multiplicativa de los elementos de la simetría de permutación S_m (que proviene de la geometría de los puntos fijos) con los elementos de las simetrías cíclicas $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_{M_\alpha}$ (que provienen de la invarianza del grupo de espacio), denotada por

$$G_s = S_m \cup \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_{M_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{M_6}. \quad (3.5)$$

Normalmente el subgrupo $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_{M_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{M_6}$ es normal en G_s resultando en que G_s es el producto semidirecto de S_m con el subgrupo de simetrías cíclicas, es decir,

$$G_s = S_m \rtimes \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_{M_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{M_6}, \quad (3.6)$$

donde \rtimes es el símbolo que indica el producto semidirecto. En algunos casos, el grupo en (3.6) es isomorfo a un grupo no abeliano conocido en la literatura, como se muestra en algunos ejemplos de la siguiente sección.

3.2. Simetrías de sabor en orbifolios

En esta sección considero algunas geometrías de orbifolios donde aplico la regla de selección del grupo de espacio dada en (3.1), y la geometría de los puntos fijos, para determinar la simetría

discreta de sabor que tales orbifolios presentan. Comienzo con la geometría del orbifolio \mathbb{Z}_3 en $D = 2$, para generalizar luego a $D = 6$ y al orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ en $D = 6$. Después, presento el caso del orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 2$ y $D = 6$. Dos aspectos geométricos importantes en la consideración de estas geometrías son la presencia de rototraslaciones en el orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 2$ y la de los llamados toros fijos en los orbifolios $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 6$. Considero a las geometrías sin y con LW, donde se establece que la simetría de sabor asociada al caso sin LW es la de orden más alto (la de mayor número de elementos), y que la inclusión de LW no nulas puede romper tal simetría hacia uno de sus subgrupos.

3.2.1. \mathbb{Z}_3 en $D = 2$

Consideremos el orbifolio \mathbb{Z}_3 en dos dimensiones definido por

$$\mathcal{O} = \frac{\mathbb{R}^2}{S} = \frac{\mathbb{T}^2}{\mathbb{Z}_3}, \quad (3.7)$$

donde $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$ es el toro en dos dimensiones con retícula $\Lambda = \{n_\alpha e_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha = 1, 2$, y donde los vectores base son $e_1 = (\sqrt{2}, 0)$ y $e_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$, los cuales corresponden a una elección de las dos raíces simples de $SU(3)$. El grupo de punto es

$$P = \mathbb{Z}_3 = \{\theta^k, k = 0, 1, 2 \mid \theta^{0 \bmod 3} = \mathbb{1}\}, \quad (3.8)$$

donde $\theta = e^{2\pi i(\frac{1}{3})}$ es el generador de \mathbb{Z}_3 . El grupo de espacio, S , es generado por las traslaciones en Λ y por las rotaciones del grupo de punto $P = \mathbb{Z}_3$, lo cual es denotado por $S = \langle (\mathbb{1}, n_\alpha e_\alpha), (\theta, 0) \rangle$. En este caso, el grupo de espacio puede ser escrito como $S = P \ltimes \Lambda$. Este orbifolio corresponde a la parte en dos dimensiones del orbifolio en seis dimensiones presentado al inicio de la sección 1.4. Ahora nos interesamos en determinar la simetría de sabor para los estados torcidos de este orbifolio en $D = 2$.

Los puntos fijos se calculan usando (1.30), es decir,

$$x = gx = (\theta, \mu)x = \theta x + \mu \implies (\mathbb{1} - \theta)x = \mu, \quad (3.9)$$

y por lo tanto,

$$x = (\mathbb{1} - \theta)^{-1}\mu \iff \det(\mathbb{1} - \theta) \neq 0, \quad (3.10)$$

donde $\mu = n_\alpha e_\alpha \in \Lambda$. Los tres puntos fijos inequivalentes son $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ y $x_2 = (0, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Sus elementos constructores (salvo conjugaciones) son, respectivamente,

$$g_0 = (\theta, 0), \quad g_1 = (\theta, e_1) \quad \text{y} \quad g_2 = (\theta, e_1 + e_2). \quad (3.11)$$

Conociendo la retícula invariante de los puntos fijos, $\tilde{\Lambda} = (\mathbb{1} - \theta)\Lambda$, y utilizando (1.31), podemos encontrar elementos $g \in S$ que son conjugados o equivalentes entre sí, y que por lo tanto pertenecen

a la misma clase de S y denotan al mismo punto fijo. Conocer esto resulta importante para aplicar la regla de selección del grupo de espacio dada en (3.1). En este caso, la retícula invariante de los puntos fijos es

$$\tilde{\Lambda} = (\mathbb{1} - \theta)\Lambda = (\mathbb{1} - \theta)(n_1 e_1 + n_2 e_2) = n_1(e_1 - e_2) + n_2(e_1 + 2e_2) = (n_1 + n_2)e_1 + (2n_2 - n_1)e_2, \quad (3.12)$$

con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, y donde se ha usado que

$$\theta e_1 = e_2 \quad \text{y} \quad \theta e_2 = -e_1 - e_2. \quad (3.13)$$

De (1.31), sabemos que la relación para elementos $g \in S$ equivalentes está dada por

$$g = (\theta, \mu) \sim g' = (\theta, \mu + \tilde{\mu}), \quad \tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda} = (\mathbb{1} - \theta)\Lambda, \quad (3.14)$$

donde \sim indica que g y g' son conjugados o equivalentes. Usando (3.12) y (3.14) se tiene que $g_2 = (\theta, e_1 + e_2) \sim (\theta, 2e_1)$ para $\tilde{\mu} = e_1 - e_2 \in \tilde{\Lambda}$ ya que $\tilde{\mu}$ se obtiene con $n_1 = 1$ y $n_2 = 0$ en (3.12). De esta forma, los tres elementos constructores dados en (3.11), asociados a los tres puntos fijos inequivalentes, pueden ser reescritos equivalentemente por

$$g = (\theta, m_1 e_1), \quad m_1 = 0, 1, 2. \quad (3.15)$$

Aplicando ahora la regla de selección dada en (3.1) para $n = 3$, y después generalizando a n , tenemos

$$\prod_{i=1}^{n=3} (\theta, m_1^{(i)} e_1) = (\theta\theta\theta, m_1^{(1)} e_1 + \theta m_1^{(2)} e_1 + \theta\theta m_1^{(3)} e_1) = (\mathbb{1}, \tilde{\lambda} \in (\mathbb{1} - \theta)\Lambda). \quad (3.16)$$

De la parte rotacional en (3.16) tenemos que $\theta^3 = \mathbb{1}$ se verifica, de hecho sabemos que $\theta^{0 \bmod 3} = \mathbb{1}$ por la definición de \mathbb{Z}_3 . Por lo tanto, de esta parte tenemos que

$$\theta^n = \mathbb{1} \iff n = 0 \bmod 3, \quad (3.17)$$

lo cual implica tener una simetría discreta \mathbb{Z}_3 . La razón de presentar primero el caso particular $n = 3$ es para mostrar explícitamente lo que sucede en la parte traslacional de (3.16) al usar la retícula invariante (3.12). El resultado en la parte traslacional es que la condición

$$m_1^{(1)} e_1 + \theta m_1^{(2)} e_1 + \theta\theta m_1^{(3)} e_1 = \tilde{\lambda} \in (\mathbb{1} - \theta)\Lambda \quad (3.18)$$

es equivalente a²

²Para mostrar (3.19) usamos que $\mu \sim \mu + \tilde{\mu}$, donde $\mu \in \Lambda$ y $\tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda} = (\mathbb{1} - \theta)\Lambda$, además de que $\theta e_1 = e_2$ y $\theta e_2 = -e_1 - e_2$. En este caso, en el lado izquierdo de la igualdad en (3.18), sea $\mu = m_1^{(1)} e_1 + \theta m_1^{(2)} e_1 + \theta\theta m_1^{(3)} e_1 = m_1^{(1)} e_1 + m_1^{(2)} e_2 - m_1^{(3)} e_1 - m_1^{(3)} e_2 \in \Lambda$. Ahora sumamos a μ el vector $\tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda}$ que se obtiene de la retícula invariante (3.12) al tomar $n_1 = m_1^{(2)} + m_1^{(3)} \in \mathbb{Z}$ y $n_2 = m_1^{(3)} \in \mathbb{Z}$, es decir $\tilde{\mu} = (m_1^{(2)} + m_1^{(3)})(e_1 - e_2) + (m_1^{(3)})(e_1 + 2e_2) \in \tilde{\Lambda}$. Entonces, usando que $\mu \sim \mu + \tilde{\mu}$, tenemos que $\mu + \tilde{\mu} = (m_1^{(1)} e_1 + m_1^{(2)} e_2 - m_1^{(3)} e_1 - m_1^{(3)} e_2) + ((m_1^{(2)} + m_1^{(3)})(e_1 - e_2) + (m_1^{(3)})(e_1 + 2e_2)) = (m_1^{(1)} + m_1^{(2)} + m_1^{(3)}) e_1$. Para la parte derecha de la igualdad en (3.18), sea $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$ el vector que se obtiene de (3.12) al tomar $n_1 = 2n \in \mathbb{Z}$ y $n_2 = n \in \mathbb{Z}$, entonces $\tilde{\lambda} = 3n e_1 = (0 \bmod 3) e_1 \in \tilde{\Lambda}$. Esto muestra el resultado en (3.19).

$$(m_1^{(1)} + m_1^{(2)} + m_1^{(3)}) e_1 = (0 \bmod 3) e_1, \quad (3.19)$$

lo cual implica tener otra simetría discreta \mathbb{Z}_3 . Por lo tanto, de las condiciones (3.17) y (3.19), el grupo discreto que se obtiene es $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

En el caso general, para n estados de cuerdas en interacción, la regla de selección del grupo de espacio dada en (3.1) nos dice lo siguiente. En la parte del grupo de punto o rotacional de (3.1) tenemos

$$\theta^{k_1} \theta^{k_2} \theta^{k_3} \dots \theta^{k_n} = \theta^{k_1+k_2+\dots+k_n} = \mathbb{1}, \quad (3.20)$$

donde cada k_i , $i = 1, \dots, n$, puede ser 1 o 2. El caso trivial de cuerda no torcida tiene elemento constructor $(\mathbb{1}, 0)$, y la condición (3.1) resulta trivialmente satisfecha, por lo tanto considero estados torcidos. La condición (3.20) se cumple cuando

$$\sum_{i=1}^n k_i = 0 \bmod 3, \quad (3.21)$$

lo cual implica una simetría \mathbb{Z}_3 . De la parte traslacional en (3.1) tenemos

$$m_1^{(1)} e_1 + \theta^{k_1} m_1^{(2)} e_1 + \theta^{k_1} \theta^{k_2} m_1^{(3)} e_1 + \dots + \theta^{k_1} \theta^{k_2} \theta^{k_3} \dots \theta^{k_{n-1}} m_1^{(n)} e_1 = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + \dots + \tilde{\lambda}_n, \quad (3.22)$$

donde $\tilde{\lambda}_i \in \tilde{\Lambda}_i = (\mathbb{1} - \theta^{k_i})\Lambda$. Ya que $\theta^2 = \theta^{-1}$ ($\theta^2 \theta^1 = \mathbb{1}$ en \mathbb{Z}_3), se tiene que la estructura geométrica de los puntos fijos en el sector torcido $k = 2$ es la misma que en el sector $k = 1$, y en consecuencia, la estructura geométrica de la retícula invariante $(\mathbb{1} - \theta^2)\Lambda$ es la misma que la de $(\mathbb{1} - \theta)\Lambda$. Como antes, al usar $\theta e_1 = e_2$, $\theta e_2 = -e_1 - e_2$, $\mu \sim \mu + \tilde{\mu}$ donde $\tilde{\mu} \in \tilde{\Lambda}$ y que $\sum_i \tilde{\lambda}_i$ puede expresarse de la forma $3ne_1 \in \sum_i \tilde{\Lambda}_i$, donde n indica la suma de los enteros n_i en $\tilde{\lambda}_i = 3n_i e_1 \in \tilde{\Lambda}_i$, se tiene que (3.22) es equivalente a

$$(m_1^{(1)} + m_1^{(2)} + m_1^{(3)} + \dots + m_1^{(n)}) e_1 = 3ne_1, \quad (3.23)$$

obteniendo entonces la condición

$$\sum_{i=1}^n m_1^{(i)} = 0 \bmod 3, \quad (3.24)$$

lo que implica una simetría \mathbb{Z}_3 . Por lo tanto, la interacción de n estados torcidos está permitida por la regla de selección del grupo de espacio si las condiciones (3.21) y (3.24) son satisfechas. Además, estas dos condiciones implican la presencia de la simetría $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, donde el primer factor \mathbb{Z}_3 proviene de (3.21) y el segundo de (3.24).

Por otra parte, de los tres puntos fijos inequivalentes en este orbifolio se tiene una simetría de permutación S_3 ya que estos tres puntos fijos son indistinguibles, pues no estamos considerando LW. El grupo de sabor que resulta de la regla de selección del grupo de espacio y de la geometría de los puntos fijos está dado por la cerradura multiplicativa de S_3 con $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, denotada por

$S_3 \cup \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Se tiene que $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ es normal en $S_3 \cup \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Entonces, el grupo de sabor es $G_s = S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, el cual es isomorfo al grupo $\Delta(54)$, donde 54 denota el número de elementos (el orden del grupo) de este grupo no abeliano. Por lo tanto, el grupo de sabor para este orbifolio es

$$S_3 \ltimes \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 = \Delta(54). \quad (3.25)$$

Inclusión de líneas de Wilson

Al incluir LW no nulas se rompe totalmente la simetría de permutación S_3 . Por el embebimiento del grupo de espacio S al grupo de norma torcido G tenemos dos LW W_1 y W_2 , ya que $e_\alpha \rightarrow W_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, las cuales están sujetas a las reglas del grupo de espacio, definiendo relaciones entre ellas y su orden. Para obtenerlas, usamos las relaciones (3.13). De $\theta e_1 = e_2$ se tiene que $W_1 \approx W_2$ lo que indica que W_1 y W_2 son equivalentes salvo traslaciones en la retícula de raíces del grupo de norma de la cuerda heterótica. También, de $\theta e_2 = -e_1 - e_2$, tenemos que $W_2 \approx -W_1 - W_2$, y usando que $W_1 \approx W_2$, tenemos que $W_2 \approx -2W_2$, i.e. $3W_2 \approx 0 \approx 3W_1$, es decir, que la LW W_1 o W_2 es de orden 3. Además, de las dos posibles LW solo una es independiente.

Para notar que la simetría de permutación S_3 es completamente rota, consideremos el embebimiento de los tres elementos constructores $g_i \in S$, $i = 0, 1, 2$, a los elementos \tilde{g}_i en el grupo de norma torcido G . Entonces, $g_0 = (\theta, 0)$, $g_1 = (\theta, e_1)$, $g_2 = (\theta, e_1 + e_2) \sim g'_2 = (\theta, 2e_1) \rightarrow \tilde{g}_0 = (\mathbb{1}, V + 0)$, $\tilde{g}_1 = (\mathbb{1}, V + W_1)$, $\tilde{g}_2 = (\mathbb{1}, V + W_1 + W_2) \sim \tilde{g}'_2 = (\mathbb{1}, V + 2W_1)$. De esta manera, el vector local de desplazamiento V_g está dado por $V_g = V + m_1 W_1$, donde $m_1 = 0, 1, 2$.

En la compactificación, los estados torcidos atados a los puntos fijos tienen propiedades de transformación bajo el grupo de norma en $D = 4$ (G_{4D}) que dependen de $p_{\text{sh}} = p + V_g$, i.e. ya que cada V_g es diferente para cada uno de los tres puntos fijos, se tiene que los estados atados a tales puntos fijos son ahora distinguibles por sus números cuánticos (las representaciones bajo G_{4D}) en la perspectiva $D = 4$, y por lo tanto la simetría de permutación S_3 de los estados atados a los puntos fijos es ahora rota completamente. Por lo tanto, al introducir una LW no nula, el grupo de sabor resultante es

$$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad (3.26)$$

el cual es un subgrupo del grupo asociado al caso sin LW, dado en (3.25).

3.2.2. \mathbb{Z}_3 en $D = 6$

Consideremos ahora la geometría de orbifolio \mathbb{Z}_3 en $D = 6$ presentado al inicio de la sección 1.4. La simetría de sabor la obtengo ahora en una manera más directa usando lo expuesto en la subsección anterior, ya que la geometría de este orbifolio en $D = 6$ está dada por $\mathcal{O} = \mathbb{T}^6/\mathbb{Z}_3 = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2)/\mathbb{Z}_3$, i.e. es una generalización (factorizable) del caso en $D = 2$ mostrado anteriormente. El vector de torcimiento está dado por $v = (0, 1/3, 1/3, -2/3)$. Se tienen dos sectores torcidos asociados a

$\theta^{k=1}$ y $\theta^{k=2}$. La estructura de los puntos fijos en el sector torcido $k = 2$ es la misma que en el sector torcido $k = 1$, ya que $\theta^2 = \theta^{-1}$ en \mathbb{Z}_3 . En cada orbifolio en $D = 2$ se tienen 3 puntos fijos inequivalentes y en total se tienen $3 \times 3 \times 3 = 27$ puntos fijos.

Tenemos una simetría de permutación S_3 en cada orbifolio en dos dimensiones, y por lo tanto, en el orbifolio en $D = 6$ tenemos la simetría de permutación $S_3 \times S_3 \times S_3$. Además, tenemos una simetría discreta \mathbb{Z}_3 por la regla en el grupo de punto P o de rotaciones ($P = \mathbb{Z}_3$ para todo el orbifolio en $D = 6$), y de la regla en la parte traslacional tenemos tres simetrías discretas \mathbb{Z}_3 , cada una por la regla en la parte traslacional en cada uno de los orbifolios en $D = 2$, o más bien, en cada uno de los toros en $D = 2$. Entonces, el grupo de sabor de este orbifolio \mathbb{Z}_3 en $D = 6$ está dado por $S_3 \times S_3 \times S_3 \cup \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Se tiene que \mathbb{Z}_3^4 es normal en $S_3^3 \cup \mathbb{Z}_3^4$. Por lo tanto, el grupo de sabor es

$$\begin{aligned} S_3 \times S_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 &= S_3 \times (\Delta(54) \times \Delta(54)) & (3.27) \\ &= (S_3 \times (\Delta(54) \times \Delta(54) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) / \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \\ &= (\Delta(54) \times \Delta(54) \times \Delta(54)) / \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$

donde se ha usado que \mathbb{Z}_3^2 es normal en $S_3^3 \cup \mathbb{Z}_3^4$, i.e. es válido que, al agregar \mathbb{Z}_3^2 en el numerador para completar otro $\Delta(54)$, dividamos también a todo el grupo entre este subgrupo normal \mathbb{Z}_3^2 . Se ha supuesto que es posible distinguir los tres toros debido a que cada uno posee su propio módulo de Kähler T_i .

Inclusión de líneas de Wilson

Con lo expuesto en la subsección anterior respecto a las LW, tenemos ahora que de las 6 LW W_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, solo 3 son independiendintes ya que $W_1 \approx W_2$, $W_3 \approx W_4$ y $W_5 \approx W_6$, además son de orden 3, i.e. $3W_1 \approx 3W_3 \approx 3W_5 \approx 0$. Por lo tanto, se tienen los siguientes rompimientos de simetrías de permutación cuando agregamos una, dos o tres LW no nulas.

$$\begin{aligned} 1 \text{ LW no nula} &: S_3^2 \times \mathbb{Z}_3^4 = \Delta(54)^2 & (3.28) \\ 2 \text{ LW no nulas} &: S_3 \times \mathbb{Z}_3^4 = \Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^2 \\ 3 \text{ LW no nulas} &: \mathbb{Z}_3^4. \end{aligned}$$

Esto muestra que al agregar un cierto número de LW no nulas (del máximo número de LW independientes) la simetría de permutación puede ser rota parcial o totalmente, siempre y cuando la dirección en la que actúan las LW no nulas influya en distinguir a los estados torcidos, atados en los puntos fijos, en sus representaciones bajo G_{4D} .

3.2.3. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ en $D = 6$

Con lo expuesto en las subsecciones 3.2.1 y 3.2.2 se puede generalizar en una manera más directa al caso del orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ en $D = 6$. Encuentro la estructura de los puntos fijos donde en este caso se tiene la presencia de los llamados toros fijos. Determino también la simetría de sabor sin líneas de Wilson y después analizo cómo la inclusión de LW no nulas rompe la simetría de permutación del grupo asociado al caso sin LW.

La retícula del toro es la misma que la del caso \mathbb{Z}_3 en $D = 6$. El grupo de punto es ahora $P = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ con vectores de torcimiento $v_1 = (0, 0, 1/3, -1/3)$ y $v_2 = (0, 1/3, 0, -1/3)$. El orden de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ es 9. Sus elementos son $\theta^k \omega^l$, donde $k, l = 0, 1, 2$. Se tiene que $\theta^k \omega^l$ es inverso de $\theta^{k'} \omega^{l'}$ si $k + k' = 0 \pmod{3} = l + l'$, i.e. los correspondientes sectores torcidos tienen una estructura geométrica similar de puntos fijos. Estos sectores son: T^{11} con T^{22} , T^{01} con T^{02} , T^{10} con T^{20} y T^{12} con T^{21} . El sector no torcido es T^{00} .

Para conocer la estructura de los puntos fijos en este orbifolio me enfoco entonces a los siguientes cuatro sectores torcidos, T^{11} , T^{01} , T^{10} y T^{12} , con sus respectivos vectores de torcimiento. En T^{11} el vector de torcimiento es $v = 1v_1 + 1v_2 = (0, 1/3, 1/3, -2/3)$, en T^{01} $v = 0v_1 + 1v_2 = (0, 1/3, 0, -1/3)$, en T^{10} $v = 1v_1 + 0v_2 = (0, 0, 1/3, -1/3)$ y en T^{12} $v = 1v_1 + 2v_2 = (0, 2/3, 1/3, -1)$. Las componentes de v las denotamos como $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$, donde v^1 caracteriza el ángulo de rotación en las coordenadas $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ que definen al primer toro \mathbb{T}^2 en $\mathbb{T}^6 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$. Análogamente, las componentes v^2 y v^3 definen la rotación para las coordenadas (x_6, x_7) y (x_8, x_9) que definen al segundo y tercer toro, respectivamente.³

Entonces, en el sector T^{11} , donde $v = (0, 1/3, 1/3, -2/3)$, se tiene, en cada uno de los tres toros en $D = 2$, a los tres puntos fijos inequivalentes del caso de \mathbb{Z}_3 en $D = 2$. En el sector T^{01} , donde $v = (0, 1/3, 0, -1/3)$, tenemos que en el segundo toro, donde $v^2 = 0$, la ecuación para los puntos fijos (1.30) toma la forma real $(\mathbb{1} - \mathbb{1})x = n_3 e_3 + n_4 e_4$, donde $x = (x_6, x_7)^T$. Al tomar $n_3 = n_4 = 0$, se tiene $0x = 0$, i.e. todos los puntos $(x_6, x_7) \in \mathbb{R}$ arbitrarios son solución a la ecuación de puntos fijos, sin embargo, en este caso la interpretación es que el segundo toro \mathbb{T}^2 se mapea a sí mismo bajo la acción del grupo de espacio, dando lugar a lo que se llama un toro fijo. Para el primer y tercer toro en $D = 2$, en este sector T^{01} , donde $v^1 = 1/3$ y $v^3 = -1/3$, se tienen tres puntos fijos inequivalentes en cada toro \mathbb{T}^2 , con la misma estructura geométrica que en el caso de \mathbb{Z}_3 en $D = 2$.

Una estructura similar se tiene en los sectores T^{10} y T^{12} , donde $v = (0, 0, 1/3, -1/3)$ y $v = (0, 2/3, 1/3, -1)$, respectivamente. En el sector T^{10} (T^{12}) se tiene $v^1 = 0$ ($v^3 = -1$), i.e. un toro fijo aparece en el primer (tercer) toro de este sector. En cada uno de los dos toros restantes, de estos sectores T^{10} y T^{12} , se tienen los tres puntos fijos inequivalentes del caso de \mathbb{Z}_3 en $D = 2$. Notamos que si algún $v^a \in \mathbb{Z}$, para $a = 1, 2, 3$, entonces se tiene la presencia de un toro fijo en el espacio del

³La primera componente de v , $v^0 = 0$, solo indica la acción trivial del grupo de espacio, por medio del grupo de punto, en las coordenadas (x_2, x_3) sin compactificar, i.e. en la parte transversal del espacio de Minkowski usual en $D = 4$, como se comentó en la subsección 1.3.2 en los tres párrafos que siguen a la ecuación (1.50).

toro definido por las coordenadas donde la rotación caracterizada por v^a actúa. Esto es porque la rotación en ese espacio es trivial, ya que $e^{2\pi i v^a} = e^{2\pi i \mathbb{Z}} = 1$. Por ejemplo, en el sector T^{12} , donde $v^3 = -1$, la ecuación para los puntos fijos, en el tercer toro en $D = 2$ de este sector, toma la forma real $(\mathbb{1} - \mathbb{1})x = n_5 e_5 + n_6 e_6$, donde $x = (x_8, x_9)^T$. Al tomar $n_5 = n_6 = 0$ se tiene $0x = 0$, i.e. todos los puntos $(x_8, x_9) \in \mathbb{R}$ arbitrarios son solución, dando lugar a un toro fijo en el tercer toro de este sector torcido T^{12} .

Para determinar la simetría de sabor en estos casos, nos enfocamos a la intersección común de puntos fijos en todos los sectores torcidos. Ya que en cada toro fijo existe una infinidad de puntos fijos, es seguro que los tres puntos fijos de \mathbb{Z}_3 en $D = 2$, comunes en los otros toros de los sectores torcidos, están en esos toros fijos. En este caso, la estructura de puntos fijos que resulta de la intersección común de puntos fijos en todos los sectores estaría representada por la del sector T^{11} . Por lo tanto, la simetría de sabor sería $S_3 \times S_3 \times S_3 \cup (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, donde las simetrías de permutación $S_3 \times S_3 \times S_3$ provienen de los tres puntos fijos inequivalentes en cada uno de los tres toros en $D = 2$, el grupo $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ entre paréntesis proviene de la regla de selección del grupo de espacio para la parte rotacional o del grupo de punto, y los tres \mathbb{Z}_3 adicionales provienen de la parte traslacional en cada uno de los tres toros, como se mostró en el caso \mathbb{Z}_3 en $D = 2$. Se tiene que \mathbb{Z}_3^5 es normal en $S_3^3 \cup \mathbb{Z}_3^5$, y por lo tanto el grupo de sabor es $S_3^3 \times \mathbb{Z}_3^5 = \Delta(54)^3 / \mathbb{Z}_3$.

La estructura de las líneas de Wilson es la misma que en el caso \mathbb{Z}_3 en $D = 6$. Por lo tanto, para 0, 1, 2 y 3 LW no nulas se tiene la siguiente cadena de rompimientos de simetrías de permutación.

$$\begin{aligned}
0 \text{ LW no nulas} & : S_3^3 \times \mathbb{Z}_3^5 = \Delta(54)^3 / \mathbb{Z}_3 & (3.29) \\
1 \text{ LW no nula} & : S_3^2 \times \mathbb{Z}_3^5 = \Delta(54)^2 \times \mathbb{Z}_3 \\
2 \text{ LW no nulas} & : S_3 \times \mathbb{Z}_3^5 = \Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^3 \\
3 \text{ LW no nulas} & : \mathbb{Z}_3^5.
\end{aligned}$$

De esta manera, el grupo de sabor resultante al incluir LW no nulas es un subgrupo del grupo sin LW. Al romperse todas las simetrías de permutación el grupo resultante es abeliano, el cual proviene de la regla de selección del grupo de espacio.

3.2.4. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 2$ con rototraslaciones

Consideremos ahora el orbifoldio

$$\mathcal{O} = \frac{\mathbb{R}^2}{S}, \quad (3.30)$$

donde el grupo de espacio S está dado por $S = \langle (\mathbb{1}, e_1), (\mathbb{1}, e_2), g_1, g_2 \rangle$, donde $g_1 = (\theta, \frac{1}{2}e_1)$, $g_2 = (\omega, \frac{1}{2}e_2)$, con $\theta = \text{diag}(1, -1)$ y $\omega = \text{diag}(-1, 1)$.

Esto indica que S es generado por

- traslaciones en la retícula $\Lambda = \{n_\alpha e_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha = 1, 2$, del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\Lambda$, donde los vectores base de Λ son $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$,
- rototraslaciones $g_1 = (\theta, \frac{1}{2}e_1)$ y $g_2 = (\omega, \frac{1}{2}e_2)$, es decir, que además de las rotaciones del grupo de punto $P = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\theta^k \omega^l, k, l = 0, 1 | \theta^2 = \mathbb{1}, \omega^2 = \mathbb{1}\}$, se tienen traslaciones que no están en la retícula Λ del toro; por ejemplo, $r_1 e_1 = \frac{1}{2}e_1 \notin \Lambda$, ya que $r_1 \notin \mathbb{Z}$.

Dado los elementos que definen la geometría del orbifolio, ahora nos concentramos en determinar la simetría de sabor que nos brinda este orbifolio. Para esto, necesitamos conocer los elementos constructores de los puntos fijos inequivalentes para aplicar la regla de selección del grupo de espacio, donde ahora agregamos las traslaciones que no están en Λ , y también para conocer la simetría de permutación de acuerdo al número de puntos fijos inequivalentes.

Es conveniente analizar la estructura de puntos fijos por sectores, los cuales están indicados por los elementos del grupo de punto. En este caso, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\theta^0 \omega^0, \theta^1 \omega^0, \theta^0 \omega^1, \theta^1 \omega^1\}$, donde el primer sector, $\theta^0 \omega^0$, es el sector no torcido. Nos interesamos en los sectores torcidos, los cuales son denotados por T^{10} , T^{01} y T^{11} , y los caracterizamos por los respectivos elementos rototraslacionales $g_1 = (\theta, \frac{1}{2}e_1)$, $g_2 = (\omega, \frac{1}{2}e_2)$ y $g_1 g_2 = (\theta, \frac{1}{2}e_1)(\omega, \frac{1}{2}e_2) = (\theta\omega, \theta(\frac{1}{2}e_2) + \frac{1}{2}e_1) = (-\mathbb{1}, \frac{1}{2}(e_1 - e_2))$, donde en $g_1 g_2$ se ha usado el producto en S dado en (1.27), y que $\theta e_2 = -e_2$. Enseguida analizamos la estructura de los puntos fijos en estos sectores torcidos.

Sector T^{11}

Comenzamos por el sector T^{11} caracterizado por $g_1 g_2 = (\theta\omega, \tau)$ donde $\tau = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ denota las traslaciones $\notin \Lambda$. Notar que formalmente $g_1 g_2 = (\theta\omega, n_\alpha e_\alpha + \tau) \in S$, donde $n_\alpha e_\alpha$ son las traslaciones $\in \Lambda$. Usando la expresión que determina los puntos fijos, dada en (1.30), tenemos que

$$(g_1 g_2) x = (\theta\omega, n_\alpha e_\alpha + \tau)x = (\theta\omega)x + n_\alpha e_\alpha + \tau = x \implies (\mathbb{1} - \theta\omega)x = n_\alpha e_\alpha + \tau. \quad (3.31)$$

Entonces, los puntos fijos están dados por

$$x = (\mathbb{1} - \theta\omega)^{-1} (n_\alpha e_\alpha + \tau) \iff \det(\mathbb{1} - \theta\omega) \neq 0. \quad (3.32)$$

Dado que $\theta\omega = -\mathbb{1}$, notamos que los puntos fijos corresponden a los puntos fijos del caso sin rototraslaciones ($(\mathbb{1} - \theta\omega)x = n_\alpha e_\alpha$) desplazados por $(\mathbb{1} - \theta\omega)^{-1}\tau = \frac{1}{2}\tau$. Además, tenemos que las coordenadas de los puntos fijos están dadas por $x = (x_1, x_2) = (\frac{1}{2}n_1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}n_2 - \frac{1}{4})$, con elementos constructores $g = (\theta\omega, n_1 e_1 + n_2 e_2 + \tau)$, donde $\tau = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$. Enseguida obtenemos algunos (de los infinitos) puntos fijos con sus respectivos elementos constructores, y usamos las relaciones de conjugación o de equivalencia, ahora incluyendo las rototraslaciones τ , para mostrar que solo hay dos puntos fijos inequivalentes en este sector del orbifolio.

Tenemos, por ejemplo, los siguientes puntos fijos, $x_0 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $x_1 = (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$, $x_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $x_3 = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, y sus elementos constructores son, respectivamente, $g_0 = (\theta\omega, 0 + \tau)$, $g_1 = (\theta\omega, e_1 + \tau)$, $g_2 = (\theta\omega, e_2 + \tau)$, $g_3 = (\theta\omega, e_1 + e_2 + \tau)$.

Usando (1.31), donde ahora incluimos rototraslaciones con $\tau \notin \Lambda$, tenemos que la relación de conjugación para elementos constructores $g = (\vartheta, \mu + \tau) \in S$, donde $\mu \in \Lambda$ y $\tau \notin \Lambda$, está dada por

$$g = (\vartheta, \mu + \tau) \sim g' = (\vartheta, \mu + \tau + (\mathbb{1} - \vartheta)\Lambda + (\mathbb{1} - \vartheta)\tau). \quad (3.33)$$

Esto implica que si x (x') es el punto fijo asociado a g (g') entonces $x \sim x'$ pues $x \sim x + \Lambda + \tau \sim x'$. Aplicando (3.33) a nuestro caso, i.e. con $\vartheta = \theta\omega = -\mathbb{1}$ y $\tau = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$, mostramos que $g_0 \sim g_3$ y $g_1 \sim g_2$. Tenemos que $(\mathbb{1} - \theta\omega)\Lambda = 2m_1e_1 + 2m_2e_2$, con $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, i.e. $\tilde{\lambda} = 2e_2 \in (\mathbb{1} - \theta\omega)\Lambda$ con $m_1 = 0, m_2 = 1$, además $(\mathbb{1} - \theta\omega)\tau = e_1 - e_2$, entonces

$$g_0 = (\theta\omega, 0 + \tau) \sim (\theta\omega, 0 + \tau + 2e_2 + e_1 - e_2) = (\theta\omega, e_1 + e_2 + \tau) = g_3. \quad (3.34)$$

Tomando ahora $\tilde{\lambda} = -2e_1 + 2e_2 \in (\mathbb{1} - \theta\omega)\Lambda$ con $m_1 = -1, m_2 = 1$, tenemos que

$$g_1 = (\theta\omega, e_1 + \tau) \sim (\theta\omega, e_1 + \tau - 2e_1 + 2e_2 + e_1 - e_2) = (\theta\omega, e_2 + \tau) = g_2. \quad (3.35)$$

Por lo tanto, $g_0 \sim g_3$ y $g_1 \sim g_2$. Similarmente, $x_0 \sim x_0 + \lambda + \tau = x_3$ donde $\lambda = e_2 \in \Lambda$ con $n_1 = 0, n_2 = 1$, y $x_1 \sim x_0 + \lambda + \tau = x_2$ donde $\lambda = -e_1 + e_2 \in \Lambda$ con $n_1 = -1, n_2 = 1$, y por lo tanto $x_0 \sim x_3$ y $x_1 \sim x_2$. Denotamos a g_0 y g_1 como $g = (\theta\omega, m_1e_1 + \tau)$, con $m_1 = 0, 1$. La forma de la clase de $g \in S$ está dada por los elementos de la forma $(\theta\omega, (2n_1 + m_1)e_1 + \tau')$ donde $\tau' = \frac{3}{2}e_1 + (2n_2 - \frac{3}{2})e_2 \notin \Lambda$ y $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, se tienen dos clases en S , una con $m_1 = 0$ y otra con $m_1 = 1$, lo que implica nuestro resultado anterior, es decir, que existen dos puntos fijos inequivalentes en el orbifolio, por ejemplo, x_3 y x_2 , con elementos constructores $g = (\theta\omega, m_1e_1 + \tau)$, con $m_1 = 0$ y $m_1 = 1$, respectivamente.

Sectores T^{10} y T^{01}

En los sectores T^{10} y T^{01} no hay puntos fijos. Para notar esto, consideremos las ecuaciones (3.31) y (3.32) del sector T^{11} . Ahora, en vez de g_1g_2 en la ecuación (3.31), tenemos $g_1 = (\theta, n_\alpha e_\alpha + \tau)$ en el sector T^{10} . Entonces, la ecuación (3.32) llega a ser

$$x = (\mathbb{1} - \theta)^{-1} (n_\alpha e_\alpha + \tau) \iff \det(\mathbb{1} - \theta) \neq 0. \quad (3.36)$$

En este caso, dado que $\theta = \text{diag}(1, -1)$, el determinante de $(\mathbb{1} - \theta)$ es nulo y entonces la ecuación (3.36) no tiene solución. La misma observación se tiene en el sector T^{01} donde usamos g_2 en vez de g_1 , i.e. al reemplazar θ por $\omega = \text{diag}(-1, 1)$. Por lo tanto, no se tienen puntos fijos en los sectores T^{10} y T^{01} . Para determinar el grupo de sabor de este orbifolio solo nos enfocamos al sector T^{11} .

Simetría de sabor

Para determinar la simetría de sabor en el orbifolio definido en (3.30), analizamos ahora la simetría de permutaciones debida a la geometría de los puntos fijos, y a las simetrías que nacen de las reglas de selección de los acoplamientos.

Geometría de los puntos fijos

Al tener dos puntos fijos inequivalentes en el sector T^{11} y ningún punto fijo en los sectores T^{10} y T^{01} , nos enfocamos solamente al sector T^{11} . Por lo tanto, tenemos una simetría de permutación S_2 . Desde la perspectiva de los números cuánticos en la teoría efectiva en $D = 4$ resultante de la compactificación de la cuerda heterótica en este orbifolio, se tiene que los estados torcidos sin masa, atados a estos dos puntos fijos, son indistinguibles, pues no estamos considerando líneas de Wilson.

Regla de selección del grupo de espacio

La regla de selección del grupo de espacio, dada en (3.1), la reescribimos ahora para $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ (aquí $N = M = 2$) e incluyendo las traslaciones $\tau \notin \Lambda$, como

$$\prod_{i=1}^n g^{(i)} = \prod_{i=1}^n (\theta^{k_i} \omega^{l_i}, \mu^{(i)} + \tau) = (\mathbb{1}, 0) \sim (\mathbb{1}, \sum_{i=1}^n \tilde{\Lambda}_i), \quad \tilde{\Lambda}_i = (\mathbb{1} - \theta^{k_i} \omega^{l_i}) \Lambda, \quad (3.37)$$

donde $\tilde{\Lambda}_i$ es la retícula invariante de los puntos fijos, Λ es la retícula del toro, $\mu^{(i)} = m_1^{(i)} e_1 \in \Lambda$, con $m_1^{(i)} = 0, 1$, y $\tau = \frac{1}{2}(e_1 - e_2) \notin \Lambda$. En la parte rotacional o del grupo de punto de la ecuación (3.37) tenemos la condición

$$\theta^{k_1} \dots \theta^{k_n} \omega^{l_1} \dots \omega^{l_n} = \mathbb{1}, \quad (3.38)$$

lo cual equivale a las condiciones

$$\sum_{i=1}^n k_i = 0 \pmod{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n l_i = 0 \pmod{2}. \quad (3.39)$$

En este caso tenemos que $k_i = l_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$, entonces $\sum_{i=1}^n k_i = n = 0 \pmod{2}$ y $\sum_{i=1}^n l_i = n = 0 \pmod{2}$ se implican mutuamente y, en consecuencia, no son independientes. Por lo tanto, tenemos solo un grupo discreto \mathbb{Z}_2 de las condiciones en (3.39).

En la parte traslacional de (3.37) tenemos en general la condición

$$(\mu^{(1)} + \tau) + \theta^{k_1} \omega^{l_1} (\mu^{(2)} + \tau) + \dots + \theta^{k_1} \omega^{l_1} \dots \theta^{k_{n-1}} \omega^{l_{n-1}} (\mu^{(n)} + \tau) = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i, \quad \tilde{\lambda}_i \in \tilde{\Lambda}_i, \quad (3.40)$$

donde n es par por la condición en (3.39). Además, tenemos que $(\theta\omega)^{\text{par}} = \mathbb{1}$ y $(\theta\omega)^{\text{impar}} = -\mathbb{1}$. Entonces (3.40) se convierte en

$$m_1^{(1)} e_1 - m_1^{(2)} e_1 + m_1^{(3)} e_1 - m_1^{(4)} e_1 + \dots - m_1^{(n)} e_1 + 0 = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i, \quad (3.41)$$

donde se ha substituido $\mu^{(i)} = m_1^{(i)} e_1 \in \Lambda$ y el 0 proviene de la suma de los $n = \text{par}$ términos en (3.40) para $\tau \notin \Lambda$ ($\tau - \tau + \dots + \tau - \tau = 0$, número $n = \text{par}$ de τ 's con signos $+$ y $-$ alternantes). Usando la retícula invariante de los puntos fijos $\tilde{\Lambda}_i = (\mathbb{1} - \theta^{k_i} \omega^{l_i}) \Lambda = 2n_1^{(i)} e_1 + 2n_2^{(i)} e_2$, $n_1^{(i)}, n_2^{(i)} \in \mathbb{Z}$, tenemos lo siguiente. En el lado izquierdo de la igualdad en (3.41) usamos la propiedad de equivalencia o conjugación de elementos $g \in S$ para la parte traslacional $\in \Lambda$, i.e. $\mu \sim \mu + \tilde{\lambda}$ donde $\tilde{\lambda} \in \tilde{\Lambda}$, tomando $n_2^{(i)} = 0$ y $n_1^{(i)} = 2m_1^{(i)}$ para $i = \text{par}$, es decir, $\tilde{\lambda}_i = 2m_1^{(i)} e_1 \in \tilde{\Lambda}_i$, $i = \text{par}$. En el lado derecho de la igualdad en (3.41) tenemos que $\tilde{\lambda} \in \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\Lambda}_i$ está dado por $\tilde{\lambda} = 2(\sum_i n_1^{(i)}) e_1 + 2(\sum_i n_2^{(i)}) e_2$. Tomando $n_2^{(i)} = 0$ tenemos que $\tilde{\lambda} = 2ne_1 \in \sum_{i=1}^n \tilde{\Lambda}_i$, donde $n = \sum_{i=1}^n n_1^{(i)} \in \mathbb{Z}$. Entonces, (3.41) es equivalente a

$$m_1^{(1)} e_1 - m_1^{(2)} e_1 + (2m_1^{(2)} e_1) + m_1^{(3)} e_1 - m_1^{(4)} e_1 + (2m_1^{(4)} e_1) + \dots - m_1^{(n)} e_1 + (2m_1^{(n)} e_1) = 2ne_1, \quad (3.42)$$

entonces

$$m_1^{(1)} e_1 + m_1^{(2)} e_1 + m_1^{(3)} e_1 + m_1^{(4)} e_1 + \dots + m_1^{(n)} e_1 = (0 \bmod 2) e_1. \quad (3.43)$$

Por lo tanto, de la parte traslacional de (3.37) tenemos la condición

$$\sum_{i=1}^n m_1^{(i)} = 0 \bmod 2, \quad (3.44)$$

lo que implica una simetría discreta \mathbb{Z}_2 . Por lo tanto, de la regla de selección del grupo de espacio, obtenemos las condiciones (3.39) y (3.44), dando lugar a una simetría $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Grupo de sabor

De la regla de selección del grupo de espacio obtuvimos las condiciones (3.39) y (3.44) implicando una simetría $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y de la geometría de los puntos fijos obtuvimos la simetría de permutación S_2 . Por lo tanto, el grupo de sabor que se obtiene para este orbifolio está dado por la cerradura multiplicativa de S_2 con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, denotada por $S_2 \cup \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Se tiene que $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es normal en $S_2 \cup \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y que este grupo es isomorfo al grupo diédrico de ocho elementos (orden 8) denotado por D_4 . Por lo tanto, la simetría de sabor es

$$S_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = D_4. \quad (3.45)$$

Esta misma simetría se obtiene también en el orbifolio unidimensional $\mathcal{O} = \mathbb{T}^1 / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}^1 / S$, donde $S = \langle (1, e_1), (\vartheta, 0) \rangle$, y $\vartheta = -1$ es el generador de \mathbb{Z}_2 .

Algunas observaciones

La presencia de rototraslaciones implicó tener sectores sin puntos fijos, situación que no sucede en el caso de tener solamente rotaciones y traslaciones $\in \Lambda$, donde podemos tener puntos fijos o

toros fijos, que corresponderían al caso, por ejemplo, del sector T^{10} aquí tratado sin las traslaciones $\tau \notin \Lambda$, donde ahora tendríamos

$$(\mathbb{1} - \theta)x = n_\alpha e_\alpha, \quad (3.46)$$

notando que, aún y cuando $\det(\mathbb{1} - \theta) = 0$, se puede obtener la solución $0x_1 = n_1 = 0$ y $2x_2 = n_2$ implicando la solución de puntos fijos $x = (x_1, x_2) = (x_1, n_2/2)$ con $x_1 \in \mathbb{R}$ arbitrario, i.e. todo el primer toro \mathbb{T}^1 ($\mathbb{T}^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$) se mapea a sí mismo bajo la acción del grupo de espacio S , dando lugar a un toro fijo \mathbb{T}^1 . De $2x_2 = n_2$ obtendríamos dos puntos fijos inequivalentes en el eje donde está definido el vector base e_2 . Una situación similar se tendría en el sector T^{01} , con el segundo toro \mathbb{T}^1 fijo y dos puntos fijos inequivalentes en el eje donde está definido e_1 . En el sector T^{11} , donde $\det(\mathbb{1} - \theta\omega) \neq 0$, se tendrían cuatro puntos fijos inequivalentes.

Por otra parte, en el caso con rototraslaciones, como hemos visto, tenemos solo 2 puntos fijos inequivalentes en el sector T^{11} mientras que ningún punto fijo en los sectores T^{10} y T^{01} . Por lo tanto, el número de puntos fijos para un orbifolio sin rototraslaciones es mayor que en el caso con estas.

3.2.5. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 6$

Considero el orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ en $D = 6$ donde el toro $\mathbb{T}^6 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$ tiene retícula $\Lambda = \{n_\alpha e_\alpha, n_\alpha \in \mathbb{Z}\}$ con vectores base canónicos en cada toro \mathbb{T}^2 , por ejemplo, $e_1 = (1, 0, 0^4)$, $e_2 = (0, 1, 0^4)$ en el primer toro \mathbb{T}^2 . El grupo de punto $P = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tiene 4 elementos, $\theta^0 \omega^0, \theta^0 \omega^1, \theta^1 \omega^0, \theta^1 \omega^1$. Los vectores de torcimiento son $v_1 = (0, 0, 1/2, -1/2)$ y $v_2 = (0, 1/2, 0, -1/2)$. En este caso, el grupo de espacio está generado por las traslaciones $\in \Lambda$ y por las rotaciones de P .

En el sector torcido T^{01} el vector de torcimiento es $v = 0v_1 + 1v_2 = (0, 1/2, 0, -1/2)$, en T^{10} $v = (0, 0, 1/2, -1/2)$ y en T^{11} $v = (0, 1/2, 1/2, -1)$. Entonces, en el sector T^{01} se tiene un toro \mathbb{T}^2 fijo en el segundo toro mientras que en el primer y tercer toro se tiene 4 puntos fijos inequivalentes. Por ejemplo, en el primer toro tenemos la ecuación para los puntos fijos $(\mathbb{1} - e^{2\pi i(1/2)})x = n_1 e_1 + n_2 e_2$, donde $x = (x_4, x_5)$, es decir, $2x_4 = n_1$ y $2x_5 = n_2$. Se tienen cuatro puntos fijos inequivalentes con coordenadas, por ejemplo, $(0, 0), (1/2, 0), (0, 1/2)$ y $(1/2, 1/2)$. Sus elementos constructores son, respectivamente, $g_0 = (-\mathbb{1}, 0), g_1 = (-\mathbb{1}, e_1), g_2 = (-\mathbb{1}, e_2)$ y $g_3 = (-\mathbb{1}, e_1 + e_2)$. En el sector T^{10} (T^{11}) se tiene una estructura similar donde ahora el toro \mathbb{T}^2 fijo aparece en el primer (tercer) toro.

En los toros fijos hay una infinidad de puntos fijos, tal que en la intersección común de puntos fijos en todos los tres sectores es seguro obtener los cuatro puntos fijos, comunes en los demás sectores, en los toros fijos. Entonces, la intersección común de puntos fijos en los tres sectores torcidos es representada por cuatro puntos fijos (como los del primer toro en el sector T^{01}) en cada uno de los tres toros en $D = 2$.

Por lo tanto, el grupo de sabor que se obtiene en este orbifolio es $(S_2 \times S_2) \times (S_2 \times S_2) \times (S_2 \times S_2) \cup (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ donde cada par de $(S_2 \times S_2)$ proviene de los cuatro puntos fijos en cada uno de los tres toros en dos dimensiones. El grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ entre paréntesis surge de

la parte rotacional de la regla de selección del grupo de espacio, mientras que cada uno de los tres pares de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ provienen de la parte traslacional para cada una de las dos direcciones e_1^a y e_2^a , $a = 1, 2, 3$ en cada uno de los tres toros $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2$. Se tiene que \mathbb{Z}_2^8 es normal en $S_2^6 \cup \mathbb{Z}_2^8$, entonces el grupo de sabor es $S_2^6 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^6 / \mathbb{Z}_2^4$. En esta geometría se tiene que las 6 líneas de Wilson son independientes. Por lo tanto, se tienen los siguientes rompimientos partiendo de 0 a 6 LW no nulas,

$$\begin{aligned}
0 \text{ LW nulas} & : S_2^6 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^6 / \mathbb{Z}_2^4 & (3.47) \\
1 \text{ LW nula} & : S_2^5 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^5 / \mathbb{Z}_2^2 \\
2 \text{ LW nulas} & : S_2^4 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^4 \\
3 \text{ LW nulas} & : S_2^3 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^3 / \mathbb{Z}_2^2 \\
4 \text{ LW nulas} & : S_2^2 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^4 \\
5 \text{ LW nulas} & : S_2 \times \mathbb{Z}_2^8 = D_4 \times \mathbb{Z}_2^6 \\
6 \text{ LW nulas} & : \mathbb{Z}_2^8.
\end{aligned}$$

En este ejemplo, nuevamente notamos que la inclusión de LW no nulas, del máximo número de LW independientes, rompe las simetrías de permutación.

Existen casos donde un mismo número de LW no nulas puede dar lugar a diferentes grupos de sabor. Por ejemplo, en el orbifoldo \mathbb{Z}_6 -II (1, 1), donde se tienen 3 LW independientes. En el caso de una LW no nula W_i se tiene que esta actúa en una dirección e_i de un toro en $D = 2$ con alguna simetría de permutación S_n , mientras que otra LW no nula W_j , ($j \neq i$), puede actuar en otra dirección e_j de otro toro en $D = 2$ con alguna otra simetría de permutación S_m , ($m \neq n$), dando lugar a que diferentes simetrías de permutación sean rotas y que, junto con las simetrías cíclicas de la regla del grupo de espacio, forman grupos de sabor diferentes para un mismo número de LW, en este caso una LW no nula. Notamos también que la inclusión de LW no triviales en la geometría del orbifoldo rompe la simetría de sabor hacia un subgrupo del grupo de sabor asociado al caso sin LW.

3.3. Búsqueda de modelos tipo MSSM

En las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en orbifolios toroidales abelianos, es posible obtener modelos tipo MSSM. Las geometrías de los orbifolios que dan lugar a este tipo de modelos prometedores requieren, usualmente, la presencia de LW no nulas, las cuales, como vimos en la sección 3.2, pueden romper las simetrías de permutación de los estados sin masa atados a los puntos fijos del orbifoldo, dando lugar a un subgrupo del grupo de sabor obtenido en la ausencia de LW. Es interesante conocer qué tipo de simetría de sabor surge de tales geometrías prometedoras. Para esto, nos enfocamos a realizar lo siguiente.

Se determinan primero las simetrías de sabor en las 138 geometrías de los orbifolios toroidales clasificados en la referencia [8], y presentados en la tabla 1.2. Nuestros resultados se presentan en la

tabla A.1 del apéndice A. Estas simetrías de sabor corresponden al caso de geometrías sin LW. De tales resultados observamos que 64 geometrías, 19 de \mathbb{Z}_N y 45 a $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, dieron lugar a simetrías de sabor no abelianas, y son las geometrías en las que nos enfocamos para realizar una búsqueda de modelos tipo MSSM. Las razones de elegir a tales geometrías son las siguientes: 1), que esperamos una fenomenología más interesante en modelos tipo MSSM con simetrías de sabor no abelianas, y 2) que realizar una búsqueda de modelos prometedores en todas las 138 geometrías sería algo muy demandante.

La aplicación del proceso de compactificación en orbifolios requiere una cantidad de tiempo considerable al realizarse a mano. Por esta razón, es conveniente ayudarse de herramientas computacionales que automaticen todo el proceso, y más si estamos interesados en realizar una búsqueda amplia de modelos prometedores fenomenológicamente. El programa computacional `orbifolder` es una herramienta sumamente poderosa y útil, que calcula y analiza la teoría efectiva a bajas energías que se obtiene de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica en orbifolios toroidales abelianos. Para apreciar los diferentes resultados que se pueden obtener, ver la referencia [9]. En nuestro caso, lo usamos para desarrollar una búsqueda aleatoria de modelos tipo MSSM que resulten de la compactificación de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en los 64 orbifolios que mostraron tener simetrías de sabor no abelianas en la ausencia de LW.

Un modelo tipo MSSM proviene de una compactificación fenomenológicamente viable, la cual se define por los siguientes tres requerimientos que satisface el espectro efectivo sin masa en $D = 4$ resultante de la compactificación. Uno: el grupo de norma en $D = 4$ es de la forma $\mathcal{G}_{4D} = \mathcal{G}_{SM} \times [U(1)']^n \times \mathcal{G}_{\text{oculto}}$, donde $\mathcal{G}_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, con hipercarga no anómala y compatible con gran unificación. $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$ es un grupo de norma no abeliano formado usualmente por un producto de grupos $SU(M)$. En las n simetrías $U(1)'$ se tiene que a lo más una es anómala, y el número n de grupos abelianos $U(1)'$ depende del modelo, pero en general está determinado por la condición de que el rango total de \mathcal{G}_{4D} sea⁴ 16. Dos: los estados efectivos incluyen campos que reproducen el espectro de materia del MSSM. Tres: los estados efectivos adicionales son de tipo vectorial con respecto a \mathcal{G}_{SM} e incluyen singuletes del SM que pueden tomar el papel de neutrinos derechos. A $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$ se le llama un grupo de norma oculto porque la mayoría de los campos del MSSM no están cargados bajo este grupo.

En esta etapa del trabajo efectué una búsqueda de modelos tipo MSSM para las geometrías de orbifolios que presentaron una simetría de sabor no abeliana en la ausencia de LW. Se agregó el caso del orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6 (1, 1)$, el cual dio una simetría de sabor abeliana en el caso sin LW, para mostrar que, aun y cuando este orbifolio no admite LW, fue posible obtener un gran número de modelos tipo MSSM, como se notará en los resultados presentados más adelante. Una vez obtenido el número total de modelos tipo MSSM, procedí a realizar una clasificación o separación de modelos de acuerdo al número de LW no nulas admisibles en la geometría del orbifolio. Esto es importante ya que las simetrías de sabor pueden ser rotas por la presencia de LW no nulas y uno de nuestros

⁴Como vimos en la subsección 1.3.5, ecuaciones (1.103) y (1.104), el rango del grupo de norma original, $E_8 \times E_8$, no se reduce en estas compactificaciones.

intereses es proveer las simetrías de sabor para los modelos tipo MSSM de acuerdo a la estructura de LW no triviales que posean tales modelos.

Por ejemplo, para el orbifoldio $\mathbb{Z}_8\text{-II}(1,1)$ obtuve un número total de modelos tipo MSSM de 2,023. Este orbifoldio admite 3 LW independientes. Entonces, mediante la creación de un programa en Mathematica, clasifiqué los modelos que presentan 1, 2 y 3 LW no nulas. En este caso, encontré 21, 398 y 1604 modelos con 1, 2 y 3 LW no nulas, o equivalentemente, con 2, 1 y 0 LW nulas, respectivamente. El proceso en el programa es como sigue. La entrada es el archivo proveído por el `orbifolder` con el total de modelos para una geometría del orbifoldio a considerar. Estos archivos de modelos presentan los vectores de desplazamiento y los vectores de las LW. Para conocer cuántas y cuáles LW son independientes, uso los archivos de la geometría del orbifoldio, los cuales están junto con el `orbifolder`. Una vez conociendo esta información, selecciono los modelos de acuerdo a ese número de LW no nulas dando las posibles combinaciones. Por ejemplo, para $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3(1,1)$ se tienen tres LW independientes, W_1 , W_3 y W_5 , entonces las posibilidades para 1 LW no nula son W_1 o W_3 o W_5 , para 2 LW no nulas W_1 y W_3 , o W_1 y W_5 , o W_3 y W_5 , para 3 LW no nulas, W_1 y W_3 y W_5 .

En la búsqueda de modelos tipo MSSM en las 64 geometrías de orbifolios a explorar (las que dieron simetrías de sabor no abelianas en la ausencia de LW) obtuvimos modelos prometedores en 51 geometrías (17 de \mathbb{Z}_N y 34 de $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$). La clasificación o separación de modelos de acuerdo al número de LW no triviales la realicé para todas estas 51 geometrías, incluyendo, además, los modelos del orbifoldio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, i.e. 52 geometrías en total.

Los resultados del número total de modelos obtenidos en estas 52 geometrías se presentan en las tablas 3.1 y 3.2 para los orbifolios \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, respectivamente. En estas tablas denotamos al orbifoldio como en la referencia [8] y presentamos, además del número total de modelos, el número máximo de LW independientes y el número de modelos para un número de LW nulas. En la tabla 3.2 se incluye al orbifoldio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$ (aun y cuando presentó una simetría de sabor abeliana en la ausencia de LW) para propósitos de comparación ya que, aunque este orbifoldio no admite LW, es llamativo haber obtenido un gran número de modelos tipo MSSM, lo cual podría motivar su estudio fenomenológico.

El número total de modelos prometedores que encontramos en las 17 geometrías de los orbifolios \mathbb{Z}_N es de 6,563, los cuales están distribuidos en la siguiente manera. El 52.27% de modelos proviene del orbifoldio \mathbb{Z}_8 , 22.45% de \mathbb{Z}_{12} , 21.65% de $\mathbb{Z}_6\text{-II}$, 2.68% de \mathbb{Z}_4 , 0.91% de $\mathbb{Z}_6\text{-I}$ y 0.015% de \mathbb{Z}_7 . Esto se representa en el diagrama de barras de la figura 3.1 para visualizar el correspondiente número de modelos que mencionamos en los porcentajes anteriores. Notamos que el mayor número de modelos prometedores provienen de los orbifolios \mathbb{Z}_8 , con 3,431 modelos, tomando en cuenta las tres y dos geometrías de $\mathbb{Z}_8\text{-I}$ y $\mathbb{Z}_8\text{-II}$, respectivamente. Este resultado alentador es una de las razones por las que nos interesó considerar los modelos tipo MSSM de este orbifoldio para el estudio de las simetrías de norma abelianas adicionales $U(1)$ que están presentes en el grupo de norma efectivo en $D = 4$ de estos modelos, lo cual forma parte del trabajo de investigación que se presentará en el siguiente capítulo.

Orbifolio	Max # de LW independientes	# de modelos tipo MSSM con				Total
		0	1	2	3	
\mathbb{Z}_4	(2,1)	3	149	0	0	149
	(3,1)	2	27	0	0	27
\mathbb{Z}_6 -I	(1,1)	1	30	0		30
	(2,1)	1	30	0		30
\mathbb{Z}_6 -II	(1,1)	3	26	337	0	363
	(2,1)	3	14	335	0	349
	(3,1)	3	18	335	0	353
	(4,1)	2	44	312	0	356
\mathbb{Z}_7	(1,1)	1	1	0		1
\mathbb{Z}_8 -I	(1,1)	2	230	38	0	268
	(2,1)	2	205	41	0	246
	(3,1)	1	389	0		389
\mathbb{Z}_8 -II	(1,1)	3	1,604	398	21	2,023
	(2,1)	2	274	231	0	505
\mathbb{Z}_{12} -I	(1,1)	1	556	0		556
	(2,1)	1	555	0		555
\mathbb{Z}_{12} -II	(1,1)	2	279	84	0	363

Tabla 3.1: Número total de modelos tipo MSSM que obtuvimos en las geometrías de orbifolios \mathbb{Z}_N . En la primera columna se presenta al orbifolio denotado de acuerdo a [8]. En la segunda columna se muestra el número máximo de LW independientes. En la tercera columna se presenta el número de modelos tipo MSSM de acuerdo al número de LW nulas. En la cuarta columna se muestra el número total de modelos.

Orbifolio	Max # de LW independientes	# de modelos tipo MSSM con					Total	
		0	1	2	3	≥ 4		
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(1,1)	6	1	152	52	0	0	205
	(2,1)	5	13	342	14	0	0	369
	(3,1)	5	4	400	40	0	0	444
	(5,1)	4	2	40	0	0	0	42
	(6,1)	4	344	57	0	0	0	401
	(7,1)	4	21	55	0	0	0	76
	(8,1)	4	25	0	0	0	0	25
	(9,1)	3	25	2	0	0	0	27
	(10,1)	3	19	2	0	0	0	21
	(12,1)	2	3	0	0	0	0	3
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1)	4	454	8,637	1,463	26	0	10,580
	(1,6)	2	65	21	0			86
	(2,1)	4	260	4,686	1,131	81	0	6,158
	(2,4)	2	281	47	0			328
	(3,1)	3	18,440	3,762	103	0		22,305
	(4,1)	3	2,911	1,575	33	0		4,519
	(5,1)	3	1,311	742	63	0		2,116
	(6,1)	3	1,814	1,374	58	0		3,246
	(7,1)	3	1,481	1,122	64	0		2,667
	(8,1)	2	839	72	0			911
(9,1)	2	1,620	522	0			2,142	
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I	(1,1)	2	467	116	0			583
	(2,1)	2	275	78	0			353
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	(1,1)	3	40	987	81	0		1,108
	(1,4)	1	8	0				8
	(2,1)	2	1,713	239	0			1,952
	(3,1)	2	6	0	0			6
	(4,1)	2	105	110	0			215
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	(1,1)	1	4,469	24				4,493
	(2,1)	1	495	45				540
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1)	3	1,509	24,693	2,442	5		28,649
	(2,1)	2	6,286	3,548	19			9,853
	(3,1)	2	4,513	1,003	6			5,522
	(4,1)	2	3,097	1,627	6			4,730
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	(1,1)	0	3,696				3,696	

Tabla 3.2: Número total de modelos tipo MSSM que obtuvimos en las geometrías de los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. El número máximo de LW independientes y el número total de modelos de acuerdo al número de LW no nulas es mostrado. En la última columna se presenta el número total de modelos.

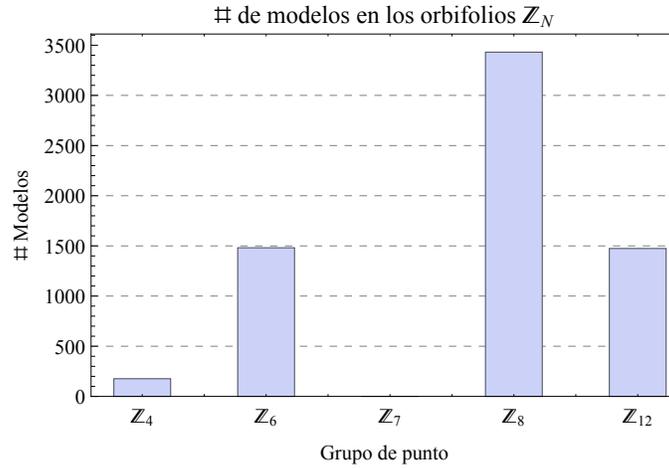


Figura 3.1: Diagrama de barras para el número total de modelos en los orbifolios \mathbb{Z}_N que obtuvimos en nuestra búsqueda. La altura de una columna corresponde al total de los modelos de todas las geometrías asociadas al grupo de punto etiquetado. Por ejemplo, considerando las seis geometrías con grupo de punto \mathbb{Z}_6 , encontramos un total de 1,481 modelos tipo MSSM. El mayor número de modelos se obtuvo en el orbifolio \mathbb{Z}_8 .

Respecto a las 34 geometrías de los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ (omitiendo los modelos del orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$) encontramos un total de 114,683 modelos prometedores fenomenológicamente. La distribución del total de modelos, tomando en cuenta todas las geometrías que aparecen en la tabla 3.2 para cada orbifolio $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ es como sigue. El mayor número de modelos se presentó en el orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ con el 48% del total, le siguen el orbifolio $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ con el 42.51%, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ con 4.38%, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ con 2.86%, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ con 1.4% y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I con 0.81%. Esta información se representa gráficamente en el diagrama de barras de la figura 3.2. El número total de modelos que encontramos en las 51 geometrías, 17 de \mathbb{Z}_N y 34 de $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ (sin contar los 3,696 modelos del orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$), son 121,246 modelos, lo cual representa la mayor búsqueda de modelos prometedores tipo MSSM realizada hasta la fecha.

3.3.1. Simetrías de sabor en modelos tipo MSSM

La siguiente actividad fue determinar las simetrías de sabor para los modelos tipo MSSM, de acuerdo al número de LW no nulas, que obtuvimos de nuestra búsqueda en las 52 geometrías que dieron lugar a este tipo de modelos, donde 17 de estas geometrías corresponden a \mathbb{Z}_N y son las presentadas en la tabla 3.1, mientras que las 35 geometrías restantes corresponden a $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ y son las presentadas en la tabla 3.2, donde se ha incluido al orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$. Por ejemplo,

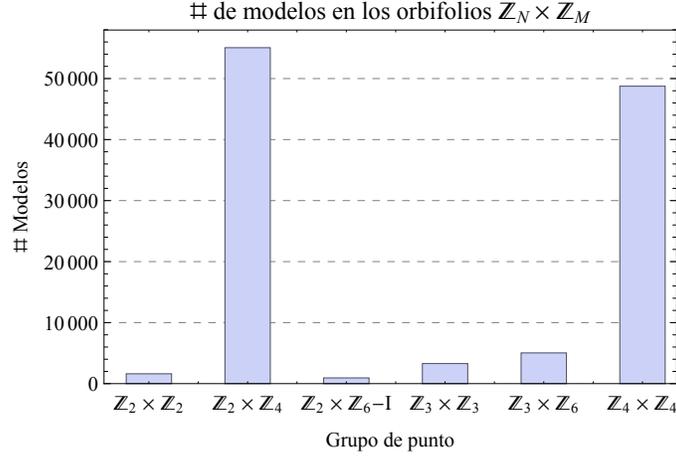


Figura 3.2: Diagrama de barras para el número total de modelos en los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ que obtuvimos en nuestra búsqueda. Se omite al orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$. La altura de una columna corresponde al total de los modelos de todas las geometrías asociadas al grupo de punto etiquetado. Por ejemplo, considerando las dos geometrías con grupo de punto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, encontramos un total de 5,033 modelos tipo MSSM. El mayor número de modelos se obtuvo en los orbifolios $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

en el orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2(1,1)$ de la tabla 3.2, con un número máximo de 6 LW independientes, encontramos un total de modelos tipo MSSM de 205, donde 1, 152 y 52 modelos corresponden a tener 0, 1 y 2 LW nulas, o equivalentemente, 6, 5 y 4 LW no nulas, con simetría de sabor \mathbb{Z}_2^8 , $D_4 \times \mathbb{Z}_2^6$ y $D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^4$, respectivamente, como se mostró en la ecuación (3.47) de la subsección 3.2.5. En el orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3(1,1)$ de la tabla 3.2, con un número máximo de 3 LW independientes, encontramos 1,108 modelos prometedores donde 81, 987 y 40 modelos corresponden a tener 2, 1 y 0 LW nulas, o equivalentemente, 1, 2 y 3 LW no nulas, con simetría de sabor $\Delta(54)^2 \times \mathbb{Z}_3$, $\Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^3$ y \mathbb{Z}_3^5 , respectivamente, como se mostró en la ecuación (3.29) de la subsección 3.2.3. Los resultados para todas las geometrías se presentan en las tablas A.2 y A.3 del apéndice A.

Todos los 124,942 modelos tipo MSSM de las 52 geometrías consideradas en nuestra búsqueda están disponibles en nuestra página web [24], como son requeridos por el `orbifolder`, clasificados de acuerdo al número de LW no nulas, y presentando también la simetría de sabor asociada a estos modelos prometedores fenomenológicamente. De acuerdo a los resultados de las tablas A.2 y A.3 del apéndice A, notamos que los tipos de simetrías de sabor para los 121,246 modelos de las 51 geometrías (i.e. sin tomar en cuenta los 3,696 modelos de $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$) se presentan en la siguiente manera: el 75.4% corresponde a productos y cocientes de potencias de D_4 con factores cíclicos \mathbb{Z}_n , el 23.4% son simetrías abelianas que incluyen productos de grupos cíclicos, y el 1.2% corresponde a productos y cocientes de potencias de $\Delta(54)$ con simetrías cíclicas.

Capítulo 4

$U(1)'$ a partir de $E_8 \times E_8$

En este capítulo presento mis contribuciones al proyecto de simetrías abelianas adicionales $U(1)'$ provenientes de las compactificaciones de cuerdas en el orbifoldo \mathbb{Z}_8 , y que fue publicado en Physics Letters B [34].

En este trabajo consideramos vacíos efectivos con grupo de norma $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)'$ que provienen de la compactificación de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en los orbifoldos \mathbb{Z}_8 . Nuestro interés es estudiar el corrimiento de la constante de acoplamiento de la simetría abeliana adicional $U(1)'$, cuando es no anómala, para dar predicciones de su valor a bajas energías. Usamos una escala de rompimiento de la $U(1)'$ en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, y consideramos tres diferentes escalas de rompimiento de supersimetría (SUSY): $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV. Para analizar la evolución de los acoplamientos de norma utilizamos las ecuaciones del grupo de renormalización (RGE) a un lazo. Nos enfocamos a vacíos que presentan unificación en las cuatro constantes de acoplamiento en una escala M_{GUT} , menor a la escala de cuerdas $M_{str} \approx 10^{17}$ GeV, y donde usamos los valores observados a baja energía, en M_Z , para los acoplamientos de norma del Modelo Estándar (SM). Como una predicción de nuestros modelos de cuerdas, analizamos, en estos vacíos, el corrimiento del acoplamiento de la $U(1)'$ desde la escala M_{GUT} hacia la escala de baja energía $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, para cada una de las tres escalas de rompimiento de SUSY. Adicionalmente, en un vacío efectivo particular, estudiamos el potencial de la simetría $U(1)'$ para resolver el problema de la metaestabilidad del vacío de Higgs.

El contenido del presente capítulo es como sigue. En la sección 4.1 se presenta una discusión sobre los vacíos efectivos que obtenemos de los modelos tipo Modelo Mínimo Estándar Supersimétrico (MSSM) que provienen de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica en los orbifoldos \mathbb{Z}_8 -I y \mathbb{Z}_8 -II. Estos modelos los obtuvimos como parte del trabajo que realizamos en [33], y que fue presentado en el capítulo 3. En la sección 4.2 presento la metodología usada para estudiar el corrimiento de las constantes de acoplamiento, de los grupos de norma en los vacíos efectivos, usando las ecuaciones del grupo de renormalización (RGE) a un lazo. En la sección 4.3 presento

los principales resultados de nuestro estudio para los valores de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$, denotada por α_4 , en la escala de baja energía $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, además de los valores para la escala de unificación M_{GUT} y el acoplamiento unificado, α_{GUT} . Lo anterior es realizado para cada una de las tres escalas de rompimiento de SUSY consideradas en este trabajo, y para todos los vacíos que encontramos en los modelos tipo MSSM de los orbifolios \mathbb{Z}_8 -I y \mathbb{Z}_8 -II. Un análisis estadístico en nuestros resultados es realizado, y diferentes observaciones importantes son presentadas. En la sección 4.4 consideramos un vacío efectivo particular, en una escala por debajo de $\Lambda_{SUSY} = 10^{12}$ GeV, para explorar el potencial de la simetría $U(1)'$ en resolver el problema de la metaestabilidad del vacío de Higgs.

4.1. Modelos MSSM y vacíos efectivos en el orbifolio \mathbb{Z}_8

Como un primer paso hacia los vacíos efectivos de nuestro interés, nos enfocamos en los modelos tipo MSSM que provienen de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en los orbifolios \mathbb{Z}_8 -I y \mathbb{Z}_8 -II. De acuerdo a la clasificación realizada en [8], se tiene que existen tres geometrías para el orbifolio \mathbb{Z}_8 -I y dos geometrías para \mathbb{Z}_8 -II (ver tabla 1.2). Elegimos este tipo de orbifolios porque, de acuerdo a nuestro trabajo presentado en [33], fueron los dos orbifolios, del tipo \mathbb{Z}_N , que ofrecieron el mayor número de modelos prometedores fenomenológicamente (ver capítulo 3, sección 3.3, tabla 3.1). Por lo tanto, esta elección nos asegura enfocarnos en una buena muestra representativa de tales modelos.

Estos modelos tienen grupo de norma en $D = 4$ con la estructura general

$$\mathcal{G}_{4D} = \mathcal{G}_{SM} \times [U(1)']^n \times \mathcal{G}_{\text{oculto}}, \quad (4.1)$$

donde $\mathcal{G}_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, con hipercarga no anómala y compatible con gran unificación. $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$ es un grupo de norma no abeliano formado usualmente por un producto de grupos $SU(M)$. En las simetrías $U(1)'$ se tiene que a lo más una es anómala, y en nuestros modelos $n \leq 10$. El espectro sin masa está formado por los campos del MSSM, más estados que son de tipo vectorial con respecto a \mathcal{G}_{SM} e incluyen singuletes del SM que pueden tomar el papel de neutrinos derechos. A $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$ se le llama un grupo de norma oculto porque la mayoría de los campos del MSSM están no cargados bajo este grupo.

Algunas propiedades para las simetrías $U(1)'$ presentes en nuestros modelos tipo MSSM se comentan enseguida. La mayoría de nuestros modelos presentan una $U(1)'$ anómala [35], la cual puede ser cancelada por el mecanismo de Green-Schwarz [36]. Para el generador t_a de la $U(1)'_a$, $a = 1, \dots, n$, adoptamos la normalización $k|t_a|^2 = 1$, donde consideramos que todas las álgebras asociadas con el grupo de norma efectivo tienen nivel de Kač-Moody $k = 2$. Sin embargo, para $U(1)_Y$, permitimos una normalización de hipercarga compatible con gran unificación, i.e. el generador t_y , de $U(1)_Y$, cumple $|t_y|^2 = 5/6$. En nuestro estudio no consideramos una mezcla cinética entre las diferentes

simetrías $U(1)'$ ya que, de acuerdo a [37], ha sido encontrado que es usualmente del orden 10^{-4} – 10^{-2} en orbifolios heteróticos semi-realistas, por lo que es despreciable para nuestros propósitos.

Otras observaciones para los modelos son las siguientes. En todos los modelos prometedores discutidos aquí, se tiene un gran número de singuletes bajo el SM, los cuales deben adquirir valores esperados en el vacío (VEVs) de un orden cercano a la escala de cuerdas para cancelar el término de Fayet-Iliopoulos que aparece en modelos con una simetría $U(1)'$ (pseudo-)anómala [38]. Como una consecuencia, los acoplamientos permitidos de tales singuletes con los exóticos de tipo vectorial, dan lugar a valores grandes para las masas de tales exóticos, desacoplándolos de la teoría efectiva a bajas energías. Además, ya que los singuletes están cargados bajo el sector de norma $[U(1)']^n$, estas simetrías pueden ser rotas en el vacío.

En este trabajo suponemos que siempre es posible encontrar una elección adecuada de singuletes del SM, tal que SUSY es preservada mientras que solamente el grupo de norma efectivo en $D = 4$

$$\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)' \quad (4.2)$$

permanece después del rompimiento espontáneo inducido por los VEVs de los singuletes, donde ignoramos al grupo de norma oculto $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$. En estos vacíos efectivos la simetría $U(1)'$ es no anómala y corresponde a cada una de las posibles n simetrías de \mathcal{G}_{4D} dadas en (4.1). Claramente, $\mathcal{G}_{\text{eff}} \subset \mathcal{G}_{4D}$. El número de modelos con grupo de norma (4.1) y el número de vacíos efectivos con grupo de norma (4.2) se muestran en la tabla 4.1. En total, tenemos 3,431 modelos y 17,284 vacíos efectivos, repartidos en las cinco geometrías del orbifolio \mathbb{Z}_8 como se muestra en esa tabla. Los vectores de desplazamiento y las líneas de Wilson (LW) de los 3,431 modelos los proveemos en nuestra página web [24].

En el caso más general, algunos de los campos del MSSM y de los exóticos vectoriales están cargados bajo la simetría $U(1)'$. Esto es cierto en la mayoría de los vacíos donde una de las $U(1)'$ permanece no rota. Entonces, solo los exóticos que son de tipo vectorial con respecto a \mathcal{G}_{eff} , y no solo con respecto a \mathcal{G}_{SM} , se desacoplan a bajas energías, permitiendo interacciones entre los campos del SM cargados bajo la $U(1)'$ y la materia adicional, lo cual puede dar lugar a una fenomenología nueva e interesante. Estas interacciones influyen, en particular, en el corrimiento de los acoplamientos de norma en las RGE, lo cual estudiamos en la siguiente sección.

4.2. Metodología: búsqueda de vacíos con unificación

Nos interesamos en vacíos efectivos que presentan unificación en las cuatro constantes de acoplamiento, en alguna escala M_{GUT} que depende de cada modelo, de los grupos de norma que forman el grupo efectivo (4.2). El propósito es determinar el valor del acoplamiento de $U(1)'$ al calcular su evolución desde la escala M_{GUT} hasta la escala de baja energía $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$, considerando diferentes escalas de rompimiento de SUSY: bajas, intermedias y altas. Nos proponemos analizar

Orbifolio	# modelos tipo MSSM	# vacíos efectivos	Orbifolio	# modelos tipo MSSM	# vacíos efectivos
$\mathbb{Z}_8\text{-I}(1,1)$	268	1,362	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(1,1)$	2,023	10,023
$\mathbb{Z}_8\text{-I}(2,1)$	246	1,097	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(2,1)$	505	2,813
$\mathbb{Z}_8\text{-I}(3,1)$	389	1,989			

Tabla 4.1: Número de modelos tipo MSSM que encontramos en nuestro trabajo [33] (ver tabla 3.1) para cada geometría del orbifolio \mathbb{Z}_8 , donde usamos la notación de [8]. En la tercera y sexta columna se muestra el número de vacíos efectivos con propiedades tipo MSSM y grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)'$ en cada caso.

todos los 17,284 vacíos efectivos y, mediante un estudio estadístico, obtener tales predicciones de nuestros modelos de cuerdas. Para realizar esta tarea desarrollamos lo siguiente.

Sea α_i , $i = 1, 2, 3, 4$ ($\alpha_i = g_i^2/4\pi$), las constantes de acoplamiento para los grupos de norma $U(1)_Y$, $SU(2)_L$, $SU(3)_C$ y $U(1)'$, respectivamente, y que forman el grupo dado en (4.2) de los vacíos efectivos. Utilizando los valores conocidos de las constantes de acoplamiento del SM en la escala M_Z [39]

$$\alpha_1^{-1}(M_Z) = 59.01 \pm 0.01, \quad \alpha_2^{-1}(M_Z) = 29.59 \pm 0.01, \quad \alpha_3(M_Z) = 0.1182 \pm 0.0012, \quad (4.3)$$

y usando las RGE a un lazo, evolucionamos estos acoplamientos hasta la escala de cuerdas $M_{str} \approx 10^{17}$ GeV. La escala de rompimiento de SUSY y de la $U(1)'$ modifican esta evolución. Ya que SUSY y el bosón de norma adicional Z' (asociado al rompimiento de $U(1)'$) no han sido observados, elegimos valores justificados, para sus escalas de rompimiento, de acuerdo a las observaciones y estudios experimentales. Respecto a SUSY, tenemos que en algunos modelos, el neutralino más ligero con masa menor a unos cuantos cientos de GeV ha sido excluido [40, 41]. Respecto al bosón Z' , se tiene un límite inferior para su masa alrededor de 2 TeV [42, 43, 44, 45]. Por lo tanto, suponemos una escala $\Lambda_{SUSY} > M_Z$, y una escala de rompimiento de $U(1)'$ en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV. En particular, suponemos que $\Lambda_{SUSY} \geq \Lambda_{Z'}$, donde $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV, lo cual es motivado por las siguientes razones. La primera, por la esperanza usual de que SUSY podría ser observada en el LHC. La segunda, por las restricciones en la metaestabilidad del potencial de Higgs [46]. Y la tercera, por considerar que SUSY podría ser rota en la escala de cuerdas, como en las compactificaciones de la cuerda heterótica no supersimétrica [22, 47, 48].

Las RGE a un lazo para las constantes de acoplamiento, $\alpha_i = g_i^2/4\pi$, están dadas por

$$\frac{\partial \alpha_i^{-1}}{\partial \ln \mu} = -\frac{b_i}{2\pi}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (4.4)$$

donde μ denota la escala de energía, los b_i son los coeficientes de la función beta, y sus valores dependen del contenido de materia en el espectro de nuestros vacíos. La solución de (4.4) tiene la

forma general

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(\mu_0) - \frac{b_i}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right), \quad (4.5)$$

donde μ_0 es una escala de referencia. En nuestro estudio es necesario calcular los b_i con y sin SUSY debido a las elecciones que hacemos para Λ_{SUSY} . Para los grupos de norma no abelianos, i.e. $i = 2, 3$, los coeficientes b_i están dados por

$$b_i = \begin{cases} -\frac{11}{3}C_2(G_i) + \frac{2}{3}\sum_f m_f C(\mathbf{R}_f) + \frac{1}{3}\sum_b m_b C(\mathbf{R}_b), & \text{sin-SUSY,} \\ -3C_2(G_i) + \sum_S m_S C(\mathbf{R}_S), & \text{SUSY,} \end{cases} \quad (4.6)$$

donde $C_2(G_i)$ es el Casimir cuadrático del grupo G_i , $C(\mathbf{R}_{b,f,S})$ denota respectivamente el índice cuadrático de las representaciones $\mathbf{R}_{b,f,S}$ de G_i para los bosones, fermiones y supercampos incluidos en el espectro, sobre los cuales corre la suma, y $m_{b,f,S}$ denota sus multiplicidades. Convencionalmente, tomamos $C(\mathbf{R}_{b,f,S}) = 1/2$ si $\mathbf{R}_{b,f,S}$ corresponde a la representación fundamental de $SU(N)$.

Para los grupos de norma abelianos, i.e. $i = 1, 4$, la ecuación (4.6) se reduce a

$$b_i = \begin{cases} \frac{2}{3}\sum_f m_f |q_i^{(f)}|^2 + \frac{1}{3}\sum_b m_b |q_i^{(b)}|^2, & \text{sin-SUSY,} \\ \sum_S m_S \text{tr} |q_i^{(S)}|^2, & \text{SUSY,} \end{cases} \quad (4.7)$$

en términos de las cargas $U(1)'$, $q_i^{(b,f,S)}$, para los estados en nuestros vacíos. Para los acoplamientos del SM, tomamos sus valores observados, dados en (4.3), con $\mu_0 = M_Z$. Ya que por debajo de $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV suponemos que solo las partículas del SM están presentes, determinamos directamente que $\alpha_1^{-1} = 56.99$, $\alpha_2^{-1} = 31.15$ y $\alpha_3^{-1} = 11.9$ (equivalentemente $g_1 = 0.469$, $g_2 = 0.635$, $g_3 = 1.027$) en $\Lambda_{Z'}$.

Para cada conjunto de vacíos efectivos que tenemos en cada geometría del orbifold \mathbb{Z}_8 , y a la vez, para cada elección de $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV con $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV, realizamos los siguientes pasos:

- Determinar la escala de unificación M_{GUT} de la intersección de $\alpha_2 = \alpha_1$, es decir, una unificación en $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$. A estos vacíos los llamamos vacíos con unificación parcial.
- Asignar $\alpha_{GUT} = \alpha_4 = \alpha_2 = \alpha_1$ en M_{GUT} .
- Calcular la evolución de α_4 desde M_{GUT} hasta $\Lambda_{Z'}$.
- Calcular α_3 en M_{GUT} .
- Identificar vacíos que cumplan la condición en $|\alpha_{GUT}^{-1} - \alpha_3^{-1}(M_{GUT})| < 0.26$, lo cual corresponde al intervalo 3σ del valor medido de $\alpha_3^{-1}(M_Z)$. A estos vacíos los llamamos vacíos con unificación total.

Para determinar lo anterior, usamos las RGE a un lazo (4.4), donde la forma de la solución general (4.5) la expresamos según la escala que estemos considerando para Λ_{SUSY} . La forma explícita de tales expresiones se presentan en la sección B.1 del apéndice B, para cada una de las tres escalas de rompimiento de SUSY. Debido a la gran cantidad de vacíos efectivos a analizar, utilizamos un programa en Mathematica para desarrollar estos cálculos.

En la figura 4.1 se representa la idea del proceso para el caso donde Λ_{SUSY} está entre $\Lambda_{Z'}$ y M_{GUT} . Como vemos, se consideran diferentes espectros de materia de acuerdo a las regiones de energía separadas por Λ_{SUSY} y $\Lambda_{Z'}$. En este caso, por arriba de la escala Λ_{SUSY} el espectro de los vacíos efectivos incluye a los supercampos del MSSM y unos cuantos exóticos vectoriales con respecto al \mathcal{G}_{SM} con cargas $U(1)'$ no triviales. Debajo de Λ_{SUSY} y mayor a $\Lambda_{Z'}$, el grupo de norma es aún \mathcal{G}_{eff} , ecuación (4.2), pero suponemos que todos los supercompañeros del SM y los supercompañeros bosónicos de los exóticos se desacoplan. Solo un singulete del SM con carga $U(1)'$ es tomado como un escalar debajo de Λ_{SUSY} , tal que su VEV pueda generar el rompimiento de la $U(1)'$ y proveer masas alrededor de $\Lambda_{Z'}$ para los exóticos restantes. Consecuentemente, por debajo de $\Lambda_{Z'}$ solo las partículas del SM y su grupo de norma permanecen.

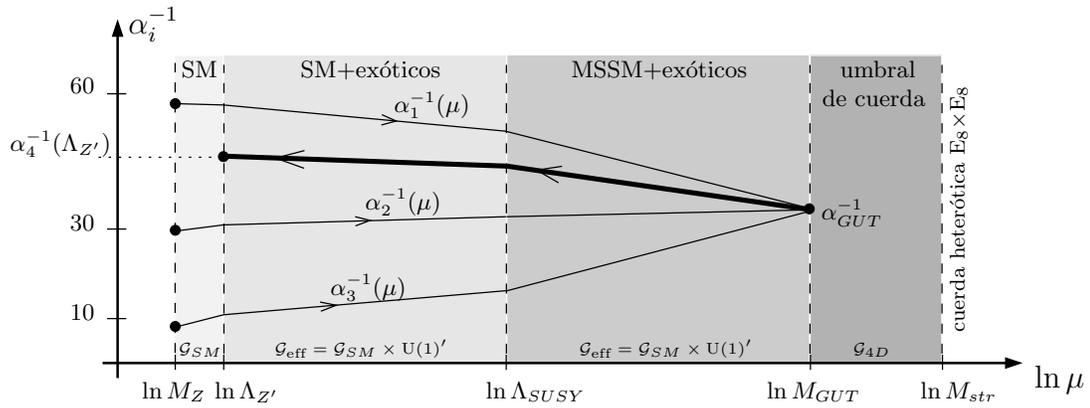


Figura 4.1: Ilustración para determinar el valor a bajas energías de la constante de acoplamiento α_4 de $U(1)'$, la escala de unificación M_{GUT} y el valor de unificación de los acoplamientos de norma α_{GUT} . $M_{str} \approx 10^{17}$ GeV. Aquí mostramos el caso $\Lambda_{Z'} < \Lambda_{SUSY} < M_{GUT}$, sin embargo, consideramos $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV y $\Lambda_{SUSY} = \Lambda_{Z'}, 10^{12}$ GeV, 10^{17} GeV.

Para estudiar las predicciones de nuestros modelos, nos interesamos en obtener el valor de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ en la escala $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, el valor de la escala de unificación M_{GUT} , y el valor del acoplamiento unificado α_{GUT} . Esto lo hacemos para todos los vacíos de todas las geometrías, y para las tres escalas de rompimiento de SUSY, $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV. Primero estudiamos vacíos con unificación parcial, es decir, vacíos donde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 \neq \alpha_3$ en M_{GUT} . Nuestro interés principal es realizar el análisis en los vacíos con unificación total, es decir,

vacíos donde se cumple $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 \approx \alpha_3$ en M_{GUT} , los cuales son seleccionados de entre los vacíos con unificación parcial.

4.3. Resultados: acoplamiento de $U(1)'$ a bajas energías

4.3.1. Vacíos efectivos de nuestro interés

Comenzamos por calcular los coeficientes b_i , de acuerdo a las ecuaciones (4.6) y (4.7), para todos los 17,284 vacíos distribuidos en las cinco geometrías como se muestra en la tabla 4.1. Encontramos que el 3.5 % del total de vacíos presentaron el espectro natural del MSSM, donde $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (33/5, 1, -3, 0)$ ¹. El número de vacíos para este caso es reportado en la segunda columna de la tabla 4.2. Además, el 1.3 % del total presentaron también $b_4 = 0$, aunque con $b_i, i = 1, 2, 3$, diferentes a los del MSSM. En estos casos, el acoplamiento de la Z' con la materia observable está muy suprimido, y por lo tanto, no consideramos estos vacíos. Como un ejemplo particular, en el orbifoldio $\mathbb{Z}_8\text{-II}(2, 1)$, donde tenemos 2,813 vacíos (ver tabla 4.1), encontramos que 111 (30) vacíos tienen $b_4 = 0$ con $b_i, i = 1, 2, 3$, iguales (diferentes) a los del MSSM. Por lo tanto, en esta geometría no consideramos a estos 141 vacíos con $b_4 = 0$.

Al efectuar el análisis en el corrimiento de las constantes de acoplamiento, encontramos que ciertos vacíos no son admisibles para nuestro estudio. Las razones para descartar a tales vacíos son las siguientes. Una, que al calcular la escala de unificación, M_{GUT} , se tenga que $M_{GUT} < M_Z$ o $M_{GUT} > M_{str}$, donde la primera está excluida, y la segunda no tiene sentido, ya que nuestros vacíos efectivos aplican solo por debajo de $M_{str} \approx 10^{17}$ GeV. Dos, que en el corrimiento de cualquier acoplamiento $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, se tenga que $\alpha_i < 0$, esto porque $\alpha_i = g_i^2/4\pi$. Tres, ya que nuestro trabajo está basado en una teoría de cuerdas con acoplamiento perturbativo, los vacíos que presentan un acoplamiento no perturbativo, $\alpha_i > 1$, no son considerados.

El número de estos vacíos inadmisibles varía según la elección de Λ_{SUSY} , y de la geometría del orbifoldio \mathbb{Z}_8 . Por ejemplo, en el orbifoldio $\mathbb{Z}_8\text{-II}(2, 1)$ con $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, encontramos que 429 vacíos presentaron una escala de unificación $M_{GUT} < \Lambda_{Z'}$ o $M_{GUT} > M_{str}$, 268 vacíos presentaron un valor negativo para algún acoplamiento α_i , y en 46 vacíos identificamos valores no perturbativos para algún α_i . Removiendo estos 743 vacíos, y los 141 vacíos con $b_4 = 0$ (de los 2,813 vacíos) obtenemos un total de 1,929 vacíos para esta geometría, como se reporta en la tabla 4.2. Realizamos este análisis para todos los vacíos en las cinco geometrías y considerando las tres escalas de Λ_{SUSY} . Reportamos tales resultados en la sección B.2 del apéndice B. Los resultados para el número de vacíos efectivos admisibles se muestran en la tabla 4.2. Estos números de vacíos corresponden al caso de unificación parcial, es decir, donde $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_{GUT} \neq \alpha_3$, en M_{GUT} .

Para obtener los vacíos de nuestro interés, elegimos de los vacíos seleccionados anteriormente, i.e.

¹Adicionalmente encontramos que la combinación de valores $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (33/5, 1, -3, 0)$ fue la más frecuente en nuestros vacíos efectivos.

con unificación parcial, a aquellos vacíos con unificación total, i.e. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_{GUT} \approx \alpha_3$ en la escala de unificación M_{GUT} , los cuales identificamos por la condición $|\alpha_{GUT}^{-1} - \alpha_3^{-1}(M_{GUT})| < 0.26$. Por ejemplo, en el orbifolio \mathbb{Z}_8 -II (2,1) y con $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, encontramos, en los 1,929 vacíos con unificación parcial, a 7 vacíos con unificación total. Estas observaciones son consideradas en la tabla 4.2, de la tercera a la octava columna, donde mostramos el número de vacíos que encontramos con unificación parcial y total para cada elección de Λ_{SUSY} y para cada geometría. Los detalles de todos estos vacíos con unificación total (o unificados), tales como el vector de desplazamiento V , las líneas de Wilson W_α , $\alpha = 1, \dots, 6$, el generador de hipercarga, el generador de la $U(1)'$ y el espectro, los proveemos en nuestra página web [25].

orbifolio	vacíos MSSM	vacíos efectivos de interés					
		$\Lambda_{SUSY} = \Lambda_{Z'}$		$\Lambda_{SUSY} = 10^{12}$ GeV		$\Lambda_{SUSY} = 10^{17}$ GeV	
		$\alpha_1 = \alpha_2$	unificados	$\alpha_1 = \alpha_2$	unificados	$\alpha_1 = \alpha_2$	unificados
\mathbb{Z}_8 -I (1,1)	58	681	2	1,218	8	1,253	20
\mathbb{Z}_8 -I (2,1)	116	421	0	940	2	958	3
\mathbb{Z}_8 -I (3,1)	76	1,101	8	1,792	7	1,844	20
\mathbb{Z}_8 -II (1,1)	245	6,476	60	8,970	181	9,245	114
\mathbb{Z}_8 -II (2,1)	111	1,929	7	2,567	71	2,631	51
total	606	10,608	77	15,487	269	15,931	208

Tabla 4.2: Número de vacíos efectivos tipo MSSM provenientes de los orbifolios heteróticos \mathbb{Z}_8 con simetrías $U(1)'$ y unificación en los acoplamientos de norma. Para cada geometría del orbifolio, la segunda columna muestra el número de vacíos con la dinámica exacta del MSSM, i.e. tal que $b_i = b_i^{MSSM} \in \{33/5, 1, -3, 0\}$ en sus RGE. Excluyendo estos y otros modelos inconsistentes, en los restantes (pares de) columnas mostramos el número de vacíos que satisfacen nuestras restricciones y con unificación parcial ($\alpha_1 = \alpha_2$) o con unificación total en los acoplamientos de norma ($\alpha_{GUT} = \alpha_i$), correspondientes a las tres elecciones de Λ_{SUSY} .

4.3.2. Vacíos con unificación parcial

En la figura 4.2 presentamos nuestros resultados para todas las geometrías de los orbifolios \mathbb{Z}_8 en el caso de unificación parcial, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_{GUT} \neq \alpha_3$ en M_{GUT} . En los paneles izquierdos presentamos gráficas de frecuencia para $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'})$ (en el eje vertical) y M_{GUT} (en el eje horizontal), donde $\alpha_4(\Lambda_{Z'})$ denota el valor de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, y M_{GUT} es la escala de unificación, es decir, la escala donde $\alpha_1 = \alpha_2$. En los paneles derechos se presentan también gráficas de frecuencia para los valores del acoplamiento unificado α_{GUT}^{-1} (en el eje vertical) y para la escala M_{GUT} (en el eje horizontal). Recordar que $\alpha_{GUT} = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$ en M_{GUT} . De arriba a abajo, y en cada panel izquierdo o derecho, se tiene que cada una de las tres gráficas corresponde al caso de $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV, respectivamente.

En estas gráficas, el tamaño de la burbuja depende del número de vacíos que comparten el mismo par de valores $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'}))$ o $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$, los cuales corresponden a las coordenadas del centro de la burbuja. A la derecha de cada gráfica se ha puesto una barra con una escala numérica coloreada, que da una idea de la cantidad de vacíos, con tales pares de valores, de acuerdo al color de la burbuja. En esta convención, las burbujas con mayor número de vacíos (y que tienen un mismo par de valores), corresponden a las de color rojo, las cuales son las de mayor tamaño. A partir de esta, los números de vacíos (con un mismo par de valores) van disminuyendo hasta las de color morado, y a la vez el tamaño de la burbuja también va decreciendo. Lo anterior da una idea visual de la frecuencia con la que un cierto conjunto de vacíos presentan tales pares de valores.

Por ejemplo, para la gráfica superior del panel derecho de la figura 4.2, tenemos, de manera un poco más precisa, que el par de valores más común para $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ es $(10^{15.89} \text{ GeV}, 26.534)$, lo cual corresponde a los valores del centro de la burbuja roja. Este par de valores se repite 414 veces. Por lo tanto, 414 vacíos presentan este mismo par de valores.

Los resultados en la figura 4.2 son de interés intermedio ya que nuestro objetivo principal es obtener resultados análogos para los vacíos con unificación total. Sin embargo, presentamos algunas observaciones semi-cualitativas para estos vacíos con unificación parcial. La primera es que nuestros vacíos limitan los valores de la constante de acoplamiento de $U(1)'$ a bajas energías dentro de un intervalo de valores dado por $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}) \in (20, 80)$, o equivalentemente, para $g_4(2 \text{ TeV}) \in (0.4, 0.8)$, independientemente de si la escala del rompimiento de SUSY es baja, intermedia o alta. Una segunda observación es que el valor más común para $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$ sí depende de la escala Λ_{SUSY} elegida; por ejemplo, obtenemos que $\alpha_4^{-1} \approx 30$ ($g_4 \approx 0.6$) para $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, mientras que $\alpha_4^{-1} \approx 60$ ($g_4 \approx 0.4$) para los otros dos valores de rompimiento de SUSY. La tercera observación es que obtenemos el límite $M_{GUT} > 10^8 \text{ GeV}$ para cualquier escala de SUSY. Además, $\alpha_{GUT}^{-1} < 30$ para SUSY a bajas energías y $\alpha_{GUT}^{-1} < 45$ en los otros casos.

Al analizar el promedio de los valores para la escala de unificación y para la constante de acoplamiento unificado, obtenemos que $\overline{M_{GUT}} \approx 10^{16} \text{ GeV}$ y $\overline{\alpha_{GUT}^{-1}} \approx 13$ para SUSY a bajas energías, y $\overline{M_{GUT}} \approx 10^{15} \text{ GeV}$ y $\overline{\alpha_{GUT}^{-1}} \approx 30$ en los otros casos. Todos los valores para el promedio, el valor más frecuente y la frecuencia para M_{GUT} , α_{GUT} y $\alpha_4(\Lambda_{Z'})$ que obtenemos al analizar los vacíos en todas las geometrías del orbifold \mathbb{Z}_8 los presentamos en la sección B.3 del apéndice B.

Los patrones mostrados en las gráficas de la figura 4.2 se explican enseguida. Consideremos la primera gráfica del panel derecho, la de $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, el comportamiento de las líneas diagonales se puede entender si consideramos que las RGE conducen, en este caso, a una ecuación de la forma $\alpha_{GUT}^{-1} = \alpha_2^{-1}(\Lambda_{Z'}) - b_2 f$ donde f depende del valor en $(b_2 - b_1)$, y que da, además, la dependencia en M_{GUT} (ver ecuaciones (B.3), (B.4) y (B.5) del apéndice B). Entones, por una parte, todos los vacíos con la misma diferencia en $(b_2 - b_1)$ tienen la misma M_{GUT} , y por otra, todos los vacíos con el mismo valor de b_2 están sobre la línea con pendiente dada por el valor de b_2 . El comportamiento diagonal es muy notorio en este caso porque los valores de b_2 que obtenemos de nuestros vacíos son un conjunto pequeño de números naturales. Usando un razonamiento similar se pueden explicar los

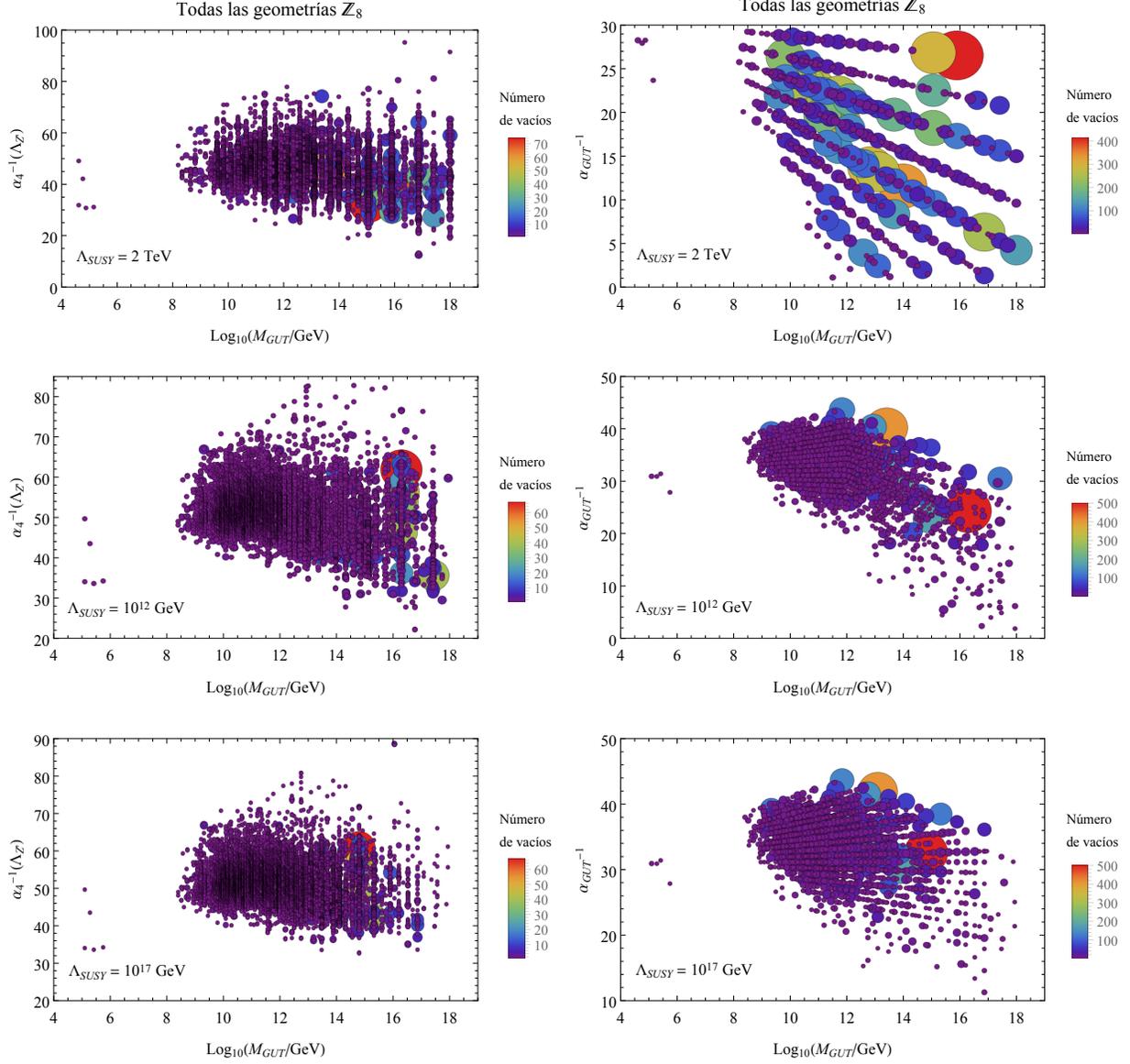


Figura 4.2: Vacíos con diferentes valores de M_{GUT} , $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'})$ y α_{GUT}^{-1} para tres elecciones de Λ_{SUSY} y con unificación parcial, $\alpha_{GUT} \equiv \alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. En los paneles izquierdos, las burbujas en diferentes colores y tamaños indican el número de vacíos con los valores dados de $\alpha_4(\Lambda_{Z'})$ y M_{GUT} en su centro. Análogamente, los paneles derechos cuentan vacíos con diferentes valores de α_{GUT} y M_{GUT} .

demás casos, tomando en cuenta los valores que se tienen para los coeficientes de la función beta. Como otro ejemplo, consideremos ahora la primera gráfica del panel izquierdo de la figura 4.2, en este caso las RGE conducen a una expresión de la forma $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'}) = \alpha_2^{-1}(\Lambda_{Z'}) - (b_2 - b_4)f$ (ver ecuación (B.6) del apéndice B), donde f y M_{GUT} tienen las mismas consideraciones del ejemplo anterior. En este caso, el comportamiento vertical es más notorio porque los valores para b_4 están dados por un gran conjunto de números racionales, obteniéndose ahora muchos más valores distintos para $\alpha_4(\Lambda_{Z'})$ para un mismo M_{GUT} (vacíos con el mismo valor para $(b_2 - b_1)$).

4.3.3. Vacíos con unificación total

Presentamos ahora los resultados principales de nuestro proyecto: los valores de $\alpha_4(\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV})$, M_{GUT} y α_{GUT} , a partir del análisis de los resultados para los vacíos con unificación total, i.e. los vacíos que cumplen $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_{GUT} \approx \alpha_3$. Esto lo realizamos para las tres escalas de rompimiento de SUSY, $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, 10^{12} GeV y 10^{17} GeV . Los resultados los presentamos en la figura 4.3, donde hemos tomado en cuenta todas las geometrías del orbifold \mathbb{Z}_8 . En este caso, tenemos un número mucho menor de vacíos, como se muestra en la tabla 4.2. Las gráficas de la figura 4.3 muestran datos de frecuencia para los pares de valores $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}))$ en los paneles izquierdos, y para los pares de valores $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ en los paneles derechos.

Discusión de resultados

Comenzemos con el caso para $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, donde los resultados están representados en las gráficas superiores de la figura 4.3. De los datos para la gráfica superior izquierda, obtenemos que los valores para la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ está restringida a los valores de $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) \in [24.74, 57.7]$, o equivalentemente, $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.46, 0.71]$, donde el valor más común corresponde a $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) = 34.4013$ o $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.604$, justo por debajo del acoplamiento para $SU(2)_L$, $g_2(2 \text{ TeV}) = 0.635$, como se mostró al final del párrafo que sigue a la ecuación (4.7). Los únicos valores para M_{GUT} que se obtienen son: 10^{12} GeV , $6.7 \times 10^{13} \text{ GeV}$ y $4.07 \times 10^{16} \text{ GeV}$, siendo el último el valor más frecuente. Lo anterior puede verse por la burbuja roja de esta gráfica, la cual corresponde al mayor número de vacíos, 24 en este caso, con el más frecuente par de valores $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})) = (4.07 \times 10^{16} \text{ GeV}, 34.4013)$. De los datos para la gráfica superior derecha, tenemos que los valores de α_{GUT} varían de 0.04 a 0.17, o equivalentemente, $5.62 \leq \alpha_{GUT}^{-1} \leq 21.39$, donde el valor más frecuente corresponde a $\alpha_{GUT}^{-1} = 21.39$ o $\alpha_{GUT} = 0.046$, el cual es muy cercano al valor tomado tradicionalmente en las GUTs, donde $\alpha_{GUT} \approx 0.04$. Observamos que la mayoría de los vacíos (62 de 77) alcanzan la unificación en la escala M_{GUT} más grande. Entre estos, 51 vacíos comparten el valor más frecuente para $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$, dado por $(4.07 \times 10^{16} \text{ GeV}, 21.39)$, lo cual está representado por la burbuja roja de esta gráfica.

El caso $\Lambda_{SUSY} = 10^{12} \text{ GeV}$ corresponde a las gráficas del centro en la figura 4.3, donde ahora tenemos casi 3.5 veces más vacíos que en el caso de rompimiento de SUSY a bajas energías. De

los datos para la gráfica central a la izquierda, obtenemos que $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) \in [38.2426, 64.2405]$ (o $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.4422, 0.5732]$) donde ahora nuestros resultados arrojan dos valores más frecuentes dados por $\alpha_4^{-1} = 48.5767$ ($g_4 = 0.5086$) y $\alpha_4^{-1} = 47.4171$ ($g_4 = 0.5147$), en $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$. Los valores de M_{GUT} varían entre $4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}$ y $1.07 \times 10^{16} \text{ GeV}$, siendo el primer valor el más común. Encontramos que el par de valores ($M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$) más frecuente corresponde a ($8.52 \times 10^{12} \text{ GeV}, 47.4171$) y a ($2.76 \times 10^{14} \text{ GeV}, 48.5767$), con 12 vacíos efectivos en ambos casos (el conjunto máximo de vacíos que comparten estos pares de valores), lo cual puede ser notado por las dos burbujas rojas en esta gráfica². De los datos para la gráfica central a la derecha tenemos que $\alpha_{GUT}^{-1} \in [17.20, 35.44]$ (o $\alpha_{GUT} \in [0.028, 0.058]$), donde el valor más común es $\alpha_{GUT}^{-1} = 33.1852$ ($\alpha_{GUT} = 0.0301$). La combinación más frecuente de valores para ($M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1}$) es ($4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}, 33.1852$), con 76 vacíos, lo cual es representado por la burbuja roja de esta gráfica.

Para la escala $\Lambda_{SUSY} = 10^{17} \text{ GeV}$, los resultados están representados en las dos gráficas inferiores de la figura 4.3. De los datos para la gráfica inferior izquierda obtenemos que $39.54 \leq \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) \leq 74.89$ (o equivalentemente $0.4096 \leq g_4(2 \text{ TeV}) \leq 0.5630$). En este caso encontramos dos valores más comunes (se repiten 5 veces cada uno): $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.500$ y 0.474 . La escala de unificación, M_{GUT} , toma valores entre $4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}$ y $2.1 \times 10^{15} \text{ GeV}$, donde la primera escala es el valor más común. Las dos burbujas rojas en esta gráfica indican que hay dos conjuntos de 5 vacíos cada uno, con el par de valores ($M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$) más frecuentes dados por ($4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}, 50.07$) y ($1.3 \times 10^{12} \text{ GeV}, 55.92$). De los datos para la gráfica inferior derecha encontramos que $\alpha_{GUT}^{-1} \in (23.5, 37.9)$, donde el valor más común es $\alpha_{GUT} = 0.03$ ($\alpha_{GUT}^{-1} = 33.18$). La burbuja roja en esta gráfica indica que 76 vacíos comparten el mismo par de valores ($M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1}$) = ($4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}, 33.1852$), como el par de valores más común.

Los valores promedio son $\overline{g_4(2 \text{ TeV})} \approx 0.5$, $\overline{M_{GUT}} \approx 10^{12} \text{ GeV}$ y $\overline{\alpha_{GUT}} \approx 0.03$. Los valores estadísticos como el promedio y los más frecuentes para M_{GUT} , α_{GUT} y $\alpha_4(2 \text{ TeV})$, en las tres escalas de rompimiento de SUSY, se presentan en la sección B.3 del apéndice B.

Observaciones generales

- El caso con $\Lambda_{SUSY} = 10^{17} \text{ GeV}$ resulta intrigante ya que produce básicamente los mismos resultados, en nuestra aproximaciones, que el caso con $\Lambda_{SUSY} = 10^{12} \text{ GeV}$. Por ejemplo, en ambas escalas, se tiene que el valor más común para $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.5$, mientras que M_{GUT} y α_{GUT} tienen, cada uno, el mismo valor (más común), $4.28 \times 10^{11} \text{ GeV}$ y 0.03 , respectivamente. El rango de valores para $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$ está, en ambas escalas, entre 38 y 64, salvo un vacío aislado con $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) \approx 74$ en el caso con $\Lambda_{SUSY} = 10^{17} \text{ GeV}$, el cual se puede ignorar. También, los promedios para $g_4(2 \text{ TeV})$ y M_{GUT} son muy similares en ambas escalas.
- Mientras la escala de rompimiento de SUSY aumenta, se tiene que $g_4(2 \text{ TeV})$, M_{GUT} y α_{GUT}

²Notar que el valor individual más común de M_{GUT} y $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$, no necesariamente tiene que coincidir con el par de valores más frecuente para ($M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV})$).

disminuyen. Esto es más notable cuando el rompimiento de SUSY pasa de una escala baja a una intermedia o alta, ya que entre estas dos últimas tales valores no cambian demasiado, según nuestros resultados. Por ejemplo, $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.6$ ($M_{GUT} \approx 10^{16} \text{ GeV}$) es el valor más común para SUSY a bajas energías, mientras que para SUSY en una escala intermedia o alta se tiene $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.5$ ($M_{GUT} \approx 10^{12} \text{ GeV}$).

- Los rangos de valores para $g_4(2 \text{ TeV})$, α_{GUT} y M_{GUT} disminuyen cuando Λ_{SUSY} aumenta. Por ejemplo, $g_4(2 \text{ TeV}) \in (0.46, 0.71)$ para SUSY a bajas energías, mientras que $g_4(2 \text{ TeV}) \in (0.4, 0.57)$ para SUSY en una escala intermedia o alta.

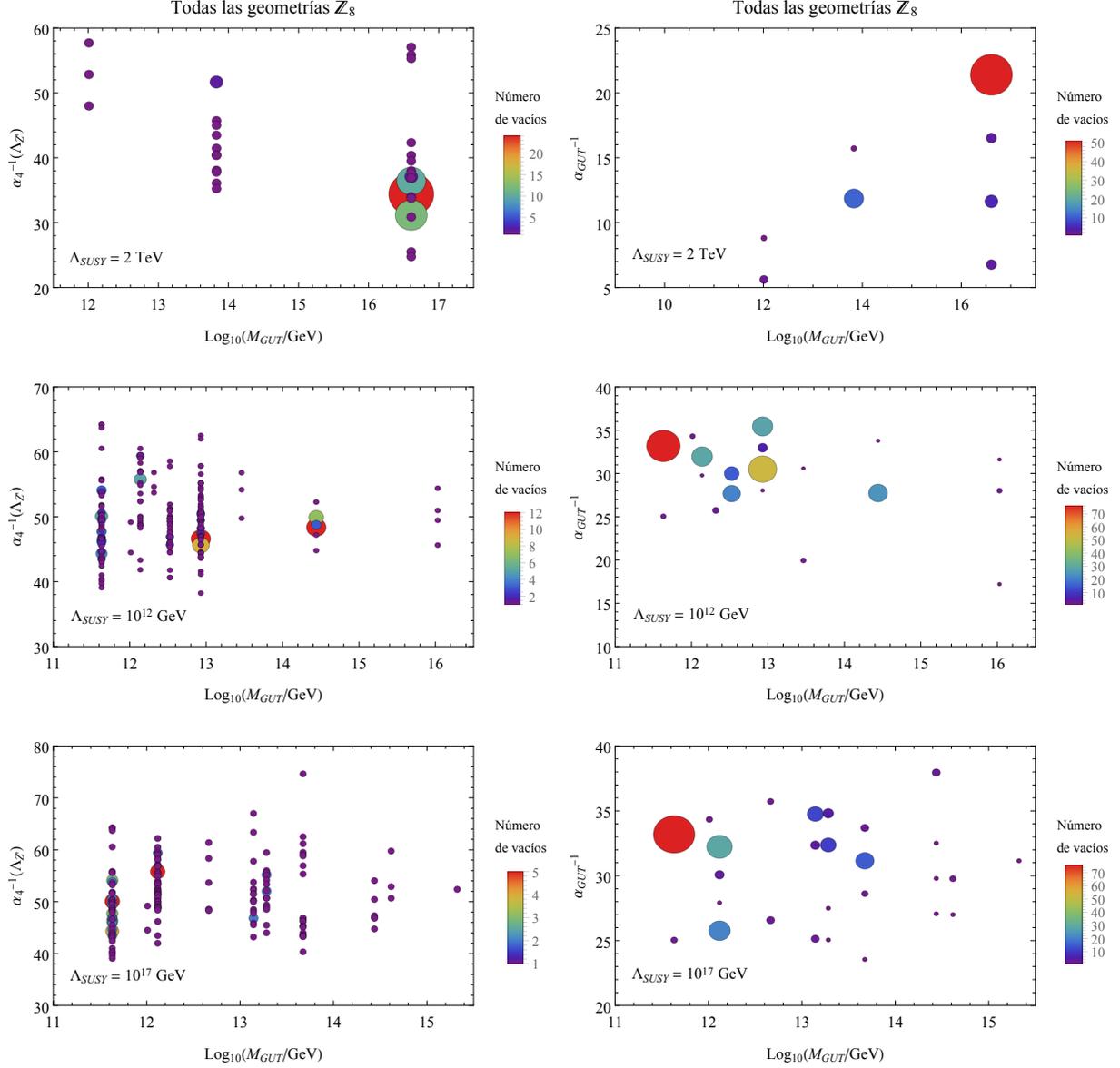


Figura 4.3: Vacíos con diferentes valores de M_{GUT} , $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'})$ y α_{GUT}^{-1} para tres elecciones de Λ_{SUSY} y con unificación total, $\alpha_{GUT} \equiv \alpha_1 = \alpha_2 \approx \alpha_3$. En los paneles izquierdos, las burbujas en diferentes colores y tamaños indican el número de vacíos con los valores dados de $\alpha_4(\Lambda_{Z'})$ y M_{GUT} en su centro. Análogamente, los paneles derechos cuentan vacíos con diferentes valores de α_{GUT} y M_{GUT} .

4.4. $U(1)'$ y estabilidad del vacío de Higgs

Como un primer estudio fenomenológico de nuestros vacíos nos interesa explorar, en un vacío particular, el potencial de la $U(1)'$ para resolver el problema de la metaestabilidad del vacío de Higgs. De acuerdo a la referencia [17], los fermiones del SM y algunos singuletes adicionales con cargas bajo una $U(1)'$, sujetos a una serie de restricciones, pueden mejorar el corrimiento de las RGE de los acoplamientos relevantes, dando lugar a un autoacoplamiento positivo del Higgs en todas las escalas.

El vacío efectivo para nuestro análisis proviene de la geometría del orbifoldo \mathbb{Z}_8 -II (2, 1). El vector de desplazamiento V y las líneas de Wilson (LW) W_α están dados por

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4}(-7/2, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 5/2, 3)(-4, -1, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 3), \\ W_1 &= \frac{1}{4}(1, -7, -7, -5, 2, 2, 1, -3)(-3, 3, -6, -4, 1, -3, 3, 5), \quad W_6 = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

El grupo de norma en $D = 4$ es $\mathcal{G}_{4D} = \mathcal{G}_{SM} \times [U(1)']^6 \times SU(2)^6$, donde una $U(1)'$ es (pseudo-)anómala. Elegimos un vacío donde el VEV de un singulete del SM induce el rompimiento $\mathcal{G}_{4D} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)'$, con una $U(1)'$ no anómala. En este vacío efectivo los generadores de hipercarga (correctamente normalizada) y de $U(1)'$ están dados por

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{4}(1, 5/3, 5/3, -5/3, 1, 1, 1, 1)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ t_4 &= \frac{1}{12\sqrt{2}}(-3, 0, 0, 0, 1, 1, 1, -2)(0, 0, 0, 0, 0, 8, 8, 0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

El espectro de este vacío efectivo, después del desacoplamiento de los exóticos vectoriales con respecto a \mathcal{G}_{eff} , se presenta en la tabla 4.3, considerando escalas debajo de $\Lambda_{SUSY} = 10^{12}$ GeV. Este espectro contiene las partículas del SM, un bosón de Higgs adicional, unos cuantos fermiones exóticos y algunos singuletes bajo el SM, los cuales son en su mayoría fermiones. Escogemos dos singuletes escalares bajo el SM (en vez de uno), s_1 y s_2 , para dar lugar al rompimiento espontáneo de la $U(1)'$ y facilitar el desacoplamiento de los exóticos del SM. Con este espectro, obtenemos que los coeficientes de la función beta son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (23/3, -1/3, -19/3, 5789/864)$, para $U(1)_Y, SU(2)_L, SU(3)_C$ y $U(1)'$, respectivamente.

Para calcular el corrimiento de las RGE para los acoplamientos en este modelo usamos SARAH [49]. Primero, al aplicar nuestro tratamiento, encontramos que $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.49$ y una escala de unificación $M_{GUT} \approx \Lambda_{SUSY} = 10^{12}$ GeV. Suponiendo que los campos escalares s_1 y s_2 adquieren VEVs, notamos que los fermiones exóticos exhiben acoplamientos que les permiten ser desacoplados por debajo de $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$ mientras que la $U(1)'$ es rota espontáneamente, tal que podemos considerar solamente al espectro del SM debajo de $\Lambda_{Z'}$. Tomando $g_1 = 0.3587$, $g_2 = 0.6482$, $g_3 = 1.1645$, el Yukawa del top $Y_{33}^u = 0.9356$ y el auto-acoplamiento cuártico del Higgs $\lambda = 0.127$ en la escala de la masa del top $m_t = 173.1 \text{ GeV}$ (ver por ejemplo [50]), permitimos que los acoplamientos del SM evolucionen hasta $\Lambda_{Z'}$. Para $\Lambda_{Z'} < \mu < \Lambda_{SUSY}$ incluimos todos los exóticos de la tabla 4.3 y

#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep escalar	Etiqueta
2	(1, 2) _(-1/2, -7/12√2)	$\ell_{1,2}$	1	($\bar{\mathbf{3}}$, 1) _(1/3, 3/4√2)	\bar{x}_i	1	(1, 2) _(1/2, -1/3√2)	H_u
1	(1, 2) _(-1/2, 1/3√2)	ℓ_3	1	(3, 1) _(-1/3, 1/12√2)	x_i	1	(1, 2) _(-1/2, 1/12√2)	H_d
2	(1, 1) _(1, -1/6√2)	$\bar{e}_{1,2}$	8	(1, 2) _(0, 1/6√2)	η_i	1	(1, 1) _(0, -1/4√2)	s_1
1	(1, 1) _(1, 1/12√2)	\bar{e}_3	8	(1, 1) _(1/2, 1/6√2)	ζ_i	1	(1, 1) _(0, 1/3√2)	s_2
2	(3, 2) _(1/6, -1/6√2)	$q_{1,2}$	8	(1, 1) _(-1/2, 7/12√2)	$\bar{\zeta}_i$			
1	(3, 2) _(1/6, 1/4√2)	q_3	8	(1, 1) _(-1/2, -1/12√2)	$\bar{\kappa}_i$			
2	($\bar{\mathbf{3}}$, 1) _(-2/3, -1/6√2)	$\bar{u}_{1,2}$	8	(1, 1) _(1/2, -1/6√2)	κ_i			
1	($\bar{\mathbf{3}}$, 1) _(-2/3, 1/12√2)	\bar{u}_3	11	(1, 1) _(0, 1/3√2)	N_i^a			
2	($\bar{\mathbf{3}}$, 1) _(1/3, -7/12√2)	$\bar{d}_{1,2}$	10	(1, 1) _(0, -2/3√2)	N_i^b			
1	($\bar{\mathbf{3}}$, 1) _(1/3, 3/4√2)	\bar{d}_3	8	(1, 1) _(0, -1/12√2)	N_i^c			
			6	(1, 1) _(0, -5/12√2)	N_i^d			
			4	(1, 1) _(0, 7/12√2)	N_i^e			
			2	(1, 1) _(0, -1/4√2)	N_i^f			

Tabla 4.3: Espectro sin masa para un vacío con grupo de norma \mathcal{G}_{eff} . Representaciones con respecto a $SU(3)_C \times SU(2)_L$ están dadas en negritas, la hipercarga y la carga $U(1)'$ están indicadas como subíndices. El marco de la izquierda corresponde a los fermiones del SM, el marco del centro a los fermiones exóticos, y el marco en la derecha muestra los escalares incluyendo los campos de Higgs.

suponemos además que H_u domina el auto-acoplamiento cuártico del Higgs para estudiar cuidadosamente la evolución de ese acoplamiento. Nuestros resultados son mostrados en la figura 4.4, donde hemos extendido nuestra descripción de λ por arriba de Λ_{SUSY} para asegurarnos que la perturbatividad no es perdida. Para probar la solidez de nuestro estudio, hemos permitido también valores no triviales de otros acoplamientos cuárticos (aquellos para H_d , s_1 y s_2) y encontramos que nuestro resultado no es alterado siempre y cuando los valores de esos acoplamientos sean tomados cercanos al valor de λ en m_t . Por lo tanto, es posible establecer que nuestras cargas y constante de acoplamiento $U(1)'$ se combinan para producir un vacío de Higgs estable.

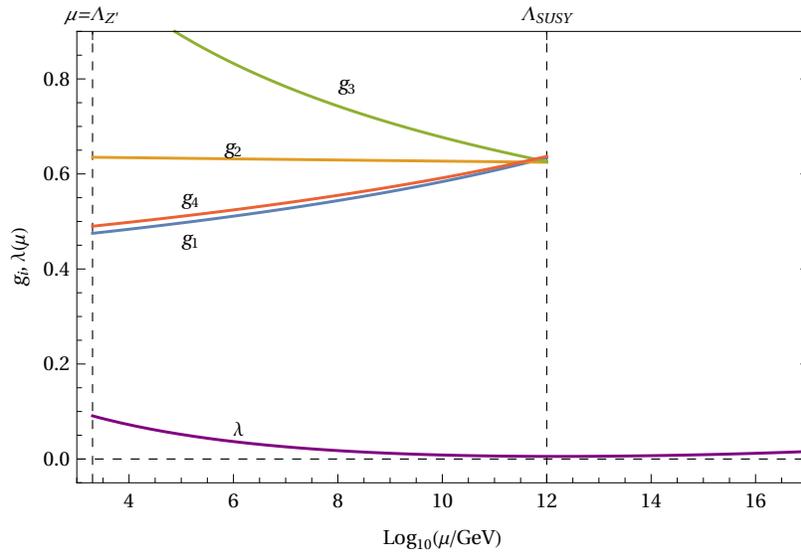


Figura 4.4: Corrimiento de las RGE para el acoplamiento cuártico del Higgs y los acoplamientos de norma de $U(1)_Y$, $SU(2)_L$, $SU(3)_C$ y $U(1)'$ en un vacío efectivo de \mathbb{Z}_8 -II (2,1). Los acoplamientos de norma se juntan en $M_{GUT} \approx 10^{12}$ con un valor $\alpha_{GUT} \approx 0.03$ ($g_{GUT} \approx 0.627$). Notamos que en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, el acoplamiento $U(1)'$ tiene el valor $g_4 \approx 0.49$. De esta figura, observamos que el acoplamiento cuártico del Higgs permanece perturbativo y positivo, dando lugar a una solución plausible al problema de la metaestabilidad del vacío del SM.

Capítulo 5

Hacia fenomenología de cuerdas sin supersimetría

5.1. Modelos tipo SM

Realicé una búsqueda de modelos tipo SM en las compactificaciones de la cuerda heterótica sin supersimetría, $SO(16) \times SO(16)$, en los 138 orbifolios toroidales abelianos clasificados en [8], los cuales corresponden a 19 geometrías en \mathbb{Z}_N y 119 geometrías en $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. Para esta búsqueda uso el `orbifolder` en la versión no supersimétrica. Los resultados son presentados en la tabla 5.1 para los orbifolios \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. Encontré modelos tipo SM en 103 geometrías (15 de \mathbb{Z}_N y 88 de $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$), i.e. no encontré modelos en 35 geometrías (4 de \mathbb{Z}_N y 31 de $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$). Las búsquedas han sido limitadas debido al enorme tiempo requerido para obtener una clasificación completa. Los resultados completos se reportarán en un trabajo futuro. Para visualizar los resultados, presento diagramas de barras en las figuras 5.1 y 5.2 para los orbifolios \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, respectivamente. Encontré 168,429 (1,024) modelos tipo SM en los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ (\mathbb{Z}_N), donde la mayoría provienen del orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ (\mathbb{Z}_8), con alrededor del 87.43% (42%) del total.

Como en el caso supersimétrico, estudiado en el capítulo 4, estos modelos tipo SM tienen grupo de norma en $D = 4$ con la estructura general

$$\mathcal{G}_{4D} = \mathcal{G}_{SM} \times [U(1)']^n \times \mathcal{G}_{\text{oculto}}, \quad (5.1)$$

donde $\mathcal{G}_{SM} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ con hipercarga no anómala y compatible con gran unificación. El espectro sin masa está formado por campos que reproducen el espectro de materia del SM, donde se tiene un número neto de tres fermiones quirales y al menos un campo escalar de Higgs. Además, se tienen fermiones exóticos que son de tipo vectorial con respecto al grupo del SM. $\mathcal{G}_{\text{oculto}}$ es un grupo de norma no abeliano formado usualmente por un producto de grupos $SU(M)$; se le llama un grupo de norma oculto porque (la mayoría de) los campos del SM están no cargados bajo

este grupo. El rango de G_{4D} es 16, como el grupo de norma original en $D = 10$, $SO(16) \times SO(16)$. Respecto a las simetrías $U(1)'$ se tiene que a lo más una es no anómala.

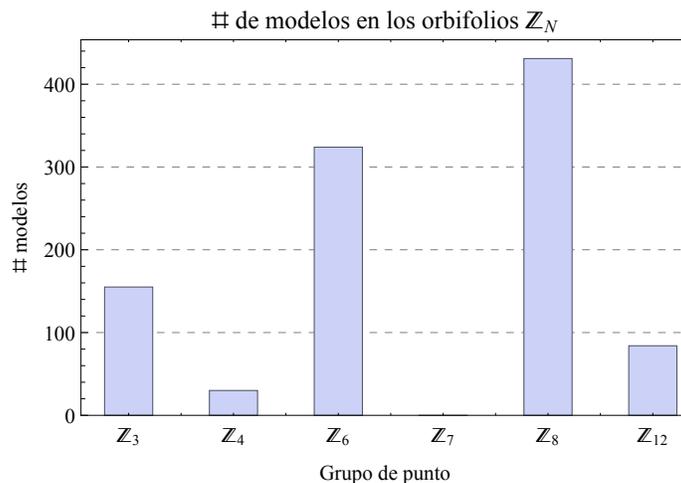


Figura 5.1: Diagrama de barras para el número total de modelos tipo SM en los orbifolios \mathbb{Z}_N que obtuve en la búsqueda efectuada. La altura de una columna corresponde al total de los modelos de todas las geometrías asociadas al grupo de punto etiquetado. Por ejemplo, considerando las seis geometrías con grupo de punto \mathbb{Z}_6 , encontré un total de 324 modelos. El mayor número de modelos se obtuvo en el orbifolio \mathbb{Z}_8 .

5.2. Vacíos efectivos

Pensando en un estudio fenomenológico de las $U(1)'$ presentes en estos modelos tipo SM, me intereso en los vacíos efectivos con grupo de norma en $D = 4$ dado por

$$\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)', \quad (5.2)$$

donde la $U(1)'$ es no anómala y corresponde a cada una de las n simetrías abelianas (no anómalas) en (5.1). Se ha supuesto que siempre es posible encontrar una elección adecuada de singuletes del SM tal que sus VEVs conduzcan al rompimiento $\mathcal{G}_{4D} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{eff}}$, donde se ha ignorado al grupo de norma oculto.

El número de vacíos efectivos que se obtienen de los modelos tipo SM en los orbifolios \mathbb{Z}_N se presenta en la tabla 5.2. En total, encontré 7,634 vacíos efectivos, los cuales están distribuidos entre los diferentes orbifolios \mathbb{Z}_N como se muestra en esta tabla. Obtengo el espectro sin masa y el generador de la $U(1)'$ para todos estos vacíos, así como los vectores de desplazamiento y las líneas

Orbifolio	Total	Orbifolio	Total	Orbifolio	Total	Orbifolio	Total	Orbifolio	Total
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$		\mathbb{Z}_3	
(1,1)	8	(1,1)	1779	(8,3)	1919	(2,1)	98	(1,1)	155
(1,2)	0	(1,2)	4590	(9,1)	2346	(2,2)	4	\mathbb{Z}_4	
(1,3)	0	(1,3)	3117	(9,2)	464	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		(1,1)	1
(1,4)	0	(1,4)	2215	(9,3)	1491	(1,1)	234	(2,1)	12
(2,1)	8	(1,5)	9388	(10,1)	3562	(1,2)	90	(3,1)	17
(2,2)	0	(1,6)	7119	(10,2)	3250	(1,3)	637	\mathbb{Z}_6 -I	
(2,3)	0	(2,1)	1587	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I		(1,4)	5	(1,1)	33
(2,4)	0	(2,2)	2886	(1,1)	109	(2,1)	300	(2,1)	31
(2,5)	0	(2,3)	6174	(1,2)	142	(2,2)	172	\mathbb{Z}_6 -II	
(2,6)	0	(2,4)	8543	(2,1)	45	(2,3)	600	(1,1)	31
(3,1)	10	(2,5)	2066	(2,2)	310	(2,4)	2	(2,1)	77
(3,2)	0	(2,6)	4029	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -II		(3,1)	339	(3,1)	140
(3,3)	0	(3,1)	2302	(1,1)	8	(3,2)	208	(4,1)	12
(3,4)	0	(3,2)	5957	(2,1)	156	(4,1)	1665	\mathbb{Z}_7	
(4,1)	0	(3,3)	3935	(3,1)	150	(4,2)	0	(1,1)	0
(4,2)	0	(3,4)	4779	(4,1)	143	(4,3)	1	\mathbb{Z}_8 -I	
(5,1)	2	(3,5)	9100	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$		(5,1)	579	(1,1)	4
(5,2)	0	(3,6)	1916	(1,1)	10	(5,2)	2	(2,1)	4
(5,3)	0	(4,1)	1570	(1,2)	71	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$		(3,1)	0
(5,4)	0	(4,2)	6179	(1,3)	3409	(1,1)	12	\mathbb{Z}_8 -II	
(5,5)	0	(4,3)	3445	(1,4)	1843			(1,1)	330
(6,1)	46	(4,4)	2905	(2,1)	17			(2,1)	93
(6,2)	0	(4,5)	3336	(2,2)	521			\mathbb{Z}_{12} -I	
(6,3)	0	(5,1)	1771	(2,3)	6402			(1,1)	0
(7,1)	129	(5,2)	2413	(2,4)	0			(2,1)	0
(7,2)	0	(6,1)	2648	(3,1)	9			\mathbb{Z}_{12} -II	
(8,1)	0	(6,2)	5542	(3,2)	1584			(1,1)	84
(9,1)	6	(6,3)	3726	(3,3)	0				
(9,2)	0	(6,4)	3574	(4,1)	413				
(9,3)	0	(6,5)	1895	(4,2)	17				
(10,1)	5	(7,1)	1908	(4,3)	0				
(10,2)	0	(7,2)	2322	(5,1)	595				
(11,1)	0	(7,3)	612	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$					
(12,1)	11	(8,1)	4926	(1,1)	44				
(12,2)	0	(8,2)	3970	(1,2)	2				

Tabla 5.1: Número total de modelos tipo SM que encontré al explorar las 138 geometrías de orbifolios con grupo de punto \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ clasificados en [8]. Encontré modelos en 103 geometrías. El orbifolio es denotado por su grupo de punto, las etiquetas (i, j) indican la retícula del toro y el elemento rototraslacional, de acuerdo a [8]. En las columnas marcadas por ‘Total’, se presenta el número de modelos.

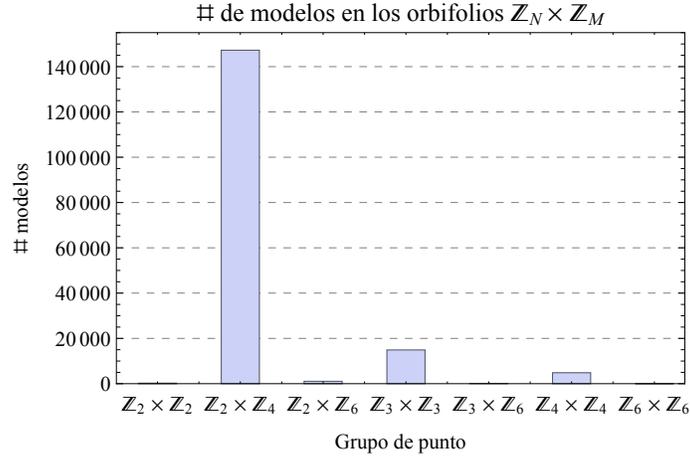


Figura 5.2: Diagrama de barras para el número total de modelos tipo SM que obtuve en los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. La altura de una columna corresponde al total de los modelos de todas las geometrías asociadas al grupo de punto etiquetado. Por ejemplo, considerando las 15 geometrías con grupo de punto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, encontré un total de 14,891 modelos. El orbifolio $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ aporta el 87.43 % del total de modelos.

de Wilson de los modelos asociados a tales vacíos. En estos números de vacíos no están todavía distinguidos cuántos vacíos son de unificación total. La selección de tales vacíos y el análisis de acoplamiento de $U(1)'$ se presenta en la siguiente subsección para los orbifolios \mathbb{Z}_6 , \mathbb{Z}_8 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

5.3. Análisis de acoplamientos $U(1)'$

Motivado por el trabajo de $U(1)'$ realizado para el caso con SUSY que se presentó en el capítulo 4, ahora me intereso en realizar un análisis similar para los acoplamientos de $U(1)'$ en vacíos con unificación total, para el caso de la cuerda sin SUSY. El interés es conocer las predicciones para $g_4(2 \text{ TeV})$ a partir de estos vacíos sin SUSY y comparar con los resultados que se presentaron en el capítulo 4 para el caso de la cuerda con SUSY para vacíos con unificación total y con $\Lambda_{SUSY} = 10^{17}$ GeV. Para este análisis consideré orbifolios con grupo de punto \mathbb{Z}_8 ya que es el orbifolio (del tipo \mathbb{Z}_N) donde se encontraron más modelos tipo SM, además fue el que se analizó en el caso con SUSY del capítulo 4. Sin embargo, con la intención de explorar otros orbifolios consideré orbifolios con grupo de punto \mathbb{Z}_6 , ya que fue el segundo orbifolio (del tipo \mathbb{Z}_N) que dio más modelos tipo SM, y orbifolios con grupo de punto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ como un caso representativo de los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$; además, este orbifolio presentó un número moderadamente grande (14,891) de modelos tipo SM.

La metodología es la misma que empleamos en el capítulo 4 por lo que pasaré a mostrar los

Orbifolio	# modelos tipo SM	# vacíos efectivos	Orbifolio	# modelos tipo SM	# vacíos efectivos
\mathbb{Z}_3	155	1,264	\mathbb{Z}_7	0	0
\mathbb{Z}_4	30	287	\mathbb{Z}_8	431	3,360
\mathbb{Z}_6	324	2,056	\mathbb{Z}_{12}	84	667

Tabla 5.2: Número de modelos tipo SM y vacíos efectivos en los orbifolios \mathbb{Z}_N . En la segunda y quinta columna se muestra el número total de modelos, donde se ha tomado en cuenta a los modelos en todas las geometrías del orbifolio con un mismo grupo de punto. Por ejemplo, de las seis geometrías del orbifolio \mathbb{Z}_6 tenemos 324 modelos (ver tabla 5.1, últimas dos columnas). En la tercera y sexta columna se presenta el número total de vacíos efectivos con propiedades tipo SM y grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \mathcal{G}_{SM} \times U(1)'$ obtenidos en cada caso.

resultados en la siguiente subsección, enfocándome solamente en los vacíos con unificación total. Este análisis se puede generalizar fácilmente para otras geometrías de orbifolios donde se obtuvieron modelos tipo SM.

5.3.1. Resultados para vacíos unificados y sin SUSY

En los 431 (324) modelos tipo SM que se obtuvieron en todas las geometrías del orbifolio \mathbb{Z}_8 se tiene un total de 3,360 (2,056) vacíos efectivos de los cuales solo 98 (35) vacíos presentan unificación total, es decir solo el 3% (1.7%) del total de vacíos. En el orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ se tienen 14,891 modelos tipo SM con 109,618 vacíos donde solamente 81 presentan unificación total, es decir, solo el 0.073% del total de vacíos, los cuales fueron encontrados en 3 de las 15 geometrías de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, estas son (1,1), (4,1) y (5,1).

En la figura 5.3 se presentan los resultados en gráficas de frecuencia para $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}))$ en los paneles izquierdos, y $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ en los paneles derechos. Las dos gráficas superiores son para todas las geometrías del orbifolio \mathbb{Z}_8 donde encontré vacíos con unificación total. Las dos gráficas del centro y las inferiores corresponden, de manera similar, a \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Enseguida describo los resultados que se obtienen de los vacíos unificados en cada uno de estos tres orbifolios, y después presento observaciones generales al comparar con el caso de los vacíos del orbifolio \mathbb{Z}_8 de la cuerda con SUSY al considerar $\Lambda_{SUSY} = 10^{17} \text{ GeV}$ que se presentó en el capítulo 4.

Para el caso del orbifolio \mathbb{Z}_8 se obtiene que el par de valores más frecuente para $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}))$ es $(2.84 \times 10^{10} \text{ GeV}, 53.90)$ y para $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ es $(1.6 \times 10^{11} \text{ GeV}, 28.72)$, lo cual está representado por la burbuja roja en las dos gráficas superiores de la figura 5.3. Tenemos que el acoplamiento de $U(1)'$, $g_4(2 \text{ TeV})$, toma valores en el intervalo de 0.435 a 0.551, donde 0.48 es su valor más frecuente. Para el acoplamiento unificado, α_{GUT} , se obtiene que 0.03 es su valor más común. La escala de unificación, M_{GUT} , toma valores que van de $2.84 \times 10^{10} \text{ GeV}$ a $2.78 \times 10^{14} \text{ GeV}$. El valor promedio

para $g_4(2 \text{ TeV})$ es 0.49 y para α_{GUT} es 0.03.

Los vacíos unificados del orbifolio \mathbb{Z}_6 proporcionan que $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.39, 0.61]$ con un valor promedio de 0.47. En este caso se tienen cinco valores más comunes para $g_4(2 \text{ TeV})$, los cuales son 0.46, 0.47, 0.49, 0.51 y 0.52, lo cual se puede apreciar en las burbujas de color rojo para la gráfica central izquierda de la figura 5.3. El par de valores más frecuente para $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ es $(6.44 \times 10^{10} \text{ GeV}, 19.67)$. La escala de unificación $M_{GUT} \in [6.5 \times 10^{10} \text{ GeV}, 2.34 \times 10^{16}]$ donde se aprecia un vacío aislado en $M_{GUT} \approx 10^{16} \text{ GeV}$, el cual se podría ignorar dando un valor superior para M_{GUT} en el orden de 10^{14} GeV . El valor más común para α_{GUT} es 0.05 y su valor promedio es 0.047.

En el orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ encuentro que $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.36, 0.54]$ con un valor más común de 0.5 y un valor promedio de 0.46. Además $M_{GUT} \in [1.6 \times 10^{11} \text{ GeV}, 4.40 \times 10^{14} \text{ GeV}]$ donde he ignorado un vacío aislado en $M_{GUT} = 1.2 \times 10^{10}$ como valor inferior, el cual se aprecia en la parte izquierda de las dos gráficas inferiores de la figura 5.3 como una burbuja de color morado. El orden del valor más común y del promedio para M_{GUT} es 10^{13} GeV . El par de valores más común para $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ es $(4.78 \times 10^{13} \text{ GeV}, 30.5081)$ el cual es compartido por ocho vacíos, como se muestra por la burbuja roja en la gráfica inferior derecha de la figura 5.3. Para $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}))$ el par de valores más común es $(4.78 \times 10^{13} \text{ GeV}, 49.31)$. El valor promedio y más común para α_{GUT} es 0.03.

Observaciones generales

Al comparar estos resultados con los obtenidos en los vacíos con unificación total de la cuerda con SUSY se encuentra que los valores encontrados para $g_4(2 \text{ TeV})$, α_{GUT} y M_{GUT} están numéricamente más cercanos al caso donde $\Lambda_{SUSY} = 10^{17} \text{ GeV}$, i.e. también cuando $\Lambda_{SUSY} = 10^{12} \text{ GeV}$ (y no cuando $\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$) como se muestra en las siguientes observaciones.

- El valor más común para $g_4(2 \text{ TeV})$ es aproximadamente 0.5 en todos estos casos. El valor promedio de $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.49$ es compartido por los orbifolios \mathbb{Z}_8 de la cuerda con y sin SUSY mientras que los vacíos de los orbifolios \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ dan 0.47 y 0.46, respectivamente.
- Se infiere que el valor promedio para α_{GUT} es aproximadamente 0.03 en todos estos casos, excepto por el valor 0.04 obtenido en los vacíos del orbifolio \mathbb{Z}_6 , que es donde un menor número de vacíos unificados se obtuvieron, 35, comparados con los 98 y 81 vacíos de \mathbb{Z}_8 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, respectivamente.
- El intervalo de valores para la escala de unificación M_{GUT} está acotado predominantemente en el orden de 10^{10} GeV a 10^{14} GeV por los tres orbifolios explorados aquí.
- El valor más común para M_{GUT} es del orden de 10^{11} GeV (seguido por 10^{12} GeV) para los vacíos del orbifolio \mathbb{Z}_8 de la cuerda con y sin SUSY. Los vacíos de los orbifolios \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ dan M_{GUT} del orden 10^{13} GeV como el valor más frecuente. En el caso con SUSY, y tomando

$\Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$, se tuvo que el valor más común y el promedio para M_{GUT} son del orden de 10^{16} GeV .

- El intervalo de valores $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.4, 0.55]$ está en acuerdo para los vacíos del orbifoldio \mathbb{Z}_8 de la cuerda con y sin SUSY. Este intervalo es ligeramente modificado en los vacíos de los orbifoldios \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, por ejemplo, a $[0.36, 0.54]$ para $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

A diferencia de los vacíos con SUSY del orbifoldio \mathbb{Z}_8 , donde se encontró que la combinación más frecuente de valores para los coeficientes b_i corresponden a los del espectro natural del MSSM, i.e. $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (33/5, 1, -3, 0)$, se tiene que en este caso sin SUSY no se encontraron vacíos con el espectro natural del SM, es decir, vacíos con $(41/10, -19/6, -7, 0)$. Esto para la búsqueda en los tres orbifoldios considerados aquí ($\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8$ y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$). Los resultados numéricos para $g_4(2 \text{ TeV})$, α_{GUT} y M_{GUT} (intervalo de valores, valor más frecuente y promedio) se presentan en el apéndice B (sección B.4, tabla B.5).

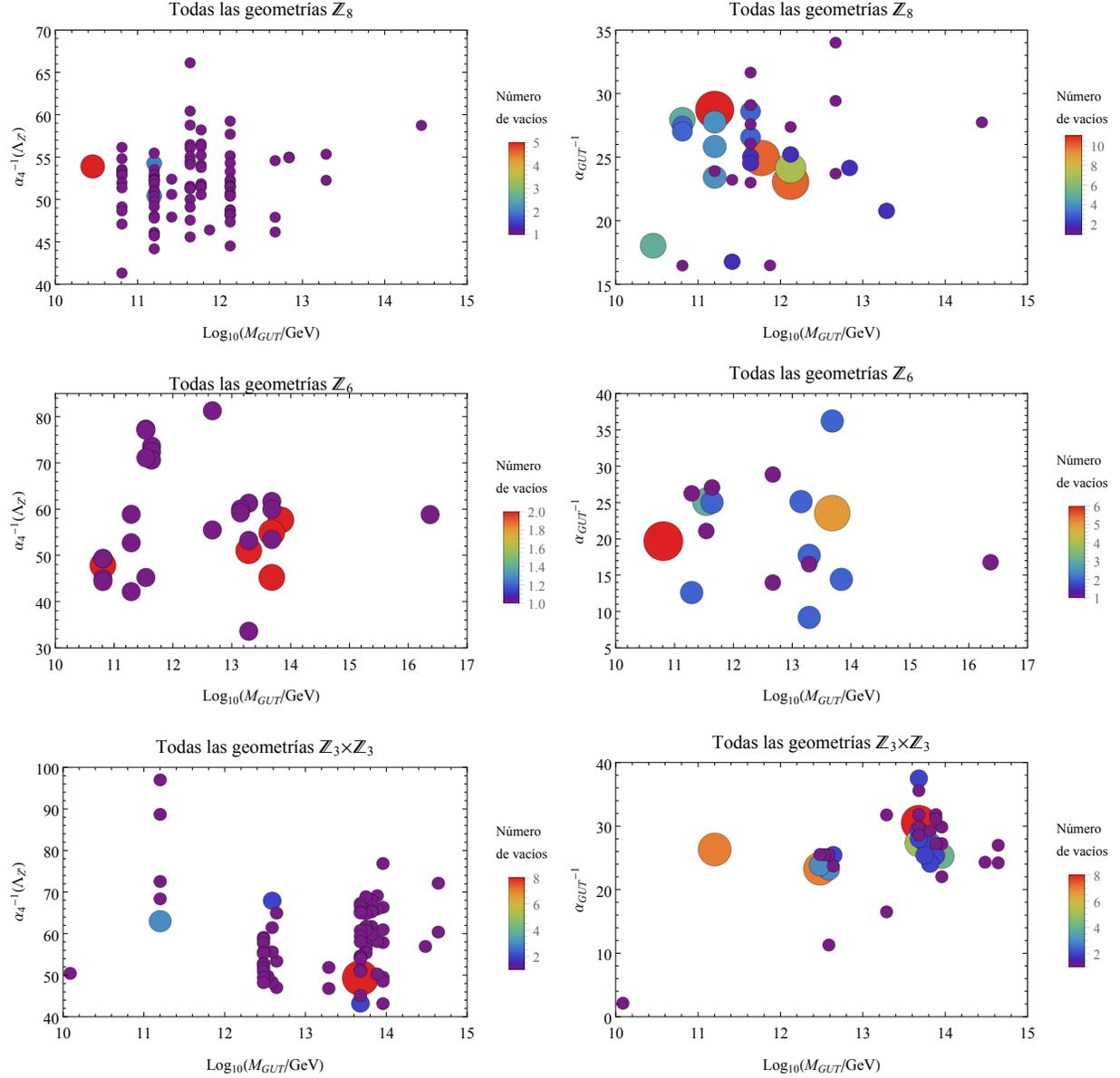


Figura 5.3: Gráficas de frecuencia para $(M_{GUT}, \alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}))$ (paneles izquierdos) y $(M_{GUT}, \alpha_{GUT}^{-1})$ (paneles derechos) que resultan de los vacíos tipo SM con unificación total encontrados en todas las geometrías de los orbifolds \mathbb{Z}_8 , \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ donde se encontraron modelos tipo SM al compactificar la cuerda heterótica sin SUSY y con grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$.

5.3.2. Detalles de un vacío con un campo de Higgs

En el orbifoldio $\mathbb{Z}_8\text{-II}(1,1)$ se tiene un modelo tipo SM que presenta un vacío efectivo donde la estructura de generaciones es de 3 generaciones idénticas, salvo por el doblete de leptones ℓ_i , $i = 1, 2, 3$. Este vacío presenta, además, un campo de Higgs. El vector de desplazamiento y las líneas de Wilson (LW)¹ que definen a este modelo están dados por

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{16}(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5,)(-11, -9, -1, -1, 1, 1, 1, 7), \\ W_1 &= \frac{1}{4}(19, -7, -7, -1, 1, 3, 19, 21)(-11, 21, -11, 21, -11, -7, 1, 13), \\ W_5 &= \frac{1}{2}(1, -5, 5, -5, 4, 2, -4, 6)(5, -6, -5, 5, 8, 12, 6, 3), \quad W_6 = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

El grupo de norma en $D = 4$ es

$$\mathcal{G}_{4D} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{SU}(3) \times [\text{U}(1)']^{10}, \quad (5.4)$$

donde una $\text{U}(1)'$ es (pseudo-)anómala. Elegimos un vacío donde los VEVs de algunos singuletes del SM inducen el rompimiento $\mathcal{G}_{4D} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{eff}}$, tal que

$$\mathcal{G}_{\text{eff}} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{U}(1)'. \quad (5.5)$$

La $\text{U}(1)'$ es no anómala y corresponde a una de las 9 simetrías $\text{U}(1)'$ no anómalas en (5.4). Los generadores de $\text{U}(1)_Y$, t_y (correctamente normalizada), y de $\text{U}(1)'$, t , son

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{1}{2}(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)(0, 0, 1, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0), \\ t &= \frac{1}{2\sqrt{6}}(1, -1, -1, 3, 0, 0, 0, 0)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

El espectro de este vacío efectivo, después del desacoplamiento de los exóticos vectoriales con respecto a \mathcal{G}_{eff} , se presenta en la tabla 5.3. Este vacío es muy cercano al SM. El espectro contiene los fermiones del SM, un bosón de Higgs, unos cuantos fermiones y escalares exóticos, además de algunos singuletes bajo el SM, los cuales son escalares y fermiones. Los N_i pueden ser considerados neutrinos derechos. s_i podrían jugar el papel de materia oscura o inflatones. En la figura 5.4 se muestra el corrimiento del inverso de las constantes de acoplamiento de los grupos de norma en \mathcal{G}_{eff} para este vacío. Los valores para los coeficientes de la función beta son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (67/10, -5/6, -13/2, 85/24)$. La escala de unificación es $M_{GUT} = 4.67 \times 10^{12}$ GeV. El acoplamiento unificado tiene el valor de $\alpha_{GUT} = 0.029$, y el acoplamiento de $\text{U}(1)'$ en la escala $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV es $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.52$ o $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) = 46.16$.

¹En la geometría del orbifoldio $\mathbb{Z}_8\text{-II}(1,1)$ se tienen 3 LW independientes: W_1 , W_5 y W_6 , ya que $W_1 \approx W_2 \approx W_3 \approx W_4$, donde \approx significa que son equivalentes. Todas las LW son de orden 2.

#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep escalar	Etiqueta
2	(1, 2) _(-1/2, 0)	$\ell_{1,2}$	2	(1, 2) _(0, -3/4\sqrt{6})	η_i	1	(1, 2) _(-1/2, 0)	ϕ
1	(1, 2) _(-1/2, 3/2\sqrt{6})	ℓ_3	2	(1, 2) _(0, 0)	$\tilde{\eta}_i$	2	(3, 1) _(1/6, 0)	α_i
3	(1, 1) _(1, 0)	\bar{e}	8	(1, 1) _(-1/2, 0)	ζ_i	1	(\bar{3}, 1) _(1/3, 0)	β_i
3	(3, 2) _(1/6, 0)	q	6	(1, 1) _(1/2, -3/4\sqrt{6})	κ_i	2	(1, 1) _(1/2, 3/4\sqrt{6})	γ_i
3	(\bar{3}, 1) _(-2/3, 0)	\bar{u}	2	(1, 1) _(1/2, 3/4\sqrt{6})	δ_i	2	(1, 1) _(-1/2, 0)	$\tilde{\gamma}_i$
3	(\bar{3}, 1) _(1/3, 0)	\bar{d}	8	(1, 1) _(0, 3/4\sqrt{6})	N_i^a	6	(1, 1) _(1/2, 1/4\sqrt{6})	τ_i
			2	(1, 1) _(0, -3/2\sqrt{6})	N_i^b	6	(1, 1) _(-1/2, 1/4\sqrt{6})	$\bar{\tau}_i$
						2	(1, 1) _(1/2, -3/4\sqrt{6})	ϵ_i
						2	(1, 2) _(0, -3/4\sqrt{6})	ξ_i
						4	(1, 2) _(0, 0)	ι_i
						18	(1, 1) _(0, 1/2\sqrt{6})	s_1
						4	(1, 1) _(0, -3/2\sqrt{6})	s_2
						2	(1, 1) _(0, -3/4\sqrt{6})	s_3
						6	(1, 1) _(0, 1/4\sqrt{6})	s_4
						3	(1, 1) _(0, -1/\sqrt{6})	s_5

Tabla 5.3: Espectro sin masa para un vacío con unificación total del orbifoldio \mathbb{Z}_8 -II (1, 1) con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{U}(1)'$. Representaciones con respecto a $\text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L$ están dadas en negritas, la hipercarga y la carga $U(1)'$ están indicadas como subíndices. El marco de la izquierda corresponde a los fermiones del SM, el marco del centro a los fermiones exóticos, y el marco en la derecha muestra los escalares incluyendo exóticos y el campo de Higgs.

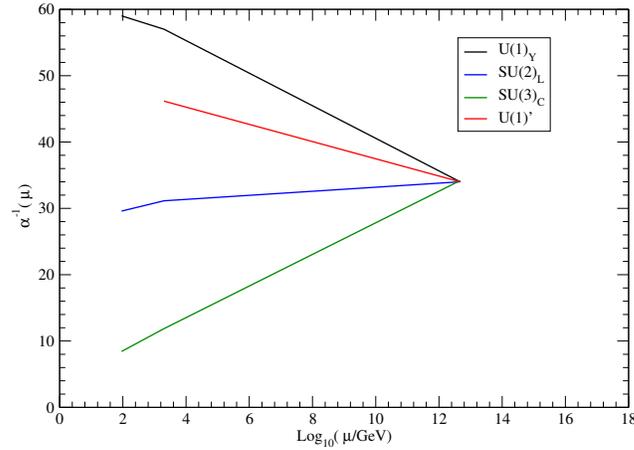


Figura 5.4: Corrimiento del inverso de las constantes de acoplamiento en un vacío con unificación total del orbifoldio \mathbb{Z}_8 -II (1, 1).

5.3.3. Detalles de un vacío con multi-Higgses

Un segundo ejemplo de un vacío con unificación total y con 5 campos de Higgs se presenta en un modelo, en el orbifoldo \mathbb{Z}_8 -II (2, 1), definido por el vector de desplazamiento y las LW² siguientes:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{16}(-11, -9, -1, -1, 1, 1, 1, 7)(-11, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 13), \\ W_1 &= \frac{1}{8}(-11, -1, -11, -7, -9, -5, 3, 1)(-11, -1, 1, -9, 1, 3, 9, -1), \quad W_6 = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

El grupo de norma en $D = 4$ es

$$\mathcal{G}_{4D} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times [\text{U}(1)']^9, \quad (5.8)$$

donde una $\text{U}(1)'$ es (pseudo-)anómala. La estructura en (5.8) motiva la pregunta de si este sea un mirror model $SM_1 \times SM_2$, lo cual podría ser relevante. Para saberlo, se debe explorar el espectro respectivo. Para nuestro interés en simetrías $\text{U}(1)'$ elegimos un vacío donde los VEVs de algunos singuletes del SM inducen el rompimiento $\mathcal{G}_{4D} \rightarrow \mathcal{G}_{\text{eff}}$, tal que

$$\mathcal{G}_{\text{eff}} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{U}(1)'. \quad (5.9)$$

La $\text{U}(1)'$ es no anómala y corresponde a una de las 8 simetrías $\text{U}(1)'$ no anómalas en (5.8). En este vacío efectivo los generadores de $\text{U}(1)_Y$, t_y (correctamente normalizada), y de $\text{U}(1)'$, t , son

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{1}{3}(0, 0, -1, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1, 1, 0)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ t &= \frac{1}{\sqrt{94}\sqrt{2}}(-3, -9, 0, 0, 0, 0, 0, 2)(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

El espectro de este vacío efectivo, después del desacoplamiento de los exóticos vectoriales con respecto a \mathcal{G}_{eff} , se presenta en la tabla 5.4. El espectro contiene los fermiones del SM, cinco bosones de Higgs, fermiones y escalares exóticos, además de algunos singuletes bajo el SM, los cuales son escalares y fermiones. N_i pueden ser considerados neutrinos derechos. s_i pueden jugar el papel de materia oscura o inflatones. Este vacío tiene muchos más exóticos que el vacío de la subsección anterior, como puede verse al comparar las tablas 5.4 y 5.3. Se observa también que la estructura de generaciones es más rica que en el caso del espectro del vacío de la subsección anterior, en especial para el sector de quarks up observo una estructura 2+1, aunque para las otras partículas, por ejemplo los quarks down, esa estructura se pierde. Se esperan efectos interesantes en las matrices CKM y PMNS. En la figura 5.5 se muestra el corrimiento del inverso de las constantes de acoplamiento de los grupos de norma en \mathcal{G}_{eff} para este vacío. Los valores para los coeficientes de la función beta son $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (55/6, 7/6, -29/6, 4081/564)$. La escala de unificación es $M_{GUT} = 1.328 \times 10^{12}$ GeV. El acoplamiento unificado tiene el valor de $\alpha_{GUT} = 0.036$, y el acoplamiento de $\text{U}(1)'$ en la escala $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV es $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.49$ o $\alpha_4^{-1}(2 \text{ TeV}) = 50.76$.

²En la geometría del orbifoldo \mathbb{Z}_8 -II (2, 1) se tienen 2 LW independientes: W_1 y W_6 , ya que $W_1 \approx W_2 \approx W_3 \approx W_4 \approx W_5$, donde \approx significa que son equivalentes. W_6 es de orden 2 y W_1 es de orden 4.

#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep fermiónica	Etiqueta	#	Irrep escalar	Etiqueta
3	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1/2, 0)}$	ℓ	1	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1/2, -4/\sqrt{188})}$	x_i	1	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(1/2, 2/\sqrt{188})}$	$\bar{\phi}_i$
2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1, -1/\sqrt{188})}$	$\bar{e}_{1,2}$	1	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1/2, 1/\sqrt{188})}$	\bar{x}_i	1	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1/2, 9/\sqrt{188})}$	ϕ_i
1	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1, -5/\sqrt{188})}$	\bar{e}_3	2	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-1/6, -1/2\sqrt{188})}$	$\bar{\sigma}_i$	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1/2, 2/\sqrt{188})}$	ϕ_i
2	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{(1/6, -1/\sqrt{188})}$	$q_{1,2}$	2	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/6, -7/2\sqrt{188})}$	σ_i	1	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(-1/2, -3/\sqrt{188})}$	ϕ_i
1	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{(1/6, 7/\sqrt{188})}$	q_3	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(0, -5/2\sqrt{188})}$	η_i	1	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-1/3, 2/\sqrt{188})}$	$\bar{\alpha}_i$
2	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-2/3, -1/\sqrt{188})}$	$\bar{u}_{1,2}$	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(0, -7/2\sqrt{188})}$	$\bar{\eta}_i$	2	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/3, 2/\sqrt{188})}$	α_i
1	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(-2/3, -5/\sqrt{188})}$	\bar{u}_3	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, 9/2\sqrt{188})}$	ζ_i	2	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/6, -11/2\sqrt{188})}$	β_i
1	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/3, 4/\sqrt{188})}$	\bar{d}_1	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 9/2\sqrt{188})}$	$\bar{\zeta}_i$	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, -5/2\sqrt{188})}$	α_i
1	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/3, 1/\sqrt{188})}$	\bar{d}_2	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, 1/2\sqrt{188})}$	κ_i	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 3/2\sqrt{188})}$	$\bar{\alpha}_i$
1	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{(1/3, 0)}$	\bar{d}_3	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 3/2\sqrt{188})}$	$\bar{\kappa}_i$	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, 9/2\sqrt{188})}$	τ_i
			4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, -1/2\sqrt{188})}$	δ_i	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 13/2\sqrt{188})}$	$\bar{\tau}_i$
			4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 11/2\sqrt{188})}$	$\bar{\delta}_i$	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, -7/2\sqrt{188})}$	ϵ_i
			4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, 5/2\sqrt{188})}$	ν_i	8	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, -1/2\sqrt{188})}$	\bar{e}_i
			2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, 5/2\sqrt{188})}$	χ_i	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(-1/2, -5/2\sqrt{188})}$	ϑ_i
			2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(1/2, 3/2\sqrt{188})}$	ϱ_i	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(0, -5/2\sqrt{188})}$	ξ_i
			2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -4/\sqrt{188})}$	N_i^a	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(0, 3/2\sqrt{188})}$	$\bar{\xi}_i$
			1	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -9/\sqrt{188})}$	N_i^b	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{(0, -1/2\sqrt{188})}$	ι_i
			3	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 3/\sqrt{188})}$	N_i^c	4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -7/\sqrt{188})}$	s_1
			2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -1/\sqrt{188})}$	N_i^d	3	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 1/\sqrt{188})}$	s_2
			3	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 5/\sqrt{188})}$	N_i^e	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -5/\sqrt{188})}$	s_3
			4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 2/\sqrt{188})}$	N_i^f	5	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 4/\sqrt{188})}$	s_4
			2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -8/\sqrt{188})}$	N_i^g	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 6/\sqrt{188})}$	s_5
			4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -6/\sqrt{188})}$	N_i^h	2	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -8/\sqrt{188})}$	s_6
						4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, 2/\sqrt{188})}$	s_7
						4	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{(0, -3/\sqrt{188})}$	s_7

Tabla 5.4: Espectro sin masa para un vacío con unificación total del orbifoldo \mathbb{Z}_8 -II (2, 1) con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = \text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \times \text{U}(1)'$. Representaciones con respecto a $\text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L$ están dadas en negritas, la hipercarga y la carga $\text{U}(1)'$ están indicadas como subíndices. El marco de la izquierda corresponde a los fermiones del SM, el marco del centro a los fermiones exóticos, y el marco en la derecha muestra los escalares incluyendo exóticos y los campos de Higgs.

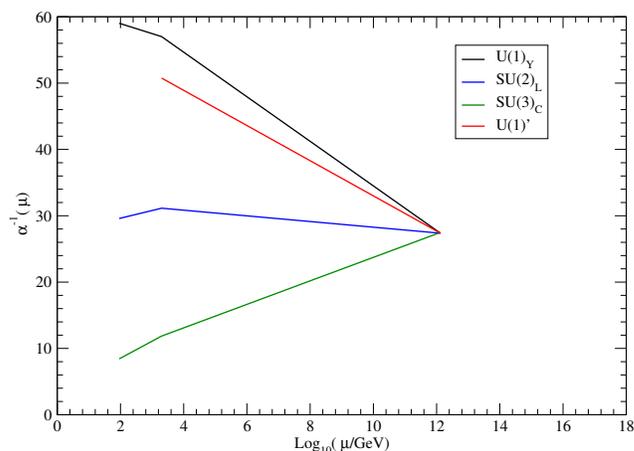


Figura 5.5: Corrimiento del inverso de las constantes de acoplamiento en un vacío con unificación total del orbifoldio \mathbb{Z}_8 -II (2, 1).

5.4. Planes

Con lo expuesto en las secciones 5.1, 5.2 y 5.3 notamos que un patrón similar de $U(1)'$, como en el caso de los modelos con SUSY, se presenta también en estos escenarios. Con base en esto, y con los resultados preliminares sobre los modelos y vacíos efectivos no supersimétricos, planeo extender el estudio sobre los acoplamientos a bajas energías de las simetrías $U(1)'$ presentes en todos los demás modelos prometedores sin SUSY. Otros estudios posibles: implicaciones de $U(1)'$ o portales de Higgs en materia oscura, fenomenología de sabor, estudios estadísticos de vacíos de cuerdas, donde incluso *machine learning* puede ayudar [23]. ¡Sin SUSY, la fenomenología es más directa!

Capítulo 6

Conclusiones

El trabajo presentado en esta tesis surge por el interés de estudiar las compactificaciones de la cuerda heterótica en orbifolios toroidales, y explorar sus implicaciones fenomenológicas en la física de partículas. Como primera actividad, en el capítulo 1, se ha realizado un estudio de la cuerda heterótica supersimétrica con grupo de norma $E_8 \times E_8$, así como del formalismo de compactificación en orbifolios toroidales abelianos. En el capítulo 2, las actividades principales fueron la construcción de la cuerda heterótica sin supersimetría con grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$, además de su compactificación en el orbifolio \mathbb{Z}_3 , obteniendo el espectro sin masa. En esta parte, las retículas de pesos en la cuerda $E_8 \times E_8$, junto con el formalismo aprendido de los orbifolios, tomaron un papel principal en el desarrollo de estas actividades.

Respecto al trabajo en simetrías de sabor, presentado en el capítulo 3, se aprendieron las herramientas teóricas para determinar las simetrías discretas de sabor a partir de la geometría de los orbifolios. Una parte principal para este proyecto fue el desarrollo de una búsqueda de modelos prometedores fenomenológicamente a partir de las compactificaciones de la cuerda heterótica supersimétrica $E_8 \times E_8$ en 52 orbifolios toroidales abelianos usando el `orbifolder`. Para los orbifolios \mathbb{Z}_N encontramos un total de 6,563 modelos prometedores donde el mayor número los obtuvimos en los orbifolios \mathbb{Z}_8 con 3,431 modelos. Para los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ obtuvimos un total de 118,379 modelos, tomando en cuenta los 3,696 modelos del orbifolio $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$, donde el mayor número de modelos se obtuvo en los orbifolios $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ con 55,058 modelos, solo seguidos por los 48,754 modelos del orbifolio $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$. Esta búsqueda de modelos prometedores es la más extensa realizada hasta la fecha. Para todos los 124,942 modelos se realizó una clasificación de acuerdo al número de líneas de Wilson (LW) que definen a estos modelos, lo cual es importante porque las simetrías de sabor pueden ser rotas por la presencia de LW a uno de los subgrupos del grupo original del caso sin LW. Las definiciones de estos modelos (vectores de desplazamiento y LW) están disponibles en nuestra página web [24], donde estos modelos están clasificados de acuerdo a su grupo de punto, número de LW y simetría de sabor.

En el capítulo 4 nos enfocamos en estudiar el corrimiento de la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ en vacíos efectivos con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)'$. Estos vacíos tienen un espectro supersimétrico y provienen de los modelos tipo MSSM que obtuvimos de las compactificaciones de la cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ en los orbifolios \mathbb{Z}_8 -I y \mathbb{Z}_8 -II como parte de la búsqueda de modelos prometedores en el proyecto de simetrías de sabor. Nos restringimos a vacíos que presentan unificación en las cuatro constantes de acoplamiento de los grupos de norma en \mathcal{G}_{eff} , y donde los valores para los acoplamientos del SM tienen los valores conocidos a bajas energías. Usando las ecuaciones del grupo de renormalización a un lazo (RGE), estudiamos la evolución de estos acoplamientos con el objetivo de obtener valores para el acoplamiento de la $U(1)'$ a bajas energías, en $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$. Consideramos, además, tres escalas de rompimiento de SUSY, dadas por $\Lambda_{\text{SUSY}} = 2 \text{ TeV}$ (baja), 10^{12} GeV (intermedia) y 10^{17} GeV (alta). Nuestros resultados indican que la constante de acoplamiento de la $U(1)'$ está restringida en el intervalo de valores $0.46 \leq g_4(2 \text{ TeV}) \leq 0.71$ para SUSY a bajas energías, y se reduce a $0.4 \leq g_4(2 \text{ TeV}) \leq 0.57$ en los otros casos. Al considerar el valor más frecuente obtenemos que $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.6$ para SUSY a bajas energías y $g_4(2 \text{ TeV}) \approx 0.5$ para SUSY intermedia y alta. Observamos también que mientras la escala de rompimiento de SUSY aumenta, no solo el valor de $g_4(2 \text{ TeV})$ disminuye, sino también la escala de unificación M_{GUT} , siendo esto más notorio cuando el rompimiento de SUSY pasa de una escala baja a una intermedia o alta, ya que entre estas dos últimas tales valores no cambian demasiado, según nuestros resultados. Por ejemplo, para SUSY a bajas energías el valor más común para M_{GUT} es aproximadamente 10^{16} GeV , mientras que en los otros casos $M_{GUT} \approx 10^{12} \text{ GeV}$. Por otra parte, en un vacío efectivo particular y con $\Lambda_{\text{SUSY}} = 10^{12} \text{ GeV}$, se estudió la utilidad de la $U(1)'$ para resolver el problema de la metaestabilidad del vacío de Higgs. Usando el código SARAH se calcularon las RGE para los acoplamientos relevantes y encontramos que el acoplamiento cuártico del Higgs permanece estable y perturbativo, aún por escalas arriba de $\Lambda_{\text{SUSY}} = 10^{12} \text{ GeV}$.

En el capítulo 5, correspondiente a la cuerda heterótica sin SUSY, he realizado una búsqueda de modelos tipo SM a partir de las compactificaciones de la cuerda heterótica $SO(16) \times SO(16)$ en los orbifolios toroidales abelianos clasificados en [8]. Para esta tarea he analizado el `orbifolder` del caso con SUSY para adaptarlo al caso sin SUSY, usando en parte los conocimientos aprendidos del capítulo 2 sobre la construcción de la cuerda $SO(16) \times SO(16)$, para ayudar en el desarrollo de estas búsquedas de modelos tipo SM. El resultado es que he encontrado 168,429 modelos tipo SM en los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$, y 1,024 modelos en los orbifolios \mathbb{Z}_N , los cuales están distribuidos en las diferentes geometrías de estos orbifolios como se muestra en la tabla 5.1. Las geometrías $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ (2,4), $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (7,1) y \mathbb{Z}_{12} -II (1,1) aún siguen generando modelos. Pensando en un estudio fenomenológico de las simetrías $U(1)'$ presentes en estos modelos, me propuse encontrar los vacíos efectivos, con grupo de norma $\mathcal{G}_{\text{eff}} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)'$, a partir de los 169,453 modelos obtenidos en los orbifolios \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. Comenzando con los modelos de los orbifolios \mathbb{Z}_N he encontrado 7,634 vacíos efectivos, como se mostró en la tabla 5.2. Además, he encontrado detalles de estos vacíos tales como el espectro sin masa, el vector de desplazamiento, las líneas de Wilson, el generador de $U(1)_Y$ y el generador de $U(1)'$, todo esto para cada uno de estos vacíos. En los números de vacíos reportados anteriormente para los orbifolios \mathbb{Z}_N no están todavía identificados

los vacíos con unificación total. Esta tarea la he realizado para los orbifolios \mathbb{Z}_8 , \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. De los 431 (324) modelos tipo SM que se obtuvieron en todas las geometrías del orbifolio \mathbb{Z}_8 (\mathbb{Z}_6) encuentro 3,360 (2,056) vacíos de los cuales solamente 98 (35) presentaron unificación total, i.e. solo el 3% (1.7%) del total de vacíos. En el orbifolio $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ se tienen 14,891 modelos tipo SM donde encontré un total de vacíos de 109,618 vacíos donde solo 81 presentan unificación total, es decir, el 0.073% del total de vacíos, los cuales fueron encontrados en 3 de las 15 geometrías de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, estas son (1,1), (4,1) y (5,1). He realizado un estudio para el acoplamiento de las $U(1)'$ a bajas energías, en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV, que aparecen en los vacíos con unificación total en estos tres orbifolios. Esto es un trabajo análogo al realizado en el capítulo 4 para los vacíos con SUSY. Los resultados para los valores de $g_4(2 \text{ TeV})$, M_{GUT} y α_{GUT} muestran estar numéricamente aproximados a los resultados del caso con SUSY cuando se consideró $\Lambda_{SUSY} = 10^{17}$ GeV y $\Lambda_{SUSY} = 10^{12}$ GeV, y no para el caso de $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV. Por ejemplo, el intervalo de valores $g_4(2 \text{ TeV}) \in [0.4, 0.55]$ está en acuerdo para los vacíos del orbifolio \mathbb{Z}_8 de la cuerda con y sin SUSY. Este intervalo es ligeramente modificado en los vacíos de los orbifolios \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, por ejemplo, a $[0.36, 0.54]$ para $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. El valor más común para $g_4(2 \text{ TeV})$ es aproximadamente 0.5 en todos estos casos. El valor más común para M_{GUT} es del orden de 10^{11} GeV (seguido por 10^{12} GeV) para los vacíos del orbifolio \mathbb{Z}_8 de la cuerda con y sin SUSY. Los vacíos de los orbifolios \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ dan M_{GUT} del orden 10^{13} GeV como el valor más frecuente. En las subsecciones 5.3.2 y 5.3.3 he presentado detalles tales como el vector de desplazamiento, las LW, el grupo de norma en $D = 4$, el generador de $U(1)'$ y el espectro de los estados sin masa para dos vacíos efectivos con unificación total (uno de \mathbb{Z}_8 -II(1,1) y otro en \mathbb{Z}_8 -II(2,1)) a manera de ejemplo, además de gráficas para el corrimiento de las constantes de acoplamiento en \mathcal{G}_{eff} . En estos dos vacíos se obtuvo que $g_4(2 \text{ TeV}) = 0.52$ y 0.49, respectivamente, además M_{GUT} es del orden de 10^{12} GeV en ambos vacíos. Se remarca que esta es la primera búsqueda extensiva de vacíos de cuerdas sin supersimetría. Además de ser más amplia que la de vacíos supersimétricos, permite el estudio directo de fenomenología de partículas y cosmología. Otros planes de trabajo son estudios sobre implicaciones de $U(1)'$ o portales de Higgs en materia oscura, fenomenología del sabor, estudios estadísticos de vacíos de cuerdas con machine learning. Un tema abierto a considerar en el futuro es el cálculo de acoplamientos (perturbativos y no perturbativos) en escenarios sin SUSY con la intención de verificar la estabilidad de los vacíos ante correcciones y el problema de la constante cosmológica [51].

Apéndice A

Tablas de simetrías

A.1. Simetrías en modelos sin líneas de Wilson

Tabla A.1: Simetrías de sabor para los orbifolios heteróticos abelianos con grupos de punto \mathbb{Z}_N y $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$. En la primera y tercera columna se presenta el grupo de punto así como las etiquetas (i, j) para la retícula del toro y el elemento rototraslacional, respectivamente, de acuerdo a la clasificación de [8]. En la segunda y cuarta columna se presentan las simetrías de sabor correspondientes.

Orbifolio		Simetría de sabor	Orbifolio		Simetría de sabor
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(1,1)	D_4^6/\mathbb{Z}_2^4	(3,4)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(1,2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(3,5)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(1,3)	$(D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$	(3,6)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(1,4)	–	(4,1)		$(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$
	(2,1)	D_4^5/\mathbb{Z}_2^3	(4,2)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(2,2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(4,3)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(2,3)	$(D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2$	(4,4)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(2,4)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(4,5)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(2,5)	$(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$	(5,1)		$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$
	(2,6)	–	(5,2)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(3,1)	$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2$	(6,1)		$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$
	(3,2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(6,2)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(3,3)	$(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$	(6,3)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(3,4)	–	(6,4)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(4,1)	$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2$	(6,5)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(4,2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(7,1)		$(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$
	(5,1)	$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2$	(7,2)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(5,2)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(7,3)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(5,3)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(8,1)		$(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$
	(5,4)	$(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_4$	(8,2)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(5,5)	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(8,3)		$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(6,1)	$(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2$	(9,1)		$(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$

Orbifolio	Simetría de sabor	Orbifolio	Simetría de sabor
	(6,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		(9,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(6,3) D_4		(9,3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(7,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$		(10,1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(7,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		(10,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
	(8,1) $D_4 \times D_4$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_2$
	(9,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$		(1,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(9,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		(2,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_2$
	(9,3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		(2,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(10,1) $D_4 \times D_4$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -II	(1,1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(10,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		(2,1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(11,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$		(3,1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(12,1) $D_4 \times D_4$		(4,1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$
	(12,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	(1,1) $(\Delta(54) \times \Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3$
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^3$		(1,2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(1,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(1,3) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(1,3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(1,4) $(\Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3$
	(1,4) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(2,1) $\Delta(54) \times \Delta(54)$
	(1,5) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(2,2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(1,6) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$		(2,3) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(2,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^3$		(2,4) $(\Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3$
	(2,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(3,1) $\Delta(54) \times \Delta(54)$
	(2,3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(3,2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(2,4) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$		(3,3) $(\Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3$
	(2,5) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(4,1) $\Delta(54) \times \Delta(54)$
	(2,6) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(4,2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(3,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$		(4,3) $(\Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3$
	(3,2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$		(5,1) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
	(3,3) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_3	(1,1) $(\Delta(54) \times \Delta(54) \times \Delta(54))/\mathbb{Z}_3^2$
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	(1,1) $\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6$	\mathbb{Z}_4	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^4$
	(1,2) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$		(2,1) $(S_4 \times S_2 \times S_2) \times (\mathbb{Z}_4^3 \times \mathbb{Z}_2^3)$
	(2,1) $\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6$		(3,1) $(S_4 \times S_4) \times (\mathbb{Z}_4^5 \times \mathbb{Z}_2^2)$
	(2,2) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_6 -I	(1,1) $\Delta(54)$
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^3$		(2,1) $(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3$
	(1,2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_6 -II	(1,1) $\Delta(54) \times [D_4 \times D_4/\mathbb{Z}_2]$
	(1,3) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		(2,1) $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times [D_4^2/\mathbb{Z}_2^2]$
	(1,4) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		(3,1) $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times [D_4^2/\mathbb{Z}_2^2]$
	(2,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2^2$		(4,1) $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times [D_4/\mathbb{Z}_2]$
	(2,2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_7	(1,1) $S_7 \times \mathbb{Z}_7^6$
	(2,3) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_8 -I	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_8)/\mathbb{Z}_2^2$
	(2,4) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		(2,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_8)/\mathbb{Z}_2^2$
	(3,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2^2$		(3,1) $S_4 \times (\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2)$
	(3,2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_8 -II	(1,1) $(D_4 \times D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_8)/\mathbb{Z}_2^3$
	(4,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2^2$		(2,1) $(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_8)/\mathbb{Z}_2^2$
	(4,2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_{12} -I	(1,1) $\Delta(54)$
	(4,3) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		(2,1) $(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_{12})/\mathbb{Z}_3$
	(5,1) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	\mathbb{Z}_{12} -II	(1,1) $(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2$
	(5,2) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$		
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$	(1,1) $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$		

A.2. Simetrías en modelos con líneas de Wilson

Tabla A.2: Simetrías de sabor en los orbifolios \mathbb{Z}_N en seis dimensiones con LW. Las etiquetas del orbifolio corresponden a las etiquetas del grupo de espacio asociado, de acuerdo con la referencia [8]. Para cada grupo de espacio que da una simetría de sabor no abeliana en la ausencia de LW (ver tabla A.1), presentamos todos los rompimientos posibles para LW no nulas. Existen casos en donde la misma geometría del grupo de espacio con el mismo número de LW conducen a diferentes simetrías de sabor; estas simetrías están apiladas en filas diferentes. Debajo de cada simetría de sabor, mostramos el número de modelos heteróticos fenomenológicamente viables obtenidos en nuestra búsqueda exhaustiva de modelos (ver sección 3.3).

Orbifolio	Max. # de LW posible	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas				Total	
		$\ell = 1$	2	3	4		
\mathbb{Z}_3	(1,1)	3	$\Delta(54)^2$ 0	$\Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^2$ 0	\mathbb{Z}_3^4 0	0	
\mathbb{Z}_4	(1,1)	4	$(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	0
	(2,1)	3	$(S_2 \times S_2) \times (\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2)$ 0 $(S_4 \times S_2) \times (\mathbb{Z}_4^3 \times \mathbb{Z}_2^3)$ 0	$S_2 \times (\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2)$ 0 $S_4 \times (\mathbb{Z}_4^3 \times \mathbb{Z}_2^3)$ 0	$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 149	149	
	(3,1)	2	$S_4 \times (\mathbb{Z}_4^4 \times \mathbb{Z}_2)$ 0	\mathbb{Z}_4^3 27			27
\mathbb{Z}_6 -I	(1,1)	1	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 30			30	
	(2,1)	1	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ 30			30	
\mathbb{Z}_6 -II	(1,1)	3	$[(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2] \times \mathbb{Z}_3^2$ 0 $\Delta(54) \times D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3^2$ 337 $\Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^2$ 0	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^2$ 26	363	
	(2,1)	3	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times [(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2]$ 0 $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times D_4$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ 335 $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^2$ 14	349	
	(3,1)	3	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times [(D_4 \times D_4)/\mathbb{Z}_2^2]$ 0 $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times D_4$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ 333 $[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times \mathbb{Z}_2^2$ 2	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2^2$ 18	353	

Orbifolio	Max. # de LW posible	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas				Total
		$\ell = 1$	2	3	4	
	(4,1)	2	$[(\Delta(54) \times \mathbb{Z}_6)/\mathbb{Z}_3] \times \mathbb{Z}_2$ 0 $[D_4/\mathbb{Z}_2] \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ 312	$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ 44		356
\mathbb{Z}_7	(1,1)	1	\mathbb{Z}_7^2 1			1
\mathbb{Z}_8 -I	(1,1)	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_8$ 38	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2^2$ 230		268
	(2,1)	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_8$ 41	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2^2$ 205		246
	(3,1)	1	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_4$ 389			389
\mathbb{Z}_8 -II	(1,1)	3	$(D_4 \times D_4 \times \mathbb{Z}_8)/\mathbb{Z}_2$ 21	$D_4 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2$ 398	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2^3$ 1,604	2,023
	(2,1)	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_8$ 231	$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_2^2$ 274		505
\mathbb{Z}_{12} -I	(1,1)	1	$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ 556			556
	(2,1)	1	$\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_3$ 555			555
\mathbb{Z}_{12} -II	(1,1)	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 84	\mathbb{Z}_2^3 279		363

Tabla A.3: Simetrías de sabor en los orbifolios $\mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_M$ con LW. Las etiquetas del orbifolio corresponden a las etiquetas del grupo de espacio asociado, de acuerdo con la referencia [8]. Para cada grupo de espacio que da una simetría de sabor no abeliana en la ausencia de LW (ver tabla A.1), presentamos todos los rompimientos posibles para LW no nulas. Existen casos en donde la misma geometría del grupo de espacio con el mismo número de LW conducen a diferentes simetrías de sabor; estas simetrías están apiladas en filas diferentes. Debajo de cada simetría de sabor, mostramos el número de modelos fenomenológicamente viables obtenidos en nuestra búsqueda exhaustiva de modelos (ver sección 3.3). Ya que algunas LW no rompen el grupo de sabor, presentamos en la cuarta columna el número máximo de LW que afectan la simetría de sabor. Para $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ también contamos en el total los modelos prometedores que surgen sin LW.

Orbifolio	Max. # de LW posible	Max. # de LW afectando la simetría de sabor	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas						Total	
			$\ell = 1$	2	3	4	5	6		
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	(1,1)	6	6	D_4^5/\mathbb{Z}_2^2 0	D_4^4 0	$D_4^3 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^4$ 52	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^6$ 152	\mathbb{Z}_2^8 1	205
	(1,3)	4	2	D_4^2 0 D_4^3/\mathbb{Z}_2^2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^2 0 D_4^3/\mathbb{Z}_2^2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0			0
	(2,1)	5	5	D_4^4/\mathbb{Z}_2 0	$D_4^3 \times \mathbb{Z}_2$ 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^3$ 14	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^5$ 342	\mathbb{Z}_2^7 13		369
	(2,3)	3	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^2 0 D_4^3/\mathbb{Z}_2^2 0	\mathbb{Z}_2^4 0 $D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^2 0	\mathbb{Z}_2^4 0				0
	(2,5)	3	1	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0				0
	(3,1)	5	5	D_4^3 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^3 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ 40 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^6 8 $D_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ 392	\mathbb{Z}_2^6 4		444
	(3,3)	3	1	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0				0
	(4,1)	4	2	D_4^3	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$			

Orbifolio	Max. # de LW posible	Max. # de LW afectando la simetría de sabor	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas						Total
			$\ell = 1$	2	3	4	5	6	
			0 D_4/\mathbb{Z}_2^2 0	0 D_4^3 0 D_4/\mathbb{Z}_2^2 0	0 D_4^3 0	0 0 0	0		
(5,1)	4	4	D_4^3 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ 40	\mathbb{Z}_2^6 2		42	
(5,4)	2	1	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2$ 0				0	
(6,1)	4	2	D_4^3 0 D_4^2/\mathbb{Z}_2^2 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0 D_4^3 0 D_4^4/\mathbb{Z}_2^2 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 57 D_4^3 0	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 344		401	
(6,3)	2	0	D_4 0	D_4 0				0	
(7,1)	4	3	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^3/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 0 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 55 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 21		76	
(8,1)	4	4	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^4 0 $D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^4 0	\mathbb{Z}_2^4 25		25	
(9,1)	3	2	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 0 D_4^3/\mathbb{Z}_2 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 2 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 0	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 25			27	
(10,1)	3	3	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^4 2 $D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^4 19			21	
(11,1)	3	0	D_4^3/\mathbb{Z}_2 0	D_4^3/\mathbb{Z}_2 0	D_4^3/\mathbb{Z}_2 0			0	

Orbifolio	Max. # de LW posible	Max. # de LW afectando la simetría de sabor	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas						Total	
			$\ell = 1$	2	3	4	5	6		
	(12,1)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 0	\mathbb{Z}_2^4 3					3
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1)	4	4	$(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 26	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 1,463	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 8,637	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^5$ 454			10,580
	(1,6)	2	2	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 21	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 65					86
	(2,1)	4	4	$(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 81	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 1,131	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 4,686	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^5$ 260			6,158
	(2,4)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 47	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 281					328
	(3,1)	3	2	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 27 $(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$ 76	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 1,109 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 2,653	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 18,440				22,305
	(4,1)	3	3	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 33	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 1,133 $D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 442	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 2,911				4,519
	(5,1)	3	2	$D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 18 $(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2^2$ 45	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 45 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 697	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 1,311				2,116
	(6,1)	3	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 18 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 3 $(D_4^3 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 37	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ 511 $D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^2$ 295 $D_4^2 \times \mathbb{Z}_4$ 568	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^4$ 1,814				3,246
	(7,1)	3	3	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 64	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 729 $D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 393	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 1,481				2,667
	(8,1)	2	0	$(D_4^2 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 72	$(D_4^2 \times \mathbb{Z}_4)/\mathbb{Z}_2$ 839					
(9,1)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ 522	$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2^3$ 1,620						2,142

Orbifolio	Max. # de LW posible	Max. # de LW afectando la simetría de sabor	Simetrías de sabor con ℓ LW no nulas						Total	
			$\ell = 1$	2	3	4	5	6		
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ -I	(1,1)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ 116	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_6$ 467					583
	(2,1)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ 78	$\mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_6$ 275					353
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$	(1,1)	3	3	$\Delta(54)^2 \times \mathbb{Z}_3$ 81	$\Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^3$ 987	\mathbb{Z}_3^5 40				1,108
	(1,4)	1	1	\mathbb{Z}_3^3 8						8
	(2,1)	2	2	$\Delta(54) \times \mathbb{Z}_3^2$ 239	\mathbb{Z}_3^4 1,713					1,952
	(3,1)	2	2	\mathbb{Z}_3^3 0	\mathbb{Z}_3^3 6					6
	(4,1)	2	1	\mathbb{Z}_3^4 22 $\Delta(54)^2$ 88	\mathbb{Z}_3^4 105					215
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$	(1,1)	1	1	$\mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_6$ 4,469						4,493
	(2,1)	1	1	$\mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}_6$ 495						540
$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$	(1,1)	3	3	$(D_4^2 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2$ 2,442	$D_4 \times \mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2$ 24,693	$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^3$ 1,509				28,649
	(2,1)	2	1	$D_4 \times \mathbb{Z}_4^2$ 556 $(D_4^2 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2^2$ 2,992	$D_4 \times \mathbb{Z}_4^2$ 6,286					9,853
	(3,1)	2	2	$D_4 \times \mathbb{Z}_4^2$ 1,003	$D_4 \times \mathbb{Z}_4^2$ 4,513					5522
	(4,1)	2	1	$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 423 $(D_4^2 \times \mathbb{Z}_4^2)/\mathbb{Z}_2^2$ 1,204	$\mathbb{Z}_4^2 \times \mathbb{Z}_2^2$ 3,097					4,730

Apéndice B

Detalles en el análisis de vacíos

B.1. Ecuaciones de evolución para los acoplamientos

La forma explícita de las expresiones que usamos para calcular las cantidades requeridas en el proceso presentado debajo de la ecuación (4.7), en la subsección 4.2 del capítulo 4, se presentan enseguida para los tres casos según los valores de Λ_{SUSY} .

- $\Lambda_{Z'} = \Lambda_{SUSY} = 2 \text{ TeV}$.
($M_{GUT} > \Lambda_{SUSY}$)

La forma de la solución general (4.5), de las RGE a un lazo (4.4), permiten obtener las siguientes expresiones

$$\alpha_i^{-1}(M_{GUT}) = \alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{b_i}{2\pi} \ln \left(\frac{M_{GUT}}{\Lambda_{Z'}} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) = \alpha_i^{-1}(M_Z) - \frac{b_i^{\text{SM}}}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda_{Z'}}{M_Z} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.2})$$

Los coeficientes b_i (b_i^{SM}) se calculan por las expresiones (4.6) o (4.7), según corresponda, para el caso con SUSY (sin SUSY).

Usando (B.1) se obtiene M_{GUT} de la intersección de $\alpha_2 = \alpha_1$, y está dado por

$$M_{GUT} = \Lambda_{Z'} e^{2\pi f}, \quad (\text{B.3})$$

donde f es

$$f = \frac{\alpha_2^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \alpha_1^{-1}(\Lambda_{Z'})}{b_2 - b_1}. \quad (\text{B.4})$$

Al imponer $\alpha_4 = \alpha_2 = \alpha_1 = \alpha_{GUT}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha_{GUT}^{-1} &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{b_j}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\Lambda_{Z'}}\right) \\ &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - b_j f, \quad j = 1 \text{ o } 2,\end{aligned}\tag{B.5}$$

donde se ha usado (B.1) y (B.3).

Despejando para $\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'})$ de (B.1) con $i = 4$, y usando (B.5), se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'}) &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{(b_j - b_4)}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\Lambda_{Z'}}\right) \\ &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - (b_j - b_4) f, \quad j = 1 \text{ o } 2,\end{aligned}\tag{B.6}$$

donde nuevamente se ha usado (B.3).

Un análisis similar para los otros dos casos de Λ_{SUSY} conduce a las siguientes expresiones.

- $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$ y $\Lambda_{SUSY} = 10^{12} \text{ GeV}, 10^{17} \text{ GeV}$.
($M_{GUT} > \Lambda_{SUSY}$)

$$\begin{aligned}\alpha_i^{-1}(M_{GUT}) &= \alpha_i^{-1}(\Lambda_{SUSY}) - \frac{b_i}{2\pi} \ln\left(\frac{M_{GUT}}{\Lambda_{SUSY}}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \alpha_i^{-1}(\Lambda_{SUSY}) &= \alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{b'_i}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_{SUSY}}{\Lambda_{Z'}}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ \alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) &= \alpha_i^{-1}(M_Z) - \frac{b_i^{SM}}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_{Z'}}{M_Z}\right), \quad i = 1, 2, 3 \\ M_{GUT} &= \Lambda_{SUSY} \exp[2\pi f] \\ \alpha_{GUT}^{-1} &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{b'_j}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_{SUSY}}{\Lambda_{Z'}}\right) - b_j f, \quad j = 1 \text{ o } 2 \\ \alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'}) &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{(b'_j - b'_4)}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda_{SUSY}}{\Lambda_{Z'}}\right) - (b_j - b_4) f, \quad j = 1 \text{ o } 2 \\ f &= \frac{\alpha_2^{-1}(\Lambda_{SUSY}) - \alpha_1^{-1}(\Lambda_{SUSY})}{b_2 - b_1}.\end{aligned}\tag{B.7}$$

En este caso, los coeficientes b'_i se calculan por las expresiones (4.6) o (4.7), según corresponda, para el caso sin SUSY. Los espectros de nuestros vacíos efectivos pueden dar lugar a que M_{GUT} ocurra por debajo de Λ_{SUSY} intermedia o alta (pero mayor a $\Lambda_{Z'}$). Considerando este caso, se presentan enseguida las ecuaciones de evolución para los acoplamiento.

- $\Lambda_{Z'} = 2 \text{ TeV}$ y $\Lambda_{SUSY} = 10^{12} \text{ GeV}, 10^{17} \text{ GeV}$.
($M_{GUT} < \Lambda_{SUSY}$)

$$\begin{aligned}
\alpha_i^{-1}(M_{GUT}) &= \alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \frac{b'_i}{2\pi} \ln \left(\frac{M_{GUT}}{\Lambda_{Z'}} \right), \quad i = 1, 2, 3, 4 & (B.8) \\
\alpha_i^{-1}(\Lambda_{Z'}) &= \alpha_i^{-1}(M_Z) - \frac{b_i^{SM}}{2\pi} \ln \left(\frac{\Lambda_{Z'}}{M_Z} \right), \quad i = 1, 2, 3 \\
M_{GUT} &= \Lambda_{Z'} \exp[2\pi f] \\
\alpha_{GUT}^{-1} &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - b'_j f, \quad j = 1 \text{ o } 2 \\
\alpha_4^{-1}(\Lambda_{Z'}) &= \alpha_j^{-1}(\Lambda_{Z'}) - (b'_j - b'_4) f, \quad j = 1 \text{ o } 2 \\
f &= \frac{\alpha_2^{-1}(\Lambda_{Z'}) - \alpha_1^{-1}(\Lambda_{Z'})}{b'_2 - b'_1},
\end{aligned}$$

donde los coeficientes b'_i se calculan por las expresiones (4.6) o (4.7), según corresponda, para el caso sin SUSY.

B.2. Tablas para números de vacíos

Presentamos las tablas con los registros del número de vacíos para las consideraciones presentadas en la subsección 4.3.1 para reportar los número de vacíos de la tabla 4.2 del capítulo 4, los cuales corresponden a los renglones etiquetados por c (# de vacíos con espectro natural del MSSM) en la tabla B.1, y los renglones j y k (# de vacíos con unificación parcial y total, respectivamente) en la tabla B.2.

En la tabla B.1 usamos las siguientes etiquetas:

- a : # de modelos
- b : # de vacíos (efectivos)
- c : # de vacíos con $b_4 = 0$ y $b_i, i = 1, 2, 3$, iguales a los del MSSM, i.e. $(33/5, 1, -3, 0) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$
- d : # de vacíos con $b_4 = 0$ y $b_i, i = 1, 2, 3$, diferentes a los del MSSM
- e : # de vacíos con $b_4 = 0$
- f : # de vacíos sin $b_4 = 0$

Etiqueta	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(1, 1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(2, 1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(3, 1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(1, 1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(2, 1)$	Total
a	268	246	389	2,023	505	3,431
b	1,362	1,097	1,989	10,023	2,813	17,284
c	58	116	76	245	111	606
d	8	6	8	179	30	231
e	66	122	84	424	141	837
f	1,296	975	1,905	9,599	2,672	16,447

Tabla B.1: Registro para el número de vacíos respecto al valor nulo de b_4 . Los vacíos con $b_4 = 0$ no fueron considerados en nuestro análisis ya que, en estos casos, el acoplamiento de la Z' con la materia observable está muy suprimido. En particular, los números de vacíos en el renglón etiquetado por la letra 'c' corresponden al número de vacíos con los coeficientes b_i iguales a los del MSSM. Este número de vacíos es reportado en la segunda columna de la tabla 4.2.

En la tabla B.2 usamos las siguientes etiquetas:

- g : # de vacíos con $M_{GUT} > M_{str}$ o $M_{GUT} < \Lambda_{Z'}$
- h : # de vacíos con alguna $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, negativa
- i : # de vacíos con alguna $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$, no perturbativa, $\alpha_i > 1$
- j : # de vacíos dado en f de la tabla B.1 menos g, h, i
- k : # de vacíos con unificación total

Etiqueta	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(1,1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(2,1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-I}(3,1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(1,1)$	$\mathbb{Z}_8\text{-II}(2,1)$	Total
g	205	276	276	2,519	429	3,705
h	321	223	453	406	268	1,671
i	89	55	75	198	46	463
j	681	421	1,101	6,476	1,929	10,608
k	2	0	8	60	7	77
<hr/>						
g	77	35	110	629	105	956
h	0	0	1	0	0	1
i	1	0	2	0	0	3
j	1,218	940	1,792	8,970	2,567	15,487
k	8	2	7	181	71	269
<hr/>						
g	43	17	58	354	41	513
h	0	0	1	0	0	1
i	0	0	2	0	0	2
j	1,253	958	1,844	9,245	2,631	15,931
k	20	3	20	114	51	208

Tabla B.2: Número de vacíos para distintas condiciones indicadas en la primera columna. El número de vacíos en el renglón ‘k’ (‘j’), y en la columna de ‘Total’, son los vacíos de nuestro interés para el caso con unificación total (parcial). La subtabla superior corresponde a $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, la del centro a 10^{12} GeV y la inferior a 10^{17} GeV. En los tres casos $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV.

B.3. Valores estadísticos

Vacíos con unificación parcial

	Promedio	Moda	Frecuencia
M_{GUT}	2.52824×10^{16} GeV	4.9901×10^{11} GeV	853
α_{GUT}	0.0796688	0.0376875	414
α_4, g_4	0.0226619, 0.533646	0.03103, 0.624447	74
M_{GUT}	4.94889×10^{15} GeV	6.81626×10^{11} GeV	569
α_{GUT}	0.0317428	0.0410816	515
α_4, g_4	0.0198768, 0.499779	0.0161654, 0.450711	67
M_{GUT}	1.11785×10^{15} GeV	6.32963×10^{14} GeV	639
α_{GUT}	0.0295361	0.0321029	859
α_4, g_4	0.0196401, 0.496795	0.0164877, 0.455182	67

Tabla B.3: Promedio, valor más común (moda) y su frecuencia para M_{GUT} , α_{GUT} y α_4 (g_4) en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV. Se toma en cuenta a todas las geometrías \mathbb{Z}_8 . La subtabla superior corresponde a $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, la del centro a 10^{12} GeV y la inferior a 10^{17} GeV. En los tres casos $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV.

Vacíos con unificación total

	Promedio	Moda	Frecuencia
M_{GUT}	3.27831×10^{16} GeV	4.07014×10^{16} GeV	62
α_{GUT}	0.0636211	0.0467387	51
α_4, g_4	0.0277262, 0.590269	0.0290687, 0.604391	24
M_{GUT}	3.8940×10^{12} GeV	4.2854×10^{11} GeV	78
α_{GUT}	0.0322629	0.0301339	76
α_4, g_4	0.020178, 0.503552	0.021089, 0.514793 y 0.020586, 0.508617	12
M_{GUT}	2.6163×10^{12} GeV	4.2854×10^{11} GeV	78
α_{GUT}	0.0318679	0.0301339	76
α_4, g_4	0.0196075, 0.496382	0.0199691, 0.500938 y 0.0178821, 0.474039	5

Tabla B.4: Promedio, valor más común (moda) y su frecuencia para M_{GUT} , α_{GUT} y α_4 (g_4) en $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV. Se toma en cuenta a todas las geometrías \mathbb{Z}_8 . La subtabla superior corresponde a $\Lambda_{SUSY} = 2$ TeV, la del centro a 10^{12} GeV y la inferior a 10^{17} GeV. En los tres casos $\Lambda_{Z'} = 2$ TeV.

B.4. Valores en el caso sin SUSY

Vacíos con unificación total

Orbifolio	Cantidad	Intervalo	Promedio	Moda
\mathbb{Z}_8	$g_4(2 \text{ TeV})$	[0.435, 0.551]	0.49	0.48
\mathbb{Z}_6		[0.393, 0.611]	0.47	0.49
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$		[0.359, 0.539]	0.46	0.5
\mathbb{Z}_8	α_{GUT}	[0.029, 0.06]	0.039	0.034
\mathbb{Z}_6		[0.027, 0.108]	0.047	0.05
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$		[0.47, 0.026]	0.037	0.032
\mathbb{Z}_8	$M_{GUT} \text{ (GeV)}$	$[2.84 \times 10^{10}, 2.78 \times 10^{14}]$	3.94×10^{11}	1.59×10^{11}
\mathbb{Z}_6		$[6.49 \times 10^{10}, 2.34 \times 10^{16}]$ $[6.49 \times 10^{10}, 10^{14}]^*$	3.19×10^{12}	4.78×10^{13}
$\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$		$[1.22 \times 10^{10}, 4.4 \times 10^{14}]$	1.64×10^{13}	4.78×10^{13}

Tabla B.5: Valores obtenidos en el análisis de vacíos con unificación total para los orbifolios \mathbb{Z}_8 , \mathbb{Z}_6 y $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. El símbolo * indica que tal intervalo es obtenido al remover un vacío aislado en $M_{GUT} = 2.34 \times 10^{16}$ GeV. Los valores promedio y de moda para $g_4(2 \text{ TeV})$ y M_{GUT} en el caso sin SUSY están en acuerdo aproximado con los respectivos valores obtenidos para el caso con SUSY cuando Λ_{SUSY} es alta o intermedia mostrados en la tabla B.4.

Bibliografía

- [1] S. F. King, S. Morisi, E. Peinado, and J. W. F. Valle. Quark-Lepton Mass Relation in a Realistic A_4 Extension of the Standard Model. *Phys. Lett.*, B724:68–72, 2013.
- [2] A. E. Cárcamo Hernández, H. N. Long, and V. V. Vien. The first $\Delta(27)$ flavor 3-3-1 model with low scale seesaw mechanism. *Eur. Phys. J.*, C78(10):804, 2018.
- [3] Hajime Ishimori, Tatsuo Kobayashi, Hiroshi Ohki, Yusuke Shimizu, Hiroshi Okada, and Morimitsu Tanimoto. Non-Abelian Discrete Symmetries in Particle Physics. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 183:1–163, 2010.
- [4] Oleg Lebedev, Hans Peter Nilles, Stuart Raby, Saúl Ramos-Sánchez, Michael Ratz, Patrick K. S. Vaudrevange, and Akin Wingerter. The Heterotic Road to the MSSM with R parity. *Phys. Rev.*, D77:046013, 2008.
- [5] Tatsuo Kobayashi, Hans Peter Nilles, Felix Plöger, Stuart Raby, and Michael Ratz. Stringy origin of non-Abelian discrete flavor symmetries. *Nucl. Phys.*, B768:135–156, 2007.
- [6] Brenda Carballo-Pérez, Eduardo Peinado, and Saúl Ramos-Sánchez. $\Delta(54)$ flavor phenomenology and strings. *JHEP*, 12:131, 2016.
- [7] Saúl Ramos-Sánchez. On flavor symmetries of phenomenologically viable string compactifications. *J. Phys. Conf. Ser.*, 912(1):012011, 2017.
- [8] Maximilian Fischer, Michael Ratz, Jesús Torrado, and Patrick K. S. Vaudrevange. Classification of symmetric toroidal orbifolds. *JHEP*, 01:084, 2013.
- [9] Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, Patrick K. S. Vaudrevange, and Akin Wingerter. The Orbifolder: A Tool to study the Low Energy Effective Theory of Heterotic Orbifolds. *Comput. Phys. Commun.*, 183:1363–1380, 2012.
- [10] Jens Erler, Paul Langacker, Shoaib Munir, and Eduardo Rojas. Z' Bosons at Colliders: a Bayesian Viewpoint. *JHEP*, 11:076, 2011.

- [11] Eduardo Rojas and Jens Erler. Alternative Z' bosons in E_6 . *JHEP*, 10:063, 2015.
- [12] Alon E. Faraggi and John Rizos. The 750 GeV di-photon LHC excess and extra Z' s in heterotic-string derived models. *Eur. Phys. J.*, C76(3):170, 2016.
- [13] Oleg Lebedev, Hans Peter Nilles, Saúl Ramos-Sánchez, Michael Ratz, and Patrick K. S. Vaudrevange. Heterotic mini-landscape. (II). Completing the search for MSSM vacua in a $Z(6)$ orbifold. *Phys. Lett.*, B668:331–335, 2008.
- [14] Wilfried Buchmüller, Koichi Hamaguchi, Oleg Lebedev, and Michael Ratz. Supersymmetric Standard Model from the Heterotic String (II). *Nucl. Phys.*, B785:149–209, 2007.
- [15] Paul Langacker. The Physics of Heavy Z' Gauge Bosons. *Rev. Mod. Phys.*, 81:1199–1228, 2009.
- [16] Jun-hai Kang, Paul Langacker, and Tian-jun Li. Neutrino masses in supersymmetric $SU(3)(C) \times SU(2)(L) \times U(1)(Y) \times U(1)$ -prime models. *Phys. Rev.*, D71:015012, 2005.
- [17] Stefano Di Chiara, Venus Keus, and Oleg Lebedev. Stabilizing the Higgs potential with a Z' . *Phys. Lett.*, B744:59–66, 2015.
- [18] S. Caron, J. A. Casas, J. Quilis, and R. Ruiz de Austri. Anomaly-free Dark Matter with Harmless Direct Detection Constraints. *JHEP*, 12:126, 2018.
- [19] Lance J. Dixon, Jeffrey A. Harvey, C. Vafa, and Edward Witten. Strings on Orbifolds. 2. *Nucl. Phys.*, B274:285–314, 1986.
- [20] Lance J. Dixon and Jeffrey A. Harvey. String Theories in Ten-Dimensions Without Space-Time Supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B274:93–105, 1986.
- [21] Luis Alvarez-Gaumé, Paul H. Ginsparg, Gregory W. Moore, and C. Vafa. An $O(16) \times O(16)$ Heterotic String. *Phys. Lett.*, B171:155–162, 1986.
- [22] Michael Blaszczyk, Stefan Groot Nibbelink, Orestis Loukas, and Saúl Ramos-Sánchez. Non-supersymmetric heterotic model building. *JHEP*, 10:119, 2014.
- [23] Erik Parr and Patrick K. S. Vaudrevange. Contrast data mining for the MSSM from strings. *Nucl. Phys.*, B952:114922, 2020.
- [24] Yessenia Olguín-Trejo, Ricardo Pérez-Martínez, and Saúl Ramos-Sánchez. Tables of abelian heterotic orbifolds and their flavor symmetries. <http://stringpheno.fisica.unam.mx/stringflavor/>, 2018.
- [25] Yessenia Olguín-Trejo, Omar Pérez-Figueroa, Ricardo Pérez-Martínez, and Saúl Ramos-Sánchez. Tables of z_8 heterotic orbifolds with gauge coupling unification and $u(1)'$. <http://stringpheno.fisica.unam.mx/zprime/>, 2019.

-
- [26] Luis E. Ibáñez, Hans Peter Nilles, and F. Quevedo. Orbifolds and Wilson Lines. *Phys. Lett.*, B187:25–32, 1987.
- [27] Felix Plöger, Saúl Ramos-Sánchez, Michael Ratz, and Patrick K. S. Vaudrevange. Mirage Torsion. *JHEP*, 04:063, 2007.
- [28] K. S. Narain. New Heterotic String Theories in Uncompactified Dimensions < 10 . *Phys. Lett.*, 169B:41–46, 1986.
- [29] Luis E. Ibáñez, Jihn E. Kim, Hans Peter Nilles, and F. Quevedo. Orbifold Compactifications with Three Families of $SU(3) \times SU(2) \times U(1)^{**n}$. *Phys. Lett.*, B191:282–286, 1987.
- [30] Luis E. Ibáñez and Angel M. Uranga. *String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology*. Cambridge University Press, 2012.
- [31] R. Slansky. Group Theory for Unified Model Building. *Phys. Rept.*, 79:1–128, 1981.
- [32] Patrick K. S. Vaudrevange. *Grand Unification in the Heterotic Brane World*. PhD thesis, Bonn U., 2008.
- [33] Yessenia Olguín-Trejo, Ricardo Pérez-Martínez, and Saúl Ramos-Sánchez. Charting the flavor landscape of MSSM-like Abelian heterotic orbifolds. *Phys. Rev.*, D98(10):106020, 2018.
- [34] Yessenia Olguín-Trejo, Omar Pérez-Figueroa, Ricardo Pérez-Martínez, and Saúl Ramos-Sánchez. $U(1)'$ coupling constant at low energies from heterotic orbifolds. *Phys. Lett.*, B795:673–681, 2019.
- [35] Edward Witten. Some Properties of $O(32)$ Superstrings. *Phys. Lett.*, 149B:351–356, 1984.
- [36] Michael B. Green and John H. Schwarz. Anomaly Cancellation in Supersymmetric $D=10$ Gauge Theory and Superstring Theory. *Phys. Lett.*, 149B:117–122, 1984.
- [37] Mark Goodsell, Saúl Ramos-Sánchez, and Andreas Ringwald. Kinetic Mixing of $U(1)$ s in Heterotic Orbifolds. *JHEP*, 01:021, 2012.
- [38] Michael Dine, N. Seiberg, and Edward Witten. Fayet-Iliopoulos Terms in String Theory. *Nucl. Phys.*, B289:589–598, 1987.
- [39] C. Patrignani et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C40(10):100001, 2016 and 2017 update.
- [40] Albert M Sirunyan et al. Inclusive search for supersymmetry in pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV using razor variables and boosted object identification in zero and one lepton final states. *JHEP*, 03:031, 2019.

-
- [41] Morad Aaboud et al. Search for chargino and neutralino production in final states with a Higgs boson and missing transverse momentum at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Phys. Rev.*, D100(1):012006, 2019.
- [42] Morad Aaboud et al. Search for new high-mass phenomena in the dilepton final state using 36 1/fb of proton-proton collision data at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *JHEP*, 10:182, 2017.
- [43] Morad Aaboud et al. Search for additional heavy neutral Higgs and gauge bosons in the ditau final state produced in 36 1/fb of pp collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *JHEP*, 01:055, 2018.
- [44] Morad Aaboud et al. Search for heavy particles decaying into top-quark pairs using lepton-plus-jets events in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Eur. Phys. J.*, C78(7):565, 2018.
- [45] Morad Aaboud et al. Search for resonances in the mass distribution of jet pairs with one or two jets identified as b -jets in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Phys. Rev.*, D98:032016, 2018.
- [46] Luis E. Ibáñez and Irene Valenzuela. The Higgs Mass as a Signature of Heavy SUSY. *JHEP*, 05:064, 2013.
- [47] Stefan Groot Nibbelink, Orestis Loukas, and Fabian Ruehle. (MS)SM-like models on smooth Calabi-Yau manifolds from all three heterotic string theories. *Fortsch. Phys.*, 63:609–632, 2015.
- [48] Steven Abel, Emilian Dudas, Daniel Lewis, and Hervé Partouche. Stability and vacuum energy in open string models with broken supersymmetry. *JHEP*, 10:226, 2019.
- [49] Florian Staub. SARAH 4 : A tool for (not only SUSY) model builders. *Comput. Phys. Commun.*, 185:1773–1790, 2014.
- [50] Najimuddin Khan and Subhendu Rakshit. Study of electroweak vacuum metastability with a singlet scalar dark matter. *Phys. Rev.*, D90(11):113008, 2014.
- [51] Stefan Groot Nibbelink, Orestis Loukas, Andreas Mütter, Erik Parr, and Patrick K. S. Vaudrevange. Tension Between a Vanishing Cosmological Constant and Non-Supersymmetric Heterotic Orbifolds. 2017.