UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

ÁREA MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, COMO UNA ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE

MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR

♦ ÁREA MATEMÁTICAS ♦

P R E S E N T A

ANTONIO GRANILLO MARTÍNEZ

T U T O R P R I N C I P A L

DRA. EUGENIA MARMOLEJO RIVAS, FACULTAD DE CIENCIAS

C O M I T É T U T O R

DRA. OFELIA CONTRERAS GUTIÉRREZ, FES IZTACALA

DRA. EUGENIA MARMOLEJO RIVAS, FACULTAD DE CIENCIAS

DR. RICARDO MÉNDEZ FRAGOSO, FACULTAD DE CIENCIAS

Ciudad Universitaria, CDMX, octubre de 2019

Lic. M.A.C. ANTONIO GRANILLO MARTÍNEZ
PROFESOR EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
C.C.H. PLANTEL ORIENTE

2019

Al término de este recorrido llamado Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), Área MATEMÁTICAS, mismo que ahora culmina con este trabajo, hay tantas personas, como mi familia, mis alumnos, mis colegas, mi institución y mis profesores, a las que, por haber hecho esto posible, les estoy profundamente agradecido. Sé que este espacio sería insuficiente para escribir sus nombres y para describir lo tanto que les agradezco, así que, a cada uno de ustedes…

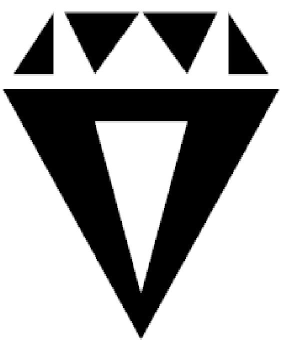
¡Gracias!

Antonio Granillo Martínez

(Página intencionalmente en blanco)

Índice

Introducción



Zafiro, "es un mineral de extraordinaria dureza, que se usa para tallar diamantes"[1]. Metafóricamente, ese mineral sería este trabajo, denominado **Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior (RAMERPEMS)**, y el diamante sería el conjunto de estudiantes. En el Capítulo 1, se recuperan brevemente, algunos antecedentes relativos a las habilidades de razonamiento matemático, a las estrategias y a la resolución de problemas, y se configuran dentro de la situación actual, que nos deja ver los retos docentes, que como profesores podemos afrontar, para mejorar los resultados que nuestros alumnos obtienen en las diferentes pruebas que, al respecto de habilidades de razonamiento matemático, se aplican. Vale la pena rescatar, lo significante que fue, de una interacción con estudiantes de bachillerato, del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Oriente, en el año 2016, la experiencia en la búsqueda de una alternativa, para facilitarles a los estudiantes la apropiación de las habilidades y conocimientos matemáticos, Aunado a esto, se incorporan también lo relacionado a las causas y factores asociados a la mencionada situación actual y se incluyen los pormenores que dieron origen a

---

1 Recuperado el 25 de mayo 2019, de https://www.google.com/search?q=zafiro+significado&rlz=1C1AVNG_enMX664MX664&oq=zafiro&aqs=chrome.1.69i57j35i39j0l6.3295j1j8&sourceid=chrome&ie=UTF-8

este trabajo, así como el objetivo que se persigue con esta propuesta didáctica de enseñanza–aprendizaje.

Teóricamente, al principio del Capítulo 2 y, prácticamente, al final del mismo capítulo, se ponen de relieve los fundamentos de las dos aproximaciones metodológicas –*Cómo razonar matemáticamente* (Mason et al, 2013) y *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, 1987) – que sirvieron de base para la propuesta didáctica de este trabajo. Al principio de este capítulo, para ampliar y fortalecer dicha fundamentación, se anticipan las definiciones pertinentes de los conceptos de razonamiento matemático y de resolución de problemas.

Oblicua sería la posición que gráficamente, en el plano cartesiano, guardaría este trabajo, si en la parte positiva del eje $\boldsymbol{x}$, estuviera la idea de Mason, y en la parte positiva del eje $\boldsymbol{y}$, la propuesta de Pólya; lo anterior, en virtud de que, como todo punto en el plano cartesiano, guarda relación con ambos ejes, nuestra propuesta, en todo momento, tendría relación con ambas teorías metodológicas, mencionadas en el párrafo anterior. Es decir, que en el mismo Capítulo 2, se describe la manera en que tiene lugar la conjunción de las fases y momentos didácticos de ambas aproximaciones, para dar lugar al surgimiento de las fases de nuestra propuesta didáctica. Adicionalmente, dicha conjunción se enriquece con la hipótesis respectiva, las expectativas posibles debidas a esta propuesta, los beneficios que se esperan tanto para los alumnos como para los profesores, la importancia de nuestra propuesta y la relevancia didáctica que envuelve a nuestro trabajo.

Normalmente, toda propuesta didáctica hace referencia a una metodología, y la nuestra no es la excepción. En el Capítulo 3, se puede ver cómo nuestra metodología se caracteriza por ser más práctica que teórica. Para entenderla, será necesario previamente saber dos cosas: por una parte, qué tipo de personas conforman nuestra población estudiantil, con la que se aplicó nuestra estrategia didáctica; por otra, qué tipo de instrumento se utilizó para la evaluación de nuestra estrategia didáctica. Es necesario ahondar en que, el instrumento de evaluación se diseñó para medir el nivel de habilidades y conocimientos matemáticos de nuestros estudiantes.

Enseguida, en el apartado *Procedimiento*, se describe en cuatro pasos, la manera en que nuestra metodología se aplica. Termina este capítulo, con la propuesta de algunos cuestionamientos que favorecen el razonamiento matemático.

Inspirados en dos aproximaciones teórico–metodológicas (mencionadas dos capítulos antes), vemos cómo en el Capítulo 4 se configura nuestra propuesta didáctica, enmarcada dentro del proceso **Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior (RAMERPEMS)**. Respecto a este proceso, se describen las siete fases que lo conforman y lo caracterizan, así como también se hace hincapié en la relación que dichas fases guardan con las fases de las aproximaciones teórico–metodológicas, bases de nuestra propuesta didáctica.

Gradualmente, en la parte final del Capítulo 4, se muestra cómo dichos pasos se acoplan en dos ejemplos didácticos, uno sencillo y otro más elaborado; el primero, quedaría dentro del ámbito de una *Secuencia didáctica* y el segundo dentro del de *Estrategia didáctica*. En relación con el ejemplo más elaborado, que es la Estrategia didáctica, vale la pena mencionar que ésta se diseñó para tres sesiones, con la finalidad de abarcar el tema completo de Funciones Exponenciales, de la Unidad 4. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS, del Curso de Matemáticas IV.

Resultados de nuestra propuesta didáctica, es lo que se incorpora en el Capítulo 5. Éstos, se bifurcan en un cotejo de evaluaciones y en una prueba estadística. Es oportuno remarcar que, tanto el cotejo como la prueba estadística, tienen como elemento de medición, el mismo instrumento de evaluación, mencionado dos capítulos arriba, a fin de contar con la posibilidad de medir más exactamente, la efectividad de nuestra estrategia didáctica, ya que se evaluó a los alumnos antes y después de aplicar nuestra propuesta didáctica, es decir, que se aplicó una evaluación diagnóstica y una evaluación sumativa.

Al término de este recorrido **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), se resaltan, en el apartado de las Conclusiones, por una parte, las ideas que sustentan la viabilidad de esta propuesta, y por otra, las líneas de investigación que se proponen, tanto para la mejora de nuestro quehacer docente, como para la mejora de los resultados que nuestros alumnos obtienen, en las pruebas que al respecto se les aplican.

Maestros, doctores, autores, en fin, personalidades relevantes, cuyas obras bibliográficas y aportaciones sirvieron de sustento para este trabajo, se mencionan en el apartado final *Referencias bibliográficas*. Es necesario enfatizar que, en este último apartado, además de las referencias bibliográficas, se incluyen también las referencias de los cursos que, como parte de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) –Área Matemáticas, sirvieron en la realización del presente trabajo.

1. Génesis en torno a esta estrategia de razonamiento matemático

Verdaderamente, aunque a la fecha existe un aporte considerable de información en torno al razonamiento matemático, retomaremos brevemente sólo lo esencial y lo relevante en cuanto a antecedentes, situación actual, marco referencial, causas y efectos, los motivos que originaron esta propuesta y, el objetivo que se seguirá a lo largo de este trabajo.

1.1 Antecedentes

Revisemos el camino que, tanto instituciones educativas como personal docente, han hecho, y que ahora son antecedentes, alrededor de: razonamiento matemático, estrategias y resolución de problemas; mismos que, como ramas educativas, inciden en el desarrollo de este trabajo. En este orden de ideas, vale la pena resaltar algunos antecedentes breves de cada una de las ramas citadas, con la intención de articular y exponer el tema de este trabajo.

Es cierto que, alrededor del razonamiento matemático se cuentan varios rubros, que justifican su forma y su trato. Algunos de ellos, rozan con el campo cognitivo y con el entorno que nos rodea.

Algunas premisas de Euclides, alrededor del razonamiento matemático, estipulan que: a) como recurso escrito, los griegos argumentaban convincentemente, mediante la demostración, y de manera ordenada; b) tomaban las definiciones de los objetos y las relaciones entre ellos, como principios simples, de los que parte el razonamiento matemático; c) consideraban como núcleo medular, que estimula el razonamiento matemático, a los postulados y a las nociones comunes. Estas tres premisas, permitían que cada resultado matemático, pudiera ser obtenido mediante un proceso deductivo. No obstante, existe un terreno firme sobre el que se puede cimentar un edificio robusto llamado razonamiento matemático. Considérese que, el conocimiento verdadero se cimienta sobre las ideas abstractas e independientes, que son el reflejo de las cosas materiales percibidas; así, se puede entender por qué Platón pensaba que el fundamento para la educación culta del hombre, son las matemáticas, y éstas son la base ideal en la formación de los jóvenes. Todo esto toma sentido cuando revisamos la manera de proceder ante un problema de la vida real: se explora la situación, se pretende comprender el problema y se busca el mejor camino para resolverlo (Millán, 2004).

Cabe aclarar que, las premisas anteriores, nos dejan sentir la idea del papel que entre los griegos, jugaba el razonamiento matemático; esto no quiere decir que en este trabajo, profundizaremos en aspectos como la demostración, la argumentación o en las definiciones de objetos y sus relaciones entre sí; sino que, únicamente se retomarán cuando así el escenario enseñanza–aprendizaje lo requiera.

Ahora que, si el escenario enseñanza–aprendizaje, requiere libertad de invención y entendimiento propio, entonces, desde el punto de vista de la teoría del desarrollo intelectual de Piaget, conviene que a un niño no se le coarte esta libertad ni este entendimiento, cuando se le enseña anticipadamente algo que, de manera natural, podría descubrir por sí mismo (Simatwa, 2010).

Finalicemos esta primera parte, con una nota buena y una mala, ambas relacionadas con la educación media superior. La mala es que, debemos admitir que nuestros alumnos mexicanos, aspirantes a un lugar en universidades públicas mexicanas, presentan niveles bajos en aprovechamiento, conceptos básicos y habilidades para solucionar problemas; la buena es que, cuando se trata de memorizar algoritmos, dichos niveles mejoran. Podríamos abrir un abanico amplio de antecedentes al respecto, en virtud de la cantidad de instituciones que existen en nuestro país; sin embargo, centrémonos dentro del marco de los resultados que, en materia de habilidades de razonamiento matemático, se han obtenido y sustentado (Larrazolo, BackHoff y Tirado, 2013). Estos resultados, se detallan en el apartado siguiente, cuando hablemos de la Situación actual.

Recuperemos ahora, algunos breves antecedentes relacionados con estrategias. Ante el abanico de opciones que al respecto han publicado varios autores, y para efectos de no desviarnos de los propósitos de este trabajo, nos enfocaremos en estrategias docentes para la enseñanza y el aprendizaje. En este sentido, y para facilitar la meta que pretendemos, conviene hacer tres clasificaciones de estrategias docentes: ***i***) las que propician la reflexión en los docentes sobre su práctica, y que también abren un espacio para aquellos docentes que aún no han sido enseñados a enseñar, y que por lo mismo vinculan varios rubros derivados de la psicología educativa y de la didáctica[2], bajo una propuesta constructivista y sociocultural. (Díaz, F. & Hernández, G. 2010); ***ii***) las que, desde el punto de vista pedagógico, dan la debida importancia a considerar el contexto del aprendizaje, y a atender los requerimientos cognoscitivos de la temática, al momento de diseñar estrategias de razonamiento (Rodríguez et al, 2011); y finalmente ***iii***) aquellas que versan sobre estrategias docentes para enseñar y para enseñar a pensar, las que, además de retomar las bases para la eficacia del docente, apuntan en el alumno al pensamiento de nivel superior y al pensamiento crítico, así como a los modelos pedagógicos que coadyuvan en este sentido, tales como: inductivo, adquisición de conceptos, integrativo, enseñanza directa, entre otros (Eggen, P. & Kauchak, D. 2001).

Para finalizar este apartado, recuperemos lo relacionado con la resolución de problemas.

Vale la pena agregar que, un aspecto coadyuvante en la solución de un problema, en virtud de que propicia las estrategias de

[2] *Didáctica*: *Adj.* Perteneciente o relativo a la enseñanza. || *Adj.* … . Propio, adecuado para enseñar o instruir. Recuperado el 10 de marzo 2019, de https://dirae.es/palabras/?q=did%C3%A1ctica.

razonamiento, sin duda, es el contexto en el que se presenta, cobijado por la naturaleza epistemológica[3], el aspecto sociocultural, el nivel cognitivo[4] y los modos en que opera la enseñanza; en pocas palabras, cuando se desarrollen estrategias de razonamiento, considérense en el contexto, tanto el punto de vista pedagógico, como la atención a las demandas cognoscitivas[5] (Rodríguez, 2011).

En este sentido conviene, también, apuntar específicamente a la resolución de problemas matemáticos. Distingamos dos vertientes: la primera, la que resalta los esfuerzos realizados particularmente por autores; y la segunda, lo hecho por instituciones. En relación con la primera vertiente, encontramos autores que visualizan a la resolución de problemas, en el aprendizaje de las matemáticas, como una propuesta, que contiene una conceptualización dinámica de las matemáticas, en la que resulta de vital importancia distinguir los elementos que ayuden a promover en los alumnos una disposición matemática (Santos, 2014). En este mismo ámbito, encontramos algunas metodologías como, por ejemplo, la Metodología ABP (Aprendizaje Basado en Problemas), en la que, a grandes rasgos, van de la mano tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo de habilidades y actitudes, a fin de predisponer al estudiante al aprendizaje, de modo autónomo, bajo su propia experiencia, pensamiento crítico, trabajo colaborativo, etc. (ITESM, s.f.). Ahora, en lo que respecta a la segunda vertiente, resaltan las que contemplan a la resolución de problemas, como la columna vertebral de su metodología didáctica, porque busca que aquella, coadyuve tanto en el desarrollo del pensamiento lógico–deductivo, como en lograr habilidades de pensamiento en los alumnos, a fin de que ellos mismos, sean capaces de adquirir nuevos conocimientos y habilidades por sí mismos. Lo anterior, requiere una selección precisa de escenarios problemáticos, que provoquen el interés del alumno y lo inviten a reflexionar, y que promuevan el trabajo en equipo, con solidaridad y corresponsabilidad entre él y sus pares. Asimismo,

---

[3] Epistemológica: *Perteneciente o relativo a la epistemología*. || Epistemología. *(Del gr. ἐπιστήμη, conocimiento, y -logía). 1. f. Doctrina de los fundamentos y métodos del conocimiento científico*. Recuperado el 8 de marzo 2019, de https://dirae.es/palabras/epistemol%C3%B3gico.

[4] Cognitivo: *Perteneciente o relativo al conocimiento*. Recuperado de https://dirae.es/palabras/?q=cognitivo, el 10 de marzo 2019.

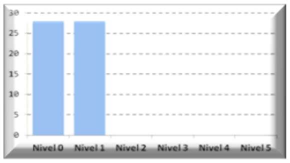
[5] Cognoscitivas: *Que es capaz de conocer*. Recuperado de https://dirae.es/palabras/?q=cognoscitiva, el 10 de marzo 2019.

precisa que los conceptos teóricos y metodológicos, que anteriormente el profesor exponía con anticipación, ahora surjan como una necesidad de los alumnos, durante todo el proceso didáctico, desde la comprensión del problema hasta la generalización de los resultados obtenidos (UNAM–CCH, 2016).

Recapitulemos los antecedentes recuperados. En relación con razonamiento matemático, tenemos: a) unas premisas que, entre otras cosas, estimulan el razonamiento matemático; b) el desarrollo intelectual, se promueve con la libertad de invención y de entendimiento propio; y c) los resultados retadores que, al respecto de habilidades de razonamiento matemático, nuestros alumnos obtienen en pruebas que se les aplican. Con respecto a los antecedentes de estrategias, se recuperó que existe un abanico de opciones; sin embargo, resalta la importancia de considerar el contexto del aprendizaje, no sin antes, atender los requerimientos cognoscitivos de la temática, al momento de diseñar estrategias de razonamiento. Por último, respecto a la resolución de problemas, resalta que ésta contiene una conceptualización dinámica de las matemáticas, en la que, es vital distinguir los elementos que promuevan en los alumnos una disposición matemática. En suma, no encontramos evidencias que pongan de manifiesto al razonamiento matemático, como una estrategia para la resolución de problemas en la educación media superior.

En adelante, nos referiremos al Razonamiento matemático, como una estrategia para la resolución de problemas en la Educación Media Superior, únicamente como **RAMERPEMS**.

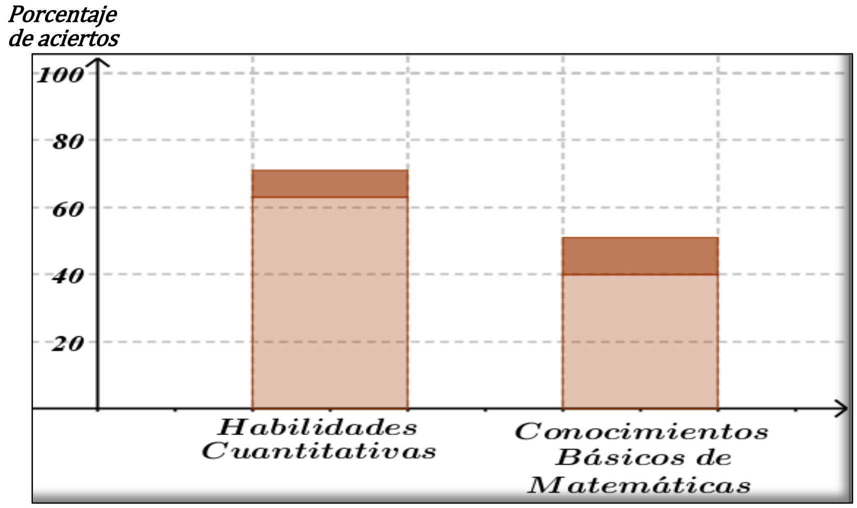
1.2 Situación actual



La situación actual que nos compete, misma que involucra nuestro quehacer docente, práctica didáctica y, enseñanza o aprendizaje, entre otros, enfrenta un panorama muy retador.

En el marco del nivel bachillerato, el 45% de los alumnos egresados en el año 2010, se ubican en el NIVEL INSUFICIENTE, y las habilidades básicas de razonamiento matemático que aquellos adquirieron, se mostraron muy estables a lo largo del tiempo. En los años 2006 y 2007, al aplicar a una población de 96 mil 400 estudiantes del nivel medio superior, de cinco universidades públicas mexicanas – que aspiran a ingresar al nivel superior –, el Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA), que mide las competencias matemáticas de Primaria y Secundaria, los resultados muestran, en términos generales, un bajo desempeño escolar; esto, en virtud de que los promedios de aciertos oscilan entre 63 y 71%, en Habilidades Cuantitativas (números, cantidades, operaciones básicas, fracciones, geometría, proporciones, porcentajes, ángulos, probabilidad y estadística), y entre 40 y 51%, en los Conocimientos Básicos de Matemáticas (aritmética, sistema binario, geometría, probabilidad y álgebra). Así, se confirma que los estudiantes del bachillerato, egresan con un bajo nivel de aprovechamiento, en habilidades básicas de razonamiento matemático que, en teoría, deberían adquirir durante la educación básica (Larrazolo et al, 2013).

Los promedios de aciertos, mencionados en el párrafo anterior, relativos a las competencias *habilidades cuantitativas* y *conocimientos básicos de matemáticas*, se ilustran en la gráfica siguiente, en barras separadas sobre el eje horizontal; y asimismo, en el eje vertical, se encuentran los porcentajes correspondientes. De manera adicional, en un tono más oscuro, se ilustran los rangos entre los que oscilan los promedios de aciertos, de cada una de estas competencias.

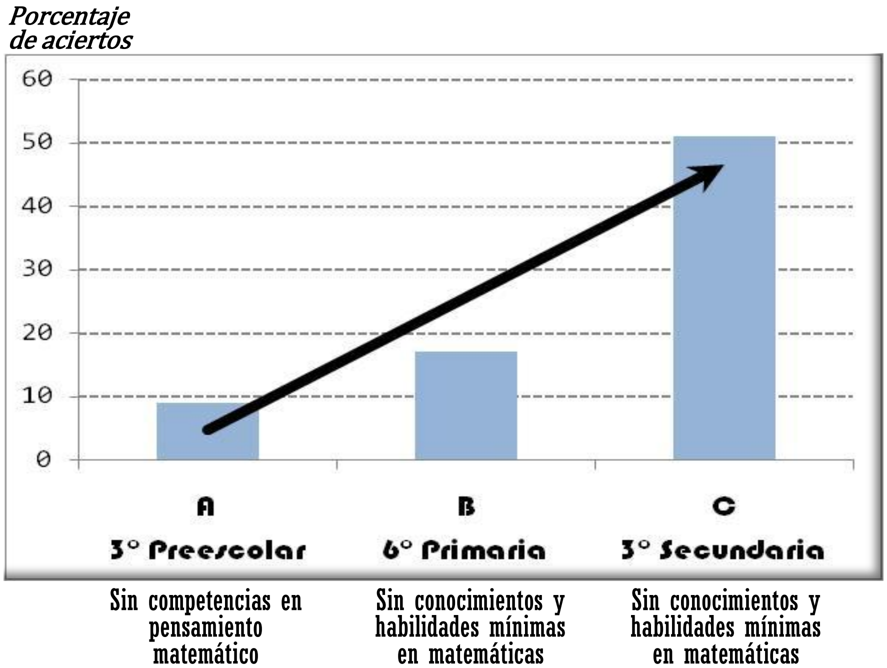


GRÁFICA I.2.1 PORCENTAJES DE ACIERTOS EN COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE LA EMS, QUE ASPIRAN A INGRESAR A LA UNIVERSIDAD (2006 Y 2007).

Sólo para entender más claramente la situación antes referida, y sin la intención de desviar el enfoque de este trabajo, echaremos un vistazo a lo que Larrazolo et al, han publicado en relación con el camino que un estudiante de la EMS, ha recorrido con anterioridad en el nivel básico (Preescolar, Primaria, y Secundaria), y que, de alguna manera, aunque se refieren a conceptos análogos como competencias en pensamiento matemático, conocimientos y habilidades mínimas en matemáticas, en lo particular los consideraremos como relacionados con el razonamiento matemático.

En estudiantes de 3er Grado de Preescolar, el porcentaje de los alumnos sin las competencias en pensamiento matemático, en el año 2008 se ubica en 9% (**A**); de igual manera, respecto a los alumnos sin los conocimientos y habilidades mínimas en matemáticas, en el caso de los estudiantes de 6° Grado de Primaria, en el año 2006 el porcentaje asciende al 17% (**B**); y en los estudiantes de 3er Grado de Secundaria, en el año 2011, alcanza el 51% (**C**) (Larrazolo et al, 2013).

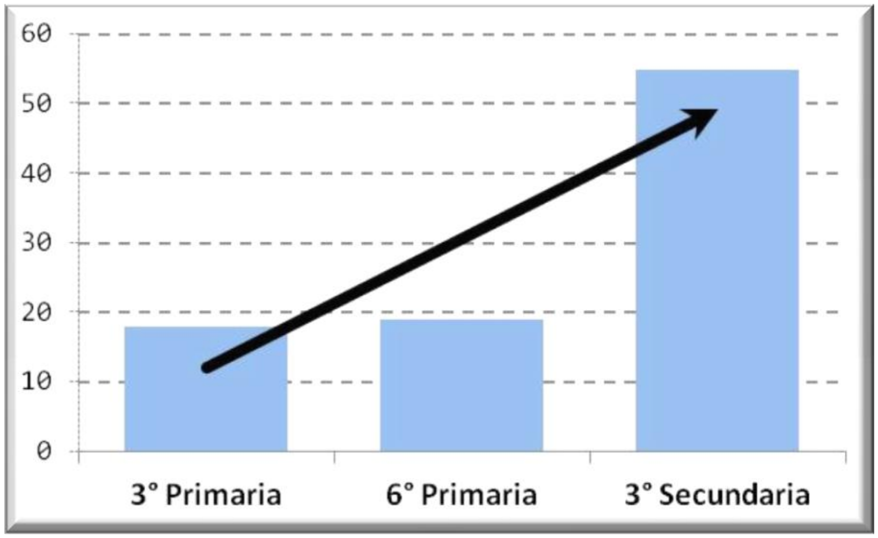
El comportamiento gráfico de los porcentajes mencionados en el párrafo anterior, se ilustran en la gráfica siguiente. En ésta, sobre el eje horizontal, se ubican las competencias en pensamiento matemático, para el caso de preescolar; y los conocimientos y habilidades mínimas en matemáticas, para el caso de los grados terminales de Primaria y Secundaria. Correspondientemente, sobre el eje vertical, se ubican los porcentajes respectivos.



Gráfica I.2.2 Porcentaje de alumnos sin competencias en pensamiento matemático, ni conocimientos y habilidades mínimas en matemáticas (2006, 2008 y 2011).

En lo que corresponde a alumnos con nivel insuficiente en matemáticas, en el año 2009, el porcentaje también se comporta de manera similar: en 18% para alumnos de 3er Grado de Primaria, en 19% para alumnos del 6° Grado de Primaria y, en 55% para alumnos del 3er Grado de Secundaria (Ver Gráfica I.2.3).

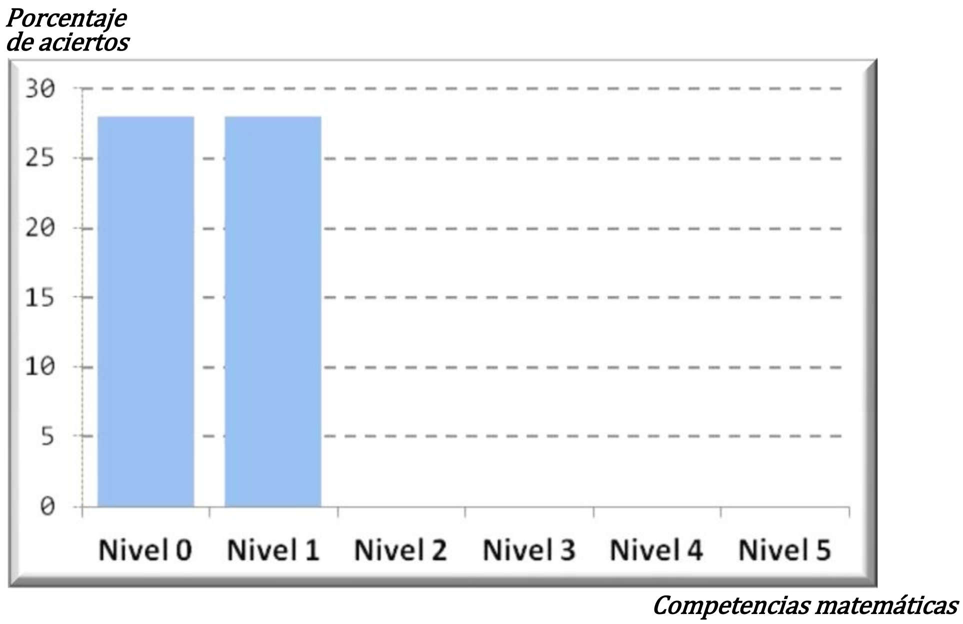
Porcentaje de aciertos



Nivel insuficiente en matemáticas

GRÁFICA I.2.3 ALUMNOS CON NIVEL INSUFICIENTE EN MATEMÁTICAS (2009).

Finalmente, con respecto a las competencias matemáticas evaluadas por PISA (2009), los resultados también son retadores, en virtud de que se alcanza el 28%, en los niveles bajos como el UNO y el CERO. Vale la pena aclarar que, en estos niveles, según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), los alumnos, a lo más, logran identificar tanto un fragmento de información como el tema principal de un texto, y conectar ambos con su conocimiento cotidiano –Nivel 1–; o logran leer, técnicamente la palabra, pero no así, utilizar lo leído a ampliar sus conocimientos y destrezas –por debajo del Nivel 1– (OCDE, 2018). Estas situaciones se ilustran en la gráfica siguiente.



GRÁFICA I.2.4 COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN MÉXICO, SEGÚN LA OCDE (2018).

Es innegable que, a medida que los estudiantes avanzaban en los niveles de escolaridad, desde Preescolar hasta el Bachillerato, los resultados sobre conocimientos y desempeño de habilidades matemáticas, mismos que se relacionan con el razonamiento matemático, son cada vez, insuficientes.

Así se explica, el por qué de los resultados obtenidos por México en la prueba PISA, ya que esta evaluación mide competencias complejas que requieren un alto nivel de razonamiento; lo que hace concluir que, en México los estudiantes no dominan las habilidades básicas de razonamiento matemático. (Larrazolo et al, 2013).

1.3 Marco referencial

Antes de entrar al núcleo del trabajo, conviene recuperar el entorno social –éste último por la importancia que cobra el hecho de que una de las metas de este trabajo, es que los alumnos vayan y vivan la experiencia de hacer matemáticas–, dentro de un marco referencial adecuado, que muestre qué papel desempeñaron cada uno de los elementos, aspectos, recursos y actores, y cómo fue su actuación, en el proceso de RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, COMO UNA ESTRATEGIA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA

EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR, mismo que se describe detalladamente en el cuarto capítulo.

Cabe aclarar que, en adelante nos referiremos a este proceso, sólo como **RAMERPEMS**.

1.3.1 Marco extra–escolar

Recuérdese que, desde el punto de vista pedagógico, se debe considerar, con su debida importancia, el contexto del aprendizaje, y atender los requerimientos cognoscitivos de la temática, al momento de diseñar estrategias de razonamiento (Rodríguez et al, 2011).

En virtud del párrafo anterior, vislumbremos brevemente el entorno extra–escolar que envuelve a nuestros estudiantes.

Parece oportuno abundar en los ámbitos relacionados directamente con los estudiantes y con su entorno cotidiano, tales como el familiar, el de su comunidad y el escolar. Al respecto, es también muy oportuno, resaltar que la UNAM, a través de su Programa Institucional de Tutorías (PIT), aplicado en el Colegio de Ciencias y Humanidades, coadyuva en la familiarización con los entornos antes descritos.

Cabe recordar que el PIT, implica que el docente, como tutor, esté al lado del alumno, permanentemente, a lo largo de su trayectoria escolar; acción que sugiere un intercambio de información, entre tutor y alumno, con varios propósitos, entre los que sobresalen el de contribuir a una mejor apropiación de los aprendizajes, a fin de evitar el rezago escolar. Inherentemente, a la par de tal intercambio de información, sucede la tarea de conocer al alumno, lo suficiente como para lograr una mejor percepción de sus intereses, problemáticas, fortalezas, debilidades, etc.; lo que sin duda, nos da la oportunidad de percibir las características de su entorno familiar, de su comunidad y escolar. Veamos.

En cuanto al entorno familiar, se trata de alumnos adolescentes, en su mayoría hijos de familia, que tienen responsabilidades domésticas, como apoyar en los quehaceres de la casa o cuidar hermanos menores, y cuyos papás, en su mayoría, consideran a la institución de educación media superior, como una estancia o guardería.

Mayoritariamente, son familias cuentan con recursos económicos limitados, que inciden directamente en el apoyo monetario que requiere un estudiante y que, indudablemente, repercuten también, en las notas escolares que los estudiantes obtienen.

Aunque la mayoría de los estudiantes viven en la Ciudad de México (CDMX), se cuentan algunos casos de alumnos que provienen de lugares foráneos, ya sea de una entidad federativa del interior del país, como el Estado de México, Chiapas, etc., o de un país distinto al nuestro, como Colombia. En algunos de estos casos, los alumnos tienen que transitar por una etapa de adaptación, misma que toma un tiempo variable. En otros casos, los alumnos deben iniciar un nuevo estilo de vida, regularmente con personas con las que no se había convivido cotidianamente, como abuelos, tíos, primos, etc.

En lo que respecta al entorno comunitario que vive el estudiante, podríamos encontrar que confluyen una gran cantidad de variables, debido a que existen alumnos cuyos orígenes son tanto comunidades rurales como urbanas, y tanto nacionales como extranjeros; por tal motivo, inherentemente están vinculados aspectos propios, como la ubicación geográfica, costumbres, idiomas, valores, la cultura, etc.

Parece oportuno hacer una pausa, para resaltar que todo lo antes visto, tiene sentido en virtud de lo que Rodríguez et al (2011), manifiestan, y que se estableció en el primer párrafo de este apartado.

1.3.2 Marco escolar

Es conveniente hacer una descripción, por separado, de cada una de las tres generaciones, que conforman nuestra población estudiantil de bachillerato, en cada ciclo escolar; es decir, la de primer año (primero y segundo semestre), segundo año (tercero y cuarto semestre) y tercer año (quinto y sexto semestre). Tal clasificación nos permitirá tener una idea más precisa de lo que cada generación vive a su alrededor, y así, podremos referirnos, en lo particular, al entorno escolar en el que cada alumno se desenvuelve.

Es cierto que, actualmente, existen documentos oficiales que muestran claramente la situación escolar, que rodea a cada una de las generaciones estudiantiles, como Prontuarios e Informes que la

Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades, ha publicado (UNAM–CCH. 2011 y UNAM–ENCCH. 2017, respectivamente); sin embargo, en esta ocasión, nos referiremos a un entorno más cercano a la persona del estudiante.

En el primer año, encontramos a alumnos en etapa de adaptación, con un aire de asombro y sorpresa, generado por haber obtenido un lugar en la Máxima Casa de Estudios, ilusionados por querer hacer la mejor de las trayectorias universitarias, aunque, académicamente, en lo que a matemáticas se refiere, se constata su buena capacidad para trabajar con algoritmos y reglas de solución; pero no se podría decir lo mismo respecto a razonamiento matemático. En el segundo año, se encuentran alumnos ya adaptados, que han sentido la "libertad" que ofrece la institución, lo que provoca que algunos se relajen y pierdan aquella ilusión de la mejor trayectoria; asimismo, respecto a las matemáticas, algunos de ellos intentan enfrentarse a los problemas que implican el desafío de un razonamiento, aunque la mayoría de ellos opta por "refugiarse" en otras áreas. Vale la pena recordar que, al final de este segundo año, es cuando los alumnos deben elegir las asignaturas relacionadas con la carrera profesional que pretenden y, las estadísticas respectivas, sustenta y proyectan el claro rechazo a las matemáticas. Finalmente, en el tercer y último año, están los alumnos próximos a egresar; por una parte, los que conservaron un paso firme a lo largo del bachillerato, cosa que se refleja en su tranquilidad y satisfacción de haber hecho lo correcto; y por otra, los que están cabizbajos debido a que el promedio de calificaciones obtenido, no augura buenas posibilidades para ingresar al nivel superior, ni en la carrera ni en el plantel de su preferencia. En virtud de lo anterior, en este tercer año, en el ámbito de las matemáticas, nos encontramos que, ante el egreso próximo, se busca sólo cumplir con el requisito de llevar a cabo las operaciones de los algoritmos, y dejan de lado el razonamiento matemático.

Sin duda, sí quisiéramos compartir con el lector, un marco referencial más cercano a los actores que conforman el entorno escolar, una herramienta valiosa, podría ser conocer las necesidades y problemáticas reales de los alumnos; y de acuerdo con éstas, aunque seguramente existen muchas y variadas en este marco referencial, resaltaremos sólo un par de ellas. He aquí, en la TABLA 1.3.2.1

Carreras pretendidas por alumnos de sexto semestre, 2012-2, un acercamiento a 22 alumnos de sexto semestre, en el Ciclo escolar 2012-2, inscritos en la asignatura de Cibernética y Computación II, en lo que se refiere a Carreras profesionales pretendidas.

CARRERA	ASPIRANTES	PROPORCIÓN
Diseño Gráfico	5	22.7%
Derecho	4	18.2%
Ingeniería	4	18.2%
Psicología	2	9.1%
Química	1	4.5%
Gastronomía	1	4.5%
Ciencias de la Tierra	1	4.5%
Sociología	1	4.5%
Actuaría	1	4.5%
Administración	1	4.5%
Biología	1	4.5%
TOTAL:	22	100%

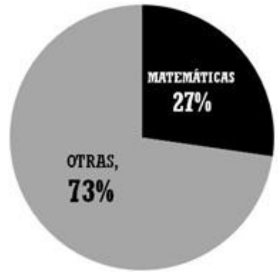
Tabla 1.3.2.1 Carreras pretendidas por alumnos de sexto semestre, 2012-2.

Con esta información, podríamos inferir algunas necesidades, tendencias o problemáticas relacionadas con el gusto por las matemáticas; sin embargo, para que éstas tengan significado con el objetivo de este trabajo, conviene verla integralmente, por área, en la que, para nuestros propósitos, agrupamos Ingeniería (18.2%), Ciencias de la Tierra (4.5%) y Actuaría (4.5%), en el Área de MATEMÁTICAS. (Ver la Tabla 1.3.2.2 Carreras, por área, pretendidas por alumnos de sexto semestre, 2012-2, siguiente).

ÁREA	PROPORCIÓN
MATEMÁTICAS	27%
OTRAS	73%

Tabla 1.3.2.2 Carreras, por área, pretendidas por alumnos de sexto semestre, 2012-2.

Gráficamente,



GRÁFICA 1.3.2.1 PREFERENCIA DE CARRERAS, POR ÁREA, 2012-2.

En este mismo orden de ideas, y a fin de lograr un acercamiento más reciente en el semestre 2019-2, con los alumnos del grupo 491A, del CCH Oriente, de la asignatura Matemáticas IV, conformado por 16 estudiantes, se aplicó un diagnóstico para conocer sus preferencias sobre la carrera que estudiarían. Dicho diagnóstico se muestra a continuación.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES — PLANTEL ORIENTE
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA (CARRERA)
MATEMÁTICAS IV

FECHA GRUPO
APELLIDOS
NOMBRE

INSTRUMENTO ELABORADO POR ANTONIO GRANILLO MARTÍNEZ

NOTA: ***Este instrumento no tiene valor, en virtud de que sólo es un diagnóstico*** **EDAD**

Instrucciones: Contesta con bolígrafo o pluma.
Lee detalladamente los requerimientos que se especifican y complétalos.

REQUERIMIENTO	RESPUESTA
1º. *Encierra la opción que denote tu respuesta:*	
¿Estudiarías una carrera profesional, que esté relacionada con el ÁREA DE LAS MATEMÁTICAS?	✔ ✖
2º. *Con base en los **ASPECTOS** enseguida descritos, explica tu respuesta anterior en los renglones siguientes.*	
ASPECTOS: *a*] **Familiar** (Papás, hermanos, abuelos, tíos, primos, etc.); ***b***] de tu **Comunidad** (Vecinos, colonia, etc.); ***c***] **Escolar** (Compañeros de Clase o de Plantel, condiciones del Plantel, Profesores, Programa de Estudios, etc.); y ***d***] **Personal** (Gustos, intereses, facilidad, etc.).	

UNAM C.C.H. ORIENTE Marzo 2019

FIGURA 1.3.2.1 DIAGNÓSTICO SOBRE LA PREFERENCIA DE CARRERA.

Los resultados del diagnóstico anterior se muestran en la Tabla Panorama de la elección de carrera, del Grupo 491A, del semestre 2019-2, CCH OTE.

Nº de ALUMNO	¿Estudiarías una carrera del Area Matemáticas?	
	✓	✗
1		NO
2		NO
3		NO
4		NO
5		NO
6		NO
7		NO
8		NO
9		NO
10		NO
11	SI	
12		NO
13	SI	
14	SI	
15	SI	
16		NO

Y Gráficamente,

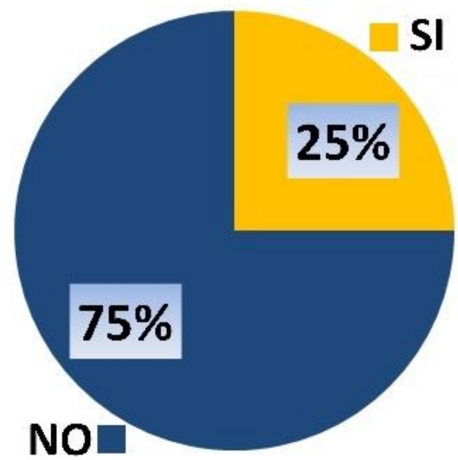


Tabla 1.3.2.3 Panorama de la elección de carrera, del Grupo 491A, del semestre 2019-2, CCH Ote.

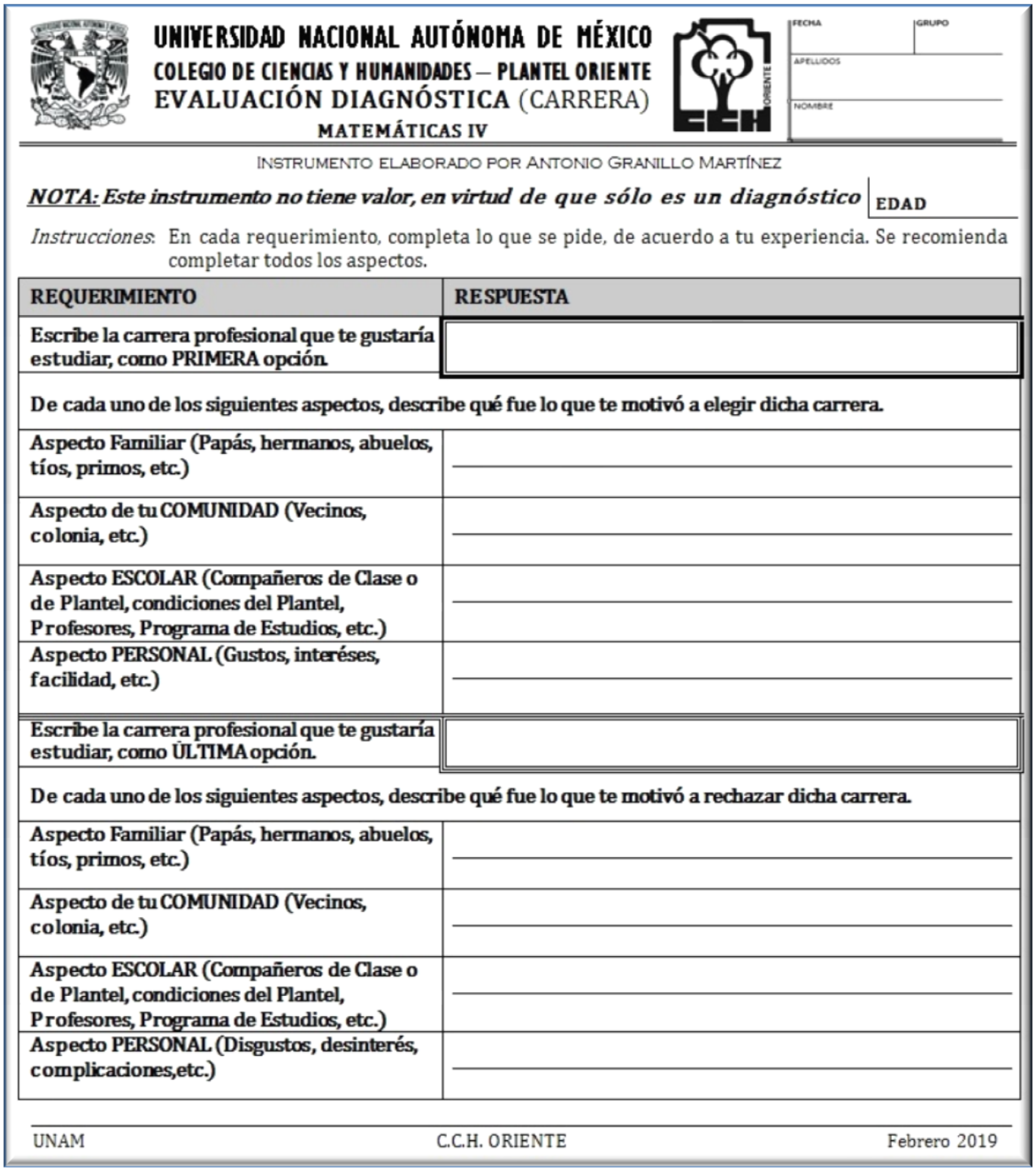
Como una retrospección[6] de este acercamiento, resaltemos que los estudiantes del Grupo 491A, ante el cuestionamiento "**Estudiarías una carrera profesional, que esté relacionada con el Área de las Matemáticas**", cuyo formato y resultados se especificaron en la Figura 2 y Tabla 6 respectivamente, al momento de explicar el por qué de su afinidad o rechazo hacia las matemáticas, encontramos argumentos que en general, recuperan las experiencias académico–familiares, relevantes en los aspectos (familiar, comunidad, escolar, personal), que se mencionan en el diagnóstico correspondiente, mismas que a continuación se describen por separado. Empecemos con los que **sí**, lo harían. Se trata de estudiantes que: ***i***) desde pequeños tuvieron gusto por las

[6] Retrospección: "[…] *Reflexionar sobre lo realizado y pensar si el método o la solución puede aplicarse* […]" (UNAM – CCH, 2016, pág. 7) || "*Entendimiento de la naturaleza de un evento después de que ya ha sucedido*". Recuperado el 28 de mayo 2019, de https://www.buscapalabra.com/definiciones.html?palabra=retrospecci%C3%B3n

matemáticas y facilidad para entenderlas; ***ii***) les resultan fascinantes las proyecciones de construcción que se pueden lograr con las matemáticas, antes de llevarlas a cabo; ***iii***) están conscientes de que al final, en cualquier campo están inmersas las matemáticas; y ***iv***) simplemente, les llama la atención. Continuemos ahora con los que **NO** lo harían. Generalmente, se trata de estudiantes que: ***i***) no cuentan con una facilidad, un gusto o un interés, aunque sea mínimo, por las matemáticas, ya sea porque no logran entenderlas o porque sus profesores mostraban cierta molestia cuando se les preguntaba repetidamente; ***ii***) en su familia, las matemáticas no han sido tendencia; ***iii***) aunque al principio las matemáticas les llame la atención o les parezcan muy fáciles, cuando se enfrentan a un buen desafío, se confunden, no le entienden, y terminan por abandonarlas; ***iv***) tienen la idea de que con sumar, restar, multiplicar y dividir, están cubiertas sus necesidades matemáticas; ***v***) tienen la idea de que son demasiadas fórmulas; ***vi***) hasta cierto punto, encuentran a las matemáticas, tediosas y aburridas; ***vii***) en cierto punto, no contaron con los maestros apropiados, que les explicaran bien, o que coadyuvaran para continuar con su "amor" por las matemáticas; ***viii***) sienten que las matemáticas, no ofrecen los suficientes recursos para expresarse –tal vez, en alusión a alguna de las carreras impartidas por la Facultad de Artes y Diseño de la UNAM–; ***ix***) piensan que los profesores son los que despiertan una motivación o engendran un rechazo hacia las matemáticas.

Terminemos estos acercamientos con uno relacionado a la primera y última opción, en cuanto a la elección de carrera que un estudiante hace.

Nos referiremos a alumnos del 4° Semestre, 2019-2, de los Grupos 491A y 470A, del CCH Oriente, de la asignatura Matemáticas IV, conformados por 16 y 13 estudiantes respectivamente, a quienes se le aplicó un diagnóstico, para conocer sus preferencias sobre la elección de carrera que estudiarían, tanto como primera opción y como última opción. Dicho diagnóstico se muestra a continuación, en la figura DIAGNÓSTICO SOBRE LA PREFERENCIA DE CARRERA, COMO PRIMERA Y ÚLTIMA OPCIÓN.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES – PLANTEL ORIENTE
EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA (CARRERA)
MATEMÁTICAS IV

FECHA GRUPO
APELLIDOS
NOMBRE

INSTRUMENTO ELABORADO POR ANTONIO GRANILLO MARTÍNEZ

NOTA: ***Este instrumento no tiene valor, en virtud de que sólo es un diagnóstico*** **EDAD**

Instrucciones: En cada requerimiento, completa lo que se pide, de acuerdo a tu experiencia. Se recomienda completar todos los aspectos.

REQUERIMIENTO	RESPUESTA
Escribe la carrera profesional que te gustaría estudiar, como PRIMERA opción.	
De cada uno de los siguientes aspectos, describe qué fue lo que te motivó a elegir dicha carrera.	
Aspecto Familiar (Papás, hermanos, abuelos, tíos, primos, etc.)	
Aspecto de tu COMUNIDAD (Vecinos, colonia, etc.)	
Aspecto ESCOLAR (Compañeros de Clase o de Plantel, condiciones del Plantel, Profesores, Programa de Estudios, etc.)	
Aspecto PERSONAL (Gustos, interéses, facilidad, etc.)	
Escribe la carrera profesional que te gustaría estudiar, como ÚLTIMA opción.	
De cada uno de los siguientes aspectos, describe qué fue lo que te motivó a rechazar dicha carrera.	
Aspecto Familiar (Papás, hermanos, abuelos, tíos, primos, etc.)	
Aspecto de tu COMUNIDAD (Vecinos, colonia, etc.)	
Aspecto ESCOLAR (Compañeros de Clase o de Plantel, condiciones del Plantel, Profesores, Programa de Estudios, etc.)	
Aspecto PERSONAL (Disgustos, desinterés, complicaciones,etc.)	

UNAM C.C.H. ORIENTE Febrero 2019

FIGURA 1.3.2.2 FORMATO DEL DIAGNÓSTICO SOBRE LA PREFERENCIA DE CARRERA, COMO PRIMERA Y ÚLTIMA OPCIÓN.

Antes de pasar a ver los resultados respectivos al DIAGNÓSTICO SOBRE LA PREFERENCIA DE CARRERA, COMO PRIMERA Y ÚLTIMA OPCIÓN, DE LOS GRUPOS 491A Y 470A, DE 4° SEMESTRE, DEL CCH ORIENTE, 2019-2, que abajo se incluye, bueno es que precisemos unas convenciones sobre la tabla respectiva: ***i)*** verticalmente en la parte izquierda, se ubican las carreras consideradas en este ejercicio; ***ii)*** horizontalmente, se ubican cada uno de los alumnos que participaron; ***iii)*** verticalmente en la parte derecha, se ubican los totales por carrera, como primera y última opción.. La carrera que cada alumno eligió, como primera opción, se denota, dentro de la columna respectiva, con la letra [P]; por lo que, la elegida como última opción, se denota con la letra [U].

Ahora sí, estamos en condiciones de revisar los resultados respectivos, mismos que se muestran en la tabla siguiente:

ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	TOTALES	
CARRERAS																														P	U
Pedagogía	P								U																					1	1
Periodismo	U																													0	1
Cirujano Dentista		P						P																						2	0
Derecho		U												U																0	2
Astronomía			P																											1	0
Diseño y Expresión Gráfica			U												U															0	2
Médico Cirujano				P			P		P							P														4	0
Enfermería				U																										0	1
Ciencias de la Comunicación					P	P																								2	0
Medicina					U	U					U						U				U	U					U	P		1	7
Administración de Empresas							U											U	U				P		P					2	3
Bibliotecología								U																						0	1
Cinematografía										P																				1	0
Psicopedagogía										U																				0	1
Arquitectura											P		P																	2	0
Traumatologo Militar												P																		1	0
Filosofía												U																U		0	2
Nustriología													U							P										1	1
Psicología														P																1	0
Contaduría															P	U					P					U				2	2
Sistemas/Computación																	P													1	0
Zootecnia																		P												1	0
Piloto Aviador																			P											1	0
Físico - Matemático																				U										0	1
Ingeniería Química																						P								1	0
Medicina Forense																							U							0	1
QFB																								P						1	0
Historia																								U					U	0	2
Geografía																									U					0	1
Ingeniería Civil																										P			P	2	0
Teatro y Actuación																											P			1	0

Tabla 1.3.2.4 Diagnóstico sobre la preferencia de carrera, como primera y última opción, de los grupos 491A y 470A, de 4° semestre, del CCH Oriente, 2019-2.

Cabe aclarar que, en esta tabla anterior, las carreras no guardan algún orden específico, sino que están registradas de acuerdo a la participación de cada uno de los alumnos que intervinieron.

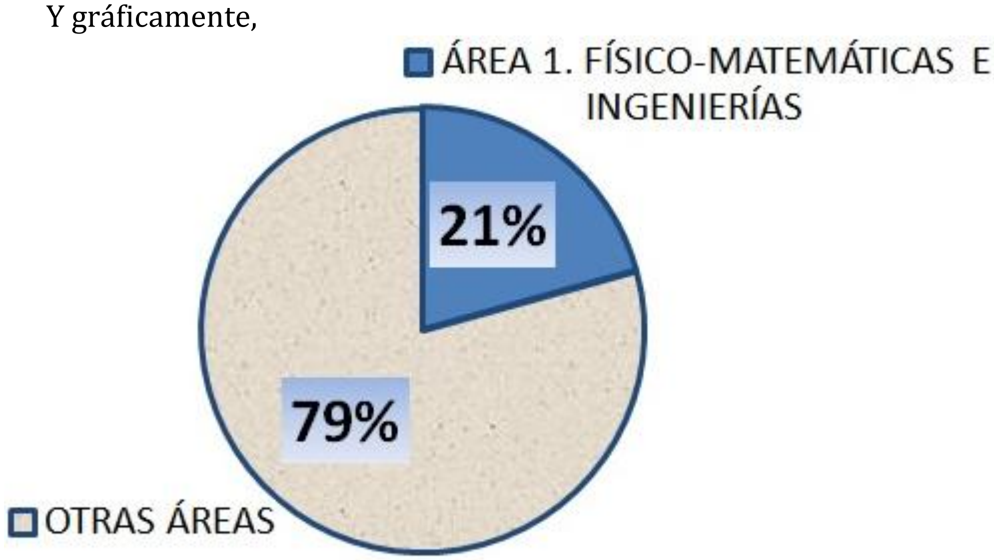
Enseguida, y para efectos de resaltar el gusto o rechazo por una carrera del área de las matemáticas, conviene agrupar las carreras por áreas, de acuerdo con lo que establece la UNAM, en la página de la Dirección General de Administración Escolar (DGAE)[7]:

Sólo para facilitar la comprensión de esta información, vale la pena resaltar que dentro del ÁREA 1. FÍSICO–MATEMÁTICAS E INGENIERÍAS, se ubican las carreras de Arquitectura, Físico–Matemático, Ingeniería Civil, Ingeniería Química y Sistemas/Computación; y, pongamos énfasis en sólo la primera opción de cada estudiante. Los totales respectivos, se muestran en la tabla

ÁREA 1. FÍSICO-MATEMÁTICAS E INGENIERÍAS	6
OTRAS ÁREAS	23

Tabla 1.3.2.5 Elección de carrera, agrupadas por Área 1 y otras, como Primera opción, de los Grupos 491A y 470A, de 4° semestre, del CCH Oriente, 2019-2.

Y gráficamente,



Gráfica 1.3.2.2 Elección de carrera, agrupadas por Área 1 y otras, como Primera opción, de los Grupos 491A y 470A, de 4° semestre, del CCH Oriente, 2019-2.

7 Clasificación de las Carreras Profesionales, por Área. Recuperado el 22 de mayo 2019, de https://www.dgae-siae.unam.mx/educacion/carreras.php

Evidentemente, los resultados ratifican de manera implacable, el reto que nosotros como docentes del área de matemáticas, tenemos frente a nuestro quehacer docente. No obstante, prosigamos.

Al ver las preferencias de carreras profesionales por área, podemos inferir, sólo por no dejar de lado esta oportunidad, una necesidad y una problemática, que en este trabajo pueden cobrar relevancia. Me refiero a que, si el 27% de los alumnos eligieron alguna carrera del Área de Matemáticas, seguramente ellos necesitarán una formación matemática adecuada, que les permita afrontar con éxito, su reto en el nivel inmediato superior; complementariamente, el 73% de los alumnos, tal vez en cierto tiempo, deban enfrentar alguna problemática, relacionada con la productividad del país, problemática que sin duda podría considerarse como tendencia. Recuérdese que esta problemática, se detalló en el apartado Origen de la propuesta, de este trabajo.

Es posible que algunos aspectos relevantes, hayan quedado al margen del marco referencial; no obstante, la intención es abordar aquellos que, de alguna manera, incidieron en el desarrollo de este trabajo.

1.4 Causas y factores asociados a la Situación actual

Al indagar en las posibles causas que han provocado la situación actual, arriba descrita, podríamos enfocarnos en las instituciones educativas, el personal docente, los estudiantes y los tutores o padres de familia. Esta clasificación podría generar un cúmulo de información, como para realizar otro trabajo adicional; aunque seguramente, por el aspecto cronológico inherente, los resultados serían poco precisos. Lo que sí haremos será tratar de inferir qué factores, que involucren ya sea a la institución, a los profesores, a los alumnos y a los tutores o padres de familia, han incidido para dar lugar a la, anterior Situación actual.

Una posibilidad podría ser, el comportamiento que el estudiante muestra durante su estancia en el bachillerato. La Dirección General del CCH, en su proyecto académico para la revisión curricular, toma como base indicadores sobre datos de generaciones: género, edad, antecedentes familiares, actividades de la madre y del padre del alumno, características económicas y socioculturales de la población estudiantil, y los materiales que el alumno consulta. Así, resalta que el comportamiento estudiantil de un plantel es la conjunción de cuatro factores: 1) la propuesta curricular formativa y el contenido de las asignaturas, 2) el docente y sus estilos de enseñanza, 3) el espacio escolar juvenil dado por la dinámica de los planteles y 4) la condición particular del alumno, como actor que construye su propia experiencia educativa. De tal manera que la situación educativa real de la institución, en cada uno de los planteles, está conformada por la imbricación de estos factores. (UNAM – DGCCH, 2009).

Es posible que otra posibilidad, sea la que se relaciona con los alumnos del bachillerato, cuando resuelven problemas matemáticos. Téngase en cuenta que, al presentarles a los alumnos la resolución de un problema matemático, ya sea porque se quiere abordar la enseñanza–aprendizaje de un nuevo tema, o por el simple hecho de reforzar lo ya visto, estará presente la problemática relacionada con las dificultades propias que los alumnos tienen, y en derredor de esto, girará, colateralmente, la correcta comprensión del enunciado del problema respectivo. Considérese también que, la estrategia que le permite “acercarse” a la solución, regularmente está conformada tanto de aciertos como de errores; sin embargo, si el caso fuera que el alumno está atorado, y con el afán de invitar al alumno a que busque otra estrategia que le asegure, ahora sí, “alcanzar” la solución, éste desiste al no estar convencido de abandonar los “aciertos” de la estrategia inicial, dado que, en palabras de él, ya están “garantizados” (Ontiveros, 1993).

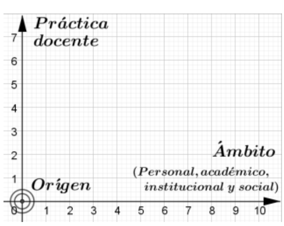
Una alternativa más, podría ser la manera en cómo se inicia o se apertura la primera sesión; es decir, por cuál “puerta” hacemos que los alumnos entren a la matemática.

Sucede que muchos docentes, al abordar un nuevo tema, solemos partir de cuestiones teóricas, definiciones o clasificaciones; lo que, sin lugar a duda, como estrategia, tiende a despertar un interés poco entusiasta en nuestros alumnos, y nos hacer errar el camino. Es preferible dejar que ocurra de manera natural. Como en todas las asignaturas, en las matemáticas también hay diferentes puertas, por las que se puede “entrar” a un nuevo tema. Elíjase la puerta que ofrezca a los alumnos, despertar un interés, adquirir una motivación y afrontar un reto alcanzable. En palabras de Paenza[8], no se puede negar que, en la vida lo primero que encontramos son problemas y no soluciones. Al nacer, nos enfrentamos al problema de sentir frío o hambre; y en consecuencia, buscamos la solución (llorar o gritar); y por el contrario, en el colegio generalmente nos enfrentamos a un problema que uno aún no tiene. A la matemática, debemos evitar entrar por la puerta de las *tecnicalidades* o sea definiciones, clasificaciones o cuestiones teóricas. En el proceso de aprender a resolver un problema, valórese la creatividad (Paenza, 2014).

En general, a fin de facilitarle al alumno ya sea la apropiación de nuevos aprendizajes o la presentación de un nuevo tema, será justo y necesario que el docente, cuente con la habilidad de percatarse de las situaciones descritas en los párrafos anteriores.

Podríamos continuar así, sucesivamente, infiriendo otros factores como causas probables o factores asociados, tales como actualización docente, psicopedagogía, estrategias docentes, formación curricular, dirección del aprendizaje, didáctica general, aprendizaje de la matemática, resolución de problemas, trabajo colegiado, reflexión personal docente, entre otros; sin embargo, al final, todas estas inferencias deberían tener un común denominador: una reflexión consciente, personal y colegiada de nuestra práctica docente.

1.5 Origen de la propuesta



Varios fueron los factores que incidieron en el origen de este trabajo, mismos que se mueven dentro de los ámbitos social, académico, institucional y, personal; todos éstos acoplados en la práctica docente.

Sin pretender ahondar, sino sólo como una referencia, recuperemos lo que se refiere a la *eficiencia terminal*. Ésta, se considera como el avance regular de los alumnos, es decir, cubrir los créditos de las

[8] Adrián Arnoldo Paenza (Buenos Aires, 9 de mayo de 1949) es un periodista, matemático y profesor de matemáticas Argentino, por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), conocido por su trabajo en la divulgación de la matemática, lo que le valió el Premio Leelavati 2014. (*Recuperado el 9 de enero 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Adri%C3%A1n_Paenza).*

asignaturas de matemáticas en tres años. Así, según el prontuario respectivo, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, los alumnos de la Generación 2010, registraron un 49% de eficiencia terminal en el Género masculino, y un 67% en el femenino; por turno, un 76% en matutino y un 37% en vespertino; y por plantel, un 56% en Azcapotzalco, Naucalpan y Vallejo, y un 63% en el Sur y en el Oriente (UNAM – CCH, 2011).

El párrafo anterior, nos deja ver la tarea que nosotros como docentes de matemáticas, aún tenemos pendiente.

De manera integral, en lo que respecta sólo al Área de Matemáticas, se promedia una eficiencia terminal global de 58%, (UNAM – CCH, 2011). Esta situación, seis años después, no cambió mucho, ya que de acuerdo al informe de la Dirección General del Colegio de Ciencias y Humanidades, en el año 2017 sólo se incrementó la eficiencia terminal a un 64% (UNAM–ENCCH, 2017). No obstante este último incremento, la eficiencia terminal de nuestros alumnos, en lo que respecta al Área de Matemáticas, sigue siendo una tarea pendiente y un reto vigente.

Algo que también motivó el interés de este trabajo, tiene que ver con el momento en que, en el aula de matemáticas, nuestros alumnos exclaman "Y eso, ¿para qué me va a servir en la vida? Esta cuestión implica, que la importancia que tienen las matemáticas en nuestro entorno cotidiano, debe aflorar; acción que implica el compromiso irrefutable del docente. Hablando de la importancia de estudiar matemáticas, véase el párrafo siguiente.

Es importante estudiar matemáticas por tres motivos: primero, porque fortalece la capacidad de interpretar la información, y de entender los fenómenos implícitos en una sociedad eficaz, informada y globalizada; segundo, facilita la apropiación de herramientas para la resolución de los problemas cotidianos, lo que impactará en el logro de mejores competencias laborales; y, tercero, individualmente resulta muy satisfactorio apreciar de las matemáticas, su perfección, su ingenio, su estructuración, su trascendencia, su sabiduría y su belleza, entre otras cualidades. Además, el costo económico social, por no contar con una literacidad matemática[9], se entiende así: aunque un individuo sea capaz de realizar las operaciones aritméticas básicas, difícilmente sabe cuándo y cómo usarlas, debido a un bajo desarrollo de habilidades de razonamiento numérico; esto da lugar a que muchas personas tengan dificultad para calcular descuentos que implican porcentajes, calcular proporciones, estimar probabilidades, interpretar estadísticas o comprender gráficos y propiedades técnicas de aparatos e instrumentos; lo que finalmente se refleja en grandes consecuencias para la productividad de un país (Paulos, 2001).

En el ámbito institucional, el intento de la UNAM que motivó también el origen de este trabajo, fueron los estándares de matemáticas, publicados por el Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM), con la intención de enfrentar el problema de resultados deficientes de los alumnos, en sus estudios de matemáticas. Esta Universidad, en su búsqueda por mejorar la educación matemática, en sus alumnos de bachillerato, es consciente de que este problema conlleva aspectos como la revisión del plan de estudios, situación laboral y curricular de los profesores, métodos de enseñanza, etc. Empero, la cuestión clave es: Los estudiantes ¿Qué deben aprender y por qué? Llama la atención que, aunque más de uno de los aspectos anteriores, podría ser difícil cambiarlos, el SUMEM resalta que algo sí se puede hacer, en relación con el *enfoque didáctico*. Llama a re–considerar que las matemáticas son amplias y variadas, y que éstas permiten seguir multitud de rutas, en virtud de los varios temas que la conforman, y la interrelación que guardan éstos entre sí. Además, las razones para aprender matemáticas, han cambiado, al igual que las maneras de usarlas y de aplicarlas (UNAM–SUMEM, 2016).

Culminaremos esta parte, con dos de los factores que, en el ámbito personal, motivaron el interés de este trabajo.

El primero gira alrededor de la problemática siguiente: atender y afrontar, de manera directa, los retos académicos que actualmente

[9] Literacidad: "[…] *conjunto de competencias que hacen hábil a una persona para recibir y analizar información en determinado contexto por medio de la lectura y poder transformarla en conocimiento posteriormente, para ser consignado gracias a la escritura*. (Recuperado el 11 de enero 2019, de http://literacidaducn.blogspot.com/2009/05/definicion-de-literacidad.html).

existen en el bachillerato de la UNAM, como son la reprobación, el rezago y la deserción escolares.

Aunado a lo anterior, téngase en cuenta lo siguiente. Las matemáticas, como una semilla por germinar, siempre están presentes en nuestros alumnos, sin importar el ambiente en que se encuentren; no obstante, esa semilla necesita del agua –lo que nosotros, como docentes, debemos facilitar– para que el razonamiento matemático esté en la posibilidad de aflorar (Paulos, 2001).

El segundo, nos remonta al año 2016, precisamente al jueves 27 de octubre, ante alumnos del GRUPO 122–A, de la Asignatura Matemáticas I, del primer semestre, del Colegio de Ciencias y Humanidades, Plantel Oriente.

En esa ocasión, la idea era aplicar un diagnóstico a los alumnos, respecto de algunas cuestiones matemáticas primordiales, mismas que consistían en identificar cuál tema, de acuerdo a sus conocimientos y habilidades, era el que les gustaría que se revisara de manera inmediata.

El instrumento para este propósito, fue el siguiente:

UNAM

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
PLANTEL ORIENTE

PROFESOR: ANTONIO GRANILLO MARTÍNEZ

CCH oriente

AÑO	MES	DIA	GRUPO
APELLIDOS			
NOMBRE			

ASIGNATURA	UNIDAD	ACTIVIDAD	
MAGA 1. MATEMÁTICAS, ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA		*EN CLASE*	*Aplica tus conocimientos...*

Instrucciones: **Determina la prioridad de la problemática, de 5 a 1 (donde 5 es la más alta y 1 es la menos importante), de acuerdo a qué tema te gustaría que se revisara en primera instancia y cuál en último lugar.**

T E M A	PRIORIDAD
De la aritmética al álgebra.	
Resolución de Ecuaciones 1er y 2° Grado.	
Operaciones Básicas $(+, -, \times, \div, \sqrt{\ })$.	
Traducir y realizar el planteamiento algebraico.	
Fortalecer razonamiento matemático en la resolución de problemas.	

FIGURA 1.5.1 PRIORIDADES DE PROBLEMÁTICAS MATEMÁTICAS.

Así que, los alumnos debían elegir el tema que les gustaría que se revisara de manera inmediata, mediante la designación de la prioridad más alta (prioridad 5), enseguida, el que fuera en segunda importancia (prioridad 4), y así sucesivamente, hasta determinar qué tema podría ser atendido en último lugar (prioridad 1).

En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

	PRIORIDAD DESIGNADA POR ALUMNOS																				
T E M A ↓ / Alumno→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
De la aritmética al álgebra.	4	4	3	2	4	4	4	3	3	4	3	2	5	4	3	4	2	3	1	4	4
Resolución de Ecuaciones 1er y 2° Grado.	3	2	1	3	5	3	3	2	5	1	5	1	3	2	4	2	5	5	2	5	1
Operaciones Básicas ($+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$).	1	1	5	1	3	1	1	1	1	2	2	3	1	1	1	1	1	1	5	1	2
Traducir y realizar el planteamiento algebraico.	5	3	4	4	2	2	2	4	4	5	4	5	4	3	2	3	3	2	4	3	3
Fortalecer razonamiento matemático en la resolución de problemas.	2	5	2	5	1	5	5	5	2	3	1	4	2	5	5	5	4	4	3	2	5

Tabla 1.5.1 Prioridades de problemáticas matemáticas, de los alumnos (2016).

Nótese que en esta tabla anterior, se incluyeron tantas columnas como alumnos fueron diagnosticados. Además, en cada una de estas columnas cada estudiante, de acuerdo a su sentimiento, determinó las prioridades que, como problemática, cada tema debía tener. Por tal razón, cada una de las columnas contiene los número del 5 al 1. Pongamos especial atención en la casilla sombreada, debido que remarca el tema que cada alumno determinó con la mayor prioridad de problemática (Prioridad 5).

Los resultados globales del diagnóstico, respecto al tema que los alumnos designaron la mayor prioridad, porque implican la mayor dificultad (Prioridad 5), se muestran a continuación:

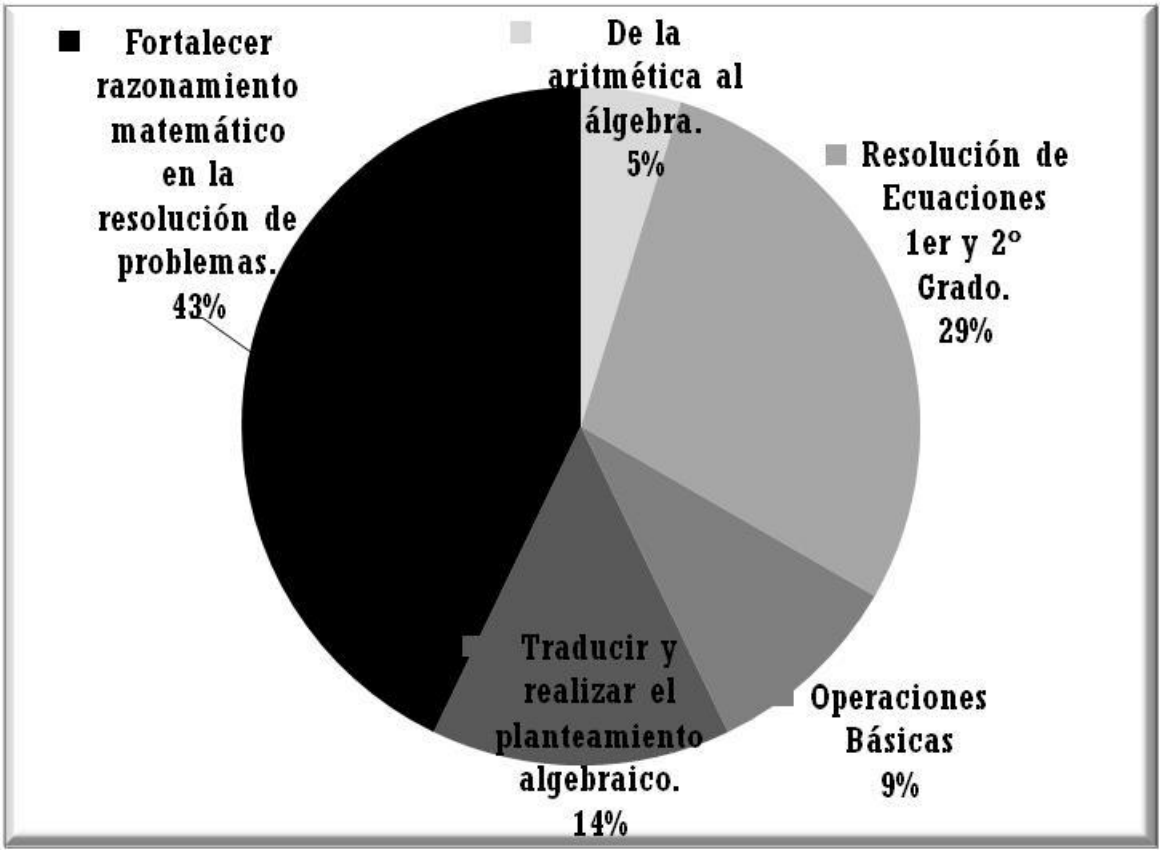
T E M A	PRIORIDAD 5
De la aritmética al álgebra.	1
Resolución de Ecuaciones 1er y 2° Grado.	6
Operaciones Básicas $(+, -, \times, \div, \sqrt{\ })$.	2
Traducir y realizar el planteamiento algebraico.	3
Fortalecer razonamiento matemático en la resolución de problemas.	**9**

TABLA 1.5.2 TEMAS CON MAYOR PRIORIDAD DE DIFICULTAD PARA LOS ALUMNOS (2016).

Es importante subrayar que, el diagnóstico fue aplicado a una muestra de 21 alumnos de reciente ingreso al bachillerato que, por sus edades cuyo promedio es de 15 años, podemos considerar que sus expresiones, respecto a las prioridades en las problemáticas de temas matemáticos, son suficientemente objetivas y dignas de aceptarse como punto de partida en la mejora de nuestra práctica docente.

Enfoquémonos en la enseñanza de las matemáticas en el “Ciclo 12–16”, etapa en la que por su edad se ubican los alumnos de este diagnóstico. Es vital valorar dos aspectos: el primero, la investigación constante, como el diagnóstico anteriormente aplicado al GRUPO 122–A; y el segundo, la combinación de técnicas metodológicas y de actividades en la línea de la comunicación bilateral profesor–alumno. Esta comunicación será como el cimiento fundamental que, por una parte, ayuda a superar las dificultades individuales, y por la otra, colabora en la construcción de los conceptos (Alsina, 1998).

Gráficamente, tenemos:



Gráfica 1.5.1 Gráfica porcentual de los Temas con mayor prioridad de dificultad para los alumnos (2016).

Con la información mencionada en este apartado, hemos sentado los fundamentos que, como aspectos relevantes, han motivado el interés en este trabajo; así que, no queda más por agregar, que sólo una conclusión trascendente.

Por todo lo antes descrito, predominantemente en atención a la dificultad que de manera contundente encontramos en alumnos de reciente ingreso al bachillerato, como los del GRUPO 122–A, y apoyado en los resultados de la práctica diagnóstica respectiva, afloró el motivo que hizo germinar el interés personal, en el proceso **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior).

De esta manera, con base en los antecedentes; la situación actual; las posibles causas y factores asociados; el marco referencial; y los aspectos que dieron lugar a este trabajo; estamos entonces, en condiciones de enunciar el objetivo, que nos guíe por el trayecto que debemos seguir en este trabajo.

1.6 Objetivo

Diseñar una propuesta didáctica orientada a promover el proceso de razonamiento matemático, como una estrategia para la resolución de problemas, que involucre, por una parte, activa y participativamente, a los estudiantes de Educación Media Superior, y por otra, al docente, como un facilitador de los primeros.

(Página intencionalmente en blanco)

2. Fundamentación teórico–metodológica

Para la cimentación de esta propuesta didáctica, se hace necesario incursionar en el terreno del razonamiento matemático y de la resolución de problemas, desde la significación de ambos conceptos hasta las aproximaciones teórico–metodológicas, y específicamente cómo se conjugan para dar lugar a nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**. Acompañan a esta cimentación las expectativas, los beneficios, la importancia y la relevancia, inherentes al presente trabajo.

2.1 El razonamiento matemático y la resolución de problemas: ¿Qué son?

Sin intentar abordar de lleno estos tópicos, repasemos el significado de cada uno de ellos.

2.1.1 El razonamiento matemático

El razonamiento matemático parte de principios simples, como las definiciones de los objetos matemáticos y sus relaciones entre ellos. Se puede decir, que el núcleo del razonamiento matemático, son los postulados y las nociones comunes (Millán, 2004).

El razonamiento matemático tiene como esencia generalizar y conjeturar; aquella, la generalización, tiene lugar cuando se le da sentido a algún patrón, y conjeturar deviene, una vez estructurada la generalización. Adicionalmente, el razonamiento matemático, consiste en involucrarse en el problema, lo suficiente como para diferenciar conscientemente lo correcto, y estructurarlo como una conjetura. Es además, una manera de proceder y de conocer el mundo, cuyo nivel de efectividad, está supeditado al uso de los cuestionamientos matemáticos y al manejo de estados emocionales y psicológicos. Se puede afirmar que es un proceso que contribuye particularmente al desarrollo de uno mismo, que aumenta nuestra comprensión del mundo, tiene aplicación en un ámbito mucho más general, más allá de problemas matemáticos o científicos, y que requiere un tiempo para hacer una pausa y reflexionar sobre las ideas clave y los momentos significativos; y en tal caso, en virtud de tal reflexión, es probable haber activado en uno mismo la conciencia, que es el punto donde se entrelazan conocimiento, información, experiencia, percepción y sensaciones, ellos mismos y con el exterior que los rodea (Mason et al, 2013).

2.1.2 La resolución de problemas

Al margen de este trabajo, podemos retomar que la resolución de problemas, que es el acto y resultado de resolver, está vinculada al proceso o a su fase final, cuando el problema efectivamente es resuelto[10].

Una definición que podríamos tomar como aceptable es: "Un proceso cognitivo-afectivo-conductual mediante el cual una persona intenta identificar o descubrir una solución o respuesta de afrontamiento eficaz para un problema particular"[11]

No obstante las dos aportaciones anteriores, para nuestros propósitos, la resolución de problemas es una actividad de habilidad práctica bilateral entre el profesor y el alumno; cuyo principal objetivo es solucionar un problema matemático. Dicha actividad

---

[10] Resolución de problemas: "[…] *La noción puede referirse a todo el proceso o a su fase final, cuando el problema efectivamente se resuelve.* […] *comienza con la identificación del inconveniente* […] *se hace necesario establecer una planificación para desarrollar la acción que derive en la resolución* […]". (Recuperado el 26 de octubre, de https://definicion.de/resolucion-de-problemas/

[11] Bados & García (2014). *Resolución de problemas*. Universitat de Barcelona. Recuperado el 26 de octubre 2019, de http://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/54764/1/Resoluci%C3%B3n%20problemas.pdf. Pp 2.

requiere que el profesor ayude al alumno de manera efectiva, natural y no mucho ni poco; y lo acompañe, de suerte que el estudiante asuma una parte razonable del trabajo. La manera en que el profesor puede ayudar al alumno, puede ser con base en preguntas naturales que le "digan" al alumno por dónde se puede dirigir, para alcanzar la solución del problema. El tal caso, las preguntas deben tener dos características comunes: a) el sentido común (en virtud de que serán de un modo natural); y b) la generalización (porque ayudarían, sin imponerse, y dejarían al alumno mucho por hacer). Es decir, que son actividades que acomodan las partes del pensamiento, con un instinto predispuesto para actuar ante un problema propuesto. Así que, si el alumno alcanza satisfactoriamente la solución del problema, entonces el alumno habrá desarrollado su habilidad en la resolución de problemas (Pólya, 1987).

2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas

Nuestra propuesta didáctica, es concebida a partir de dos aproximaciones teórico–metodológicas: la primera, *Cómo razonar matemáticamente*; y la segunda, *Cómo plantear y resolver problemas.* Así, conviene indagar sobre las características y aspectos relevantes de ambas aproximaciones, pero de tal manera que tanto características como aspectos relevantes, se desglosan en incisos; para la primera, en incisos con letras (***a***, ***b***, ***c***,...), y la segunda, en incisos con números (***1***, ***2***, ***3***,...). Ésto, debido a que en el apartado del Proceso **RAMERPEMS**, cuando hablemos de nuestra propuesta didáctica, se hará referencia, mediante los incisos correspondientes, a las partes desglosadas.

Es necesario enfatizar que, lo descrito a continuación acerca de ambas aproximaciones, al momento de indagar, se hace con base en lo que los autores de ambas aproximaciones, vierten en sus publicaciones respectivas; y en este trabajo, sólo se recupera lo conducente para nuestra propuesta.

2.2.1 Cómo razonar matemáticamente – Mason, et al.

En la obra *CÓMO RAZONAR MATEMÁTICAMENTE*, de Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (2001), se resaltan las características y las fases de dicho proceso, mismas que a continuación se desglosan, superficialmente.

Existe la convicción de que el razonamiento matemático, se promueve y se practica, si: se proponen problemas adecuados a las capacidades de los alumnos, se vincula la acción y la emoción con el entorno social del alumno, se provoca la contradicción y la sorpresa, se asegura que lo que se aprende va de acuerdo con la experiencia propia, se acompaña (por parte del profesor) a los alumnos durante todo el desarrollo y se practica la reflexión sobre esta experiencia.

Características generales de *CÓMO RAZONAR MATEMÁTICAMENTE*.
i) Requiere, por parte del alumno, un involucramiento tripartita físico–emocional–intelectual; ***ii)*** No pone de relieve a la solución sino al proceso aplicado; ***iii)*** Favorece un enfoque informal, para aumentar la confianza y lograr progresos sustanciales; ***iv)*** Asume que el alumno puede razonar matemáticamente; ***v)*** Mejora a través de la práctica reflexiva; ***vi)*** Se desarrolla en una atmósfera de cuestionamiento, reto y práctica reflexiva; ***vii)*** Ayuda a comprenderse a sí mismo y al mundo; ***viii)*** Ve la importancia de separar el detalle del cálculo y contemplar su forma y figura; ***ix)*** Se auxilia de procesos tales como la especialización y la generalización; ***x)*** Pone el "ojo" en el "por qué", más que en el "qué"; ***xi)*** Puede conducir a una introspección[12]; ***xii)*** Implica ser cautelosos al creer en un patrón observado o en una generalización, mediante la comprobación respectiva con una variedad de ejemplos; ***xiii)*** Puede tener como estructuras de apoyo, el tomarse un tiempo para escribir notas y trabajar a conciencia un problema; ***xiv)*** Implica que al enfrentarse a un problema, es bueno intentar con algún ejemplo específico, que lleve el problema a un área de confianza; ***xv)*** Tiene como esencia que, después de estructurar la generalización, deviene una conjetura, misma que debe investigarse para verificar si es precisa o correcta (Mason et al, 2013).

[12] Introspección: "[…] *mirar a dentro… alude a la mirada que un individuo dirige hacia su interior…*". (Recuperado el 4 de junio 2019, de https://definicion.de/resolucion/).

2.2.1.1 Las fases de *Cómo razonar matemáticamente*

Las tres fases que conforman el proceso de *CÓMO RAZONAR MATEMÁTICAMENTE*, son: ***Abordaje, Ataque*** y ***Revisión***. Procedamos a recuperar, con base en las fases respectivas, los aspectos relevantes.

Respecto a las fases, algo que resulta de vital importancia, es invertir un tiempo tanto al principio de la resolución, para atacar bien el problema, como al final, para revisar el camino que se siguió al resolverlo. No hay una regla o lineamiento de cuándo precisamente inicia o termina una fase; lo que marca ya sea el inicio o término, es un *sentimiento* o una emoción que surge al resolver el problema.

Hechas las aclaraciones pertinentes, revisemos algunos detalles de las fases.

Fase *abordaje*.

Inicia cuando se descubre el problema, o se procede con una ***especialización***, y tiene como idea principal, interpretar el problema mediante ejemplos concretos que inspiren confianza, sin intentar aún resolver el problema en sí. Los pormenores respectivos consisten en que:

a) Prepara el terreno para un *ataque* efectivo al problema.

b) Requiere leer bien el problema, para comprenderlo correctamente.

c) Formula el problema, de forma precisa y distingue exactamente qué es lo que realmente se requiere.

d) Implica hallarle el sentido al problema, ya sea comprendiendo la información proporcionada o descubriendo qué es lo que realmente se está preguntando.

e) Requiere estructurar el proceso de resolución, mediante la respuesta a las preguntas ¿Qué es lo que sé? ¿Qué es lo que quiero? ¿Qué es lo que puedo usar? ¿Qué es lo que no he usado aún?; y conclusivamente.

f) Se comprende el problema satisfactoriamente y se realizan correctamente los preparativos técnicos para el *ataque*, tales como elegir una notación, una tabla de resultados, un diagrama, unas imágenes, unos cuadros, etc.

A propósito de esta fase, y con la finalidad de ayudar al alumno, se proponen unos cuestionamientos prácticos.

Cuestionamientos propios del estudiante.
¿Qué es lo que sé?... Primero, lo que sepa acerca del problema, luego lo relativo a la experiencia pasada. Conviene también que se pregunte ¿Alguna vez he visto algo parecido? Una manera de comprobar si el problema ha sido bien comprendido, es escribirlo o plantearlo a alguien más, pero con palabras propias; asimismo, es recomendable leer detenidamente cada enunciado del problema, para encontrar la manera en que posiblemente impacte en la solución; adicionalmente, téngase en cuenta que la *nave* que lleva al éxito, es el enfoque activo para dibujar diagramas, especializar, elaborar tablas, reformular el problema e intentar la resolución.

¿Qué es lo que quiero?... En otras palabras ¿Qué es lo que tengo qué hacer? Para facilitar la respuesta a este cuestionamiento, conviene meditar que "no tener claro lo que se quiere", se contrarresta con el uso constante y consiente de la ***rúbrica***; asimismo, cuando se trate de encontrar un número (solución), es muy recomendable asignarle un nombre conciso, simbolizarlo y especificar en lugar de qué está el símbolo; finalmente, considérese que los casos de ambigüedad, mala interpretación y falta de claridad son frecuentes en el razonamiento matemático, pero solventados con la ***rúbrica***.

¿Qué puedo usar?... Si fuera el caso de un problema que parece complicado y difícil de resolver, éste se suaviza si se transfiere a un contexto nuevo, tal vez diagramas, tablas, cuadros, datos, material físicamente manipulable, símbolos, etc.; aunque se sugiere primero, como un buen ejercicio, intentar manipularlo mentalmente, antes de usar alguna representación[13]; adicionalmente, estímese por una parte, que el proceso mental prepara el terreno para el uso de diagramas, y por otra, que trabajar con imágenes mentales, desarrolla la habilidad para manipular objetos físicos –. Valórese que el uso de una representación adecuada, por muy simple que sea, puede transformar un problema, que aparente ser difícil, a uno fácil. Para terminar este apartado, recuérdese siempre que, el objetivo de un

[13] Representación: "[…] *puede tratarse de la idea o imagen que sustituye a la realidad* […]". (Recuperado el 11 de junio 2019, de https://definicion.de/representacion/).

pensador matemático es obtener una buena solución, de una manera simple y evitar resolver el problema de una manera complicada.

De manera práctica, esta fase termina cuando uno se ha generado el sentimiento y el deseo de involucrarse, en tratar de resolver el problema.

Fase *ataque*.
Una vez adquirido el deseo de querer resolver el problema, es el momento de atacarlo. Los pormenores respectivos, son:

g) Sustenta principalmente el razonamiento que se da cuando el alumno siente que se ha adueñado del problema.
h) Da lugar a los momentos especialización y generalización.
i) Se conforma de los momentos ¡ATORADO! y ¡AJA!, que son útiles, aquel, para aceptar que no se cuenta con el total de información requerida al solucionar el problema, y éste, para intentar otro camino posible.
j) Esencialmente, denota el mayor esfuerzo por resolver un problema.
k) Puede culminar en una solución completa o incompleta, ya sea una conjetura –misma que se debe intentar demostrar que es cierta– o una pregunta sin resolver.
l) Termina cuando el problema se ha resuelto o se abandona.

Llegados a este punto en el proceso, es muy importante y provechoso, hacer una pausa para mirar atrás y analizar, tanto lo bueno como lo que se pudo realizar de una mejor manera.

Fase *revisión*.
En esta última fase, se suscita el cierre del proceso de resolución del problema. Se puede diferenciar en:

m) Comprobar el proceso de resolución realizado, se reflexiona sobre dicho proceso y las dificultades, y se amplía el problema y su solución.
n) Que cuando se haya llegado a una solución razonable, o se sienta no poder continuar y aceptar la rendición, es esencial revisar el proceso de resolución, a fin de verificar y corregir las habilidades

de razonamiento y, si es el caso, ubicar la solución en un contexto más general.

o) Realizar, por una parte, una retrospectiva para verificar la solución y la resolución, a fin de reflexionar sobre las ideas, eventos y momentos clave, y por otra, una prospectiva[14] para extender los procesos y resultados a un contexto más simple y digerible, con mayor provecho o beneficio.

p) Redactar en palabras propias, minuciosamente y con detalle, la solución a fin de reconstruir los argumentos, como si un compañero fuese a leerla.

q) Que en cualquier caso, ya sea éxito, atorado o fracaso, siempre se debe terminar con esta fase, con el propósito de rescatar procesos tanto fructíferos como infructuosos.

Esta última fase, es importantísima en la medida en que se lleve a cabo. Si tal vez el problema no cede, ya sea porque no ha sido bien comprendido, y se deseara abandonarlo, antes de hacerlo, esta fase debe realizarse, a fin de que cuando se quiera retomar el problema y comenzar de nuevo, sea de una manera más relajada y en confianza.

A la par de todo el proceso que implican las fases antes mencionadas, se consideran unos momentos de importante relevancia, mismos que enseguida se describen.

2.2.1.2 Momentos del proceso Cómo razonar matemáticamente

Los momentos que enseguida se describen, además de no ser necesariamente consecutivos, ni ubicarse en una fase específica, pueden aplicarse cuando sean necesarios; y, además de denotar acciones, ordenados de manera estratégica, impactarán en el alcance de la solución del problema. Estos momentos son la ***especialización*** y la ***generalización***.

La especialización

Debido a su efectividad, diversidad y sencillo manejo, la especialización es básica para el razonamiento matemático. Consiste en: ***i)*** Recurrir a los ejemplos pertinentes, para aprender del problema; ***ii)*** Elegir ejemplos con base en tres criterios: *al azar*, para

[14] Prospectiva: "[…] *Conjunto de estudios que se llevan a cabo* […] *a modo de determinar lo que ocurrirá de forma anticipada*". Recuperado el 18 de octubre 2019, de https://www.significados.com/prospectiva/

hallar algún sentido al problema; *sistemáticamente*, para preparar las bases hacia la generalización; e *ingeniosamente*, para comprobar la generalización; ***iii)*** Establecer las bases para expresar un patrón que se ha detectado, y si no llegase a surgir alguno, entonces, implicaría simplificar el problema para hacerlo más específico, hasta lograr algún progreso; ***iv)*** Afirmar conjeturas[15], mismas que, con una especialización adicional, se pueden aceptar o rechazar; al respecto, el proceso de justificar una conjetura, implica más generalización, con cambio de énfasis en suponer "qué puede ser cierto" y "por qué puede ser cierto"; ***v)*** Ser la evidencia sobre la que se hace la generalización.

La generalización

Interrelacionado con el momento de la ***especialización***, está el momento de la ***generalización***. Ésta empieza cuando se tiene la sensación de que hay una secuencia de números, que pueda ser representada o modelada por una expresión matemática, es decir, un patrón subyacente[16] y, aún cuando éste no pueda describirse, se debe buscar darle sentido. La ***generalización*** estriba en detectar en el patrón, tres posibilidades: ***i***) *aquello*, que es probable que sea cierto (conjetura), ***ii***) *por qué*, es probable que sea cierto (justificación) y, ***iii***) *dónde*, es probable que sea cierto. La intención es llegar a un planteamiento más general del problema, o sea otro problema.

Otros momentos que también merecen relevancia, en el proceso de *Cómo razonar matemáticamente*, son ¡Atorado!, ¡Ajá!, Rúbrica, Verifica y Reflexiona, mimos que se describen a continuación.

¡Atorado!

Como en todo proceso, existe la posibilidad de encontrarse con algún obstáculo en el camino, que evite que todo funcione como se espera. Todo parecería que se está ¡atorado! , y cuando se está, se debe reconocer y aceptarlo con calma y sin sentimiento de culpa o tensión. Este estado, además de ser normal, es un estado en el que se cae cuando las cosas empiezan a complicarse y se manifiesta cuando el

---

15 Conjetura: "[…] *juicio que se forma como resultado de realizar observaciones o de analizar indicios* […]". (Recuperado el 7 de junio 2019, de https://definicion.de/conjetura/)

16 Subyacente: "[…] *puede traducirse como el que está extendiendo por debajo* […]". (Recuperado el 16 de junio 2019, de https://definicion.de/subyacente/)

alumno piensa: “No entiendo…”, “No sé qué hacer acerca de…”, “No veo cómo…”, “No veo por qué…”. Escribir ¡atorado! cuando se está, es el primer paso para salir del bache. Algunas cosas valiosas que podrían suceder cuando se está ¡atorado!, son que especializa mentalmente, y propicia el hábito de usar diagramas, material manipulable, hacer una tabla o hacer experimentos manuales.

¡Ajá!

En consecuencia, para salir de la situación antes descrita, sería el momento de decir… ¡Ajá! En este estado o momento, pueden suceder tres posibilidades: ***i)*** Un *intento* más; ***ii)*** Ver alguna salida en la que *puede ser* algo o alguna otra cosa más; o ***iii)*** Preguntarse “*Pero, ¿por qué…?* En general, ante un obstáculo que impida avanzar, es decir, que se esté *¡atorado!*, el poner en marcha un nuevo plan para la resolución del problema (*¡ajá!*), puede progresar a un gran paso.

Rúbrica

Haremos un paréntesis para enfatizar el sentido en el que, en este trabajo, se asumirá la palabra rúbrica[17]; ya que aunque tiene varios significados, en este caso se tomará el sentido en que se da testimonio de algo o se concluye algo; cerramos el paréntesis. La rúbrica consiste en escribir apuntes o notas, en palabras clave, en color rojo y al margen. Se sugiere que sean palabras propias, familiares o que acomoden mejor. Esto es, describir el rastro del camino que se ha seguido, a lo largo de la experiencia matemática, pero prefiéranse notas breves que describir o reconstruir lo que se hace. El beneficio de este momento, es que dicha vivencia o experiencia no se pierda y después pueda reflexionarse, analizarse y estudiarse. Pueden ser variados los aspecto sobre los que se pueda tomar nota, como por ejemplo: ⏩ todas las ideas, sin excepción, incluso las matemáticas, que surjan durante la resolución del problema; ⏩ lo que se está intentando hacer; ⏩ las emociones clave que se sientan al respecto de la resolución del problema (esto, *ablanda* la resolución respectiva); ⏩ momentos clave que prevalecen en la memoria; ⏩ lo que de manera positiva puede aprenderse de la experiencia.

[17] Rúbrica: “[…] *Dar testimonio de algo* || *Concluir o coronar* […]”. (Recuperado el 28 de enero 2020, de https://www.definiciones-de.com/Definicion/de/rubricar.php)

Evítese seguir la rúbrica de manera esclavizada, dogmática[18], cegada o que interfiera con el razonamiento útil; priorícese, por una parte, palabras propias con naturalidad, que surjan al identificar qué se ha hecho y al sugerir qué podría hacerse; y por otra, la estructura del proceso de resolución, para organizar, registrar y crear experiencias matemáticas. Inclúyanse, además de las ideas que alientan, las "sugerencias" (¡ajá!) de qué hacer si se está atorado.

Verifica

Para tener la seguridad de que se está avanzando por el camino correcto, respétese la importancia de este momento (verifica). A lo largo del desarrollo del proceso, y en todo momento, después de cualquier cálculo, razonamiento o introspección sobre algunos ejemplos (al especializar), y aunque parezca insignificante, sin sentido o que no ayuda para la solución, se recomienda comprobar, ratificar o constatar que en efecto, dicho cálculo, razonamiento o introspección resuelve el problema original.

Reflexiona

Este momento implicaría un comentario, un consejo o un cambio de dirección. Pensar y analizar cada uno de los cálculos, razonamientos, introspecciones y pasos, con atención y detenimiento, para estudiarlos, comprenderlos bien, formarse una opinión sobre ellos o tomar una decisión, es lo que se denomina *reflexiona*[19]. Reflexiónese en lo que ha pasado, después de haber hecho todo lo que se pudo y se quiso hacer. Lo útil es escribir lo que se realizó, porque ayudaría posteriormente, a retomar el problema, de una manera fortalecida, fresca y eficiente; lo anterior, sin importar si se avanzó o no. Reflexionar implica también resumir, lo que a menudo libera el bloqueo cuando se está atorado.

Para concluir este apartado, revisemos, en los párrafos siguientes, cómo en esta aproximación teórico–metodológica, se entrelazan las fases y los momentos antes descritos.

---

[18] Dogmática: "[…] *proposición que se toma como cierta e innegable* […]". (Recuperado el 16 de junio 2019, de https://definicion.de/dogma-2/

[19] Reflexiona: "*Pensar atenta y detenidamente sobre algo.*". (Recuperado el 11 de junio 2019, de https://dle.rae.es/?id=VdQ3wR1).

2.2.1.3 Interacción entre las fases y los momentos

Si se quisiera establecer un vínculo que entrelace las fases de abordaje y ataque, éste sería una combinación de la especialización y la generalización; en virtud de que, es en aquellas donde tiene lugar una convivencia matemática con el problema e implica mayor especialización y generalización; es ahí donde también existen dos acciones matemáticas esenciales, que son conjeturar y justificar convincentemente, mismas que dependen de la especialización y la generalización.

La fase ataque considera que, al estar solucionando un problema, es posible usar, formular y aplicar distintos enfoques o planes; es en donde sobresalen todas las ideas probadas, largos periodos de espera de nuevas introspecciones o enfoques y, es donde ocurren los casos más apasionados de ¡Atorado! y ¡Ajá! En esta fase, también se puede reflexionar sobre la manera en que se dio la especialización y la generalización. Cabe agregar que, el mayor provecho o beneficio de esta fase, está en redactar la solución, como si alguien más fuese a leerla, ya que se trata de que ese alguien, que aún no se ha enfrentado al problema, pueda "seguir" lo que se hizo y, lo más importante, que sepa por qué; en virtud de que al saberlo, se da lugar a nuevas ideas, mismas que podrían mejorar la solución y extenderla para resolver otros problemas. En general, se trata de identificar, distinguir y diferenciar las ideas centrales en la solución, de las ideas de menor importancia.

Por último, se debe tener claro qué tanto están relacionadas la especialización y la generalización, ya que si el razonamiento matemático fuera una moneda, en una cara estaría la especialización y en la otra la generalización; en virtud de que la interrelación que hay entre la especialización y la generalización constituye en gran parte el razonamiento matemático.

Hasta aquí, lo relacionado con esta primera aproximación teórico–metodológica. Procedamos entonces, con la segunda.

2.2.2 Cómo plantear y resolver problemas – Pólya, G.

Referente a la obra *CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS*, de Pólya, G. (1987), se puede adelantar que acomoda los elementos del pensamiento, a fin de prepararse para la resolución de un problema. De igual manera que en el apartado anterior, se resaltan en esta parte, las fases y las características predominantes de esta aproximación teórico–metodológica.

2.2.2.1 Las fases de Cómo plantear y resolver problemas

Se contemplan cuatro fases: ***Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecución del plan*** y ***Visión retrospectiva***. En seguida, revisaremos los aspectos relevantes.

Fase *Comprender el problema*.

Ésta es la primera de cuatro fases y se refiere a consideraciones que permitan afrontar el problema. A continuación, se describen.

1) Dar respuesta a cuestionamientos como ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuál son los datos? ¿Cuál es la condición? ¿La condición es suficiente para determinar la incógnita? o ¿La condición es suficiente, redundante o contradictoria?
2) Propiciar en el alumno el interés, para facilitar la comprensión del problema
3) Una vez elegido el problema adecuadamente, ni muy fácil ni muy difícil, éste debe exponerse de manera natural
4) Apoyarse en figuras, dibujos, imágenes o notaciones que satisfagan la condición
5) Familiarizarse con el problema, mediante cuestionamientos como ¿Por dónde debo comenzar? ¿Qué puedo hacer? o ¿Qué gano haciendo *esto*? Entre otros

En general, esta fase se refiere a rodearse de las habilidades, herramientas y conocimientos previos, para comprender lo que se requiere.

Fase *Concebir un plan*.

Una vez comprendido el problema, se hace necesario analizar cómo y por dónde se empezaría con la resolución del problema. En esta fase, cabría analizar cómo se relacionan entre sí los distintos elementos del problema; es decir, los datos, las incógnitas y las condiciones que se especifican en el problema. Los pormenores correspondientes, son:

6) Determinar la relación entre los datos y la incógnita, y en caso de no hallarla, considerar problemas auxiliares.
7) Da cabida a responder cuestionamientos, en caso de que el problema se complique, como por ejemplo ¿Existe algún problema semejante, análogo o ligeramente diferente, pero más accesible? ¿Conoce algún teorema que pueda ser útil? ¿Puede utilizarse la solución de algún problema ya resuelto? ¿Podría enunciar el problema de otra manera o plantearlo diferente? ¿Puede resolver una parte del problema? ¿Ha empleado todos los datos y toda la condición? ¿Ha considerado todas las nociones esenciales del problema?
8) Destacar, por una parte, que las ideas brillantes que dan lugar a un plan, se basan en las experiencias y en los conocimientos previos; y por otra, que lo esencial en la solución de un problema, es el concebir la idea de un plan.
9) Tener la seguridad de que un plan, se ha concebido, cuando se sabe "a groso modo", y paso a paso, qué cálculos, razonamientos o construcciones habrán de efectuarse para determinar la incógnita.

En pocas palabras, se debe lograr tener claro hacia dónde se quiere llegar, en el proceso de solucionar el problema. Terminada esta fase, se procede con la parte práctica, que se especifica en la siguiente fase.

Fase *Ejecución del plan*.
En esta fase, que podría ser la consecuencia del anterior, se lleva a cabo cada uno de los pasos establecidos en el plan de la fase anterior. Esta fase se refiere, básicamente considera que:

10) Requiere de conocimientos previos, hábitos de pensamiento, concentración, buena suerte y paciencia.
11) Proporciona una línea general, sobre la que encajan todos los detalles, y de los que destacan, comprobar cada paso del razonamiento, ya sea por intuición o por demostración formal, hasta que no quede duda alguna sobre la exactitud de tal detalle.
12) Trata de que el alumno, honestamente, esté por completo seguro de la comprobación y la exactitud de cada paso.

13) Da lugar a cuestionamientos como ¿Se ve claramente que el paso es correcto? ¿Puede demostrarse que el paso es correcto?, entre otros.

Es vital que, en cada uno de los cálculos u operaciones implícitas en cada paso del plan, se verifique la certeza de los resultados obtenidos; antes de continuar con la última fase.

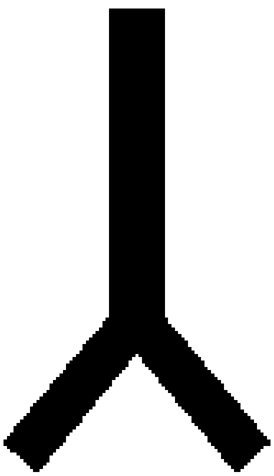
Fase *Visión retrospectiva*.
Cabe asentar que en esta fase, es importantísima, además de instructiva, en la resolución de un problema. Lo que esta fase implica, es que:

14) Se revisa el resultado y el camino que la condujo a ella, a fin de consolidar los conocimientos y desarrollar las aptitudes para resolver problemas.
15) Al reconsiderar la solución de un problema, se presenta la oportunidad para detectar sus relaciones con otros problemas y con el mundo físico.
16) El profesor debe alentar a sus alumnos a imaginar casos en que podrían utilizar de nuevo el mismo procedimiento de razonamiento o aplicar el resultado obtenido.
17) Da lugar a responder los siguientes cuestionamientos: ¿Cómo se puede verificar el resultado y el razonamiento? ¿Cómo se puede obtener el resultado, pero de un modo distinto? O ¿Qué características debe tener un problema, en el que se pueda aplicar el método desarrollado o el resultado obtenido? Entre otros.
18) Es obligación del profesor contagiar a los alumnos de la perspectiva de que los problemas matemáticos, tienen relación entre sí y con el mundo físico.
19) Es tener presente que cualquier solución es susceptible de mejorarse y, en todo caso, poder mejorar la comprensión de la solución.
20) Es preferible un razonamiento corto y simple, que uno largo y complicado.

Como se puede constatar, esta aproximación, también pone de relieve el proceso que se sigue en la resolución de un problema, para alcanzar la solución, y no tanto la solución en sí. Es de resaltar, la manera en que las estructuras del pensamiento se acomodan con la aportación de Pólya.

Hemos revisados las fases y las características de ambas aproximaciones teórico–metodológicas; así que, estamos en posibilidad de estructurar nuestra propuesta didáctica.

2.3 La conjunción para mi propuesta



Después de transitar a través de las dos aproximaciones teórico – metodológicas: *Cómo razonar matemáticamente* (Mason, J. et al, 2013), y *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, G. 1987), estamos en condiciones de cimentar nuestra propuesta didáctica.

En este mismo sentido metafórico, nuestra propuesta didáctica sería como una ensalada, conformada por una "cama" de dos ingredientes, que son las dos aproximaciones teórico–metodológicas, descritas en párrafos anteriores; es decir que, los ingredientes *Cómo razonar matemáticamente* (Mason, J. et al, 2013), y *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, G. 1987), aquí se conjuntan para dar lugar a la esencia del proceso **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior).

Adicionalmente, y en este mismo orden de ideas, se hace necesario permear nuestra propuesta didáctica, con ingredientes predominantemente de los cursos disciplinarios de la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS), Área Matemáticas; en primer lugar, *Psicopedagogía de la enseñanza y el aprendizaje* (Contreras, O, et al. 2017), y en segundo lugar, *Práctica docente I, II y III* (Canabal, S., 2017-2018).

Se trata de promover el proceso **RAMERPEMS**, a fin de verificar en qué grado incidirá en una mejora tanto de la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, como de la adquisición de las habilidades de razonamiento matemático; y, por ende, en los resultados de las tendencias que nuestros alumnos han registrado en pruebas que al respecto se les aplican.

2.3.1 Hipótesis

¡Eureka!

¡Eureka! Después de haber revisado los aspectos que conformaron la génesis de nuestra propuesta didáctica, mismos que culminaron con la determinación del objetivo correspondiente; después de desglosar las aproximaciones teórico–metodológica, junto con sus fases y sus momentos; y después conjuntar ambas aproximaciones, en nuestra propuesta didáctica, sus características y sus momentos didácticos; y, particularmente, a la luz del objetivo establecido en el capítulo primero de este trabajo, hemos encontrado un cuestionamiento prominentemente retador:

> *¿Qué tanto mejorarían las tendencias de los resultados, en los conocimientos y habilidades matemáticos de nuestros alumnos de educación media superior, si un docente desarrolla y aplica el proceso de razonamiento matemático en la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas, preferentemente en la resolución de problemas?*

Con todo lo anterior, estamos en posibilidades de configurar una hipótesis, que guíe nuestro quehacer en este trabajo.

Hipótesis. Si yo, como profesor de alumnos de la educación media superior, promuevo el proceso de *razonamiento matemático, como una estrategia en la resolución de problemas*, entonces es posible que los alumnos mejoren su apropiación de los aprendizajes matemáticos.

Antes de adentrarnos en la metodología de nuestra propuesta de proceso didáctico, en la que probaremos la hipótesis antes descrita, veamos algunas expectativas y beneficios de nuestra propuesta didáctica

2.3.2 Expectativas y beneficios

Revisemos algunas expectativas y beneficios derivados del proceso de razonamiento matemático, que podrían incidir en varios ámbitos, tales como el de los actores involucrados en esta propuesta didáctica, el de la institución educativa o el del país en general.

Sin embargo, resultaría ambiguo hablar por separado de expectativas y de beneficios, puesto que, en lo particular, con esta propuesta didáctica de razonamiento matemático, podríamos tener la expectativa de algunos beneficios. Bastaría con retomar los aspectos que, como causas o factores, vistos en el capítulo primero, han dado lugar a la situación actual que guardan los temas relacionados con el razonamiento matemático. Un ejemplo de esto podría ser, que tengamos la expectativa de que el razonamiento matemático, sea parte de la propuesta curricular formativa y del contenido de las asignaturas; otro ejemplo más, quizás un poco más general, sería el relacionado con el desarrollo del país; y otro ejemplo, tal vez más cercano, podría ser la disposición que los alumnos muestran al resolver un problema matemático. Veamos, en el párrafo siguiente, cómo éste último ejemplo se podría visualizar desde el otro frente; es decir, desde el punto de vista del docente.

Si como docentes, por una parte, ubicamos al alumno como eje central del aprendizaje, es decir, en el centro de nuestra enseñanza, y por otra, resaltamos su aprendizaje por encima de nuestra enseñanza, seguramente propiciaremos una mejora en nuestra didáctica, lo que seguramente se redituará en un beneficio hacia los alumnos, en virtud de que se facilitaría la apropiación de los aprendizajes matemáticos, por parte de ellos.

Podríamos abundar en los múltiples beneficios, que el razonamiento matemático implicaría en los alumnos, en los docentes, en las instituciones educativas y, seguramente, en el desarrollo del país; pero también es oportuno, revisar la otra cara de la moneda, como se desglosa en el párrafo siguiente.

Debemos aceptar que aún en la actualidad, existen dos tipos de docentes: por una parte, los que estén muy a gusto en su zona de confort, sin inquietarse por buscar una mejora en su práctica docente; y por otra, los que afirmen que cualquier propuesta didáctica, como la que se propone en este trabajo, resulta pedregosa, laboriosa o complicada. Esta dualidad de la realidad, se podría explicar a partir de una posible práctica pedagógica anticuada, centrada en la enseñanza de contenidos puntuales, que busca cubrir fríamente el 100% del programa, sin dominio de los contenidos matemáticos, sin la actualización profesional, sin motivar a los estudiantes para aprender, y lo más desalentador, sin desarrollar las habilidades de razonamiento matemático y de resolución de problemas, en nuestros alumnos (Larrazolo, et al. 2013, Pp. 1160).

No podríamos omitir mencionar que, así como para los alumnos, esta propuesta didáctica redundará en el beneficio arriba descrito, así también, para los docentes, ya que lograríamos en nuestros estudiantes, desarrollar una buena percepción de lo que su profesor hace, con la intención de que ellos logren sus objetivos de aprendizaje.

Para no ahondar en lo que respecta a los beneficios relacionados al ámbito de los actores del proceso enseñanza–aprendizaje, revisemos lo referente al ámbito institucional.

No es un secreto que, institucionalmente para cualquier universidad, el hecho de que sus alumnos sobresalgan en competencias de conocimientos, redunda en más y mejores recursos para realizar su cometido, que es formar profesionistas que coadyuven con el desarrollo del país. En este sentido, se requiere diseñar estrategias didácticas de enseñanza–aprendizaje, que sean efectivas para dicho cometido. A propósito, la UNAM no es la excepción cuando se trata de proponer mejoras relacionadas con las competencias matemáticas. Veamos el detalle respectivo, en el párrafo siguiente.

El Seminario Universitario para la Mejora de la Educación Matemática (SUMEM), de la UNAM, sabe que para el desarrollo de nuestro país, es primordial mejorar las competencias matemáticas de nuestros estudiantes, mismas que se pueden lograr si en el aprendizaje de las matemáticas, se cavila[20] sobre dos vertientes: la primera, construida sobre una trama de hilos; y la segunda, apoyada sobre un cimiento de ideas. Los hilos pueden ser: ***i***) la razón, ***ii***) el entendimiento, ***iii***) el cálculo, ***iv***) la aplicación y ***v***) el aprecio; y las

[20] Cavilar: "[…] *acción de meditar o reflexionar profundamente sobre alguna cuestión* […]". Recuperado el 1 de noviembre 2019, de https://definicion.de

ideas podrían ser: ***vi***) usar ejemplos significativos para los alumnos; ***vii***) considerar el origen histórico y el valor cultural y científico de los conceptos y las teorías matemáticas; ***viii***) poner de relieve la comprensión, por encima del manejo de procedimientos y fórmulas; ***ix***) aprovechar los entornos social y tecnológico del estudiante; ***x***) la resonancia creciente de la computación y la presencia de las matemáticas en ella; y ***xi***) fomentar en los estudiantes una actitud positiva hacia las matemáticas (UNAM – SUMEM, 2016).

En este orden de ideas, con la puesta en práctica de estrategias didácticas, como la que en este proyecto se propone, tejida y apoyada con *hilos* e *ideas*, mencionados en el párrafo anterior, la expectativa esencial, será que los resultados obtenidos por nuestros alumnos, en las pruebas de habilidades de razonamiento matemático, sin duda tendrán una variación al alza.

No obstante lo anterior, e independientemente de todos los posibles actores involucrados en el escenario enseñanza–aprendizaje, susceptibles de ser beneficiados con lo que aporta esta propuesta didáctica, conviene resaltar algunos puntos benéficos ligados claramente con los docentes y principalmente con los alumnos.

No nos queda duda de que, tanto los estudiantes como los docentes, serán los directamente beneficiados. Veamos por qué. Los primeros, en el plano personal, sabiéndose los mejores en su quehacer docente, satisfechos de haber hecho lo correcto y de haberse esforzado en su enseñanza; y los últimos, también en el plano individual, en la apropiación de los aprendizajes matemáticos, según los Programas de Estudio. Ciertamente, dichos programas habrán incidido en la formación personal de nuestros estudiantes, cuando: ***a***) ante la resolución de un problema, adopten la mejor estrategia, hagan uso de sus conocimientos previos y en consecuencia generen conocimientos nuevos; ***b***) ante un evento de su entorno practiquen el razonamiento que les permita analizarlo, tomen la mejor decisión y sean conscientes de la incertidumbre o certidumbre de los resultados; ***c***) ante retos de representación matemática (numérica, tabular, gráfica, geométrica y algebraica), logren expresarse satisfactoriamente y consoliden su pensamiento matemático; ***d***) cuando ante las nuevas tecnologías de información, logren realizar búsquedas efectivas de información y adquieran conocimientos nuevos y significativos; y ***e***) valoren las aportaciones de las matemáticas en todos los campos del saber y apliquen sus conocimientos matemáticos, seguros de sí mismos. (UNAM – CCH, 2016. Pp. 8).

2.3.3 Importancia y relevancia

Es innegable que, las estrategias didácticas que promueven el aprendizaje de las matemáticas, como la que nos ocupa, guardan una importancia y relevancia vitales, en virtud de que la matemática permea las distintas disciplinas, tanto científicas como de humanidades. También es innegable que, en nuestra actividad humana, las matemáticas permean cualquiera de nuestros campos de acción. Veamos en el párrafo siguiente, algunos ejemplos.

La aritmética y la geometría están vinculadas en contar y medir cosas; los pitagóricos hallaron la relación entre la música y las fracciones; la geometría está vinculada a la pintura, en la perspectiva; o, por último, una gran parte de los avances tecnológicos tienen su fundamento en desarrollos matemáticos. El hecho es que, las necesidades del ser humano originaron los avances matemáticos, y actualmente, nuestra vida cotidiana no se podría entender sin la aportación de las matemáticas (UNAM – SUMEM, 2016. Pp. 11–12).

A propósito del párrafo anterior, el hecho de que en la actualidad, las matemáticas han cobrado la debida importancia y relevancia fundamentales; implica que el proceso para promover que las matemáticas sean bien recibidas por los alumnos, recobra aún mayor importancia y relevancia. En este sentido, si como docentes, sentimos el llamado a renacer de nuestras antiguas prácticas didácticas, para emprender el vuelo hacia el desafío de promover en los alumnos, un proceso que coadyuve con ellos, en la resolución de problemas, que requiera estrategias de razonamiento matemático, entonces, el *proceso* es el **RAMERPEMS**; esto, en virtud de que éste, goza de atributos como lo que se describen enseguida.

El razonamiento matemático, se promueve con procesos que, por una parte, sean susceptibles de aplicarse a las distintas ramas de la matemática en general, y no sólo a una en específico; y por otra, que sean susceptibles de mejorarse. Lo anterior, se puede verificar si, ante el reto de solucionar un problema, el alumno muestra aptitudes como: ***a***) lo toma a conciencia; ***b***) reflexiona; ***c***) vincula sensación–acción; ***d***) analiza el camino recorrido; y ***e***) se percata de que lo aprendido se ajusta a su experiencia propia (Mason, et al. 2013).

Si logramos conseguir las cinco aptitudes descrita en el párrafo anterior, en las capacidades de nuestros alumnos, la importancia y relevancia del razonamiento matemático emergerán naturalmente como un iceberg sobre el mar.

Para acentuar la multicitada importancia y relevancia del razonamiento matemático, quisiera contagiar a mis colegas docentes de matemáticas, de que el proceso **RAMERPEMS** –desarrollar el razonamiento matemático –, lejos de ser una actividad pasiva, va más allá, hasta trascender, que se disfruta, y además de que casi todos los alumnos son capaces de lograrlo, favorece tanto la creatividad como la imaginación. Si logramos que nuestros alumnos apliquen sus conocimientos matemáticos, fuera del escenario que encierran los ejercicios del libro de texto, entonces, enseñar y aprender matemáticas, habrá sido útil (Stacey, et al. 2001. Pp. 9–10).

En el mismo orden de ideas, el razonamiento matemático es útil en un escenario en el que, de manera estrecha, interactúen tres mundos. Éstos son: ***i***) el mundo de objetos físicos, inclusive imágenes y símbolos, todos con la características de ser manipulables; ***ii***) el mundo de las intuiciones, inclusive lo que nos aporta la imaginación; y, ***iii***) el mundo de símbolos abstractos y signos, no necesariamente manipulables, pero una vez que lo son, se trasladan hacia el primer mundo (Mason, et al. 2013).

3. Metodología

Con la mira puesta tanto en el objetivo como en la hipótesis de este de este trabajo, y después de establecer la manera en que las aproximaciones teórico–metodológicas se han conjuntado, es momento de visualizar la metodología respectiva, misma que requiere revisar las características de la población y del instrumento de evaluación, así como la manera en que ambos procedimentalmente se estructurarán, para establecer los cimientos de nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**.

3.1 Población

Se trata de una población estudiantil, del bachillerato de la Universidad Nacional Autónoma de México, alumnos del Colegio de Ciencias y Humanidades, del Plantel Oriente, del cuarto semestre, integrantes del Grupo 442 del Turno vespertino, y de la asignatura Matemáticas IV, dentro del semestre lectivo 2018–2.

La aplicación de la estrategia didáctica, se realizó en el mes de abril, año 2018. Cabe resaltar que, el Plantel Oriente del C.C.H., se ubica hacia el oriente de la CMX, sobre la vía rápida Periférico Oriente, dentro de la alcaldía Iztapalapa.

Se trata de alumnos adolescentes cuyo promedio de edad oscila alrededor de los quince años, de ambos sexos, con clase económica de media a baja, cuyos domicilios están dentro de la zona metropolitana de la Ciudad México; así que, son alumnos que viven en lugares variados y dispersos.

Para ser congruentes con nuestra metodología, específicamente con lo que al respecto de "conocer el terreno", se establece en el apartado 3.3 Procedimiento, la primera actividad docente con el grupo de alumnos que se ha descrito en el párrafo anterior, consistió en aplicar un diagnóstico inicial, referente a los estilos de aprendizaje que cada uno de los alumnos poseía. Este instrumento, constó de cuarenta preguntas relativas a cosas que los alumnos disfrutan más, cosas que prefieren, formas de ser, cosas que les facilitan aprender algo, opiniones sobre temas varios, pasatiempos, formas de comunicación, cosas que los identifican, cosas que los halagan, formas de superar retos, formas de recordar, cosas importantes, sus gustos, cosas que los distinguen, entre otros. En consecuencia, cada uno de los alumnos, para cada pregunta, debía elegir la opción que más lo identificara, y registrarla en la hoja de respuestas correspondiente. Al final, según las opciones elegidas, se podía clasificar a cada uno de los alumnos, en cualquiera de los estilos de aprendizaje: visual, auditivo o kinestésico.

Es oportuno agregar que, el instrumento descrito en el párrafo anterior, fue tomado y modificado, de una publicación de la UNAM, cuya referencia bibliográfica se incluye al final del mismo.

En la figura siguiente, se ilustra el citado instrumento de diagnóstico, para identificar los estilos de aprendizaje.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
AREA MATEMÁTICAS

Instrumento para evaluación de los estilos de aprendizaje de los alumnos.
Elaborado por Antonio Granillo Martínez

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
MATEMATICAS
C.U. - CIENCIAS

CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR EL ESTILO DE APRENDIZAJE

Instrucciones: En cada pregunta, elige la opción con la que más te identifiques y regístrala en tu HOJA DE RESPUESTAS.

1.- ¿Cuál de las siguientes actividades disfrutas más?
A) Escuchar música.
B) Ver películas
C) Bailar con buena música

2.- ¿Qué programa de televisión prefieres?
A) Reportajes de descubrimientos y lugares.
B) Cómico y de entretenimiento.
C) Noticias del mundo

3.- Cuando conversas con otra persona, tú:
A) La escuchas atentamente.
B) La observas.
C) Tiendes a tocarla.

4.- Si pudieras adquirir uno de los siguientes artículos, ¿cuál elegirías?
A) Un jacuzzi.
B) Un estéreo.
C) Un televisor.

5.- ¿Qué prefieres hacer un sábado por la tarde?
A) Quedarte en casa.
B) Ir a un concierto.
C) Ir al cine.

6.- ¿Qué tipos de exámenes se te facilitan más?
A) Oral.
B) Escrito.
C) De opción múltiple.

7.- ¿Cómo te orientas más fácilmente?
A) Mediante el uso de un mapa.
B) Pidiendo indicaciones.
C) A través de la intuición.

8.- ¿En qué prefieres ocupar tu tiempo en un lugar de descanso?
A) Pensar.
B) Caminar por los alrededores.
C) Descansar.

9.- ¿Qué te halaga más?
A) Que te digan que tienes buen aspecto.
B) Que te digan que tienes un trato muy agradable.
C) Que te digan que tienes una conversación interesante.

10.- ¿Cuál de estos ambientes te atrae más?
A) Uno en el que se sienta un clima agradable.
B) Uno en el que se escuchen las olas del mar.
C) Uno con una hermosa vista al océano.

11.- ¿De qué manera se te facilita aprender algo?
A) Repitiendo en voz alta.
B) Escribiéndolo varias veces.
C) Relacionándolo con algo divertido.

12.- ¿A qué evento preferirías asistir?
A) A una reunión social.
B) A una exposición de arte.
C) A una conferencia.

13.- ¿De qué manera te formas una opinión de otras personas?
A) Por la sinceridad en su voz.
B) Por la forma de estrecharte la mano.
C) Por su aspecto.

14.- ¿Cómo te consideras?
A) Atlético.
B) Intelectual.
C) Sociable.

15.- ¿Qué tipo de películas te gustan más?
A) Clásicas.
B) De acción.
C) De amor.

16.- ¿Cómo prefieres mantenerte en contacto con otra persona?
A) Por correo electrónico.
B) Tomando un café junto.
C) Por teléfono.

17.- ¿Cuál de las siguientes frases se identifican más contigo?
A) Me gusta que mi coche se sienta bien al conducirlo.
B) Percibo hasta el más ligero ruido que hace mi coche.
C) Es importante que mi coche esté limpio por fuera y por dentro.

18.- ¿Cómo prefieres pasar el tiempo con tu pareja?
A) Conversando.
B) Acariciándose.
C) Mirando algo juntos.

19.- Si no encuentras las llaves en una bolsa
A) La buscas mirando.
B) Sacudes la bolsa para oír el ruido.
C) Buscas al tacto.

20.- Cuando tratas de recordar algo, ¿cómo lo haces?
A) A través de imágenes.
B) A través de emociones.
C) A través de sonidos.

CUESTIONARIO PARA IDENTIFICAR EL ESTILO DE APRENDIZAJE — *Elaborado por Antonio Granillo Martínez*

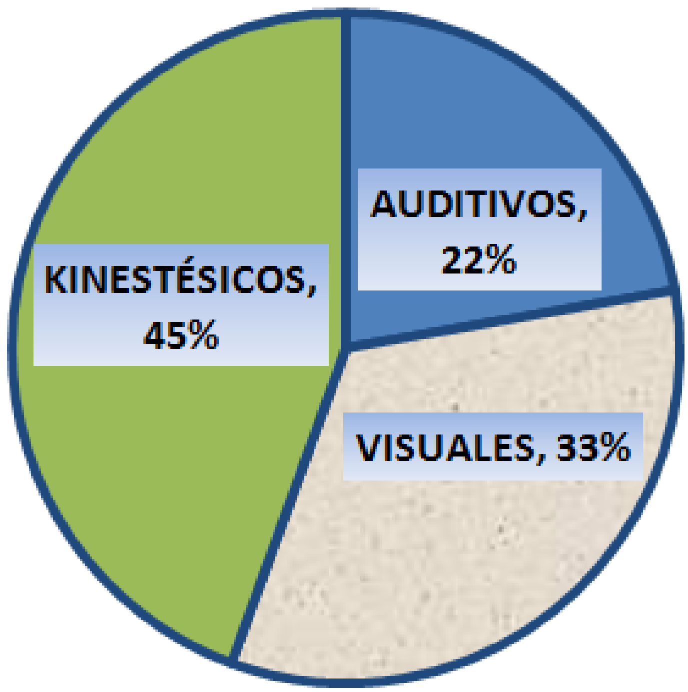
21.- Si tuvieras dinero, ¿qué harías? A) Comprar una casa. B) Viajar y conocer el mundo. C) Adquirir un estudio de grabación.	**31.-** Cuando eliges tu ropa, ¿qué es lo más importante para ti? A) Que sea adecuada. B) Que luzca bien. C) Que sea cómoda.
22.- ¿Con qué frase te identificas más? A) Reconozco a las personas por su voz. B) No recuerdo el aspecto de la gente. C) Recuerdo el aspecto de alguien, pero no su nombre.	**32.-** ¿Qué es lo que más disfrutas de una habitación? A) Que sea silenciosa. B) Que sea confortable. C) Que esté limpia y ordenada.
23.- Si tuvieras que quedarte en una isla desierta, ¿qué preferirías llevar contigo? A) Algunos buenos libros. B) Un radio portátil de alta frecuencia. C) Golosinas y comida enlatada.	**33.-** ¿Qué es más sexy para ti? A) Una iluminación tenue. B) El perfume. C) Cierto tipo de música..
24.- ¿Cuál de los siguientes entretenimientos prefieres? A) Tocar un instrumento musical. B) Sacar fotografías. C) Actividades manuales.	**34.-** ¿A qué tipo de espectáculo preferirías asistir? A) A un concierto de música. B) A un espectáculo de magia. C) A una muestra gastronómica.
25.- ¿Cómo es tu forma de vestir? A) Impecable. B) Informal. C) Muy informal.	**35.-** ¿Qué te atrae más de una persona? A) Su trato y forma de ser. B) Su aspecto físico. C) Su conversación.
26.- ¿Qué es lo que más te gusta de una fogata nocturna? A) El calor del fuego y los bombones asados. B) El sonido del fuego quemando la leña. C) Mirar el fuego y las estrellas.	**36.-** Cuando vas de compras, ¿en dónde pasas mucho tiempo? A) En una librería. B) En una perfumería. C) En una tienda de discos.
27.- ¿Cómo se te facilita entender algo? A) Cuando te lo explican verbalmente. B) Cuando utilizan medios visuales. C) Cuando se realiza a través de alguna actividad.	**37.-** ¿Cuál es tu idea de una noche romántica? A) A la luz de las velas. B) Con música romántica. C) Bailando tranquilamente.
28.- ¿Por qué te distingues? A) Por tener una gran intuición. B) Por ser un buen conversador. C) Por ser un buen observador.	**38.-** ¿Qué es lo que más disfrutas de viajar? A) Conocer personas y hacer nuevos amigos. B) Conocer lugares nuevos. C) Aprender sobre otras costumbres.
29.- ¿Qué es lo que más disfrutas de un amanecer? A) La emoción de vivir un nuevo día. B) Las tonalidades del cielo. C) El canto de las aves.	**39.-** Cuando estás en la ciudad, ¿qué es lo que más echas de menos del campo? A) El aire limpio y refrescante. B) b) Los paisajes. C) La tranquilidad.
30.- Si pudieras elegir ¿qué preferirías ser? A) Un gran médico. B) Un gran músico. C) Un gran pintor.	**40.-** Si te ofrecieran uno de los siguientes empleos, ¿cuál elegirías? A) Director de una estación de radio. B) Director de un club deportivo. C) Director de una revista.

Tomado de *APLICACIÓN DE LA PNL EN ESTILOS DE APRENDIZAJE EN ALUMNOS DE BACHILLERATO*, publicado por la Dirección General de Incorporación y Revalidación de estudios, de la UNAM,

FIGURA 3.1.0 INSTRUMENTO PARA DIAGNOSTICAR ESTILOS DE APRENDIZAJE.

Este instrumento de diagnóstico, para identificar el estilo de aprendizaje de cada alumno, fue aplicado a un total de veintisiete alumnos, de los que nueve resultaron ser visuales, seis auditivos y doce kinestésicos.

Para una mejor comprensión de los resultados correspondientes a los estilos de aprendizaje (visual, auditivo y kinestésico), descritos en el párrafo anterior, en la gráfica siguiente se ilustran los porcentajes globales respectivos.



GRÁFICA 3.1.0 GRÁFICA PORCENTUAL DE LOS ESTILOS DE APRENDIZAJE, DEL GRUPO 442, SEMESTRE 2018–2.

3.1.1 Muestra

Es bien sabido que, los grupos escolares ordinarios y regulares, en el Colegio de Ciencias y Humanidades, en promedio están conformados de veinte a treinta alumnos. Para el desarrollo de nuestra propuesta didáctica, lo anterior no fue la excepción; no obstante, con la intención de precisar el análisis y los resultados, sólo fueron considerados los alumnos que asistieron y participaron regularmente en las sesiones; por lo tanto, la muestra poblacional representativa se integró de doce alumnos, conformada por cinco hombres y siete mujeres.

3.2 Instrumento de evaluación

En virtud de que nuestra propuesta didáctica, llamada **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), es un proceso, que pretende coadyuvar con los alumnos, en la apropiación de los aprendizajes matemáticos, será oportuno y necesario verificar su efectividad. Para esto, se ha definido un instrumento de evaluación, con el que se pretende medir, más exactamente, los resultados que al respecto se obtengan. En tal caso, el instrumento de evaluación se aplicará antes y después de la intervención didáctica.

El instrumento de evaluación está conformado por veinte reactivos, relacionados cada uno, con aprendizajes del Plan de Estudios del Área de Matemáticas, para el Colegio de Ciencias y Humanidades (UNAM–CCH, 2016). En virtud de que los alumnos en cuestión, son del cuarto semestre, y con la intención de verificar en ellos sus conocimientos previos, los reactivos del instrumento de evaluación, se refieren tanto a aprendizajes del cuarto semestre, específicamente a las unidades 1 y 2, como a aprendizajes relativos a los cursos de Matemáticas I, Matemáticas II y Matemáticas III, que se imparten durante los semestres primero, segundo y tercero, respectivamente. La intención de incluir aprendizajes de los cursos de Matemáticas I, II y III, es porque dichos aprendizajes son básicos, se requieren y están relacionados directamente con los aprendizajes que se pretenden alcanzar en nuestra intervención didáctica. Adicionalmente, el instrumento de evaluación, coadyuvaría en tener una idea más cercana de los conocimientos y habilidades previos de los estudiantes y, en consecuencia, contribuiría a que el diseño de la estrategia didáctica, sea de mayor beneficio para que los alumnos se apropien de los aprendizajes esperados.

Cabe aclarar que, aunque los reactivos que conforman nuestro instrumento de evaluación, fueron seleccionados de acuerdo a los aprendizajes que un alumno de Matemáticas IV debería poseer, para adquirir exitosamente los aprendizajes especificados en la UNIDAD 3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS, del curso de Matemáticas IV, es posible que los alumnos no cuenten con ellos; así que, el profesor, al aplicar la propuesta didáctica de este trabajo, deberá considerar ser flexible, en el marco de la enseñanza–aprendizaje, para que ningún alumno sea descartado.

A continuación, el instrumento respectivo

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR
AREA MATEMÁTICAS
Instrumento de evaluación, de Matemáticas IV, Unidad 3.
Elaborado por Antonio Granillo Martínez

MADEMS Maestría en Docencia para la Educación Media Superior
MATEMATICAS
C.U. - CIENCIAS

INSTRUMENTO

	APELLIDO PATERNO	*APELLIDO MATERNO*	*NOMBRE(S)*	***GRUPO***	***TURNO***
Alumno				*442A*	*VESP*

Instrucciones: *Contesta debajo del reactivo, lo que se pide en cada requerimiento. Inicia con los que no te representen tanta dificultad.*

1.- Matemáticamente, ¿Qué es una *función*?	**11.-** ¿Qué entiendes por crecimiento proporcional?
2.- ¿Qué es un exponente?	**12.-** Gráficamente ¿Cómo se comporta un crecimiento exponencial?
3.- ¿Qué es un logaritmo?	**13.-** Gráficamente ¿Cómo se comporta un crecimiento proporcional?
4.- ¿Qué tipos de variación has visto?	**14.-** ¿Cuál de los dos ejes cartesianos, x o y, te pueden ayudar a determinar el dominio de una función?
5.- Describe cada tipo de variación que conozcas, y asócialo a una situación de tu vida cotidiana.	**15.-** Dada la función siguiente ¿cómo se comporta su gráfica si el valor de a, crece? $\mathbf{f(x) = ab^x}$
6.- En el ámbito matemático, para expresar una situación cotidiana, además de la algebraica ¿qué formas de expresión o representación conoces?	**16.-** Además del número π, que es del tipo irracional ¿qué otros números del mismo tipo conoces?
7.- ¿Qué es el dominio de una función?	**17.-** ¿Cuál de los dos ejes cartesianos, x o y, te pueden ayudar a determinar el rango de una función?
8.- ¿Qué es el rango de una función?	**18.-** ¿Qué relación existe entre la función exponencial y la logarítmica?
9.- ¿Qué entiendes por parámetros de una función?	**19.-** Escribe alguna propiedad de los logaritmos.
10.- ¿Qué entiendes por crecimiento exponencial?	**20.-** ¿Cuál es la característica principal de una función exponencial?

FIGURA 3.2.1 INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN.

3.3 Procedimiento

Como parte de la metodología que nos ocupa, podemos generalizar cuatro pasos que, adaptados convenientemente al objetivo de la estrategia, dieron forma a esta propuesta didáctica. Brevemente, estos pasos son: *1°*) Conocer el terreno, *2°*) Transitar sobre el camino, *3°*) Hacer camino al andar y, *4°*) Reflexionar sobre lo recorrido. Ciertamente, aunque son igual de valiosos los cuatro, pongamos de relieve al primero y al último; el primero, porque es indispensable conocer el terreno en el que estamos parados; y el último, relacionado con la visión retrospectiva[21], porque es vital revisar y evaluar, para mejorar lo realizado. Sin más preámbulos, pasemos a detallar los pasos antes referidos.

1º. Conociendo el terreno. Es de vital importancia, hasta donde sea posible, indagar en los alumnos, acerca de sus conocimientos y habilidades previos, sus intereses y necesidades, sus experiencias emocionalmente significativas; es decir, se trata de que uno, como docente, se haga llegar la mayor cantidad de datos o información, cualitativa o cuantitativa, acerca del grupo con el que trabajará, ya que en la medida que conozca mejor a sus alumnos, podrá, de manera eficaz, adaptar el curso a las características particulares de cada estudiante (Zarzar, 1993). Y en este orden de ideas, para seleccionar el más eficaz de todos los procesos, se requieren tener presentes tres aspectos: a) la naturaleza de los contenidos temáticos; b) los aprendizajes pretendidos; y c) las características de los alumnos, tales como edad, capacidades, expectativas, hábitos de estudio, experiencias, necesidades y entorno, entre otros (Arredondo et al, 2005. pp. 81–82).

2º. Transitar sobre el camino. Una vez concebida una idea más cercana de cómo es cada uno de nuestros alumnos, se podrá incursionar, de manera general, en dos aspectos: primero, la madurez de un pensamiento lógico–deductivo, que le permita al alumno, defender sus propias posiciones o contra–argumentar

[21] Visión retrospectiva: "*Es aquello que tiene en cuenta un desarrollo o un trabajo que se realizó en el pasado*". Recuperado el 30 de mayo 2019, de https://definicion.de/retrospectiva/

las de otros; segundo, lograr habilidades del pensamiento, que le permitan al alumno adquirir, por si mismo, nuevos conocimientos; en tal caso, resulta primordial considerar los Programas de Estudio, en virtud de que el enfoque de la materia, la contribución del Área de Matemáticas al perfil del egresado, los propósitos generales de la asignatura, los propósitos propios de cada unidad y sus respectivos aprendizajes y temática, sustentan el objetivo propio de cada estrategia didáctica en cuestión (UNAM – CCH, 2016).

3º. **Hacer el camino al andar**. Considérese un camino cuyo cimiento sea una permanente interacción bidireccional profesor–alumno, que ponga de relieve, de éste último, sus conocimientos y habilidades previos, sus intereses y necesidades, sus situaciones problemáticas cotidianas, sus experiencias emocionalmente significativas; a fin de facilitar elementos suficientes para el adecuado diseño de estrategias de enseñanza–aprendizaje, acordes a la clase[22] de estudiantes, y permeadas con el proceso de razonamiento matemático, para la resolución de problemas.

4º. **Reflexionar sobre lo recorrido**. Siempre será invaluable que, al final de cada resolución de un problema, ya sea con una secuencia didáctica, una estrategia didáctica o cualquier otro proceso de enseñanza–aprendizaje, se revise el camino recorrido, para verificar la efectividad de nuestra práctica docente. Hay dos razones por las que es necesario evaluar un proceso de enseñanza– aprendizaje: eficacia y utilidad. La primera, sólo se concreta cuando un propósito es conseguido, si se verifica que la conducta del alumno ha sido modificada por tal proceso, si se reúnen evidencias de los logros y deficiencias tanto del profesor como de los alumnos; y la segunda, porque al alumno le permite renovar sus esfuerzos y superar sus deficiencias, y al profesor, corregir y mejorar sus procedimientos y recursos empleados (Arredondo et al, 2005. pp. 101). Esta actividad tiene un sustento reciente, en los Programas de Estudio del CCH. De hecho,

[22] Clase: "*Grupo de personas que dentro de la sociedad tiene condiciones comunes de vida o de trabajo, e intereses y medios económicos iguales o parecidos*". (Recuperado el 27 de enero 2019, de https://www.google.com/search?q=clase+significado&rlz=1C1AVNG_enMX664MX664&oq=clase&aqs=chrome.1.69i57j35i39j0l4.3685j1j8&sourceid=chrome&ie=UTF-8).

reflexionar sobre lo realizado o cuestionarse si es viable aplicar el método de solución a otros problemas, es parte del enfoque didáctico respectivo (UNAM–CCH, 2016. Pp. 7). Más aún, es valioso mirar atrás, para verificar lo que se ha realizado y reflexionar sobre los momentos clave o críticos, a fin de ampliar las habilidades de razonamiento en los estudiantes (Mason, et al. 2013. Pp. 61).

Al implementar el proceso **RAMERPEMS**, vale la pena resaltar, la importancia de hacer una pausa, para reflexionar sobre lo que se hizo o se dejó de hacer; sin duda, reflexionar, mejorará en general nuestro quehacer docente.

El camino descrito en el párrafo anterior, nos debe invitar a proponer a los alumnos, problemas que despierten el interés de *ir* a *vivir* la investigación, recolectar datos o información, que los motiven a reflexionar y a cuestionarse la utilidad de lo conseguido. Lo anterior, requiere que los docentes tengamos la consigna permanente de que nadie de nuestros alumnos se descarte, o se asuma como el que “no sabe” o como el que “no lo puede hacer”, por el simple hecho de que sea callado, tímido o introvertido. Busquemos que la experiencia académica –conocimientos previos– de los alumnos, sea la oportunidad para que ellos generen actitudes positivas y sientan la satisfacción de *hacer matemáticas*.

Parece oportuno ahondar en una parte de nuestra propuesta didáctica; es decir, propiciar que la experiencia académica de los alumnos, realmente sea la oportunidad para hacer matemáticas. A propósito, considérense algunos cuestionamientos como los que se incluyen en la Tabla 3.3.1 Cuestionamientos que favorecen el proceso **RAMERPEMS**, mismos que se pueden permear sobre los momentos que se suscitan durante el proceso de nuestra propuesta didáctica. En dicha tabla, en la columna izquierda se refieren los distintos momentos en la resolución de problemas matemáticos; en la columna central, se incluyen las preguntas que tradicionalmente se plantean, pero que lamentablemente no coadyuvan con nuestro proceso; y, a su vez, en la columna derecha, se incluyen algunos cuestionamientos, que se sugieren para favorecer el proceso **RAMERPEMS**.

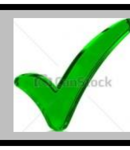
MOMENTO (EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA)		
Después de presentar el problema…	¿Quedó todo claro?	✓ ¿A qué situación pasada te recuerda? ✓ Realiza un dibujo de lo que se pide. ✓ Con tus propias palabras, explica a un compañero lo que se pide en el problema. ✓ ¿Cuáles son los datos, las incógnitas y las condiciones que se deben cumplir, en el problema? ✓ Etc.
Al iniciar la resolución del problema…	Si nadie tiene alguna duda, manos a la obra…	✓ ¿De qué manera, o con qué recurso matemático (axioma, principio, teorema, fórmula, ecuación, etc.), podríamos “encapsular”, o logramos que los datos, la incógnita y la condición hagan ‘clic’? (como cuando en un avión, nos aseguramos al asiento, con el cinturón de seguridad)
Durante la resolución del problema…	*Normalmente, un “silencio”.*	✓ ¿A qué te recuerda, o qué vez, en la expresión o resultado que acabas de obtener? ✓ Justifica lo que acabas de obtener (Porque…). (Como si se comprobara que se está yendo por el camino correcto).
Al finalizar la resolución del problema…	¿Alguien tiene alguna duda, sobre lo que vimos?”	✓ ¿Qué pasaría si…? ✓ ¿Qué se podría hacer para mejorar la solución encontrada? ✓ ¿Qué otra manera habrá para solucionar el problema? ✓ ¿A qué otros problemas se puede aplicar el proceso de solución, que desarrollamos?

TABLA 2.3.1 CUESTIONAMIENTOS QUE FAVORECEN EL PROCESO *RAMERPEMS*.

Debemos agregar la conveniencia de evitar los “sensores binarios”, cuya respuesta sólo acepta un **sí** o un **no**., ya que en nada favorecen a nuestro proceso **RAMERPEMS**; prefiéranse en cambio, preguntas directas y específicas, que indaguen si los estudiantes lograron la adquisición de los aprendizajes, conocimientos y habilidades pretendidos. También conviene, que nuestros estudiantes relacionen sus conocimientos y habilidades previos con los nuevos, ya sea mediante recursos algebraicos (axiomas, principios, fórmulas, teoremas, ecuaciones, etc.), o mediante símbolos (números, letras, dibujos, etc.), bajo la mira del objetivo (satisfacer la incógnita, encontrar la solución, etc.), y con la constante apropiación de los aprendizajes, conocimientos y habilidades respectivos. Esto, seguramente propiciará que nuestros adolecentes tengan la oportunidad de *vivir* el ***proceso*** **RAMERPEMS*.***

4. El proceso **RAMERPEMS**

Empezaremos este capítulo con una definición, pero antes, establezcamos unas bases. Está visto que, en derredor al proceso **RAMERPEMS**, giran recursos (materiales y humanos), principios, axiomas, conceptos, métodos y teorías que, acomodados estratégicamente, potencian nuestra propuesta didáctica.

Recuérdese que la esencia de nuestra propuesta didáctica, sin duda alguna, nació de la conjunción de *Cómo razonar matemáticamente* (Mason et al, 2013), y de *Cómo plantear y resolver problemas* (Pólya, 1987). Ambas partes, tienen distintas concepciones al respecto de sus fases, ya que por una parte, están *abordaje*, *ataque* y *revisión*; y por otra, *comprender el problema*, *concebir un plan*, *ejecución del plan* y *visión retrospectiva* respectivamente. Sin embargo, preferimos en lo particular, partir de una serie de fases propias pormenorizadas, que para los alumnos, sean fáciles de recordar, cumplan con el objetivo de este trabajo y coadyuven con los estudiantes, en la apropiación de los conocimientos, habilidades y aprendizajes matemáticos.

Previo al intento por definir nuestra propuesta didáctica, consideremos la idea que, sobre razonamiento matemático, se percibe hasta este momento: Es el proceso que en los educandos, provoca utilizar espontáneamente una o más de sus capacidades naturales para este tipo de razonamiento, […] a fin de concientizarlos, de las formas en que pueden dominar dichas capacidades para ponerlas al servicio de la exploración y comprensión de temas, y situaciones matemáticas (Mason et al, 2013, pp. 12 y 14).

Hagamos unas precisiones previas necesarias. Partamos de que *resolución*[23] hace referencia a un "proceso", y *solución*[24] se refiere al "fin o resultado de tal proceso".

Así que, el proceso **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), se puede concebir como *el proceso que, ante el requerimiento de solucionar un problema, involucra el uso de conocimientos, habilidades, capacidades, recursos, postulados y nociones matemáticas, vistos como capacidades naturales; y pone en juego acciones tales como indagar, cuestionar e imaginar, conjeturar, generalizar y reflexionar; encuadradas todas dentro de la activación de la conciencia personal; y enmarcados todos ellos, desde los conocimientos hasta la reflexión, dentro de siete fases particulares, aunque no necesariamente consecutivas ni forzosas, sí estratégicamente estructuradas y organizadas.*

Es momento para poner de relieve, las particularidades de nuestra propuesta didáctica.

4.1 Fases del proceso **RAMERPEMS**

Dada la naturaleza de nuestra propuesta didáctica, que es concebida como un proceso, resulta inherente analizar las fases y las particularidades que conforman nuestro proceso **RAMERPEMS**.

El análisis antes mencionado, tiene la finalidad de que tanto docentes como alumnos, nos sintamos invitados, incluidos, vinculados, incorporados e identificados con esta didáctica. La pretensión de estas fases, singulares y particulares, es dejar volar nuestra imaginación, y ¿por qué no?... tal vez, volar con ella. Así que, en este

[23] Resolución: "*acto y consecuencia de resolver*...". (Recuperado el 4 de junio 2019, de https://definicion.de/resolucion/).

[24] Solución: "[...] *puede ser la respuesta a una duda, el resultado de un proceso*...". (Recuperado el 4 de junio 2019, de https://www.significados.com/solucion/).

sentido, dispongámonos a vivir nuestro proceso **RAMERPEMS**, como un viaje aéreo, glosado en las siete fases siguientes: {1°} *ELEGIR DESTINO*; {2°} *ADQUIRIR BOLETO*; {3°} *PASE DE ABORDAR*; {4°} *CLICK*; {5°} *VOLAR*; {6°} *ATERRIZAR*; y {7°} *BITÁCORA*.

A continuación, se delinean cada una de las siete fases mencionadas.

{1°} Elegir destino

Se sentirá que se está en esta fase, cuando se encuentre “frente a frente” con un problema. Esta fase involucra a ambos actores del escenario enseñanza–aprendizaje; porque uno debe cuestionarse ¿Qué problema les propongo? Y los otros, si el caso es que su profesor les propuso una serie de problemas, ¿Qué problema elegir? A esta posible situación nos referimos cuando se trate de *elegir destino*.

Esta elección no implica que se deba proceder con la resolución respectiva, sino que sólo se ha “elegido y conocido” al problema. Además, en esta fase, téngase en cuenta lo descrito en el apartado 3.3 Procedimiento, respecto a lo que se especifica sobre *1° Conociendo al discípulo.*

{2°} Adquirir boleto

Una vez elegido el destino, es decir, que conscientemente y con convicción se eligió el problema, y se tiene una idea sobre lo que se quiere hacer, entonces se procede con la fase *adquirir boleto*. Se puede sentir que se está en esta fase, cuando se tiene la necesidad de fortalecer la intención y convicción de llegar a la solución.

En esta fase son aplicables los incisos ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***1***, ***2***, ***3*** y ***4***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

{3°} Pase de abordar

Tramitar el pase de abordar, implicaría dos cosas: la primera, preparar todos los recursos materiales que serán necesarios para el viaje; y la segunda, confirmar la intención y el deseo de volar. Se sentirá que se está en esta fase, cuando se tenga la intención de resolver el problema. Nótese que, respecto a preparar todos los recursos necesarios, se puede entender que se han leído, y comprendido, cada una de las palabras que conforman el enunciado del problema. Asimismo, se recomienda verificar y comprobar que lo anterior está cubierto; así que, bueno sería realizar cualquiera de los siguientes: un dibujo, una tabla, un esquema, una reseña o un organizador gráfico, entre otros, para resaltar: ***1°)*** Los datos del problema; ***2°)*** Las variables, tanto independiente como dependiente; ***3°)*** La(s) incógnita(s); y ***4°)*** La(s) condición(es) que se debe(n) satisfacer. Como resultado de lo anterior, será la convicción de haber preparado todos los recursos necesarios para llegar a la solución del problema.

En esta fase son aplicables los incisos ***e***, ***f***, ***5***, ***6***, ***7***, ***8*** y ***9***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

{4°} Click

Como una consecuencia natural de tramitar el pase de abordar, se sabe el número de asiento; así que lo consecuente es tomar asiento y, lo natural para afianzarse con el cinturón de seguridad, es hacer Click. Se puede sentir que se está en esta fase, cuando, con base en lo realizado en la fase *Pase de abordar*, se ha elegido el recurso matemático que asegura, en el camino correcto, el alcance de la solución del problema. Dentro de los recursos matemáticos posibles, se pueden contar: ***i)*** un patrón numérico (sucesiones numérica como la de Fibonacci, números primos, etc.), ***ii)*** una fórmula (de perímetro, área, volumen, etc.), ***iii)*** una ecuación (ya sea general, de primer grado, de segundo grado, etc.), ***iv)*** un teorema (de Pitágoras, de Thales, etc.), ***v)*** razones (proporcionales, trigonométricas, etc.), identidades (trigonométricas, etc.), ***vi)*** corolarios, ***vii)*** axiomas; entre otros.

En esta fase podría ser aplicable el inciso ***11***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

{5°} Volar

Una vez asegurados, la consecuencia natural sería la fase volar. Se puede sentir que se está en esta fase, cuando, conscientes y convencidos, tanto alumnos como profesor, empiezan a convivir en la resolución del problema, para alcanzar la solución respectiva.

En esta fase son aplicables los incisos ***g***, ***h***, ***i***, ***j***, ***10*** y ***12***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

{6°} Aterrizar

En virtud de que el razonamiento matemático, es un proceso, y dado que se ha terminado de *volar*, entonces, se procede a *aterrizar*. Se puede sentir que se ha llegado a esta fase, cuando se tenga un resultado, ya sea favorable o desfavorable, respecto de la solución del problema; esto es, que se tenga la solución pretendida o se pretenda abandonar el problema.

En esta fase son aplicables los incisos ***k***, ***l*** y ***13***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

{7°} Bitácora

El registro de todos los pormenores suscitados a lo largo de la resolución del problema, es lo que conforma la fase bitácora. Se puede sentir que se está en esta fase, cuando se toma nota o se registren cualquiera de los antecedentes, notas, ideas, dificultades o pormenores de cualquier rubro; ya sea al término o paralelamente al momento de la resolución del problema.

En lo particular, para registrar cualquier detalle o particularidad, aplican dos tipos de bitácora.

Bitácora de vuelo. Contendrá lo suscitado a lo largo y durante todo el proceso de resolución del problema. Esta bitácora implica agregar, de manera conveniente, las notas pertinentes **al margen de la página** en que, en el momento, se esté trabajando para alcanzar la solución del problema. Tiene relación con lo que, al respecto de los momentos ***¡atorado!***, ***¡ajá!*** y ***rúbrica***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

Bitácora de viaje. Contendrá lo que, al final del proceso de resolución del problema, se juzgue conveniente registrar. Para esta bitácora, son aplicables los incisos ***m***, ***n***, ***o***, ***p***, ***q***, ***14***, ***15***, ***16***, ***17***, ***18***, ***19*** y ***20***, descritos en el apartado 2.2 Aproximaciones teórico–metodológicas, de este trabajo.

4.2 Secuencia didáctica **RAMERPEMS**

Aunque en el apartado siguiente se detalla la *estrategia didáctica*[25] **RAMERPEMS**, aprovecharemos este preámbulo para revisar someramente una *secuencia didáctica*[26], relacionada también con nuestro proceso **RAMERPEMS**.

Sólo con la intención de ilustrar el proceso **RAMERPEMS**, y para familiarizarnos con éste, mostraremos la resolución de un problema simple, con nuestra secuencia didáctica. Lo anterior, además de familiarizarnos, nos iniciará en las fortalezas y debilidades de nuestra propuesta didáctica.

En virtud de que un problema tiene la cualidad de poder ser resuelto de muchas formas, que estarán en función de quien lo resuelve, ya sea un profesor o un estudiante, es oportuno y valioso reconsiderar que, como todo proceso, éste también será susceptible de mejora.

Entremos en detalle. Este problema fue propuesto al Grupo 271, conformado por estudiantes del Segundo semestre del CCH Oriente, del ciclo 2019-2, en abril de 2019; en consecuencia, la tabla respectiva contiene la manera en que se afrontó la resolución correspondiente, mediante el proceso de **RAMERPEMS**.

Para fines de aclaración, el texto **escrito así** (fuente Century Gothic), corresponde a las aportaciones del profesor presente, y lo **escrito así** (fuente Comic Sans MS), corresponde a las aportaciones que los estudiantes hicieron.

[25] Estrategia didáctica: "[…] *planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje para la cual el docente elige las técnicas y actividades que puede utilizar a fin de alcanzar los objetivos de su curso* […]". Recuperado el 3 de noviembre 2019, de https://www.ecured.cu/Estrategia_Did%C3%A1ctica

[26] Secuencia didáctica: "[…] *serie ordenada de actividades relacionadas entre sí* […] *puede constituir una tarea, una lección completa o una parte de ésta* […]". Recuperado el 3 de noviembre 2019, de https://cvc.cervantes.es/ensenanza/biblioteca_ele/diccio_ele/diccionario/secuenciadidactica.htm

FASES	MOMENTOS Y ACTIVIDADES

{1°} ELEGIR DESTINO

Dado que la idea es familiarizarse con un proceso, la dificultad de éste no debe ser un referente (ver {1°} Elegir destino).

Intentemos el reto de familiarizarnos con el proceso, mediante la resolución del problema siguiente:

Cuestionamiento de Simón:

El Papá de Simón pagó en la tlapalería, el importe de $70m^2$ de lona y de unos tirantes de acero; porque su hijo quiere realizar una fiesta con sus amigos, y necesita cubrir un terreno rectangular, cuyo ancho es tres séptimos menor que su largo; y pretende, con los tirantes tendidos en diagonal, sostener la lona.

Simón se cuestiona de qué dimensiones debería pedir los tirantes y la lona.

¿Cómo ayudar a Simón en su cuestionamiento?

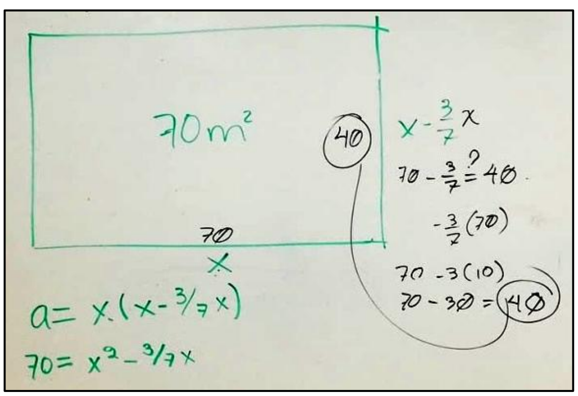
Expresa tu resultado en forma exacta, sin aproximaciones.

Recuérdese realizar las notas al margen.

{2°} ADQUIRIR BOLETO

Se debe leer detenidamente el enunciado del problema y, a fin de tener un punto de partida, realicen ya sea un dibujo, un diagrama o un organizador gráfico, que ilustre la situación que se propone (ver {2°} Adquirir boleto).

El resultado respectivo, se muestra enseguida:



En esta figura, se ilustra el diagrama que los alumnos realizaron. En éste, con tinta verde (tinta tenue), se muestran las expresiones algebraicas que los alumnos realizaron, como parte del proceso para solucionar el problema. Se puede ver que, los alumnos tienen la idea de la figura geométrica involucrada y, comprenden que el ancho del terreno depende del largo ($\boldsymbol{x}$); sin embargo, al establecer el ancho como $\left(-\frac{3}{7}\right)$, vemos que no distinguen la condición que relaciona al ancho con el largo del terreno.

{3°} PASE DE ABORDAR

De acuerdo a nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, lo que se sugiere en este momento, en el que los alumnos tal vez, estén *¡Atorados!*, sería invitarlos a comprobar sus resultados.

Ante tal situación, se hace necesario enfatizar sobre la necesidad de que la condición se cumpla, como se ha establecido en nuestra fase {3°} Pase de abordar.

En este sentido, la sugerencia fue probar sus resultados con un ejemplo numérico simple, mismo que se ilustra en la figura con tinta más oscura, (ver la ***especialización***, en el apartado 2.2.1.2 Momentos del proceso Cómo razonar matemáticamente).

Supongamos que el largo del terreno mide $70m.$ lineales. Entonces ¿Cuánto debería medir el ancho?

Inmediatamente, los alumnos determinaron la séptima parte de **70**, por lo que, contestaron:

¡Ajá!... Si el ancho es "tres séptimos menor que su largo", entonces el ancho es de **40**.

Bien, entonces veamos si la condición "*cuyo ancho es tres séptimos menor que su largo*", se satisface.

Tomemos su planteamiento:

$$x - \frac{3}{7}$$

(Lo que se ilustra en color verde o tenue).

Si sustituimos el valor de x, tenemos:

$$70 - \frac{3}{7} = ?$$

(Lo que se ilustra en color negro o más oscuro).

Los alumnos, después de analizar la expresión, detectan que no es posible que el resultado sea **40**.

La intención es que ellos mismos se percaten de que su propuesta no satisface la condición (la precisión respectiva se muestra tinta negra).

Ante esto, un alumno dice:

Deben ser tres séptimos, pero del largo. ¿No?

Bueno, entonces probemos eso:

$$x - \frac{3}{7}\,(x)$$

(Que es lo que se ilustra en color negro o más oscuro).

Sustituyamos el valor de x:

$$70 - \frac{3}{7}\,(70) =$$

$$70 - 3(10) =$$

$$70 - 30 =$$

$$40$$

{4°} CLICK

Una vez despejada cualquier duda, lo que naturalmente sigue es asegurarse; es decir, hacer click con todos los elementos del problema, como datos, incógnitas, variables y la satisfacción de todas las condiciones (ver {4°} Click).

En este caso, como se ha especificado en el inciso ***ii,*** de esta etapa (Click), el recurso matemático conveniente es la fórmula para calcular el área de un rectángulo.

{5°} VOLAR

En esta fase, con la seguridad que da la fase anterior, tiene lugar la convivencia profesor–alumnos, para llegar a la solución del problema. Se sentirá que se ha llegado a esta fase (ver {5°} Volar), cuando se sienta que los recursos necesarios (fórmulas, teoremas, etc.), están predispuestos y asegurados.

Dado que la fórmula respectiva, integra el área, la base y la altura del rectángulo, los alumnos obtuvieron que:

$$\mathbf{70} = (\boldsymbol{x}) \times \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{x}\right)$$

Lo que dio lugar a la ecuación cuadrática:

$$\mathbf{70} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}$$

Cuya solución, después de "acompañar" a los alumnos, por los caminos de la factorización y simplificación, fue:

$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{30}}}{\mathbf{3}}$$

En consecuencia, los alumnos obtuvieron, con un poco de reto, las dimensiones de la lona (largo y ancho) y, con ayuda del Teorema de Pitágoras, que ellos mismos sugirieron, obtuvieron las dimensiones de los tirantes (largo).

Este problema permitió verificar, en los alumnos, más de una vez el estado ***¡Atorado!***, especialmente cuando se les pidió expresar el resultado, de manera exacta y, cuando se les enfrentó a operaciones o cálculos con números racionales, sin utilizar aproximaciones.

Algunas de las aportaciones suscitadas dentro de la convivencia, característica de esta fase, giraron alrededor de resultados numéricos, aproximados con decimales, que los alumnos hicieron. Aunado a esto, se presentó la dificultad para expresar un número irracional de manera exacta y para operar cálculos de manera abstracta. Por parte del profesor, las aportaciones giraron en derredor del concepto de un número irracional.

{6°} ATERRIZAR

Se sintió que se llegó a esta fase, cuando se habían obtenido, por una parte, el largo y ancho de la lona, y por otra, el largo de los tirantes (ver {6°} Aterrizar).

Durante la fase anterior, llegó un momento en que se sintió que los alumnos querían abandonar el problema; éste fue cuando se les recordó que debían expresar el resultado de forma exacta. Cabe recordar, que intentaron respuestas con la mayor cantidad de números decimales posibles; sin embargo, se les orientó a que el resultado, puede ser un número racional, como tal.

Una de las comprobaciones para resaltar la falta de exactitud en sus respuestas, se muestra a la derecha.

Se puede rescatar, el hecho de haber superado la dificultad para operar con número racionales, y haber llegado a la solución.

Noten que intentar escribir un número racional, de manera exacta, requiere aplicar nuestras habilidades para factorizar, simplificar y algunas relativas a las propiedades de las potencias.

Es decir, es aplicable lo que dice el inciso 15 del apartado 2.2.2.1 Las fases de Cómo plantear y resolver problemas, de este capítulo, referente a detectar sus relaciones con otros problemas y con el mundo físico.

Partamos de nuestra expresión:

$$(x)\left(x-\frac{3}{7}x\right)=70$$

$$x^2-\frac{3}{7}x^2=70$$

Comprobación:

Sustituir en nuestra expresión:

$$¿\ (11.06797)^2-\frac{3}{7}(11.06797)^2=70\ ?$$

$$¿\ 122.49995-\frac{3}{7}(122.49995)=70\ ?$$

$$¿\ 122.49995-\frac{367.49985}{7}=70\ ?$$

$$¿\ 122.49995-52.49997=70\ ?$$

$$¿\ 69.99998=70\ ?$$

$$69.99998\neq 70$$

{7°} BITÁCORA

Como ya se ha especificado, para sentir que se ha llegado a esta fase, bueno será dar rienda suelta a la escritura de los pormenores suscitados, a lo largo del proceso. Considérese detalladamente, el contenido del apartado bitácora (ver {7°} Bitácora).

Como se puede constatar, con las referencias a las fases del proceso **RAMERPEMS**, con las aportaciones del profesor y la invitación constante a los alumnos para proponer caminos, que nos lleven a una solución, nuestra propuesta didáctica puede ser aplicable a cualquier tipo de problema y, puede ser configurado ya sea en una secuencia didáctica, como la que aquí hemos concluido, o a una estrategia didáctica, como la que enseguida se aborda.

4.3 Estrategia didáctica RAMERPEMS

Recordemos que los momentos de *especialización*, *generalización*, *conjeturar* y *justificar convincentemente*, constituyen en gran parte, el razonamiento matemático (Mason et al, 2013).

Así, en virtud de los momentos referidos en el párrafo anterior, y vistos en el apartado, *2.2.1.2 Momentos del proceso Cómo razonar matemáticamente*), veamos, en la TABLA 4.3.0 INTERRELACIÓN ENTRE NUESTRA ESTRATEGIA DIDÁCTICA Y LOS MOMENTOS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, cómo se acoplan con nuestra propuesta didáctica, para dar lugar a nuestro proceso **RAMERPEMS**.

En la tabla 4.3.0 antes referida, misma que se muestra en la página siguiente, verticalmente se ubican los momentos ***Especialización***, ***Generalización***, ***¡Atorado!***, ***¡Ajá!***, ***Rúbrica***, ***Verifica*** y ***Reflexiona***, y horizontalmente, las fases ***Elegir destino***, ***Adquirir boleto***, ***Pase de abordar***, ***Click***, ***Volar***, ***Aterrizar*** y ***Bitácora***, de nuestra propuesta didáctica. Resalta que entre ambos, momentos y fases, se guarda una estrecha relación, que nos deja ver qué tan frecuente, en nuestra propuesta didáctica, se debe recurrir a desarrollar los momentos, que en gran parte constituyen el razonamiento matemático.

De la citada tabla 4.3.0, podemos hacer varias puntualizaciones; en este sentido, resaltaremos dos relevantes: primero, que los momentos ***Rúbrica***, ***Verifica*** y ***Reflexiona***, tienen presencia en todas las fases de nuestra propuesta didáctica; la segunda, que los siete momentos, ***Especialización***, ***Generalización***, ***¡Atorado!***, ***¡Ajá!***, ***Rúbrica***, ***Verifica*** y ***Reflexiona***, tienen presencia en la mayoría de nuestras fases, es decir, en cuatro de las siete fases que conforman nuestra propuesta didáctica, ***Adquirir boleto***, ***Pase de abordar***, ***Volar*** y ***Aterrizar***.

En relación con algunas otras puntualizaciones, podrían caber que, el momento ***¡Ajá!***, ciertamente no se aplica en todas nuestras siete fases, pero tampoco en una cantidad menor, que son cuatro fases; sino que tiene presencia en seis de estas; lo que nos deja ver que, resulta vital apoyar a los alumnos a superar los obstáculos que los estén deteniendo en el alcance de la solución del problema.

MOMENTOS / FASES RAMERPEMS	Especialización	Generalización	¡Atorado!	¡Ajá!	Rúbrica	Verifica	Reflexiona
Elegir destino					✓	✓	✓
Adquirir boleto	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Pase de abordar	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Click				✓	✓	✓	✓
Volar	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Aterrizar	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Bitácora				✓	✓	✓	✓

TABLA 4.3.0 INTERRELACIÓN ENTRE NUESTRA ESTRATEGIA DIDÁCTICA Y LOS MOMENTOS DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO.

Todo lo antes citado, no nos dice otra cosa sino que, así se constituye el razonamiento matemático.

4.3.1 Configuración de la estrategia

A continuación, en el diagrama siguiente, se ilustra gráficamente la manera en que se potencia nuestra estrategia didáctica, con LO ESENCIAL DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO, descrito en la TABLA 4.3.0. Esta manera, se describe como se especifica, en los párrafos que continúan.

Todo empieza con la fase **Elegir un destino**, que puede ser acompañada de las notas que se incluyen en el apartado Procedimiento, dentro de la Metodología de este trabajo. La fase que continúa, es **Adquirir boleto** y, enseguida, la fase **Pase de abordar**. A continuación, llegamos a la fase **Click**, en la que con algún teorema, fórmula o ecuación, se asegura ir por el camino correcto. Consecuentemente, se llega a la fase **Volar** y, casi para terminar, a la fase **Aterrizar**, ya que la última fase sería **Bitácora**. Nótese que a lo largo de todo el recorrido, o de este viaje, denominado **RAMERPEMS**, excepto en las fases extremas y en la céntrica (primera, **Click** y última), están presentes la especialización, la generalización, y los momentos ¡Atorado! y ¡Ajá!

De igual manera, debemos notar que, ahora sí, en todo el proceso **RAMERPEMS**, están presentes **Notas al margen** y **Rúbrica**.

CONFIGURACIÓN

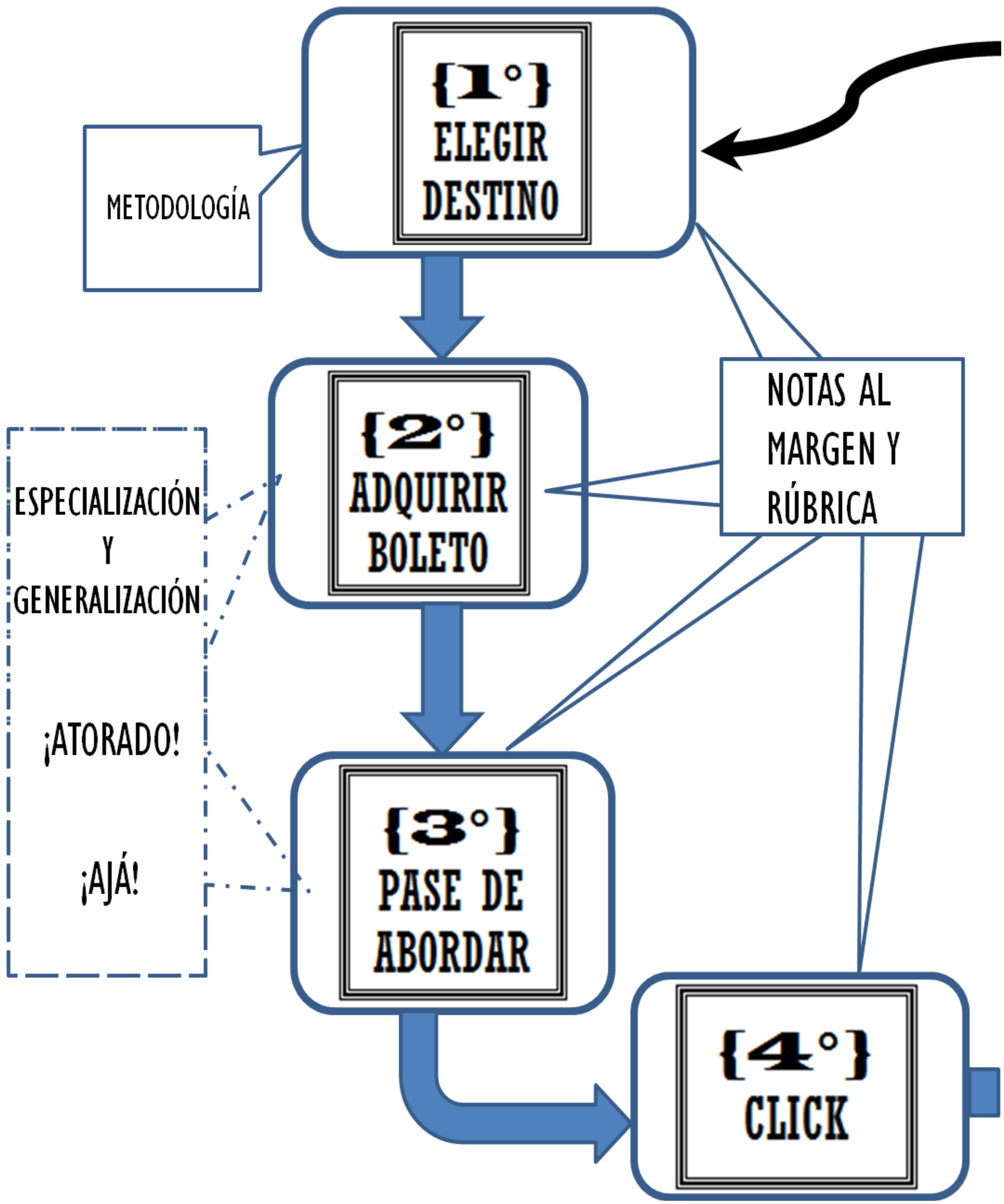
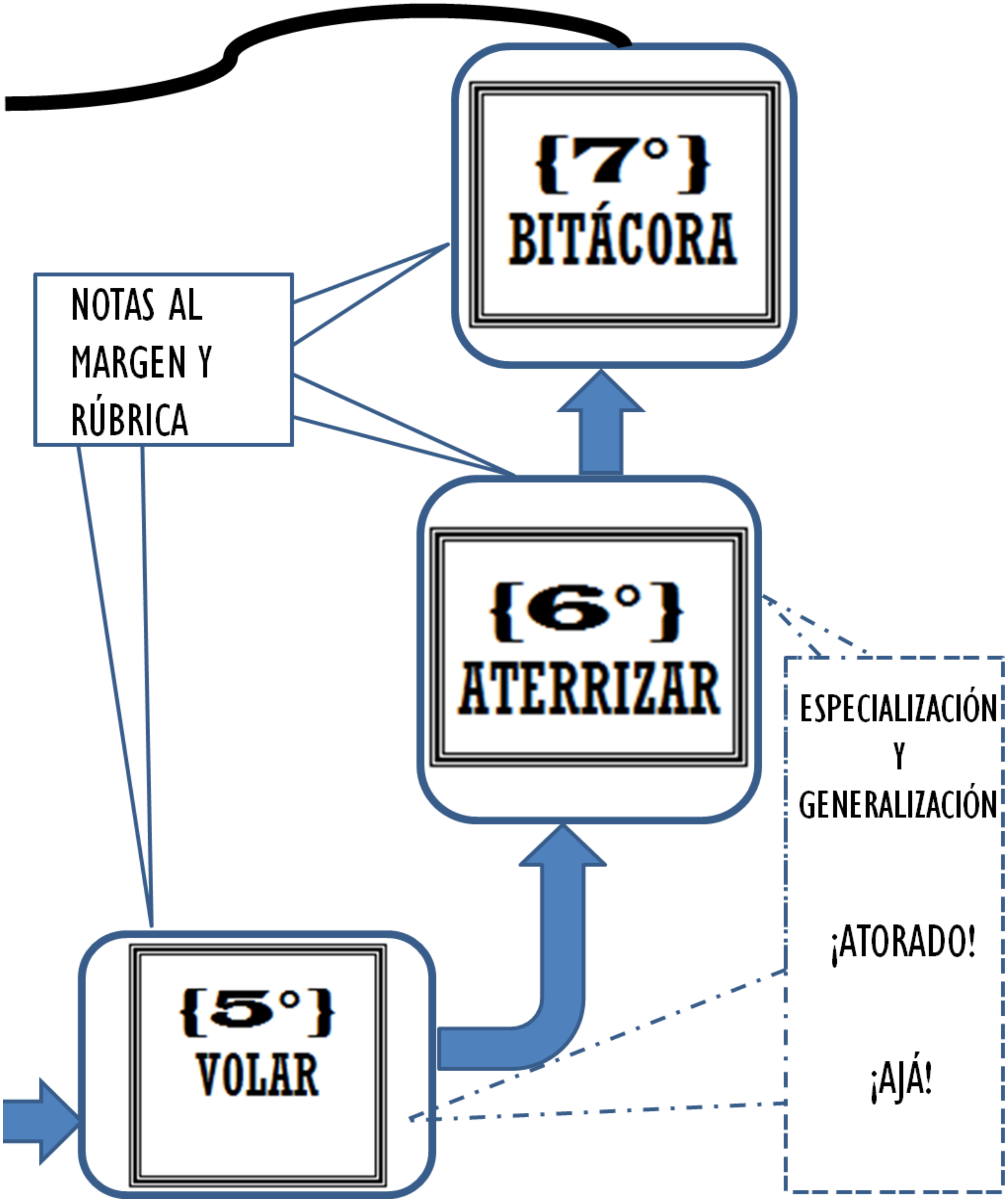


Figura 4.3.1.1 Configuración de la estrategia.

DE LA ESTRATEGIA



4.3.2 Particularidades de la estrategia didáctica

Para el diseño de esta estrategia didáctica, se tuvieron en cuenta, entre otros aspectos, que debe despertar la motivación y el interés del estudiante, a fin de lograr su participación activa, y que debe contener objetivos, que propicien en los alumnos incrementar sus habilidades de pensamiento, aprender mediante una práctica activa, y buscar las relaciones posibles, entre los conceptos inmersos en la información, a fin de que ésta se convierta en conocimiento para ellos.

Aunado al párrafo anterior, considérense también las directrices que al respecto del diseño de estrategias se establecen, en primer lugar, las relacionadas con la didáctica de la enseñanza y aprendizajes; y en segundo lugar, las relacionadas con la enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento; lo que debe dar lugar a incluir, además del objetivo, la motivación, el aprendizaje, la evaluación y la planeación.

No dejaremos de lado, el hecho de que un profesor, cuando se asume como docente, asume también las responsabilidades que implican el trato al alumno. Éstas, se pueden enmarcar dentro de "ser una buena persona", porque debe cuidar aspectos como amabilidad, actitud, orientación; dado que el alumno del nivel bachillerato, es una persona en proceso de formación (Arredondo et al, 2005).

A la par de lo anterior, están las particularidades que rodean la pirámide del conocimiento y la sabiduría. Veamos algunas.

Hemos apuntado la conveniencia de que el alumno vaya y viva la experiencia matemática, desde que recolecten y registren datos, hasta que se apropien de los aprendizajes respectivos.

Resaltemos la manera en que, dentro de una estrategia didáctica, se interrelacionan los datos, la información y el conocimiento, para dar lugar a la Sabiduría[27].

[27] Sabiduría: "[…] *nivel más elevado del conocimiento* […]". Recuperado el 3 de noviembre 2019, de https://definicion.de

FIGURA 4.3.2.1 DATOS–INFORMACIÓN–CONOCIMIENTO–SABIDURÍA.

Específicamente, el conocimiento depende de la información, y ésta a su vez, depende de los datos; sin embargo, si logramos inyectarle fantasía, imaginación y creatividad, entonces los resultados serán exitosos. (Rendón, 2005).

En lo particular, para el campo de la matemática, "[…] cuando los elementos más básicos, como los datos, se entrelazan con base en un objetivo, se suscita la información, y si ésta se estructura convenientemente, tiene lugar el conocimiento, mismo que nos dejaría a un paso de la sabiduría; además, téngase en cuenta que suscitar en los alumnos un sistema de representación, facilita migrarlos a la abstracción que requiere el álgebra […]" (Contreras, 2016).

Paralelamente, al diseñar estrategias didácticas, considérense:

a) Aspectos académicos:
   i. Institución educativa.
   ii. Ubicación dentro Programas de estudios.
   iii. Semestre.
   iv. Objetivo, tema, propósito y aprendizaje. Deben estar escritos con claridad y en términos del alumno (del que aprende, no del que enseña).
   v. Población destinataria.
   vi. Tiempo de duración.
   vii. Recursos necesarios (físicos y electrónicos).
   viii. Hasta donde sea posible, especificar el porcentaje del aprendizaje que se espera lograr.

b) Aspectos de los adolescentes:
   i. Conocimientos y habilidades previos.
   ii. Formación psicosocial.
   iii. Fortalezas y debilidades.
   iv. Defectos y virtudes.
   v. Recursos con los que cuenta (materiales y personales).
   vi. Problemas cotidianos que mayormente vive.
   vii. Entorno que lo rodea.
   viii. Intereses, sueños y metas.
   ix. Situaciones cotidianas que vive a diario o mayoritariamente.

c) Aspectos relativos a la evaluación diagnóstica o diagnóstico inicial, que ayudará a obtener la mayor información listada en el inciso anterior.

Para finalizar estas particularidades, en la Figura 4.3.2.2 Enseñanza + aprendizaje = estrategia, se visualizan, de manera integral y global, cómo se interrelacionan las técnicas de enseñanza con las técnicas de aprendizaje, para dar como resultado, una estrategia didáctica.

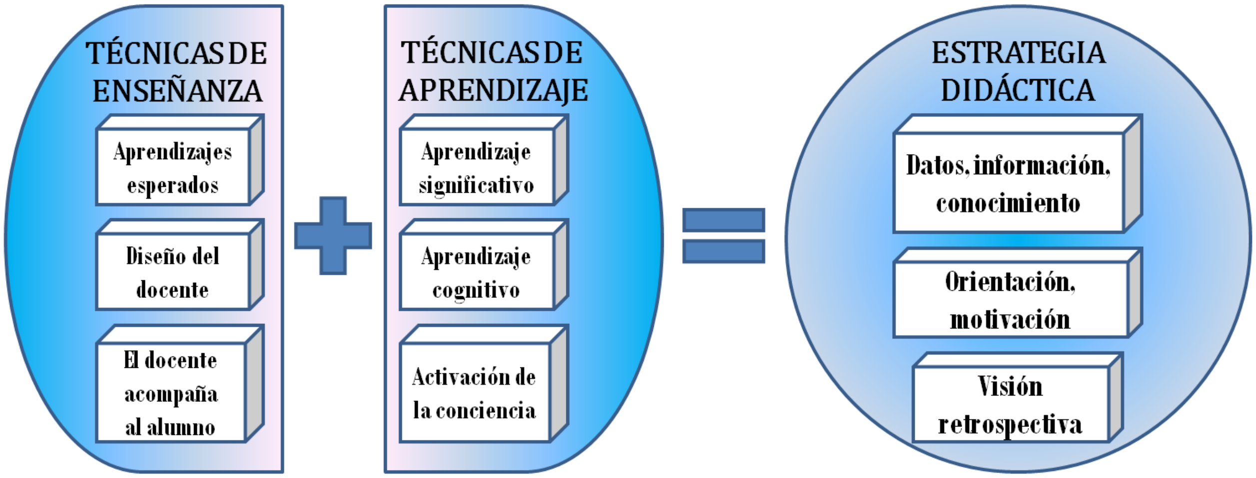


FIGURA 4.3.2.2 ENSEÑANZA + APRENDIZAJE = ESTRATEGIA.

Para concluir este apartado, se muestra formalmente el detalle de la estrategia didáctica, que particularmente, pretende incorporar los aspectos predominantes, abordados a lo largo de este trabajo.

En virtud de la formalidad que se requiere, la estrategia contiene datos relativos: a la institución, al título, a la vinculación con el programa, propósitos de la unidad, aprendizajes y temática en que incide, objetivo, identificación de contenidos, metodología y visión panorámica de la estrategia.

Aunado a las formalidades, se incorporaron las fases relativas al proceso **RAMERPEMS**.

4.3.3 Sesiones didácticas de la estrategia

Vale la pena resaltar que nuestra estrategia didáctica, está diseñada para abarcar el tema de FUNCIONES EXPONENCIALES, en tres sesiones de clase, las dos primeras con una duración de 90 minutos y la última, con una duración de 40 minutos. Lo anterior, en virtud de que en una semana de clases, se tienen dos sesiones de 120 minutos y una de 60. Al respecto, para las primeras dos sesiones, se deja un margen de 15 minutos, al inicio y al final, respectivamente, a fin de enmarcar la didáctica en los restantes 90 minutos. Respecto a la última sesión, cuya duración es de 60 minutos, los márgenes que se dejan al principio y al final, son de 10 minutos respectivamente. Por lo tanto, al sumar los tiempos efectivos, se tiene una duración total de 220 minutos.

De manera particular, cada sesión, de acuerdo a lo que marcan los lineamientos pedagógicos para la planeación de una clase, del Colegio de Ciencias y Humanidades, contiene sus tres momentos didácticos ordinarios, como son INICIO (Apertura), DESARROLLO y CIERRE. Asimismo, para cada sesión, se especifican los materiales y recursos requeridos, al igual que las estrategias e instrumentos de evaluación, para cada uno de los momentos antes mencionados.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES
MADEMS – MATEMÁTICAS
ESTRATEGIA DIDÁCTICA

PLANTEL	NIVEL	SISTEMA	SEMESTRE	CICLO	AUTOR
ORIENTE	MEDIO SUPERIOR – BACHILLERATO	ESCOLARIZADO	CUARTO	2019-2	PROF. ANTONIO GRANILLO MTZ.

TITULO DE LA ESTRATEGIA	*« RÁPIDAS Y FURIOSAS »*

	ASIGNATURA	UNIDAD	ENFOQUE	DURACIÓN
VINCULACIÓN DE LA ESTRATEGIA CON EL PROGRAMA	**MATEMÁTICAS 4**	**3. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS**	➢ **Razonamiento matemático**	**220 min.**

Estrategia basada en los *Programas de Estudio–Área de Matemáticas–Matemáticas I–IV*; de la Universidad Nacional Autónoma de México, editados por el Colegio de Ciencias y Humanidades, Primera Edición 2016.

PROPÓSITOS DE LA UNIDAD

Al finalizar, el alumno utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica

APRENDIZAJE EN QUE INCIDE:	TEMÁTICA EN QUE INCIDE:
Con relación a los conocimientos y destrezas, en función de la resolución de problemas, el alumno,	
Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.	Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.
Identifica patrones de cambio, involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.	Estudio Analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo: $\boldsymbol{f(x) = ab^x}$ con $\boldsymbol{b} > 1$ ó $\boldsymbol{0} < b < 1$ y $\boldsymbol{a \neq 0}$
Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.	Relación entre los parámetros de $\boldsymbol{f(x) = ab^x}$ con su gráfica.
Resuelve problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.	Problemas de aplicación.

OBJETIVO DE LA ESTRATEGIA	Ante un fenómeno de la naturaleza, cuyo comportamiento de variación sea exponencial creciente o decreciente, que el alumno: • Lo explore y lo exprese verbal, tabular, gráfica y algebraicamente. • Explique en qué consiste el crecimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes entre los parámetros (factor, base y exponente) de la expresión algebraica. • Comprenda cómo los parámetros (factor, base y exponente) de la expresión algebraica, afectan el comportamiento de la gráfica. • Relacione su expresión algebraica con el concepto de función exponencial. • De la función exponencial asociada, identifique el dominio y rango asociados.

IDENTIFICACIÓN DE CONTENIDOS

DECLARATIVOS			
CONCEPTUALES	**FACTUALES**	**PROCEDIMENTALES**	**ACTITUDINALES**
➽ Identificar, dada una situación cotidiana, las variaciones y crecimientos exponenciales. ➽ Comprender los conceptos de dominio y rango de una función. ➽ Analizar, dentro de una función, cómo los parámetros implícitos, modifican el comportamiento gráfico, cuando estos cambian.	➽ Asimilar lo que implica un crecimiento exponencial, junto con sus formas de variación. ➽ Diferenciar las diferencias, similitudes y relaciones entre dominio y rango de una función. ➽ Apropiarse del significado que entre una función y sus parámetros, existe.	➽ Explorar una situación dada, a partir de datos dados y transitar hasta un escenario extremo. ➽ Representar gráficamente el crecimiento exponencial de una situación dada.	➽ Compartir la información investigada, con el equipo. ➽ Aportar ideas de mejora, para lograr un mejor impacto en la comunidad escolar, cuando se trate de la representación gráfica.

METODOLOGÍA

Con el enfoque y proceso del ***razonamiento matemático***, propiciar que los alumnos por una parte, se apropien de los aprendizajes pretendidos, y por otra vivan ***la resolución de problemas***. Lo anterior, sobre la base de información de los alumnos, sobre aspectos como:

a) Sus conocimientos y habilidades previos.
b) Su formación psicosocial, fortalezas y debilidades, defectos y virtudes, problemas y necesidades, y sueños y metas.
c) Situaciones cotidianas, preferentemente vinculadas con experiencias propias y problemáticas sociales, pero sobre todo, que les sean significativas emocionalmente…

VISIÓN PANORÁMICA DE LA ESTRATEGIA
Sesión 1. (90 min.) Propiciar empatía entre docente y alumnos, captar la atención de los alumnos, aplicar una evaluación diagnóstica, establecer el escenario de trabajo, proponer un problema que implique variación exponencial y que los alumnos acuerden los temas que necesiten investigar. **Sesión 2.** (90 min.) (En un laboratorio de cómputo) Presentar un recurso TIC, cuyo contenido sea una situación de variación exponencial. Los integrantes de cada equipo compartirán entre sí, la información investigada y obtenida, y acordarán la manera de representarla en pleno. De la expresión algebraica respectiva asociada a la función exponencial, analizarán el impacto y las relaciones de los parámetros (factor, base y exponente) y su gráfica. Retomarán los conceptos de dominio y rango. **Sesión 3.** (40 min.) ➽ Resolverán problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales, inicialmente en equipo y al final individualmente.

DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA — SESIÓN 1

I N I C I O	TIEMPO: 15 min.
ACTIVIDADES DEL DOCENTE	ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE
<u>**Preparación del escenario.**</u> *A) Colocar, al lado izquierdo del pizarrón, los aprendizajes, impresos, que se pretenden propiciar, con la práctica de la estrategia.* *B) Colocar, en la parte superior derecha del pizarrón, la cuadrícula "POSICIONES", cuyos renglones sean los números de los equipos y cuyas columnas sean los puntos que cada equipo acumule.* *C) Resaltar los instrumentos que se utilizarán para la evaluación del desempeño de cada estudiante:* *I) Factuales y Conceptuales: Aportaciones, Participaciones, Tabla de posiciones.* *II) Actitudinales: Respeto, tolerancia, equidad, valores.* *III) Procedimentales: Habilidades.* *D) Escribir, en la parte superior izquierda del pizarrón, el orden de las actividades que se realizaran en la sesión:* ☐ *Realizar la Actividad Lenguas de gato.* ☐ *Construir la historia (Actividad "Atando cabos").* ☐ *Actividad "Eeeee...¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! "* ☐ *Boleto de salida.*	

<table>
<tr><th colspan="2">Evaluación Diagnóstica</th></tr>
<tr><td>1. Actividad “Lenguas de gato”.

Como una variante del juego “Tripas de gato”, en el que se trata de unir dos números iguales; pedir a los alumnos que se coloquen de pie, todos en un lugar específico del salón. Enseguida, explicar que el profesor mencionará una <u>frase detonadora</u>, de la temática, y el alumno que quiera, deberá complementarla mediante la asociación de dicha frase con, ya sea su definición, alguna causa, alguna consecuencia, con cualquier, alguna expresión gráfica, etc.

Frases detonadoras:
<table>
<tr><td>a) Expresión algebraica.</td><td>b) Expresión tabular.</td><td>c) Expresión verbal.</td></tr>
<tr><td>d) Expresión gráfica.</td><td>e) Función.</td><td>f) Función lineal.</td></tr>
<tr><td>g) Función cuadrática.</td><td>h) Función cúbica.</td><td>i) Variación lineal</td></tr>
<tr><td>j) Variación cuadrática.</td><td>k) Variación cúbica.</td><td>l) Crecimiento lineal.</td></tr>
<tr><td>m) Crecimiento cuadrático.</td><td>n) Crecimiento cúbico.</td><td>o) Decaimiento lineal.</td></tr>
<tr><td>p) Decaimiento cuadrático.</td><td>q) Decaimiento cúbico.</td><td>r) Dominio.</td></tr>
<tr><td>s) Rango.</td><td>t) Conjunto.</td><td>u) Factor.</td></tr>
<tr><td>v) Incógnita.</td><td>w) Variable.</td><td>x) Variable independiente.</td></tr>
<tr><td>y) Variable dependiente.</td><td>z) Variación proporcional.</td><td>aa) Ecuación… etc.</td></tr>
</table>

Al alumno que complemente adecuadamente la frase detonadora mencionada, recibirá de parte del profesor, la mitad de un distintivo. Así sucesivamente, hasta que la mitad del grupo, reciba su mitad del distintivo; y en consecuencia, se tengan sólo dos equipos. Cada uno de los alumnos del resto del grupo, recibirán la otra mitad de cada distintivo.

Enseguida, pedir a los alumnos que en un gafete escriban su nombre, de preferencia como les gusta que los llamen. Finalmente, pedirles que se formen en equipos de dos, de acuerdo con la mitad correspondiente al distintivo que hayan recibido.</td>
<td>1. Recordar la manera en que se juega “Tripas de gato”, para, de manera similar, jugar “Lenguas de gato”. Luego, completar la <u>frase detonadora</u> lo mejor posible. Posteriormente, formar equipos de 2 integrantes.</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td>Los complementos aportados por los alumnos, para responder a las <u>frases detonadoras</u>.</td></tr>
</table>

D E S A R R O L L O	SESIÓN 1 TIEMPO: 60 min.
ACTIVIDADES DEL DOCENTE	**ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE**
Construir la historia (Actividad *“Atando cabos”*)	
1. El profesor capta la atención de los estudiantes, con una **idea detonadora inicial**, que marque el principio de una historia o ensayo literario (se puede probar con algún tema que introduzca el grupo al	1.- Participar activamente en la dinámica del

<table>
<tr>
<td>
tema “Funciones exponenciales”.
Frases detonadoras:
<table>
<tr><td>i) Existen varios tipos de Funciones, tales como…</td><td>ii) La variación de un exponente, impacta a la gráfica de manera que…</td><td>iii) Un crecimiento exponencial…</td></tr>
<tr><td>iv) La gráfica de una función exponencial…</td><td>v) La depreciación de un auto, gráficamente se representa como…</td><td>vi) El crecimiento de un virus bacteriológico, gráficamente se representa como… etc.</td></tr>
</table>
No obstante la tabla anterior, la idea detonadora, puede ser sobre impacto radioactivo (accidentes nucleares), crecimiento poblacional de animales y multiplicación de bacterias (tuberculosis, neumonía, etc.). La manera en que los estudiantes podrán construir la historia, será atando respuestas, ideas, comentarios o adivinanzas.
Así, el docente elegirá, aleatoriamente con la pelota de esponja, al estudiante que deberá continuar con la construcción de la historia; a su vez, éste elegirá de la misma manera al compañero que lo sucederá; y así sucesivamente, hasta que todos los alumnos hayan participado.
Sea “cabo atado”, al hecho de que el alumno en turno, continuó correctamente la construcción de la historia que se esté construyendo. Por cada cabo atado que el estudiante en turno realice correctamente, se debe registrar un punto a su favor en la cuadrícula POSICIONES.
</td>
<td>profesor, para construir la historia sobre variación exponencial, mediante respuestas, ideas, comentarios o adivinanzas, que tengan sentido en la secuencia de la historia.</td>
</tr>
<tr>
<td>
{1°} ELEGIR DESTINO
2. Propiciar que con la participación de todo el grupo, se explore, indague y argumente la solución de un problema propuesto sobre interés compuesto. Por ejemplo:
Requerimiento de Carlos.
Carlos abre una cuenta de ahorro y deposita un monto de $2,400. Si el banco paga un interés i=5% nominal anual…
Calcule el saldo de su cuenta después de 4 años, con:
a) Interés simple.
b) Interés compuesto.
De la misma manera, se elige aleatoriamente al alumno que deberá colaborar en la construcción de la solución.
Por cada cabo atado, registrar un punto a favor del alumno en turno, en la cuadrícula POSICIONES.
</td>
<td>
2.- Participar activamente en la construcción de la solución requerida.
Verificar la solución del problema.
</td>
</tr>
<tr>
<td>Actividad “Eeeee…¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! ”</td>
<td>“Rápidas y furiosas”</td>
</tr>
<tr>
<td>
{2°} ADQUIRIR BOLETO
a. Presentar a los alumnos, el Cuestionamiento de Camilo, con la actividad « RÁPIDAS Y FURIOSAS » (ver anexo 1). Una vez leído el cuestionamiento minuciosamente, pedirles que detecten las pistas.
</td>
<td>3.- Verificar si, dado el problema propuesto, les queda bien entendido el problema.</td>
</tr>
</table>

b. Determinen los problemas. c. Planteen las hipótesis respectivas. d. Determinen los temas que requieren investigar.	
El docente puede asegurar el buen camino, con las propuestas de solución que se incluyen en el Anexo 2. "*RÁPIDAS Y FURIOSAS*" – Material para el profesor.	4.- Con base en el problema propuesto: a. Detectar las pistas, los problemas, plantear las hipótesis y acordar los temas de investigación requeridos.
Actividad	***"Boleto de salida"***
3. Con una actividad, la que mejor domine el docente, y que muestre la adquisición del aprendizaje, se concluye la sesión,	5.- Participar activamente con sus aportaciones.
ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	• Aportación individual para la construcción de la historia. • Los puntajes registrados en la cuadrícula POSICIONES. • Aportaciones para la construcción de la solución del problema (***Requerimiento de Carlos***). • Anexo 1, completado.

C I E R R E	**SESIÓN 1**	**TIEMPO: 15 min.**
ACTIVIDADES DEL DOCENTE		**ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE**
EVALUACIÓN CUALITATIVA Y FORMATIVA		
1. Verificar, en cada equipo, la claridad de los temas que requieren investigar, para la solución del problema.		1. Acordar la manera en que cada integrante investigará los temas requeridos, para la solución del problema de ABP.
ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	• Temas de estudio requeridos para investigación.	

<table>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA</th><th>SESIÓN 2</th></tr>
<tr><th colspan="3"><u>I N I C I O</u> TIEMPO: 15 min.</th></tr>
<tr><th colspan="2">ACTIVIDADES DEL DOCENTE</th><th>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Preparación del escenario.</u>

A) Colocar, al lado izquierdo del pizarrón, los aprendizajes, impresos, que se pretenden propiciar, con la práctica de la estrategia.

B) Colocar, en la parte superior derecha del pizarrón, la cuadrícula “POSICIONES”, cuyos renglones sean los números de los equipos y cuyas columnas sean los puntos que cada equipo acumule.

C) Resaltar los instrumentos que se utilizarán para la evaluación del desempeño de cada estudiante:
I) Factuales y Conceptuales: Aportaciones, Participaciones, Tabla de posiciones.
II) Actitudinales: Respeto, tolerancia, equidad, valores.
III) Procedimentales: Habilidades.

D) Escribir, en la parte superior izquierda del pizarrón, el orden de las actividades que se realizaran en la sesión:
☐ Formar equipos.
☐ El planeta de los conejos (Proyectar el Video: Crecimiento logístico y exponencial de la población).
☐ Actividad “Eeeee...¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! ” (Rápidas y furiosas... continúa)
☐ Boleto de salida</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Rearmar los equipos, previamente designados en la SESIÓN 1.</td><td>1. Hacer equipo con el integrante designado en la sesión pasada.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Proyectar el Video: Crecimiento logístico y exponencial de la población
| Biología | Khan Academy en Español:
https://www.youtube.com/watch?v=pxAbDhqwMsw

Después de la proyección, preguntar de manera dirigida a uno de los integrantes de cada equipo, elegido al azar, para verificar la comprensión del contenido del video. Las preguntas pueden ser del tipo:

I. ¿El crecimiento puede llegar a ser indefinido?
II. Si existe alguna variable dependiente. Descríbela.
III. ¿Cómo explicarías la tasa de crecimiento?
IV. ¿Entre qué rango, está el valor de la tasa?
V. Si el crecimiento fuera lineal o proporcional ¿Por qué parte del plano cartesiano, pasaría la gráfica?
VI. ¿Qué notación, al describir la cantidad de población de conejos, es conveniente usar para vislumbrar el modelo algebraico?
VII. Describe algún patrón, que desees, que hayas visualizado en la</td><td>2. Observar, reflexionar y, si es necesario, tomar notas del contenido del video.

Contestar correctamente las preguntas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">tabla.
VIII. Si existe alguna variable independiente. Descríbela.
IX. ¿Por qué sería imposible, realmente, que los conejos crezcan indefinidamente?
X. ¿Qué papel juega el exponente, en la expresión algebraica?
XI. Etc.

Por cada acierto del equipo, registrar la puntuación en la Tabla de POSICIONES.</td><td></td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">Argumentos verbales sobre cuestionamientos del profesor.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>D E S A R R O L L O</td><td>SESIÓN 2</td><td>TIEMPO: 60 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES DEL DOCENTE</td><td>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad “Eeeee…¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! ”… (Continúa)</td><td>“Rápidas y furiosas”</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Guiar a los alumnos para que:
{3°} PASE DE ABORDAR
a. Realicen una representación tabular, algebraica y gráfica. (Ver etapa Pase de Abordar).
b. Se debe “acompañar” a los equipos de alumnos, en la consecución de sus objetivos.
{4°} CLICK
c. Los alumnos deben lograr identificar la expresión algebraica, de la forma:
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ab^x}$$
los parámetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}$.
d. Los estudiantes deben indagar los efectos de los parámetros anteriores, en la gráfica (sería apropiado usar un programa (“software”) matemático dinámico.</td><td>3. Realizar las representaciones requeridas de la situación explorada, identificar los parámetros a, b y x, e indagar de éstos en la gráfica.</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="2">• Expresión tabular, algebraica y gráfica.
• Argumentos sobre el papel que juegan cada uno de los parámetros, en la gráfica.
• La identificación del dominio y rango de la función.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>C I E R R E</td><td>SESIÓN 2</td><td>TIEMPO: 15 min.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ACTIVIDADES DEL DOCENTE</td><td>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</td></tr>
<tr><td colspan="3">EVALUACIÓN CUALITATIVA Y FORMATIVA</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Dividir el pizarrón en tantas partes como rubros se juzguen prudentes (ver la tabla de abajo); y pedir que un integrante de cada equipo, pase al pizarrón y que en el rubro que desee, escriba una palabra clave o que le haya gustado, y que explique por qué le gustó o por qué le parece clave.

a) Expresión algebraica. | b) Función exponencial. | c) Variación.
d) Crecimiento. | e) Variable. | f) Exponente
g) Etc.</td><td>4. El integrante “blanco” del equipo, pasará a escribir una palabra clave, en el rubro que desee y explicará por qué le parece clave.</td></tr>
</table>

5. Pedir que el otro integrante de cada equipo, pase al pizarrón a construir una idea conclusiva, mediante el enlace de al menos tres palabras clave escritas en el pizarrón, con un marcador. Al "construir" su idea conclusiva, se sugiere que el alumno evite despegar el marcador del pizarrón y hacer pausas.	5. El integrante "amarillo" del equipo, pasará al pizarrón, a decir una idea que integren al menos tres palabras claves, ya escritas en el pizarrón.

ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN	• Valoración argumentativa de las palabras claves. • Significado asociado a las ideas conclusivas.

<table>
<tr><td>DESCRIPCIÓN DE LA ESTRATEGIA</td><td>SESIÓN 3</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>I N I C I O</u> TIEMPO: 15 min.</td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES DEL DOCENTE</td><td>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</td></tr>
<tr><td><u>Preparación del escenario.</u>
A) Colocar, al lado izquierdo del pizarrón, los aprendizajes, impresos, que se pretenden propiciar, con la práctica de la estrategia.
B) Colocar, en la parte superior derecha del pizarrón, la cuadrícula “POSICIONES”, cuyos renglones sean los números de los equipos y cuyas columnas sean los puntos que cada equipo acumule.
C) Resaltar los instrumentos que se utilizarán para la evaluación del desempeño de cada estudiante:
IV) Factuales y Conceptuales: Aportaciones, Participaciones, Tabla de posiciones.
V) Actitudinales: Respeto, tolerancia, equidad, valores.
VI) Procedimentales: Habilidades.
A) Escribir, en la parte superior izquierda del pizarrón, el orden de las actividades que se realizaran en la sesión:
☐ Formar equipos.
☐ Actividad “Eeeee…¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! ” (Rápidas y furiosas... concluye)
☐ Boleto de salida.</td><td></td></tr>
<tr><td>1. Rearmar los equipos, previamente designados en la SESIÓN 1.
2. Para retomar los aprendizajes, cuestionar a un integrante de cada equipo, acerca de lo visto hasta ahora (pueden usarse preguntas como las de abajo).
I. ¿En qué casos, un crecimiento exponencial, puede no ser indefinido?
II. Normalmente ¿cómo se relacionan los parámetros que varían, dentro de una variación exponencial?
III. Justifica una diferencia entre el dominio y rango de una función exponencial (ubicación, cardinalidad, etc.).
IV. ¿Qué es lo se debe cuidar al intentar buscar el patrón de cambio, en una variación exponencial?
V. ¿Qué papel juega el exponente, en la expresión algebraica?
VI. Etc.</td><td>1. Contestar correctamente las preguntas.</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td>Argumentos verbales sobre cuestionamientos del profesor.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"><u>D E S A R R O L L O</u></td><td>SESIÓN 3</td><td>TIEMPO: 60 min.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES DEL DOCENTE</td><td>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</td></tr>
<tr><td colspan="3">Actividad “Eeeee…¡ ¡ ¡ J U N T O S ! ! ! ”… (Concluye)</td><td>“Rápidas y furiosas”</td></tr>
<tr><td colspan="3">
{5°} VOLAR
3. Dado que se requiere determinar la incógnita del problema, entonces es bueno dar a los alumnos, la oportunidad para “probar” sus posibles respuestas.
Se debe partir de que la expresión precisa, es de la forma:
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ab^x}$$
4. Para esta etapa, en la que los alumnos prueben sus posibles respuestas de solución, se debe pedir a los alumnos, que del requerimiento de Camilo, determinen las expresiones que enseguida se especifican.
a. Tabular.
b. Algebraica.
c. Gráfica.
5. Los alumnos deben completar lo que se especifica en el Anexo 3.
6. Se debe propiciar un momento para que los alumnos preparen sus argumentos o sustentos que respalden ya sea la solución obtenida o las dificultades suscitadas, en caso de querer abandonar el problema.
{6°} ATERRIZAR
</td><td>
2. Realizar las representaciones requeridas de la situación explorada, identificar los parámetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{x}$, e interpretar de qué manera impactan o modifican la gráfica.
3. Una vez que el equipo obtuvo la solución, deben argumentarla y sustentarla.
</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="3">
• Expresión tabular, algebraica y gráfica.
• Argumentos sobre el papel que juegan cada uno de los parámetros, en la gráfica.
• La identificación del dominio y rango de la función.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"><u>C I E R R E</u></td><td>SESIÓN 3</td><td>TIEMPO: 15 min.</td></tr>
<tr><td colspan="3">ACTIVIDADES DEL DOCENTE</td><td>ACTIVIDADES DEL ESTUDIANTE</td></tr>
<tr><td colspan="4">EVALUACIÓN CUALITATIVA Y FORMATIVA</td></tr>
<tr><td colspan="3">
7. Propiciar que los alumnos den rienda suelta al lápiz, para hacer sus anotaciones relevantes o significantes.
8. Aplicar los instrumentos convenientes para la evaluación Sumativa, formativa, etc.
{7°} BITÁCORA
</td><td>
4. Completar el instrumento de evacuación.
</td></tr>
<tr><td>ESTRATEGIAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</td><td colspan="3">
• El instrumento de evaluación.
</td></tr>
</table>

RECURSOS
<u>Recursos materiales:</u> ➢ Aprendizajes de la estrategia, impresos en un tamaño que facilite verlos desde la parte final del salón. ➢ Distintivos, partidos por la mitad, de tal manera que el total de las mitades alcance para todo el grupo. ➢ Gafetes, para escribir el nombre del alumno. ➢ Una pelota de esponja. ➢ Proyector, computadora, internet, pizarrón blanco y sus marcadores respectivos. **<u>Recursos TIC's:</u>** Videos: ➢ https://www.youtube.com/watch?v=xaBD3oU3_Wk ➽ https://www.youtube.com/watch?v=pxAbDhqwMsw

REFERENCIAS CONSULTADAS
UNAM–Colegio de Ciencias y Humanidades. (2016). *Programas de Estudio–Área de Matemáticas–Matemáticas I–IV*. UNAM – Colegio de Ciencias y Humanidades. México

OBSERVACIONES ESPECIALES
Ninguna

Anexos de la estrategia

En este apartado se incluyen los tres anexos, necesarios para la estrategia didáctica descrita anteriormente. Los anexos 1 y 2 están estrechamente relacionados, en virtud de que ambos tienen el mismo objetivo, sólo que el segundo, que es el material para el profesor, contiene las sugerencias que se pueden aplicar cuando los alumnos estén trabajando con el anexo 1. Al respecto, como se ha especificado, el anexo 2 es de uso exclusivo del profesor; aunque si tú, lector, eres un alumno, se recomienda revisar su contenido, después de haber intentado previamente la actividad del anexo 1.

El anexo 3, de alguna manera es particularmente independiente, porque aunque se refiere a la misma estrategia didáctica, tiene como objetivo, fines prácticos, para que los alumnos lo desarrollen como dentro de un taller.

ANEXO 1.	*« RÁPIDAS Y FURIOSAS »*	Material para el alumno

CUESTIONAMIENTO DE CAMILO:

Camilo, un adolescente de bachillerato, el día de hoy lunes, comentó que aproximadamente a las 15:00 del domingo (ayer), acudió con su médico de confianza, debido a un dolor en la parte baja del abdomen. Camilo le confesó al médico que un día antes (sábado), alrededor de las 21:00 horas, tuvo relaciones sexuales con su novia Abigail (una mujer 2 años menor que él); y posteriormente, al día siguiente (domingo) alrededor de las 10:00 horas, tuvo nuevamente relaciones sexuales con su amiga Bugambilia (una mujer 3 años mayor que él). Camilo recordó que mantuvo ambas relaciones sexuales, sin usar protección.

Después de los estudios respectivos, el diagnóstico fue que Camilo padece de GONORREA, una infección de transmisión sexual (ITS), ocasionada por la bacteria Neisseria Gonorrhoeae; adicionalmente, se estimó que la población de bacterias, dentro de su organismo, en ese momento ya rebasaba los cien millones.

Sin entrar en temas biológicos como tiempo de incubación, etc., Camilo se cuestionó, si el contagio de la ITS se inició a partir de una bacteria, ¿Quién de las dos mujeres lo contagió, según la multiplicación de los patógenos que ya rebasaba los cien millones?

¿Cómo ayudar a Camilo en su cuestionamiento?...

PISTAS/HECHOS/DATOS	*SITUACIONES PROBLEMÁTICAS*

HIPÓTESIS / EXPLICACIONES / PRESUPOSICIONES	

Áreas, objetivos y temas de estudio necesarios

Referencias bibliográficas	

ANEXO 2.	*« RÁPIDAS Y FURIOSAS »*	Material para el profesor

CUESTIONAMIENTO DE CAMILO:

Camilo, un adolescente de bachillerato, el día de hoy lunes, comentó que aproximadamente a las 15:00 del domingo (ayer), acudió con su médico de confianza, debido a un dolor en la parte baja del abdomen. Camilo le confesó al médico que un día antes (sábado), alrededor de las 21:00 horas, tuvo relaciones sexuales con su novia Abigail (una mujer 2 años menor que él); y posteriormente, al día siguiente (domingo) alrededor de las 10:00 horas, tuvo nuevamente relaciones sexuales con su amiga Bugambilia (una mujer 3 años mayor que él). Camilo recordó que mantuvo ambas relaciones sexuales, sin usar protección.

Después de los estudios respectivos, el diagnóstico fue que Camilo padece de GONORREA, una infección de transmisión sexual (ITS), ocasionada por la bacteria Neisseria Gonorrhoeae; adicionalmente, se estimó que la población de bacterias, dentro de su organismo, en ese momento ya rebasaba los cien millones.

Sin entrar en temas biológicos como tiempo de incubación, etc., Camilo se cuestionó, si el contagio de la ITS se inició a partir de una bacteria, ¿Quién de las dos mujeres lo contagió, según la multiplicación de los patógenos que ya rebasaba los cien millones?

¿Cómo ayudar a Camilo en su cuestionamiento?...

PISTAS/HECHOS/DATOS	*SITUACIONES PROBLEMÁTICAS*
• Acude a revisión médica • Mantuvo relaciones sexuales el 17 de abril, 15:00 sin protección • Padece una ITS bacteria (Neisseria) • La infección es a partir de una bacteria	• Camilo tiene una ITS causada por Neisseria Gonorrhoeae • Desde hace un mes que Camilo contrajo una ITS • ¿Cuándo alcanzará 100 millones de bacterias partiendo de 1 sola?
HIPÓTESIS / EXPLICACIONES / PRESUPOSICIONES	
• Neisseria Gonorrhoeae se transmite por contacto sexual de una persona infectada. • En un mes, la bacteria Neisseria Gonorrhoeae puede reproducirse rápidamente en el ser humano.	• Una bacteria de Neisseria Gonorrhoeae se reproduce lentamente en el ser humano. • A la fecha actual, la multiplicación de las bacterias ya sobrepasó los 100 millones. • A la fecha actual, la multiplicación de las bacterias no ha sobrepasado los 100 millones.
Áreas, objetivos y temas de estudio necesarios	
• Características de Neisseria Gonorrhoeae: ciclo de vida de la bacteria (tiempo y tipo de reproducción de la bacteria)	• Manejo de exponentes y jerarquía de operaciones • Representación tabular y gráfica de una variación

Referencias bibliográficas	______________________ ______________________

ANEXO 3.

Equipo______ Integrantes______________________

____

MATERIAL PARA EL EQUIPO

Aspectos que se evaluarán:

Participación, aportaciones, Valores, Habilidades y Tabla de Posiciones.

« RÁPIDAS Y FURIOSAS »	
Expresión tabular:	
Expresión algebraica: $f(x) =$	Exponente:
	Parámetro $\boldsymbol{a} =$:
	Parámetro $\boldsymbol{b} =$:
Expresión gráfica.	

5. Resultados de la propuesta **RAMERPEMS**

Es momento de verificar si nuestra propuesta **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), coadyuva con los alumnos en que se apropien de los conocimientos, habilidades y aprendizajes matemáticos. Podríamos comenzar por hacer hincapié de todos los lados buenos de nuestra propuesta didáctica, para transmitir la idea de que realmente, es efectiva.; empero, sustentaremos estadísticamente si los resultados obtenidos por los alumnos, debidos a nuestro proceso **RAMERPEMS**, son significativos.

La prueba, se hará desde dos perspectivas, una de manera particular por cada uno de los alumnos, y otra, de manera general, con toda la población de alumnos. La primera perspectiva, en la que cotejaremos los resultados que obtenidos, antes y después de aplicar nuestra propuesta didáctica, se contrastará, individualmente por cada uno de los alumnos, la evaluación diagnóstica con la evaluación sumativa. La segunda, se enfocará en verificar, con una prueba estadística, en qué medida, las diferencias en los resultados obtenidos con nuestra propuesta didáctica, son significativas.

En este sentido, con la finalidad de minimizar las posibilidades de error, al probar la efectividad de nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, se consideró, para ambas evaluaciones

–diagnóstica y sumativa– aplicar un mismo Instrumento de evaluación, . Éste, está descrito en el respectivo apartado 3.2.

5.1 Cotejo de la evaluación diagnóstica y sumativa

En este cotejo, se trata de contrastar los resultados obtenidos por cada uno de los alumnos, antes y después de aplicarles nuestra propuesta didáctica; y así, verificar si dicha propuesta didáctica, consistente en el proceso **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), coadyuvó con nuestros estudiantes, en el sentido de facilitarles que se apropien de los aprendizajes pretendidos. En este orden de ideas, nuestro Instrumento de evaluación medirá, en los alumnos, qué tanto mejoraron sus capacidades naturales, habilidades, conocimientos y aprendizajes matemáticos, desde la *evaluación diagnóstica*[28], es decir, antes de aplicar nuestra estrategia didáctica, y hasta la *evaluación sumativa*[29], esto es, después de aplicar dicha propuesta didáctica. Los resultados obtenidos respectivamente, se desglosan a continuación.

Para este efecto, los alumnos fueron numerados consecutivamente del 1 al 12, a fin de contrastar, de manera particular por cada alumno, la diferencia entre la cantidad de aciertos obtenidos, antes y después de aplicar nuestra estrategia didáctica **RAMERPEMS**. En la Tabla 5.1.1 Evaluación diagnóstica y sumativa, se muestra el citado contraste. La tabla se compone de cuatro columnas: la primera, titulada **ALUMNO**, se refiere a cada uno de los alumnos; la segunda, titulada **DIAGNÓSTICO**, contiene los aciertos obtenidos por cada alumno en la evaluación diagnóstica; la tercera, titulada **RAMERPEMS**, muestra los aciertos obtenidos por cada alumno, en la evaluación sumativa, después de aplicar nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**; y finalmente, en la cuarta columna, se puede ver en qué medida y en

---

[28] Evaluación diagnóstica "[…] *que se realiza antes de empezar el proceso de enseñanza–aprendizaje* […]". (Recuperado el 21 de junio 2019, de http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/Evaluaci%C3%B3n%20Inicial.pdf)

[29] Evaluación sumativa: "[…] *aquella que se realiza al terminar un proceso de enseñanza–aprendizaje* […]". (Recuperado el 21 de junio 2019, de http://www.abc.com.py/edicion-impresa/suplementos/escolar/evaluacion-sumativa-1165688.html)

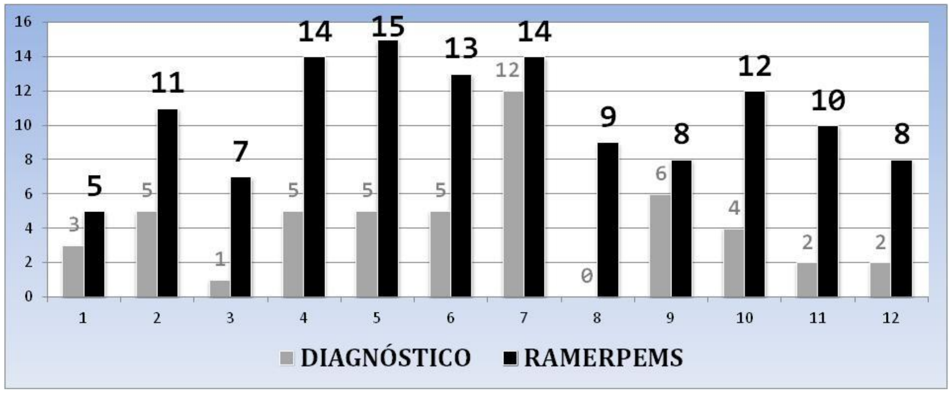
qué sentido se ha dado la variación de aciertos, de manera individual para cada alumno.

En una revisión superficial de la TABLA 5.1.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y SUMATIVA, resaltan las diferencias que, para cada alumno, existen entre los aciertos obtenidos en cada una de las evaluaciones aplicadas.

ALUMNO	DIAGNÓSTICO	RAMERPEMS	PORCENTAJE DE VARIACIÓN
1	3	**5**	**167%**
2	5	**11**	**220%**
3	1	**7**	**700%**
4	5	**14**	**280%**
5	5	**15**	**300%**
6	5	**13**	**260%**
7	12	**14**	**117%**
8	0	**9**	**900%**
9	6	**8**	**133%**
10	4	**12**	**300%**
11	2	**10**	**500%**
12	2	**8**	**400%**

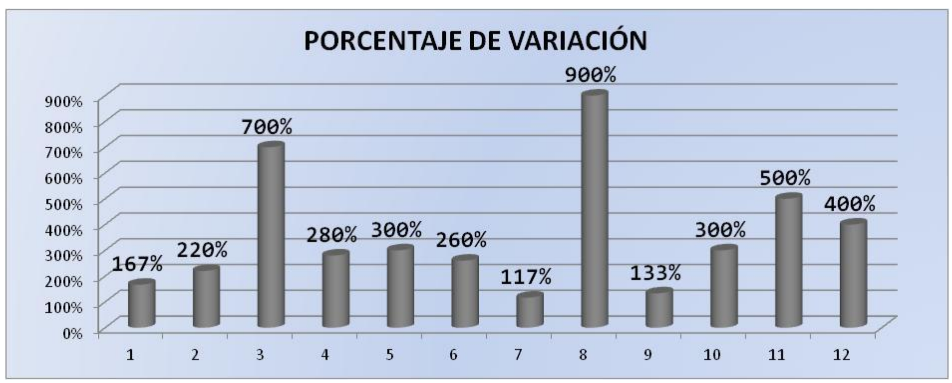
TABLA 5.1.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y SUMATIVA, DEL GRUPO 442,-TURNO VESPERTINO, 4° SEMESTRE, CCH OTE., CICLO 2018—2.

A efecto de facilitar la vista de las diferencias halladas, veamos la GRÁFICA 5.1.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y SUMATIVA. En ésta, nótese que, en la parte inferior, horizontalmente, se incluyen los alumnos numerados del 1 al 12; y en la parte izquierda, verticalmente, se tienen los aciertos respectivos que cada alumno obtuvo. Asimismo, para cada alumno se incluyen dos barras; la primera, en color gris o tenue, muestra los aciertos obtenidos en la evaluación diagnóstica, y la segunda, en color negro o más oscuro, ilustra los resultados obtenidos, después de nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**.



GRÁFICA 5.1.1 EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y SUMATIVA, DEL GRUPO 442,-TURNO VESPERTINO, 4° SEMESTRE, CCH OTE, CICLO 2018–2.

No obstante, valdría la pena hacer algunas precisiones sobre los porcentajes respectivos, derivados de las diferencias que existen entre los aciertos obtenidos por los alumnos, tanto antes como después de aplicar nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**. Para esto, apoyémonos en la gráfica siguiente:



GRÁFICA 5.1.2 PORCENTAJE DE VARIACIÓN ENTRE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA Y EVALUACIÓN SUMATIVA, DEL GRUPO 442,-TURNO VESPERTINO, 4° SEMESTRE, CCH OTE, CICLO 2018–2.

De estos porcentajes de variación, que están relacionados directamente con la aplicación de nuestra propuesta didáctica, podemos resaltar varias cosas. Primero, todos se comportaron al alza, es decir, que son positivos, y en ningún caso se mantuvieron o se comportaron a la baja; segundo, todos ellos, en el ámbito individual de cada alumno rebasaron el 100%; tercero, tres cuartas partes del total de los alumnos rebasaron el 200% de aciertos obtenidos; y por último, una cuarta parte de ellos fueron superiores al 400%.

Después de comparar los resultados obtenidos antes y después de aplicar nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, y de acuerdo a lo que resaltamos de los porcentajes respectivos en el párrafo anterior, estamos seguros y claros que, **sí** hay una diferencia en los resultados que se pueden lograr con nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**. Lo que restaría, sería verificar si esta diferencia es significativa.

5.2 Relevancia de nuestra propuesta RAMERPEMS

Acorde con el apartado previo, asumimos que en la cantidad de aciertos que un alumno logra, con y sin aplicar nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, sí hay una diferencia. Entonces, mediante una prueba de hipótesis estadística, conforme a los pasos característicos que toda prueba de hipótesis conlleva, verificaremos si esta diferencia es significativa.

5.2.1 Prueba de hipótesis

Como punto de partida para esta prueba, comenzaremos con la determinación de nuestra hipótesis estadística.

Paso 1. Redacción de la hipótesis

La hipótesis que queremos probar, sería de la forma siguiente:

*"El promedio de aciertos obtenidos por los alumnos, después de haber aplicado nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, es mayor que el obtenido sin aplicar dicha propuesta didáctica".*

En este sentido, las hipótesis alterna $(\boldsymbol{H_1})$ y nula $(\boldsymbol{H_0})$, quedarían como se muestra en la página siguiente:

Hipótesis alterna:
$H_1 =$ ***Existe*** una diferencia significativa entre la media de aciertos obtenidos por los alumnos, al aplicar la propuesta didáctica **RAMERPEMS**, y la media de aciertos obtenidos por los alumnos, sin aplicar dicha propuesta.
Hipótesis nula:
$H_0 =$ ***No Existe*** una diferencia significativa entre la media de aciertos obtenidos por los alumnos, al aplicar la propuesta didáctica **RAMERPEMS**, y la media de aciertos obtenidos por los alumnos, sin aplicar dicha propuesta.

Cuadro 5.2.1 Hipótesis estadísticas.

Paso 2. Determinar el nivel alfa (α - Porcentaje de error)

Si se quisiera manejar un intervalo de confianza del 95%, entonces, el porcentaje de error ($\boldsymbol{\alpha}$), y que generalmente se acepta para este tipo de pruebas estadísticas, será de:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{5}\%;$$

$$\text{O sea} \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05}$$

Paso 3. Elección de la prueba estadística

Previo a realizar alguna elección al respecto, son necesarias tres precisiones: la primera, que nuestros datos tratan de dos muestras relacionadas, a las que se les aplicó una misma evaluación en distintos momentos, es decir, antes y después, lo que estadísticamente indica que se trata de un estudio longitudinal; la segunda, que la cantidad de aciertos obtenidos por cada alumno, es una variable aleatoria numérica; y la tercera, se sabe que por lo general, la mayoría de las poblaciones tienen un comportamiento normal.

Con base en ambas precisiones, podemos hacer dos afirmaciones: la primera, que la prueba estadística adecuada para nuestras muestras, es una prueba paramétrica numérica, aplicada sobre un estudio longitudinal de dos medidas; la segunda, que existen distribuciones de muestreo que se aplican a datos cuyo comportamiento es normal, como por ejemplo $\boldsymbol{\chi}^2$, $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{F}$; en consecuencia, por todo lo afirmado anteriormente, concluimos que, en lo particular, usaremos la prueba t–Student para muestras relacionadas (Mendenhall, 1997).

Empezaremos el análisis de nuestras muestras de datos, con ayuda del "software" de tratamiento de datos para el análisis estadístico, llamado IBM-SPSS[30]. Veamos, en la TABLA 5.2.1.1 DATOS DESCRIPTIVOS, la información descriptiva que el "software" calculó de ambas muestras de datos.

Descriptivos

			Estadístico	Error típ.
Inicial	Media		4.17	.895
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	2.20	
		Límite superior	6.14	
	Media recortada al 5%		3.96	
	Mediana		4.50	
	Varianza		9.606	
	Desv. típ.		3.099	
	Mínimo		0	
	Máximo		12	
	Rango		12	
	Amplitud intercuartil		3	
	Asimetría		1.330	.637
	Curtosis		3.184	1.232
Final	Media		10.50	.917
	Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	8.48	
		Límite superior	12.52	
	Media recortada al 5%		10.56	
	Mediana		10.50	
	Varianza		10.091	
	Desv. típ.		3.177	
	Mínimo		5	
	Máximo		15	
	Rango		10	
	Amplitud intercuartil		6	
	Asimetría		-.163	.637
	Curtosis		-1.089	1.232

TABLA 5.2.1.1 DATOS DESCRIPTIVOS DE AMBAS MUESTRAS.

[30] Programa SPSS: "[…] *es un conjunto de herramientas de tratamiento de datos* […]". (Recuperado el 13 de octubre 2019, de https://www.um.es/docencia/pguardio/documentos/spss_1.pdf)

Como era de esperarse, las medias guardan una diferencia cuantitativa relevante; así que, verifiquemos si esta diferencia es significante.

Prueba de Normalidad. Recuérdense dos cosas. La primera, que de nuestras tres precisiones hechas al principio de este paso, por lo general, la mayoría de las poblaciones tienen un comportamiento normal; la segunda, que para aplicar la prueba $\boldsymbol{t}$–Student, requerimos asegurar que el comportamiento que guardan nuestras muestras estadísticas, sea precisamente de tipo normal, y en este orden de ideas, hay varias pruebas que verifican si los datos tienen un comportamiento normal, es decir, el grado de concordancia que existe entre la distribución de un conjunto de datos y una distribución teórica específica, como por ejemplo la prueba de Kolmogorov Smirnov o la prueba de Shapiro–Wilk. Al respecto, debemos resaltar que la prueba de Kolmogorov Smirnov se aplica para muestras grandes, y la de Shapiro–Wilk para muestras pequeñas[31]. En consecuencia, para nuestro caso, la adecuada será la prueba de Shapiro–Wilk.

Con base en el párrafo anterior, al respecto de que nuestras muestras se comportan normalmente, nos hace falta una cosa más: el grado en que la estadística de prueba, indicará si se acepta o se rechaza la hipótesis; es decir, el valor de la probabilidad que, estadísticamente, se conoce como valor $\boldsymbol{p}$ (Mendenhall, 1997).

Abramos un paréntesis a fin de retomar los criterios que se aplican para decidir si una hipótesis se acepta o se rechaza. Ya que hemos revisado lo relativo a la determinación de hipótesis ($\boldsymbol{H_1}$ y $\boldsymbol{H_0}$), al margen de error $(\boldsymbol{\alpha})$ y el valor de la probabilidad $(\boldsymbol{valor\ p})$, recordemos que los criterios para aceptar o rechazar hipótesis estadísticas, son:

[31] "*Contrastes de normalidad*". Recuperado el 14 de octubre 2019, de http://www.ub.edu/aplica_infor/spss/cap5-6.htm

Si	*Entonces . . .*	
	Acepte	*rechace*
$p \geq \alpha$	H_0	H_1
$p < \alpha$	H_1	H_0

TABLA 5.2.1.2 CRITERIOS PARA ACEPTAR Y RECHAZAR HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS (Wonnacott et al, 1991).

Cerremos el paréntesis, y retomemos lo que al respecto de que nuestras muestras se comportan normalmente, habíamos mencionado dos párrafos arriba.

Con fundamento en la TABLA 5.2.1.2 CRITERIOS PARA ACEPTAR Y RECHAZAR HIPÓTESIS, los criterios para aceptar o rechazar las hipótesis de normalidad (H^N), relativas a que nuestras muestras provienen de una distribución normal, quedarían así:

Si valor $p \geq \alpha \Rightarrow$ aceptar H_0^N	$\rightarrow$ Los datos **si** provienen de una distribución normal
Si valor $p < \alpha \Rightarrow$ aceptar H_1^N	$\rightarrow$ Los datos **no** provienen de una distribución normal

TABLA 5.2.1.3 CRITERIOS PARA ACEPTAR O RECHAZAR LAS HIPÓTESIS DE NORMALIDAD.

Una vez más, nos apoyaremos en el "software" IBM-SPSS, que nos permite verificar si las muestras guardan un comportamiento normal. El resultado correspondiente, se puede ver en la tabla siguiente.

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Inicial	.227	12	.087	.877	12	.081
Final	.118	12	.200*	.958	12	.754

*. Este es un límite inferior de la significación verdadera.

a. Corrección de la significación de Lilliefors

TABLA 5.2.1.4 PRUEBAS DE NORMALIDAD DE AMBAS MUESTRAS.

En lo particular, si centramos nuestra atención en los resultados relativos a la prueba de Shapiro–Wilk, podemos corroborar que el nivel de significancia de la evaluación diagnóstica es de 0.081; y el nivel de significancia de la evaluación sumativa, es de 0.754; que ambos, serían el valor $\boldsymbol{p}$.

Ahora, conjuntemos los criterios de normalidad (TABLA 5.2.1.3 CRITERIOS PARA ACEPTAR O RECHAZAR LAS HIPÓTESIS DE NORMALIDAD) y los cálculos obtenidos por el "software" IBM-SPSS (TABLA 5.2.1.4 PRUEBAS DE NORMALIDAD DE AMBAS MUESTRAS), ambos asociados en los criterios para normalidad, para así, poder estar en condiciones de aceptar o rechazar la hipótesis respectiva al comportamiento de nuestros datos. Veamos la tabla siguiente.

	$\boldsymbol{p}$		$\boldsymbol{\alpha}$
Diagnóstico	0.081	$>$	$\mathbf{0.05}$
RAMERPEMS	0.754	$>$	$\mathbf{0.05}$

TABLA 5.2.1.5 PRUEBA DE NORMALIDAD.

En consecuencia, de acuerdo a los criterios de normalidad (TABLA 5.2.1.3 CRITERIOS PARA ACEPTAR O RECHAZAR LAS HIPÓTESIS DE NORMALIDAD), se tiene que:

En ambos casos:

Valor $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{\alpha}$	$\Rightarrow$ aceptar	$\boldsymbol{H_0^N}$	$\rightarrow$ Los datos <u>**si**</u> provienen de una distribución normal

Recapitulemos este tercer paso. Hemos comprobado que efectivamente, nuestros datos provienen de una distribución normal, así que, a fin de verificar si es significativa la diferencia que existe entre los aciertos obtenidos por los alumnos, antes y después de aplicar nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, podemos usar la prueba $\boldsymbol{t}$–Student para muestras relacionadas.

Paso 4. Cálculo del valor $\boldsymbol{p}$

El valor $\boldsymbol{p}$ calculado de acuerdo con la prueba $\boldsymbol{t}$–Student, para muestras relacionadas, es decir, antes y después, nos indicará si la diferencia de los aciertos obtenidos por los alumnos, es significativa. Recordemos que el margen de error $(\boldsymbol{\alpha})$ especificado para esta prueba, fue del 5%, o sea 0.05. Una vez más, haremos uso del "software" IBM-SPSS para calcular el valor $\boldsymbol{p}$, de la prueba $\boldsymbol{t}$–Student para muestras relacionadas. Los resultados respectivos, pueden verse en la figura siguiente.

Prueba T

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	N	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	Inicial	4.17	12	3.099	.895
	Final	10.50	12	3.177	.917

Correlaciones de muestras relacionadas

		N	Correlación	Sig.
Par 1	Inicial y Final	12	.572	.052

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Inferior	95% Intervalo de confianza para la diferencia: Superior			
Par 1	Inicial - Final	-6.333	2.902	.838	-8.177	-4.489	-7.559	11	.000

FIGURA 5.2.1.1 PRUEBA $\boldsymbol{t}$–STUDENT PARA MUESTRAS RELACIONADAS.

Haremos algunas puntualizaciones, al respecto de la FIGURA 5.2.1.1 PRUEBA $\boldsymbol{t}$ –STUDENT PARA MUESTRAS RELACIONADAS. En el primer cuadro (**Estadísticos de muestras relacionadas**), se puede constatar que la media de los aciertos obtenidos por los alumnos, aumento considerablemente, de 4.17 a 10.50, en una población de 12 alumnos. Enseguida veremos si el aumento en las medias es significativo. Otra puntualización es que, en último cuadro (**Prueba de muestras relacionadas**), podemos ver en la última columna denominada **Sig. (bilateral)**, que el nivel de significancia es de 0.000, lo que para nuestros propósitos, es el valor $\boldsymbol{p}$.

$$\therefore \qquad \boldsymbol{p} = \mathbf{0.000}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{p} < \alpha$$

$$\text{Porque} \quad \mathbf{0.000} < 0.05$$

Y, de acuerdo a la TABLA 5.2.1.2 CRITERIOS PARA ACEPTAR Y RECHAZAR HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS, dado que $\boldsymbol{p} < \alpha$, el criterio correspondiente para asegurar que la diferencia de promedios obtenidos por los alumnos, es significativa, quedaría de la siguiente manera:

Si	*Entonces ...*	
	Acepte	*rechace*
$p < \alpha$	H_1	H_0

Por lo tanto, como $p < \alpha$, entonces, podemos rechazar la hipótesis nula H_0, y aceptar la hipótesis alterna H_1.

Por ende, nuestra conclusión quedaría así:

<u>Se acepta la Hipótesis alterna</u> (H_1) que establece:
Existe **<u>una diferencia significativa</u>** entre la media de aciertos obtenidos por los alumnos, al aplicar la propuesta didáctica **RAMERPEMS**, y la media de aciertos obtenidos por los alumnos, sin aplicar dicha propuesta.

Por lo tanto, de manera contundente, se puede afirmar que:

> **La aplicación del proceso RAMERPEMS (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), *<u>sí tiene efectos significativos</u>* sobre los aciertos que los alumnos obtienen; de hecho, en promedio, los alumnos subieron sus aciertos de 4.17 a 10.50.**

Conclusiones

La manera en que se determinaron los argumentos, que dieron origen a nuestra propuesta y al objetivo mismo del presente trabajo, resultó ser, estructuralmente, consistente, en virtud del papel que jugaron cada uno de los rubros citados en el primer capítulo. En primer lugar, el hecho de que al momento de esta realización, no encontramos antecedente alguno relacionado precisamente con el *razonamiento matemático, como una estrategia para la resolución de problemas*, que nos deja ver que el razonamiento matemático, como dicha estrategia, es un campo que aún está inexplorado. En segundo lugar, la situación actual respecto a las habilidades de razonamiento matemático, nos dice, a nosotros como docentes, que están pendientes muchas cosas, tanto en el ámbito personal como en el ámbito disciplinar; porque siempre será necesario que, en nuestro camino como profesor de matemáticas, hagamos una pausa para reflexionar sobre la efectividad de nuestra práctica docente, en relación con "acompañar" a nuestros alumnos, en que se apropien de los conocimientos, habilidades y aprendizajes matemáticos. En tercero, no podríamos entender, por sí misma, a la situación actual entorno al razonamiento matemático; sin embargo, si volteamos a revisar el marco referencial, las causas y factores asociados, bien podríamos comprender el por qué de la situación actual, ya que al reconsiderar el marco en el que se desenvuelven nuestros alumnos, lo que como docentes o instituciones hemos dejado de hacer y los factores y causas asociados, podríamos comprender en gran medida dicha situación actual.

En el ámbito individual, en lo personal, las dos aproximaciones teórico–metodológicas revisadas en el segundo capítulo, para la fundamentación de este trabajo, resultaron factibles a fin de que, conjugadas, dieran lugar a nuestra propuesta didáctica, misma que desencadenó la hipótesis de nuestro trabajo. Paralelamente al establecimiento de dicha conjetura, las expectativas, los beneficios, la importancia y la relevancia, fortalecieron la configuración de nuestra propuesta didáctica.

En relación con la metodología, que sirvió de cimiento para nuestra propuesta didáctica, vista en el tercer capítulo, podemos afirmar que, se enriqueció con las implicaciones del procedimiento que hace alusión a un camino, que el docente recorre en compañía de los alumnos. El hecho de estipular que necesitamos, como docentes, conocer a los alumnos, transitar junto con ellos por aquel camino, propiciar una interacción bilateral nosotros–ellos y, sobre todo y ante todo, hacer una pausa para reflexionar, tanto ellos como nosotros, sobre aquel camino recorrido, impactará sin lugar a dudas, en una mejora de nuestra práctica docente. Al margen de lo anterior, podemos hacer dos puntualizaciones más: la primera, respecto a la población estudiantil, que a las sesiones didácticas asistieron la mayoría de los alumnos, es decir, en promedio fueron dieciocho alumnos; sin embargo, nuestra muestra de doce alumnos regulares, que asistieron prácticamente a todas las sesiones, para nuestros propósitos resultó suficiente. La segunda, en relación al instrumento de evaluación, que con base en el promedio de aciertos obtenidos por los alumnos, y dado que abarcó aprendizajes de cursos previos de matemáticas (I a III), podemos afirmar que su diseño resultó adecuado.

La parte medular de este trabajo, que es el proceso **RAMERPEMS** (Razonamiento Matemático, como una Estrategia para la Resolución de Problemas en la Educación Media Superior), abordado en el cuarto capítulo, se compone de fases que, además de ser más simples, precisas y digeribles para los estudiantes, tienen un alcance puntual y no tan amplio, y hacen referencia, de principio a fin, a cada uno los momentos específicos, particulares y claves en la resolución de problemas. Esto, resulta muy apropiado y conveniente, en virtud de que pone de relieve los atributos esenciales del problema, tales como datos, información, variables, incógnitas y condiciones. Resaltamos, en este sentido, que un momento clave, según lo descrito en este trabajo, es nuestra fase Click, cuya esencia, similar a hacer click con el cinturón de seguridad de un transporte, para asegurarse uno mismo, implica abrazar o circunscribir, tanto el recurso matemático que coadyuvaría con el proceso para resolución del problema, como los atributos del mismo problema (datos, información, variables, etc.), mencionados anteriormente. En un sentido metafórico, su intención sería que al encapsular el recurso matemático y los atributos del problema, el alumno se sienta seguro de que va en la dirección correcta. De manera complementaria, estamos seguros que por sus dimensiones, tanto la secuencia didáctica como la estrategia didáctica, facilitaron la descripción y la consecuente comprensión de nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**, y mostraron su factibilidad y viabilidad en la resolución de un problema, sin importar la dificultad de éste.

En suma, el quinto capítulo, que habla de los resultados de nuestra propuesta didáctica, nos da la oportunidad de puntualizar algunas ideas conclusivas de relevante importancia. En primer lugar, el hecho de establecer un mismo instrumento de evaluación, para ser aplicado tanto en la evaluación diagnóstica como en la evaluación sumativa, permitió contar con argumentos y elementos de medición más precisos, encaminados a evaluar la viabilidad y efectividad de nuestra propuesta didáctica **RAMERPEMS**. En segundo, no podemos negar la satisfacción del autor de este trabajo, al momento de ver las diferencias de aciertos que cada alumno había obtenido, antes y después de aplicar nuestra propuesta didáctica, aunque fuera sólo dentro del plano empírico. Por esta razón, se hizo necesaria la aplicación de herramientas estadísticas, que con un enfoque más allá de lo empírico, ratificaran nuestras expectativas. En este sentido, después del análisis y de las pruebas estadísticas aplicadas, se puso de relieve, que las diferencias en los aciertos obtenidos por nuestra población estudiantil, además de comportarse en todo momento a la alza, fueron satisfactoriamente significativas.

Líneas de investigación propuestas

Dentro del campo del *razonamiento matemático, como una estrategia para la resolución de problemas en la Educación Media Superior*, aún queda un abanico de ideas por probar, todo depende de lo que cada uno de nosotros, como docentes del área matemáticas, deseemos hacer en beneficio, primero, de nuestros alumnos y finalmente, de nuestro país, con la mira puesta en un compromiso personal, que realmente nos impulse a renacer, como el ave fénix, de nuestra área de confort.

Aunado al párrafo anterior, como nuevas líneas de investigación, a continuación se proponen las siguientes:

- ✪ Reconsidérese que este trabajo se aplicó a una población del nivel medio superior, del turno vespertino; por consiguiente, sería una buena prueba, considerar aplicar esta propuesta didáctica, a una población estudiantil del turno matutino.
- ✪ Dado que la estrategia didáctica este trabajo se enfocó en contenidos curriculares del curso de Matemáticas IV, de la Unidad 4. FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS, con énfasis en funciones exponenciales, bueno será indagar en cuáles serían los resultados, si esta misma propuesta didáctica se aplica a los contenidos curriculares que restan, tanto del mismo Curso de Matemáticas IV, como de los Cursos de Matemáticas I a III; o más aún, si se aplica a alguna otra asignatura, tal vez, Física.
- ✪ Hemos constatado y comprobado que esta propuesta didáctica, sí tiene efectos significativos sobre los aciertos que los alumnos obtienen; cuando se aplica a muestras pequeñas; lo que da lugar al cuestionamiento ¿Cuáles serán los resultados si esta misma propuesta didáctica, se aplica a muestras grandes?

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J., Giménez, J., Torra, M. (1998) *Enseñar matemáticas.* España. Graó.

Arredondo, V., Pérez, G., Aguirre, M. (2005) *Didáctica general.* Tercera Edición. México. Limusa.

Canabal, S. (2017, Enero – 2018, Mayo). Práctica docente I, II y III. Cursos impartidos en la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) – Área Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX, México.

Contreras, O. y González, C. (2016, Agosto–Diciembre). *Psicopedagogía de la enseñanza y el aprendizaje*. Curso impartido en la Maestría en Docencia para la Educación Media Superior (MADEMS) – Área Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria, CDMX, México.

Díaz, F. & Hernández, G. (2010) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo – Una interpretación constructivista* (3ra. Ed.). México, Mc Graw Hill.

Eggen, P. & Kauchak, D. (2001) *Estrategias docentes – Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento* (2da. Ed.). México, FCE.

ITESM. (s.a. y s.f.). *El aprendizaje basado en problemas como técnica didáctica.* México. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores Monterrey–Vicerrectoría Académica, Dirección de investigación y desarrollo educativo. Recuperado el 5 de diciembre 2018, de http://sitios.itesm.mx/va/dide/documentos/inf-doc/abp.pdf

Larrazolo, N., Backhoff, E. & Tirado, F. (2013). "Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de la educación media superior", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. México, RMIE, Año 2013, Vol. 18, Num. 59, pp. 1137–1163, (ISSN: 14056666). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v18n59/v18n59a6.pdf, el 1 de diciembre 2018.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (2013) *Cómo razonar matemáticamente*. México. Trillas.

Mendenhall, W. (1997) *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Cuarta edición. México. Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A.

Millán, A, (2004) *Euclides – La fuerza del razonamiento matemático*. Madrid, España. Nivola Libros Ediciones.

OCDE. (s.f., 2018) *El programa PISA de la OCDE – Qué es y para qué sirve*. Paris, Francia. OCDE. Recuperado el 22 de diciembre 2018, de https://www.oecd.org/pisa/39730818.pdf.

Ontiveros, J. (1993) "El fracaso en la enseñanza de las matemáticas del bachillerato", en Díaz, A. *El docente y los programas escolares – Lo institucional y lo didáctico*. México, UNAM–IISUE. Págs. 131–133.

Paenza, A. (2014). *La puerta equivocada*. Video Conferencia, Buenos Aires, Argentina. TEDx Talks. Recuperado el 1 de enero 2019, de https://www.youtube.com/watch?v=MESCMo3wWy4.

Paulos, J. A. (2001) "Innumerary: Mathematical illiteracy and its consecuence", en Larrazolo et al, *Habilidades de razonamiento matemático de estudiantes de la educación media superior", Revista Mexicana de Investigación Educativa*. México, RMIE, Año 2013, Vol. 18, Num. 59, pp. 1137–1163, (ISSN: 14056666). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/rmie/v18n59/v18n59a6.pdf, el 1 de diciembre 2018.

Pólya, G. (1987, Septiembre) *Cómo plantear y resolver problemas*. (2da. Ed.). (Décimo cuarta reimpresión). México, Trillas.

Rendón, M. (2005). *"Relación entre los conceptos: información, conocimiento y valor. Semejanzas y diferencias"*, UNAM–Centro Universitario de Investigaciones Bibliotecológicas. México. Recuperado el 19 de junio 2019, de http://www.scielo.br/pdf/ci/v34n2/28555.pdf

Rodríguez, L., Quintero, R. Hernández, A. (2011) *Razonamiento matemático – Epistemología de la imaginación*. Gedisa Editorial.

Santos, L.M. (2014) *La resolución de problemas matemáticos – Fundamentos cognitivos* (2da. Ed.). México, Trillas.

Simatwa, E. (2010). "Piaget's theory of intellectual development and its implication for instructional management at presecondary school level", *Educational Research and Reviews*. Kenia, Año 2010, Vol. 5(7), pp. 366–371, (ISSN: 1990-3839 Academic Journals). Recuperado el 11 de diciembre 2018, de https://academicjournals.org/article/article1379610138_Simatwa.pdf

Stacey, K., Groves, S. (2001) *Resolver problemas: Estrategias – Unidades para desarrollar el razonamiento matemático* (2da. Ed.). Madrid. Narcea.

UNAM–CCH. (2011) *Prontuario de acreditación, deserción y reprobación–Matemáticas*. México, UNAM–Colegio de Ciencias y Humanidades–Dirección General.

UNAM–CCH. (2016) *Programas de estudio–Área de matemáticas, Matemáticas I-IV* (1a. Ed.). México, UNAM–Colegio de Ciencias y Humanidades.

UNAM–DGCCH. (2009) *Proyecto académico para la revisión curricular – Diagnóstico académico*. México, UNAM–DGCCH, Cuadernillos 2 (Perfil del alumno del CCH y su comportamiento escolar) y 3 (Desempeño escolar y egreso de la población estudiantil).

UNAM–ENCCH. (2017) *Informe gestión directiva 2017*. México, UNAM–Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades.

UNAM–SUMEM. (2016) *Estándares de matemáticas para el bachillerato de la UNAM*. México, UNAM–SDI–SUMEM (Seminario Universitario para la mejora de la Educación Matemática.

Wonnacott, R. & Wonnacott, T. (1991). *Estadística básica práctica*. México. Ed. Limusa.

Zarzar, C. (1993) *Habilidades básicas para la docencia*. México. Ed. Patria.

Esta obra se terminó en el otoño del año 2019.