



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Herramientas matemáticas para la teoría  
de dispersión estacionaria y dependiente  
del tiempo

TESIS

Que para obtener el título de:  
Matemático

PRESENTA:

Rodrigo Perusquía Cortés



DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Miguel Arturo Ballesteros Montero

Dr. Ivan Naumkin

Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM - Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mis gatos.*

# Agradecimientos

Trabajo realizado gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN-108818. Agradezco a este programa de la DGAPA-UNAM por la beca recibida, y también agradezco el apoyo de los proyectos PAPIIT IN-103918, IA-101820, así como el del proyecto SEP-CONACYT 254062.

*“En la etapa final de una licenciatura es importante reparar en los factores y causas que nos hicieron llegar a este momento, así como reflexionar sobre lo vivido y aprendido durante todo el proceso.*

*En la Facultad de Ciencias es común entrar a un salón a tomar una clase y salir de ella sin haber entendido una palabra; este hecho es algo que marcará definitivamente el rumbo de todo alumno de nuevo ingreso al plantel. Si aquella persona que hoy en día está concluyendo una carrera que imparta la facultad logra entender cómo logró llegar a esa posición, compartiendo sus aprendizajes podrá ser una gran ayuda e influencia para generaciones futuras.*

*Es un hecho que el trabajo duro, la paciencia, los sacrificios y la perseverancia conducen al éxito, pero no es lo único. Las amistades y colaboraciones que hacemos, el apoyo y ayuda que recibimos por parte de nuestra familia, así como de profesores y ayudantes, incluso nuestras actividades ajenas al estudio son otras razones que nos llevan a tener éxito, además de plenitud y dicha. Una carrera universitaria basada en buenas calificaciones, aprendizaje no compartido y sin crecimiento personal o humano no se puede considerar como una hazaña.*

*Como en todo episodio de vida, a lo largo de estos últimos cuatro años estudiando matemáticas experimenté incertidumbre, estrés y desmotivación; no obstante, en todo momento permaneció un deseo por prosperar y convicción por utilizar eventualmente mis estudios y conocimientos de la mejor manera posible, en beneficio de los demás antes del*

*propio. Además, en este lapso, afortunadamente, estuve acompañando de seres indispensables que me ayudaron a llegar al término del proceso de licenciatura, a quienes espero corresponder a futuro y a quienes procedo a otorgarles mi gratitud.*

*En primera instancia, agradezco a la U.N.A.M., por brindarme un lugar en sus instalaciones, a mis tutores y sinodales, quienes me otorgaron su tiempo en este proceso y permitieron que el trabajo terminara satisfactoriamente, y a todos los profesores y ayudantes con quienes tomé algún curso y que me brindaron su tiempo, ayuda y atención, más a aquellos que me los brindaron fuera de un salón de clases o respecto a algún asunto personal. Su enseñanza más valiosa que conservo es ayudar desinteresadamente a quien lo necesite, sin sentirse superior, ya que en algún momento estuvimos en su misma posición.*

*Enseguida, agradezco a cada una de mis amistades, dentro o fuera del plantel, quienes me dieron un respiro en malos momentos y enriquecieron mi trayecto en diferentes aspectos. Con algunos de ellos disfruté compartir conocimientos y vivencias en la facultad y con otros obtuve crecimiento humano y personal, así como apoyo incondicional. Una amistad es un gran obsequio de vida, por lo que no existe motivo para ignorarla o hacerla de lado, ni siquiera una vida de estudios.*

*Finalmente, agradezco a quienes hicieron la labor más complicada de todas: estar ahí conmigo en todo momento, sin importar el día o las circunstancias. Agradezco a mi familia, principalmente a mi mamá, Norma, a mi hermano, José Antonio, a Mariana y, no menos importante, a mis siete gatos, incluida Raya, a quienes di un hogar y de quienes obtuve tranquilidad, paz mental y felicidad. Cada uno de los previamente mencionados me motivó a no claudicar, a seguir adelante, y a culminar lo que ya había empezado. El amor, lealtad y apoyo incondicional que me otorgaron fue mi inspiración, y sin ellos mi casa no sería un hogar y cualquier logro que llegase a conseguir no tendría razón de ser.”*

Rodrigo.

# Introducción

La teoría de dispersión es un área de la matemática que estudia perturbaciones de operadores. Esta teoría permite estudiar y entender fenómenos físicos como la dispersión de ondas o partículas.

Uno de los objetivos principales de la teoría de dispersión estacionaria es, dado un operador autoadjunto definido en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , encontrar los valores a la frontera de la resolvente del operador a medida que su parámetro tiende al eje real. Así, el estudio de ciertas funciones analíticas en conjuntos abiertos y sus límites a la frontera son de especial importancia, ya que los resultados que se obtengan se podrán traducir en términos de operadores, y por ende de su resolvente, vía la teoría espectral.

El siguiente trabajo se centra en el estudio de funciones analíticas definidas en el disco unitario  $D$ , o bien en el semiplano complejo superior  $\mathbb{H}^+$  o inferior  $\mathbb{H}^-$ , y valores que toman a la frontera. Debido a que el material bibliográfico del tema es escaso y de poca calidad al estar ausente de argumentos matemáticos precisos, en esta tesis se presentan y demuestran algunos resultados principales con el mayor rigor posible. Siendo un tema de relevancia y que posee un nivel alto de dificultad, la tesis permitirá que la gente que esté introduciéndose al tema lo haga sin todas las dificultades con las que yo me presenté. No obstante, reiterando que el material bibliográfico existente obstaculiza en gran medida el aprendizaje y entendimiento del tema, en el escrito se pueden llegar a encontrar algunas imprecisiones o argumentos faltantes.

Utilizando como base conceptos y teoremas clásicos de teoría de la medida y análisis complejo, así como el concepto de convergencia no tangencial, en los primeros dos capítulos se presentan una serie de resultados, entre los que destacan dos de gran relevancia: el teorema de Lindelöf y el teorema de Luzin-Privalov.

El teorema de Lindelöf nos da condiciones necesarias para que una función analítica y acotada  $f$  definida en  $D$  converja uniformemente en conos con vértice en un punto de la frontera de  $D$ , la cual denotamos por  $T$ . Con lo anterior, se deduce que el límite de  $f$  a medida que su parámetro se aproxima al punto de  $T$  es independiente de la trayectoria que siga el parámetro, siempre y cuando ésta no se acerque tangencialmente a  $T$ .

El teorema de Luzin-Privalov utiliza fuertemente el teorema de Lindelöf y una construcción geométrica atribuida a I. Privalov, en la cual se obtiene un subconjunto de  $\bar{D}$  simplemente conexo a partir de cualquier subconjunto cerrado  $T$ . Este teorema indica que, dado un subconjunto  $E$  cerrado, denso métricamente y de segunda categoría en un abierto de  $T$ , una función  $f$  analítica definida en  $D$  es constante si para todo punto en  $E$  existe una trayectoria  $\gamma$  definida en  $[0, 1)$  que converge no tangencialmente a éste tal que el siguiente límite existe y es igual a esa constante:

$$\lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma)(t).$$

Sabiendo que existe un biholomorfismo entre los conjuntos  $D$  y  $\mathbb{H}^+$  (vía la función de Cayley), los teoremas de Lindelöf y Luzin-Privalov se pueden extender a funciones cuyo dominio sea  $\mathbb{H}^+$ . Más aún, lo anterior se puede extender a funciones cuyo dominio sea un conjunto abierto, no vacío, simplemente conexo y contenido propiamente en el plano complejo (para usar el teorema del mapeo de Riemann) y que la frontera de su dominio sea una curva de Jordan (para utilizar el teorema de extensión de Caratheodory).

En el capítulo 3 se introduce un espacio de funciones complejas con dominio  $\mathbb{H}^+$  para cada  $p > 0$ , llamado  $p$ -espacio de Hardy. En estos espacios se estudian límites de funciones a medida que su parámetro tiende a puntos del eje real no tangencialmente. Los resultados que se obtienen permiten tener una generalización del teorema de Luzin-Privalov.

El último capítulo se centra en la teoría de integrales singulares. Esta teoría surge de estudiar integrales de Cauchy sobre curvas suaves y valores principales de éstas.



Dadas una curva simple y suave  $\mathcal{C}$  y una función compleja  $f$  que satisface la condición de Hölder en dicha curva (excepto quizá en una vecindad de sus puntos extremos), se estudian los valores a la frontera de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

a medida que  $z$  tiende no tangencialmente a un punto no extremo de la curva. Note que, si  $\mathcal{C}$  también es cerrada, los valores a la frontera se estudian a partir de límites no tangenciales que se pueden tomar desde el interior de la curva o desde su exterior, lo cual da pauta a que existan dos límites distintos en cierto sentido.

Haciendo un análisis de lo anterior, concentrándonos en curvas simples, suaves y cerradas, se obtienen una serie de ecuaciones conocidas como las fórmulas de Plemelj-Sokhotski, las cuales son el resultado principal del capítulo. Estas ecuaciones nos dicen cómo recuperar a la función original a partir de los límites previamente descritos; además, a partir de éstos, se puede recuperar el siguiente valor principal, siendo  $x$  un punto de la curva:

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - x} dw.$$

A partir de estas fórmulas, se demuestra que el valor principal dado por la ecuación anterior satisface la condición de Hölder en la curva, cuyo índice de Hölder guarda una relación cercana respecto al índice de  $f$ , y se generalizan resultados de las integrales de Cauchy y valores principales ya mencionados sobre intervalos finitos de  $\mathbb{R}$ .

Para culminar el trabajo, se realiza un análisis de las integrales de Cauchy y valores principales previamente mencionados sobre la recta real. Además de que las funciones complejas que se tomen satisfagan la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$ , deberán ser de cierto orden a infinito. Con lo anterior, se obtienen ecuaciones análogas a las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y resultados similares que deriven de éstas, adaptados a la recta real.

# Tabla de contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Introducción</b>	<b>VI</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría de la medida . . . . .	1
1.2. Espacios métricos . . . . .	2
1.3. Funciones analíticas . . . . .	3
1.4. Convergencia no tangencial y teorema de Lindelöf . . . . .	4
1.5. Funciones subarmónicas . . . . .	13
<b>2. Teorema de Luzin-Privalov</b>	<b>16</b>
2.1. Límites radiales . . . . .	16
2.2. Construcción de Privalov . . . . .	17
2.3. Teorema de Luzin-Privalov . . . . .	23
<b>3. Espacios de Hardy</b>	<b>32</b>
<b>4. Valor principal y fórmulas de Plemelj-Sokhotski</b>	<b>40</b>
4.1. Valor principal de Cauchy . . . . .	40
4.2. Fórmulas de Plemelj-Sokhotski . . . . .	46
4.3. Fórmulas de Plemelj-Sokhotski en la recta real . . . . .	60
<b>Referencias</b>	<b>69</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Teoría de la medida

La noción de convergencia de funciones en un espacio de medida es esencial para poder estudiar los valores a la frontera que toma una función analítica. En particular, nos enfocamos en la convergencia casi uniforme, que definimos a continuación.

**Definición 1.1.** *Sea  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  un espacio de medida y  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles y finitas c.s.. Decimos que  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge casi uniformemente a  $f$  si para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $A \subseteq X$  tal que  $\mu(A) < \varepsilon$  y  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente a  $f$  en  $A^c$ .*

Enseguida enunciamos un resultado clásico de teoría de la medida, que da condiciones para que se dé la convergencia casi uniformemente. Éste, conocido como teorema de Egorov, lo podemos encontrar en [3] capítulo 9, sección 3, página 118.

**Teorema 1.2** (Teorema de Egorov). *Sea  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  un espacio de medida finita y  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles y finitas c.s.. Si  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge c.s. a  $f$  en  $X$ , entonces  $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  converge casi uniformemente a  $f$ .*

La noción de densidad de un conjunto es relevante en distintas áreas de la matemática. En particular, para teoría de la medida tenemos el siguiente concepto.

**Definición 1.3.** Sea  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  un espacio de medida. Decimos que  $A \subseteq X$  es denso métricamente en  $X$  si  $\mu(A \cap U) > 0$  para todo abierto no vacío  $U \subseteq X$ .

En el siguiente capítulo retomamos a los conjuntos densos métricamente al momento de enunciar el teorema de Luzin-Privalov, resultado principal de esa sección.

## 1.2. Espacios métricos

Previamente se introdujo una noción de densidad en un espacio de medida. En un espacio métrico, por ser también espacio topológico, se tiene el concepto clásico de densidad, el cual extenderemos con la siguiente definición.

**Definición 1.4.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Decimos que  $A \subseteq X$  es denso en ninguna parte (o bien, no es denso en alguna parte) si  $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$ .

Si sucede que  $\text{int}(\bar{A}) \neq \emptyset$ , diremos que  $A$  es denso en alguna parte. A partir de la definición previa se sigue el siguiente resultado.

**Proposición 1.5.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico y  $A \subseteq X$ .  $A$  es denso en ninguna parte si y sólo si  $A$  no es denso en cualquier abierto no vacío  $U \subseteq X$ .

Los conjuntos densos en ninguna parte dan origen a los conjuntos de primera y segunda categoría, los cuales forman una partición del espacio métrico en cuestión. Definimos éstos a continuación.

**Definición 1.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Decimos que  $A \subseteq X$  es de primera categoría si existe una sucesión  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  de conjuntos densos en ninguna parte en  $X$  tal que

$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

Además, decimos que  $A \subseteq X$  es de segunda categoría si  $A$  no es de primera categoría.

Observe que podemos hablar de conjuntos densos métricamente y de segunda categoría en  $\mathbb{R}$  o en la circunferencia unitaria, por ejemplo. En el siguiente capítulo veremos qué se puede concluir si los límites de funciones analíticas en el disco unitario a medida que su parámetro tiende a subconjuntos densos métricamente y de segunda categoría en la circunferencia unitaria son cero.

### 1.3. Funciones analíticas

El estudio de funciones analíticas y valores que toman a la frontera será de nuestro interés a lo largo del escrito. Por ello, enunciaremos algunos resultados clásicos de análisis complejo que nos servirán posteriormente como herramienta para demostrar los teoremas de Lindelöf y de Luzin-Privalov.

**Teorema 1.7.** *Sean  $f, g : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  funciones analíticas, donde  $U$  es abierto, no vacío y conexo. Si existe  $V \subseteq U$  abierto y no vacío tal que  $f|_V = g|_V$ , entonces  $f = g$ .*

**Teorema 1.8** (Teorema del Módulo Máximo.). *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica, donde  $U$  es abierto, no vacío y conexo. Si existe  $V \subseteq U$  abierto y no vacío tal que  $f$  alcanza un máximo local en  $V$ , entonces  $f$  es constante en  $U$ . Además, si  $f$  es analítica en  $\bar{U}$  y  $f$  no es constante, entonces  $f$  alcanza su máximo en  $\partial(U)$ .*

En lo siguiente, denotaremos por  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y por  $T := \partial(D)$ .

**Teorema 1.9** (Teorema del Mapeo de Riemann). *Sea  $U$  un subconjunto propio de  $\mathbb{C}$  abierto, no vacío y simplemente conexo. Entonces, existe un biholomorfismo biyectivo  $\psi : U \rightarrow D$ .*

**Corolario 1.10.** *Para cualesquiera  $U, V \subsetneq \mathbb{C}$  abiertos, no vacíos y simplemente conexos, existe un biholomorfismo biyectivo entre ellos.*

**Teorema 1.11** (Teorema de Caratheodory). *Sea  $\psi : U \rightarrow D$  un biholomorfismo, donde  $U \subsetneq \mathbb{C}$  es abierto, no vacío, y cuya frontera es una curva de Jordan. Entonces, existe una extensión  $\bar{\psi} : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$  continua y biyectiva tal que*

$$\bar{\psi}(\partial(U)) = T \quad \text{y} \quad \bar{\psi}|_U = \psi.$$

Una prueba del teorema de Caratheodory la podemos encontrar en [5] capítulo II sección C, en las páginas 37-40.

Sabemos que los homeomorfismos no necesariamente preservan conjuntos de medida cero. No obstante, la extensión dada por el teorema de Caratheodory sí tiene esta propiedad, como lo muestra el siguiente resultado, atribuido a F. y M. Riesz. Una prueba la podemos encontrar en [5] en el capítulo II, sección D, en las páginas 52-54.

**Teorema 1.12** (Teorema de F. y M. Riesz). *Sean  $U \subsetneq \mathbb{C}$  abierto, no vacío, cuya frontera es una curva de Jordan, y  $\psi : U \rightarrow D$  biholomorfismo biyectivo con extensión continua  $\bar{\psi} : \bar{U} \rightarrow \bar{D}$ . Si  $A \subseteq T$  tiene medida (de Lebesgue) cero, entonces  $\bar{\psi}^{-1}(A)$  tiene medida cero.*

## 1.4. Convergencia no tangencial y teorema de Lindelöf

Si queremos calcular el límite de una función analítica a medida que su parámetro tiende a un punto de la frontera de su dominio, sabemos que el parámetro puede tomar una infinidad de trayectorias. El concepto de convergencia no tangencial va a restringir al parámetro a sólo tomar aquellas trayectorias que se acerquen al punto sin ser tangentes en éste a la frontera del dominio de la función. Este concepto será de gran relevancia en el resto del trabajo.

**Definición 1.13.** Sean  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función,  $\gamma : [0, 1) \rightarrow D$  una función continua,  $w \in T$  y  $L \in \mathbb{C}$ .

a) Decimos que  $\gamma$  converge no tangencialmente a  $w$  si existen un ángulo  $\theta \in (0, \pi)$  y  $t_0 \in [0, 1)$  tales que  $\gamma(t)$  está en el cono con vértice en  $w$ , simétrico respecto al segmento con extremos  $0$  y  $w$ , y con ángulo de apertura  $\theta$  para toda  $t \geq t_0$ , y

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = w.$$

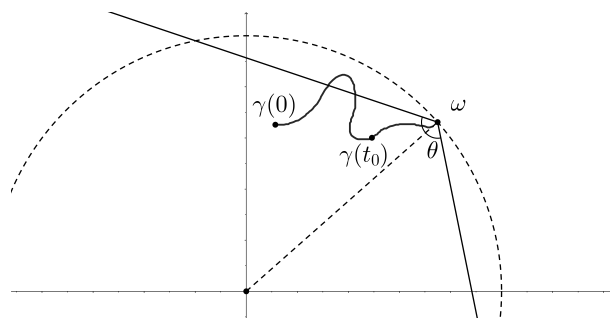


Figura 1.1: Convergencia no tangencial de  $\gamma$  a  $w \in T$ .

b) Decimos que  $f$  tiene un límite no tangencial  $L$  en  $w$  si para cualquier función continua  $\gamma : [0, 1) \rightarrow D$  que converge no tangencialmente a  $w$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = L.$$

En el caso en el que  $f$  tenga un límite no tangencial  $L$  en  $w \in T$ , escribiremos

$$\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ \text{nt}}} f(z) = L.$$

**Definición 1.14.** Sean  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analítica,  $w \in T$  y  $L \in \mathbb{C}$ . Decimos que  $f$  converge uniformemente a  $L$  en conos con vértice en  $w$  si para todo  $\theta \in (0, \pi)$  se tiene que  $f(z)$

converge uniformemente a  $L$  en el cono  $S_\theta$  con vértice en  $w$ , simétrico respecto al radio con extremos  $0$  y  $w$ , y con ángulo de apertura  $\theta$ , a medida que  $z$  se aproxima a  $w$  dentro del cono  $S_\theta$ .

Ahora, presentamos el teorema de Lindelöf. Para ello, seguiremos la prueba mostrada en [1] ubicada en las páginas 32-34.

**Teorema 1.15** (Teorema de Lindelöf). *Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y acotada, y supongamos que  $\gamma : [0, 1) \rightarrow D$  es una función continua tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = w \in T. \quad (1.1)$$

Entonces,  $f$  converge uniformemente a  $L$  en conos con vértice en  $w$  si

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = L. \quad (1.2)$$

*Demostración.* Sin perder generalidad, podemos suponer que  $w = 1, L = 0$ , y que  $|f| < 1$  (siempre podemos aplicar una rotación, traslación y homotecia adecuadas).

Al considerar la función  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\varphi(z) := \frac{i}{\pi} \operatorname{Log} \left( \left( \frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right),$$

y tomando la rama principal del logaritmo complejo (es decir, sabiendo que  $z = |z|e^{i\theta_z + 2i\pi k}$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$ , la rama principal del logaritmo complejo es tal que  $z \xrightarrow{\operatorname{Log}} \log(|z|) + i\theta_z$  y  $\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z)) \in (-\pi, \pi]$ ), tenemos que  $\varphi$  es un biholomorfismo entre  $D$  y el conjunto  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| < 1\}$ , tal que  $\varphi(0) = 0$ .

Tomemos la función continua  $\Gamma := \varphi \circ \gamma : [0, 1) \rightarrow \Omega$  la cual cumple que, en virtud de



(1.1),

$$\lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{Im}(\Gamma(t)) = \infty, \quad (1.3)$$

y sea  $F := f \circ \varphi^{-1} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Note que  $F$  es analítica y está acotada por 1 y (ver (1.2))

$$\lim_{t \rightarrow 1} (F \circ \Gamma)(t) = 0. \quad (1.4)$$

Primero, a partir de la función  $\Gamma$ , vamos a construir una curva continua, tal que sólo tenga un punto con parte imaginaria igual a cero y que sea simétrica respecto al eje real. Dicha curva reviste gran importancia, como mostraremos posteriormente.

Sea

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Notemos que dado  $s > 0$  existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\sup \{\operatorname{Im}(x) : x \in \Gamma([0, 1 - s])\} < c$ , por ser  $\Gamma([0, 1 - s])$  compacto. Así, si  $\operatorname{Im}(\Gamma(t)) > c$  entonces  $t \notin [0, 1 - s]$ , por lo que  $|t - 1| < s$ . Por consiguiente, usando (1.3) tenemos que  $t$  es suficientemente cercano a 1 si y sólo si  $\operatorname{Im}(\Gamma(t))$  es suficientemente grande y, usando (1.4), tenemos que  $|F(\Gamma(t))| < \varepsilon$  si  $\operatorname{Im}(\Gamma(t))$  es suficientemente grande. Así, podemos tomar  $R(\varepsilon) > 0$  tal que, para toda  $y_0 > R(\varepsilon)$ ,  $|F(\Gamma(t))| < \varepsilon$  siempre que  $\operatorname{Im}(\Gamma(t)) > y_0$ .

Además, por la continuidad de  $\Gamma$ , podemos tomar  $0 < t_0 < 1$  tal que  $\operatorname{Im}(\Gamma(t_0)) = y_0$  y  $\operatorname{Im}(\Gamma(t)) > y_0$  para todo  $t > t_0$ ; a saber,  $t_0 = \sup \{t \in [0, 1) : \Gamma(t) = y_0\}$ .

Suponiendo sin perder generalidad que  $y_0 = 0$ , consideremos a los conjuntos

$$E = \{\Gamma(t) : t_0 \leq t < 1\} \text{ y } \bar{E} = \{\overline{\Gamma(t)} : t_0 \leq t < 1\},$$

en donde  $\bar{z}$  denota complejo conjugado. Luego,  $E \cup \bar{E}$  es una curva continua que posee un único  $x_0$  tal que  $\operatorname{Im}(x_0) = 0$ .

Dada  $r > 0$ , definimos la función  $G_r : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$G_r(z) = \frac{F(z)\overline{F(\bar{z})}\varepsilon^{\frac{z+1}{2}}}{1+r(z+1)}.$$

En lo siguiente, mostraremos la relevancia de cada término que compone a  $G_r$ .

Observemos que, para cada  $r > 0$ ,  $G_r$  es una función analítica. Además, está acotada por 1 ya que  $|F|$ ,  $|\varepsilon^{\frac{z+1}{2}}|$  están acotadas por 1, y que se cumple que  $1 < |1+r(z+1)|$ .

Notemos que si  $z \in E$ , entonces  $|F(z)| < \varepsilon$ , lo que implica que  $|G_r(z)| < \varepsilon$ . De la misma manera, si  $z \in \bar{E}$  entonces  $|G_r(z)| < \varepsilon$  debido a que  $|\overline{F(\bar{z})}| < \varepsilon$ , dado que existe  $v \in E$  tal que  $z = \bar{v}$ . En esto último radica la importancia del término  $\overline{F(\bar{z})}$  de  $G_r$ .

Dada  $\ell > 0$ , definimos

$$K(\ell) := E \cup \bar{E} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \geq \ell\}.$$

Ahora, sabemos que existe  $\tau(\ell) > t_0$  tal que  $\operatorname{Im}(\Gamma(t)) > \ell$  para todo  $t > \tau(\ell)$  y tal que  $\operatorname{Im}(\Gamma(\tau(\ell))) = \ell$  en virtud de (1.3). Además, notemos que  $K(\ell)^c \cap \Omega$  es un conjunto disconexo formado por dos componentes conexas  $\Omega^+(\ell)$  y  $\Omega^-(\ell)$  (a saber,  $\Omega^+(\ell)$  es el subconjunto de  $K(\ell)^c \cap \Omega$  que se encuentra a la derecha de  $E \cup \bar{E}$  y  $\Omega^-(\ell)$ , el que se encuentra a la izquierda de  $E \cup \bar{E}$ ), cuya respectiva frontera está contenida en

$$E \cup \bar{E} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| = \ell\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \pm 1\},$$

así como de una cantidad finita de componentes conexas  $\nu^m(\ell)$  y  $\bar{\nu}^m(\ell)$ , cuya frontera está contenida en  $E \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = \ell\}$  y  $\bar{E} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = -\ell\}$  respectivamente, y una cantidad finita de componentes conexas  $\omega^n(\ell)$  y  $\bar{\omega}^n(\ell)$  contenidas en  $\Omega$ , y con frontera contenida en  $E$  y  $\bar{E}$  respectivamente. Estos últimos conjuntos aparecen sólo en el caso en el que  $\Gamma$  no sea inyectiva en  $[t_0, \tau(\ell)]$  (ver Figura 1.2).

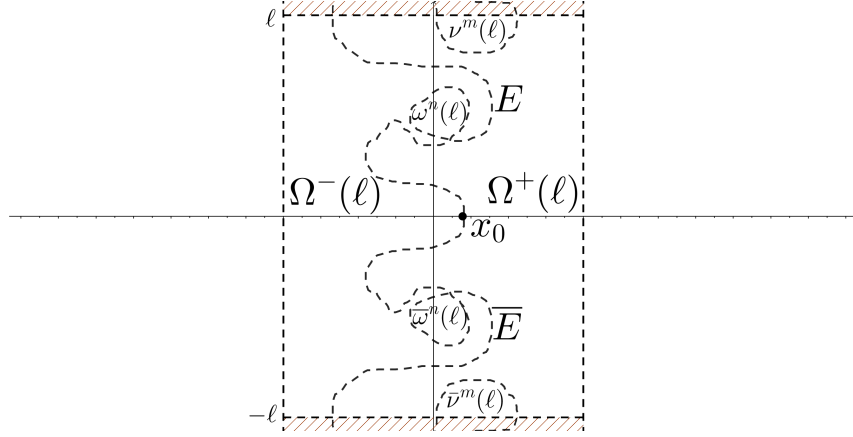


Figura 1.2: Regiones construidas para analizar a la función  $G_r$ .

En consecuencia,  $|G_r| < \varepsilon$  en cualquier componente conexa  $\omega^n(\ell)$ ,  $\bar{\omega}^n(\ell)$  por el teorema del módulo máximo (Teorema 1.8). Además, si  $|\text{Im}(z)| = \ell$ ,  $|G_r(z)| < \frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell^2}}$ . Así, por el Teorema 1.8 se tiene que  $|G_r| < \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell^2}}\right\}$  en los conjuntos  $\nu^m(\ell)$ ,  $\bar{\nu}^m(\ell)$ .

Ahora, sea  $\sigma \in (0, 1)$ . Si  $z \in \Omega^+(\ell)$  es tal que  $\text{Re}(z) = 1 - \sigma$ , entonces

$$|G_r(z)| < \left|\varepsilon^{\frac{z+1}{2}}\right| = \varepsilon^{\frac{\text{Re}(z)+1}{2}} = \varepsilon^{1-\frac{\sigma}{2}}.$$

Así, por el Teorema 1.8, se tiene que

$$|G_r(z)| < \max\left\{\varepsilon^{1-\frac{\sigma}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell^2}}\right\}$$

para  $z \in \Omega^+(\ell) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 1 - \sigma\}$ , y tomando el límite cuando  $\sigma$  tiende a cero tendremos que  $|G_r(z)| < \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell^2}}\right\}$  para  $z \in \Omega^+(\ell)$ .

Por lo tanto, utilizando las desigualdades anteriores,

$$|G_r| \leq \max\left\{\varepsilon, \frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell^2}}\right\}$$

en el conjunto  $\Delta^+(\ell) := \Omega^+(\ell) \cup \{\omega^n(\ell), \bar{\omega}^n(\ell)\}_n \cup \{\nu^m(\ell), \bar{\nu}^m(\ell)\}_m$ .

Sea  $\ell(r, \varepsilon) := \frac{1}{r\varepsilon}$ . Note que  $\ell(r, \varepsilon) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$  y que  $\frac{1}{\sqrt{1+r^2\ell(r,\varepsilon)^2}} < \varepsilon$ . Por lo anterior, para todo  $z \in \Delta^+(\ell(r, \varepsilon))$ ,

$$|G_r(z)| < \varepsilon. \quad (1.5)$$

Definamos  $\Omega^+ := \bigcup_{r>0} \Omega^+(\ell(r, \varepsilon))$  y al conjunto  $\Delta^+$  como la unión de  $\Omega^+$  y los conjuntos  $\omega^n, \bar{\omega}^n$  determinados por las autointersecciones de  $\Gamma$  en el intervalo  $[t_0, 1)$ , donde recordamos que  $t_0 = \sup\{t \in [0, 1) : \Gamma(t) = y_0\}$ . Si  $z \in \Delta^+$ , usando la igualdad (1.5),

$$\lim_{r \rightarrow 0} |G_r(z)| = |F(z)||F(\bar{z})|\varepsilon^{\frac{z+1}{2}} \leq \varepsilon,$$

lo que implica que

$$|F(z)||F(\bar{z})| \leq \varepsilon^{\frac{1-\operatorname{Re}(z)}{2}}.$$

Si dada  $r > 0$  definimos a la función

$$\mathcal{H}_r(z) := \frac{F(z)\overline{F(\bar{z})}\varepsilon^{\frac{1-z}{2}}}{1+r(z+1)},$$

repetimos para ésta el análisis realizado con la función  $G_r$ , y análogamente definimos al conjunto  $\Delta^-$ , tendremos que  $|F(z)||F(\bar{z})|\varepsilon^{\frac{1-z}{2}} \leq \varepsilon$  en dicho conjunto, lo que implica que  $|F(z)||F(\bar{z})| < \varepsilon^{\frac{1+\operatorname{Re}(z)}{2}}$ .

Así, tomando  $z \in \Delta^+ \cup \Delta^-$  tal que  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , tendremos que

$$|F(z)|^2 \leq \varepsilon^{\frac{1}{2} \min\{1-\operatorname{Re}(z), 1+\operatorname{Re}(z)\}}.$$

Además, si tomamos  $\delta \in (0, 1)$  y  $z$  también cumple que  $|\operatorname{Re}(z)| < 1 - \delta$ ,

$$|F(z)| \leq \varepsilon^{\frac{\delta}{4}}.$$

En resumen, dados  $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$  existe  $R(\varepsilon) > 0$  tal que, para toda  $y_0 = \Gamma(t_0) > R(\varepsilon)$  (el cual tomamos igual a cero),  $|F(\Gamma(t))| < \varepsilon$  si  $\text{Im}(\Gamma(t)) > y_0$ , lo que implica que  $|F(x)| < \varepsilon^{\frac{\delta}{4}}$ , si  $|x| < 1 - \delta$ . Lo anterior se traduce para  $y_0 \neq 0$  en que, si  $|x| < 1 - \delta$ ,

$$|F(x + iy_0)| \leq \varepsilon^{\frac{\delta}{4}}.$$

Esto último establece la convergencia de  $F$  en  $(\delta - 1, 1 - \delta) \times (y_0, \infty)$  uniformemente a medida que  $y_0$  tiende a infinito. Para terminar la demostración, veremos que lo anterior implica la convergencia uniforme de  $f$  en un cono con vértice en 1 y con apertura  $\theta(\delta)$ .

Recordemos que tomamos a la función  $\varphi(z) = \frac{i}{\pi} \text{Log}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\right)$  la cual es un biholomorfismo entre el disco unitario y el conjunto  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re}(z)| < 1\}$ . Escribamos  $\varphi = \alpha \circ \beta \circ g$ , donde

$$\alpha(z) := \frac{i}{\pi} \text{Log}(z), \quad \beta(z) := z^2, \quad g(z) := \frac{1+z}{1-z}.$$

Sea  $U_{\delta, \varepsilon} := (\delta - 1, 1 - \delta) \times (y_0, \infty)$ , donde  $y_0$  es tal que  $|F(\Gamma(t))| < \varepsilon$  si  $\text{Im}(\Gamma(t)) > y_0$ ; así,  $|F| < \varepsilon$  en  $U_{\delta, \varepsilon}$ . Como queremos estudiar  $\varphi^{-1}(U_{\delta, \varepsilon})$ , primero mostramos en la Figura 1.3 la imagen del conjunto  $U_{\delta, \varepsilon}$  bajo  $(\alpha \circ \beta)^{-1}$ , obteniendo un conjunto denotado por  $V_{\delta, \varepsilon}$ .

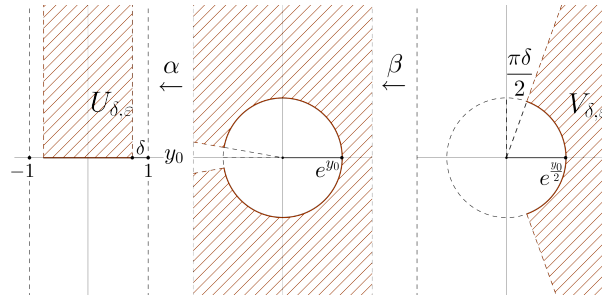


Figura 1.3: El conjunto  $V_{\delta, \varepsilon}$  sombreado es la preimagen del conjunto  $U_{\delta, \varepsilon}$  bajo  $\alpha \circ \beta$ .

Ahora vamos a estudiar  $g^{-1}(V_{\delta, \varepsilon})$ , conjunto que denotaremos por  $W_{\delta, \varepsilon}$ . Para ello, primero observemos que la frontera de  $V_{\delta, \varepsilon}$  está contenida en la unión de una semicircunferencia

y dos semirrectas que parten del origen, ubicadas en el semiplano completo de parte real positiva. Denotémoslas por  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ , respectivamente.

Notemos que  $g$  es una transformación de Möbius, así como su inversa. Por esto, se tiene que las imágenes bajo  $g$  y  $g^{-1}$  de circunferencias generalizadas (circunferencias y rectas) son circunferencias generalizadas, además de ser conformes (es decir, preservan ángulos). Así, como  $g^{-1}(z) = \frac{z-1}{z+1}$ , se tiene lo siguiente (ver Figura 1.4):

- a)  $g^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}) = T$  y  $g^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) > 0\}) = (-1, 1) \times \{0\}$ .
- b)  $g^{-1}(\mathcal{C})$  es un arco de circunferencia ortogonal a  $T = \partial(D)$  y a  $(-1, 1) \times \{0\}$ .
- c)  $g^{-1}(\mathcal{L}_i)$ , con  $i = 1, 2$ , es una circunferencia ortogonal a  $g^{-1}(\mathcal{C})$  que pasa por  $-1$  y  $1$ .
- d) El ángulo entre  $T$  y  $g^{-1}(\mathcal{L}_i)$  es igual a  $\frac{\pi\delta}{2}$ .

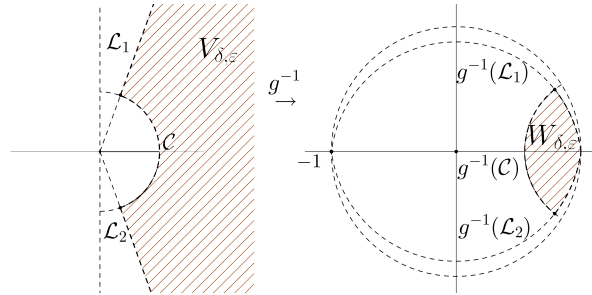


Figura 1.4: Ilustración de  $W_{\delta, \varepsilon} = g^{-1}(V_{\delta, \varepsilon})$ .

De esta manera,  $W_{\delta, \varepsilon}$  es como se muestra en la Figura 1.4 y en este conjunto  $|f| < \varepsilon$ . Por consiguiente, para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto  $W_{\delta, \varepsilon}$  tal que  $|f| < \varepsilon$  en ese conjunto. Como podemos encontrar un ángulo  $\theta(\delta) > 0$  tal que  $\theta(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \pi$  y que el cono  $S_{\theta(\delta)}$  con vértice en  $1$ , ángulo de apertura  $\theta(\delta)$  y simétrico respecto al eje real esté contenido en  $W_{\delta, \varepsilon}$ , concluimos que, para cualquier ángulo de apertura fijo,  $f$  converge uniformemente en el cono correspondiente al ángulo, a medida que su parámetro tiende a  $1$ .  $\square$

Una consecuencia directa del teorema de Lindelöf es que, bajo las mismas hipótesis,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow w \\ \text{no t}}} f(z) = L.$$

Esto último se sigue de la convergencia uniforme de  $f$  en conos.

## 1.5. Funciones subarmónicas

Para terminar el capítulo, presentamos un poco de la teoría básica de funciones subarmónicas. Los resultados mostrados también nos servirán como herramienta en la demostración del teorema de Luzin-Privalov.

**Definición 1.16.** *Decimos que una función  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , donde  $U$  es un conjunto abierto, es semicontinua superiormente en  $z \in U$  si para toda  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $f(w) < f(z) + \varepsilon$  para todo  $w \in B(z, \delta)$ .*

**Definición 1.17.** *Decimos que  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función subarmónica si es semicontinua superiormente y si para todos  $z \in U$  y  $r > 0$  tal que  $\overline{B(z, r)} \subseteq U$  se cumple la siguiente condición:*

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

*Además, decimos que  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función subarmónica localmente para todo  $z \in U$ , existe una vecindad abierta  $V$  de  $z$  tal que  $f|_V$  es subarmónica.*

**Proposición 1.18.** *Sea  $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  una función semicontinua superiormente. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $f$  es subarmónica.
2. Para todos  $z \in U$  y  $r > 0$  tales que  $\overline{B(z, r)} \subseteq U$  y para toda función  $g$  armónica

en  $B(z, r)$  y continua en  $\overline{B(z, r)}$  se tiene que, si  $f(w) \leq g(w)$  con  $w \in \partial(B(z, r))$ , entonces  $f(w) \leq g(w)$  para todo  $w \in B(z, r)$ .

3. Para toda  $z \in U$  y  $r > 0$  tales que  $\overline{B(z, r)} \subseteq U$ , y para todo  $r_0 < r$  se cumple que

$$f(z + r_0 e^{i\theta_0}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r e^{it}) \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(t - \theta_0)} dt.$$

*Demostración.* 1.  $\Rightarrow$  2. se puede consultar en [4] sección 2.5, página 17; 2.  $\Rightarrow$  3. es una consecuencia directa del problema de Dirichlet y de las propiedades de la integral de Poisson (consulte [4] sección 2.5, página 17) y 3.  $\Rightarrow$  1. es evidente al tomar  $r_0 = 0$ .  $\square$

**Proposición 1.19.** Sea  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto. Si  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica, entonces  $|f|$  es una función subarmónica. Además, si  $f(U)$  es tal que  $\text{Log}(f)$  se puede definir y es analítica, entonces  $\log(|f|)$  es una función subarmónica localmente.

*Demostración.* Por un lado, como  $f$  es una función analítica (en particular continua), es claro que  $|f|$  es una función continua superiormente. Ahora, por la fórmula integral de Cauchy tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(B(z, r))} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r e^{it}) i r e^{it}}{(z + r e^{it}) - z} dt,$$

donde  $r > 0$  es tal que  $\overline{B(z, r)} \subseteq U$ . Así,

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + r e^{it})| dt,$$

por lo que  $|f|$  es subarmónica.

Por otro lado, recordemos que  $\text{Log}(z) := \log(|z|) + i \arg(z)$ . Así, si  $f(U)$  es tal que  $\text{Log}(f)$  se puede definir y es analítica, entonces  $\log(|f|)$  es la parte real de la función analítica  $\text{Log}(f)$ . Siendo  $\text{Log}(f)$  analítica localmente, su parte real es armónica localmente, por lo que es subarmónica localmente.  $\square$



**Proposición 1.20.** Sean  $U \subseteq \mathbb{C}$  un conjunto abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función subarmónica. Si se tiene que  $g : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa y creciente, entonces  $g \circ f$  es una función subarmónica.

*Demostración.* Primero, como  $f$  es una función continua superiormente y  $g$  es continua por ser convexa, entonces  $g \circ f$  es una función continua superiormente.

Ahora, como  $f$  es una función subarmónica, se cumple que

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Dado que  $g$  es una función creciente,

$$(g \circ f)(z) \leq g\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt\right).$$

y, además, por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$g\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt\right) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g \circ f)(z + re^{it}) dt,$$

por ser  $g$  convexa. Juntando las relaciones anteriores tenemos que

$$(g \circ f)(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g \circ f)(z + re^{it}) dt$$

con lo que concluimos que  $g \circ f$  es subarmónica. □

# Capítulo 2

## Teorema de Luzin-Privalov

### 2.1. Límites radiales

Denotemos por  $\mathbb{H}^\pm := \{z \in \mathbb{C} : \pm \text{Im}(z) > 0\}$ .

**Definición 2.1.** Sea  $f : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica. Decimos que  $f$  tiene un límite angular (finito) en  $t_0 \in \mathbb{R}$ , denotado por  $f(t_0 + i0)$ , si

$$\lim_{z \rightarrow t_0} f(z) \equiv f(t_0 + i0)$$

existe en cualquier sector  $0 < \theta_1 < \arg(z - t_0) < \theta_2 < \pi$ .

De manera similar se definen los límites angulares de  $f$  en  $t_0 \in \mathbb{R}$  si el dominio de  $f$  es  $\mathbb{H}^-$ , los cuales se denotan por  $f(t_0 - i0)$ .

Supongamos que  $f$  está definida en  $\mathbb{H}^+$ , es analítica y acotada. En virtud del teorema de Lindelöf adaptado a  $\mathbb{H}^+$ , lo más natural al calcular límites angulares es considerar el límite  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t_0 + it)$ , el cual se conoce como límite radial. Tratando con estos límites, no es necesario pedir que  $f$  sea analítica en todo su dominio; basta pedir que sea analítica

en un rectángulo  $(a, b) \times (0, \varepsilon_0) \subseteq \mathbb{H}^+$ , para cualquier  $\varepsilon_0 > 0$ , tal que  $t_0 \in (a, b)$ .

Ahora, queremos extender la noción anterior para funciones analíticas en  $D$ . En este caso, diremos que  $f$  tiene límite radial en  $w \in T$  si existe el límite

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(rw),$$

lo cual es natural dado que nos aproximamos a la frontera por medio de un radio de  $D$ .

Notemos que si el dominio de  $f$  es  $D$  o  $\mathbb{H}^+$ , podemos suponer que  $w = -1$  o  $t_0 = 0$ , respectivamente. Luego, si consideramos a la función de Cayley  $\Phi : \mathbb{H}^+ \rightarrow D$  dada por

$$\Phi(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

la cual es un biholomorfismo en su dominio, entonces  $F := f \circ \Phi$  es una función analítica en  $\mathbb{H}^+$ . Usando esto podemos afirmar que  $f$  tiene un límite radial en  $w = -1$  si y sólo si  $F$  lo tiene en  $t_0 = 0$ .

Es por esto que bastará probar resultados donde supongamos que  $f$  es analítica en  $D$  o en  $\mathbb{H}^+$ . Incluso, tales resultados serán válidos en conjuntos abiertos contenidos propiamente en  $\mathbb{C}$ , no vacíos, simplemente conexos y cuya frontera sea una curva de Jordan, en virtud del biholomorfismo y su extensión continua dados por los teoremas del mapeo de Riemann y de Caratheodory.

## 2.2. Construcción de Privalov

Antes de enunciar una de las versiones del teorema de Luzin-Privalov, describimos la siguiente construcción geométrica atribuida a Iván Privalov de acuerdo a [5], ubicada en el capítulo III, sección D, en las páginas 59-61, la cual usaremos fuertemente en dicho teorema. Para ello, primero recordamos que  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y  $T = \partial(D)$ .

Dado  $w \in T$ , sea  $S_w := \{z \in D : |z| > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } |\arg(z - w)| < \frac{\pi}{4}\}$ , el cual es un *cono* con vértice en  $w$  (ver Figura 2.1).

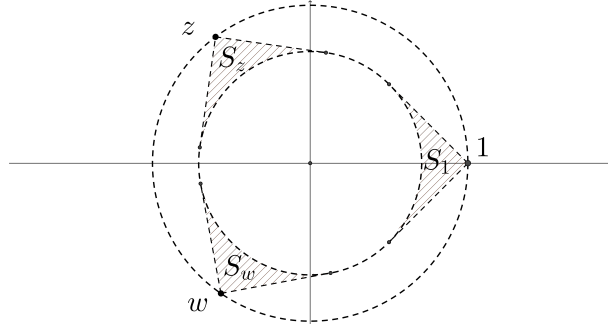


Figura 2.1: *Cono*  $S_w$  para algunos  $w \in T$ .

Ahora, notemos que:

- Los segmentos de recta en la frontera de cada  $S_w$  son tangentes a  $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .
- $\bigcup_{w \in T} S_w = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 1\}$ .
- Si  $z \in \mathbb{C}$  es tal que  $|z| \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ , entonces  $\{w \in T : z \in S_w\}$  es el arco abierto en  $T$  con extremos  $z_1$  y  $z_2$ , siendo éstos determinados por la intersección de  $T$  con las rectas tangentes desde  $z$  a  $\partial(B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$ , el cual subtende un ángulo menor a  $90^\circ$  (ver Figura 2.2).

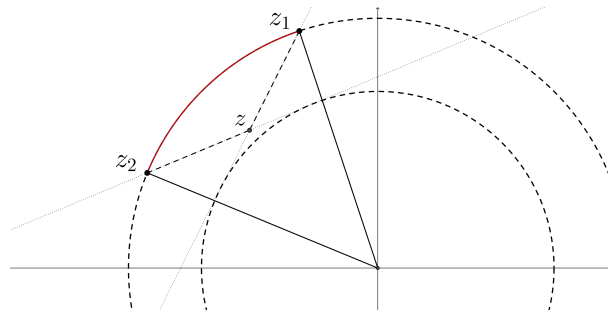


Figura 2.2: Arco construido en  $T$  a partir de  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $\frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 1$ .

Sea  $A$  un arco abierto de  $T$ , el cual subtiende un ángulo  $\theta < 90^\circ$ , y sean  $z_1, z_2$  sus puntos extremos. Además, sea  $z_3 \in D$  el punto de intersección de las semirrectas tangentes a  $\partial(B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$  trazadas desde  $z_j$ , para  $j = 1, 2$ , que cortan al cono con ángulo de apertura  $\theta$  y con vértice en el origen.

Luego, si  $\mathcal{T}(A)$  es el conjunto abierto delimitado por el arco  $A$  y el par de segmentos con extremos  $z_3$  y  $z_j$  para  $j = 1, 2$ , entonces  $\mathcal{T}(A)$  satisface la siguiente propiedad:

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{w \in A} S_w \setminus \bigcup_{j=1}^2 \overline{S_{z_j}} \quad (2.1)$$

(ver Figura 2.3).

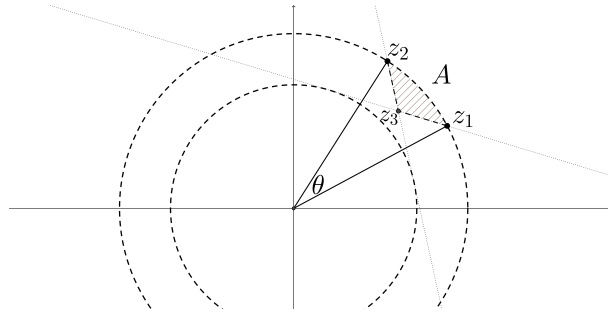


Figura 2.3: La región sombreada es el conjunto  $\mathcal{T}(A)$  construido si  $\theta < 90^\circ$ .

Ahora, sea  $A$  un arco abierto de  $T$ , el cual subtiende un ángulo  $\theta$  mayor o igual a  $90^\circ$ , y sean  $z_1, z_2$  sus puntos extremos. Consideremos la semirrecta tangente a  $\partial(B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$  trazada desde  $z_j$ , para  $j = 1, 2$ , en dirección de  $A$ , y sea  $w_j$  el punto de tangencia en  $\partial(B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$  de cada una de ellas, para  $j = 1, 2$ .

En este caso, el conjunto abierto  $\mathcal{T}(A)$  cuya frontera consta de  $A$ , el arco abierto en  $B(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  con extremos  $w_1, w_2$  y el par de segmentos con extremos  $w_j$  y  $z_j$  para  $j = 1, 2$  (ver Figura 2.4), también satisface la condición (2.1).

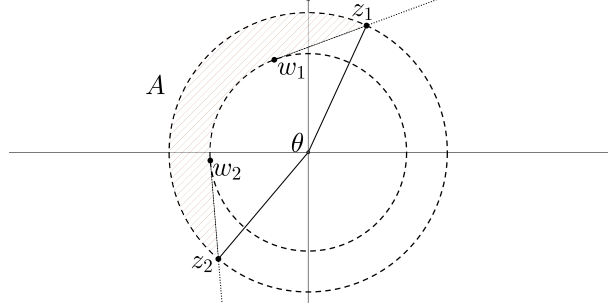


Figura 2.4: La región sombreada es el conjunto  $\mathcal{T}(A)$  construido si  $\theta \geq 90^\circ$ .

Enseguida, describimos la construcción de Privalov:

Dado un conjunto  $K \subseteq T$  cerrado, sea  $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  la colección (a lo más numerable) de arcos abiertos complementarios a  $K$ . Para cada arco  $A_j$  denotamos por  $\mathcal{T}_j \equiv \mathcal{T}(A_j)$  y definimos

$$\Gamma := \bar{D} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_j \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \quad (2.2)$$

(ver Figura 2.5).

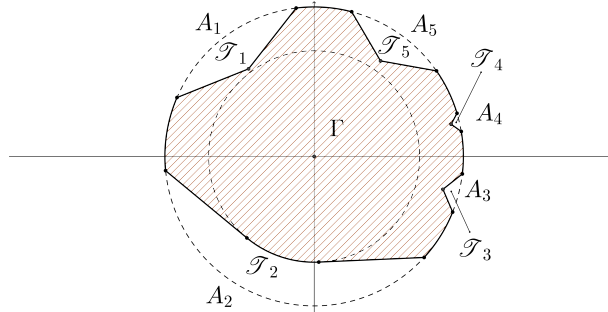


Figura 2.5: Descripción gráfica de  $\Gamma$ .

A partir de la construcción del conjunto  $\Gamma$ , tenemos que:

a) Todo  $z \in \Gamma$ , tal que  $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , pertenece a algún  $\bar{S}_w$  con  $w \in K$ :

En el caso en el que  $|z| = 1$ , se sigue de que  $z \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ . Ahora, supongamos que  $|z| < 1$  y que  $z$  no pertenece a  $\bar{S}_w$ , para toda  $w \in K$ . En este caso, tendríamos que el arco

$A'$  determinado por la intersección de  $T$  con las rectas tangentes de  $z$  a  $\partial(B(0, \frac{1}{\sqrt{2}}))$  está contenido en  $K^c$ .

Notamos que  $A'$  no está contenido propiamente en ningún arco  $A'' \subseteq K^c$ , ya que, de ser así,  $z \in \mathcal{T}(A'')$ , lo cual contradice que  $z \in \Gamma$ . Debido a esto, si  $z_1, z_2$  son los extremos de  $A'$ , entonces  $z_1, z_2 \in K$ , y con esto se tendría que  $z \in \overline{S_{z_j}}$  para  $j = 1, 2$ , lo que contradice la primer suposición.

b) La frontera de  $\Gamma$  es rectificable (de longitud finita):

Para probarlo, primero notemos que la frontera de  $\Gamma$  está formada por subconjuntos de  $T$ , así como por elementos de la frontera de los conjuntos  $\mathcal{T}_j$ . Entonces, basta acotar la longitud de todos los elementos de su frontera adecuadamente para, al sumar las longitudes, obtener una cantidad acotada que no depende del elemento que se esté tomando.

Recordemos que  $\Gamma$  se construye a partir del conjunto cerrado  $K \subseteq T$  y de sus arcos abiertos complementarios  $A_j$ . En este entendido, podemos observar que, en el caso en el que  $K$  conste de 4 puntos,  $\Gamma$  está construido por exactamente cuatro arcos  $A_j$  que subtienden un ángulo igual a  $90^\circ$ . Además, si  $|\{A_j\}| > 4$ , a lo más existen tres arcos  $A_j$  que subtienden un ángulo mayor o igual a  $90^\circ$ .

En virtud de esto último, podemos acotar la longitud de los elementos de la frontera de los correspondientes  $\mathcal{T}_j$  que sean parte de la frontera de  $\Gamma$ . Más aún, como la longitud de  $\partial(\Gamma) \cap T$  se puede acotar por el perímetro de  $T$ , basta analizar el caso de los conjuntos  $\mathcal{T}_j$  cuyo arco  $A_j$  correspondiente subtienda un ángulo menor a  $90^\circ$ .

Retomemos la Figura 2.3, y notemos que el par de segmentos con extremos  $z_3$  y  $z_j$  con  $j = 1, 2$  se encuentran en la frontera de  $\Gamma$ . Analicemos uno de ellos y el otro se tiene de la misma manera.

Sea  $\theta_j < 90^\circ$  el ángulo que subtiende  $A_j$ . Dado que  $z_3$  se encuentra en la bisectriz de  $\theta_j$ , calculamos la longitud  $\chi$  del segmento con extremos  $z_1$  y  $z_3$  usando Ley de Senos (ver

Figura 2.6):

$$\frac{\text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_j}{2}\right)}{1} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)}{\chi}.$$

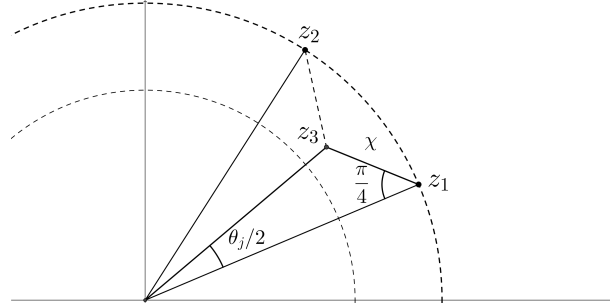


Figura 2.6: Longitud del segmento con extremos  $z_3$  y  $z_1$ .

En consecuencia, usando la identidad  $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)$  tenemos que

$$\chi = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\theta_j}{2}\right)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\theta_j}{2}\right)\right)} \leq \frac{\frac{\sqrt{2}\theta_j}{2}}{\cos\left(\frac{\theta_j}{2}\right)} < \theta_j,$$

sabiendo que  $\frac{\theta_j}{2} < \frac{\pi}{4}$  y que  $\cos(x)$  es decreciente en  $[0, \frac{\pi}{4}]$ .

Por lo tanto, la suma de las longitudes del par de segmentos mencionados es menor a  $2\theta_j$  para cualquier  $\mathcal{J}_j$  con arco de apertura menor a  $90^\circ$ ; por ende, la longitud de la frontera de  $\Gamma$  es finita.

c) La frontera de  $\Gamma$  es una curva de Jordan:

Basta notar que cada radio de  $D$  interseca una única vez a  $\partial(\Gamma)$ , por lo que la función dada por la relación  $z \mapsto \frac{z}{|z|}, z \in \partial(\Gamma)$ , está bien definida y es continua ya que  $0 \notin \partial(\Gamma)$ . Así,  $\partial(\Gamma)$  es homeomorfo a  $T$  y, por lo tanto,  $\partial(\Gamma)$  es una curva de Jordan. Además, el interior que define ésta es una región simplemente conexa.



## 2.3. Teorema de Luzin-Privalov

A continuación, demostraremos un par de resultados auxiliares que se utilizarán en el teorema de Luzin-Privalov. Se seguirá la prueba dada en [5] capítulo III sección D, en las páginas 61 y 62.

**Teorema 2.2.** *Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y definamos  $\mathcal{G}_f : T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , dada por  $\mathcal{G}_f(w) := \sup \{|f(z)| : z \in S_w\}$ . Entonces,  $\mathcal{G}_f$  es Lebesgue medible.*

*Demostración.* Para  $j > 3$ , definimos a las funciones  $\mathcal{G}_j : T \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$\mathcal{G}_j(w) := \sup \left\{ |f(z)| : z \in S_w, \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| \leq \frac{j-1}{j} \right\}.$$

Sea  $w \in T$  fijo. Notemos que, si  $S_{w,j} := \{z \in S_w : \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \frac{j-1}{j}\}$ , se cumple que  $S_{w,j} \subseteq S_{w,j+1}$  para toda  $j > 3$  y  $\bigcup_{j>3} S_{w,j} = S_w$  (ver Figura 2.7).

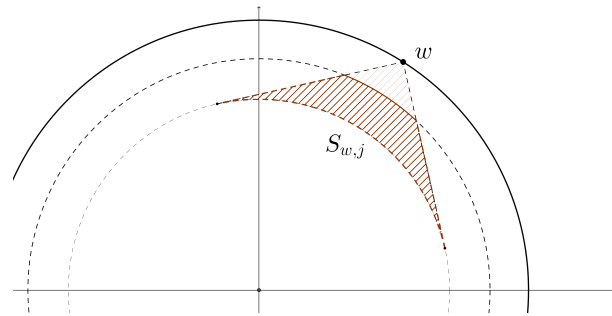


Figura 2.7: Ilustración de los conjuntos  $S_{w,j}$  para  $w \in T$  y  $j > 3$ .

Además, como  $f$  es analítica (en particular continua) en  $S_{w,j}$  para cada  $j > 3$  y  $w \in T$ , tenemos que  $\mathcal{G}_j$  es una función continua, y por lo tanto medible. Por ende, como  $\mathcal{G}_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \mathcal{G}_f$  puntualmente, concluimos que  $\mathcal{G}_f$  es una función medible.  $\square$

**Teorema 2.3.** Sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y acotada. Supongamos que existe  $A \subseteq T$  de medida positiva tal que

$$\lim_{z \rightarrow w} f(z) = 0$$

para todo  $w \in A$ . Entonces, existe un conjunto compacto  $K \subseteq T$  de medida positiva tal que  $f$  converge uniformemente a la función idénticamente 0 en  $\bigcup_{w \in K} S_w$ , a medida que nos acercamos a  $T$ .

*Demostración.* En virtud del Teorema 2.2, tenemos que las funciones  $\mathcal{P}_j : T \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  dadas por

$$\mathcal{P}_j(w) := \sup \left\{ |f(z)| : z \in S_w \text{ y } |z| > \frac{j-1}{j} \right\}$$

son medibles para todo  $j > 3$ . Además, por el teorema de Lindelöf, se deduce que  $\mathcal{P}_j(w) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$  para todo  $w \in A$ .

Tomando  $A$  como espacio total de medida y usando el teorema de Egorov, se tiene que existe  $C \subseteq A$  de medida (de Lebesgue) positiva, tal que  $\mathcal{P}_j$  converge a 0 uniformemente en  $C$ .

Siendo la medida de Lebesgue regular, podemos encontrar  $K \subseteq C$  compacto (en  $A$ ) de medida positiva (tan cerca de la medida de  $C$  como se quiera) donde también se dé la convergencia uniforme. En consecuencia, como  $K$  es compacto en  $A$ , también lo es en  $T$ ; por ende,  $K$  es un subconjunto compacto de  $T$  de medida positiva en el cual  $\mathcal{P}_j(w)$  converge a 0.

Luego, por cómo se definieron las funciones  $\mathcal{P}_j$ , concluimos que  $f$  converge uniformemente a 0 en  $\bigcup_{w \in C} S_w$ . □

Ahora, enunciaremos y demostramos una de las dos versiones del teorema de Luzin-Privalov que presentamos en el texto.

**Teorema 2.4** (Teorema de Luzin-Privalov (versión 1)). *Sea  $E \subseteq T$  un conjunto denso métricamente y de segunda categoría en un arco abierto  $A \subseteq T$ . Si  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es una función analítica tal que*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(rw) = 0 \quad (2.3)$$

para todo  $w \in E$ , entonces  $f$  es idénticamente cero.

*Demostración.* Supongamos que  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  es analítica y que sus límites radiales en todo  $w \in E$  son iguales a cero. Para cada  $j \in \mathbb{N}$ , consideremos a la función  $f_j : \bar{D} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f_j(z) := f\left(\frac{j-1}{j}z\right),$$

la cual es analítica y acotada. Además, para todo  $w \in E$ ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_j(w) = 0.$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . En virtud de (2.3) y la ecuación previa, dado  $w \in E$  tomemos  $m(w)$  el mínimo natural tal que  $|f_j(w)| < \varepsilon$  para toda  $j > m(w)$ . Definiendo a los conjuntos  $E_j := \{w \in E : m(w) \leq j\}$ , tenemos que éstos satisfacen las siguientes propiedades:

- a)  $E_j \subseteq E_{j+1}$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ .
- b)  $E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ .
- c) Existe  $j_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $E_{j_0}$  es denso en alguna parte de  $A$ .

El inciso c), el cual se cumple debido a que  $E$  es de segunda categoría sobre  $A$ , nos garantiza que existe un arco abierto  $A' \subseteq A$  en el cual  $E_j$  es denso para toda  $j \geq j_0$ . Además, si  $\lambda_T$  denota a la medida de Lebesgue en  $T$ , existe  $n \geq j_0$  tal que  $\lambda_T(A' \cap E_n) > 0$ , en virtud de que  $\lambda_T(A' \cap E) > 0$  por ser  $E$  denso métricamente sobre  $A$ .

Sea  $M_n := A' \cap E_n$ , el cual tiene medida positiva y es denso en  $A'$ . Note que si  $w \in M_n$ , entonces  $|f_j(w)| < \varepsilon$  para toda  $j \geq n$ , y siendo  $f_j$  acotada para cada  $j \in \mathbb{N}$ , podemos tomar  $\delta > 0$  tal que  $|f_j(w)| < \delta$  para toda  $j < n$ . Así, para todos  $w \in M_n$  y  $j \in \mathbb{N}$ , tenemos que

$$|f_j(w)| < c,$$

siendo  $c := \max\{\delta, \varepsilon\}$ .

Usando la densidad de  $M_n$  en  $A'$  obtenemos que  $|f_j| \leq c$  en  $A'$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ . Luego, al realizar el cambio de variable

$$\omega(z) \equiv \omega := \frac{j-1}{j}z,$$

el arco  $A'$  es transformado en un arco  $A'_j \subseteq D$ . En consecuencia,  $f(\omega) = f_j(z)$  y, para todos  $\omega \in A'_j$  y  $j \in \mathbb{N}$ ,  $|f(\omega)| \leq c$ .

Ahora, consideremos los puntos extremos de  $A'$ , los cuales denotamos por  $a'$  y  $b'$ . Por la densidad de  $M_n$  en  $A'$ , podemos suponer, sin perder generalidad, que  $a', b' \in M_n$ . De esta manera,  $f$  está acotada en el par de radios con extremos  $0$  y  $a'$ ,  $0$  y  $b'$ , debido a la condición de los límites radiales en  $E$  y a la analiticidad de  $f$  en su dominio. Más aún, esta cota para  $f$  es uniforme respecto a ambos radios, en virtud de que los límites radiales son igual a cero.

Por consiguiente, si  $a'_j, b'_j$  denotan los puntos extremos de  $A'_j$ , entonces  $f$  está acotada en el conjunto cerrado delimitado por el par de segmentos cuyos extremos son  $0$  y  $a'_j$ ,  $0$  y  $b'_j$ , y el arco  $A'_j$  para toda  $j \in \mathbb{N}$ , debido al principio del módulo máximo. Más aún, su cota será uniforme para toda  $j \in \mathbb{N}$ .

Por lo anterior, tomando el límite cuando  $j$  tiende a infinito, concluimos que  $f$  está acotada en el sector abierto  $B$  de  $D$  delimitado por los radios con extremos  $0$  y  $a$ ,  $0$  y  $b$ , y el arco  $A'$  (ver Figura 2.8).

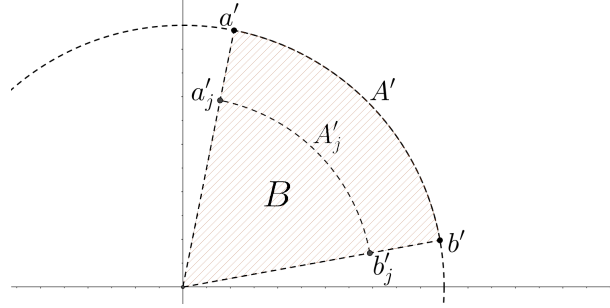


Figura 2.8: Sector abierto  $B$  donde  $f$  está acotada.

Luego, por el teorema del mapeo de Riemann existe  $\psi_1 : D \rightarrow B$  biholomorfismo biyectivo y, por el teorema de Caratheodory, existe una extensión de  $\psi_1$  continua, con inversa continua y biyectiva  $\bar{\psi}_1 : \bar{D} \rightarrow \bar{B}$  tal que  $\bar{\psi}_1(T) = \partial(B)$ . Además, el conjunto  $M := \bar{\psi}_1^{-1}(M_n) \subseteq T$  tiene medida de Lebesgue positiva, debido al Teorema 1.12.

Consideremos  $g := f \circ \psi_1$ , la cual es analítica y acotada en  $D$ . Dado que los límites angulares (no necesariamente radiales) de  $g$  existen en todo  $M$  (excepto, quizá, en  $\bar{\psi}_1^{-1}(a')$  y  $\bar{\psi}_1^{-1}(b')$ ) y son iguales a cero, como consecuencia del teorema de Lindelöf se tiene que  $g$  tiene límites no tangenciales idénticamente cero en  $M$  (excepto quizá en  $\bar{\psi}_1^{-1}(a')$  y  $\bar{\psi}_1^{-1}(b')$ ). Es decir, si  $\mathcal{A} := M \setminus \{\bar{\psi}_1^{-1}(a'), \bar{\psi}_1^{-1}(b')\}$ , para todo  $w \in \mathcal{A}$  se cumple que

$$\lim_{z \xrightarrow{n!} w} g(z) = 0.$$

Si logramos ver que  $g \equiv 0$ , entonces tendríamos que  $f|_B \equiv 0$  y, usando el Teorema 1.7 de unicidad de funciones analíticas, habremos terminado.

Por el Teorema 2.3, podemos encontrar  $K \subseteq \mathcal{A}$  compacto y de medida positiva en donde  $g$  converja a la función idénticamente cero de manera uniforme en  $\bigcup_{w \in K} S_w$ .

Ahora, observemos que  $K$  también es compacto en  $T$ , por lo que es cerrado. Así, consideremos a partir de  $K$  el conjunto  $\Gamma \subseteq \bar{D}$  de la construcción de Privalov (ver la relación (2.2)). Así, por los teoremas del mapeo de Riemann y de Caratheodory existe

$\psi_2 : D \rightarrow \text{int}(\Gamma)$  biholomorfismo biyectivo con extensión bicontinua y biyectiva  $\overline{\psi_2}$ , tal que  $\overline{\psi_2}(T) = \partial(\Gamma)$ .

Observemos que  $\Gamma \setminus K \subseteq D$  y, si  $|z| = 1$ ,  $z \in \partial(\Gamma)$  si y sólo si  $z \in K$ . Así,  $g|_{\Gamma \setminus K}$  está bien definida, es analítica, está acotada, y la podemos extender continuamente a la frontera de  $\Gamma$  debido a la convergencia uniforme de  $g$ , definiendo  $g(w) = 0$  para toda  $w \in K$ .

Consideremos al conjunto  $C := \overline{\psi_2}^{-1}(K) \subseteq T$ , el cual es compacto y tiene medida positiva debido al Teorema 1.12, y definamos  $h := g \circ \psi_2$ , la cual es una función analítica y acotada en  $D$ . Luego, en virtud de que podemos extender a  $g$  continuamente a la cerradura de  $\Gamma$ ,  $h$  tiene una extensión continua a  $\overline{D}$ , y  $h \equiv 0$  en  $C$  por construcción. En lo siguiente, denotaremos a la extensión de  $h$  de la misma manera y, sin perder generalidad, supondremos que  $|h|$  está acotada por 1.

Dado que  $h$  es analítica en  $D$ , la función  $u := \log(|h|)$  es una función subarmónica localmente por la Proposición 1.19, además de ser negativa. Luego, si tomamos  $r \in (0, 1)$  y  $r_0 e^{i\theta_0} \in B(0, r)$ , entonces, por la Proposición 1.18,

$$u(r_0 e^{i\theta_0}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(t - \theta_0)} dt.$$

Observemos que existe  $k > 0$  tal que

$$0 < k \leq \frac{r^2 - r_0^2}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(t - \theta_0)}$$

para  $r$  cerca de 1, uniformemente, y  $u(re^{i\theta})$  es negativo dado que  $|h| < 1$ .

Ahora, si  $\hat{C} := \{t \in [0, 2\pi) : e^{it} \in C\}$  y  $\lambda$  denota la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ ,

$$u(r_0 e^{i\theta_0}) \leq \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt \leq \frac{k}{2\pi} \int_{\hat{C}} u(re^{it}) dt \xrightarrow{r \rightarrow 1} -\infty,$$

debido a que  $0 < \lambda(\hat{C})$ ,  $u(re^{it}) < 0$  y  $\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{it}) = -\infty$  uniformemente en  $\hat{C}$ .

Siendo  $r_0 e^{i\theta_0} \in D$  arbitrario, concluimos que  $h = g \circ \psi_2 \equiv 0$ , por lo que  $g|_{\psi_2(D)} \equiv 0$ , al ser  $\psi_2$  un difeomorfismo. Utilizando el Teorema 1.7 tenemos que  $g = f \circ \psi_1 \equiv 0$  y, como  $\psi_1$  es difeomorfismo, tenemos que  $f|_B \equiv 0$ . Así, nuevamente por el teorema de unicidad de funciones analíticas, concluimos que  $f$  es idénticamente cero.  $\square$

Observemos que en esta versión del teorema de Luzin-Privalov podemos cambiar la condición (2.3) por la siguiente hipótesis:

*Para todo  $w \in E$  existe una función continua e inyectiva  $\gamma_w : [0, 1) \rightarrow D$  que converge no tangencialmente a  $w$ , tal que*

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma_w(t)) = 0.$$

Utilizando esta observación, presentamos otra versión del teorema de Luzin-Privalov.

**Teorema 2.5** (Teorema de Luzin-Privalov (versión 2)). *Sean  $(a, b) \subsetneq \mathbb{R}$  un intervalo abierto y  $f : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica en  $(a, b) \times (0, \varepsilon_0)$ , para  $\varepsilon_0 > 0$ . Supongamos que existen los límites radiales de  $f$*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t_0 + it) = f(t_0 + i0)$$

*para todo  $t_0 \in (a, b)$ , salvo en un subconjunto de medida cero. Si  $f(t_0 + i0) = 0$  en un conjunto  $E$  de segunda categoría y denso métricamente en  $A \subseteq (a, b)$  abierto, entonces  $f$  es idénticamente cero.*

*Demostración.* Denotemos por  $R := (a, b) \times (0, \varepsilon_0)$ , el cual supondremos que es simétrico respecto al eje  $y$ . Al considerar la función de Cayley

$$\Phi(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

la cual es una función analítica en  $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ,  $\Phi(\mathbb{H}^+) = D$  y  $\Phi(\mathbb{R} \times \{0\}) = T$ , tenemos que  $\Phi(R)$  es el conjunto que se muestra en la Figura 2.9, el cual es simplemente conexo, abierto y cuya frontera es una curva de Jordan.

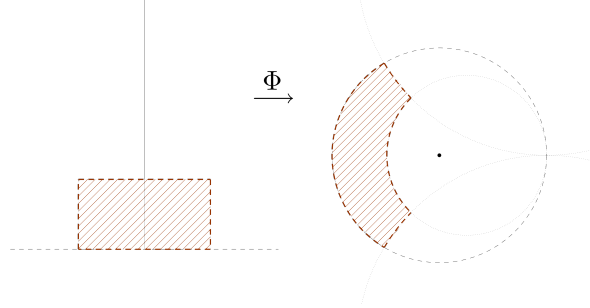


Figura 2.9: Imagen de  $R$  bajo la función de Cayley.

Ahora, consideramos  $\psi : D \rightarrow \Phi(R)$  biholomorfismo con extensión bicontinua y biyectiva  $\bar{\psi} : \bar{D} \rightarrow \overline{\Phi(R)}$ , dada por los teoremas del mapeo de Riemann y de Caratheodory, respectivamente. Así, analizaremos a la función

$$F := f \circ \Phi^{-1} \circ \psi,$$

la cual es una función analítica en  $D$ .

Escribiendo  $g := \bar{\psi}^{-1} \circ \Phi$ , primero veamos que  $\hat{E} := g(E) \subseteq T$  es denso métricamente y de segunda categoría en  $\hat{A} := g(A) \subseteq T$ .

Dado que  $\Phi$  es un difeomorfismo al restringirla a  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , ésta preserva conjuntos de medida positiva, así como  $\bar{\psi}^{-1}$  debido al Teorema 1.12. En consecuencia  $\lambda_T(\hat{E} \cap A') > 0$  para todo abierto  $A' \subseteq \hat{A}$ , por lo que  $\hat{E}$  es denso métricamente en  $\hat{A}$ .

Para ver que  $\hat{E}$  es de segunda categoría en  $\hat{A}$ , bastará ver que conjuntos de segunda categoría se preservan bajo homeomorfismos. Supongamos que  $\hat{E} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ ; entonces,

$$E = g^{-1}(\hat{E}) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g^{-1}(E_j),$$



y por ser  $E$  de segunda categoría en  $A$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{int}(g^{-1}(\overline{E_n}) \cap A) \neq \emptyset$ . Por consiguiente, siendo  $g$  homeomorfismo,

$$\text{int}(g^{-1}(\overline{E_n}) \cap A) = g^{-1}(\text{int}(\overline{E_n} \cap \hat{A})) \neq \emptyset \Rightarrow \text{int}(\overline{E_n} \cap \hat{A}) \neq \emptyset,$$

con lo que tenemos que  $\hat{E}$  es de segunda categoría en  $\hat{A}$ .

Ahora, como se muestra en la Figura 2.10, si nos acercamos a  $t_0 \in E$  por la curva  $\alpha(t) := t_0 + i(1-t)$ ,  $t \in [0, 1)$ , entonces nos estamos acercando a  $\Phi(t_0) \in \Phi(E)$  por medio de un arco de una circunferencia ortogonal a  $D$ , debido a la conformalidad de la función de Cayley.

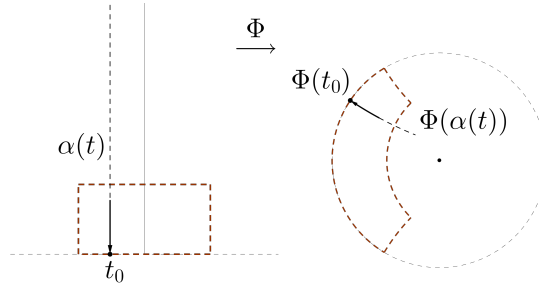


Figura 2.10: Límite radial en  $t_0$  y límite no tangencial en  $\Phi(t_0)$ .

Por ende, si  $\gamma := g \circ \alpha$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 1} F(\gamma(t)) = 0,$$

donde  $\gamma$  converge no tangencialmente a  $g(t_0) \in \hat{E}$ . Por lo tanto, siendo  $F$  analítica en  $D$ , tenemos que  $F = f \circ \Phi^{-1} \circ \psi \equiv 0$  por la primera versión del teorema de Luzin-Privalov. Así, como  $\Phi^{-1} \circ \psi$  es un biholomorfismo, concluimos que  $f \equiv 0$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Espacios de Hardy

Estudiamos valores a la frontera en espacios de Hardy.

**Definición 3.1.** Sea  $0 < p < \infty$ . Decimos que una función  $f : \mathbb{H}^+ \rightarrow \mathbb{C}$  pertenece a  $H_p$  si  $f$  es una función analítica y

$$\sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx : y > 0 \right\} < \infty.$$

Decimos que  $H_p$  es el  $p$ -espacio de Hardy.

En el caso en el que  $p = \infty$ , definimos  $H_\infty$  como el espacio de las funciones analíticas y acotadas en  $\mathbb{H}^+$ .

La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [5], en el capítulo VI, sección B, en la página 109.

**Teorema 3.2.** Sea

$$V(z) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} d\mu(t),$$

donde  $z = x + iy$  y  $\mu$  es una medida con signo en  $\mathbb{R}$  absolutamente continua respecto a la

medida de Lebesgue, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|\mu|(t)}{1+t^2} < \infty,$$

donde  $|\mu|$  denota la variación total de  $\mu$ . Entonces, en cualquier  $t_0 \in \mathbb{R}$  donde  $\mu'(t_0)$  existe y es finita,  $V(z) \rightarrow \mu'(t_0)$  a medida que  $z \rightarrow t_0$  no tangencialmente.

**Lema 3.3.** Sean  $p \geq 1$  y  $f \in H_p$ . Entonces, existe una constante  $k \equiv k(f)$  tal que  $|f(z)| < ky^{-\frac{1}{p}}$  para todo  $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$ .

*Demostración.* Sea  $z = x + iy$  con  $y > 0$ . Dado que  $f$  es analítica,  $|f|$  es subarmónica por la Proposición 1.19, así como  $|f|^p$  para  $p > 1$  por la Proposición 1.20. De esta manera, si tomamos  $0 < r < y$ ,

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{it})|^p dt.$$

Multiplicando ambos lados por  $r$ , e integrando respecto a esta variable en  $[0, s]$ , donde  $0 < s < r$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{2} |f(z)|^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^s \int_0^{2\pi} r |f(z + re^{it})|^p dt dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^s |f(z + re^{it})|^p r dr dt. \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de cambio de variable y que  $B(z, s) \subseteq (x-s, x+s) \times (y-s, y+s)$ , tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^s |f(z + re^{it})|^p r dr dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_{x-s}^{x+s} \int_{y-s}^{y+s} |f(u + iv)|^p dv du.$$

Finalmente, cambiando el orden de integración de esta última expresión y usando que  $f \in H_p$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{y-s}^{y+s} \left( \int_{x-s}^{x+s} |f(u + iv)|^p du \right) dv \leq \frac{1}{2\pi} \int_{y-s}^{y+s} c dv = \frac{sc}{\pi},$$

donde  $c$  depende de  $f$ .

En consecuencia, juntando las desigualdades anteriores llegamos a que

$$\frac{s^2}{2}|f(z)|^p \leq \frac{sc}{\pi} \Rightarrow |f(z)| \leq \left(\frac{2c}{s\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{s \rightarrow y} ky^{-\frac{1}{p}},$$

siendo  $k := \left(\frac{2c}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}$  la constante que depende de  $f$ . □

**Lema 3.4.** Sean  $p \geq 1$ ,  $f \in H_p$  y  $h > 0$ . Entonces,

$$f(z + ih) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t + ih)}{(x - t)^2 + y^2} dt.$$

*Demostración.* Sean  $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$  y  $h > 0$ . Tomemos  $r > 0$  y  $\theta(r) \equiv \theta < 90^\circ$  de tal manera que  $h = r \operatorname{sen}(\theta)$ , y definamos al conjunto

$$A := \overline{B(0, r)} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq h\}.$$

Note que, para  $r$  suficientemente grande (y, por ende,  $\theta$  suficientemente chico), se satisface que  $z + ih \in \operatorname{int}(A)$  (ver Figura 3.1).

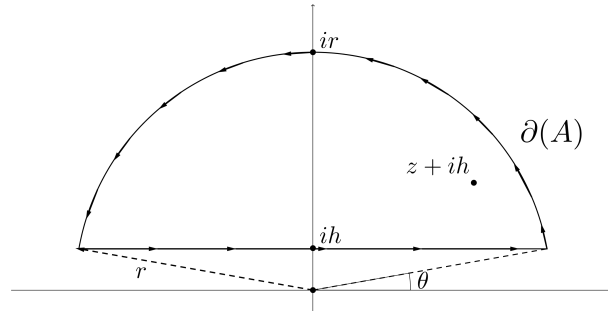


Figura 3.1: Ilustración de  $\partial(A)$ .

Supongamos que  $\partial(A)$  está recorrida en sentido positivo. Luego, por la fórmula integral

de Cauchy,

$$\begin{aligned}
f(z + ih) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(A)} \frac{f(w)}{w - (z + ih)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(A)} \frac{f(w)}{(w - ih) - z} dw \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta}^{\pi - \theta} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{re^{it} - ih - z} dt. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta}^{\pi - \theta} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{re^{it} - ih - z} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi - \theta} \frac{r|f(re^{it})|}{|re^{it} - ih - z|} dt.$$

Observemos que, por el teorema de Taylor, para  $r$  suficientemente grande

$$\frac{r}{|re^{it} - ih - z|} \leq 1 + O(r^{-1}),$$

donde la notación  $O(r^{-1})$  indica una función de orden  $r^{-1}$  (es decir, cumple que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} rO(r^{-1}) < \infty).$$

De esta manera, utilizando también que  $|f(re^{it})| \leq k(r \operatorname{sen}(t))^{-\frac{1}{p}}$  debido al Lema 3.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi - \theta} \frac{r|f(re^{it})|}{|re^{it} - ih - z|} dt &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi - \theta} k(r \operatorname{sen}(t))^{-\frac{1}{p}} (1 + O(r^{-1})) dt \\
&= \frac{kr^{-\frac{1}{p}}}{2\pi} (1 + O(r^{-1})) \int_{\theta}^{\pi - \theta} (\operatorname{sen} t)^{-\frac{1}{p}} dt.
\end{aligned}$$

Sea  $k' := \frac{k(1+O(r^{-1}))}{2\pi}$  y consideremos  $p = 1$ . Notemos que existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\operatorname{sen}(t) \geq \frac{t}{n}$

para  $t \in (\theta, \frac{\pi}{2}]$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{k'}{r} \int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{1}{\text{sen}(t)} dt &\leq \frac{2nk'}{r} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt = \frac{2nk'}{r} \left( \log(t) \Big|_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2nk'}{r} \log \left( \frac{\pi}{2\theta} \right) \\ &\leq \frac{2nk'}{r} \log \left( \frac{\pi}{\text{sen}(\theta)} \right) = \frac{2nk'}{r} \log \left( \frac{\pi r}{h} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

En el caso en el que  $p > 1$ , utilizamos la misma cota para la función seno y observamos que  $\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} k' r^{-\frac{1}{p}} \int_{\theta}^{\pi-\theta} (\text{sen}(t))^{-\frac{1}{p}} dt &\leq 2k' \left( \frac{n}{r} \right)^{\frac{1}{p}} \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (t)^{-\frac{1}{p}} dt = 2k' \left( \frac{n}{r} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{t^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}} \Big|_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2k' \left( \frac{n}{r} \right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1-\frac{1}{p}} - \theta^{1-\frac{1}{p}} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Así, llegamos a que el segundo término de la igualdad (3.1) converge a 0 a medida que  $r$  tiende a infinito. Por ende, tomando límite en dicha igualdad, obtenemos

$$f(z + ih) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - z} dt.$$

Ahora, como  $z + ih$  está en el interior de  $A$ ,  $\bar{z} + ih = x + i(h - y)$  está en su exterior. Por consiguiente,  $\frac{f(w)}{w - (\bar{z} + ih)}$  es una función analítica en  $\text{int}(A)$ , lo que implica que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(A)} \frac{f(w)}{w - (\bar{z} + ih)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - \bar{z}} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta}^{\pi-\theta} \frac{f(re^{it})ire^{it}}{re^{it} - ih - \bar{z}} dt$$

donde, como antes, se muestra que el segundo término tiende a cero a medida que  $r$  tiende a infinito. Así, tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - \bar{z}} dt = 0. \quad (3.2)$$

En consecuencia, observando que  $r \cos(\theta) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \infty$  y restando las igualdades (3.1) y (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
f(z + ih) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - z} dt - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)}{t - \bar{z}} dt \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{f(t + ih)(t - \bar{z}) - f(t + ih)(t - z)}{(t - z)(t - \bar{z})} dt \\
&= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-r \cos(\theta)}^{r \cos(\theta)} \frac{yf(t + ih)}{(t - x)^2 + y^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(t + ih)}{(t - x)^2 + y^2} dt.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.5.** Sean  $1 < p < \infty$  y  $f \in H_p$ . Entonces, existe  $f_0 \in L^p(\mathbb{R})$  tal que

a) Para casi toda  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \in \mathbb{H}^+}} f(z) = f_0(t_0).$$

b) Si  $z = x + iy \in \mathbb{H}^+$ ,

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x - t)^2 + y^2} f_0(t) dt.$$

*Demostración.* Dada  $h > 0$ , definamos a la función  $f_h(t) := f(t + ih)$ . Ahora, notemos que  $f_h \in L^p(\mathbb{R})$ , en virtud de que  $f \in H_p$ . Luego, por el teorema de Banach-Alaoglu, existe  $f_0 \in L^p(\mathbb{R})$  tal que podemos tomar una sucesión  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  que tiende a cero y que se dé la siguiente convergencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{h_j} g d\mu \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 g d\mu \quad (3.3)$$

para toda  $g \in (L^p(\mathbb{R}))^* \cong L^q(\mathbb{R})$  (isomorfismo que existe debido a que  $p > 1$ ), donde  $q$  es el exponente conjugado de  $p$ .

En nuestro caso, como  $\frac{y}{(x-t)^2+y^2} \in L^q(\mathbb{R})$ , utilizando el argumento previo y el Lema 3.4 tenemos que

$$f(z + ih_j) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f_{h_j}(t) dt \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f_0(t) dt,$$

donde  $f_0$  es la función en  $L^p(\mathbb{R})$  dada por la relación (3.3). Además, como  $f(z + ih_j)$  converge a  $f(z)$  a medida que  $j$  tiende a infinito, concluimos que

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f_0(t) dt,$$

con lo que mostramos el inciso b) del teorema.

Ahora, dado que  $f_0$  pertenece al espacio  $L^1(\mathbb{R})$  localmente (es decir,  $f_0$  es absolutamente integrable en conjuntos compactos), tenemos que

$$\mu(E) := \int_E f_0 d\lambda$$

es una medida con signo absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue  $\lambda$ . Además,  $f_0$  es la derivada de Radón-Nikodym de  $\mu$  respecto a  $\lambda$ .

Como consecuencia del teorema de Radón-Nikodym,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} f_0(t) dt,$$

lo que implica que  $g(t) := \frac{1}{1+t^2}$  es integrable respecto a  $\mu$ . Más aún, como  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g d|\mu| = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) |f_0(t)| dt < \infty,$$

debido a la desigualdad de Hölder.



De esta manera, por el Teorema 3.2, tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} f_0(t) dt \longrightarrow f_0(t_0)$$

a medida que  $z$  tiende a  $t_0$  no tangencialmente. Por lo tanto,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \neq t_0}} f(z) = f_0(t_0)$$

para casi toda  $t_0 \in \mathbb{R}$ . □

Si  $p = 1, \infty$ , entonces el Teorema 3.5 también es válido, como se muestra en [5] capítulo VI, sección C, páginas 115-116. A partir de este hecho, enunciamos el resultado final del capítulo, el cual generaliza el teorema de Luzin-Privalov.

**Teorema 3.6.** *Sean  $1 < p < \infty$  y  $f \in H_p$ . Si los límites angulares de  $f$  en un conjunto  $E$  denso métricamente y de segunda categoría en un abierto  $A \subseteq \mathbb{R}$  son cero, entonces  $f$  es idénticamente cero.*

*Demostración.* Como  $f \in H_p$ ,  $f$  es analítica en  $\mathbb{H}^+$  y, por el Teorema 3.5,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ z \neq t_0}} f(z) \equiv f(t_0 + i0)$$

existe para casi toda  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Ahora, dado que los límites angulares de  $f$  son cero en un conjunto denso métricamente y de segunda categoría en un abierto  $A \subseteq \mathbb{R}$ , por la segunda versión del teorema de Luzin-Privalov concluimos que  $f$  es idénticamente cero. □

# Capítulo 4

## Valor principal y fórmulas de Plemelj-Sokhotski

### 4.1. Valor principal de Cauchy

Empecemos el capítulo recordando que, dado un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , una curva  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  es la imagen de una función continua  $\xi : I \rightarrow \mathbb{C}$ , la cual llamamos parametrización de la curva. Si  $I = [a, b]$ , entonces diremos que una curva  $\mathcal{C} \equiv \xi(I)$  es suave si  $\xi$  suave (infinitamente diferenciable), es simple si  $\xi$  es inyectiva, y es cerrada si  $\xi(a) = \xi(b)$ . Además, diremos que  $\mathcal{C}$  es una curva simple y cerrada si  $\xi$  es inyectiva en  $[a, b)$  y  $\xi(a) = \xi(b)$ .

En este capítulo suponemos que las curvas que utilizamos son regulares; es decir, una curva  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  es regular si  $\xi : I \rightarrow \mathcal{C}$  tiene derivada no nula en todo su dominio.

**Definición 4.1.** Sean  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  una curva suave y simple, y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua en  $\mathcal{C}$ . Decimos que  $\phi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\phi(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

es la integral de tipo Cauchy de  $f$  en  $\mathcal{C}$ .

En virtud del siguiente teorema (mostrado en [2] capítulo 1, sección 1, página 3), la función  $\phi$  dada en la definición anterior es analítica, salvo en los puntos de la curva  $\mathcal{C}$ .

**Teorema 4.2.** *Sea  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  una curva simple y suave, y  $f : \mathcal{C} \times U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $f_z(w) := f(w, z)$  es continua y  $f_w(z) := f(w, z)$  es analítica. Entonces,*

$$F(z) := \int_{\mathcal{C}} f(w, z) dw$$

es analítica en  $U$ .

Notemos que, cuando tomamos una curva  $\mathcal{C}$  suave, simple y cerrada, la integral de tipo Cauchy  $\phi$  para una función  $f$  continua en  $\mathcal{C}$  tiene un dominio desconexo debido al teorema de Jordan, por lo que podemos considerar dos funciones analíticas  $\phi^+$  y  $\phi^-$ , donde  $\phi^+$  está definida en el interior de  $\mathcal{C}$  y  $\phi^-$ , en el exterior de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 4.3.** *Sean  $\mathcal{C}$  una curva suave en  $\mathbb{C}$  y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función. Decimos que  $f$  satisface la condición Hölder en  $\mathcal{C}$  si existen  $c > 0$  y  $0 < \kappa \leq 1$  tales que*

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq c|z_1 - z_2|^\kappa$$

para cualesquiera  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$ . Además, llamamos a  $\kappa$  y  $c$  índice de Hölder y constante de Hölder de  $f$ , respectivamente.

La condición de Hölder para  $\kappa = 1$  también se nombra condición de Lipschitz.

**Definición 4.4.** *Sean  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in (a, b)$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. El valor principal de Cauchy p.v.  $\int_a^b \frac{f(t)}{t-t_0} dt$  está definido como*

$$p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t-t_0} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right). \quad (4.1)$$

Notemos que, de la definición anterior, en el caso en el que  $f \equiv 1$  obtenemos que

$$\int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{dt}{t-t_0} + \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{dt}{t-t_0} = -\int_\varepsilon^{t_0-a} \frac{du}{u} + \int_\varepsilon^{b-t_0} \frac{dv}{v} = \log\left(\frac{b-t_0}{t_0-a}\right). \quad (4.2)$$

Ahora, sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $(a, b)$ . Así,

$$\begin{aligned} p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t-t_0} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{f(t)}{t-t_0} dx + \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{f(t)}{x-t_0} dt \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0} dt \right) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( f(t_0) \int_a^{t_0-\varepsilon} \frac{dt}{t-t_0} + f(t_0) \int_{t_0+\varepsilon}^b \frac{dt}{t-t_0} \right) \\ &= \int_a^b \frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0} dt + p.v. f(t_0) \int_a^b \frac{dt}{t-t_0}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\int_a^b \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} dx$  existe en el sentido usual debido a la condición de Hölder de  $f$ .

En virtud de esto último y usando la igualdad (4.2),

$$p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \int_a^b \frac{f(t) - f(t_0)}{t-t_0} dt + f(t_0) \log\left(\frac{b-t_0}{t_0-a}\right),$$

si  $f$  satisface la condición de Hölder en el intervalo  $(a, b)$ .

Ahora definimos el valor principal de Cauchy para funciones con dominio en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 4.5.** Sean  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función y  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  una curva simple y suave con parametrización  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ . Dados  $z \in \mathcal{C} \setminus \{\xi(a), \xi(b)\}$  y  $\delta > 0$ , sea  $\mathcal{C}_\delta := \mathcal{C} \cap B(z, \delta)$ .

Definimos el valor principal de Cauchy, p.v.  $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw$ , como

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw := \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\delta} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (4.4)$$

Lo siguiente por realizar es buscar condiciones que nos permitan asegurar la existencia del valor principal de Cauchy.

Primero, sean  $\mathcal{C}$  una curva simple y suave en  $\mathbb{C}$ ,  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  una parametrización de  $\mathcal{C}$ ,  $z \in \mathcal{C} \setminus \{\xi(a), \xi(b)\}$  y  $f \equiv 1$ . Notemos que, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeña,  $\mathcal{C} \cap \partial(B(z, \delta))$  consiste de dos puntos, los cuales denotamos por  $z_1 \equiv \xi(t_{z_1})$  y  $z_2 \equiv \xi(t_{z_2})$ .

Sea  $\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una parametrización de  $\partial(B(z, \delta))$  inyectiva en  $[0, 2\pi)$ , en sentido dextrógiro, de tal manera que  $\eta(0) = \eta(2\pi) = z_1$  y, para  $s_{z_2} \in (0, 2\pi)$ ,  $\eta(s_{z_2}) = z_2$ . Además, consideremos una curva suave y simple  $\hat{\mathcal{C}}$ , con parametrización  $\hat{\xi} : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ , tal que  $\hat{\xi}(\hat{a}) = \xi(b)$ ,  $\hat{\xi}(\hat{b}) = \xi(a)$ , y tal que  $\varsigma := \xi([a, t_{z_1}]) \cup \eta([0, s_{z_2}]) \cup \xi([t_{z_2}, b]) \cup \hat{\xi}([\hat{a}, \hat{b}])$  sea una curva de Jordan, la cual satisface que  $z \notin \text{int}(\varsigma)$  (ver Figura 4.1).

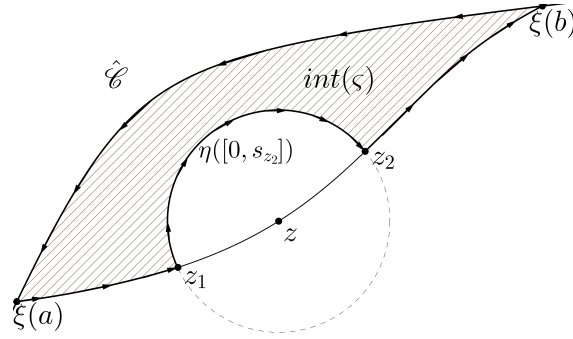


Figura 4.1: Descripción gráfica de la curva  $\varsigma$  y su interior.

Tomemos la orientación de  $\varsigma$  dada por la figura previa. Como la función  $h(w) := \frac{1}{w-z}$  es analítica en  $\text{int}(\varsigma)$ ,  $\int_{\varsigma} \frac{dw}{w-z} = 0$ , por lo que

$$\int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\delta} \frac{dw}{w-z} = - \int_{\eta([0, s_{z_2}])} \frac{dw}{w-z} - \int_{\hat{\mathcal{C}}} \frac{dw}{w-z}.$$

Finalmente, observemos que

$$\int_{\eta([0, s_{z_2}])} \frac{dw}{w-z} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} -i\pi,$$

debido a la orientación elegida para  $\eta([0, s_{z_2}])$ . En consecuencia,

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z} = i\pi - \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z}.$$

Además, si la curva  $\mathcal{C}$  es cerrada, tendremos que

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z} = i\pi.$$

Ahora, sean  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  una curva simple y suave con parametrización  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $z \in \mathcal{C} \setminus \{\xi(a), \xi(b)\}$ , y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función. De manera similar a la relación (4.3)

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw = p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw + p.v. f(z) \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z}. \quad (4.5)$$

A continuación, argumentamos la existencia de  $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw$  en el sentido usual, no sólo del valor principal, si  $f$  satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$ . Para ello, siendo  $z = \xi(t_z)$  para  $t_z \in (a, b)$ , recordemos que  $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} dw$  existe en el sentido usual si

$$\lim_{u \rightarrow 0} \int_a^{t_z-u} \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt, \quad \lim_{v \rightarrow 0} \int_{t_z+v}^b \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt$$

existen, y en dado caso

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \lim_{u \rightarrow 0} \int_a^{t_z-u} \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt + \lim_{v \rightarrow 0} \int_{t_z+v}^b \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt.$$

Supongamos que  $f$  satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$ . Luego, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$0 < \min\{|\xi(t_z) - \xi(t)| : t \in [a, t_z - \varepsilon] \cup [t_z + \varepsilon, b]\},$$

debido a la inyectividad de  $\xi$ . Además, por ser  $\mathcal{C}$  una curva regular, podemos suponer que

$|\xi'(t)| = 1$  para todo  $t \in [a, b]$ . En virtud de lo anterior, existe  $d \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$0 < d \leq \frac{|\xi(t_z) - \xi(t)|}{|t_z - t|} \leq 1, \quad (4.6)$$

para toda  $t \in [a, b]$ .

Observemos que debido a la condición de Hölder de  $f$ , cuyo índice y constante de Hölder son  $\kappa$  y  $c$ , respectivamente, y a la relación (4.6),

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{t_z-u} \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt \right| &\leq \int_a^{t_z-u} \frac{|f(\xi(t)) - f(z)|}{|\xi(t) - z|} dt \leq c \int_a^{t_z-u} \frac{1}{|\xi(t) - z|^{1-\kappa}} dt \\ &\leq \frac{c}{d^{1-\kappa}} \int_a^{t_z-u} \frac{1}{|t - t_z|^{1-\kappa}} dt = \frac{c}{d^{1-\kappa}} \int_a^{t_z-u} \frac{1}{(t_z - t)^{1-\kappa}} dt \\ &= \frac{c}{d^{1-\kappa}} \left( \frac{(t_z - a)^\kappa - u^\kappa}{\kappa} \right) \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{c(t_z - a)^\kappa}{d^{1-\kappa} \kappa}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Análogamente,

$$\left| \int_{t_z+v}^b \frac{f(\xi(t)) - f(z)}{\xi(t) - z} \xi'(t) dt \right| \leq \frac{c}{d^{1-\kappa}} \left( \frac{(b - t_z)^\kappa - v^\kappa}{\kappa} \right) \xrightarrow{v \rightarrow 0} \frac{c(b - t_z)^\kappa}{d^{1-\kappa} \kappa}. \quad (4.8)$$

Así, por las relaciones (4.7) y (4.8), garantizamos la existencia de  $\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw$  en el sentido usual. En consecuencia, retomando la relación (4.5),

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + f(z) \left[ i\pi - \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w - z} \right],$$

y, si  $\mathcal{C}$  es una curva cerrada,

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw + i\pi f(z). \quad (4.9)$$

A las integrales de la forma  $p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$  se les conoce como integrales singulares.

A pesar de ser un tipo particular de integrales, éstas satisfacen propiedades usuales de las integrales ordinarias, así como linealidad y cambio de variable, como lo establece el siguiente teorema detallado en [2], capítulo 1 sección 3 página 17.

**Teorema 4.6.** Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  dos curvas simples y suaves en  $\mathbb{C}$ , y  $h : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  una función biyectiva con derivada continua no nula. Entonces, si  $h(\hat{z}) = z$ ,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\mathcal{C}'} \frac{f(h(\hat{w}))h'(\hat{w})}{h(\hat{w}) - h(\hat{z})} d\hat{w}.$$

## 4.2. Fórmulas de Plemelj-Sokhotski

**Definición 4.7.** Sean  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  una curva suave, simple y cerrada,  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \text{int}(\mathcal{C})$  una función continua,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función,  $x \in \mathcal{C}$  y  $L \in \mathbb{C}$ .

a) Decimos que  $\gamma$  converge no tangencialmente a  $x$  si existen  $0 < \theta < \pi$  y  $t_0 \in [a, b]$  tales que  $\gamma(t)$  está en el cono con vértice en  $x$ , cuyo eje es perpendicular a la recta tangente de  $\mathcal{C}$  en  $x$ , y ángulo de apertura  $\theta$  para toda  $t \geq t_0$ , y

$$\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x.$$

b) Decimos que  $f$  tiene un límite no tangencial  $L$  en  $x$  si para cualquier función continua  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \text{int}(\mathcal{C})$  que converge no tangencialmente a  $x$ , se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = L.$$

En dado caso, escribimos

$$\lim_{z \xrightarrow{nt} x} f(z) = L.$$

La definición anterior generaliza la Definición 1.13 para curvas suaves, simples y cerradas. En el caso en el que tengamos una curva  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  suave, simple y que no sea cerrada,



diremos que  $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  converge no tangencialmente a  $x \in \mathcal{C}$ , donde  $x$  no es un punto extremo de  $\mathcal{C}$ , si existen  $s \in [0, 1)$  y una curva  $\hat{\mathcal{C}}$  tales que  $\mathcal{C} \cup \hat{\mathcal{C}}$  sea una curva suave, simple y cerrada,  $\gamma([s, 1)) \subseteq \text{int}(\mathcal{C} \cup \hat{\mathcal{C}})$  y tal que  $\gamma|_{[s, 1)}$  converge no tangencialmente a  $x$ .

**Lema 4.8.** Sean  $\mathcal{C}$  una curva simple y suave en  $\mathbb{C}$ , y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$ . Si  $x \in \mathcal{C}$  no es un punto extremo de la curva y  $\varphi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por

$$\varphi(z) := \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - z} dw,$$

entonces

$$\lim_{z \xrightarrow{nt} x} \varphi(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw =: \varphi(x), \quad (4.10)$$

donde este límite no depende del lado de la curva por donde nos acerquemos.

*Demostración.* Consideremos la diferencia

$$\begin{aligned} \varphi(z) - \varphi(x) &= \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - z} dw - \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw \\ &= \int_{\mathcal{C}} \frac{(f(w) - f(x))(w - x) - (f(w) - f(x))(w - z)}{(w - z)(w - x)} dw \\ &= \int_{\mathcal{C}} (z - x) \frac{f(w) - f(x)}{(w - z)(w - x)} dw. \end{aligned}$$

Para estimar la expresión anterior, hallaremos cierta  $\delta > 0$  suficientemente pequeña, consideraremos al arco de curva  $\mathcal{C}_\delta := \mathcal{C} \cap B(x, \delta)$ , y dividiremos la curva en  $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_\delta$  y  $\mathcal{C}_\delta$  para separar la diferencia anterior en dos integrales  $I_1, I_2$ . Así, será suficiente que estimemos cada una de estas integrales para tener el resultado.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Supongamos que  $\gamma$  es una curva continua en  $[0, 1)$  tal que  $\gamma(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} x$  no tangencialmente. Consideremos  $\delta_1 > 0$  suficientemente pequeña de tal manera que  $\partial(B(x, \delta_1)) \cap \mathcal{C}$  consiste de dos puntos, los cuales denotamos por  $z_1$  y  $z_2$ ; además, sean

$z \in \gamma([0, 1))$  y  $w \in \mathcal{C}$ , tales que  $z, w \in B(x, \delta_1)$ .

Dado que  $\gamma$  converge no tangencialmente a  $x$ , sean  $s \in [0, 1)$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  y  $S_\theta$  el cono con vértice en  $x$ , cuyo eje es perpendicular a la recta tangente de  $\mathcal{C}$  en  $x$  y con ángulo de apertura  $\theta$  tales que  $\gamma(t) \in S_\theta$  para todo  $t \geq s$  y  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = x$ . Notemos que, si  $t_z \in [a, b]$  es tal que  $\gamma(t_z) = z$ , podemos suponer que  $\gamma(t) \in S_\theta \cap B(x, \delta_1)$  para toda  $t \in [t_z, 1)$ .

Luego, tomemos el triángulo cuyos vértices son  $z$ ,  $x$  y  $w$ , y sean  $\omega, \alpha$  los ángulos internos de éste con vértice en  $x$  y  $w$ , respectivamente (ver Figura 4.2). Note que

$$\frac{|z - x|}{|z - w|} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\omega)} \leq \frac{1}{\text{sen}(\omega)}.$$

usando la Ley de Senos. Además, debido a la convergencia no tangencial de  $\gamma$ ,  $\omega$  está acotado por abajo uniformemente por una constante  $\omega' > 0$ . Así, existe  $k \in \mathbb{R}^+$ , tal que

$$\frac{|z - x|}{|z - w|} \leq \frac{1}{\text{sen}(\omega)} \leq k. \quad (4.11)$$

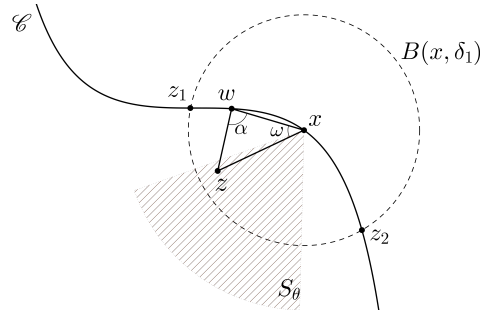


Figura 4.2: Fijo  $w \in \mathcal{C}$ ,  $\omega$  está acotado uniformemente por abajo al depender de  $z$ .

Ahora, definamos  $\mathcal{C}_{\delta_1} := \mathcal{C} \cap B(x, \delta_1)$ . Sean

$$I_1 := \int_{\mathcal{C}_{\delta_1}} (z - x) \frac{f(w) - f(x)}{(w - z)(w - x)} dw,$$

y  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  una parametrización de  $\mathcal{C}$  tal que  $|\xi'(t)| = 1$  para toda  $t \in [a, b]$ .

Sean  $t_{z_1}, t_{z_2} \in [a, b]$  tales que  $z_i = \xi(t_{z_i})$ , para  $i = 1, 2$ . Usando la relación (4.11) y que  $f$  satisface la condición de Hölder en la curva  $\mathcal{C}$  con índice y constante de Hölder  $\kappa$  y  $c$ , respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\mathcal{C}_{\delta_1}} (z-x) \frac{f(w) - f(x)}{(w-z)(w-x)} dw \right| = \left| \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} (z-x) \frac{f(\xi(t)) - f(x)}{(\xi(t)-z)(\xi(t)-x)} \xi'(t) dt \right| \\ &\leq \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \frac{|z-x|}{|z-\xi(t)|} \frac{|f(\xi(t)) - f(x)|}{|\xi(t)-x|} dt \leq \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \frac{ck}{|\xi(t)-x|^{1-\kappa}} dt. \end{aligned}$$

Como  $x = \xi(t_x)$ , para  $t_x \in [a, b]$ , no es un punto extremo de la curva, podemos usar la desigualdad (4.6). De esta manera, retomando la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \frac{ck}{|\xi(t)-x|^{1-\kappa}} dt \leq \frac{ck}{d^{1-\kappa}} \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \frac{1}{|t-t_x|^{1-\kappa}} dt \\ &= \frac{ck}{d^{1-\kappa}} \left( \int_{t_{z_1}}^{t_x} \frac{1}{(t_x-t)^{1-\kappa}} dt + \int_{t_x}^{t_{z_2}} \frac{1}{(t-t_x)^{1-\kappa}} dt \right) \\ &= \frac{ck}{d^{1-\kappa}} \left( \frac{(t_x-t_{z_1})^\kappa + (t_{z_2}-t_x)^\kappa}{\kappa} \right) \leq \frac{2ck\delta_1^\kappa}{d\kappa}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, podemos elegir  $\delta_1$  suficientemente pequeña tal que  $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Además, notando que

$$I_2 := \int_{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\delta_1}} (z-x) \frac{f(w) - f(x)}{(w-z)(w-x)} dw$$

es una función (respecto a la variable  $z$ ) continua en  $x$ , dado que  $x \notin \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\delta_1}$ , podemos elegir  $\delta_2 > 0$  tal que  $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$  siempre que  $|z-x| < \delta_2$ .

Por lo tanto, eligiendo  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , tendremos que

$$|\varphi(z) - \varphi(x)| = \left| \int_{\mathcal{C}} (z-x) \frac{f(w) - f(x)}{(w-z)(w-x)} dw \right| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

Además, como todos los argumentos previos son válidos para cualquier curva  $\gamma$  continua en  $[0, 1)$  que tienda no tangencialmente a  $x$  a medida que  $t$  tiende a 1 por cualquier lado de la curva, concluimos.  $\square$

De acuerdo a [6], como se muestra en el capítulo 2, sección 16, páginas 38-40, la relación (4.10) también es válida cuando tomamos curvas que tienden tangencialmente a  $x \in \mathcal{C}$ , por cualquier lado de la curva. Además, a partir del Lema 4.8 podemos obtener el siguiente resultado.

**Corolario 4.9.** *Sean  $\varphi(z)$  la función dada por el Lema 4.8 y  $\theta \in (0, \pi)$ . Para todo  $x \in \mathcal{C}$  fuera de sus puntos extremos existen  $r, \delta > 0$  tales que, para todo  $y \in B(x, \delta) \cap \mathcal{C}$ ,  $\varphi(z)$  converge uniformemente en  $S_\theta \cap B(y, r)$ , donde  $S_\theta$  es el cono con vértice en  $y$ , ángulo de apertura  $\theta$  y cuyo eje es ortogonal a la recta tangente de  $\mathcal{C}$  en  $y$ .*

El Corolario 4.9 establece convergencia uniforme de  $\varphi(z)$ . Utilizando este hecho, podemos demostrar que  $\varphi(x)$  es continua.

**Lema 4.10.** *La función  $\varphi(x)$  dada en el Lema 4.8 es una función continua en la curva, excepto quizá en sus puntos extremos.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ . Recordemos que

$$\varphi(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - z} dw \equiv \varphi_x(z).$$

Observemos que  $\varphi_x(z)$ , vista como función de  $x$ , es continua en  $\mathcal{C}$  salvo en sus puntos extremos. Para demostrarlo, primero notemos que

$$|\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| \leq \int_a^b \frac{|f(x) - f(y)|}{|\xi(t) - z|} dt.$$

siendo  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$  parametrización de  $\mathcal{C}$ . Como  $f$  satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con constante e índice de Hölder  $c, \kappa$ , respectivamente, y como existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que

$0 < k \leq |\xi(t) - z|$  para toda  $t \in [a, b]$  (dado que  $z \notin \mathcal{C}$ ) se tiene que

$$|\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| \leq \frac{c(b-a)|x-y|^\kappa}{k}.$$

En consecuencia, para  $x, y$  suficientemente cercanos (digamos,  $|x-y| < \delta_2$ ), obtendremos que  $|\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Sea  $\theta \in (0, \pi)$ . Por el Corolario 4.9 existe  $\delta > 0$  tal que, si  $y \in \mathcal{C} \setminus \{\xi(a), \xi(b)\}$  cumple que  $|x-y| < \delta$ , podemos tomar  $z$  suficientemente cercano a  $x$  tal que  $z$  está en el cono con vértice en  $x$ , ángulo de apertura  $\theta$  y eje ortogonal a la tangente de  $\mathcal{C}$  en  $x$ , y también está en el cono respectivo para  $y$  con el mismo ángulo de apertura, y el cual cumple que

$$|\varphi_y(z) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así, si  $\hat{\delta} := \min\{\delta, \delta_2\}$  y  $|x-y| < \hat{\delta}$ , tomando  $z$  como se hizo previamente concluimos que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi_x(z)| + |\varphi_x(z) - \varphi_y(z)| + |\varphi_y(z) - \varphi(y)| \leq \varepsilon.$$

Por ende,  $\varphi(x)$  es continua en  $\mathcal{C}$  salvo, quizá, en sus puntos extremos.  $\square$

Ahora, con ayuda de los resultados anteriores nos enfocaremos en dar condiciones para la existencia del límite de una integral de tipo Cauchy en la curva de integración.

Para ello, tomemos una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface la condición de Hölder en una curva  $\mathcal{C}$  suave y consideremos al par de funciones  $\phi, \varphi : \mathbb{C} \setminus \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{y} \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w-z} dw,$$

donde la segunda integral es la estudiada en los resultados 4.8, 4.9 y 4.10.

Si  $\mathcal{C}$  es una curva simple, suave y cerrada, orientada en sentido positivo, sabemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in \text{int}(\mathcal{C}) \\ 0, & z \in \text{ext}(\mathcal{C}), \end{cases}$$

y, si  $z \in \mathcal{C}$ ,

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w-z} = i\pi.$$

Luego, como  $\mathcal{C}$  es cerrada, se puede aproximar a un punto de ésta desde su interior o desde su exterior. En este entendido, denotaremos por  $\phi^-$  y  $\varphi^-$  al límite de  $\phi$  y  $\varphi$ , respectivamente, cuando se aproxime a un punto de la curva  $x$  desde el interior de ésta, lo cual se denotara por  $z \rightarrow x^-$ ; de manera análoga, usaremos la notación  $\phi^+$ ,  $\varphi^+$  y  $z \rightarrow x^+$  al aproximarse desde el exterior de  $\mathcal{C}$  a  $x$ .

Así, obtenemos que

$$\varphi^-(x) = \lim_{z \rightarrow x^-} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(x)}{w-z} dw \right) = \phi^-(x) - f(x), \quad (4.12)$$

$$\varphi^+(x) = \lim_{z \rightarrow x^+} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(x)}{w-z} dw \right) = \phi^+(x) \quad (4.13)$$

y, a su vez,

$$\varphi(x) = p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw - p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(x)}{w-x} dw = p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw - \frac{1}{2} f(x).$$

Ahora, usando el Lema 4.8, tenemos que todas las expresiones anteriores son iguales

(es decir,  $\varphi = \varphi^- = \varphi^+$ ), por lo que

$$\phi^-(x) = \frac{1}{2}f(x) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw \quad (4.14)$$

y

$$\phi^+(x) = -\frac{1}{2}f(x) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw, \quad (4.15)$$

las cuales son conocidas como fórmulas de Plemelj-Sokhotski.

Además, podemos notar que, debido al Lema 4.10, las funciones  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  son funciones continuas en  $\mathcal{C}$ , en virtud de las igualdades (4.12) y (4.13). Más aún, a partir de (4.14) y (4.15) tenemos el siguiente par de relaciones

$$\phi^+(x) + \phi^-(x) = p.v. \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw, \quad (4.16)$$

$$\phi^-(x) - \phi^+(x) = f(x). \quad (4.17)$$

Observemos que en el Lema 4.8, el cual reviste gran importancia dado que con éste se pudieron obtener todas las relaciones anteriores, se puede sólo pedir que la función  $f$  satisfaga la condición de Hölder en una vecindad del punto  $x \in \mathcal{C}$  en cuestión, el cual no es un punto extremo de la curva, para obtener la igualdad (4.10) y deducir el resto.

En virtud de esto último, si  $f$  es una función que satisface la condición de Hölder en una curva  $\mathcal{C}$  la cual no es cerrada, podemos considerar a una curva suave, simple y cerrada  $\mathcal{C}'$  tal que  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}'$ , y en donde definiremos  $f(z) = 0$  para toda  $z \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$ . Así, si  $x \in \mathcal{C}$  no es un punto extremo de ésta, entonces  $f$  satisface la condición de Hölder en una vecindad de  $x$ , y todas las relaciones previamente detalladas para curvas cerradas las podremos hacer válidas.

A partir de la observación anterior, y usando las relaciones dadas en (4.14) y (4.15), podemos deducir un caso particular de las fórmulas de Plemelj-Sokhotski en la recta real.

**Teorema 4.11.** *Consideremos  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in (a, b)$  y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $(a, b) \times \{0\}$ . Entonces,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{f(t)}{(t - t_0) \mp i\varepsilon} dt = \pm \pi i f(t_0) + p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t - t_0} dt.$$

*Demostración.* Supongamos, sin perder generalidad, que  $t_0 = 0$ . Si  $\mathcal{C}$  es una curva suave, simple y cerrada tal que  $[a, b] \times \{0\} \subseteq \mathcal{C} \subseteq \mathbb{H}^+$ , entonces tendremos que, por definición de  $\phi^-$  (es decir,  $\phi^-(x) = \lim_{z \rightarrow x^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$ ),

$$\begin{aligned} \phi^-(0) &= \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw = \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{t - z} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f(t)}{t - i\varepsilon} dt, \end{aligned} \tag{4.18}$$

donde estamos tomando en particular un límite radial al 0 con  $z = i\varepsilon$ , al ser este límite independiente de la trayectoria que tomemos. Además,

$$\phi^-(0) = \frac{1}{2} f(0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - 0} dw = \frac{1}{2} f(0) + p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt, \tag{4.19}$$

debido a la igualdad (4.14). Por lo tanto, juntando las relaciones (4.18) y (4.19), obtenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{f(t)}{t - i\varepsilon} dt = +\pi i f(0) + p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt. \tag{4.20}$$



De manera análoga a lo anteriormente realizado, tendremos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \int_a^b \frac{f(t)}{t - i\varepsilon} dt = -\pi i f(0) + p.v. \int_a^b \frac{f(t)}{t} dt, \quad (4.21)$$

con lo que concluimos el resultado.  $\square$

Este último resultado se puede generalizar en toda la recta real, como mostraremos en la siguiente sección.

Ahora, retomando a las funciones  $\phi^+$ ,  $\phi^-$  mostradas previamente, veremos que no sólo son continuas en la curva  $\mathcal{C}$ , como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.12.** *Sean  $\mathcal{C}$  una curva simple, cerrada y suave en  $\mathbb{C}$ ,  $x \in \mathcal{C}$  y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con índice de Hölder  $\kappa$ . Entonces, las funciones*

$$\phi^\pm(x) = \lim_{z \rightarrow x^\pm} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

*satisfacen la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con índice de Hölder  $\kappa$ , en el caso en el que  $\kappa < 1$ . Si  $\kappa = 1$ , entonces  $\phi^\pm$  satisface la condición de Hölder con índice  $1 - \varepsilon$  para toda  $\varepsilon \in (0, 1)$ .*

*Demostración.* Recordemos que de las igualdades (4.12) y (4.13) tenemos que

$$\phi^-(x) = \varphi^-(x) + f(x) \quad \text{y} \quad \phi^+(x) = \varphi^+(x)$$

donde

$$\varphi^-(x) = \varphi^+(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw$$

por el Lema 4.8. De esta manera, probando que  $\varphi(x)$  satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$ , tendremos el resultado.

Dados  $x, y \in \mathcal{C}$  suficientemente cercanos, consideremos la diferencia

$$\varphi(y) - \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w) - f(y)}{w - y} - \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw.$$

Procederemos bajo el mismo razonamiento del Lema 4.8, primero separando la expresión anterior en una suma de integrales y luego acotando cada sumando para concluir.

Sin perder generalidad, supongamos que  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es una parametrización por longitud de arco de  $\mathcal{C}$ ; es decir,  $|\xi'(t)| = 1$  para toda  $t \in [a, b]$ . Debido a lo anterior, para todos  $s_1, s_2 \in [a, b]$ ,  $s_1 < s_2$ , y  $w_1 := \xi(s_1), w_2 := \xi(s_2) \in \mathcal{C}$ , tenemos que la longitud de arco de  $\mathcal{C}$  de  $w_1$  a  $w_2$  es igual a  $s_2 - s_1$ .

Sean  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ,  $t_1 < t_2$ , tales que  $\xi(t_1) = x$  y  $\xi(t_2) = y$ , y definamos

$$h := y - x, \quad \sigma := t_2 - t_1.$$

Note que siempre podemos suponer que  $t_1, t_2 \in (a, b)$ . Ahora, consideremos  $z_1, z_2 \in \mathcal{C}$  y  $t_{z_1}, t_{z_2} \in [a, b]$  tales que  $\xi(t_{z_1}) = z_1$ ,  $\xi(t_{z_2}) = z_2$ ,  $t_{z_1} < t_1 < t_2 < t_{z_2}$ , y  $|t_1 - t_{z_i}| = 2\sigma$  para  $i = 1, 2$ . Con lo anterior, definimos  $\ell := \xi([t_{z_1}, t_{z_2}])$  (ver Figura 4.3).

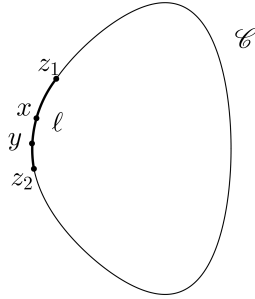


Figura 4.3: Descripción gráfica de  $\ell \subseteq \mathcal{C}$ .

Si  $I_0$  es la integral dada por  $\varphi(y) - \varphi(x)$  restringida a  $\ell$ , y el índice y constante de

Hölder de  $f$  son  $\kappa$  y  $c$ , respectivamente, entonces

$$\begin{aligned}
|I_0| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\ell} \frac{f(w) - f(y)}{w - y} - \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\ell} \left| \frac{f(w) - f(y)}{w - y} \right| d|w| + \frac{1}{2\pi} \int_{\ell} \left| \frac{f(w) - f(x)}{w - x} \right| d|w| \\
&\leq \frac{c}{2\pi} \int_{\ell} \frac{1}{|w - y|^{1-\kappa}} d|w| + \frac{c}{2\pi} \int_{\ell} \frac{1}{|w - x|^{1-\kappa}} d|w| \\
&= \frac{c}{2\pi} \int_{t_1-2\sigma}^{t_1+2\sigma} \frac{dt}{|\xi(t) - y|^{1-\kappa}} + \frac{c}{2\pi} \int_{t_1-2\sigma}^{t_1+2\sigma} \frac{dt}{|\xi(t) - x|^{1-\kappa}}.
\end{aligned}$$

Recordemos que si  $\mathcal{C}$  es una curva regular con parametrización por longitud de arco  $\hat{\xi} : [\hat{a}, \hat{b}] \rightarrow \mathbb{C}$  y  $z \in \mathcal{C} \setminus \{\hat{\xi}(\hat{a}), \hat{\xi}(\hat{b})\}$ , la relación (4.6) nos dice que existe  $d \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$0 < d \leq \frac{|z - \hat{\xi}(t)|}{|t_z - t|} < 1,$$

para toda  $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ , siendo  $t_z \in [\hat{a}, \hat{b}]$  tal que  $\hat{\xi}(t_z) = z$

Luego, como  $x, y$  no son puntos extremos de la curva  $\mathcal{C}$ , podemos usar la relación anterior para obtener que

$$\begin{aligned}
|I_0| &\leq \frac{c}{2\pi d^{1-\kappa}} \int_{t_1-2\sigma}^{t_1+2\sigma} \frac{dt}{|t - t_2|^{1-\kappa}} + \frac{c}{2\pi d^{1-\kappa}} \int_{t_1-2\sigma}^{t_1+2\sigma} \frac{dt}{|t - t_1|^{1-\kappa}} \\
&= \frac{c}{2\pi d^{1-\kappa}} \left( \int_{t_1-2\sigma}^{t_2} \frac{dt}{(t_2 - t)^{1-\kappa}} + \int_{t_2}^{t_2+2\sigma} \frac{dt}{(t - t_2)^{1-\kappa}} \right) \\
&+ \frac{c}{2\pi d^{1-\kappa}} \left( \int_{t_1-2\sigma}^{t_1} \frac{dt}{(t_1 - t)^{1-\kappa}} + \int_{t_1}^{t_1+2\sigma} \frac{dt}{(t - t_1)^{1-\kappa}} \right) \\
&= \frac{c}{2\pi d^{1-\kappa} \kappa} ((3\sigma)^\kappa + \sigma^\kappa + (2\sigma)^\kappa + (2\sigma)^\kappa) \equiv K_0 \sigma^\kappa \leq K_1 |h|^\kappa.
\end{aligned}$$

Ahora, falta estimar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{f(w) - f(y)}{w - y} - \frac{f(w) - f(x)}{w - x} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{f(x) - f(y)}{w - x} dw \\ &+ \frac{h}{2\pi i} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{f(w) - f(y)}{(w - y)(w - x)} dw, \end{aligned}$$

donde denotaremos por  $I_1$  al primer sumando y por  $I_2$  al segundo.

Notemos que, por la condición de Hölder de  $f$ ,

$$|I_1| \leq \frac{c|h|^\kappa}{2\pi} \left| \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{dw}{w - x} \right|,$$

y como  $x \notin \mathcal{C} \setminus \ell$ , podemos acotar la integral del lado derecho de la igualdad para obtener que

$$|I_1| \leq K_2 |h|^\kappa.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{|h|}{2\pi} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{|f(\xi(t)) - f(y)|}{|\xi(t) - y| |\xi(t) - x|} dt \leq \frac{c|h|}{2\pi} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{dt}{|\xi(t) - y|^{1-\kappa} |\xi(t) - x|} \\ &\leq \frac{c|h|}{2\pi d^{2-\kappa}} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{dt}{|t - t_2|^{1-\kappa} |t - t_1|}, \end{aligned}$$

donde usamos la condición de Hölder de  $f$  y la desigualdad (4.6).

Dado  $t \in \xi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \ell)$ , definimos  $\tau(t) \equiv \tau := \frac{\sigma}{t - t_1}$ . Así, notemos que  $|\tau| \leq \frac{1}{2}$  y, en consecuencia,  $\frac{1}{|1-\tau|} < 2$ . De esta manera,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{c|h|}{2\pi d^{2-\kappa}} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{dt}{|1 - \tau|^{1-\kappa} |t - t_1|^{2-\kappa}} \leq \frac{c|h|2^{1-\kappa}}{2\pi d^{2-\kappa}} \int_{\mathcal{C} \setminus \ell} \frac{dt}{|t - t_1|^{2-\kappa}} \\ &= \frac{c|h|2^{1-\kappa}}{2\pi d^{2-\kappa}} \left( \int_a^{t_1 - 2\sigma} \frac{dt}{(t_1 - t)^{2-\kappa}} + \int_{t_1 + 2\sigma}^b \frac{dt}{(t - t_1)^{2-\kappa}} \right). \end{aligned}$$

En el caso en el que  $\kappa < 1$ ,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \frac{c|h|2^{1-\kappa}}{2\pi d^{2-\kappa}} \left( -\frac{(t_1-t)^{\kappa-1}}{\kappa-1} \Big|_a^{t_1-2\sigma} + \frac{(t-t_1)^{1-\kappa}}{\kappa-1} \Big|_{t_1+2\sigma}^b \right) \\
&= \frac{c|h|2^{1-\kappa}}{2\pi d^{2-\kappa}(1-\kappa)} \left( (2\sigma)^{\kappa-1} - (t_1-a)^{\kappa-1} - (b-t_1)^{\kappa-1} + (2\sigma)^{\kappa-1} \right) \\
&\leq \frac{c|h|\sigma^{\kappa-1}}{2\pi d^{2-\kappa}(1-\kappa)} \leq K_3|h|^\kappa.
\end{aligned}$$

Si  $ka = 1$ , entonces

$$|I_2| \leq \frac{c|h|}{2\pi d} \left( -\log(2\sigma) + \log(t_1-a) + \log(b-t_1) - \log(2\sigma) \right).$$

Ahora, como  $x, y$  son suficientemente cercanos, podemos asegurar que  $\sigma$  es tal que  $-\log(2\sigma) > 0$ . Además, como  $|h| \leq \sigma$ ,

$$|I_2| \leq \frac{c|h|}{2\pi d} \left( -\log(|h|) + \log(t_1-a) + \log(b-t_1) - \log(|h|) \right) \leq \frac{c|h|}{2\pi d} \left( 2|\log(|h|)| + \hat{K} \right).$$

Recordando que, a medida que  $x$  tiende a cero, la función  $|\log(x)|$  está por debajo de  $|x|^{-\varepsilon}$  para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , tendremos que

$$|I_2| \leq K_4|h|^{1-\varepsilon}.$$

Por consiguiente,  $\varphi$  satisface la condición de Hölder con el mismo índice que  $f$  si  $\kappa < 1$ , y si  $\kappa = 1$ , entonces  $\varphi$  satisface la condición de Hölder con índice  $1-\varepsilon$  para todo  $\varepsilon \in (0, 1)$ , así como las funciones  $\phi^\pm$ , como consecuencia de las relaciones (4.12) y (4.13).  $\square$

**Corolario 4.13.** Sean  $\mathcal{C}$  una curva simple, cerrada y suave en  $\mathbb{C}$ ,  $x$  un punto no extremo de  $\mathcal{C}$  y  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con índice de

Hölder  $\kappa$ . Entonces,  $\hat{\phi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\hat{\phi}(x) := p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw$$

satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con índice de Hölder  $\kappa$ , en el caso en el que  $\kappa < 1$ . Si  $\kappa = 1$ , entonces  $\hat{\phi}$  satisface la condición de Hölder con índice  $1 - \varepsilon$  para toda  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

*Demostración.* Recordemos que la igualdad (4.16) nos dice que

$$\phi^+(x) + \phi^-(x) = p.v. \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-x} dw.$$

Así, dado que  $\phi^+, \phi^-$  satisfacen la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  con el mismo índice  $\kappa$  de  $f$  (o bien, con índice  $1 - \varepsilon$  para toda  $\varepsilon \in (0, 1)$  si  $\kappa = 1$ ) por el Teorema 4.12, su suma también satisface tal condición, con lo que concluimos el resultado.  $\square$

### 4.3. Fórmulas de Plemelj-Sokhotski en la recta real

En la sección anterior se dedujo un caso particular de las Fórmulas de Plemelj-Sokhotski. Ahora, nos enfocaremos en dar el resultado en toda la recta real. Antes de la siguiente definición, recordemos que  $\mathbb{H}^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \pm \text{Im}(z) > 0\}$ .

**Definición 4.14.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función y  $z \in \mathbb{H}^\pm$ . Definimos el valor principal de Cauchy, p.v.  $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$ , como

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

Dados  $z \in \mathbb{H}^+$  y  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos una curva  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{C}$  simple y suave, con parametrización  $\xi : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ , tal que  $\xi(a) = n$  y  $\xi(b) = -n$ , de manera que  $\hat{\mathcal{C}} := [-n, n] \cup \mathcal{C}$

sea una curva de Jordan, la cual cumple que  $z \notin \text{int}(\hat{\mathcal{C}})$  (ver Figura 4.4).

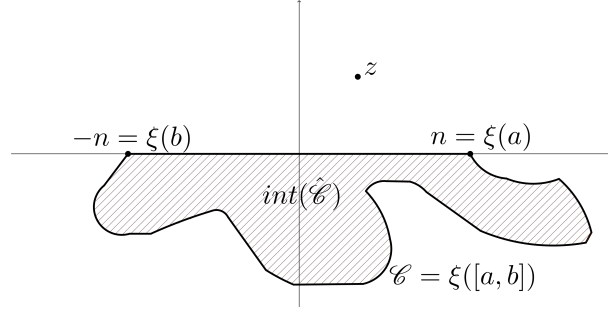


Figura 4.4: Descripción gráfica de la curva  $\hat{\mathcal{C}}$  tal que  $z \notin \text{int}(\hat{\mathcal{C}})$ .

En virtud de lo anterior,

$$\int_{\hat{\mathcal{C}}} \frac{dw}{w - z} = 0,$$

lo que implica que

$$\int_{-n}^n \frac{dt}{t - z} = - \int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w - z}.$$

Además, sin perder generalidad, si suponemos que  $\mathcal{C}$  está dada por la parametrización  $\xi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\xi(t) = ne^{-it}$ , tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dw}{w - z} = \int_0^\pi \frac{-ine^{-it} dt}{ne^{-it} - z} = \int_0^\pi \frac{dt}{\frac{z}{ine^{-it}} + i}.$$

En consecuencia,

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t - z} = i\pi. \quad (4.22)$$

Similarmente, si  $z \in \mathbb{H}^-$ , entonces

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t - z} = -i\pi. \quad (4.23)$$

Ahora, consideremos una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Supongamos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0 \quad (4.24)$$

y que existen  $k, \alpha > 0$  tales que, para toda  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t)| < \frac{k}{(|t| + 1)^\alpha}. \quad (4.25)$$

Notemos que si  $z \in \mathbb{H}^\pm$ , la integral  $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$  existe en el sentido usual debido a la condición (4.25), por lo que existe su valor principal.

**Definición 4.15.** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función y  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Definimos el valor principal de Cauchy, p.v.  $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt$ , como

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt := \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left( \int_{-n}^{t_0-\delta} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\delta}^n \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right).$$

De la anterior definición, si  $f \equiv 1$ , por simetría se tiene que

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t-t_0} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \int_{-n}^{t_0-\delta} \frac{dt}{t-t_0} + \int_{t_0+\delta}^n \frac{dt}{t-t_0} = 0. \quad (4.26)$$

Usando la relación anterior,

$$\begin{aligned} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow 0}} \left( \int_{-n}^{t_0-\delta} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\delta}^n \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+s}^n \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right) \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{t_0-s}^{t_0-\delta} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+\delta}^{t_0+s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt \right), \end{aligned}$$

donde  $s \in \mathbb{R}$  es una constante arbitraria y el segundo límite lo podemos ver como el valor



principal dado por la Definición 4.5, el cual existe si  $f$  satisface la condición de Hölder en  $[t_0 - s, t_0 + s] \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ . Además, el primer límite existe si  $f$  cumple la condición (4.25).

En virtud de estas últimas observaciones, si  $f$  es una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$  y cumple la relación (4.25), garantizamos la existencia del valor principal  $p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt$  para  $t_0 \in \mathbb{R}$ , donde

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt = \int_{-\infty}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + \int_{t_0+s}^{\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} dt + p.v. \int_{t_0-s}^{t_0+s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt. \quad (4.27)$$

Ahora, mostramos el teorema que nos da las fórmulas de Plemelj-Sokhotski en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 4.16.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$  y la condiciones (4.24) y (4.25); es decir,*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$$

y existen  $k, \alpha > 0$  tales que

$$|f(t)| < \frac{k}{(|t| + 1)^\alpha}$$

para toda  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $\phi : \mathbb{H}^\pm \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por

$$\phi(z) = p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

entonces los límites angulares  $\phi(t_0 \pm i0)$  existen para todo  $t_0 \in \mathbb{R}$  y

$$\phi(t_0 \pm i0) = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt.$$

*Demostración.* Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Notemos que, para  $z \in \mathbb{H}^\pm$  y tomando  $s \in \mathbb{R}^+$ ,

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-n}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-z} dt + \int_{t_0+s}^n \frac{f(t)}{t-z} dt \right) + \int_{t_0-s}^{t_0+s} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (4.28)$$

Como  $f$  satisface la condición de Hölder en la curva  $(t_0 - s, t_0 + s) \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$  y  $t_0$  no es un punto extremo de ésta, por las fórmulas de Plemelj-Sokhotski de la sección anterior,

$$\lim_{z \xrightarrow{nt} t_0^\pm} \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0-s}^{t_0+s} \frac{f(t)}{t-z} dt = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{t_0-s}^{t_0+s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt. \quad (4.29)$$

Además, por la condición (4.25) se tiene que  $\int_{-\infty}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-z} dt$  y  $\int_{t_0+s}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$  existen y, como funciones de  $z$ , son continuas en  $t_0$ . En particular,

$$\lim_{z \xrightarrow{nt} t_0} \int_{-\infty}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{-\infty}^{t_0-s} \frac{f(t)}{t-t_0} dt, \quad \lim_{z \xrightarrow{nt} t_0} \int_{t_0+s}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_{t_0+s}^{\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} dt.$$

Considerando el último par de igualdades y (4.29), al tomar el límite cuando  $z$  tiende a  $t_0$  no tangencialmente en la igualdad (4.28) obtenemos que

$$\lim_{z \xrightarrow{nt} t_0} p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt = \phi(t_0 \pm i0) = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-t_0} dt, \quad (4.30)$$

donde también usamos la igualdad (4.27), con lo que concluimos.  $\square$

Las igualdades dadas en la relación (4.30) son las fórmulas de Plemelj-Sokhotski en la recta real. Además, si consideramos a las funciones  $\phi^\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dadas por

$$\phi^\pm(t_0) = \lim_{z \xrightarrow{nt} t_0} p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

para  $z \in \mathbb{H}^\pm$ , tenemos que

$$\phi^+(t_0) + \phi^-(t_0) = p.v. \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} dt.$$

Ahora mostramos una versión más general del Teorema 4.16.

**Teorema 4.17.** Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$ ,

y las condiciones (4.24) y (4.25). Si  $\phi : \mathbb{H}^\pm \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por

$$\phi(z) = p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt,$$

entonces los límites angulares  $\phi(t_0 \pm i0)$  existen para toda  $t_0 \in \mathbb{R}$  y

$$\phi(t_0 \pm i0) = \pm \frac{1}{2} f(t_0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} dt. \quad (4.31)$$

Además, si  $\lambda$  es la medida de Lebesgue y  $m_f(E) := \int_E f(t) d\lambda(t)$ , la cual es una medida con signo suponiendo que  $f \in L_1$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{(a,b)} \phi(t_0 + it) - \phi(t_0 - it) dt_0 = m_f((a,b)). \quad (4.32)$$

*Demostración.* La primera parte del teorema es consecuencia directa del Teorema 4.16. Para la segunda parte, basta observar que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{(a,b)} \phi(t_0 + it) - \phi(t_0 - it) dt_0 &= \int_{(a,b)} \lim_{t \rightarrow 0} (\phi(t_0 + it) - \phi(t_0 - it)) dt_0 \\ &= \int_{(a,b)} f(t_0) dt_0 = m_f((a,b)) \end{aligned}$$

donde utilizamos el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y las fórmulas de Plemelj-Sokhotski dadas por la relación (4.30).  $\square$

Ahora, vemos las propiedades de  $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t_0)}{t-t_0} dt$

**Teorema 4.18.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$  con índice de Hölder  $\kappa$  y las condiciones (4.24) y (4.25). Entonces,*

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-t_0} dt$$

satisface la condición de Hölder con el mismo índice si  $\kappa < 1$ . Si  $\kappa = 1$ , entonces satisface la condición de Hölder con índice  $1 - \varepsilon$  para toda  $\varepsilon \in (0, 1)$

*Demostración.* Sea  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Notemos que, como  $\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [j - 1, j + 1]$ , existe  $j_0 \in \mathbb{Z}$  tal que  $t_0 \in [j_0 - 1, j_0 + 1]$ . Sean  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  (es decir, una función real infinitamente diferenciable con soporte en  $[0, 1]$ ) tal que  $h|_{[-2, 2]} = 1$  y  $h|_{\mathbb{R} \setminus (-3, 3)} = 0$ , y  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  la familia de funciones tal que  $h_j(t) := h(t - j)$ . Observemos que  $h_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ .

Dado lo anterior,

$$p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - t_0} dt = \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{(1 - h_{j_0}(t))f(t)}{t - t_0} dt + p.v. \int_{(j_0 - 3, j_0 + 3)} \frac{h_{j_0}(t)f(t)}{t - t_0} dt. \quad (4.33)$$

Sea  $F := (1 - h_{j_0})f$ . Note que  $F$  satisface la condición (4.25) dado que  $f$  la satisface y  $|1 - h_{j_0}| < 1$ . Luego, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue,

$$\frac{d}{dt_0} \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{F(t)}{t - t_0} dt = \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{F(t)}{(t - t_0)^2} dt.$$

Así, usando que  $F$  satisface la condición (4.25),

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt_0} \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{F(t)}{t - t_0} dt \right| &\leq k \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{dt}{(1 + |t|)^\alpha (t - t_0)^2} \\ &\leq k \int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{dt}{(t - t_0)^2} \equiv K_0. \end{aligned}$$

Como  $K_0$  no depende de  $t_0$ , la derivada de  $\int_{\mathbb{R} \setminus [j_0 - 2, j_0 + 2]} \frac{F(t)}{t - t_0} dt$  está acotada uniformemente, por lo que satisface la condición de Hölder con índice 1 y con índice  $\kappa$ .

Ahora,  $h_{j_0}f$  es una función que satisface la condición de Hölder con el mismo índice que  $f$ . Para demostrarlo, primero notemos que  $\|h'_j\|_\infty = \|h'\|_\infty$  para toda  $j \in \mathbb{Z}$ . Luego,

como  $f$  es acotada y  $h_{j_0}$  está acotada por 1, tenemos que

$$\begin{aligned} |h_{j_0}(t)f(t) - h_{j_0}(s)f(s)| &\leq |h_{j_0}(t)(f(t) - f(s))| + |f(s)(h_{j_0}(t) - h_{j_0}(s))| \\ &\leq c|t - s|^\kappa + \|f\|_\infty \|h'\|_\infty |t - s|, \end{aligned}$$

donde  $c$  es la constante de Hölder de  $f$ . Luego, si nos restringimos a  $[j_0 - 3, j_0 + 3]$ ,

$$|h_{j_0}(t)f(t) - h_{j_0}(s)f(s)| \leq K_1|t - s|^\kappa,$$

donde, además,  $K_1$  es uniforme respecto a  $j_0$ .

Así,  $H := h_{j_0}f$  es una función que satisface la condición de Hölder en  $[j_0 - 3, j_0 + 3]$  y que cumple que  $H(j_0 - 3) = H(j_0 + 3) = 0$ . Si consideramos una curva simple, suave y cerrada  $\mathcal{C}$  tal que  $[j_0 - 3, j_0 + 3] \times \{0\} \subseteq \mathcal{C}$ , entonces  $H$  será una función que satisface la condición de Hölder en  $\mathcal{C}$  y, por el Corolario 4.13,

$$p.v. \int_{\mathcal{C}} \frac{H(t)}{t - t_0} dt = p.v. \int_{(j_0-3, j_0+3)} \frac{H(t)}{t - t_0} dt$$

satisface la condición de Hölder con el mismo índice de  $f$  si  $\kappa < 1$ , y con índice  $1 - \varepsilon$ , para toda  $0 < \varepsilon < 1$ , si  $\kappa = 1$ .

Por ende,  $p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - t_0} dt$  satisface la misma propiedad, en virtud de la igualdad (4.33). □

Para terminar el capítulo, consideremos una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que los límites

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t)$$

existen y son iguales; denotémoslos por  $f(\infty)$ . Supongamos que existen  $k, \alpha > 0$  tales que

$$|f(t) - f(\infty)| \leq \frac{k}{(1 + |t|)^\alpha}. \quad (4.34)$$

Observemos que, si  $z \in \mathbb{H}^\pm$ ,

$$\begin{aligned} p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} dt &= p.v. \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) - f(\infty)}{t-z} dt + p.v. f(\infty) \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{t-z} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t) - f(\infty)}{t-z} dt + i\pi f(\infty), \end{aligned} \quad (4.35)$$

usando la relación (4.22) y donde la integral del lado derecho de la última igualdad existe en el sentido usual por la condición (4.34).

Ahora, supongamos que  $f$  satisface la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$  y la condición (4.34). Si

$$g(t) := f(t) - f(\infty),$$

tenemos que  $g$  es una función que satisface (4.24) y (4.25). Así, por el Teorema 4.16

$$\lim_{z \rightarrow t_0} p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t-t_0} dt = \pm \frac{1}{2} g(t_0) + p.v. \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(t)}{t-t_0} dt,$$

y, usando las relaciones (4.26), (4.35), y escribiendo la definición de  $g$  en esta última ecuación obtenemos el mismo resultado para  $f$ .

De manera similar, con uso de dicha función  $g$ , podemos ver que los teoremas 4.17 y 4.18 también son válidos para la función  $f$ , dado que nos reducimos al caso de funciones que satisfagan la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$  y las condiciones (4.24) y (4.25).

Con esto, podemos observar que hay otra manera de desarrollar la teoría de este capítulo, utilizando funciones que satisfagan la condición (4.34), teniendo límites al infinito iguales, y la condición de Hölder en  $\mathbb{R}$ .

# Bibliografía

- [1] C. M. Fulkerson. Radial limits of holomorphic functions on the ball. page 81, 2008.
- [2] F. Gakhov. *Boundary Value Problems*. Pergamoon Pressl, 1966.
- [3] G. Grabinsky. *Teoría de la medida*. las prensas de ciencias, México, 2016.
- [4] B. Khoruzenko. Subharmonic functions. page 21, 2011.
- [5] P. Koosis. *Introduction to  $H_p$  spaces*. Cambridge University Press, Trumpington Street, Cambridge, UK, second edition edition, 1998.
- [6] N. Muskhelishvili. *Singular Integral Equations*. Wolters-Noordhoff, U.R.S.S., 1st edition, 1958.
- [7] D. Yafaev. *Mathematical Scattering Theory: General theory*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1992.