



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

COMUNICACIÓN CUÁNTICA CONTRAFCTUAL  
CON FOTONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ING. MIGUEL DE JESÚS GONZÁLEZ MARTÍNEZ

TUTOR

Dr. JORGE GUSTAVO HIRSCH GANIEVICH

Ciudad Universitaria, Ciudad de México  
Febrero del 2020





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del jurado

1- Datos del alumno

Miguel de Jesús  
González  
Martínez  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
415123668

2- Datos del tutor

Dr.  
Jorge Gustavo  
Hirsch  
Ganievich

3-Datos del sinodal 1

Dr.  
Roberto  
León  
Montiel

4- Datos del sinodal 2

Dra.  
Andrea  
Valdés  
Hernández

5- Datos del sinodal 3

Mtro.  
José Luis  
Pérez  
Mazariego

6- Datos del sinodal 4

Dr.  
Pedro  
Quinto  
Su

7- Datos del trabajo escrito.

Comunicación cuántica contrafactual con fotones  
67 páginas  
2020

## Agradecimientos

Quiero agradecer personalmente el tiempo y apoyo brindado por el Dr. Hirsch durante todo el tiempo en el cual trabajé con él, desde el servicio social hasta la terminación de esta tesis. De igual manera a sus clases de Introducción a la Física Cuántica, las cuales me motivaron a adentrarme al área de Información Cuántica. Finalmente agradezco la disponibilidad y retroalimentación prestadas en la discusión de muchos otros temas que me llegaron a interesar.

Agradezco el tiempo dedicado a leer este trabajo por parte de mis sinodales, su retroalimentación me permitió darle a mi trabajo una mejor estructura y claridad.

Doy gracias a mi familia por su constante presencia al estar siempre pendiente de mí haciéndome sentir acompañado en esta nueva etapa para mí.

También agradezco mucho el apoyo del proyecto PAPIIT IN109417 Caos y azar en sistemas cuánticos y a la Beca de CONACYT, con los cuales pude dedicar gran parte de mi tiempo a trabajar con el Dr. Jorge Hirsch.

# Índice

<b>1. Resumen</b>	<b>6</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>3. Marco teórico</b>	<b>9</b>
3.1. Interferómetro de Mach-Zehnder . . . . .	9
3.2. Matriz de transferencia . . . . .	9
3.3. Medición libre de interacción . . . . .	11
3.4. Interpretación del término libre de interacción . . . . .	13
<b>4. Comunicación cuántica contrafactual</b>	<b>14</b>
4.1. Interferómetros encadenados . . . . .	15
4.1.1. Caso desbloqueado . . . . .	16
4.1.2. Caso bloqueado . . . . .	16
4.2. Interferómetros anidados y encadenados . . . . .	17
4.2.1. Caso desbloqueado . . . . .	19
4.2.2. Caso bloqueado . . . . .	20
4.3. Interferómetro tipo Michelson . . . . .	21
4.4. Diferentes definiciones de contrafactualidad . . . . .	22
4.5. Medidas de la contrafactualidad . . . . .	23
4.6. Los fotones dentro del interferómetro . . . . .	23
<b>5. Análisis de los parámetros del protocolo</b>	<b>25</b>
5.1. Cálculos teóricos sin pérdidas . . . . .	25
5.1.1. Caso bloqueado . . . . .	25
5.1.2. Caso desbloqueado . . . . .	26
5.2. Cálculos teóricos con pérdidas . . . . .	28
5.3. Caso bloqueado . . . . .	28
5.4. Caso desbloqueado . . . . .	29
5.5. Porción de fotones fugados . . . . .	31
5.5.1. Caso sin pérdidas . . . . .	31
5.5.2. Caso con pérdidas . . . . .	32
5.6. Distinguibilidad . . . . .	33
5.7. Caso sin pérdidas . . . . .	34
5.8. Caso con pérdidas . . . . .	34
<b>6. Análisis de un diseño experimental con pérdidas reales</b>	<b>36</b>
6.1. Fibra óptica . . . . .	36
6.1.1. Distinguibilidad en fibra . . . . .	37
6.1.2. Fugas y pérdidas en fibra . . . . .	39
6.2. Aire . . . . .	39
6.2.1. Distinguibilidad en aire . . . . .	40
6.2.2. Fugas y pérdidas en aire . . . . .	41

<b>7. Aplicaciones</b>	<b>43</b>
7.1. Borrador cuántico contrafactual . . . . .	43
7.2. Intercambio de enredamiento contrafactual . . . . .	44
7.3. Transporte de un qubit contrafactualmente . . . . .	44
<b>8. Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>A. Código de <i>Mathematica</i></b>	<b>46</b>
<b>Referencias</b>	<b>66</b>

## 1. Resumen

Para establecer un proceso de comunicación se requiere que la información sea transmitida físicamente por alguna perturbación de un medio material, una onda electromagnética o una partícula. Este es el paradigma actual de la comunicación. En la primera parte de este trabajo se analiza el protocolo de comunicación cuántica contrafactual propuesto por Salih, Zubairy y otros [1], con el cual se pone en cuestión este paradigma. A través de un arreglo de interferómetros tipo Mach-Zehnder se logra construir un canal de transmisión, en donde al tomar cierto límite, se demuestra que ninguna partícula atraviesa este canal, aunque si hay un flujo de información a través de éste. En este contexto, el concepto de contrafactualidad entra al momento de querer analizar si la partícula atraviesa el canal de transmisión o no, en caso de que lo hubiera hecho, no se entenderían completamente los resultados obtenidos después de analizar el arreglo.

En la segunda parte, para estudiar el protocolo en condiciones más reales, basándome en el diseño experimental de Chao Liu y otros [2], en donde utilizan el mismo arreglo de interferómetros de Mach-Zehnder mencionado, se propuso introducir las pérdidas asociadas a los elementos ópticos que podrían ser usados en dos diseños en particular, uno utilizando elementos ópticos en aire y el segundo utilizando elementos en fibra óptica. Para analizar qué tan eficaz es el protocolo para enviar mensajes se definió la distinguibilidad, parámetro con el que se puede analizar qué tan bien se está interpretando la información, si ésta es enviada de manera codificada en ceros y unos, así como la eficiencia del protocolo en términos de la señal de salida respecto a la señal de entrada.

## 2. Introducción

Para entender la comunicación cuántica contrafactual, es conveniente analizar primero qué se entiende por comunicación. La comunicación consta de cuatro elementos, el emisor quien emite un mensaje, el mensaje que contiene la información que se quiere transmitir, el canal de transmisión en donde el mensaje viaja y el receptor quien recibe el mensaje [3]. Por ejemplo, cuando dos personas están hablando en una habitación, la información que el emisor quiere transmitir al receptor viaja de manera codificada en cambios de presión a través del aire, en otras palabras, el sonido porta la información que viaja a través del aire. Si dos personas quisieran comunicarse a través del vacío, podrían hacerlo codificando la información en ondas electromagnéticas, las cuales sí pueden propagarse en el vacío. El punto a resaltar de los dos ejemplos anteriores es que en el paradigma actual de la comunicación, la información debe ser transportada por algún elemento físico (perturbaciones en un medio material como el sonido, ondas electromagnéticas o partículas) desde el emisor hasta el receptor, viajando a través de un canal de transmisión.

Parte de este trabajo es analizar cómo el protocolo de comunicación cuántica contrafactual propuesto por Salih, Zubairy y otros [1], parece desafiar este paradigma, demostrando que se puede enviar información a través de un canal de transmisión sin que en éste se propaguen partículas. El arreglo propuesto, consta de varios interferómetros tipo Mach-Zehnder anidados y encadenados, en donde se introducen partículas<sup>1</sup> de manera individual y en el límite en el que se tienen un número infinito de interferómetros, se logra demostrar que las partículas no pudieron haber atravesado el canal de transmisión, porque si lo hubieran hecho éstas no hubieran podido atravesar todo el arreglo y ser detectadas al final. Debido a esto se le da el nombre de contrafactual<sup>2</sup>. En este caso, el principio de funcionamiento para establecer la comunicación cuántica contrafactual, recae fuertemente en el uso de partículas individuales y en las mediciones libres de interacción, propuesta por primera vez por Elitzur y Vaidman [5]. Al existir varios tipos de interferómetros, se han creado varios diseños experimentales para demostrar la comunicación cuántica contrafactual, por ejemplo Pan [6] realiza un arreglo experimental usando interferómetros tipo Michelson, sin embargo lo que sigue garantizando la contrafactualidad es el uso de partículas individuales y el número de interferómetros que se utilizan.

En la segunda parte de este trabajo, se analiza el efecto que tiene usar un número finito de interferómetros, así como las pérdidas que conlleva utilizar elementos ópticos reales en el protocolo. Primero, basándose en el diseño experimental de Chao Liu y otros [2], en donde estudian el impacto que tiene introducir pérdidas por absorción utilizando interferómetros tipo Mach-Zehnder, se introdujeron las pérdidas por absorción de elementos ópticos comerciales para dos diseños en particular, uno en donde se piensa armar los interferómetros tipo Mach-

---

<sup>1</sup>A lo largo de este trabajo se estará pensando siempre en el uso de fotones, pero el protocolo en principio no se limita a usar solamente fotones.

<sup>2</sup>Aunque, autores como N. Gisin [4], argumentan que la comunicación contrafactual se puede establecer de manera clásica. En su artículo, propone un protocolo en donde dos personas se comunican por medio de una tercera, a través del envío de pelotas, de tal forma que ninguna pelota del emisor viaja hasta el receptor. El punto que el autor enfatiza es que “enviar un estado vacío” no implica enviar nada de información. En contraste con lo anterior, en este trabajo no se utilizará un vacío o ausencia de señal para enviar un mensaje.



Zehnder con elementos ópticos en aire y otro utilizando elementos ópticos para fibra óptica. Además, se introduce la distinguibilidad como parámetro para evaluar la certeza con la que se está interpretando el mensaje (codificado con ceros y unos) enviando al usar este protocolo. Se encontró que la dependencia de la distinguibilidad y la eficiencia en cuanto a la señal de entrada del protocolo, dependen fuertemente del número de interferómetros impidiendo acercarse al caso ideal en donde se puede asegurar la contrafactualidad.

### 3. Marco teórico

#### 3.1. Interferómetro de Mach-Zehnder

En la figura 1 se muestra el arreglo de este tipo de interferómetro. Los elementos esenciales son los dos divisores de haz marcados con las letras BS, el primero sirve para dividir en cierta proporción un haz de luz incidente y el segundo es para recombinarlos con alguna otra proporción. Para dirigir el haz inicialmente dividido al segundo divisor de haz, se utilizan dos espejos marcados con la letra E.

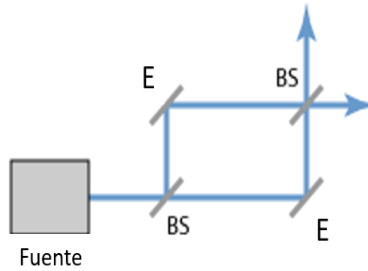


Figura 1: Interferómetro tipo Mach-Zehnder. El cuadro gris representa la fuente de luz coherente y monocromática, las líneas grises corresponden a espejos y las líneas grises etiquetadas por BS, corresponden a divisores de haz. Figura tomada de [7].

Al considerar a la entrada una fuente de luz coherente y monocromática, ésta se dividirá en el primer divisor de haz y se recombinará en el segundo divisor de haz [8]. Dependiendo de los coeficientes de transmisión y reflexión de los divisores de haz, se puede obtener a la salida del segundo divisor de haz un solo haz en alguna dirección, o alguna combinación en ambas direcciones.

Si ahora consideramos partículas individuales e indistinguibles en lugar de un haz continuo, matemáticamente observaríamos el mismo resultado, pero ahora la intensidad en el caso mencionado anteriormente será reemplazada por la densidad de probabilidad de detección de la partícula [9], a la salida del segundo divisor de haz.

#### 3.2. Matriz de transferencia

Para modelar el interferómetro de Mach-Zehnder, se pueden utilizar las matrices de transferencia. Consideremos que se utilizan partículas cuánticas (como fotones), entonces las transformaciones unitarias  $\hat{U}$  que modifican el estado cuántico inicial a uno final, serán representadas por estas matrices de transferencia con la siguiente estructura:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Para asegurar que las matrices sean unitarias, los coeficientes  $a, b \in \mathbb{C}$  deben cumplir la siguiente relación:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2)$$

Como una primera aproximación, si uno quiere simular una transformación que no sea unitaria, se modifica el resultado de la ecuación 2, y se introduce algún valor real menor que uno. Como ejemplo, si se quiere representar un divisor de haz con una proporción de 50/50, los coeficientes serán de la forma  $|a|^2 = |b|^2 = 0.5$ , por lo que se obtiene la siguiente matriz de transferencia:

$$\hat{U}_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

En este trabajo, se utilizarán diagramas utilizando interferómetros de Mach-Zehnder con espejos<sup>3</sup>, pero se están modelando con matrices de transferencia hechos con fibra óptica para simplificar los cálculos.

Para representar un cambio de fase  $\Delta\phi$ , en uno de los brazos del interferómetro, por ejemplo en el superior, la matriz de transferencia está dada por:

$$\hat{U}_{\Delta\phi} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

cuyos elementos siguen cumpliendo la relación 2, por lo que es una transformación unitaria.

Por último, para modelar un interferómetro de Mach-Zehnder con una diferencia de fase  $\Delta\phi$  en uno de sus brazos, se necesitan tres matrices de transferencia [7], colocadas según sea el orden de aplicación en el diseño, como se muestra en la figura 2.

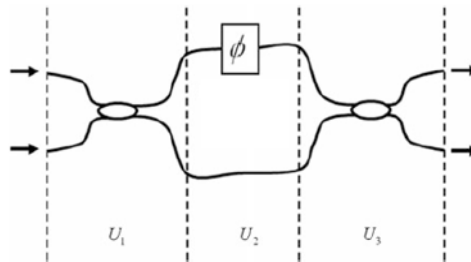


Figura 2: Esquema de un interferómetro tipo Mach-Zehnder. Cada etapa estará representada por una matriz de transferencia. Figura tomada de [7].

<sup>3</sup>Para el caso de un divisor de haz, en donde parte de la señal incidente se refleja y se transmite, la matriz correspondiente es:

$$\hat{U}_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_{espejos} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Además de esta matriz, para completar un interferómetro de Mach-Zehnder habría que agregar otra matriz que represente los reflejos de la señal en los respectivos espejos, que de aquí en adelante no se utilizará solamente para simplificar los cálculos. Entonces, en este trabajo se usarán matrices de transferencia para interferómetros hechos de fibra óptica, aunque los esquemas muestren interferómetros de Mach-Zehnder.

$$\hat{U}_{MZ} = \hat{U}_{BS}\hat{U}_{\Delta\phi}\hat{U}_{BS}. \quad (5)$$

### 3.3. Medición libre de interacción

El concepto de medición libre de interacción fue propuesto por primera vez por Elitzur y Vaidman [5], utilizando un interferómetro de Mach-Zehnder y una fuente de partículas individuales. El arreglo consiste en poder confirmar si un objeto fue colocado en uno de los brazos del interferómetro, en función de que un detector haga clic al haber introducido una partícula al interferómetro. En la figura 3, se muestra el diseño que los autores propusieron.

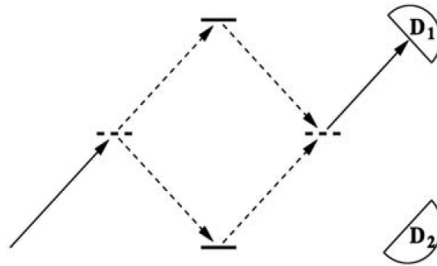


Figura 3: Fotón ingresando por la parte inferior del primer divisor de haz. Los divisores de haz están denotados por las líneas horizontales segmentadas y los espejos por las líneas horizontales continuas. A la salida del segundo divisor de haz se ubican los detectores. Figura tomada de [10].

El estado de una partícula que ingrese al arreglo puede estar representado como una combinación lineal de dos vectores ortogonales, cada uno indicando en qué dirección se está propagando en el interferómetro. Denotamos con  $|U\rangle = (1, 0)^T$  (con el superíndice indicando que es el traspuesto) cuando la partícula se propaga hacia arriba y con  $|D\rangle = (0, 1)^T$  cuando lo hace hacia abajo, tal que  $\langle U|D\rangle = 0$ . Cada divisor de haz está representado por la siguiente matriz<sup>4</sup>:

$$\hat{U}_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

De esta manera, podemos analizar el interferómetro en los siguientes dos casos. Primero, introduciendo un fotón desde la parte inferior del primer divisor de haz, como se observa en la figura 3. En este caso, el estado inicial  $|D\rangle$  evoluciona de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |F_1\rangle &= \hat{U}_{BS}\hat{U}_{BS}|D\rangle, \\ |F_1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Así mismo, los estados que representan a los detectores son:

<sup>4</sup>La matriz unitaria que se utilizará de aquí en adelante para un divisor de haz, representa un divisor de haz hecho para fibra óptica [7], ya que no se está tomando en cuenta el cambio de fase después de las reflexiones de ambos espejos. Esto simplifica los cálculos y no tiene ningún efecto observable de interés para este trabajo.

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y la probabilidad de detectar el fotón en cada detector es:

$$P(D_1) = |\langle 1|F_1\rangle|^2, \quad P(D_2) = |\langle 2|F_1\rangle|^2.$$

En este caso, el fotón que se introduce por la parte inferior del interferómetro, hace que el detector  $D_1$  haga clic con un 100 % de probabilidad, debido a la interferencia constructiva de la función de onda hacia este detector.

Para el segundo caso, se coloca un objeto dentro del interferómetro, el fotón sigue introduciéndose desde la parte inferior, como se muestra en la figura 4.

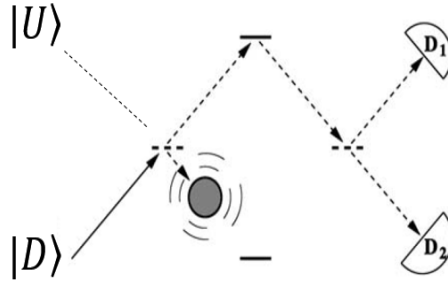


Figura 4: Fotón ingresando por la parte inferior y un objeto colocado dentro del interferómetro. Figura tomada de [10].

Ahora, después del primer divisor de haz, el estado que representa el fotón se encuentra con el objeto en la parte inferior y la matriz que representa al objeto está dada por:

$$\hat{M}_O = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, el estado final en el segundo caso es:

$$|F_2\rangle = \hat{U}_{BS}\hat{M}_O\hat{U}_{BS}|D\rangle,$$

$$|F_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, ahora ambos detectores harán clic con una probabilidad de:  $P(D_1) = P(D_2) = 0.25$ . A diferencia del caso anterior, en el cual solo el detector  $D_1$  hacía clic. El otro 50 % restante es absorbido por el objeto que es opaco.

Al hacer el análisis, existe un 25 % de probabilidad de éxito de determinar si el objeto fue colocado dentro del interferómetro, es decir, cuando el detector  $D_2$  hace clic, ya que cuando el detector  $D_1$  hace clic, podría corresponder a cualquiera de los dos casos.

Resumiendo ambos casos (y teniendo en mente que se tiene un número  $N$  de copias del mismo experimento), se tiene que en un 25 % de las veces cuando el  $D_2$  hace clic, sin haber interactuado con el objeto se sabe con certeza que el objeto está ahí, de lo contrario el segundo detector no habría sido capaz de detectar al fotón. Otro 25 % de las veces el detector  $D_1$  hará clic, en cuyo caso no se sabe con certeza si es debido a que está el objeto presente o no. Por último, el 50 % restante corresponde a la situación en que ningún detector hizo clic, debido a que cuando el fotón cruza el primer divisor de haz y toma el camino inferior, es absorbido por el objeto, no logrando llegar a ningún detector.

Es verdad que en el 50 % de los casos cuando ningún detector hace clic, se puede deducir la presencia del objeto. Sin embargo esta situación no es de interés, debido a que el fotón ha sido absorbido por el objeto, es decir, ha interactuado directamente con éste, por lo que no se considera esta situación como contrafactual. Es muy importante destacar que el mismo experimento realizado con un haz de luz clásica, no tiene esta complejidad en la interpretación de los resultados anteriormente discutidos, pero si se disminuyera la intensidad del haz hasta el punto de enviar fotones individuales, uno a la vez, es cuando aparecen las mediciones libres de interacción (en principio no hay necesidad de enviar fotones, bien podría realizarse con electrones, átomos o moléculas). Es esta última situación, cuando se envían partículas individuales al interferómetro, la que se considera como contrafactual.

Posteriormente, Elitzur y Vaidman discuten [5] cómo la probabilidad de detección del segundo detector puede hacerse más grande, también mencionan que la interpretación de la Mecánica Cuántica que están suponiendo en todo momento es la del colapso de la función de onda.

### 3.4. Interpretación del término libre de interacción

Aunque el protocolo previsto en [5] por Vaidman y Elitzur funciona, y además se propone como un método para poder localizar sistemas que en principio serían altamente sensibles<sup>5</sup> (como actualmente permite la manipulación de átomos individuales). Vaidman [10] hace un análisis más exhaustivo en cuanto al significado del término “interacción libre”. Uno de los significados más aceptados es el hecho de que no se interactúa energéticamente; a esto se debe la mención sobre el sistema altamente sensible. Sin embargo, sí se altera una propiedad del objeto mismo, que es su función de onda, ya que en el caso de haberse detectado el fotón en el segundo detector, se sabe con certeza que el objeto “con el que no se interactuó”, está en un brazo del interferómetro. Dicho de otra manera, el estado inicial del objeto, podría ser descrito como un estado en superposición entre estar en un brazo del interferómetro y no estarlo (evitando el otro brazo). Al momento de medir de manera exitosa la partícula que atravesó el interferómetro en el segundo detector, se colapsaría el estado del objeto a estar inequívocamente en un brazo del interferómetro. Visto de esta manera, el término libre de interacción, no implica libre de cualquier interacción (quizás sea muy conveniente definir qué se entiende por interacción o clasificar los tipos de interacción que dos objetos físicos pueden tener entre si).

---

<sup>5</sup>En este trabajo se considera al objeto de manera clásica y se estudia la probabilidad de detectarlo. Un tratamiento cuántico del objeto obstructor va más allá del alcance de esta tesis.

## 4. Comunicación cuántica contrafactual

Para poder explicar el concepto de contrafactualidad, comenzamos definiendo las siguientes variables:

$$\theta_M = \frac{\pi}{2M}, \quad (7)$$

$$\theta_N = \frac{\pi}{2N}, \quad (8)$$

donde  $M$  representará el número de divisores de haz correspondiente a los interferómetros de Mach-Zehnder externos, y  $N$  el número de divisores de haz correspondientes a los interferómetros internos que se considerarán. Más adelante se detallará a qué nos estamos refiriendo con interferómetros externos e internos.

Consideremos ahora interferómetros que no provoquen ningún cambio de fase. En la figura 5 se pueden observar dos canales de entrada, entonces podemos representar con el estado  $|c\rangle$  a la luz proveniente del canal inferior y con el estado  $|b\rangle$  a la luz proveniente del canal superior. Matemáticamente estos estados son

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Los divisores de haz, serán representados por matrices de la siguiente manera:

$$U_{BS} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_M) & \sin(\theta_M) \\ -\sin(\theta_M) & \cos(\theta_M) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Así, al considerar un solo interferómetro, se tiene que  $M = 2$  y el estado inicial  $|c\rangle$  (ignorando el cambio de fase por las reflexiones en los espejos que no alterarán las probabilidades finales o pensando en un interferómetro de fibra óptica), el estado final a la salida del MZI está dado por:

$$\begin{aligned} |f_c\rangle &= U_{BS}U_{BS}|c\rangle, \\ |f_c\rangle &= \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \\ -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \\ -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |f_c\rangle &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De manera equivalente, si ahora el estado inicial es  $|b\rangle$ , se obtiene el siguiente estado final:

$$|f_b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

En otras palabras, cuando se introduce luz por la parte inferior se obtiene luz en la parte superior del canal de salida y viceversa. En este caso, al tener  $M = 2$ , las proporciones de cada divisor de haz resultan ser de 50/50.

Ahora veamos que pasa con dos interferómetros, uno después del otro. En este caso  $M = 4$ , al ver el ejemplo anterior, notamos que habrá 4 divisores de haz, y habrá un producto de cuatro matrices, por lo tanto, el estado final será:

$$|f_c\rangle = (U_{BS})^4|c\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|f_b\rangle = (U_{BS})^4|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, podemos deducir que no importa el número de interferómetros que se coloquen de manera encadenada (uno tras otro), la luz siempre saldrá en el canal opuesto al de entrada independientemente del valor de  $M$ , con la misma intensidad con la que ingresó.

#### 4.1. Interferómetros encadenados

Ahora podemos comenzar a analizar el arreglo experimental con el que se pretende demostrar la comunicación contrafactual. Primero consideremos una cadena de interferómetros en serie, con un elemento extra, un dispositivo capaz de bloquear y desbloquear un brazo del interferómetro, un interruptor. En la figura 5 se muestra dicho arreglo, en el cual tenemos una línea llamada canal de transmisión que separa a las dos partes que quieren comunicarse, a las cuales desde ahora en adelante nos referiremos como Bob a la parte superior del canal de transmisión y Alice a la parte inferior. La idea es que Bob puede controlar todos los interruptores a voluntad, bloqueando o no el arreglo, mientras Alice decide mandar por cualquier canal la luz y analizar la salida en los detectores  $D_1$  y  $D_2$ , que también se muestran en la figura 5. En resumen, Alice controla el ingreso de fotones a los canales de entrada y los detectores, mientras que Bob solo puede bloquear o desbloquear el canal de transmisión.

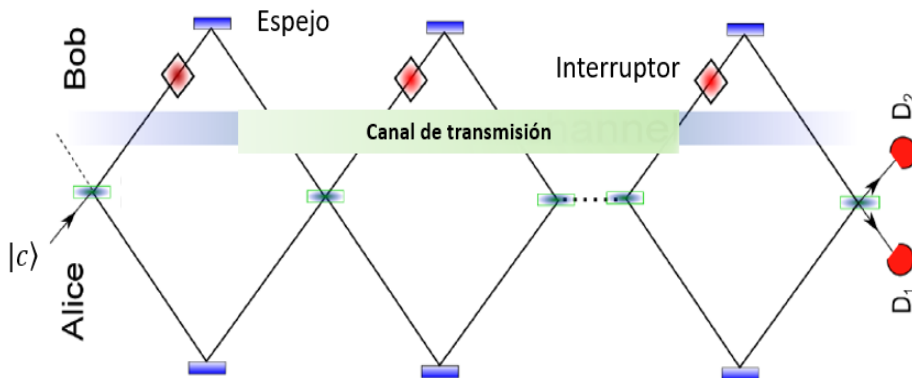


Figura 5: Interferómetros Mach-Zehnder encadenados. Figura tomada de [1].



#### 4.1.1. Caso desbloqueado

Si mandamos luz en el estado  $|c\rangle$  a través del arreglo, con un número  $M$  de divisores de haz, cuando todos los interruptores están desbloqueados, podemos calcular la intensidad que se medirá en cada detector, proyectando el estado respectivo del detector uno  $\langle D_1| = (10)$  y  $\langle D_2| = (01)$  de la siguiente manera:

$$P(D_1) \equiv |\langle 10|U_D|c\rangle|^2, \quad (12)$$

$$U_D = U_{BS}^M$$

$\Rightarrow$

$$P(D_1) = (10) \begin{pmatrix} \cos(M\theta_M) & \sin(M\theta_M) \\ -\sin(M\theta_M) & \cos(M\theta_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^2(M\theta_M)$$

$\Rightarrow$

$$P(D_1) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (13)$$

De manera análoga, se obtiene la siguiente relación para el segundo detector:

$$P(D_2) \equiv |\langle 01|U_D|c\rangle|^2 \quad (14)$$

$\Rightarrow$

$$P(D_2) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad (15)$$

Podemos observar, que para el caso desbloqueado, no importa el número de IMZ utilizados, se obtendrá el mismo resultado.

#### 4.1.2. Caso bloqueado

Para agregar el efecto del interruptor y bloquear un brazo de cada interferómetro, utilizamos la siguiente matriz de transferencia:

$$M_{SW} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Entonces, realizando el análisis con el mismo estado de entrada, se obtiene lo siguiente:

$$P(D_1) \equiv |\langle 10|U_B|c\rangle|^2, \quad (17)$$

$$U_B = U_{BS}(M_{SW}U_{BS})^{M-1}$$

$\Rightarrow$

$$P(D_1) = (10) \begin{pmatrix} \cos(\theta_M) & \sin(\theta_M) \\ -\sin(\theta_M) & \cos(\theta_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos^{M-1}(\theta_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^{2M}(\theta_M)$$

$\Rightarrow$

$$P(D_1) = \cos^{2M}\left(\frac{\pi}{2M}\right). \quad (18)$$

Para el segundo detector:

$$P(D_2) \equiv |\langle 01 | U_B | c \rangle|^2 \quad (19)$$

$\implies$

$$P(D_2) = \sin^2 \left( \frac{\pi}{2M} \right) \cos^{2M-2} \left( \frac{\pi}{2M} \right). \quad (20)$$

Vemos que en el caso bloqueado, las intensidades en cada detector dependen de  $M$ . Si colocáramos un gran número de IMZ en la cadena, es decir tomando el límite cuando  $M \rightarrow \infty$ , se obtiene lo siguiente <sup>6</sup>:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_1) = \lim_{M \rightarrow \infty} \cos^{2M} \left( \frac{\pi}{2M} \right) = 1, \quad (21)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_2) = \lim_{M \rightarrow \infty} \sin^2 \left( \frac{\pi}{2M} \right) \cos^{2M-2} \left( \frac{\pi}{2M} \right) = 0. \quad (22)$$

Así es como Bob puede comunicarse con Alice. Si Bob mantiene sus interruptores desbloqueados, solamente habrá señal en el detector  $D_2$ , y cuando bloquee sus interruptores, el detector  $D_1$  será el que reciba la señal. Hay que recordar, que estamos pensando en elementos ópticos ideales que no presentan pérdidas.

Si ahora suponemos que en vez de un haz continuo de luz, Alice manda fotones individuales, podemos decir que en el caso bloqueado “ningún fotón atraviesa el canal de transmisión”, ya que de hacerlo este habría sido absorbido desde el primer interruptor (o en cualquier otro interruptor subsecuente), esto es a lo que se refiere la literatura [1] como contrafactualidad directa. Sin embargo, cuando Bob mantiene sus interruptores desbloqueados, el detector  $D_2$  es el que medirá una señal, por lo que el fotón “pudo haber cruzado el canal de transmisión”, rompiéndose la contrafactualidad. Para asegurar la contrafactualidad entonces, será necesario anidar más interferómetros al arreglo.

## 4.2. Interferómetros anidados y encadenados

En la figura 6 se muestra el nuevo arreglo experimental de IMZ para asegurar la contrafactualidad. En este caso tenemos tres canales de entrada, de los cuales sólo estaremos considerando los dos inferiores, los correspondientes a Alice (debajo del canal de transmisión). Tenemos un tercer detector  $D_3$  a la salida de cada ciclo interno; aunque en lo todo lo que sigue, los vamos a considerar a todos como objetos completamente opacos. Todos los detectores se encuentran en el lado de Alice del canal de transmisión.

---

<sup>6</sup>La ecuación 21, es empleada en la demostración del “efecto Zenón”, y en ocasiones se emplea este nombre para describir la detección contrafactual.

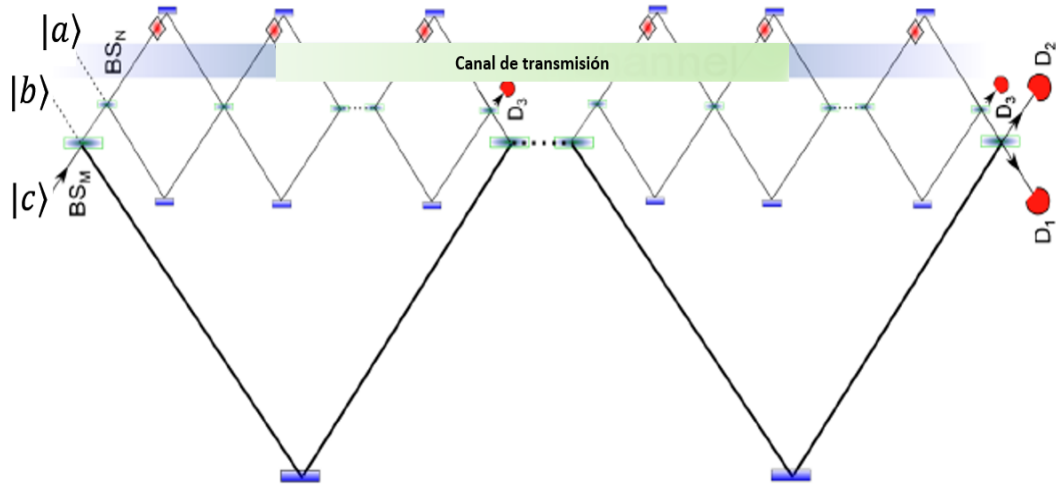


Figura 6: Interferómetros Mach-Zehnder anidados y encadenados. Figura tomada de [1].

Para este diseño, tenemos divisores de haz externos, denotados por  $BS_M$  y divisores de haz internos denotados por  $BS_N$ . Además al contar con 3 canales, las matrices de transferencia y estados ahora aumentarán una dimensión también, quedando de la siguiente manera:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$|c\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Cada uno de los estados anteriores representa el primer, segundo y tercer canal respectivamente, correspondientes al orden que tienen las entradas del interferómetro.

$$U_{BS_M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_M) & \sin(\theta_M) \\ 0 & -\sin(\theta_M) & \cos(\theta_M) \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$U_{BS_N} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_N) & \sin(\theta_N) & 0 \\ -\sin(\theta_N) & \cos(\theta_N) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$M_{SW} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

Las matrices anteriores representan cada uno de los divisores de haz externos e internos respectivamente. La última representa el interruptor de Bob cuando decide bloquear el canal de transmisión. En este caso, el estado que representa al detector  $D_1$  es  $\langle D_1| = (100)$ , al detector  $D_2$  es  $\langle D_2| = (010)$  y al detector  $D_3$  es  $\langle D_3| = (001)$ ; por lo que las probabilidades de detección están dadas por:

$$P(D_1) \equiv |\langle 001|U_{B/D}|inicial\rangle|^2, \quad (29)$$

$$P(D_2) \equiv |\langle 010|U_{B/D}|inicial\rangle|^2, \quad (30)$$

$$P(D_3) \equiv |\langle 100|U_{B/D}|inicial\rangle|^2. \quad (31)$$

Las expresiones anteriores representan la probabilidad de detección de cada uno de los detectores. El detector  $D_1$  es el que aparece al final en la parte inferior de la figura 6. El detector  $D_2$  en la parte central. El detector  $D_3$  es el que aparece al final de cada ciclo interno del arreglo de interferómetros, en cuyo caso la expresión 31 solo refleja la fracción de fotones que llega al último ciclo interno (aunque podría calcularse la fracción de fotones que llegaría a cada detector  $D_3$  después de cada ciclo interno). El subíndice  $B$  ( $D$ ) en la expresión  $U_{B/D}$ , hace referencia al caso bloqueado (desbloqueado).

Cabe mencionar que en la literatura, a la acción sucesiva de los detectores  $D_3$ , ya sean detectores o solo un elemento que bloquee, se le atribuye el término de efecto Zenón cuántico, ya que representan una sucesión de mediciones proyectivas que se hacen sobre la función de onda después de cada ciclo interno.

#### 4.2.1. Caso desbloqueado

De nuevo, el caso desbloqueado significa que Bob mantiene sus interruptores abiertos, y hay detectores  $D'_3$  (o simplemente un elemento que bloquee) a la salida de cada ciclo interno de  $BS_N$ , bloqueando esta salida al siguiente ciclo interno, por lo que la matriz de transferencia total es la siguiente:

$$U_D = U_{BS_M} \left( \left( M_{SW}(U_{BS_N})^N \right) U_{BS_M} \right)^{M-1}.$$

Utilizando esta matriz para el caso desbloqueado, se obtienen los siguientes resultados para los detectores  $D_1$  y  $D_2$

$$P(D_1) = |\langle 001|U_D|c\rangle|^2,$$

$$P(D_2) = |\langle 010|U_D|c\rangle|^2$$

$\Rightarrow$

$$P(D_1) = \cos^{2M}(\theta_M), \quad (32)$$

$$P(D_2) = \cos^{2M-2}(\theta_M)\sin^2(\theta_M). \quad (33)$$

Considerando nuevamente una cadena infinita de  $BS_M$  (en este caso no importa el número de  $BS_N$ ), se obtiene que:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_1) = 1, \quad (34)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_2) = 0. \quad (35)$$

#### 4.2.2. Caso bloqueado

Ahora, Bob bloquea sus interruptores, quedando la siguiente matriz de transferencia:

$$U_B = U_{BS_M} \left( (M_{SW} U_{BS_N})^N U_{BS_M} \right)^{M-1},$$

por lo que las detecciones en los detectores estarán dadas por:

$$P(D_1) = |\langle 001 | U_B | c \rangle|^2,$$

$$P(D_2) = |\langle 010 | U_B | c \rangle|^2.$$

Como en este caso, el resultado depende de  $N$ , primero hacemos tender  $N \rightarrow \infty$ , con lo que obtenemos que  $\theta_N \rightarrow 0$ . Con este paso intermedio, se obtiene lo siguiente:

$$P(D_1) = \cos^2(\theta_M), \quad (36)$$

$$P(D_2) = \sin^2(\theta_M). \quad (37)$$

Ahora, tomando  $M \rightarrow \infty$  obtenemos:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_1) = 0, \quad (38)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P(D_2) = 1. \quad (39)$$

De esta manera aseguramos que en el caso desbloqueado, un fotón en principio “no atraviese el canal de transmisión” (en la figura 8, se puede observar de manera pictórica que pasaría si no hubiera interferómetros anidados). En caso contrario, si los fotones atravesaran el canal de transmisión serían absorbidos por el detector  $D_3$  al final de cada ciclo.

Para el caso bloqueado se reafirma lo mencionado anteriormente, ya si los fotones atravesaran el canal de transmisión serían absorbidos por el interruptor. Sin embargo, sigue siendo la elección de Bob de bloquear o desbloquear lo que produce la detección de los fotones en los detector  $D_1$  o el  $D_2$ . Esto es lo que se conoce como comunicación cuántica contrafactual [1].

Por último, el hecho de llamarlo protocolo de comunicación es porque se está pensando en utilizar el arreglo para mandar mensajes codificados como ceros y unos. Al caso desbloqueado se le asignará más adelante la lógica cero, que corresponde al detector  $D_1$  haciendo clic y al caso bloqueado la lógica uno, cuando el detector  $D_2$  hace clic.

### 4.3. Interferómetro tipo Michelson

Como se había mencionado anteriormente, los resultados obtenidos son consecuencia principalmente del funcionamiento de un interferómetro. Debido a esto, existe otro diseño propuesto por Pan y otros [6], en el cual afirman que se obtienen los mismos resultados deducidos con anterioridad para un interferómetro tipo Mach-Zehnder, pero utilizando un interferómetro tipo Michelson. En la figura 7, se muestra su diseño experimental.

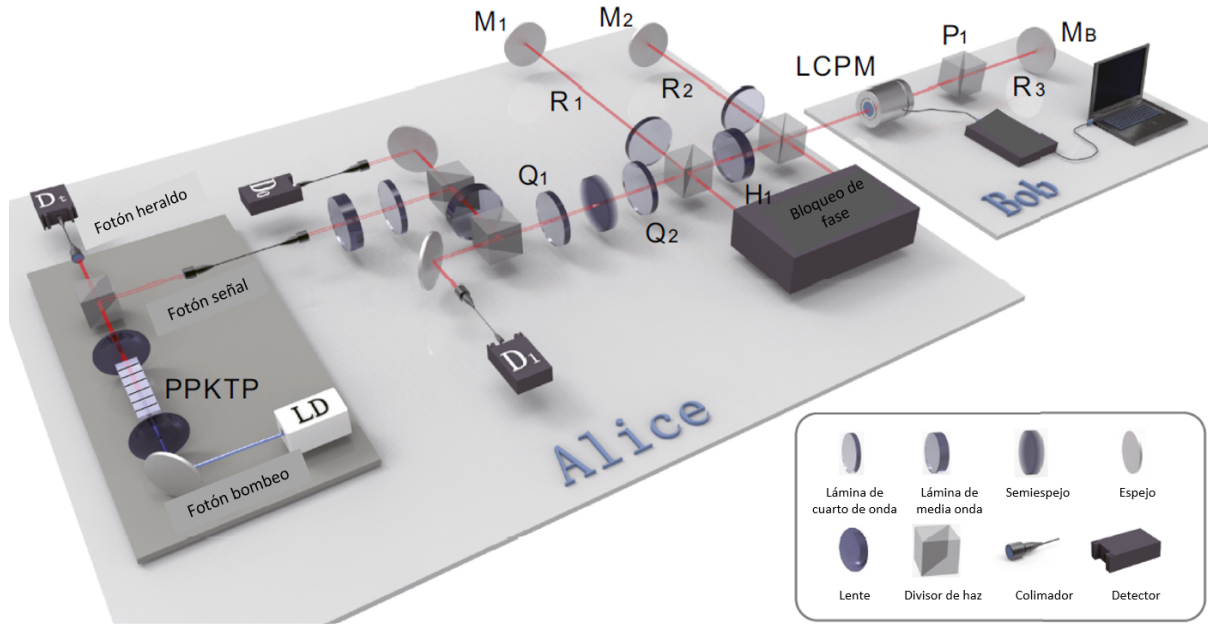


Figura 7: Interferómetro Michelson para demostrar la contrafactualidad (ver el texto para una explicación más detallada). Imagen tomada de [6].

En este caso, un fotón que ingrese al arreglo (el fotón señal generado en el cristal PPKTP después de que éste recibe el haz de bombeo proveniente del láser del cuadro blanco etiquetado por LD), rebotará  $M$  veces en el brazo donde está el espejo  $M_1$ , simulando a los divisores de haz externos. Después de  $M$  rebotes, ingresará al brazo donde se encuentra el espejo  $M_2$ , simulando los divisores de haz interno, rebotando en este brazo  $N$  veces. El número de veces que rebota el fotón (en el caso ideal, en donde no se considera ningún tipo de absorción por parte de los espejos) se puede relacionar con las variables de las ecuaciones 7 y 8. Para este arreglo, el interruptor de Bob se encuentra en el tercer brazo, donde se encuentra el espejo  $M_B$ .

Similarmente, la probabilidad de que un fotón acceda al brazo de Bob se va haciendo cada vez más pequeña. Sin embargo, Bob aún puede elegir con una certeza del 100% (exactamente en el mismo límite, cuando  $M, N$  tienden a infinito), en cual detector Alice medirá al fotón, estableciéndose así el protocolo de comunicación cuántica contrafactual. De manera más detallada, todo este proceso se controla a través de la polarización que lleva el fotón en el arreglo, así como la sincronización en cuanto al tiempo que tarda el fotón en cada brazo del arreglo y la detección del otro fotón generado en el cristal PPKTP, el heraldo. No obstante, el principio de funcionamiento es equivalente a los interferómetros Mach-Zehnder.

Una de las ventajas que ofrece el utilizar el interferómetro de Michelson, es que el canal de comunicación entre Alice y Bob, por el cual el fotón en principio nunca cruza, está muy bien definido (el brazo en donde se encuentra el espejo  $M_B$ ). Para fines prácticos, con  $M$  y  $N$  finitos, la probabilidad de que el fotón cruce este canal puede ser relativamente pequeña, limitada por la tecnología utilizada. Por consiguiente, los autores mencionan que este brazo se puede utilizar como un sensor que podría emitir una señal de intensidad muy baja, pero aún así obtendría mucha información de una muestra de interés colocada al final de este brazo.

#### 4.4. Diferentes definiciones de contrafactualidad

En la literatura, el concepto de contrafactualidad no es exclusivo de este tipo de arreglos, en el contexto de computación cuántica en particular F. Kong y otros [11], le dan un significado diferente<sup>7</sup>. Sin embargo, aún en protocolos de comunicación cuántica hay más de una definición de contrafactualidad, por ejemplo la que utilizan I.A. Calafell y otros [12]. En esta referencia, el protocolo solamente se basa en colocar interferómetros Mach-Zehnder encadenados, basándose en el diseño propuesto por D. Arvidsson-Shukur y C. Barnes [13]. En el caso de ellos, sus cálculos son matemáticamente equivalentes a los mostrados en la sección 4.1. Su definición de contrafactualidad la asocian con el hecho de que los fotones enviados por Alice viajan hacia Bob, pero la información viaja en dirección contraria, de Bob a Alice. En la referencia [13], argumentan que desde la perspectiva de Alice, se ha establecido una comunicación cuántica contrafactual libre de trazas débiles, que demuestran a detalle. También agregan que su protocolo (figura 8) no intenta mostrar que ninguna partícula atraviesa el canal de transmisión, mas bien, su protocolo es contrafactual en el sentido de que el mensaje va en dirección contraria a la propagación de las partículas, sin que las partículas dejen una traza débil de Bob hacia Alice. En contraste a la noción de contrafactualidad detallada con el arreglo de interferómetros anidados y encadenados adoptada en este trabajo.

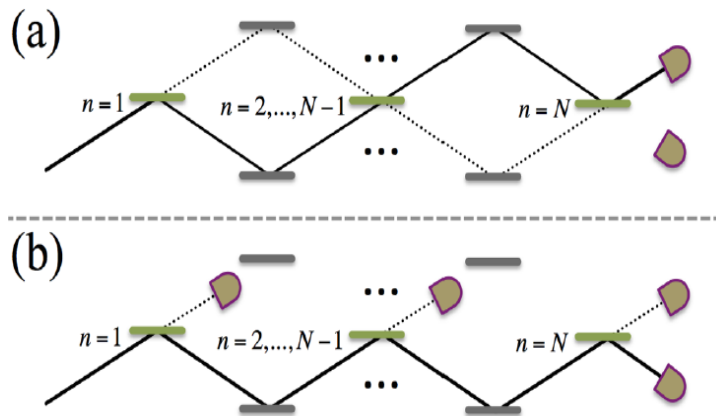
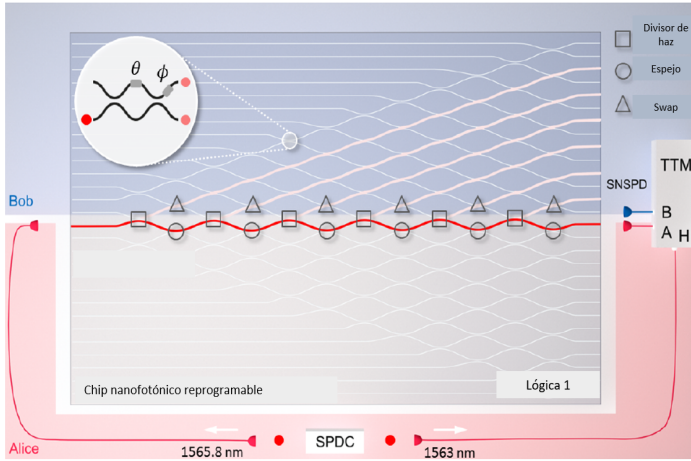


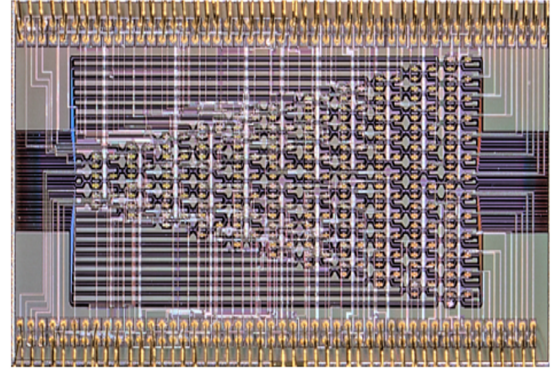
Figura 8: Protocolo de comunicación cuántica contrafactual libre de trazas débiles. En (a) se muestra la lógica cero, en donde no se obstaculizan los interferómetros. En (b) se muestra la lógica uno, en donde se obstaculiza cada uno de los divisores de haz. Todos los detectores superiores están en el laboratorio de Bob y el inferior en el de Alice. El punto importante es que para la lógica cero, utilizando el formalismo de mediciones débiles y trazas débiles [14], ninguna partícula deja una traza que implique que haya viajado desde Bob hacia Alice. Figura tomada de [13].

<sup>7</sup>En este contexto, para ejecutar un algoritmo cuántico, representado en forma de un circuito, cierta cantidad de qubits deben de ingresar a éste para que se ejecute el algoritmo, después de haber sido modificados, al medirlos se obtiene la información que produce el algoritmo. La contrafactualidad en este caso significa el algoritmo no se ejecuta, pero aún así se obtiene la información final que produce.

Lo interesante de este último artículo, es que logran implementar en un chip fotónico reprogramable, una cadena de seis interferómetros tipo Mach-Zehnder, utilizando ochenta y ocho interferómetros por razones experimentales, como el control de fase, etc. En la figura 9 se muestra su arreglo experimental.



(a) Esquema experimental para la lógica uno. Figura tomada de [12].



(b) Vista real del chip nanofotónico con dimensiones de  $4.9\text{ mm} \times 2.4\text{ mm}$ . Figura tomada de [12].

Figura 9: (a) Esquema experimental propuesto por I. Alonso Calafell y otros [12], para la implementación de un protocolo de comunicación cuántica contrafactual bajo la segunda definición de contrafactualidad mencionada en la sección 4.4. En ésta se muestran veintiséis guías de onda interconectadas por medio de ochenta y ocho interferómetros Mach-Zehnder, de los cuales algunos funcionan como compuertas de intercambio y estabilizadores de fase. Solamente seis de estos interferómetros funcionan como divisores de haz para implementar el protocolo correspondiente a la figura 8. (b) Vista real del chip nanofotónico utilizado.

## 4.5. Medidas de la contrafactualidad

En la referencia [15], D. Arvisson-Shukur y otros, se proponen evaluar la contrafactualidad de los protocolos mencionados anteriormente (el de interferómetros anidados y encadenados del presente trabajo y el de interferómetros solamente encadenados), utilizando la información de Fisher y la información mutua de Shannon. En su artículo, ellos concluyen que el segundo protocolo bajo su propia definición de contrafactualidad (en la que la información viaja en dirección contraria a la propagación de las partículas) en realidad lo es, mientras que el diseño con interferómetros anidados y encadenados no cumple con su propia definición de contrafactualidad (que ninguna partícula atraviese el canal de transmisión) utilizando elementos ópticos reales, solamente podría ser contrafactual en el caso ideal.

## 4.6. Los fotones dentro del interferómetro

Hay que tener claro, que el concepto de contrafactualidad cuántica surge de suponer que los fotones dentro del arreglo no podrían tomar un cierto camino, es decir, no cruzan el canal de transmisión de lo contrario serían absorbidos por alguno de los detectores  $D'_3$  que siguen en el lado de Alice, o en uno de los interruptores de Bob. Pero el concepto es un poco ambiguo en el sentido de que estaríamos asignando una trayectoria a los fotones en el arreglo [16], cuestionable desde el punto de vista cuántico. Sin embargo, sigue siendo necesario que existan los brazos de los interferómetros en donde están colocados los interruptores de Bob, pasen o no los fotones o



en su defecto, la función de onda, por el canal de transmisión.

De esta manera, la contrafactualidad cuántica es un nuevo concepto que puede llevar a distintas interpretaciones, según se quiera pensar o no en trayectorias seguidas por los fotones dentro de un interferómetro. En particular, Vaidman ha intentado analizar la contrafactualidad de su diseño, proponiendo el formalismo de dos vectores de estado. En este formalismo hay que tomar en cuenta tanto la función de onda que evoluciona desde el pasado hacia el presente, como la del futuro hacia el presente, para describir completamente al sistema en cuestión. Para este caso particular se propone el analizar la función de onda de una partícula dentro del interferómetro avanzando desde la fuente hasta el detector y del detector hasta la fuente, que en general no son equivalentes [17].

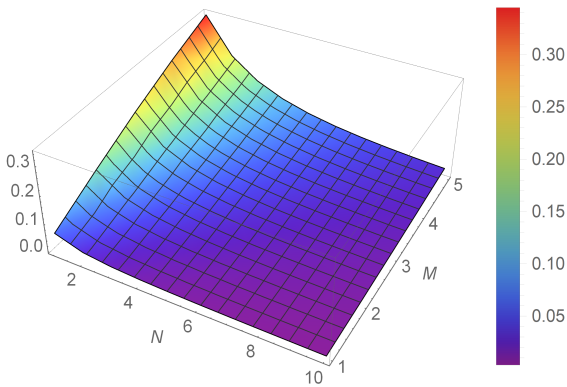
## 5. Análisis de los parámetros del protocolo

### 5.1. Cálculos teóricos sin pérdidas

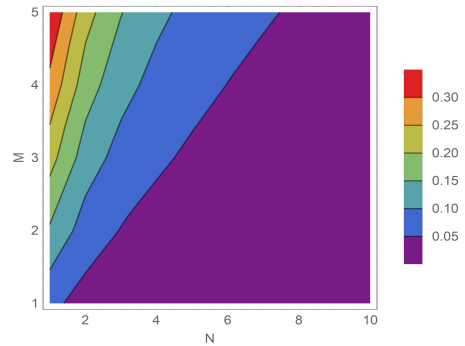
#### 5.1.1. Caso bloqueado

Para analizar con más detalles el comportamiento de los casos bloqueado y desbloqueado, se muestran a continuación una serie de gráficas, para casos particulares de  $M$  y  $N$ . En la figura 10 se muestra la probabilidad  $P(D_1)$  para el caso de  $1 \leq M \leq 5$  y  $1 \leq N \leq 10$ .

Es conveniente recordar que en el caso bloqueado cuando  $M$  y  $N$  tienden a infinito, implica que  $P(D_1)$  tiende a cero y  $P(D_2)$  tiende a uno.



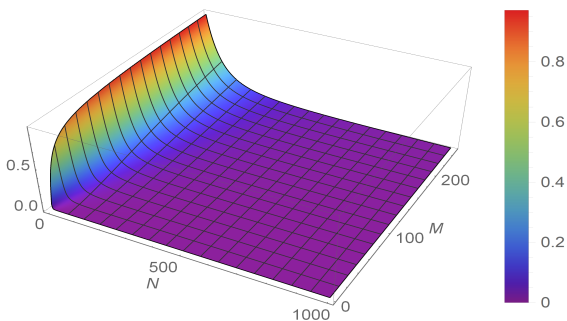
(a) Probabilidad del detector uno de hacer clic, en función de  $1 \leq M \leq 5$  y  $1 \leq N \leq 10$ , para el caso bloqueado.



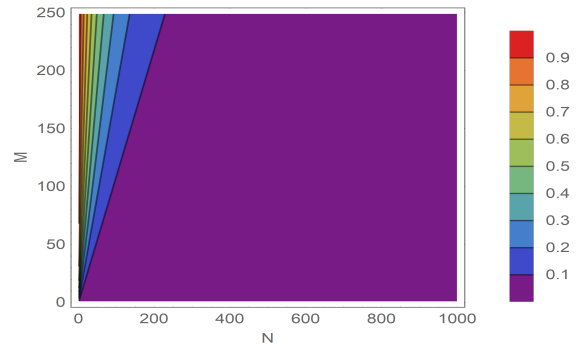
(b) Curva de nivel de la probabilidad del detector uno de hacer clic, en función de  $1 \leq M \leq 5$  y  $1 \leq N \leq 10$ , para el caso bloqueado.

Figura 10: Gráficas de la probabilidad  $P(D_1)$  en función de  $M$  y  $N$ .

Para el caso finito anterior, se observa en la figura 10 que para que en el caso bloqueado (lógica 1) hay que elegir  $M, N$  de tal manera de permanecer en la zona púrpura para acercarse a valores más cercanos a cero. En la figura 11, se considera ahora un número más elevado con  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ .



(a) Probabilidad del detector uno de hacer clic, en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , para el caso bloqueado.



(b) Curva de nivel de la probabilidad del detector uno de hacer clic, en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , para el caso bloqueado.

Figura 11: Gráficas de la  $P(D_1)$  en el caso bloqueado en función  $M$  y  $N$ .

En la figura 11 se observa que entre mayor sea el par de números  $M, N$  que se elijan, mejor se aproximará el valor de  $P(D_1)$  a cero. En la figura 12, se muestra la probabilidad  $P(D_2)$ , para los mismos valores de  $M$  y  $N$ .

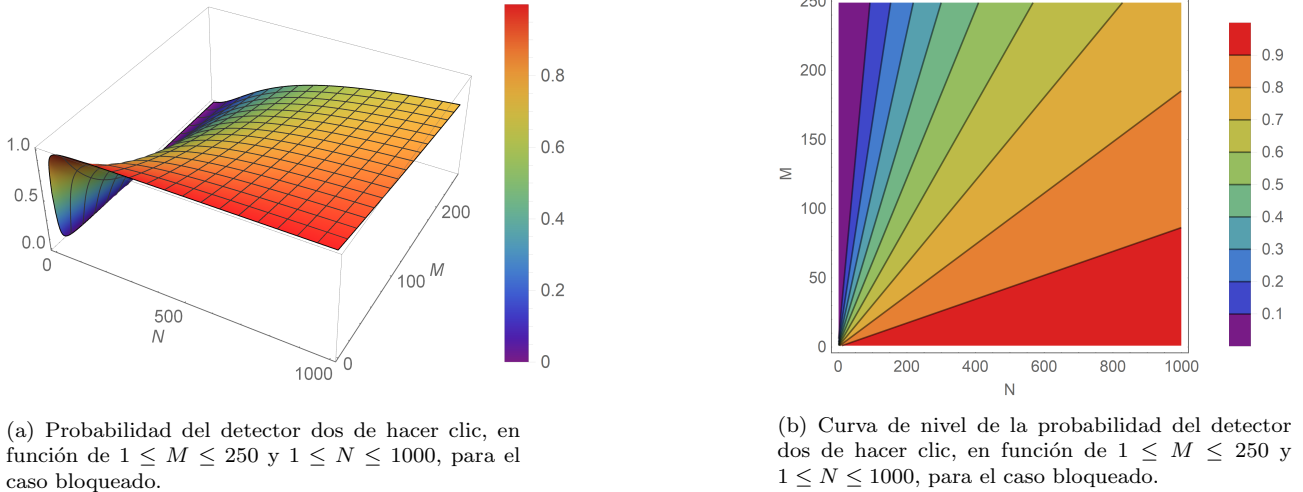


Figura 12: Gráficas de la  $P(D_2)$  en el caso bloqueado en función de  $M$  y  $N$ .

Para el detector  $D_2$  es el caso contrario, para el caso bloqueado, entre mayor sea  $N$ , mejor se aproxima el valor a uno, con apenas elegir un valor superior a dos en  $M$ .

Es importante destacar que para el caso finito de  $M$  y  $N$ , la suma  $P(D_1) + P(D_2) < 1$ , debido a que parte de la intensidad se va a los detectores  $D'_3$ , los cuales se encuentran en la salida de cada ciclo interno (o en su defecto, simplemente obstruidores).

### 5.1.2. Caso desbloqueado

De nuevo, es conveniente recordar que para esta lógica se tiene que, en el límite de  $M, N \rightarrow \infty$  implica que  $P(D_1) \rightarrow 1$  y  $P(D_2) \rightarrow 0$ .

En la figura 13 se muestra la probabilidad  $P(D_1)$  para el caso de  $1 \leq M \leq 5$  y  $1 \leq N \leq 10$ .

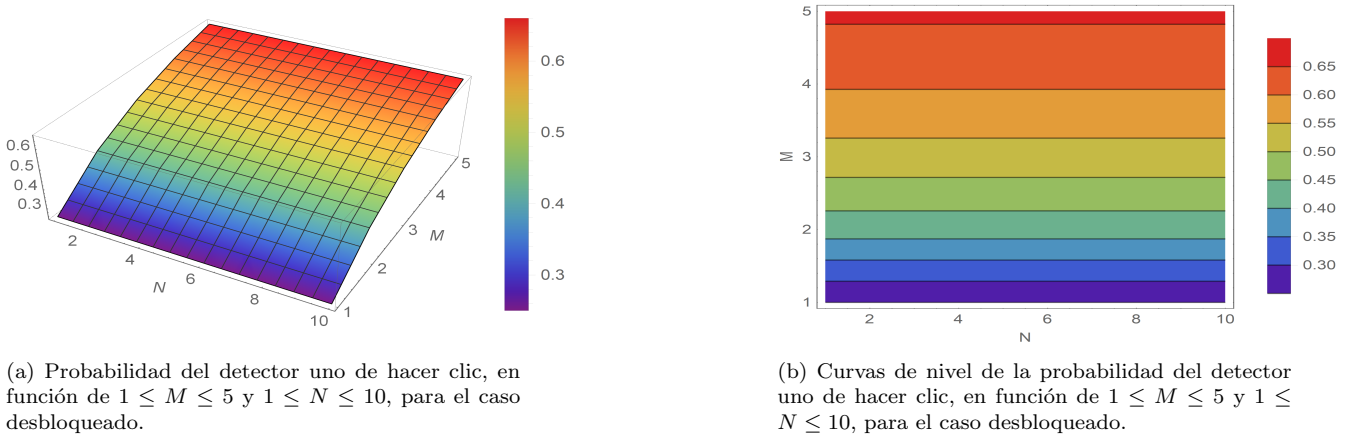


Figura 13: Gráficas de la probabilidad  $P(D_1)$  en función de  $M$  y  $N$  para el caso desbloqueado.

Como se mostró con anterioridad para el caso desbloqueado, las probabilidades de ambos detectores no depende del número de  $N$ . A continuación se muestra la  $P(D_1)$  como función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$  (figura 14). Para este caso, el elegir  $M$  cada vez más grande, aproxima mejor a que la intensidad en el detector  $D_1$  tienda a uno. Eligiendo valores de  $M$  aproximadamente por encima de veinticinco, se obtiene una probabilidad en el detector uno mayor a 0.9.

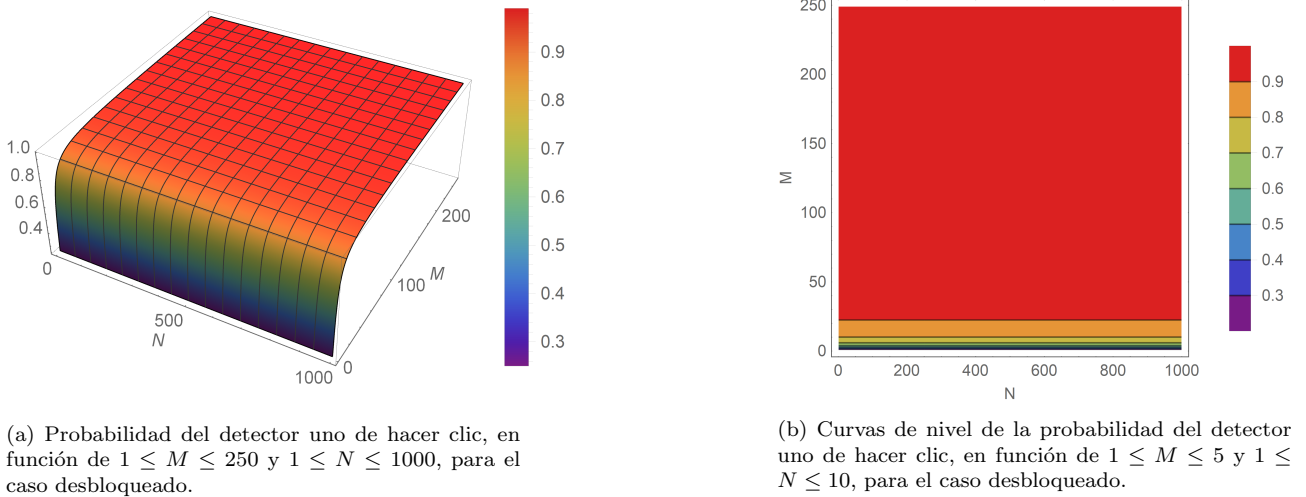


Figura 14: Gráficas de la probabilidad  $P(D_1)$  en función de  $M$  y  $N$  para el caso desbloqueado.

En las figura 15, se muestra la probabilidad del detector  $D_2$ , así como su curva de nivel. Como era de esperarse el comportamiento es opuesto al del detector  $D_1$ .

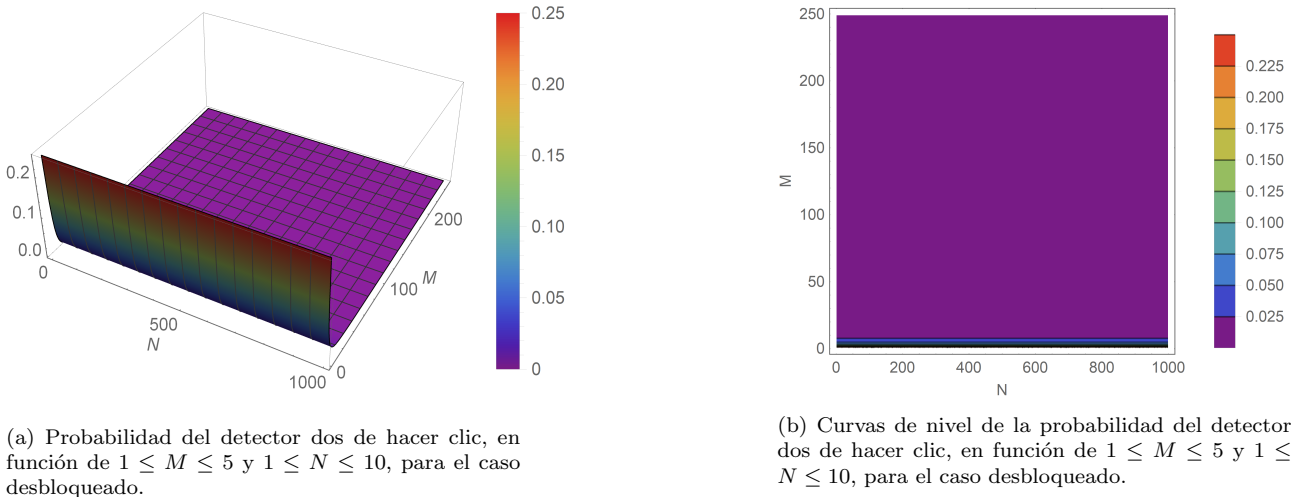


Figura 15: Gráficas de la probabilidad  $P(D_2)$  en función de  $M$  y  $N$  para el caso desbloqueado.

En ambos casos, conviene elegir valores grandes de  $M, N$  para aproximar de mejor manera a  $P(D_1)$  a uno y  $P(D_2)$  a cero.

Es muy importante resaltar que se necesitan considerar los dos pares de casos simultáneamente, los detectores uno y dos para las lógicas cero y uno. Es decir, hay que elegir ciertos  $M$

y  $N$  con los cuales se obtengan valores para el detector  $D_1$  cercanos a uno para la lógica cero, y al mismo tiempo con los mismos números de  $M$  y  $N$  elegidos, se logren obtener valores para el detector  $D_2$  cercanos a uno para la lógica uno. Todo esto con el fin de que los resultados del caso finito se asemejen lo más que se pueda al caso ideal, en donde se toma el límite de  $M$  y  $N$  tendiendo a infinito.

## 5.2. Cálculos teóricos con pérdidas

Ahora se realizará el análisis considerando pérdidas, basado en la forma en que C. Liu y otros [2] las modelan. Estas pérdidas son introducidas como primera aproximación, como elementos que absorben una fracción de la intensidad de la luz incidente, después de cada brazo superior, medio e inferior del diseño, como se muestra en la figura 16, con una pequeña línea quebrada posterior a cada divisor de haz.

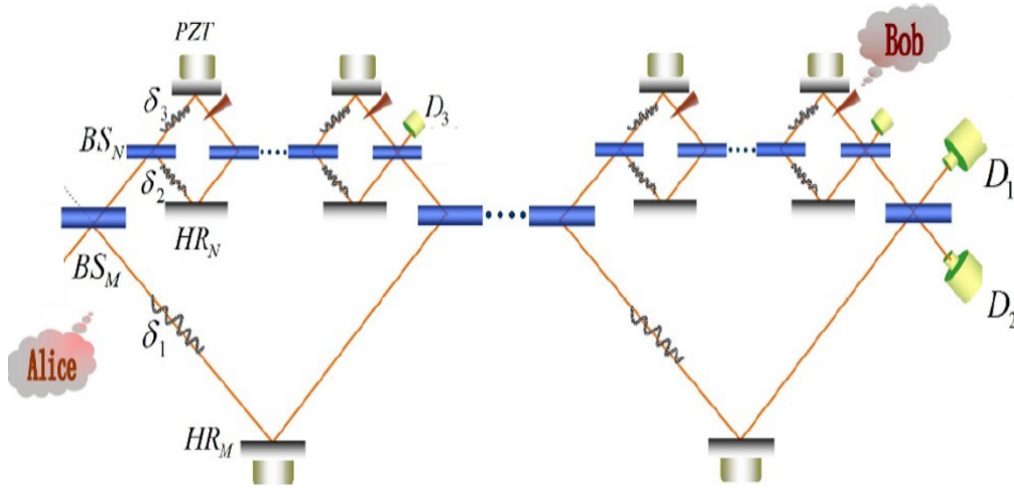


Figura 16: Propuesta experimental de la referencia [2], en donde se simulan las pérdidas por absorción al inicio de cada canal de los BS con pequeñas líneas curvadas, cuyo valor está denotado por  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$ , para la parte inferior, intermedia y superior del diseño experimental, respectivamente. Figura tomada de [2].

En este caso habrá dos matrices de transferencia (no unitarias) que representan a estas pérdidas, las del ciclo interno  $\Gamma_n$  y las del ciclo externo  $\Gamma_m$ .

$$\Gamma_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{(1-\delta_2)^N} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\delta_1} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \sqrt{(1-\delta_3)^N} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\delta_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

## 5.3. Caso bloqueado

En este caso, al haber introducido las pérdidas, el número de BS utilizados cambia de manera considerable las gráficas de ambas probabilidades. Conviene recordar que en el caso límite

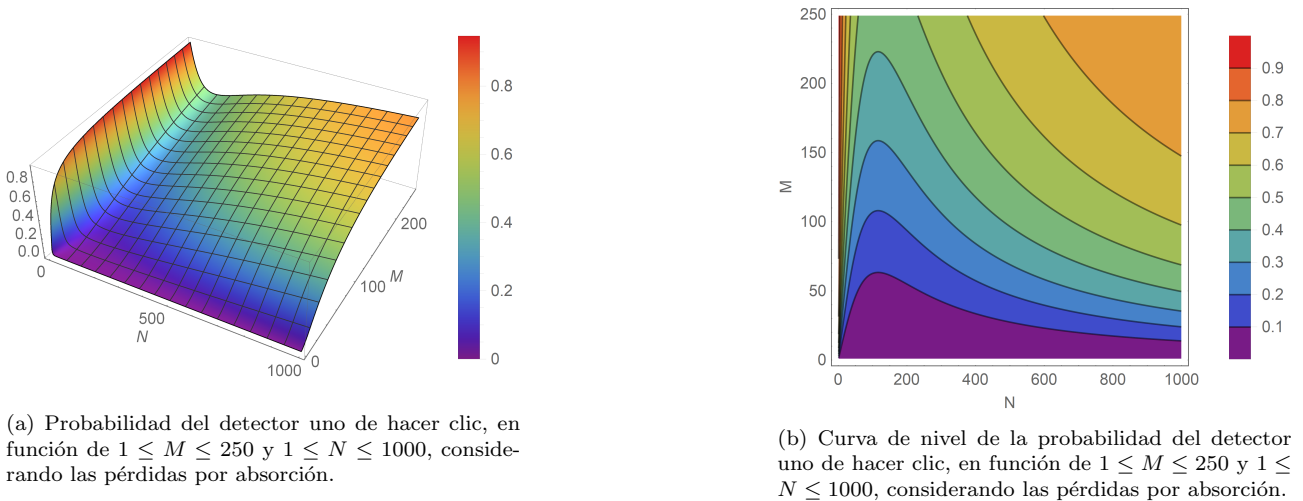


Figura 17: Probabilidad del detector uno en función de  $M$  y  $N$  con pérdidas para el caso bloqueado.

sin pérdidas para esta lógica,  $P(D_1) \rightarrow 0$  y  $P(D_2) \rightarrow 1$ .

En la figura 17, se muestra  $P(D_1)$  y sus curvas de nivel. Para este caso y todos los demás a continuación, se tomaron los valores<sup>8</sup> de  $\delta_1 = 0.0001$ ,  $\delta_2 = 0.9\delta_1$  y  $\delta_3 = 0.9\delta_1$ , para valores de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ .

En la figura 17b, el efecto de las pérdidas favorece que  $P(D_1)$  tienda a cero, para números  $M, N$  más bajos respecto a la figura 11. El hecho de que la probabilidad para este detector aumente, incrementando  $M$ , se puede atribuir al hecho de que las pérdidas tienen otro efecto sobre el arreglo, desbalancean los canales, lo que produce que no existan las mismas interferencias comparadas al caso ideal. En la figura 18b, se muestra el resultado para la probabilidad del segundo detector  $P(D_2)$ , utilizando los mismos parámetros.

Considerando ambos detectores en los casos bloqueados y desbloqueados, debido a las pérdidas, se puede lograr una “mejor detección” para valores muy bajos de  $M, N$  respecto al caso sin pérdidas. En este caso, la probabilidad del detector dos es el que restringe más el intervalo de valores a tomar para ambos detectores, aproximadamente se lograría considerar ambos con valores de  $N$  entre cincuenta y cien, con valores de  $M$  por debajo de diez. Sin embargo, falta considerar la fracción de la intensidad de luz final que se obtendría en los detectores, ya que se espera exista una disminución considerable en este aspecto, respecto al caso sin pérdidas.

## 5.4. Caso desbloqueado

De la misma manera, ahora se analizan las pérdidas para el caso desbloqueado, con los mismos parámetros utilizados con anterioridad. En la figura 19, se muestra la probabilidad de  $P(D_1)$ .

<sup>8</sup>Se tomaron estos valores para comparar con los de la referencia [2], ya que lo hacen de manera experimental y reportan estos valores.

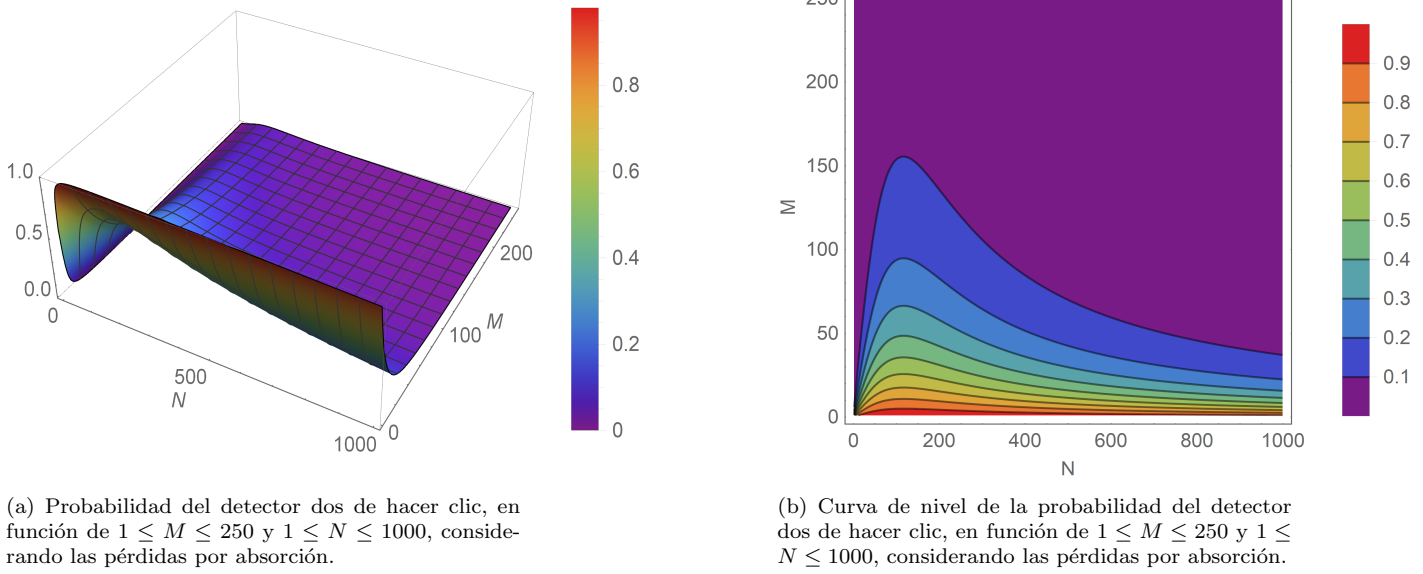


Figura 18: Probabilidad del detector dos en función de  $M$  y  $N$  con pérdidas para el caso bloqueado.

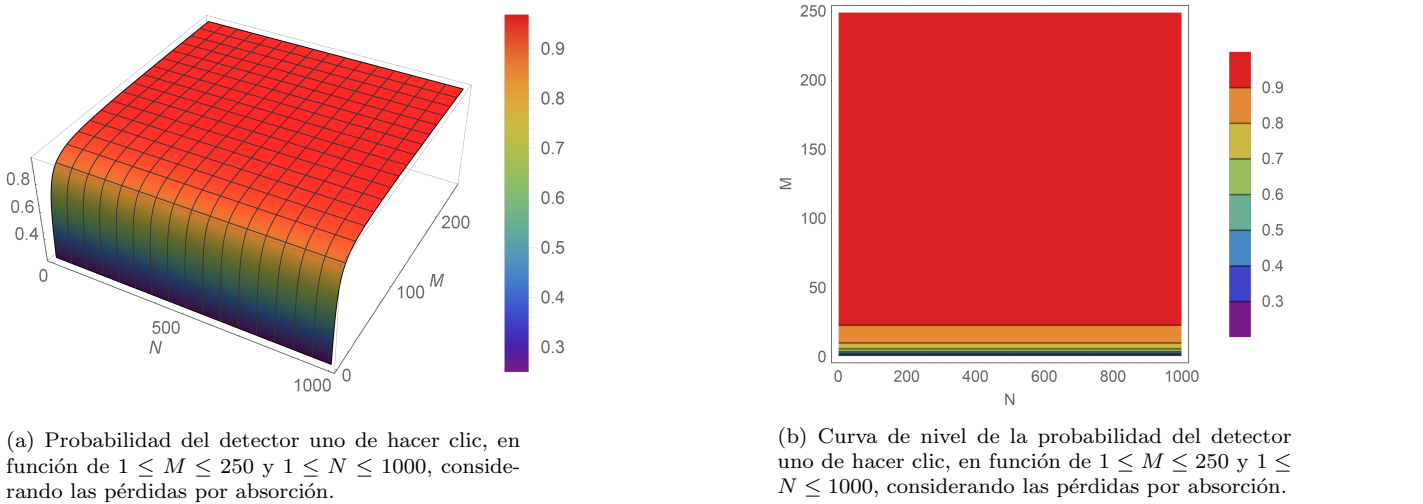


Figura 19: Probabilidad del detector uno en función de  $M$  y  $N$  con pérdidas para el caso desbloqueado.

En este caso, al haber introducido las pérdidas, ya no resulta conveniente el elegir solamente números grandes de  $M, N$ , ya que para el caso bloqueado, en particular el detector dos, hay una región definida (zona roja) en donde se aproxima mejor al valor uno, pero en el caso desbloqueado, se necesita un número mayor de  $M, N$  para lograr que ambas probabilidades de los detectores se aproximen a sus valores ideales correspondientes.

Por lo tanto, a partir de considerar esta forma de modelar las pérdidas, se tendría que tomar una decisión en cuanto a cuál lógica darle mayor importancia, si a la bloqueada (lógica uno) o desbloqueada (lógica cero), porque para acercarse al caso ideal ya no es conveniente tomar valores de  $M$  y  $N$  relativamente grandes. Se podría considerar algún otro factor para decidir cuál lógica se aproximaría mejor a los valores ideales. Por ejemplo, al momento de codificar un mensaje en código binario, podría hacerse un análisis del mensaje para saber qué tipo de bit se

enviarían más, si ceros o unos.

En la figura 20, se muestra la probabilidad del detector dos, para el caso desbloqueado con pérdidas.

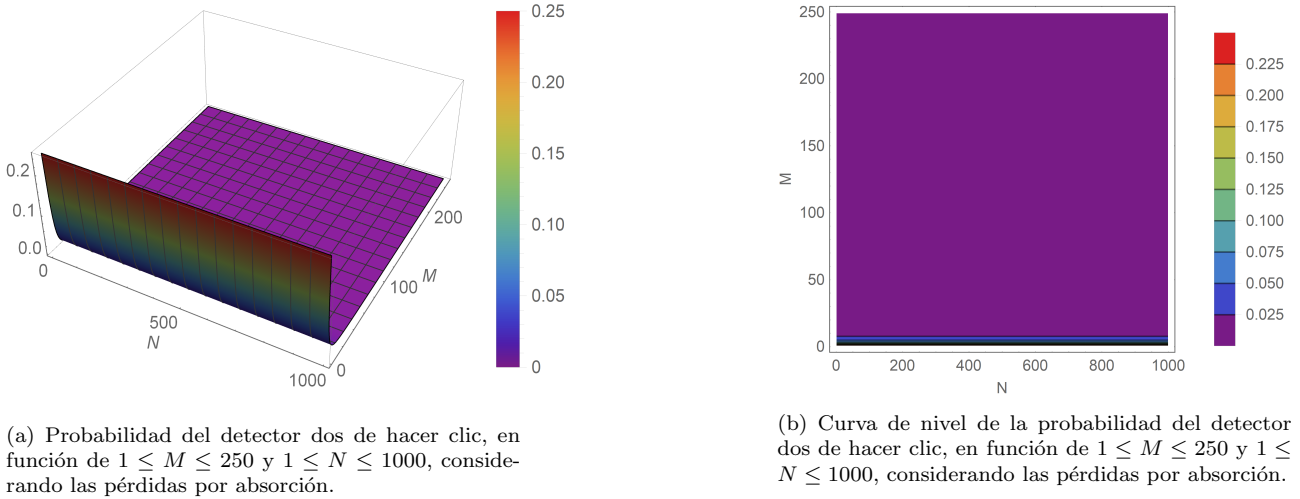


Figura 20: Probabilidad del detector dos en función de  $M$  y  $N$  con pérdidas para el caso desbloqueado.

De nuevo, no importa mucho el valor de  $N$ , y aunque para valores aproximadamente mayores a veinticinco para ambos detectores se obtendría un muy buen resultado, estos valores se contraponen para el caso bloqueado.

Por lo tanto, al introducir solamente este tipo de pérdidas, el intentar obtener los mejores valores para el caso bloqueado y desbloqueado, comienza a ser más difícil.

## 5.5. Porción de fotones fugados

Antes de analizar la eficiencia del envío de un mensaje por parte de Bob a Alice, es necesario cuantificar los fotones que se fugan después de cada ciclo interno, que podrían ser medidos con todos los detectores denominados  $D_3$ . En este caso, cuando no hay pérdidas, basta simplemente calcular la siguiente cantidad:

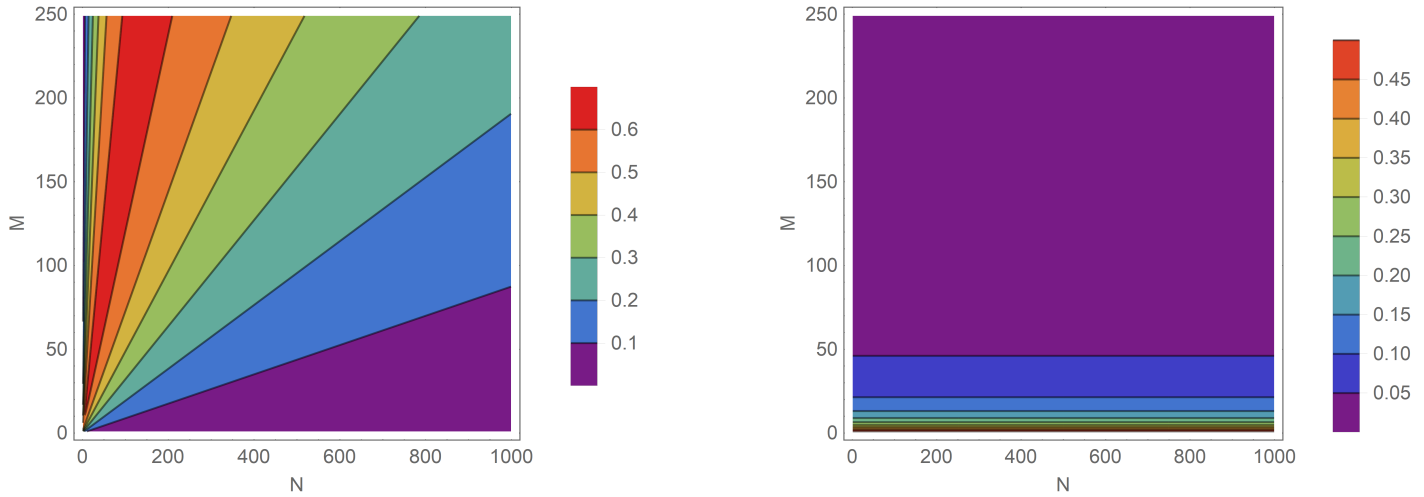
$$P(D_3) = 1 - P(D_1) - P(D_2). \quad (42)$$

Con la ecuación 42 se calcula el total de fotones que se escapan en todos los detectores  $D_3$  (o se bloquean) al final de todo el arreglo, para cada  $M$  y  $N$  en particular que se esté considerando.

### 5.5.1. Caso sin pérdidas

Como se observa en la figura 21a, dado que los detectores  $D_3$  están al final de cada ciclo interno, el número de fotones que se pierden crece lentamente con el aumento de  $N$  y aumenta rápidamente con el aumento de  $M$ .





(a) Fuga de fotones en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , sin pérdidas en la lógica 1.

(b) Fuga de fotones en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , sin pérdidas en la lógica 0.

Figura 21: Fuga de fotones en los detectores  $D'_3$  en función de  $M$  y  $N$  para ambas lógicas sin pérdidas.

Entonces, para la lógica 1, se logra un número menor de fotones fugados, tomando valores de  $M$  mucho más grandes que  $N$  o tomando valores de  $N$  mayores que  $M$ . Es decir, se desea evitar la zona roja, en donde la porción de fotones fugados es del 60%. Por otro lado, en la figura 21b, se muestra la porción de fotones fugados para la lógica 0. En este caso se logra un valor por debajo del 10%, tomando valores superiores a  $M = 25$ , sin importar el valor de  $N$ .

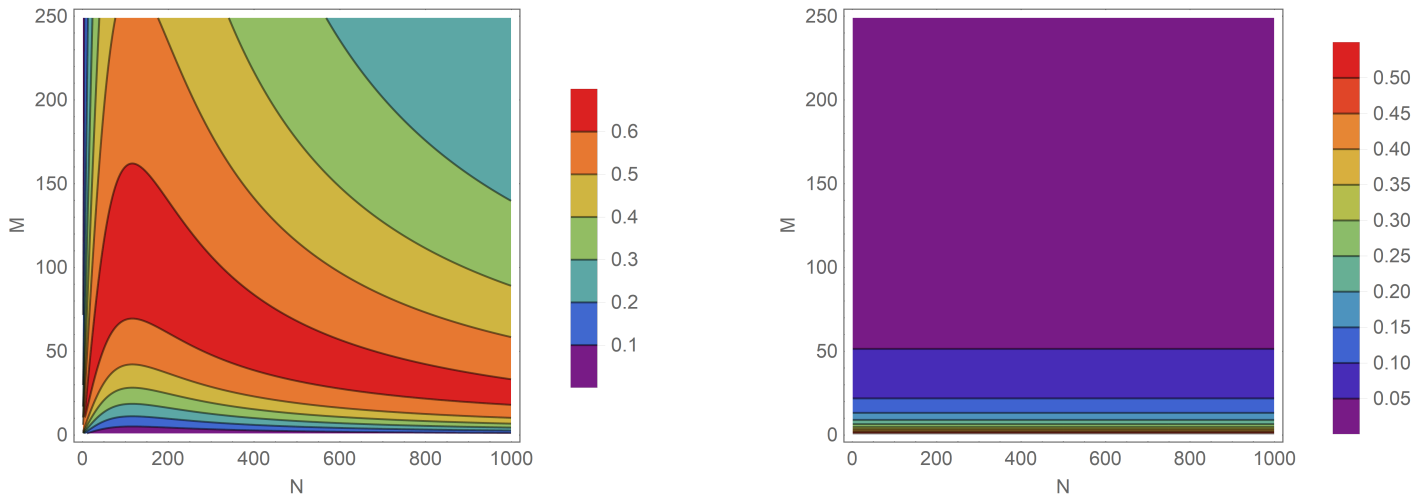
De esta manera, al tomar un valor de  $M$  mayor a veinticinco y  $N$  mayor a ciento cincuenta, se estarían cubriendo un número por debajo del 20% de fotones fugados, para ambas lógicas.

### 5.5.2. Caso con pérdidas

Al considerar las pérdidas, en la figura 22a se muestra como varía la cantidad de fotones fugados del sistema para los mismos valores de  $M$  y  $N$ , usando los mismos valores anteriores de  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$ . Es muy importante destacar que las fracciones que se muestran a continuación corresponden tanto a los fotones fugados, como a los fotones absorbidos, considerados como las pérdidas.

Ahora, analizando la figura 22a en la lógica 1, la zona roja se extiende en ambas direcciones, por lo que es más complicado elegir una zona en donde las fugas sean mínimas, prácticamente se tendrían que elegir valores de  $M$  o  $N$  muy altos, sin que la otra aumente. Para la lógica 0, no cambió mucho la porción de fotones fugados habiendo considerado las pérdidas, por lo que se puede seguir considerando tomar valores superiores a  $M = 25$  para lograr pérdidas menores al 9%.

De esta manera, al observar las figuras 22a y 22b, para lograr que la porción de fotones fugados sea baja para ambas lógicas, la zona ideal considerando las pérdidas, se encuentra entre valores de  $1 \leq M \leq 40$  y  $1 \leq N \leq 50$ .



(a) Comportamiento de la fuga de fotones en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , considerando las pérdidas en la lógica 1.

(b) Comportamiento de la fuga de fotones en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , considerando las pérdidas en la lógica 0.

Figura 22: Fuga de fotones en los detectores  $D_3$  en función de  $M$  y  $N$  para ambas lógicas con pérdidas.

## 5.6. Distinguibilidad

Para analizar la eficiencia del protocolo para transmitir un mensaje codificado de manera binaria (enviando un cero con el caso desbloqueado o lógica 0 y similarmente para enviar un uno), se puede analizar qué tan bien Alice interpreta un mensaje codificado por Bob a través de activar (lógica 1) o desactivar (lógica 0) sus interruptores. Entonces, se define la distinguibilidad como:

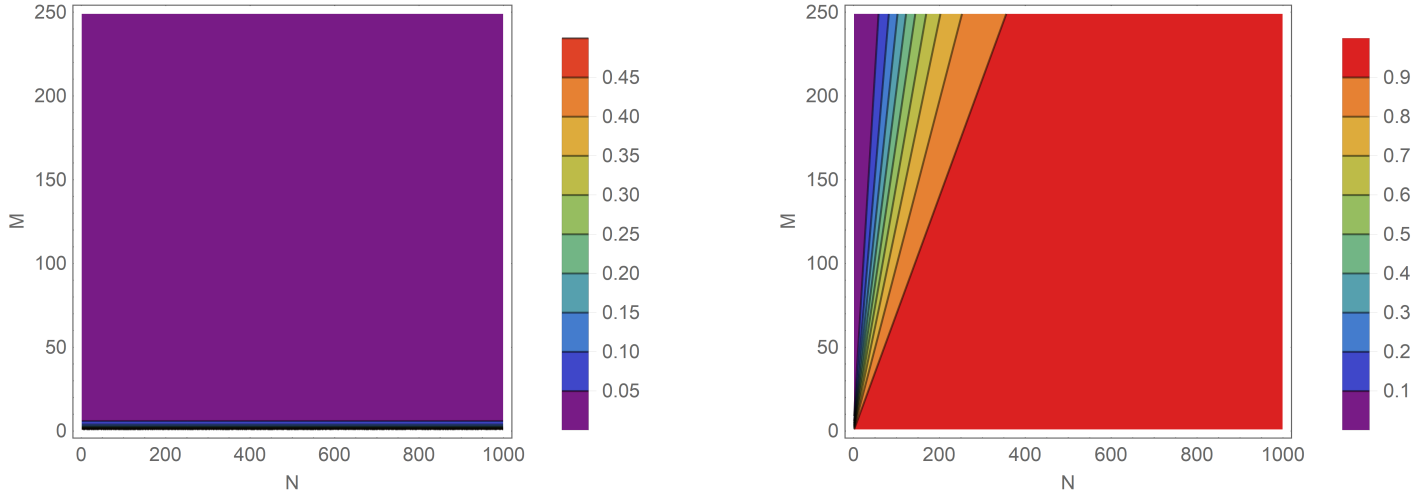
$$d \equiv \frac{P(D_2)}{P(D_1) + P(D_2)}. \quad (43)$$

La distinguibilidad está definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Cuando Alice envía una cadena de fotones y cuenta el número de fotones en cada uno de sus detectores, al calcular la distinguibilidad, si ésta resulta en un valor cercano a cero, entonces concluye que Bob le está transmitiendo un cero, en caso contrario, si resulta un valor cercano a uno, entonces concluye que Bob envió un uno. Cuando la distinguibilidad esté cercana a 0.5, Alice no podría concluir con certeza, y tendría que descartar esa cadena de fotones. El hecho de que Alice pudiera llegar a recibir una cadena de fotones alrededor de 0.5, es resultado de la combinación de las pérdidas y fotones fugados, que de nuevo, desbalancean las proporciones de intensidad que llegan a cada BS, las cuales por consiguiente llevan a que la comunicación deje de ser contrafactual, aunado al hecho de que se estaría usando un número finito de  $M$  y  $N$ .

Debido a esto, se puede fijar una tolerancia mayor que cero y menor que uno, con la cual Alice interpretará su cadena de fotones enviados al arreglo como un cero o uno, enviado por Bob. Además hay que considerar el hecho de que cuando Alice envía una cadena de  $L$  fotones, el número final de fotones que detectará en sus dos detectores principales  $P(D_1)$  y  $P(D_2)$ , cumplen la relación  $P(D_1) + P(D_2) < L$ . Así que es de esperarse que se pierdan aún más fotones y sea más difícil de distinguir el mensaje de Bob, al comenzar a considerar las pérdidas.

## 5.7. Caso sin pérdidas

En la figura 23b, se muestra la distinguibilidad en la lógica 1. En este caso se busca obtener valores lo más cercano posible a uno, por lo que se obtiene rápidamente al aumentar  $N$ , con poco incremento en  $M$ .



(a) Comportamiento de la distinguibilidad en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , sin pérdidas en la lógica 0.

(b) Comportamiento de la distinguibilidad en función de  $1 \leq M \leq 250$  y  $1 \leq N \leq 1000$ , sin pérdidas en la lógica 1.

Figura 23: Distinguibilidad en función de  $M$  y  $N$  para ambas lógicas sin pérdidas.

En el caso de la lógica 0, se observa en la figura 23a que ya se obtiene una distinguibilidad muy cercana a cero, para valores superiores en  $M$  a diez, sin importar que  $N$  se elija. Y para la lógica 1, se cumple esto mismo, aunque habría que dejar un valor de  $N$  menor que diez también, si se observa la figura 23b.

## 5.8. Caso con pérdidas

En la figura 24b, se observa la distinguibilidad de la lógica 1 al considerar las pérdidas. En este caso, para lograr una buena distinguibilidad cercana a uno, la región roja se vuelve acotada, logrando valores por encima del 90% hasta una  $M = 40$ , a lo largo de un intervalo más amplio para  $N$ , pero mientras se tome un valor grande de  $N$ , se tendrá que disminuir en mayor medida  $M$ .

Para el caso de la lógica 0, se vuelve a observar que no hay mucha diferencia en la figura 24a respecto a la figura 22b sin pérdidas. Al analizar ambas lógicas y obtener una distinguibilidad cercana a uno para la lógica 1 y cercana a cero para la lógica 0, es conveniente tomar valores de  $1 \leq M \leq 40$  y  $1 \leq N \leq 40$ .

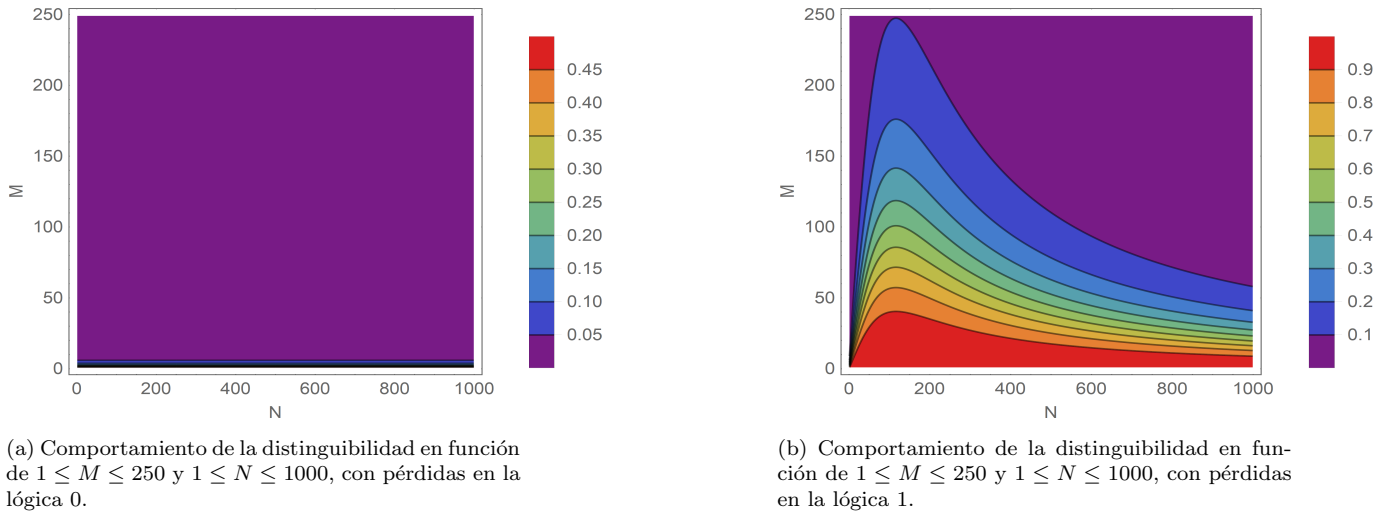


Figura 24: Distinguibilidad en función de  $M$  y  $N$  para ambas lógicas con pérdidas.

En resumen, para el caso bloqueado en la situación ideal,  $P(D_1) \rightarrow 0$  y  $P(D_2) \rightarrow 1$ , de manera contraria para el caso desbloqueado. Dado que en el caso desbloqueado con o sin pérdidas las probabilidades en ambos detectores permanecen constantes en  $N$ , resulta más importante analizar el caso bloqueado. En el momento en que se agregan las pérdidas, el detector dos es el que predomina en cuanto a la elección de  $M$  y  $N$  necesarias para acercarse lo más posible a la situación ideal. Al agregar el análisis de los fotones fugados junto con las pérdidas en los detectores  $D_3$  (los cuales Alice no necesita necesariamente medir), se deduce que un buen intervalo para evitar estos fotones fugados sería  $1 \leq M \leq 40$  y  $1 \leq N \leq 50$ .

Por último, para analizar la certeza con la que Alice interpreta un mensaje enviado por Bob se introdujo la distinguibilidad. Con este parámetro Alice puede determinar si Bob le está mandando un uno (lógica uno o caso bloqueado) o un cero (lógica cero o caso desbloqueado), después de haber hecho el conteo de fotones en sus detectores  $D_1$  y  $D_2$ . Debido a esto, el rango más aceptable de valores sería  $1 \leq M \leq 40$  y  $1 \leq N \leq 40$ .

## 6. Análisis de un diseño experimental con pérdidas reales

Para proponer un diseño experimental hay que considerar varios factores, por ejemplo la eficiencia de los detectores que se utilicen, los cambios de fase que sufre la señal de entrada al atravesar cada uno de los elementos utilizados, las pérdidas asociada a estos elementos. A continuación se analizan solamente las pérdidas por absorción que puede tener la implementación de este protocolo, realizándolo con elementos ópticos en aire, en fibra óptica y en guías de onda. Es muy importante destacar que no se considerarán las variaciones en la fase de cada diseño, por lo que la discusión se centrará únicamente en términos de pérdidas por absorción de dichos elementos, así como las fugas por los detectores  $D_3$ .

### 6.1. Fibra óptica

En el caso de un diseño implementado por fibras ópticas, se considerarán las pérdidas debido a los divisores de haz de fibras comerciales que se pueden consultar, por ejemplo en *Thorlabs* [18]. En este caso, la potencia de salida, respecto a la de entrada para un divisor de haz, es del 96%. Para el caso de las conexiones (puntos naranjas de la figura 25), considerando que todos los elementos se fundan [19], es del 97%. En la figura 25 se muestra un diseño en particular para el caso de  $M = N = 2$ .

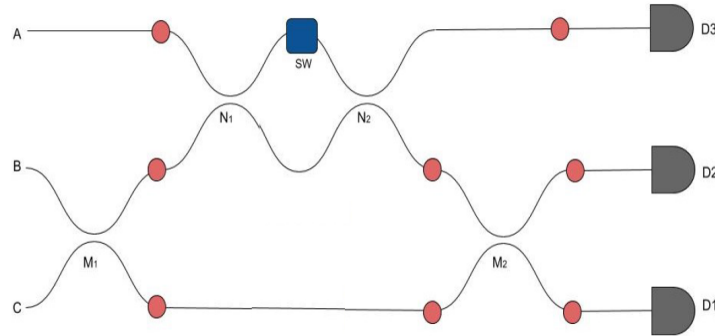


Figura 25: Propuesta del diseño experimental utilizando elementos de fibra óptica. En este diseño, **PC** hace referencia al estabilizador de fase que se tendría que considerar, para lograr la interferencia final deseada.

Considerando las dos fuentes de pérdidas anteriores, se definen las siguiente variables, para volver a calcular las probabilidades de detección de los detectores. Para introducir las pérdidas por los divisores de haz, se definen los siguientes parámetros en función de  $b$ :

$$u_1 \equiv \sqrt{b} \cos\left(\frac{\pi}{2M}\right),$$

$$v_1 \equiv \sqrt{b} \sin\left(\frac{\pi}{2M}\right),$$

$$u_2 \equiv \sqrt{b} \cos\left(\frac{\pi}{2N}\right),$$

$$v_2 \equiv \sqrt{b} \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

De esta manera, la matriz de ambos divisores de haz, del ciclo externo e interno, queda dada por:

$$A_{BS_M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & v_1 \\ 0 & -v_1 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$A_{BS_N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 \\ 0 & -v_2 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Dado que los elementos de fibra óptica se conectan entre ellos, las pérdidas en este caso son representadas por las siguientes matrices, con el parámetro  $a$ :

$$C_M = \sqrt{a}I, \quad (44)$$

$$C_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}. \quad (45)$$

De esta manera, las probabilidades para el detector uno y dos, para la lógica 1 (caso bloqueado) y lógica 0 (caso desbloqueado), quedan determinadas como:

$$P(D_1) = |\langle 001 | A_{B/D} | c \rangle|^2,$$

$$P(D_2) = |\langle 010 | A_{B/D} | c \rangle|^2,$$

$$A_B = A_{BS_M} \left( C_M (C_N M_{SW} A_{BS_N})^N A_{BS_M} \right)^{M-1}, \quad (46)$$

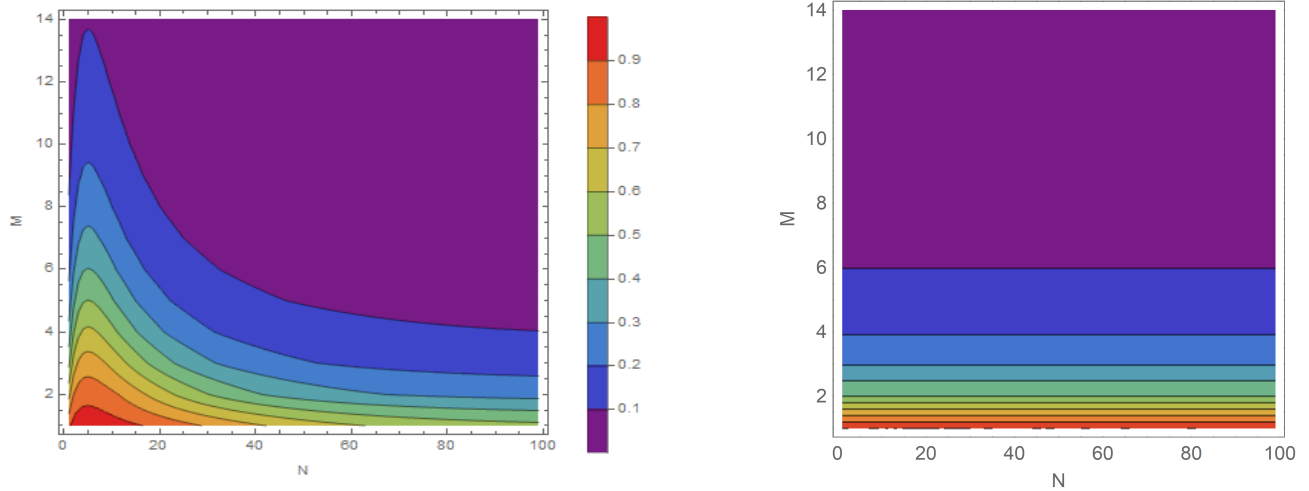
$$A_D = A_{BS_M} \left( C_M M_{SW} (C_N A_{BS_N})^N A_{BS_M} \right)^{M-1}. \quad (47)$$

### 6.1.1. Distinguibilidad en fibra

De esta manera, la distinguibilidad definida en la ecuación 43, incluye la pérdida por absorción y las fugas en los detectores  $D_3$ .

Conviene recordar que la distinguibilidad es un parámetro entre 0 y 1, y funciona para ambas lógicas al mismo tiempo. En el caso ideal, se quisiera escoger  $M$  y  $N$  tales que, la distinguibilidad para la lógica cero, sea cero (0 %); y para la lógica uno, fuera uno (100 %).

En la figura 26, se muestra la distinguibilidad para ambas lógicas con las pérdida introducidas por elementos ópticos de fibra óptica.



(a) Distinguibilidad con pérdidas por fibra óptica, para  $1 \leq M \leq 15$ ,  $1 \leq N \leq 100$ , en la lógica 1.

(b) Distinguibilidad con pérdidas por fibra óptica, para  $1 \leq M \leq 15$ ,  $1 \leq N \leq 100$ , en la lógica 0.

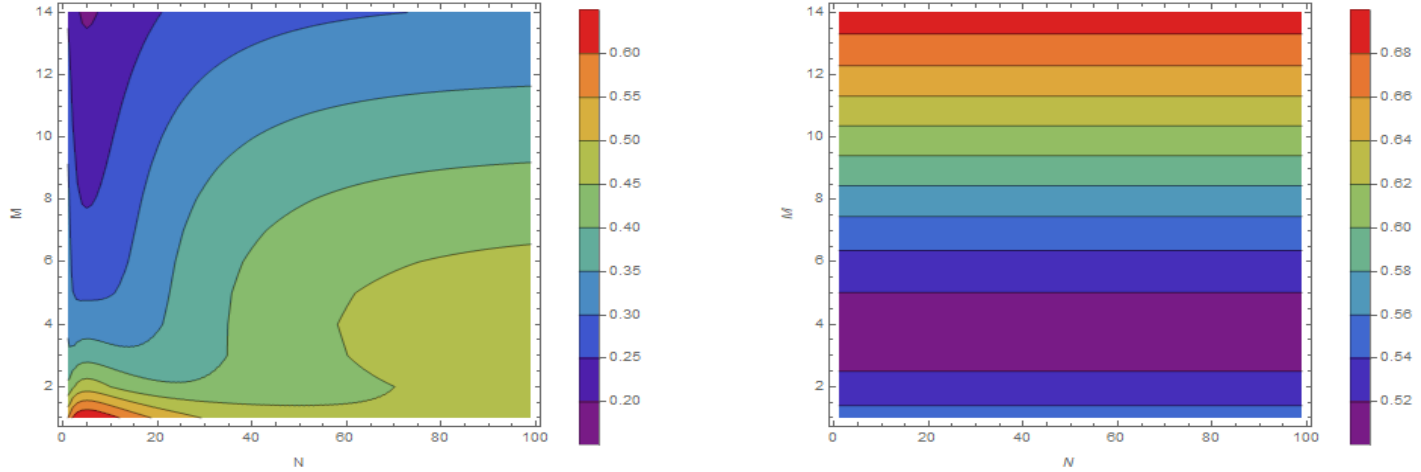
Figura 26: Distinguibilidad con pérdidas por fibra óptica en función de  $M$  y  $N$  para  $a = 0.96$  y  $b = 0.97$ .

Como en los casos anteriores, la distinguibilidad para la lógica 0 no depende del valor de  $N$ , pero para al menos tener un interferómetro, se tiene que elegir una  $M$  mínima de dos, lo que proporcionaría un valor mínimo de 20%. Para lograr un valor debajo del 5%, se tiene que elegir un valor mínimo de  $M = 6$ . Sin embargo, eligiendo este último valor para  $M$ , con una  $N$  pequeña, solamente se logra un valor del 40% para la lógica 1, que es un valor demasiado bajo.

De nuevo, para que exista por lo menos un interferómetro, se requiere elegir una  $M$  arriba de dos, lo cual automáticamente nos lleva a una región de confiabilidad para la lógica 1 del 80%. Así, al considerar ambas lógicas y lograr distinguirlas, se propone elegir una  $M = 3$  y una  $N = 5$  para lograr una distinguibilidad del 70% para la lógica 1, y 20% para la lógica 0.

### 6.1.2. Fugas y pérdidas en fibra

Usando los mismos valores anteriores, en la figura 27 se muestra el porcentaje final que se mediría en los detectores uno y dos, en función de la intensidad de la señal de entrada.



(a) Fugas con pérdidas por fibra óptica, para  $1 \leq M \leq 15$ ,  $1 \leq N \leq 100$ , en la lógica 1.

(b) Fugas con pérdidas por fibra óptica, para  $1 \leq M \leq 15$ ,  $1 \leq N \leq 100$ , en la lógica 0.

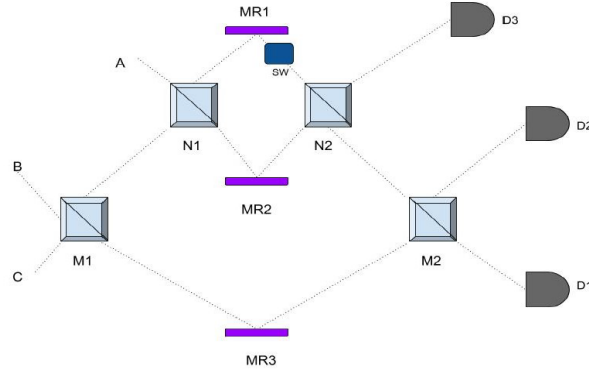
Figura 27: Porcentaje final detectado en los detectores de Alice, incluyendo fugas y pérdidas por fibra óptica en función de  $M$  y  $N$ , para  $a = 0.96$  y  $b = 0.97$ .

Por lo tanto, usando los valores de  $M = 3$  y  $N = 5$ , el diseño experimental tiene una eficiencia respecto a la señal de entrada y salida, considerando ambas lógicas, de alrededor del 45% (es decir, de todos los fotones que Alice mande al arreglo, solo detectará en promedio el 45%).

## 6.2. Aire

En el caso de un diseño implementado en aire, se considerarán las pérdidas debido a los divisores de haz comerciales y los espejos[18], para longitudes de onda entre  $1460 \text{ nm}$  y  $1620 \text{ nm}$ . Para este caso  $a = 0.94$  y  $b = 0.97$ . Cabe mencionar que las características de los elementos tanto de fibra óptica como en aire, dependen de la longitud de onda utilizada, por lo que se están tomando estos valores simplemente como referencia y ver su efecto en general en el protocolo. En la figura 28 se muestra como sería un diseño en particular para el caso de  $M = N = 2$ .




 Figura 28: Propuesta del diseño experimental utilizando elementos en aire, para el caso particular de  $M = N = 2$ 

Asimismo, las pérdidas en los divisores de haz en aire están representadas con el mismo parámetro  $b$ . Pero ahora, las pérdidas introducidas por los espejos denotadas por el parámetro  $a$ , están representados con las siguientes matrices:

$$E_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$E_N = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Del mismo modo, las probabilidades para el detector uno y dos, para la lógica 1 (caso bloqueado) y lógica 0 (caso desbloqueado), quedan determinadas como:

$$P(D_1) = |\langle 001 | A_{B/D} | c \rangle|^2,$$

$$P(D_2) = |\langle 010 | A_{B/D} | c \rangle|^2,$$

$$A_B = A_{BS_M} \left( E_M (E_N M_{SW} A_{BS_N})^N A_{BS_M} \right)^{M-1}, \quad (50)$$

$$A_D = A_{BS_M} \left( E_M M_{SW} (E_N A_{BS_N})^N A_{BS_M} \right)^{M-1}. \quad (51)$$

### 6.2.1. Distinguibilidad en aire

En la figura 29, se muestra la distinguibilidad para ambas lógicas con las pérdida introducidas por elementos ópticos en aire, con los parámetros ya mencionados.

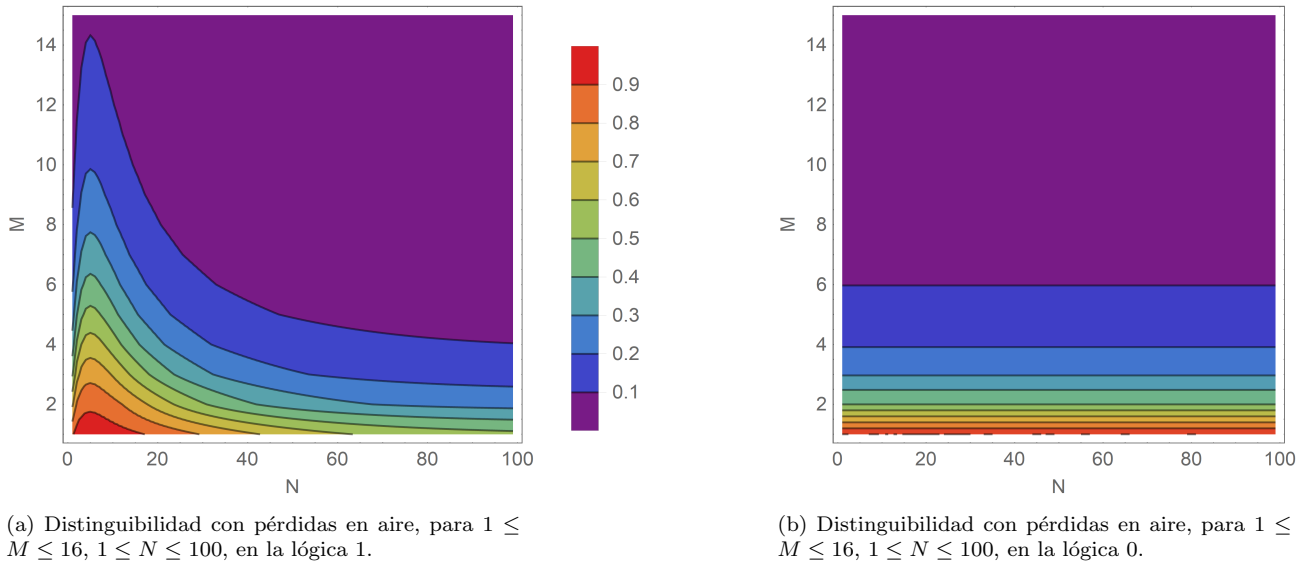


Figura 29: Distinguibilidad con pérdidas en aire en función de  $M$  y  $N$ , para  $a = 0.94$  y  $b = 0.97$ .

De manera similar, la lógica 1 es la que dicta con mayor importancia la elección de  $M$  y  $N$  ideales, para lograr una distinguibilidad cercana a uno, y cercana a cero para la lógica 0. Así, los mejores valores pueden considerarse como  $M = 2$  y  $N = 5$ , los cuales corresponderían a obtener una distinguibilidad del 80% y 20% para la lógica 1 y lógica 0 respectivamente.

### 6.2.2. Fugas y pérdidas en aire

En la figura 30 se muestra el porcentaje final que se mediría en los detectores uno y dos, en función de la intensidad de la señal de entrada.

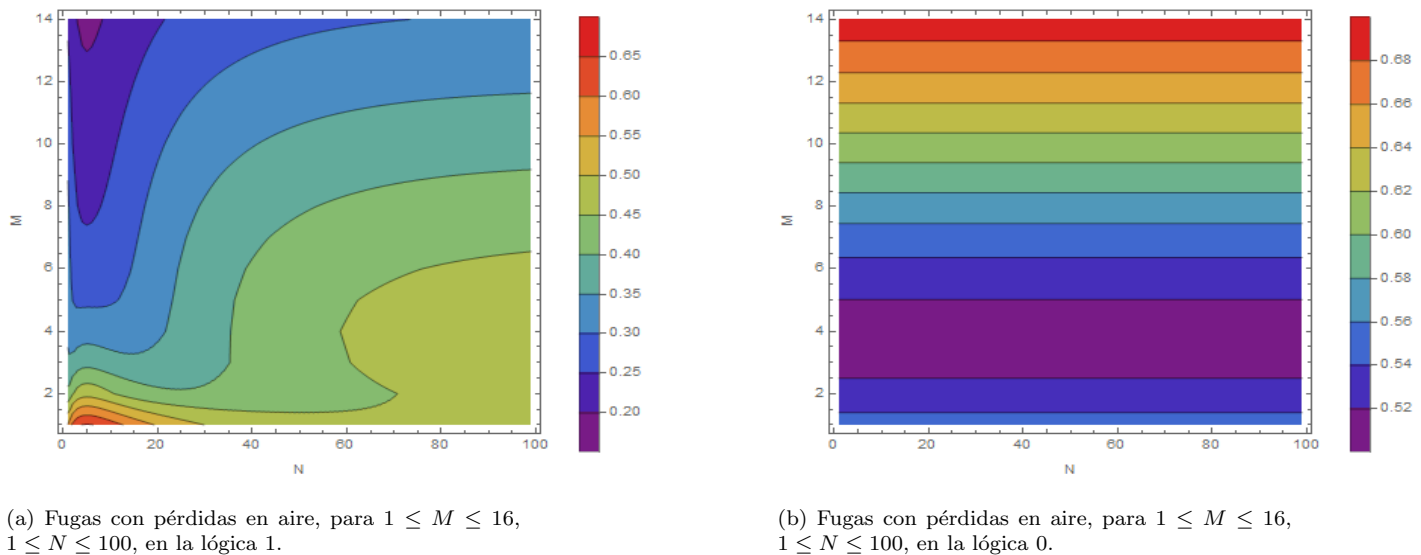


Figura 30: Porcentaje final detectado en los detectores de Alice incluyendo fugas y pérdidas por fibra óptica en función de  $M$  y  $N$  para  $a = 0.96$  y  $b = 0.97$ .

Debido a los valores elegidos en la sección inmediata anterior de distinguibilidad, al analizar la figura 30, en ambas lógicas se observa una pérdida de la señal de entrada del 50%.

En resumen, al considerar las pérdidas utilizando elementos comerciales en el diseño propuesto en fibra óptica, se sugiere escoger un valor de  $M = 3$  y  $N = 5$  (estos resultados se asemejan a los de la referencia [20]), para así obtener una distinguibilidad para la lógica 0 de 20 % y una distinguibilidad del 70 % para la lógica 1. Con esta elección, se obtiene una relación de intensidad entre la salida y la entrada del 45 %. Para el caso de aire, se sugiere usar  $M = 2$  y  $N = 5$ , para obtener una distinguibilidad de 20 % y 80 % para la lógica 0 y 1 respectivamente. Con estos valores, se obtendría una relación entre la salida y entrada del 50 %.

## 7. Aplicaciones

### 7.1. Borrador cuántico contrafactual

En la figura 31, se muestra el diseño experimental propuesto en la referencia [21] para implementar un borrador cuántico contrafactual. Alice tiene en su laboratorio una fuente de fotones  $S$ , la cual produce fotones con polarización horizontal. Estos fotones son dirigidos al divisor de haz  $BS$  balanceado, con una probabilidad del 50 %, un fotón puede ser dirigido hacia el brazo superior, en donde hay un rotador de polarización controlable, luego atraviesa un retardador óptico (para igualar los caminos ópticos de ambos brazos) y regresa por el espejo  $MR_A$ . Si es dirigido hacia el brazo horizontal, el efecto total que tiene todo el arreglo es de reflejar el fotón si no se coloca el detector  $D_B$ , o cambiarle la polarización a vertical, si se activa.

Dada esta configuración, hay dos casos posibles, si el rotador de polarización activable  $SPR$  (ver figura 31) no es activado, el fotón con polarización horizontal es reflejado por  $MR_A$  y el detector  $D_2$  hace clic con 100 % de probabilidad, ya que el sistema está diseñado de tal manera que habrá interferencia destructiva en el detector  $D_1$ . En caso contrario, al activarse, cambia la polarización del fotón y cuando es reflejado de vuelta al  $BS$ , se refleja en este último y pasa por el circulador óptico  $OC$  hacia el detector  $D_1$ , así ambos detectores tienen una probabilidad del 50 % de hacer clic, evitando la interferencia destructiva que inicialmente había en el  $D_1$ , debido a que se creó información indicando por cual brazo del interferómetro se desplazó el fotón. Ahora, en el brazo horizontal se encuentra un arreglo de comunicación contrafactual  $CQZE$  (ver referencia [21] para mayores detalles), que consiste en un interferómetro de Michelson. Como se ha mostrado, en el límite de infinito número de interferómetros (ciclos dentro del interferómetro de Michelson en este caso), la probabilidad de que un fotón atraviese el canal de comunicación entre Bob y Alice, denotado por la línea punteada, tiende a cero. El efecto que tiene este brazo es el de cambiar la polarización del fotón, de horizontal a vertical, si Bob así lo desea, bloqueando (o midiendo) con el detector  $D_B$  en su laboratorio.

De esta manera, si el  $SPR$  fue activado, éste etiqueta al fotón si fue por el brazo vertical, eliminando la interferencia destructiva en el detector  $D_1$ . Pero si Bob decide medir con su detector  $D_B$  en su laboratorio, en donde en el límite, ningún fotón atraviesa el canal de transmisión, logra borrar la información sobre qué camino tomó el fotón recuperando la interferencia destructiva en  $D_1$  y logrando que el detector  $D_2$  vuelva a hacer clic con un 100 % de probabilidad.

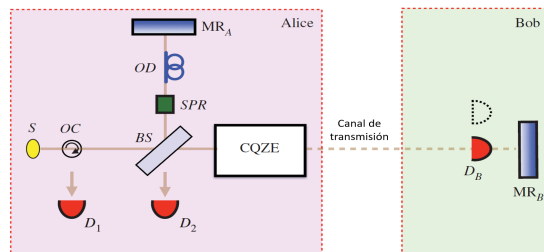


Figura 31: Diagrama experimental para implementar el famoso borrador cuántico utilizando la contrafactualidad en lugar del enredamiento. En la figura  $S$  es la fuente de fotones horizontalmente polarizados,  $OC$  es un circulador óptico,  $D_1$  y  $D_2$  son los detectores de Alice,  $BS$  es un divisor de haz,  $SPR$  es un rotador de la polarización activable,  $OD$  es un retardador óptico,  $MR_A$  es el espejo de Alice,  $CQZE$  es el arreglo en donde se aplica el protocolo de comunicación contrafactual. Figura tomada de [21].

## 7.2. Intercambio de enredamiento contrafactual

En la propuesta de Q. Guo y otros [22], se muestra como realizar un intercambio no local de enredamiento entre dos partes mediante la intervención de un tercero utilizando un protocolo de comunicación contrafactual. En la propuesta se pretende intercambiar el enredamiento entre un par de átomos a través de otro par de fotones que son controlados por Charlie (también hay una similar en [23]). Básicamente, Alice y Bob tienen un par de átomos enredados, de los cuales cada uno de ellos tiene un átomo dentro de una cavidad. Estas cavidades están conectadas al laboratorio de Charlie a través de un arreglo contrafactual. Esto implica que Charlie tiene dos canales de transmisión hacia la cavidad de Alice y Bob, en los cuales ninguna partícula puede atravesarlos. No obstante, Charlie puede enredar a los átomos de ambas cavidades. Por lo tanto, Alice y Bob pueden hacer un intercambio de enredamiento entre sus átomos, contrafactualmente. La manera en que Charlie logra hacer el intercambio de enredamiento entre Alice y Bob, es similar al protocolo de teleportación cuántica.

## 7.3. Transporte de un qubit contrafactualmente

Una vez establecida una manera de realizar un intercambio de enredamiento, con la característica adicional de ser contrafactual, se puede utilizar este sistema para transportar contrafactualmente un estado en general, como en la propuesta de Q. Guo [24] (o también [25]). Recordando el protocolo usual de teleportación cuántica [26], Alice y Bob tienen que inicialmente estar compartiendo un par de partículas entrelazadas. La diferencia con esta nueva propuesta es eliminar ese requisito inicial, ya que con el sistema de la propuesta anterior [22], Alice y Bob pueden iniciar el protocolo intercambiando el enredamiento de partículas que tengan, para después aplicar el protocolo de teleportación cuántica. Lo que le proporciona contrafactualidad a esta propuesta es el resultado de que Alice y Bob están conectados a través de un canal, que de nuevo en el límite ningún fotón atraviesa. Otra ventaja que se obtiene de este nuevo protocolo respecto al original [26], es que solamente se necesita enviar un bit de información clásico a diferencia de los dos bits de la propuesta original, para así poder completar de manera contrafactual la teleportación de un estado arbitrario.

## 8. Conclusiones

La comunicación cuántica contrafactual surge como una aplicación de las mediciones libres de interacción, haciendo uso de partículas individuales en un arreglo de interferómetros tipo Mach-Zehnder anidados y encadenados. Después de haber hecho el análisis del protocolo en el caso ideal, se puede decir que la contrafactualidad solo está garantizada cuando  $M$  y  $N$  tienden a infinito. Aunque el arreglo sigue funcionando como protocolo de comunicación, el análisis de qué tan contrafactual es el arreglo cuando se toman valores de  $M$  y  $N$  finitos queda fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, se puede añadir que parte de la esencia de la contrafactualidad proviene del hecho de que desde la Mecánica Cuántica estándar, no es muy clara la manera en que se pueda estudiar el camino seguido por una partícula en un interferómetro.<sup>9</sup> Otra línea en donde se puede explorar con más detalle el concepto de contrafactualidad, es analizar qué pasa con la propagación de los fotones en otros tipos de interferómetros.

También, se analizó el impacto en el protocolo de las pérdidas por absorción al introducir elementos ópticos comerciales. En particular, los diseños propuestos en este trabajo con fibra óptica y la implementación en aire muestran, como era de esperarse, que entre más se quiera incrementar el número  $M$  y  $N$  de divisores de haz, más complicado se vuelve alcanzar los valores de distinguibilidad entre los casos bloqueado y desbloqueado ideales. De la misma manera, la eficiencia del número de fotones detectados al final del arreglo disminuye cada vez más. Como se observa en los diferentes resultados presentados, el utilizar un diseño con fibra óptica, no es más conveniente que implementarlo en aire, debido a las pérdidas ocasionadas por las conexiones entre cada divisor de haz en fibra óptica, afectando en mayor medida la ventaja que se obtiene de usar fibra en la pocas pérdidas debidas a la transmisión (aunque las distancias involucradas en estos diseños no se espera que superen algunos metros). De esta manera, el implementar el protocolo con elementos ópticos comerciales presentará muchas pérdidas, resultando que el número máximo tanto de  $M$  y  $N$  no supera el de cinco para ambos diseños. Más aún, con el objetivo de simplificar el análisis no se introdujo la diferencia de fase que se origina cada vez que la señal atraviesa los diferentes elementos de los arreglos que definitivamente influyen en la detección final.

Como trabajo a futuro, para poder utilizar estos diseños realmente como protocolos de comunicación, sería conveniente analizar los mensajes a enviar para que esta información ayude a alcanzar buena distinguibilidad. Otro factor que resultaría interesante analizar es el número de fotones que cierta cadena debe de tener para lograr con certeza enviar un mensaje. Una alternativa atractiva es el intentar implementarlo sobre un chip fotónico o guía de onda, en los cuales las pérdidas se reducen significativamente [12].

---

<sup>9</sup>En la literatura es común analizar la contrafactualidad de un arreglo utilizando mediciones débiles o con medidas de información, como la información de Fisher; como se mencionó brevemente en la sección 4.5.

## A. Código de *Mathematica*

En esta sección se presenta el código directamente extraído del programa *Mathematica*, el cual se utilizó para realizar todos los cálculos presentados en este trabajo.

# Comunicación cuántica contrafactual con fotones

Miguel de Jesús González Martínez

## Definiciones

```

In[48]:= r1[M_] := Cos[ $\frac{\pi}{2M}$ ] (*coeficiente de reflexión externo*)
t1[M_] := Sin[ $\frac{\pi}{2M}$ ] (*coeficiente de transmisión externo*)
r2[N_] := Cos[ $\frac{\pi}{2N}$ ] (*coeficiente de reflexión interno*)
t2[N_] := Sin[ $\frac{\pi}{2N}$ ] (*coeficiente de transmisión interno*)
u1[M_, b_] :=  $\sqrt{b}$  * Cos[ $\frac{\pi}{2M}$ ] (*coeficiente de reflexión externo con absorción*)
v1[M_, b_] :=  $\sqrt{b}$  * Sin[ $\frac{\pi}{2M}$ ] (*coeficiente de transmisión externo con absorción*)
u2[N_, b_] :=  $\sqrt{b}$  * Cos[ $\frac{\pi}{2N}$ ] (*coeficiente de reflexión interno con absorción*)
v2[N_, b_] :=  $\sqrt{b}$  * Sin[ $\frac{\pi}{2N}$ ] (*coeficiente de transmisión interno con absorción*)

U1[r1_, t1_] :=  $\begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & r1 & -\text{Conjugate}[t1] \\ 0 & t1 & \text{Conjugate}[r1] \end{pmatrix}$ 
(*Matriz de transferencia para los beam splitters externos M *)
U2[r2_, t2_] :=  $\begin{pmatrix} r2 & -\text{Conjugate}[t2] & 0 \\ t2 & \text{Conjugate}[r2] & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$ 
(*Matriz de transferencia para los beam splitters internos N *)
U3 :=  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$  (*Matriz que bloquea para la lógica 1*)

rm[ $\delta 1_$ ,  $\delta 2_$ ] :=  $\begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{1-\delta 2})^n & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\delta 1} \end{pmatrix}$ 
(*Matriz de absorción para el ciclo externo M*)
rn[ $\delta 2_$ ,  $\delta 3_$ ] :=  $\begin{pmatrix} (\sqrt{1-\delta 3})^n & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\delta 2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

```

```

(*Matriz de absorción para el ciclo interno N*)
AP1[u1_, v1_] := 
$$\begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & u1 & -\text{Conjugate}[v1] \\ 0 & v1 & \text{Conjugate}[u1] \end{pmatrix}$$

(*Matriz de transferencia para los beam splitters externos M con absorción*)
AP2[u2_, v2_] := 
$$\begin{pmatrix} u2 & -\text{Conjugate}[v2] & 0 \\ v2 & \text{Conjugate}[u2] & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

(*Matriz de transferencia para los beam splitters internos N con absorción*)
E1[a_] := 
$$\begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$
 (*Matriz de pérdidas por espejos externos*)
E2[a_] := 
$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$
 (*Matriz de pérdidas por espejos internos*)
C1[a_] := 
$$\sqrt{a} \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

(*Matriz de pérdidas en fibra óptica en los ciclos externos*)
C2[a_] := 
$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$
 (*Matriz de pérdidas en fibra óptica en los ciclos internos*)
in := 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 (*Estado inicial*)
D3 := (1 0 0) (*Estado para proyectar en el detector D3'*)
D2 := (0 1 0) (*Estado para proyectar en el detector D2*)
D1 := (0 0 1) (*Estado para proyectar en el detector D1*)

```

## Relaciones generales M,N sin pérdidas

### Lógica 1

```

(*Detector 1/2*)
Mmax = 5;
Nmax = 5;

detect1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].U1[
    r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
a = ListPlot3D[detect1, ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic,
  AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange -> All]
Export["1_1.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["1_2.jpg", b, ImageResolution -> 500]

```



## Lógica 0

```
(*Detector 1/2*)
Mmax = 30;
Nmax = 10;
detect1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
a = ListPlot3D[detect1, ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic,
  AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange -> All]
Export["1_3.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["1_4.png", b, ImageResolution -> 500]
```

## Relaciones generales con pérdidas M,N

### Lógica 1

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect1 = Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.In[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    In[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
a = ListPlot3D[detect1, ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic,
  AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.In[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    In[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}],
  ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]
Export["2_1.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["2_2.png", b, ImageResolution -> 500]
```

## Lógica 0

```

Mmax = 25;
Nmax = 10;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect2 = Table[
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[In[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Im[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
a = ListPlot3D[detect2, ColorFunction → "Rainbow", PlotLegends → Automatic,
  AxesLabel → {N, M}, PlotRange → All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[
  U3.MatrixPower[In[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].Im[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].
  in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic, FrameLabel → {"N", "M"}, PlotRange → All]
Export["2_3.png", a, ImageResolution → 500]
Export["2_4.png", b, ImageResolution → 500]

```

## Pérdidas en lógica 1 en fibra

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.9999;
b = 0.9999;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2, ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic, AxesLabel → {N, M}, PlotRange → All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[
  C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic, PlotRange → All, DataRange → All]

```

## Pérdidas en lógica 0 en fibra

```
Mmax = 5;
Nmax = 2;
a = 0.9999;
b = 0.9999;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector1, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.
  MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^
  2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange -> All]
```

## Pérdidas en lógica 1 en aire

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.9999;
b = 0.9999;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[
  E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All, DataRange -> All]
```

## Pérdidas en lógica 0 en aire

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.9999;
b = 0.9999;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector1, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.
  MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^
  2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange -> All]

```

## Distinguibilidad

### Lógica 1 sin pérdidas

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;

detector1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].
  U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]],
  n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 /
  (Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].
  U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 + Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]
Export["3_1.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["3_2.png", b, ImageResolution -> 500]

```

## Lógica 0 sin pérdidas

```
(*Detector 1*)
Mmax = 5;
Nmax = 5;

detector1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]],
  n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 /
  (Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 + Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
    MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]

Export["3_3.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["3_4.png", b, ImageResolution -> 500]
```

## Lógica 1 con pérdidas

```

Mmax = 100;
Nmax = 200;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect1 = Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.rn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    r̄m[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detect2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[
  MatrixPower[U3.rn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].r̄m[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].
  in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detect2 / (detect2 + detect1), ColorFunction → "Rainbow",
  PlotLegends → Automatic, AxesLabel → {N, M}, PlotLabel → All]
b = ListContourPlot[Table[
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.rn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    r̄m[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 /
  (Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.rn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    r̄m[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.rn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]],
    n].r̄m[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction → "Rainbow", PlotLegends →
  Automatic,
  FrameLabel → {"N", "M"}, PlotRange →
  All]

Export["3_5.png", a, ImageResolution → 500]
Export["3_6.png", b, ImageResolution → 500]

```

## Lógica 0 con pérdidas

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect1 = Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detect2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[
  U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].
  in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detect2 / (detect2 + detect1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 /
  (Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]],
    n].Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends ->
  Automatic,
  FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange ->
  All]

Export["3_7.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["3_8.png", b, ImageResolution -> 500]

```

## Lógica 1 con pérdidas en fibra

```

Mmax = 15;
Nmax = 100;
a = 0.96; (*Pérdida por BS en fibra Thorlabs*)
b = 0.97; (*Pérdida por la conexión por fusión de fibras*)

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.
    AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 /
  (Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[
    C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[
    C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends ->
  Automatic, PlotRange ->
  All, AxesLabel ->
  {N, M}, DataRange -> All]

Export["3_9.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["3_10.png", d, ImageResolution -> 500]

```



## Lógica 0 con pérdidas en fibra

```
Mmax = 15;
Nmax = 100;
a = 0.96; (*Pérdida por BS en fibra Thorlabs*)
b = 0.97; (*Pérdida por la conexión por fusión de fibras*)

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.
  MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^
  2 / (Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[
  C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[
  C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends ->
  Automatic,
  FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange ->
  All]

Export["3_11.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["3_12.png", d, ImageResolution -> 500]
```

## Lógica 1 con pérdidas en aire

```
Mmax = 16;
Nmax = 20;
a = 0.96;
b = 0.97;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.
    AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 /
    (Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[
      E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
    Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[
      E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends ->
  Automatic, PlotRange ->
  All, FrameLabel ->
  {"N", "M"}, DataRange -> All]

Export["3_13.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["3_14.png", d, ImageResolution -> 500]
```

## Lógica 0 con pérdidas en aire

```

Mmax = 16;
Nmax = 100;
a = 0.96;
b = 0.97;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector2 / (detector2 + detector1), ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
d = ListContourPlot[Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.
  MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^
  2 / (Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[
  E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[
  E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2),
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends ->
  Automatic,
  FrameLabel -> {"N", "M"}, PlotRange ->
  All]
Export["3_15.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["3_16.png", d, ImageResolution -> 500]

```

## Fugas en los detectores D3'

### Lógica 1 sin pérdidas

```

Mmax = 3;
Nmax = 3;

detector1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]],
  n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detector1 + detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}],
  ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]

Export["4_1.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["4_2.png", b, ImageResolution -> 500]

```

### Lógica 0 sin pérdidas

```

(*Detector 1*)
Mmax = 5;
Nmax = 5;

detector1 =
  Table[Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]],
  n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[1 - detector1 - detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[1 - Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].
  MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 -
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[U2[r2[n], t2[n]], n].
    U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}],
  ColorFunction -> "Rainbow", PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]

Export["4_3.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["4_4.png", b, ImageResolution -> 500]

```

## Fugas y pérdidas para la lógica 1

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect1 = Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detect2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[
  MatrixPower[U3.Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].Γm[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].
  in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[detect1 + detect2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[MatrixPower[U3.Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2].U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]

Export["4_5.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["4_6.png", b, ImageResolution -> 500]
```

## Fugas y pérdidas para la lógica 0

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
δ1 = 0.0001;
δ2 = 0.9 δ1;
δ3 = 0.9 δ2;

detect1 = Table[
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detect2 = Table[Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[
  U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].
  in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

a = ListPlot3D[1 - detect1 - detect2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]
b = ListContourPlot[Table[1 -
  Norm[D2.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2 -
  Norm[D1.U1[r1[m], t1[m]].MatrixPower[U3.MatrixPower[Γn[δ2, δ3].U2[r2[n], t2[n]], n].
    Γm[δ1, δ2] U1[r1[m], t1[m]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, FrameLabel -> {"N", "M"},
  PlotRange -> All]

Export["4_7.png", a, ImageResolution -> 500]
Export["4_8.png", b, ImageResolution -> 500]
```

## Fugas y pérdidas para la lógica 1 en fibra

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.96; (*Pérdida por BS en fibra Thorlabs*)
b = 0.97; (*Pérdida por la conexión por fusión de fibras*)

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector1 + detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[C2[a].U3.
    AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].MatrixPower[
    C2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All,
  DataRange -> All]

Export["4_9.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["4_10.png", d, ImageResolution -> 500]

```

## Fugas y pérdidas para la lógica 0 en fibra

```

Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.96; (*Pérdida por BS en fibra Thorlabs*)
b = 0.97; (*Pérdida por la conexión por fusión de fibras*)

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  C1[a].U3.MatrixPower[C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[1 - detector1 - detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[1 - Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[
    C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 -
    Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[C1[a].U3.MatrixPower[
    C2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
    {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All,
  DataRange -> All]

Export["4_11.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["4_12.png", d, ImageResolution -> 500]

```



## Fugas y pérdidas para la lógica 1 en aire

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.96;
b = 0.97;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 1, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[detector1 + detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[E2[a].U3.
    AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 +
  Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].MatrixPower[
    E2[a].U3.AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All,
  DataRange -> All]

Export["4_13.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["4_14.png", d, ImageResolution -> 500]
```

## Fugas y pérdidas para la lógica 0 en aire

```
Mmax = 5;
Nmax = 5;
a = 0.96;
b = 0.97;

detector1 = Table[Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].
  MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].
  AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];
detector2 = Table[Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[
  E1[a].U3.MatrixPower[E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]],
  m - 1].in]^2, {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}];

c = ListPlot3D[1 - detector1 - detector2, ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, AxesLabel -> {N, M}, PlotRange -> All]

d = ListContourPlot[
  Table[1 - Norm[D1.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[
    E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2 -
  Norm[D2.AP1[u1[m, b], v1[m, b]].MatrixPower[E1[a].U3.MatrixPower[
    E2[a].AP2[u2[n, b], v2[n, b]], n].AP1[u1[m, b], v1[m, b]], m - 1].in]^2,
  {m, 2, Mmax, 1}, {n, 2, Nmax, 1}], ColorFunction -> "Rainbow",
  PlotLegends -> Automatic, PlotRange -> All,
  DataRange -> All]

Export["4_15.png", c, ImageResolution -> 500]
Export["4_16.png", d, ImageResolution -> 500]
```

## Referencias

- [1] H. Salih, Z. H. Li, M. Al-Amri, and M. S. Zubairy, *Protocol for direct counterfactual communication*. Phys. Rev. Let., (2013), 170502-1 - 170502-3.
- [2] C. Liu, J. Liu, J. Zhang, and S. Zhu, *Improvement of reliability in multi-interferometer-based counterfactual deterministic communication with dissipation compensation*. Optic express, (2018), 2262- 2268.
- [3] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*. The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656, July, October, (1948).
- [4] N. Gisin, *Optical communication without photons*. Phys. Rev. A 88, 030301(R), (2013), 030301-1 - 030301-2.
- [5] A. C. Elitzur and L. Vaidman, *Quantum mechanical interaction-free measurements*. Foun. of Phys., (1993), 987-996.
- [6] Y. Cao, Y.-H. Li, Z. Cao, J. Yin, Y.-A. Chen, H.-L. Yin, C.-Z. Peng, T.-Y. Chen, X. Ma, and J.-W. Pan, *Direct counterfactual communication via quantum Zeno effect*. PNAS 4921-4922., (2017).
- [7] J. U. Kang, *Fiber optic, sensing and imaging*. Springer, (2013), 43-50.
- [8] V. Scarani and A. Suarez, *Introducing quantum mechanics: one-particle interferences*. AM. J. Phys. 66 (8), (1998), 718-729.
- [9] C. Holbrow, E. Galvez, and M. Parks, *Photon quantum mechanics and beam splitters*. AM. J. Phys. 70 (3), (2002).
- [10] L. Vaidman, *The meaning of interaction-free measurements*. Found. of Phys., (2003), 501-503.
- [11] F. Kong, C. Ju, P. Huang, P. Wang, X. Kong, F. Shi, L. Jiang, and J. Du, *Experimental realization of high-efficiency counterfactual computation*. Phys. Rev. Let. 115, 08501, (2015), 080501-1.
- [12] I. A. Calafell, T. Strömberg, V. S. D.R.M. Arvidsson-Shukur, L.A. Rozema, C. Greganti, M. P. N.C. Harris, J. Carolan, M. Hochberg, T. Baehr-Jones, D. Englung, C. Barnes, and P. Walther, *Genuine counterfactual communication with a nanophotonic processor*. arXiv:1808.04856 [quant-ph], (2018).
- [13] D. Arvidsson-Shukur and C. Barnes, *Quantum counterfactual communication without a weak trace*. Phys. Rev. A 94, 062303, (2016), 062303-1 - 062303-3.
- [14] G. Mitchison, R. Jozsa, and S. Popescu, *Sequential weak measurement*. Phys. Rev. A 76, 062105, (2007), 062105-1 - 062105-4.
- [15] D. Arvidsson-Shukur, A. Gottfries, and C. Barnes, *Evaluation of counterfactuality in counterfactual communication protocols*. Phys. Rev. A 96, 062316, (2017), 062316-1 - 062316-3.

- [16] S. B.-A. A. Danan, D. Farfurnik and L. Vaidman, *Asking photons where they have been*. Phys. Rev. Let. 111, 240402, (2013), 240402-1 - 240402-4.
- [17] L. Vaidman, *Past of a quantum particle*. Phys. Rev. A 87, 052104, (2013), 052104-2 - 052104-4.
- [18] ThorLabs, *Optic fiber elements*. ThorLabs, 2018. [En línea]. Disponible: <https://www.thorlabs.com/>
- [19] F. Company, *Fusion splicing today's single mode fibers*. Furukawa Company, (2007), 10. [En línea]. Disponible: <http://www.superioressexcommunications.com>
- [20] C. Liu, J. Liu, J. Zhang, and S. Zhu, *The experimental demonstration of high efficiency interaction-free measurment for quantum counterfactual-like communication*. Sci. Rep. 7: 10875, (2017), 1-6.
- [21] H. Salih, *Counterfactual quantum erasure: spooky action without entanglement*. Roy. Soc. open sci. 5:171250, (2018), 1-3.
- [22] Q. Guo, L.-Y. Cheng, H.-F. Wang, and S. Zhang, *Counterfactual entanglement swapping enables high-efficiency entanglement distribution*. Optic Express 27314, (2018), 27315-27320.
- [23] Q. Guo, L.-Y. Cheng, L. Chen, H.-F. Wang, and S. Zhang, *Counterfactual entanglement distribution without transmitting any particles*. Optic express 8970, (2014), 8974-8978.
- [24] Q. Guo, H.-F. Wang, L.-Y. Cheng, and S. Zhang, *Counterfactual quantum-information transfer*. arXiv 1404.6401v1, (2014), 6-12.
- [25] Z.-H. Li, M. Al-Amri, and M. S. Zubairy, *Direct counterfactual transmission of a quantum state*. Phys. Rev. A, 92, 052315, (2015), 052315-1 - 052315-2.
- [26] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wothers, *Teleporting an unkwon quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*. Phys. Rev. Let. 03.65.Bz, 42.50.Dv, 89.70.+c, (1993), 1895-1896.
- [27] Ozoptics, *Optical delay line*. Ozoptics, (2019). [En línea]. Disponible: <http://shop.ozoptics.com>