



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA
ASTROFÍSICA TEÓRICA

**SISTEMAS BINARIOS CON INTERACCIÓN MAGNÉTICA Y
EMISIÓN DE ONDAS GRAVITATORIAS EN FASE INSPIRAL**

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:
MARIANA LIRA PERALTA

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, CIUDAD DE MÉXICO.
FEBRERO, 2020.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO

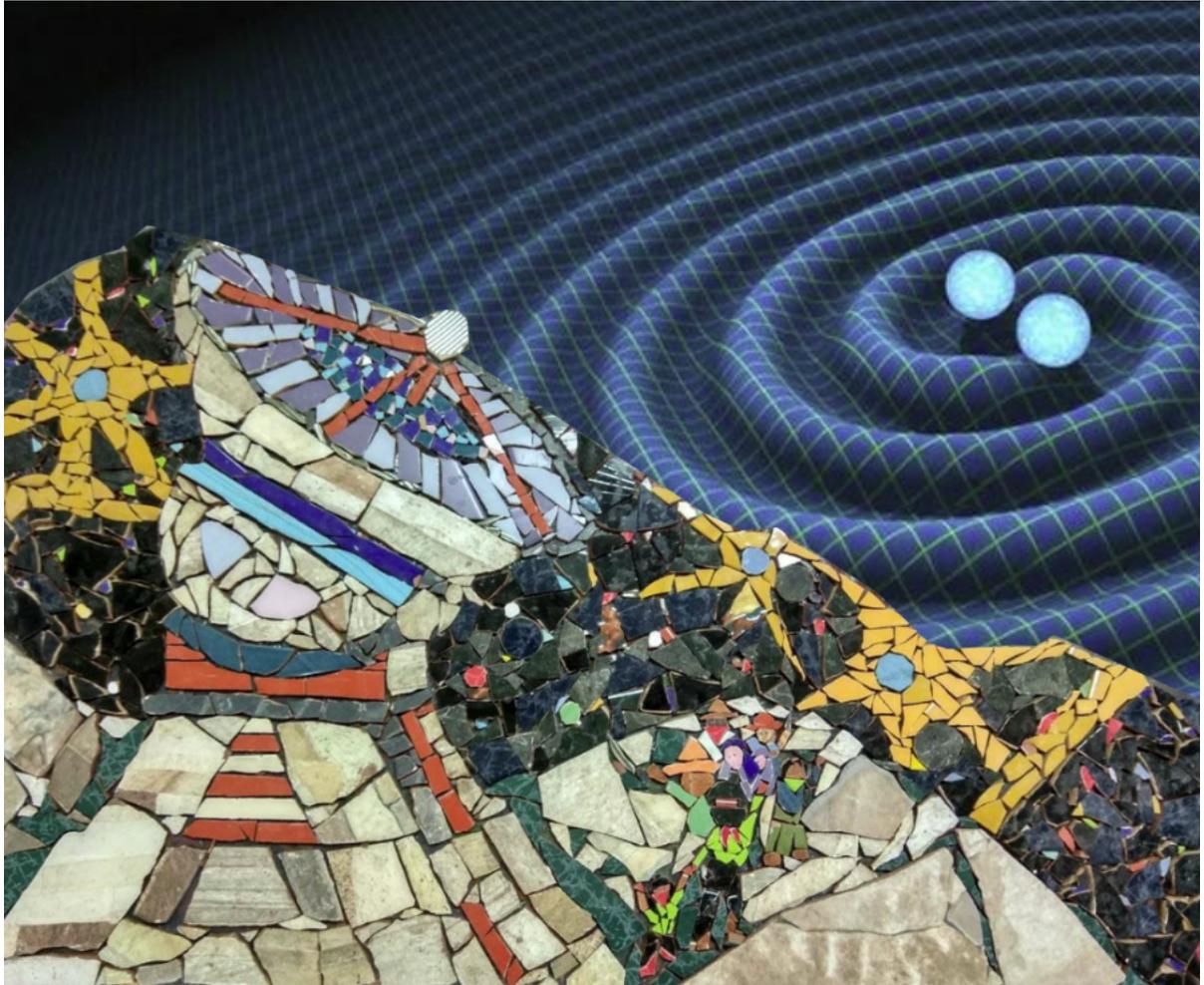
Dr. Xavier Nicolás Hernández Doring
Instituto de Astronomía, C.U.

Dra. Claudia Moreno González
Universidad de Guadalajara

Dr. Diego López Cámara Ramírez
Instituto de Astronomía, C.U.

Dr. Emilio Tejeda Rodríguez
Universidad Michoacana de San Nicolás Hidalgo

Dr. Juan Carlos Degollado Daza
Instituto de Ciencias Físicas, UNAM



la culpa es de las flores y las estrellas

Resumen

Se modela analíticamente un sistema binario de objetos compactos con interacción magnética para analizar, por un lado, su dinámica orbital -visto como un problema de dos cuerpos newtoniano-, y, por otro lado, su emisión de ondas gravitatorias -bajo la aproximación cuadrupolar con órbitas circulares-.

Los objetos son modelados como esferas conductoras eléctricamente neutras y estacionarias de radios R_1, R_2 , masas M_1, M_2 , y, momentos magnéticos dipolares $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$. Suponemos que estas cantidades son constantes, al igual que los ángulos α_1, α_2 , formados entre \mathbf{r} y $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$, respectivamente. \mathbf{r} es el vector de posición relativa, en el marco de referencia con origen en el centro de masa.

Bajo estas suposiciones, en el régimen newtoniano, la superposición de la fuerza gravitatoria entre las masas con la fuerza magnética entre los dipolos, da como resultado una fuerza neta central, razón por la que puede ser analizado como un problema de dos cuerpos. Que la fuerza magnética sea atractiva o repulsiva, depende únicamente de α_1, α_2 . Encontramos que, dado α_1 , si $\alpha_2 = \arctan(2/\tan \alpha_1)$, entonces la interacción magnética se anula, pero si $\alpha_2 > \arctan(2/\tan \alpha_1)$, la interacción es atractiva; lo contrario ocurre cuando $\alpha_2 < \arctan(2/\tan \alpha_1)$.

Puesto que en este régimen la energía mecánica total se conserva, los cuerpos se mueven en trayectorias ligadas. Si solo actúa la fuerza gravitatoria, las órbitas son elipses, pero al incluir la magnética, se describen rosetas. También, se obtiene que la fuerza magnética atractiva incrementa la frecuencia orbital, en relación al caso kepleriano. Sin embargo, sólo si los cuerpos se encuentran a decenas de radios de Schwarzschild, la interacción magnética comienza a ser cualitativamente relevante.

Por otra parte, se recurre a la interpretación relativista de la gravedad bajo la aproximación cuadrupolar, útil principalmente durante la fase de *espiraleo* de las estrellas hacia la fusión, mejor conocida como inspiral. En el régimen cuadrupolar, la energía total, E , decrece de acuerdo a la ecuación cuadrupolar, $\frac{dE}{dt} = -L$. Así, se construyen ecuaciones dinámicas para las variables de las ondas gravitatorias en términos de las variables de la binaria. Al resolverlas, encontramos que la interacción magnética atractiva también incrementa la velocidad orbital de los cuerpos, lo cual disminuye el tiempo de coalescencia; en cambio, la interacción repulsiva hace que los cuerpos alcancen velocidades relativistas después -respecto al caso kepleriano-, lo cual incrementa la duración de la fase inspiral.

Asimismo, luego de una revisión del contexto astrofísico de las estrellas, los objetos compactos y los sistemas binarios, concluimos que nuestro modelo es aplicable principalmente a binarias

de estrellas de neutrones, porque sus campos magnéticos son los más intensos del universo ($B \sim 10^{12} - 10^{16}$ G, incluyendo a los magnetares). Por lo cual, resolvimos las ecuaciones dinámicas sobre dos sistemas físicos: el famoso pulsar binario de Hulse y Taylor PSR 1913+16 y la progenitora de la señal GW170817, que fue la primera onda gravitatoria confirmada asociada a la fusión de dos estrellas de neutrones. Obtuvimos diferencias notables en las ondas gravitatorias, hasta suponer $B \gtrsim 2.01 \times 10^{16}$ G en el primer caso, y $B \gtrsim 10^{17}$ G en el segundo. Aunque estos valores no se han observado, mucho menos en binarias, algunos modelos teóricos ponen como límite físico $B \sim 10^{18} - 10^{20}$ G.

En síntesis, la interacción magnética entre estrellas de neutrones típicas, es despreciable sobre las señales gravitatorias en la fase inspiral, como apuntan otros trabajos similares. Sólo en condiciones extraordinarias, la huella de la interacción magnética podría verse reflejada en la dinámica orbital del sistema y su radiación gravitatoria.

La astronomía de multimensajeros y ondas gravitatorias apenas comienza, próximamente nuevos detectores se sumarán a la red de LIGO y Virgo, con sensibilidades y rangos de frecuencia más amplios. De modo que, sigue siendo necesario modelar todas las posibles fuentes de ondas gravitatorias, explorando y cuestionando distintos aspectos de su naturaleza. En ese sentido, el presente trabajo contribuye al estudio de una de las principales fuentes (binarias magnetizadas), aportando un modelo simplificado pero claro y analítico, que permite entender las relaciones entre las variables del sistema, incluidos sus campos magnéticos.

Índice general

1. CONTEXTO ASTROFÍSICO	1
1.1. Estrellas	1
1.2. Objetos compactos	4
1.2.1. Enanas blancas	4
1.2.2. Hoyos negros	5
1.2.3. Estrellas de neutrones	7
1.3. Sistemas binarios	11
1.3.1. Fuentes compactas de rayos X	12
1.3.2. Binarias de estrellas de neutrones	13
1.4. El Universo de las ondas gravitatorias	13
1.4.1. Detectores	15
1.4.2. Espectro y frecuencias	17
1.4.3. Fuentes	17
1.4.4. Forma de ondas y extracción de señales	19
1.4.5. Sistemas binarios como fuentes	20
2. ENFOQUE NEWTONIANO	23
2.1. Dinámica newtoniana	23
2.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	24
2.1.2. Problema de Dos Cuerpos con Fuerza Central	25
2.1.3. Ley de Gravitación Universal	30
2.2. Electrodinámica	32
2.2.1. Para estrellas de neutrones	33
2.2.2. Fuerza y energía potencial de un dipolo magnético	35
2.2.3. Sistema de dos dipolos magnéticos	36
3. RELATIVIDAD GENERAL Y ONDAS GRAVITATORIAS	38
3.1. Relatividad General	38
3.1.1. Espaciotiempo y Gravedad	38
3.1.2. Tensor de Energía-Momento	40
3.1.3. Principio de Equivalencia y ecuaciones de campo	40
3.2. Linearización de las ecuaciones de campo	41
3.2.1. Linearización en Minkowski	42
3.2.2. Propagación en el vacío	44
3.2.3. Energía de las ondas	45
3.3. Fuentes débiles de radiación	46

3.3.1.	Fuentes con velocidades arbitrarias	47
3.3.2.	Fuentes lentas: Aproximación cuadrupolar	48
3.3.3.	Luminosidad gravitatoria	50
3.4.	Aplicaciones	50
3.4.1.	Análisis cualitativo: frecuencias	51
3.4.2.	Análisis cualitativo: deformación y luminosidad	54
3.4.3.	Sistema binario en órbitas circulares	55
4.	ANÁLISIS DEL SISTEMA BINARIO	60
4.1.	Planteamiento	60
4.2.	Problema de dos cuerpos newtoniano	64
4.2.1.	Ecuaciones de movimiento	65
4.2.2.	Condiciones Iniciales	66
4.2.3.	Análisis Orbital	67
4.3.	Radiación gravitatoria en órbitas circulares	72
4.3.1.	Cálculo de la luminosidad	73
4.3.2.	Decrecimiento radial	74
4.3.3.	Evolución de sistema	75
4.3.4.	Strain y frecuencia de las ondas	76
4.3.5.	Reducción al caso $\beta = 0$	76
4.4.	Fase inspiral general	78
5.	RESULTADOS Y DISCUSIÓN	80
5.1.	Aplicación sobre PSR 1913+16	80
5.1.1.	Al día de hoy: caso kepleriano	81
5.1.2.	A $30 r_s$: caso gravitomagnético	85
5.1.3.	Circularización*	89
5.1.4.	A siete r_s	90
5.2.	Aplicación sobre la binaria progenitora de GW170817	94
5.3.	Discusión	98
5.4.	Comparación con otros trabajos similares	103
6.	CONCLUSIONES	105
7.	ANEXO	108
7.1.	Sistema de unidades	108
7.2.	Adimensionalización y unidades patrón	109
7.3.	Cálculo de la ecuación dE/dt	112
7.4.	Códigos	114
Bibliografía		120

Capítulo 1

CONTEXTO ASTROFÍSICO

En una noche de luna nueva, libre de contaminación lumínica, el ojo humano promedio observaría alrededor de 2,000 estrellas. Muy pocas, comparadas con las 200,000 millones de estrellas estimadas sólo dentro de nuestra galaxia, la Vía Láctea. En la Antigüedad, se creía que las estrellas eran fuentes eternas de luz y que estaban fijadas a la bóveda celeste, pero la realidad es que las estrellas, como todo, son objeto de cambio y transformación. El destino de cualquier *estrella* es¹, convertirse en una *enana blanca*, una *estrella de neutrones* o, un *hoyo negro*, llamados de forma genérica *objetos compactos*. En las últimas décadas, los *sistemas binarios* de objetos compactos ha cobrado gran relevancia, por ser la fuente de señales electromagnéticas de altas energías (como rayos-X y radio), pero también de *ondas gravitatorias*, detectadas por primera vez en 2016 por la colaboración LIGO. Al menos una de ellas, la *señal GW170817*, está atribuida a la fusión de dos estrellas de neutrones.

Todas estas ideas y conceptos en *cursivas*, serán abordados en este capítulo. En la primera sección se describe la evolución de las estrellas hasta volverse objetos compactos. En la segunda sección, se revisa más detallada e históricamente, cada uno de ellos, empezando por las enanas blancas, terminando con las estrellas de neutrones y, poniendo atención en sus propiedades magnéticas. En la tercera sección se habla de los sistemas binarios astrofísicos, sus mecanismos de interacción y tipos. En la última sección se explica simplícidamente y sin ecuaciones, qué son las ondas gravitatorias, sus observaciones actuales, el funcionamiento de los detectores interferométricos, como se calcula la forma de las señales y las fuentes que se espera detectar, poniendo énfasis en los sistemas binarios.

1.1. Estrellas

Para una revisión detallada de esta tema, puede consultarse Pols O. R. (2011, [1]) ó Christensen-Dalsgaard J. (2008, [2]).

Una *estrella* es un objeto ligado por su autogravedad que radía energía proporcionada por una fuente nuclear interna y que se encuentra en equilibrio hidrostático. El na-

¹A excepción de las enanas rojas, estrellas pequeñas que queman hidrógeno tan lentamente, que el tiempo del Universo no ha sido suficiente para ver su transición a otro estadio evolutivo.

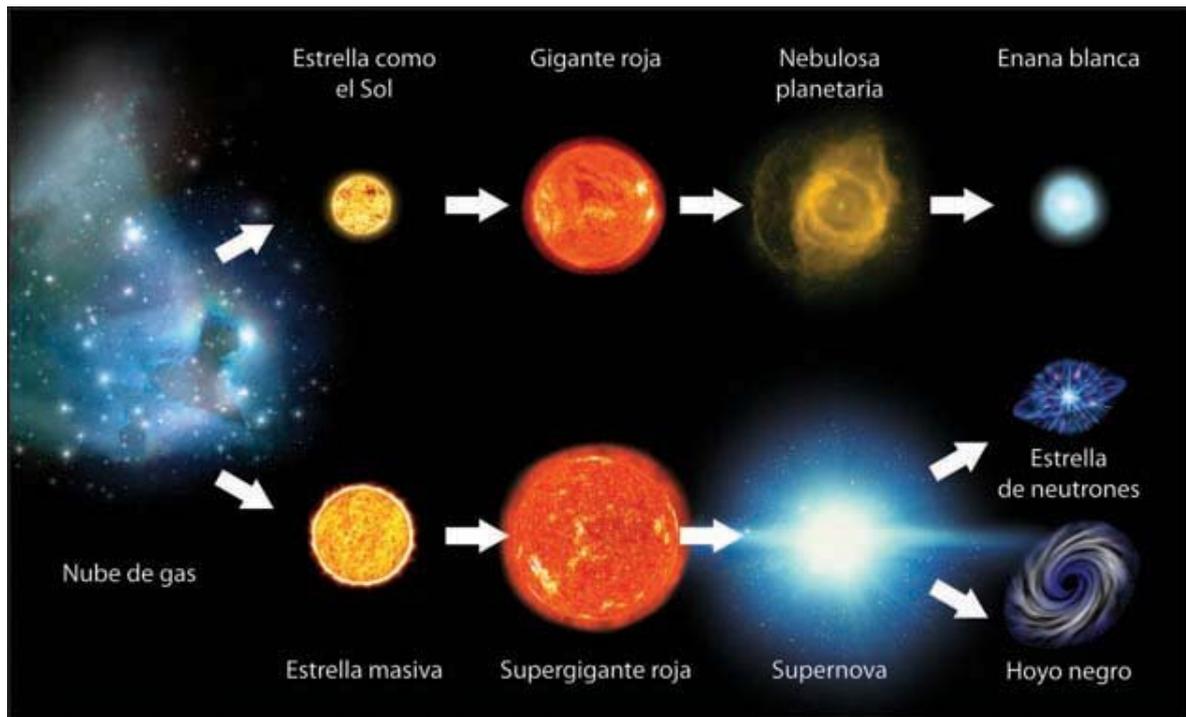


Figura 1.1: Ciclo de vida de las estrellas. Las estrellas nacen en nubes de gas y dependiendo de su masa inicial, su evolución la llevará a explotar como nebulosa o supernova, dejando como remanente una enana blanca, una estrella de neutrones o un hoyo negro.

El nacimiento de las estrellas ocurre al interior de nubes gaseosas con densidades del orden de $10^3 - 10^4$ partículas/cm³ y bajas temperaturas (10-30 K) compuestas principalmente de hidrógeno atómico ionizado, llamadas regiones HII. En general, las nubes se encuentran en equilibrio hidrostático, pero éste se rompe cuando la presión interna no es suficiente como para evitar el colapso gravitatorio del gas, proceso conocido como *inestabilidad de Jeans*, que da lugar a una protoestrella. Poco a poco se añade masa al núcleo, lo que favorece su compactación y opacidad. La esfera de gas se contrae, incrementando gradualmente su temperatura central hasta *encender* la fusión de átomos de hidrógeno en átomos de helio. Estas reacciones nucleares son la fuente de energía que balancea a la gravedad y permite el equilibrio hidrostático de la estrella recién nacida.

Durante la mayor parte de su vida, la fusión de átomos de hidrógeno en átomos de helio será la fuente de energía de la estrella. A esta etapa se le conoce como *secuencia principal*, donde la estructura de la estrella está caracterizada por cinco ecuaciones: de equilibrio hidrostático, conservación de masa o continuidad, transferencia radiativa, equilibrio térmico y su ecuación de estado. Cuando el hidrógeno del núcleo ha sido completamente consumido, la estrella deja de estar en secuencia principal. Lo que sigue en la historia de la estrella, dependerá principalmente de su masa inicial, como se resume en la Figura 1.1.

Es importante considerar que la formación de estrellas ocurre de forma grupal, no individual, dando lugar a cúmulos de estrellas con composición química y edad similar, pero distintas masas. La masa -y la metalicidad en segundo lugar- regula el camino evolutivo de la estrella porque está relacionada directamente con su luminosidad -energía liberada por segundo-. Las

estrellas más masivas son las más luminosas porque queman más hidrógeno y tienen mayores temperaturas y presiones centrales, pero también, queman su combustible y evolucionan más rápido. Dicho de otro modo, las estrellas más pequeñas fusionan hidrógeno más lentamente y permanecen más tiempo en secuencia principal. Conforme el hidrógeno se consume, el helio tiende al centro de la estrella por ser más denso.

Al final de la secuencia principal, se ha formado un núcleo de helio isoterma e inerte rodeado por una cáscara delgada de hidrógeno aún reaccionando nuclearmente. Si la estrella tiene menos de ~ 9 veces la masa del Sol, $M_{\odot} (= 1.99 \times 10^{33} \text{ g})$, entra en la fase de *gigante roja*, nombrada así porque la quema de hidrógeno en la cáscara tiene como efecto el aumento del volumen de la estrella y el enfriamiento de su superficie, lo que la enrojece. Si la estrella tiene más de $\sim 9 M_{\odot}$, luego de la quema de hidrógeno no tiene reacciones nucleares, así que la gravedad comprime la estrella, causando el calentamiento del núcleo de helio, hasta encender la quema de helio en carbono y oxígeno, que es el estado que caracteriza a la *supergigante roja*.

En las estrellas de baja masa puede pasar que la temperatura central no se incremente lo suficiente como para volver a encender las reacciones nucleares, quedándose como gigantes rojas. Con el tiempo, la estrella comienza a perder sus capas gaseosas más externas, que se expanden hacia el espacio en forma de burbuja, anillo, u otras más irregulares, dejando tras sí una estela de colores y estructuras gaseosas, llamada *nebulosa planetaria*. Al mismo tiempo, el núcleo de la gigante roja se comprime más y más, hasta que la presión del gas de electrones libres degenerados -por el principio de exclusión de Pauli-, detiene el colapso gravitatorio. Entonces, nace una *enana blanca*, millones de veces más densa que el Sol.

Volviendo a las supergigantes rojas, una vez que han quemado todo su helio en carbono y oxígeno, se comprimen y, si son suficientemente masivas, se calientan hasta encender la quema de carbono en neón y el oxígeno en silicio. El silicio produce un isótopo inestable del níquel que se desintegra rápidamente en hierro. Cada etapa es más corta que la anterior, a tal grado que la quema del silicio ocurre en tan sólo una semana, dejando tras sí un núcleo inerte de hierro. Como la fusión de hierro no libera energía, sino que la absorbe, el hierro es el último elemento producido en el núcleo de las estrellas. Al no haber reacciones nucleares, el núcleo se contrae hacia el colapso gravitatorio. En tan solo horas, el hierro comienza a fotodesintegrarse en protones, neutrones, partículas α y electrones libres.

En este punto es difícil que la presión de degeneración de los electrones pueda frenar el colapso gravitatorio, porque los electrones están siendo capturados por fotones y, transformándose en neutrones y neutrinos. Mientras el núcleo colapsa, la estrella pierde todas sus capas exteriores en una explosión de materia y radiación, conocida como *supernova*. Si la estrella original tenía entre $\sim 10 - 20$ masas solares, el remanente de la supernova es una *estrella de neutrones* porque el colapso es detenido por la presión de degeneración de los neutrones, pero sí la estrella original tenía más de ~ 20 masas solares, no hay nada que frene el colapso y se forma un *hoyo negro*.

De manera simplificada, así es como las estrellas evolucionan, mueren y se convierten en objetos compactos, ya sea en enanas blancas, estrellas de neutrones ó agujeros negros, según su masa original. A continuación se revisan las propiedades de estos objetos compactos.

Objeto	Masa (M_{\odot})	Radio (R_{\odot})	Densidad promedio (g cm^{-3})	Potencial gravitatorio (GM/Rc^2)
Sol	1	1	1	10^{-6}
Enana blanca	$\lesssim 1$	$\sim 10^{-2}$	$\lesssim 10^7$	$\sim 10^{-4}$
Estrella de neutrones	$\sim 1 - 3$	$\sim 10^{-5}$	$\gtrsim 10^{15}$	$\sim 10^{-1}$
Hoyo negro	cualquiera	$2GM/c^2$	$\sim M/R^3$	~ 1

Tabla 1.1: Comparación de los parámetros característicos del Sol y objetos compactos. Tomado de Shapiro, et. al. (1983, [3]).

1.2. Objetos compactos

Para una revisión más profunda de éstos puede consultarse Shapiro et. al (1983, [3]) ó Camenzin M. (2007, [4]).

Por *objetos compactos* nos referimos al conjunto de las enanas blancas, estrellas de neutrones y hoyos negros. Se caracterizan por tener altas densidades (ver Tabla 1.1) y no tener reacciones nucleares y, aún así, ser estables. Su equilibrio gravitatorio es mantenido por la presión de degeneración de electrones en el caso de las enanas blancas y, por la presión de degeneración de neutrones en las estrellas de neutrones, mientras que los hoyos negros están completamente colapsados.

Los objetos compactos² son el producto final de la evolución de todas las estrellas.

1.2.1. Enanas blancas

Las enanas blancas poseen masas similares a la del Sol, sin embargo, son del tamaño de la Tierra, tienen densidades medias entre $10^6 - 10^7 \text{ g cm}^{-3}$. Son el resultado evolutivo de estrellas con menos 8 masas solares, siendo mantenidas por la presión de degeneración de electrones. Se nombran así porque son blancas, pues tienen temperaturas superficiales cercanas a los 10,000 K. También, tienen la propiedad de que conforme más masa tienen, más pequeñas son y más altas son las velocidades de los electrones en el núcleo. Sin embargo, sus velocidades están acotadas por la de la luz, lo que se traduce en la existencia de un límite superior de masa al cual la presión de degeneración de electrones ya no puede frenar el colapso gravitatorio, llamado *límite de Chandrasekhar*, alrededor de $1.447 M_{\odot}$.

Como no tienen reacciones nucleares, el destino de una enana blanca es radiar en el rango óptico la energía térmica residual hasta enfriarse y perder todo su brillo, hasta 10^9 años. Por su baja luminosidad son difíciles de detectar, a menos que se encuentren acompañadas por otra estrella. Son los objetos compactos más abundantes en la Vía Láctea.

El primer sistema estelar con una enana blanca fue descubierto por Willian Herschel (1785, [5]), pero él nunca supo que el sistema contenía un objeto compacto. Se trataba del sistema

²A excepción de los agujeros negros de millones de masas solares que habitan el centro de prácticamente todas las galaxias, cuyo origen puede ser más bien cosmológico. Los hoyos negros supermasivos no se consideran en este trabajo.

estelar triple *40 Eridani* comprendido por dos estrellas en secuencia principal y la enana blanca, cuyo tipo espectral fue confirmado hasta 1914 por Walter Adams. La segunda enana blanca descubierta fue *Sirio B*, que forma parte de un sistema binario. *Sirio B* también fue estudiada por W. Adams en 1915, quien a partir de su espectro determinó que su radio debería ser 18,800 km -cuatro veces más de las actuales estimaciones-, y su masa entre 0.75-0.95 M_{\odot} . En 1920, Sir Arthur Eddington publicó su libro *The internal constitution of the stars* [6], donde, haciendo uso de la teoría de Relatividad General y los resultados de W. Adams, confirmó la existencia teórica de las enanas blancas y popularizó su nombre.

En el mismo año (1926), Paul Dirac formuló la estadística de Fermi-Dirac, válida para sistemas de fermiones (electrones, neutrones, protones, quarks, mounes y neutrinos). Rápidamente, R. H. Fowler aplicó la estadística de Fermi-Dirac para explicar la naturaleza de las enanas blancas y descubrió que la presión de los electrones degenerados puede evitar el colapso gravitatorio en las enanas (1926, [7]), confirmando así las hipótesis. En 1931, Chandrasekhar incluyó efectos relativistas a la ecuación de estado de los electrones degenerados y encontró el límite de masa máxima para las enanas blancas, nombrado límite de Chandrasekhar (1931,[8]).

Con el paso de las décadas, el número de enanas blancas confirmadas ha aumentado. Entre los catálogos más recientes se encuentra el trabajo de Kleinman et al. (2013, [9]), quienes utilizando los datos del *Sloan Digital Sky Survey SDSS-DR7*, clasificaron el espectro de 19,713 enanas blancas. En un trabajo más reciente de Jiménez-Esteban F. M et al (2018, [10]), presentan un catálogo de 73, 221 candidatos de enanas blancas, extraídos de los datos astrométricos y fotométricos del catálogo *Gaia-DR2*.

Sobre sus campos magnéticos A la fecha no está resuelto el problema de la estructura interna de las enanas blancas, por lo tanto, tampoco es clara su naturaleza electromagnética. Sin embargo, sí se han medido campos magnéticos en enanas blancas, siendo la primera, GJ742 con 3×10^8 G (1970, [11]), muy por encima de cualquier estrella ($\lesssim 100$ G). El valor del campo magnético de cada enana blanca catalogada puede estimarse analizando en su espectro el efecto Zeeman. Éste consiste en la división de una línea espectral en varias componentes a causa de un campo magnético externo. En el reciente trabajo de Kepler S. O. et al. (2012, [12]), reportan que aproximadamente 4% de las enanas blancas del catálogo SDSS-DR7 tienen campos magnéticos entre $10^6 - 7.33 \times 10^8$ G. Para llegar a tal resultado, identificaron visualmente aquellos espectros con efecto Zeeman.

Entre los argumentos para explicar tales valores tan elevados, se encuentra el trabajo de Koester D. et al (1969, [13]), quienes argumentan que, puesto que el flujo magnético superficial previo al colapso debe conservarse después de éste, la reducción de su tamaño al convertirse en enana blanca (hasta 100 veces) implica un incremento del campo magnético hasta mil veces.

1.2.2. Hoyos negros

Un hoyo negro es un objeto con un campo gravitatorio tan intenso que la velocidad de escape mayor que la velocidad de la luz. Se forman tras el inevitable colapso gravitatorio

de estrellas con masa original mayor a $\sim 20 M_{\odot}$. Su definición formal se da dentro de la teoría de la Relatividad General (ver Sección 3.1): los hoyos negros son discontinuidades del *espaciotiempo*, ó *singularidades*, rodeadas por una superficie cerrada llamada *horizonte de eventos*, que es la frontera de una región sin retorno para la luz ni para la materia (1998, [14]).

La velocidad de escape es aquella a la que debe lanzarse cualquier cosa para que no vuelva a caer y en cambio, se aleje hacia el espacio; mientras más denso sea el objeto astrofísico desde el cual se lanza, mayor debe ser la velocidad proporcionada. A finales del siglo XVIII, John Michell y por separado Pierre Laplace, calcularon con teoría newtoniana la densidad que debería tener un objeto para que la velocidad de escape fuese mayor a la de luz, que es la velocidad máxima en el Universo. Propusieron la existencia de *estrellas oscuras*, donde hasta la luz quedaría atrapada por el campo gravitatorio de la estrella, y, estimaron que el Sol debería comprimirse en 3 kilómetros para convertirse en una estrella negra. Sin embargo, fue hasta el siglo XX que el concepto resurgió.

En 1915 Albert Einstein publicó la teoría de la relatividad general en una serie de artículos. Un año después (1916, [15]) Karl Schwarzschild derivó una solución general para el campo gravitatorio alrededor de una masa esférica estática. Envió su artículo a Einstein, quien respondió "*I had not expected that the exact solution to the problem could be formulated. Your analytical treatment of the problem appears to me splendid*". En ese momento, ninguno de los dos entendió que la solución de Schwarzschild contiene la descripción completa del campo externo de un hoyo negro esférico, no rotante y eléctricamente neutro. En 1931, -como describimos en la parte de enanas blancas- los trabajos de Chandrasekhar sugerían que por encima de $\sim 1.44 M_{\odot}$, la presión de degeneración de los electrones no podría evitar el colapso gravitatorio de un objeto, ó equivalentemente, que estrellas muy masivas inevitablemente terminarían siendo hoyos negros. La idea no fue bien recibida por personalidades como Eddington (1935, [16]) y Landau, y, el problema fue en general ignorado hasta la década de los 50's, cuando J. A. Wheeler y colaboradores, comenzaron a estudiar seriamente el problema del colapso gravitatorio y dedujeron la existencia de *estrellas en colapso gravitatorio completo*, hasta que John Wheeler introdujo el término de *hoyo negro* (1969, [17]).

Por el lado teórico, R. Kerr construyó una familia de soluciones para hoyos negros rotantes libres de carga (1963, [18]). Dos años después, Newman et al. (1965, [19]) resolvieron las ecuaciones de campo Einstein-Maxwell para hoyos negros cargados electricamente pero estáticos. Finalmente, fue posible construir la solución más general conocida a la fecha dada por la *geometría Kerr-Newman* [20] que provee una descripción única y completa del campo externo tanto gravitatorio como electromagnético de un hoyo negro estacionario, caracterizado por tres parámetros: masa, carga eléctrica y momento angular (1986,[21]). Stephen Hawking y Roger Penrose demostraron que los hoyos negros, son soluciones a las ecuaciones de Relatividad general.

Como veremos en §1.3.1, en la década de los 60's, se descubrieron fuentes galácticas con emisión electromagnética en rayos X; una de las hipótesis era que algunas fuesen hoyos negros, sin embargo, fue el descubrimiento del sistema binario Cygnus X-1, la primera evidencia pausable de un hoyo negro (1965, [22]). En años recientes se ha conseguido evidencia directa de la existencia de hoyos negros. Desde 2016, la colaboración LIGO para la detección de ondas gravitatorias -descritas en §1.4-, ha encontrado señales provenientes de la fusión de

dos agujeros negros, generando por primer vez un catálogo con 20 hoyos negros confirmados (2019, [23]). Y, en 2019, el proyecto Event Horizon Telescope, compuesto por 8 radiotelescopios conectados entre sí, capturó la primera imagen de un hoyo negro supermasivo, localizado al centro de la galaxia M87 (2019, [24]).

Sobre sus campos magnéticos Aunque existe una solución completa para modelar un hoyo negro cargado y rotante, es difícil que exista alguno con carga eléctrica no nula porque, si la tuviese, tendería a neutralizarse acretando materia cargada opuestamente (1982,[25]). Por ello, el agujero negro de mayor interés astrofísico es el descrito por la métrica de Kerr: esférico, eléctricamente neutro y rotante.

1.2.3. Estrellas de neutrones

Una estrella de neutrones es el remanente de estrellas entre ~ 10 y $20 M_{\odot}$ que han agotado todo su combustible nuclear pero el colapso gravitatorio ha sido detenido por la presión de degeneración de los neutrones. Suelen estar asociadas a supernovas tipo II.

La existencia de las estrellas de neutrones comenzó a hipotetizarse por Bade y Zwicky (1934,[26]), después del descubrimiento del neutrón por Chadwick (1932, [27]). Los primeros modelos teóricos del interior de las estrellas de neutrones fueron desarrollados por Oppenheimer, Volkov y Tolman (1939, [28], [29]), quienes encontraron un límite de máxima masa para un objeto sostenido por la presión de degeneración de neutrones, alrededor de $3M_{\odot}$, análogo al límite de Chandrasekhar para las enanas blancas.

La observación de estos objetos fue posible hasta que existieron telescopios avanzados de radio y rayos-X. En la década de los 60's, las estrellas de neutrones fueron el principal candidato de varias fuentes anómalas de rayos-X (1964, [30]). Shklovsky fue el primero en identificar la fuente ScoX-1 como una estrella de neutrones acretante (1967,[31]). Ese mismo año, luego de analizar los datos arrojados por el radiotelescopio en Arecibo, Puerto Rico, Jocelyn Bell y Antony Hewish (1967, [32]) descubrieron el primer *pulsar*, después identificado como una estrella de neutrones rotante que emite en pulsos muy precisos. Prontamente, autores como Gold (1968, [33]), Gunn y Ostriker (1969,[34]) propusieron que los campos magnéticos y la rotación juegan un rol central en la generación de los pulsos.

En el último medio siglo, se han identificado distintas poblaciones de estrellas de neutrones: aisladas, en sistemas binarios, pulsares, asociadas o no a supernovas, con emisión en rayos gamma (SGRs), con emisión de rayos X (AXPs) y sin emisión en radio (radiocalladas). En la Figura 1.2 se muestra la distribución de las estrellas de neutrones confirmadas en el diagrama $P - \dot{P}$, siendo P el periodo rotacional de la estrella y $\dot{P} \equiv \frac{dP}{dt}$, su derivada temporal. Ambas variables determinan el campo magnético y la edad del objeto, representadas por las líneas puntadas. A continuación se describen los pulsares y magnetares.

Pulsares Son estrellas de neutrones que rotan emitiendo pulsos en el rango entre 1.6 ms y 4.3 s, con precisión en hasta 13 cifras significativas, por lo que se consideran los mejores relojes de la galaxia. Sus periodos se incrementan muy lentamente. En gran parte son aún

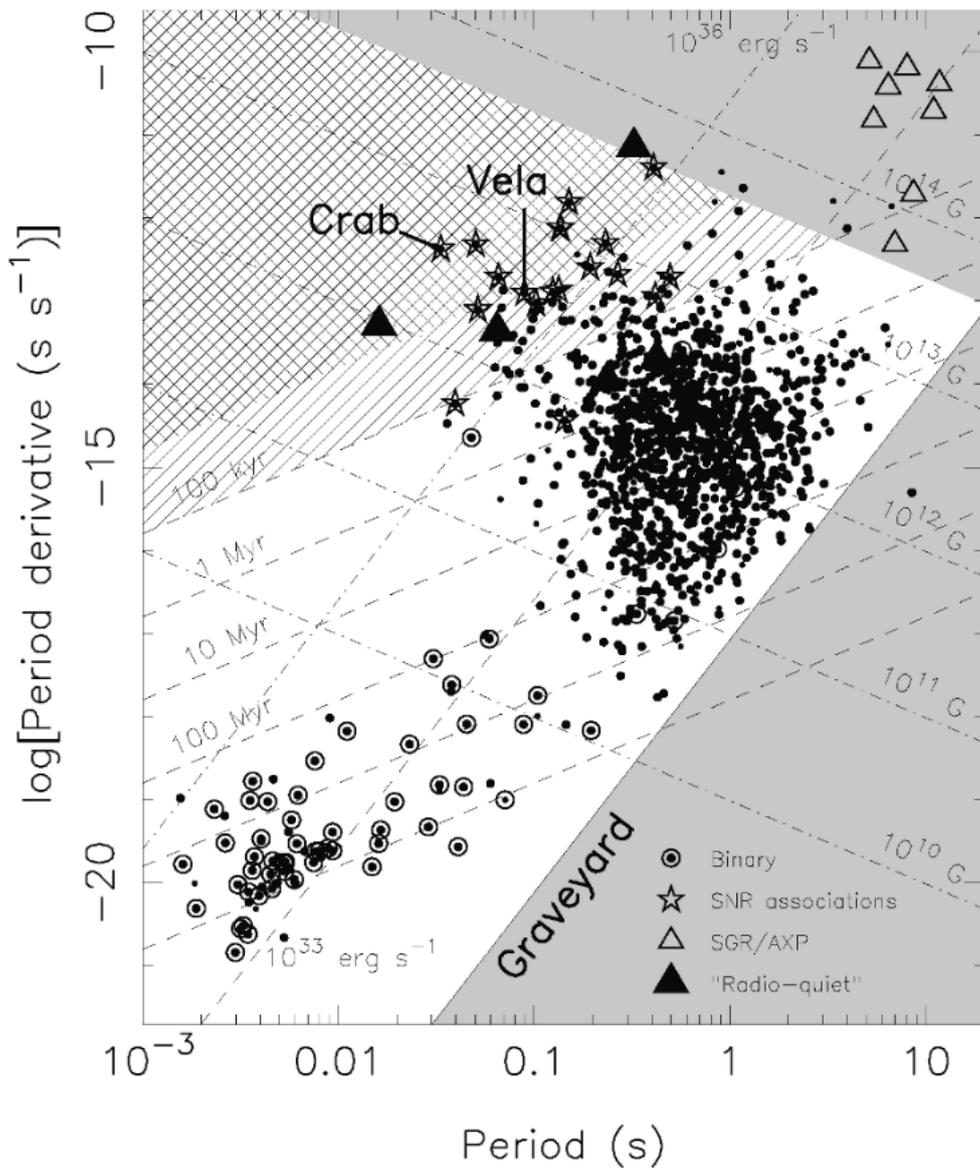


Figura 1.2: Distribución de los pulsares descubiertos en el diagrama $P - \dot{P}$. Se muestran tanto pulsares aislados como en sistemas binarios. También se muestran aquellos asociados a supernovas (SNR), a fuentes repetidoras de rayos gamma (SGRs), a fuentes anómalas de rayos X (AXPs) y los pulsares que no emiten en radio. Tomado de [35].

desconocidos los procesos por los cuales un pulsar convierte su energía rotacional en pulsos. Distintos modelos teóricos han sido propuestos, siendo el *modelo del dipolo magnético* (1967, [36]), (1969, [34]) uno de los más simplificados -será revisado en §2.2.1-. El origen de sus periodos de rotación se le atribuye a la compactación del núcleo al momento de la formación de la estrella de neutrones; por conservación de momento angular, la estrella debe girar más rápido conforme disminuye su radio, R y por lo tanto, su momento de inercia decrece, $I \sim MR^2$, siendo M la masa de la estrella. Por procesos aún poco entendidos, la contracción puede producir campos magnéticos intensos que afecten a los electrones en la magnetósfera y producir ondas de radio. Éstas señales son detectadas como pulsos regulares de periodo constante (1991,[37]).

Magnetares Son estrellas de neutrones jóvenes y altamente magnetizadas. Suelen tener actividad en rayos X acoplada al momento de rotación. Se piensa que su evolución se relaciona con el decaimiento de su campo magnético interno ultrafuerte, o al menos esto es lo que se deduce de las observaciones (2017, [38]). Casi todos los magnetares comprobados se han descubierto por los telescopios de rayos X montados en BAT y GBM-Fermi porque emiten destellos cortos, entre 2 y 12 segundos. De los 23 magnetares confirmados, 8 están asociados a remanentes de supernova. Exhiben propiedades comunes entre sí respecto a su espín, pues todas son decrecientes o "spin-down". Su cociente P/\dot{P} es del orden de miles de años y su luminosidad electromagnética, definida por $L_x \propto 4\pi/P/\dot{P}^3$, es del orden del momento de inercia, $I \sim 10^{45} \text{g cm}^2$. De estas relaciones se infiere que el campo magnético es $B > 5 \times 10^{13} \text{G}$ y en la mayoría de los casos $B \sim 10^{14} \text{G}$. Por otra parte, su espectro suele describirse bien como cuerpo negro (2010, [39]).

Se pueden ofrecer posibles explicaciones a su comportamiento. Cuando una estrella masiva colapsa y la presión de degeneración de electrones no es suficiente para evitar el colapso, pero la de neutrones sí, entonces el sistema entra en una fase de transición hacia el equilibrio descrita por las condiciones de relajación de la magnetohidrodinámica. Se piensa que la configuración magnética adquiere una fuerte componente toroidal. El enfriamiento de neutrinos produce un núcleo líquido de alrededor de 10 km rodeado por una corteza sólida de 1 km. Luego de 1 a 10 miles de años, el sistema evoluciona lentamente pero por procesos de calentamiento interno, el campo magnético decae espontáneamente cada tanto, causando en ciertas condiciones el rompimiento de la corteza, lo cual acelera el decaimiento del periodo del magnetar (2005, [40]). A la fecha, cerca de 30 magnetares han sido detectados y aparecido en la literatura astronómica bajo los nombres de Soft Gamma Repeaters (SGRs) y Anomalous X-ray Pulsars (AXPs) (2006,[41]), catalogados como estrellas de neutrones con campos magnéticos fuertes, con $B \gtrsim 10^{14} \text{G}$ y por lo tanto, clasificados como magnetares.

Sobre los campos magnéticos Las estrellas de neutrones, aunque en esencia son objetos neutros, en sus superficies o magnetósferas, albergan cargas eléctricas que se mueven y producen una corriente eléctrica cuando la estrella está rotando. Las corrientes eléctricas producen campos magnéticos (1991, [37]). Los mecanismos que producen los campos magnéticos, son en gran medida desconocidos porque implican conocer la física detrás del nacimiento, siempre explosivo, de la estrella de neutrones (1998,[42]). No obstante, la presencia de campos magnéticos intensos en objetos compactos es un hecho (2006,[43]). A muchas estrellas de

neutrones con periodo de rotación definido, se les ha medido campos magnéticos $\sim 10^{12}$ G. En recientes años se han detectado SGRs con $B \sim (10^{12} - 10^{13})$ G lo cual amplía la discusión sobre este tipo de fuentes. También se han detectado enanas blancas aisladas con momentos magnéticos entre $10^{34} \text{emu} \leq 10^{36} \text{emu}$. Mas aún, los magnetares, exhiben campos magnéticos de $\sim 10^{15}$ G.

Pero, ¿existe una cota máxima para el campo magnético? Usando el teorema del virial podemos obtener una estimación razonando que para que un objeto con campos magnéticos se mantenga en equilibrio, la energía potencial gravitatoria, U_g , debe ser del orden de la energía potencial magnética, U_m , es decir, ($U_m \sim -U_g$) (2014, [44]).

Si la masa y tamaño característico del objeto son M y R , entonces $|U_g| \sim \frac{GM^2}{R}$, mientras que $|U_m| \sim \frac{4\pi R^3}{3} \frac{B_{max}}{8\pi}$.

$$\frac{B_{max}}{8\pi} \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right) \sim \frac{GM^2}{R}.$$

Para una estrella de neutrones con $M = 1.4 M_\odot$ y $R \sim 10^4 R_\odot \sim 10^6$ cm, entonces $B_{max} \sim 10^{18}$ G, donde $R_\odot = 2GM_\odot/c^2$. Esta podría ser la cota máxima para el campo magnético, aunque en otro trabajos (1998,[42]) se ha sugerido que para una estrella ligada, el valor máximo del campo magnético en el núcleo es $B_{max} \sim 10^{20}$ G.

Compacticidad

Para concluir esta sección, introducimos una manera de cuantificar que tan *compacto* es un objeto.

El tamaño del horizonte de eventos de un hoyo negro esférico y estático recibe el nombre de *radio de Schwarzschild*, R_s , depende fundamentalmente de su masa como³,

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (1.1)$$

La *compacticidad* de un cuerpo se define como el cociente entre el radio que tendría el horizonte de eventos de un agujero negro con su masa, M y su radio real, R :

$$\mathcal{C} \equiv \frac{R_s}{R} = \frac{2GM}{c^2 R}. \quad (1.2)$$

De la Tabla 1.1., en el caso de cualquier hoyo negro (última columna), $R = r_s$, entonces, $\mathcal{C} = 1$, que de hecho es la máxima compacticidad para un objeto. Para una estrella de neutrones $\mathcal{C} = 2 \times 10^{-1} = 0.2$, y para una enana blanca, $\mathcal{C} = 2 \times 10^{-4} = 0.0002$. Si utilizamos para una estrella de neutrones, $R = 10 \text{ km} = 10^6 \text{ cm}$, y masa $M = 2.1 M_\odot = 4.18 \times 10^{33} \text{ g}$, la compacticidad es, $\mathcal{C} = 0.62$.

³No confundir con $r_s = 2GM_\odot/c^2$, que corresponde al radio de Schwarzschild de una masa solar, M_\odot .

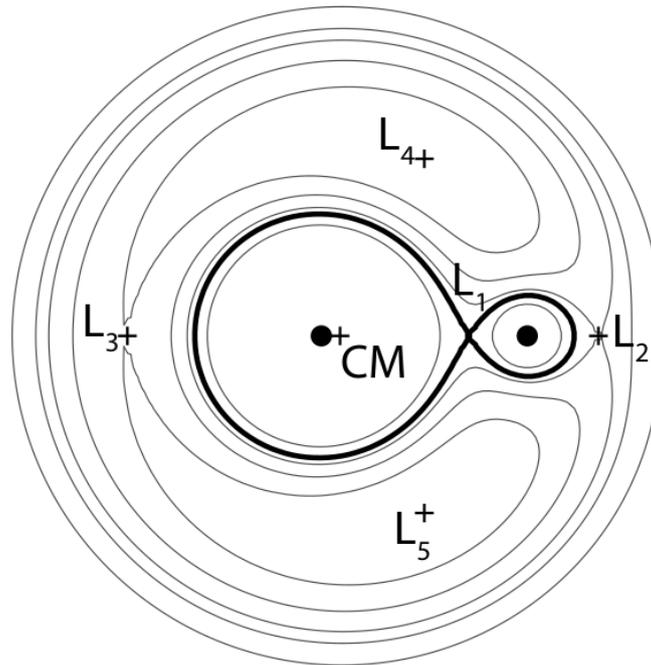


Figura 1.3: Regiones equipotenciales de un sistema binario con $M_2 = 0.1 M_1$. El símbolo + representa el centro de masa del sistema; L_i son los puntos de Lagrange; la línea negra gruesa delimita los lóbulos de Roche de cada estrella. Tomado de la Fig. 15.1 en [46].

Con referencia a una estrella como el Sol, $\mathcal{C} = 0.000002$, se entiende porque los agujeros negros, las estrellas de neutrones y las enanas blancas reciben el nombre de *objetos compactos*.

1.3. Sistemas binarios

Como ya se narró en §1.1., las estrellas se forman grupalmente en nubes moleculares -raramente de forma aislada-, por lo que la mayoría de ellas nacen siendo parte de sistemas binarios ligados por acción de la gravedad. Esta interacción causa que los dos cuerpos orbiten entorno al centro de masa del sistema, describiendo elipses en el régimen newtoniano (ver §2.1).

El potencial gravitatorio producido por ambas estrellas genera distintas regiones equipotenciales, como se aprecia en la Figura 1.3. En primer lugar, alrededor de cada estrella, existe una región en la que cualquier partícula permanecería ligada únicamente a esa estrella, llamada *lóbulo de Roche* (1873, [45]). Los *puntos de Lagrange* son puntos inestables donde la fuerza gravitatoria se equilibra con la centrífuga, de tal forma que una partícula de prueba no experimentaría fuerzas. En el punto de Lagrange interno, L_1 , se intersectan los lóbulos de Roche de ambas estrellas.

Si la separación entre las dos estrellas en secuencia principal es mucho mayor a sus tamaños, evolucionarán independientemente casi hasta su muerte. En el proceso evolutivo puede pasar que la combinación de la fuerza gravitatoria y los vientos estelares promuevan la transferencia de material de una a otra estrella a través del punto interno de Lagrange, proceso conocido

PSR	P (ms)	P_b (d)	$a_1 \sin i$ (light-s)	e	$\dot{\omega}$ ($^\circ \text{ yr}^{-1}$)	\dot{P}_b ($\times 10^{-12}$)	$f(m)$ (M_\odot)	$m_1 + m_2$ (M_\odot)	τ_{GW}^\dagger (Gyr)	References
Double neutron star binaries										
B1913+16	59.03	0.323	2.34	0.617	4.227	-2.428	0.13	2.83	0.31	1
B1534+12	37.90	0.421	3.73	0.274	1.756	-0.138	0.31	2.75	2.69	2
B2127+11C	30.53	0.335	2.52	0.681	4.457	-3.937	0.15	2.71	0.22	3
J1518+4904	40.93	8.634	20.04	0.249	0.011	-	0.12	2.62	9600	4
J1811-1736	104.18	18.779	34.78	0.828	0.009	<30	0.13	2.6	1700	5
J0737-3039A	22.70	0.102	1.42	0.088	16.88	-1.24*	0.29	2.58	0.087	6
White dwarf binaries										
B2303+46	1066.37	12.34	32.69	0.66	0.010	-	0.25	2.53	4500	7
J1141-6545	393.90	0.20	1.86	0.17	5.33	<50	0.18	2.30	0.59	8
Unknown companion										
B1820-11	279.83	357.76	200.67	0.79	<10 ⁻⁴	-	0.07	-	-	9
J1829+2456	41.00	1.17	7.24	0.14	0.28	-0.02*	0.29	2.53	60	-

(1) Hulse & Taylor (1975); Taylor & Weisberg (1989); Weisberg et al. 2003; (2) Wolszczan (1991); Stairs et al. (2002); (3) Anderson et al. (1990); Prince et al. (1991); Anderson (1992); Deich & Kulkarni (1996); (4) Nice, Sayer & Taylor (1996); Hobbs et al. (2004); (5) Lyne et al. (2000); (6) Burgay et al. (2003); (7) Thorsett et al. (1993); Arzoumanian (1995); (8) Kaspi et al. (2000); (9) Lyne & McKenna (1989); Thorsett et al. (1993). *Predicted value. [†]Calculated using formula (4).

Figura 1.4: Parámetros orbitales de varios sistemas binarios relativistas de objetos compactos. Tabla tomada idénticamente de (D. J. Champion, et. al., 2004) [48].

como *acreción*, ó que una de las dos estrellas supere su lóbulo de roche, produciendo también un disco de acreción (1988, [47]) y emisión de ondas electromagnéticas de alta energía (ver §1.3.1).

Bajo ciertas condiciones, las dos estrellas originales pueden seguir ligadas aún después de convertirse en objetos compactos, en tal caso reciben el nombre de *binarias compactas*. En la Figura 1.4, se muestra una lista de sistemas binarios relativistas y sus parámetros orbitales.

1.3.1. Fuentes compactas de rayos X

En la década de los 60's, Giacconi et al. (1962, [49]), incluyeron tres contadores Geiger a un cohete *Aerobee* con el propósito de detectar rayos-X en la Luna, sin saber que sería el inicio de una nueva era en la astronomía, en cambio, lo que descubrieron fue una brillante fuente radiando en la banda 1-10 KeV en la constelación Scorpio, *Sco X-1*. Al finalizar la década, cerca de 20 fuentes de rayos-X ya habían sido identificadas cerca del plano orbital -sugiriendo que eran parte de la Vía Láctea-. Con el lanzamiento del satélite *Uhuru*, el número de fuentes incrementó a más de 300, siendo *Cygnus X-1* una de las más intensas y variable en el tiempo (1964, [50]).

Con el tiempo, se entendió que la mayoría de las fuentes galácticas de rayos-X son objetos compactos acretando gas de una estrella normal: cuando la estrella más masiva supera su lóbulo de Roche, comienza a perder gases a través del punto interno de Lagrange, al mismo tiempo que una gran cantidad de energía es liberada en forma de calor y radiación. El gas alcanzará velocidades relativistas al entrar en la atmósfera del objeto compacto, dando como resultado la emisión de rayos-X. En *Sco X-1* el objeto compacto es un púlsar, mientras que en *Cygnus X-1* es un hoyo negro con $M > 3.5 M_\odot$ (2004, [51]). Si la estrella compañera tiene

una masa $\sim 0.5M_{\odot}$, se dice que es una fuente compacta de baja masa (LMXB). En tal caso, el sistema está debilmente afectado por las fuerzas de marea. Si tiene $\sim 9M_{\odot}$, se dice que es de alta masa (HMXB). Entre ambas, se tienen la fuentes de masa intermedia.

1.3.2. Binarias de estrellas de neutrones

Dos estrellas de neutrones comienzan su vida siendo estrellas en secuencia principal con masas $> 9 M_{\odot}$. Eventualmente la más masiva evoluciona hasta explotar en una supernova cuyo remanente es una estrella de neutrones, a veces visto como pulsar. En este punto evolutivo el sistema podría ser una binaria HMXB. La estrella en secuencia principal incrementa su tamaño hasta sobrepasar su lobulo de Roche. La acreción sobre el pulsar puede causar un aumento en el espín del pulsar, con periodos de hasta milisegundos ([52]). Eventualmente, la compañera masiva también termina explotando en supernova. En la mayoría de los casos el evento violento rompe el sistema pero en algunos casos, el sistema sobrevive, formándose así las binarias de estrellas de neutrones.

Entre los ejemplos más emblemáticos de dos estrellas de neutrones se encuentra el PSR B1913+16 -a continuación descrito-, y el sistema asociado a la señal electromagnética GRB 17817 y la señal gravitatoria GW170817 -descrita en la siguiente sección-.

Pulsar de Hulse y Taylor En 1974, R. A. Hulse y J. H. Taylor realizaban la primera búsqueda sistemática de fuentes de radio, cuando encontraron la señal PSR B1913+16. Se trataba de un radiopulso con una precisión altísima de $300 \mu s$, pero con una variación sistemática en el tiempo de llegada de las pulsaciones, cada 7.75 horas (1975, [53]). Acertadamente, concluyeron que los radiopulsos son emitidos por un púlsar, y que la variación sistemática es debido a que pertenece a un sistema binario con otro objeto compacto radiocallado, dando una masa total de $2.83 M_{\odot}$. También estimaron parámetros intrínsecos del sistema binario, tales como su periodo, excentricidad, periastro y avance, reportados en la Tabla 1.2.

El pulsar binario resultó ser el mejor laboratorio para probar efectos relativistas como Doppler, corrimiento al rojo, avance del periastro; todos éstos comprobados exitosamente. Mas aún, encontraron que su periodo orbital decrece a razón de $(8.64 \pm 0.02) \times 10^{18} \text{ s/s}$, hecho considerado como la primera prueba indirecta de la existencia de las *ondas gravitatorias*, pues la curva del cambio de periodo en los años, sigue la forma de la predicción relativista, como se muestra en la Figura 1.5. Recibieron por ello el Premio Nobel de Física (1993, [55]).

1.4. El Universo de las ondas gravitatorias

Una revisión completa de relatividad general y de ondas gravitatorias puede encontrarse respectivamente en (1972, [57]) y (2007, [58]). Una introducción formal se presenta en el capítulo 3 de esta tesis.

Parámetro	Valor	Unidades
P_p	0.059029995279(20)	s
\dot{P}_p	$8.628(20) \times 10^{-18}$	adim
$a_1 \sin i$	2.34186(24)	c · s
e	0.617139(5)	adim
P	27906.98161(3)	s
\dot{P}	$-2.30(22) \times 10^{-12}$	adim
ω	178.8656(15)	deg
$\dot{\omega}$	4.2261(7)	deg · año ⁻¹
$f(m)$	0.13	M_\odot
M	2.83	M_\odot

Tabla 1.2: Parámetros del pulsar binario PSR B1913+16. P_p es el periodo del pulsar, i es el ángulo de inclinación del plano orbital con la línea de visión, a_1 es la distancia del C.M. al pulsar, e es la excentricidad de las órbitas, P el periodo orbital, ω es la distancia angular del periástro al pulsar, medido en el plano orbital [53] y [54].

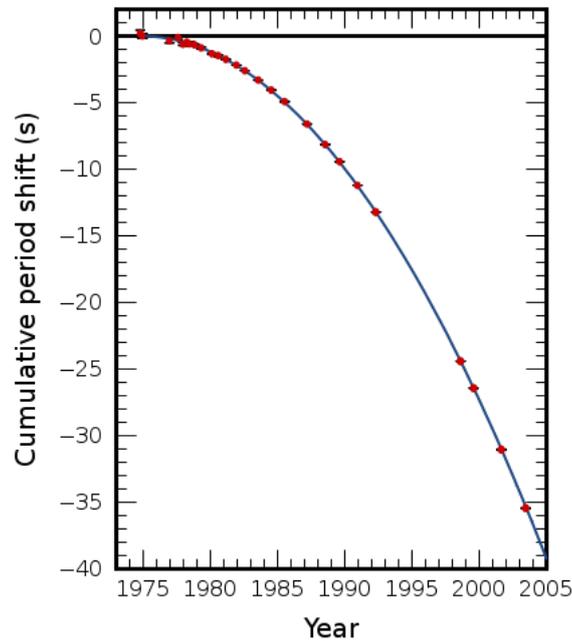


Figura 1.5: Cambio acumulado en el periodo orbital respecto al tiempo del PSR B1913+16, durante casi 30 años de observaciones. La curva continua representa la predicción relativista y los puntos rojos las observaciones (2016, [56]).

La Radiación Gravitatoria es una predicción natural de la descripción relativista de la Gravedad, una de las cuatro interacciones fundamentales del Universo. La estructura matemático-teórica que la predice es la teoría de la Relatividad General, por Albert Einstein en 1915 y sintetizada en un conjunto de diez ecuaciones diferenciales de campo que relacionan la curvatura del espacio-tiempo con el contenido de materia y energía. Las ondas gravitatorias son soluciones tipo onda a las ecuaciones de campo. En el vacío viajan a la velocidad de la luz y poseen dos grados de polarización. Pueden afectar el movimiento de la materia, e inversamente, ser generadas por el movimiento acelerado de materia, como se demostrará en la Sección §3.2.

Un siglo de desarrollo teórico, computacional y tecnológico fue necesario para que se detectaran por primera vez de forma directa ondas gravitatorias (2015, [59]). El descubrimiento fue realizado por la Colaboración LIGO (Advanced Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory (2015, [60])). A la señal se le nombró GW150914 como acrónimo del tipo (Gravitational Waves) y fecha de detección (14/09/15). Mediante la forma de la onda gravitatoria (waveform) se infirió que GW150914 se produjo durante la coalescencia de dos agujeros negros de 35.6 y 28.6 M_{\odot} .

Por este descubrimiento, en 2017 se le otorgó el Premio Nobel en Física a Barry C. Barish, Kip S. Thorne y Reiner Weiss, pioneros y constructores del sueño de detectar las oscilaciones del mismísimo espacio-tiempo [61]; aunque junto a ellos, se encuentra el esfuerzo colaborativo de más de 1,300 científicas y científicos de varios países.

En Diciembre de 2018, la Colaboración LIGO y la Colaboración Virgo presentaron los resultados de la búsqueda de ondas gravitatorias por la coalescencia de objetos compactos de masas estelares del primer (2016, [62]) y segundo periodo de Observación (O1 de 12/09/15 a 19/01/16 y O2 de 30/11/16 a 25/08/17) con su red de detectores en un primer Catálogo de eventos Transitorios de Ondas Gravitatorias (GWTC-1) (2019, [23]). De acuerdo a éste, existen once señales confirmadas, todas provenientes de la fusión de agujeros negros binarios y una por la fusión de dos estrellas de neutrones (Ver Tabla 1.3).

En Abril de 2019 comenzó el tercer periodo de observación y, al 31 de Julio de 2019, la colaboración LIGO y Virgo reportó 18 candidatos a fusión de agujeros negros y 4 de estrellas de neutrones. De confirmarse, la cantidad de señales astrofísicas gravitatorias se duplicaría.

1.4.1. Detectores

En la actualidad existen tres detectores de ondas gravitatorias en operación en el mundo; los tres utilizan interferometría láser. El funcionamiento de un interferómetro láser es el siguiente. Está formado por dos brazos perpendiculares de longitud kilométrica, L , completamente aislados y al vacío, en forma de L. Un láser (luz coherente) se apunta hacia un divisor de haz y luego de separarse en dos, se direccionan hacia cada brazo. Espejos funcionan como masas de prueba y reflejan cada haz hasta el final de cada brazo, donde otro espejo los vuelve a reflejar hacia la intersección de los brazos para ser recombinado con el otro haz. Luego, mediante el análisis del patrón de interferencia se determina si en el trayecto hubo diferencias en el tiempo de llegada y en las distancias recorridas, es decir, si la luz fue afectada externamente. Como todas las fuentes de ruido están bien caracterizadas, con el

EVENTO	M_1/M_\odot	M_2/M_\odot	\mathcal{M}/M_\odot	M_f/M_\odot	s_f	L_{peak}/L_0	d_L/Mpc
GW150914	35.6	30.6	28.6	63.1	0.69	3.6	430
GW151012	23.3	13.6	15.2	35.7	0.67	3.2	1060
GW151226	13.7	7.7	8.9	20.5	0.74	3.4	440
GW170104	31.0	20.1	21.5	49.1	0.66	3.3	960
GW170608	10.9	7.6	7.9	17.8	0.69	3.5	320
GW170729	50.6	34.3	35.7	80.3	0.81	4.2	2750
GW170809	35.2	23.8	25.0	56.4	0.70	3.5	990
GW170814	30.7	25.3	24.2	53.4	0.72	3.7	580
GW170817	1.46	1.27	1.186	<2.8	<0.89	>0.1	40
GW170818	35.5	26.8	26.7	59.8	0.67	2.7	1020
GW170823	39.6	29.4	29.3	65.6	0.71	3.3	1850

Tabla 1.3: Parámetros de las fuentes de las once señales confirmadas a Diciembre de 2018. De izquierda a derecha se muestra: el nombre del evento, la masa del objeto más masivo M_1 y del segundo objeto M_2 antes del choque, la masa chirp definida como: $\mathcal{M} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, la masa del objeto final M_f , su espín adimensional s , la luminosidad máxima L_{peak} escalado por $L_0 = 10^{56} \text{ erg s}^{-1}$, y la distancia lumínica d_L a la fuente. Datos tomados de la Tabla III en [23].

análisis interferométrico puede determinarse si la luz fue afectada por una onda gravitatoria porque éstas causan contracción en los brazos, ΔL (2009, [63]).

Hasta ahora, existen tres interferómetros terrestres en operación con sensibilidad hasta $\Delta L/L \sim 10^{-21}$ y frecuencias entre Hz y kHz. Los detectores de LIGO están ubicados en Livingston y Hanford, EE.UU. VIRGO utiliza un interferómetro de primera generación ubicado en Italia y entró en sintonía 15 días con LIGO en la última fase de O2 (2015, [60]). La sensibilidad de los tres interferómetros se muestra en la Figura 1.6.

Además existe otro detector en Alemania, llamado GEO600, que ha seguido las observaciones de LIGO, pero sobre todo, colaborado en la parte tecnológica de los interferómetros. Un interferómetro más se encuentra en construcción en Japón, llamado KAGRA, cuyo inicio está programado para 2020. En India ha proyectado construir un tercer interferómetro de LIGO. Más aún, ya existe la propuesta de interferómetros espaciales: LISA (Laser Interferometer Space Antenna), un arreglo de tres satélites para formar interferómetros laser de 2.5 millones de kilómetros de longitud capaces de detectar menores frecuencias (2009, [64]).

Para la detección con interferometría es fundamental tener *formas de onda*. El análisis de las señales es complejo. Las señales se extraen de los datos mediante la comparación sistemática con plantillas de ondas gravitatorias y variando los parámetros intrínsecos y extrínsecos del sistema entre los intervalos esperados. Los parámetros intrínsecos que consideran los algoritmos PyCBC y GstLAL -los que utiliza LIGO-, son las masas de los objetos M_1 y M_2 y sus espines vectoriales s_1 y s_2 ; se asume que los objetos no tienen carga eléctrica (2016, [65]).

Además, existen otras formas de detectar ondas. Por ejemplo, a través de encontrar su huella cosmológica sobre la radiación de fondo de microondas (CMB), aprovechando el hecho físico de que la radiación gravitatoria afecta a la electromagnética polarizándola (1997, [66]). No obstante, esta forma requiere acotar el espectro de potencias del CMB a mayores ordenes y

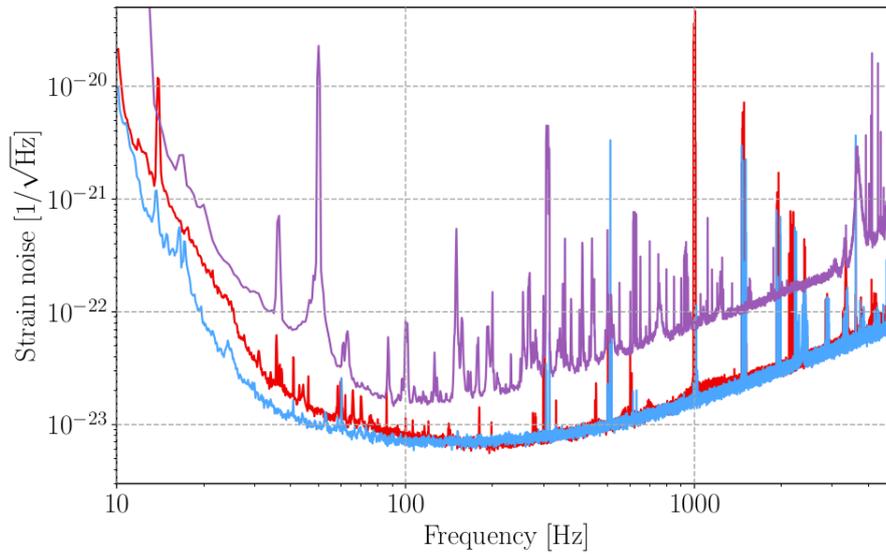


Figura 1.6: Rango de detección de los interferómetros de LIGO-Handford -rojo-, LIGO-Livingston -azul- y Virgo -morado- en el espacio de frecuencia [Hz] vs la densidad espectral de su amplitud o strain, equivalente a $\Delta L/L$ (2019, [23]).

establecer condiciones de frontera al momento de su generación (2016, [67]). Otra manera indirecta es aprovechar la precisión de los pulsares de milisegundos y considerar varios de ellos como los relojes de un megadetector. Mediante su monitoreo y correlación entre el tiempo de llegada de los pulsos como función de la separación angular de sus posiciones se podrían detectar ondas gravitatorias. Este método se conoce como *pulsar timing*, también ilustrado en la Figura 1.7.

1.4.2. Espectro y frecuencias

Así como existe un espectro de ondas electromagnéticas, también existe uno de ondas gravitatorias. El espectro electromagnético se extiende de mayor a menor frecuencia (o equivalentemente de menor a mayor longitud de onda) desde rayos gamma, rayos X, radiación ultravioleta, visible, hasta ondas de radio (1979, [68]). En cambio, el espectro gravitatorio aún es en gran parte desconocido, harán falta décadas y quizás siglos para poder detectar en todos los rangos.

De forma cualitativa, la frecuencia de las ondas gravitatorias está relacionada con la masa y densidad de la fuente, de forma tal que a mayor masa y densidad, mayor es su frecuencia.

1.4.3. Fuentes

Luego de décadas de desarrollo teórico y computacional, se ha entendido qué tipo de sistemas y en qué condiciones pueden emitir ondas gravitatorias significativas, llamados *fuentes*. De

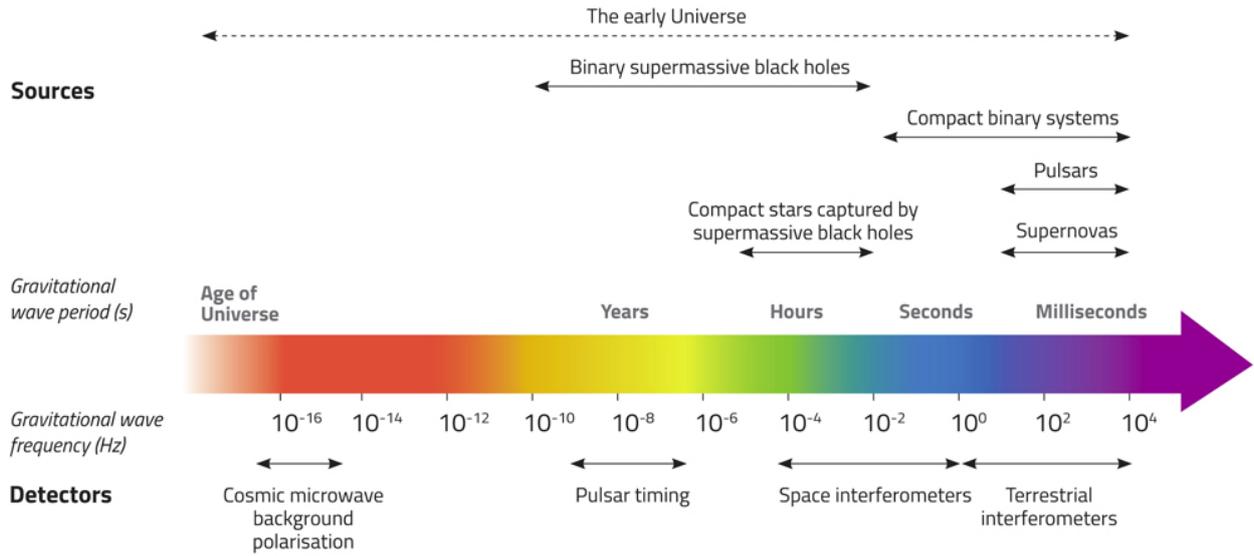


Figura 1.7: Espectro de ondas gravitatorias. En el eje horizontal se varía la frecuencia en escala logarítmica de menor a mayor. Por encima de la flecha grande se muestra el intervalo para las principales fuentes esperadas y por debajo el rango de los detectores y mecanismos de detección. Adaptado de <https://lisa.nasa.gov>

forma cualitativa, a mayor masa y mayor densidad de la fuente, mayor es la frecuencia de las ondas. En resumen las fuentes pueden clasificarse como,

- En altas frecuencias $\gtrsim 10$ Hz: coalescencias de objetos binarios compactos, destellos en procesos astrofísicos no modelados (análogo electromagnético: GRBs), ondas continuas y el fondo estocástico.
- Bajas Frecuencias $[10^{-6}, 10]$ Hz: coalescencias de agujeros negros supermasivos; extreme mass ratio inspirals (EMRI) posiblemente compuestos por un hoyo negro supermasivo y un objeto compacto; fuentes continuas, primer plano galáctico, fondo cosmológico.
- Muy bajas Frecuencias $\lesssim 10^{-6}$ Hz: Fondo de agujeros negros binarios supermasivos, procesos primordiales (inflación, precalentamiento y recombinación)

El intervalo de detección confiable de LIGO es entre $\sim 50 - 500$ Hz -como puede verse en la Figura 1.6-, que coincide con las frecuencias de las ondas gravitatorias asociadas a fuentes compactas de masas estelares. Esta es la razón por la que los interferómetros terrestres han detectado únicamente binarias compactas de masas estelares.

Otra manera de clasificar las fuentes es si son relativistas o no.

- Fuentes débiles. Aquellas con distribución de masa al menos cuadrupolar, con velocidades internas no relativistas. Serán abordadas en la Sección 3.4.
- Fuentes fuertes: sus velocidades características son relativistas, procesos altamente no lineales. Por ejemplo, fusiones de agujeros negros estelares (BH-BH), fusión de un

agujero negro y una estrella de neutrones (BH-NS), colapso no esférico del núcleo de una estrella masiva, fusión de agujeros negros supermasivos (SBH-SBH). Cuando los objetos compactos están fuera del equilibrio, ya sea durante su formación o en un choque violento, por un instante de tiempo se vuelven las fuentes más intensas de ondas gravitatorias en el Universo con luminosidades de hasta 10^{56} erg s^{-1} . En particular, la coalescencia de dos objetos compactos, es la fuente más esperada.

En la Figura 1.7 se muestra el espectro de las ondas gravitatorias y las fuentes y detectores correspondientes a cada intervalo de frecuencias. Es ahora claro porqué los objetos compactos, sobre todo si se encuentran en un sistema binario, son de gran importancia para las observaciones actuales de ondas gravitatorias.

1.4.4. Forma de ondas y extracción de señales

¿Cómo se encuentran las señales? Para encontrar señales de origen astrofísico dentro de los datos de la primera y segunda corrida de LIGO (01 y 02) se utilizaron tres análisis independientes. Dos de ellos están enfocados en la búsqueda de señales generadas en la fusión de sistemas binarios de agujeros negros y el tercero en la búsqueda de señales tipo *burst* o destello.

Los primeros dos utilizan los algoritmos llamados *PyCBC* y *GstLAL* (2016, [65]), respectivamente; éstos comparan los datos recopilados por los interferómetros con plantillas de ondas gravitatorias obtenidas de modelos teóricos predichos por Relatividad General. Para generar las plantillas se combinan cálculos post-Newtonianos, formalismo de un cuerpo efectivo y relatividad numérica y se varían los parámetros intrínsecos del sistema. La forma de la onda depende de ocho parámetros intrínsecos y siete extrínsecos.

- Parámetros intrínsecos: las masas de los agujeros negros M_1 y M_2 y sus espines vectoriales, s_1 y s_2 (se asume que no tienen carga eléctrica)
- Parámetros extrínsecos: ascensión recta α , declinación δ , distancia lumínica d_L , inclinación orbital i , ángulo de polarización ψ y el tiempo t_c y la fase ϕ_c de coalescencia
- Para estrellas de neutrones: se considera otro parámetro intrínseco llamado "deformabilidad de marea" que cuantifica la deformación de cada estrella por distorsión de marea a causa de la otra estrella.

Así, las señales se obtienen variando los parámetros dentro de los siguientes intervalos:

- PyCBC entre 2 y 500 masas solares y $s < 0.998$.
- GstLAL entre 2 y 400 masas solares y $s < 0.998$.

Luego, mediante una técnica llamada "matched filtering", o filtro de correlación, se empanan las plantillas con los datos de los detectores.

El tercer método, llamado *cWB* se utiliza para encontrar señales provenientes de la coalescencia de dos estrellas de neutrones y no requiere modelo; en cambio, busca destellos en la deformación o strain (h) de corta duración, es decir, excesos de potencia.

Cada método de búsqueda arroja una lista de eventos candidatos que se filtran. Es importante considerar que existe la posibilidad estadística de que un candidato sea ruido y no una señal de origen astrofísico, por ello se establece un umbral para la tasa a la que uno podría esperar que tal evento candidato haya ocurrido por casualidad, denominada tasa de alarma (FAR) y se fijó en 1 por cada 30 días. Además, se clasifican las señales en términos de su intensidad de señal con respecto al ruido del detector, llamada relación señal-ruido (SNR).

Como vimos, para conocer la forma de la onda, se requiere saber la naturaleza de la fuente que la emite. Y sin embargo, la naturaleza de los objetos compactos, es decir, los agujeros negros, las estrellas de neutrones y las enanas blancas (o hasta estrellas de bosones y quarks) es aún hipotética. Por ejemplo, un sistema de dos agujeros negros con masas típicas $\sim 10M_{\odot}$ emite ondas de $f \sim 0.44$ KHz. Las estrellas de neutrones tienen $\sim 1.35 M_{\odot}$, entonces pueden radiar a frecuencias más altas, ~ 1.6 KHz. En cambio, los agujeros negros supermasivos de $\sim 10^6 M_{\odot}$, emiten en bajas frecuencias $\sim 4.4 \times 10^{-3}$ Hz.

1.4.5. Sistemas binarios como fuentes

Los sistemas binarios astrofísicos emiten ondas gravitatorias a lo largo de su evolución. La emisión suele dividirse en tres fases, *inspiral*, *merger* y *ringdown*. En la primera, inspiral, los objetos se orbitan uno a otro siguiendo órbitas elípticas bien descritas con física post-newtoniana (1996, [69]), formalismos de un cuerpo efectivo (2014, [70]), (2016,[71]), (2017, [72]) y la aproximación cuadrupolar (1983, [3]) en el régimen de campo débil -que veremos en §3.3.2-. Como el sistema pierde energía en ondas gravitatorias, va disminuyendo su separación y periodo orbital hasta que chocan, fase Merger (2016, [62]). Para conocer las propiedades de las ondas gravitatorias en la fase de fusión es necesario resolver las ecuaciones de Relatividad Numérica -ver, por ejemplo (2001, [73]), (2003, [74]). Cuando los objetos chocan, se forma un único nuevo objeto que queda vibrando hasta alcanzar el equilibrio, llamada fase ringdown y descrita con teoría de perturbaciones (2012, [75]).

Estas tres fases, efectivamente fueron observadas en la primera señal gravitatoria detectada, GW150914, emitida durante la fusión de dos agujeros negros estelares, como se aprecia en la Figura 1.8.

GRB170817A/GW170817 La señal GW170817 es de gran importancia porque también fue observada su contraparte electromagnética, dando inicio a la Astronomía de Multimensajeros. El 17 de agosto de 2017, se observó en el firmamento la fusión de dos estrellas de neutrones en la galaxia temprana NGC 4993, a sólo una distancia de ~ 40 Mpc. Se encontraban describiendo órbitas casi circulares en torno al centro de masa del sistema con masa total de $2.79^{+0.30}_{-0.06}M_{\odot}$ (2017, [76]). Luego de pasar por la fase inspiral, en tan sólo 30 segundos, la frecuencia de las ondas gravitatorias aumentó de ~ 50 a ~ 300 Hz hasta el momento del abrupto choque. 1.7 segundos después, se emitió un destello de rayos- γ , nombrado GRB 170817A, detectado por el satélite Fermi-GBM y asociado a la misma fuente. En seguida se emitió una alerta a los detectores a lo largo de todo el espectro electromagnético. Menos de once horas después, se detectó un brillante destello óptico. Las observaciones ultravioletas ocurrieron 48 horas después de la fusión y fueron seguidas por más observaciones en el óptico

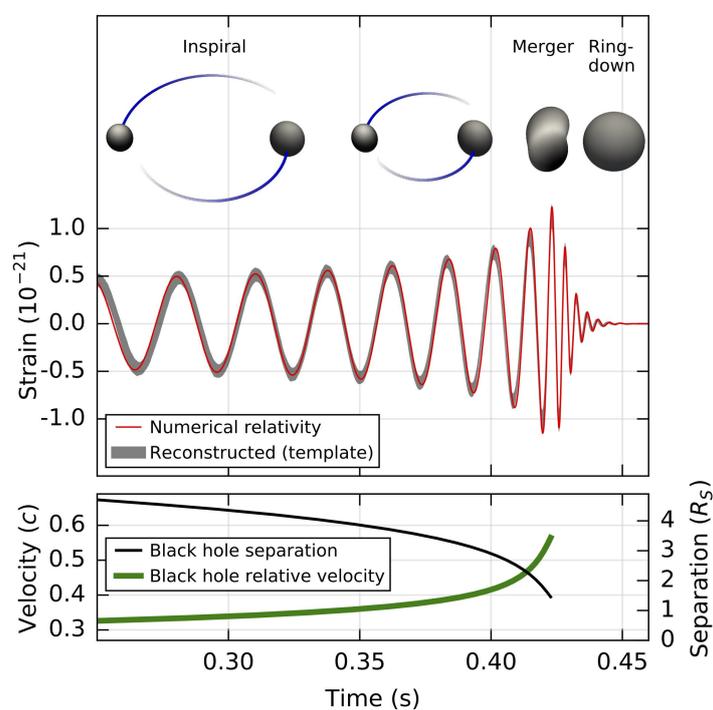


Figura 1.8: Se muestran las tres fases de la señal GW150914. En el eje horizontal se grafica el tiempo contra el strain o *amplitud* (arriba) y contra la evolución de la velocidad y separación (abajo). Tomado de (2016, [59]).

e infrarrojo durante ~ 10 días, cuando comenzaron a ser detectables rayos-X y radio. No se detectaron neutrinos. Parte de las contrapartes electromagnéticas se explican por el proceso de kilonova/macronova y decaimiento nuclear que siguió después de la fusión de las estrellas de neutrones (2017, [77]).

Recapitulando... En este primer capítulo revisamos la evolución de las estrellas en secuencia principal hacia su inevitable final como objeto compacto. También, expusimos posibles explicaciones a sus propiedades observadas, tanto de enanas blancas, hoyos negros y estrellas de neutrones. Entre ellas, está la existencia de campos magnéticos superficiales $\sim 10^6$ G en el caso de las enanas blancas, $\sim 10^{12}$ G en los pulsares y hasta $\sim 10^{16}$ G en magnetares. Los objetos compactos existen tanto de forma aislada como en sistemas múltiples, siendo los más abundantes los binarios, razón por la cual en seguida revisamos dos tipos de sistemas binarios: las fuentes compactas de rayos-X y las binarias de estrellas de neutrones. Por último describimos el descubrimiento de las ondas gravitatorias, los detectores y sus fuentes, haciendo en esta última parte la conexión con los sistemas binarios de objetos compactos, cerrando con el ejemplo de la histórica observación de multimensajeros GW170817/GRB170817A. De esta manera, se entiende la importancia astrofísica y teórica de modelar y explicar la interacción de dos estrellas de neutrones. También, está motivada la necesidad de considerar los efectos magnéticos en la evolución de las ondas gravitatorias emitidas, un tema poco considerado y estudiado a la fecha.

En lo que sigue, construiremos desde primeros principios un modelo simplificado de dos estrellas de neutrones magnetizadas. Para ello, en el siguiente capítulo revisaremos la formulación lagrangiana del problema de dos cuerpos con conservación de la energía, es decir, sin emisión de ondas gravitatorias. También, construiremos el potencial magnético de dos dipolos magnéticos perfectos.

Capítulo 2

ENFOQUE NEWTONIANO

Este capítulo está dedicado a estudiar la interacción gravitatoria y magnética de dos cuerpos tipo estrella de neutrones, desde el punto de vista newtoniano, es decir, sin emisión de ondas gravitatorias. En §2.1. se revisan los fundamentos de dinámica newtoniana (o no-relativista) y el problema de dos cuerpos bajo fuerzas centrales con el formalismo lagrangiano. En §2.2. se revisan los fundamentos de electromagnetismo sobre medios magnetizados perfectos y se contruye la expresión de la energía potencial magnética de dos dipolos magnéticos en términos de sus momentos magnéticos. Para una revisión de la sección 2.1 puede consultarse (2005, [78]), y para la sección 2.2 (1969, [79]).

2.1. Dinámica newtoniana

El desarrollo formal de la Mecánica Moderna, cuyo objeto de estudio es el movimiento de los cuerpos, comenzó probablemente con el trabajo de Galileo (1564-1642) sobre los marcos de referencia inerciales, y Newton (1642-1727) quien formuló las Tres Leyes de Movimiento y la Ley de Gravitación Universal (Véase §2.1.3.).

El punto de partida es considerar una partícula de masa constante, M , que se mueve sobre la trayectoria \mathbf{r} bajo la acción de una fuerza neta, \mathbf{F} . La velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{r}}$. Su aceleración, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}$, depende directamente, tanto en magnitud como en sentido, de la fuerza neta e inversamente de su masa. Esta es la segunda ley de Newton:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{M}. \quad (2.1)$$

Resolver la ecuación (2.1) es el objetivo principal de la dinámica newtoniana porque determina el movimiento de una partícula por la acción de fuerzas externas a cualquier tiempo. Se trata de tres ecuaciones de segundo grado (una para cada coordenada) con condiciones iniciales.

Desde el punto de vista energético, la partícula, al ocupar un lugar en el espacio y moverse, tendrá asociada una energía potencial y una cinética, respectivamente. La posición está

cuantificada por \mathbf{r} y su movimiento por, \mathbf{v} . Así, se espera que la energía cinética sea, $T = T(\mathbf{v})$ y la energía potencial, $U = U(\mathbf{r})$. Explícitamente, la energía cinética de la partícula es, $T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}|^2$. Y la energía potencial, bajo ciertas consideraciones ¹, está relacionada con la fuerza neta de la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad \Leftrightarrow \quad U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (2.2)$$

De esta manera, la energía mecánica total, E , definida como la suma de la energía cinética y potencial, es,

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = T(\mathbf{v}) + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M|\mathbf{v}|^2 - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \quad (2.3)$$

La variación de E es, $dE = dT + dU$, con,

$$dT = \frac{dT}{dt}dt = \frac{M}{2} \frac{d}{dt}|\mathbf{v}|^2 dt = M\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt = M\dot{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{r}; \quad dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r},$$

pero considerando las ecuaciones (2.2) y (2.3),

$$\frac{dE}{dt} = M\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

por lo tanto, cuando \mathbf{F} es conservativa, la energía de la partícula no cambia, se conserva en el tiempo. Se dice que el sistema es conservativo. Así, en términos de la función potencial, las ecuaciones de movimiento de la partícula de masa M , son,

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{1}{M}\nabla U = 0. \quad (2.5)$$

2.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Entre los siglos XVIII y XIX, dos formulaciones equivalentes de la mecánica newtoniana fueron desarrolladas, una por el astrónomo Lagrange (1736-1813) y otra por el matemático Hamilton (1805-1865) y en vez de sustentarse en las tres leyes de Newton, se sustentan en el Principio Hamiltoniano, que establece que de todas las posibles trayectorias sobre las que el sistema puede moverse de un punto a otro en el *espacio de configuración*, el sistema se moverá sobre la curva que minimice la integral en el tiempo de la *función lagrangiana*.

El espacio de configuración se define como el conjunto de las posiciones y velocidades posibles del sistema, expresadas en coordenadas generalizadas, $(q_i, \dot{q}_i) = (q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, con $\mathbf{r} =$

¹Que la fuerza neta asociada al potencial solo dependa de la posición de la partícula, es decir, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ y que la integral $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ sea independiente de la parametrización y trayectoria, que sólo dependa del punto inicial y final. Si \mathbf{F} cumple ambas condiciones, se dice que es conservativa.

$\mathbf{r}(q_i)$ y $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\dot{q}_i)$. La función lagrangiana, o lagrangiano, se define como la diferencia entre la energía cinética y potencial,

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - U(q_i). \quad (2.6)$$

El principio Hamiltoniano, es matemáticamente equivalente a que la variación, δ , de la integral del lagrangiano en el tiempo, sea cero. Es decir,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt = 0. \quad (2.7)$$

Desarrollamos usando que $\delta \dot{q} = -d\delta q/dt$, y $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$,

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q dt \end{aligned}$$

Se sigue que la única forma de que la ecuación (2.7) se cumpla siempre, es que \mathcal{L} satisfaga las siguientes ecuaciones,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (2.8)$$

mejor conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange. Por construcción son válidas para sistemas conservativos. Es fácil demostrar que las ecuaciones de Euler-Lagrange son equivalentes a (2.5) y el uso de unas u otras ecuaciones dependerá de cuales sean más sencillas resolver, o cuáles sean más adecuadas para describir y entender cierto problema físico.

2.1.2. Problema de Dos Cuerpos con Fuerza Central

Ahora consideremos un sistema conformado por dos partículas cuyas posiciones están dadas por, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y sus velocidades $\dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{v}_1$ y $\dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_2$. Las partícula 1 interactuará con la partícula 2 mediante la fuerza, \mathbf{F}_{12} , e inversamente, la partícula 2 con la partícula 1, mediante la fuerza \mathbf{F}_{21} . La tercera ley de Newton establece que,

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\mathbf{F}_{21}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) := \mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (2.9)$$

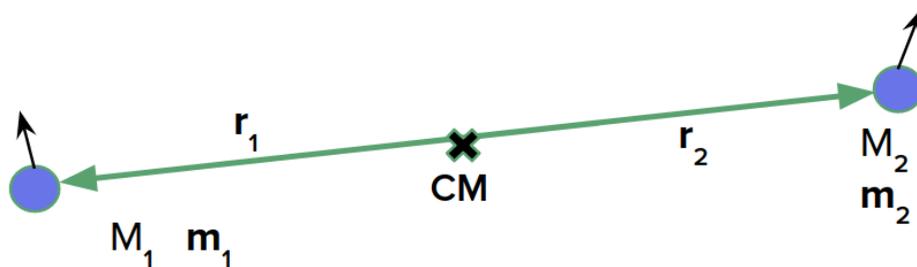


Figura 2.1: Descripción de la posición de los dos objetos desde el sistema de referencia con origen en el centro de masa. Los cuerpos tienen masas M_1 y M_2 y momentos magnéticos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 (más adelante definidos).

Por conveniencia introducimos, el vector de posición relativa,

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (2.10)$$

La siguiente limitación sobre la fuerza es que sea *central*, esto es, que actúe sobre la línea que une los cuerpos y que su magnitud dependa solo de la distancia entre ellos. Entonces, la energía potencial del sistema es,

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}) = U(r). \quad (2.11)$$

Las fuerzas centrales son esféricamente simétricas cuando su magnitud es independiente de la dirección de \mathbf{r} ; la fuerza toma el mismo valor en cualquier punto ubicado a la misma distancia del centro de fuerzas del sistema, $f(\mathbf{r}) = f(r)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{r}}; \quad (2.12)$$

donde $f(r)$ representa la magnitud de la fuerza y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario entre la partícula y el centro de fuerzas del sistema. Si $f(r) < 0$, la fuerza es atractiva hacia el centro de masa, y, si $f(r) > 0$, es repulsiva desde el centro de masa.

Independientemente de la forma de $f(r)$, las fuerzas centrales satisfacen importantes propiedades. En primer lugar observemos que,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\mathbf{v} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{m}(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \frac{f(r)}{m}(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}}) = 0,$$

de modo que la cantidad $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ permanece constante en el tiempo, tanto en magnitud como dirección. Introducimos el vector constante, \mathbf{h} ,

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (2.13)$$

Al multiplicar ambos lados por $\mathbf{r} \cdot$, ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$) encontramos que,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (2.14)$$

Así, \mathbf{r} es perpendicular al vector constante \mathbf{h} en todo instante de tiempo, lo que significa que el movimiento se realiza en un plano ortogonal a \mathbf{h} . De esta manera, llegamos a la conclusión de que en un campo de fuerza central, las partículas se moverán en un plano.

Ahora, estimemos la tasa de tiempo a la cual el área es barrida por el vector \mathbf{r} . Supongamos que en el tiempo Δt , la partícula se mueve del punto P al Q en el plano de movimiento. El área barrida, ΔA por \mathbf{r} , en un intervalo de tiempo infinitesimal es,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}\|,$$

por lo tanto,

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\| \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\| = \frac{1}{2} |\mathbf{h}|, \quad (2.15)$$

en la última igualdad hemos sustituido la ecuación (2.13). Este resultado significa que el vector \mathbf{r} barre áreas iguales en tiempos iguales, hecho conocido como la ley de las áreas para fuerzas centrales.

Tanto la Ley de Gravitación Universal entre dos masas, como la Ley de Coulomb entre dos cargas eléctricas describen fuerzas centrales. En la sección 2.4 analizaremos si la interacción magnética puede ser también considerada central.

Centro de masa y masa reducida

Las masas de las partículas son M_1 y M_2 . La masa total del sistema es $M = M_1 + M_2$, y la masa reducida, μ , se define como,

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M}. \quad (2.16)$$

El centro de masa del sistema es el vector promedio de las posiciones de las partículas del sistema, pesadas por su masa y normalizadas por la masa total y, resulta ser el punto geométrico donde se aplica la fuerza neta. Para un sistema de dos partículas, está definido como,

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2}{M_1 + M_2};$$

Es momento de elegir un marco de referencia adecuado; será el que tenga por origen el centro de masa del sistema, es decir, $\mathbf{r}_{cm} = 0$, lo que implica que,

$$M_1 \mathbf{r}_1 + M_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (2.17)$$

más la definición del vector posición relativo, \mathbf{r} , se define un sistema de ecuaciones cuya soluciones son,

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mu}{M_1} \mathbf{r}; \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{\mu}{M_2} \mathbf{r} \quad (2.18)$$

además, $M_1 r_1 = M_2 r_2 = \mu r$. Con estas relaciones, la energía cinética del sistema es,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} M_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \mathbf{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu M_2}{M} |\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu M_1}{M} |\mathbf{v}|^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu(M_1 + M_2)}{M} |\mathbf{v}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Esto significa que la función lagrangiana solo dependerá de la posición y velocidad relativa entre las dos partículas. Una vez obtenida $\mathbf{r}(t)$, mediante las ecuaciones (2.15) automáticamente tenemos el movimiento de las partículas individuales, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 .

Solo desde el marco de referencia con origen en el centro de masa se satisface que $r = |\mathbf{r}| = r_1 + r_2$, donde $r_1 = |\mathbf{r}_1|$ y $r_2 = |\mathbf{r}_2|$, pues \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 se encuentran sobre la misma línea pero en direcciones opuestas.

Coordenadas Polares y Ecuaciones de Movimiento

Como ya mostramos, el movimiento de las partículas se reduce a dos dimensiones, por estar restringido a un plano. En coordenadas polares:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + \varphi \mathbf{e}_\varphi = (r, \varphi) \quad (2.19)$$

Sus vectores unitarios satisfacen, $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ y $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r$. La velocidad y la aceleración se expresan como,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dr} (r \mathbf{e}_r) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = (\dot{r}, r \dot{\varphi}) \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, 2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \end{aligned} \quad (2.20)$$

La norma al cuadrado de la velocidad es, $|\mathbf{v}|^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$. Por lo tanto, la función lagrangiana es,

$$\boxed{\mathcal{L}(r, \varphi) = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)}. \quad (2.21)$$

y satisface dos ecuaciones de Euler-Lagrange, una para r y otra para φ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= 0, & \Rightarrow & \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{\mu} \frac{dU}{dr} = 0. \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= 0, & \Rightarrow & \mu \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0\end{aligned}\tag{2.22}$$

Esas dos ecuaciones son equivalentes a la ecuación vectorial (2.5), como se puede comprobar igualando $\mu \mathbf{a} = \mu(\ddot{\mathbf{r}} - r\dot{\varphi}^2, 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})$ (ecuación 2.20) con $\nabla U = (\frac{dU}{dr}, 0)$, es decir,

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{1}{\mu} \frac{dU}{dr} \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} &= 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

La ecuación para φ en (4.2.1) implica que la cantidad, $r^2\dot{\varphi}$ es constante. Notemos que, $r^2\dot{\varphi} = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{h}|$, que ya habíamos mostrado que es un vector constante. Definimos la cantidad conservada, l , ó momento angular,

$$l = \mu r^2 \dot{\varphi}.\tag{2.24}$$

La ecuación para r en (4.2.1) comprueba que E también se conserva. Con esto, las ecuaciones de movimiento se reducen a,

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{r} &= -\frac{1}{\mu} \frac{dU}{dr} + \frac{l^2}{\mu^2 r^3} \\ \dot{\varphi} &= \frac{l}{\mu r^2}\end{aligned}}\tag{2.25}$$

Para encontrar las órbitas, es decir, las trayectorias ligadas dentro del potencial U , hay que construir una ecuación para $r = r(\varphi)$. Redefinimos la variable,

$$r \equiv \frac{1}{u}; \quad dr = -\frac{1}{u^2} du.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2} = -\frac{l}{\mu} \frac{du}{d\varphi} \\ \ddot{r} &= \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{l}{\mu} \frac{d}{dt} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{l^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\varphi^2}\end{aligned}$$

y al sustituir en la ecuación radial (2.22),

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u - \frac{1}{\mu l^2 u^2} f.} \quad (2.26)$$

Una vez resuelta $u(\varphi)$ puede calcularse $r = 1/u$. Otra propiedad relevante que puede extraerse de las ecuaciones anteriores.

Las órbitas en un potencial esférico son planas, lo que significa que su espacio fase tiene cuatro dimensiones, en nuestro caso, $(R, \varphi, \dot{R}, R\dot{\varphi})$. Aunque es difícil visualizar el espacio fase, puede demostrarse que la partícula se moverá en una región toroidal, cuya proyección sobre el espacio es la órbita de la partícula, que será una sección cónica.

Finalmente, las propiedades de las órbitas en un campo de fuerza central deducidas en esta sección son:

1. La órbita o trayectoria de la partícula debe ser una curva plana, es decir, la partícula debe moverse en un plano.
2. El momento angular de la partícula se conserva.
3. El vector de posición o radio vector dibujado desde 0 hasta la partícula, barre áreas iguales en tiempos iguales. La tasa de cambio del área en el tiempo es constante. Este enunciado es conocido como la ley de las áreas.

2.1.3. Ley de Gravitación Universal

El movimiento planetario y estelar se rigen fundamentalmente por la interacción gravitatoria dada en la Ley Universal de la Gravitación como una fuerza de inverso cuadrado mediada por la constante gravitacional, G , descrita desde el centro de masa del sistema binario:

$$\mathbf{F}_G = -\frac{GM_1M_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = f(r)\hat{\mathbf{r}}; \quad (2.27)$$

con $f(r) = -GM\mu/r$. Además, de la definición de masa reducida, $M_1M_2 = \mu M$, entonces, de acuerdo a la ecuación (2.5), la energía potencial correspondiente es:

$$U_g = -\frac{G\mu M}{r} = -GM\mu u. \quad (2.28)$$

Sustituyendo en la ecuación para las órbitas:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + \frac{G\mu^2 M}{l^2}.$$

Es notable que la fuerza de inverso cuadrado es la única ley de fuerzas que anula el término con $1/u^2$ volviéndolo constante. Entonces, la ecuación para la órbita tiene una solución trigonométrica:

$$u(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{l^2}(1 + \epsilon \cos \varphi).$$

ϵ es una constante positiva por determinar. En términos de r ,

$$r(\varphi) = \frac{GM\mu^2}{l^2} \frac{1}{1 + \epsilon \cos \varphi}. \quad (2.29)$$

y es la ecuación de las cónicas. Dependiendo del valor de ϵ , el comportamiento de las órbitas cambiará notablemente. Si $\epsilon < 1$, r permanecerá ligada dentro del potencial efectivo, pero oscilará entre el periastro $r_{min} = r(\varphi = 0)$ y el apoastro, $r_{max} = r(\varphi = \pi)$;

$$r_{min} = \frac{l^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1 + \epsilon}; \quad r_{max} = \frac{l^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1 - \epsilon} \quad (2.30)$$

Además, el semieje mayor, a , y menor, b , de la elipse están dados por,

$$a = \frac{l^2}{GM\mu^2} \frac{1}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{l^2}{GM\mu^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (2.31)$$

Tercera Ley de Kepler

El área de la elipse es $A = \pi ab$. En un intervalo de tiempo dt el área barrida es

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = \frac{1}{2} r \cdot r \dot{\varphi} dt = \frac{l}{2\mu} dt,$$

Por lo tanto, la tasa de área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu}. \quad (2.32)$$

El periodo orbital P se define como,

$$P \equiv \frac{A}{dA/dt} = \frac{2\pi ab\mu}{l}. \quad (2.33)$$

Usando de la ecuación (2.43) que $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ y que $\frac{l^2}{GM\mu^2} = a(1 - \epsilon^2)$,

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) \mu^2}{l^2} = 4\pi^2 \frac{a^3 \mu}{GM}$$

Finalmente,

$$\boxed{P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.} \quad (2.34)$$

es la llamada tercera ley de Kepler. En términos de $\dot{\varphi}$ tenemos que,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{P(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \varphi)^2, \quad (2.35)$$

Habiendo revisado la dinámica newtoniana del problema de dos cuerpos, ahora repasemos los postulados de la electromadínámica no relativista para proponer una fuerza magnética central y un potencial de interacción magnética que considerar en la función lagrangiana.

2.2. Electrodinámica

Los campos eléctrico y magnético, \mathbf{E} y \mathbf{B} , tienen como fuente la carga eléctrica y su movimiento, caracterizados por la densidad de carga $\rho_q(\mathbf{r}, t)$, y el vector de densidad de corriente, $\mathbf{J} = \rho_q \mathbf{v}$. A través de las ecuaciones del electromagnetismo o de Maxwell, se relacionan estas variables. En unidades cgs-gaussianas,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_q & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Además, se tiene la ecuación de la conservación de la carga eléctrica, dada por,

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.37)$$

Los campos electromagnéticos pueden afectar la dinámica de una partícula cargada o una corriente eléctrica, mediante la fuerza de Lorentz. En su forma integral, la fuerza electromagnética se puede expresar cómo

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int_V (\rho_q \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV. \quad (2.38)$$

En general, \mathbf{J} es proporcional a la fuerza electromagnética y a la conductividad del medio, σ , por lo que tenemos,

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.39)$$

también llamada la ley de Ohm.

2.2.1. Para estrellas de neutrones

En una primera aproximación, una estrella de neutrones puede describirse como un medio conductor perfecto ($\sigma \rightarrow \infty$) magnetizado, eléctricamente neutro y, estacionario. De modo que $\rho_q = \frac{\partial \rho_q}{\partial t} = 0$, y por conservación de carga $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Se asume que la escala de tiempo de variación del campo electromagnético es mucho mayor a la escala de tiempo típica de las colisiones dentro del medio, esto significa que $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$. Así, las ecuaciones de Maxwell se reducen a,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Se supone que la estrella es un conductor perfecto, $\sigma \rightarrow \infty$, por lo tanto, de la ley de Ohm:

$$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} = 0, \quad \text{ó} \quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \quad (2.41)$$

que equivale a $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Por otro lado, de la última ecuación de Maxwell,

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \nabla \times \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (2.42)$$

por teorema de Stokes. Las coordenadas primadas, \mathbf{r}' , corresponden a puntos dentro de la estrella de radio R y, \mathbf{r} es el punto donde se quiere evaluar el campo magnético. En esta descripción, el origen del marco de referencia es el centro de la estrella.

Aprovechando que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en todo punto, el campo magnético puede expresarse como el rotacional de algún campo vectorial \mathbf{A} , llamado potencial vectorial auxiliar, tal que,

$$\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.43)$$

\mathbf{A} tiene libertad de transformación de norma -a veces llamada *gauge*-, es decir, transforma como $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Psi$. Se elige $\Psi = 0$ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$), así que, de la ecuación (2.42),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2.44)$$

Las componentes del potencial vectorial se pueden aproximar haciendo una expansión en series de potencias. Como siempre, el primer término recibe el nombre de *monopolar*, el segundo *dipolar*, el tercero *cuadrupolar*...

$$A_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{c|\mathbf{r}|} \int J_i(\mathbf{r}') dV' + \frac{\mathbf{r}}{c|\mathbf{r}|^3} \cdot \int J_i(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' + \dots,$$

pero la primera integral siempre es cero, debido a que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

El segundo término puede reescribirse. Notemos que,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \int J_i(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dV' &\equiv \sum_j x_j \int x'_j J_i dV', \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_j x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) dV', \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J})_k dV', \\
 &= -\frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \int (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}) dV' \right]_i,
 \end{aligned}$$

siendo x_i las componentes del vector posición. Entonces,

$$\mathbf{A}_{\text{mon}} = 0; \quad \mathbf{A}_{\text{dip}} = -\frac{1}{2c} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \times \int \mathbf{r}' \times J_i dV',$$

que concuerda con la no existencia de monopolos magnéticos. Fuera de la fuente, el término dipolar es el que domina. Notemos que la integral sólo depende de la distribución de corrientes dentro de la estrella. Resulta útil definir el momento magnético *dipolar*, \mathbf{m}_{dip} , como,

$$\mathbf{m}_{\text{dip}} \equiv \frac{1}{2c} \int \mathbf{r}' \times \mathbf{J} dV'. \quad (2.45)$$

De esta manera, el término dipolar se reescribe como,

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (2.46)$$

El campo magnético se obtiene aplicando el rotacional a la expresión anterior,

$$\nabla \times \mathbf{A}_{\text{dip}} = \nabla \times \left(\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right),$$

también usamos que $\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A)$. Y, si $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, entonces $\nabla \cdot \mathbf{p} = 0$. De esta manera,

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_{\text{dip}}) - \mathbf{m}_{\text{dip}}}{|\mathbf{r}|^3}}. \quad (2.47)$$

Con esta expresión, podemos relacionar de forma simplificada la magnitud del momento magnético total, m , y su campo magnético sobre el polo magnético, B_p , evaluando en la superficie de la esfera, R , es decir,

$$B_p = |\mathbf{B}_{\text{dip}}| \approx \frac{m}{R^3}, \quad (2.48)$$

ó, de forma equivalente,

$$m \approx B_p R^3 \quad (2.49)$$

El tratamiento recién presentado es conocido como el *modelo del dipolo magnético*, fue desarrollado por diversos autores (1967, [36]), (1969, [34]) al tiempo que la existencia de los pulsares era confirmada.

2.2.2. Fuerza y energía potencial de un dipolo magnético

Consideremos una estrella tipo dipolo magnético caracterizada por su densidad de corriente \mathbf{J}_1 o equivalentemente por su momento magnético dipolar \mathbf{m}_1 . La estrella está afectada por un campo magnético externo \mathbf{B}_{ext} y por lo tanto siente una fuerza magnética, dada por la ley de Lorentz,

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c} \int \mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_{ext} dV' \quad (2.50)$$

Supongamos que el campo magnético externo varía lentamente. Sus componentes en series de Taylor son,

$$B_i(\mathbf{r}) = B_i(0) + \mathbf{r} \cdot \nabla B_i(0) + \dots$$

Entonces, la fuerza magnética es,

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{c} \mathbf{B}_{ext}(0) \times \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' + \frac{1}{c} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times [(\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(0)] dV' + \dots,$$

nuevamente la primera integral es cero porque la corriente es suave ($\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$). Para la segunda integral se usa que $\mathbf{J} \times [(\mathbf{r}' \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext}(0)] = -\nabla \times [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}]$. Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{dip} &= -\frac{1}{c} \nabla \times \int \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}_{ext} dV \\ &= -\frac{1}{c} \nabla \times \left[\mathbf{B}_{ext} \times \frac{1}{2} \int \mathbf{J} \times \mathbf{r}' dV' \right] \\ &= \nabla \times (\mathbf{B}_{ext} \times \mathbf{m}_1) = (\mathbf{m}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_{ext} - (\nabla \cdot \mathbf{B}_{ext}) \mathbf{m}_1, \end{aligned}$$

La segunda igualdad se obtiene aplicando el teorema de Stokes. Además, $\nabla \cdot \mathbf{B}_{ext} = 0$. Finalmente,

$$\boxed{\mathbf{F}_{dip} = \nabla (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_{ext})} \quad (2.51)$$

significa que un medio magnetizado en presencia de un campo magnético, experimenta una fuerza que depende directamente de su momento magnético. Esta forma es muy conveniente porque nos motiva a definir el potencial magnético, tal que, $\mathbf{F} = -\nabla U$. Por lo tanto,

$$\boxed{U_{\text{dip}}(r) = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}}.} \quad (2.52)$$

que se interpreta como la energía potencial de un dipolo magnético permanente.

2.2.3. Sistema de dos dipolos magnéticos

Consideremos nuevamente el sistema binario de §2.1.3. descrito desde el marco de referencia con origen en el centro de masa del sistema. Las posiciones de los cuerpos son \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . Supondremos que cada uno tiene un momento magnético dipolar \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 . La distancia entre ellos es, $r = |\mathbf{r}|$, con $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Luego, de la ecuación (2.47), el campo magnético debido al primer cuerpo, en la posición del segundo objeto es,

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (2.53)$$

de modo que la energía de interacción sobre \mathbf{m}_2 es,

$$\begin{aligned} U_{1 \rightarrow 2} &= -\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{B}_1 = -\mathbf{m}_2 \cdot \frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1) - \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3} \\ &= \frac{-3(\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1) + \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1}{|\mathbf{r}|^3}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Sea α_1 el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_1 , α_2 el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_2 y α el ángulo entre \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 , como se muestra en la Figura 2.2. También, sea $m_1 = |\mathbf{m}_1|$ y $m_2 = |\mathbf{m}_2|$. Con estas definiciones, $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_1 = m_1 \cos \alpha_1$; $\mathbf{m}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}} = -m_2 \cos \alpha_2$, $\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{m}_1 = -m_1 m_2 \cos \alpha$, por lo que la expresión anterior se reescribe como,

$$U(r) = \frac{-3(-m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \cos \alpha_1) - m_1 m_2 \cos \alpha}{r^3} = \frac{(3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha) m_1 m_2}{r^3}.$$

Introducimos $k = 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \cos \alpha$. De la figura 2.2. notamos que $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, por lo que,

$$\cos \alpha = \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2.$$

Entonces,

$$k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2. \quad (2.55)$$

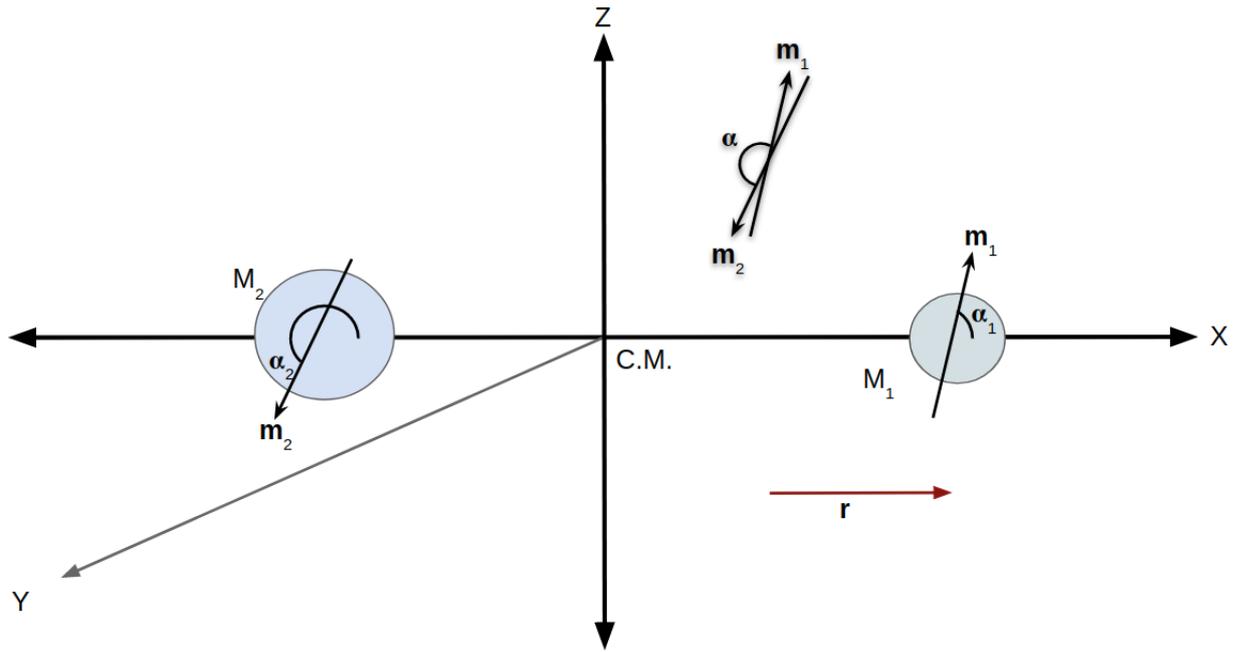


Figura 2.2: Configuración arbitraria de los momentos magnéticos vectoriales \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 desde el marco de referencia con origen en el centro de masa, C.M. En este caso, \mathbf{r} coincide con el eje X.

Así, la energía potencial de interacción magnética es,

$$U(r) = \frac{km_1m_2}{r^3}. \quad (2.56)$$

Mientras que la fuerza magnética entre los dipolos es el gradiente² de U ,

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} = -\frac{3km_1m_2}{r^4} \hat{\mathbf{r}}. \quad (2.57)$$

Las expresiones (2.56) y (2.57) serán fundamentales para describir la interacción magnética del sistema binario. En concreto, si suponemos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 constantes en el tiempo, la fuerza magnética es central y por lo tanto, la expresión (2.56) para la energía potencial magnética puede sustituirse en la función lagrangiana (2.21) para resolver la dinámica del sistema de dos dipolos magnéticos, aunque para nuestros propósitos, haría falta incluir la energía potencial gravitatoria (ecuación 2.28).

Esto es lo que realizaremos en el capítulo cuatro, pero antes de ello, en el capítulo siguiente estudiaremos desde primeros principios la generación de ondas gravitatorias por un sistema binario.

²En coordenadas esféricas,

$$\nabla \cdot = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Pero en este caso, U solo depende de r .

Capítulo 3

RELATIVIDAD GENERAL Y ONDAS GRAVITATORIAS

Una vez que hemos abordado el tratamiento newtoniano de dos objetos con masas y momentos magnéticos, es momento de revisar la visión relativista del problema, porque sólo desde este enfoque, el sistema binario emitirá ondas gravitatorias.

Para hablar de ondas gravitatorias es necesario partir de la teoría de Relatividad general, presentada de forma muy sintética en la primera sección (§3.1). Posteriormente se linearizan las ecuaciones de campo y se obtiene una solución tipo onda, asociada a la onda gravitatoria. En la tercera sección se resuelve la ecuación de onda general para fuentes débiles y se construye la aproximación cuadrupolar, algunas de sus aplicaciones se muestran en §3.4, incluidas a sistemas binarios en fase inspiral. Este capítulo está basado principalmente en los siguientes libros de Relatividad general y ondas gravitatorias: (2019, [80]), (2017, [81]) y (2007, [58]).

3.1. Relatividad General

Relatividad General es una teoría geométrica de la Gravitación que reposa sobre el principio general de Covarianza y el principio de Equivalencia. El primero establece que las ecuaciones de la Física deben mantener su forma bajo cualquier transformación general de coordenadas; esto demanda una formulación matemática covariante sobre variedades curvas diferenciables, que será introducida en §3.1.1 y §3.1.2. El Principio de Equivalencia y las ecuaciones de campo se presentan en §3.1.3.

3.1.1. Espaciotiempo y Gravedad

Un concepto fundamental en relatividad general es el *espaciotiempo*. Se define sobre una variedad diferencial, M , pseudoriemanniana conexa de clase C^∞ de cuatro dimensiones, tres para el espacio y una temporal. Cada punto de la variedad es un *evento*, representado por un cuadrivector,

$$x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

donde $x^0 = ct$, c es la velocidad de la luz en el vacío, t es el tiempo y $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ son las coordenadas espaciales.

A la par, M tiene asociada una *métrica* o tensor métrico \mathbf{g} lorentziano de dos índices covariantes cuya forma depende de la elección de coordenadas, es decir, $\mathbf{g} = g_{\mu\nu}(x^\mu)$. Formalmente se define como,

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv e_\mu(x) \cdot e_\nu(x), \quad (3.2)$$

donde $e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$, son los vectores base. De este modo, dada una base coordenada, el producto escalar de dos vectores sobre \mathcal{M} es $A \cdot B = (A^\mu e_\mu) \cdot (B^\nu e_\nu) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$. La métrica contiene toda la información de las propiedades geométricas del espaciotiempo, tales como la distancia entre dos eventos, la forma de derivar, el tensor de Einstein-Ricci y su curvatura. Además, una métrica con sentido físico debe satisfacer que $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ y $g < 0$.

El elemento de línea, ds , es la distancia entre dos eventos infinitesimalmente separados, tal que:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.3)$$

ciertamente ésta debe ser una cantidad invariante, que no dependa de la elección de coordenadas, es decir, $ds^2 = ds'^2$, hecho que impone una regla de transformación entre el sistema de referencia primado ' y sin primar.

Para poder formular un conjunto de ecuaciones diferenciales invariantes bajo cualquier transformación de coordenadas, en espaciotiempos curvos, el concepto de derivada debe generalizarse al de derivada covariante. Sobre un vector V^μ es,

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu V^\alpha \quad (3.4)$$

siendo, $\Gamma_{\alpha\nu}^\mu$ las componentes de la conexión de Levi-Civita:

$$\Gamma_{\nu\delta}^\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x^\nu \partial x^\delta} = \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (g_{\gamma\delta,\nu} + g_{\gamma\nu,\delta} - g_{\nu\delta,\gamma}), \quad (3.5)$$

donde $g_{\mu\nu,\gamma}$ indica derivada respecto al índice γ . La segunda igualdad recibe el nombre de símbolos de Christoffel y requiere especificar un sistemas coordenado. Con estas definiciones podemos cuantificar la curvatura de la variedad, a través del tensor de curvatura de Riemman definido por:

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \quad (3.6)$$

Notemos que sólo depende de las primeras y segundas derivadas de la métrica. Construimos también el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\mu\delta\nu}$, el escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ y subsecuente-mente, el tensor de Einstein-Ricci:

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.7)$$

que por las identidades de Bianchi, resulta ser la única combinación del tensor y escalar de Ricci, tal que su derivada covariante es nula, $\nabla G_{\mu}^{\mu\nu} = G_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$.

El tensor de Einstein-Ricci contiene la información geométrica del espaciotiempo caracterizado por cierta métrica g . Al implementar el principio de equivalencia, es posible relacionar el espaciotiempo directamente con la gravedad, pero antes de mostrarlo, introducimos el concepto de tensor de energía-momento.

3.1.2. Tensor de Energía-Momento

Relatividad General demanda una descripción covariante para la materia y energía. Convencionalmente se hace a través del tensor de materia y energía, $T^{\mu\nu}$, cuyas componentes son:

- $T^{00} = c^2\epsilon$ es la densidad de energía
- $T^{ii} = P^i$ es la presión en la dirección i ,
- T^{0i} es el flujo de energía en la dirección i .
- T^{i0} es la densidad de momento en la dirección i ,
- T^{ij} ($i \neq j$) es el esfuerzo de la componente P^i en la dirección j .

Por argumentos físicos, es un tensor simétrico con diez componentes independientes. Para un fluido perfecto en un espacio curvo, que se mueve a una velocidad $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, el tensor es:

$$T^{\mu\nu} = (c^2\epsilon + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Este tensor debe satisfacer las leyes de conservación, es decir,

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (3.9)$$

3.1.3. Principio de Equivalencia y ecuaciones de campo

El Principio de Equivalencia tiene dos versiones. La débil surge desde la física newtoniana y la observación -por ejemplo, a través del experimento de Eotvos- de la equivalencia entre la masa inercial y la masa gravitatoria. Esto implica que bajo ciertas condiciones, la aceleración

causada por un campo gravitatorio es indistinguible de la aceleración causada por cualquier otra fuerza.

Para la versión fuerte, considere una persona en un marco lorentziano en caída libre haciendo experimentos físicos; el principio fuerte establece que los resultados de sus experimentos locales son independientes de la magnitud del campo gravitatorio. Equivalentemente, todos los marcos lorentzianos son equivalentes, ó, la gravedad tiene una existencia relativa a las observaciones en un marco de referencia no inercial, ó, todas las formas de masa y energía contribuyen en cantidades equivalentes de masa inercial y gravitatoria.

Desde geometría riemanniana, el principio significa que todos los efectos de un campo gravitatorio pueden describirse en términos de las derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$, donde $\xi^\alpha(x)$ son funciones de transformación entre un sistema coordenado general x^μ y un sistema localmente inercial, que puede ser construido en cualquier evento, por equivalencia.

De modo que el principio de equivalencia se traduce en asociar la curvatura de un espaciotiempo al campo gravitatorio. En ese sentido, la métrica del espaciotiempo cuantifica al campo gravitatorio y por lo tanto, determinará la dinámica de las partículas. Pero, ¿qué genera que el espaciotiempo se curve? ¿qué produce un campo gravitatorio? La respuesta a ambas preguntas es la misma: la presencia de materia y energía, representada por el tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, cuya derivada covariante debe ser nula para cumplir principios de conservación de energía.

La relación exacta entre la masa, curvatura y densidad son las ecuaciones de campo de relatividad general, se trata de ecuaciones diferenciales no lineales acopladas,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Resolverlas significa encontrar la geometría del espaciotiempo conociendo la fuente de materia y energía que le da su curvatura, interpretada como gravedad. A veces es más útil expresarlas de la siguiente forma equivalente,

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha \right). \quad (3.11)$$

Existen pocas soluciones exactas y con relevancia física a las ecuaciones de campo, pero conociendo una, se puede perturbar "ligeramente" para analizar la naturaleza de la perturbación, como a continuación veremos.

3.2. Linearización de las ecuaciones de campo

Las ondas gravitatorias son tan fundamentales en relatividad general, que emergen desde la versión linearizada de la teoría. Este tratamiento fue estudiado por Albert Einstein poco después de postular las ecuaciones de campo en un espaciotiempo plano, aunque los resultados pueden generalizarse para cualquier espaciotiempo de fondo curvo.

Considere un espaciotiempo de fondo, $g_{\alpha\beta}^{(0)}$, cuya solución es conocida. Esto es, si $R_{\mu\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu}^{(0)})$ y $R^{(0)} = g^{(0)\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(0)}$, entonces, de acuerdo a la ec. (3.7) y (3.10),

$$T_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{c^4}{8\pi G} (R_{\mu\nu}^{(0)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^{(0)} R^{(0)}).$$

Para linearizar las ecuaciones de campo, lo primero es expandir a primer orden todas las cantidades físicas relevantes. La métrica se reescribe como,

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

donde h es una pequeña perturbación, tal que $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ y $g^{\mu\nu} = g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2)$. El tensor de curvatura de Riemann, a primer orden es,

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(0)} + R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)}.$$

Y el tensor de Ricci es,

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = (g^{(0)\mu\nu} - h^{\mu\nu})(R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(0)} + R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)}).$$

El primer término $g^{(0)\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(0)} = R_{\mu\nu}^{(0)}$ corresponde al tensor de Ricci del espacio de fondo. Los términos cruzados son de primer orden. Entonces, despreciando el término a segundo orden:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu}^{(0)} + R_{\mu\nu}^{(1)}, \\ R_{\mu\nu}^{(1)} &= g^{(0)\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando que $h = g^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$, se obtiene que:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\nabla^{(0)\alpha} \nabla^{(0)\mu} h_{\nu\alpha} + \nabla'^{\alpha} \nabla_{\nu}^{(0)} h_{\mu\alpha} - \nabla'^{\alpha} \nabla_{\alpha}^{(0)} h_{\mu\nu} - \nabla_{\mu}^{(0)} \nabla_{\nu}^{(0)} h). \quad (3.14)$$

$\nabla^{(0)}$ significa que las operaciones son respecto a la geometría de fondo.

3.2.1. Linearización en Minkowski

En la mayoría de las situaciones astrofísicas la gravitación es *débil*, esto es, la geometría del espaciotiempo es *casi* plana; lo mismo pasa lejos de un objeto compacto. Así que trabajemos en el caso más sencillo donde el espacio de fondo es plano y queda descrito por la métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu}^{(0)} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (3.15)$$

En Minkowski, la derivada covariante se reduce a la derivada ordinaria y $\nabla_\alpha^{(0)}\nabla_\mu^{(0)}h = \partial_\alpha\partial_\mu h$ porque los símbolos de Christoffel son nulos. El tensor de Ricci a primer orden se transforma en,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu(\partial_\lambda h_\nu^\lambda - \frac{1}{2}\partial_\nu h_\lambda^\lambda) + \partial_\nu(\partial_\lambda h_\mu^\lambda - \frac{1}{2}\partial_\mu h_\lambda^\lambda)). \quad (3.16)$$

donde $\square = \eta_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu = \partial_\mu\partial^\mu = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{d^2}{dt^2} + \nabla\right)$; y $h_\nu^\mu \equiv \eta^{\lambda\delta}h_{\delta\nu}$.

Las ecuaciones linearizadas pueden expresarse de forma más compacta definiendo,

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (3.17)$$

tal que $\bar{h} = -h$ y entonces, $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. De esta manera, las ecuaciones de campo se expresan como:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} + \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Invocamos ahora la libertad de norma, o *gauge* para elegir la norma de Lorentz, definida por,

$$\boxed{\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0}, \quad (3.19)$$

entonces, los tres últimos términos del lado izquierdo de (3.18) son nulos y la expresión se reduce a:

$$\boxed{\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}. \quad (3.20)$$

Corresponde a la ecuación de onda con fuentes. Mas aún, las ecuaciones (3.19) y (3.20) demandan que,

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.21)$$

que son las ecuaciones de conservación en teoría linearizada. $T_{\mu\nu}$ debe ser *pequeño*, consistente con el hecho de haberla añadido en la aproximación lineal del tensor de Ricci; en ese sentido T representa una fuente débil. Nota: a partir de este punto trabajaremos en la norma de Lorentz, pero por simplicidad seguiremos nombrando h a \bar{h} .

3.2.2. Propagación en el vacío

Fuera de una fuente, en el vacío, la ecuación anterior es simplemente,

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla\right) h_{\mu\nu} = 0; \quad (3.22)$$

e implica que $h_{\mu\nu}$ es una onda tensorial que viaja a la velocidad de la luz. Su solución general es la superposición de ondas planas de la forma:

$$h_{\mu\nu}(x) = \alpha_{\mu\nu} \exp^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.23)$$

donde $\alpha_{\mu\nu}$ es llamado tensor de polarización, $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ es el vector de onda y ω denota la frecuencia angular de la onda. La métrica del espaciotiempo ahora toma la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \alpha_{\mu\nu} \exp^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.24)$$

con $|\alpha_{\mu\nu}| \ll 1$, es decir que aunque la métrica de fondo es completamente plana, una componente de la métrica tiene un comportamiento tipo onda, por imposición de las ecuaciones de campo relativistas. Se trata de una oscilación tensorial sobre la métrica, es decir, sobre el espaciotiempo, o equivalentemente sobre el campo gravitatorio. Por ello, la perturbación se nombra *onda gravitatoria*.

La condición de Lorentz ahora implica que, $ik^\mu \alpha_{\mu\nu} \exp^{ik_\alpha x^\alpha} = 0$, lo cual solo es siempre válido sí:

$$k^\mu \alpha_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Esto implica que las componentes tensoriales están relacionadas. De las diez componentes independientes, ahora tenemos seis. No obstante, la condición de Lorentz no fija completamente la norma. Bajo una transformación de coordenadas, $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$, la derivada de h cambia de $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu$. Entonces, la condición de Lorentz no se ve afectada si imponemos que,

$$\square \xi_\mu = 0. \quad (3.26)$$

Más aún, uno puede elegir ξ^0 tal que la traza $\bar{h} = 0$. Llevando hasta el final estas elecciones, se encuentra que,

$$h^{0\mu} = 0, \quad h^i_i = 0, \quad h_{ij} = 0; \quad (3.27)$$

Las relaciones anteriores definen completamente la norma de Lorentz libre de traza, ó norma TT. Nótese que en la norma TT la matriz simétrica $h_{\mu\nu}$ solo tiene dos grados de libertad,

porque la ec. (3.26) impone cuatro funciones entre las coordenadas. Así, en la norma TT y eligiendo $\hat{\mathbf{z}}$ como el eje de propagación, la ec. (3.23) se reduce a:

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos[\omega(t - z/c)] \quad (3.28)$$

Si la onda plana, h_{ij} , se propaga en la dirección $\hat{\mathbf{n}}$, pero no está descrita en la norma TT, se puede encontrar su forma en la norma TT introduciendo el tensor proyector, P_{ij} y el tensor Lambda $\Lambda_{ij,kl}$, definidos como,

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j \quad \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ij} P_{kl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl}. \quad (3.29)$$

Así, para tener la perturbación en la norma TT se aplica,

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl}. \quad (3.30)$$

3.2.3. Energía de las ondas

Las ondas gravitatorias transportan energía y momento y pueden interactuar con la materia, afectar su movimiento.

Aunque no es para nada trivial saber qué parte de la métrica pertenece al fondo y cuál a la fluctuación, bajo ciertas condiciones y en el marco de referencia adecuado, la métrica puede expresarse como en la ec. (3.12). Una de las condiciones es que exista una clara separación entre las escalas del fondo y de la onda gravitatoria. Esto es, si L_B es la escala típica de variación espacial de la métrica de fondo, y las ondas tienen una longitud de onda característica, λ , entonces,

$$\frac{\lambda}{2\pi} \ll L_B. \quad (3.31)$$

Esta relación permite notar que la teoría linealizada solo está bien definida para ondas gravitatorias con longitudes de onda muy chicas en comparación con L_B , o equivalentemente, frecuencias altas. En el régimen de altas frecuencias, el tensor de Ricci a segundo orden, $R^{(2)}$, está relacionado con la energía y el momento de las ondas gravitatorias. De hecho, su tensor de materia y energía es:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} g \nabla^{\mu\nu} R^{(2)} \rangle, \quad (3.32)$$

donde $\langle \dots \rangle$ representa el promedio sobre las longitudes de onda de las contribuciones de segundo orden en la expansión del tensor de Einstein en potencias de la métrica perturbada. En la norma TT se reduce a:

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle. \quad (3.33)$$

El término t_{00} corresponde a la densidad de energía. En la norma TT es:

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle. \quad (3.34)$$

donde el punto representa derivada temporal, $\partial_0 = c\partial_t$.

3.3. Fuentes débiles de radiación

Retomemos nuevamente la ecuación (3.20),

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

Al ser lineal en $h_{\mu\nu}$ puede resolverse usando el método de la función de Green: Sea $G(x - x')$ una solución de la ecuación, $\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x')$, con \square_x el operador d'Alembertiano respecto a la variable x . Entonces, la solución correspondiente a la ecuación (3.20) es,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4 x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') \quad (3.35)$$

G depende fundamentalmente de las condiciones de frontera impuestas. En términos del tiempo retardado, $t_{ret} = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}$,

$$G(x - x') = -\frac{\delta(x_{ret}^0 - x'^0)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.36)$$

con $x'^0 = ct'$ y $x_{ret}^0 = ct_{ret}$. De esta manera, la ecuación (3.35) se reescribe como,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3 x' T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}' \right) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (3.37)$$

se trata de una integral sobre el pasado del cono de luz del punto (ct, \mathbf{x}) que será analizada en la siguiente sección.

3.3.1. Fuentes con velocidades arbitrarias

La fuente está caracterizada por el tensor de materia-energía $T^{\mu\nu}$. Para entenderla, introduzcamos los momentos de T^{ij} ,

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}), \\ S^{ij,k} &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k, \\ S^{ij,kl} &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k x^l, \end{aligned} \quad (3.38)$$

los momentos de T^{00}/c^2 ,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}), \\ I^i &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i, \\ I^{ij} &= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j, \end{aligned} \quad (3.39)$$

y los momentos de $(1/c)T^{0i}$,

$$\begin{aligned} P^i &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}), \\ P^{i,j} &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j \\ P^{i,jk} &= \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \mathbf{x}) x^j x^k, \dots \end{aligned} \quad (3.40)$$

De acuerdo a su orden, suelen nombrarse como monopolar, dipolar o cuadrupolar. Nótese que hasta este punto no hemos condicionado el espaciotiempo de fondo a ser plano.

Por conservación de materia-energía (ecuación 3.9 y 3.21), las componentes espaciales y temporales del tensor T^{kl} están relacionadas,

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}. \quad (3.41)$$

Esta identidad, sobre los momentos recién definidos, implica propiedades interesantes. En primer lugar,

$$\dot{I} = \frac{1}{c} \int_V d^3x x^i \partial_0 T^{00} = -\frac{1}{c} \int_V d^3x \partial_i T^{0i} = \int_{\partial V} dS^i T^{0i} = 0, \quad (3.42)$$

se interpreta como la conservación de masa. Por otra parte,

$$\dot{I}^i = \frac{1}{c} \int_V d^3x x^i \partial_0 T^{00} = -\frac{1}{c} \int d^3x x^i \partial_j T^{0j} = \frac{1}{c} \int_V d^3x \delta_j^i T^{0j} = P^i, \quad (3.43)$$

y de forma similar,

$$\dot{I}^{ij} = \frac{1}{c} \partial_0 \int_V d^3x x^i x^j T^{00} = P^{i,j} + P^{j,i}. \quad (3.44)$$

Las derivadas temporales de los momentos P son,

$$\dot{P}^i = c \partial_0 P^i = \int d^3x \partial_0 T^{0i} = 0, \quad (3.45)$$

que se interpreta como la conservación del momento lineal;

$$\dot{P}^{i,j} = S^{ij}, \quad (3.46)$$

de donde se sigue que $\dot{P}^{i,j} - \dot{P}^{j,i} = S^{ij} - S^{ji} = 0$, y se interpreta como la conservación del momento angular de la fuente debido a la simetría del tensor S^{ij} .

En consecuencia, al derivar la ecuación (3.44), y con la ayuda de la ecuación (3.46),

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{I}^{ij}. \quad (3.47)$$

Como recordatorio, las derivadas deben ser evaluadas en el punto $(t - d/c, \mathbf{x}')$. El término, T^{00}/c^2 , dimensionalmente tiene unidades de densidad de masa. Solo para fuentes de campo débil y en el límite no-relativista, T^{00}/c^2 representa la densidad de masa. Sin embargo, al ya estar dentro de la linearización de las ecuaciones de campo de RG, hemos asumido campos débiles. Así que, T^{00}/c^2 representa la densidad de masa de la fuente. Esto es todo lo que podemos deducir de la fuente sin hacer más suposiciones que las del régimen lineal.

3.3.2. Fuentes lentas: Aproximación cuadrupolar

Consideremos una fuente de tamaño, R_{fuente} , que varía armónicamente con frecuencia angular característica ω y longitud de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$, y que se encuentra a una distancia d del observador o detector. Si las siguientes suposiciones, se satisfacen,

1. $\lambda \gg R_{\text{fuente}}$: aproximación de longitud de onda larga
2. $d \gg R_{\text{fuente}}$: aproximación de distancia a la fuente
3. $c \gg v$: la energía de la fuente está dominada por la densidad de masa en reposo μ , es decir, sus velocidades internas son no relativistas.

diremos que estamos en la Aproximación Cuadrupolar. Ahora bien, usando que $d \gg R_{\text{fuente}}$,

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = d - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{R_{\text{fuente}}^2}{d}\right) \simeq d - \mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Entonces, la ecuación(3.37) tiende a,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4 d} \int d^3 x' T_{\mu\nu}(t - d/c, \mathbf{x}'), \quad (3.48)$$

Ahora, expandimos al tensor T_{kl} , en series de Taylor sobre el parámetro $\mathbf{x}' \cdot \hat{\mathbf{n}}/c$,

$$\begin{aligned} T_{kl} \left(t - \frac{d}{c}, \mathbf{x}' \right) &\simeq T_{kl}(t - \frac{d}{c}, \mathbf{x}') \\ &+ \frac{x'^i n^i}{c} \partial_0 T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_0^2 T_{kl} + \dots, \end{aligned}$$

La ecuación(3.30) y (3.37), a grandes distancias de la fuente,

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{dc^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{2}{c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]_{ret}, \quad (3.49)$$

donde *ret* significa que las derivadas deben evaluarse sobre el tiempo retardado $t - d/c$. Nos quedamos sólo con el primer término y ocupamos la ecuación (3.47). Finalmente encontramos que,

$$\boxed{h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) \approx \frac{2G}{dc^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) \ddot{I}^{kl}(t - d/c)} \quad (3.50)$$

que es la famosa fórmula cuadrupolar de Einstein, porque él fue el primero en publicarla. Significa que, al menos a primer orden, la radiación gravitatoria es un fenómeno cuadrupolar: sí la distribución de masa es monopolar o dipolar, no producirá ondas gravitatorias, en contraste con electrodinámica, donde la radiación por dipolos eléctricos y magnéticos sí existe.

Recordemos que $\Lambda_{ij,kl} \equiv P_{ij}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}$, en términos del operador proyector en la dirección de propagación, $P_{ij} \equiv \delta_{ij} - n_i n_j$, y $\mathbf{n} = \mathbf{x}/d$. Si la dirección de propagación es igual a $\hat{\mathbf{z}}$, $P = \text{diag}(1, 1, 0)$, es el proyector sobre el plano (x,y). Entonces,

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{I}^{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22})/2 & \ddot{I}_{12} & 0 \\ \ddot{I}_{21} & -(\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$h_{ij}^{TT}(t, \mathbf{z}) = \frac{2G}{dc^4} \begin{pmatrix} (\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22})/2 & \ddot{I}_{12} & 0 \\ \ddot{I}_{21} & -(\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

De esta forma es fácil leer las dos amplitudes de polarización para la ondas propagándose en la dirección z ,

$$\boxed{h_+ = \frac{G}{rc^4}(\ddot{I}_{11} - \ddot{I}_{22}); \quad h_\times = \frac{2G}{rc^4}\ddot{I}_{12}} \quad (3.52)$$

3.3.3. Luminosidad gravitatoria

En §3.2.3. se mostró cómo asociar una energía a las ondas gravitatorias. Si éstas se propagan en la dirección z , el flujo de energía transportado por las ondas está dado por la componente t_{tz} , entonces, de la ecuación (3.34) se sigue que,

$$F = \frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (3.53)$$

donde, $d\Omega$ representa un diferencial sobre una 2-esfera. Integrando sobre $d\Omega$,

$$L_{OG} \equiv \int F d\Omega = \frac{dE}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^3 d^2}{16\pi G} \int \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle d\Omega. \quad (3.54)$$

y sustituyendo la fórmula cuadrupolar:

$$L = \frac{G}{5c^5} \left\langle \ddot{I}_{ij} \ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{kk})^2 \right\rangle. \quad (3.55)$$

se obtiene la aproximación cuadrupolar para la luminosidad. Depende sólo de la tercera derivada del tensor de masa cuadrupolar y $\langle \rangle$ denota promedio temporal sobre los periodos característicos, o equivalentemente las frecuencias de las ondas. Para efectuar el promedio, es conveniente expresar,

$$\begin{aligned} L &= \frac{G}{5c^5} \left(\ddot{I}_{xx}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 - \frac{1}{3} (\ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy})^2 \right) \\ &= \frac{2G}{15c^5} \left(\ddot{I}_{xx}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 + 3\ddot{I}_{xy}^2 - \ddot{I}_{xx} \ddot{I}_{yy} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, se integra durante varios periodos orbitales para obtener el promedio. Equivalentemente se puede integrar sobre las frecuencias, φ , haciendo,

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\varphi) d\varphi. \quad (3.56)$$

3.4. Aplicaciones

Ya hemos desarrollado las ecuaciones que nos permitirán estimar los parámetros de las ondas, aunque restringidas a fuentes débiles con velocidades no relativistas. Si la fuente es puntual y

se mueve en la trayectoria $x_0^\mu(t)$ sobre un espaciotiempo plano, su tensor de energía momento es,

$$T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{p^\mu p^\nu}{\gamma M} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0(t)), \quad (3.57)$$

donde M es la masa total de la fuente, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y $p^\mu = \gamma M(dx_0^\mu/dt) = (E/c, \mathbf{p})$ es el cuádrimomento.

Si la fuente está compuesta por un conjunto de partículas, cuyas masas y trayectorias están denotadas por el subíndice A , entonces $T^{\mu\nu}$ total se generaliza como,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &= \sum_A \frac{p_A^\mu p_A^\nu}{\gamma_A M_A} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)) \\ &= \sum_A \gamma_A M_A \frac{dx_A^\mu}{dt} \frac{dx_A^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)) \end{aligned} \quad (3.58)$$

En particular, la componente 00 es,

$$T^{00}(t, \mathbf{x}) = \sum_A \gamma_A M_A c^2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)). \quad (3.59)$$

Así que, de la definición del segundo momento de la masa se sigue que,

$$\begin{aligned} I^{ij}(t) &= \sum_A M_A \int d^3x x^i x^j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_A(t)) \\ &= \sum_A M_A x_A^i(t) x_A^j(t) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Si las fuentes no son puntuales, debe considerarse otro tensor de materia-energía acorde a la composición de la fuente y para obtener M^{ij} se integra en su volumen. En lo que sigue trabajaremos sólo con fuentes puntuales.

3.4.1. Análisis cualitativo: frecuencias

Considere un sistema auto-ligado de masa total M y tamaño característico R . Su frecuencia natural de rotación y colapso dinámico y/o revolución orbital es del orden de:

$$f_{\text{fuente}} \sim \left(\frac{GM}{R^3} \right)^{1/2} \quad (3.61)$$

que es justamente el inverso del tiempo dinámico¹ del sistema,

¹Tiempo dinámico: Escala de tiempo a la cual un objeto, antes en equilibrio hidrostático, colapsaría en caída libre.

$$\tau_{dyn} = \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} = \frac{1}{f_{fuente}} \quad (3.62)$$

Definimos la frecuencia característica, f_0 , mediante constantes naturales:

$$f_0 \equiv \frac{c^3}{GM} = 2 \times 10^5 \frac{M_\odot}{M} \text{ Hz}, \quad (3.63)$$

y, de la definición de compacticidad de la fuente (ecuación 1.2), $\mathcal{C} = R_s/R$, la frecuencia de la fuente se reescribe como:

$$f_{fuente} = \mathcal{C}^{3/2} f_0 = 2 \times 10^5 \mathcal{C}^{3/2} \frac{M_\odot}{M} \text{ Hz} \quad (3.64)$$

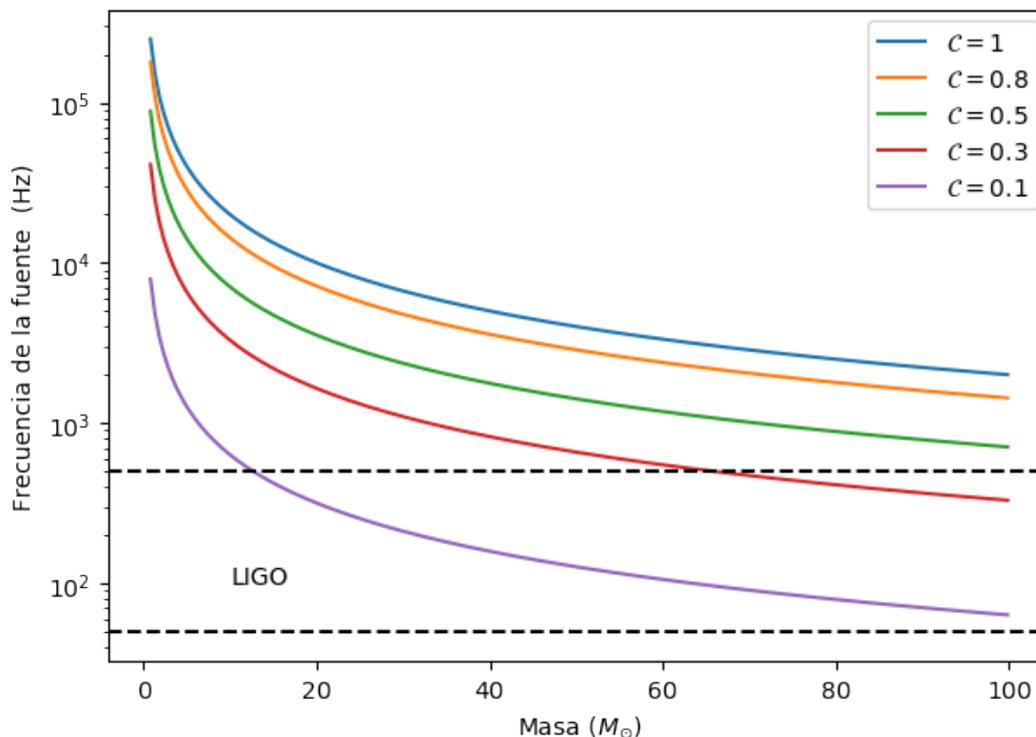


Figura 3.1: Relación entre la masa de un cuerpo y su compacticidad con su frecuencia característica, f_{fuente} , dada por la ecuación (3.36). Las líneas punteadas delimitan el rango de frecuencias que puede detectar LIGO de manera confiable (ver Figura 1.6).

En ordenes de magnitud, se espera que la frecuencia de la onda, f_{og} sea cercana a f_{fuente} ; en general,

$$f_{og} \lesssim f_{fuente}$$

por lo tanto, las curvas en la Figura 3.1, son los límites superiores para la frecuencia de las ondas gravitatorias emitidas por sistemas de masas entre 0.8 y $50 M_{\odot}$, variando el parámetro de la compacticidad, \mathcal{C} .

Como referencia, en la sección §1.2.4. se estimaron valores estándares de compacticidad para cada objeto compactos. $\mathcal{C} = 1$ corresponde a los hoyos negros, $\mathcal{C} \sim 0.2 - 0.62$ a estrellas de neutrones y $\mathcal{C} \sim 10^{-4}$ para enanas blancas.

Además, con la ecuación (1.2), se puede calcular el radio que tendría una estrella de neutrones con cierta masa y compacticidad:

$$R = \frac{2GM}{c^2\mathcal{C}}.$$

Si su masa es cercana a su límite de Tolman-Ophenheimer, $M \sim 2.1 M_{\odot}$ y $\mathcal{C} = 0.8$, su radio es $R = 7.76 \times 10^5$ cm, el cual está por debajo de las observaciones actuales de los tamaños característicos de las estrellas de neutrones (10^6 cm).

Este análisis cualitativo puede extenderse a sistemas binarios, sustituyendo M por la masa reducida del sistema, μ y R por la separación entre los dos cuerpos, porque son las variables que caracterizan el tiempo dinámico del sistema, como se mostró en la sección §2.1. Para extenderse a otros sistemas, tendría que sustituirse M y R por sus masas y dimensiones características.

Por otro lado, el rango de frecuencias de un detector por interferometría de ondas gravitatorias, depende del tamaño de los brazos interferométricos. Hasta ahora, sólo existen tres interferómetros terrestres en operación y detectan frecuencias entre Hz y KHz, con sus brazos kilométricos, que coincide con fuentes compactas de masas estelares. Esta es la razón por la que los interferómetros terrestres tienen un rango acotado en altas frecuencias y lo que esperan detectar principalmente, son sistemas astrofísicos compactos de masas estelares.

Como se describió en §1.2., cuando los objetos compactos están fuera del equilibrio, ya sea durante su formación o en un choque violento, por un instante de tiempo se vuelven las fuentes más intensas de OG en el Universo con luminosidades de hasta 10^{56} ergs $^{-1}$. En particular, la coalescencia de dos objetos compactos, es la fuente mayor tasa de eventos probables y por lo tanto, más esperada.

En el caso de sistemas con interacción electromagnética, nuclear o de otra índole, la restricción sobre la velocidad ($v \ll c$) es independiente de la expansión de campo débil y por lo tanto pueden considerarse fuentes de velocidades arbitrarias.

Aunque suele interpretarse que una fuente débil es aquella cuyas velocidades típicas son no relativistas, esto es estrictamente válido en un sistema ligado únicamente por acción de la gravedad, como puede verse aplicando el teorema del virial $T = -\frac{1}{2}U$. Un sistema con masa reducida es μ y $U = -G\mu^2/R$,

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{G\mu^2}{2R},$$

por lo tanto

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R_s(\mu)}{2R}, \quad (3.65)$$

con $R_s(\mu) = 2G\mu/c^2$, el radio de Schwarzschild asociado a la masa μ . Entonces, que la fuente sea débil significa que $R_s/R \ll 1$ y $v \ll c$, puede no ser así si existen otras contribuciones a la energía del sistema.

3.4.2. Análisis cualitativo: deformación y luminosidad

Consideremos un sistema ligado gravitatoriamente de tamaño característico R y masa M . De la ecuación (3.60), en orden de magnitud,

$$I^{ij}(t) = Mx^i x^j \sim MR^2$$

La dinámica del sistema está caracterizada por la velocidad angular $\Omega = \dot{\varphi}$, entonces,

$$\dot{I}^{ij}(t) \sim MR^2\Omega; \quad \ddot{I}^{ij}(t) \sim MR^2\Omega^2; \quad \dddot{I}^{ij}(t) \sim MR^2\Omega^3.$$

Insertamos estas aproximaciones en la ecuación (3.50):

$$h \approx \frac{2G}{c^4 d} \ddot{I} \sim \frac{2G}{c^4 d} MR^2\Omega^2 = \frac{2G}{c^4} \frac{Mv^2}{d}.$$

donde hemos usado que la velocidad del centro de masa del sistema es $v = R\Omega$. Mas aún, usando que $R_s = 2GM/c^2$ encontramos que,

$$h \sim \left(\frac{R_s}{d}\right) \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (3.66)$$

Esta expresión nos da una idea cualitativa del tamaño de la amplitud de la onda gravitatoria lejos de la fuente. Significa que mientras más cerca, más masivo y más rápido sea el sistema, mayor será h .

La luminosidad puede estimarse de la ecuación (3.55), entonces

$$L \approx \frac{G}{5c^5} \ddot{I} \approx \frac{G}{5c^5} (MR^2\omega^3)^2 \sim L_0 \left(\frac{r_s}{R}\right)^2 \left(\frac{v}{c}\right)^6, \quad (3.67)$$

con

$$L_0 \equiv \frac{c^5}{G} = 3.6 \times 10^{59} \text{ erg } s^{-1}. \quad (3.68)$$

De nuevo, a mayor masa y velocidad de la fuente, mayor cantidad de energía por segundo emitirá, en forma de ondas gravitatorias.

Otra cantidad relevante es el factor de eficiencia para la emisión de ondas gravitatorias, ε :

$$\varepsilon \equiv \left(\frac{R_s}{R} \right)^{7/2} \quad (3.69)$$

con lo que la norma de la onda toma la forma,

$$h \approx 9.6 \times 10^{-17} \varepsilon^{2/7} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{\text{kpc}}{d} \right) \quad (3.70)$$

3.4.3. Sistema binario en órbitas circulares

Consideremos un sistema compuesto por dos objetos astrofísicos ligados gravitatoriamente que se mueven en órbitas circulares en torno al centro de masa del sistema; sus masas son, M_1 y M_2 , respectivamente. Se trata del problema de dos cuerpos, ya trabajado en §2.1.2. En particular, se satisfecerá la ecuación (2.17).

Cuando los cuerpos se mueven en órbitas circulares, la velocidad solo tiene contribución angular porque la coordenada radial permanece constante, así que, de la ecuación (2.20), $v = r\dot{\varphi}$.

Sea

$$\dot{\varphi} := \Omega(t),$$

también llamada velocidad angular. Cuando, el movimiento circular es uniforme, la velocidad angular se relaciona con el periodo P , la frecuencia orbital f y la longitud de onda λ , mediante,

$$P \equiv \frac{2\pi}{\Omega}; \quad f = \frac{\Omega}{2\pi}; \quad \lambda = c/f.$$

Las condiciones de la aproximación cuadrupolar nos restringen el análisis del sistema:

1. $\lambda \gg R_1 + R_2$: la longitud de onda gravitatoria es mucho mayor al tamaño característico del sistema
2. $d \gg R_1 + R_2$: el sistema binario se encuentran en la lejanía
3. la fuente es no relativista

Como los cuerpos están cambiando su dirección de movimiento y velocidad, están acelerados. Sobre la masa reducida se ejerce una fuerza centrípeta, siempre dirigida hacia el centro de masa del sistema,

$$\mathbf{F}_{\text{centrípeta}} = -\mu \frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} = -\mu r \Omega^2 \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.71)$$

La aceleración centrípeta se equilibra con la aceleración producida por la fuerza neta central, $f(r) = -\frac{dU}{dr}$, con $U = -\frac{GM\mu}{r^2}$, entonces,

$$-\mu r \Omega^2 \hat{\mathbf{r}} = -\frac{GM\mu}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

De esta manera, Ω está relacionada con la energía potencial como,

$$\Omega^2 = \frac{GM}{r^3}, \quad (3.72)$$

que es la tercera ley de Kepler. Luego, expresemos las componentes del vector posición en coordenadas polares, para cada estrella:

$$x_i(t) = r_i \cos(\Omega t), \quad y_i(t) = r_i \sin(\Omega t), \quad z_i(t) = 0, \quad (3.73)$$

con $i = 1, 2$.

Aunque en el caso físico las estrellas no son objetos puntuales, al encontrarnos muy lejos de ellas, el campo gravitatorio es equivalente al caso de las masas discretas, independientemente de su distribución interna de masa.

De la ecuación (3.60), el segundo momento de la masa es,

$$I^{ij}(t) = M_1 r_1^i r_1^j + M_2 r_2^i r_2^j, \quad (3.74)$$

donde r_j^i es la componente i -ésima del vector de posición de la estrella j . Luego del cálculo explícito de cada componente ², se obtiene que,

$$I_{ij}(t) = \frac{1}{2} \mu r^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) & 0 \\ \sin(2\Omega t) & 1 - \cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

En particular,

$$\begin{aligned} \ddot{I}_{11} &= 2\mu r^2 \Omega^2 \cos 2\Omega t \\ \ddot{I}_{12} &= 2\mu r^2 \Omega^2 \sin 2\Omega t \\ \ddot{I}_{22} &= -2\mu r^2 \Omega^2 \cos 2\Omega t. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.50) se obtiene que,

²Por ejemplo,

$$I^{xx} = M_1 x_1^2 + M_2 x_2^2 = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \cos^2(\Omega t) = \frac{1}{2} \mu r^2 (1 + \cos 2\Omega t).$$

En la última igualdad utilizamos que $\cos \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$.

$$\begin{aligned}
h_+ &= \frac{1}{d} \frac{4G\mu\Omega^2 r^2}{c^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \varphi}{2} \right) \cos(2\Omega t) \\
h_+ &= \frac{1}{d} \frac{4G\mu\Omega^2 r^2}{c^4} \cos \varphi \sin(2\Omega t)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Ahora, es fácil construir el tensor h^{ij} en su representación matricial. Si la dirección de propagación es el eje z, de la ecuación (3.13), se obtiene que,

$$h^{ij}(t) = \frac{4\Omega^2 \mu r^2}{d} \begin{pmatrix} -\cos 2\Omega(t-d) & -\sin 2\Omega(t-d) & 0 \\ -\sin 2\Omega(t-d) & \cos 2\Omega(t-d) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.78}$$

De forma similar se calcula la luminosidad,

$$L = \frac{32G}{5c^5} \mu r^2 \Omega^6 \tag{3.79}$$

Sustituyendo la tercera ley de Kepler,

$$L = \frac{32G^4}{5c^5} \frac{M^3 \mu^2}{r^5}. \tag{3.80}$$

Por teorema del virial, la energía total del sistema es,

$$E = -\frac{1}{2} \frac{G\mu M}{r} \tag{3.81}$$

Ahora, derivamos e igualamos con la expresión para la luminosidad:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{G\mu M}{2r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{32G^4}{5c^5} \frac{M^3 \mu^2}{r^5} \tag{3.82}$$

es una ecuación diferencial para r.

Resolviendo la ecuación anterior obtenemos que:

$$R(t) = \left[\frac{32G^3 M^3}{5c^5} (t_{coal} - t) \right]^{1/4} \tag{3.83}$$

Ahora, usando la tercera ley de Kepler es inmediato obtener la frecuencia orbital, pues:

$$\Omega^2(t) = \frac{GM}{4 \left[\frac{32G^3 M^3}{5c^5} (t_{coal} - t) \right]^{3/4}} \tag{3.84}$$

su comportamiento se muestra en la siguiente Figura,

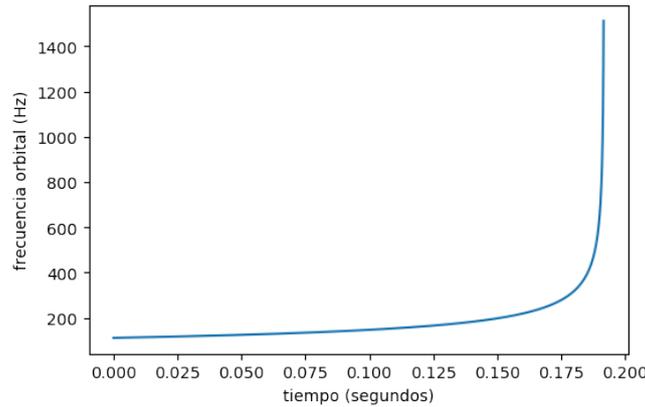


Figura 3.2: Evolución de la frecuencia orbital, Ω , de un sistema binario con $M_1 = 35M_\odot$ y $M_2 = 28M_\odot$ en fase inspiral para órbitas circulares keplerianas, con una separación inicial de $4.7 r_s$. El eje horizontal es el tiempo, medido en segundo. El eje vertical es la Ω , medido en Hertz.

La frecuencia de la onda gravitatoria es $f = f_{og} = 2\Omega/2\pi$, entonces:

$$f_{og} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{c^3}{GM} \right]^{5/8} (t_{coal} - t)^{-3/8} \quad (3.85)$$

La velocidad de rotación del sistema binario, en unidades de la velocidad de la luz son,

$$v = \frac{r \cdot r_s \cdot \Omega}{c}$$

éstas se muestran en la siguiente Figura.

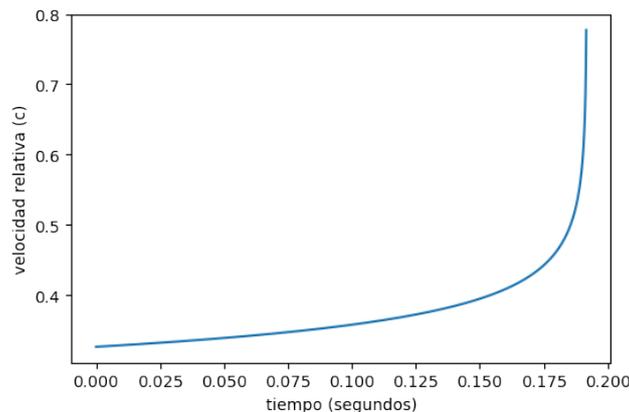


Figura 3.3: Evolución de las velocidades relativas del sistema binario con masas $M_1 = 35M_\odot$ y $M_2 = 28M_\odot$ en fase inspiral. La separación inicial es $4.7 r_s$. El eje horizontal es el tiempo, con unidades de segundos, mientras que el eje vertical es la velocidad relativa en unidades de la velocidad de la luz, c .

Como vemos, en este caso las ecuaciones cuadrupolares tienen soluciones analíticas y permiten resolver las ondas gravitatorias, su deformación (strain, h) y sus frecuencias, f_{og} .

Recapitulando...

Tanto la ley universal de gravitación -vista en el capítulo 2-, como las ecuaciones de campo de relatividad general, describen el fenómeno de la gravedad, pero desde interpretaciones muy distintas. En relatividad general, el efecto del campo gravitatorio depende de las propiedades geométricas del espaciotiempo, concretamente, del tensor de Einstein Ricci, $G_{\mu\nu}$, que a su vez, cambia según la distribución de materia-energía, cuantificada en el tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, de acuerdo a las ecuaciones de campo (ec. 3.10).

En el régimen de campo débil, lejos de la fuente, la geometría está descrita por la métrica de fondo de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$ más una pequeña perturbación, $h_{\mu\nu}$. La linearización de las ecuaciones de campo en la norma de Lorentz, implica que la perturbación satisface una ecuación de onda tensorial general (ec. 3.20). Fuera de la fuente, la ecuación de onda tiene por solución general la superposición de ondas planas (ec. 3.23), hecho que significa que aunque la métrica es casi plana, una componente tiene un comportamiento ondulatorio sobre el espaciotiempo, razón por la cual h es llamada onda gravitatoria. En la norma TT, ésta tiene dos grados de polarización y transporta energía a la velocidad de la luz.

Si la fuente tiene velocidades internas no relativistas y se satisface la aproximación de longitud de onda larga y de distancia a la fuente, se dice que estamos en la aproximación cuadrupolar. En ella, la onda gravitatoria depende principalmente de las segundas derivadas temporales del segundo momento de masa, I_{ij} (ec. 3.50), y la tasa de energía radiada, ó luminosidad, depende de sus terceras derivadas (ec. 3.55). La aproximación cuadrupolar es muy útil para entender las relaciones entre las variables de la fuente y las de la onda (§3.4.1 y §3.4.2), y también para modelar las ondas gravitatorias emitidas por un sistema astrofísico binario ligado fuera de nuestro sistema solar. El caso más simple es cuando los dos objetos se mueven en órbitas circulares en torno al centro de masa (§3.4.3).

Estamos ahora en condiciones de plantear un modelo para dos estrellas de neutrones con interacción gravitomagnética y su emisión de ondas gravitatorias. Este es el contenido del siguiente capítulo.

Capítulo 4

ANÁLISIS DEL SISTEMA BINARIO

Con los conceptos y resultados presentados en los primeros tres capítulos, en éste se construye un modelo propio para describir tanto la dinámica newtoniana como la emisión de ondas gravitatorias de binarias magnetizadas. Las hipótesis iniciales se presentan en la primera sección. Las secciones 2 y 3 son independientes entre sí. En §4.2 se analiza newtonianamente la dinámica del sistema, haciendo uso de la teoría presentada en el capítulo 2. En §4.3 se estudia la emisión de ondas gravitatorias restringido al caso en que los dos cuerpos describen órbitas circulares, dentro de la aproximación cuadrupolar, descrita en el capítulo 3. En la última sección de este capítulo, §4.4 se plantea cómo se modifica la luminosidad gravitatoria si no se suponen órbitas esféricas.

4.1. Planteamiento

Consideremos un sistema de dos objetos compactos cuyas posiciones son \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y, sus velocidades $\dot{\mathbf{r}}_1$ y $\dot{\mathbf{r}}_2$. El vector de posición relativa es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Los cuerpos poseen masas M_1 y M_2 . El marco de referencia tiene como origen el centro de masa, por lo que, $M_1\mathbf{r}_1 + M_2\mathbf{r}_2 = 0$. La masa total del sistema es, $M = M_1 + M_2$ y la masa reducida es, $\mu = M_1M_2/M$. Además, los cuerpos son esferas conductoras perfectas, con momentos magnéticos dipolares perfectos \mathbf{m}_1 y \mathbf{m}_2 . Sea α_1 el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_1 y, α_2 el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_2 . Una suposición central es que los momentos magnéticos ($i = 1, 2$) son constantes en magnitud, $m_i = |\mathbf{m}_i|$, y en dirección de tal manera que $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{m}_i = m_i \cos \alpha_i = \text{const.}$, es decir, α_i no cambia en el tiempo.

A partir de este punto, expresaremos todas las distancias como múltiplos del radio de Schwarzschild de una masa solar, $r_s = 2GM_\odot/c^2$. Redefinimos la coordenada radial como,

$$\mathbf{r} := r_s \mathbf{R}, \quad R = |\mathbf{r}|/r_s.$$

Por poseer masas y momentos magnéticos, la binaria tiene energía potencial gravitatoria, U_g , y energía potencial magnética, U_m . Con las suposiciones recién planteadas, las ecuaciones (2.28) y (2.56) describen los potenciales,

$$U_g(R) = -\frac{G\mu M}{r_s R}, \quad U_m(R) = \frac{km_1 m_2}{r_s^3 R^3},$$

con $k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$. El cociente entre las energías potenciales $U_m/U_g = -km_1 m_2/GM\mu r_s^2 R^2$, nos motiva a definir el parámetro β como,

$$\beta = \frac{km_1 m_2}{GM\mu r_s^2}. \quad (4.1)$$

β es un parámetro muy relevante porque cuantifica la dominancia del campo magnético sobre el gravitatorio ($U_m/U_g = -\beta/R^2$) y contiene la información de si la interacción magnética es atractiva o repulsiva. Si $\beta > 0$, U_m y U_g tienen signos opuestos, lo que significa que la interacción magnética es repulsiva; análogamente, si $\beta < 0$, U_m es atractiva.

También, observamos que β es adimensional¹ y constante porque depende unicamente de los parámetros intrínsecos de la binaria, que hemos asumido también constantes.

Por otra parte, los momentos magnéticos, m_1 y m_2 , dependen de los campos magnéticos polares, B_1 y B_2 , y de los radios R_1 y R_2 de cada estrella, como vimos en §2.2.1. Concretamente, de la ecuación (2.49), $m_1 \approx B_1 R_1^3$, y $m_2 \approx B_2 R_2^3$; sustituimos en la ecuación (4.1),

$$\beta \approx \frac{k}{Gr_s^2} \frac{B_1 B_2 (R_1 R_2)^3}{M\mu}. \quad (4.2)$$

El signo de β depende unicamente del signo de k , pues el resto de las cantidades son positivas. A su vez, k depende unicamente de la orientación de los dipolos magnéticos, es decir, de los ángulos α_i , entre \mathbf{R} y \mathbf{m}_i de cada estrella ($i = 1, 2$), ver Fig. 2.3. En el caso más general,

$$k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2. \quad (4.3)$$

α_1 y α_2 puede tomar valores entre $[0, 2\pi] = [0, 360^\circ]$ y $k \in [-1.5, 2]$, como se aprecia en la Figura 4.1. En la misma figura se observa que existen ciertas combinaciones de α_1 y α_2 que anulan la interacción magnética, pues $k = 0$. De la ecuación (4.3), esto ocurre cuando $2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 = \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$, es decir,

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{2}{\tan \alpha_1}\right), \quad (k = 0). \quad (4.4)$$

Significa que, dado α_1 , si $\alpha_2 < \arctan\left(\frac{2}{\tan \alpha_1}\right)$ entonces $k > 0$ y, si $\alpha_2 > \arctan\left(\frac{2}{\tan \alpha_1}\right)$, entonces $k < 0$, como se ilustra en la Figura 4.2. Por encima de la curva $\alpha_2(\alpha_1)$, se tienen los casos con $k < 0$, por debajo de la curva, $k > 0$.

1

$$[\beta] = \left[\frac{km_1 m_2}{GM\mu r_s^2} \right] = \frac{\text{emu}^2}{\text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2} \text{g}^2 \text{cm}^2} = \frac{(\text{cm}^{5/2} \text{g}^{1/2} \text{s}^{-1})^2}{\text{cm}^5 \text{g} \text{s}^{-2}} = \text{adim.}$$

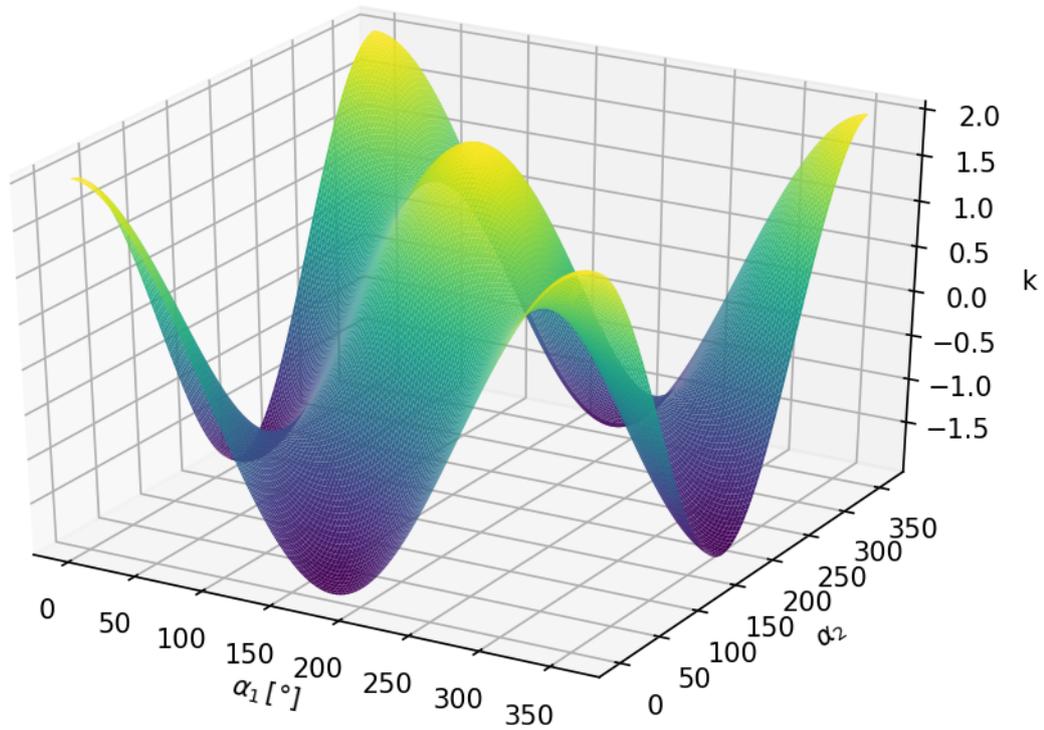


Figura 4.1: Parámetro $k = k(\alpha_1, \alpha_2) = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$. Los ejes X y Y tienen unidades de grados, el eje Z es adimensional.

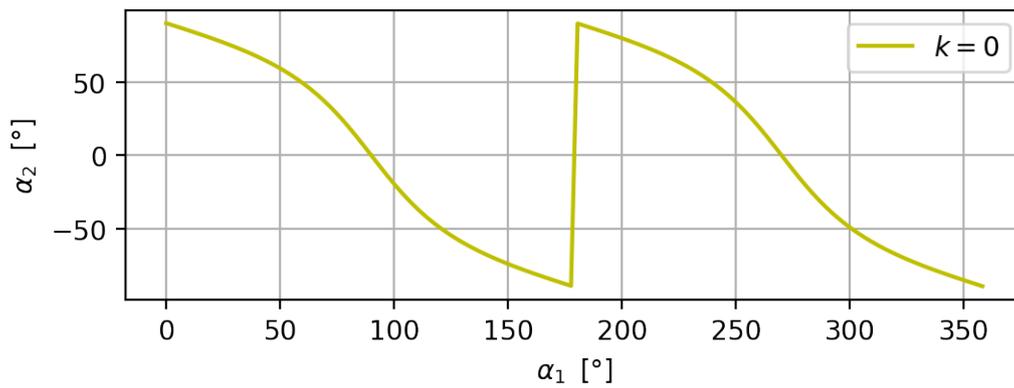


Figura 4.2: α_1 vs α_2 cuando $\alpha_2 = \arctan(2/\tan \alpha_1)$. La curva representa las combinaciones de α_1 y α_2 que hacen $k = 0$. Ambos ejes tienen unidades de grados. La curva delimita los casos $k > 0$ (debajo) y $k < 0$ (encima de la curva).

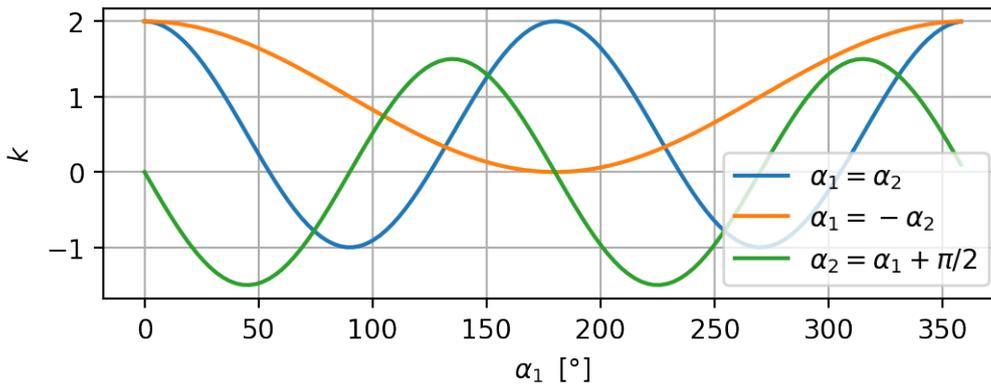


Figura 4.3: Parámetro k cuando los momentos magnéticos son paralelos entre sí, antiparalelos o perpendiculares. El eje X tiene unidades de grados y el eje Y es adimensional.

Ahora bien, podemos analizar algunos casos particulares:

- **Paralelos:** En el primer caso, $\mathbf{m}_1 \parallel \mathbf{m}_2$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$, de manera que k se simplifica como,

$$k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_1 = 3 \cos^2 \alpha_1 - 1.$$

Notamos que k es negativa cuando $3 \cos^2 \alpha_1 < 1$, es decir, $\alpha_1 < \arccos(\sqrt{1/3}) \sim 54.73$ grados. En cambio, es positivo cuando, $3 \cos^2 \alpha_1 > 1$, ó $\alpha_1 > \arccos(\sqrt{1/3})$.

- **Antiparalelos:** Si los momentos magnéticos son antiparalelos, significa que $\alpha_1 = -\alpha_2$. Usando que $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$, encontramos que,

$$k = 2 \cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha_1 + 1,$$

que ahora solo puede tomar valores positivos, $k > 0$.

- **Perpendiculares:** En tal caso, $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$. Usando que, $\cos(\pi/2 + x) = \sin(-x) = -\sin x$, y $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$, obtenemos que,

$$k = -3 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1.$$

La relación $k = k(\alpha_1)$ de los tres casos anteriores se muestra en la Figura 4.3.

Ahora que sabemos que $k \in [-1.5, 2]$, podemos estimar crudamente la magnitud de β para una binaria de estrellas de neutrones. Elegimos, convenientemente, $M_1 = M_2 = 1.2 M_\odot$, $R_1 = R_2 = 15$ km y $B_1 = B_2 = 10^{16}$ G (alcanzado sólo en magnetares). Sustituyendo en la ecuación (4.2), con $k = 1$ obtenemos, $\beta = 0.0342$. Si mantenemos las masas y radios pero consideramos $B_1 = B_2 = 10^{12}$ G, que son valores típicos de un púlsar, obtenemos que $\beta = 3.4 \times 10^{-10}$. En términos de los momentos magnéticos, suponiendo $m_1 = m_2$ y las mismas masas, tenemos que,

$$m_1 = \sqrt{GM\mu r_s^2} \sqrt{\beta} = 1.8232 \times 10^{35} \sqrt{\beta} \text{ emu.}$$

De esta manera, si $|m| \sim 10^{35}$ emu, entonces, $\beta \sim 1$. Si $|m| \sim 10^{34}$ emu, $\beta \sim 1/100$. Si $|m| \sim 10^{33}$ emu, $\beta \sim 1/10^4$, etc. Por supuesto, el efecto también dependerá de la distancia entre los objetos; mientras más lejanos, menor será la contribución de los campos magnéticos porque éste decrece como $1/R^3$, a diferencia del campo gravitatorio que decrece como $1/R$. Estas magnitudes de los momentos magnéticos (10^{34-35} emu) sí se han detectado en magnetares y otros objetos tipo estrella de neutrones, aunque principalmente en estrellas jóvenes y aisladas (2017, [38]). En principio, sería posible determinar el valor de β de un sistema binario real, estimando observacionalmente dos masas (M_1, M_2, M y/o μ), los radios R_1 y R_2 y los campos magnéticos B_1, B_2 (ver §1.2 para una discusión sobre las mediciones de campos magnéticos en objetos compactos).

Para concluir esta sección, expresemos la energía potencial total del sistema, $U = U_g + U_m = U_g \left(1 + \frac{U_m}{U_g}\right)$. En términos de β , adquiere la siguiente forma,

$$U(R) = -\frac{G\mu M}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2}\right). \quad (4.5)$$

Si $\beta = 0$, recuperamos el potencial gravitatorio. La función $U(R)$ es necesaria para resolver el problema de dos cuerpos newtoniano, pero también para encontrar la forma de las ondas gravitatorias emitidas, como veremos en §4.2 y §4.3, respectivamente.

4.2. Problema de dos cuerpos newtoniano

Desde un análisis newtoniano, los cuerpos ejercen entre sí fuerzas gravitatoria (2.27) y magnética (2.57). Ambas son centrales. La fuerza neta es la superposición de ambas,

$$\mathbf{F}(r) = \mathbf{F}_g(r) + \mathbf{F}_m(r) = \left[-\frac{GM\mu}{r^2} + \frac{3k m_1 m_2}{r^4} \right] \hat{\mathbf{r}}.$$

El cociente entre las fuerzas es,

$$\frac{\mathbf{F}_m}{\mathbf{F}_g} = -\frac{3k m_1 m_2}{GM\mu r_s^2 R^2} = -\frac{3\beta}{R^2},$$

así que la fuerza central neta es,

$$\mathbf{F}(R) = -\frac{G\mu M}{r_s^2 R^2} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right) \hat{\mathbf{R}} = f(R)\hat{\mathbf{R}}. \quad (4.6)$$

La fuerza y la energía potencial están relacionadas como, $\mathbf{F}(R) = -\nabla U$, pues ambas fuerzas son conservativas en el régimen newtoniano.

Con estas consideraciones, el sistema es un problema de dos cuerpos bajo la acción de la fuerza central (4.6). Como las fuerzas son centrales, las partículas ligadas describen trayectorias

sobre un plano (XY) y podemos reducir el problema al caso bidimensional. De la ecuación (2.21), la función lagrangiana del sistema es,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

En términos de la variable adimensional R ($\dot{R} = \dot{r}/r_s$) y con el potencial de la ecuación (4.5) tenemos que,

$$\mathcal{L}(R, \varphi) = \frac{\mu r_s^2}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G\mu M}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2}\right). \quad (4.7)$$

4.2.1. Ecuaciones de movimiento

La ecuación de Euler-Lagrange para φ es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \mu r_s^2 \frac{d}{dt} (R^2 \dot{\varphi}) = 0,$$

como $R^2 \dot{\varphi}$ permanece constante, podemos definir el momento angular l ,

$$l = \mu r_s^2 R^2 \dot{\varphi}. \quad (4.8)$$

Así, la evolución de la componente φ es,

$$\boxed{\dot{\varphi}(t) \equiv \Omega(t) = \frac{l}{\mu r_s^2} \frac{1}{R^2(t)}}, \quad (4.9)$$

donde a Ω le llamaremos frecuencia orbital. Por otra parte, la ecuación radial es,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{R}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{\mu r_s^2} \frac{dU}{dR} = 0.$$

Al sustituir la ecuación (4.9), se obtiene la ecuación de segundo grado para R ,

$$\ddot{R} - \frac{l^2}{\mu^2 r_s^4 R^3} + \frac{GM}{r_s^3 R^2} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right) = 0. \quad (4.10)$$

Se puede reducir el grado de la ecuación radial, convirtiéndola en un sistema de dos ecuaciones de primer grado para dos variables. Sean éstas, $R_a = R$ y $R_b = \frac{dR}{dt}$, por lo tanto,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dR_a}{dt} &= R_b, \\ \frac{dR_b}{dt} &= -\frac{GM}{r_s^3 R_a^2} \left(1 - \frac{3\beta}{R_a^2}\right) + \frac{l^2}{\mu^2 r_s^4 R_a^3}, \end{aligned}} \quad (4.11)$$

es equivalente a (4.10); más adelante será resuelto. La cantidad conservada asociada a la ecuación radial es la energía total E ,

$$E = \frac{\mu r_s^2}{2} \dot{R}^2 + \frac{l^2}{2\mu r_s^2 R^2} - \frac{G\mu M}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2}\right) \quad (4.12)$$

como puede comprobarse si se deriva ($0 = \mu r_s^2 \dot{R}\ddot{R} - \frac{l^2}{\mu r_s^2 R^3} \dot{R} + \frac{G\mu M}{r_s R^2} (1 - \frac{3\beta}{R^2}) \dot{R}$ es igual a la ecuación (4.10)).

La ecuación orbital, $R(\varphi)$, se obtiene en términos de \hat{u} definida como,

$$\hat{u} := \frac{1}{R}; \quad dR = -\frac{1}{\hat{u}^2} d\hat{u},$$

Así, de las ecuaciones (4.6) y (2.26), las órbitas satisfacen la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2 \hat{u}}{d\varphi^2} = -\hat{u} + \frac{GM r_s}{l^2} (1 - 3\beta \hat{u}^2). \quad (4.13)$$

De nueva cuenta, definimos $u_a = \hat{u}$ y $u_b = \frac{d\hat{u}}{d\varphi}$ para construir el sistema de ecuaciones lineales equivalente,

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{du_a}{d\varphi} &= u_b \\ \frac{du_b}{d\varphi} &= -u_a + \frac{GM r_s}{l^2} (1 - 3\beta u_a^2) \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Una vez obtenida $\hat{u}(\varphi)$, puede graficarse el movimiento en el plano XY haciendo,

$$X(t) = 1/\hat{u} \cos(\varphi); \quad Y(t) = 1/\hat{u} \sin(\varphi) \quad (4.15)$$

A modo de ilustrar como el término $(1 - 3\beta u_a^2)$ cambia la dinámica orbital, en Figura 4.4 se comparan las órbitas de un sistema con $\beta = 0$ (caso kepleriano) y con $\beta = k = 1$.

Las ecuaciones (4.9), (4.11) y (4.14) determinan la dinámica del sistema binario conservativo, pero también es necesario especificar las condiciones de frontera.

4.2.2. Condiciones Iniciales

Para resolver las ecuaciones (4.9) y (4.11) es necesario especificar al tiempo t_0 , las componentes de la posición y velocidad,

$$R_0 = R(t_0); \quad v_0 = \dot{R}(t_0); \quad \varphi_0 = \varphi(t_0); \quad \Omega_0 = \dot{\varphi}(t_0).$$

De las cuatro condiciones iniciales, fijamos $\varphi_0 = 0$ y R_0 ; las otras dos las determinamos a partir de las cantidades conservadas E y l , o equivalentemente dos parámetros de la órbita como su excentricidad y semieje mayor.

De las ecuaciones (4.12) y (4.9), respectivamente,

$$\begin{aligned} v_0 &= - \left[\frac{2}{\mu r_s^2} \left(E - \frac{l^2}{2\mu r_s^2 R_0^2} + \frac{G\mu M}{r_s R_0} \left(1 - \frac{\beta}{R_0^2} \right) \right) \right]^{1/2}. \\ \Omega_0 &= \frac{l}{\mu r_s^2 R_0^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Así, recordando que $R = R_a$ Y $\dot{R} = R_b$, las condiciones iniciales del sistema de ecuaciones (4.11) son,

$$R_{a,0} = R_0; \quad R_{b,0} = v_0. \quad (4.17)$$

Y para el sistema de ecuaciones (4.14), usamos que,

$$\dot{R} = \frac{dR}{d\hat{u}} \frac{d\hat{u}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{l}{\mu r_s^2} \frac{d\hat{u}}{d\varphi},$$

de donde,

$$u_{a,0} = 1/R_0; \quad u_{b,0} = - \frac{\mu r_s^2 v_0}{l}. \quad (4.18)$$

4.2.3. Análisis Orbital

Introducimos el potencial efectivo,

$$\boxed{V_{l,\beta}(R) = \frac{l^2}{2\mu r_s^2 R^2} - \frac{G\mu M}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2} \right)}, \quad (4.19)$$

tal que $V_{l,\beta}(R \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, Así, de la ecuación (4.12), la velocidad radial de una partícula de masa μ , momento angular l y energía E es,

$$\dot{R} = \pm \left[\frac{2}{\mu r_s^2} (E - V_{l,\beta}(R)) \right]^{1/2}. \quad (4.20)$$

Distinguimos los siguientes casos,

- $\boxed{\dot{R} \neq 0}$. Si $\dot{R} < 0$, entonces la partícula está moviéndose hacia el centro de masa. Si $\dot{R} > 0$, la partícula está alejándose del centro de masa.

- $\dot{R} = 0$. La partícula no tiene velocidad radial, se encuentra en un punto de retorno porque está cambiando de dirección. De la ecuación (4.20),

$$\frac{2}{\mu r_s^2} (E - V_{l,\beta}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E = V_{l,\beta}.$$

De la condición anterior, los extremos de las órbitas son las raíces de la siguiente ecuación de tercer grado,

$$R^3 + \frac{GM\mu R^2}{Er_s} - \frac{l^2 R}{2E\mu r_s^2} - \frac{GM\beta\mu}{Er_s} = 0, \quad (4.21)$$

que puede tener hasta tres soluciones. En el caso sin interacción magnética, $\beta = 0$, los radios mínimos y máximos se reducen a,

$$R_{min}(\beta = 0) = \frac{GM\mu^2 - \sqrt{G^2 M^2 \mu^4 + 2El^2\mu}}{2E\mu r_s}$$

$$R_{max}(\beta = 0) = \frac{GM\mu^2 + \sqrt{G^2 M^2 \mu^4 + 2El^2\mu}}{2E\mu r_s}$$

Si $\beta \neq 0$, generalmente es más simple resolver numéricamente la ecuación $E = V_{l,\beta}$ mediante algún método numérico de bisección.

- $\dot{R} = \ddot{R} = 0$: Órbitas circulares. La partícula se mueve en círculos cuyo radio es $R(t) = R_c = cte$. De acuerdo a la ecuación (4.10), R_c satisface que,

$$\left(\frac{dV_{l,\beta}}{dR} \right)_{R_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_c^2 - \left(\frac{l^2}{GM\mu^2 r_s} \right) R_c - 3\beta = 0. \quad (4.22)$$

Como vemos, es una ecuación cuadrática para R_c . Sus raíces son,

$$R_c = \frac{l_c^2 \pm \sqrt{12G^2 M^2 \beta \mu^4 r_s^2 + l_c^4}}{2GM\mu^2 r_s}. \quad (4.23)$$

De esta misma ecuación, el momento angular en términos de R_c es,

$$l_c = \left[GM\mu^2 r_s R_c \left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.24)$$

y la energía total,

$$E_c = V_{l,\beta}(R_c) = \frac{l_c^2}{2\mu r_s^2 R_c^2} - \frac{G\mu M}{r_s R_c} \left(1 - \frac{\beta}{R_c^2} \right) = -\frac{GM\mu}{2r_s R_c} \left(1 + \frac{\beta}{R_c^2} \right) \quad (4.25)$$

Se sigue que su frecuencia orbital también es constante,

$$\dot{\varphi} = \frac{l_c}{\mu r_s^2 R_c^2} = \boxed{\left[\frac{GM}{r_s^3 R_c^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2} \right) \right]^{1/2}} \equiv \Omega_c, \quad (4.26)$$

lo que significa que, $\varphi(t) = \Omega_c t$, es lineal y creciente en el tiempo. La velocidad tangencial (en este trabajo nombrada también angular, $v_\varphi = r\Omega$) es,

$$v_\varphi = r_s R_c \Omega_c = \left[\frac{GM}{r_s R_c} \left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.27)$$

El periodo del movimiento orbital, τ , puede calcularse integrando la ecuación (4.26),

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = \Omega_c \int_0^\tau dt',$$

entonces obtenemos la expresión para el periodo orbital. Es válida aún si la órbita no es cerrada porque también será un movimiento cíclico.

$$\tau_c = \frac{2\pi}{\Omega_c} = 2\pi \left[\frac{GM}{r_s^3 R_c^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2} \right) \right]^{-1/2}. \quad (4.28)$$

Notemos que si $\beta = 0$, el periodo orbital es el obtenido en la tercera Ley de Kepler:

$$\tau_k = \tau_c(\beta = 0) = 2\pi \left[\frac{GM}{r_s^3 R_c^3} \right]^{-1/2}.$$

Por otra parte, para que la velocidad sea real, $\dot{R}^2 \geq 0$. De la ecuación (4.20),

$$E - V_{l,\beta} \geq 0, \quad \Rightarrow \quad E \geq V_{l,\beta}. \quad (4.29)$$

De esta manera, $\beta > 0$ *baja* el mínimo del potencial, contrario al caso $\beta < 0$. En relación con la alineación de los momentos magnéticos, $\beta > 0$ ocurre cuando $k > 0$, que a su vez se satisface sólo si $\alpha_2 < \arctan\left(\frac{2}{\tan \alpha_1}\right)$.

La relación anterior es importante para caracterizar el movimiento de la partícula. Graficamos la energía E de la partícula sobre un diagrama del potencial efectivo $V_{l,\beta}$ (Ver Figura 4.4.). Distinguiamos tres regiones:

- $E_1 \geq 0$ el sistema no está ligado, una de las estrellas se mueve desde infinito hacia el centro de masa, pero es rebotada por la barrera del potencial, volviendo al infinito.
- $E_c < E_2 < 0$ hay órbitas cuyos puntos extremos están dados por las raíces de la ecuación (4.21). Sus radio mínimo r_{min} y máximo r_{max} son aquellos puntos donde E y V_{eff} coinciden. Un ejemplo de órbitas se muestra en la Figura 4.5.
- $E_3 = E_c$, es la energía mínima del pozo potencial y corresponde al movimiento circular

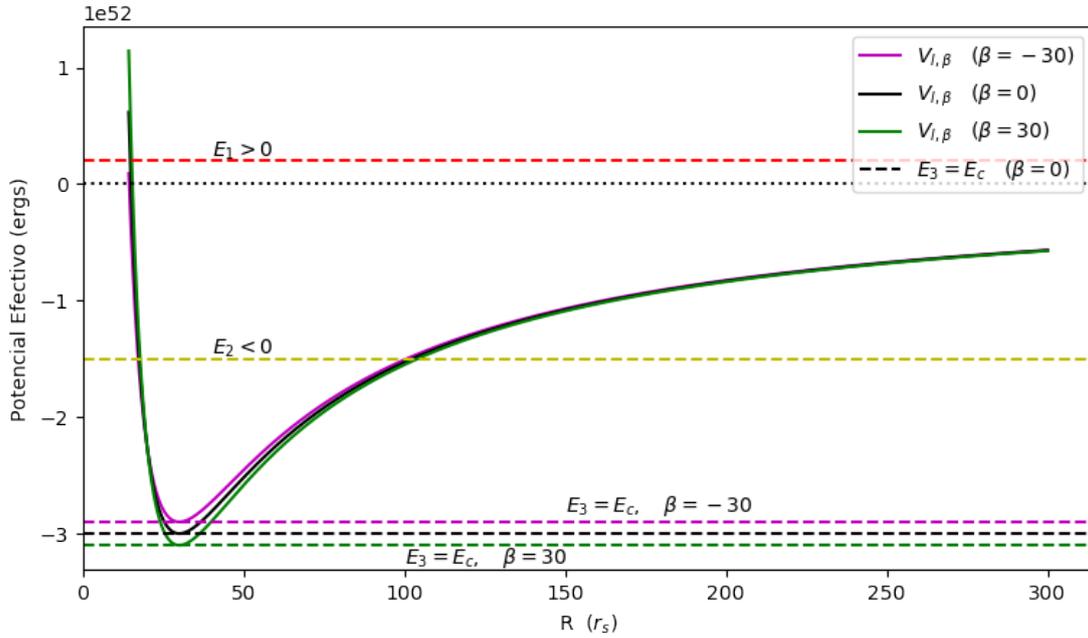


Figura 4.4: Potencial efectivo de la ecuación(4.19) con $M = 2.83M_{\odot}, \mu = 0.71M_{\odot}$ ($M_1 = 1.43M_{\odot}$ y $M_2 = 1.4M_{\odot}$) para $\beta = -30, 0, 30$. El valor $|\beta| = 30$ corresponde a $m_1 = m_2 = 1.17 \times 10^{36}$ emu. Dado $R_0 = 30 r_s$, el momento angular de cada curva es $l_N(R_c) = l_c$ (ecuación 4.24).

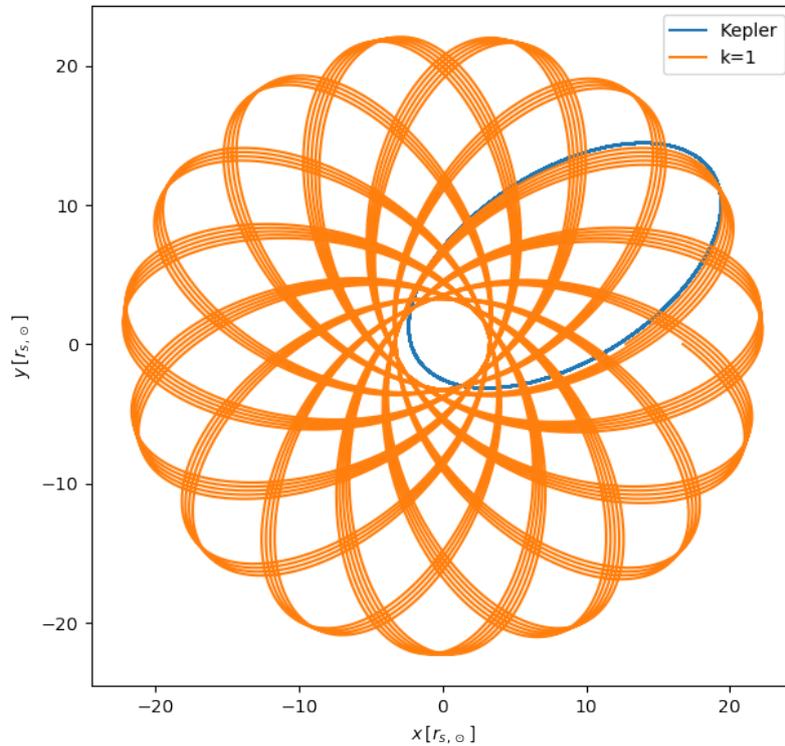


Figura 4.5: Órbitas de un sistema binario con $M = 2.83 M_{\odot}, \mu = 0.7M_{\odot}, m_1 = m_2 = 2.138 \times 10^{35}$ emu, $\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 60^\circ$, con lo que $k = 1$ y $\beta = 1$. Las órbitas se resolvieron en unidades patrón (ver Anexo 7.2).

Así que, para que en el sistema existan órbitas ligadas, dados sus parámetros M , μ , β y separación inicial, R_c , sus cantidades conservadas, (E, l) deben satisfacer que,

$$0 < l < l_c, \quad E_c < E < 0. \quad (4.30)$$

La primera desigualdad se debe a que la magnitud del momento angular, l , es una cantidad positiva cuyo valor máximo corresponde a la órbita circular, con l_c , por ser la trayectoria que minimiza la energía.

Una forma distinta de analizar todas las órbitas del potencial esférico es analizando el espacio de las cantidades conservadas (E, l) . Cada punto en el espacio corresponde a una órbita única. Dada una energía fija E , la órbita con máximo momento angular es la circular, así que la curva $l_c(E)$, define la envolvente superior para las posibles órbitas. Dado un intervalo de valores R , con ayuda de las ecuaciones (4.24) y (4.25) encontramos l_c y E .

*Restricciones sobre β

Para que la ecuación (4.24) tenga sentido físico, $\left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2}\right) > 0$, es decir,

$$\beta < \beta_{\max} = \frac{R_c^2}{3}, \quad (4.31)$$

siendo R_c el radio de la órbita circular. Además, para que R_c tenga sentido físico, debe ser real y positivo. De la ecuación (4.23), esto significa que el término dentro de la raíz debe ser positivo o cero, entonces,

$$\beta \geq \beta_{\min} = -\frac{l_c^4}{12G^2M^2\mu^4r_s^2}. \quad (4.32)$$

Por otra parte, para que existan dos soluciones positivas de R_c , es necesario que $l^2 > \sqrt{12G^2M^2\beta\mu^4r_s^2 + l_c^4}$, lo que solo es posible si $\beta < 0$ (potencial magnético atractivo). Así pues, de las ecuaciones (4.32) y (4.31),

$$\begin{aligned} \text{Sí } 0 < \beta < \beta_{\max}, & \Rightarrow R_c = \frac{l_c^2 + \sqrt{12G^2M^2\beta\mu^4r_s^2 + l_c^4}}{2GM\mu^2rs}. \\ \text{Sí } \beta = 0, & \Rightarrow R_c = \frac{l_c^2}{GM\mu^2r_s}. \\ \text{Sí } \beta_{\min} < \beta < 0, & \Rightarrow R_{c,1} = \frac{l_c^2 + \sqrt{12G^2M^2\beta\mu^4r_s^2 + l_c^4}}{2GM\mu^2rs}, \\ & R_{c,2} = \frac{l_c^2 - \sqrt{12G^2M^2\beta\mu^4r_s^2 + l_c^4}}{2GM\mu^2rs}. \end{aligned}$$

En resumen, el parámetro β debe estar entre $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}$. Si $\beta > 0$ la fuerza magnética es repulsiva y solo habrá un R_c . Si $\beta < 0$, habrá dos R_c . Si $\beta = 0$, se tiene el caso kepleriano.

Ahora que hemos estudiado la dinámica newtoniana, procederemos a considerar al sistema binario dentro de la aproximación cuadrupolar, limitada al caso donde los cuerpos describen órbitas circulares.

4.3. Radiación gravitatoria en órbitas circulares

Aclaremos que esta sección es casi independiente a la anterior, pero se mantienen los mismos planteamientos presentados en §4.1.

De la ecuación (4.26), si las órbitas son circulares, la frecuencia orbital es,

$$\boxed{\Omega_c^2 = \Omega^2 = \frac{GM}{r_s^3 R^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)}. \quad (4.33)$$

La energía cinética del sistema se reescribe como,

$$T = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu r_s^2 R^2 \Omega^2}{2} = \frac{GM\mu}{2r_s R} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)$$

Y la energía mecánica,

$$E = T + U = \frac{GM\mu}{2r_s R} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right) - \frac{GM\mu}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2}\right)$$

De esta manera,

$$E = -\frac{GM\mu}{2r_s R} \left(1 + \frac{\beta}{R^2}\right) \quad (4.34)$$

que concuerda con la ecuación(4.25). Ahora bien, si el sistema emite ondas gravitatorias, la energía mecánica no se conserva, decrece en el tiempo tal que,

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -L}. \quad (4.35)$$

El lado izquierdo de esta ecuación se obtiene aplicando regla de la cadena la expresión (4.34),

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dR} \frac{dR}{dt} = \frac{GM\mu}{2r_s R^2} \left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right) \frac{dR}{dt} \quad (4.36)$$

El lado derecho, L , será calculado a continuación.

4.3.1. Cálculo de la luminosidad

Como se discutió en §3.4.2., la fórmula cuadrupolar para la luminosidad - cuyas unidades son energía sobre unidad de tiempo-, en términos del tensor de masa cuadrupolar del sistema binario, M_{ij} , es,

$$L = \frac{G}{5c^2} \left\langle \ddot{I}_{ij}\ddot{I}_{ij} - \frac{1}{3}(\ddot{I}_{kk})^2 \right\rangle \quad (4.37)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota promedio temporal sobre las frecuencias características de la OG -o equivalentemente, sobre los periodos- y los índices repetidos se suman. Y antes de efectuar el promedio, notamos que,

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \frac{G}{5c^3} \left(\ddot{I}_{xx}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 + 2\ddot{I}_{xy}^2 - \frac{1}{3}(\ddot{I}_{xx} + \ddot{I}_{yy})^2 \right) \\ &= \frac{2G}{15c^5} \left(\ddot{I}_{xx}^2 + \ddot{I}_{yy}^2 + 3\ddot{I}_{xy}^2 - \ddot{I}_{xx}\ddot{I}_{yy} \right) \end{aligned}$$

De la ecuación (3.60), el tensor de segundo momento de masa para un sistema de dos partículas es,

$$I^{ij} = M_1 x_1^i x_1^j + M_2 x_2^i x_2^j \quad (4.38)$$

siendo, x_n^j la componente j del vector posición $n = 1, 2$. En coordenadas cartesianas,

$$\begin{aligned} x_1 &= (x_1^x, x_1^y, x_1^z) = (r_1 \cos \varphi, r_1 \sin \varphi, 0), \\ x_2 &= (x_2^x, x_2^y, x_2^z) = (r_2 \cos \varphi, r_2 \sin \varphi, 0). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En el marco de referencia con origen en el centro de masa, (ver §2.3), $\mathbf{r}_1(t) = \frac{\mu}{M_1} \mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}_2(t) = -\frac{\mu}{M_2} \mathbf{r}(t)$, entonces $\mu r = M_1 r_1 = M_2 r_2$. Sustituímos componente a componente en (4.38):

$$\begin{aligned} I^{xx} &= M_1 r_1^2 \cos^2 \varphi + M_2 r_2^2 \cos^2 \varphi = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \cos^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \mu r^2 (1 + \cos 2\varphi). \\ I^{yy} &= M_1 r_1^2 \sin^2 \varphi + M_2 r_2^2 \sin^2 \varphi = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \sin^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \mu r^2 (1 - \cos 2\varphi). \\ I^{xy} &= M_1 r_1^2 \cos \varphi \sin \varphi + M_2 r_2^2 \cos \varphi \sin \varphi = (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2} \mu r^2 (\sin 2\varphi) \\ I^{yx} &= I^{xy}; \quad I^{zz} = I^{xz} = I^{zx} = I^{yz} = I^{zy} = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Por consiguiente, el segundo momento de masa, en términos de $R = r/r_s$, es:

$$I^{ij}(t) = \frac{1}{2} \mu r_s^2 R^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & 1 - \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Al calcular sus derivadas temporales, por tratarse de movimiento circular supondremos $\dot{R} = \ddot{R} = \ddot{\dot{R}} = 0$, $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$; la única derivada no nula es $\dot{\varphi} = \Omega$. Como los momentos magnéticos son constantes, $\frac{d\beta}{dt} = 0$. Los cálculos explícitos pueden hacerse a mano o, con un programa computacional de matemáticas simbólicas, como Maple o Sympy de Python. Un código con sympy con estos cálculos se muestra en el Anexo 7.3.

Sustituyendo \ddot{I}^{ij} , la ecuación (4.3.1) se reduce a,

$$L(\varphi) = \frac{32G^4 M^3 \mu^2 (\sin^2(2\varphi(t)) + \cos^2(2\varphi(t)))}{5c^5 r_s^5 R^5} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3.$$

Lo que sigue es integrar en φ para obtener el promedio sobre la frecuencia de las ondas - aunque en este caso no es necesario realizar la integral porque la dependencia en φ se elimina con la identidad trigonométrica $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$,

$$L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(\varphi) d\varphi = \frac{32G^4 M^3 \mu^2}{5c^5 r_s^5 R^5} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3 \quad (4.42)$$

Y al sustituir $r_s = \frac{2GM}{c^2}$,

$$\boxed{L = \frac{c^5}{5G} \frac{\mu^2}{M^2 R^5} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3} \quad (4.43)$$

es la generalización de la luminosidad gravitatoria con interacción magnética suponiendo que los momentos magnéticos son constantes. Es interesante que la dependencia del parámetro β es a través del binomio al cubo, $(1 - 3\beta/R^2)^3$ que a su vez puede expresarse como la suma de polinomios $(1 - 3\beta/R^2)^3 = 1 - \frac{9\beta}{R^2} + \frac{27\beta^2}{R^4} - \frac{27\beta^3}{R^6}$, pues así se nota que a mayor R , el efecto de β disminuye.

4.3.2. Decrecimiento radial

Recapitulando, la ecuación que describe la pérdida de energía del sistema binario a causa de la emisión de ondas gravitatorias es,

$$\frac{dE}{dt} = -L,$$

y de acuerdo a las ecuaciones (4.36) y (4.43),

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2r_s R^2} \left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right) \frac{dR}{dt}; \quad L = \frac{32G^4 M^3 \mu^2}{5c^5 r_s^5 R^5} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3$$

Notemos que al igualarlas, obtendremos una ecuación de primer grado para $R(t)$. Así que, luego de manipulación algebraica obtenemos,

$$\boxed{\frac{dR}{dt} = -\frac{8\mu c}{5Mr_s R^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right)^{-1}}. \quad (4.44)$$

Podemos llevar esta ecuación a cuadraturas:

$$\int dt = -\frac{5Mr_s}{8\mu c} \int \frac{\left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right) R^3}{\left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3} dR.$$

La integral indefinida del lado derecho tiene por solución,

$$\int R^3 \frac{\left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3} dR = \frac{R^4}{4} \frac{\left(1 + \frac{6\beta}{R^2}\right)}{\left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3}$$

Con esto podemos saber el tiempo de coalescencia. Integramos entre $R(t = 0) = R_0$ y $R(t_{coal}) = 0$,

$$\int_0^{t_{coal}} dt = -\frac{5Mr_s}{8\mu c} \int_{R_0}^0 \frac{\left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right) R^3}{\left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3} dR,$$

por lo tanto,

$$\boxed{t_{coal} = \frac{5Mr_s}{32\mu c} R_0^4 \left(1 + \frac{6\beta}{R_0^2}\right) \left(1 - \frac{3\beta}{R_0^2}\right)^{-3}}. \quad (4.45)$$

4.3.3. Evolución de sistema

A causa del cambio temporal de la separación de la binaria, R , de la ecuación (4.26) se observa que la frecuencia orbital incrementará y el periodo orbital decrecerá. Calculamos las derivadas temporales:

$$\boxed{\dot{\Omega} = -\Omega \frac{3(R^2 - \beta)}{2(R^2 - 3\beta)R} \frac{dR}{dt}} \quad (4.46)$$

Más aún, la tasa de decrecimiento del período, $P = 2\pi/\Omega$, es,

$$\dot{P} = P \frac{3(R^2 - 5\beta)}{2(R^2 - 3\beta)R} \frac{dR}{dt} \quad (4.47)$$

De esta manera, podemos resolver como afecta β a la evolución de la dinámica de los cuerpos.

4.3.4. Strain y frecuencia de las ondas

Como vimos en §3.3, el tensor de la perturbación gravitatoria, h^{ij} tiene dos grados de polarización. En la norma TT, siendo $\hat{\mathbf{z}}$ la dirección de propagación de las señales gravitatorias, aplicamos la ecuación (3.52),

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{dc^4} (\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \\ &= \frac{4G\mu r_s^2}{c^4 d} R^2 \Omega^2 \cos(2\varphi t) \\ &= \frac{4G^2 M \mu}{c^4 dr_s R} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right) \cos(2\varphi t), \end{aligned} \quad (4.48)$$

mientras que,

$$\begin{aligned} h_\times &= \frac{2G}{dc^4} \ddot{I}_{xy} \\ &= \frac{4G\mu r_s^2}{c^4 d} R^2 \Omega^2 \sin(2\varphi t) \\ &= \frac{4G^2 M \mu}{c^4 dr_s R} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right) \sin(2\varphi t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Expresadas de esta forma, observamos que la frecuencia de la onda gravitatoria, $f_{og} = 2\Omega$, es dos veces la frecuencia orbital del sistema binario Ω , a cada instante de tiempo. Por lo tanto,

$$f_{og} = \frac{2GM}{r_s^3 R^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R_c^2}\right). \quad (4.50)$$

4.3.5. Reducción al caso $\beta = 0$

Debido a la conveniente forma de la energía potencial total,

$$U(R) = -\frac{GM\mu}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta}{R^2}\right)$$

es fácil reducir todos los resultados anteriores al caso con $\beta = 0$, cuando el sistema no interactúa magnéticamente. Las ecuaciones deben reducirse a las presentadas en la Sección §3.4.3. porque los cuerpos se mueven siguiendo órbitas keplerianas.

La energía total del sistema es,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\mu r_s^2 R^2 \Omega^2 - \frac{GM\mu}{r_s R} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{GM\mu}{r_s R} \end{aligned} \quad (4.51)$$

la segunda igualdad se obtiene sustituyendo Ω y simplificando. La derivada de la energía es:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GM\mu}{2r_s^2 R^2} \frac{dR}{dt} \quad (4.52)$$

Con estas sustituciones, la ecuación para la luminosidad se reduce a:

$$L(\varphi) = \frac{32G^4 M^3 \mu^2}{2c^5 r_s^5 R^5} \quad (4.53)$$

que concuerda con el resultado ya presentado en §3.4.

Ahora, $dE/dt = -L$, es decir,

$$\frac{GM\mu}{2r_s^2 R^2} \frac{dR}{dt} = -\frac{32G^4 M^3 \mu^2}{2c^5 r_s^5 R^5}$$

la ecuación diferencial para R se reduce a,

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{64G^3 M^2 \mu}{5c^5} \frac{1}{r_s^3 R^3} \quad (4.54)$$

Ó sustituyendo $r_s = 2GM_\odot/c^2$,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{8c\mu}{5Mr_s} \frac{1}{R^3}. \quad (4.55)$$

Con la condición inicial, $R(t=0) = R_i$ la separación inicial, la solución es,

$$R(t) = \left[R_i^4 - \frac{32c\mu}{5Mr_s} t \right]^{1/4}. \quad (4.56)$$

En suma, un sistema binario descrito por el potencial (4.5) perderá energía a una tasa (4.43), que es una generalización del caso kepleriano. La separación entre los cuerpos decrecerá de acuerdo a la ecuación diferencial (4.44), de modo que la frecuencia orbital incrementará de

acuerdo a (4.46). Siguiendo las fórmulas cuadrupolares, la evolución de los parámetros de la binaria determinan la forma de las ondas gravitatorias y sus frecuencias, expresadas en las ecuaciones (4.48) y (??). Además, los resultados obtenidos generalizan congruentemente las soluciones ya conocidas para el problema con interacción kepleriana unicamente. De esta manera, tenemos una descripción completa de la emisión de ondas gravitatorias por binarias que satisfacen los planteamientos descritos en §4.1., aunque restringido a órbitas circulares.

4.4. Fase inspiral general

Si no suponemos órbitas circulares, tanto r como φ varían en el tiempo, entonces, las derivadas de las componentes del tensor de inercia incluirán derivadas de r y φ :

$$\begin{aligned}
\dot{I}^{xx} &= \mu r(1 + \cos 2\varphi)\dot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi} \\
\ddot{I}^{xx} &= \mu(r \cos 2\varphi + r)\ddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\ddot{\varphi} + \mu(1 + \cos 2\varphi)\dot{r}^2 - 4\mu r \sin 2\varphi\dot{\varphi}\dot{r} \\
&\quad - 2\mu r^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2 \\
\dddot{I}^{xx} &= \mu(r \cos 2\varphi - r)\dddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dddot{\varphi} + (\mu(3 \cos 2\varphi + 3)\dot{r} - 6\mu \sin 2\varphi r\dot{\varphi})\ddot{r} \\
&\quad - (6\mu \sin 2\varphi r\dot{r} + 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2)\ddot{\varphi} - 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2\dot{\varphi} \\
&\quad - 6\mu \sin 2\varphi\dot{r}^2\dot{\varphi} - 12\mu r \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2\dot{r} + 4\mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi}^3
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}^{yy} &= \mu r(1 + \cos 2\varphi)\dot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi} \\
\ddot{I}^{yy} &= \mu(r \cos 2\varphi + r)\ddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\ddot{\varphi} + \mu(1 + \cos 2\varphi)\dot{r}^2 - 4\mu r \sin 2\varphi\dot{\varphi}\dot{r} \\
&\quad - 2\mu r^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2 \\
\dddot{I}^{yy} &= \mu(r \cos 2\varphi - r)\dddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dddot{\varphi} + (\mu(3 \cos 2\varphi + 3)\dot{r} - 6\mu \sin 2\varphi r\dot{\varphi})\ddot{r} \\
&\quad - (6\mu \sin 2\varphi r\dot{r} + 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2)\ddot{\varphi} - 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2\dot{\varphi} \\
&\quad - 6\mu \sin 2\varphi\dot{r}^2\dot{\varphi} - 12\mu r \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2\dot{r} + 4\mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi}^3
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I}^{xy} &= \mu r(1 + \cos 2\varphi)\dot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi} \\
\ddot{I}^{xy} &= \mu(r \cos 2\varphi + r)\ddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\ddot{\varphi} + \mu(1 + \cos 2\varphi)\dot{r}^2 - 4\mu r \sin 2\varphi\dot{\varphi}\dot{r} \\
&\quad - 2\mu r^2 \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2 \\
\dddot{I}^{xy} &= \mu(r \cos 2\varphi - r)\dddot{r} - \mu r^2 \sin 2\varphi\dddot{\varphi} + (\mu(3 \cos 2\varphi + 3)\dot{r} - 6\mu \sin 2\varphi r\dot{\varphi})\ddot{r} \\
&\quad - (6\mu \sin 2\varphi r\dot{r} + 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2)\ddot{\varphi} - 6\mu \cos 2\varphi\dot{\varphi}r^2\dot{\varphi} \\
&\quad - 6\mu \sin 2\varphi\dot{r}^2\dot{\varphi} - 12\mu r \cos 2\varphi\dot{\varphi}^2\dot{r} + 4\mu r^2 \sin 2\varphi\dot{\varphi}^3
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Con algún software de matemáticas simbólicas, como Maple, es fácil sustituir las expresiones (4.57-59) en la fórmula cuadrupolar (3.55), pero evidentemente, la expresión es muy extensa (ver Anexo §7.3). En este caso, la ecuación diferencial $dE/dt + L = 0$, es de tercer grado con términos de derivadas cruzadas, por lo que son ecuaciones acopladas altamente no lineales. Resolverlas es un posible objetivo posterior a este trabajo.

Recapitulando...

Dos objetos compactos ligados por su interacción gravitomagnética, bajo las hipótesis descritas en §4.1 pueden entenderse dentro de dos enfoques distintos, uno donde la energía mecánica total se conserva (newtoniano §4.2) y otro donde se pierde en forma de ondas gravitatorias (regimen cuadrupolar en órbitas circulares §4.3). Expresamos todas las ecuaciones en términos del parámetro β , para reducir de forma sencilla el problema al caso kepleriano y entender la forma en que la interacción magnética afecta la evolución de las variables, tanto del sistema astrofísico como de las ondas gravitatorias.

En el siguiente capítulo resolveremos numéricamente las ecuaciones diferenciales obtenidas en éste, utilizando como parámetros dos binarias de estrellas de neutrones famosas: el pulsar binario de Hulse-Taylor y la progenitora de la señal GW170817.

Capítulo 5

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo se resuelven numéricamente las ecuaciones dinámicas del sistema binario con interacción gravitomagnética y las ecuaciones cuadrupolares de las ondas gravitatorias emitidas en la evolución hacia la fusión de los objetos compactos, todas éstas deducidas en el capítulo anterior. Para aplicar las ecuaciones y relaciones a un sistema realista, consideremos el famoso pulsar binario de Hulse y Taylor (ver §1.2) y el sistema que emitió las señales GW170817 y GRB170817A (ver §1.4.5). ¿Qué pasaría si los objetos compactos de estos sistemas tuvieran campos magnéticos dipolares constantes? ¿En qué momento sería relevante la interacción magnética? ¿Cómo se vería afectada la dinámica? ¿Cambiaría la forma de las ondas gravitatorias radiadas? Estamos en condiciones de responder estas preguntas. En la última parte de este capítulo, sintetizamos discutimos los resultados y comparamos con otros estudios recientes.

5.1. Aplicación sobre PSR 1913+16

Consideremos los parámetros del pulsar binario PSR 1913+16 de la Tabla 1.1. Se sabe que la masa total del sistema es $M = 2.83 M_{\odot}$ y se piensa que ambas son estrellas de neutrones, así que fijemos,

$$M_1 = 1.43M_{\odot}, \quad M_2 = 1.4M_{\odot} \quad \Leftrightarrow \quad M = 2.83M_{\odot}, \quad \mu = 0.707M_{\odot}.$$

Supongamos que cada pulsar tiene momentos magnéticos dipolares idénticos de magnitud, $m = m_1 = m_2$ y que el radio de cada estrella es $R_1 = R_2 = 15 \text{ km} = 1.5 \times 10^6 \text{ cm}$. De la ecuación (4.1),

$$\beta = \frac{km^2}{GM\mu r_s^2} \quad \Rightarrow \quad m = \pm \sqrt{GM\mu r_s^2 \beta / k} \quad (5.1)$$

con $k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$, siendo α_i el ángulo entre el plano orbital y la dirección de los momentos magnéticos (ecuación 4.3). Examinemos tres casos donde la fuerza mag-

nética sea repulsiva, $\beta > 0$, tres casos donde sea atractiva, $\beta < 0$ y el caso sin interacción magnética, $\beta = 0$, que es el problema de Kepler, como se muestra en la Tabla 5.1.

β [adim] con:	k [adim]	m [emu]	B_p [G]
-30	-1	1.1816×10^{36}	3.501×10^{17}
-2	-1	3.0509×10^{35}	9.039×10^{16}
-0.1	-1	6.7983×10^{34}	2.014×10^{16}
0	0	cualquiera	cualquiera
0.1	1	6.7983×10^{34}	2.014×10^{16}
2	1	3.0509×10^{35}	9.039×10^{16}
30	1	1.1816×10^{36}	3.501×10^{17}

Tabla 5.1: Distintos valores del parámetro β y sus respectivos valores de $k = 1 - 3 \cos \alpha$, la magnitud del momento magnético, m y el campo magnético correspondiente, $B = m/R_1^3$.

Denotamos,

$$\beta_N = (-30, -2, -0.1, 0, 0.1, 2, 30). \quad (5.2)$$

Se sabe que el pulsar visible describe elipses con excentricidad $e = 0.617139$ y periodo orbital, $P = 27,906.98$ s [53]. También se sabe que el semieje mayor de la elipse descrita, proyectada sobre la línea de visión, es, $a_1 \sin i = 2.34186 \text{ c s}^{-1}$, que equivale a 237,549 radios de Schwarzschild solar, r_s . El sistema está emitiendo ondas gravitatorias y como reflejo de ello, su periodo orbital decrece a una tasa $\dot{P} = -2.428 \times 10^{-12}$ (adimensional) y dentro de $\sim 0.31 \times 10^9$ años, terminarán fusionandose en un destello violento.

Aunque el sistema siempre emite ondas gravitatorias y por ello decrece el periodo orbital, distinguiremos distintos regímenes.

- Al tiempo presente: el efecto magnético es insignificante.
- Suponiendo que se encuentran a $30 r_s$ de separación y la energía total se conserva: el efecto magnético ya es significativo pero no hay emisión de ondas gravitatorias.
- Y finalmente, a $4 r_s$ con emisión de ondas gravitatorias, pero restringido a órbitas circulares.

5.1.1. Al día de hoy: caso kepleriano

Supongamos que el plano orbital es perpendicular al eje de visión, $i = \pi/2$, así que $a_1 \sin i = a_1$. A la separación, $R_0 \sim a_1/r_s$, el cociente entre la energía potencial magnética y gravitatoria es,

$$\frac{U_m}{U_g}(R_0) = \frac{\beta}{237,549^2} = 1.772 \times 10^{-11} \beta_N, \quad (5.3)$$

Significa que, en el regimen newtoniano, el sistema es un problema de dos cuerpos kepleriano. Como vimos en la Sección 2.1.3, los cuerpos describen trayectorias elípticas. La posición de cada pulsar y su separación, a cada instante de tiempo es,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1 &= (X_1, Y_1) = (R_1 \cos \varphi, R_1 \sin \varphi) \\ \mathbf{R}_2 &= (X_2, Y_2) = (-R_2 \cos \varphi, -R_2 \sin \varphi) \\ \mathbf{R} &= (X, Y) = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi)\end{aligned}\quad (5.4)$$

con

$$R_i = \frac{a_i(1 - e^2)}{r_s(1 + e \cos \varphi)}.\quad (5.5)$$

Los signos negativos en las componentes de \mathbf{R}_2 se agregan para que al tiempo $t = 0$, los cuerpos se encuentren sobre el eje X pero en dirección opuesta. Los signos negativos en \mathbf{R} surgen de la ecuación (2.10), $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$.

Al momento inicial, la distancia del centro de masa a los cuerpos es $R_1 = a_1(1 - e)/r_s$ y $R_2 = a_2(1 - e)/r_s$, respectivamente. Pero, de la ecuación (2.18), $\mathbf{R}_2 = -\frac{M_1}{M_2}\mathbf{R}_1$, es decir, $a_2 = \frac{M_1}{M_2}a_1$, y de la definición de μ , $a_1M_1 = a_2M_2 = \mu a$. Entonces,

$$a_1 = 2.37549 \times 10^5 r_s, \quad a_2 = 2.42639 \times 10^5 r_s, \quad a = 4.8018 \times 10^5 r_s.\quad (5.6)$$

Con estos datos ya podemos representar las trayectorias elípticas:

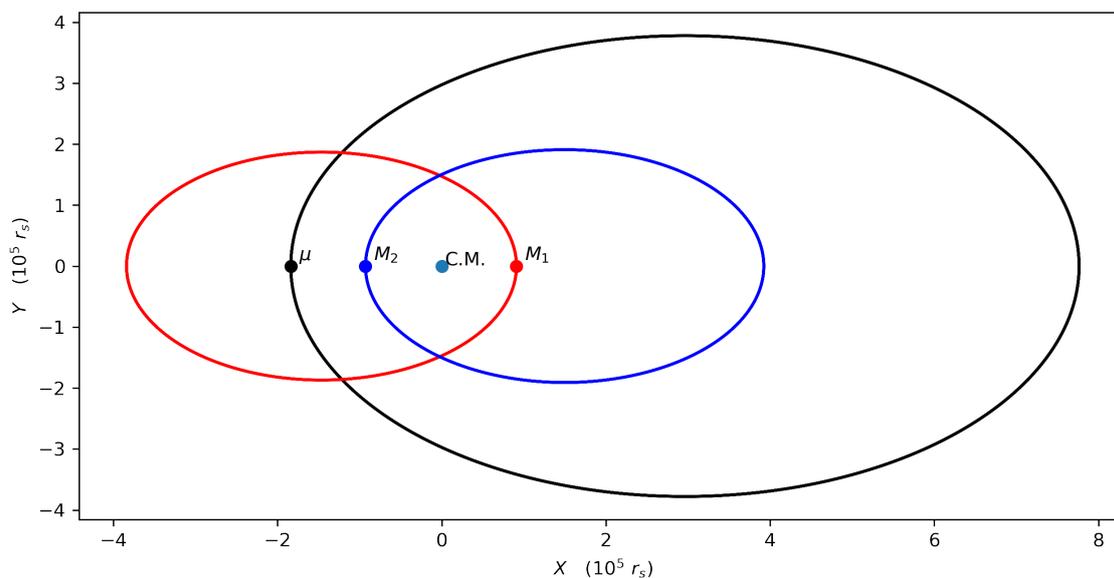


Figura 5.1: Órbitas keplerianas del sistema binario PSR 1913+16 desde el plano orbital XY. La elipse negra corresponde a la órbita auxiliar $r(\phi)$ de la masa reducida μ . La elipse roja representa la órbita del pulsar de masa $M_1 = 1.43 M_\odot$ y la elipse azul corresponde a la masa $M_2 = 1.4 M_\odot$. El origen es el centro de masas, CM, del sistema.

Para resolver la dependencia temporal, usamos la ecuación (2.35), entonces,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{P(1-e^2)^{3/2}} (1 + e \cos \varphi)^2, \quad (5.7)$$

es decir,

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \dot{\varphi} dt', \quad (5.8)$$

que como vemos, es una función monótona creciente. La velocidad angular es,

$$v_\varphi = r_s R \frac{d\varphi}{dt}. \quad (5.9)$$

En la Figura 5.2 se muestra el comportamiento en el tiempo de las variables dependientes de la coordenada angular φ , durante el intervalo de tiempo $[0, 3P]$, con $3P = 83721.6$ segundos.

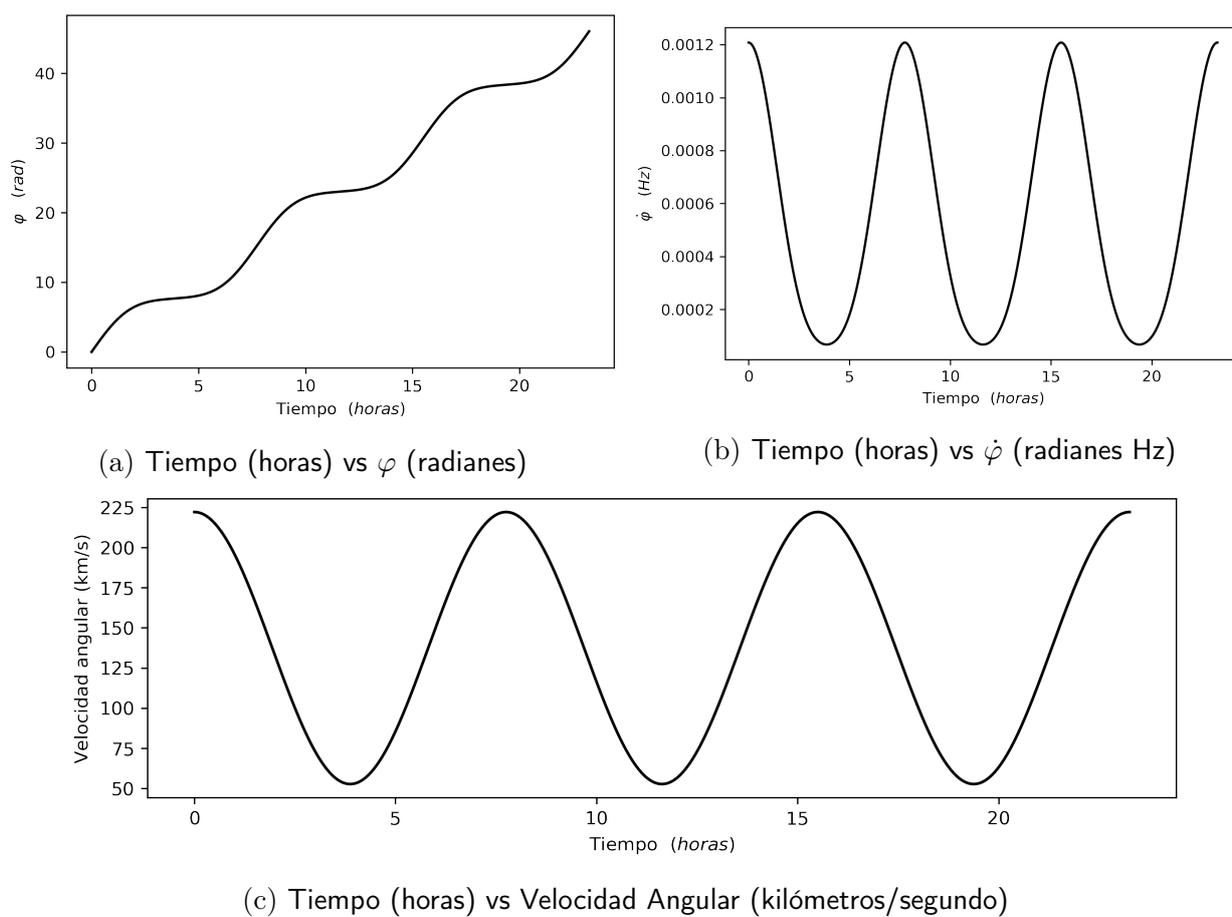


Figura 5.2: Evolución temporal de la coordenada angular en el regimen kepleriano de un sistema binario con $M_1 = 1.43 M_\odot$ y $M_2 = 1.4 M_\odot$.

La velocidad angular es del orden de magnitud de lo esperado ~ 100 km/s, mientras que la frecuencia orbital se encuentra en el rango de los miliHertz.

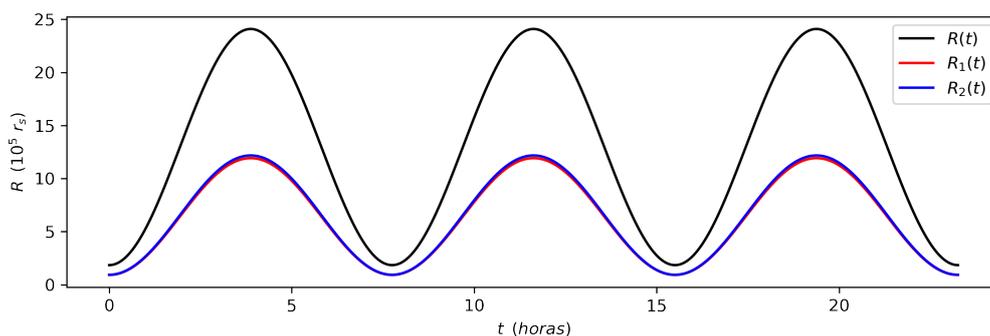
Para conocer la evolución de la distancia relativa, R , en vez de resolver la ecuación radial (4.10), aplicamos la regla de la cadena,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e \sin \varphi a (1 - e^2)}{1 + e \cos \varphi} \frac{d\varphi}{dt},$$

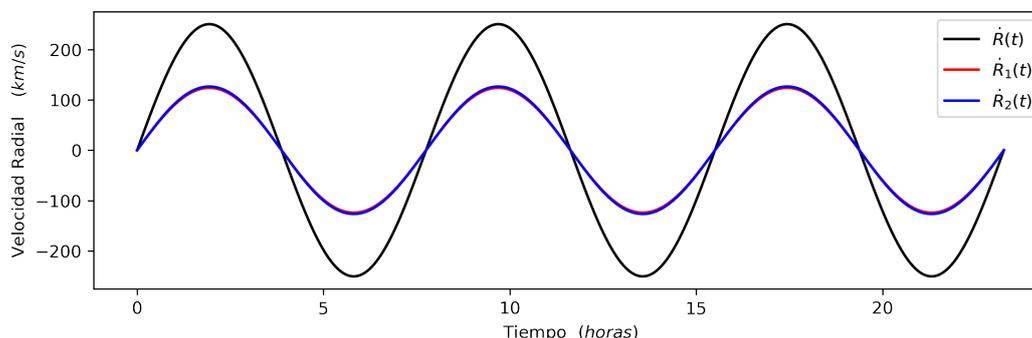
aprovechando que ya tenemos $\dot{\varphi}$. Luego, mediante el cálculo de su integral cumulativa, obtenemos $R(t)$:

$$R(t) = R_0 + \int_{t_0}^t \dot{R} dt'. \quad (5.10)$$

Una vez obtenida, con la ecuación (2.18) encontramos la distancia de cada cuerpo al centro de masa, En la Figura 5.3.(a), también durante 3 veces el periodo orbital, P , y eligiendo $R_0 = R_{min}$ (ecuación 4.21).



(a) Tiempo (horas) vs posición ($10^5 r_s$)



(b) Tiempo (horas) vs Velocidad Radial (km/s)

Figura 5.3: Evolución temporal de la posición y velocidad radial del pulsar binario, R_1 y R_2 , así como de la distancia relativa entre los cuerpos, R . Los parámetros corresponden al pulsar binario. La línea roja no se aprecia mucho porque es casi idéntica a la azul, pues los pulsares tienen masas muy similares ($M_1 = 1.43 M_\odot$ y $M_2 = 1.40 M_\odot$).

La velocidad radial, \dot{R} , también es del orden de magnitud esperado, ~ 100 km/s, pero observamos que oscila cambiando de signo, a causa del cambio de dirección de movimiento, lo cual sucede cuando el cuerpo llega al radio mínimo o máximo ($\dot{R} = 0$). Notamos que R_1 y R_2 son muy similares, ésto es porque tienen masa casi idénticas.

Por último, con la ecuación (2.31), estimamos el momento angular orbital del sistema,

$$l = \sqrt{GM\mu^2(1 - e^2)}a = 8.09129 \times 10^{51} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}.$$

Usamos estos resultados para probar que las ecuaciones derivadas son correctas en magnitud y comportamiento.

5.1.2. A $30 r_s$: caso gravitomagnético

Ahora consideremos que ya han transcurrido miles de millones de años y las estrellas se encuentran a solo $30 r_s$ de separación. El cociente entre las energía magnética respecto a la gravitatoria es,

$$\frac{U_m}{U_g}(30) = \frac{\beta_N}{30^2} = 0.001111 \beta_N, \quad (5.11)$$

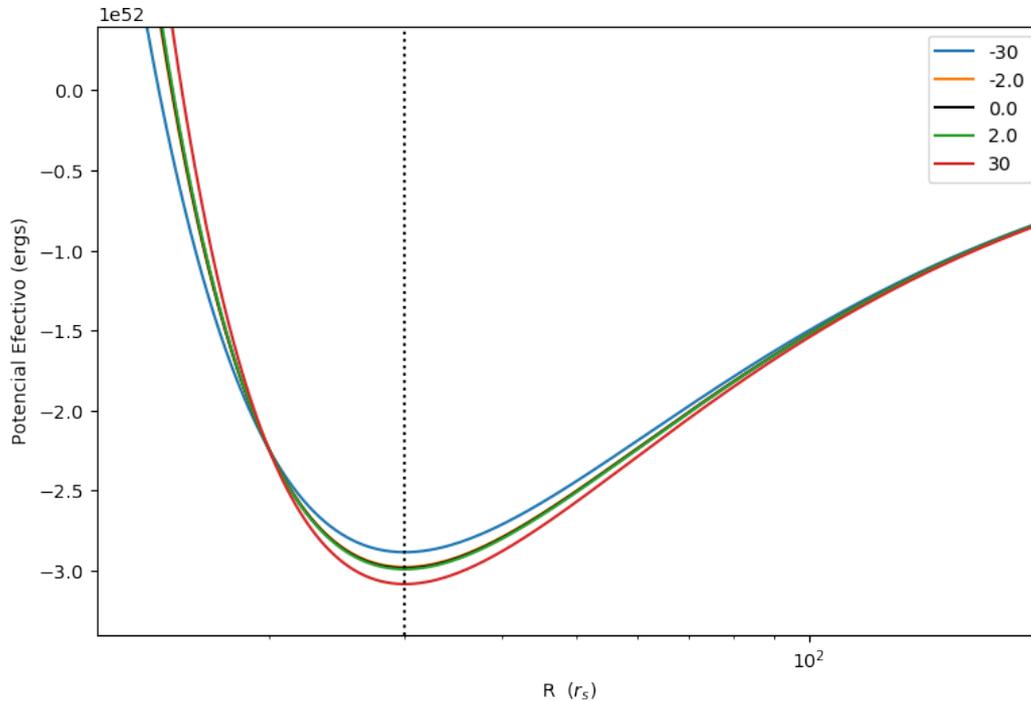


Figura 5.4: Potencial efectivo de la ecuación (5.12) con $M = 2.83M_\odot$, $\mu = 0.71M_\odot$. Cada curva representa un valor de β_N . El eje horizontal es la distancia relativa entre los cuerpos en unidades r_s y, el eje vertical tiene unidades de energía (ergs). La línea punteada vertical se encuentra en $R = 30 r_s$.

el efecto magnético comienza a afectar la dinámica, así que consideremos el potencial efectivo completo para cada valor propuesto de β en la ecuación (5.2), excepto $\beta = \pm 0.1$ porque cualitativa y numéricamente no es distinguible del caso $\beta = 0$.

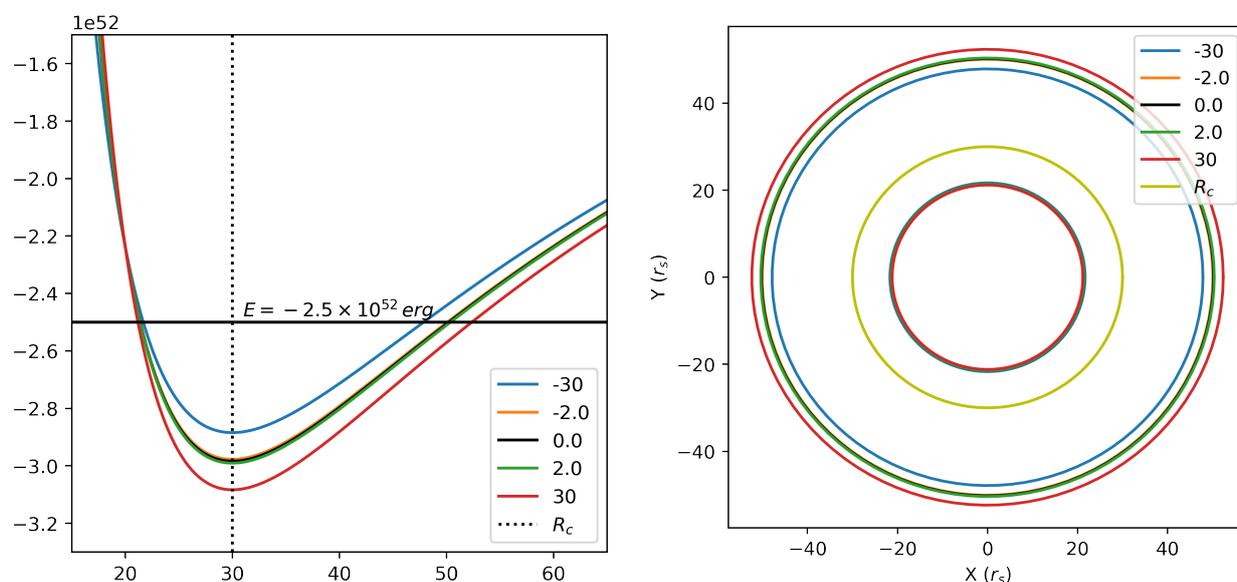
$$V_N(R) = \frac{l_N}{2\mu r_s^2 R^2} - \frac{GM\mu}{r_s R} \left(1 - \frac{\beta_N}{R^2}\right), \quad (5.12)$$

donde l_N corresponde al momento angular de la órbita circular con β_N , dado por la ecuación (4.24),

$$l_N = \left[GM\mu^2 r_s R_0 \left(1 - \frac{3\beta_N}{R_0^2}\right) \right]^{1/2}. \quad (5.13)$$

De esta manera, todas las curvas tendrán un mínimo en R_c , como se muestra en la Figura 5.4.

Cada curva tiene como valor mínimo $E_N = V_N(R_0)$, dada por la ecuación (4.22). En principio, para tener movimiento ligado no circular, podemos elegir energía entre E_N y 0, pero elegimos convenientemente, $E = -2.5 \times 10^{52}$ ergs, menor en magnitud a cualquier E_N porque así, la región orbital estará entre $\sim 20 - 50 r_s$, con validez para el régimen newtoniano.



(a) Potencial efectivo para cada β . El eje horizontal, R , tiene unidades de r_s ; el eje vertical de ergs.

(b) Región orbital en el plano de movimiento XY. Ambos ejes tienen unidades de r_s .

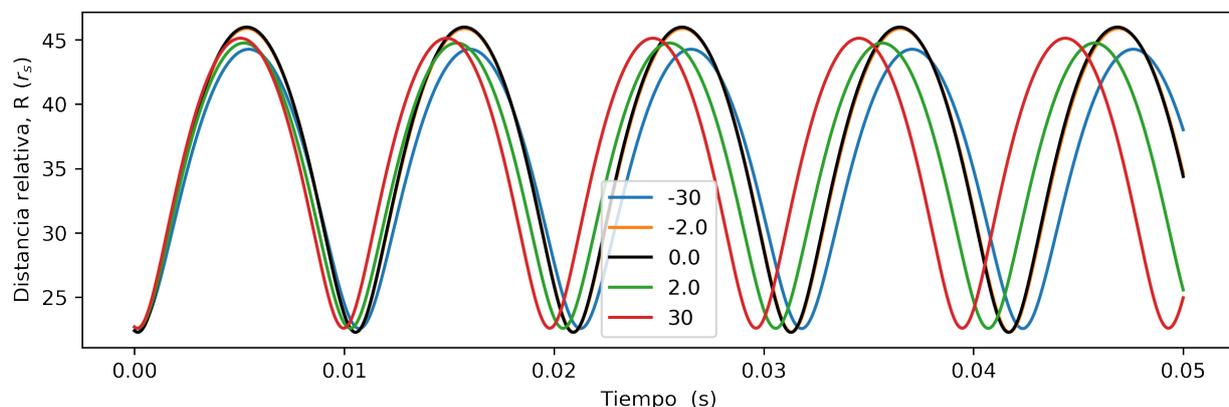
Figura 5.5: Potencial efectivo y región orbital de un sistema con $M_1 = M_2 = 1.4 M_\odot$, $l = 2.4 \times 10^{49}$ g cm/s y β_N . Dada una energía, E , la región orbital queda acotada por los radios en los cuales la recta E intersecta al potencial efectivo.

Como se muestra en la Figura 5.5.(a), E intersecta en dos puntos a cada potencial efectivo, éstos corresponden a los radios R_{min} y R_{max} entre los que oscilará el movimiento radial. En

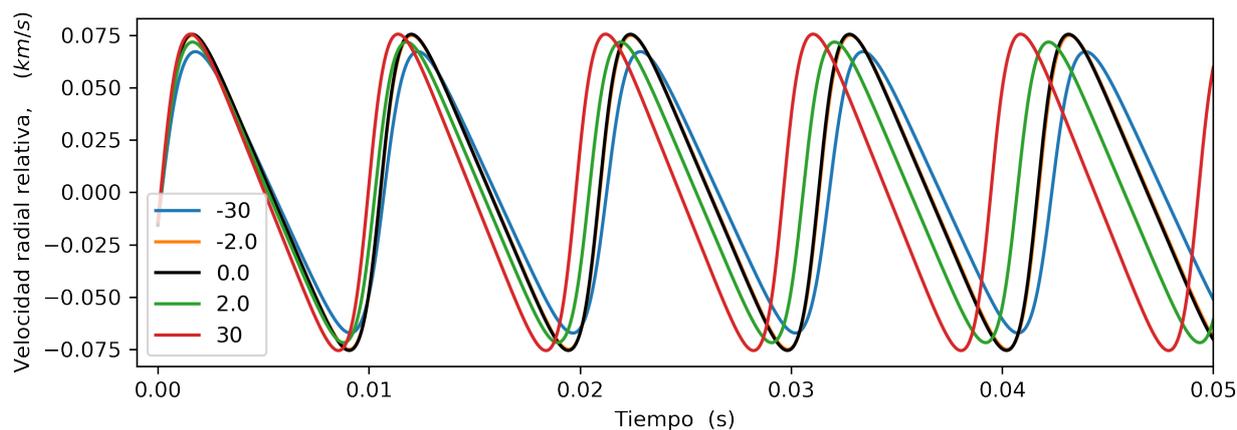
la Figura 5.5.(b) se muestra la órbita circular en línea negra continua y los radios mínimos y máximos entre los que se moverá el sistema de energía E , para cada β_N , no las órbitas. Con $\beta = 0$ recuperamos la órbita kepleriana.

β [adim]	l_c [g cm ² /s]	E_c [ergs]	R_{\min} [r_s]	R_{\max} [r_s]
-30	8.568×10^{49}	-2.904×10^{52}	21.543	48.499
-2	8.196×10^{49}	-2.998×10^{52}	21.294	50.686
0	8.169×10^{49}	-3.004×10^{52}	21.278	50.834
2	8.142×10^{49}	-3.011×10^{52}	21.264	50.982
30	7.749×10^{49}	-3.104×10^{52}	21.091	52.959

Tabla 5.2: Dado $R_0 = 30 r_s$ y $E = -2.5 \times 10^{52}$ ergs, se muestra el momento angular, l_c y la energía, E_c , que corresponderían a la órbita circular; así como los valores mínimo y máximo entre los que una partícula con energía E y momento angular l_c oscilará, para cada valor de β_N .



(a) Tiempo (horas) vs Posición ($10^5 r_s$)



(b) Tiempo (horas) vs Velocidad Radial (km/s)

Figura 5.6: Evolución temporal de la posición y velocidad radial del pulsar binario, R_1 y R_2 , así como de la distancia relativa entre los cuerpos, R . Los parámetros corresponden al pulsar binario de Taylor. La línea negra corresponde al caso sin interacción magnética. El eje y de la Fig (b) tiene unidades de s^{-1} .

En la Figura 5.5 también puede observarse que a menor β , mayor l_c , menor $|E_c|$, mayor R_{\min} , menor R_{\max} y por lo tanto, la región orbital será menor. Esto puede comprobarse también comparando los valores de la Tabla 5.2.

Observamos que la región orbital será mayor si la fuerza magnética entre los dipolos es repulsiva ($\beta > 0$). Lo contrario sucede si la fuerza magnética es atractiva.

En la Figura 5.6 se muestra el resultado de la integración de las ecuaciones (4.11). De la misma forma que en el caso kepleriano, la distancia relativa, R , oscila entre los radios mínimos y máximo pero el parámetro β afectará el valor de éstos y del periodo orbital. Como condiciones iniciales se eligió $R_{0,N} = R_{\min,N} + 0.1$ y $\dot{R}_{0,N} = v(R_{0,N})$, calculado con la ecuación (4.16).

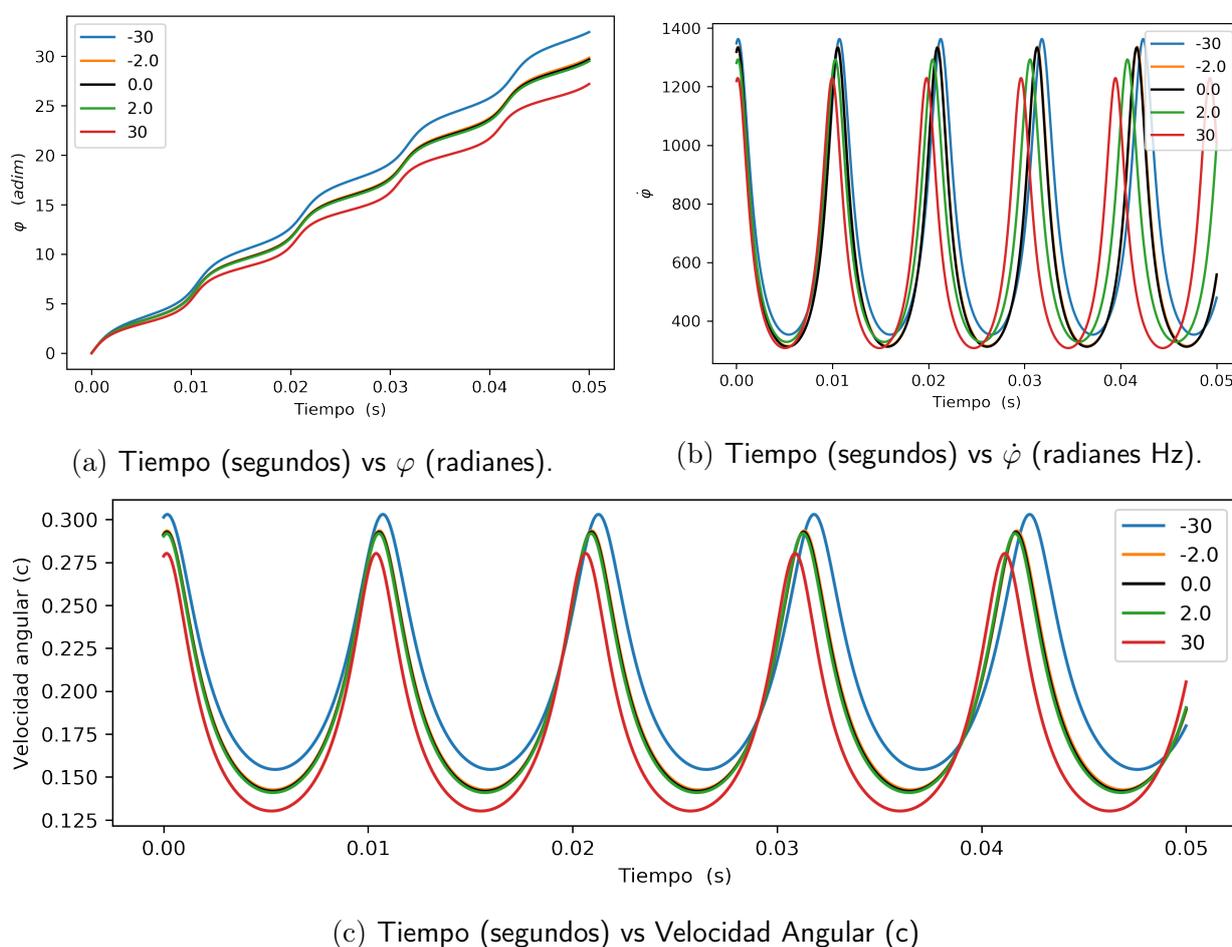


Figura 5.7: Evolución temporal de la coordenada angular del pulsar binario (a), φ_1 y φ_2 , así como de su frecuencia orbital, $\dot{\varphi}$ (b), y velocidad angular, $v_\varphi = R\dot{\varphi}$ (c). Los parámetros corresponden al pulsar binario de Taylor. La línea negra corresponde al caso sin interacción magnética.

De la misma manera que en el régimen anterior, la distancia relativa oscila entre los respectivos radios mínimos y máximos, pero notamos que el periodo es distinto para cada β . Si $\beta < 0$, el periodo es mayor respecto a $\beta = 0$. Si $\beta > 0$, los cuerpos orbitan más rápido, respecto al caso $\beta = 0$.

En la Figura 5.6 (b) se aprecia que la velocidad radial es nula en los valores extremos de R y alcanza mayores valores conforme mayor sea el valor de β .

Para terminar este apartado, también resolvemos la evolución de φ , $\dot{\varphi}$ y v_φ , con la ecuación (4.43) y $\varphi_0 = 0$.

Observamos que la interacción magnética atractiva ($\beta < 0$) demanda velocidades angulares mayores, para mantener el equilibrio dinámico y evitar el colapso gravitatorio. En la Figura 5.7.(c) se aprecia que las velocidades ya son relativistas, $\sim 0.2c$, pero, aunque las velocidades son altas, el momento angular no tiene mayor magnitud que en el caso anterior (§5.1.1) porque se encuentran mucho más cerca ($l \propto R^2$).

5.1.3. Circularización*

Existe un fenómeno físico llamado *circularización* que hasta este punto no hemos descrito ni discutido, pero es preciso hacerlo ahora. La circularización es un resultado teórico comprobado numéricamente (2018, [82]), (2017, [83]) y sucede por la emisión de ondas gravitatorias en un sistema binario. Si al momento de su formación, los cuerpos describen trayectorias elípticas, la excentricidad decrecerá, conforme $t \rightarrow t_{coal}$.

El razonamiento es el siguiente. Si las trayectorias son elípticas, debido a que existe radiación gravitatoria, el sistema binario pierde tanto energía y momento angular. La pérdida de energía está dada por la ecuación (4.3.1); la pérdida de momento angular sigue una relación similar que también depende del promedio de las terceras derivadas del tensor de segundo momento de masa, M^{ij} . Éstas se relacionan con la evolución del semieje mayor de la elipse, a y de la excentricidad e , de tal forma que e tiende a cero y a decrece hasta convertirse en la separación entre los cuerpos, R .

Por ejemplo, en (2017, [83]) se simulan órbitas elípticas para dos masas, $10 M_1 = M_2 = 1 M_\odot$, con separación inicial del eje mayor, $a = 450$ km. Como se aprecia en la Figura 5.8, la excentricidad comienza a decrecer rápidamente, al igual que el eje mayor. La distancia relativa oscila porque los cuerpos se acercan y alejan, según su posición en la trayectoria elíptica, pero también se amortigua y disminuye la diferencia entre la separación máxima y mínima. Significa que se están circularizando las órbitas. Tales resultados se obtienen resolviendo las ecuaciones dinámicas completas (suponiendo $E(t)$ y $l(t)$) en formalismos de cuerpo efectivo, post-newtonianos o Relatividad numérica (2007, [58]), (2003, [74]).

Este proceso continúa de tal forma que, justo antes de la coalescencia sus órbitas ya son circulares, que coincide con el momento al cual la frecuencia y deformación de las ondas gravitatorias ya es detectable por los interferómetros de LIGO. Además, éstos no tienen aún suficiente sensibilidad como para detectar en la forma de la onda si $e \gtrsim 0.05$ [60], [82].

Por otro lado, existen otros escenarios, como en los sistemas triples, donde se estima que la excentricidad al momento de la fusión puede ser significativa, $e \gtrsim 1$, pero no mayor a 1.

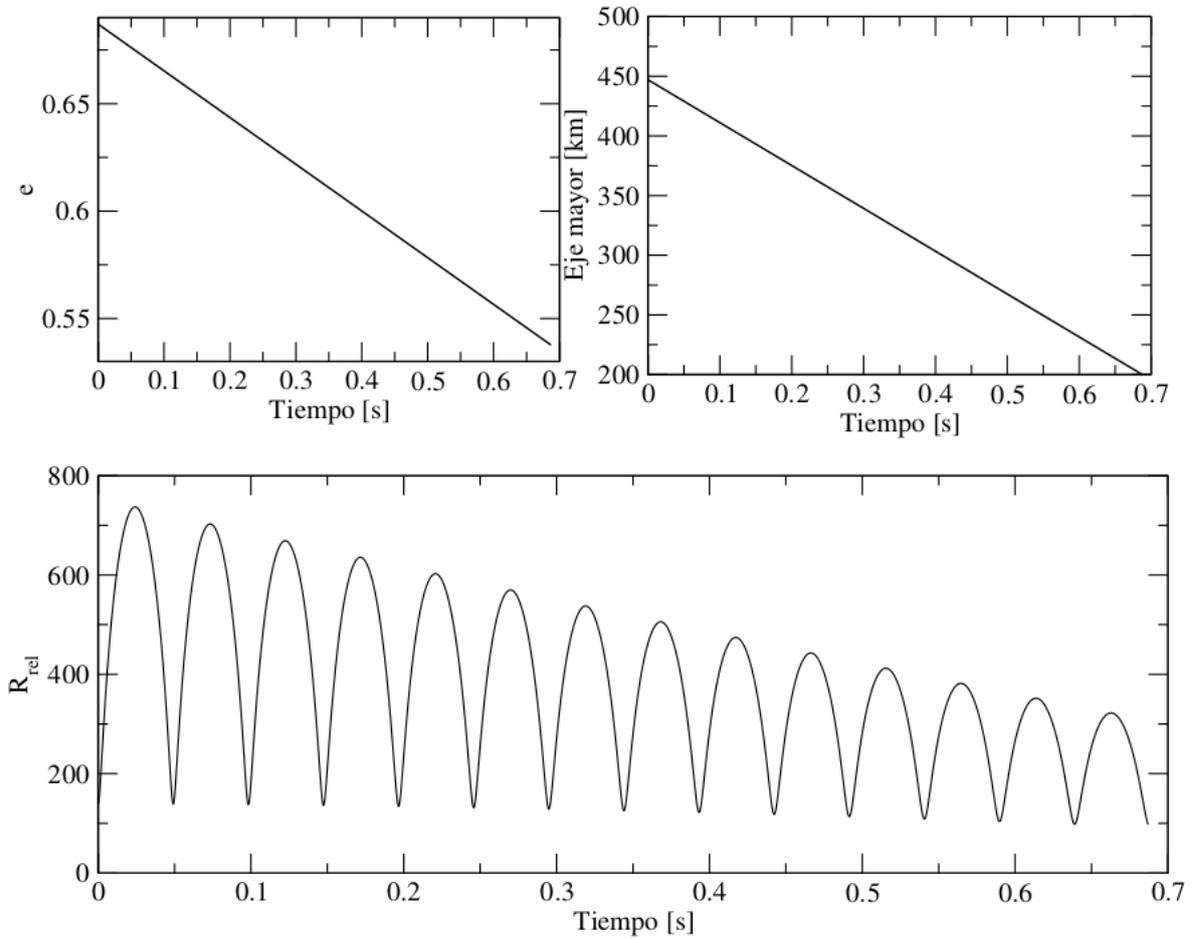


Figura 5.8: Evolución de la excentricidad (arriba izquierda), el eje mayor (arriba derecha) y de la distancia relativa (abajo) para un sistema binario de órbitas elípticas con $10 M_1 = M_2 = 1 M_\odot$. Tomado de (2017, [83]).

5.1.4. A siete r_s

Finalmente, consideremos el caso donde los objetos están a punto de fusionarse con una separación inicial de $r = 7 r_s$. Supondremos que el sistema binario ya se ha circularizado.

El cociente entre las energías potenciales es,

$$\frac{U_m}{U_g} = \frac{\beta}{7^2},$$

Sí $|\beta| = 30$, la fuerza magnética es 0.612 veces la gravitatoria; sí $|\beta| = 2$, el cociente es 0.0408; sí $|\beta| = 0.1$, es 0.002. Sabemos de la ecuación (4.45), que el tiempo de coalescencia para cada configuración de los componentes magnéticos, se ve afectada. Numéricamente, esto es problemático porque requiere que cada caso sea integrado en intervalos de tiempo distintos menores al tiempo de coalescencia ó incluir algún condicional que detenga a integración

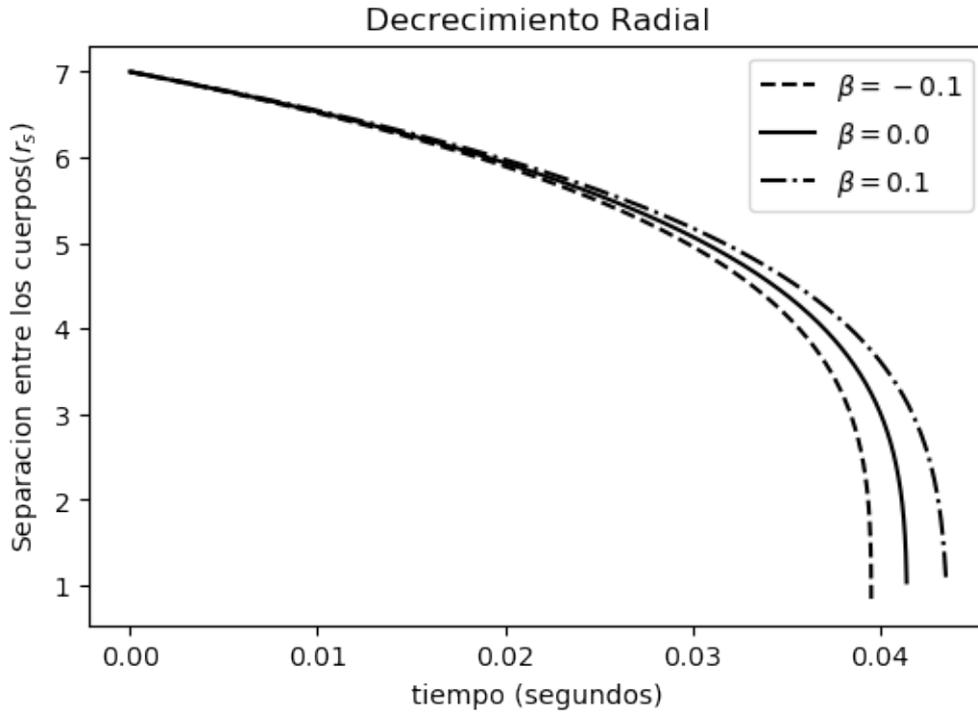


Figura 5.9: Decrecimiento radial debido a la emisión de ondas gravitatorias en fase inspiral para órbitas circulares para $\beta = -1, 0, 1$. El sistema tiene masas $M_1 = 1.43M_\odot$ y $M_2 = 1.4M_\odot$ y una separación inicial de $7r_s$.

antes de la divergencia. Pero por simplicidad, solo resolveremos los casos representativos $\beta = -0.1, 0, 0.1$. El caso extremo, $\beta = 30$, será resuelto para el sistema GW170817.

La distancia relativa entre los cuerpos decrece según la ecuación (4.44),

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{8\mu c}{5Mr_s R^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3\beta}{R^2}\right)^{-1}.$$

La distancia relativa decrece exponencialmente en un intervalo de tiempo ~ 0.04 segundos. Si la fuerza magnética es atractiva ($\beta < 0$). El radio decrecerá aún más rápido, disminuyendo el tiempo de coalescencia. Lo contrario sucede si la fuerza magnética es repulsiva.

En la Figura 5.9 se muestra la solución numérica para $\beta = -0.1, 0, .1$, con los parámetros del pulsar de Taylor.

Una vez calculada $R(t)$, es fácil encontrar la frecuencia orbital, $\Omega(t)$, usando la ecuación (4.26),

$$\Omega(t) = \left[\frac{GM}{r_s^3 R_c^3} \left(1 - \frac{3\beta}{R(t)^2}\right) \right]^{1/2}.$$

como se muestra en la Figura 5.10. Esta es una de las relaciones más importantes porque nos dice cómo se relacionan todos los parámetros del sistema con la dinámica orbital, que a

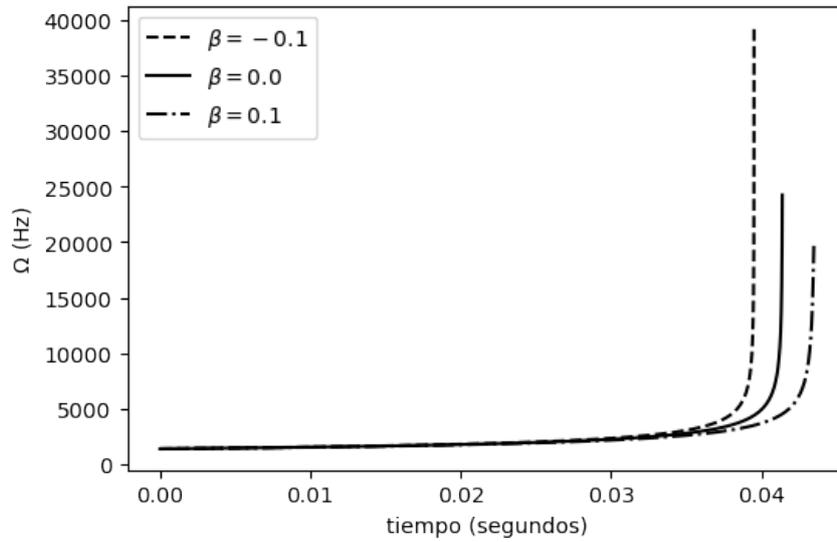


Figura 5.10: Evolución de la frecuencia orbital, Ω (Hz), en el tiempo (s) para el sistema PSR 1913+16, con $M_1 = 1.43M_\odot$ y $M_2 = 1.4M_\odot$ y una separación inicial de $7r_s$, suponiendo $\beta = -0.1, 0, 0.1$.

su vez determina las propiedades de las ondas gravitatorias, pues, como vimos en la sección §4.4.4, la frecuencia de las ondas es, $f_{og} = 2\Omega$.

La frecuencia orbital se encuentra en el rango de \sim KHz a \sim 0.1 MHz. Además, si la fuerza magnética es atractiva, la frecuencia orbital aumenta más rápido. Esto también significa que más pronto deja de ser válida la aproximación cuadrupolar.

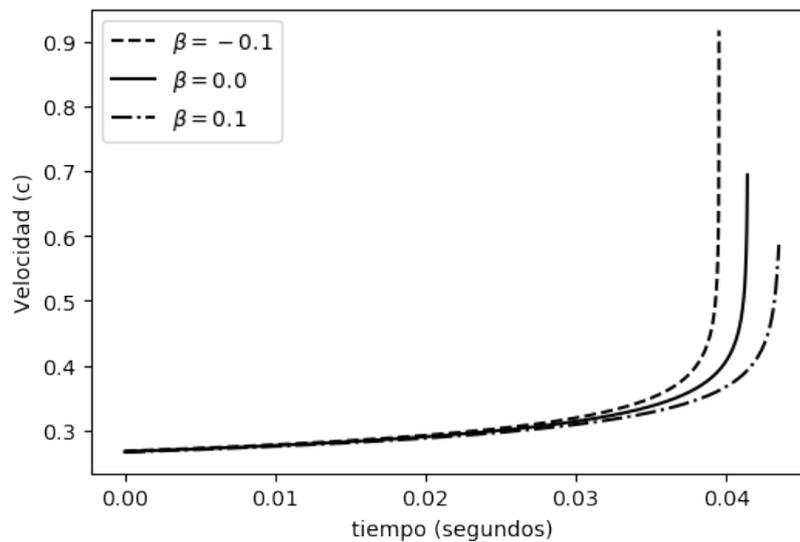


Figura 5.11: Evolución de la velocidad angular, $v_\varphi = R\Omega r_s/c$ para el sistema PSR 1913+16, con $M_1 = 1.43M_\odot$ y $M_2 = 1.4M_\odot$ y una separación inicial de $7r_s$, suponiendo $\beta = -0.1, 0, 0.1$.

Usando que $v_\varphi = R\Omega$, estimamos la velocidad angular. En la Figura 5.11 observamos que

aproximadamente en 0.03 segundos, las curvas con $\beta = -0.1, 0, 0.1$ se diferencian, pero también a ese tiempo, la velocidad del sistema es mayor a ~ 0.3 veces la velocidad de la luz, c , que ya no se encuentra dentro de las condiciones de la aproximación cuadrupolar (ver Sección 3.3.2).

La evolución del periodo orbital de la binaria (t vs $P(t)$) se muestra en la Figura 5.12.

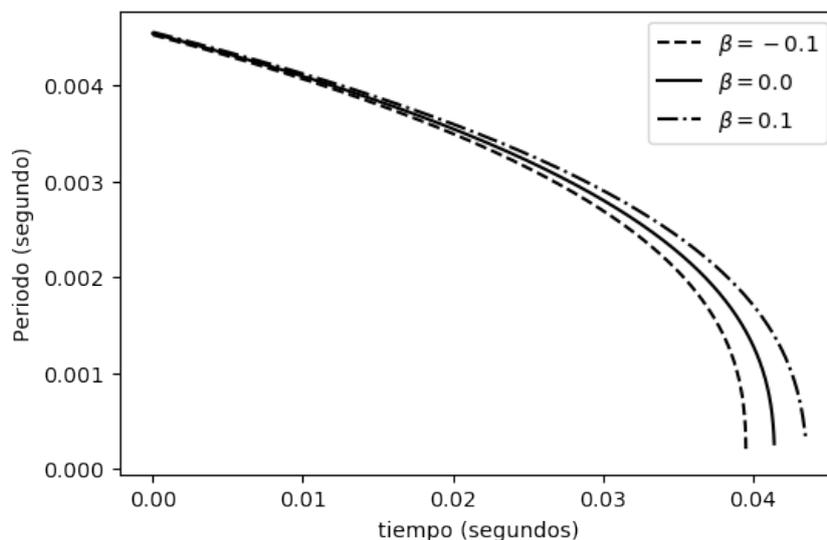


Figura 5.12: Evolución del periodo orbital, $P = 2\pi/\Omega$ para el sistema PSR 1913+16, con $M_1 = 1.43M_\odot$ y $M_2 = 1.4M_\odot$, separación inicial de $7r_s$ y considerando tres casos: $\beta = -0.1, 0, 0.1$.

Finalmente, calculamos las polarizaciones de la onda gravitatoria, con ayuda de la ecuación (4.48),

$$h_+ = \frac{4G\mu r_s^2}{c^4 d} R^2 \Omega^2 \cos(2\varphi t)$$

$$h_\times = \frac{4G\mu r_s^2}{c^4 d} R^2 \Omega^2 \sin(2\varphi t)$$

En la Figura 5.13 representamos solamente la polarización h_+ , a sabiendas de que h_\times tiene la misma forma pero desfasada por $\pi/2$.

Es notable el efecto de la interacción magnética sobre la forma de las ondas gravitatorias porque tanto $R(t)$ como $\Omega(t)$ dependen de β y determinan la envolvente y frecuencia en h_+ . Para apreciar mejor el efecto, regraficamos en la Figura 5.14 las ondas anteriores pero sólo en el intervalo de tiempo $[0.005, 0.035]$.

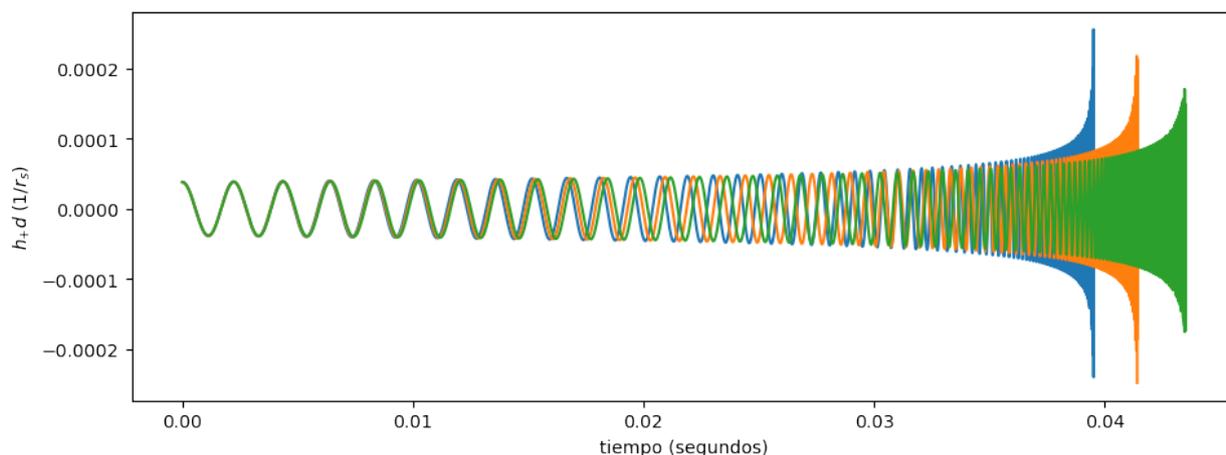


Figura 5.13: Strain por distancia a la fuente, $h_+ \times d$, en la fase inspiral para $\beta = -0.1$ (azul), $\beta = 0$ (naranja) y $\beta = 0.1$ (verde). Para obtener la magnitud de la amplitud de la onda, habría que dividir los valores del eje vertical la entre la distancia a la fuente en unidades r_s .

Efectivamente, sí $\beta < 0$, la frecuencia de las ondas gravitatorias aumentan más rápido que los otros dos casos, porque el sistema orbita también más rápido.

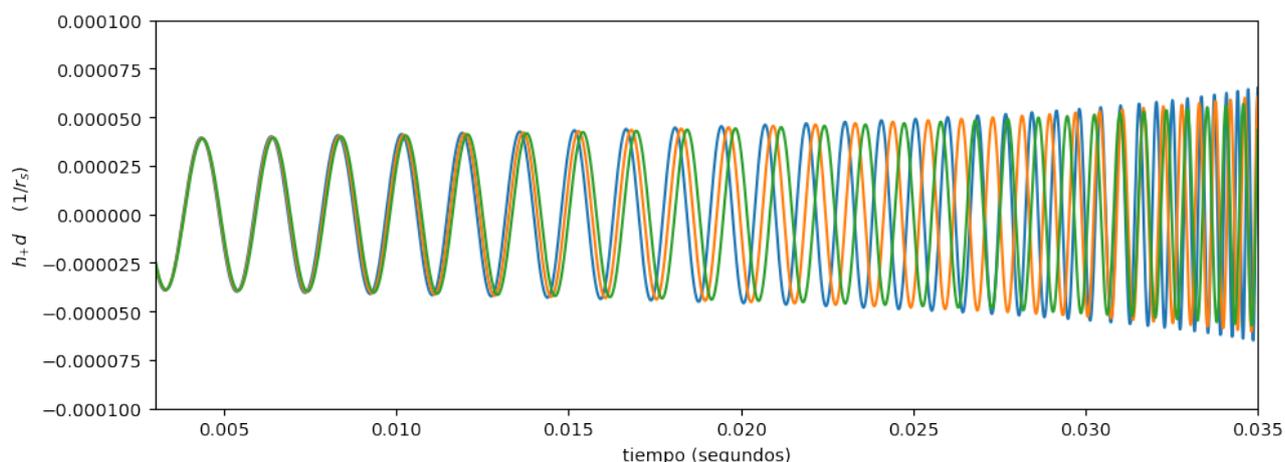


Figura 5.14: Señal anterior para $\beta = -0.1$ (azul), $\beta = 0$ (naranja) y $\beta = 0.1$ (verde) en el intervalo $[0, 0.035]$ segundos. El eje vertical es la amplitud de la onda, h_+ , por la distancia a la fuente, d en unidades r_s . El eje horizontal es el tiempo en segundos.

5.2. Aplicación sobre la binaria progenitora de GW170817

El 17 de Agosto de 2017, la red de detectores LIGO-Virgo observó la primera binaria de estrellas de neutrones en fase inspiral. De la forma de la señal pudieron acotar las masas de las estrellas en el rango $(1.17 - 1.60) M_\odot$, la masa total $M = 2.79^{+0.04}_{-0.01} M_\odot$ y la distancia lumínica $d = 40^{+8}_{-14}$ Mpc, (2017, [76]). En análisis posteriores, suponiendo distintas ecuaciones de estado para el interior de cada estrella de neutrones estimaron $R_1 = 10.8^{+2.0}_{-1.7}$ km y

$R_2 = 10.7_{-1.5}^{+2.1}$ km (2018, [84]). Por lo tanto, para estimar β sustituimos en la ecuación (4.2) los siguientes parámetros,

$$\begin{aligned} M_1 &= 1.44 M_\odot, \\ \mu &= 1.35 M_\odot, \\ R_1 &= 11.8 \text{ km}, \\ R_2 &= 10.7 \text{ km}. \end{aligned}$$

De manera que, $\beta = ((R_1 R_2)^3 / GM\mu) k B_1 B_2 = 3.91 \times 10^{-24} B_1 B_2$. Por simplicidad supondremos que los campos magnéticos de las estrellas tienen la misma magnitud, $B_1 = B_2 = B$ y una alineación tal que $k = \pm 1.5$. Es decir, supongamos los distintos casos de la Tabla 5.3.

Caso	β [adim]	k [adim]	B [G]
1	6.72×10^{-11}	1.5	10^{12}
2	0.672	1.5	10^{17}
3	16.818	1.5	5×10^{17}
4	67.273	1.5	10^{18}
5	-6.72×10^{-11}	-1.5	10^{12}
6	-0.672	-1.5	10^{17}
7	-16.818	-1.5	5×10^{17}
8	-67.273	-1.5	10^{18}

Tabla 5.3: Distintos valores del parámetro β y sus respectivos valores de $k = 1 - 3 \cos \alpha$ y la magnitud del momento magnético, m .

A diferencia del sistema anterior, ahora unicamente resolveremos la fase inspiral con órbitas circulares haciendo uso de los resultados obtenidos en la sección §4.3. Entonces, con el objetivo de obtener la forma de las ondas gravitatorias para cada β , resolvemos numéricamente la ecuación (4.44) para el decrecimiento entre la separación de los cuerpos. El resultado en los ocho casos se aprecia en la Figura 5.14.

Notemos que los casos con $B = 10^{12}$ G pero signo opuesto son indistinguibles entre sí. No obstante, en la Figura 5.14 (b) se observa que los casos con $B = 10^{17}$ G, ya comienzan a distinguirse de las configuraciones anteriores, de tal forma que para $k = -1.5$, la separación entre los cuerpo decrece ligeramente más rápido, mientras que para $k = 1.5$, ocurre lo contrario. Este comportamiento es más evidente para $B = 10^{18}$ G.

El caso 4, con $\beta = 67.273$, representado por la curva roja en la Figura 5.15, corresponde a una interacción magnética repulsiva y se diferencia de los demás porque la curva $R(t)$ no tiende a cero.

Una vez calculado el decrecimiento radial, con la ecuación (4.33) encontramos directamente la evolución temporal de la frecuencia orbital, $\Omega(t)$, tal como se muestra en la Figura 5.16. En ésta observamos que los primeros 20 segundos, no hay mucha diferencia entre cada caso, pero mientras mayor es la magnitud de β , la diferencia se hace evidente a tiempos más tempranos.

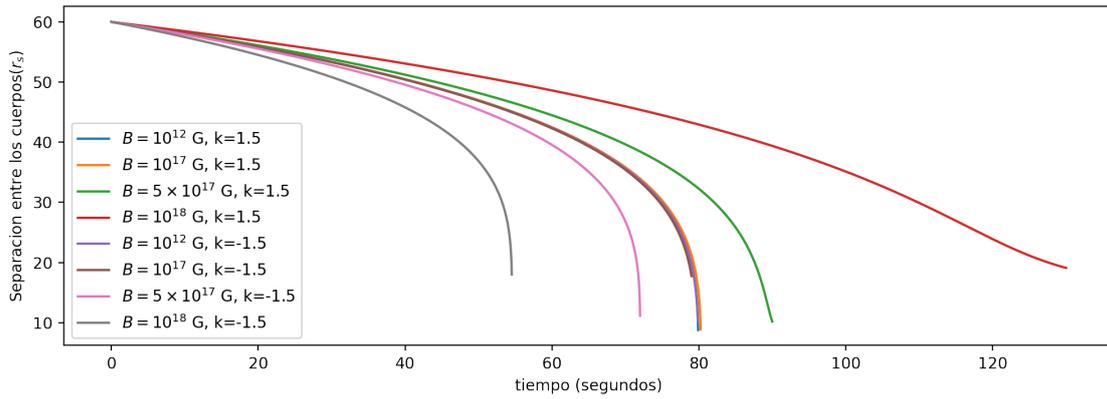
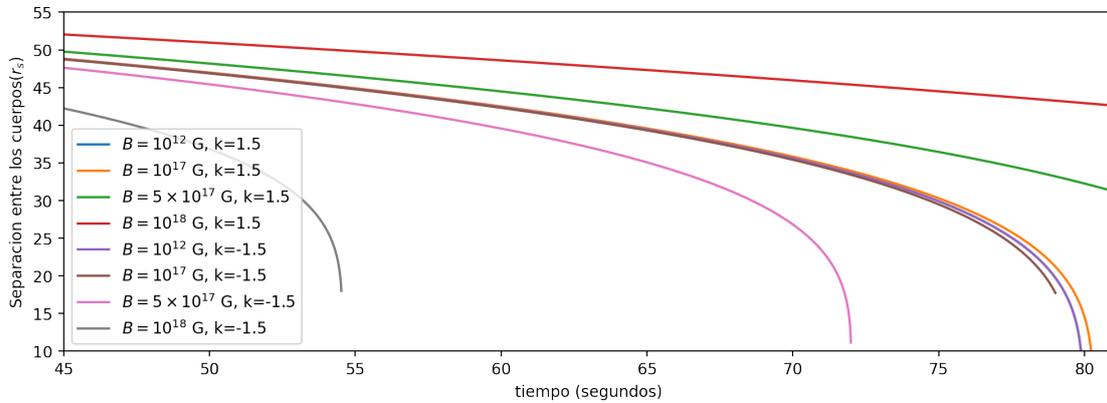
(a) Tiempo (horas) vs separación entre los cuerpos ($10^5 r_s$)(b) Tiempo (horas) vs separación entre los cuerpos ($10^5 r_s$) entre $45 - 82 r_s$.

Figura 5.15: Evolución temporal de la separación entre dos estrellas con los parámetros de la fuente progenitora de la señal GW170817, con separación inicial $R_0 = 60 r_s$.

Los casos con $\beta < 0$, tienen un incremento más abrupto en Ω , mientras mayor sea la magnitud del campo magnético. En cualquier caso, las frecuencias van de cientos a miles de Hertz.

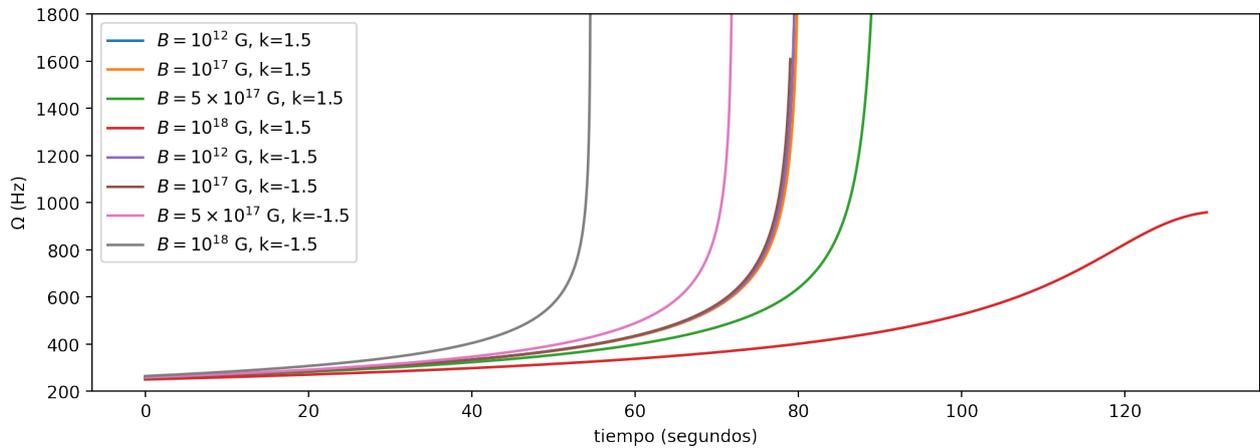


Figura 5.16: Evolución de la frecuencia orbital, $\Omega(t)$, del sistema binario con $M = 2.83M_\odot$, $\mu = 0.71M_\odot$ y β , a causa de la emisión de ondas gravitatorias en fase inspiral.

Con los valores $\Omega(t)$, es fácil obtener la evolución temporal de las frecuencias de las ondas gravitatorias, f_{og} , usando que $\Omega = 2f_{og}$, como se muestra en la Figura 5.17.

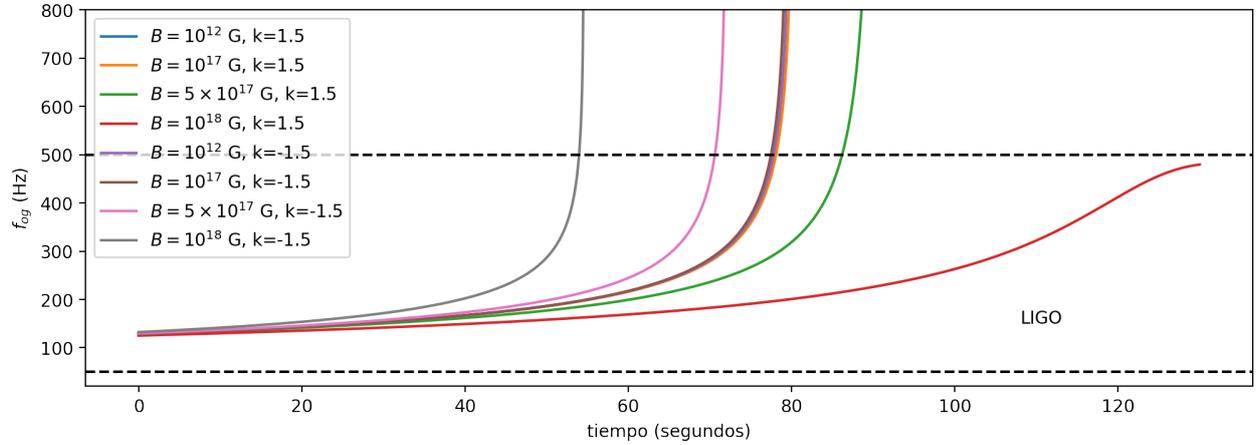


Figura 5.17: Frecuencia de las ondas gravitatorias, f_{og} (Hz) vs tiempo (segundos) en fase inspiral de un sistema binario con $M = 2.83M_{\odot}$, $\mu = 0.71M_{\odot}$ y distintos valores del parámetro β .

En la misma imagen, está ilustrado también el rango de frecuencias de detección confiable de LIGO, aunque es importante recordar que para poder detectar una señal, también se requiere que su amplitud $\sim h$, sea mayor a 10^{-21} . De manera que, para saber si las señales son detectables, es necesario resolver sus amplitudes, h_+ ó h_{\times} . De la ecuación (4.48),

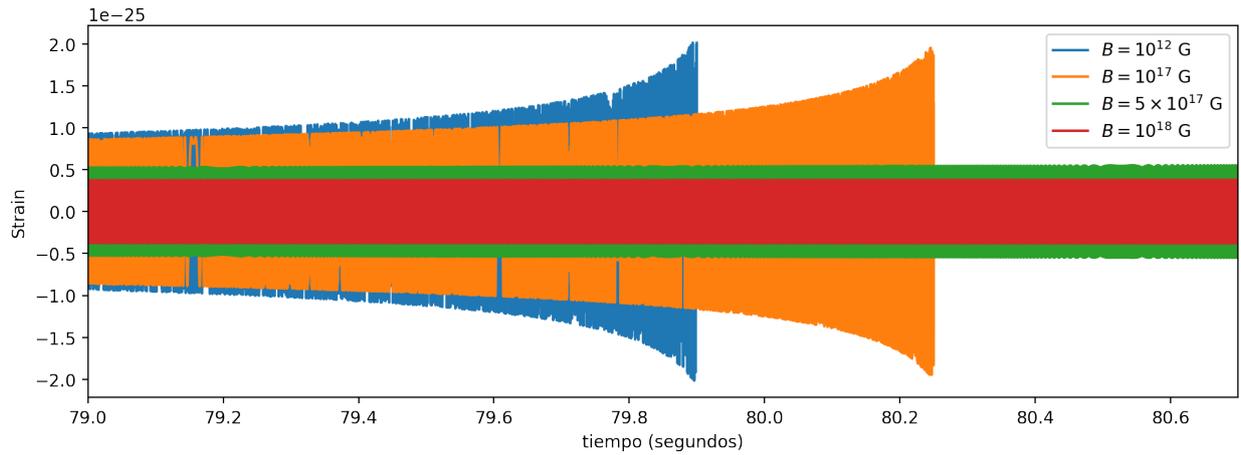
$$h_+(t) = \frac{4G\mu r_s^2}{c^4 d} R^2(t)\Omega^2(t) \cos(2\varphi t),$$

entonces, sustituimos los resultados recién obtenidos. Las gráficas resultantes se ilustran en la Figura 5.18, con dos subfiguras. La Figura 5.18.(a) se muestra el *strain* para los casos con $k > 0$, es decir, $\beta > 0$ ó interacción magnética repulsiva. Los casos con $k < 0$ o interacción magnética atractiva se muestran en la Figura 5.18.(b).

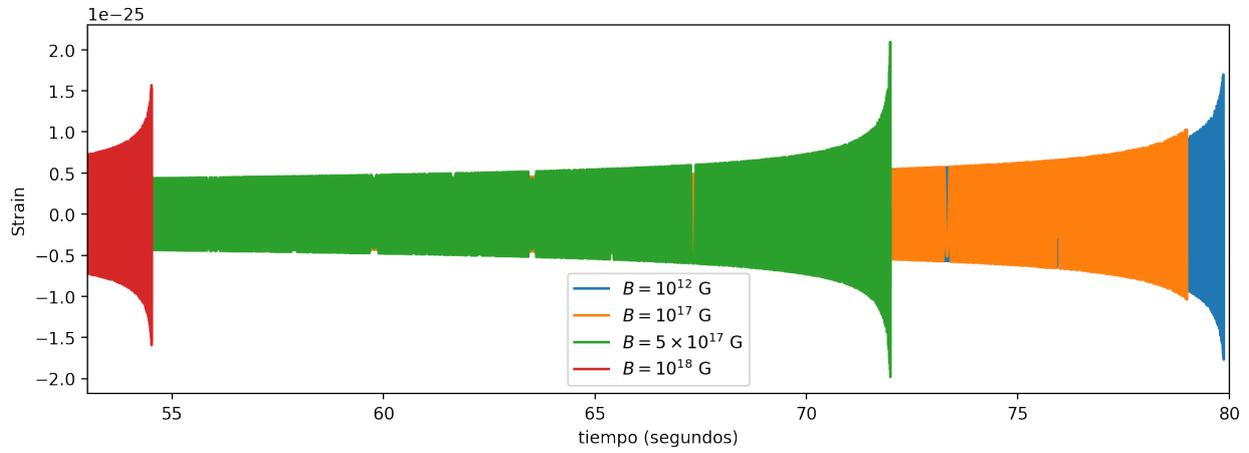
Si el caso de referencia es con $B = 10^{12}$ G, pues $\beta \sim 0$, observamos que si la interacción magnética es repulsiva, se retrasa el tiempo de fusión a tal grado nivel que en la Figura 5.18.(a), los casos con $B = 5 \times 10^{17}$ G y 10^{18} G, no muestran el incremento exponencial en el strain, típico en la transición entre fase inspiral y la fusión misma.

Notamos que lo contrario sucede cuando la interacción magnética es atractiva, incluso, la señal con $B = 10^{18}$ G, muestra el incremento exponencial del strain, hasta 25 segundos antes que el caso de referencia con 10^{12} G.

Cabe aclarar que las razones por la cuales las señales de la Figura 5.18 no se miran como las señales de la Figura 5.14, es porque tienen distintas escalas de tiempo en su eje horizontal, pero también, por la falta de resolución en la integración numérica.



(a) Casos con $k = 1.5 > 0$, es decir, una interacción magnética repulsiva ($\beta > 0$).



(b) Casos con $k = -1.5 < 0$, es decir, una interacción magnética atractiva ($\beta < 0$).

Figura 5.18: Amplitud de las ondas gravitatorias, ó $h_+(t)$, en unidades adimensionales vs el tiempo en segundos. Se muestran los ocho casos de la Tabla 5.3, divididos en dos grupos: aquellos con $k > 0$ (a) y $k < 0$ (b).

5.3. Discusión

A lo largo de esta tesis hemos construido, desde primeros principios, una descripción analítica y sencilla de un sistema binario de objetos compactos, con las siguientes suposiciones:

1. Consideramos dos objetos caracterizados únicamente por sus masas M_1 , M_2 , radios R_1 , R_2 , y sus momentos magnéticos dipolares \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 .
2. El marco de referencia tiene por origen el centro de masa del sistema. Las posiciones de los cuerpos son \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 ; el vector de posición relativa es $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.
3. Desde el punto de vista electrodinámico, los objetos son esferas conductoras perfectas eléctricamente neutras y estacionarias (régimen magnetohidrodinámico).

4. Las magnitudes de los momentos magnéticos $m_1 = |\mathbf{m}_1|$ y $m_2 = |\mathbf{m}_2|$, son constantes, al igual que el ángulo α_1 formado entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_1 ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_1 = |\mathbf{r}|m_1 \cos \alpha_1$) y α_2 , formado entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_2 ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_2 = |\mathbf{r}|m_2 \cos \alpha_2$).

Una vez claras las restricciones del sistema, hemos resuelto el problema de dos cuerpos dentro del régimen newtoniano en §4.2. y hemos aplicado estos resultados en §5.1.1 y §5.1.2. De tal manera, surgen las siguientes afirmaciones,

- En teoría newtoniana, la gravedad es una fuerza central siempre atractiva. La fuerza magnética también puede ser central si se satisfacen las condiciones 3 y 4. Así, el sistema binario supuesto, está caracterizado por la superposición de ambas fuerzas centrales, ó fuerza neta.
- El carácter atractivo o repulsivo de la fuerza magnética central depende únicamente de los ángulos α_1 y α_2 . En concreto, el signo de esta fuerza depende del signo del parámetro $k = 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2$, cuyo valor puede estar entre -1.5 y 2 . Si $\alpha_2 = \arctan(2/\tan \alpha_1)$, la interacción magnética se anula ($k = 0$). Si $\alpha_2 > \arctan(2/\tan \alpha_1)$, entonces $k < 0$ lo que significa que la fuerza magnética es atractiva; y, es repulsiva cuando $\alpha_2 < \arctan(2/\tan \alpha_1)$.
- Si los momentos magnéticos son paralelos ($\alpha_1 = \alpha_2$), entonces $k \in [-1, 2]$. En caso de ser antiparalelos ($\alpha_1 = -\alpha_2$), se tiene que $k \in [0, 2]$, lo que significa que la fuerza magnética solo puede ser repulsiva. Si son perpendiculares entre sí ($\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$), entonces $k \in [-1.5, 1.5]$ (ver Figura 4.3).
- La fuerza gravitatoria es de inverso cuadrado y la magnética es de inverso a la cuarta, por lo que mientras más separados estén los cuerpos, menos relevante es el efecto magnético sobre su movimiento. En un caso como éste, es muy útil estudiar la dinámica de dos cuerpos ligados mediante la función lagrangiana de la masa reducida.
- En dinámica newtoniana, la energía mecánica total de la binaria se conserva, de manera que los cuerpos se moverán en órbitas bajo la acción de la fuerza central neta. Si solo actúa la fuerza gravitatoria, las órbitas serán keplerianas. Si también actúa la magnética, las órbitas seguirán estando en un plano pero describiendo rosetas.
- Las ecuaciones dinámicas obtenidas y resueltas en §4.2. no aplican para estudiar el movimiento de partículas de prueba en el pozo de potencial efectivo porque éstas deberían tener momento magnético para interactuar con los campos magnéticos de los objetos y entonces, ya no serían partículas de prueba.
- La aceleración centrípeta evita el colapso del sistema, al igual que la fuerza magnética repulsiva.
- Si la fuerza magnética es repulsiva y suficientemente grande, puede hacer que los cuerpos dejen de estar ligados u otras posibilidades aún no analizadas.
- Si la fuerza magnética es atractiva y grande, los cuerpos se mantienen ligados, siempre y cuando el momento angular sea suficiente, es decir, los cuerpos tengan altas velocidades angulares, comparadas con las velocidades del sistema kepleriano.
- El caso de órbitas circulares con conservación de energía ilustra la relación entre las

variables dinámicas y los parámetros físicos del sistema. En particular, la frecuencia orbital se verá afectada aumentando su magnitud si la fuerza magnética es atractiva y disminuyéndola si es repulsiva.

- Debido a que la actual separación de la mayoría de los sistemas binarios observados es en general $\sim 10^4 r_s$, en ninguno de ellos la interacción magnética sería significativa en las observaciones actuales.
- Solo si los cuerpos se encuentran muy cerca uno del otro, $\sim 10 r_s$, la interacción magnética comienza a ser relevante. Los cuerpos no describen elipses, sino *rosetas* que barreran la región orbital.
- Sin embargo, la dinámica newtoniana no considera que las velocidades del sistema tienen por límite la velocidad de la luz, c , ni puede predecir la comprobada emisión de ondas gravitatorias de sistemas binarios astrofísicos. Suponer que la energía se conserva es una aproximación válida solo mientras los cuerpos no se encuentran muy cerca.

Por lo tanto, hemos recurrido a la interpretación relativista de la gravedad bajo la aproximación cuadrupolar (ver capítulo 3) para aplicarla a nuestro sistema en §4.3, restringido a órbitas circulares. Encontramos expresiones para las variables asociadas a las ondas gravitatorias y al resolverlas sobre los parámetros de dos sistemas físicos en §5.1.4 y §5.2, concluimos que,

- La aproximación cuadrupolar es válida para describir fuentes lentas de campo débil, estando el observador muy lejos de ellas ($R_1 + R_2 \ll d$). Por consiguiente, este formalismo es muy útil para entender la naturaleza de las ondas gravitatorias emitidas por un sistema binario únicamente en la fase inspiral.
- Todos los sistemas binarios ligados pierden energía en forma de ondas gravitatorias porque su distribución de masa es, al menos, cuadrupolar. La energía potencial en nuestro modelo es la superposición del potencial gravitatorio y el magnético. Al sumarle la energía cinética, encontramos la energía total, la cual se pierde a una tasa, L .
- En el caso particular donde los cuerpos describen órbitas circulares las ecuaciones dinámicas para las variables de la fuente y la onda, son simples -en el sentido que son a lo más de segundo grado-, aunque no tienen solución exacta.
- Si eliminamos la interacción magnética, nuestro modelo se reduce correctamente al caso kepleriano ya trabajado desde la década de los 70 y 80's (1983, [3]).
- La separación entre los cuerpos decrece de forma exponencial. Para masas tipo estrella de neutrones, cuando alcanzan distancias de $\sim 3 - 4 r_s$ entre ellas, la aproximación cuadrupolar deja de ser válida porque se rompe la condición, $v \ll c$.
- La interacción magnética atractiva hace que el sistema binario evolucione hacia la fusión porque incrementa la velocidad orbital de los cuerpos y la distancia relativa disminuye aún más rápido.
- La interacción magnética repulsiva ralentiza la fase inspiral y hace que más lento los cuerpos alcancen velocidades relativistas. Esto es lo que pasaría siempre que los momentos magnéticos fuesen antiparalelos.

- La frecuencia de las ondas gravitatorias podría entrar en el rango de detección de los detectores terrestres antes de que el strain también entre en el rango de sensibilidad.
- Matemáticamente, si el efecto magnético es repulsivo y varias decenas de veces mayor al gravitatorio, podría pasar que el sistema binario no se fusionara.

Por último, las siguientes afirmaciones surgen considerando también el primer capítulo,

- Las binarias compactas son objetos astrofísicos de gran interés científico porque su interacción puede producir los fenómenos más energéticos del universo, desde acreción, emisión de rayos X, rayos gamma y radio, acreción, hasta ondas gravitatorias.
- En comparación con las estrellas en secuencia principal ($B \sim 0 - 100$ G), las enanas blancas y las estrellas de neutrones (objetos compactos) exhiben campos magnéticos, B , muy intensos, las primeras hasta $B \sim 10^8$ G ($B \sim 10^{34}$ emu) y las segundas entre $10^{12} - 10^{15}$ G. Los magnetares, una clase de estrellas de neutrones, pueden alcanzar ($B \sim 10^{14} - 10^{16}$ G). Los hoyos negros no presentan campos magnéticos relevantes.
- Por estas razones, nuestro modelo es aplicable principalmente a binarias de estrellas de neutrones o de enanas blancas. Sin embargo, encontramos que el efecto magnético en la fase inspiral no es distinguible para sus valores típicos de B . Sobre el pulsar binario PSR 1913+16, encontramos diferencias hasta suponer $B = 2.01 \times 10^{16}$ G (arriba descritas); y, sobre la progenitora de GW170817, los casos se diferenciaron notablemente hasta $B < 10^{17}$ G. Aunque estos valores no se han observado, algunos modelos teóricos ponen como límite físico $B \sim 10^{18} - 10^{20}$ G (1998, [42]).
- En síntesis, es poco probable que los campos magnéticos de estrellas de neutrones típicas jueguen un rol central en la emisión de ondas gravitatorias, si acaso si se trata de magnetares, aunque éstos no suelen estar en sistemas binarios y su campo magnético evoluciona decreciendo.
- En los casos más drásticos, la interacción magnética sí sería relevante tanto en los cuerpos durante la fase inspiral como en la forma de las ondas gravitatorias. No obstante, hay que considerar que si los campos magnéticos son muy intensos y atractivos, la aproximación cuadrupolar sería válida por menor tiempo, pues se fusionarían más rápidamente. En cambio, si los campos magnéticos fuesen repulsivos, la fase inspiral se alargaría.
- Nuestros resultados muestran contundentemente que el efecto magnético, por muy ínfimo que sea, sí afecta todas las variables en la fase inspiral. Sin embargo, esto no significa directamente que LIGO podría detectar tales diferencias.

Sobre la integración numérica

En este trabajo se resolvieron ecuaciones diferenciales ordinarias. En los casos donde las ecuaciones diferenciales eran de segundo grado, éstas fueron reescritas en su forma equivalente como un sistema de ecuaciones de primer grado.

Para su integración numérica se utilizó principalmente el submodulo `scipy.integrate` de la

biblioteca Scipy de Python, que provee distintas técnicas de integración [85]. A su vez éstas utilizan LSODA de la colección Odepack de Fortran [86]. lsoda consiste en nueve integradores que cubren casos de la forma $dy/dt = f(y, t)$, pero también $A(t, y)dy/dt = g(t, y)$, con condiciones iniciales, homogéneas o no.

En función de los parámetros sobre las funciones de `scipy.odeint`, Python utiliza uno u otro método. Entre ellos se encuentra, el método de Adams para sistemas *no rígidos*, los métodos Gear y BDF (backward differentiation formula) para sistemas rígidos, métodos directos como factor de LU para sistemas lineales, método de coeficientes variables, entre otros.

Los resolvedores de ODEPACK están en constante mejora, desde que fueron escritos en Fortran 77. Para cada resolvedor, existe documentación y pruebas generales exitosas de convergencia, aunque ciertamente, para cada problema concreto, se debe probar la convergencia de los métodos de integración, por ejemplo, graficando alguna cantidad conservada del sistema.

Límites de los resultados

En este trabajo nos restringimos a estudiar la emisión de ondas cuando las órbitas son circulares por varias razones. En primer lugar, como vimos en la última sección del capítulo anterior, solo en este caso el tensor de segundo momento de inercia no varía con la coordenada radial y por lo tanto, la ecuación para el decrecimiento radial es de primer grado. Por otra parte, las órbitas circulares son una buena aproximación para la dinámica del sistema conforme se acercan debido al proceso de *circularización*. Para entender el problema completo, sería necesario considerar otra ecuación para la pérdida de momento angular que determinaría la evolución de la excentricidad. El procedimiento general se describe en [58], sin interacción magnética.

Nuestros resultados también están restringidos al caso donde los campos magnéticos son constantes, sin embargo, en los objetos compactos reales, los campos evolucionan y son más complejos que nuestro modelo dipolar. Además, conforme los objetos se acercan, la fuerza magnética comienza a dominar la dinámica y puede producir fenómenos como inductancia mutua¹ y la emisión de radiación electromagnética, no considerados en el presente trabajo.

Procesos como acreción y emisión de ondas electromagnéticas tampoco están incluidos en nuestro análisis, aunque es de esperarse que la evolución del campo electromagnético radíe luz en distintas bandas y que los procesos internos de la estrella produzcan emisión de partículas como neutrinos, esto se traduce en la invalidez de la ecuación $dE/dt + L_{og} = 0$, en cambio, deberían añadirse términos para incluir luminosidades con otra naturaleza. Para incluir el efecto de la acreción, no deberíamos suponer que la masa es constante, sino que se acreta a cierta tasa, dM/dt ; la expresión entraría en las derivadas del segundo momento de masa I^{ij} , afectando todas las variables de la señal gravitatoria, pero también la dinámica del sistema.

Se piensa que los campos magnéticos más intensos se producen en objetos jóvenes, recién

¹Cuando un primer objeto con campo magnético afecta la corriente eléctrica de un segundo objeto, por ley de Faraday produce una fuerza electromotriz, que a su vez afecta al primer cuerpo. A este fenómeno se le conoce como inductancia mutua.

formados. Así que quizás nuestros resultados sean aplicables a estrellas compactas binarias jóvenes, nacidas en procesos de colapso y/o supernova y que, dada su cercanía, evolucionan rápidamente hasta fusionarse, antes que el campo magnético decaiga.

Por otra parte, la aproximación cuadrupolar aplica para fuentes débiles y lentas, sin embargo, los objetos compactos producen curvatura en el espaciotiempo. Para que nuestro modelo sea relativista, deberíamos construir una métrica a partir del tensor de materia-energía de dos dipolos magnéticos perfectos y luego, resolver las ecuaciones de campo con las restricciones magnetohidrodinámicas. Ó, resolver el problema con relatividad numérica.

5.4. Comparación con otros trabajos similares

La emisión de ondas gravitatorias asociadas a binarias de estrellas de neutrones es un tema de gran importancia en el contexto de las exitosas observaciones de LIGO y Virgo. Sin embargo, incluir el efecto magnético en la señal gravitatoria, en su versión más completa, demanda considerar las ecuaciones de campo con las restricciones magnetohidrodinámicas, razón por la cual existen pocos grupos científicos que las han resuelto completamente en simulaciones. Los primeros resultados cualitativos (2008, [87], [88]) mostraron que las estrellas se deforman antes de fusionarse y que la física de plasmas es fundamental para la formación de GRBs durante la coalescencia.

Resalta el trabajo de Bruno Giacomazzo et al., (2009, [89]), porque modelaron las ondas gravitatorias durante las tres fases de emisión: inspiral, fusión y ringdown. Supusieron que las estrellas eran fluidos ideales politrópicos en órbitas cuasi-circulares, con campos de velocidades irrotacionales y una métrica conformalmente plana (estas tres suposiciones concuerdan con las nuestras). Ante la falta de soluciones autoconsistentes para binarias magnetizadas, añadieron a posteriori un campo magnético poloidal confinado al interior de cada estrella. Luego, resolvieron las ecuaciones relativistas en la aproximación magnetohidrodinámica considerando binarias con campos hasta $B \approx 10^{17}$ G. Concluyeron que los campos magnéticos afectan principalmente después de la fusión, debido a la inestabilidad Kelvin-Helmholtz y que, en la fase inspiral, los campos magnéticos reducen la deformación estelar si son $\sim 10^{17}$ G. Claramente, estos resultados sobrepasan lo realizado en esta tesis puesto que no consideramos la dinámica de la materia dentro de la estrella, pero es notable que algunas de sus hipótesis, sean las mismas que las nuestras (magnetohidrodinámica, fondo plano, órbitas cuasi-circulares, velocidades irrotacionales).

En el mismo trabajo, cuantificaron la influencia de los campos magnéticos, estimando el traslape (overlap), \mathcal{O} entre dos señales, h_{B1} y h_{B2} ; así, obtuvieron que si $B \lesssim 10^{14}$ G, entonces $\mathcal{O} \lesssim 0.999$; en cambio, si $B \simeq 10^{17}$ G, entonces $\mathcal{O} \lesssim 0.76$. Sabiendo que los detectores tienen una sensibilidad de $\mathcal{O} \lesssim 0.995$, y que las estrellas de neutrones al momento de su fusión presentan $\sim 10^8 - 10^{10}$ G, concluyen que es muy improbable que los detectores actuales puedan diferenciar la presencia de campos magnéticos durante la fase inspiral. Estos últimos resultados no podemos compararlos con los nuestros porque no hicimos el análisis de traslape. Pero, concordamos en que $B \sim 10^{14}$ G el efecto no es distinguible, al menos cualitativamente; pero, sí es distinguible cuando $B \sim 10^{17}$ G. De manera que, este trabajo no se contradice con nuestros resultados.

Otros trabajos han desarrollado métodos semianalíticos centrados en la fase inspiral, principalmente basados en el formalismo postnewtoniano y la aproximación cuadrupolar. Los que consideran la naturaleza electromagnética de las fuentes, la introducen como correcciones a segundo orden o mayor (1996, [69]).

Y, aunque el modelo del dipolo magnético se planteó desde hace décadas, no hay muchos trabajos que lo hayan relacionado con la emisión de ondas gravitatorias en fase inspiral. Para cerrar esta última sección, a continuación, mencionaremos dos de los que sí.

Kunihito Ioka et al. publicaron un artículo (2000, [90]) con un modelo muy similar al nuestro porque también describen dos estrellas de neutrones como dipolos magnéticos perfectos en órbitas circulares con la aproximación cuadrupolar. Además, utilizan las mismas relaciones para la fuerza gravitatoria $F_{grav} \sim M_1 M_2 / r^2$ y magnética $F_{mag} \sim m_1 m_2 / r^4$. En su primera sección, también deducen las ecuaciones de movimiento a partir de la misma forma lagrangiana pero con otro sistema de unidades, notación y sin analizar las órbitas.

Luego, por simplicidad suponen que los momentos magnéticos están alineados paralelamente con el eje orbital del sistema binario para encontrar las frecuencias de las ondas gravitatorias, f , y su número de ciclos, $N \equiv \int (f/f) df$. De este modo, concluyen que los efectos magnéticos serían insignificantes a menos que tuvieran campos mayores a $\sim 10^{16}$ G.; sólo con $B \sim 10^{17} - 10^{18}$ G, los campos magnéticos podrían cambiar más de un ciclo en N . Más aún, también analizan la contraparte electromagnética, y argumentan, que aunque el efecto magnético sea insignificante en la señales gravitatorias, juega un rol central en la emisión de ondas electromagnéticas de baja frecuencia ($\sim 10^3$ Hz), que podrían los precursores de la emisión de rayos X ó GRBs.

El último artículo a discutir, pertenece a un investigador mexicano (2017, [91]), quien no analiza un sistema binario, sino un dipolo magnético rotante, que también es una fuente de ondas gravitatorias a causa de la rotación. En primer lugar, construye el segundo momento de masa, I^{ij} , desde un sistema coordinado cuyo eje Z coincide con el eje de rotación del dipolo. Posteriormente, con la aproximación cuadrupolar construye h_+ , h_\times y L , que dependen explícitamente del momento magnético, m . Concluye que un pulsar con 10^{12} G, el efecto magnético sería insignificante, pero a 10^{14} G, podría causar correcciones significativas en las ondas gravitatorias y, para concluir esto, utiliza la misma relación entre m y B que usamos en este trabajo ($m = BR^3$).

En resumen, existen pocos pero importantes trabajos que buscan cuantificar el efecto de los campos magnéticos sobre las señales gravitatorias. Los trabajos revisados coinciden, al igual que el nuestro, en que la interacción magnética entre dos estrellas de neutrones típicas ($B \lesssim 10^{12}$ G) es despreciable sobre la forma de la señal gravitatoria, al menos en la fase inspiral. Y, aunque las observaciones astrofísicas tampoco son muy alentadoras sobre la probabilidad de encontrar alguna binaria de estrellas de neutrones con campos magnéticos ultrafuertes ($B \lesssim 10^{16}$ G), improbable no es imposible. Los trabajos previos nos sugieren próximos cálculos a realizar (cómo el traslape, \mathcal{O} , ó, el número de ciclos, N) para cuantificar sí el efecto magnético sería distinguible con referencia a los actuales detectores.

Capítulo 6

CONCLUSIONES

En el último siglo, las capacidades tecnológicas y computacionales para observar el Universo a través del espectro electromagnético, han revelado la existencia de objetos compactos dentro de nuestra galaxia, algunos con campos magnéticos muy intensos respecto a las estrellas en secuencia principal ($B \approx 0 - 100$ G). Entre ellos, resaltan las estrellas de neutrones con campos $B \sim 10^{12}$ G, y hasta $B \sim 10^{16}$ G en los magnetares. También, a partir de 2015 ya es posible detectar ondas gravitatorias de sistemas binarios compactos segundos antes de fusionarse. Una de las fuentes ya confirmadas, son las binarias de estrellas de neutrones.

Bajo este contexto astrofísico -descrito en el primer capítulo-, motivamos la necesidad de considerar los efectos magnéticos en la dinámica de las binarias compactas y en su emisión de ondas gravitatorias. En el afán de construir desde primeros principios, un modelo simplificado de dos objetos magnetizados, los capítulos 2 y 3 estuvieron destinados a revisar los fundamentos teóricos necesarios.

En el capítulo 2, repasamos dinámica newtoniana, el problema de dos cuerpos en el formalismo lagrangiano, la ley de gravitación universal, electrodinámica para estrellas de neutrones y las expresiones de fuerza y energía de los dipolos magnéticos. En este capítulo reconocimos que los cuerpos interactuarían a través de sus potenciales gravitatorio y magnético. En el capítulo 3, sintetizamos la teoría de relatividad general, la linearización de las ecuaciones de campo, la descripción de fuentes débiles de radiación, la aproximación cuadrupolar y su aplicación sobre sistemas binarios bajo un potencial gravitatorio en órbitas circulares.

Con estas herramientas, en el capítulo 4 planteamos la descripción analítica de un sistema binario de objetos magnetizados. Consideramos dos objetos ($i = 1, 2$) caracterizados por sus masas (M_i), radios (R_i) y momentos magnéticos (\mathbf{m}_i), desde un marco de referencia con origen en el centro de masa del sistema. Expresamos las ecuaciones en términos del vector posición relativa, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, donde \mathbf{r}_i es la posición del i -cuerpo.

Encontramos la condición para que la energía potencial magnética estuviese asociada a una fuerza central: que las magnitudes de los momentos magnéticos ($m_i = |\mathbf{m}_i|$) y los ángulos

α_i , formados entre \mathbf{r} y \mathbf{m}_i ($\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}_i = |\mathbf{r}|m_i \cos \alpha_i$) fuesen constantes. Entonces, la energía potencial almacenada en los campos magnéticos, U_m , depende directamente del producto de sus momentos magnéticos e inversamente del cubo de la distancia entre los cuerpos y, puede ser positiva o negativa, dependiendo de la combinación de ángulos. La energía potencial gravitatoria, U_g , siempre negativa, depende del producto de las masas e inversamente de la distancia que los separa. De modo que, caracterizamos el sistema por su energía potencial, $U = U_g + U_m$.

Bajo estas suposiciones, resolvimos el problema newtoniano de dos cuerpos y, obtuvimos que el potencial magnético causa que los objetos describan rosetas, en vez de elipses keplerianas; que si la fuerza magnética es atractiva, la fuerza neta entre los cuerpos es mayor, el sistema está aún más ligado que en el caso kepleriano, por lo que las velocidades angulares y la frecuencia orbital son mayores; y, lo contrario sucede si la fuerza magnética es repulsiva pues como la fuerza neta es de menor magnitud, la frecuencia orbital es menor y el periodo mayor, respecto al caso kepleriano.

No obstante, el enfoque newtoniano supone que la energía mecánica total se conserva todo el tiempo, lo que no permite la evolución del sistema binario hacia la coalescencia, ni concuerda con la observación de que algunas binarias compactas disminuyen su periodo orbital a causa de la continua emisión de ondas gravitatorias. Por consiguiente, recurrimos a la aproximación cuadrupolar que es válida para fuentes lejanas de campo débil y velocidades no relativistas. Estas condiciones se rompen segundos ante de la fusión de los objetos, por lo que la aproximación cuadrupolar sólo es válida durante la fase de *espiraleo* ó inspiral.

Entonces, mantuvimos las suposiciones de nuestro modelo, añadimos las de la aproximación cuadrupolar, nos restringimos a órbitas circulares y, calculamos las ecuaciones para la frecuencia de las ondas gravitatorias, f_{og} , sus polarizaciones h_+ , h_\times y la luminosidad gravitatoria, L . Comprobamos que al eliminar la interacción magnética, todas las expresiones se reducen correctamente al conocido caso kepleriano. Obtuvimos que la interacción magnética atractiva incrementa la velocidad orbital del sistema, por lo que la distancia relativa entre los cuerpos disminuye más rápido que en el caso kepleriano. En cambio, la interacción repulsiva ralentiza la fase inspiral porque los cuerpos alcanzan más lentamente velocidades relativas. Incluso, encontramos casos extremos -teóricos- donde el sistema podría no fusionarse.

En el capítulo 5, aplicamos estos resultados sobre dos sistemas físicos para poder hacer especulaciones numéricas sobre las magnitudes de los campos magnéticos necesarias para percibir los efectos arriba descritos. Elegimos el primer pulsar binario descubierto, PSR 1913+16, y la progenitora de las señales GW170817 y GRB170817A. En el primer caso, dividimos su análisis en tres regimenes de estudio: suficientemente separados, tal que sólo interaccionan por el potencial gravitatorio; a $30 r_s$, con campos magnéticos entre $0 - 3.501 \times 10^{17}$ G; y, finalmente, en fase inspiral con órbitas circulares a $7 r_s$ de separación. En el segundo caso, únicamente resolvimos su fase inspiral con órbitas circulares, con campos entre $10^{12} - 10^{18}$ G. Concluimos que, si sus campos magnéticos fueran $B \sim 10^{12}$ G, el efecto sería indistinguible; de hecho, notamos diferencias hasta considerar $B \lesssim 10^{17}$ G.

Al revisar otros trabajos relacionados al nuestro, encontramos resultados similares, pero también aprendimos que no es suficiente distinguir cualitativamente el efecto magnético, sino cuantificarlo, por ejemplo mediante la estimación del traslape, \mathcal{O} , de dos señales con campos

magnéticos distintos. Así, también podríamos hacer afirmaciones sobre la capacidad de LIGO y los detectores actuales de distinguir este y otros efectos sobre las ondas gravitatorias detectadas.

Por último, reconocemos la utilidad del método científico para describir algo tan sutil como las mismas oscilaciones del espaciotiempo y, algo tan intenso, como el campo magnético de las estrellas de neutrones. No queda más que imaginar, en algún lugar en esta u otra galaxia, dos sorprendentes estrellas de neutrones magnetizadas danzando juntas, dejando al tiempo ser, hasta la fusión y transformación.

Capítulo 7

ANEXO

7.1. Sistema de unidades

En esta tesis se trabaja en unidades del Sistema CGS-gaussiano. La distancia se mide en centímetros, la masa en gramos y el tiempo en segundos. Éstas son las únicas unidades fundamentales. A partir de ellas se construyen las unidades de las demás cantidades físicas. Las más relevantes son,

Fuerza	$1 \text{ dina} = 1 \text{ g cm s}^{-2}$
Energía	$1 \text{ ergio} = 1 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-2}$
Momento angular	$1 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$
Luminosidad	$1 \text{ ergio/s} = 1 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1}$
Carga eléctrica	$1 \text{ franklin} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-2}$
Intensidad de campo magnético	$1 \text{ Gauss} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{-1/2} \text{ s}^{-1}$
Momento dipolar magnético	$1 \text{ emu} = \text{erg/G} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{5/2} \text{ s}^{-1}$.

Las constantes físicas que se utilizan son,

$$\begin{aligned}c &= 2.997925 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} \\G &= 6.674 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2} \\M_{\odot} &= 1.99 \times 10^{33} \text{ g} \\R_{\odot} &= 6.955 \times 10^{10} \text{ cm} \\r_s &= \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 295,547.81 \text{ cm.}\end{aligned}$$

7.2. Adimensionalización y unidades patrón

Para resolver las ecuaciones dinámicas numéricamente, es conveniente trabajar con unidades adimensionales. Para ello, expresamos las variables y parámetros del sistema como múltiplos de constantes características del sistema, denotadas con un índice 0. Las cantidades fundamentales serían,

$$\begin{array}{lll} \text{masa} & M = M_0 \hat{M} & [M_0] = g \\ \text{distancia} & r = r_0 R & [r_0] = cm \\ \text{tiempo} & t = t_0 \hat{t} & [t_0] = s \end{array}$$

Como estamos interesad@s en describir sistemas físicos de masas estelares, elegimos la masa patrón igual a una masa solar, M_\odot y la distancia patrón igual al radio de Schwarzschild de una masa solar,

$$\begin{aligned} M_0 &= 1 M_\odot = 1.99 \times 10^{33} g \\ r_0 &= \frac{2GM_\odot}{c^2} = 2.95547 \times 10^5 cm \end{aligned} \quad (7.1)$$

El tiempo patrón lo definimos en términos de la velocidad patrón, elegida como la velocidad de la luz, $v_0 = c$. Entonces, el tiempo patrón es

$$t_0 = r_0/v_0 = \frac{2GM_\odot}{c^3}.$$

Estas definiciones bastan para expresar la energía potencial gravitatoria:

$$U_g = -\frac{G\mu M}{r} = -\frac{GM_\odot^2}{r_{s,\odot}} \frac{\hat{\mu}\hat{M}}{\hat{r}} = \frac{-M_\odot c^2}{2} \frac{\hat{\mu}\hat{M}}{\hat{r}}$$

O equivalentemente,

$$U_g = -U_0 \left(\frac{\mathcal{M}}{M_\odot} \right) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{r_{s,\odot}}{r} \right) \quad (7.2)$$

donde hemos definido

$$U_0 \equiv \frac{M_\odot c^2}{2} = 8.9426 \times 10^{53} erg. \quad (7.3)$$

como unidad patrón para la energía. Queremos que los demás términos del lagrangiano también se expresen en términos de U_0 . Veamos como hacerlo con la energía potencial magnética. La cantidad magnética relevante es el momento magnético, \mathbf{m} , cuyas unidades son en CGS-Gauss es emu , tal que $1 emu = \frac{erg}{G}$:

$$\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{m}}$$

m_0 será elegido de forma conveniente. Partimos del potencial y lo reescribimos en unidades patrón:

$$U_m = \frac{|\mathbf{m}_1||\mathbf{m}_2|}{4\pi} \frac{(1 - 3 \cos \alpha)}{r^3} = \frac{km_0^2}{4\pi r_{s,\odot}^3} \frac{|\hat{\mathbf{m}}_1||\hat{\mathbf{m}}_2|}{\hat{r}^3},$$

con $k = 1 - 3 \cos \alpha$. Ahora bien, para que,

$$U_0 = \frac{M_\odot c^2}{2} = \frac{km_0^2}{4\pi r_{s,\odot}^3} \rightarrow m_0^2 = \frac{2\pi c^2 M_\odot r_{s,\odot}^3}{k}$$

sustituyendo $r_{s,\odot}$ encontramos que:

$$m_0 = \left(\frac{16\pi G^3 M_\odot^4}{c^4} \right)^{1/2} = 5.386 \times 10^{35} \text{ emu} \quad (7.4)$$

De esta manera obtenemos:

$$U_m = U_0 \left(\frac{|\mathbf{m}_1|}{m_0} \right) \left(\frac{|\mathbf{m}_2|}{m_0} \right) \left(\frac{r_{s,\odot}}{r} \right)^3. \quad (7.5)$$

Sigue ahora el término asociado al momento angular, al que llamaremos $E_l := \frac{l^2}{2\mathcal{M}r^2}$. Falta definir l en términos de las unidades patrón. Comencemos detonando,

$$l = l_0 \hat{l},$$

donde \hat{l} es adimensional y, en CGS, $[l_0] = \frac{gcm^2}{s}$. Entonces,

$$E_l = \frac{l^2}{2\mathcal{M}r^2} = \frac{l_0^2}{2M_\odot r_{s,\odot}^2} \frac{\hat{l}^2}{\hat{\mathcal{M}}\hat{r}^2}$$

y de la misma manera que en el caso anterior, hacemos que:

$$U_0 = \frac{M_\odot c^2}{2} = \frac{l_0^2}{2M_\odot r_{s,\odot}^2} \rightarrow l_0 = cM_\odot r_{s,\odot}$$

Sustituyendo $r_{s,\odot}$:

$$l_0 = \frac{2GM_\odot^2}{c} = 1.7632 \times 10^{35} \quad (7.6)$$

Ahora si podemos expresar:

$$\frac{E_l}{U_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 \left(\frac{r_{s,\odot}}{r}\right)^2. \quad (7.7)$$

Finalmente trabajemos con el término cinético, E_c . Requerimos adimensionalizar la velocidad y para ello la expresaremos en términos de la velocidad de la luz:

$$v = \frac{dr}{dt} = c \frac{r_{s,\odot}}{t_0} \frac{d\hat{r}}{d\hat{t}} \rightarrow t_0 = \frac{r_{s,\odot}}{c}$$

Notemos que esto nos define la unidad patrón para el tiempo. Usando esto:

$$E_c = \frac{\mathcal{M}\dot{r}^2}{2} = \frac{M_\odot c^2}{2} \hat{r}^2$$

Notemos que en este caso U_0 surge naturalmente. Así pues:

$$E_c = U_0 \left(\frac{\mathcal{M}}{M_\odot}\right) \left(\frac{\hat{v}_r}{c}\right)^2, \quad (7.8)$$

donde $v_r = \dot{r}$.

Lagrangiano en Unidades Patrón En términos de las variables adimensionales:

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{r}) = \hat{\mu}\hat{r} + \frac{\hat{l}^2}{\hat{\mu}\hat{r}^2} + \frac{\hat{\mu}\hat{M}}{\hat{r}^2} - \frac{k\hat{m}_1\hat{m}_2}{\hat{r}^2} \quad (7.9)$$

Y en síntesis, para recuperar las unidades y dimensiones, basta con multiplicar por la constante patrón correspondiente:

$$\begin{aligned} M_\odot &= 1.99 \times 10^{33} \text{ g} \\ r_0 &= \frac{2GM_\odot}{c^2} = 295,457.8 \text{ cm} \\ U_0 &= \frac{M_\odot c^2}{2} = 8.9426 \times 10^{53} \text{ erg} \\ t_0 &= \frac{2GM_\odot}{c^3} = 9.85 \times 10^{-6} \text{ s} \\ l_0 &= \frac{2GM_\odot^2}{c} = 1.7632 \times 10^{49} \\ m_0 &= \frac{4}{c^2} \sqrt{\pi G^3 M_\odot^4} = 5.3861 \times 10^{35} \text{ emu} \end{aligned} \quad (7.10)$$

En esta tesis se resolvieron las ecuaciones newtonianas en unidades patrón, posteriormente se recuperaron unidades en todas las variables, excepto la distancia. No obstante, después se volvieron a resolver con unidades cgs-gaussianas, menos la distancia, como se muestra en los códigos siguientes.

7.3. Cálculo de la ecuación dE/dt

A continuación se muestran los cálculos realizados con la biblioteca Sympy de Python. Sympy continúa en desarrollo y ambiciona ser un sistema de álgebra computacional (CAS).

```

import sympy
from sympy import *
sympy.init_printing(use_latex='mathjax')

# Mariana Lira, 2019
# La ecuacion a resolver es  $dE/dt = -L$ .

# Se definen los simbolos
ms, G, c, M, mu, beta, rs = sympy.symbols('ms_G_c_M_mu_beta_rs')
t, R, theta, mega, vv, l = sympy.symbols('t_R_theta_omega_vv_l')
e, theta, theta1 = sympy.symbols('e_theta_theta1')

# Y las funciones
V = sympy.Function('V') # potencial efectivo
U = sympy.Function('U') # energia potencial
dUdR = sympy.Function('dUdR') #dU/dR
dVdR = sympy.Function('dVdR') #dV/dR
omega2 = sympy.Function('omega2') #Omega
T = sympy.Function('T') # energia cinetica
E = sympy.Function('E') # energia total
v = sympy.Function('v') # velocidad
dEdt = sympy.Function('dEdt') # dE/dt
domegadt = sympy.Function('domegadt') #dOmega/dt
Ixx = sympy.Function('Ixx') # componente tensor cuadrupolar
Ixy = sympy.Function('Ixy') # Ixy
Iyy = sympy.Function('Iyy') # Iyy
d2Ixx = sympy.Function('d2Ixx') # segundas derivadas
d2Ixy = sympy.Function('d2Ixy')
d2Iyy = sympy.Function('d2Iyy')
d3Ixx = sympy.Function('d3Ixx') # terceras derivadas
d3Ixy = sympy.Function('d3Ixy')
d3Iyy = sympy.Function('d3Iyy')
P = sympy.Function('P') # periodo orbital
L = sympy.Function('L') # luminosidad
f1 = sympy.Function('f1') # func auxiliar
f2 = sympy.Function('f2')
Eq_gen = sympy.Function('Eq_gen') # para la ec. dR/dt
tcoal = sympy.Symbol('tcoal') # tiempo coalescencia
d = sympy.Symbol('d') # distancia
hmas = sympy.Function('hmas') #  $h_+$ 
heruz = sympy.Function('heruz') #  $h_{\times}$ 

```

```

La = sympy.Function('La') # lum, caso circular
hmas_a = sympy.Function('hmas_a') # h_+ circ
dEdtsim = sympy.Function('dEdtsim') #dE/dt beta=0
Lsim = sympy.Function('Lsim') # L, beta = 0
Eq_sim = Function('Eq_sim')

# Se especifican las relaciones
U = -G*M*mu/rs*(1-beta/R(t)**2)/R(t)
V = 1*1/2/mu/rs/rs/R(t)/R(t) + U
dUdR = simplify(U.diff(R(t)))
dVdR = simplify(V.diff(R(t)))
omega = simplify(sqrt(dUdR/mu/rs/rs/R(t)))
T = mu*rs*omega*omega*rs*R(t)*R(t)/2
E = T + U
dEdt = E.diff(t)
domegadt = omega.diff(t)
P = 2*pi/omega
Ixx = mu*rs*rs*R(t)*R(t)/2*(1+cos(2*theta(t)))
Ixy = mu*rs*rs*R(t)*R(t)/2*(sin(2*theta(t)))
Iyy = mu*rs*rs*R(t)*R(t)/2*(1-cos(2*theta(t)))
d3Ixx = ((Ixx.diff(t)).diff(t)).diff(t)
d3Ixy = ((Ixy.diff(t)).diff(t)).diff(t)
d3Iyy = ((Iyy.diff(t)).diff(t)).diff(t)
L = 2*G/15/c**5*(d3Ixx*d3Ixx + d3Iyy*d3Iyy
    + 3*d3Ixy*d3Ixy - d3Ixx*d3Iyy)

# strain
d2Ixx = (Ixx.diff(t)).diff(t)
d2Ixy = (Ixy.diff(t)).diff(t)
d2Iyy = (Iyy.diff(t)).diff(t)

hmas = G/d/c**4*(d2Ixx-d2Iyy)
heruz = 2*G/d/c**4*d2Ixy

#####
## CASO CIRCULAR ##
#####

La = L.subs([(R(t).diff(t).diff(t).diff(t),0),
    (R(t).diff(t).diff(t),0), (R(t).diff(t),0),
    (theta(t).diff(t).diff(t).diff(t),0),
    (theta(t).diff(t).diff(t),0),(theta(t).diff(t),omega)])])

# integramos
Lb = expand(integrate(La/2/pi, (theta(t), 0, 2*pi)))

```

```

# simplificamos para encontrar la ecuacion R(t),
f1 = simplify(dEdt*rs*rs*2*R(t)**4/G/M/mu/(3*beta+R(t)**2))
f2 = factor(Lb*rs*rs*2*R(t)**4/G/M/mu
            /(3*beta+R(t)**2)).subs(rs,2*G*M/c/c)
Eq_gen = Eq((f1+f2))

hmas_a = hmas.subs([(R(t).diff(t).diff(t),0),(R(t).diff(t),0),
                  (theta(t).diff(t).diff(t),0)])
hmas_a.subs(theta(t).diff(t),omega) # ec 4.47

cruz_a = sympy.Function('hmas_a')
hcruz_a = hcruz.subs([(R(t).diff(t).diff(t),0),(R(t).diff(t),0),
                    (theta(t).diff(t).diff(t),0)])
hcruz_a.subs(theta(t).diff(t),omega) # ec. 4.48

#####
##      beta = 0      ##
#####

dEdtsim = dEdt.subs(beta,0)
Lsim = La.subs(beta,0)
Eq_sim = Eq(simplify(dEdtsim+Lsim))
expand((1-3*beta/R/R)**3)

```

7.4. Códigos

Los códigos desarrollados fueron escritos en Python.

Para la sección 4.1

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Mariana Lira, 2020

# Analisis de k=k(\alpha_1, \alpha_2) para sec. 4.1

alpha1 = np.arange(0, 2*np.pi, 0.01) # radianes
alpha2 = np.arange(0, 2*np.pi, 0.01)
alpha1, alpha2 = np.meshgrid(alpha1, alpha2)

```

```

k = 2*np.cos(alpha1)*np.cos(alpha2)-np.sin(alpha1)*np.sin(alpha2)

# para graficar en 3d
fig = plt.figure(figsize=(5,3),dpi=150)
ax = Axes3D(fig)
ax.plot_surface(alpha1, alpha2, k, rstride=1, cstride=1,
                cmap=cm.viridis)
ax.set_xlabel(r'\alpha_1\$')
ax.set_ylabel(r'\alpha_2\$')
ax.set_zlabel('k')
plt.show()

# con k = 0, la relacion entre alpha2 y alpha1 es univoca
alpha1 = np.arange(0, 2*np.pi, 0.05) # radianes
alpha1g = alpha1*180./np.pi
alpha2_k0 = np.arctan(2./np.tan(alpha1))
alpha2_k0_degree = alpha2_k0*180./np.pi

# k para tres casos: paralelos, antiparalelos y perpendiculares
alpha1 = np.arange(0, 2*np.pi, 0.05) # radianes
alpha1g = alpha1*180./np.pi

k_par = 3.*np.cos(alpha1)**2-1.
k_antpar = np.cos(alpha1)**1 + 1
k_per = -3.*np.cos(alpha1)*np.sin(alpha1)

```

Para la sección 4.2

```

# Mariana Lira, 2019
# Problema de dos cuerpos en el regimen conservativo
# con beta, para la sec. 4.2

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math as math
import scipy as sci
from numpy import linspace
from scipy import optimize
from scipy.integrate import odeint
import scipy.integrate as it

pi = np.pi
G = 6.674E-8 # cm3g-1s-2
c = 2.997925E10 # cms-1
ms = 1.99e33 # gramos masa solar
rs = 2.*G*ms/c # radio de schwarzschild

```

```

def lc(beta, rc):
    return np.sqrt(G*M*mu*mu*rs*rc*(1.-3.*beta/rc/rc))

def ec(beta, rc, l):
    return l**2/mu/rs/rs/rc/rc/2.-G*M*mu/rs/rc*(1.-beta/rc/rc)

def Veff(R, beta, l):
    return l*l/mu/rs/rs/R/R/2.-G*M*mu/rs/R*(1.-beta/R/R)

def f(R, beta, l, e):
    return 2.*(e - Veff(R, beta, l))/mu

def dRdt(R, beta, l, e):
    return -np.sqrt(f(R, beta, l, e))/rs

def dRdt2(R, t, l, beta):
    ra, rb=R[0], R[1]
    dra = rb
    drb = -G*M/rs/rs/rs/ra/ra*(1.-3.*beta/ra/ra)
    +l*l/mu/mu/rs**4/ra/ra/ra
    return [dra, drb]

def d2u_dphi(u, phii, l, beta):      # orbitas
    ua, ub = u[0], u[1]
    dua = ub
    dub = -ua + G*M*rs/l/l*(1.-3.*beta*ua*ua)
    return [dua, dub]

def E(r, vr, l, beta):
    return mu*rs*rs/2.*(vr*vr) + l*l/2./mu/rs/rs/r/r -
    G*M*mu/rs/r*(1.-beta/r/r)

M1, M2 = 1.43*ms, 1.4*ms
M, mu = M1+M2, M1*M2/(M1+M2)
beta0 = (-30, -2., 0.0, 2., 30)
rc=30
r0=rc
ea = -2.5e52

lmax = [lc(beta0[i], r0) for i in range(len(beta0))]
ecmin = [ec(beta0[i], r0, lmax[i]) for i in range(len(beta0))]
r1 = np.arange(10, 300, 0.01)
Veff1 = [[Veff(r1[j], beta0[i], lmax[i]) for j in range(len(r1))]
    for i in range(len(beta0))]
rmin1=[sci.optimize.bisect(f, 20, 25, args=(beta0[i], lmax[i], ea))

```

```

                                for i in range(len(beta0))]
rmax1=[sci.optimize.bisect(f, 45, 55, args=(beta0[i],lmax[i],ea))
                                for i in range(len(beta0))]

alpha = np.linspace(0,2*pi,100)
xmin1 = [rmin1[i]*np.cos(alpha) for i in range(len(rmin1))]
ymin1 = [rmin1[i]*np.sin(alpha) for i in range(len(rmin1))]
xmax1 = [rmax1[i]*np.cos(alpha) for i in range(len(rmin1))]
ymax1 = [rmax1[i]*np.sin(alpha) for i in range(len(rmin1))]
xc = r0*np.cos(alpha)
yc = r0*np.sin(alpha)

dr0 = [[rmin1[i]+1.,dRdt(rmin1[i]+.1,beta0[i],lmax[i],ea)]
                                for i in range(len(beta0))]

t1 = np.linspace(0, .05, 1000)

rdet10 = odeint(dRdt2,dr0[0],t1,args=(lmax[0],beta0[0]))
rint0 = rdet10[:,0]
rdet11 = odeint(dRdt2,dr0[1],t1,args=(lmax[1],beta0[1]))
rint1 = rdet11[:,0]
rdet12 = odeint(dRdt2,dr0[2],t1,args=(lmax[2],beta0[2]))
rint2 = rdet12[:,0]
rdet13 = odeint(dRdt2,dr0[3],t1,args=(lmax[3],beta0[3]))
rint3 = rdet13[:,0]
rdet14 = odeint(dRdt2,dr0[4],t1,args=(lmax[4],beta0[4]))
rint4 = rdet14[:,0]

dphidt0 = [lmax[0]/mu/rs/rs/rint0[i]/rint0[i]
                                for i in range(len(rint0))]
phi_int0 = it.cumtrapz(dphidt0,t1,initial=0)

dphidt1 = [lmax[1]/mu/rs/rs/rint1[i]/rint1[i]
                                for i in range(len(rint0))]
phi_int1 = it.cumtrapz(dphidt1,t1,initial=0)

dphidt2 = [lmax[2]/mu/rs/rs/rint2[i]/rint2[i]
                                for i in range(len(rint0))]
phi_int2 = it.cumtrapz(dphidt2,t1,initial=0)

dphidt3 = [lmax[3]/mu/rs/rs/rint3[i]/rint3[i]
                                for i in range(len(rint0))]
phi_int3 = it.cumtrapz(dphidt3,t1,initial=0)

dphidt4 = [lmax[4]/mu/rs/rs/rint4[i]/rint4[i]
                                for i in range(len(rint0))]
phi_int4 = it.cumtrapz(dphidt4,t1,initial=0)

```

```

rdot0 = rdet10[:,1]
rdot1 = rdet11[:,1]
rdot2 = rdet12[:,1]
rdot3 = rdet13[:,1]
rdot4 = rdet14[:,1]

phidot0 = dphidt0*rint0
phidot1 = dphidt1*rint1
phidot2 = dphidt2*rint2
phidot3 = dphidt3*rint3
phidot4 = dphidt4*rint4

vint0 = rdet10[:,1]*rs/c
vint1 = rdet11[:,1]*rs/c
vint2 = rdet12[:,1]*rs/c
vint3 = rdet13[:,1]*rs/c
vint4 = rdet14[:,1]*rs/c

vang0 = dphidt0*rint0*rs/c
vang1 = dphidt1*rint1*rs/c
vang2 = dphidt2*rint2*rs/c
vang3 = dphidt3*rint3*rs/c
vang4 = dphidt4*rint4*rs/c

phi1 = np.linspace(0,6*pi,1000)
du0 = [[1./(rmin1[i]+.1),-mu*rs*rs/lmax[i]*
        dRdt(rmin1[i]+.1,beta0[i],lmax[i],ea)]
        for i in range(len(beta0))]
udephi0 = odeint(d2u_dphi,du0[0],phi1,args=(lmax[0],beta0[0]))
u = udephi0[:,0]
r_int = 1/u
x_int = r_int*np.cos(phi1)
y_int = r_int*np.sin(phi1)

phi0 = [lmax[i]/mu/rs/rs/r0/r0 for i in range(len(lmax))]
P0 = [2.*pi/phi0[i] for i in range(len(phi0))]

t = np.linspace(0, 4000, len(dRdt11[0]))
dRdt11=[dRdt(R11,beta0[i],lmax[i],ea) for i in range(len(beta0))]

import scipy.integrate as it

r_int = it.cumtrapz(dRdt11[0], t, initial=.1) + rmin1[0]

def drdt2(r,t,l,beta):
    R,v=r[0],r[1]

```

```

dR = v
dv = -G*M/rs/rs/rs/R/R*(1.-3.*beta/R/R)
      +1*1/mu/mu/rs**4/R/R/R
return [dR,dv]

```

```
r01=[[rmin1[i],0] for i in range(len(rmin1))]
```

```

t1 = np.arange(0,10000,1)
rdet1 = odeint(drdt2,r01[0],t1,args=(lmax[0],beta0[0]))

```

Para la sección 5.1.3

```

# Fase inspiral de un sistema binario circular
# con potencial magnetico para la sec. 5.1.3
# Mariana Lira, 2019

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math as math
import scipy as sci
from scipy.integrate import odeint

ms = 1.99e33 # gramos masa solar
G = 6.674E-8 # cm3g-1s-2
c = 2.997925E10 # cms-1 velocidad de la luz
pi = np.pi

M1, M2 = 1.4*ms, 1.4*ms # masas de las dos estrellas
M, mu = M1+M2, M1*M2/(M1+M2) # masa total y reducida
etha = mu/M
rs = 2.*G*M/c/c # rs de una masa solar
N = 32./5.
k=1.
m1, m2 = 5.e35, 4.e35 # momentos magneticos emu
beta0 = -k*m1*m2/G/mu/M/rs/rs

def tcoal(R0,beta):
    return 5*M*rs*R0**4/32./mu/c**((1.+6.*beta/R0/R0)*
                                   ((1-3.*beta/R0/R0)**(-3)))

Ri = 7.
tc2=tcoal(Ri,0.)

t1 = np.linspace(0.,.039517,23000)
t2 = np.linspace(0.,tc2-.00002,23000)
t3 = np.linspace(0.,.0435,23000)

```

```

def dRdtm(R, t):
    factor = -8.*mu*c/5./M/rs
    dR = factor/R**7*(R**2-3*beta)**3/(R*R+3*beta)
    return dR

beta=-.1
r1_num =odeint(dRdtm, Ri, t1)
beta=0.
r2_num =odeint(dRdtm, Ri, t2)
beta=.1
r3_num =odeint(dRdtm, Ri, t3)

def omega(R, beta):
    return np.sqrt(G*M/R/R/R/rs/rs/rs*(1.-3.*beta/R/R))

omega1 = [omega(r1_num[i], -.1) for i in range(len(t1))]
omega2 = [omega(r2_num[i], 0.) for i in range(len(t1))]
omega3 = [omega(r3_num[i], .1) for i in range(len(t1))]

v1 = [rs*r1_num[i]*omega1[i]/c for i in range(len(t1))]
v2 = [rs*r2_num[i]*omega2[i]/c for i in range(len(t1))]
v3 = [rs*r3_num[i]*omega3[i]/c for i in range(len(t1))]

p1 = [2.*pi/omega1[i] for i in range(len(t1))]
p2 = [2.*pi/omega2[i] for i in range(len(t1))]
p3 = [2.*pi/omega3[i] for i in range(len(t1))]

def hmas_a(t, omega, R):
    return 4*G*G*rs*rs*R*R/c*omega*omega*np.cos(2.*omega*t)

h1 = [hmas_a(t1[i], omega1[i], r1_num[i]) for i in range(len(t1))]
h2 = [hmas_a(t2[i], omega2[i], r2_num[i]) for i in range(len(t1))]
h3 = [hmas_a(t3[i], omega3[i], r3_num[i]) for i in range(len(t1))]

eh1 = [4*G*G*rs*rs*r1_num[i]**2/c*omega1[i]**2 for i in range(len(t1))]
eh2 = [4*G*G*rs*rs*r2_num[i]**2/c*omega2[i]**2 for i in range(len(t1))]
eh3 = [4*G*G*rs*rs*r3_num[i]**2/c*omega3[i]**2 for i in range(len(t1))]

```

Cambiando los parámetros iniciales y tiempos de integración, con el mismo código se resolvió 5.2.

Bibliografía

- [1] Pols O. R. Stellar structure and evolution. *Astronomical Institute Utrecht*, 2011.
- [2] Jørgen Christensen-Dalsgaard. Stellar structure and evolution. *Institut for Fysik og Astronomi, Sixth Edition*, 2008.
- [3] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. Black holes, white dwarfs, and neutron stars. *John Wiley and Sons, Inc.*, 1983.
- [4] Max Camenzind. Compact objects in astrophysics. *AA Library Springer*, 2007.
- [5] Herschel William. Catalogue of double stars. *Philosophical transactions of the Royal Society of London, Vol. 75*, 1785.
- [6] Eddington Arthur. The internal constitution of the stars. *The Observatory, Vol. 43, p. 341-358*, 1920.
- [7] R. H. Fowler. Dense matter. *MNRAS 87, 114*, 1926.
- [8] S. Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarfs. *ApJ 74, 81*, 1931.
- [9] S. O.; Koester D. et al. Kleinman, S. J.; Kepler. Sdss dr7 white dwarf catalog. *The Astrophysical Journal Supplement, Volume 204, Issue 1, article id. 5, 14 pp.*, 2013.
- [10] Rebassa-Mansergas A. Skorobogatov Solano E. Cantero C. Rodrigo C. Jiménez-Esteban F. M., Torres S. A white dwarf catalogue from gaia-dr2 and the virtual observatory. *MNRAS 480, 4505-4518*, 2018.
- [11] J. D. Landstreet J. R. P. Angel James C. Kemp, John B. Swedlund. Discovery of circularly polarized light from a white dwarf. *The Astrophysical Journal 161. p. L77-L79*, 1970.
- [12] Jordan s. et al Kepler S. O., Pelisoli I. Magnetic white dwarfs stars in the sloan digital sky survey. *Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 1-19*, 2012.
- [13] D Koester and G Chanmugam. Physics of white dwarf stars. *reports on Progress in Physics, Volume 53, Number 7*, 1969.
- [14] J. P. Luminet. Black holes: a general introduction, theory and observation. *Lecture Notes in Physics 3. Springer-Verlag*, 1998.
- [15] Schwarzschild Karl. Letter from k schwarzschild to a einstein. *The Collected Papers of Albert Einstein, vol.8a, doc.169*, 1916.

- [16] Eddington A. S. In minutes of a meeting of the royal astronomical society. *Observatory* 58, 37, 1935.
- [17] Stephen. Hawking. A brief history of time. *Bantam Books ISBN 0-553-17698-6*, 1988.
- [18] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Phys. Rev. Lett.* 11, 237., 1963.
- [19] E. Couch K. Chinnapared A. Exton A. Prakash Newman, E. T. and R. Torrence. Metric of a rotating, charged mass. *J. Math. Phys.* 6, 918., 1965.
- [20] S. M. Carroll. Spacetime and geometry. *Addison-Wsley, New York*, 2003.
- [21] a. MacDonald K. S. Thorne, R. H. Price. Black holes: the membrane paradigm. *Yale University Press*, 1986.
- [22] E. T.; Chubb T. A.; Friedman H. Bowyer, S.; Byram. Cosmic x-ray sources. *Science* 147: 394-398, 1965.
- [23] B. P. Abbott et al. GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. *Phys. Rev.*, X9:031040, 2019.
- [24] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875:L1 (17pp), 2019 April 10, 2019.
- [25] K. S. Thorne D. A. MacDonald. Black-hole electrodynamics: an absolute-space/universal-time formulation. *MNRAS* 198, 354, 1982.
- [26] Zwicky F. Baade, W. On super-novae. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Volume 20, Issue 5, pp. 254-259, 1934.
- [27] J. Chadwick. Possible existence of a neutron. *Nature* 129 (3252), 1932.
- [28] G. M. Volkoff J. R. Oppenheimer. On massive neutron cores. *Phys. Rev.* 55, 374, 1939.
- [29] R. C. Tolman. Static solution of einstein's equations for spheres of fluids. *Phys. Rev* 55, 364, 1939.
- [30] Morton D. C. Neutron stars and x-ray sources. *Nature* 201, 1308-1309, 1964.
- [31] I. S. Shklovsky. On the nature of the source of x-ray emission of sco xr-1. *Astrophysical Journal*, vol. 148, p.L1, 1967.
- [32] Bell S. Pilkington J. et al. Hewish, A. Observation of a rapidly pulsating radio source. *Nature* 217, 709-713, 1968.
- [33] T. Gold. Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources. *Nature* 218, 731, 1968.
- [34] J. E . Gunn and J.P Ostriker. Magnetic dipole radiation from pulsars. *Nature* 218, 731, 1968.

- [35] Norman K. Glendenning. Compact stars - nuclear physics, particle physics and general relativity. *Astronomy and Astrophysics Library, 2nd ed*, 2000.
- [36] F. Pacini. Energy emission from a neutron star. *Nature* 216, 567, 1967.
- [37] F. C. Michel. Theory of neutron star magnetospheres. *Chicago University Press*, 1991.
- [38] Andrei M. Beloborodov Victoria M. Kaspi. Magnetars. *ARAA, vol. 55*, 2017.
- [39] J. P. Keith et. al. E. J. Ferrer, V. de La Incera. Equation of state of a dense and magnetized fermion system. *doi:10.1113/PhysRevC.82.065802*, 2010.
- [40] A. Pérez Martínez R. González Felipe, H. J. Mosquera Cuesta and P. Rojas. Quantum instability of magnetized stellar objects. *Chinese J. Astrom. Astrophysc*, 5:399-411, 2005.
- [41] M. van der Klis W.G.H. Lewin. Compact stellar x-ray sources. *Cambridge Astrophysics Series 39*, 2006.
- [42] D. G. Ravenhall A. Akmal, C. R. Pandharipande. Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. *Phys. Rev C* 58, 1804, 1998.
- [43] P. M. Woods and C. Thomson. Soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars: magnetar candidates. *pages 547-586*, 2006.
- [44] J. E. Horvath D. Manreza Paret and A. Pérez Martínez. Anisotropic stellar structure equations for magnetized stars. *astro-ph.HE arXiv:1407.2280*, 2014.
- [45] Roche E. Essai sur la constitution et l'origine du système solaire. 1873.
- [46] Brown Edward. Stellar astrophysics. *Open astrophysics bookshelf*, 1916.
- [47] J.-P. Lasota E. Szuszkiewicz M. A. Abramowicz, B. Czerny. Slim accretion disks. *ApJ* 332, 644, 1988.
- [48] M. A. McLaughlin J. Z. Arzoumanian J. M. Weisberg D. J. Champion, D. R. Lorimer and J. H. Taylor. Psr j1829+2456: a relativistic binary pulsar. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 350, L61-L65 (2004), 2004.
- [49] Frank R. Paolini Riccardo Giacconi, Herbert Gursky and Bruno B. Rossi. Evidence for x rays from sources outside the solar system. *Phys. Rev. Lett.* 9, 439, 1962.
- [50] Friedman H. Byram E. T., Chubb T. A. Cosmic x-ray sources, galactic and extragalactic. *Science, Volume 152, Issue 3718, pp. 66-71*, 1966.
- [51] C.J. Pethick G.C. Baym, H. Bethe. Black hole binaries in compact stellar x-ray sources. *Cambridge Univ Press*, 2004.
- [52] J. Shaham M. A. Alpar, A. F. Ruderman. A new class of radio pulsars. *Nature*, 300, 728, 1982.
- [53] R. A. Hulse and J. H. Taylor. Discovery of a pulsar in a binary system. *Astrophys. J.* 195, L51, 1975.

- [54] C. Sivaram. The hulse-taylor binary pulsar psr 1913+16. *Bulletin of the Astronomical Society of India* , Vol. 23, No. 1, p. 77-83, 1994.
- [55] Schwarzschild Bertram. Hulse and taylor win nobel prize for discovering binary pulsar. *Physics Today* 46, 12, 17 doi:10.1063/1.2809120, 1993.
- [56] J. M. Weinberg and Y. Huang. Relativistic measurements from timing the binary pulsar psr b1913+16. *Astrophys. J.*, 2016.
- [57] S. Weinberg. Gravitation and cosmology. *Wiley, New York*, 1972.
- [58] M. Maggiore. Gravitational waves: Theory and experiments. *Oxford University Press*, 2007.
- [59] Virgo Collaboration B. P. Abbott et al. LIGO Scientific Collaboration. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102, 2016.
- [60] J. Aasi et al. Advanced ligo. *Class. Quant. Grav.* 32, 074001, 2015.
- [61] *Press release: The Nobel Prize in Physics 2017*, nobelprize.org, 2017.
- [62] B. P. Abbott et al. Binary black hole mergers in the first advanced ligo observing run. *Phys. Rev. X* 6, 041015, 2016.
- [63] B. P et al. LIGO Scientific collaboration Abbot. Ligo: The laser interferometer gravitational wave observatory. *Rept. Prog. Phys.* 72 076901, 2009.
- [64] B. F. Shutz and F. Ricci. Gravitational waves, sources and detectors. *Living Rev. Relativity.* 12, 2, 2009.
- [65] B. P. Abbott et al. Gw150914: First results from the search for binary black hole coalescence with advanced ligo. *Phys. Rev. D* 93, 122003, 2016.
- [66] Khlebnikov SY and Tkachev. Relic gravitational waves produced after preheating. *Phys Rev D*56: 653-504, 1997.
- [67] Bartolo N Guzzetti CM and Liguori M et. al. Gravitational waves from inflation. *Riv Nuovo Cim* 39: 399-495, 2016.
- [68] A. P. Lightman G.B. Rybicki. Radiation processes. *Wiley Interscience, New York*, 1979.
- [69] Clifford M. Will Luc Blanchet, Bala R. Iyer and Alan G. Wiseman. Gravitational wave forms from inspiralling compact binaries to second postnewtonian order. *Class. Quant. Grav.* 13, 575-584, 1996.
- [70] Andrea Taracchini Lawrence E. Kidder Abdul H. Mroué Harald P. Pfeiffer Mark A. Scheel Yi Pan, Alessandra Buonanno and Béla Szilágyi. Inspiral-merger-41 ring-down waveforms of spinning, precessing black-hole binaries in the effective-one-body formalism. *Phys. Rev. D*89, 084006, 2014.
- [71] Tanja Hinderer et al. Effects of neutron-star dynamic tides on gravitational waveforms within the effective-one-body approach. *Phys. Rev. Lett.* 116, 181101, 2016.

- [72] Andrea Taracchini Stanislav Babak and Alessandra Buonanno. Validating the effective-one-body model of spinning, precessing binary black holes against numerical relativity. *Phys. Rev. D* 95, 024010, 2017.
- [73] B. Bruggmann M. Alcubierre. Simple excision of a black hole in 3+1 numerical relativity. *Phys. Rev. D.* 62, 14011, 2001.
- [74] S. L. Shapiro T. W. Baumgarte. General relativistic magnetohydrodynamics for the numerical construction of dynamical spacetimes. *APJ* 585, 921, 2003.
- [75] Nuñez D. Degollado J. C. Perturbation theory of black holes: Generation and properties of gravitational waves. *AIP Conf. Proc.* 1473, 3 (2012); doi: 10.1063/1.4748529, 2012.
- [76] Benjamin P. Abbott et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.* 119, 161101, 2017.
- [77] INTEGRAL et. al. LIGO, Fermi GBM. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *The Astrophysical Journal Letters*, 848:L12 (59pp), 2017.
- [78] John R. Taylor. Classical mechanics. *University of Colorado*, 2005.
- [79] L. D. Landau and E.M. Lifshitz. Mechanics: Course of theoretical physics volume 1. *Pergamon Press Second Edition*, 1969.
- [80] Mike Guidry. Modern general relativity: Black holes, gravitational waves, and cosmology. *Cambridge*, 2019.
- [81] Nuñez Z. D. Degollado D. J. C. Relatividad general. *Notas para el curso de la Facultad de Ciencias, UNAM*, 2019.
- [82] Lasky D. A. Smith R. Lower M. E., Thorne E. Measuring eccentricity in binary black hole inspirals with gravitational waves. *Phys.Rev. D*98 (2018) no.8, 083028. *arXiv: 1806.05350v3*, 2018.
- [83] Bautista-Olvera B. A. Ondas gravitacionales producto de la colisión de dos agujeros negros. *Tesis de Licenciatura en Ciencias (Física) Universidad Autónoma del estado de Morelos, Instituto de Ciencias Físicas*, 2017.
- [84] The LIGO Scientific Collaboration and The Virgo Collaboration. Gw170817: Measurements of neutron star radii and equation of state. *arXiv:1805.11581*, 2018.
- [85] SciPy community. Scipy reference guide release 1.0.0. *Open Access: scipy.org*.
- [86] A. C. Hindmarsh. Odepack, a sistematized collection of ode solvers. *Scientific Computing, R. S. Stepleman, North-Holland, Amsterdam*, 1983.
- [87] Lehner L et. al. Anderson M, Hirschmann E W. Magnetized neutron star mergers and gravitational wave signals. *Phys. Rev. Lett.*, 1, 191101, 2008.
- [88] Taniguchi K. Liu Y. T. Shapiro S. L. Etienne Z. B. General relativistic simulations of magnetized binary neutron star mergers. *Phys. Rev. D.* 78, 02412, 2008.
- [89] Baiotti Luca Giacomazzo Bruno, Rezzolla Luciano. Can magnetic fields be detected

- during the inspiral of binary neutron star? *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 399, L164-L168, 2009.
- [90] Kunihiro Ioka and Keisuke Taniguchi. Gravitational waves from inspiraling compact binaries with magnetic dipole moments. *The astrophysical journal* 537;327-333, 2000.
- [91] Hacyan Sahen. Gravitational radiation from a rotating magnetic dipole. *Revista Mexicana de Física* 63 466-468, 2017.