



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN ASTROFÍSICA
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA
ASTROFÍSICA TEÓRICA

ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LA CORRELACIÓN CO-ESPACIAL DE
NEUTRINOS DE ALTAS ENERGÍAS DE *ICECUBE* Y POSIBLES FUENTES
EN RAYOS GAMMA

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS: ASTROFÍSICA

P R E S E N T A :

KIN OCÉLOTL CUAUHTLI LÓPEZ MENDOZA

TUTORES

DR. NISSIM ILLICH FRAIJA CABRERA
DR. JOSÉ A. DE DIEGO ONSURBE
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., ENERO DE 2018



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a María Asunción Quiroz Torres y Sofía Alicia Peralta Medina

Agradecimientos

Agradezco especialmente al proyecto DGAPA-PAPIIT IA102019, A mis directores de tesis Nissim Illich Fraija Cabrera y José Antonio de Diego Onsurbe, A mis compañeros del posgrado, a Mariana Juárez Gama, Sergio Aguilar Narcia y Walfred Sánchez Gabriel por ser un gran ejemplo, a mis padres por Sofía Mendoza Peralta y Artemio López Quiroz, y especialmente a Miriam López Suárez por apoyarme durante estos años.

Resumen

La colaboración *ICECUBE* en los últimos años ha reportado la evidencia de neutrinos extra-galácticos, donde las direcciones de llegada de estas partículas parecen ser isotrópicas y hasta ahora sólo un neutrino tipo «track» ha sido asociado con la ubicación de fuentes conocidas. Se ha tratado de correlacionar a los neutrinos de altas energías con muchos tipos de fuentes astrofísicas, como destellos de rayos gamma (GRBs), núcleos activos de galaxias (AGNs), materia oscura, y las conexiones cósmicas de fondo de neutrinos. En este estudio se realizó la comparación entre el catálogo HESE del observatorio *ICECUBE* y los catálogos de GRBs de los satélites *Swift* y *FERMI*, así como el catálogo de AGNs de este último. En este trabajo se estudia la correlación de los neutrinos cósmicos con las fuentes astronómicas emisoras de rayos gamma. Para lo que se usó la base de datos del catalogo HESE del Observatorio de neutrinos *ICECUBE* ubicado en el polo sur, el cual cuenta con 82 neutrinos. Estos neutrinos fueron analizados con los GRBs detectados por el *Large Area Telescope* del satélite *FERMI* y los experimentos *XRT* y *BAT* del satélite *SWIFT*, así como los *AGN* de tipo blazar detectados por *FERMI* que se encuentran en la quinta edición del catálogo *The Roma BZCAT*. Los 82 neutrinos se analizan estadísticamente por medio de la prueba de Kolmogorov-Smirnov y la prueba de Poisson para determinar si existe alguna correlación entre los eventos detectados en rayos γ y los neutrinos.

Abstract

The *ICECUBE* collaboration in recent years has reported evidence of extragalactic neutrinos, where the directions of arrival of these particles seem to be isotropic and so far no "track" neutrinos have been associated with the location of known sources. Some attempts have been made to correlate the neutrinos of these energies with many types of astrophysical sources, such as gamma-ray burst (GRBs), active galactic nuclei (AGNs), dark matter, and the cosmic neutrino background connections. In this study, a comparison was made between the HESE catalog of the *ICECUBE* observatory and the GRBs catalogs of the SWIFT and FERMI satellites, as well as the latter's AGNs catalog. In this work we study the correlation between cosmic neutrinos and gamma-ray astronomical sources. For this analysis, the HESE catalog of the *ICECUBE* neutrino observatory has been used. These neutrinos were analyzed with the GRBs detected by the large area telescope of the FERMI satellite and, the XRT and BAT experiments of the SWIFT satellite, as well as the blazar-type AGNs detected by FERMI that are in the fifth edition of the The Roma BZCAT catalog. The 82 neutrinos are analyzed statistically by means of the Kolmogorov-Smirnov test and the Poisson test to determine if there is any correlation between the detected events in γ rays and the neutrinos.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Abreviaturas	VII
1. Introducción	1
2. Neutrinos	3
2.1. Características de los Neutrinos	7
2.2. Interacciones de Neutrinos	9
2.2.1. Sección Eficaz	10
2.3. Oscilación y sabores de los neutrinos	11
2.3.1. Oscilación de neutrinos en el vacío	12
2.3.2. Oscilación de neutrinos en la materia	14
3. <i>ICECUBE</i> y la detección de neutrinos	15
3.1. Principio de detección	15
3.1.1. Probabilidad de interacción	17
3.1.2. Pérdida de energía de leptones cargados	17
3.1.3. Radiación Cherenkov	18
3.1.4. Diferentes señales	19
4. Núcleos activos de galaxias	22
4.1. Estructura	22
4.2. Clasificación y Modelo Unificado de los AGNs	24
4.3. Proceso de emisión de blazares	26
4.4. Mecanismo de producción de neutrinos	28
5. Destellos de Rayos Gamma	30
5.1. Historia	30
5.2. Emisión temprana	31
5.3. Emisión tardía	36
5.4. Mecanismos de aceleración de partículas	37

5.4.1. Aceleración de Fermi	37
5.4.2. Emisión temprana y tardía	41
5.4.3. Posibles progenitores	43
5.5. Mecanismo de producción de neutrinos	44
5.5.1. Neutrinos de altas energías	45
5.6. Restricciones del modelo	47
6. Análisis Estadístico	49
6.1. Selección de candidatos	49
6.2. Distribuciones de referencia	50
6.3. ¿Cómo buscar asociaciones?	52
6.4. Prueba de Signos	52
6.5. Prueba de Kolmogórov-Smirnov	53
7. Resultados	55
7.1. Resultados del Satélite <i>Swift</i>	55
7.2. Resultados del Satélite FERMI	58
8. Conclusiones	62
8.1. Potencia de la prueba de signo	62
8.2. Perspectivas a futuro	64
A. Catálogos de <i>ICECUBE</i>	72
B. Tablas de Resultados	75

Abreviaturas

AGN	Active Galactic Nuclei
BAT	Burst Alert Telescope
CC	Charged Current
DIS	Deep Inelastic Scattering
DM	Dark Matter
DOM	Digital Optical Modules
HEN	High Energy Neutrino
LAT	Large Area Telescope
NAE	Neutrino de Altas Energías
NC	Neutral Current
SED	Spectral Energy Distribution
SMP	Standard Model of Particles
UHECR	Ultra High Energy Cosmic Rays
XRT	X-Ray Telescope

Tabla 1: Tabla de Abreviaturas en inglés y español.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad estamos entrando en una nueva era para la detección de eventos astrofísicos gracias a la astronomía *multi-messenger*¹, la cual se basa en la detección de eventos que se obtienen de la coordinación de distintos tipos de observatorios, satélites y telescopios. Esto permite que distintos tipos de observatorios de todas las longitudes de onda se puedan coordinar para adquirir más información sobre los distintos eventos astronómicos. Aunque tradicionalmente la astronomía se ha desarrollado en la detección de fotones, este método puede traer desventajas debido a la interacción de la luz con distintos medios que pueden afectar su trayectoria. En los últimos años han surgido detectores de ondas gravitacionales como *LIGO*, observatorios de altas energías que pueden detectar partículas, tales como el observatorio *Super KAMIOKANDE* en Japón, el Telescopio de altas energías *MAGIC* en España o el observatorio *HAWC* en México. Para este trabajo nos enfocamos en el observatorio de neutrinos *ICECUBE*, que en los últimos años ha reportado la evidencia de neutrinos de altas energías (NAEs) de origen extragaláctico.

Los neutrinos son partículas fermiónicas que dada su neutralidad de carga eléctrica (como los fotones) y a su baja masa, pueden viajar por el espacio sin que su trayectoria sea perturbada, lo que permitiría que los NAEs pueden traer información de eventos astronómicos situados a distancias lejanas del orden de mega parsecs ($1Mpc = 3.086 \times 10^{19}km$). La desventaja de esto es que la interacción electrodébil de los neutrinos con núcleos sólo se puede detectar indirectamente, para ello el observatorio *ICECUBE* detecta de radiación Cherenkov generada por la interacción de los neutrinos con los núcleos atómicos del hielo y la roca del fondo antártico, esta radiación es captada por 5000 fotomultiplicadores de luz Cherenkov que permiten reconstruir las direcciones de llegada de estas partículas. Desde su finalización y puesta en marcha en 2010 hasta 2017, *ICECUBE* ha detectado 82 neutrinos de altas energías que muestran ser isotrópicos, y hasta ahora sólo un neutrino tipo «track» ha sido asociado con la ubicación de fuentes conocidas.

Estos neutrinos de altas energías (NAEs) se han tratado de correlacionar con muchos tipos de fuentes astrofísicas, tales como destellos de rayos gamma (*GRBs*), núcleos activos de galaxias (*AGNs*), explosiones de supernova (SN), materia oscura

¹*multi mensajero* de su traducción del inglés

(*DM*), y las conexiones cósmicas de fondo de neutrinos. Con la astronomía *multi-messenger* las observaciones de eventos que emitan en rayos gamma se pueden complementar con detecciones de neutrinos de altas energías debido a que cuando la energía supera los 100 TeV, el camino libre medio de los fotones disminuye debido a la interacción con los fotones del fondo cósmico de micro-ondas (Gould and Schréder, 1966), lo cual afecta las observaciones en gamma. Por otra parte, los modelos de AGNs y GRBs, muestran que a través de interacciones protón-protón en los choques de material dentro de los jets relativistas que estos generan, se pueden producir NAEs. Es por esta razón que en este estudio se realizó la comparación entre el catálogo HESE del observatorio *ICECUBE* y los catálogos de *GRBs* de los satélites *Swift* y *Fermi*, así como el catálogo de *AGNs The Roma BZCAT*; este último es una recopilación de blazares detectados por *Fermi*; Esto nos permite saber si algún neutrino tiene una mayor posibilidad de provenir de alguna de estas fuentes de emisiones en gamma, por medio de sobredensidades significativas que son calculadas estadísticamente por medio de una prueba de Kolmogorov-Smirnov y una prueba de signo, lo cual nos brindaría mas información sobre la relación que podrían tener los *GRBs* y *AGNs* con los NAEs.

Capítulo 2

Neutrinos

En este capítulo nos enfocaremos en las características de los neutrinos, comenzando por un poco de historia: cómo fueron planteados por primera vez, y cómo ha cambiado su concepto desde entonces. La oscilación de neutrinos, sus características y su clasificación dentro del modelo estándar de partículas (SMP) junto a las partículas con las que interactúan.

Al final del siglo XIX y principio del siglo XX, Ernest Rutherford realizó distintos experimentos con muestras radioactivas, estos experimentos dieron cabida al descubrimiento de los decaimientos alfa, beta y gamma. Durante la desintegración alfa, un núcleo se divide en dos partes, de las cuales una está constituida por un conjunto de cuatro partículas que equivalen a un núcleo de helio, y se le denomina “partícula alfa” y la otra parte que constituye el núcleo original sin la partícula alfa. En la desintegración beta, uno de los neutrones en un núcleo se “transforma” repentinamente en un protón debido a la emisión de un electrón causando un aumento en el número atómico de un elemento; esto debido a que un conjunto de nucleones (protones y neutrones), emiten una partícula beta, las cuales pueden ser un electrón o positrón con altas energías y velocidades. Durante la descomposición gamma, el núcleo emite radiación sin cambiar realmente su composición dado que es un tipo de radiación electromagnética; este tipo de radiación puede ser producida en elementos radiactivos, procesos subatómicos o astrofísicos. Con estos descubrimientos surgieron más preguntas, una de ellas la tuvo James Chadwick en 1914, cuando se dio cuenta de que el espectro energético de la desintegración β tenía que ser continuo, dado que los electrones eran emitidos con energías distintas durante todo el proceso. Wolfgang Pauli, en 1930, propone una partícula para compensar esta aparente pérdida de energía y momento lineal en la desintegración β de los neutrones, cuatro años después utiliza su partícula propuesta de forma más detallada para explicar que el decaimiento β sigue la ecuación

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (2.1)$$

donde $\bar{\nu}_e$ son los neutrinos que serían los encargados de incorporar las cantidades perdidas de masa y energía que se necesitan conservar durante el proceso. La propuesta de Pauli ideaba a los neutrinos como una partícula con carga neutra, de masa despreciable, con spin de $1/2$ para satisfacer el principio de exclusión y que sólo interactuara débilmente. Curiosamente Pauli propone nombrar al neutrino como neutrón,

dado que los neutrones fueron descubiertos hasta 1932 por Chadwick y llamados así como analogía del protón. Debido a esto, Enrico Fermi propuso la palabra neutrino para las partículas propuestas por Pauli, lo cual se emplea hasta nuestros días. En la conferencia de Solvay en Bruselas, en octubre de 1933, Pauli dice, hablando sobre sus partículas (d'Annecy de Physique des Particules, 2019):

"... su masa no puede ser mucho más que la masa de electrones. Para distinguirlos de los neutrones pesados, el señor Fermi ha propuesto nombrarlos "neutrinos". Es posible que la masa adecuada de neutrinos sea cero. Me parece plausible que los neutrinos tengan un spin $1/2$... No sabemos nada acerca de la interacción de los neutrinos con las otras partículas de materia y con los fotones: la hipótesis de que tienen un momento magnético me parece que no tiene fundamento.

En 1947 Bruno Pontecorvo sugirió que los procesos de captura y decaimiento tenían un mismo origen (Pontecorvo, 1947), o sea que las interacciones débiles eran universales, además propuso que era posible detectar neutrinos, si una gran cantidad de estos incidían e interactuaban a través de la desintegración β inversa con los protones de un líquido centellador. Dos años más tarde, en 1949, Wheeler y Tiommo (Tiommo and Wheeler, 1949) y a la par Lee, Rosenbluth y Yang (Lee et al., 1949) lo proponen formalmente en la idea de que las interacciones débiles son universales así que el decaimiento beta ocurre de la siguiente manera:



Mas adelante, en los años 50's, a Frederick Reines y Clyde Cowan se les ocurrió un experimento para verificar la existencia del neutrino tomando en cuenta la idea de Pontecorvo. Reines fue el primero en contemplar la idea de un experimento de neutrinos en 1951 (Reines and Cowan, 1997), pero junto a Clyde hicieron uso del reactor *Savannah River* y dieron por hecho que en los reactores nucleares se producirían flujos de neutrinos del orden de $10^{12} - 10^{13}$ neutrinos por segundo por cm^2 , muy superiores a cualquier flujo alcanzable a partir de fuentes radiactivas (hyperphysics, 2019). El experimento se propone en febrero de 1953 y en 1956 se logra detectar por primera vez un antineutrino (Reines and Cowan, 1997). Las energías de los antineutrinos de un reactor son 10 MeV. Aproximadamente $2 - 3 \times 10^{20}$ antineutrinos por segundo fueron emitidos por el reactor del río Savannah. El flujo de $\bar{\nu}_e$ en el experimento de Reines y Cowan fue de aproximadamente $10^{13} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ (Bilenky, 2013).

Este experimento consistía en utilizar un objetivo hecho de alrededor de 400 litros de una mezcla de agua y cloruro de cadmio CdCl_2 (d'Annecy de Physique des Particules, 2019). Estos antineutrinos fueron detectados a través de la observación del proceso.



Los antineutrinos se producen en un reactor en una cadena de desintegraciones β de núcleos ricos en neutrones, productos de la fisión de uranio y plutonio (Bilenky, 2013).

Años más tarde, en 1962, se descubre el neutrino muonico ν_μ por Gordon Danby y sus colaboradores mientras estudiaban el decaimiento de los piones

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + (\nu/\bar{\nu}). \quad (2.4)$$

Como consecuencia, se tuvo este nuevo tipo de neutrino. Las diferencias entre los tipos de neutrinos se explicarán más adelante, en la sección 2.1.

Cuando el tercer tipo de leptón, el tau, fue descubierto por Martin Lewis Perl y sus colegas entre 1974-1977 en el SLAC¹ National Accelerator Laboratory, en colaboración con el *Lawrence Berkeley National Laboratory* (Perl et al., 1975), se teorizó también que este lepton tuviese un neutrino asociado, el neutrino taonico ν_τ .

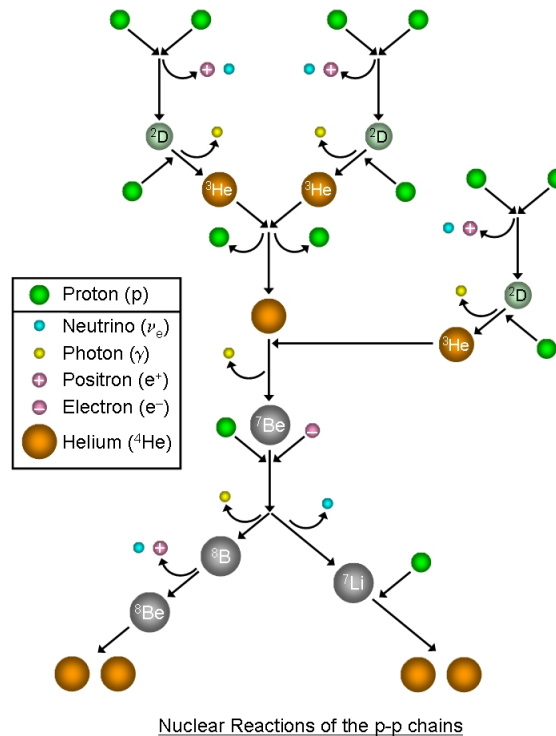


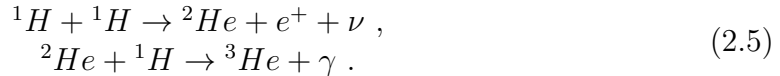
Figura 2.1: Esquema de la reacción protón-protón 1 (pp1) en la que ocurre la quema de hidrógeno en helio dentro de las estrellas de baja masa. Credits: Cronodon (2019)

Otros cuestionamientos sobre los neutrinos surgieron a partir de las dudas que se tenían sobre lo que ocurría en el interior sol y las estrellas; para esto último, en la década de 1920, Arthur Eddington definió una teoría en la que el sol y las estrellas se queman por medio de las reacciones protón-protón, pero en esa época la temperatura del Sol se consideraba demasiado baja para superar la barrera de Coulomb, en la cual las partículas involucradas deben superar primero la repulsión eléctrica, con el fin de acercarse lo suficiente, para que la atracción generada la fuerza nuclear fuerte se haga cargo de unir las partículas. Esto requiere temperaturas extremadamente altas,

¹De la contracción en inglés de *Centro del Acelerador Lineal de Stanford*

si solamente dicha variable se considera en el proceso. En el caso del ciclo del protón en las estrellas, la barrera de Coulomb es penetrada por el efecto túnel, del cual no se tenía conocimiento en la época, dicho efecto permite que el proceso se suceda a temperaturas más bajas que las que se requerirían para las presiones alcanzables en un laboratorio.

Más tarde, en 1938, el físico Hans Betz descubrió que el Sol y otras estrellas generan energía al fusionar el hidrógeno en helio (Betz, 2018). Betz propuso que uno de los protones podría descomponerse por emisión beta en un neutrón a través de la interacción débil durante el breve momento de fusión, haciendo del deuterio un producto vital en la cadena. En 1964, John Norris Bahcall predijo un flujo de neutrinos solares de 5×10^6 neutrinos $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ del modelo del Sol (hyperphysics, 2010), y en 1967 Raymond Davis Jr. comenzó un experimento destinado a la detección de neutrinos solares, debido a que las ecuaciones originales de Bethe habían demostrado que las reacciones nucleares en el núcleo generan neutrinos (Betz, 2018). Esto nos permite ver al Sol como un gran reactor de fusión nuclear alimentado por una reacción protón-protón (cadena pp) en cadena que convierte cuatro núcleos de hidrógeno (protones) en helio, neutrinos y energía. La cadena protón-protón (cadena pp) lleva el nombre de su primera reacción, entre dos protones que forman un núcleo de deuterio ${}^2\text{H}$, que luego reacciona con otro protón para formar ${}^3\text{He}$ (Kippenhahn et al., 1990).



Para formar ${}^2\text{H}$, se requiere un decaimiento β^+ para los protones en el momento de su mayor acercamiento. Este es un proceso que ocurre principalmente por la interacción débil. Los neutrinos son liberados desde la primera interacción, la finalización de un núcleo ${}^4\text{He}$ puede proceder a través de una de las tres ramas alternativas (pp1, pp2, pp3). El ejemplo más común es el de la reacción pp1 que se puede ver en la figura 2.1. Todas las posibles variantes de la reacción en cadena pp comienzan con ${}^3\text{He}$ proveniente de la ecuación 2.5, como se pueden ver en el esquema de la figura 2.2 (para más detalles revisar Kippenhahn et al. (1990)):

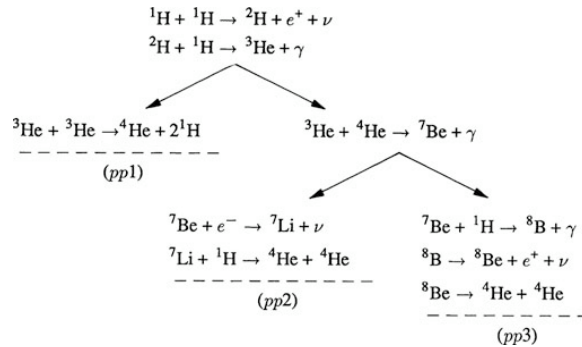


Figura 2.2: Esquema de las reacciones en cadena pp1, pp2 y pp3 para obtener un átomo de deuterio. (Kippenhahn et al., 1990)

Algunas de estas reacciones siguen liberando neutrinos, los cuales a comparación de la energía generada en el núcleo de las estrellas, no necesitan decenas o cientos de

miles de años para poder salir a la superficie, ya que estos al ser leptones que sólo interactúan débilmente, salen del sol más fácilmente que la luz. Esto nos permite tener información de los neutrinos más actual que el de la luz que detectamos proveniente de los interiores estelares. El experimento de Davis consiste en detectar la transmutación de Cl_{37} en Ar_{37} dentro de un enorme tanque de tetracloroetileno. Dicha reacción se da cuando un átomo de cloro absorbe un neutrino; sin embargo, los resultados de Davis eran tomados con escepticismo (Alonso, 2000) debido a que los neutrinos detectados fueron sólo alrededor de un tercio de los esperados en los mejores modelos del interior del Sol (hyperphysics, 2010). Sin embargo, en los 80's entró en operación un experimento basado en la detección directa de neutrinos de alta energía en agua llamado *Kamiokande*², este último experimento fue construido a 1000 metros bajo tierra y se hallaba ubicado en la Mina Mozumi de Kamioka Mining and Smelting Co. en Japón, fue desarrollado a partir de 1982 y puesto en operación en 1983. Consistía de 1000 tubos fotomultiplicadores capaces de detectar radiación Cherenkov (sección 3.1.3). *Kamiokande* obtuvo su primera detección de 11 eventos de un flujo de neutrinos proveniente de la supernova del ubicada en la gran nube de Magallanes en febrero de 1987 (IceCube, 2010). Sin embargo, en 1989 el equipo de *Kamiokande* confirmó los resultados de Ray Davis (Alonso, 2000), en un experimento que reportó un flujo de neutrinos solares poco menor a la mitad del predicho por los modelos más sofisticados del interior solar (IceCube, 2010). Con esto se teorizó durante mucho tiempo sobre la posibilidad de que un neutrino electrónico ν_e cambie de sabor³ a un neutrino muónico ν_μ , posible razón por la cual no hayan sido detectados. En esta teoría, la probabilidad de que un neutrino cambie de tipo varía periódicamente con la distancia y se conoce como oscilaciones de neutrinos.

Igualmente, al final de los años 80's el colisionador LEP comenzó a funcionar y se predijo la existencia de un neutrino tauónico ν_τ , puesto que los resultados del decaimiento del bosón Z medidos eran compatibles con la existencia de 3 neutrinos. El descubrimiento del neutrino tauónico fue confirmado en el año 2000 por parte de la Colaboración *DONUT*, en Fermilab. En la actualidad, Arthur McDonald (en el Observatorio de neutrinos de Sudbury) y Takaaki Kajita (en el *SuperKamiokande*), lograron descubrir la oscilaciones de neutrinos y con ello demostrar que los neutrinos tienen masa.

2.1. Características de los Neutrinos

Actualmente los neutrinos en el modelo estándar de partículas SMP son una sub clasificación de los *fermiones* conocidos como leptones, los cuales son partículas elementales junto a los *quarks*. Los neutrinos, al formar parte de los leptones, no interactúan con la fuerza nuclear fuerte y al no tener carga tampoco interactúan por medio de campos electromagnéticos.

Los leptones se clasifican en tres familias según sea la generación a la que pertenecan dentro de los fermiones, como se puede ver en la figura 2.3. De estas tres

²Contracción de Kamioka Nucleon Decay Experiment

³Que es el saor

FERMIONS			matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...		
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c ²	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c ²	Electric charge
ν_e electron neutrino	<1×10 ⁻⁸	0	u up	0.003	2/3
e electron	0.000511	-1	d down	0.006	-1/3
ν_μ muon neutrino	<0.0002	0	c charm	1.3	2/3
μ muon	0.106	-1	s strange	0.1	-1/3
ν_τ tau neutrino	<0.02	0	t top	175	2/3
τ tau	1.7771	-1	b bottom	4.3	-1/3

Spin is the intrinsic angular momentum of particles. Spin is given in units of \hbar , which is the quantum unit of angular momentum, where $\hbar = h/2\pi = 6.58 \times 10^{-25} \text{ GeV s} = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$.

Electric charges are given in units of the proton's charge. In SI units the electric charge of the proton is 1.60×10^{-19} coulombs.

The **energy** unit of particle physics is the electronvolt (eV), the energy gained by one electron in crossing a potential difference of one volt. **Masses** are given in GeV/c^2 (remember $E = mc^2$), where $1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-10} \text{ joule}$. The mass of the proton is $0.938 \text{ GeV}/c^2 = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Figura 2.3: Clasificación de los fermiones: Se les clasifica en Leptones y Quarks. Los cuales se subdividen en tres generaciones que se diferencian por sus órdenes de magnitud en masa; la Generación I marcada en color café, la generación II en color vainilla y la generación III en color rosa. (la Ciencia, 2019)

familias tenemos a los distintos sabores de neutrinos: el neutrino electrónico ν_e , que junto al electrón forman la generación I de leptones, el neutrino muónico ν_μ , junto al muon forman la generación II de leptones, y el neutrino taónico ν_τ , junto al taón τ perteneciente a la generación III. Estas generaciones se clasifican por el rango de masa que poseen, yendo de menor a mayor como se observa en la figura 2.3. El modelo estándar de partículas toma a los neutrinos como partículas sin masa, pero en experimentos realizados recientemente, junto al descubrimiento de Kajita y McDonald sobre la oscilación de neutrinos (sección 2.3), demuestran que el neutrino es una partícula con masa, pero no muestran la magnitud exacta de la misma; sin embargo, logran acotar un límite máximo para cada sabor de neutrino, esto se puede ver en la tabla 2.1

Neutrino	Cóta de masa
ν_e	2 eV
ν_μ	190 keV
ν_τ	18.2 MeV

Tabla 2.1: Tabla de masas acotadas de neutrinos, en la primera columna se muestran los tres sabores de neutrinos en orden de generación y en la segunda columna la masa máxima correspondiente a cada sabor de neutrino.

Además de esta clasificación, hay teorías en las que cada partícula del SMP cuenta con una anti-partícula conocida como partícula de Majorana. La partícula de Majorana

rana de cada partícula, es una partícula con la misma masa de nuestra partícula pero con carga opuesta, lo cual, en el caso de los neutrinos, es hipotéticamente posible debido a su carga neutra.

Dada la neutralidad de su carga y su baja masa, la probabilidad de que la trayectoria de un neutrino astrofísico sea modificada por campos magnéticos y gravitacionales es nula, por lo que sus características los hacen perfectos mensajeros de eventos del universo muy lejanos a nosotros.

2.2. Interacciones de Neutrinos

Una característica de los leptones como el neutrino, es la falta de capacidad de interactuar con la fuerza nuclear fuerte a comparación de los hadrones⁴, por lo que sólo interactúan débilmente. El SMP ha descrito las interacciones de neutrinos de forma impresionantemente exacta (Giunti and Kim, 2007).

Retomando el modelo estándar de partículas, existe otra clasificación de partículas junto a los fermiones: los bosones, las cuales son partículas que transmiten las interacciones fundamentales, las fuerzas generadas por estas interacciones se transmiten por intercambio de bosones de espín 1. El fotón γ para las interacciones electromagnéticas, los bosones W^\pm y Z^0 para las fuerzas débiles, y para la fuerza fuerte los gluones (Sfyrla, 2018). Estos bosones se denominan colectivamente *bosones gauge*. Las partículas pueden emitir o absorber un bosón de este tipo si llevan la carga requerida. En este caso nos enfocaremos en los bosones W^\pm y Z^0 , los cuales son los que aportan la interacción débil de tipo corriente cargada (CC) y corriente neutra (NC), respectivamente.

BOSONS			force carriers spin = 0, 1, 2, ...		
Unified Electroweak spin = 1			Strong (color) spin = 1		
Name	Mass GeV/c ²	Electric charge	Name	Mass GeV/c ²	Electric charge
γ photon	0	0	g gluon	0	0
W⁻	80.4	-1			
W⁺	80.4	+1			
Z⁰	91.187	0			

Figura 2.4: Clasificación de los bosones de acuerdo con el del modelo estándar de partículas. (la Ciencia, 2019)

El proceso con el que se detectan los neutrinos es la dispersión inelástica profunda (DIS). En el caso de la interacción CC, un neutrino ν_α interactúa con el núcleo N de un átomo generando un leptón l_α de la mi familia del neutrino, de forma que $\alpha = e, \mu, \tau$ y pueden generar una cascada de partículas hadrónicas X .

$$\nu_\alpha + N = l_\alpha^- + X. \tag{2.6}$$

⁴Los hadrones son partículas que están constituidas por quarks que interactúan entre ellas con la fuerza nuclear fuerte, ejemplo de estos son los protones y neutrones de núcleos atómicos.

En el caso de la interacción CC, la expresión para el antineutrino es

$$\bar{\nu}_\alpha + N = l_\alpha^+ + X. \quad (2.7)$$

En de la interacción NC el neutrino interacciona con un núcleo atómico produciendo otro neutrino y la cascada de hadrones

$$\nu_\alpha + N = \nu_\alpha + X. \quad (2.8)$$

Para la interacción NC de un antineutrino es

$$\bar{\nu}_\alpha + N = \bar{\nu}_\alpha + X. \quad (2.9)$$

2.2.1. Sección Eficaz

La probabilidad de que un neutrino interaccione con algún protón o núcleo atómico individual aumenta cuando la energía del neutrino es más grande, esto se debe a que el camino libre medio⁵ del neutrino se reduce y aumenta la probabilidad de detectarlo.

El camino libre medio está directamente relacionado con el área de colisión σ , que presenta una partícula cuando se mueve a través del espacio, conocida como sección eficaz. La sección eficaz para la detección de neutrinos por medio de la interacción de neutrinos y núcleos atómicos depende de la función de densidad de protones del núcleo.

(Gandhi, 1998) propone la diferencial de la sección eficaz como

$$\frac{d\sigma^2}{dxdy} = \frac{2G_f^2 M E_\nu}{2\pi} \left(\frac{M_W^2}{Q^2 + M_W^2} \right) [xq(x, Q^2) + x\bar{q}(x, Q^2)(1-y)^2], \quad (2.10)$$

la cual se reduce a

$$\frac{d\sigma^2}{dxdy} \propto \frac{2G_f^2 M}{2\pi} \left(\frac{M_{boson}^2}{Q^2 + M_{boson}^2} \right) E_\nu, \quad (2.11)$$

donde $G_f^2 = 1.16632 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ es la constante de Fermi, $-Q^2$ es la transferencia de momento invariante entre el neutrino incidente y el muón saliente, M es la masa del núcleo con el que interacciona el neutrino y $M_{boson} = M_{Z^0}$ o M_{W^\pm} dependiendo del tipo de interacción, en el caso de interacción CC $M_{W^\pm} = 80.385 \text{ GeVc}^{-2}$ y en NC $M_{Z^0} = 91.1879 \text{ GeVc}^{-2}$, la expresión está en términos de variables escaladas de Bjorken⁶ donde $dx = d(Q^2/2M_\nu)$ y $dy = d(\nu/E_\nu)$.

⁵El camino libre medio es la distancia o espacio entre dos colisiones sucesivas de las moléculas en la materia.

⁶La X de Bjorken puede identificarse como la fracción del momento transportado por los quark S de protones transportado por el quark golpeado

2.3. Oscilación y sabores de los neutrinos

El término “oscilación de neutrinos” se refiere al fenómeno del cambio en el sabor de los neutrinos, de forma que los neutrinos ν_l pueden ser etiquetados de acuerdo a los leptones cargados e , μ y τ con los que se asocian en la interacción débil. Por lo que tenemos tres estados de sabor de los neutrinos $|\nu_e\rangle$, $|\nu_\mu\rangle$ y $|\nu_\tau\rangle$. Las oscilaciones de los neutrinos dentro de la mecánica cuántica son un fenómeno en el cual el neutrino ν_l que se propaga a través del espacio se puede medir como $\nu_{l'}$, debido a que estos cambian de estado. Estos cambios en el sabor del neutrino requieren que los estados del sabor del neutrino, ν_l , no sean los mismos que los estados propios de la masa del neutrino, ν_i , (Barger, 2012). Para esto se toman tres estados de masa $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$ y $|\nu_3\rangle$ que de acuerdo a como se combinen de forma lineal por medio de la matriz Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (matriz PMNS)

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

donde los estados de masa $|\nu_1\rangle$, $|\nu_2\rangle$ y $|\nu_3\rangle$ toman la función de eigen valores para obtener los estados de sabor.

Para empezar, supondremos que los neutrinos tienen masa. Por lo tanto, hay un espectro de estados propios de masa de neutrinos, ν_i , $i = 1, 2, \dots$, cada uno con masa m_i ; sin embargo, también podemos distinguir los neutrinos en términos de sus sabores. Definimos tres estados de sabor, ν_α , $\alpha = e, \mu, \tau$ como se observa experimentalmente.

La mezcla se puede describir con la observación de que cada uno de los tres sabores de los neutrinos se puede expresar como una superposición de estados propios de masa. Para entender esto experimentalmente, consideremos el decaimiento leptónico.

$$W^+ \rightarrow \nu_i + \bar{l}_\alpha, \quad (2.13)$$

donde l_α es un leptón cargado de sabor α . Mezclar implica que cada vez que la desintegración anterior produce un determinado \bar{l}_α , el estado propio de la masa de neutrinos que lo acompaña no es el mismo ν_i , pero puede ser cualquier ν_i , incluso si el lepton tiene un sabor fijo. Por lo tanto, cada ν_α es en realidad una superposición de varios estados propios ν_i 's, de los cuales, por supuesto, sólo se puede discernir un estado durante una sola observación.

En consecuencia, podemos escribir un estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ en la forma (Kayser, 2005):

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle. \quad (2.14)$$

Las $U_{\alpha i}$'s pueden ser escritas en forma de una matriz llamada matriz de mezcla leptónica. En una matriz típica de mezcla leptónica se asume que $i = 1, 2, 3$ y $\alpha = \nu, \mu, \tau$ y se ve como

$$U_{\alpha i} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

El modelo estándar establece que U es unitaria. Así,

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad (2.16)$$

Invirtiendo la matriz 2.14, podemos expresar cada estado propio de masa como una superposición de sabores

$$| \nu_i \rangle = \sum_{\alpha} U_{\alpha i}^* | \nu_{\alpha} \rangle \quad (2.17)$$

La matriz de mezclado correspondiente es U^\dagger .

Si asumimos que hay tres estados propios de masa, el Lagrangiano se puede expresar en términos de estado propio (base) en masa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu} m \nu \\ &= (\bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 \bar{\nu}_3) \underbrace{\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}}_{M_D} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

\mathcal{L} también se puede expresar de acuerdo con su sabor, como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\nu} m \nu \\ &= (\bar{\nu}_{\alpha} \bar{\nu}_{\mu} \bar{\nu}_{\tau}) \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \nu_{\alpha} \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Claramente, M sería diagonal si no hubiera mezcla. Utilizando las expresiones 2.14 y 2.17 en la ecuación 2.19, y suponiendo que M sea simétrico, se ve

$$M_D = U^\dagger M U \quad (2.20)$$

De 2.14 y 2.17 está claro que la fracción α del sabor en ν_i y, de manera equivalente, la fracción de masa i en ν_{α} es $|U_{\alpha i}|^2$. Esta es, por lo tanto, la probabilidad de que el neutrino tenga una masa m_i , cuando se observa un \bar{l}_{α} en el decaimiento dado en la expresión 2.13.

2.3.1. Oscilación de neutrinos en el vacío

Una oscilación ocurre cuando un neutrino es emitido de la fuente con un sabor α y atraviesa una distancia L hasta que interactúa y reacciona en un detector, produciendo un leptón con un sabor que determina el sabor final β del neutrino ν_{β} .

Si el sabor inicial del neutrino es diferente al sabor final de este $\alpha \neq \beta$, se tiene que el neutrino ha oscilado en su trayectoria teniendo un cambio de sabor $\alpha \rightarrow \beta$. Al

tener un efecto cuántico, podemos obtener la probabilidad del cambio de sabor como:

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \rightarrow \beta) &= |Amp(\alpha \rightarrow \beta)|^2 \\
 &= \left| \sum_i U_{\alpha i} e^{-i \frac{m_i^2}{2E} L} U_{\beta i}^* \right|^2 \\
 &= \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* + \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{\Delta m_{ji}^2}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}, U^\dagger = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{e2}^* & U_{e3}^* \\ U_{\mu 1}^* & U_{\mu 2}^* & U_{\mu 3}^* \\ U_{\tau 1}^* & U_{\tau 2}^* & U_{\tau 3}^* \end{pmatrix} \\
 UU^\dagger &= \begin{pmatrix} \sum_i U_{ei} U_{ei}^* & \sum_i U_{ei} U_{\mu i}^* & \sum_i U_{ei} U_{\tau i}^* \\ \sum_i U_{\mu i} U_{ei}^* & \sum_i U_{\mu i} U_{\mu i}^* & \sum_i U_{\mu i} U_{\tau i}^* \\ \sum_i U_{\tau i} U_{ei}^* & \sum_i U_{\tau i} U_{\mu i}^* & \sum_i U_{\tau i} U_{\tau i}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

esto quiere decir que

$$\begin{aligned}
 \sum_i U_{\alpha i} U_{\beta i}^* &= \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases} \\
 &= \delta_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

la diferencia de masas está dada como

$$\Delta m_{ji}^2 = (m_j^2 - m_i^2), \tag{2.24}$$

y la identidad

$$\begin{aligned}
 e^{iA} &= \cos A + i \operatorname{sen} A \\
 &= 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} + i \operatorname{sen} A,
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

obtenemos que la probabilidad de oscilación de los neutrinos en la materia es

$$\begin{aligned}
 P(\alpha \rightarrow \beta) &= \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \\
 &\quad + 2 \sum_{i \neq j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \operatorname{sen}^2 \left(m_{ji}^2 \frac{L}{4E} \right) \\
 &\quad + \sum_{i \neq j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \operatorname{sen} \left(m_{ji}^2 \frac{L}{4E} \right) \\
 &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i > j} \Re \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \operatorname{sen}^2 \left(m_{ji}^2 \frac{L}{4E} \right) \right) \\
 &\quad + 2 \sum_{i > j} \Im \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \operatorname{sen} \left(m_{ji}^2 \frac{L}{2E} \right) \right),
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde $\Re(z)$ y $\Im(z)$ denotan la parte real e imaginaria de un número complejo z respectivamente, y $\delta_{\alpha\beta}$ es la reducción de los primeros dos términos de la primera igualdad de 2.26.

2.3.2. Oscilación de neutrinos en la materia

La aproximación de dos neutrinos es una descripción bastante precisa de varios experimentos. Supongamos, entonces, que existen sólo dos estados propios de masa, que llamaremos ν_1 y ν_2 , y dos estados de sabor correspondientes, que llamaremos ν_e y ν_μ . Esperamos que exista una matriz unitaria de 2×2 , con un ángulo de rotación y tres factores de fase. Entonces sólo hay una división de masa al cuadrado, $m_2^2 - m_1^2 = \Delta m^2$. Se puede mostrar que los factores de fase no tienen efecto en la oscilación y, por lo tanto, pueden omitirse, por lo que la matriz de mezcla U toma la forma simple

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} \quad (2.27)$$

y a consecuencia de esto la transpuesta de U es

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} U_{e1}^* & U_{\mu 1}^* \\ U_{e2}^* & U_{\mu 2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} . \quad (2.28)$$

De 2.27 y 2.14 para el caso de dos neutrinos tenemos que

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= |\nu_1\rangle \cos\theta_M + |\nu_2\rangle \text{sen}\theta_M \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle \text{sen}\theta_M + |\nu_2\rangle \cos\theta_M \end{aligned} \quad (2.29)$$

la probabilidad de que $|\nu(t)\rangle$ sea detectado como $|\nu_\mu\rangle$ en un tiempo t es

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = |\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle|^2 , \quad (2.30)$$

donde el *ket* $|\nu(t)\rangle$ se obtiene de la solución de la ecuación de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\nu(t)\rangle = \mathcal{H} |\nu(t)\rangle , \quad (2.31)$$

con $|\nu(\tau = 0)\rangle = |\nu_e\rangle$ a un tiempo t

$$|\nu(t)\rangle = |\nu(t)\rangle = |\nu_1\rangle e^{i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} \cos\theta_M + |\nu_2\rangle e^{i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} \text{sen}\theta_M , \quad (2.32)$$

y sustituimos 2.32 en 2.30 para desarrollar

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) &= \left| -\text{sen}\theta_M e^{-i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} \cos\theta_M + \cos\theta_M e^{+i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} \text{sen}\theta_M \right|^2 \\ &= \left| \text{sen}\theta_M \cos\theta_M \left(e^{+i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} - e^{-i \frac{\Delta m_M^2}{4E} t} \right) \right|^2 \\ &= \left| \text{sen}\theta_M \cos\theta_M \left(2i \text{sen} \frac{\Delta m_M^2}{4E} t \right) \right|^2 \\ &= \text{sen}^2 2\theta_M \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_M^2}{4E} t \right) . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dado que tomamos un caso relativista para neutrinos de altas energías (NAEs), sustituimos el tiempo recorrido t por la distancia recorrida obteniendo:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \left(\Delta m^2 \frac{L}{4E} \right) . \quad (2.34)$$

Capítulo 3

ICECUBE y la detección de neutrinos

El primer intento por construir un detector Cherenkov fue postulado para el agua con el detector de neutrinos y muones de aguas profundas (*DUMAND*) localizado en las cercanías de Hawaii. Este intento no fue exitoso pero otros experimentos (más pequeños) lograron resultados interesantes. Uno de estos experimentos fue el arreglo de detectores antártico de muones y neutrinos (*AMANDA*), el cual comenzó a desarrollarse en 1993. Una vez terminado, *AMANDA* contaba con 667 módulos ópticos (detectores de luz) desplegados en el hielo del polo sur. La construcción de éste concluyó en el año 2000 y el detector estuvo en operación hasta el 2009.

IceCube actualmente es el sucesor de *AMANDA*. Es un detector de un kilómetro cúbico bajo el hielo antártico. Se encuentra localizado geográficamente cerca del polo sur y está compuesto por 5160 sensores ópticos. Estos sensores llamados *DOMs* (del inglés módulos ópticos digitales). Cubren una superficie hexagonal de un kilómetro cuadrado, de entre 1450 m y 2450 m de profundidad bajo el hielo. Esto implica que el *DOM* más profundo está ubicado 370 m arriba de la roca que el continente antártico contiene.(ver figura 3.1). Los módulos están distribuidos en 78 cuerdas de *IceCube* más 8 cuerdas de núcleo profundo. Las 78 cuerdas de *IceCube* están horizontalmente espaciadas por 125 m y los *DOMs* están espaciados por 17 m en cada cuerda vertical.

3.1. Principio de detección

Para observar neutrinos con *IceCube*, estos deben interactuar débilmente con el núcleo de las rocas o el hielo del fondo en *IceCube* y se produce al menos una partícula cargada relativista. Esta interacción puede ser corriente cargada (CC) por medio del boson W y corriente neutra (NC) por medio del boson Z. Las partículas cargadas relativistas viajan a través del detector emitiendo luz Cherenkov que puede ser detectada por los sensores ópticos. Las dos interacciones posibles son

$$\nu_l + N \rightarrow l + X \tag{3.1}$$

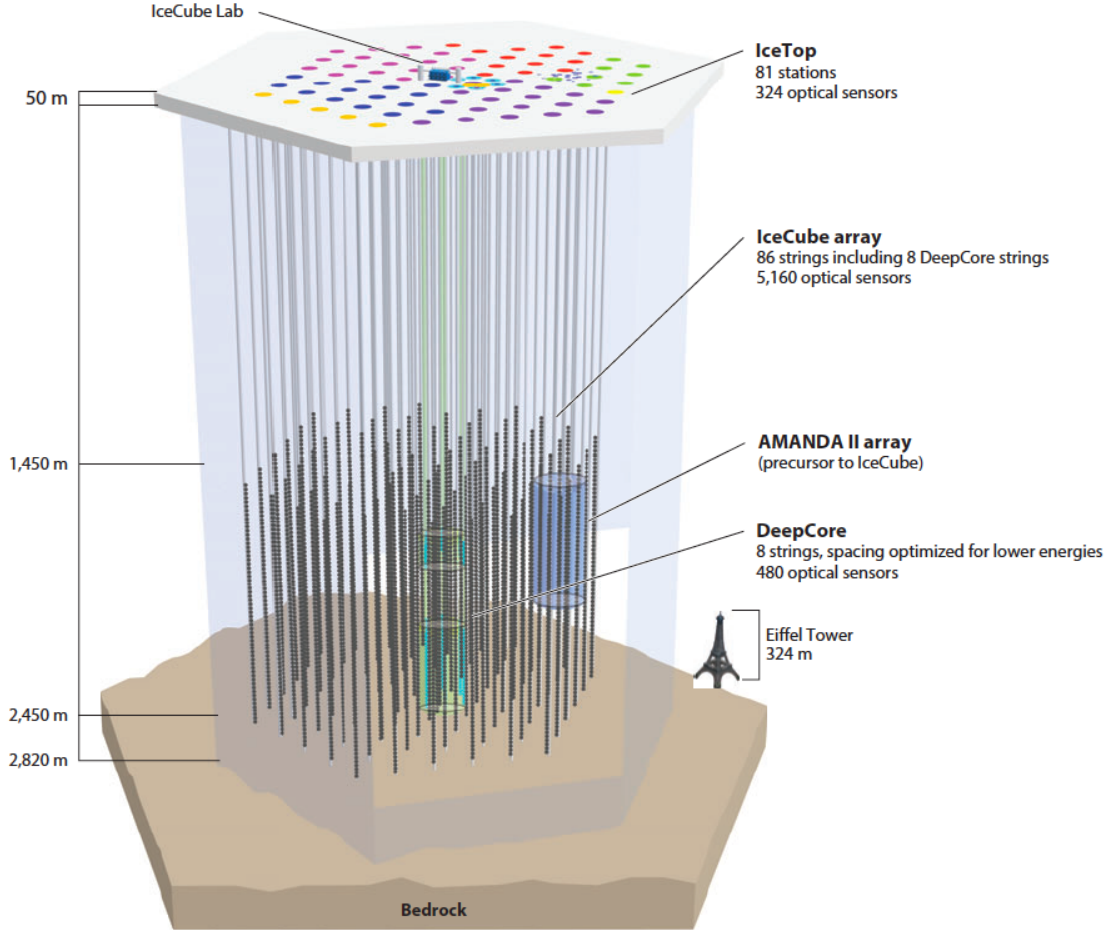


Figura 3.1: Vista esquemática del detector *ICECUBE* en la estación del polo sur *Amundsen-Scott*. Los módulos ópticos digitales en las 86 cuerdas de *ICECUBE* detectan la radiación de Cherenkov y transmiten la señal al laboratorio de *ICECUBE* en la superficie. La sub-matriz *DeepCore* utilizada para bajar el umbral de energía de *ICECUBE* está en verde, el precursor de *ICECUBE*, *AMANDA* está en azul.

$$\nu_l + N \rightarrow \nu_l + X, \quad (3.2)$$

donde l es un leptón (electrón, muón, taón), N el núcleo y X el estado hadrónico después de la interacción. Las interacciones de la corriente cargada, para un neutrino de alrededor de 10 GeV, 50% de esta energía es transferida al leptón. Para un neutrino de alta energía el porcentaje sube a 80%. Lo que queda de energía es transferido al núcleo, lo que produce una cascada hadrónica. En el caso de interacciones de NC, el neutrino cambia energía con el núcleo produciendo únicamente la cascada hadrónica.

3.1.1. Probabilidad de interacción

Siguiendo el artículo de Halzen and Klein (2010), se puede derivar una aproximación de probabilidad de interacción de neutrinos en el detector. Si $L(\theta)$ es la distancia recorrida por el neutrino llegando a un ángulo senital θ en el detector, esta probabilidad se puede escribir como

$$P(E_\nu) = 1 - \exp \left[-\frac{L(\theta)}{\lambda_{nu}(E_\nu)} \right] \approx \frac{L(\theta)}{\lambda_{nu}(E_\nu)}, \quad (3.3)$$

Donde el camino libre medio para un neutrino que recorre el hielo $\lambda_\nu(E_\nu)$ puede ser expresado como

$$\lambda_\nu(E_\nu) = [\rho_{hielo} N_A \sigma_{\nu N}(E_\nu)]^{-1}. \quad (3.4)$$

En la ecuación anterior, la densidad del hielo $\rho_{hielo} = 0.9 \text{ g cm}^{-3}$, N_A es el número de Avogadro y $\sigma_{\nu N}(E_\nu)$ es la sección eficaz del neutrino, de lo cual obtendríamos

$$P(E_\nu) \approx \frac{L(\theta)}{[(0.9 \text{ g cm}^{-3}) N_A \sigma_{\nu N}(E_\nu)]^{-1}}. \quad (3.5)$$

Los detalles de la sección transversal de neutrino-nucleón se pueden encontrar en Gandhi (1996). Este cálculo es una primera aproximación debido a que no toma en cuenta a que la Tierra se vuelve opaca para los neutrinos de altas energías. El valor de L , la distancia atravesada por el neutrino en el detector, es una aproximación debido a que el neutrino puede interactuar fuera del detector y la reacción producto de la colisión aún puede ser una luz detectable.

La interacción entre un neutrino y un electrón dentro de los átomos del hielo antártico, tiene tan baja probabilidad que es despreciable. Sin embargo, hay una excepción de 6.3 PeV, donde una sección eficaz resonante ya no puede ser despreciable. Es importante saber que para un neutrino de $E_\nu > 10 \text{ GeV}$, el ángulo medio entre el neutrino y el leptón producido por una interacción CC está dada por la fórmula

$$\Delta\theta [\text{rad}] \approx \left(\frac{1}{\pi \frac{E_\nu}{1 \text{ GeV}}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

En el caso de las energías consideradas para *ICECUBE*, el neutrino y el leptón pueden ser considerados como colineales. Esto es importante debido a que nos permite trazar la dirección del neutrino por una reconstrucción en la dirección del leptón como veremos en el próximo capítulo.

3.1.2. Pérdida de energía de leptones cargados

El leptón producido por interacciones CC puede viajar a través del hielo perdiendo energía en el medio que lo rodea. El promedio de energía perdida por distancia recorrida por un leptón puede ser escrita como

$$-\left\langle \frac{dE}{dX} \right\rangle = \alpha + \beta E, \quad (3.7)$$

donde X está en unidades de $g \cdot cm^{-2}$, E es la energía del leptón, α es la pérdida de energía de ionización dada la fórmula de Bethe-Bloch y $\beta = \beta_{brem} + \beta_{pair} + \beta_{nucl}$ es la suma de los procesos radiativos (Bremsstrahlung, la producción del par e^+e^- y la dispersión foto nuclear). La pérdida de energía ionizante es casi constante mientras que la pérdida de energía radiativa depende débilmente de la energía. En el caso de los muones, la pérdida por procesos radiativos se vuelve dominante sobre las pérdidas de ionización por encima de $\approx 1 TeV$. Gracias al mecanismo de pérdida de energía, la energía del muon puede ser estimada por el número total de fotones detectados a lo largo del **track** de muones. El proceso de Bremsstrahlung es la emisión de fotones en una partícula cargada cuando ésta interactúa en el campo eléctrico del núcleo en un medio (en este caso la roca del fondo antártico y el hielo), la producción de pares viene de la emisión de un fotón que es convertido en un par e^+e^- . Los electrones y positrones producidos quizá podrían perder energía por procesos radiativos y de ionización, lo que crearía más fotones y más pares. Esto brinda una cascada electromagnética. La producción de pares actualmente es el mecanismo principal para que el muon pierda energía por encima de $\approx 1 TeV$ como se ve en la figura 3.2.

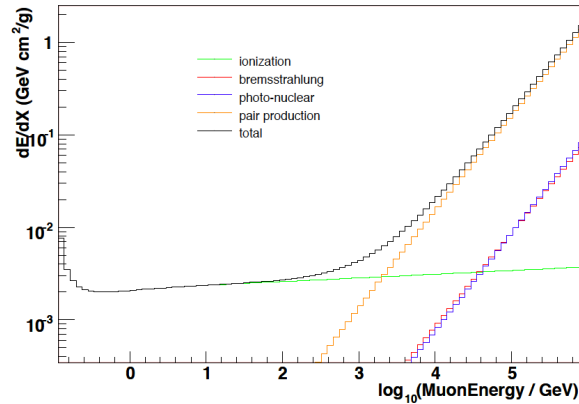


Figura 3.2: Pérdida de energía de un muon que atraviesa un medio similar al hielo antártico (Chirkin and Rhode, 2004) en (Redl, 2011)

La dispersión fotonuclear es una dispersión no elástica entre el leptón y el nucleón (o un núcleo). Esta consiste en un intercambio de un fotón virtual, si el cuadrimomento transferido del leptón al hadron es lo suficientemente grande, el proceso es llamado dispersión inelástica profunda. El fotón virtual es entonces absorbido por un nucleón generando un estado hadrónico final.

3.1.3. Radiación Cherenkov

La radiación Cherenkov surge del término de la pérdida de energía de ionización de la ecuación 3.7. En efecto, en la fórmula Bethe-Bloch, es un efecto llamado efecto de densidad. No tomar en cuenta este término equivale a que un contexto en el que

una partícula cargada que atraviesa un medio, interactúa con electrones dentro de él uno por uno de forma independiente. Para una situación en donde la partícula se mueve de forma relativista, esta visión no funciona. En primer lugar se tiene que considerar que la partícula cargada relativista puede perturbar los campos generados por los átomos en el medio y esto puede influir en la ubicación de los campos de los procesos de ionización. Esto resulta un pequeño cambio en la ionización (pérdida de deposición de energía), por lo que la presencia de la densidad en la fórmula de Bethe-Bloch viene de ahí. Este efecto de densidad se puede ver como un efecto de modificación de los campos a causa de la polarización del medio.

Si se calcula la energía depositada en el medio por una partícula cargada moviéndose a una velocidad relativista, se podrá ver cómo toda la distribución de energía cerca de la trayectoria de la partícula a excepción de que la velocidad de la partícula sea mayor que la velocidad de fase del campo electromagnético del medio que es el caso en el que se emite radiación que llamamos Cherenkov, esto dado que fue observada por primera vez en 1934 por Pável Cherenkov. Al igual que el efecto de densidad, esto ocurre por la polarización del medio. Ambos efectos son originados por el mismo fenómeno con consideraciones diferentes (corresponden a dos casos límite diferentes). Dadas sus cualidades en las observaciones, la radiación Cherenkov se puede ver como una luz equivalente a un choque sónico. Esto es sólo cualitativo debido a que el choque sónico se forma a partir de las ondas de sonido emitidas incluso cuando la velocidad es inferior a la velocidad del sonido, que se resume en un frente de onda cuando la velocidad alcanza la velocidad del sonido. La radiación Cherenkov aparece solamente cuando las partículas se mueven más rápido que la velocidad fase de la luz en el medio, y es consistente con la radiación de un medio polarizado y no de una partícula ultra relativista.

Una característica interesante de la radiación Cherenkov es su emisión a un ángulo fijo, θ_c , dependiente únicamente de la velocidad v de la partícula y el índice de refracción n del medio:

$$\cos\theta_c = \frac{1}{n\beta} \quad \text{donde} \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (3.8)$$

En el caso de *ICECUBE*, podemos considerar $\beta \approx 1$, y usando el índice de refracción del hielo obtenemos un ángulo $\theta_c = 41^\circ$. Una partícula cargada que atraviesa el hielo o cualquier medio puede radiar tanto como $\beta > \frac{c}{n}$. La emisión Cherenkov cubre todas las longitudes de onda λ , pero se vuelve más intensa con longitudes de onda corta, como se observa en la fórmula de Frank-Tamm:

$$\frac{d^2N}{dx d\lambda} = \frac{2\pi\alpha z^2}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 N^2}\right), \quad (3.9)$$

donde z es una partícula cargada y α es la constante de estructura fina. Lo que indica que su emisión máxima ocurre en el azul y la energía baja de la luz ultra-violeta.

3.1.4. Diferentes señales

Cuando el proceso de Bremsstrahlung y la producción de pares son dependientes de la masa, el proceso es más eficiente para electrones que para muones y taones.

Como resultado, un electrón perderá rápidamente energía producida por una cascada electromagnética. Un muon de la misma energía atravesará una distancia más larga usando menos energía por unidad de distancia. El tauón tiene un tiempo de vida muy corto por lo que tiene mayor probabilidad de decaimiento cerca del detector.

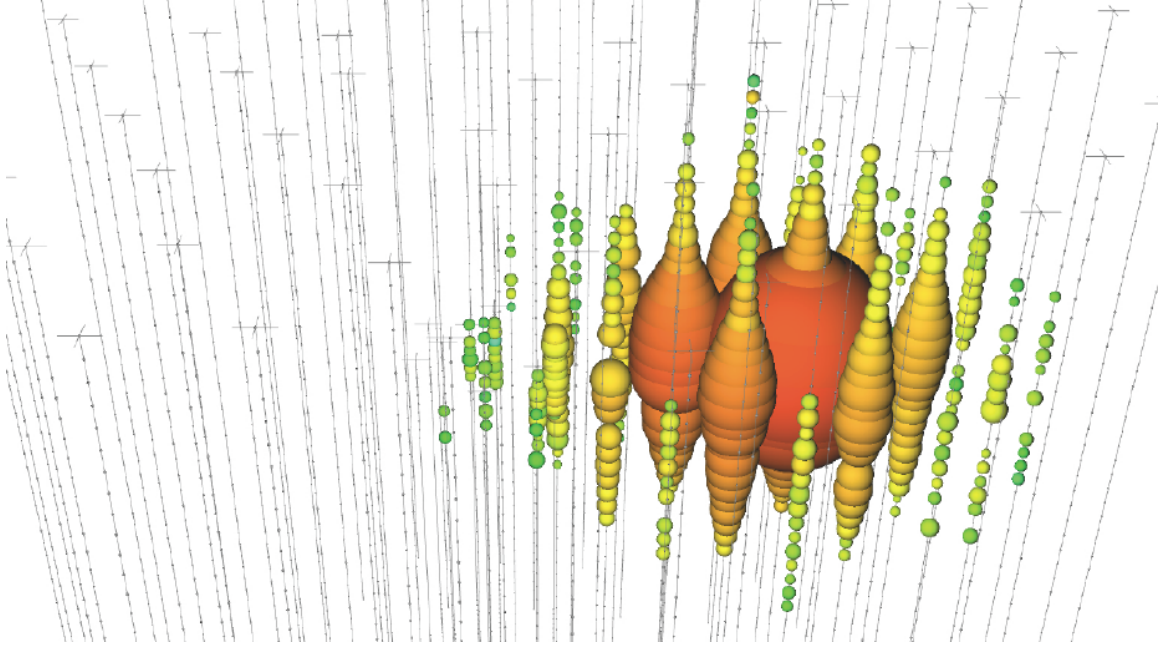


Figura 3.3: Firma **cascade** simulada en el detector *ICECUBE* (Ahlers et al., 2018)

Estas diferencias dirigen a distintas firmas de luz para los tres sabores de neutrinos, para todos los sabores en el caso de la interacción CC, se crea una lluvia de hadrones causada por la fragmentación de un núcleo golpeado producido por varios tipos de partículas. La cascada hadrónica entonces tiene una componente electromagnética debido a los piones neutros que decaen en fotones, que después se convierten en pares e^+e^- . Esta cascada genera una esfera de luz proveniente de la luz Cherenkov para todas las partículas implicadas en la cascada que se extienden en todas las direcciones. Esta firma de luz en el detector se llama **Cascade**.

En el caso de una interacción CC, la firma depende del sabor. El electrón resultante de la interacción puede emitir energía en una distancia más corta que la de dos módulos ópticos, por lo que la firma del detector puede ser una cascada electromagnética que se verá muy similar a la cascada generada por los hadrones.

El caso del muon es el más interesante para el estudio de fuentes puntuales. Un muon de energía en TeV puede viajar varios kilómetros a través del detector, emitiendo luz Cherenkov a lo largo de su trayectoria. Por lo que es llamado **Track**, la diferencia entre Track y Cascades se puede visualizar en las figuras 3.4 y 3.3.

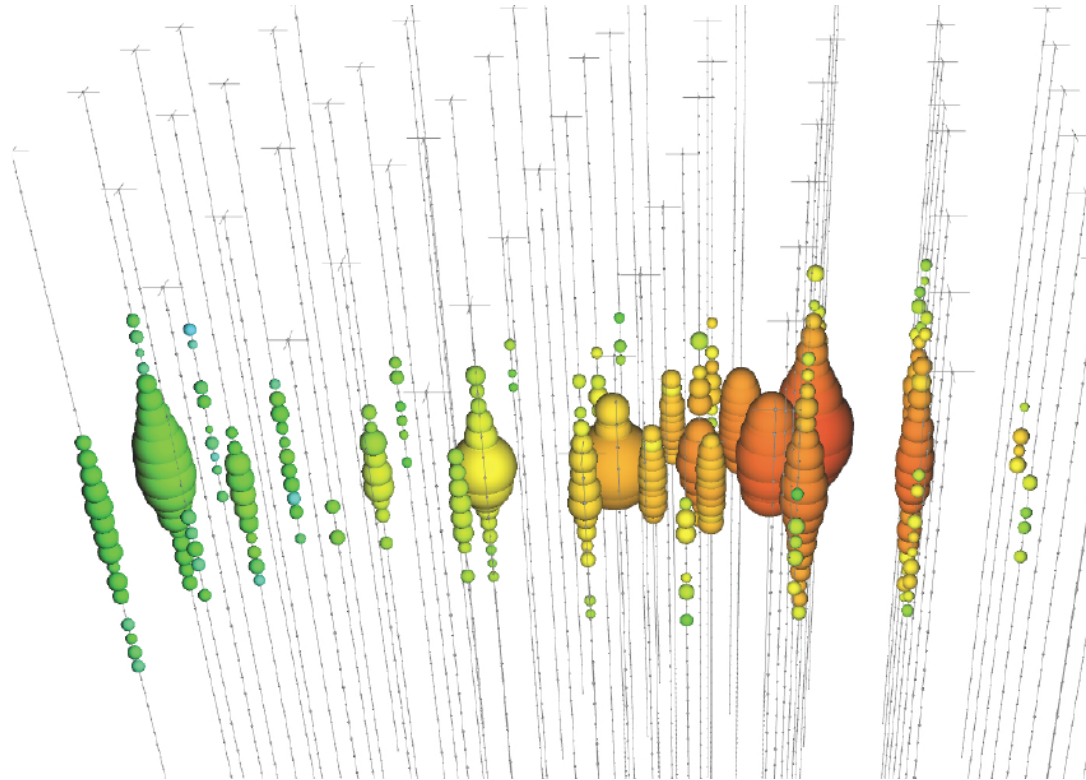


Figura 3.4: Firma **Track** simulada en el detector *ICECUBE* (Ahlers et al., 2018).

La firma del tauón es diferente si este decae en hadrones o muones. En el caso de un decaimiento hadrónico, se puede observar una firma Cascade cuando el neutrino interactúa después de una firma Track generada por un tauón, y finalmente otra firma Cascade producida por otro decaimiento hadrónico causado por un tauón (a esto se le llama doble explosión).

Capítulo 4

Núcleos activos de galaxias

Los núcleos activos de galaxia (AGN) son una población de objetos no estelares compactos, densos y muy energéticos. Son, además, algunos de los objetos más poderosos del universo, extraordinariamente luminosos en todo el espectro electromagnético, desde la longitud de onda radio hasta los rayos gamma. Se identifican por la emisión del núcleo, la cual es comparable con la emisión estelar de su galaxias huésped, llegando incluso a superarlas. Se encuentran entre los sistemas más luminosos observados en el Universo, y se cree que se deben a la materia que se acumula en un SMBH central con una masa típica de entre $10^7 - 10^9 M_{\odot}$.

4.1. Estructura

El esquema de AGNs se muestra en la figura 4.1. Se cree que el centro de un AGN es un agujero negro supermasivo (SMBH) con masas superiores a $M_{SMBH} = 10^{10} M_{\odot}$. Un disco de gas, polvo y partículas ionizadas está rodeando el SMBH, y a su vez está acumulando material gravitacionalmente, este material forma un disco alrededor del SMBH llamado disco de acreción con la tasa

$$\dot{M} = \pi \rho v r^2, \quad (4.1)$$

donde r es la distancia al SMBH, ρ es la densidad y v la velocidad del viento. Durante el proceso, el momento angular es transferido desde el interior del disco de acreción hacia afuera, mientras que la energía gravitacional se libera como radiación con luminosidad

$$L = \frac{GM_{SMBH}}{R} \times \dot{M}, \quad (4.2)$$

Donde la G es la constante gravitacional y R la distancia del elemento de masa M al centro. La acreción es causada por un gradiente de presión de la materia que cae al hacia el centro.

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-GM_{SMBH}\rho}{r^2} \quad (4.3)$$

y además está limitado por la presión de radiación:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-\sigma_T \rho}{m_p c} \frac{L}{4\pi r^2} . \quad (4.4)$$

Definiendo la luminosidad de Eddington, donde m_p es la masa del protón, σ_T es la sección eficaz de Thompson y c la velocidad de la luz en el vacío.

$$L_{Edd} = \frac{4\pi G M_{SMBH} m_p c}{\sigma_T} \quad (4.5)$$

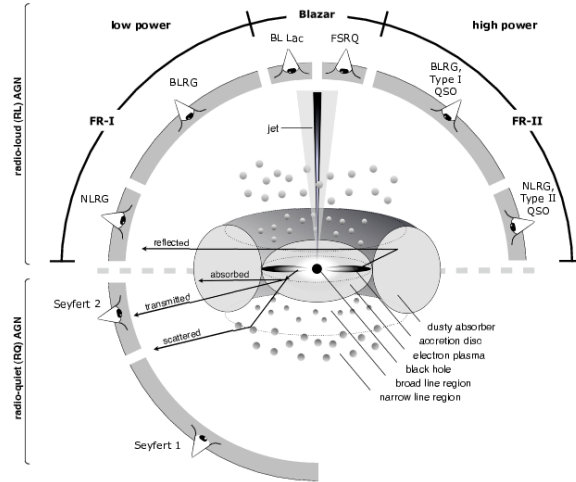


Figura 4.1: Esquema del modelo unificado de los AGN (Beckmann and Shrader, 2013)

Entre el 15 – 20% de todos los casos de AGN's, este motor de acreción junto a otros efectos como disipación viscosa (Shakura and Sunyaev, 1973), es capaz de alimentar un jet relativista. Este AGN se llama “radio-loud”, mientras que cuando el AGN no muestra un jet es llamado “radio-quiet”. Esta distinción esta dada por el radio del flujo de radio a 5 GHz en el flujo del rango óptico:

$$R^* \equiv \frac{f_{5GHz}}{f_{\text{óptico}}} . \quad (4.6)$$

Dependiendo de una definición exacta, los objetos radio-quiet se muestran con $0.1 < R^* < 1$, donde se asume que el jet está constituido por fuertes campos magnéticos. Dentro del jet altamente colimado, las estructuras de plasma relativista son arrojadas del SMBH a lo largo de la dirección del eje de rotación central del SMBH. Estos jets pueden extenderse desde escalas de kiloparsec hasta megaparsec en el espacio. Los procesos de emisión de un jet son considerados en la sección 4.3. La *broad line region* (BLR) es una región esferoidal conformada alrededor del disco de acreción, que está compuesta de nubes de gas y polvo. Dado que la energía de emisión del motor central la cara lateral del SMBH está altamente ionizada. La ionización emitida es absorbida cuando es llevada a un lado opuesto, neutral o menos ionizado. Esto se manifiesta en líneas de alta ionización observadas desde el frente y líneas de

baja ionización observadas desde la parte posterior. La emisión de líneas de la BLR muestra un fuerte ensanchamiento, llamado **ensanchamiento doppler**, lo cual es una característica de velocidades muy altas. La *narrow line región* (NLR) se encuentra en la parte exterior de la BLR, en donde también se muestran líneas de emisión características de la BLR. Pero las líneas de la NLR no son tan anchas como las de la BLR, por lo que indican velocidades más bajas (Gaskell, 2009). En la parte más externa del AGN se encuentra un toroide de polvo, con características observacionales muy importantes para el AGN.

4.2. Clasificación y Modelo Unificado de los AGNs

Históricamente las clases de AGN fueron definidas por propiedades observacionales que nos permiten agrupar los en una amplia variedad de subclases fenomenológicas con muchas propiedades similares (Peterson et al., 2000). Algunas propiedades también difieren entre longitudes de onda. La clasificación puede hacerse de acuerdo con la orientación de la fuente, el flujo de radio o las líneas de emisión óptica. Las distribuciones de energía espectrales (SED) muestran las características típicas de cada clase, y las posiciones de pico en estos SED también se pueden usar para la clasificación.

GALAXIAS DE SEYFERT: Estas galaxias fueron el primer tipo de AGNs en descubrirse en 1943. Las galaxias de Seyfert pertenecen a los AGN radio callado, por lo que no son observadas con un jet relativista; por lo general son galaxias tipo espiral. En el régimen óptico aparecen como puntos con un núcleo brillante. Se caracterizan por líneas de emisión ionizadas y estrechas, las cuales nos indican un nivel alto de ionización, en comparación a las galaxias “normales” o starburst. Se pueden separar aún más, ya que algunas galaxias Seyfert muestran líneas Balmer más amplias en sus espectros, causadas por el ensanchamiento Doppler. Este tipo se llama Seyfert 1, y muestran líneas permitidas anchas (H_α , H_β , HII, entre otras), un espectro continuo en UV-X fuerte y variable, con luminosidades de hasta 10^{45} erg/s . En cambio las Seyfert 2 sólo emiten líneas permitidas estrechas debido a que la emisión de la región *Broad-line* (línea ancha) es absorbida por el toroide de polvo frío, estas líneas estrechas en su mayoría, son menos dominantes que la galaxia circundante y su espectro continuo en UV-X es muy débil con respecto al continuo estelar de la galaxia.

GALAXIAS DE RADIO: Son galaxias con emisión de radio no térmica con lóbulos y chorros de radio brillantes y grandes luminosidades de radio que emanan de las proximidades del agujero negro. Las dimensiones de la emisión en radio son más grandes que las dimensiones de la propia galaxia. Son regularmente galaxias elípticas con núcleos activos y son las primeras fuentes emisoras en radio, cuya contraparte óptica fue encontrada.

La distribución de energía espectral (SED) se describe generalmente mediante modelos leptónicos y hadrónicos. Los modelos leptónicos pueden explicar la emisión hasta el rango de energía GeV, por medio de la emisión de *synchrotron self-compton* (SSC) (Fraija, 2014b), y los modelos hadrónicos a energías de TeV por procesos foto-hadrónicos (Fraija, 2014a), (Petropoulou et al., 2014).

De acuerdo con la morfología, esta clase de AGN puede subdividirse de acuerdo a

lo propuesto por Fanaroff and Riley (1974) y se conocen como galaxias Faranoff-Riley de tipo I y II (FR I / II).

FR I es el subgrupo de baja luminosidad que muestra principalmente la emisión de la región cercana al centro y su espectro tiende a ser más empinado. La luminosidad de los chorros de radio galaxias FR I disminuye a medida que aumenta la distancia al núcleo AGN. Tienen luminosidades típicas de $L < 10^{32}$ erg/s /Hz.

En las FR II, por otro lado la emisión es menos brillante hacia el centro y crece hacia las partes externas, con el pico de emisión de radio más lejos del centro. Su espectro tiende a ser más plano y muestra altas luminosidades, dominadas por los lóbulos brillantes de los chorros de radio. Sus luminosidades son más elevadas que las del primer tipo $L > 10^{32}$ erg/s/Hz.

Además de esta clasificación, las galaxias de radio se pueden clasificar en Galaxias de radio de líneas anchas (BLRG) por sus líneas anchas emitidas entre el toroide de polvo y el disco de acreción del AGN, y Galaxias de radio de líneas *angostas/delgadas* (NLRG) por sus líneas delgadas emitidas por la región que se encuentra fuera de la región de líneas anchas y del toroide de polvo; 4.1.

CUÁSARES: Dado que éstas tienen contraparte óptica que muestran una emisión similar a una estrella, reciben su nombre como acrónimo de “Quasi Stellar Object”. Se descubrieron a finales de los años cincuenta y principios de los sesenta como fuentes de radio. Los quásares pertenecen a los AGNs más luminosos ($L > 4 \times 10^{45}$ erg/s). Tienen características espectroscópicas muy similares a las galaxias Seyfert en el óptico y las líneas de emisión que presentan sus espectros son bastante fuertes y típicamente presentan colores muy azules. Definidas sólo por magnitudes absolutas más altas que $M_B > 23$ mag (la magnitud absoluta puede variar pero para QSOs cercanos puede ser hasta de $M \sim 26$). Hay radios silenciosos y quásares ruidosos de radio, y por lo general se pueden encontrar en altos desplazamientos al rojo, se les puede observar con tanta facilidad a pesar de estar tan lejos debido a lo brillantes que son.

BLAZARES: Los blazares se distinguen por una orientación de chorro, que apunta cerca de la línea de visión al observador. Esto resulta a menudo en una variabilidad extrema de flujo. Las escalas de tiempo para las variaciones van desde un año hasta la variabilidad intradía (IDV)¹. La emisión de blazares alcanza todo el espectro electromagnético desde frecuencias de radio hasta energías muy altas (VHE) de más de 1 TeV. Los blazares se pueden subdividir en BL Lacs y FSRQs (Flat Spectrum Radio Quasars). Los blazares a menudo muestran líneas de emisión débiles. Un criterio para la distinción es el ancho equivalente de las líneas de emisión, donde las FSRQ muestran líneas amplias, mientras que en BL Lacs a menudo no se encuentran líneas de emisión. Se puede hacer una distinción adicional por la posición de los picos en los SED. Las fuentes, que son dominantes en las energías de rayos X, por lo tanto, se denominan BL Lacertae (BL Lac) con pico de alta frecuencia (HBL), mientras que las fuentes con un fuerte flujo de radio se declaran como BL Lac con pico de baja frecuencia (LBLS).

La fracción de tiempo en que un blazar es variable (ciclo de trabajo) depende en

¹Las variaciones en el flujo de hasta unas pocas décimas de magnitud en el transcurso de una noche o menos se conocen como variabilidad intradía (Gupta et al., 2008)

gran medida de la fuente SED, estas fuentes se pueden ver en la sección 4.3. Mientras que las HBL tienen ciclos de trabajo de ≤ 0.4 , las LBL tienen ciclos de trabajo de hasta ~ 0.8 y muestran una variabilidad mucho más fuerte. La banda óptica está bien estudiada y se encuentran variaciones en escalas de tiempo de hasta minutos con amplitudes de hasta el 20 % (Wagner y Witzel, 1995). Aquí, el centelleo no puede ser el mecanismo responsable. Típicamente seleccionados X-ray-BL Lac objetos pasar la mayor parte de su tiempo en un estado de reposo, que está interrumpido por grandes estallidos.

La fracción de tiempo en que el BL Lac es variable, el llamado "ciclo de trabajo", depende en gran medida del tipo espectral general de la fuente. Los HBL dominados por rayos X muestran un ciclo de trabajo de 0.4 mientras que los LBL tienen ciclos de trabajo de 0.8 y también muestran una mayor variabilidad. De hecho, mientras que los blazares seleccionados por radio muestran variabilidades de hasta 30 % en un día, este valor es $< 5\%$ para las HBL. La variabilidad² puede ocurrir en todas las energías, pero (Lovell et al., 2008) mostraron que la variabilidad de la radio IDV no es una fuente intrínseca, sino que se correlaciona con el centelleo en el medio interestelar turbulento e ionizado de nuestra propia galaxia.

Las observaciones muestran que la morfología, la orientación y las emisiones varían entre los diferentes tipos de AGN, lo que da origen a la idea de un modelo unificado de AGNs en donde la apariencia morfológica de los distintos AGNs se deben a diferentes ángulos de visión; esta idea fue introducida por Urry and Padovani (1995). El modelo unificado de los AGN se puede observar gráficamente en el esquema de la figura 4.1.

4.3. Proceso de emisión de blazares

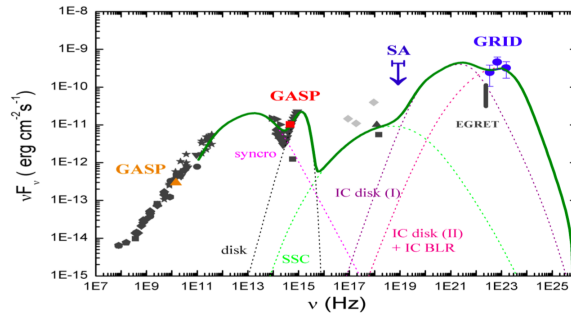


Figura 4.2: Distribución espectral de energía (SED) de un blazar. Las contribuciones de distintos procesos como la radiación sincrotrón y dispersión Compton inversa pueden producir la estructura de la doble joroba que caracteriza la SED. La joroba azul es causa un tercer pico al final de la joroba de baja energía. (Pucella et al., 2008)

La figura 4.2 muestra una SED típica de un blazar. Las contribuciones de diferentes procesos físicos en el rendimiento del jet del AGN producen una estructura

²Para obtener más información sobre la variabilidad, consulte Wagner and Witzel (1995).

de doble joroba, la primer joroba en el régimen de radio es causada por radiación de sincrotrón. Los modelos teóricos actuales asumen que las partículas cargadas relativistas se mueven en el jet con una velocidad v cercana a la de la luz. Éstas deben ser aceleradas por aceleración de Fermi de primer y segundo orden, lo cual, fue propuesto por Fermi en 1954. En este proceso las partículas ganan energía mientras rebotan entre las regiones de choques densos generadas en el jet. Debido a los fuertes campos magnéticos B en el jet, estas partículas cargadas con carga elemental e y masa m están sujetas a la fuerza de Lorentz y son aceleradas por

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \frac{e}{c} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) , \quad (4.7)$$

lo que resulta en movimiento helicoidal. De acuerdo a Rybicki and Lightman (2008), la radiación sincrotrón no térmica está dada por una ley de potencias de la forma: $n(\gamma) d\gamma = n_0 \gamma^{-p} d\gamma$. Junto a la SED de un electrón $P\nu(\gamma)$ nos da como resultado una potencia dada como

$$P(\nu) = \int_1^\infty P\nu(\gamma) n(\gamma) d\gamma \propto \nu^{-\alpha} , \quad (4.8)$$

con un índice espectral de $\alpha = \frac{p-1}{2}$. Por lo que el espectro de nuevo será una ley de potencias con un índice α .

En el rango UV esto observa como una joroba encimada sobre la joroba de baja energía de un AGN, el cual se llama la “gran joroba azul”. Como sugiere Shields (1978), esta emisión surge debido a la radiación térmica del disco de acreción, que proviene de un fotón semilla para la interacción $p\gamma$ que será explicada más adelante. Para la emisión de altas energías de un blazar y que está representada por la segunda joroba grande, se han propuesto distintos modelos por Mannheim (1993) y Böttcher et al. (2013). El modelo leptónico asume que sólo los electrones e^- (y los positrones e^+) contribuyen a la emisión. Las emisiones de altas energías son producidas por dispersión de Compton inversa. En este proceso los electrones relativistas ya emitían fotones de sincrotrón, lo que hace que los fotones se dispersen de bajas energías a altas energías:

$$e^- + \gamma_{be} \rightarrow e^- + \gamma_{ae} \quad (4.9)$$

de acuerdo con Longair (2011) la tasa de pérdida de energía de un electrón en reposo está dada por

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right) = \sigma_T c u_{rad} , \quad (4.10)$$

donde σ_T es la sección eficaz de Thompson y u es la densidad de radiación de energía. Los fotones de altas energías en este modelo pueden superar los 10-100 TeV ((Katz and Spiering, 2012)).

Por otra parte, los modelos lepto-hadrónicos asumen que los electrones y los protones son acelerados a energías ultra relativistas. En este proceso los protones exceden el límite para la producción de mesones que se ven en la ecuación 4.12. El modelo de un jet lepto-hadrónico de AGN se muestra en la figura 4.3. Aquí los fotones de sincrotrón generan fotones semilla para la producción de piones, que decaen en

neutrinos y leptones. De acuerdo con Katz and Spiering (2012), las energías en este modelo pueden superar modelos leptónicos con energías de que superan el rango los PeV. Debido a la absorción del fondo cosmo de microondas (CMB) de estos fotones de ultra-altas energías (UHE) en el proceso.

$$\gamma_{PeV} + \gamma_{CMB} \rightarrow e^+ + e^- . \quad (4.11)$$

La detección de estos fotones en la Tierra no es posible, pero ninguno de estos modelos es descartable debido a que todos tienen en común la capacidad para ajustarse a las mediciones de las SEDs, pero la detección de la emisión de neutrinos del AGN puede ser la llave para confirmar los modelos hadrónicos.

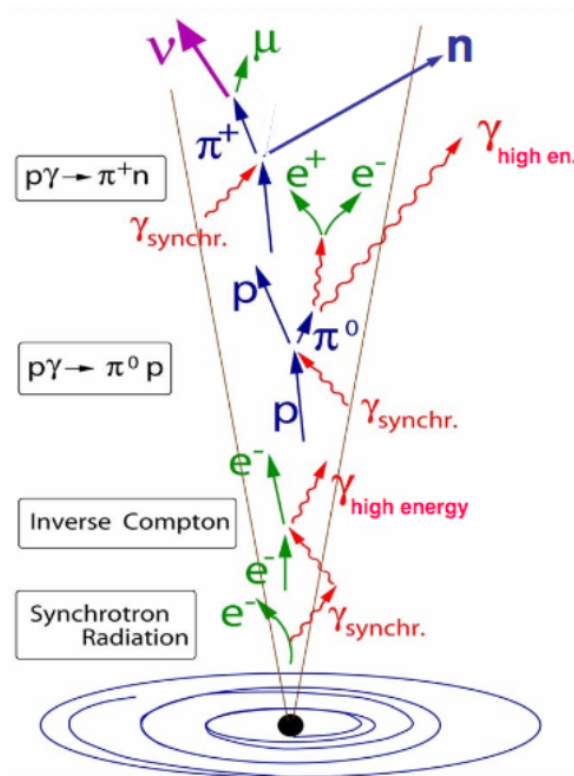


Figura 4.3

4.4. Mecanismo de producción de neutrinos

Como los AGN cuentan con una gran variedad de propiedades observadas, estas fuentes son particularmente interesantes desde el punto de vista de la producción de partículas de alta energía. Para esto el potencial gravitacional y la energía cinética de los AGNs se convierten eficientemente en emisión radiativa a través de la acreción de materia, y la liberación de energía que se ve en algunos casos como dos jets relativistas altamente colimados, dirigidos en sentidos opuestos y perpendiculares al disco de acreción que rodea el agujero negro.

El mecanismo para generar neutrinos es básicamente el mismo para todos los objetos astrofísicos propuestos como fuentes de neutrinos; De acuerdo con Gandhi (Gandhi, 1996), los NAEs (UHE: $E \geq 10^{12} eV$) son producidos por el decaimiento de los mesones $\pi^{(\pm)}$ y la desintegración de las partículas muónicas μ .

$$\begin{aligned}
 & \pi^+ \rightarrow \nu_\mu + \mu^+ \\
 \hookrightarrow & \mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \nu_e + e^+ \\
 & \pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + \mu^- \\
 \hookrightarrow & \mu^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^- \\
 & \mu^0 \rightarrow \gamma + \gamma .
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

En fuentes astrofísicas se requiere que los piones π se creen por interacciones hadrónicas

$$\begin{aligned}
 p + p & \rightarrow \pi^0 + p + p \\
 p + p & \rightarrow \pi^+ + p + n ,
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

e interacciones foto-hadrónicas

$$\begin{aligned}
 p + \gamma & \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^+ + n \\
 p + \gamma & \rightarrow \Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p .
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Asumiendo una producción igual de π^+ y π^0 puede resultar en un radio fotón-neutrino de

$$\gamma : \nu_\mu : \nu_e : \nu_\tau = 2 : 2 : 1 : 0 . \tag{4.15}$$

Tomando el efecto de oscilación de neutrinos para distancias cosmológicas, se puede esperar una muestra homogénea de sabores de neutrinos

$$\gamma : \nu_\mu : \nu_e : \nu_\tau = 2 : 1 : 1 : 1 . \tag{4.16}$$

Esto nos ayuda a encontrar un límite aproximado en el flujo de neutrinos y fotones $-\gamma: F_{nu} \sim F_\gamma$. Los Blazares tienen una salida bolométrica que algunas veces excede $L > 10^{48} \frac{erg}{s}$ (Tavecchio, 2010). Ya que estos objetos astrofísicos dominan el cielo con energías de alrededor de 100 MeV (Tavecchio, 2010), los blazares son candidatos para fuentes de NAEs.

Capítulo 5

Destellos de Rayos Gamma

Los destellos de rayos gamma GRB ¹ son los eventos astrofísicos más energéticos detectados del universo visible con energías de $10^{51} - 10^{53} \text{ergs}$ en un tiempo muy corto. En este capítulo se describirá como fueron descubiertos y como la ciencia alrededor de ellos.

5.1. Historia

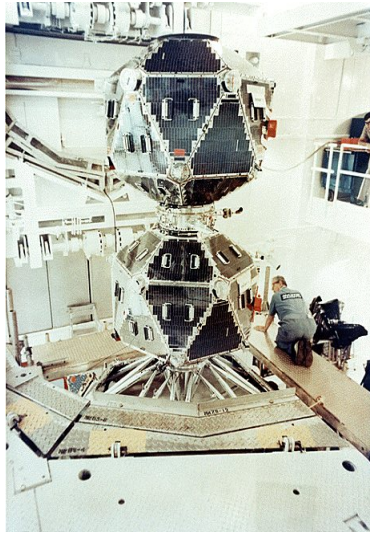
Durante la guerra fría, en 1963 la Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS) y los Estados Unidos de América (EU), firmaron el tratado de prohibición parcial de ensayos nucleares. Dada la tensión internacional de la época, EU lanzó el proyecto *Vela* para detectar posibles detonaciones nucleares por parte de la URSS. Este proyecto constaba de 12 satélites capaces de detectar destellos de rayos gamma; sin embargo en 1967 se detectó un destello de rayos gamma en varios satélites, del cual los datos apuntaban a que la cantidad de rayos gamma y el tiempo en el que éstos se atenuaban; tenían un pico fuerte de emisión pero corto y después un pulso más bajo duradero por lo que no pertenecían al de una detonación de armamento nuclear.

La solución a este dilema llegó en 1969 cuando se lanzaron los satélites *Vela 5a/b* y *6a/b*, los cuales tenían una mejor precisión en el tiempo para saber la dirección de donde venían estos destellos. Los resultados no fueron publicados sino hasta 1973 por (Klebesadel, 1973), donde se concluía que estas emisiones de rayos gamma provenían del espacio. Las detecciones de emisiones en gamma presentan distribuciones bimodales en su etapa temprana conocida como *prompt emisison* ².

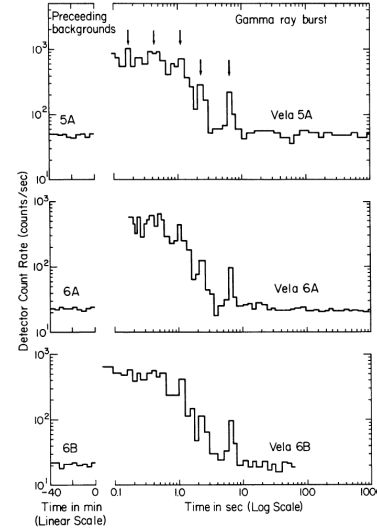
Un año después los satélites soviéticos *Konus* confirman la detección de estas emisiones en gamma, sin embargo en 1979 se encuentra un transiente raro de rayos gamma, en la supernova N49 de la Gran Nube de Magallanes, lo que crea una controversia ya que no se creía que estas emisiones provinieran de fuentes extragalácticas, sin embargo, los *Soft Gamma Repeaters* de *ASCA* demostraron que las emisiones sí provenían de fuentes muy distantes. En 1991 el satélite del observatorio de rayos gam-

¹GRB por sus siglas en inglés de Gamma Ray Burst

²emisión pronta de su traducción del inglés



(a) Fotografía del satélite Vela 5b



(b) La tasa de conteo en función del tiempo del GRB700822.

Figura 5.1: En la imagen a del lado izquierdo se muestra la fotografía de uno de los satélites del proyecto Vela y en el lado derecho una grafica de las detecciones en conteos de las detecciones del proyecto Vela obtenidas en (Klebesadel, 1973)

ma compton (*CGRO*) fue lanzado con el experimento satelital de fuentes de destellos y transitorios (*BATSE*). Con la base de datos generada por *BATSE* se encontró que los GRBs estaban distribuidos en todo el mapa del cielo, lo cual vino a reforzar la idea de que estos tenían origen extragaláctico, idea que fue confirmada por el descubrimiento de una emisión tardía de rayos x observada por el satélite *Beppo-SAX* (Costa, 1997).

5.2. Emisión temprana

La emisión temprana de los GRBs es la parte más importante de los GRBs; la emisión de rayos gamma puede durar varios cientos de segundos, y usualmente no viene sola, sino que se detecta junto a emisiones en rayos X (Piran, 2005b), algunas veces las detecciones de rayos γ son muy débiles por lo que las emisiones en rayos X tienen mayor posibilidad de ser observadas; en estos casos, los GRBs son llamados destellos de rayos X (XRF). El espectro de rayos gamma producido por un GRB es no térmico al igual que los AGNs (como se vio en la sección 4.3) debido a los procesos de aceleración de las partículas. En muchos casos esto puede ser ajustado empíricamente por dos leyes de potencias, que se acoplan suavemente con una energía de ruptura (E_{break}). Esta función es llamada función de Band (Band et al., 1993), y puede ser descrita como

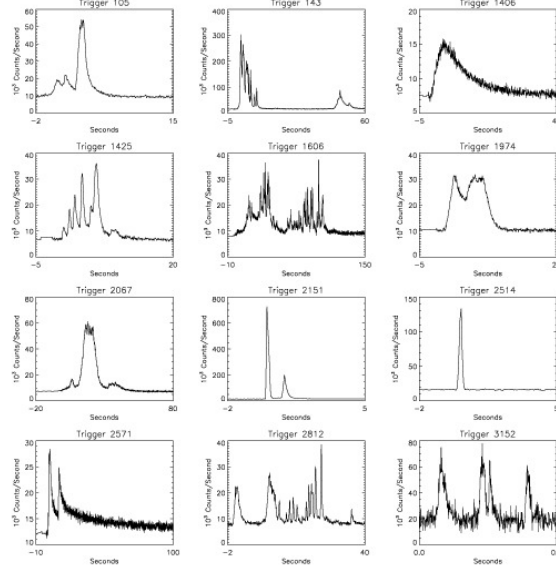


Figura 5.2: Curvas de luz de GRBs observadas por el instrumento BATSE a bordo del satélite CGRO (Fishman and Meegan, 1995)

$$N_E(E) = \begin{cases} A \left(\frac{E}{100 \text{keV}} \right)^\alpha \exp\left(-\frac{E}{E_{break}} \right), & \text{para } E \leq (\alpha - \beta) E_{break}; \\ A \left[\frac{(\alpha - \beta) E_{break}}{100 \text{keV}} \right]^{(\alpha - \beta)} \left(\frac{E}{100 \text{keV}} \right)^\beta \exp(\beta - \alpha), & \text{para } E \geq (\alpha - \beta) E_{break} \end{cases} \quad (5.1)$$

donde A es el parámetro de escala. Para los parámetros espectrales $\alpha \approx -1$ y $\beta \approx -2$, la función de Band puede describir mejor el espectro de un GRB. Una gran cantidad de destellos muestran una estructura de tiempo muy distintas unas de las otras, como se muestra en la figura 5.2. Estas estructuras se presentan en una escala de tiempo muy corto, en comparación con el tiempo de duración total del brote; sin embargo, es muy significativa e importante para clasificar GRBs a partir del tiempo T_{90} que se explicara mas adelante a detalle. Muchas de estas estructuras pueden ser interpretadas como pulsos subsecuentes, con propiedades interesantes, las cuales se presentan en la mayoría de estos destellos. Primero, el ancho de los pulsos de una amplitud dada es constante la emisión temprana (el tiempo que se emiten los rayos γ). De modo que, si los pulsos se clasifican de acuerdo a su intensidad, el promedio del ancho de los pulsos más brillantes pueden no desarrollarse durante el GRB y lo mismo pasaría para el promedio de los pulsos menos brillantes. Sin embargo, el promedio de los pulsos menos brillantes será más ancho que el de los que tienen mas brillo (Ramirez-Ruiz and Fenimore, 2000b).

Otra característica interesante de estos pulsos puede ser observada fácilmente a partir de los resultados de BATSE. Este instrumento tiene distintos canales correspondientes a distintas energías. Las emisiones observadas en los canales de bajas energías tienen un retraso con respecto a los canales de altas energías. Este retraso entre los pulsos de altas y bajas energías no está relacionado con la luminosidad del GRB, un

retraso pequeño implica una baja luminosidad (Norris et al., 2000). Esto permitió deducir la luminosidad del GRB, incluso sin medir el corrimiento al rojo (Norris et al., 2000). Otro método basado en la variabilidad de la estructura del tiempo, nos da una relación de variabilidad-luminosidad que puede ser usada para inferir luminosidad sin necesidad de conocer su corrimiento al rojo (Fenimore and Ramirez-Ruiz, 2000).

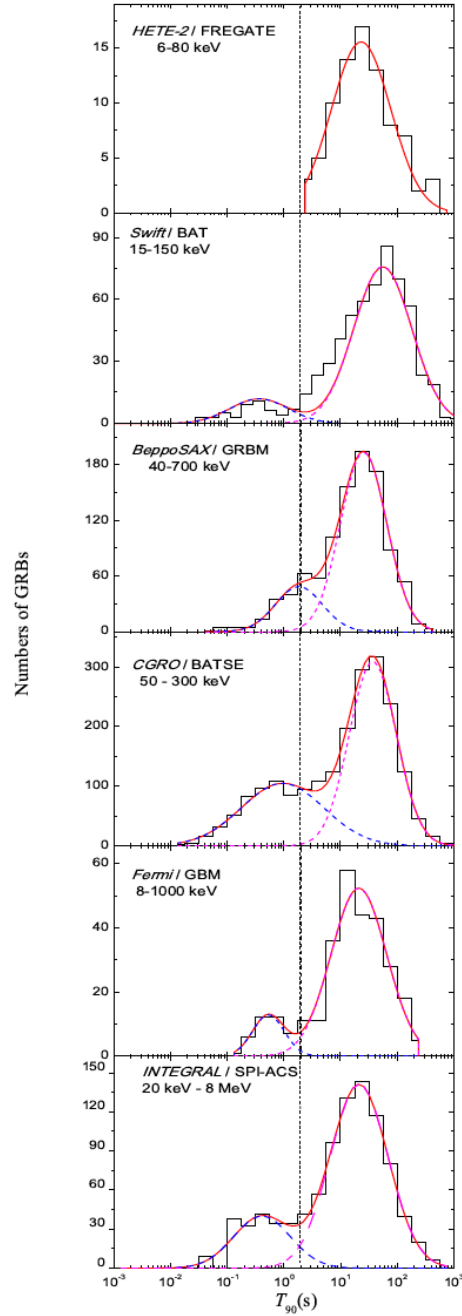


Figura 5.3: Comparación de la distribución T_{90} de una muestra del *Gamma-ray Burst Monitor* del instrumento *LAT* del satélite *Fermi* en la banda de 8-1000 keV y las distribuciones obtenidas de las misiones HETE-2 / FREGATE, BeppoSAX / GRBM, CGRO / BATSE, Swift / BAT, INTEGRAL / SPI-ACS (Qin et al., 2012).

Como se mostrará en la sección 5.4.2, la anchura de los pulsos indica que el mecanismo de los choques internos, donde varias capas de plasma denso están colisionando unas con otras, se puede vincular al grosor de las capas en colisión (Ramirez-Ruiz and Fenimore, 2000b).

Para medir el tiempo de la duración de emisiones de rayos γ se usa el tiempo T90 el cual es el tiempo que se encuentra entre la emisión del 5% y el 95% del flujo total medido durante el GRB (Kouveliotou et al., 1993). Una distribución de T90 se muestra en la figura 5.3, donde se puede observar una distribución bimodal. El destello correspondiente a la primera distribución es llamado destello corto (SGRB), ya que su duración es corta ($<2s$) a la de los destellos largos (LGRB) ($>2s$) (Kouveliotou et al., 1993).

La duración no es la única diferencia entre SGRBs y LGRBs, ya que los SGRB tienden a ser más energéticos que los LGRBs (Kouveliotou et al., 1993) como se observa en la figura 5.4. Luego del descubrimiento de los GRB se creía que tanto los largos como los cortos tenían el mismo origen, sin embargo, esta idea ha cambiado las nuevas observaciones. La distribución del ancho de pulsos y el número de los pulsos por brote difieren entre SGRBs y LGRBs, fortaleciendo la idea de dos tipos de población. Sin embargo, se encontró que las ráfagas cortas muestran estructuras espectrales y temporales similares a las de los dos primeros segundos de las largas, lo que indica que el motor interno tal vez funcione de maneras muy similares (Ghirlanda et al., 2004).

El solamente considerar la emisión pronta de los LGRB y SGRB está lejos de ser una solución para encontrar el origen común de éstos. La diferencia se ve más clara cuando se compara la emisión de la emisión tardía, como se verá en la siguiente sección.

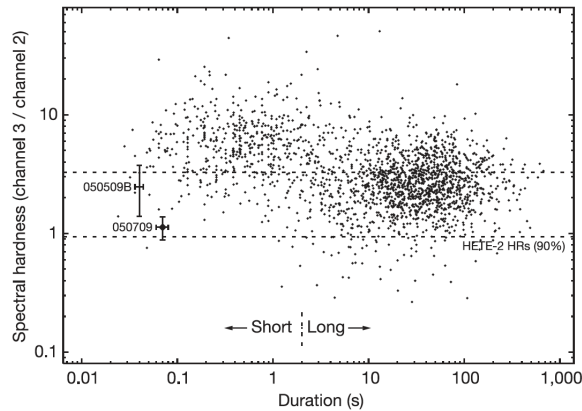


Figura 5.4: Las propiedades de GRB 050709 hacen que se ubique claramente población de SGRB, tal como se observa en el Experimento Burst And Transient Source (BATSE). El primer pulso altamente brillante fue más corto que la mayoría de los GRB cortos y mas brillantes de BATSE (Hjorth et al., 2005).

5.3. Emisión tardía

La emisión tardía de un GRB surge cuando la emisión de rayos gamma se termina y las observaciones comienzan a ser dominadas por las emisiones de rayos X, varias horas después del destello; sin embargo, esta radiación electromagnética se mueve hacia la longitud de onda del óptico, luego hacia el infrarrojo y finalmente hacia la longitud de onda del radio. Algunas veces se pueden observar “flashes” del óptico durante la fase de la emisión pronta, pero esta no se tiene que considerar como una cola de baja energía de la emisión en rayos γ (Piran, 2005b).

En la mayoría de los casos, los GRBs que son bien ubicados tienen una emisión tardía en IR y óptico; si la emisión tardía en óptico no se observara, el GRB también es llamado GRB oscuro. Este fenómeno se podría considerar como otra clasificación de los GRBs pero puede ser causado a su vez por tener un origen en galaxias con mucho polvo, lo que genera que la luz sea absorbida (Volnova et al., 2013).

Una propiedad interesante de la emisión tardía es su falta de correlación con la emisión pronta. Cuando se trata de extrapolar en reversa el componente de los rayos X de la emisión tardía, el espectro producido no se ajusta a la emisión de rayos gamma de la fase pronta, lo que indica que ambas fases se dan por mecanismos muy diferentes.

La detección de la emisión tardía es necesaria para determinar la distancia a la que se encuentra el GRB de la tierra, obteniendo su redshift para identificar la galaxia de donde éste proviene. Hasta antes de 2005, se suponía que los SGRBs no tenían emisión tardía, ya que ese año se pudo caracterizar la emisión tardía del GRB050709³ e identificar el sitio de emisión del destello.

Una primera diferencia entre los SGRBs y LGRBs es que la emisión tardía de rayos X que se encontró era mucho más débil para los SGRB que la típica de los LGRBs. Además, a diferencia de los destellos largos, en los cortos no se han encontrado supernovas tipo Ic (originadas por el colapso del núcleo estelar) en su vecindad (ver (Filippenko, 1997)). Cuando combinamos estas diferencias entre SGRBs y LGRBs con los comentados en la sección 5.2, parece que los orígenes de éstos provienen de distintos progenitores.

La detección de la emisión tardía en radio ha llevado a conclusiones interesantes. La curva de luz de emisiones en radio puede ser usada para inferir el tamaño del GRB una vez pasadas cuatro semanas de brote (Piran, 2005b) con medidas de 0.01 pc. Esta medida es prueba de la naturaleza relativista del jet (Frail et al., 1997); y debido a la naturaleza relativista del flujo de salida es muy probable que el jet sea emitido. En este caso es muy probable que sólo una fracción de los GRBs no sean observables, y sólo veríamos los que nos apuntan. Durante la emisión tardía el flujo de salida pierde energía y la eyección se vuelve cada vez menos relativista. A consecuencia de esto una emisión tardía retrasada más de lo normal, puede ya no ser emitida, por lo que sería observable desde cualquier punto. En este caso, se detectaría una emisión tardía sin progenitor.

³El nombre del GRB depende de su fecha de descubrimiento, debido a que el GRB050709 fue encontrado el día 9 de julio de 2005, en el caso de encontrar varios GRBs en un sólo día una letra (A,B,C...) los distinguirá por orden de detección.

5.4. Mecanismos de aceleración de partículas

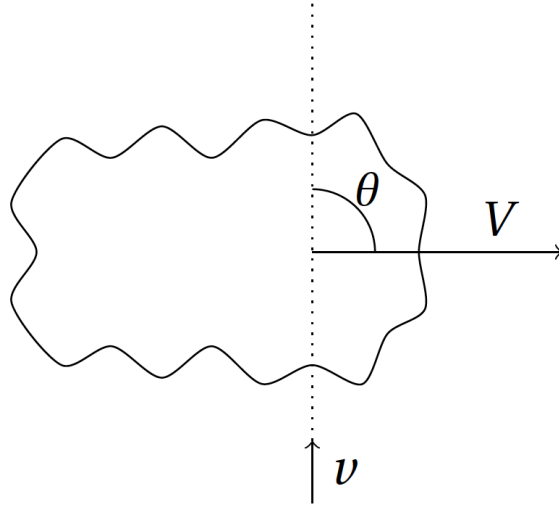


Figura 5.5: Interacción de una partícula cargada con una nube de plasma.

5.4.1. Aceleración de Fermi

Antes de describir cómo ocurre la aceleración de las partículas durante la emisión pronta y la emisión tardía, es conveniente describir un mecanismo que sea capaz de acelerar las partículas a tan altas energías. El mecanismo de Fermi fue introducido por Enrico Fermi en los años 40, el cual es un mecanismo de segundo orden, dado que $\beta^2 = \left(\frac{V}{c}\right)^2$, en donde V es la velocidad de la nube de gas (como se muestra en la figura 5.5). Esta dependencia hace decrecer la eficiencia del mecanismo, especialmente para $V \ll c$. A primer orden el mecanismo de aceleración es usado para describir la aceleración en los GRBs.

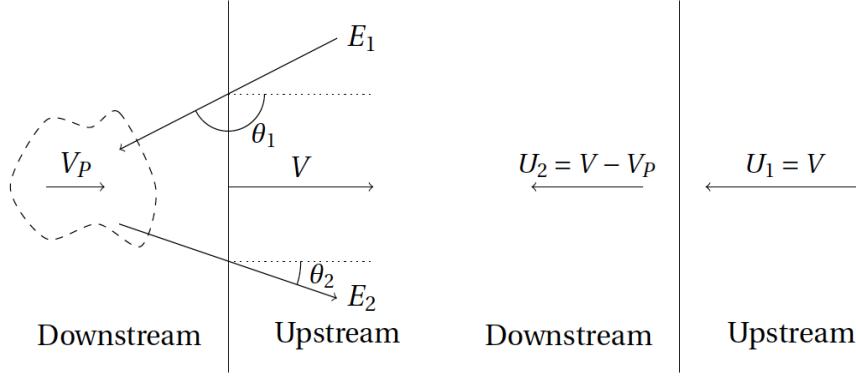
Para seguir el proceso de aceleración de Fermi, primero debemos tener una simplificación de cómo calcular la ganancia de energía de una partícula que cruza la zona de choque múltiples veces⁴. Estos choques son formados en regiones de plasma densas que se mueven a una región de plasma de menor densidad. Al plasma denso ubicado antes del choque se le conoce como región de *downstream*, y la región de plasma menos denso ubicada después del choque como *upstream*.

Según el cálculo realizado por (Protheroe and Clay, 2004), se considera la región de *downstream* como una región de baja densidad en reposo, como se muestra en la figura 5.6a una partícula con energía E_1 y momento $E_1 = \frac{E_1}{c}$. La masa de la partícula puede ser despreciada dadas las altas energías. Después la interacción, el choque y la partícula ahora tiene una energía E_2 y momento $P_2 = \frac{E_2}{c}$

La región *downstream* en reposo (etiquetada con una comilla)

$$E_1' = \gamma E_1 (1 - \beta \cos\theta) \quad \text{donde} \quad \beta = \frac{U_1 - U_2}{c} = \frac{V_p}{c} \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (5.2)$$

⁴un tratamiento más riguroso puede ser encontrado en Jones and Ellison (1991).



(a) Marco de referencia de la región *upstream* en reposo.

(b) Marco de referencia de un choque en reposo

Figura 5.6: Interacción de la partícula en un marco de referencia donde el choque está en reposo, en ambas imágenes lado izquierdo representa la región *downstream* y el lado derecho la región *upstream* con esta última en reposo. En la figura (a) muestra las velocidades de las dos regiones con un choque en reposo (Brayeur, 2015). (b) La partícula gana energía al interactuar con el plasma en el otro lado del choque.

donde U_1 y U_2 es la velocidad de las regiones *upstream* y *downstream* del plasma respectivamente, esto en el marco de referencia estático de un choque, V_p y V son las velocidades de la región *downstream* y del choque respectivamente. En este marco de referencia en reposo del *upstream*:

$$E_2 = \gamma E_2' (1 + \beta \cos \theta') \quad (5.3)$$

En el marco de una *downstream* estático, la partícula tiene la misma energía cuando entra y sale, por lo que $E_1' = E_2'$. Esto hace que la ganancia de energía sea

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1} \quad (5.4)$$

$$= \frac{\gamma E_2' (1 + \beta \cos \theta_2') - \frac{E_1'}{(1 - \beta \cos \theta_1)}}{(1 - \beta \cos \theta_1)} \quad (5.5)$$

$$= \gamma^2 (1 + \beta \cos \theta_2') (1 - \beta \cos \theta_1) - 1 \quad (5.6)$$

$$= \frac{(1 + \beta \cos \theta_2' - \beta \cos \theta_1 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2')}{1 - \beta^2} - 1 \quad (5.7)$$

$$= \frac{(\beta^2 + \beta \cos \theta_2' - \beta \cos \theta_1 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2')}{1 - \beta^2} \quad (5.8)$$

Ahora debemos promediar sobre los valores de θ_1 y θ_2' . La probabilidad para que una partícula interactúe es proporcional a la tasa de partículas que atraviesan el choque en un ángulo θ_1 . En el caso de una aceleración de segundo orden se tiene que considerar la interacción de una nube con velocidad V . La tasa de interacción de una partícula en movimiento de velocidad v es proporcional a $v - V\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre \vec{v} y \vec{V} . Esto nos brinda una probabilidad por unidad de ángulo sólido o el equivalente el cambio de $\cos\theta$:

$$\frac{dP}{d\cos\theta} \propto 1 - \beta\cos\theta \quad \text{para } \theta \in [0, \pi]. \quad (5.9)$$

En el caso del choque (aceleración de primer orden), esta probabilidad se convierte en

$$\frac{dP}{d\cos\theta} \propto \cos\theta + \beta \quad \text{para } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]. \quad (5.10)$$

Esto se debe al hecho de que para una partícula que interactúa con un plasma en un lado del choque, el plasma que se encuentra del otro lado del choque se mueve hacia éste sin importar el ángulo θ . Si por ejemplo ángulo es $\theta = \frac{\pi}{2}$, la probabilidad de que el plasma interactúe con el choque es proporcional al plasma de alta densidad de la corriente alta. Esto es diferente en la nube en donde $\theta = \frac{\pi}{2}$ corresponde a una partícula que se mueve hacia una nube con una velocidad perpendicular a la velocidad de la nube, como se observa en la figura 5.5. Para esto la probabilidad de que ocurra una interacción es proporcional a la velocidad de la partícula y no a la de la nube.

El promedio para $\cos\theta_1$ puede ser escrito como

$$\langle \cos\theta_1 \rangle = -\frac{\int \cos\theta_1 \frac{dP}{d\cos\theta} d\cos\theta_1}{\int \cos\theta_1 d\cos\theta_1} \quad (5.11)$$

$$= \frac{\int \cos^2\theta_1 \sin\theta d\theta + \beta \int \cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1}{\int \cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1 + \beta \int \sin\theta_1 d\theta_1} \quad (5.12)$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} (\cos^3(\frac{\pi}{2}) - \cos^3(0)) - \beta \frac{1}{2} (\cos^2(\frac{\pi}{2}) - \cos^2(0))}{-\frac{1}{2} (\cos^2(\frac{\pi}{2}) - \cos^2(0)) - \beta (\cos(\frac{\pi}{2}) - \cos^2(0))} \quad (5.13)$$

$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}}{\frac{1}{2} - \beta} \quad (5.14)$$

En el caso de un choque no relativista ($\beta \ll 1$), $\langle \cos\theta_1 \rangle \approx \frac{2}{3}$. Un argumento similar nos da $\langle \cos\theta_2' \rangle = -\frac{2}{3}$ para obtener finalmente

$$\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} \sim \frac{4}{3}\beta = \frac{4}{3} \frac{U_1 - U_2}{c} \quad (5.15)$$

En el caso de una aceleración de segundo orden, tenemos que los promedios son $\langle \cos\theta_1 \rangle = \frac{\beta}{3}$ y $\langle \cos\theta_2' \rangle = 0$. Dado que la dirección de la partícula que sale de la nube se observa desde el marco en el que la nube se encuentra en reposo, entonces tenemos una aceleración menos eficiente dada por $\frac{\langle \Delta E \rangle}{E} \approx \frac{4}{3}\beta^2$.

Otra forma de calcular la ganancia de energía que tiene una partícula después de cruzar la zona del choque, es considerando la ganancia de momento, dado que la magnitud del momento no cambia cuando la partícula cruza el choque en el marco de un choque en reposo, y cambiando a un marco donde la región de *downstream* está en reposo (Drury, 1983). Una tercera explicación (Jones and Ellison, 1991), es con la ecuación de difusión de plasma, la cual además calcula la ganancia de momento sin implicar ningún cambio de referencia cuando la partícula cruza el choque. Siguiendo estos dos procedimientos alternativos, obtenemos que el cambio en el momento al cruzar el choque para una partícula con momento P y la velocidad v , en el caso de un plasma de corriente arriba que se mueve con una velocidad U_1 y un plasma *downstream* se mueve con velocidad U_2 cuando se toma el marco de un choque en reposo como se observa en la figura 5.6b el resultado es

$$\frac{2}{3} \frac{P}{v} (U_1 - U_2). \quad (5.16)$$

Este resultado, mostrado en 5.16, es válido para partículas que se desplazan de la *upstream* a la *downstream*, y viceversa. Lo anterior debido al hecho de que el plasma en un lado del choque siempre ve el plasma en el otro lado del choque, que va en dirección del primero; esto debido a que el choque es muy eficiente. Siguiendo este marco de referencia, la partícula se mueve a velocidades relativistas cruzando el choque dos veces. La ganancia de momento/energía equivalente (usando $p \approx E/c$) se ve justo como el resultado previo en la ecuación 5.15. El cálculo anterior es una simplificación usada para entender la física del mecanismo de aceleración del choque. En un cálculo más realista se tiene que tomar en cuenta el campo magnético y el hecho de que este tiene una diferencia de dirección con el flujo de velocidades, dado que el campo magnético no siempre esta en una dirección paralela a la velocidad del plasma, ni a la normal del choque, lo cual genera una aceleración extra debido a la inducción del campo eléctrico. Esta aceleración es llamada aceleración de choque de empuje (Jones and Ellison, 1991).

En el marco de referencia del choque en reposo, en ambos lados del choque el plasma se mueve a la región de *downstream* (como se ve en la figura 5.6b). Esto causa que la partícula escape a la región donde se encuentra el choque. Pero las partículas podrían girar alrededor del choque al tener un campo magnético alrededor; estas partículas pueden cruzar el choque múltiples veces y ganar energía cada vez que lo hacen. Siempre que una partícula logra escapar o regresar al choque, vuelve a la región de *downstream* en cada uno de estos retornos.

Cuando la energía dada es dependiente de la intensidad es el campo magnético, el radio de giro asociado a la partícula se vuelve demasiado grande para que la partícula permanezca en el sitio de aceleración y se escape.

Para una partícula acelerada por medio del mecanismo de choque, calculamos espectro de energía de la partícula, sabiendo que la partícula tiene una energía inicial E_0 antes de interactuar con el choque, y después de cruzarlo la energía se da como:

$$E = E_0 \left(1 + \frac{\langle \Delta E \rangle}{E} \right)^m. \quad (5.17)$$

De esta ecuación podemos determinar m , dado el número de veces que la partícula ha cruzado el choque desde una energía E_0 hasta obtener una energía E ; este cálculo para m es

$$m = \frac{\ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\langle\Delta E\rangle}{E}\right)} \quad (5.18)$$

El número de partículas con una energía mayor a E es proporcional a la probabilidad de que la partícula regrese al choque, por lo que

$$N(> E) \propto [1 - P(\text{escape})]^m \quad (5.19)$$

y obtenemos

$$\ln N(> E) = B - (\Gamma - 1)\ln E, \quad (5.20)$$

donde

$$\Gamma = \left(1 - \frac{\ln[1 - P(\text{escape})]}{\ln\left(1 + \frac{\langle\Delta E\rangle}{E}\right)}\right), \quad (5.21)$$

con B constante.

Γ puede ser expresado en términos del radio/índice de compresión para un choque fuerte no relativista $R = \frac{U_1}{U_2}$, de lo cual tenemos que

$$\Gamma \approx \frac{R + 2}{R - 1}, \quad (5.22)$$

por lo que

$$N(> E) \propto E^{(\Gamma-1)} \quad \text{y} \quad \frac{dN}{dE} \propto E^{-\Gamma}. \quad (5.23)$$

En el caso de un choque fuerte, $R = 4$ lo que nos da

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-2}. \quad (5.24)$$

Este es el resultado principal de la aceleración de Fermi. En el caso de los GRBs, usualmente se toma el caso relativista bajo el mismo concepto pero con resultados un poco diferentes.

5.4.2. Emisión temprana y tardía

La curva de luz muestra evidencia para suponer que los GRBs provienen de objetos compactos; estos progenitores al tener un tamaño pequeño R_0 , afectan directamente a la profundidad óptica τ_{opt} , la cual se expresa como

$$\tau_{opt} \sim 10^{15} \left(\frac{L_\gamma}{10^{52}\text{erg/s}}\right) \left(\frac{100\text{km}}{R_0}\right) \left(\frac{1\text{MeV}}{E_\gamma}\right) \quad (5.25)$$

Donde L_γ es la luminosidad del GRB y E_γ la energía de los rayos gamma. Para la aproximación 5.25, el medio es ópticamente grueso debido a los procesos de producción de pares. Alimentada por la presión de radiación, la bola de fuego se expandirá a velocidades relativistas hasta que se vuelva transparente a la radiación. De hecho, si la expansión no fuera relativista, dada la energía de los fotones que observamos, el medio seguirá siendo ópticamente grueso y observaríamos un espectro de cuerpo negro en contradicción con las observaciones. Sin embargo, si el flujo de salida de fotones se dirige hacia nosotros en energías relativistas, los fotones serán corridos al azul. Ello implica que los fotones en la fuente tienen energías más bajas. El requisito de un medio ópticamente delgado establece un límite inferior en el factor de Lorentz aumentado $\Gamma = 100$ (Piran, 2005b). La expansión relativista de la bola de fuego es confirmada por la observación de radio del resplandor posterior, como se explica en la Sección 5.3.

De acuerdo con el modelo de la *fireball*, el espectro no térmico se crea por la disipación de la energía cinemática de la bola de fuego relativista en expansión, a través de los choques después de que el medio se vuelve ópticamente delgado (Mészáros and Rees, 1997). Una forma de visualizar lo que sucede es imaginar que el progenitor expulsa densas capas de plasma, seguido de la emisión de un plasma más delgado (Halzen and Hooper, 2002). Las conchas en movimiento se convierten en múltiples frentes de choque. Se esperan dos tipos de choques. Los choques internos ocurren cuando una capa alcanza a otra que se mueve a una velocidad más baja. Se cree que esto produce la emisión pronta. Por otro lado, los choques externos que se producen cuando el medio interestelar (ISM) reduce la velocidad las capas podrían ser responsables del retardo.

La alta variabilidad de los GRB se puede explicar de varias maneras. Uno de los escenarios asume que sólo ocurren choques externos. En tal caso, la estructura temporal de los GRB surge de la interacción entre la eyección y las inhomogeneidades del ISM. Sin embargo, esto requiere ciertas suposiciones para estas inhomogeneidades que son difíciles de cumplir (Fenimore et al., 1996). Otra posibilidad que parece más probable implica choques internos. Durante los choques internos, la radiación producida por todas las capas aceleradas de plasma se ve perturbada por las colisiones de las capas que se producen cuando una más rápida alcanza una más lenta.

En esta representación, el ancho de los pulsos que surgen en la estructura temporal se relaciona con el espesor de las capas en colisión (Ramirez-Ruiz and Fenimore, 2000a). Los choques internos son la consecuencia directa de la variabilidad del motor interno. Por lo tanto, la estructura temporal de los GRB refleja la variabilidad de la fuente (Fenimore et al., 1996), (Piran, 2005a). La suposición de que las estructuras cortas que surgen en los espectros de GRB están causadas por choques internos se ha confirmado mediante simulaciones numéricas (Ramirez-Ruiz and Fenimore, 2000a). En estas simulaciones es necesario restringir el factor de impulso de Lorentz para reproducir el espectro de ley de potencia observado. Este límite da el máximo $\Gamma \sim 1000$ (Ramirez-Ruiz and Fenimore, 2000a). Por lo tanto $\Gamma \epsilon [\sim 100, \sim 1000]$.

Una vez que las capas eyectadas interactúan con el ISM y producen los choques externos, aparece un choque inverso que se remonta al progenitor (Laskar et al., 2013), (Piran, 2005a). En consecuencia, se pueden dividir las diferentes regiones alrededor

de la ráfaga en 4 partes, como se muestra en la Figura 5.7. La región 4 corresponde al ISM antes de que ocurra el choque directo. La región 3 es la materia chocada después del choque directo. La región 2 corresponde a la materia afectada que se ha vuelto a aplicar por el choque inverso y la región 1 es la región donde sólo se producen los choques internos

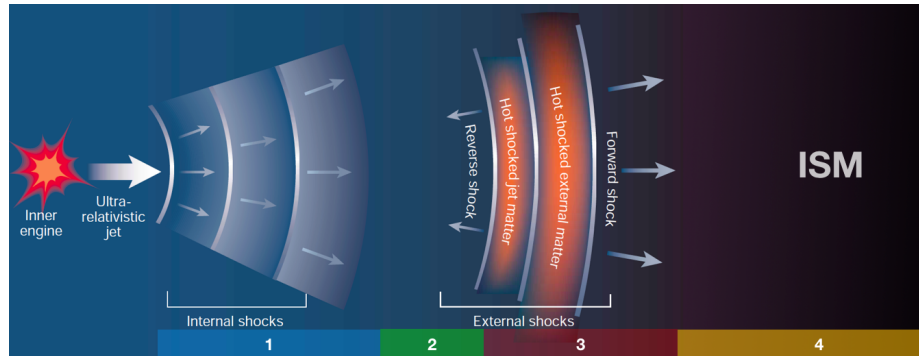


Figura 5.7: Vista de las 4 regiones descritas en el texto, imagen original de Piran (2003)

5.4.3. Posibles progenitores

Como se menciona en 5.3 dadas las diferencias entre los GRBs largos y cortos, se piensa que éstos provienen de distintos progenitores.

Los GRB largos se observan a menudo en galaxias con una alta tasa de formación de estrellas (SFR⁵) (Piran, 2005b). A menudo se encuentran cerca de una supernova tipo Ib o Ic, lo que indica que los GRB largos podrían provenir del colapso de estrellas muy masivas en agujeros negros (Mészáros and Rees, 1997). A este modelo se le conoce como modelo de colapso (Piran, 2005b). El núcleo de una estrella de $\sim 30 M_{\odot}$ colapsa, lo que deriva en una hipernova en la que surge un agujero negro del colapso y aparece un disco de acreción. La bola de fuego sería producida por la transformación de la energía gravitacional en energía cinética (Halzen and Hooper, 2002), (Meszaros, 2006). En este modelo, la emisión rápida se explica por medio de colisiones internas entre capas dentro de la estrella y el jet .

Los SGRBs se localizan en galaxias con muchos tipos de SFR. A diferencia de los *LGRBs*, no hay evidencia de supernovas relacionadas con ellas. La creencia general es que los *SGRBs* se producen a partir de la fusión de dos objetos compactos, como dos estrellas de neutrones o de una estrella de neutrones y un agujero negro. Sin embargo, el 17 de agosto de 2017 la colaboración de los observatorios de ondas gravitacionales *LIGO* y *VIRGO*, junto a otros observatorios como *Swift* y *Fermi*, lograron corroborar que los *LGRBs* provienen del colapso de objetos compactos; en este caso, se corroboró que el progenitor provenía de la colisión de dos estrellas de neutrones.

⁵De la contracción de Star Formation Rate

5.5. Mecanismo de producción de neutrinos

Se espera que se produzcan neutrinos con varias energías en los GRB. En las supernovas, casi toda la energía es arrastrada por los neutrinos térmicos de alrededor de 10 MeV. En el caso de los GRB, estos neutrinos térmicos pueden esperarse alrededor de energías de ~ 100 MeV (Halzen and Hooper, 2002).

En el caso de una densidad de protones significativa, los neutrinos de GeV a decenas de GeV podrían producirse por interacciones protón-protón o proton-neutron (Mészáros and Rees, 1997), (Mannheim et al., 2000). Cuando la energía de protones aumenta a más de 106 GeV, el proceso dominante para la producción de neutrinos se convierte en las interacciones protón-fotón (Becker, 2008). Se esperan neutrinos de mayor energía a partir de tales interacciones entre protones acelerados y fotones de alta energía. Es probable que esto suceda si los GRB provienen del colapso de una estrella masiva o de la ya comprobada (revisar la sub sección 5.4.3) fusión de objetos compactos.

Por supuesto, esta posibilidad requiere que los protones estén presentes en el modelo hadrónico de la bola de fuego la cual es una de las teorías más prósperas para explicar la emisión temprana y tardía ((Zhang and Meszaros, 2004); (Meszaros, 2006)), donde la emisión temprana se da por colisiones internas entre capas dentro de la estrella y el jet.

En este modelo, la emisión rápida se explica a través de colisiones internas de las capas, donde las capas más rápidas (Γ_f) capturan capas más lentas (Γ_s). Estos choques internos tienen lugar a una distancia de $r_j = 2\Gamma^2 t_\nu$, con t_ν dada por la escala de tiempo de variabilidad del objeto central y el factor de Lorentz $\Gamma \simeq \sqrt{\Gamma_f \Gamma_s}$ en masa del choque de propagación. Nos interesan aquellos choques internos que ocurren dentro de la estrella ($r_j < R_*$ con el radio de la superficie estelar del progenitor R_*) y el jet hidrodinámico es colimado por la presión del *cocoon*⁶ mediante choques de colimación (Bromberg et al., 2011b; Mizuta e Ioka, 2013). Ocurre cuando la luminosidad del chorro es baja y / o la densidad es alta para un ángulo de apertura inicial. La densidad de energía total $U = 1/(8\pi m_p)\Gamma^{-4}L t_\nu^2$ en choques internos se reparte para amplificar el campo magnético (Fraija, 2016).

$$B' = \epsilon_B^{1/2} \Gamma^{-2} L^{1/2} t_\nu^2 \quad (5.26)$$

Con $\epsilon_B = U_B/U = (B^2/8\pi)U$ y la aceleración de partículas $\epsilon_i = U_i/U$, donde i es el i ésimo tipo de partícula con la condición $\epsilon_B + \sum_i \epsilon_i = 1$. Los electrones son acelerados en los choques internos y luego se enfrían rápidamente por la radiación de sincrotrón en presencia de un campo magnético. Los fotones de sincrotrón generados a esta escala producen opacidad a la dispersión de Thompson generada por $\tau'_{th} = \frac{\sigma_T}{4\pi_p} \Gamma^{-3} L \tau_1^{-1}$ donde σ_T es la sección eficaz de Thompson y m_p es la masa del proton. Los fotones pueden termalizarse a una temperatura de cuerpo negro con la energía máxima dada por

$$T'_\gamma \simeq \frac{1.2}{\pi} \epsilon_i^{1/4} L^{1/4} \Gamma^{-1} t_\nu^{-1/2} \quad (5.27)$$

⁶Del ingles Capullo o envoltura

La distribución de protones baja de temperatura en los choques internos a través de interacciones electromagnéticas (radiación sincrotrón y dispersión de Compton inversa) y hadrónicas $p - \gamma$ y $p - h$. Las interacciones $p - \gamma$ y $p - h$ ocurren cuando los protones acelerados interactúan con los fotones térmicos de keV y la densidad de protones en el choque. En ambas interacciones se producen piones y kaones cargados de altas energías;

$$p + \gamma/h \rightarrow X + \pi^\pm / K^{pm} \quad (5.28)$$

y subsecuentemente NAEs

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu \quad (5.29)$$

y

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mu \quad (5.30)$$

5.5.1. Neutrinos de altas energías

Se espera que por las interacciones proton-proton generados por los choques ($> 10^{16}$ eV) y las interacciones proton- γ se generen neutrinos de altas energías (> 1 TeV). Como se ve en la sección 5.4.2 por medio de la dispersión de Compton inversa en los electrones, los rayos γ alcanzan sus energías. Debido a la formación de resonancia Δ la producción de neutrinos sería eficiente. Los bariones Δ^+ están formados por los quarks up y down (ver en la sección 2.1) y su masa es de 1232 MeV/ c^2 :

$$\begin{aligned} p\gamma \rightarrow \Delta^+ &\rightarrow \begin{cases} n\pi^+ \\ p\pi^0 \end{cases} \\ \pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu + \nu_\mu \\ \pi^0 &\rightarrow \gamma\gamma \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde p es un protón y n un neutrón. Este mecanismo está bosquejado en la parte izquierda de la Fig. 5.8. Los neutrinos producidos por este mecanismo tendrían una energía de hasta ~ 100 TeV (Halzen and Hooper, 2002), (Waxman and Bahcall, 1997). Los fotones que surgen de la descomposición de los piones neutrales alcanzarían energías hasta PeV y contribuirían a los rayos γ observados de la emisión inmediata (\approx MeV-GeV).

Hasta ahora, no se ha detectado ningún fotón con energías de PeV, debido a que a estas energías interactúan de manera eficiente con otros fotones creando pares e^+e^- . Las interacciones con los electrones del chorro también contribuirán a degradar su energía. Además, los fotones PeV que gestionarán el escape de las ráfagas interactuarán con los fotones de la luz de fondo extra-galáctica (EBL) antes de que puedan alcanzar la Tierra (la distancia de recorrido libre medio del fotón a 1 PeV es $= 10$ kpc) (Aartsen et al., 2013). Este es un fuerte argumento a favor de los neutrinos como una herramienta única para investigar estos procesos, ya que estos no son desviados por los campos magnéticos a diferencia de los protones y a diferencia de los fotones no sufren un corte en su espectro a energías de PeV. Los neutrinos también son los

únicos mensajeros que pueden transmitir directamente información sobre el mecanismo interno de los GRB, ya que pueden crearse muy cerca del motor y viajar a al observador sin que su trayectoria sea afectada.

Aunque existe un acuerdo general sobre el mecanismo global descrito anteriormente, se han propuesto muchos métodos diferentes para calcular el flujo de neutrinos a partir de GRB. Los modelos se pueden dividir en dos categorías según sus supuestos sobre los Rayos Cósmicos de Alta Energía (UHECR): (i) los UHECR se producen principalmente en GRB y (ii) sólo una parte de los UHECR se producen en GRB.

La idea de que los GRBs producirían los UHECR proviene de dos observaciones. Primero, los GRB y AGN (ver en el capítulo 4) se encuentran entre los eventos más energéticos en el Universo, por lo que es en estos objetos que uno puede esperar los rayos cósmicos de energía más alta (Protheroe and Clay, 2004). En segundo lugar, los protones acelerados a través del mecanismo de Fermi siguen un espectro de ley de potencia que también es la forma (aunque es un índice diferente debido a los efectos de propagación) del espectro UHECR.

En la primera categoría, el espectro de neutrinos se puede normalizar con el espectro UHECR. Antes del estricto límite de neutrinos establecido por *ICECUBE* (Abbasi et al., 2012), los modelos generalmente asumían que la cantidad de energía dada a los protones en la bola de fuego era del mismo orden que la cantidad de energía dada a los electrones (Waxman and Bahcall, 1997) (es decir, la carga bariónica $f_e^{-1}\epsilon$ (Walter and Wolfendale, 2012), (Kodama et al., 2001)). Un gran conjunto de parámetros es crítico para la producción de neutrinos, de lo que destacan tres principales: la carga bariónica, el factor de incrementado de Lorentz y la cantidad de energía bariónica dada a los piones (supuesta $\approx 20\%$) (Baerwald et al., 2015).

También se ha propuesto otro tipo de modelo donde los protones están confinados magnéticamente en la bola de fuego (Ahlers et al., 2011), (Mannheim et al., 2000). En este modelo, los neutrones que provienen de las interacciones primarias de protones y que se producen junto con los piones, escapan de la bola de fuego y se descomponen en los protones que producen los UHECR. Este modelo está representado en la parte derecha de la Fig. 5.8. El interés principal de este modelo es que vincula directamente el flujo de neutrinos con el flujo de UHECR porque los neutrinos y los rayos cósmicos provienen de la misma interacción protón-fotón. Esto permite calcular el flujo de neutrinos sin utilizar ningún supuesto sobre la fracción de protones que inician la producción de neutrinos.

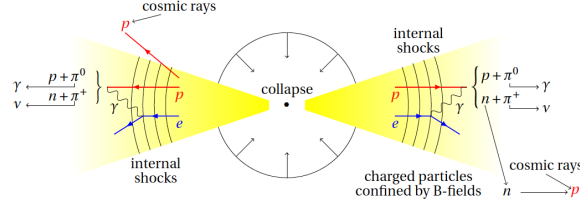


Figura 5.8: Esquema representativo del modelo *fireball*, en este las interacciones protón-fotón dan fotones de alta energía y neutrinos como se muestra a la izquierda, y los protones que no interactúan se escapan convirtiéndose en los UHECR.

En la segunda categoría, se usa el espectro de rayos gamma para normalizar el neutrino. Esto tiene la ventaja de permitir un cálculo del flujo de neutrinos por GRB y no para toda la población de GRB (Guetta et al., 2004). Sin embargo, este modelo requiere un supuesto adicional. Al igual que en la primera categoría, la carga bariónica se supone entre 1 y 10, pero también se debe asumir que la cantidad de energía dada a los protones es del mismo orden que la cantidad de energía dada a los fotones. Para modelos de la primera categoría, esta suposición se puede justificar porque la energía total transportada por los rayos cósmicos extra-galácticos es comparable a la fluencia/flujo total de rayos gamma de GRB.

5.6. Restricciones del modelo

Debido a los resultados recientes de *ICECUBE* (Abbasi et al., 2012), los modelos de bola de fuego se han actualizado con cálculos más precisos (a menudo numéricos) que tienen en cuenta otros procesos además de la resonancia Δ (Mücke et al., 1999). El valor de varios parámetros como el factor de refuerzo de Lorentz, la carga bariónica o la cantidad de energía bariónica dada al pión se han modificado para adaptarse a los datos observados. La información de datos de rayos cósmicos, observaciones de rayos gamma y límites de neutrinos se ha combinado para restringir el valor de varios parámetros del modelo de bola de fuego (Baerwald et al., 2015). Este estudio descartó el modelo de escape de neutrones (principalmente debido al límite *ICECUBE*) y establece la necesidad de una carga bariónica por encima del valor estándar de 10 si uno quiere mantener los GRB como fuentes principales de UHECR.

Es importante señalar que los límites de *ICECUBE* se refieren únicamente a los neutrinos que se emitirían durante la fase de emisión temprana. Sin embargo, se pueden esperar neutrinos en tres escalas de tiempo diferentes [(Becker, 2008)]. Se espera que lleguen en el momento de la emisión temprana, pero también se pueden esperar neutrinos del brillo posterior e incluso antes de la explosión. Durante el resplandor posterior, las interacciones entre los protones y los fotones UV del choque inverso podrían producir neutrinos de alta energía ($= \text{EeV}$) [(Mészáros and Rees, 1997)]. Si los neutrinos se producen cuando la bola de fuego aún es opaca a los fotones, se detectarían antes de los rayos gamma. Tales neutrinos se denominan precursores neutrinos. Debido a que *ICECUBE* no estableció un límite para los neutrinos precursores o de post resplandor, sólo hay unas pocas restricciones en la emisión de neutrinos de estas

fases.

Cabe mencionar que los modelos hadrónicos no son la única posibilidad. También existen modelos leptónicos donde la bola de fuego está compuesta principalmente de electrones. En este caso, no se esperan neutrinos (un ejemplo es (Vurm and Poutanen, 2009)).

La observación de neutrinos de alta energía de GRB confirmaría que las interacciones hadrónicas tienen lugar en estas extraordinarias explosiones. El espectro y el flujo de estos neutrinos confirmaría o rechazaría la hipótesis de que los GRB son (una de las) fuentes de UHECR. Finalmente, tal observación de neutrinos nos ayudaría a comprender cuál es el motor/mecanismo interno de los GRB y cómo se producen los rayos gamma observados.

La detección de neutrinos de alta energía sólo es posible en un detector que sea lo suficientemente grande en volumen para que la tasa de interacción sea lo suficientemente grande como para permitir un descubrimiento. Este detector ha sido construido en la Antártida por la colaboración de *ICECUBE*.

Capítulo 6

Análisis Estadístico

En este trabajo estudiamos posibles asociaciones entre los neutrinos de altas energías y dos tipos de fenómenos astronómicos que sospechamos que son capaces de producir estos neutrinos: los GRBs y los blazares. Utilizamos los neutrinos del catálogo *High Energy Starting Events* (HESE) de *IceCube*, que contiene 82 detecciones. La muestra de GRBs consta de un total de 1238 eventos detectados con *Swift* y 121 detectados con *Fermi*, que cubren un amplio rango en altas energías. Para los blazares utilizamos la quinta edición del catálogo *The Roma BZCAT* (Massaro et al., 2015, 2009), que contiene 3559 objetos y es el más completo hasta la fecha.

Los 1238 GRBs detectados con *Swift* se dividieron en tres grupos correspondientes a los tres instrumentos del satélite:

- *X-ray Telescope* (XRT) es el telescopio encargado de captar las emisiones en rayos X, de cuya base de datos se extrajeron 895 GRBs. Este instrumento está diseñado para medir los flujos, los espectros y las curvas de luz de los GRBs y sus emisiones tardías.
- *Burst Alert Telescope* (BAT) es el telescopio encargado de alertar de la detección de distintos tipos de rayos gamma. El sistema del satélite es capaz de decidir cuáles de estas detecciones requieren un cambiar la orientación de la nave para darles seguimiento. De la base de datos de BAT se obtuvieron 114 GRBs.

Además, se obtuvieron 121 GRBs a partir de los datos en rayos gamma conseguidos con el *Large Area Telescope* (LAT) en *Fermi*. LAT proporciona imágenes en el rango entre 20 MeV y 300 GeV.

6.1. Selección de candidatos

Para cada neutrino ν detectado con *IceCube*, definimos un ángulo sólido ω_ν alrededor de su posición, con un radio dado por el error angular e_ν en la detección:

$$\omega_\nu = \pi e_\nu^2. \tag{6.1}$$

Consideramos como fuentes candidatas de emitir un neutrino ν los objetos (GRBs o blazares) situados en el interior del ángulo sólido ω_ν definido en la ec. (6.1).

Para decidir si un objeto es un candidato, tenemos que medir la distancia angular entre su posición y la del neutrino. Empleamos las coordenadas del objeto y del neutrino para calcular la distancia ortodrómica (menor distancia angular sobre la superficie de la esfera celeste) $d_{(\nu,f)}$:

$$d_{(\nu,f)} = 2 \tan^{-1} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\Delta b}{2} \right) + \cos b_\nu \cos b_f \sin^2 \left(\frac{\Delta l}{2} \right)}, \quad (6.2)$$

donde l y b denotan las coordenadas galácticas de longitud y latitud, respectivamente y los subíndices ν y f se refieren al neutrino y a la fuente. Las diferencias entre las coordenadas de neutrinos y fuentes vienen expresadas por $\Delta l = |l_\nu - l_f|$ para la longitud y $\Delta b = |b_\nu - b_f|$ para la latitud. Para que un objeto sea candidato de la emisión de un neutrino dado, la separación angular tiene que cumplir la condición $d_{(\nu,f)} \leq e_\nu$.

6.2. Distribuciones de referencia

En estadística, la existencia de asociación entre dos variables indica que la distribución de los valores de una de las variables varía en función de los valores de la otra (Solanas et al., 2005). Con las distancias calculadas en la sección anterior podemos estudiar si existe alguna asociación entre los neutrinos y diferentes clases de objetos, que en nuestro estudio son GRBs y blazares. Para ello necesitamos un modelo de distribución de estos objetos en el firmamento. Dado que tanto los GRBs como los blazares son objetos extragalácticos, supondremos que están uniformemente repartidos sobre la esfera celeste. Entonces la densidad ρ de objetos por unidad de ángulo sólido se ajustará a un modelo de distribución uniforme discreta con media dada por:

$$\rho = \frac{N}{4\pi}, \quad (6.3)$$

donde N es el número de objetos en el firmamento y el factor 4π corresponde al valor del ángulo sólido de la totalidad de la esfera celeste.

En el ángulo sólido ω_ν definido por el error de posición del neutrino, esperamos un número de objetos acorde con una distribución de Poisson, si estos objetos están repartidos al azar en la esfera. Para cada neutrino, el valor esperado de objetos a su alrededor en un ángulo sólido ω_ν vendrá dado por:

$$\lambda_\nu = \rho \omega_\nu = \frac{N e_\nu^2}{4}, \quad (6.4)$$

y con una desviación estándar $\sqrt{\lambda_\nu}$ que nos da cuenta de la dispersión esperada en las cuentas del número de fuentes. Si aplicamos este resultado a las bases de datos de GRBs (1238 detecciones) y blazares (3559 objetos) y suponemos un error de 10° , tenemos que el valor esperado de fuentes candidatas situadas por azar en un radio e_ν alrededor de un neutrino es aproximadamente 9 ± 3 GRBs y 27 ± 5 blazares.

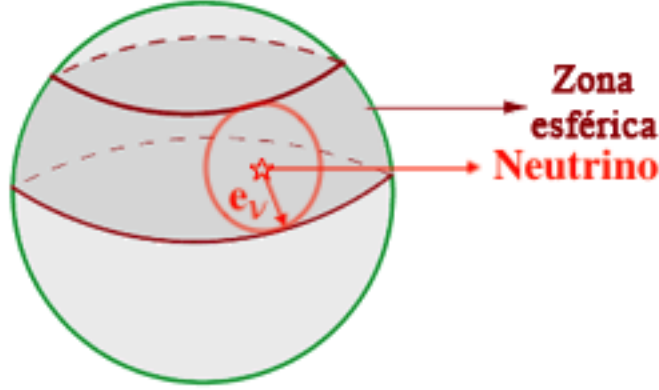


Figura 6.1: Zona esférica entre dos latitudes galácticas definidas por la posición del neutrino y su error e_ν .

Las distribuciones uniforme y de Poisson que acabamos de obtener no tienen en cuenta que nuestra visión del universo está sesgada por estar inmersos en la Vía Láctea, cuyo plano extingue la luz proveniente de objetos lejanos. Esta extinción es gradual y depende de la distancia angular del objeto al plano de la galaxia, esto es, de su latitud galáctica. Para minimizar este sesgo, no calcularemos una densidad media de objetos para toda la esfera celeste como en la ecuación ec. (6.3), sino que obtendremos empíricamente una densidad que dependa de la latitud galáctica del neutrino y del tamaño del error en su posición.

Para cada neutrino, definimos una zona esférica como la mostrada en la figura 6.1, comprendida entre las latitudes galácticas $b_{\nu+}$ y $b_{\nu-}$ tal que:

$$b_{\nu+} = b_\nu + e_\nu, \quad (6.5)$$

$$b_{\nu-} = b_\nu - e_\nu, \quad (6.6)$$

Esta zona esférica subtende un ángulo sólido Ω_ν dado por:

$$\Omega_\nu = \begin{cases} 2\pi [\text{sen}(b_{\nu+}) - \text{sen}(b_{\nu-})] & \text{si } 90 > b_{\nu+} > 0 \\ & \text{y } 90 > b_{\nu-} > 0 \\ 4\pi - 2\pi [2 - \text{sen}(b_{\nu+}) - \text{sen}(b_{\nu-})] & \text{si } 90 > b_{\nu+} > 0 \\ & \text{y } 0 > b_{\nu-} > -90 \\ 2\pi [\text{sen}(|b_{\nu-}|) - \text{sen}(|b_{\nu+}|)] & \text{si } 0 > b_{\nu+} > -90 \\ & \text{y } 0 > b_{\nu-} > -90 \end{cases} \quad (6.7)$$

según que la zona esférica esté comprendida enteramente en el hemisferio norte galáctico, entre los dos hemisferios, o enteramente en el hemisferio sur.

Sea N_{b_ν} el número total de objetos situados en la franja de cielo comprendida entre $b_{\nu+}$ y $b_{\nu-}$, el cual obtenemos de las coordenadas facilitadas en los catálogos. Análogamente a como hicimos en la ec. (6.3), la densidad ρ_{b_ν} de objetos en esa franja centrada en la latitud b_ν del neutrino ν viene expresada como:

$$\rho_{b_\nu} = \frac{N_{b_\nu}}{\Omega_{b_\nu}}. \quad (6.8)$$

Entonces, el número de fuentes que esperamos encontrar en un ángulo sólido ω_ν centrado en el neutrino seguirá una distribución de Poisson de media λ_ν similar a la ec. (6.4):

$$\lambda_\nu = \rho_{b_\nu} \omega_\nu = \frac{N_{b_\nu}}{\Omega_{b_\nu}} \pi e_\nu^2. \quad (6.9)$$

La ec. (6.9) es la que utilizaremos para hacer pruebas de asociación entre neutrinos con GRBs y blazares.

6.3. ¿Cómo buscar asociaciones?

Podemos pensar que establecer asociaciones entre neutrinos y posibles fuentes emisoras es sencillo. Supongamos que detectamos neutrinos con errores suficientemente pequeños y para los que queremos probar su asociación con un tipo de objetos suficientemente escasos, de tal manera que no esperamos que ninguno de estos objetos se encuentre por azar a una distancia menor que el error de detección. Si encontramos que un número significativamente alto de objetos se encuentra cerca de algún neutrino, podemos establecer que existe esa relación. Incluso podemos asociar un neutrino con una fuente en concreto.

Si el error en la posición del neutrino y el número de objetos fuera suficientemente grande como para esperar que, en promedio, un objeto estuviera situado por azar dentro de la región de error, la asociación sería menos evidente, pero con suficientes datos aún podríamos encontrar que hay un exceso de objetos cercanos al neutrino. Sin embargo, ya no podríamos asociar un neutrino con una fuente en particular; simplificando, podríamos esperar encontrar al responsable de su emisión y otro más situado en la misma región por azar.

A medida que aumenta el número de objetos esperados cercanos al neutrino, la asociación es cada vez menos evidente y el uso de la estadística más necesario. Este es el caso de nuestro estudio, en el que el balance entre el error de posición del neutrino y el número de fuentes es tal que esperamos tener varias fuentes candidatas para cada neutrino. Para lidiar con este problema, en esta tesis utilizaremos dos pruebas de hipótesis no paramétricas: la prueba de signo y la prueba de Kolmogórov-Smirnov.

6.4. Prueba de Signos

La Prueba de Signos sirve para probar una hipótesis sobre la mediana de una población, en nuestro caso el número de objetos a una distancia igual o menor que el error e_ν asociado a un neutrino. La hipótesis nula es que la mediana poblacional es igual a un valor esperado λ_ν para cada neutrino, mientras que nuestra hipótesis alternativa es que la mediana es mayor que este valor. La prueba estadística está

basada en la distribución Binomial, con una probabilidad $p = 1/2$ bajo la hipótesis nula de que el número de objetos encontrados sea mayor que el esperado, descontando los casos en que la diferencia sea cero.

Sean λ_ν y κ_ν el número de fuentes esperadas y las realmente encontradas, respectivamente, a una distancia e_ν de un neutrino ν . Expresaremos como $\Delta_\nu = \kappa_\nu - \lambda_\nu$ la diferencia entre el conteo real de objetos y el esperado. Esta diferencia es la variable que utilizamos en la prueba de signos. Cuando Δ_ν sea positivo consideraremos el resultado como un éxito (+1) y cuando sea negativo como un fracaso (-1). Los datos tales que $\Delta_\nu = 0$ se ignoran. Si la suma de todos los resultados es un número positivo significativamente grande, podremos rechazar la hipótesis nula y aceptar que tenemos un exceso de objetos medidos sobre el valor esperado, lo que implicaría asociación entre el neutrino y el tipo de objeto con el que queremos estudiar su asociación.

La prueba de signos es fácil de llevar a cabo y es una buena manera de tener una primera impresión sobre los datos de la muestra, pero no es una prueba potente. Por potencia de la prueba entendemos la capacidad de detectar diferencias entre las variables. La potencia depende del error de medición, el tamaño de la muestra y el tamaño del efecto. El tamaño del efecto sobre Δ_ν es pequeño respecto al ruido: una fuente a la que estaría asociado el neutrino, frente a unos 9 GRBs ó 27 blazares situados cerca por azar. Diferentes tipos de prueba tienen diferentes potencias. Por ello, en muchos casos, se prefiere la prueba de rangos de Wilcoxon que, además del signo, tiene en cuenta la magnitud de la diferencia Δ_ν . Sin embargo, la prueba de Wilcoxon no es apropiada en nuestro caso porque el efecto que queremos medir tiene un valor constante: un objeto más (GRB o blazar) que el número esperado. Por tanto, un exceso de 10 fuentes, por ejemplo, no es más significativo a efectos de este estudio que un exceso de una sola.

6.5. Prueba de Kolmogórov-Smirnov

La prueba de Kolmogórov-Smirnov (K-S) es una prueba no paramétrica que determina la bondad de ajuste de dos distribuciones de probabilidad entre sí. Las distribuciones pueden ser las dos empíricas o una empírica y la otra una distribución teórica. Si $F(x)$ es la función acumulativa supuesta para la variable x , y $F_n(x)$ la función acumulativa que queremos someter a prueba, el parámetro estadístico empleado es la diferencia máxima entre las dos distribuciones:

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad , \quad (6.10)$$

donde \sup_x es el máximo del conjunto de distancias. Como nosotros estamos interesados sólo en el caso en que D_n sea positiva, tendremos en cuenta el signo de la diferencia entre las funciones acumulativas. Nuestro parámetro estadístico quedará entonces como:

$$D_{n+} = \sup_x (F_n(x) - F(x)) \quad . \quad (6.11)$$

Para este estudio estandarizamos las distancias entre la posición del neutrino y los objetos de interés a su alrededor (ver ec. (6.2)), dividiendo estas distancias por el error en la posición de cada neutrino:

$$\delta_f = \frac{d_{(\nu,f)}}{e_\nu}. \quad (6.12)$$

Nótese que las distancias δ_f ya no se refieren a un neutrino en particular, sino a la distribución estandarizada de todas las fuentes que son candidatas a ser el origen de algún neutrino. De esta manera juntamos todas las fuentes candidatas independientemente del neutrino al que puedan estar asociadas. La función acumulativa de estas distancias estandarizadas vendrá dada por el número de fuentes candidatas a distancias $\delta \leq \delta_f$ dividida por el número total de fuentes candidatas N_c :

$$F_n(\delta_f) = \frac{N_{\delta \leq \delta_f}}{N_c}. \quad (6.13)$$

La hipótesis nula para nuestra prueba K-S es que la distribución empírica de candidatos es igual a cierta distribución que deben seguir las fuentes si están distribuidas al azar. Para una distribución uniforme de objetos sobre la esfera celeste, el número esperado de objetos $E(N_\theta)$ a una distancia igual o menor que cierto ángulo θ será proporcional al ángulo sólido de radio también θ , y por tanto proporcional a θ^2 :

$$E(N_\theta) \propto \theta^2. \quad (6.14)$$

Como las distancias δ_f y su distribución acumulativa $F_n(\delta_f)$ están las dos estandarizadas en el intervalo $[0, 1]$ [ecs. (6.12) y (6.13)], esta distribución acumulativa resulta directamente comparable con la función:

$$F(\delta_f) = \delta_f^2, \quad \text{con } \delta_f \in [0, 1]. \quad (6.15)$$

De esta manera, el parámetro estadístico para la prueba K-S vendrá dado, a partir de la ec. (6.11), como:

$$D_{n+} = \sup_{\delta_f} (F_n(\delta_f) - F(\delta_f)) = \sup_{\delta_f} (F_n(\delta_f) - \delta_f^2). \quad (6.16)$$

En el siguiente capítulo presentamos los resultados de aplicar las pruebas de signo y K-S a los datos de nuestra muestra de neutrinos de *IceCube*.

Capítulo 7

Resultados

Los resultados de la prueba Kolmogorov-Smirnov se encuentran en el apéndice B, y sus resultados se discuten con mas detalle en el capítulo 8. Complementando lo mencionado en el capítulo 6, en las pruebas estadísticas se busca encontrar un **exceso** de fuentes cercanas a los neutrinos, dichos excesos son observados en las sobre densidades de las posibles fuentes que representan valores muy por encima de las densidades esperadas, en el caso de las pruebas de signo y de Kolmogorov-Smirnov, estas se ven como $\kappa_\nu \ll \lambda_\nu$ y $F_n(e_\nu) \ll F(e_\nu)$ respectivamente, ya que κ_ν y $F_n(e_\nu)$ representan los valores de éxitos en ambas pruebas, lo cual debe superar a sus respectivas probabilidades de éxito λ_ν y $F(e_\nu)$. A continuación se muestran los resultados obtenidos de los análisis estadísticos para correlación los neutrinos de altas energías detectados por *ICECUBE* con los GRBs detectados por *Fermi* y *Swift* y el análisis estadísticos para correlación los neutrinos de altas energías detectados por *ICECUBE* con la catalogo *The Roma BZCAT* de AGNs de tipo blazar detectados por el satélite *Fermi*, por lo que los resultados de los GRBs de *Fermi-LAT* y AGNs de *The Roma BZCAT* se encontraran juntos en la sección 7.2

7.1. Resultados del Satélite *Swift*

Las pruebas de KS no muestran evidencia de un exceso de fuentes cercanas a las posiciones de los neutrinos (véase la Figura 7.1), con diferencias máximas entre el número de objetos esperados y encontrados por debajo del valor de significancia estadística. Los resultados de la prueba KS se muestran a continuación en las gráficas 7.1 y 7.2, estas corresponden a los datos de las tablas B.1 y B.2, en el apéndice B. Estas graficas muestran los valores obtenidos de $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\text{máx}}$ de cada comparación que realizo entre *HESE* y los catalogos de emisiones en gamma, este valor $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\text{máx}}$ se nos permite saber si las densidades GRBs detectados por *Swift* dentro del error de los NAEs de *HESE* son significativos al compararlas con la función de probabilidad acumulativa de las densidades que esperamos encontrar, al igual que en la prueba de signo se espera las probabilidades usadas superen el 50%, sin embargo los resultados de estas pruebas no superan el 20% en los dos catalogos de los instrumentos *XRT* y *BAT*.

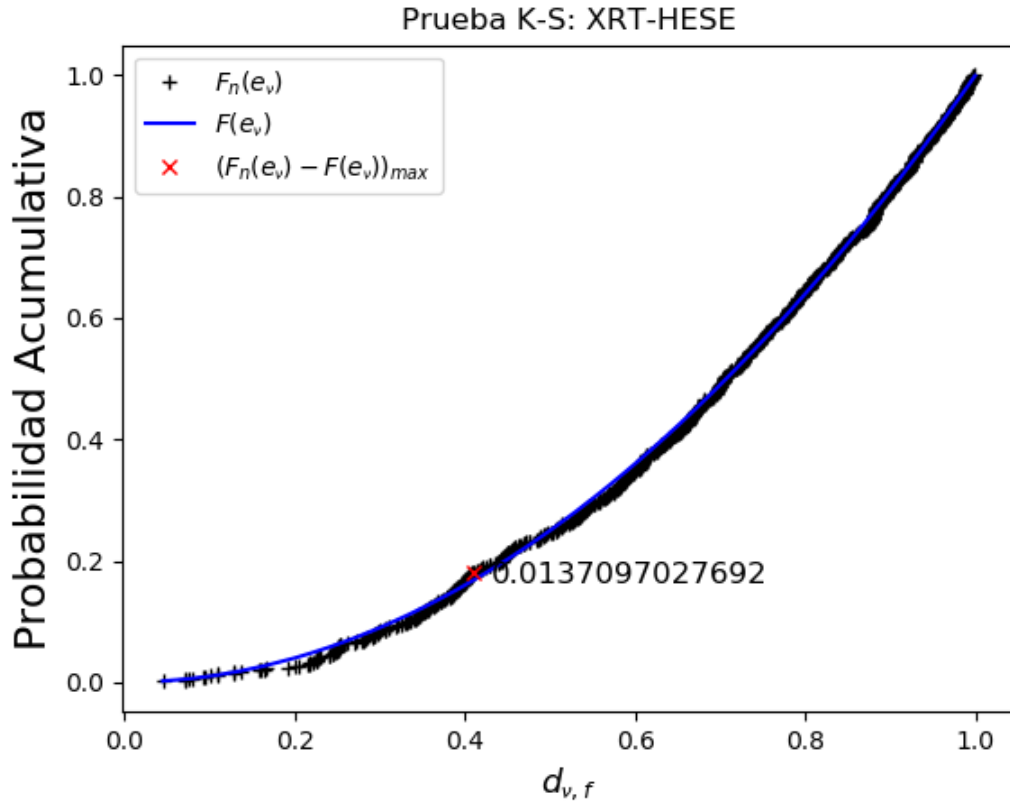


Figura 7.1: Test XRT-HESE donde 735 GRBs coinciden dentro del error e_ν del neutrino, la línea azul (—) muestra la función de probabilidad acumulativa empírica dependiente del error e_ν y la densidad de objetos ρ_ν , las cruces negras (+) muestran los valores obtenidos de la muestra de los 735 GRBs y la cruz roja (×) muestra el valor más significativo de los datos obtenidos cuya valor es $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\max} = 0.013709$.

Como se muestra en la figura 7.1, la coincidencia en las posiciones entre NAEs de *ICECUBE* y GRBs de XRT es muy baja, lo cual puede deberse a que nuestra prueba no tiene suficiente potencia para detectar las diferencias, o a que los neutrinos no proceden de las fuentes estudiadas.

En el caso del estudio de HESE y su relación con BAT (Figura 7.2), el test KS muestra una mayor cantidad de candidatos debido a que la densidad de objetos repartidos en la bóveda celeste de BAT es mayor. Sin embargo, aún continúa mostrando un ajuste muy alto a los posibles candidatos esperados.

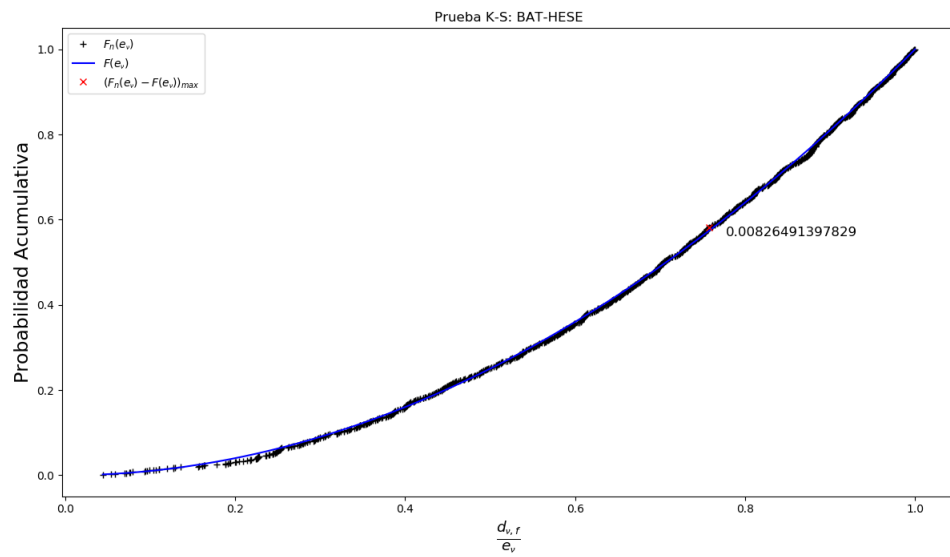


Figura 7.2: Prueba K-S de BAT-HESE donde 1073 los GRBs candidatos dentro del error e_{ν} del neutrino, la línea azul (—) muestra la función de probabilidad acumulativa empírica dependiente del error e_{ν} y la densidad de objetos ρ_{ν} , las cruces negras (+) muestran los valores obtenidos de la muestra de cada uno de los 1073 GRB y la cruz roja (×) muestra el valor mas significativo de los datos obtenidos cuya valor es $[F_n(e_{\nu}) - F(e_{\nu})]_{\max} = 0.0082$.

A continuacion se muestran los resultados de la prueba de signo en la tabla 7.1, en esta prueba al igual que en los resultados de la prueba K-S, , en esta se excluyen neutrinos con errores e_ν mayores a 30° . Donde la probabilidad \mathcal{P} es el numero de éxitos que superan a los éxitos esperados de todos los intentos de exito, dando valores muy cercanos al 50% por parte de la prueba realizada en los datos del instrumento *BAT* con una probabilidad $\mathcal{P}_{BAT} = 46.15\%$.

Catálogo	\mathcal{P}
XRT	0.2179
BAT	0.46153

Tabla 7.1: Tabla de resultados de la prueba de Poisson para XRT y HESE de neutrinos con errores $e_\nu < 30^\circ$.

La prueba de signo en el caso de un tamaño de error $e_\nu < 30^\circ$ en la posición del neutrino (tabla 7.1), *BAT* muestra la tener la mayor cantidad de coincidencias de GRBs dentro los errores e_ν . Sin embargo, para errores en la posición $e_\nu < 10^\circ$ (tabla 7.2), el valor de estas coincidencias disminuye, ya que tratamos con neutrinos cuya posición se ha medido con mayor precisión y muestran una menor relación con los GRBs. Debido a esto la probabilidad \mathcal{P} muestra no superar el 50%, y esto se observa en todos los catalogos de los tres instrumentos, lo que descarta las posibles coincidencias dadas en sobredensidades altas de GRBs en las regiones de los errores e_ν .

A pesar de que la probabilidad \mathcal{P} de *BAT* es cercana al valor arbitrario seleccionado de 50%, esta baja un 6% para el filtro de neutrinos con errores que cumplen la condición $e_\nu < 10^\circ$ como se muestra en la tabla 7.2 por lo que las muestras de GRBs cuentan con sobre densidades esperadas y poco significativas para correlacionarlos con NAEs

Catálogo	\mathcal{P}
XRT	0.25
BAT	0.4

Tabla 7.2: Tabla de resultados de la prueba de Poisson para XRT y HESE con errores de neutrinos $e_\nu < 10^\circ$.

7.2. Resultados del Satélite FERMI

Las pruebas realizadas para el caso de las detecciones del satélite *Fermi* fueron realizadas en el catalogo de GRBs del instrumento *LAT* y el catalogo de blazares *The Roma BZCAT*. Las pruebas Kolmogorov-Smirnov del satélite *Fermi* tampoco muestran un exceso de fuentes, al igual que los resultados del satélite *Swift*.

Estas pruebas muestran una correlación similar a la esperada, como se observa en las gráficas de las figuras 7.3 y 7.4, estas corresponden a los datos de las tablas B.3 y B.4 donde las $F_n(e_\nu)$ muestran valores muy ajustados a $F(e_\nu)$, por lo

que en este caso los neutrinos dejan abierta la posibilidad de estar asociados a cualquier objeto. Estas al igual que los datos de el telescopio *Swift* muestran valores de $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\text{máx}}$ muy bajos, siendo el analisis de LAT la diferencia mas grande con $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\text{máx}} = 0.0519$.

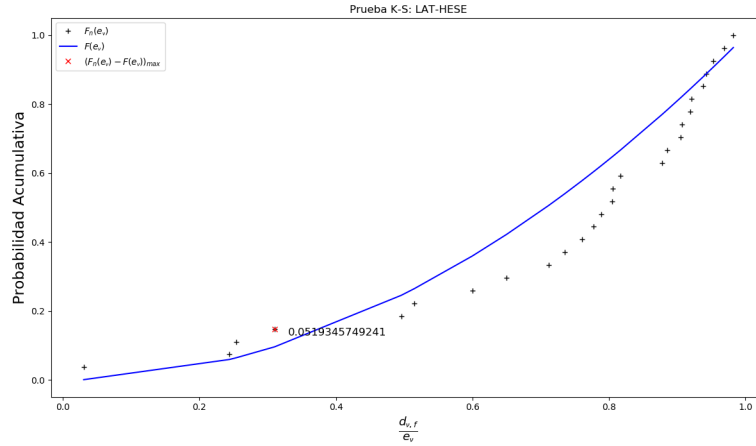


Figura 7.3: Prueba K-S entre los datos del instrumento LAT y el catalogo HESE donde se encontraron 27 GRBs que coinciden dentro del error e_ν del neutrino cuyos valores obtenidos en la muestra son marcados con (+), la línea azul (-) muestra el la función de probabilidad acumulativa empirica dependiente del error e_ν y la densidad de objetos ρ_ν y la cruz roja (x) muestra el valor mas significativo de los datos obtenidos cuya valor es $[F_n(e_\nu) - F(e_\nu)]_{\text{máx}} = 0.0519$.

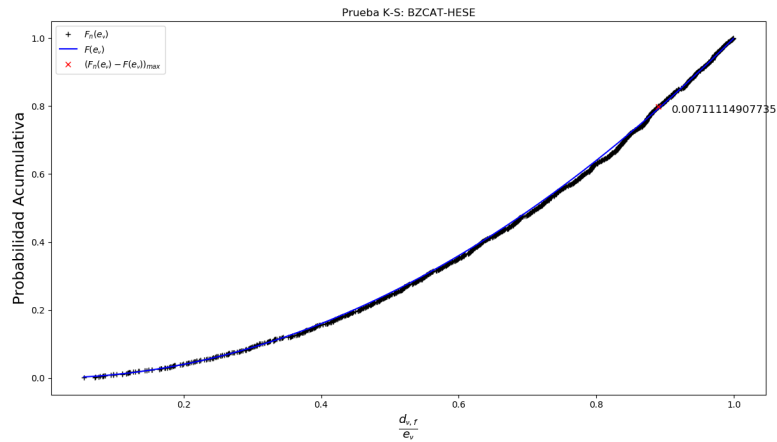


Figura 7.4: Prueba K-S entre los catálogos BZCAT y HESE donde se obtubieron 1215 GRBs con coordenadas que coinciden dentro del error e_{ν} de cada neutrino con valores obtenidos $F_n(e_{\nu})$ estan marcados con(+), la linea azul (-) muestra el la función de probabilidad acumulativa empirica dependiente del error e_{ν} y la densidad de objetos ρ_{ν} y la cruz roja (×) muestra el valor mas significativo de los datos obtenidos cuya valor es $[F_n(e_{\nu}) - F(e_{\nu})]_{\text{máx}} = 0.0071$.

En el caso de la prueba de signo, las tablas 7.4 y 7.3 no cuentan con probabilidades \mathcal{P} mayores al 50 %, dichas tablas, al igual que las tablas 7.1 y 7.2 de las pruebas en *Swift*, muestran que la probabilidad \mathcal{P} disminuye en cuanto tenemos errores más pequeños, por lo que los neutrinos podrían estar asociados a cualquier evento astrofísico, al no conocer con mayor exactitud sus coordenadas de origen. Los resultados en la prueba de signos de estos dos catalogos resultaron con valores muy bajos a comparación de los datos del satelite *Swift* ya que ninguno supera el 25 % como se observa en la tabla 7.3 a continuacion

Catálogo	\mathcal{P}
LAT	0.1410
BZCAT	0.2307

Tabla 7.3: Tabla de resultados de la prueba de signo para Fermi LAT y BZCAT con HESE tomando errores de neutrinos $e_\nu < 30^\circ$.

La probabilidad \mathcal{P} disminuye aun mas cuando no tomamos en cuenta a los neutrinos con errores muy grandes en su detección $e_\nu < 10^\circ$, esto se puede ver al comparar las tabla 7.3 con la tabla 7.4. Lo cual nos brinda los neutrinos de datos mas precisos y nos permite tener una prueba mas estricta.

Catálogo	\mathcal{P}
LAT	0.075
BZCAT	0.175

Tabla 7.4: Tabla de resultados de la prueba de Poisson para Fermi LAT y BZCAT con HESE tomando errores de neutrinos $e_\nu < 10^\circ$.

Capítulo 8

Conclusiones

Como hemos visto en los primeros capítulos, la astronomía *multi-messenger* nos permite obtener observaciones de la luz en distintos rangos de longitud de onda y añadir observaciones de otros métodos de detección de eventos astrofísicos, como la observación de partículas de altas energía del observatorio *ICECUBE*. Esto nos ayuda a entender más a fondo, desde el punto de vista de la física moderna, el origen que hay detrás de los neutrinos extragalácticos. Para esta tesis planteamos hallar correlaciones estadística entre neutrinos con destellos de rayos gamma y núcleos activos de galaxias, ya que tales eventos emisores de radiación γ muestran mecanismos de interacción protón-protón y protón- γ capaces de producir neutrinos. Gandhi (1996) propone que los neutrinos surgen del decaimiento de los piones creados en la interacción protón-protón y protón- γ dadas en AGNs (Mannheim, 1993) y GRBs (Paczynski and Xu, 1994),(Fraija, 2016). Se espera que de estos últimos emanen UHECRs que se originen a partir del escape de neutrones (Ahlers et al., 2011) o protones (Waxman and Bahcall, 1997), que escapen de la bola de fuego, por lo que los neutrinos generados en los GRB por interacciones protón- γ , puedan ser la respuesta a la búsqueda de fuentes de UHECR. Las correlaciones de neutrinos que se usaron están basadas en las pruebas de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov y de signo. Estas pruebas nos permitieron encontrar sobre densidades de GRBs y AGNs contenidas en los errores angulares de las detecciones de neutrinos de altas energías del catálogo *High Energy Starting Events* del observatorio *ICECUBE*.

8.1. Potencia de la prueba de signo

Las pruebas estadísticas en este trabajo indican sobre densidades de AGNs y GRBs como posibles fuentes de NAEs detectados por *ICECUBE*. Estas fuentes de rayos gamma que llegan a coincidir con las ubicaciones de algunos NAEs, sin embargo, tales fuentes tienen mayor correlación cuando los neutrinos cuentan con errores angulares e_ν muy grandes, lo que deja en duda si estos puedan venir de alguna de las fuentes propuestas. Para esto las filtraciones de neutrinos con errores e_ν no mayores a 10° , muestran una correlación menor con estos datos de mayor precisión, lo que prueba que se requiere una mayor precisión en las detecciones de NAEs. Además de esto, la

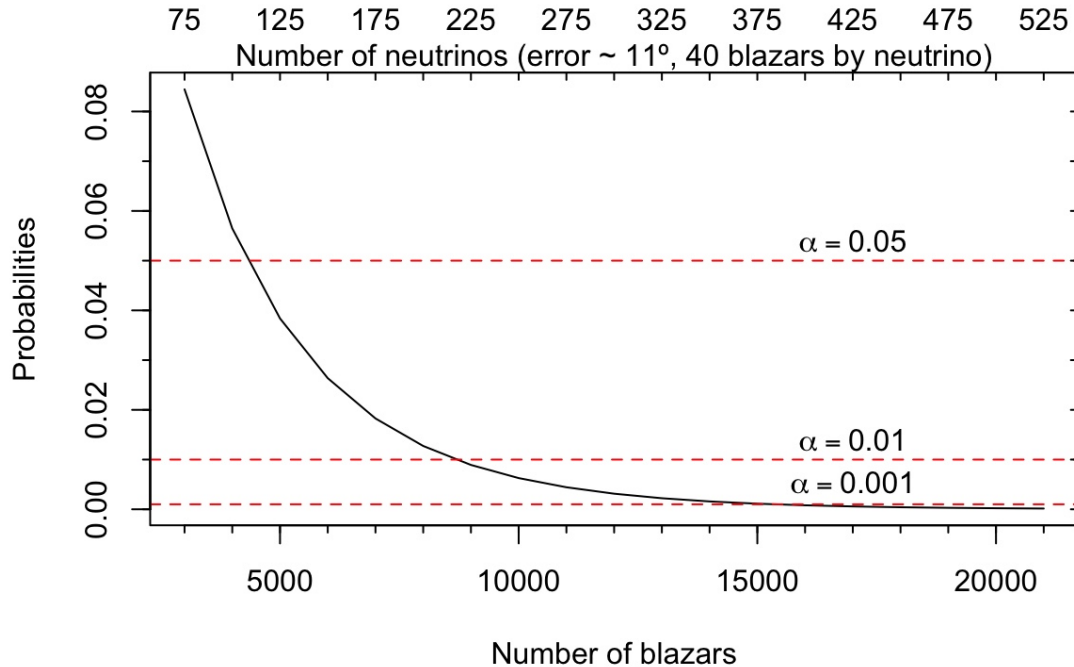


Figura 8.1: Potencia de Test

muestra de 82 neutrinos se reduce a 40 neutrinos con $e_\nu < 10^\circ$, esto deja una muestra muy pequeña de neutrinos con una precisión más exacta de su dirección de origen, lo cual sesga las pruebas estadísticas realizadas. Lo anterior pone en evidencia que existe la posibilidad de que los neutrinos no estén asociados a estas fuentes, por lo que se calculó la potencia de la prueba de signo, operación que, nos permite conocer el número de neutrinos que se tendrían que tener en una muestra que pudiese hallar al menos una coincidencia más precisa. La potencia del test depende de tres factores:

- **El tamaño del efecto**
- **El tamaño de la muestra**
- **El error de medición** en la posición del neutrino

Para obtener la potencia de la prueba de signo se realizó una simulación de datos, en la cual introducen 1600 blazares con coordenadas galácticas aleatorias, con errores de neutrinos e_ν de 11° , dado que este valor es el promedio de e_ν de nuestro catálogo *HESE*.

El resultado de la simulación se observa en la gráfica de la figura 8.1, el cual nos permite saber el número de neutrinos requeridos para obtener una significancia del 95%. Este porcentaje está representado por la línea negra, misma que revela que para un determinado número de n fuentes (eje x inferior), se requeriría un determinado número de n neutrinos (eje x superior). El resultado nos indica que 40 blazares deberían coincidir dentro del error angular $e_\nu = 11^\circ$ de cada neutrino para tener la significancia de 95%. Por esta razón, en una muestra de 16000 blazares se requieren 400 neutrinos

detectados por *ICECUBE*; en este caso, los neutrinos si están asociados a alguna fuente de rayos gamma, la potencia del test de signo es muy baja para obtener una significancia alta en la correlación neutrinos y fuentes de rayos gamma.

8.2. Perspectivas a futuro

Dado que las bases de datos de AGNs y GRBs muestran una correlación poco significativa con neutrinos, estas pruebas estadísticas se podrían realizar agregando los datos de catálogos de otros observatorios de fuentes de rayos gamma, como *HAWC*, y de neutrinos como el observatorio *Super KAMIOKANDE* o neutrinos que se lleguen a detectar a futuro por *Pierre Auger* o la mejora del *Super KAMIOKANDE*, *elhyper KAMIOKANDE*, estos últimos con el fin de agregar más neutrinos, dado que si tenemos 16000 fuentes de gammas aleatorias en un catálogo como en la simulación realizada, serían requeridos 400 neutrinos detectados para conseguir la significancia de 90%, por lo que, con la tecnología actual de *ICECUBE*, tomaría alrededor de 20 años de detección, para poder obtener esa cantidad de datos. Debido a ello, el factor que más ayudaría en la asociación de neutrinos con tipos de objetos es la reducción en el error e_ν de la posición de procedencia del neutrino. Reduciendo este error, disminuiríamos en número λ de objetos esperados y podríamos aumentar drásticamente la potencia del test.

Los neutrinos pueden ser generados en explosiones de supernova o en las burbujas de Fermi. Agregar a su estudio otros observatorios de neutrinos y rayos gamma, y realizar otras pruebas con estos eventos, sin duda permitiría obtener resultados interesantes sobre el origen astrofísico de estas partículas.

Bibliografía

- M. Aartsen, R. Abbasi, Y. Abdou, M. Ackermann, J. Adams, J. Aguilar, M. Ahlers, D. Altmann, K. Andeen, J. Auffenberg, et al. Search for galactic pev gamma rays with the icecube neutrino observatory. Physical Review D, 87(6):062002, 2013.
- R. Abbasi, Y. Abdou, T. Abu-Zayyad, M. Ackermann, J. Adams, J. Aguilar, M. Ahlers, D. Altmann, K. Andeen, J. Auffenberg, et al. An absence of neutrinos associated with cosmic-ray acceleration in γ -ray bursts. Nature, 484(7394):351, 2012.
- M. Ahlers, M. Gonzalez-Garcia, and F. Halzen. Grbs on probation: testing the uhc cr paradigm with icecube. Astroparticle Physics, 35(2):87–94, 2011.
- M. Ahlers, K. Helbing, and C. P. de los Heros. Probing particle physics with icecube. The European Physical Journal C, 78(11):924, 2018.
- E. C. L. . A. C. Alonso. El problema de los neutrinos solares, 2000. URL <https://www.inaoep.mx/~rincon/sneutrinos.html>. Last accessed 3 may 2019.
- P. Baerwald, M. Bustamante, and W. Winter. Are gamma-ray bursts the sources of ultra-high energy cosmic rays? Astroparticle Physics, 62:66–91, 2015.
- D. Band, J. Matteson, L. Ford, B. Schaefer, D. Palmer, B. Teegarden, T. Cline, M. Briggs, W. Paciesas, G. Pendleton, et al. Batse observations of gamma-ray burst spectra. i-spectral diversity. The Astrophysical Journal, 413:281–292, 1993.
- K. W. . D. M. . V. Barger. THE PHYSICS OF Neutrinos. PRINCETON AND OXFORD, 2012.
- J. K. Becker. High-energy neutrinos in the context of multimessenger astrophysics. Physics Reports, 458(4-5):173–246, 2008.
- V. Beckmann and C. Shrader. Active galactic nuclei. John Wiley & Sons, 2013.
- E. Betz. The solar neutrino problem — science’s original neutrino mystery, 2018. URL <http://blogs.discovermagazine.com/crux/2018/07/12/the-solar-neutrino-problem-the-oldest-neutrino-mystery-in-science>. Last accessed 3 may 2019.
- S. Bilenky. Neutrino. history of a unique particle. The European Physical Journal H, 38(3):345–404, 2013.

- M. Böttcher, A. Reimer, K. Sweeney, and A. Prakash. Leptonic and hadronic modeling of fermi-detected blazars. The Astrophysical Journal, 768(1):54, 2013.
- L. Brayeur. Search for high-energy neutrinos associated with long gamma ray bursts using the icecube detector. VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL, 2015.
- D. Chirkin and W. Rhode. Propagating leptons through matter with muon monte carlo (mmc). arXiv preprint hep-ph/0407075, 2004.
- E. Costa. Discovery of an x-ray afterglow associated with the gamma-ray burst of 28 february 1997. Nature, 387(6635):783—785, 1997.
- Cronodon. Nuclear processes in stars, 2019. URL <https://www.cronodon.com/SpaceTech/AstroTech.html>. Last accessed 6 may 2019.
- L. O. Drury. An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas. Reports on Progress in Physics, 46(8):973, 1983.
- L. d’Annecy de Physique des Particules. History of the neutrinos, 2019. URL <https://lappweb.in2p3.fr/neutrinos/anhistory.html>. Last accessed 2 may 2019.
- B. Fanaroff and J. Riley. The morphology of extragalactic radio sources of high and low luminosity. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 167(1):31P–36P, 1974.
- E. E. Fenimore and E. Ramirez-Ruiz. Redshifts for 220 batse gamma-ray bursts determined by variability and the cosmological consequences. arXiv preprint astro-ph/0004176, 2000.
- E. E. Fenimore, C. D. Madras, and S. Nayakshin. Expanding relativistic shells and gamma-ray burst temporal structure. The Astrophysical Journal, 473(2):998, 1996.
- A. V. Filippenko. Optical spectra of supernovae. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 35(1):309–355, 1997.
- G. J. Fishman and C. A. Meegan. Gamma-ray bursts. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 33(1):415–458, 1995.
- N. Fraija. Correlation of γ -ray and high-energy cosmic ray fluxes from the giant lobes of centaurus a. The Astrophysical Journal, 783(1):44, 2014a.
- N. Fraija. Gamma-ray fluxes from the core emission of centaurus a: a puzzle solved. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 441(2):1209–1216, 2014b.
- N. Fraija. Could a multi-pev neutrino event have as origin the internal shocks inside the grb progenitor star? Journal of High Energy Astrophysics, 9:25–34, 2016.
- D. Frail, S. R. Kulkarni, L. Nicastro, M. Feroci, and G. Taylor. The radio afterglow from the γ -ray burst of 8 may 1997. Nature, 389(6648):261, 1997.

- I. S. . C. Q. . M. H. R. . R. Gandhi. Neutrino interactions at ultrahigh energies. Physical Review D, 58:1—15, 1998.
- R. Gandhi. Ultrahigh-energy neutrino interactions. Astroparticle Physics 5, 387(6635):81—110, 1996.
- C. M. Gaskell. What broad emission lines tell us about how active galactic nuclei work. New Astronomy Reviews, 53(7-10):140–148, 2009.
- G. Ghirlanda, G. Ghisellini, and A. Celotti. The spectra of short gamma-ray bursts. Astronomy & Astrophysics, 422(3):L55–L58, 2004.
- C. Giunti and C. W. Kim. Fundamentals of neutrino physics and astrophysics. Oxford, 50:135, 2007.
- R. J. Gould and G. Schröder. Opacity of the universe to high-energy photons. Physical Review Letters, 16(6):252, 1966.
- D. Guetta, D. Hooper, J. Alvarez-Muniz, F. Halzen, and E. Reuveni. Neutrinos from individual gamma-ray bursts in the batse catalog. Astroparticle Physics, 20(4): 429–455, 2004.
- A. C. Gupta, A. Srivastava, and P. J. Wiita. Periodic oscillations in the intra-day optical light curves of the blazar s5 0716+ 714. The Astrophysical Journal, 690(1): 216, 2008.
- F. Halzen and D. Hooper. High-energy neutrino astronomy: the cosmic ray connection. Reports on Progress in Physics, 65(7):1025, 2002.
- F. Halzen and S. R. Klein. Invited review article: Icecube: an instrument for neutrino astronomy. Review of Scientific Instruments, 81(8):081101, 2010.
- J. Hjorth, D. Watson, J. P. Fynbo, P. A. Price, B. L. Jensen, U. G. Jørgensen, D. Kubas, J. Gorosabel, P. Jakobsson, J. Sollerman, et al. The optical afterglow of the short γ -ray burst grb 050709. Nature, 437(7060):859, 2005.
- hyperphysics. The solar neutrino problem, 2010. URL <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/solneu.html>. Last accessed 3 may 2019.
- hyperphysics. Experimento del neutrino, de cowan y reines, 2019. URL <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Particles/cowan.html>. Last accessed 2 may 2019.
- IceCube. All about neutrinos, 2010. URL <https://icecube.wisc.edu/info/neutrinos>. Last accessed 3 may 2019.
- F. C. Jones and D. C. Ellison. The plasma physics of shock acceleration. Space Science Reviews, 58(1):259–346, 1991.

- U. F. Katz and C. Spiering. High-energy neutrino astrophysics: Status and perspectives. Progress in Particle and Nuclear Physics, 67(3):651–704, 2012.
- B. Kayser. Neutrino physics. arXiv preprint hep-ph/0506165, 2005.
- R. Kippenhahn, A. Weigert, and A. Weiss. Stellar structure and evolution, volume 192. Springer, 1990.
- I. B. S. . R. A. O. . R. W. Klebesadel. Observations of gamma-ray bursts of cosmic origin. The Astrophysical Journal, 182:85—88, 1973.
- K. Kodama, N. Ushida, C. Andreopoulos, N. Saoulidou, G. Tzanakos, P. Yager, B. Baller, D. Boehnlein, W. Freeman, B. Lundberg, et al. Observation of tau neutrino interactions. Physics Letters B, 504(3):218–224, 2001.
- C. Kouveliotou, C. A. Meegan, G. J. Fishman, N. P. Bhat, M. S. Briggs, T. M. Koshut, W. S. Paciesas, and G. N. Pendleton. Identification of two classes of gamma-ray bursts. The Astrophysical Journal, 413:L101–L104, 1993.
- A. la Ciencia. Un vistazo rápido al modelo estándar de física de partículas, 2019. URL <https://acelerandolaciencia.wordpress.com/2014/01/24/un-vistazo-rapido-al-modelo-estandar-de-fisica-de-particulas>. Last accessed 2 may 2019.
- T. Laskar, E. Berger, B. A. Zauderer, R. Margutti, A. M. Soderberg, S. Chakraborti, R. Lunnan, R. Chornock, P. Chandra, and A. Ray. A reverse shock in grb 130427a. The Astrophysical Journal, 776(2):119, 2013.
- T. Lee, M. Rosenbluth, and C. N. Yang. Interaction of mesons with nucleons and light particles. Physical Review, 75(5):905, 1949.
- M. S. Longair. High energy astrophysics. Cambridge university press, 2011.
- J. Lovell, B. Rickett, J.-P. Macquart, D. Jauncey, H. Bignall, L. Kedziora-Chudczer, R. Ojha, T. Pursimo, M. Dutka, C. Senkbeil, et al. The micro-arcsecond scintillation-induced variability (masiv) survey. ii. the first four epochs. The Astrophysical Journal, 689(1):108, 2008.
- K. Mannheim. The proton blazar. Astronomy and Astrophysics, 269:67–76, 1993.
- K. Mannheim, R. Protheroe, and J. P. Rachen. Cosmic ray bound for models of extragalactic neutrino production. Physical Review D, 63(2):023003, 2000.
- E. Massaro, P. Giommi, C. Leto, P. Marchegiani, A. Maselli, M. Perri, S. Piranomonte, and S. Scavi. Roma-bzcat: a multifrequency catalogue of blazars. Astronomy & Astrophysics, 495(2):691–696, 2009.
- E. Massaro, A. Maselli, C. Leto, P. Marchegiani, M. Perri, P. Giommi, and S. Piranomonte. The 5th edition of the roma-bzcat. a short presentation. Astrophysics and Space Science, 357(1):75, 2015.

- P. Meszaros. Gamma-ray bursts. Reports on Progress in Physics, 69(8):2259, 2006.
- P. Mészáros and M. J. Rees. Optical and long-wavelength afterglow from gamma-ray bursts. The Astrophysical Journal, 476(1):232, 1997.
- A. Mücke, J. Rachen, R. Engel, R. Protheroe, and T. Stanev. Photomeson production in astrophysical sources. Arxiv preprint astro-ph/9905153, 1999.
- J. Norris, G. Marani, and J. Bonnell. Connection between energy-dependent lags and peak luminosity in gamma-ray bursts. The Astrophysical Journal, 534(1):248, 2000.
- B. Paczynski and G. Xu. Neutrino bursts from gamma-ray bursts. The Astrophysical Journal, 427:708–713, 1994.
- M. L. Perl, G. Abrams, A. Boyarski, M. Breidenbach, D. Briggs, F. Bulos, W. Chinowsky, J. Dakin, G. Feldman, C. Friedberg, et al. Evidence for anomalous lepton production in e^+e^- annihilation. Physical Review Letters, 35(22):1489, 1975.
- B. Peterson, B. Wilkes, and P. Murdin. Active galaxies: Unified model. Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics, 2000.
- M. Petropoulou, E. Lefa, S. Dimitrakoudis, and A. Mastichiadis. One-zone synchrotron self-compton model for the core emission of centaurus a revisited. Astronomy & Astrophysics, 562:A12, 2014.
- T. Piran. Astronomy: glowing embers. Nature, 422(6929):268, 2003.
- T. Piran. The physics of gamma-ray bursts. Rev.Mod. Phys, 76(2):1143–1210, 2005a.
- T. Piran. The physics of gamma-ray bursts. Reviews of Modern Physics, 76(4):1143, 2005b.
- B. Pontecorvo. Nuclear capture of mesons and the meson decay. Physical Review, 72(3):246, 1947.
- R. J. Protheroe and R. Clay. Ultra high energy cosmic rays. Publications of the Astronomical Society of Australia, 21(1):1–22, 2004.
- G. Pucella, V. Vittorini, F. D’Ammando, M. Tavani, C. Raiteri, M. Villata, A. Argan, G. Barbiellini, F. Boffelli, A. Bulgarelli, et al. Agile detection of intense gamma-ray emission from the blazar pks 1510-089. Astronomy & Astrophysics, 491(2):L21–L24, 2008.
- Y. Qin, E.-W. Liang, Y.-F. Liang, S.-X. Yi, L. Lin, B.-B. Zhang, J. Zhang, H.-J. Lü, R.-J. Lu, L.-Z. Lü, et al. A comprehensive analysis of fermi gamma-ray burst data. iii. energy-dependent t_{90} distributions of gbm grbs and instrumental selection effect on duration classification. The Astrophysical Journal, 763(1):15, 2012.

- E. Ramirez-Ruiz and E. Fenimore. Pulse width evolution in gamma-ray bursts: evidence for internal shocks. The Astrophysical Journal, 539(2):712, 2000a.
- E. Ramirez-Ruiz and E. Fenimore. Pulse width evolution in grbs: evidence for internal shocks. Arxiv preprint astro-ph/9910273, 2000b.
- P. C. Redl. A search for muon neutrinos coincident with Gamma-ray Bursts with the IceCube 59-String detector. University of Maryland, 2011.
- F. Reines and C. Cowan. The reines-cowan experiments: Detecting the poltergeist. Los Alamos Sci., 25:4–27, 1997.
- G. B. Rybicki and A. P. Lightman. Radiative processes in astrophysics. John Wiley & Sons, 2008.
- M. P. . M. P. . A. Sfyrta. Particle physics: an introduction. Coursera, 1:2–3, 2018.
- N. I. Shakura and R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. observational appearance. Astronomy and Astrophysics, 24:337–355, 1973.
- G. Shields. Thermal continuum from accretion disks in quasars. Nature, 272(5655):706, 1978.
- A. Solanas, L. Salafranca, J. Fauquet, and M. I. Núñez. Estadística descriptiva en Ciencias del Comportamiento. Thompson, 2005.
- F. Tavecchio. Gamma-ray emission from agns (special focus on bl lac objects). International Journal of Modern Physics, D 19:841–848, 2010.
- J. Tiomno and J. A. Wheeler. Energy spectrum of electrons from meson decay. Reviews of Modern Physics, 21(1):144, 1949.
- C. M. Urry and P. Padovani. Unified schemes for radio-loud active galactic nuclei. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 107:803, sep 1995. doi: 10.1086/133630. URL <https://doi.org/10.1086%2F133630>.
- A. Volnova, A. Pozanenko, J. Gorosabel, D. Perley, D. Kann, D. Frederiks, V. Rumyantsev, A. Castro-Tirado, and P. Minaev. A case study of dark grb 051008. EAS Publications Series, 61:275–278, 2013.
- I. Vurm and J. Poutanen. Time-dependent modeling of radiative processes in hot magnetized plasmas. The Astrophysical Journal, 698(1):293, 2009.
- S. Wagner and A. Witzel. Intraday variability in quasars and bl lac objects. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 33(1):163–197, 1995.
- M. Walter and A. Wolfendale. Early history of cosmic particle physics. The European Physical Journal H, 37(3):323–358, 2012.

- E. Waxman and J. Bahcall. High energy neutrinos from cosmological gamma-ray burst fireballs. Physical Review Letters, 78(12):2292, 1997.
- B. Zhang and P. Meszaros. Gamma-ray bursts: progress, problems & prospects. International Journal of Modern Physics A, 19(15):385–2472, 2004.

Apéndice A

Catálogos de *ICECUBE*

Los 82 eventos de neutrinos detectados por *ICECUBE* durante seis años que se registraron en el catálogo HESE, estos presentan un error angular que se puede ver en la tabla A.1 como e_ν dado por la reconstrucción de la posición de cada neutrino.

Tabla A.1: Tabla del catalogo HESE.

ID	Edep	MJD	Dec	RA	e_ν	Topology
1	47.6-5.4+6.5	55351.32221	-1.8	35.2	16.3	Shower
2	117-14.6+15.4	55351.46597	-28.0	282.6	25.4	Shower
3	78.7-8.7+10.8	55451.07075	-31.2	127.9	1.40	Track
4	165.4-14.9+19.8	55477.3931	-51.2	169.5	7.10	Shower
5	71.4-9.0+9.0	55512.55163	-0.4	110.6	1.20	Track
6	28.4-2.5+2.7	55567.63881	-27.2	133.9	9.80	Shower
7	34.3-4.3+3.5	55571.25854	-45.1	15.6	24.1	Shower
8	32.6-11.1+10.3	55608.82013	-21.2	182.4	1.30	Track
9	63.2-8.0+7.1	55685.66297	33.6	151.3	16.5	Shower
10	97.2-12.4+10.4	55695.27305	-29.4	5.00	8.10	Shower
11	88.4-10.7+12.5	55714.59093	-8.9	155.3	16.7	Shower
12	104.1-13.2+12.5	55739.44112	-52.8	296.1	9.80	Shower
13	252.7-21.6+25.9	55756.11298	40.3	67.9	1.20	Track
14	1040.7-144.4+131.6	55782.51619	-27.9	265.6	13.2	Shower
15	57.5-7.8+8.3	55783.18542	-49.7	287.3	19.7	Shower
16	30.6-3.5+3.6	55798.62713	-22.6	192.1	19.4	Shower
17	199.7-26.8+27.2	55800.37555	14.5	247.4	11.6	Shower
18	31.5-3.3+4.6	55923.53182	-24.8	345.6	1.30	Track
19	71.5-7.2+7.0	55925.79586	-59.7	76.9	9.70	Shower
20	1140.8-132.8+142.8	55929.39863	-67.2	38.3	10.7	Shower
21	30.2-3.3+3.5	55936.54165	-24.0	9.00	20.9	Shower
22	219.5-24.4+21.2	55941.97578	-22.1	293.7	12.1	Shower
23	82.2-8.4+8.6	55949.56932	-13.2	208.7	1.90	Track
24	30.5-2.6+3.2	55950.84749	-15.1	282.2	15.5	Shower
25	33.5-5.0+4.9	55966.74225	-14.5	286.0	46.3	Shower
26	210-25.8+29.0	55979.25518	22.7	143.4	11.8	Shower

ID	Edep	MJD	Dec	RA	e_ν	Topology
27	60.2-5.6+5.6	56008.68456	-12.6	121.7	6.60	Shower
28	46.1-4.4+5.7	56048.57042	-71.5	164.8	1.30	Track
29	32.7-2.9+3.2	56108.2572	41.0	298.1	7.40	Shower
30	128.7-12.5+13.8	56115.72836	-82.7	103.2	8.00	Shower
31	42.5-5.7+5.4	56176.39141	78.3	146.1	26.0	Shower
32	–	56211.74012	–	–	–	Coincident
33	384.7-48.6+46.4	56221.3424	7.80	292.5	13.5	Shower
34	42.1-6.3+6.5	56228.60552	31.3	323.4	42.7	Shower
35	2003.7-261.5+236.2	56265.13387	-55.80	208.4	15.9	Shower
36	28.9-2.6+3.0	56308.16427	-3.0	257.7	11.7	Shower
37	30.8-3.5+3.3	56390.18876	20.7	167.3	1.20	Track
38	200.5-16.4+16.4	56470.11038	14.0	93.3	1.20	Track
39	101.3-11.6+13.3	56480.66179	-17.9	106.2	14.2	Shower
40	157.3-16.7+15.9	56501.1641	-48.5	143.9	11.7	Shower
41	87.6-10.0+8.4	56603.11169	3.30	66.1	11.1	Shower
42	76.3-11.6+10.3	56613.25669	-25.3	42.5	20.7	Shower
43	46.5-4.5+5.9	56628.56885	-22.0	206.6	1.30	Track
44	84.6-7.9+7.4	56671.87788	0.00	336.7	1.20	Track
45	429.9-49.1+57.4	56679.20447	-86.3	219.0	1.20	Track
46	158-16.6+15.3	56688.07029	-22.3	150.5	7.60	Shower
47	74.3-7.2+8.3	56704.60011	67.40	209.4	1.20	Track
48	104.7-10.2+13.5	56705.94199	-33.2	213.0	8.10	Shower
49	59.9-7.9+8.3	56722.40836	-26.3	203.2	21.8	Shower
50	22.2-2.0+2.3	56737.20047	59.3	168.6	8.20	Shower
51	66.2-6.1+6.7	56759.21596	54.0	88.6	6.50	Shower
52	158.1-18.4+16.3	56763.54481	-54.0	252.8	7.80	Shower
53	27.6-2.2+2.6	56767.0663	-37.7	239.0	1.20	Track
54	54.5-6.3+5.1	56769.0296	6.00	170.5	11.6	Shower
55	–	56798.73029	–	–	–	Coincident
56	104.2+9.70 - 10.0	56817.38958	-50.1	280.5	6.50	Shower
57	132.1+18.1-16.8	56830.52665	-42.2	123.0	14.4	Shower
58	52.60+5.20-5.70	56859.75882	-32.4	102.1	1.30	Track
59	124.6+11.6-11.7	56922.5853	-3.9	63.3	8.80	Shower
60	93.00+12.9-11.7	56931.9311	-37.9	32.7	13.3	Shower
61	53.80+7.20-6.30	56970.20736	-16.5	55.6	1.20	Track
62	75.80+6.70-7.10	56987.77219	13.3	187.9	1.30	Track
63	97.40+9.60-9.60	57000.14311	6.50	160.0	1.20	Track
64	70.80+8.10-7.70	57036.74378	-27.3	144.5	10.6	Shower
65	43.30+5.90-5.20	57051.66378	-33.5	72.8	17.5	Shower
66	84.20+10.7-9.90	57053.12727	38.3	128.7	18.3	Shower
67	165.7+16.5-15.5	57079.96532	3.00	335.7	7.00	Shower
68	59.10+8.00-6.00	57081.53526	-15.7	294.3	11.7	Shower
69	18.00+2.20-2.00	57133.79007	0.30	236.2	15.7	Shower
70	98.80+12.0-11.1	57134.39812	-33.5	93.9	12.3	Shower

ID	Edep	MJD	Dec	RA	e_ν	Topology
71	73.50+10.0-10.5	57140.47276	-20.8	80.7	1.20	Track
72	35.30+4.60-4.10	57144.29607	28.3	203.2	19.5	Shower
73	26.20+2.60-2.30	57154.83679	11.1	278.4	6.90	Shower
74	71.30+9.10-8.10	57157.00077	-0.9	341.0	12.7	Shower
75	164.0+20.7-21.4	57168.4045	70.5	259.0	13.1	Shower
76	126.3+12.0-12.7	57276.5653	-0.4	240.2	1.20	Track
77	39.50+3.80-3.70	57285.01732	2.10	278.4	7.20	Shower
78	56.70+7.00-6.90	57363.44233	7.50	0.40	1.20	Track
79	158.2+20.3-19.8	57365.75249	-11.1	24.6	14.6	Shower
80	85.60+11.1-10.6	57386.35877	-3.6	146.6	16.1	Shower
81	151.8+13.9-21.6	57480.64736	-79.4	45.0	13.5	Shower
82	159.3+15.5-15.3	57505.24482	9.40	240.9	1.2	Track

Apéndice B

Tablas de Resultados

Tabla B.1: Resultados de la prueba K-S de los GRBs detectados por SWIFT-XRT, y los 82 neutrinos del catálogo HESE de *ICECUBE* .

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.0447222431647	0.00136054421769	0.00200007903368
0.0706136399575	0.00272108843537	0.00498628614804
0.0720904494613	0.00408163265306	0.00519703290354
0.0758546474107	0.00544217687075	0.0057539275338
0.0793522074717	0.00680272108844	0.00629677283063
0.0917128505477	0.00816326530612	0.00841124695558
0.0950922403019	0.00952380952381	0.00904253416563
0.0996979448956	0.0108843537415	0.0099396802164
0.109831143464	0.0122448979592	0.0120628800745
0.10986411185	0.0136054421769	0.0120701230726
0.128431699066	0.0149659863946	0.0164947013249
0.128549791253	0.0163265306122	0.0165250488312
0.13635008491	0.0176870748299	0.018591345655
0.158084565028	0.0190476190476	0.0249907297002
0.159715605265	0.0204081632653	0.0255090745653
0.1640959522	0.021768707483	0.0269274815284
0.165413644174	0.0231292517007	0.0273616736788
0.192612188034	0.0244897959184	0.0370994549793
0.200421754279	0.0258503401361	0.0401688795882
0.204363641474	0.0272108843537	0.0417644979565
0.214650710259	0.0285714285714	0.0460749274149
0.217601992374	0.0299319727891	0.0473506270851
0.218144408828	0.0312925170068	0.047586983103
0.220735513487	0.0326530612245	0.0487241669144
0.224727180162	0.0340136054422	0.0505023055037
0.225069264308	0.0353741496599	0.0506561737363
0.225819267155	0.0367346938776	0.0509943414184
0.226043925377	0.0380952380952	0.0510958561997

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.226350183385	0.0394557823129	0.0512344055184
0.228630127757	0.0408163265306	0.0522717353183
0.229087701958	0.0421768707483	0.0524811751882
0.239628521557	0.043537414966	0.0574218283437
0.241160971748	0.0448979591837	0.0581586142942
0.244801316337	0.0462585034014	0.0599276844803
0.244887006213	0.047619047619	0.0599696458119
0.247017849489	0.0489795918367	0.0610178179664
0.249453371507	0.0503401360544	0.0622269845564
0.249569963684	0.0517006802721	0.0622851667731
0.250172296605	0.0530612244898	0.0625861779888
0.250509807905	0.0544217687075	0.0627551638566
0.250792591068	0.0557823129252	0.0628969237345
0.251382111529	0.0571428571429	0.0631929659969
0.251807630359	0.0585034013605	0.0634070827068
0.251814352881	0.0598639455782	0.0634104683167
0.253160434207	0.0612244897959	0.0640902054479
0.25354276799	0.0625850340136	0.0642839351999
0.26183908503	0.0639455782313	0.0685597064495
0.269476699899	0.065306122449	0.0726176917886
0.27204737627	0.0666666666667	0.0740097749352
0.277643667378	0.0680272108844	0.0770860060351
0.279726625035	0.069387755102	0.0782469847534
0.281631033263	0.0707482993197	0.0793160388968
0.282344863667	0.0721088435374	0.0797186220392
0.284338867221	0.0734693877551	0.0808485914126
0.292090392418	0.0748299319728	0.0853167973426
0.292747661082	0.0761904761905	0.0857011930688
0.293152848156	0.0775510204082	0.0859385923821
0.29348821996	0.0789115646259	0.0861353352553
0.296899595011	0.0802721088435	0.0881493695177
0.296931163446	0.0816326530612	0.0881681158254
0.297291204296	0.0829931972789	0.0883820601517
0.300295972437	0.0843537414966	0.0901776710616
0.305180617183	0.0857142857143	0.0931352091043
0.306365310219	0.087074829932	0.0938597033058
0.307054124025	0.0884353741497	0.0942822350806
0.309637200622	0.0897959183673	0.0958751960093
0.3097196073	0.091156462585	0.0959262351462
0.319374749688	0.0925170068027	0.102000230738
0.321167036249	0.0938775510204	0.103148265173
0.326204456869	0.0952380952381	0.106409347681
0.328587275254	0.0965986394558	0.107969597459
0.331738133858	0.0979591836735	0.110050189456

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.331820718583	0.0993197278912	0.110104989281
0.332785643212	0.100680272109	0.110746284328
0.335367617866	0.102040816327	0.112471439113
0.339499112773	0.103401360544	0.115259647574
0.34238705693	0.104761904762	0.117228896753
0.343060888049	0.10612244898	0.117690772909
0.344039551184	0.107482993197	0.118363212779
0.346353857961	0.108843537415	0.119960994924
0.346638966802	0.110204081633	0.120158573306
0.347041825007	0.11156462585	0.120438028304
0.347091936492	0.112925170068	0.120472812378
0.350537623249	0.114285714286	0.122876625313
0.35271900368	0.115646258503	0.124410695557
0.353312685311	0.117006802721	0.124829853601
0.355905537463	0.118367346939	0.126668751597
0.356047845258	0.119727891156	0.126770068113
0.356412386504	0.121088435374	0.127029789254
0.357352030476	0.122448979592	0.127700473685
0.359136085152	0.12380952381	0.128978727658
0.36238412741	0.125170068027	0.131322255799
0.363327775676	0.126530612245	0.132007072578
0.366111063385	0.127891156463	0.134037310733
0.3670501276	0.12925170068	0.134725796171
0.367676430492	0.130612244898	0.135185957539
0.368460962856	0.131972789116	0.135763481149
0.370851339162	0.133333333333	0.137530715758
0.370921898182	0.134693877551	0.137583054551
0.372957046697	0.136054421769	0.139096958681
0.376841081369	0.137414965986	0.142009200607
0.379161138513	0.138775510204	0.143763168959
0.383322667655	0.140136054422	0.146936267538
0.383933604667	0.141496598639	0.147405012793
0.384640176192	0.142857142857	0.147948065141
0.385533669101	0.144217687075	0.14863621001
0.385748537701	0.145578231293	0.148801934338
0.385873222782	0.14693877551	0.14889814406
0.387182626185	0.148299319728	0.14991038602
0.387580271498	0.149659863946	0.150218466854
0.387599112366	0.151020408163	0.150233071907
0.387706082429	0.152380952381	0.150316006352
0.387854482039	0.153741496599	0.150431099238
0.391101573261	0.155102040816	0.152960440608
0.391825870241	0.156462585034	0.15352751259
0.393541849476	0.157823129252	0.154875187289

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.394820621954	0.159183673469	0.15588332352
0.397750448172	0.160544217687	0.158205419021
0.398480260975	0.161904761905	0.158786518387
0.398759226927	0.163265306122	0.159008921059
0.399027065947	0.16462585034	0.159222599358
0.399917037834	0.165986394558	0.15993363715
0.401422541326	0.167346938776	0.161140056685
0.401454367348	0.168707482993	0.161165609063
0.402435250618	0.170068027211	0.16195413094
0.402919814252	0.171428571429	0.162344376717
0.40343569641	0.172789115646	0.162760361137
0.404115721957	0.174149659864	0.163309516733
0.405186224562	0.175510204082	0.164175876574
0.406570116504	0.176870748299	0.165299259634
0.407280232665	0.178231292517	0.165877187919
0.40872315816	0.179591836735	0.167054620016
0.409569029864	0.180952380952	0.167746790224
0.41061322726	0.18231292517	0.168603222401
0.413686805903	0.183673469388	0.171136773378
0.416316828831	0.185034013605	0.173319701968
0.418362869375	0.186394557823	0.175027490472
0.420434743612	0.187755102041	0.176765373636
0.420439441222	0.189115646259	0.176769323735
0.425051353155	0.190476190476	0.180668652819
0.428264899462	0.191836734694	0.183410824111
0.429401654146	0.193197278912	0.184385780583
0.43539640075	0.194557823129	0.189570025786
0.439324506112	0.195918367347	0.19300602167
0.439675446477	0.197278911565	0.193314498235
0.441604820453	0.198639455782	0.195014817447
0.443424159544	0.2	0.196624985267
0.443558700393	0.201360544218	0.196744320695
0.443661802716	0.202721088435	0.196835795189
0.443925741789	0.204081632653	0.197070064223
0.445242615963	0.205442176871	0.19824098707
0.445779162146	0.206802721088	0.198719061403
0.446600139714	0.208163265306	0.199451684793
0.448701873341	0.209523809524	0.20133337114
0.449817181639	0.210884353741	0.202335496897
0.449896057112	0.212244897959	0.202406462205
0.450310013464	0.213605442177	0.202779108226
0.451637649437	0.214965986395	0.203976566389
0.454120888572	0.216326530612	0.206225781437
0.454494979471	0.21768707483	0.206565686365

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.456951818124	0.219047619048	0.208804964087
0.45713199747	0.220408163265	0.208969663111
0.459205568181	0.221768707483	0.210869753849
0.459444982221	0.223129251701	0.211089691688
0.462811157961	0.224489795918	0.214194167933
0.465100450884	0.225850340136	0.216318429413
0.468996037542	0.227210884354	0.21995728323
0.4696272383	0.228571428571	0.220549742954
0.47069155886	0.229931972789	0.221550543582
0.474575705772	0.231292517007	0.225222100509
0.475630845939	0.232653061224	0.226224701609
0.485063363159	0.234013605442	0.235286466279
0.486599881271	0.23537414966	0.236779444453
0.487392562683	0.236734693878	0.237551510158
0.487885202543	0.238095238095	0.238031970861
0.489073701966	0.239455782313	0.239193085955
0.491670104043	0.240816326531	0.24173949121
0.493218934281	0.242176870748	0.243264917134
0.493702744641	0.243537414966	0.243742400066
0.4973927067	0.244897959184	0.247399504678
0.501443927154	0.246258503401	0.251446012079
0.50326751837	0.247619047619	0.253278195046
0.507155306985	0.248979591837	0.257206505403
0.50777371442	0.250340136054	0.257834145056
0.507782360459	0.251700680272	0.257842925594
0.508573131433	0.25306122449	0.258646630015
0.509826138411	0.254421768707	0.259922691407
0.512697349209	0.255782312925	0.262858571886
0.513572862046	0.257142857143	0.26375708463
0.514374633239	0.258503401361	0.264581263319
0.514631036565	0.259863945578	0.264845103795
0.517772879278	0.261224489796	0.268088754516
0.523116535925	0.262585034014	0.273650910158
0.523299697619	0.263945578231	0.273842573528
0.526465298395	0.265306122449	0.277165710414
0.52653195902	0.266666666667	0.27723590387
0.528461841813	0.268027210884	0.279271918252
0.530271708247	0.269387755102	0.281188084567
0.532057379676	0.27074829932	0.283085055268
0.533854878452	0.272108843537	0.285001031247
0.533980277162	0.273469387755	0.285134936399
0.53566007238	0.274829931973	0.286931713142
0.536860835175	0.27619047619	0.288219556345
0.53724374139	0.277551020408	0.288630837662

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.537345292015	0.278911564626	0.28873996285
0.53803437409	0.280272108844	0.289480987702
0.539245978131	0.281632653061	0.29078622493
0.539540048208	0.282993197279	0.29110346362
0.541617325386	0.284353741497	0.293349327158
0.5419341641	0.285714285714	0.293692638218
0.543268413204	0.287074829932	0.295140568785
0.544526434901	0.28843537415	0.296509038306
0.545123337735	0.289795918367	0.297159453343
0.547376805945	0.291156462585	0.299621367687
0.549797330293	0.292517006803	0.302277104398
0.551946444327	0.29387755102	0.304644877405
0.552800953871	0.295238095238	0.305588894601
0.555221607937	0.296598639456	0.308271033921
0.557201100511	0.297959183673	0.310473066411
0.557460627764	0.299319727891	0.310762351507
0.558260410798	0.300680272109	0.311654686264
0.563302251739	0.302040816327	0.317309426814
0.565158842915	0.303401360544	0.319404517725
0.566268257624	0.304761904762	0.320659739593
0.566791378717	0.30612244898	0.321252466988
0.568077113478	0.307482993197	0.322711606857
0.569228091752	0.308843537415	0.32402062044
0.569813321035	0.310204081633	0.324687220829
0.571898464211	0.31156462585	0.327067853367
0.575654359998	0.312925170068	0.331377942185
0.575702359272	0.314285714286	0.331433206471
0.57599070029	0.315646258503	0.331765286821
0.577758251481	0.317006802721	0.333804597155
0.578507337553	0.318367346939	0.334670739603
0.57998132213	0.319727891156	0.336378334019
0.581306556952	0.321088435374	0.337917313155
0.581830195834	0.322448979592	0.338526376785
0.581912390364	0.32380952381	0.33862203006
0.582458951162	0.325170068027	0.339258429788
0.583620931248	0.326530612245	0.34061339139
0.584013508342	0.327891156463	0.341071777926
0.585548294767	0.32925170068	0.342866805505
0.586411398814	0.330612244898	0.343878328658
0.586482712016	0.331972789116	0.343961971494
0.588372815296	0.333333333333	0.346182569779
0.588614785917	0.334693877551	0.3464673662
0.589712333662	0.336054421769	0.347760636474
0.589769149775	0.337414965986	0.347827650026

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.592525479703	0.338775510204	0.351086444098
0.592871276821	0.340136054422	0.351496350879
0.593470645301	0.341496598639	0.352207406834
0.593615643503	0.342857142857	0.352379532212
0.596908123824	0.344217687075	0.356299308287
0.597525410363	0.345578231293	0.35703661603
0.598700740002	0.34693877551	0.358442576079
0.599018178816	0.348299319728	0.358822778552
0.599815539042	0.349659863946	0.359778680876
0.604830336404	0.351020408163	0.365819735835
0.605386672441	0.352380952381	0.36649302317
0.606685932984	0.353741496599	0.368067821281
0.606827414522	0.355102040816	0.368239511016
0.607050331425	0.356462585034	0.368510104884
0.607563445067	0.357823129252	0.369133339781
0.607710044605	0.359183673469	0.369311498313
0.608051999798	0.360544217687	0.369727234459
0.608496626499	0.361904761905	0.37026814446
0.60955264541	0.363265306122	0.371554427526
0.609877576015	0.36462585034	0.371950657726
0.610001517485	0.365986394558	0.372101851334
0.610253693734	0.367346938776	0.372409570716
0.610301189036	0.368707482993	0.372467541338
0.61303330614	0.370068027211	0.375809834437
0.613173592545	0.371428571429	0.375981854594
0.613749318469	0.372789115646	0.376688225921
0.613990963904	0.374149659864	0.376984903755
0.617488847235	0.375510204082	0.38129247646
0.618373775688	0.376870748299	0.382386126459
0.622241090569	0.378231292517	0.387183974793
0.623250719308	0.379591836735	0.388441459118
0.626577932096	0.380952380952	0.392599904989
0.626607365709	0.38231292517	0.392636790761
0.626962757383	0.383673469388	0.393082299145
0.627648107342	0.385034013605	0.39394214665
0.62802443691	0.386394557823	0.394414693356
0.630674312869	0.387755102041	0.397750088913
0.630926314397	0.389115646259	0.398068014199
0.631030061455	0.390476190476	0.39819893846
0.632818365873	0.391836734694	0.400459084186
0.634214488635	0.393197278912	0.402228017594
0.636983187393	0.394557823129	0.405747581022
0.63740001737	0.395918367347	0.406278782144
0.638667984073	0.397278911565	0.40789679388

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.640405008864	0.398639455782	0.410118575378
0.641002852105	0.4	0.410884656406
0.641252725305	0.401360544218	0.411205057711
0.641591836561	0.402721088435	0.411640084742
0.643359619703	0.404081632653	0.413911600264
0.644697604552	0.405442176871	0.415635001316
0.644815421035	0.406802721088	0.415786927204
0.647403805361	0.408163265306	0.419131687196
0.648433885156	0.409523809524	0.420466503419
0.651116399257	0.410884353741	0.423952565382
0.652859632706	0.412244897959	0.426225700017
0.653444680332	0.413605442177	0.426989950254
0.653700824736	0.414965986395	0.427324768261
0.655579815789	0.416326530612	0.42978489487
0.655754938832	0.41768707483	0.430014539802
0.655834229604	0.419047619048	0.430118536721
0.656633784465	0.420408163265	0.431167926901
0.658107608999	0.421768707483	0.433105625022
0.659615170471	0.423129251701	0.435092173116
0.661870108279	0.424489795918	0.438072040234
0.662292715594	0.425850340136	0.438631641129
0.662374264425	0.427210884354	0.438739666172
0.66376367766	0.428571428571	0.440582219781
0.664733965361	0.429931972789	0.441871244705
0.664745505453	0.431292517007	0.441886587021
0.665075969084	0.432653061224	0.442326044653
0.665228919713	0.434013605442	0.442529515622
0.666148618968	0.43537414966	0.443753982553
0.667073804234	0.436734693878	0.444987460295
0.667461927678	0.438095238095	0.4455054249
0.668510099004	0.439455782313	0.44690575247
0.668571437941	0.440816326531	0.446987767631
0.669342666384	0.442176870748	0.448019605042
0.670595956213	0.443537414966	0.449698936489
0.670845504235	0.444897959184	0.450033690553
0.671172040693	0.446258503401	0.450471908208
0.672065105437	0.447619047619	0.451671505946
0.674453379961	0.448979591837	0.45488736174
0.67572007584	0.450340136054	0.456597620894
0.675804968444	0.451700680272	0.456712355374
0.676415725874	0.45306122449	0.45753823421
0.676528789617	0.454421768707	0.45769120318
0.677372306137	0.455782312925	0.458833241122
0.678625865938	0.457142857143	0.46053306592

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.680214174889	0.458503401361	0.46269132372
0.680265143322	0.459863945578	0.462760665219
0.680411224403	0.461224489796	0.462959434294
0.680947059491	0.462585034014	0.463688897829
0.68130057074	0.463945578231	0.464170467691
0.681571264854	0.465306122449	0.464539389074
0.687367744977	0.466666666667	0.472474416834
0.690026389994	0.468027210884	0.476136418888
0.690565875008	0.469387755102	0.476881227726
0.691276837288	0.47074829932	0.477863665771
0.691328613318	0.472108843537	0.477935251592
0.691854194409	0.473469387755	0.478662226321
0.694573172137	0.474829931973	0.482431891452
0.695135400054	0.47619047619	0.483213224408
0.696661959372	0.477551020408	0.485337885637
0.696789270373	0.478911564626	0.485515287307
0.696896233905	0.480272108844	0.485664360831
0.697366383856	0.481632653061	0.486319873333
0.697664022683	0.482993197279	0.486735088547
0.698102319425	0.484353741497	0.487346848386
0.698169722596	0.485714285714	0.48744096155
0.699050273938	0.487074829932	0.488671285493
0.699774569458	0.48843537415	0.48968444806
0.700157312714	0.489795918367	0.490220262547
0.700354035623	0.491156462585	0.490495775213
0.70119709302	0.492517006803	0.491677363259
0.703054814275	0.49387755102	0.494286071876
0.703474667325	0.495238095238	0.494876607567
0.70354133383	0.496598639456	0.494970408407
0.704262931429	0.497959183673	0.495986276585
0.704759483554	0.499319727891	0.496685929659
0.705242150837	0.500680272109	0.497366491317
0.706350345513	0.502040816327	0.498930810606
0.707204184812	0.503401360544	0.500137759016
0.707825769787	0.504761904762	0.501017320375
0.709346005797	0.50612244898	0.50317175594
0.710125023885	0.507482993197	0.504277549548
0.710260340732	0.508843537415	0.504469751616
0.710550772273	0.510204081633	0.504882399978
0.710763333168	0.51156462585	0.505184515776
0.713147760577	0.512925170068	0.508579728416
0.713372959089	0.514285714286	0.50890097876
0.71960146194	0.515646258503	0.517826264026
0.719781813143	0.517006802721	0.518085858531

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.720861511166	0.518367346939	0.51964131828
0.721121540591	0.519727891156	0.520016276304
0.722540313189	0.521088435374	0.522064504183
0.723225591307	0.522448979592	0.523055255921
0.72451078347	0.52380952381	0.524915875364
0.724966176022	0.525170068027	0.525575956376
0.725341033352	0.526530612245	0.526119614664
0.726205840224	0.527891156463	0.527374922375
0.726877958435	0.52925170068	0.528351566459
0.727271119625	0.530612244898	0.528923281441
0.728152653579	0.531972789116	0.530206286915
0.728639084776	0.533333333333	0.530914915863
0.730698871562	0.534693877551	0.533920840903
0.730863559825	0.536054421769	0.53416154308
0.732405851399	0.537414965986	0.536418331164
0.732998970468	0.538775510204	0.537287490707
0.733755936178	0.540136054422	0.538397773877
0.733805906036	0.541496598639	0.538471107734
0.734158091578	0.542857142857	0.538988103429
0.734984588496	0.544217687075	0.540202345327
0.73567202542	0.545578231293	0.541213328985
0.738149344462	0.54693877551	0.544864454729
0.739085937941	0.548299319728	0.546248023662
0.740451756138	0.549659863946	0.548268803168
0.741389069989	0.551020408163	0.549657753099
0.7422039375	0.552380952381	0.550866684841
0.742209281408	0.553741496599	0.550874617408
0.742584513067	0.555102040816	0.551431759047
0.742985568921	0.556462585034	0.552027555625
0.745496775593	0.557823129252	0.55576544242
0.746160544622	0.559183673469	0.55675555835
0.746600136749	0.560544217687	0.557411764193
0.747227496812	0.561904761905	0.558348931991
0.749107559275	0.563265306122	0.561162135364
0.749533746346	0.56462585034	0.561800836912
0.75068716296	0.565986394558	0.563531216634
0.751477527639	0.567346938776	0.564718474546
0.752864492375	0.568707482993	0.566804943879
0.752981755825	0.570068027211	0.566981524605
0.753186984342	0.571428571429	0.567290633382
0.754013261627	0.572789115646	0.56853599871
0.754748431403	0.574149659864	0.569645194705
0.755515116774	0.575510204082	0.570803091674
0.756137350459	0.576870748299	0.571743692759

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.756343313909	0.578231292517	0.572055208495
0.757190261106	0.579591836735	0.573337091514
0.759000736208	0.580952380952	0.576082117564
0.760353658091	0.58231292517	0.578137685372
0.761078205301	0.583673469388	0.579240034583
0.761162124637	0.585034013605	0.579367779983
0.761480547743	0.586394557823	0.579852624591
0.761664855173	0.587755102041	0.580133351606
0.763552671753	0.589115646259	0.583012682541
0.766179516629	0.590476190476	0.587031051702
0.767272648093	0.591836734694	0.588707316511
0.7708083203	0.593197278912	0.594145466644
0.77110391434	0.594557823129	0.594601246711
0.771972582996	0.595918367347	0.595941668898
0.772032040211	0.597278911565	0.596033471113
0.772259413893	0.598639455782	0.596384602347
0.77279171743	0.6	0.597207038528
0.774693900501	0.601360544218	0.600150639474
0.775822666461	0.602721088435	0.601900809795
0.776260465425	0.604081632653	0.602580310181
0.777988644637	0.605442176871	0.605266331184
0.77815018034	0.606802721088	0.605517703164
0.779008782711	0.608163265306	0.60685468354
0.780760645895	0.609523809524	0.609587186179
0.780777089798	0.610884353741	0.609612863953
0.780878056372	0.612244897959	0.609770538923
0.781242302488	0.613605442177	0.610339535197
0.781273696356	0.614965986395	0.610388588617
0.782806724272	0.616326530612	0.612786367566
0.784809482492	0.61768707483	0.615925923809
0.785664670587	0.619047619048	0.617268974609
0.786757623103	0.620408163265	0.618987557511
0.787810021723	0.621768707483	0.620644630327
0.788219226775	0.623129251701	0.621289549457
0.788864343134	0.624489795918	0.622306951869
0.788910582469	0.625850340136	0.622379907132
0.78951150984	0.627210884354	0.62332842417
0.790749880168	0.628571428571	0.625285372986
0.79123807918	0.629931972789	0.626057697944
0.791241639066	0.631292517007	0.626063331392
0.791575684994	0.632653061224	0.626592065074
0.792409873175	0.634013605442	0.627913407106
0.794725737402	0.63537414966	0.631588997689
0.794747213898	0.636734693878	0.631623133999

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.794915266549	0.638095238095	0.631890280993
0.795955906208	0.639455782313	0.633545804628
0.796863214094	0.640816326531	0.634990981976
0.797298622845	0.642176870748	0.635685093991
0.797874492207	0.643537414966	0.636603705314
0.798550416224	0.644897959184	0.637682767251
0.79928998476	0.646258503401	0.638864479737
0.799293468147	0.647619047619	0.638870048222
0.804789115801	0.648979591837	0.647685520912
0.804920620139	0.650340136054	0.647897204725
0.805288987599	0.651700680272	0.648490353547
0.806449580444	0.65306122449	0.650360925799
0.806496447827	0.654421768707	0.650436520357
0.807540275025	0.655782312925	0.652121295788
0.807935191784	0.657142857143	0.652759274123
0.807964651793	0.658503401361	0.652806878548
0.809368790216	0.659863945578	0.655077838576
0.809451548043	0.661224489796	0.655211808629
0.810651911824	0.662585034014	0.657156522144
0.810738982099	0.663945578231	0.657297697095
0.810953739196	0.665306122449	0.657645967115
0.811619744177	0.666666666667	0.658726609138
0.812792013531	0.668027210884	0.66063085726
0.812989073628	0.669387755102	0.660951233839
0.814818773371	0.67074829932	0.663929633438
0.815646605682	0.672108843537	0.66527938536
0.815743417802	0.673469387755	0.665437323687
0.819363772933	0.674829931973	0.671356992394
0.819460292336	0.67619047619	0.671515170716
0.821018741564	0.677551020408	0.674071773999
0.821266310928	0.678911564626	0.674478353465
0.821590149128	0.680272108844	0.675010373144
0.82600653298	0.681632653061	0.682286792526
0.826319701565	0.682993197279	0.682804249195
0.826759153504	0.684353741497	0.683530697902
0.827113830761	0.685714285714	0.684117289036
0.827794324901	0.687074829932	0.685243444339
0.828149085548	0.68843537415	0.685830907894
0.828632362861	0.689795918367	0.686631592781
0.829311159525	0.691156462585	0.687756999313
0.832205251205	0.692517006803	0.692565580134
0.832473286424	0.69387755102	0.69301177261
0.83254397646	0.695238095238	0.693129472739
0.834245729926	0.696598639456	0.6959659379

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.834608574514	0.697959183673	0.696571472653
0.834907961187	0.699319727891	0.697071303654
0.835844784704	0.700680272109	0.698636504117
0.836344401943	0.702040816327	0.699471958662
0.837042194223	0.703401360544	0.70063963491
0.837838001795	0.704761904762	0.701972517251
0.837892985006	0.70612244898	0.702064654323
0.83820829711	0.707482993197	0.702593149343
0.840497579259	0.708843537415	0.70643618074
0.840810267259	0.710204081633	0.706961905529
0.841409836994	0.71156462585	0.70797051379
0.842188060058	0.712925170068	0.709280728504
0.842282492551	0.714285714286	0.709439797258
0.843164399335	0.715646258503	0.710926204305
0.844044545937	0.717006802721	0.712411195526
0.845986736799	0.718367346939	0.71569355884
0.846608399668	0.719727891156	0.716745782388
0.847161207133	0.721088435374	0.717682110872
0.849423667367	0.722448979592	0.721520566683
0.850255026069	0.72380952381	0.722933609355
0.850367511701	0.725170068027	0.723124904957
0.851416299999	0.726530612245	0.724909715904
0.851680309969	0.727891156463	0.725359350389
0.852272935722	0.72925170068	0.726369156965
0.852721004874	0.730612244898	0.727133112154
0.853418703179	0.731972789116	0.728323482936
0.854970090085	0.733333333333	0.73097385494
0.858184543116	0.734693877551	0.736480710043
0.859158261079	0.736054421769	0.738152917581
0.860251844545	0.737414965986	0.740033236043
0.862044154345	0.738775510204	0.743120124041
0.862216309817	0.740136054422	0.743416964915
0.862985818828	0.741496598639	0.744744523498
0.867189192543	0.742857142857	0.752017095664
0.868676253321	0.744217687075	0.754598433085
0.869074688903	0.745578231293	0.755290814892
0.870651942178	0.74693877551	0.758034804418
0.87139721421	0.748299319728	0.759333104934
0.872788334063	0.749659863946	0.761759476077
0.873013982942	0.751020408163	0.762153414413
0.873277171198	0.752380952381	0.762613017735
0.875145917578	0.753741496599	0.765880377053
0.875402173266	0.755102040816	0.766328964959
0.876680296745	0.756462585034	0.768568342701

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.87712017939	0.757823129252	0.769339809093
0.877722066969	0.759183673469	0.770396026843
0.878396868406	0.760544217687	0.771581058426
0.878973255203	0.761904761905	0.772593983362
0.87930007819	0.763265306122	0.773168627505
0.879440118646	0.76462585034	0.773414922283
0.87981495244	0.765986394558	0.774074350537
0.880162201022	0.767346938776	0.774685500107
0.88059081729	0.768707482993	0.775440187495
0.880690719586	0.770068027211	0.775616143565
0.881756938356	0.771428571429	0.777495298339
0.881808013982	0.772789115646	0.777585373523
0.881838064814	0.774149659864	0.777638372555
0.882299098572	0.775510204082	0.778451699341
0.882326021321	0.776870748299	0.7784992079
0.882560331255	0.778231292517	0.778912738305
0.882809005693	0.779591836735	0.779351740532
0.88309770689	0.780952380952	0.779861559914
0.884011596038	0.78231292517	0.78147650193
0.885045353637	0.783673469388	0.783305277994
0.885919069655	0.785034013605	0.784852597978
0.886792138787	0.786394557823	0.786400297415
0.886986877564	0.787755102041	0.786745720971
0.887388054053	0.789115646259	0.787457558476
0.887616670076	0.790476190476	0.787863352998
0.889512878978	0.791836734694	0.791233161868
0.889764872035	0.793197278912	0.791681527508
0.890287946229	0.794557823129	0.7926126272
0.890675396947	0.795918367347	0.793302662726
0.892537221136	0.797278911565	0.796622691114
0.895662153443	0.798639455782	0.80221069311
0.895930764602	0.8	0.802691934961
0.895949316829	0.801360544218	0.802725178326
0.895959764707	0.802721088435	0.802743899974
0.896689559728	0.804081632653	0.804052166525
0.896782512247	0.805442176871	0.804218874272
0.897857177502	0.806802721088	0.806147511192
0.899866418969	0.808163265306	0.809759571989
0.900308035487	0.809523809524	0.810554558762
0.901044559877	0.810884353741	0.811881298884
0.901588255357	0.812244897959	0.812861382197
0.902702831405	0.813605442177	0.814872401827
0.902875126297	0.814965986395	0.815183493687
0.903209912825	0.816326530612	0.815788146626

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.904246760791	0.81768707483	0.817662204401
0.904694167472	0.819047619048	0.818471536658
0.904999554745	0.820408163265	0.819024194088
0.905012831073	0.821768707483	0.819048224406
0.90772898959	0.823129251701	0.823971918542
0.907736650487	0.824489795918	0.823985826637
0.908440994822	0.825850340136	0.825265041074
0.908531060663	0.827210884354	0.825428688189
0.90961245464	0.828571428571	0.827394819135
0.910030386098	0.829931972789	0.828155303622
0.912274931641	0.831292517007	0.832245550901
0.912781796893	0.832653061224	0.83317060874
0.912811999216	0.834013605442	0.833225745912
0.915672333297	0.83537414966	0.838455821966
0.917683583689	0.836734693878	0.842143159772
0.919044897839	0.838095238095	0.844643524243
0.919195635327	0.839455782313	0.844920616004
0.919328079933	0.840816326531	0.845164118554
0.919573718361	0.842176870748	0.845615823501
0.921518638752	0.843537414966	0.849196601568
0.92263445642	0.844897959184	0.851254340174
0.92303812447	0.846258503401	0.851999379225
0.923247496311	0.847619047619	0.852385939444
0.924300091759	0.848979591837	0.854330659625
0.924897663195	0.850340136054	0.855435687383
0.92498187202	0.851700680272	0.855591463565
0.925315508822	0.85306122449	0.856208790867
0.925534591766	0.854421768707	0.856614280556
0.925603198222	0.855782312925	0.856741280559
0.926525660948	0.857142857143	0.858449800394
0.92804787962	0.858503401361	0.861272866868
0.928059468531	0.859863945578	0.861294377129
0.928324546468	0.861224489796	0.861786463576
0.928925995873	0.862585034014	0.862903505808
0.929468747784	0.863945578231	0.863912153107
0.929667584918	0.865306122449	0.864281818447
0.929751417368	0.866666666667	0.864437698098
0.930493385357	0.868027210884	0.865817940194
0.931486511463	0.869387755102	0.867667121037
0.931940484339	0.87074829932	0.86851306635
0.932855905623	0.872108843537	0.870220140656
0.933124411488	0.873469387755	0.870721167315
0.934265772041	0.874829931973	0.872852532808
0.934765890005	0.87619047619	0.873787269116

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.936530432913	0.877551020408	0.877089251773
0.938078516349	0.878911564626	0.879991302836
0.938795938238	0.880272108844	0.881337813652
0.93884920256	0.881632653061	0.881437825148
0.939064632896	0.882993197279	0.881842384756
0.939577510533	0.884353741497	0.882805898299
0.940061383821	0.885714285714	0.883715405351
0.942819119584	0.887074829932	0.888907892254
0.94436364503	0.88843537415	0.891822694054
0.945445880992	0.889795918367	0.893867913885
0.945644340388	0.891156462585	0.894243218508
0.946178242296	0.892517006803	0.895253266194
0.947117871509	0.89387755102	0.897032262532
0.947599840187	0.895238095238	0.897945457123
0.947676596813	0.896598639456	0.898090932147
0.947969589185	0.897959183673	0.898646342019
0.948081645674	0.899319727891	0.898858806863
0.948958607699	0.900680272109	0.900522439125
0.949118867009	0.902040816327	0.900826623712
0.950579652	0.903401360544	0.903601674796
0.953022405435	0.904761904762	0.908251705261
0.953123090144	0.90612244898	0.908443624965
0.95466474201	0.907482993197	0.911384769638
0.95517710719	0.908843537415	0.912363306099
0.95605601331	0.910204081633	0.914043100586
0.956968593745	0.91156462585	0.915788889414
0.957315385323	0.912925170068	0.916452746977
0.9590051259	0.914285714286	0.919690831503
0.959225120687	0.915646258503	0.920112832156
0.959532231041	0.917006802721	0.920702102406
0.959676342773	0.918367346939	0.920978682879
0.961398400373	0.919727891156	0.924286884239
0.961663590805	0.921088435374	0.924796861879
0.962047071209	0.922448979592	0.925534567221
0.963674655088	0.92380952381	0.928668840859
0.96373474255	0.925170068027	0.928784653997
0.964617041577	0.926530612245	0.930486036902
0.965015311963	0.927891156463	0.931254552323
0.966024659429	0.92925170068	0.933203642624
0.966423245657	0.930612244898	0.933973889747
0.967426070417	0.931972789116	0.935913201723
0.967592935066	0.933333333333	0.936236087991
0.967885268268	0.934693877551	0.93680189253
0.969805191097	0.936054421769	0.940522108678

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.971324760728	0.937414965986	0.943471790804
0.972181300492	0.938775510204	0.945136481027
0.972197124694	0.940136054422	0.945167249264
0.972846280356	0.941496598639	0.946429885203
0.973542984837	0.942857142857	0.947785943325
0.974213886091	0.944217687075	0.949092695852
0.974263810557	0.945578231293	0.949189972561
0.974582380366	0.94693877551	0.94981081612
0.975272025015	0.948299319728	0.951155522776
0.975716403117	0.949659863946	0.952022499312
0.976014344842	0.951020408163	0.952604001338
0.978325674513	0.952380952381	0.957121125412
0.978369778844	0.953741496599	0.957207424155
0.9785402187	0.955102040816	0.957540959613
0.979030992801	0.956462585034	0.958501684865
0.980076483827	0.957823129252	0.96054991415
0.981418565982	0.959183673469	0.963182401654
0.982031910203	0.960544217687	0.964386672656
0.983128390292	0.961904761905	0.966541431798
0.983384647461	0.963265306122	0.967045364861
0.983389500844	0.96462585034	0.96705491037
0.98398073486	0.965986394558	0.968218086575
0.986080769486	0.967346938776	0.972355283949
0.986460440473	0.968707482993	0.973104200619
0.987065810973	0.970068027211	0.974298915192
0.987126263666	0.971428571429	0.97441826042
0.987135062728	0.972789115646	0.974435632066
0.987866883152	0.974149659864	0.975880978829
0.988164042197	0.975510204082	0.97646817429
0.988231724963	0.976870748299	0.976601942224
0.989233882431	0.978231292517	0.97858367415
0.989702289661	0.979591836735	0.979510622161
0.990058420403	0.980952380952	0.98021567581
0.990303823517	0.98231292517	0.980701662872
0.990775496925	0.983673469388	0.981636085307
0.991495952217	0.985034013605	0.983064223263
0.991951739664	0.986394557823	0.983968253823
0.992019964464	0.987755102041	0.984103609895
0.99301343133	0.989115646259	0.986075674801
0.994430647015	0.990476190476	0.988892311722
0.994615726403	0.991836734694	0.989260443208
0.995160699762	0.993197278912	0.99034481835
0.996328354384	0.994557823129	0.99267018975
0.99653464671	0.995918367347	0.993081302094

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.996564428147	0.997278911565	0.993140659448
0.997078028264	0.998639455782	0.994164594446
0.999656707845	1.0	0.999313533539

Tabla B.2: Resultados de la prueba K-S de los GRBs detectados por SWIFT-BAT, y los 82 neutrinos del catálogo HESE de *ICECUBE*.

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.0443884783685	0.000931966449208	0.00197033701187
0.0545110566165	0.00186393289842	0.00297145529344
0.0584928241769	0.00279589934762	0.00342141048019
0.0702896293595	0.00372786579683	0.0049406319955
0.0715867858274	0.00465983224604	0.0051246679051
0.0753791460487	0.00559179869525	0.00568201565903
0.0766711008639	0.00652376514445	0.00587845770769
0.0791837139892	0.00745573159366	0.00627006056112
0.0937809088258	0.00838769804287	0.00879485886019
0.0947458133537	0.00931966449208	0.00897676914806
0.095980570436	0.0102516309413	0.00921226990122
0.0994924183598	0.0111835973905	0.00989874131109
0.104286534081	0.0121155638397	0.0108756811907
0.107192107721	0.0130475302889	0.0114901479576
0.110188535494	0.0139794967381	0.0121415133544
0.110195449015	0.0149114631873	0.0121430369837
0.11994963532	0.0158434296365	0.0143879150134
0.127063075595	0.0167753960857	0.0161450251795
0.127366816322	0.0177073625349	0.0162223058999
0.129364180226	0.0186393289842	0.0167350911255
0.136084263808	0.0195712954334	0.0185189268561
0.157138668292	0.0205032618826	0.0246925610727
0.157975567602	0.0214352283318	0.024956279959
0.161338446452	0.022367194781	0.0260300943036
0.163057109952	0.0232991612302	0.0265876211057
0.164142013889	0.0242311276794	0.0269426007236
0.178382332236	0.0251630941286	0.0318202564539
0.188307688801	0.0260950605778	0.0354597856615
0.18856767625	0.027027027027	0.0355577685263
0.191865588201	0.0279589934762	0.0368124039356
0.193249411743	0.0288909599254	0.0373453351388
0.194516066322	0.0298229263747	0.0378365000572
0.200291701293	0.0307548928239	0.0401167656069
0.200615364259	0.0316868592731	0.0402465243768
0.204314935999	0.0326188257223	0.0417445930723

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.209697021539	0.0335507921715	0.0439728408422
0.214393443219	0.0344827586207	0.0459645484954
0.217500711272	0.0354147250699	0.0473065594037
0.218187420997	0.0363466915191	0.0476057506813
0.219314682667	0.0372786579683	0.0480989300332
0.224335338207	0.0382106244175	0.0503263439684
0.22576386729	0.0391425908667	0.0509693237738
0.226056434225	0.0400745573159	0.0511015114544
0.22615217676	0.0410065237651	0.0511448070532
0.226153260218	0.0419384902144	0.0511452971073
0.227154605601	0.0428704566636	0.0515992148457
0.227429273029	0.0438024231128	0.0517240742306
0.228193367422	0.044734389562	0.0520722129353
0.235465139404	0.0456663560112	0.0554438318745
0.236997680401	0.0465983224604	0.0561679005156
0.239874938357	0.0475302889096	0.0575399860519
0.240623354788	0.0484622553588	0.0578995988692
0.244193140892	0.049394221808	0.0596302900589
0.244756412438	0.0503261882572	0.0599057014293
0.24482627961	0.0512581547064	0.0599399071875
0.246854709088	0.0521901211556	0.0609372473991
0.248266058654	0.0531220876048	0.0616360358798
0.249260437429	0.0540540540541	0.0621307656672
0.249374602368	0.0549860205033	0.0621876923061
0.249408888387	0.0559179869525	0.0622047936067
0.249563638707	0.0568499534017	0.0622820097647
0.251157081493	0.0577819198509	0.0630798795839
0.251385826825	0.0587138863001	0.0631948339286
0.253046377685	0.0596458527493	0.0640324692594
0.253119412421	0.0605778191985	0.0640694369444
0.253381278778	0.0615097856477	0.0642020724353
0.253506972342	0.0624417520969	0.0642657850259
0.254203258387	0.0633737185461	0.0646192965745
0.25498792541	0.0643056849953	0.065018842105
0.262029729468	0.0652376514445	0.0686595791252
0.263441199632	0.0661696178938	0.0694012656634
0.265543501866	0.067101584343	0.0705133513833
0.267585775546	0.0680335507922	0.0716021472746
0.270028399624	0.0689655172414	0.0729153366036
0.273294473589	0.0698974836906	0.0746898692942
0.275285044135	0.0708294501398	0.0757818555243
0.276682924989	0.071761416589	0.0765534409806
0.277548136474	0.0726933830382	0.0770329680602
0.279046661751	0.0736253494874	0.0778670394343

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.280089854147	0.0745573159366	0.0784503263961
0.280166181322	0.0754892823858	0.0784930891567
0.282439771204	0.076421248835	0.079772224358
0.28447720068	0.0773532152842	0.0809272777065
0.284954659568	0.0782851817335	0.0811991580095
0.287248644368	0.0792171481827	0.082511783691
0.292434463825	0.0801491146319	0.0855179156326
0.293109172488	0.0810810810811	0.0859129869967
0.293361345099	0.0820130475303	0.0860608787983
0.293918149584	0.0829450139795	0.086387878655
0.29424817085	0.0838769804287	0.0865819860487
0.296726368126	0.0848089468779	0.0880465375411
0.296837201829	0.0857409133271	0.0881123243899
0.297744739423	0.0866728797763	0.0886519298539
0.299986687288	0.0876048462255	0.08999201255
0.300258601424	0.0885368126747	0.090155227729
0.303941125943	0.089468779124	0.0923802080397
0.305082947457	0.0904007455732	0.0930756048292
0.305442843906	0.0913327120224	0.0932953308933
0.305792132086	0.0922646784716	0.093508828046
0.306857821035	0.0931966449208	0.0941617223305
0.309204681797	0.09412861137	0.0956075352451
0.309249734354	0.0950605778192	0.0956353981982
0.311555758148	0.0959925442684	0.0970669904352
0.319558185943	0.0969245107176	0.102117434203
0.319819513541	0.0978564771668	0.102284521242
0.320326357969	0.098788443616	0.10260897561
0.320371905114	0.0997204100652	0.102638157586
0.322208776571	0.100652376514	0.103818495699
0.324654654899	0.101584342964	0.105400644947
0.327745952818	0.102516309413	0.107417409588
0.327913038721	0.103448275862	0.107526960963
0.331729822439	0.104380242311	0.110044675095
0.331847934517	0.10531220876	0.110123051643
0.333762894517	0.10624417521	0.111397669756
0.335105799513	0.107176141659	0.112295896867
0.336110743944	0.108108108108	0.112970432194
0.33669051217	0.109040074557	0.113360500985
0.339931924606	0.109972041007	0.115553713366
0.342516000905	0.110904007456	0.117317210876
0.342921013797	0.111835973905	0.117594821704
0.344605020806	0.112767940354	0.118752620365
0.346144435947	0.113699906803	0.119815970537
0.346332442996	0.114631873253	0.119946161071

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.346788635671	0.115563839702	0.120262357831
0.346965848492	0.116495806151	0.12038530002
0.347070277418	0.1174277726	0.120457777467
0.35070098005	0.118359739049	0.122991177408
0.351563491324	0.119291705499	0.123596888432
0.353097649641	0.120223671948	0.124677950182
0.354388512734	0.121155638397	0.125591217958
0.355099421327	0.122087604846	0.126095599027
0.355710090848	0.123019571295	0.126529668731
0.357508217666	0.123951537745	0.127812125699
0.358147028093	0.124883504194	0.128269293732
0.358458937629	0.125815470643	0.128492809966
0.359568485008	0.126747437092	0.129289495411
0.359992272468	0.127679403541	0.129594436237
0.362247209526	0.128611369991	0.13122304081
0.365012144907	0.12954333644	0.13323386593
0.366468800341	0.130475302889	0.134299381623
0.367485458042	0.131407269338	0.135045561872
0.367499605474	0.132339235788	0.135055960023
0.367995302743	0.133271202237	0.135420542841
0.370045278969	0.134203168686	0.136933508487
0.37204676616	0.135135135135	0.13841879621
0.373119803661	0.136067101584	0.139218387884
0.377364946926	0.136999068034	0.142404303168
0.377809212236	0.137931034483	0.142739800851
0.380023943141	0.138863000932	0.14441819736
0.381068482859	0.139794967381	0.145213188628
0.382855884867	0.14072693383	0.146578628577
0.383060176054	0.14165890028	0.146735098479
0.38380345908	0.142590866729	0.147305095202
0.384749009365	0.143522833178	0.148031800207
0.385624022828	0.144454799627	0.148705886982
0.385749852235	0.145386766076	0.1488029485
0.386153595776	0.146318732526	0.149114599531
0.386670674166	0.147250698975	0.14951421026
0.387165393594	0.148182665424	0.149897041997
0.387377958817	0.149114631873	0.150061682978
0.387764661874	0.150046598322	0.150361432998
0.388048101547	0.150978564772	0.150581329114
0.390859325559	0.151910531221	0.152771012376
0.390905949172	0.15284249767	0.152807461098
0.391613687831	0.153774464119	0.153361280497
0.393948228028	0.154706430568	0.155195206367
0.397220634907	0.155638397018	0.157784232796

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.398427621618	0.156570363467	0.158744569668
0.398779941115	0.157502329916	0.159025441436
0.398907380587	0.158434296365	0.159127098286
0.399286743991	0.159366262815	0.159429903927
0.400274906208	0.160298229264	0.16022000054
0.400679750605	0.161230195713	0.160544262545
0.400876262001	0.162162162162	0.160701777436
0.401320563847	0.163094128611	0.161058194967
0.401726765304	0.164026095061	0.161384393962
0.401896515393	0.16495806151	0.161520809085
0.402178593929	0.165890027959	0.161747621415
0.403336130786	0.166821994408	0.162680034398
0.404543077626	0.167753960857	0.163655101655
0.40523132465	0.168685927307	0.164212426478
0.405710282794	0.169617893756	0.164600833565
0.406005823289	0.170549860205	0.164840728544
0.406731965774	0.171481826654	0.165430891982
0.409931518803	0.172413793103	0.168043850108
0.410479796359	0.173345759553	0.168493663219
0.410987274771	0.174277726002	0.168910540023
0.412105919988	0.175209692451	0.169831289289
0.412251242749	0.1761416589	0.169951087148
0.413494307693	0.177073625349	0.170977542494
0.415411809318	0.178005591799	0.172566971321
0.417683494435	0.178937558248	0.174459501524
0.417777697723	0.179869524697	0.174538204715
0.420967928743	0.180801491146	0.17721399703
0.421619213254	0.181733457596	0.177762760985
0.4230664273	0.182665424045	0.178985201909
0.42387578044	0.183597390494	0.179670677244
0.427298079456	0.184529356943	0.182583648707
0.428193793227	0.185461323392	0.183349924558
0.428332484771	0.186393289842	0.18346871751
0.429446235069	0.187325256291	0.184424068815
0.431440138082	0.18825722274	0.186140592748
0.431924288937	0.189189189189	0.186558591374
0.433311511922	0.190121155638	0.187758866364
0.433595810009	0.191053122088	0.188005326458
0.435712389168	0.191985088537	0.189845286075
0.435739149658	0.192917054986	0.189868606545
0.436230164289	0.193849021435	0.190296756236
0.438200379619	0.194780987884	0.192019572698
0.438367012012	0.195712954334	0.19216563722
0.438931816966	0.196644920783	0.192661139945

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.441258836874	0.197576887232	0.194709361119
0.442732557148	0.198508853681	0.196012117158
0.443124325849	0.19944082013	0.196359168159
0.443276862486	0.20037278658	0.196494376815
0.443850697189	0.201304753029	0.197003441395
0.444784543315	0.202236719478	0.197833289972
0.445004895553	0.203168685927	0.198029357067
0.445757912484	0.204100652377	0.198700116542
0.446354489818	0.205032618826	0.199232330581
0.447090759706	0.205964585275	0.199890147415
0.448980331643	0.206896551724	0.201583338202
0.449193531745	0.207828518173	0.201774828961
0.44990743976	0.208760484623	0.202416704352
0.45016631735	0.209692451072	0.202649713276
0.451716267721	0.210624417521	0.204047586523
0.452067422825	0.21155638397	0.20436495478
0.453395706602	0.212488350419	0.205567666765
0.454694942979	0.213420316869	0.206747491171
0.455711450342	0.214352283318	0.207672925972
0.455949585124	0.215284249767	0.207890024175
0.456298932327	0.216216216216	0.208208715643
0.457820565624	0.217148182665	0.209599670308
0.458972341458	0.218080149115	0.210655610224
0.45949127524	0.219012115564	0.211132232021
0.460234766987	0.219944082013	0.211816040744
0.463212924366	0.220876048462	0.2145662133
0.464985413422	0.221808014911	0.216211434695
0.465141529453	0.222739981361	0.216356642422
0.46822861177	0.22367194781	0.21923803288
0.469107042596	0.224603914259	0.220061417413
0.469757185839	0.225535880708	0.220671813647
0.470535002737	0.226467847158	0.2214031888
0.474101818294	0.227399813607	0.22477253411
0.474662212603	0.228331780056	0.225304216073
0.47478565292	0.229263746505	0.225421416219
0.476423811807	0.230195712954	0.226979648457
0.477079064107	0.231127679404	0.227604433409
0.477868204964	0.232059645853	0.228358021316
0.480648983525	0.232991612302	0.231023445363
0.481521670854	0.233923578751	0.231863119502
0.482197872584	0.2348555452	0.232514788324
0.484739215	0.23578751165	0.234972106559
0.48696876389	0.236719478099	0.237138577004
0.486984082119	0.237651444548	0.237153496237

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.487146892012	0.238583410997	0.237312094397
0.487306690756	0.239515377446	0.237467810855
0.488005593784	0.240447343896	0.238149459564
0.489032347791	0.241379310345	0.239152637186
0.489285517391	0.242311276794	0.239400317529
0.490263713968	0.243243243243	0.240358509233
0.491589233913	0.244175209692	0.241659974899
0.492269746521	0.245107176142	0.24232950334
0.492393192756	0.246039142591	0.242451056272
0.494273981849	0.24697110904	0.244306769133
0.495095964909	0.247903075489	0.245120014469
0.495645620109	0.248835041938	0.245664580733
0.496867151672	0.249767008388	0.246876966411
0.497612626122	0.250698974837	0.247618325676
0.499249797465	0.251630941286	0.249250360269
0.501044641033	0.252562907735	0.251045732308
0.501682909596	0.253494874185	0.251685741781
0.503839142897	0.254426840634	0.253853881915
0.506907994035	0.255358807083	0.256955714416
0.507276290114	0.256290773532	0.257329234512
0.507450821164	0.257222739981	0.2575063359
0.507463462166	0.258154706431	0.257519165434
0.508033367954	0.25908667288	0.258097902955
0.50890068397	0.260018639329	0.258979906146
0.510128503225	0.260950605778	0.260231089802
0.51041855249	0.261882572227	0.260527098726
0.512943446607	0.262814538677	0.263110979417
0.512992256639	0.263746505126	0.263161055371
0.513231380753	0.264678471575	0.26340645019
0.514058305463	0.265610438024	0.264255941415
0.51473760803	0.266542404473	0.264954805121
0.518021555374	0.267474370923	0.268346331832
0.520211600457	0.268406337372	0.27062010925
0.522966700242	0.269338303821	0.273494169562
0.523444295598	0.27027027027	0.273993930594
0.523499863323	0.271202236719	0.274052106899
0.5238236007	0.272134203169	0.27439116465
0.523985056043	0.273066169618	0.274560338956
0.52489909732	0.273998136067	0.275519062368
0.526057162032	0.274930102516	0.276736137725
0.5286771843	0.275862068966	0.2794995652
0.530373580009	0.276794035415	0.281296134371
0.531586745284	0.277726001864	0.282584467762
0.532082548861	0.278657968313	0.283111838802

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.533470070299	0.279589934762	0.284590315905
0.53361098597	0.280521901212	0.284740684348
0.534776505283	0.281453867661	0.285985910603
0.535263727475	0.28238583411	0.28650725795
0.536991747748	0.283317800559	0.288360137149
0.537504008391	0.284249767008	0.288910559037
0.537864215021	0.285181733458	0.2892979138
0.537869878277	0.286113699907	0.289304005957
0.538006479389	0.287045666356	0.289450971864
0.538199547543	0.287977632805	0.289658752975
0.538348152734	0.288909599254	0.289818733553
0.53849742463	0.289841565704	0.289979476333
0.539309982775	0.290773532153	0.290855257521
0.54165712571	0.291705498602	0.293392441832
0.542343596103	0.292637465051	0.294136576234
0.542408986089	0.2935694315	0.294207508191
0.542932463666	0.29450139795	0.294775660102
0.544673154959	0.295433364399	0.296668845733
0.546164473998	0.296365330848	0.298295632657
0.546910007947	0.297297297297	0.299110556792
0.547233387674	0.298229263747	0.299464380585
0.547392728531	0.299161230196	0.299638799248
0.550046728116	0.300093196645	0.302551403111
0.551624406298	0.301025163094	0.304289485624
0.552635859581	0.301957129543	0.305406393294
0.553650509269	0.302889095993	0.306528886414
0.554620587538	0.303821062442	0.307603996121
0.55485490357	0.304753028891	0.307863964016
0.556586715656	0.30568499534	0.309788772044
0.556837425737	0.306616961789	0.310067918701
0.557322401417	0.307548928239	0.310608259121
0.557937083151	0.308480894688	0.311293788755
0.55794890799	0.309412861137	0.311306983927
0.56080169102	0.310344827586	0.314498536651
0.563703371497	0.311276794035	0.317761491037
0.564621006577	0.312208760485	0.318796881068
0.56520223563	0.313140726934	0.319453567161
0.565717402162	0.314072693383	0.320036179109
0.565795123301	0.315004659832	0.320124121551
0.567514812527	0.315936626281	0.322073062438
0.567846582328	0.316868592731	0.322449741061
0.569377280982	0.31780055918	0.324190488099
0.569667618586	0.318732525629	0.324521195666
0.570244880952	0.319664492078	0.325179224252

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.571337229478	0.320596458527	0.326426229788
0.572025720125	0.321528424977	0.327213424485
0.573147199434	0.322460391426	0.328497712219
0.574733581065	0.323392357875	0.330318689204
0.575139677921	0.324324324324	0.33078564912
0.575416886551	0.325256290774	0.331104593328
0.575717281452	0.326188257223	0.331450388162
0.578934965778	0.327120223672	0.3351656946
0.579079480495	0.328052190121	0.33533304473
0.579364274368	0.32898415657	0.335662962414
0.579925895059	0.32991612302	0.33631404376
0.580475232823	0.330848089469	0.336951495921
0.58081883627	0.331780055918	0.337350520566
0.581115202151	0.332712022367	0.33769487817
0.582048901655	0.333643988816	0.338780923918
0.582102338024	0.334575955266	0.338843131933
0.58243792236	0.335507921715	0.339233933404
0.584230411408	0.336439888164	0.341325173614
0.585503428447	0.337371854613	0.342814264723
0.585763830195	0.338303821062	0.343119264765
0.586081431657	0.339235787512	0.343491444534
0.586336593795	0.340167753961	0.343790601224
0.586626489449	0.34109972041	0.344130638123
0.588618500102	0.342031686859	0.346471738663
0.588985687062	0.342963653308	0.346904139564
0.589420580588	0.343895619758	0.347416620821
0.589558876589	0.344827586207	0.347579668965
0.592416965457	0.345759552656	0.350957860962
0.593064946881	0.346691519105	0.351726031219
0.593432916474	0.347623485555	0.352162626355
0.594256110874	0.348555452004	0.353140325311
0.594682257618	0.349487418453	0.353646987526
0.596028721693	0.350419384902	0.355250237083
0.596773740138	0.351351351351	0.356138896919
0.597724479281	0.352283317801	0.357274553132
0.598076458003	0.35321528425	0.357695449617
0.598128753753	0.354147250699	0.357758006066
0.598784332057	0.355079217148	0.358542676317
0.599518789502	0.356011183597	0.359422778966
0.599545376637	0.356943150047	0.359454658647
0.603422061816	0.357875116496	0.364118184686
0.605343518208	0.358807082945	0.366440775036
0.605368219562	0.359739049394	0.366470681255
0.606563341219	0.360671015843	0.367919086911

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.607173711748	0.361602982293	0.368659916238
0.607249014183	0.362534948742	0.368751365226
0.607263126846	0.363466915191	0.368768505227
0.607358224518	0.36439888164	0.368884012889
0.607504561987	0.365330848089	0.369061792835
0.607926935485	0.366262814539	0.369575158888
0.608361945404	0.367194780988	0.370104256616
0.609066136995	0.368126747437	0.370961559234
0.609844062788	0.369058713886	0.371909780918
0.610007077616	0.369990680336	0.372108634742
0.610459518411	0.370922646785	0.372660823618
0.610740855169	0.371854613234	0.373004392172
0.610818935858	0.372786579683	0.373099772403
0.611303922634	0.373718546132	0.373692485827
0.612054547701	0.374650512582	0.374610769361
0.612891996771	0.375582479031	0.375636599706
0.612974876572	0.37651444548	0.375738199309
0.613463627403	0.377446411929	0.376337622146
0.613860983464	0.378378378378	0.37682530702
0.614091032372	0.379310344828	0.37710779604
0.614727005356	0.380242311277	0.377889291114
0.617594937487	0.381174277726	0.38142350681
0.61906550889	0.382106244175	0.383242104297
0.619908539864	0.383038210624	0.384286597796
0.621643692304	0.383970177074	0.386440880181
0.623054433372	0.384902143523	0.388196826945
0.623203308294	0.385834109972	0.388382363468
0.624555510083	0.386766076421	0.390069585175
0.625883379044	0.38769804287	0.391730004164
0.62640291856	0.38863000932	0.39238061638
0.626815934349	0.389561975769	0.392898215553
0.627029981965	0.390493942218	0.393166598282
0.62710303782	0.391425908667	0.393258220043
0.628962219873	0.392357875116	0.395593474028
0.630805209757	0.393289841566	0.397915212657
0.631359817407	0.394221808015	0.398615219036
0.632380655836	0.395153774464	0.399905293875
0.632565538875	0.396085740913	0.400139160972
0.633560449464	0.397017707363	0.401398843125
0.636068310204	0.397949673812	0.404582895246
0.636463731163	0.398881640261	0.405086081086
0.637612853432	0.39981360671	0.406550150861
0.637941655175	0.400745573159	0.406969555407
0.638576180235	0.401677539609	0.407779537964

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.639059248854	0.402609506058	0.408396723546
0.639186189741	0.403541472507	0.408558985156
0.640897375713	0.404473438956	0.410749446196
0.641167746311	0.405405405405	0.41109607891
0.641379561344	0.406337371855	0.41136774171
0.642823804281	0.407269338304	0.41322244335
0.642949558047	0.408201304753	0.413384134192
0.643199953676	0.409133271202	0.413706180409
0.643530158198	0.410065237651	0.41413106451
0.64391672957	0.410997204101	0.41462875462
0.644846241201	0.41192917055	0.41582667479
0.647753853921	0.412861136999	0.41958505527
0.64851374782	0.413793103448	0.420570081111
0.648734649424	0.414725069897	0.420856645364
0.648791322947	0.415657036347	0.420930180731
0.649558200375	0.416589002796	0.421925855674
0.651993738706	0.417520969245	0.425095835311
0.652281060809	0.418452935694	0.42547058229
0.652684243588	0.419384902144	0.425996721828
0.652945085422	0.420316868593	0.426337284576
0.653112328846	0.421248835042	0.42655571409
0.654152520643	0.422180801491	0.427915520263
0.654447513879	0.42311276794	0.428301548422
0.65446491816	0.42404473439	0.428324329102
0.655293930819	0.424976700839	0.429410135768
0.655432846432	0.425908667288	0.429592216182
0.655569594778	0.426840633737	0.429771493597
0.656411575083	0.427772600186	0.430876155903
0.658148056608	0.428704566636	0.433158864417
0.659007714312	0.429636533085	0.434291167523
0.660875631129	0.430568499534	0.43675659982
0.661101225303	0.431500465983	0.437054830098
0.661708358807	0.432432432432	0.437857952115
0.661798736778	0.433364398882	0.437977568001
0.662276616496	0.434296365331	0.438610316758
0.662479104813	0.43522833178	0.438878564314
0.662762255948	0.436160298229	0.43925380791
0.663944478875	0.437092264678	0.440822271028
0.664792475287	0.438024231128	0.441949035199
0.665007530841	0.438956197577	0.442235016075
0.665702871105	0.439888164026	0.443160312598
0.665710509531	0.440820130475	0.443170482499
0.66673418643	0.441752096925	0.444534475355
0.66680798811	0.442684063374	0.444632893007

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.668473517864	0.443616029823	0.446856844086
0.668740435564	0.444547996272	0.447213770159
0.669080788065	0.445479962721	0.447669100957
0.670407502253	0.446411929171	0.449446219076
0.670560441713	0.44734389562	0.44965130599
0.671331269271	0.448275862069	0.450685673101
0.671545513208	0.449207828518	0.450973376309
0.672785623465	0.450139794967	0.452640495141
0.673337805394	0.451071761417	0.453383800173
0.674072246069	0.452003727866	0.454373392921
0.675299204034	0.452935694315	0.456029014969
0.675714105961	0.453867660764	0.456589552994
0.676388928254	0.454799627213	0.457501982265
0.676408016913	0.455731593663	0.457527805344
0.676844768937	0.456663560112	0.458118841237
0.67752152994	0.457595526561	0.459035423532
0.678920810375	0.45852749301	0.46093346676
0.67952640232	0.459459459459	0.46175613145
0.679605620875	0.460391425909	0.461863799925
0.679919762047	0.461323392358	0.462290882821
0.68023681263	0.462255358807	0.462722121258
0.680722342959	0.463187325256	0.463382908203
0.681141924661	0.464119291705	0.463954321531
0.682371685693	0.465051258155	0.465631117436
0.682786589661	0.465983224604	0.466197527021
0.683952222754	0.466915191053	0.46779064301
0.684219610888	0.467847157502	0.468156475924
0.686567162651	0.468779123952	0.471374468831
0.687998590115	0.469711090401	0.47334206
0.689785410243	0.47064305685	0.475803912184
0.689913034333	0.471575023299	0.475979994943
0.690416720721	0.472506989748	0.476675248252
0.691079303306	0.473438956198	0.477590603458
0.691298918445	0.474370922647	0.477894194643
0.692081063576	0.475302889096	0.47897619856
0.692616693274	0.476234855545	0.479717883802
0.693570100081	0.477166821994	0.481039483727
0.695283989259	0.478098788444	0.48341982572
0.69571112012	0.479030754893	0.484013962658
0.695761017427	0.479962721342	0.484083393371
0.695776213936	0.480894687791	0.484104539879
0.695782898322	0.48182665424	0.484113841597
0.696265672448	0.48275862069	0.484785886629
0.696347435083	0.483690587139	0.484899750347

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.69659483425	0.484622553588	0.485244363103
0.697682908876	0.485554520037	0.486761441337
0.697787996977	0.486486486486	0.486908088725
0.697801340257	0.487418452936	0.486926710464
0.698015675115	0.488350419385	0.487225882706
0.698348410606	0.489282385834	0.487690502596
0.699680737236	0.490214352283	0.489553134059
0.700337289165	0.491146318733	0.490472318595
0.700428549249	0.492078285182	0.490600152603
0.700437929456	0.493010251631	0.49061329302
0.701294987956	0.49394221808	0.491814660132
0.701335004134	0.494874184529	0.491870788024
0.702569966411	0.495806150979	0.493604557702
0.702674418711	0.496738117428	0.493751338711
0.702809513682	0.497670083877	0.493941212522
0.703425568373	0.498602050326	0.494807530241
0.704334936043	0.499534016775	0.496087702131
0.704520071302	0.500465983225	0.496348530868
0.704887407327	0.501397949674	0.496866257008
0.705138252733	0.502329916123	0.497219955467
0.706151927926	0.503261882572	0.498650545313
0.706517201352	0.504193849021	0.499166555806
0.707983654674	0.505125815471	0.501240855285
0.708421023477	0.50605778192	0.501860346505
0.708623721506	0.506989748369	0.502147578681
0.709847221223	0.507921714818	0.503883077478
0.710090225844	0.508853681267	0.504228128839
0.710925936057	0.509785647717	0.505415686558
0.7111499304	0.510717614166	0.505734223508
0.713642406994	0.511649580615	0.50928548506
0.714298617617	0.512581547064	0.51022251513
0.716782983542	0.513513513514	0.513777845495
0.717685347897	0.514445479963	0.515072258586
0.720233392927	0.515377446412	0.518736140288
0.720238671488	0.516309412861	0.518743743907
0.720368156918	0.51724137931	0.518930281501
0.721802722809	0.51817334576	0.520999170654
0.722549288912	0.519105312209	0.522077474907
0.722614719764	0.520037278658	0.52217203322
0.723423531626	0.520969245107	0.52334160611
0.723477709042	0.521901211556	0.523419995481
0.725230203014	0.522833178006	0.525958847364
0.725488688615	0.523765144455	0.526333837308
0.725496158909	0.524697110904	0.526344676592

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.72619438532	0.525629077353	0.52735828527
0.726249785653	0.526561043802	0.527438751162
0.726268479544	0.527493010252	0.527465904379
0.726480130006	0.528424976701	0.527773379294
0.726487240419	0.52935694315	0.527783710491
0.727810973445	0.530288909599	0.529708813068
0.728244578452	0.531220876048	0.530340166045
0.72837745613	0.532152842498	0.530533718598
0.730784045756	0.533084808947	0.534045321531
0.731562405164	0.534016775396	0.535183552649
0.731955497957	0.534948741845	0.535758850989
0.731971600547	0.535880708295	0.535782424007
0.732652619159	0.536812674744	0.53677986036
0.733002546443	0.537744641193	0.537292733092
0.733216848324	0.538676607642	0.537606946666
0.733289224944	0.539608574091	0.537713087419
0.733779584098	0.540540540541	0.53843247804
0.733858958081	0.54147250699	0.538548970356
0.733897072787	0.542404473439	0.538604913445
0.734525951366	0.543336439888	0.53952837323
0.734605386192	0.544268406337	0.539645073422
0.735615667408	0.545200372787	0.541130410137
0.736062253716	0.546132339236	0.541787641345
0.736197951762	0.547064305685	0.541987424178
0.737385873358	0.547996272134	0.543737926228
0.739171207693	0.548928238583	0.546374074283
0.739443276221	0.549860205033	0.546776358748
0.740707427092	0.550792171482	0.548647492549
0.741638559869	0.551724137931	0.550027753484
0.741836301835	0.55265610438	0.550321098721
0.742125743434	0.553588070829	0.550750619067
0.742718357262	0.554520037279	0.551630558214
0.742894531072	0.555452003728	0.551892284297
0.744818314321	0.556383970177	0.554754321347
0.745499439057	0.557315936626	0.555769413634
0.745592829896	0.558247903075	0.555908667992
0.746298155107	0.559179869525	0.556960936317
0.74661773323	0.560111835974	0.557438039573
0.747633957743	0.561043802423	0.55895653477
0.748191879574	0.561975768872	0.55979108866
0.748488123441	0.562907735322	0.560234470932
0.748908261798	0.563839701771	0.560863584589
0.748935456759	0.56477166822	0.56090431839
0.749646179826	0.565703634669	0.561969394928

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.749736515108	0.566635601118	0.562104842086
0.750340999098	0.567567567568	0.563011614927
0.752262996325	0.568499534017	0.56589961564
0.752608225557	0.569431500466	0.566419141175
0.752928620253	0.570363466915	0.566901507196
0.753180936949	0.571295433364	0.567281523783
0.753367731692	0.572227399814	0.567562939155
0.753451986098	0.573159366263	0.567689895355
0.754365761027	0.574091332712	0.56906770141
0.754506257785	0.575023299161	0.569279693037
0.754770011084	0.57595526561	0.569677769632
0.754884878324	0.57688723206	0.569851179522
0.754906489763	0.577819198509	0.569883808287
0.75608258396	0.578751164958	0.571660873767
0.756507681549	0.579683131407	0.572303872243
0.756723790424	0.580615097856	0.572630894993
0.757153980593	0.581547064306	0.573282150327
0.760034244387	0.582479030755	0.577652052641
0.760589622039	0.583410997204	0.578496573153
0.761307032081	0.584342963653	0.579588397096
0.761496807837	0.585274930103	0.579877388347
0.761784357841	0.586206896552	0.580315407851
0.761803288262	0.587138863001	0.580344250007
0.763821069674	0.58807082945	0.583422626477
0.763957726961	0.589002795899	0.583631408583
0.764149919591	0.589934762349	0.583925099611
0.766585259567	0.590866728798	0.587652960185
0.767330498425	0.591798695247	0.588796093814
0.767817008976	0.592730661696	0.589542959273
0.769803435485	0.593662628145	0.592597329285
0.770167472457	0.594594594595	0.593157935631
0.771132797884	0.595526561044	0.594645791973
0.771218699764	0.596458527493	0.594778282866
0.771989463206	0.597390493942	0.595967731301
0.772778056196	0.598322460391	0.597185924138
0.773364403034	0.599254426841	0.59809249988
0.773542848399	0.60018639329	0.598368538309
0.773767475191	0.601118359739	0.598716105663
0.774159759541	0.602050326188	0.599323333293
0.774562865937	0.602982292637	0.599947633288
0.774748613113	0.603914259087	0.600235413521
0.774850365745	0.604846225536	0.600393089295
0.776021023455	0.605778191985	0.602208628844
0.776141425921	0.606710158434	0.602395513031

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.776172386126	0.607642124884	0.602443572985
0.776202591548	0.608574091333	0.602490463126
0.77772723707	0.609506057782	0.604859655281
0.778594364126	0.610438024231	0.606209183848
0.778857897407	0.61136999068	0.606619624354
0.7803913782	0.61230195713	0.609010703168
0.780447130366	0.613233923579	0.609097723297
0.780950960644	0.614165890028	0.609884402931
0.781276803027	0.615097856477	0.610393442949
0.781542649562	0.616029822926	0.610808913084
0.781555198841	0.616961789376	0.610828528835
0.783916125317	0.617893755825	0.614524491532
0.78455752958	0.618825722274	0.615530517221
0.785753766961	0.619757688723	0.617408982294
0.786677381619	0.620689655172	0.618861302751
0.787533803454	0.621621621622	0.620209491583
0.787796934671	0.622553588071	0.620624010277
0.788073077442	0.62348555452	0.621059175389
0.788079741216	0.624417520969	0.621069678515
0.788434639415	0.625349487418	0.621629180629
0.789280180796	0.626281453868	0.622963203797
0.789579226581	0.627213420317	0.623435355048
0.789884265764	0.628145386766	0.623917153302
0.789991578836	0.629077353215	0.624086694632
0.790528017562	0.630009319664	0.62493454655
0.791186842517	0.630941286114	0.625976619771
0.792514033901	0.631873252563	0.62807849393
0.793823313166	0.632805219012	0.630155452525
0.794769463648	0.633737185461	0.631658500347
0.795776686885	0.634669151911	0.633260535389
0.795858936918	0.63560111836	0.633391447472
0.796793815339	0.636533084809	0.634880384163
0.796849020351	0.637465051258	0.634968361234
0.796929817036	0.638397017707	0.635097133282
0.797191990048	0.639328984157	0.635515068997
0.79886820134	0.640260950606	0.638190403111
0.799396245631	0.641192917055	0.63903435753
0.799758729615	0.642124883504	0.639614025595
0.8002987554	0.643056849953	0.640478097895
0.800345822464	0.643988816403	0.640553435536
0.801464795834	0.644920782852	0.642345818961
0.802610672904	0.645852749301	0.644183892259
0.804237966852	0.64678471575	0.646798707327
0.804892661885	0.647716682199	0.647852197156

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.805026641588	0.648648648649	0.648067893666
0.805834825005	0.649580615098	0.649369765192
0.805969754518	0.650512581547	0.649587245198
0.806805786207	0.651444547996	0.650935576657
0.80714918989	0.652376514445	0.65148981474
0.807271876733	0.653308480895	0.651687882964
0.807615879175	0.654240447344	0.652243408296
0.807916975176	0.655172413793	0.652729838777
0.8093901528	0.656104380242	0.65511241945
0.809932628183	0.657036346692	0.655990862196
0.810081853767	0.657968313141	0.656232609803
0.810316476404	0.65890027959	0.656612791931
0.810441255687	0.659832246039	0.65681502892
0.810499260898	0.660764212488	0.656909051917
0.810937651472	0.661696178938	0.657619874575
0.810966434606	0.662628145387	0.657666558057
0.811136959467	0.663560111836	0.657943167013
0.81122449045	0.664492078285	0.658085173906
0.811249338266	0.665424044734	0.658125488837
0.811860468344	0.666356011184	0.659117420059
0.811923157361	0.667287977633	0.659219213458
0.813289559507	0.668219944082	0.661439907604
0.813700520209	0.669151910531	0.662108536589
0.815038370209	0.67008387698	0.664287544914
0.815181541597	0.67101584343	0.66452094576
0.815433530959	0.671947809879	0.664931843412
0.816324081639	0.672879776328	0.666385006264
0.819369945484	0.673811742777	0.671367107562
0.819505809344	0.674743709226	0.671589771549
0.820420431601	0.675675675676	0.673089684589
0.820582986496	0.676607642125	0.673356437727
0.820771518949	0.677539608574	0.673665886318
0.821008182663	0.678471575023	0.674054436
0.822463889106	0.679403541473	0.676446848883
0.826394401638	0.680335507922	0.682927707058
0.827194334991	0.681267474371	0.684250467841
0.827343910731	0.68219944082	0.684497946623
0.827702747078	0.683131407269	0.68509183752
0.828353760282	0.684063373719	0.686169952174
0.828382026662	0.684995340168	0.686216782096
0.828793539795	0.685927306617	0.686898731606
0.828825287724	0.686859273066	0.68695135757
0.828974375025	0.687791239515	0.687198514448
0.830001716516	0.688723205965	0.68890284942

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.830597871951	0.689655172414	0.689892824889
0.831840455197	0.690587138863	0.691958542903
0.831891111196	0.691519105312	0.692042822158
0.834028684209	0.692451071761	0.695603846083
0.835071511763	0.693383038211	0.697344429758
0.835883355544	0.69431500466	0.698700984075
0.836219092239	0.695246971109	0.699262370225
0.836589758602	0.696178937558	0.699882424198
0.836648869352	0.697110904007	0.699981330588
0.836791293962	0.698042870457	0.700219669651
0.83712058668	0.698974836906	0.700770876643
0.837124318936	0.699906803355	0.700777125354
0.837165021282	0.700838769804	0.700845272859
0.837284815697	0.701770736253	0.701045862597
0.837688628122	0.702702702703	0.701722237684
0.837839679859	0.703634669152	0.701975329146
0.839451303101	0.704566635601	0.704678490277
0.839692523065	0.70549860205	0.705083533291
0.839888653634	0.7064305685	0.705412950503
0.840805962511	0.707362534949	0.706954666595
0.841226511433	0.708294501398	0.707662043538
0.841781244072	0.709226467847	0.708595662872
0.841782973124	0.710158434296	0.708598573842
0.841835368583	0.711090400746	0.708686787798
0.84306843651	0.712022367195	0.71076438864
0.843117050008	0.712954333644	0.710846360014
0.843502623308	0.713886300093	0.711496675527
0.84410425136	0.714818266542	0.712511987164
0.844287719645	0.715750232992	0.712821753544
0.845546693541	0.716682199441	0.714949210957
0.84656418295	0.71761416589	0.716670915853
0.846727811163	0.718546132339	0.716947986197
0.847335919046	0.719478098788	0.717978159706
0.848203216421	0.720410065238	0.719448696347
0.849882919958	0.721342031687	0.722300977636
0.850306083221	0.722273998136	0.723020435163
0.850455391766	0.723205964585	0.723274373384
0.852338498393	0.724137931034	0.726480915843
0.852734269642	0.725069897484	0.727155734623
0.852816830431	0.726001863933	0.727296546266
0.853055795381	0.726933830382	0.727704190033
0.854216872168	0.727865796831	0.729686464697
0.854654365704	0.728797763281	0.730434084817
0.855375487782	0.72972972973	0.731667225099

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.856528134884	0.730661696179	0.733640445847
0.858013960039	0.731593662628	0.736187955622
0.859281399701	0.732525629077	0.738364523872
0.860084725068	0.733457595527	0.739745734295
0.862550943757	0.734389561976	0.743994130576
0.863331577804	0.735321528425	0.745341413233
0.863428880057	0.736253494874	0.745509430917
0.863513293379	0.737185461323	0.745655207842
0.865339269489	0.738117427773	0.748812051319
0.865633871769	0.739049394222	0.749321999954
0.866310298358	0.739981360671	0.750493533041
0.867022018936	0.74091332712	0.75172718132
0.867030423605	0.741845293569	0.751741755457
0.868628990926	0.742777260019	0.754516323877
0.868836326108	0.743709226468	0.754876561565
0.869663726472	0.744641192917	0.75631499714
0.870832244322	0.745573159366	0.758348797751
0.871865024838	0.746505125815	0.760148621535
0.872128004202	0.747437092265	0.760607255713
0.872667979792	0.748369058714	0.761549402954
0.873290223388	0.749301025163	0.762635814266
0.873715140631	0.750232991612	0.763378146968
0.874378433531	0.751164958062	0.764537645025
0.874874090332	0.752096924511	0.765404673934
0.875073302668	0.75302889096	0.765753285043
0.875420360469	0.753960857409	0.766360807524
0.87573271951	0.754892823858	0.76690779602
0.875858612381	0.755824790308	0.767128308881
0.876941458285	0.756756756757	0.76902632126
0.877329442469	0.757688723206	0.769706950623
0.877558394174	0.758620689655	0.770108735186
0.877571497473	0.759552656104	0.770131733177
0.877917137082	0.760484622554	0.770738499583
0.87798884132	0.761416589003	0.770864405482
0.878122943073	0.762348555452	0.77109990315
0.878360335681	0.763280521901	0.771516879297
0.878661966283	0.76421248835	0.772046850992
0.878864828708	0.7651444548	0.77240338714
0.879029675238	0.766076421249	0.77269316995
0.879379060627	0.767008387698	0.773307532269
0.879477585169	0.767940354147	0.773480822815
0.879616754089	0.768872320596	0.773725634074
0.879977955122	0.769804287046	0.7743612015
0.880441904736	0.770736253495	0.775177947615

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.882447450497	0.771668219944	0.778713502888
0.882465808282	0.772600186393	0.778745902787
0.882549765209	0.773532152842	0.778894088807
0.882593608989	0.774464119292	0.778971478628
0.882807984325	0.775396085741	0.779349937188
0.882813996445	0.77632805219	0.779360552319
0.88313489885	0.777260018639	0.779927249566
0.883906484489	0.778191985089	0.781290673321
0.884009805376	0.779123951538	0.781473336002
0.884668259341	0.780055917987	0.782637929085
0.884707820602	0.780987884436	0.782707927834
0.885002914234	0.781919850885	0.783230158203
0.885932859042	0.782851817335	0.78487703073
0.885947340228	0.783783783784	0.784902689658
0.886215905867	0.784715750233	0.785378631812
0.886216838051	0.785647716682	0.785380284044
0.887352445302	0.786579683131	0.787394362184
0.887490717258	0.787511649581	0.787639773219
0.887842747536	0.78844361603	0.788264744353
0.888892177372	0.789375582479	0.790129302992
0.889423919073	0.790307548928	0.791074907819
0.889498483889	0.791239515377	0.791207552841
0.89063191993	0.792171481827	0.793225216798
0.890788824623	0.793103448276	0.793504730073
0.890987948365	0.794035414725	0.793859524131
0.891576817692	0.794967381174	0.794909221846
0.89225695232	0.795899347623	0.796122468963
0.892355757754	0.796831314073	0.796298798396
0.892358432204	0.797763280522	0.796303571526
0.893615297956	0.798695246971	0.798548300741
0.895315410871	0.79962721342	0.801589684942
0.895825089263	0.80055917987	0.802502590554
0.896148957463	0.801491146319	0.803082953962
0.896425498256	0.802423112768	0.803578673924
0.896503831591	0.803355079217	0.803719120058
0.896555394285	0.804287045666	0.803811575021
0.898430623025	0.805219012116	0.807177584389
0.898643635049	0.806150978565	0.807560382815
0.899803404143	0.807082945014	0.809646166108
0.899982440537	0.808014911463	0.809968393276
0.900085977723	0.808946877912	0.810154767293
0.90083418558	0.809878844362	0.811502229909
0.901421415647	0.810810810811	0.812560568588
0.901742419753	0.81174277726	0.813139391582

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.901977352825	0.812674743709	0.81356314501
0.902316004427	0.813606710158	0.814174171844
0.902361246157	0.814538676608	0.814255818565
0.903367677113	0.815470643057	0.816073160053
0.903540653401	0.816402609506	0.816385712349
0.903913589587	0.817334575955	0.817059777744
0.904007476461	0.818266542404	0.817229517498
0.904235476505	0.819198508854	0.817641796971
0.904427656725	0.820130475303	0.81798938625
0.904576476725	0.821062441752	0.818258602244
0.906189939203	0.821994408201	0.821180205913
0.906583770593	0.822926374651	0.821894133102
0.907660726707	0.8238583411	0.823847994807
0.90778233173	0.824790307549	0.824068761801
0.907851512913	0.825722273998	0.824194369499
0.908249719044	0.826654240447	0.824917552143
0.908687997177	0.827586206897	0.825713876213
0.909001786699	0.828518173346	0.826284248223
0.909085881086	0.829450139795	0.82643713919
0.909731022479	0.830382106244	0.827610533262
0.910058127091	0.831314072693	0.828205794685
0.911070996545	0.832246039143	0.830050360746
0.911653333925	0.833178005592	0.831111801256
0.912376573416	0.834109972041	0.832431011718
0.912749913266	0.83504193849	0.833112404168
0.912906005548	0.835973904939	0.833397374966
0.9135996838	0.836905871389	0.834664382239
0.91378298946	0.837837837838	0.834999351827
0.917044022374	0.838769804287	0.840969738971
0.917417590825	0.839701770736	0.841655035955
0.918321332802	0.840633737185	0.843314070279
0.919221626154	0.841565703635	0.844968397989
0.921013431422	0.842497670084	0.84826574086
0.922181115327	0.843429636533	0.850418009467
0.922756214064	0.844361602982	0.851479030594
0.923565028769	0.845293569432	0.852972362364
0.92384348078	0.846225535881	0.85348677698
0.92402158573	0.84715750233	0.853815890894
0.924849541368	0.848089468779	0.855346674168
0.924952396299	0.849021435228	0.855536935418
0.925018154127	0.849953401678	0.855658585465
0.925734572008	0.850885368127	0.856984497811
0.92575118829	0.851817334576	0.85701526262
0.92605733506	0.852749301025	0.857582187819

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.926261711407	0.853681267474	0.857960758018
0.926436735014	0.854613233924	0.858285023983
0.927099844154	0.855545200373	0.85951412103
0.927194398443	0.856477166822	0.859689452504
0.92744052924	0.857409133271	0.860145935278
0.927686428915	0.85834109972	0.860602110392
0.927855198156	0.85927306617	0.860915268746
0.928534490894	0.860205032619	0.862176300779
0.928962804592	0.861136999068	0.862971892316
0.929081638615	0.862068965517	0.863192691212
0.929480104884	0.863000931966	0.863933265375
0.930014824303	0.863932898416	0.864927573424
0.930572574396	0.864864864865	0.865965316218
0.930662341909	0.865796831314	0.866132394648
0.930915749675	0.866728797763	0.866604132992
0.930938840085	0.867660764212	0.86664712398
0.931727083341	0.868592730662	0.868115357832
0.93232316601	0.869524697111	0.869226485879
0.933015566442	0.87045666356	0.870518047224
0.933023524088	0.871388630009	0.870532896501
0.93395785085	0.872320596459	0.872277267165
0.934593937301	0.873252562908	0.873465827639
0.934845825976	0.874184529357	0.873936718346
0.936341958514	0.875116495806	0.876736263274
0.938240442803	0.876048462255	0.880295128511
0.939200583851	0.876980428705	0.882097736707
0.939269012451	0.877912395154	0.882226277751
0.939342655713	0.878844361603	0.882364624842
0.939563064631	0.879776328052	0.882778752418
0.93970287242	0.880708294501	0.883041488434
0.939713909761	0.881640260951	0.883062232197
0.940825395778	0.8825722274	0.885152425341
0.942911129176	0.883504193849	0.889081397525
0.943123647905	0.884436160298	0.889482215238
0.943148167863	0.885368126747	0.889528466544
0.943448184129	0.886300093197	0.890094476136
0.944201592564	0.887232059646	0.8915166474
0.94453703523	0.888164026095	0.892150210922
0.944635979671	0.889095992544	0.892337134088
0.945603132012	0.890027958993	0.894165283271
0.945667115862	0.890959925443	0.894286294023
0.945829498203	0.891891891892	0.894593439671
0.946119608004	0.892823858341	0.89514231265
0.946509762337	0.89375582479	0.895880730199

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.946753545509	0.89468779124	0.896342275934
0.947315504779	0.895619757689	0.897406665595
0.947344864585	0.896551724138	0.897462292455
0.947490894341	0.897483690587	0.897738994859
0.947666037244	0.898415657036	0.898070918146
0.948095283667	0.899347623486	0.898884666912
0.948465364764	0.900279589935	0.899586548156
0.948548233524	0.901211556384	0.899743751321
0.948801322665	0.902143522833	0.900223949891
0.949384939313	0.903075489282	0.901331762994
0.950467962357	0.904007455732	0.903389347467
0.950859357888	0.904939422181	0.904133518483
0.952458428717	0.90587138863	0.907177058434
0.952723422574	0.906803355079	0.907681919921
0.952747755663	0.907735321528	0.907728285922
0.953367825726	0.908667287978	0.90891021113
0.95396413098	0.909599254427	0.910047563196
0.954102199178	0.910531220876	0.910311006476
0.954463959386	0.911463187325	0.911001449767
0.955789891425	0.912395153774	0.913534316551
0.956949703954	0.913327120224	0.915752735897
0.957155861768	0.914259086673	0.916147343717
0.957503943367	0.915191053122	0.916813801563
0.958340903338	0.916123019571	0.91841728701
0.958507199002	0.917054986021	0.918736050538
0.960113184955	0.91798695247	0.921817327925
0.960150957597	0.918918918919	0.921889861375
0.961022701756	0.919850885368	0.92356463329
0.961706912887	0.920782851817	0.924880186295
0.961770419922	0.921714818267	0.925002340637
0.961839535728	0.922646784716	0.92513529249
0.962125555387	0.923578751165	0.925685584328
0.963376935552	0.924510717614	0.928095119953
0.963694369697	0.925442684063	0.928706838186
0.964279278737	0.926374650513	0.929834527401
0.964445900792	0.927306616962	0.930155895555
0.964696332278	0.928238583411	0.930639013511
0.965798117912	0.92917054986	0.932766004562
0.96650475594	0.930102516309	0.934131443255
0.967260234152	0.931034482759	0.935592360571
0.967491235527	0.931966449208	0.936039290822
0.967609648387	0.932898415657	0.936268431651
0.967738491462	0.933830382106	0.936517787857
0.968762919804	0.934762348555	0.938501594787

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.968957611422	0.935694315005	0.938878852733
0.970092561969	0.936626281454	0.941079578788
0.970796217911	0.937558247903	0.942445296711
0.970909403244	0.938490214352	0.942665069307
0.972206582688	0.939422180801	0.945185639422
0.972289878473	0.940354147251	0.94534760778
0.972849966579	0.9412861137	0.946437057472
0.972955774556	0.942218080149	0.946642939242
0.973074702531	0.943150046598	0.946874376706
0.973343945971	0.944082013048	0.947398437159
0.973411468607	0.945013979497	0.947529887215
0.973465262395	0.945945945946	0.94763461709
0.973937882336	0.946877912395	0.94855499865
0.974078507093	0.947809878844	0.948828937981
0.974130790925	0.948741845294	0.948930797828
0.974417264259	0.949673811743	0.949489004886
0.974722848657	0.950605778192	0.950084631694
0.97552782761	0.951537744641	0.951654542442
0.975995131248	0.95246971109	0.952566496221
0.976419094198	0.95340167754	0.953394247514
0.976602973858	0.954333643989	0.953753368549
0.978115742076	0.955265610438	0.956710404897
0.978423824408	0.956197576887	0.957313180168
0.978600967171	0.957129543336	0.957659852949
0.978744769882	0.958061509786	0.957941324572
0.979097960088	0.958993476235	0.958632815449
0.980414289396	0.959925442684	0.961212178852
0.98074565238	0.960857409133	0.961862034662
0.981089628209	0.961789375582	0.962536858579
0.981815457063	0.962721342032	0.963961591728
0.983081220241	0.963653308481	0.96644868559
0.98334189584	0.96458527493	0.966961284115
0.983360472362	0.965517241379	0.966997818604
0.9840839623	0.966449207829	0.968421244856
0.984564696772	0.967381174278	0.96936764213
0.984748355114	0.968313140727	0.969729322901
0.985664407705	0.969245107176	0.971534324615
0.986451002603	0.970177073625	0.973085580537
0.986518929108	0.971109040075	0.973219597489
0.986548828065	0.972041006524	0.973278590156
0.986865218389	0.972972972973	0.973902959267
0.98718460191	0.973904939422	0.974533438248
0.988130904051	0.974836905871	0.976402683541
0.988748699683	0.975768872321	0.977623991125

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.98896387281	0.97670083877	0.978049541724
0.989061378602	0.977632805219	0.978242410642
0.989612095068	0.978564771668	0.979332098704
0.989745881832	0.979496738117	0.979596910604
0.989824964362	0.980428704567	0.979753460075
0.989928202373	0.981360671016	0.979957845854
0.99061586287	0.982292637465	0.98131978777
0.990957753348	0.983224603914	0.981997268921
0.991261797785	0.984156570363	0.982599951748
0.991453814273	0.985088536813	0.982980665837
0.992179357496	0.986020503262	0.984419877442
0.993028373667	0.986952469711	0.986105350908
0.99371170058	0.98788443616	0.987462943869
0.993725636653	0.98881640261	0.987490640942
0.993978728604	0.989748369059	0.987993712918
0.99433966835	0.990680335508	0.988711376055
0.994532914703	0.991612301957	0.989095718427
0.994797792756	0.992544268406	0.989622648473
0.99556652732	0.993476234856	0.99115271032
0.99602990724	0.994408201305	0.992075576117
0.997311221328	0.995340167754	0.994629672187
0.997673377867	0.996272134203	0.995352168904
0.997934590003	0.997204100652	0.995873445924
0.998627607734	0.998136067102	0.997257098929
0.998773359663	0.999068033551	0.997548223972
0.999922524977	1.0	0.999845055957

Tabla B.3: Resultados de la prueba K-S de los GRBs del catalogo del instrumento *LAT* de *FERMI*, y los 82 neutrinos del catalogo *HESE* de *ICECUBE*.

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.0304871270806	0.037037037037	0.000929464917626
0.243850443622	0.0740740740741	0.0594630388544
0.254138253657	0.1111111111111	0.0645862519717
0.310183128529	0.148148148148	0.096213573224
0.495576606932	0.185185185185	0.245596173338
0.515039008385	0.2222222222222	0.265265180158
0.599678309552	0.259259259259	0.359614074947
0.650039964607	0.296296296296	0.422551955586
0.711357949405	0.3333333333333	0.506030132182
0.73481865674	0.37037037037	0.539958458293
0.759962675888	0.407407407407	0.577543268743
0.777595636481	0.4444444444444	0.604654973874
0.788365283609	0.481481481481	0.621519820401
0.804441197208	0.518518518519	0.647125639765
0.80563698336	0.5555555555556	0.649050948958
0.816622580741	0.592592592593	0.666872439376
0.877204795792	0.62962962963	0.76948825376
0.885479625153	0.6666666666667	0.784074166561
0.904976301863	0.703703703704	0.818982106934
0.90689283682	0.740740740741	0.822454617476
0.918619527056	0.7777777777778	0.843861835489
0.920377449622	0.814814814815	0.847094649772
0.93726837037	0.851851851852	0.878471998097
0.942445022186	0.888888888889	0.888202619844
0.953064700396	0.925925925926	0.908332323141
0.96846489505	0.962962962963	0.937924252943
0.98199968917	1.0	0.964323389531

Tabla B.4: Resultados de la prueba K-S de los GRBs del catalogo The Roma BZCAT detectados por FERMI, y los 82 neutrinos del catalogo HESE de *ICECUBE*.

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.0547748481251	0.00082304526749	0.00300028398713
0.070420237835	0.00164609053498	0.00495900989673
0.071748242831	0.00246913580247	0.00514781034934
0.076535793724	0.00329218106996	0.00585772772096
0.0783746320798	0.00411522633745	0.00614258295364
0.0824785399725	0.00493827160494	0.006802709556
0.0828963030103	0.00576131687243	0.00687179705277
0.0840633995827	0.00658436213992	0.0070666551494
0.0859438673176	0.00740740740741	0.0073863483295
0.0944109227467	0.0082304526749	0.00891342233388
0.0975259850299	0.00905349794239	0.00951131775605
0.09770331032	0.00987654320988	0.00954593684748
0.102965985883	0.0106995884774	0.0106019942488
0.110553472623	0.0115226337449	0.0122220703089
0.110637142482	0.0123456790123	0.0122405772965
0.11629097767	0.0131687242798	0.0135235914876
0.11795871258	0.0139917695473	0.0139142578735
0.119012112271	0.0148148148148	0.0141638828673
0.120397168661	0.0156378600823	0.0144954782217
0.121036640994	0.0164609053498	0.0146498684632
0.122215483855	0.0172839506173	0.0149366244938
0.126726559263	0.0181069958848	0.0160596208227
0.129106168927	0.0189300411523	0.0166684028549
0.133942131798	0.0197530864198	0.0179404946706
0.135231997375	0.0205761316872	0.0182876931141
0.143826057846	0.0213991769547	0.0206859349156
0.146113011034	0.0222222222222	0.0213490119933
0.148787164741	0.0230452674897	0.0221376203917
0.153573139046	0.0238683127572	0.0235847090366
0.154173563074	0.0246913580247	0.0237694875508
0.164852498636	0.0255144032922	0.0271763463065
0.165048309872	0.0263374485597	0.0272409445915
0.167065266283	0.0271604938272	0.0279108031984
0.16801362164	0.0279835390947	0.0282285770565
0.172195635135	0.0288065843621	0.0296513367595
0.173381803878	0.0296296296296	0.0300612499162
0.175828735384	0.0304526748971	0.0309157441868
0.178936841074	0.0312757201646	0.0320183930937
0.180359549173	0.0320987654321	0.0325295669777
0.18091715524	0.0329218106996	0.0327310170602

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.182335554012	0.0337448559671	0.033246254257
0.184629017841	0.0345679012346	0.0340878742288
0.185241073892	0.0353909465021	0.0343142554565
0.18611550007	0.0362139917695	0.0346389793662
0.186964259521	0.037037037037	0.0349556343384
0.18737129615	0.0378600823045	0.035108002621
0.194965563053	0.038683127572	0.0380115707766
0.197941935544	0.0395061728395	0.0391810098469
0.199296173632	0.040329218107	0.0397189648244
0.199776527314	0.0411522633745	0.0399106608656
0.204415733651	0.041975308642	0.0417857921641
0.206039357419	0.0427983539095	0.0424522168055
0.206257301309	0.043621399177	0.0425420743433
0.206865563785	0.0444444444444	0.0427933614802
0.208209184713	0.0452674897119	0.0433510645989
0.211141447771	0.0460905349794	0.0445807109667
0.213800471377	0.0469135802469	0.045710641561
0.215247044619	0.0477366255144	0.0463312902174
0.217120885684	0.0485596707819	0.0471414790001
0.2192423803	0.0493827160494	0.0480672213195
0.219335381793	0.0502057613169	0.0481080097063
0.222375501455	0.0510288065844	0.0494508636475
0.224269112538	0.0518518518519	0.0502966348385
0.224641054033	0.0526748971193	0.0504636031571
0.229926584777	0.0534979423868	0.052866234387
0.233127296849	0.0543209876543	0.054348336536
0.233670789684	0.0551440329218	0.0546020379513
0.236815381599	0.0559670781893	0.0560815249619
0.238717399067	0.0567901234568	0.0569859966172
0.241176846028	0.0576131687243	0.0581662710602
0.242911130956	0.0584362139918	0.0590058175423
0.242983090914	0.0592592592593	0.0590407824699
0.243233839037	0.0600823045267	0.0591627004526
0.245434202475	0.0609053497942	0.0602379477446
0.247956947637	0.0617283950617	0.0614826478817
0.248213629544	0.0625514403292	0.0616100058913
0.249371547935	0.0633744855967	0.0621861689195
0.249982103172	0.0641975308642	0.0624910519062
0.25309610659	0.0650205761317	0.0640576391709
0.255284116283	0.0658436213992	0.0651699800265
0.256571778665	0.0666666666667	0.0658290776072
0.258846220747	0.0674897119342	0.0670013659949
0.261383200664	0.0683127572016	0.0683211775894
0.263575680595	0.0691358024691	0.069472139401

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.26424895032	0.0699588477366	0.0698275077452
0.264543621008	0.0707818930041	0.0699833274159
0.26516235393	0.0716049382716	0.0703110739417
0.265586705351	0.0724279835391	0.0705362980591
0.2662304295	0.0732510288066	0.0708786415916
0.270504781284	0.0740740740741	0.0731728366976
0.272078491564	0.0748971193416	0.0740267055716
0.273870813451	0.0757201646091	0.0750052224603
0.27743278004	0.0765432098765	0.0769689474406
0.28021789378	0.077366255144	0.0785220679944
0.281574910964	0.0781893004115	0.0792844304843
0.282211419559	0.079012345679	0.0796432853297
0.284411520578	0.0798353909465	0.0808899130374
0.285945203333	0.080658436214	0.0817646593091
0.28954428641	0.0814814814815	0.0838358937926
0.290250762492	0.082304526749	0.084245505127
0.290381913685	0.0831275720165	0.0843216557952
0.290753817919	0.083950617284	0.0845377826343
0.291041234404	0.0847736625514	0.0847050001235
0.294444497116	0.0855967078189	0.0866975618816
0.294910154541	0.0864197530864	0.0869719992513
0.296155377422	0.0872427983539	0.0877080075757
0.296562409337	0.0880658436214	0.0879492626316
0.296870628779	0.0888888888889	0.0881321702314
0.298013677085	0.0897119341564	0.08881215173
0.298491131044	0.0905349794239	0.0890969553117
0.300283224101	0.0913580246914	0.0901700146767
0.302116412302	0.0921810699588	0.0912743265821
0.302221322426	0.0930041152263	0.091337727729
0.304514541697	0.0938271604938	0.0927291061048
0.305986225062	0.0946502057613	0.0936275699278
0.306062244427	0.0954732510288	0.0936740974634
0.306088417709	0.0962962962963	0.0936901194557
0.306413717458	0.0971193415638	0.0938893662466
0.30667153942	0.0979423868313	0.0940474330903
0.309906727951	0.0987654320988	0.0960421800292
0.310037753278	0.0995884773663	0.0961234084578
0.310569605421	0.100411522634	0.0964534798111
0.312146614278	0.101234567901	0.0974355088055
0.314793910425	0.102057613169	0.0990952060404
0.318021296715	0.102880658436	0.101137545164
0.318029411344	0.103703703704	0.10114270648
0.321463035559	0.104526748971	0.103338483231
0.321939329464	0.105349794239	0.103644931856

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.323513230063	0.106172839506	0.104660810026
0.323680360292	0.106995884774	0.104768975638
0.324637309951	0.107818930041	0.105389383013
0.325530267264	0.108641975309	0.105969954905
0.330356496818	0.109465020576	0.10913541499
0.331291379051	0.110288065844	0.109753977834
0.331589291013	0.111111111111	0.109951457914
0.331992791381	0.111934156379	0.110219213529
0.3324696885	0.112757201646	0.110536093771
0.332839603049	0.113580246914	0.110782201358
0.333516403355	0.114403292181	0.111233191307
0.335147608574	0.115226337449	0.112323919533
0.338664679165	0.116049382716	0.114693764914
0.340411756495	0.116872427984	0.11588016396
0.342411354661	0.117695473251	0.117245535801
0.343901548376	0.118518518519	0.118268274976
0.34501539968	0.119341563786	0.119035626016
0.351816929455	0.120164609053	0.123775151851
0.354379051746	0.120987654321	0.125584512316
0.355617307782	0.121810699588	0.126463669594
0.35628325054	0.122633744856	0.126937754615
0.357992033985	0.123456790123	0.128158296397
0.358875789725	0.124279835391	0.128791832451
0.361088657695	0.125102880658	0.130385018716
0.364451329763	0.125925925926	0.132824771766
0.364917410509	0.126748971193	0.133164716493
0.36709129546	0.127572016461	0.134756019202
0.367408740662	0.128395061728	0.134989182714
0.367765203794	0.129218106996	0.135251245121
0.368049007755	0.130041152263	0.135460072109
0.368640643243	0.130864197531	0.13589592385
0.368949976075	0.131687242798	0.136124084846
0.37207343797	0.132510288066	0.138438643243
0.372427755467	0.133333333333	0.138702433042
0.37414495189	0.134156378601	0.139984445025
0.374527299324	0.134979423868	0.140270697939
0.375975307515	0.135802469136	0.141357431861
0.375998613334	0.136625514403	0.141374957229
0.376662721665	0.137448559671	0.141874805892
0.376849739761	0.138271604938	0.142015726358
0.376855630129	0.139094650206	0.14202016596
0.378231117512	0.139917695473	0.143058778254
0.379899800862	0.140740740741	0.144323858695
0.381979017788	0.141563786008	0.145907970031

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.383291905707	0.142386831276	0.146912684981
0.384170108765	0.143209876543	0.147586672468
0.385751237923	0.144032921811	0.148804017559
0.386636305923	0.144855967078	0.149487633058
0.387044833233	0.145679012346	0.149803702932
0.387369650357	0.146502057613	0.150055246018
0.389582567639	0.147325102881	0.151774577008
0.390104394008	0.148148148148	0.152181438224
0.390784954096	0.148971193416	0.152712880348
0.391081092204	0.149794238683	0.152944420679
0.391912344552	0.150617283951	0.153595285812
0.391953761914	0.151440329218	0.153627751479
0.392079826998	0.152263374486	0.153726590739
0.393520706055	0.153086419753	0.154858546094
0.394344085664	0.153909465021	0.155507257898
0.396477044317	0.154732510288	0.15719404667
0.396845417536	0.155555555556	0.157486285419
0.39863229483	0.156378600823	0.158907706482
0.402128366997	0.157201646091	0.161707223543
0.402697216015	0.158024691358	0.162165047786
0.405783417862	0.158847736626	0.164660182212
0.407442345759	0.159670781893	0.166009265118
0.409182264802	0.16049382716	0.167430125829
0.409727932168	0.161316872428	0.167876978398
0.410179157683	0.162139917695	0.168246941398
0.412137183294	0.162962962963	0.169857057853
0.414014437746	0.16378600823	0.171407954662
0.41439016276	0.164609053498	0.171719206992
0.414846738955	0.165432098765	0.172097816822
0.416754082264	0.166255144033	0.173683965084
0.417179561523	0.1670781893	0.174038786552
0.417353849606	0.167901234568	0.174184235781
0.417554480749	0.168724279835	0.174351744393
0.41856542832	0.169547325103	0.175197017785
0.419028074672	0.17037037037	0.175584527363
0.420327526335	0.171193415638	0.176675229395
0.420422165669	0.172016460905	0.176754797386
0.422039669783	0.172839506173	0.17811748287
0.423361569858	0.17366255144	0.179235018833
0.423869122203	0.174485596708	0.179665032757
0.424171795339	0.175308641975	0.179921711961
0.424216910771	0.176131687243	0.179959987384
0.426538584023	0.17695473251	0.18193516366
0.427453706007	0.177777777778	0.182716670779

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.427590842614	0.178600823045	0.182833928688
0.429234399348	0.179423868313	0.184242169584
0.429343300606	0.18024691358	0.184335669775
0.430634447717	0.181069958848	0.185446027561
0.431539186225	0.181893004115	0.186226069248
0.434350077237	0.182716049383	0.188659989596
0.434775304489	0.18353909465	0.189029565393
0.435947761339	0.184362139918	0.190050450617
0.437785084647	0.185185185185	0.19165578034
0.439024890944	0.186008230453	0.192742854869
0.439092691195	0.18683127572	0.192802391461
0.439916814731	0.187654320988	0.193526803883
0.440627184537	0.188477366255	0.194152315753
0.441266452051	0.189300411523	0.194716081705
0.441779227621	0.19012345679	0.195168885958
0.44188256932	0.190946502058	0.195260205069
0.444156208628	0.191769547325	0.197274737663
0.445305962432	0.192592592593	0.198297400177
0.445726271759	0.19341563786	0.198671909336
0.445970343462	0.194238683128	0.198889547248
0.447434341856	0.195061728395	0.200197490273
0.449526719315	0.195884773663	0.202074271378
0.453099530514	0.19670781893	0.205299184552
0.453577263553	0.197530864198	0.205732334012
0.455299925436	0.198353909465	0.207298022102
0.455820033069	0.199176954733	0.207771902547
0.456035438408	0.2	0.207968321084
0.457060031835	0.200823045267	0.208903872701
0.457278502513	0.201646090535	0.209103628861
0.457702259815	0.202469135802	0.20949135864
0.45847056498	0.20329218107	0.210195258953
0.459085011766	0.204115226337	0.210759048028
0.459442724516	0.204938271605	0.211087617111
0.460608571759	0.205761316872	0.212160256378
0.461966673702	0.20658436214	0.213413207611
0.46373026981	0.207407407407	0.215045763138
0.464010687128	0.208230452675	0.215305917769
0.465972395388	0.209053497942	0.217130273264
0.466024702798	0.20987654321	0.217179023618
0.467126408621	0.210699588477	0.218207081631
0.467276028824	0.211522633745	0.218346887114
0.467808552403	0.212345679012	0.218844841701
0.468754213245	0.21316872428	0.219730512435
0.470879746133	0.213991769547	0.221727735318

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.472015358354	0.214814814815	0.222798498522
0.47302159557	0.215637860082	0.223749429875
0.473194491398	0.21646090535	0.223913026689
0.473373410475	0.217283950617	0.224082385745
0.47382491665	0.218106995885	0.224510051639
0.474606644217	0.218930041152	0.225251466735
0.475244970451	0.21975308642	0.225857781939
0.475899111164	0.220576131687	0.226479964006
0.476856058078	0.221399176955	0.227391700125
0.478164719623	0.222222222222	0.228641499092
0.480332590998	0.22304526749	0.230719397974
0.480420643268	0.223868312757	0.230803994478
0.481488277683	0.224691358025	0.231830961546
0.483348864621	0.225514403292	0.233626124931
0.484270809691	0.22633744856	0.234518217119
0.484427908279	0.227160493827	0.234670398319
0.484816145562	0.227983539095	0.235046694998
0.485349304452	0.228806584362	0.235563947332
0.485453792801	0.22962962963	0.235665384945
0.486308951667	0.230452674897	0.236496396472
0.486458270597	0.231275720165	0.236641649032
0.486692997017	0.232098765432	0.236870073345
0.487696061624	0.2329218107	0.237847448523
0.489385775328	0.233744855967	0.239498437094
0.490985651425	0.234567901235	0.241066909905
0.491448376496	0.235390946502	0.24152150676
0.49186802767	0.23621399177	0.241934156644
0.492729591894	0.237037037037	0.242782450729
0.493500742625	0.237860082305	0.243542982971
0.494873013323	0.238683127572	0.244899299315
0.495079386032	0.23950617284	0.245103598474
0.498257385677	0.240329218107	0.248260422382
0.49839552052	0.241152263374	0.248398094875
0.499025788642	0.241975308642	0.24902673773
0.499182852151	0.242798353909	0.249183519882
0.499482060379	0.243621399177	0.24948232864
0.499965641647	0.244444444444	0.249965642827
0.500314389197	0.245267489712	0.250314488038
0.50218235576	0.246090534979	0.252187118436
0.502756182133	0.246913580247	0.252763778673
0.505671078644	0.247736625514	0.255703239777
0.506315113437	0.248559670782	0.256354994095
0.506399378019	0.249382716049	0.256440330058
0.507333071483	0.250205761317	0.25738684542

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.509162509864	0.251028806584	0.259246461451
0.509564925196	0.251851851852	0.25965641299
0.509637636965	0.252674897119	0.259730521011
0.50979202351	0.253497942387	0.259887907234
0.510945019088	0.254320987654	0.261064812531
0.512594958671	0.255144032922	0.262753591655
0.513623983277	0.255967078189	0.263809596198
0.515227383459	0.256790123457	0.265459256666
0.515702934741	0.257613168724	0.265949516901
0.517109594385	0.258436213992	0.267402332605
0.517665344443	0.259259259259	0.267977408837
0.517816925324	0.260082304527	0.268134368152
0.517940897854	0.260905349794	0.26826277367
0.518182098066	0.261728395062	0.268512686757
0.518251359177	0.262551440329	0.268584471289
0.518287286839	0.263374485597	0.268621711699
0.519280106318	0.264197530864	0.269651828818
0.520519279031	0.265020576132	0.270940319843
0.520536952159	0.265843621399	0.270958718563
0.520760448218	0.266666666667	0.271191444428
0.521297396693	0.267489711934	0.271750975799
0.521851098117	0.268312757202	0.272328568606
0.521892612463	0.269135802469	0.272371898944
0.523059186386	0.269958847737	0.273590912463
0.523472845219	0.270781893004	0.274023819681
0.525019838209	0.271604938272	0.275645830513
0.525164129523	0.272427983539	0.275797362937
0.526166566963	0.273251028807	0.27685125619
0.526893320022	0.274074074074	0.277616570684
0.527232095507	0.274897119342	0.277973682532
0.527892478173	0.275720164609	0.278670468512
0.532873171289	0.276543209877	0.28395381668
0.533092368449	0.277366255144	0.284187473299
0.533750005373	0.278189300412	0.284889068236
0.533831192925	0.279012345679	0.28497574254
0.534960172522	0.279835390947	0.286182386185
0.536517625207	0.280658436214	0.287851162158
0.536631409366	0.281481481481	0.287973269518
0.537171838687	0.282304526749	0.288553584278
0.538113458798	0.283127572016	0.28956609454
0.53839407805	0.283950617284	0.289868183279
0.538993270983	0.284773662551	0.290513746165
0.540477529845	0.285596707819	0.292115960267
0.540946076836	0.286419753086	0.292622658044

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.542176287296	0.287242798354	0.293955126506
0.542215924446	0.288065843621	0.293998108723
0.544272568839	0.288888888889	0.296232629191
0.545457997601	0.289711934156	0.297524427146
0.546217066457	0.290534979424	0.298353083689
0.546468973265	0.291358024691	0.298628338742
0.546562758764	0.292181069959	0.298730849268
0.546749046788	0.293004115226	0.298934520164
0.546847939528	0.293827160494	0.299042668967
0.547352755071	0.294650205761	0.299595038484
0.547997381868	0.295473251029	0.300301130534
0.548644947262	0.296296296296	0.301011278157
0.548678558443	0.297119341564	0.301048160495
0.550102755013	0.297942386831	0.302613041073
0.550985033124	0.298765432099	0.303584506727
0.551020002337	0.299588477366	0.303623042975
0.552928979405	0.300411522634	0.305730456265
0.55302021006	0.301234567901	0.305831352734
0.553075622844	0.302057613169	0.305892644584
0.553075904304	0.302880658436	0.305892955922
0.553209023587	0.303703703704	0.306040223778
0.554380889698	0.304526748971	0.307338170862
0.555533273002	0.305349794239	0.308617217412
0.556298671696	0.306172839506	0.309468212131
0.557087855409	0.306995884774	0.310346878644
0.557108837157	0.307818930041	0.310370256438
0.558287249462	0.308641975309	0.311684652912
0.558347097475	0.309465020576	0.311751481258
0.558408062455	0.310288065844	0.311819564215
0.558852864301	0.311111111111	0.312316523937
0.560497740349	0.311934156379	0.314157716936
0.561089422592	0.312757201646	0.314821340145
0.562178654548	0.313580246914	0.31604483963
0.562288763719	0.314403292181	0.316168653804
0.567021600644	0.315226337449	0.321513495597
0.567214229379	0.316049382716	0.32173198201
0.568290306423	0.316872427984	0.322953872374
0.570060412206	0.317695473251	0.324968873564
0.570772375168	0.318518518519	0.325781104254
0.570946414107	0.319341563786	0.325979807782
0.572205371991	0.320164609053	0.327418987736
0.572576392241	0.320987654321	0.327843724952
0.573050562571	0.321810699588	0.328386947263
0.573337282788	0.322633744856	0.328715639835

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.575403846731	0.323456790123	0.331089586832
0.575841674077	0.324279835391	0.331593633604
0.576549935194	0.325102880658	0.332409827772
0.576560797247	0.325925925926	0.332422352922
0.576847408405	0.326748971193	0.332752932584
0.577131830375	0.327572016461	0.333081149632
0.577669822899	0.328395061728	0.333702424288
0.579509524666	0.329218106996	0.335831289179
0.580684714887	0.330041152263	0.337194738104
0.581642564841	0.330864197531	0.338308073235
0.582266109035	0.331687242798	0.33903382173
0.58265396056	0.332510288066	0.339485637756
0.582680564749	0.333333333333	0.339516640536
0.583632147996	0.334156378601	0.340626484174
0.583892533435	0.334979423868	0.340930490601
0.584822866197	0.335802469136	0.342017784827
0.584979698161	0.336625514403	0.342201247261
0.586134402629	0.337448559671	0.343553537945
0.586780918633	0.338271604938	0.344311846471
0.586804860508	0.339094650206	0.344339944316
0.587888068393	0.339917695473	0.345612380959
0.58918329334	0.340740740741	0.347136953151
0.58976427674	0.341563786008	0.347821902118
0.590468385716	0.342386831276	0.34865291453
0.591463312518	0.343209876543	0.349828850055
0.593603075514	0.344032921811	0.35236461126
0.5949920173	0.344855967078	0.354015500651
0.595383948719	0.345679012346	0.354482046392
0.595968764005	0.346502057613	0.355178767669
0.597200631279	0.347325102881	0.356648594
0.597330499779	0.348148148148	0.356803725966
0.597435199941	0.348971193416	0.356928818128
0.599104353345	0.349794238683	0.358926026197
0.599133640744	0.350617283951	0.358961119471
0.599847576186	0.351440329218	0.359817114657
0.600027714203	0.352263374486	0.360033257811
0.600804006745	0.353086419753	0.360965454521
0.601632187081	0.353909465021	0.361961288532
0.603850277484	0.354732510288	0.364635157617
0.604025167955	0.355555555556	0.364846403523
0.604149644841	0.356378600823	0.364996793361
0.605110218786	0.357201646091	0.366158376879
0.606678482831	0.358024691358	0.36805878153
0.606841477431	0.358847736626	0.368256578731

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.607094612489	0.359670781893	0.368563868513
0.607271531447	0.36049382716	0.368778712906
0.607401720425	0.361316872428	0.368936849976
0.608106068312	0.362139917695	0.369792990318
0.608394412115	0.362962962963	0.370143760692
0.608633157891	0.36378600823	0.370434320885
0.60943928852	0.364609053498	0.371416246392
0.614080825852	0.365432098765	0.377095260679
0.614489818659	0.366255144033	0.377597737235
0.614515409748	0.3670781893	0.377629188817
0.614574818671	0.367901234568	0.377702207745
0.615314881589	0.368724279835	0.378612403505
0.616356265845	0.369547325103	0.379895046446
0.616508808994	0.37037037037	0.380083111567
0.616777643786	0.371193415638	0.380414661875
0.617028094337	0.372016460905	0.380723669201
0.617030335844	0.372839506173	0.380726435352
0.617550490745	0.37366255144	0.38136860862
0.617569309931	0.374485596708	0.381391852569
0.618204281581	0.375308641975	0.382176533766
0.620460497915	0.376131687243	0.384971229473
0.620512819481	0.37695473251	0.38503615914
0.620522220449	0.377777777778	0.385047826071
0.620530660836	0.378600823045	0.385058301037
0.621080630243	0.379423868313	0.385741149263
0.621249990466	0.38024691358	0.385951550654
0.621411491029	0.381069958848	0.386152241183
0.622130740715	0.381893004115	0.387046658543
0.622918482567	0.382716049383	0.388027435924
0.623339378161	0.38353909465	0.388551980367
0.623858424462	0.384362139918	0.389199333772
0.624078516967	0.385185185185	0.389473995339
0.625372096184	0.386008230453	0.391090258685
0.62637244151	0.38683127572	0.392342435483
0.626839396913	0.387654320988	0.392927629523
0.627015630542	0.388477366255	0.393148600944
0.62733159207	0.389300411523	0.393544926409
0.628345702658	0.39012345679	0.394818322048
0.628377384775	0.390946502058	0.394858137696
0.629560157466	0.391769547325	0.396345991868
0.629945921966	0.392592592593	0.396831864602
0.631210092053	0.39341563786	0.39842618031
0.631674279357	0.394238683128	0.399012395201
0.631686628783	0.395061728395	0.399027996983

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.632013980816	0.395884773663	0.399441671947
0.63216814183	0.39670781893	0.399636559544
0.632618530012	0.397530864198	0.400206204515
0.633194235091	0.398353909465	0.400934939352
0.633630823569	0.399176954733	0.401488020576
0.633765661663	0.4	0.401658913903
0.634283495999	0.400823045267	0.402315553297
0.634450107096	0.401646090535	0.402526938394
0.635350013819	0.402469135802	0.40366964006
0.636061863794	0.40329218107	0.404574694573
0.637034137288	0.404115226337	0.405812492071
0.638867075055	0.404938271605	0.40815113959
0.638914371388	0.405761316872	0.408211573967
0.639105139341	0.40658436214	0.408455379132
0.639297920897	0.407407407407	0.408701831663
0.64088764605	0.408230452675	0.41073697486
0.641382386468	0.409053497942	0.411371365672
0.641837459414	0.40987654321	0.411955324308
0.643025916601	0.410699588477	0.41348232942
0.644246818977	0.411522633745	0.415053963763
0.645036610957	0.412345679012	0.416072229475
0.645352158513	0.41316872428	0.416479408498
0.648703444494	0.413991769547	0.420816158898
0.648816706806	0.414814814815	0.420963119031
0.64893019411	0.415637860082	0.421110396827
0.650935549467	0.41646090535	0.42371708956
0.651100703918	0.417283950617	0.423932126643
0.653079523769	0.418106995885	0.426512864367
0.65369066708	0.418930041152	0.427311488228
0.653801177604	0.41975308642	0.427455979837
0.653849720242	0.420576131687	0.427519456661
0.654390067923	0.421399176955	0.428226360996
0.65478566372	0.422222222222	0.428744265413
0.654834192758	0.42304526749	0.428807820005
0.656367494479	0.423868312757	0.430818287809
0.656642737457	0.424691358025	0.431179684655
0.657230809536	0.425514403292	0.431952337003
0.657337602519	0.42633744856	0.432092723686
0.658284332652	0.427160493827	0.433338262615
0.659157898123	0.427983539095	0.434489134658
0.659815163855	0.428806584362	0.435356050453
0.660631919561	0.42962962963	0.436434533143
0.660828549252	0.430452674897	0.436694371506
0.66239733355	0.431275720165	0.438770227494

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.662793285775	0.432098765432	0.439294939668
0.663215621264	0.4329218107	0.439854960288
0.66424944425	0.433744855967	0.441227324187
0.665184202311	0.434567901235	0.442470023005
0.665738831273	0.435390946502	0.443208191465
0.666225423169	0.43621399177	0.443856314477
0.666621821983	0.437037037037	0.444384653544
0.667919637067	0.437860082305	0.446116641579
0.670812710419	0.438683127572	0.44998969246
0.671637114077	0.43950617284	0.451096413006
0.672210578121	0.440329218107	0.451867061338
0.672441437311	0.441152263374	0.452177486613
0.672481293222	0.441975308642	0.452231089734
0.67275544487	0.442798353909	0.452599888602
0.673324958212	0.443621399177	0.453366499351
0.673608849281	0.444444444444	0.453748881829
0.674457912142	0.445267489712	0.45489347525
0.675771431409	0.446090534979	0.456667027508
0.676466902953	0.446913580247	0.457607470791
0.676832238187	0.447736625514	0.458101878649
0.678495776676	0.448559670782	0.460356518968
0.678817850931	0.449382716049	0.460793674742
0.678856154226	0.450205761317	0.46084567813
0.678944690321	0.451028806584	0.460965892515
0.679486877783	0.451851851852	0.461702417079
0.679583123065	0.452674897119	0.461833221155
0.679633954578	0.453497942387	0.461902312215
0.680326384909	0.454320987654	0.462843990003
0.681049155633	0.455144032922	0.463827952389
0.681450563521	0.455967078189	0.464374870523
0.681656210846	0.456790123457	0.464655189785
0.682730923974	0.457613168724	0.46612151455
0.683692080847	0.458436213992	0.467434861413
0.684186308208	0.459259259259	0.46811090434
0.684505737964	0.460082304527	0.468548105306
0.68498563008	0.460905349794	0.469205313417
0.686047515875	0.461728395062	0.470661194039
0.686410480318	0.462551440329	0.47115934749
0.686440435875	0.463374485597	0.471200472005
0.686869712597	0.464197530864	0.471790002083
0.686876254871	0.465020576132	0.471798989505
0.686892006934	0.465843621399	0.47182062919
0.686913816998	0.466666666667	0.471850591983
0.686962274205	0.467489711934	0.471917166181

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.687511595869	0.468312757202	0.472672194454
0.687684965893	0.469135802469	0.472910612315
0.68771317761	0.469958847737	0.472949414658
0.688422721787	0.470781893004	0.473925843873
0.688796609095	0.471604938272	0.474440768701
0.688801002857	0.472427983539	0.474446821537
0.690139550059	0.473251028807	0.476292598556
0.691792651126	0.474074074074	0.478577072152
0.692572688274	0.474897119342	0.479656928543
0.692740251864	0.475720164609	0.479889056553
0.694504145455	0.476543209877	0.482336008054
0.697672703513	0.477366255144	0.486747201227
0.698964819749	0.478189300412	0.488551819246
0.699274468813	0.479012345679	0.488984782734
0.700036783477	0.479835390947	0.490051498221
0.701263158096	0.480658436214	0.491770016903
0.701942070918	0.481481481481	0.492722670925
0.702021774165	0.482304526749	0.492834571402
0.703335455012	0.483127572016	0.494680762276
0.703660209789	0.483950617284	0.49513769084
0.703974492839	0.484773662551	0.495580086568
0.704190581843	0.485596707819	0.495884375556
0.704213392442	0.486419753086	0.495916502095
0.705751968344	0.487242798354	0.498085840822
0.705791081317	0.488065843621	0.498141050467
0.706377487636	0.488888888889	0.498969155039
0.706519230007	0.489711934156	0.499169422369
0.706580316138	0.490534979424	0.499255743153
0.707308014023	0.491358024691	0.500284626701
0.709436039622	0.492181069959	0.503299494314
0.709467310526	0.493004115226	0.503343864705
0.709769839808	0.493827160494	0.503773225502
0.71002555544	0.494650205761	0.504136289377
0.710179268191	0.495473251029	0.504354592969
0.712187341271	0.496296296296	0.507210809067
0.712193168069	0.497119341564	0.507219108644
0.712659115934	0.497942386831	0.507883015524
0.714466095068	0.498765432099	0.510461801002
0.714700799804	0.499588477366	0.51079723324
0.714925503966	0.500411522634	0.511118476221
0.715174116044	0.501234567901	0.511474016259
0.715845455913	0.502057613169	0.512434716752
0.715930597158	0.502880658436	0.512556619946
0.71673937162	0.503703703704	0.51371532683

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.717358725835	0.504526748971	0.514603541531
0.718942092084	0.505349794239	0.51687773177
0.719819215408	0.506172839506	0.518139702871
0.720589741001	0.506995884774	0.519249574836
0.720819111257	0.507818930041	0.519580191153
0.721332284567	0.508641975309	0.520320264759
0.721647404351	0.509465020576	0.520774976206
0.721693406814	0.510288065844	0.520841373438
0.721900039806	0.511111111111	0.521139667472
0.722526779845	0.511934156379	0.522044947593
0.722683425636	0.512757201646	0.522271333689
0.723402442933	0.513580246914	0.523311094442
0.72344602262	0.514403292181	0.523374147644
0.723709463798	0.515226337449	0.52375538799
0.723980055407	0.516049382716	0.524147120627
0.724765294933	0.516872427984	0.525284732739
0.726044612453	0.517695473251	0.527140779272
0.72615887385	0.518518518519	0.527306710072
0.726526191279	0.519341563786	0.527840306615
0.726639560789	0.520164609053	0.528005051303
0.727779419892	0.520987654321	0.529662884018
0.729215811284	0.521810699588	0.531755699427
0.730542415318	0.522633744856	0.533692220578
0.730650741965	0.523456790123	0.533850506734
0.730767236278	0.524279835391	0.534020753618
0.730945822894	0.525102880658	0.534281796006
0.730948231756	0.525925925926	0.534285317508
0.731192776049	0.526748971193	0.534642875747
0.731330982468	0.527572016461	0.534845005917
0.731732861385	0.528395061728	0.535432980431
0.73185733403	0.529218106996	0.535615157374
0.731947287186	0.530041152263	0.535746831219
0.732580608982	0.530864197531	0.536674348656
0.732647222089	0.531687242798	0.536771952035
0.733676649559	0.532510288066	0.538281426108
0.734556706217	0.533333333333	0.539573554649
0.73548601648	0.534156378601	0.540939680437
0.735498241021	0.534979423868	0.540957662545
0.73820736892	0.535802469136	0.544950119528
0.738235632735	0.536625514403	0.544991849439
0.738298521789	0.537448559671	0.545084707276
0.738600526011	0.538271604938	0.545530737024
0.739494754	0.539094650206	0.546852491193
0.741083436502	0.539917695473	0.549204659858

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.741084912388	0.540740740741	0.549206847369
0.741251937063	0.541563786008	0.549454434199
0.741613139397	0.542386831276	0.549990048526
0.741683840892	0.543209876543	0.55009491984
0.74192742691	0.544032921811	0.550456306801
0.742113119486	0.544855967078	0.550731882114
0.742532521491	0.545679012346	0.551354545472
0.742859050745	0.546502057613	0.551839569274
0.743194914623	0.547325102881	0.552338681121
0.743707710801	0.548148148148	0.553101159105
0.743861813956	0.548971193416	0.553330398263
0.743997249112	0.549794238683	0.553531906687
0.745007441302	0.550617283951	0.555036087595
0.746541798121	0.551440329218	0.557324656341
0.747356604519	0.552263374486	0.558541894319
0.747504804271	0.553086419753	0.558763432409
0.747921198557	0.553909465021	0.559386119251
0.748561842471	0.554732510288	0.560344832003
0.749259457211	0.555555555556	0.56138973422
0.749795341715	0.556378600823	0.562193054457
0.750997344981	0.557201646091	0.563997012169
0.751262726877	0.558024691358	0.564395684794
0.752478583837	0.558847736626	0.566224019133
0.752825851906	0.559670781893	0.566746763298
0.753219579471	0.56049382716	0.567339734898
0.753232621396	0.561316872428	0.567359381935
0.755401724282	0.562139917695	0.570631765048
0.755548637246	0.562962962963	0.570853743244
0.755616486403	0.56378600823	0.570956274524
0.756446523793	0.564609053498	0.572211343358
0.758544654387	0.565432098765	0.575389992699
0.758581443987	0.566255144033	0.575445807161
0.758709434108	0.5670781893	0.575640005405
0.760363210734	0.567901234568	0.578152212237
0.762105187174	0.568724279835	0.580804316317
0.762697258777	0.569547325103	0.581707108546
0.763183556475	0.57037037037	0.582449140874
0.764778591008	0.571193415638	0.584886293264
0.765888205831	0.572016460905	0.58658474383
0.766316702599	0.572839506173	0.587241288682
0.766650797681	0.57366255144	0.587753445585
0.766673594728	0.574485596708	0.587788400854
0.767117722754	0.575308641975	0.588469600564
0.768210256052	0.576131687243	0.590146997504

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.768293582529	0.57695473251	0.590275028955
0.768672828704	0.5777777777778	0.590857917588
0.768865429319	0.578600823045	0.591154048402
0.768868872709	0.579423868313	0.59115934342
0.769630636366	0.58024691358	0.592331316433
0.770650112257	0.581069958848	0.593901595522
0.772604358773	0.581893004115	0.596917495195
0.772755064388	0.582716049383	0.597150389538
0.773008403853	0.58353909465	0.597541992428
0.773198011883	0.584362139918	0.59783516558
0.773227559846	0.585185185185	0.597880859305
0.774223602779	0.586008230453	0.5994221871
0.774708668694	0.58683127572	0.60017352135
0.77578522724	0.587654320988	0.601842718805
0.776161487142	0.588477366255	0.602426654123
0.776853641262	0.589300411523	0.603501579942
0.776867688062	0.59012345679	0.603523404754
0.777268065311	0.590946502058	0.604145645353
0.777445360103	0.591769547325	0.604421287945
0.777583602392	0.592592592593	0.604636258709
0.777893346176	0.59341563786	0.605118058025
0.778054016777	0.594238683128	0.605368053023
0.778241129013	0.595061728395	0.605659254887
0.779474825516	0.595884773663	0.607581003614
0.779498397282	0.59670781893	0.607617751365
0.780855301187	0.597530864198	0.609735001392
0.781362949618	0.598353909465	0.610528059036
0.78219373038	0.599176954733	0.611827031845
0.782882241536	0.6	0.612904604113
0.782883395084	0.600823045267	0.612906410299
0.783247604985	0.601646090535	0.613476810715
0.783343035481	0.602469135802	0.613626311237
0.784911359887	0.60329218107	0.61608584288
0.785295036634	0.604115226337	0.616688294562
0.785571787823	0.604938271605	0.617123033823
0.78649422259	0.605761316872	0.618573162168
0.788024437669	0.60658436214	0.620982514364
0.789509481334	0.607407407407	0.623325221116
0.789914246638	0.608230452675	0.623964517041
0.790302681635	0.609053497942	0.6245783286
0.790420381936	0.60987654321	0.62476438018
0.79061534905	0.610699588477	0.625072630153
0.791116170485	0.611522633745	0.625864795202
0.791167524264	0.612345679012	0.62594605145

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.791390540525	0.61316872428	0.626298987633
0.791424877547	0.613991769547	0.6263533368
0.79222933916	0.614814814815	0.627627325825
0.792781975465	0.615637860082	0.628503260621
0.793026972481	0.61646090535	0.628891779083
0.793423608358	0.617283950617	0.6295210223
0.793789776503	0.618106995885	0.630102209281
0.793807516427	0.618930041152	0.630130373135
0.793950304358	0.61975308642	0.630357085791
0.794065500391	0.620576131687	0.630540018912
0.794351612857	0.621399176955	0.630994484849
0.794367495469	0.622222222222	0.631019717857
0.794822132624	0.62304526749	0.631742222509
0.794874529943	0.623868312757	0.631825518352
0.794933934546	0.624691358025	0.631919960293
0.795002818256	0.625514403292	0.632029481034
0.795735751855	0.62633744856	0.633195386781
0.796409355059	0.627160493827	0.634267860826
0.797327793181	0.627983539095	0.635731609778
0.798193125159	0.628806584362	0.637112265051
0.798764557269	0.62962962963	0.638024817949
0.801210823139	0.630452674897	0.641938783115
0.80131560749	0.631275720165	0.642106702806
0.801444262427	0.632098765432	0.642312905777
0.801756223692	0.6329218107	0.642813042229
0.801843373974	0.633744855967	0.642952796387
0.801888498399	0.634567901235	0.643025163865
0.80215555259	0.635390946502	0.643453530551
0.803652955237	0.63621399177	0.645858072461
0.804311364381	0.637037037037	0.646916770873
0.806625345451	0.637860082305	0.650644447925
0.807100049856	0.638683127572	0.651410490477
0.807197816372	0.63950617284	0.651568314756
0.807339095695	0.640329218107	0.651796415438
0.80836119076	0.641152263374	0.653447814727
0.808853599757	0.641975308642	0.65424414584
0.811195871853	0.642798353909	0.658038742511
0.811337824813	0.643621399177	0.658269065972
0.812317491024	0.644444444444	0.659859706223
0.812518608556	0.645267489712	0.66018648925
0.813306236833	0.646090534979	0.661467034871
0.815003154961	0.646913580247	0.664230142596
0.815246182804	0.647736625514	0.664626338577
0.815482064462	0.648559670782	0.66501099746

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.815913290047	0.649382716049	0.665714496875
0.816580201119	0.650205761317	0.666803224859
0.817702175754	0.651028806584	0.668636848233
0.818250506196	0.651851851852	0.669533890889
0.818340965098	0.652674897119	0.669681935157
0.819125588075	0.653497942387	0.670966729039
0.819766298588	0.654320987654	0.672016784301
0.81989252698	0.655144032922	0.672223755797
0.820031707146	0.655967078189	0.672452000724
0.820769810687	0.656790123457	0.673663082136
0.821392201024	0.657613168724	0.674685147902
0.821911074011	0.658436213992	0.675537813582
0.82219919261	0.659259259259	0.676011512329
0.822475126873	0.660082304527	0.676465334325
0.82261459486	0.660905349794	0.676694771677
0.82269442313	0.661728395062	0.676826113849
0.823442794316	0.662551440329	0.678058035511
0.824248930975	0.663374485597	0.679386300214
0.825627968014	0.664197530864	0.681661541567
0.825829633601	0.665020576132	0.681994583733
0.827476869172	0.665843621399	0.684717969014
0.828100858933	0.666666666667	0.685751032566
0.828120815346	0.667489711934	0.685784084809
0.82845958317	0.668312757202	0.686345280947
0.828653463343	0.669135802469	0.68666656231
0.828888565365	0.669958847737	0.687056253792
0.829524025843	0.670781893004	0.688110109451
0.829766943598	0.671604938272	0.688513180688
0.830186227473	0.672427983539	0.689209172286
0.830416225664	0.673251028807	0.689591107846
0.830548458235	0.674074074074	0.689810741476
0.830649325714	0.674897119342	0.689978302308
0.831106035361	0.675720164609	0.690737242013
0.831110092639	0.676543209877	0.690743986087
0.831503914979	0.677366255144	0.691398760625
0.831599419317	0.678189300412	0.691557594208
0.832318718845	0.679012345679	0.69275444974
0.832674560896	0.679835390947	0.693346924363
0.832680408328	0.680658436214	0.693356662412
0.833278984731	0.681481481481	0.694353866395
0.833442671325	0.682304526749	0.694626686386
0.83432425173	0.683127572016	0.696096957024
0.834949178455	0.683950617284	0.697140130603
0.835007591078	0.684773662551	0.697237677158

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.835595378569	0.685596707819	0.698219636686
0.836123728047	0.686419753086	0.699102888602
0.836309040095	0.687242798354	0.699412810545
0.836493097523	0.688065843621	0.699720702204
0.836863248476	0.688888888889	0.700340096651
0.837265431437	0.689711934156	0.701013402679
0.837730379024	0.690534979424	0.701792187939
0.837859576889	0.691358024691	0.702008670585
0.838018136451	0.692181069959	0.702274397021
0.838043590881	0.693004115226	0.702317060217
0.838691643858	0.693827160494	0.703403673478
0.839043181007	0.694650205761	0.703993459595
0.839520503993	0.695473251029	0.704794676625
0.839883043789	0.696296296296	0.705403527245
0.840428654098	0.697119341564	0.706320322628
0.840729140003	0.697942386831	0.706825486849
0.840770973929	0.698765432099	0.706895830601
0.840776315494	0.699588477366	0.706904812696
0.840843153587	0.700411522634	0.707017208935
0.841027753243	0.701234567901	0.707327681724
0.841166218024	0.702057613169	0.707560606345
0.841180141114	0.702880658436	0.707584029804
0.842146545668	0.703703703704	0.709210804381
0.843379277761	0.704526748971	0.711288606156
0.843522796149	0.705349794239	0.711530707622
0.843843686135	0.706172839506	0.71207216663
0.843948246682	0.706995884774	0.712248643077
0.844329503232	0.707818930041	0.712892310027
0.845126970764	0.708641975309	0.714239596712
0.845404545211	0.709465020576	0.714708845063
0.845628260959	0.710288065844	0.715087155732
0.846537196466	0.711111111111	0.716625225001
0.846871428983	0.711934156379	0.717191217228
0.847322361541	0.712757201646	0.717955184367
0.847410677785	0.713580246914	0.718104856825
0.84768176931	0.714403292181	0.71856438202
0.847810475205	0.715226337449	0.718782601866
0.848294379015	0.716049382716	0.719603353469
0.848392279674	0.716872427984	0.71976946021
0.848831679963	0.717695473251	0.720515220909
0.848876616828	0.718518518519	0.720591510597
0.8492176016	0.719341563786	0.721170534868
0.849390014316	0.720164609053	0.72146339642
0.85036150124	0.720987654321	0.723114682791

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.850922521937	0.721810699588	0.72406913834
0.85174258712	0.722633744856	0.725465434714
0.852416355662	0.723456790123	0.726613643399
0.853071462546	0.724279835391	0.727730920211
0.853168759904	0.725102880658	0.727896932875
0.853480082263	0.725925925926	0.72842825082
0.854703249087	0.726748971193	0.730517644001
0.855500120215	0.727572016461	0.731880455687
0.855827852536	0.728395061728	0.732441313176
0.857051165081	0.729218106996	0.734536699566
0.85705770348	0.730041152263	0.734547907095
0.857085092788	0.730864197531	0.734594856279
0.858817797051	0.731687242798	0.737568008532
0.85901085472	0.732510288066	0.737899648527
0.859050915748	0.733333333333	0.737968475847
0.860593518855	0.734156378601	0.740621204695
0.860865143249	0.734979423868	0.741088794861
0.86242893324	0.735802469136	0.743783664889
0.862623128059	0.736625514403	0.744118661063
0.863544573932	0.737448559671	0.745709231167
0.863739801081	0.738271604938	0.746046443972
0.865633235208	0.739094650206	0.749320897897
0.866498392476	0.739917695473	0.750819464164
0.867066319679	0.740740740741	0.751804002721
0.867086766289	0.741563786008	0.751839460274
0.867294189308	0.742386831276	0.752199210807
0.867333978592	0.743209876543	0.75226823042
0.867380968902	0.744032921811	0.752349745213
0.868094829923	0.744855967078	0.753588633739
0.868538810809	0.745679012346	0.754359665882
0.868544524977	0.746502057613	0.754369591867
0.868703691529	0.747325102881	0.754646103676
0.869568249135	0.748148148148	0.756148939904
0.869706787526	0.748971193416	0.756389896268
0.869845380149	0.749794238683	0.756630985367
0.870643626445	0.750617283951	0.75802032427
0.871231535716	0.751440329218	0.759044388827
0.871275722538	0.752263374486	0.759121384684
0.871566639262	0.753086419753	0.759628406674
0.871872922683	0.753909465021	0.760162393308
0.872213814396	0.754732510288	0.760756938023
0.8723203762	0.755555555556	0.760942838733
0.872579420576	0.756378600823	0.761394845212
0.872623739743	0.757201646091	0.761472191163

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.873133753575	0.758024691358	0.762362551632
0.873255381686	0.758847736626	0.762574961643
0.873396190479	0.759670781893	0.762820905543
0.873447154818	0.76049382716	0.762909932259
0.873489881662	0.761316872428	0.762984573365
0.873660123819	0.762139917695	0.763282011951
0.874141282938	0.762962962963	0.764122982537
0.874550635036	0.76378600823	0.764838813242
0.874638876746	0.764609053498	0.764993164716
0.875152256698	0.765432098765	0.765891472404
0.875292355623	0.766255144033	0.766136707812
0.875771316147	0.7670781893	0.766975398186
0.876060584651	0.767901234568	0.767482147979
0.876320264995	0.768724279835	0.767937206842
0.876377560556	0.769547325103	0.768037628647
0.876447034585	0.77037037037	0.768159404433
0.876857718839	0.771193415638	0.768879459088
0.877200441742	0.772016460905	0.769480614992
0.877279068153	0.772839506173	0.76961856342
0.878161879469	0.77366255144	0.771168286553
0.879098761755	0.774485596708	0.772814632918
0.879107897826	0.775308641975	0.77283069602
0.879875222276	0.776131687243	0.774180406775
0.879878281347	0.77695473251	0.774185789985
0.879947871035	0.777777777778	0.774308255738
0.880041689176	0.778600823045	0.774473374687
0.880395292946	0.779423868313	0.775095871842
0.880396269821	0.78024691358	0.775097591914
0.880755791189	0.781069958848	0.775730763713
0.88082904404	0.781893004115	0.775859804824
0.881881629218	0.782716049383	0.777715207952
0.881975318467	0.78353909465	0.777880462386
0.882520212267	0.784362139918	0.77884192506
0.883790019556	0.785185185185	0.781084798667
0.883945851983	0.786008230453	0.781360269239
0.883947078534	0.78683127572	0.781362437648
0.884403517921	0.787654320988	0.782169582511
0.884598128071	0.788477366255	0.782513848187
0.885029249245	0.789300411523	0.78327677202
0.885921691858	0.79012345679	0.784857244105
0.886039265689	0.790946502058	0.785065580342
0.886656129012	0.791769547325	0.786159091114
0.886973029347	0.792592592593	0.786721154789
0.887618287847	0.79341563786	0.78786622492

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.887652423331	0.794238683128	0.787926824645
0.888427737674	0.795061728395	0.789303845069
0.888758095816	0.795884773663	0.789890952879
0.888995962229	0.79670781893	0.790313820859
0.889789419812	0.797530864198	0.791725211609
0.889941524993	0.798353909465	0.791995917907
0.889980789487	0.799176954733	0.792065805655
0.890509513963	0.8	0.793007194459
0.891878578348	0.800823045267	0.795447398517
0.892688317206	0.801646090535	0.796892431677
0.893415083168	0.802469135802	0.798190510833
0.894067340683	0.80329218107	0.799356409676
0.894099879963	0.804115226337	0.799414595349
0.894614026198	0.804938271605	0.800334255871
0.894928601031	0.805761316872	0.800897200944
0.895144669384	0.80658436214	0.801283979127
0.895738808242	0.807407407407	0.80234801259
0.896840455977	0.808230452675	0.804322803477
0.897385231143	0.809053497942	0.805300253074
0.897756268977	0.80987654321	0.805966318487
0.898093468115	0.810699588477	0.806571877471
0.898730937256	0.811522633745	0.807717297581
0.898760213146	0.812345679012	0.807769920734
0.899449175751	0.81316872428	0.809008819758
0.90046838555	0.813991769547	0.810843313375
0.900746282536	0.814814814815	0.811343865502
0.900808007057	0.815637860082	0.811455065578
0.901171270757	0.81646090535	0.812109659238
0.901465087401	0.817283950617	0.812639303802
0.901623772525	0.818106995885	0.812925427183
0.902462164218	0.818930041152	0.814437957845
0.902510971823	0.81975308642	0.814526054261
0.902583944157	0.820576131687	0.81465777625
0.903482988562	0.821399176955	0.816281510622
0.904242233749	0.822222222222	0.817654017296
0.904792874686	0.82304526749	0.818650146083
0.904913660001	0.823868312757	0.818868732056
0.90545424574	0.824691358025	0.819847391128
0.905507018733	0.825514403292	0.819942960974
0.905986662216	0.82633744856	0.820811832113
0.906170764383	0.827160493827	0.821145454223
0.908573643471	0.827983539095	0.82550606561
0.908786810212	0.828806584362	0.825893466416
0.909191379857	0.82962962963	0.826628965205

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.910450298012	0.830452674897	0.82891974515
0.910744370338	0.831275720165	0.829455308102
0.910801786554	0.832098765432	0.829559894389
0.910951126935	0.8329218107	0.829831955664
0.911017688043	0.833744855967	0.829953227928
0.911464700086	0.834567901235	0.830767899503
0.91167075181	0.835390946502	0.831143559706
0.91170249625	0.83621399177	0.831201441669
0.911790361971	0.837037037037	0.831361664183
0.911912207148	0.837860082305	0.831583873546
0.913270262391	0.838683127572	0.834062572168
0.913334549889	0.83950617284	0.834180000021
0.913841133499	0.840329218107	0.835105617276
0.913930462701	0.841152263374	0.835268890654
0.915542310726	0.841975308642	0.838217722729
0.915730840525	0.842798353909	0.838562972289
0.915946800287	0.843621399177	0.838958540956
0.916070373785	0.844444444444	0.839184929726
0.916410640602	0.845267489712	0.839808462208
0.917255991777	0.846090534979	0.841358554451
0.918578831534	0.846913580247	0.843787069743
0.918599609096	0.847736625514	0.843825241831
0.918901200817	0.848559670782	0.844379416864
0.919159582793	0.849382716049	0.84485433864
0.919520870547	0.850205761317	0.845518631371
0.923298316959	0.851028806584	0.8524797821
0.923595697381	0.851851851852	0.85302901222
0.924156508228	0.852674897119	0.854065251701
0.925571533341	0.853497942387	0.856682663331
0.926528421317	0.854320987654	0.858454915508
0.927502440657	0.855144032922	0.860260777424
0.927969877755	0.855967078189	0.86112809402
0.927989499091	0.856790123457	0.861164510424
0.928533429317	0.857613168724	0.862174329358
0.928721645206	0.858436213992	0.862523894274
0.92902918104	0.859259259259	0.863095219225
0.929197392719	0.860082304527	0.863407794636
0.929509439576	0.860905349794	0.863987798261
0.92951015143	0.861728395062	0.863989121611
0.929601590933	0.862551440329	0.864159117865
0.930026418092	0.863374485597	0.86494913835
0.930118355443	0.864197530864	0.865120155132
0.930764977384	0.865020576132	0.866323443125
0.930938906028	0.865843621399	0.866647246757

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.932077981342	0.866666666667	0.868769363303
0.932206979794	0.867489711934	0.869009853176
0.932581576218	0.868312757202	0.869708396301
0.932776210121	0.869135802469	0.870071458168
0.9332378745	0.869958847737	0.870932930401
0.933678950478	0.870781893004	0.871756382566
0.93389971419	0.871604938272	0.872168676163
0.933985693345	0.872427983539	0.872329275374
0.934476968202	0.873251028807	0.8732472041
0.934626231895	0.874074074074	0.873526193347
0.934882072529	0.874897119342	0.874004489536
0.935187279542	0.875720164609	0.874575247816
0.935270118086	0.876543209877	0.874730193785
0.93620193971	0.877366255144	0.876474071916
0.936549972102	0.878189300412	0.877125850243
0.936720814348	0.879012345679	0.877445884032
0.936822936008	0.879835390947	0.87763721343
0.937721378094	0.880658436214	0.879321382934
0.938356049316	0.881481481481	0.880512075289
0.939240174248	0.882304526749	0.882172104921
0.939895910393	0.883127572016	0.883404322374
0.941079756399	0.883950617284	0.885631107905
0.941168720844	0.884773662551	0.885798561095
0.941214366288	0.885596707819	0.885884483306
0.941256862313	0.886419753086	0.885964480851
0.941378014948	0.887242798354	0.886192567028
0.942282221178	0.888065843621	0.887895784348
0.942607814934	0.888888888889	0.888509492775
0.942954016455	0.889711934156	0.889162277149
0.943288280613	0.890534979424	0.889792780343
0.94339974131	0.891358024691	0.890003071904
0.943610534096	0.892181069959	0.890400840058
0.943868360485	0.893004115226	0.890887481925
0.944018473517	0.893827160494	0.891170878341
0.944635672379	0.894650205761	0.892336553532
0.944747384183	0.895473251029	0.89254761992
0.944955360506	0.896296296296	0.892940633349
0.945312601335	0.897119341564	0.893615914243
0.945764211437	0.897942386831	0.894469943635
0.945967974246	0.898765432099	0.894855408299
0.946221660706	0.899588477366	0.895335431189
0.946924584781	0.900411522634	0.896666169262
0.947594336558	0.901234567901	0.897935026677
0.947793561525	0.902057613169	0.898312635268

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.948210717967	0.902880658436	0.899103565667
0.950626895999	0.903703703704	0.903691495397
0.950917617632	0.904526748971	0.904244315522
0.950948927677	0.905349794239	0.904303863049
0.951146607712	0.906172839506	0.904679869361
0.951176170449	0.906995884774	0.904736107231
0.951391333906	0.907818930041	0.905145470232
0.951701101883	0.908641975309	0.905734987326
0.952305222428	0.909465020576	0.906885236663
0.952929080451	0.910288065844	0.908073832369
0.954554870708	0.911111111111	0.911175001192
0.954928876335	0.911934156379	0.911889158858
0.955917214142	0.912757201646	0.913777720294
0.956109183794	0.913580246914	0.914144771336
0.956163244402	0.914403292181	0.914248149945
0.956555090064	0.915226337449	0.914997640328
0.956654470817	0.916049382716	0.915187776534
0.95717679964	0.916872427984	0.916187425769
0.957217597382	0.917695473251	0.916265528738
0.958445290563	0.918518518519	0.918617375003
0.958647023942	0.919341563786	0.919004116513
0.95880110233	0.920164609053	0.91929955383
0.959449290509	0.920987654321	0.920542941058
0.960472530683	0.921810699588	0.922507482196
0.960494946178	0.922633744856	0.922550541633
0.96110282082	0.923456790123	0.923718632189
0.961656296826	0.924279835391	0.924782833225
0.962215681765	0.925102880658	0.925859018235
0.96278460742	0.925925925926	0.926954200284
0.963144745013	0.926748971193	0.927647799846
0.963407491726	0.927572016461	0.928153995113
0.96394611961	0.928395061728	0.92919212151
0.964923248138	0.929218106996	0.931076874797
0.965058266072	0.930041152263	0.931337456914
0.965512590812	0.930864197531	0.932214563017
0.965923694724	0.931687242798	0.93300858403
0.965977958075	0.932510288066	0.933113415488
0.966153113456	0.933333333333	0.93345183864
0.966306936792	0.934156378601	0.933749096092
0.966761995789	0.934979423868	0.934628756502
0.966963588386	0.935802469136	0.935018581264
0.967115730289	0.936625514403	0.935312835772
0.968982178724	0.937448559671	0.938926462685
0.969043765982	0.938271604938	0.939045820388

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.969139949593	0.939094650206	0.939232241897
0.969409850112	0.939917695473	0.939755457494
0.969692383528	0.940740740741	0.940303318671
0.970021637666	0.941563786008	0.940941977541
0.970244341181	0.942386831276	0.941374081595
0.970359183971	0.943209876543	0.941596945916
0.970373679681	0.944032921811	0.941625078218
0.970559084887	0.944855967078	0.941984937258
0.970861453217	0.945679012346	0.942571961343
0.971146682901	0.946502057613	0.943125879709
0.97123462841	0.947325102881	0.943296703423
0.971568726142	0.948148148148	0.943945789617
0.9716333882	0.948971193416	0.944071441065
0.971836536148	0.949794238683	0.944466252992
0.971885736236	0.950617283951	0.944561884299
0.972541512529	0.951440329218	0.945836993593
0.974259120972	0.952263374486	0.949180834798
0.9744694115	0.953086419753	0.94959063395
0.975180928143	0.953909465021	0.950977842614
0.97567163271	0.954732510288	0.951935134875
0.975690354816	0.955555555556	0.95197166848
0.975772059462	0.956378600823	0.952131112027
0.975787486849	0.957201646091	0.952161219491
0.975863738848	0.958024691358	0.952310036799
0.976123302473	0.958847736626	0.95281670163
0.976566165585	0.959670781893	0.953681475766
0.976707180965	0.96049382716	0.953956917349
0.977575587029	0.961316872428	0.955654028356
0.978267958884	0.962139917695	0.957008199379
0.979491525133	0.962962962963	0.959403647807
0.979932820602	0.96378600823	0.960268332893
0.980281811949	0.964609053498	0.960952430837
0.980509470825	0.965432098765	0.961398822377
0.981014177962	0.966255144033	0.962388817362
0.981251087336	0.9670781893	0.962853696398
0.981827609352	0.967901234568	0.963985454486
0.982059729136	0.968724279835	0.964441311591
0.98235131214	0.969547325103	0.965014100463
0.982515735326	0.97037037037	0.965337170163
0.98272119885	0.971193415638	0.96574095467
0.983324890257	0.972016460905	0.9669278398
0.9834844729	0.972839506173	0.967241708435
0.98428315876	0.97366255144	0.968813336619
0.985510559351	0.974485596708	0.971231062593

d/e_ν	$F_n(e_\nu)$	$F(e_\nu)$
0.985522822562	0.975308641975	0.97125523379
0.985699790041	0.976131687243	0.971604076086
0.985932844167	0.97695473251	0.972063573206
0.986216737023	0.977777777778	0.972623452385
0.986273801153	0.978600823045	0.972736010842
0.986650569929	0.979423868313	0.973479347141
0.987205308527	0.98024691358	0.974574321183
0.987970778556	0.981069958848	0.97608625928
0.98805391199	0.981893004115	0.976250532999
0.988325024881	0.982716049383	0.976786354806
0.988514926587	0.98353909465	0.977161760086
0.989023784718	0.984362139918	0.978168046738
0.990305751418	0.985185185185	0.980705481292
0.990429933373	0.986008230453	0.980951452921
0.991324033547	0.98683127572	0.982723339487
0.991380671088	0.987654320988	0.982835635006
0.991659867459	0.988477366255	0.983389292728
0.991715046618	0.989300411523	0.983498733688
0.993377099547	0.99012345679	0.986798061905
0.99339462573	0.990946502058	0.986832882429
0.994671848825	0.991769547325	0.989372086844
0.99493229163	0.992592592593	0.989890264929
0.995240006312	0.99341563786	0.990502670165
0.996200026894	0.994238683128	0.992414493584
0.996642090055	0.995061728395	0.99329545567
0.997089818352	0.995884773663	0.994188105862
0.997567070088	0.99670781893	0.995140059324
0.997964167516	0.997530864198	0.995932479647
0.998133460062	0.998353909465	0.996270404096
0.998669823623	0.999176954733	0.997341416616
0.999361127815	1.0	0.998722663787
0.986460440473	1.0	0.973104200619