UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA DESIGUALDAD DE ARHANGEL'SKII EN ESPACIOS H-CERRADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

ALEJANDRO LEÓN MERCADO

TUTOR

DR. ALEJANDRO DARÍO ROJAS SÁNCHEZ

CIUDAD UNIVERSITARIA 2020

Cd. Mx.

A mi familia.
A Kathia.

Agradecimientos

Gracias a mis padres y mis hermanos, por enseñarme con su amor y con ejemplo, por su apoyo incondicional, por todos sus consejos, por todo su esfuerzo, por brindarme la oportunidad de presentar este trabajo... Gracias por todo.
Gracias Kathia, por darme fuerza y acompañarme en los momentos difíciles, por ayudarme a encontrar la mejor versión de mí e inspirarme a ser mejor cada día.
Gracias a mi asesor, Alejandro. Por su guía durante mi formación académica, así como su paciencia infinita durante el desarrollo del trabajo.

Índice general

Introducción.

En el artículo *Cardinalities of H-closed spaces* de Alan Dow y Jack Porter, se demuestra que para cualquier espacio H-cerrado X, $\mid X \mid \leq 2^{\chi(X)}$.

El presente trabajo tiene como objetivo abordar este resultado desde un punto de vista más elemental. Para ello se incluye la teoría previa de extensiones de espacios, compactaciones de un espacio Tychonoff, espacios H-cerrados y Absolutos de un espacio Hausdorff.

Después de desarrollar la teoría necesaria, el resultado principal se demostrará en dos pasos:

- Dado un espacio H-cerrado X construiremos otro espacio H-cerrado Y, con un conjunto denso de puntos aislados. De forma que X sea homeomorfo a un subespacio adecuado de Y.
- Demostraremos que para un espacio Z, H-cerrado con un conjunto denso de puntos aislados, $\mid Z \mid \leq 2^{\chi(Z)}$.

  Y como consecuencia obtendremos el resultado que deseamos.

Durante el desarrollo de este trabajo daremos por hecho que el lector posee los conocimientos pertinentes a los cursos de Topología I y II de la Facultad de Ciencias, los conocimientos elementales de la teoría de extensiones y compactaciones. Por lo cuál no se incluirán las demostraciones correspondientes. Hasta la sección 2.3 sólo se hará mención de los resultados presentados.

En el **Capítulo 1** daremos una breve introducción a la teoría de extensiones, sin incluir las demostraciones correspondientes. Daremos la definición de la extensión de un espacio, damos la estructura de semiretícula al conjunto de extensiones de un espacio Hausdorff y mencionaremos algunas propiedades importantes para algunas extensiones particulares de un espacio.

En el **Capítulo 2** presentamos las extensiones compactas de un espacio Tychonoff. Sin dar la demostración de los resultados correspondientes, se presentarán las propiedades elementales de la teoría de compactaciones. Veremos que como una retícula, posee un máximo y mencionamos los resultados más representativos para los fines de este trabajo.

Posteriormente introducimos los espacios H-cerrados y las extensiones H-cerradas de un espacio Hausdorff, construiremos el máximo de la retícula de las extensiones H-cerradas utilizando el método de Katetov y algunas de sus propiedades elementales.

En el **Capítulo 3** exploramos la clase de los espacios extremadamente disconexos, daremos algunas de sus propiedades.

Construiremos el absoluto de Iliadis haciendo uso del teorema de representación de Stone. Este espacio resulta sumamente importante en la demostración nuestro resultado principal. Indagaremos en sus propiedades más importantes, y es para ello que hemos introducido el apartado de los espacios extremadamente disconexos.

En el **Capítulo 4** demostramos la desigualdad de Arhangel'skii de forma introductoria al capítulo final pues es este resultado el que se busca generalizar. Más aun, es conveniente ya que la prueba del resultado principal se inspira de forma directa en la demostración de la desigualdad de Arhangel'skii.

En el **Capítulo 5** tenemos la culminación de los esfuerzos realizados en los capítulos anteriores, donde se incluye el resultado principal del trabajo. Donde se procederá del modo anteriormente descrito.

El **Apéndice A** incluye la teoría correspondiente a retículas, álgebras de Boole y el teorema de representación de Stone. Ya que estos son frecuentemente utilizados durante todo el trabajo, en particular para la construcción del absoluto de Iliadis.

Capítulo 1

Extensiones de espacios.

Una de las razones para estudiar las extensiones de un espacio, radica en la posibilidad de "mudar" algunos problemas concernientes a un espacio X a una extensión del mismo, digamos Y, donde dicho problema puede ser resuelto de una manera más eficiente. Así, la meta de la teoría de extensiones es generar espacios adecuados que funcionen como extensión de un cierto espacio X de interés.

Definición 1.0.1. *En adelante, un espacio Y será llamado una extensión de un espacio X, si X es homeomorfo a un subespacio denso de Y.*

Después de definir y explorar la nociones elementales de la teoría de extensiones, procederemos a indagar con especial interés en las extensiones compactas de un espacio Tychonoff y finalmente las llamadas extensiones H-cerradas de un espacio Hausdorff arbitrario.

1.1. Preliminares

A continuación mencionaremos una serie de definiciones y resultados referentes a las extensiones en general de un espacio. Si se desea consultar las pruebas de dichos resultados, se pueden encontrar en el libro *Extensions and Absolutes of Hausdoff Spaces, Jack R. Porter y R. Grant Woods.*

Primero que nada, debemos señalar que en todos los resultados los espacios topológicos son Hausdorff y con al menos dos puntos, a menos que se indique lo contrario.

Habiendo definido qué es una extensión de un espacio, comenzaremos definiendo cuándo dos extensiones de un mismo espacio X son equivalentes y, que salvo equivalencia, la clase de las extensiones de un espacio es un conjunto.

Definición 1.1.1. *Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y Y_1, Y_2 extensiones de X_1 y X_2 respectivamente.*

Denotaremos como $\mathbb{F}(X,Y)$ al conjunto de funciones que tienen como dominio el espacio X y cuyo contra dominio es Y.

Sea $f \in \mathbb{F}(X_1, X_2)$, una función $F \in \mathbb{F}(Y_1, Y_2)$ es una extensión de f si para toda $x \in X_1$, $F(x) = f(x)$.

Definición 1.1.2. *Si Y es una extensión de X, el espacio $Y \setminus X$ es llamado el residuo de X en Y.*

Proposición 1.1.1. *Sean Y_1 y Y_2 extensiones de los espacios X_1 y X_2 respectivamente, sea $f \in C(X_1, X_2)$, entonces f tiene a lo más una extensión $F \in C(Y_1, Y_2)$.*

Donde $C(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es continua}\}$.

El siguiente resultado permite acotar el cardinal de una extensión de un espacio arbitrario.

Proposición 1.1.2. *Si Y es una extensión de X, entonces $|Y| \leq 2^{\alpha}$, donde $\alpha = 2^{|X|}$.*

Ya que dado un espacio X, podemos tener distintas extensiones de él, vamos a darle una estructura a la clase de las extensiones de un espacio.

Para ello necesitamos una manera de compararlas entre sí.

Definición 1.1.3. *Decimos que dos extensiones Y_1 y Y_2, de un mismo espacio X, son equivalentes, y escribimos $Y_1 \equiv_X Y_2$ si existe un homeomorfismo $h : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tal que para toda $x \in X$, $h(x) = x$.*

Definición 1.1.4. *Sea $\hat{\mathbb{E}}(X)$ la clase de todas las extensiones de un espacio X.*

Definición 1.1.5. *Definiremos la siguiente relación $\sim$ en $\mathbb{E}(\hat{X})$.*

Sean $Y, Z \in \mathbb{E}(\hat{X})$, diremos que $X \sim Y$ si y sólo si $Y \equiv_X Z$.

Esta relación es claramente una relación de equivalencia, denotaremos como $\mathbb{E}(X)$ a la clase de representantes inducida bajo dicha relación.

Como un corolario a la **Proposición 1.1.2**, tenemos:

Corolario 1.1.1. $\mathbb{E}(X)$ *es un conjunto.*

Sabiendo ahora que $\mathbb{E}(X)$ es un conjunto podemos darle una estructura de orden de la siguiente manera.

Definición 1.1.6. *Sea X un espacio y $Y, Z \in \mathbb{E}(X)$. Decimos que Y es mayor que Z y lo denotaremos por $Y \geq Z$, si existe una función $f : Y \longrightarrow Z$ continua tal que para toda $x \in X$, $f(x) = x$.*

A partir de esta relación de orden en $\mathbb{E}(X)$ podemos deducir el siguiente resultado.

Se recomienda revisar la primera parte del **Apéndice A** para familiarizarse con el concepto de retícula.

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio, entonces $(\mathbb{E}(X), \leq)$ forma una semiretícula completa superiormente, es decir, $(\mathbb{E}(X), \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y para cualquier $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{E}(X)$, existe $Sup(A)$ en $\mathbb{E}(X)$.*

Definición 1.1.7. *Sea X un espacio y $Q \subseteq \mathbb{E}(X)$ no vacío.*

Una extensión $Y \in \mathbb{E}(X)$ es un máximo proyectivo en Q si $Y \in Q$ y $Y \geq Z$ para toda $Z \in Q$.

Observación: $Y \geq Sup(Q)$ y como $Y \in Q$, $Sup(Q) \geq Y$, de donde Q tiene un único máximo proyectivo, a saber $Sup(Q)$.

El siguiente resultado nos permite caracterizar el máximo proyectivo de $\mathbb{E}(X)$.

Proposición 1.1.4. *Para cada espacio X, X es el máximo proyectivo de $\mathbb{E}(X)$.*

Definición 1.1.8. *Sea $\mathcal{P}$ una clase de espacios topológicos, cerrada bajo homeomorfismos, es decir, si $X \in \mathcal{P}$ y Y es homeomorfo a X, entonces $Y \in \mathcal{P}$, dichas clases se llaman repletas.*

Usualmente nos referiremos a dichas clases como propiedaddes topológicas. Y diremos que X tiene $\mathcal{P}$ cuando $X \in \mathcal{P}$.

Por ejemplo, si decimos "sea $\mathcal{P}$ disconexidad", entonces $\mathcal{P}$ representa la clase de todos los espacios Hausdorff disconexos.

Daremos por hecho además que dada $\mathcal{P}$, una propiedad topológica, existe al menos un espacio con más de un punto que tiene dicha propiedad.

Definición 1.1.9. *Sean X un espacio y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica, $\mathcal{P}(X) = \{Y \in \mathbb{E}(X) : Y \in \mathcal{P}\}$, es llamado el conjunto de las $\mathcal{P}$-extensiones de X.*

Las siguientes propiedades topológicas son de especial interés cuando entramos en materia de compactaciones.

Definición 1.1.10. *Dada una propiedad topológica $\mathcal{P}$.*

Decimos que $\mathcal{P}$ se hereda a cerrados si cuando X tiene $\mathcal{P}$, entonces para todo $A \subseteq X$ cerrado, A tiene $\mathcal{P}$.

Y decimos que $\mathcal{P}$ es productiva cuando, dada una colección $\{X_i\}_{i \in J}$ de espacios tales que X_i tiene $\mathcal{P}$ para toda $i \in J$, entonces $\prod_{i \in J} X_i$ tiene $\mathcal{P}$.

Proposición 1.1.5. *Sea X un espacio y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica productiva y que se hereda a cerrados.*

Si $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{P}(X)$ es una semiretícula completa superiormente en $\mathbb{E}(X)$; en particular $\mathcal{P}(X)$ tiene un máximo proyectivo.

Ahora, profundizaremos en el problema de cuando una función continua definida en un espacio X tiene una extensión continua a un elemento dado en $\mathbb{E}(X)$.

Proposición 1.1.6. *Sean X un espacio y $Y \in \mathbb{E}(X)$. Para Z un espacio regular, y $f \in C(X, Z)$.*

Los siguientes son equivalentes:

1. *Existe una función $F \in C(Y, Z)$ tal que $F(x) = f(x)$ para toda $x \in X$.*
2. *Para cada $y \in Y$, el filtro $F_y = \{A \subseteq Z : f[U] \subseteq A$, para algún $U \in O^y\}$ converge, donde $O^y = \{W \cap X : W$ es abierto en Y y $y \in W\}$.*

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente teorema de Taimanov.

Teorema 1.1.1. *Sean X un espacio, $Y \in \mathbb{E}(X)$, Z un espacio compacto y $f \in C(X, Z)$, entonces existe una función continua $F : Y \longrightarrow Z$ tal que $F(x) = f(x)$, para toda $x \in X$ si y sólo si para cada par de subconjuntos cerrados y ajenos B y C en Z, se tiene que*

$$cl_Y f^{\leftarrow}[B] \cap cl_Y f^{\leftarrow}[C] = \emptyset$$

El siguiente resultado será de suma importancia hacia el final del trabajo.

Teorema 1.1.2. *Sean Y un espacio localmente compacto y X una extensión de Y. Entonces Y es abierto en X.*

Capítulo 2

Algunas extensiones importantes

A lo largo de este capítulo presentamos las extensiones compactas de un espacio Tychonoff y las extensiones H-cerradas de un espacio Hausdorff.

Ya que suponemos que el lector posee el conocimiento referente a las compactaciones. Únicamente enunciaremos las definiciones y resultados referentes a su existencia para cualquier espacio Tychonoff, construyendo la compactación de Stone-Čech de este. Además, enlistaremos las propiedades que posee.

En la segunda parte de este capítulo daremos a conocer los espacios H-cerrados. Daremos un teorema de caracterización, mostraremos que la clase de los espacios compactos está contenida en la clase de los H-cerrados. Daremos un ejemplo de un espacio H-cerrado no compacto.

Definiremos las funciones $\theta-$continuas. Una herramienta muy útil que generaliza el concepto de una función continua y resulta muy conveniente al estudiar los espacios H-cerrados.

Demostraremos que cualquier espacio Hausdorff puede ser encajado de forma densa en un espacio H-cerrado, el cual será construido con el método de Katetov y exploramos algunas propiedades de este espacio.

2.1. Extensiones compactas.

Definición 2.1.1. *Una extensión de un espacio X con la propiedad de ser compacta es llamada una compactación de X.*

La teoría de compactaciones de espacios es un área muy activa de investigación en Topología General, aquí mencionaremos los resultados necesarios para probar que el conjunto de compactaciones de un espacio Tychonoff X no vacío, tiene un máximo proyectivo; cómo construirlo y algunas de sus propiedades que nos serán de vital importancia para el capítulo final.

Definición 2.1.2. *Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los espacios compactos, denotamos por $\mathcal{K}(X)$ la colección de extensiones compactas de X.*

Observación: $\mathcal{K}$ es una clase repleta y además, la compacidad es una propiedad productiva y se hereda a cerrados.

Así, tenemos como un corolario a la **Proposición 1.1.5**.

Corolario 2.1.1. *Para un espacio X, $\mathcal{K}(X)$ es una semiretícula completa superiormente y tiene un máximo proyectivo si $\mathcal{K}(X) \neq \emptyset$.*

Definición 2.1.3. *Si para un espacio X, $\mathcal{K}(X) \neq \emptyset$. Entonces, el máximo proyectivo de $\mathcal{K}(X)$ se denota por βX, y es llamada la compactación de Stone-Čech de X.*

Sabemos por el teorema de encaje de Tychonoff que si X es Tychonoff, entonces X es homeomorfo a un subespacio denso de un compacto. Por lo tanto para un espacio Tychonoff, $\mathcal{K}(X) \neq \emptyset$.

Veremos ahora que si X y Y son ambos Tychonoff, y $f \in C(X, Y)$, entonces existe alguna $F \in C(\beta X, \beta Y)$ tal que $F(x) = f(x)$ para toda $x \in X$.

Proposición 2.1.1. *Si X y Y son espacios Tychonoff, y $f \in C(X, Y)$, entonces existe una única extensión continua $F \in C(\beta X, \beta Y)$, tal que $\forall x \in X$, $F(x) = f(x)$.*

Definición 2.1.4. *Si X y Y son espacios Tychonoff y $f \in C(X, Y)$. A la única función $F : \beta X \longrightarrow \beta Y$ tal que $\forall x \in X$, $F(x) = f(x)$, la cual denotaremos por βf, es llamada extensión de Stone de f.*

Como corolario a la **Proposición 2.1.1**, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.2. *Sea X un espacio Tychonoff. Si K es un espacio compacto y $f \in C(X, K)$, entonces f tiene una única extensión continua $\beta f : \beta X \longrightarrow K$.*

2.2. Compactación de Stone-Čech

Para esta construcción de la compactación de Stone-Čech usaremos las bases de Wallman.

Definición 2.2.1. *Sea X un espacio topológico, L un anillo de subconjuntos de X es base de Wallman si satisface las siguientes condiciones:*

- $\emptyset, X \in L$.
- *L es una base de cerrados para X.*
- *Si $A \in L$ y $x \in X \setminus A$, entonces existe $B \in L$ tal que $x \in B$ y $A \cap B = \emptyset$.*
- *Si $A, B \in L$ y $A \subseteq (X \setminus B)$, entonces existen $C, D \in L$ tales que*

$$A \subseteq (X \setminus C) \subseteq D \subseteq (X \setminus B).$$

Definición 2.2.2. *Sean L una base de Wallman y $A \in L$, definimos:*

$W_L X = \{F \colon F \text{ es un ultrafiltro en } L\}$.

$S(A) = \{F \in W_L X \colon A \in F\}$.

Si L es una base de *Wallman* en X. Entonces $\{S(A) \colon A \in L\}$ es una base de cerrados para una topología en $W_L X$. Además $W_L X$ con esta topología es un espacio compacto.

Observación: Todo espacio Tychonoff tiene una base de *Wallman*, a saber

$$\mathcal{Z}(X) = \{Z \subseteq X \colon \text{ existe } f : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } Z = f^{\leftarrow}[\{0\}]\}$$

conocida como la colección de nulos del espacio.

Lema 2.2.1. *Sea L una base de Wallman en un espacio X y $x \in X$. Si definimos*

$U_x = \{A \in L \colon x \in A\}$, entonces $U_x \in W_L X$.

El siguiente teorema de Frink y Wallman nos permite conocer las propiedades del espacio $W_L X$

Teorema 2.2.1. *Sea L una base de Wallman en X.*

Si definimos la función $e\colon X \to W_L X$ dado por $e(x) = U_x$, entonces:

1. *$e\colon X \to W_L X$ es un encaje denso.*
2. *Si $A, B \in L$, $cl_{W_L X}(A \cap B) = cl_{W_L X}(A) \cap cl_{W_L X}(B)$.*

Teorema 2.2.2. *Sea X un espacio Tychonoff y $L = \mathcal{Z}(X)$ en un espacio Tychonoff X, entonces $\beta X \equiv_X W_L X$.*

Este resultado describe las propiedades que nos serán de particular interés en este trabajo. Las demostraciones de estas propiedades pueden ser consultadas en el libro *Asolutes and Extensions of Hausdorff Spaces.*

Teorema 2.2.3. *Sea X un espacio Tychonoff:*

1. *βX es el máximo proyectivo de $\mathcal{K}(X)$.*
2. *X está C^*-encajado en βX y además es la única compactación con esta propiedad.*
3. *Toda función continua de X a un compacto K tiene una extensión continua a βX.*
4. *Si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$, entonces $cl_{\beta X}(Z_1 \cap Z_2) = cl_{\beta X}(Z_1) \cap cl_{\beta X}(Z_2)$.*
5. *Nulos ajenos en X tienen cerraduras ajenas en βX.*
6. *Conjuntos completamente separados en X, tienen cerraduras ajenas en βX.*
7. *Cada punto en βX es el límite de un único Z-ultrafiltro en X.*
8. *$cl_{\beta X}(U) = U \cup \{p \in \beta X \setminus X : U \in p\}$*

2.3. H-cerrados.

En la sección previa, presentamos algunos resultados básicos de la teoría de extensiones compactas de un espacio, pero hemos hecho la suposición de que dichos espacios son Tychonoff, para probar la existencia de dicha compactación.

Introducimos ahora el concepto de espacio H-cerrado. Los espacios H-cerrados poseen, de hecho, cierta similitud con los espacios compactos, sin embargo, ahora podremos encajar cualquier espacio Hausdorff de forma densa en un espacio H-cerrado.

Definición 2.3.1. *Un espacio X es H-cerrado si para todo espacio Y tal que X es subespacio de Y, X es cerrado en Y.*

El siguiente resultado nos permite caracterizar a los espacios H-cerrados.

Proposición 2.3.1. *Para un espacio topológico X, los siguientes son equivalentes:*

1. *X es H-cerrado.*
2. *Para toda cubierta abierta de X, existe una sub colección finita cuya unión es densa en X.*
3. *Para todo $\mathcal{F}$ filtro abierto en X se satisface que $\mathcal{F} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} cl_X(F)$ conocida como la adherencia de $\mathcal{F}$ no es vacío.*
4. *Todo ultrafiltro abierto en X converge.*

Para ello probaremos la siguiente cadena de implicaciones: $1 \Rightarrow 3,\ 3 \Rightarrow 4,\ 4 \Rightarrow 3.$

$2 \Rightarrow 3,\ 3 \Rightarrow 1.$

Demostración:

$1 \Rightarrow 3$

Supondremos que existe un filtro abierto que tiene adherencia vacía. Con el cuál definimos un espacio Hausdorff que contiene a X como un subespacio abierto, en contradicción con la hipótesis de ser H-cerrado.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en X tal que $a(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Consideremos $Y = X \cup \{\mathcal{F}\}$, con la topología definida de la siguiente manera, τ_Y: $U \subseteq Y$ es abierto si $U \subseteq X$ es abierto en X, o bien si $\mathcal{F} \in U$ entonces $U \cap X \in \mathcal{F}$.

Notemos que las vecindades de $\mathcal{F}$ son de la forma $V \cup \{\mathcal{F}\}$, donde $V \in \mathcal{F}$.

Probemos primero que esto realmente define una topología en Y.

- $\emptyset \in \tau_Y$ ya que $\emptyset \subseteq X$.

  $Y \in \tau_Y$ pues $Y \cap X = X$ y $X \in \mathcal{F}$ puesto que $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en X.

- Sean $U_1, U_2 \in \tau_Y$

  Afirmación: $U_1 \cap U_2 \in \tau_Y$

  Supongamos que son de la forma $U_1 = V_1 \cup \{\mathcal{F}\}$ y $U_2 = V_2 \cup \{\mathcal{F}\}$ donde $V_1, V_2 \in \mathcal{F}$. $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{F}$, por ser un filtro, y como $U_1 \cap U_2 = (V_1 \cap V_2) \cup \{\mathcal{F}\}$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{F}$.

  Si $\mathcal{F} \in U_1$ y U_2 es un abierto de X, entonces $U_1 \cap U_2 = (V_1 \cup \{\mathcal{F}\}) \cap U_2$, para algún $V_1 \in \mathcal{F}$, de donde $U_1 \cap U_2 = V_1 \cap U_2$, que es abierto en X.

  El caso en que U_1, U_2 son abiertos de X es inmediato.

  Por lo tanto $U_1 \cap U_2 \in \tau_Y$

- Sea una familia $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau_Y$.

  Afirmación: $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Y$.

  Tomemos el caso en que cada U_i es de la forma $U_i = V_i \cup \{\mathcal{F}\}$ donde $V_i \in \mathcal{F}$. Entonces
  $$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (V_i \cup \{\mathcal{F}\}) = (\bigcup_{i \in I} V_i) \cup \{\mathcal{F}\}$$
  Así, como cada $V_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{F}$ ya que $\mathcal{F}$ es un filtro.

  En el caso en que tomemos $j, k \in I$, tales que U_j es un abierto en X y $\mathcal{F} \notin U_j$ y $U_k = V_k \cup \{\mathcal{F}\}$, $U_j \cup U_k = (U_j \cup V_k) \cup \{\mathcal{F}\}$ como $U_j \cup V_k$ es un abierto que contiene a V_k, $U_j \cup V_k \in \mathcal{F}$. Así, podemos afirmar que cuando alguno de los uniendos es una vecindad de $\mathcal{F}$ y tomamos un abierto de X, este conjunto es de nuevo una vecindad de $\mathcal{F}$. Por lo tanto $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Y$

  Si tomamos sólo abiertos de X, es inmediato.

  En cualquier caso tenemos que $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_Y$.

Esto muestra que τ_Y es una topología para Y.

Mostraremos ahora que Y es un espacio Hausdorff. como X es un subespacio abierto de Y y X es *Hausdorff*, para cualesquiera par de puntos distintos en X, existen abiertos ajenos que los separen. Si tomamos $p \in X$ y $q = \{\mathcal{F}\}$, como $a(\mathcal{F}) = \emptyset$, en particular no tiene a p, por lo tanto existen $V \in \mathcal{F}$ y U un abierto de X que tiene a p, tales que $V \cap U = \emptyset$. De esta manera U y $V \cup \{\mathcal{F}\}$ son vecindades abiertas y ajenas de p y q, respectivamente.

Por lo tanto Y es un espacio Hausdorff.

Luego, como $\mathcal{F}$ no es un punto aislado de Y, X no es cerrado en Y, por lo tanto X no es *H-cerrado*. Contradiciendo la hipótesis.

Por lo tanto $a(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

$3 \Rightarrow 4$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto en X, como $a_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ y

$$a_X(\mathcal{U}) = c_X(\mathcal{U}) = \{x \in X : \mathcal{U} \text{ converge a } x\},$$

$\mathcal{U}$ converge en X.

$4 \Rightarrow 3$

Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en X, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Así como $\mathcal{U}$ converge en X por hipótesis y $a_X(\mathcal{U}) = c_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, y como $a_X(\mathcal{U}) \subseteq a_X(\mathcal{F})$, entonces $a_X(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

$3 \Rightarrow 1$

Si suponemos que X no es *H-cerrado*, entonces existe un espacio Hausdorff Y, tal que $cl_Y(X) \neq X$. Sea $p \in cl_Y(X) \setminus X$. La familia $\mathcal{F}_p = \{W \cap X : p \in W \text{ y } W \in \tau_Y\}$ induce un filtro abierto en X. Por hipótesis $a_X(\mathcal{F}_p) \neq \emptyset$, lo cual no puede suceder pues p es el único punto que puede satisfacerlo, sin embargo $p \notin X$.

$2 \Rightarrow 3$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto y libre en X. Entonces $\{X \setminus cl(U) : U \in \mathcal{U}\}$ forma una cubierta abierta de X. Consideremos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ finito, entonces

$$cl\Big(\bigcup_{U \in \mathcal{A}} (X \setminus cl(U))\Big) = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} cl(X \setminus cl(U)) = \bigcup_{U \in \mathcal{A}} X \setminus int(cl(U))$$

$$= X \setminus \bigcap_{U\in\mathcal{A}} int(cl(U)) \subseteq X \setminus \bigcap_{U\in\mathcal{A}} U \neq X.$$

Esta última desigualdad pues $\bigcap_{U\in\mathcal{A}} U \neq \emptyset$ por ser un subconjunto finito de un ultafiltro. Lo cual nos permite afirmar que ningún subconjunto finito puede tener una unión densa en X.

$3 \Rightarrow 2$

Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X tal que cualquier subconjunto finito $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ satisface que $cl_X(\bigcup\mathcal{A}) \neq X$.

Definimos

$$\mathcal{B} = \{U : U \text{ es abierto y existe } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \text{ finito tal que } \; X \setminus cl_X(\bigcup\mathcal{A}) \subseteq U\},$$

que base de un filtro abierto en X, pues no es vacío ya que $X \setminus cl(\bigcup\mathcal{A}) \in \mathcal{F}'$ y es cerrado bajo intersecciones finitas.

Sea $\mathcal{F}$ el filtro abierto en X generado por la base $\mathcal{B}$.

Así, como

$$a(\mathcal{F}) = \bigcap_{U\in\mathcal{F}} cl(U) \subseteq \bigcap_{\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C},|\mathcal{A}|<\omega} cl(X \setminus cl(\bigcup\mathcal{A})) \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{C}} cl(X \setminus cl(V)) \subseteq X \setminus \bigcup\mathcal{C} = \emptyset$$

$\mathcal{F}$ es un filtro libre en X, lo que contradice la hipótesis, por lo tanto existe un subconjunto finito de $\mathcal{C}$ cuya unión densa en X.

$\square$

Ya que hemos caracterizado los espacios Hausdorff H-cerrados, veamos cómo son los H-cerrados regulares.

Corolario 2.3.1. *Un espacio X es H-cerrado y regular, si y sólo si X es compacto.*

Demostración

$\Leftarrow$] Un espacio Hausdorff compacto ya es H-cerrado y por ser normal, podemos afirmar que dicho espacio es también regular.

$\Rightarrow$] Ahora supongamos que X es H-cerrado y regular, y sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X. Así, para cada $x \in X$ existe $U_x \in \mathcal{C}$ tal que $x \in U_x$, ahora bien como X es regular, existe un abierto V_x tal que $V_x \subseteq cl(V_x) \subseteq U_x$. Como $\{V_x : x \in X\}$ forma una cubierta abierta, entonces existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $cl(\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{x_i}) = X$. Pero

$$X = cl(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} cl(V_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$$

así $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ conforman una subcubierta finita de X. Y por lo tanto X es compacto.

$\square$

Como un ejemplo de un espacio H-cerrado no compacto tenemos el siguiente:

Ejemplo 2.3.1. *Consideremos el siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}^2$*,*

$Y = \{(1/n, 1/m) : n \in \mathbb{N},\ |m| \in \mathbb{N}\} \cup \{(1/n, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ *con la topología de subespacio.*

Ahora definamos $X = Y \cup \{p^+, p^-\}$ *con la siguiente topología,* $U \subseteq X$ *es abierto si* U *es abierto en* Y *y, si* $p^+ \in U$ *entonces existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\{(1/n, 1/m) : n > r,\ m \in \mathbb{N}\} \subseteq U$$

análogamente, si $p^- \in U$*, entonces existe* $r \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\{(1/n, 1/m) : n > r,\ -m \in \mathbb{N}\} \subseteq U$$

esta topología resulta ser Hausdorff.

Sea $\mathcal{C}$ *una cubierta abierta de* X*, entonces existen* U^+ *y* U^- *tales que* $p^+ \in U^+$ *y* $p^- \in U^-$*.*

Por lo tanto existe $r \in \mathbb{N}$ *tal que*

$\{(1/n, 1/m) : n \geq r,\ m \in \mathbb{N}\} \subseteq U^+$ *y* $\{(1/n, 1/m) : n > r,\ -m \in \mathbb{N}\} \subseteq U^-$*.*

Sea

$$D = \{(1/n, 1/m) : n \leq r,\ |m| \in \mathbb{N}\} \cup \{(1/n, 0) : n \leq r\}$$

Así

$$X \setminus cl_X(U^+ \cup U^-) \subseteq D$$

Como D es compacto, existe una subfamilia finita $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$, tal que $D \subseteq \cup\mathcal{A}$ y de esta forma podemos afirmar que

$$\cup\mathcal{A} \cup cl_X(U^+ \cup U^-) = X.$$

Por lo tanto X es H-cerrado, pero no es compacto, pues $\{(1/n, 0) \colon n \in \mathbb{N}\}$ es un subespacio cerrado y discreto infinito de X.

Para saber a qué tipos de subespacio de hereda la propiedad de ser H-cerrado tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2. *Sean X un espacio H-cerrado y $U \subseteq X$ abierto, entonces $cl(U)$ es un espacio H-cerrado.*

Demostración

Sea $A = cl(U)$ y tomemos $\mathcal{B}$ una cubierta abierta de A, formada por abiertos relativos a A.

Entonces, para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $U_B \in \tau_X$ tal que $U_B \cap A = B$. De esta forma

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A\} \cup \{U_B \colon B \in \mathcal{B}\}$$

es una cubierta abierta de X.

Como X es un espacio H-cerrado, existe una subfamilia finita $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que $cl(\bigcup \mathcal{C}') = X$. Así pues $\mathcal{B}' = \{U \cap A \colon U \in \mathcal{C}'\} \subseteq \mathcal{B}$, puesto que $(X \setminus A) \cap A = \emptyset$.

Además

$$cl_A(\bigcup \mathcal{B}') = cl_X(\bigcup \mathcal{C}') \cap A = X \cap A = A.$$

Por lo tanto $\bigcup \mathcal{B}'$ es denso en A.

Y así A es un espacio H-cerrado.

□

Esta propiedad no se hereda a cualquier subespacio cerrado de un H-cerrado, en el espacio descrito en el **Ejemplo 2.3.1** tomemos el conjunto $A = \{(1/n, 0) \colon n \in \mathbb{N}\}$, es un subespacio cerrado discreto de X y por lo tanto es regular, pero al no ser un subespacio compacto, este no puede ser H-cerrado.

Continuamos con el estudio de una clase de funciones llamadas θ-continuas, que de cierta forma generalizan el concepto de continuidad de una función. Estas resultan muy útiles para el estudio de espacios que no son regulares.

Definición 2.3.2. *Sean X, Y espacios topológicos, $f \in \mathbb{F}(X, Y)$ y $x_0 \in X$.*

1. *f es θ-continua en x_0 si para cada V abierto en Y tal que $f(x_0) \in V$, existe U una vecindad abierta en X tal que $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$.*

   Diremos que f es una función θ-continua de X a Y si lo es para todo $x \in X$.

2. *$\Theta C(X, Y)$ denota la colección de todas las funciones θ-continuas de X a Y.*

3. *f es un θ-homeomorfismo si f es θ-continua, biyectiva y f^{-1} es también θ-continua.*

Ahora exploramos las propiedades de las funciones θ-continuas.

Proposición 2.3.3. *Sean X, Y, Z espacios topológicos, $f \in F(X, Y)$ y $g \in F(Y, Z)$*

1. *Si f es θ-continua en x_0 y g es θ-continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es θ-continua es x_0.*

2. *$C(X, Y) \subseteq \Theta C(X, Y)$.*

3. *Si Y es regular, entonces $C(X, Y) = \Theta C(X, Y)$.*

4. *Si $A \subseteq X$ y $f \in \Theta C(X, Y)$, entonces $f_{\restriction A} \in \Theta C(A, Y)$.*

5. *Si $D \subseteq Y$ es un subconjunto denso y $f[X] \subseteq D$, entonces $f \in \Theta C(X, D)$.*

6. *Si X es H-cerrado y f es θ-continua y suprayectiva, entonces Y es H-cerrado.*

Demostración

1] Sea $W \in \tau_Z$ tal que $g \circ f(x_0) \in W$.

Como g es *θ-continua* en $f(x_0)$, entonces existe $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$ y de tal forma que $g[cl_Y(V)] \subseteq cl_Z(W)$. Además, como f es *θ-continua* en x_0, y dado que $f(x_0) \in V$, existe $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$ y $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$.

Así $g \circ f[cl_X(U)] \subseteq g[cl_Y(V)] \subseteq cl_Z(W)$, por lo tanto $g \circ f$ es *θ-continua* en x_0.

2] Sea $f \in C(X, Y)$ y $x_0 \in X$.

Tomemos $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$, entonces $f^{\leftarrow}[V] \in \tau_X$ y $x_0 \in f^{\leftarrow}[V]$.

Sea $y \in f[cl_X(f^{\leftarrow}[V])]$, entonces existe $x \in cl_X(f^{\leftarrow}[V])$ tal que $f(x) = y$. Sea $W \in \tau_Y$ tal que $y \in W$, entonces $x \in f^{\leftarrow}[W]$. Además $f^{\leftarrow}[W]$ es un abierto de X y en consecuencia $f^{\leftarrow}[W] \cap f^{\leftarrow}[V] \neq \emptyset$. Sea w un punto de dicha intersección, entonces $f(w) \in W \cap V$, lo que demuestra que $y \in cl_Y(V)$. Por lo tanto f es *θ-continua*.

3] Supongamos que Y es un espacio regular. Sea $f \in \Theta C(X, Y)$.

Sean $x_0 \in X$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$. Como Y es regular, existe $W \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in W \subseteq cl_Y(W) \subseteq V$. Ya que f es *θ-continua* en x_0, existe U tal que $x_0 \in U$ y $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(W)$, de donde $f[U] \subseteq V$. Por lo tanto, podemos asegurar que f es continua en x_0.

4] Sean $A \subseteq X$ y $f \in \Theta C(X, Y)$.

Tomemos $x_0 \in A$ y $V \in \tau_Y$ tal que $f(x_0) \in V$, entonces existe $U \in \tau_X$ tal que $x_0 \in U$ y $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V)$. Así $U \cap A$ es abierto en A, $x_0 \in U \cap A$ y $cl_A(U \cap A) \subseteq cl_X(U)$. Por lo tanto $f[cl_A(U \cap A)] \subseteq cl_Y(V)$. Y por tanto $f \in \Theta C(A, Y)$.

5] Sea $f \in \Theta C(X, Y)$, y $D \subseteq Y$ un denso tal que $f[X] \subseteq D$.

Sea $x_0 \in X$ y $V \in \tau_D$ tal que $f(x_0) \in V$, entonces existe $V' \in \tau_Y$ tal que $V = V' \cap D$. Así $f(x_0) \in V'$ y como f es *θ-continua* en x_0, existe U abierto en X tal que $x_0 \in U$ y $f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V')$, pero $f[X] \subseteq D$. Por la densidad de D, tenemos:

$$f[cl_X(U)] \subseteq cl_Y(V') \cap D = cl_D(V' \cap D) = cl_D(V)$$

Por lo tanto $f \in \Theta C(X, D)$.

6] Supongamos X es *H-cerrado* y $f \in \Theta C(X, Y)$ suprayectiva.

Consideremos C una cubierta abierta de Y, entonces para cada $y \in Y$ existe $V_y \in C$ tal que $y \in V_y$.

Como f es *θ-continua* y suprayectiva, para cada $y \in Y$ existe $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$ y U_y un abierto de X tal que $x_y \in U_y$ y $f[cl_X(u_y)] \subseteq cl_Y(V_y)$.

Como $\{U_y \colon y \in Y\}$ constituye una cubierta abierta de X, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tales que

$$X = cl_X(\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_{y_i})$$

De donde

$$Y = f[X] = f[\bigcup_{i=1}^{n} cl_X(U_{y_i})] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f[cl_X(U_{y_i})] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} cl_Y(V_{y_i}) = cl_Y(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i})$$

Por lo tanto $\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ es denso en Y.

Y así Y es H-cerrado.

$\square$

Sea X un espacio, denotaremos $\mathcal{H}(X) = \{Y \in \mathbb{E}(X) \colon Y \textit{es H-cerrado}\}$ al conjunto de las extensiones H-cerradas de X con la relación de orden antes definida.

Para probar que no es vacío, para un espacio X arbitrario, construiremos una extensión H-cerrada κX y para ello utilizamos el método de Katetov.

Sea X un espacio y tomamos

$$\kappa X = X \cup \{\mathcal{U} \colon \mathcal{U} \text{ es ultrafiltro abierto en } X \text{ y } a(\mathcal{U}) = \emptyset\}$$

Ahora vamos a verificar que

$$\mathcal{B} = \tau_X \cup \{U \cup \{\mathcal{U}\} \colon U \in \mathcal{U},\, \mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X)\}$$

forma una base para una topología *Hausdorff* en κX.

- $\mathcal{B}$ es cubierta.

  Para cada $x \in X$ existe $U_x \in \tau_X$ tal que $x \in U_X$. Para $\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X)$, dado que cada $\mathcal{U}$ es *no vacío*, tomamos $U \in \mathcal{U}$, y así $U \cup \{\mathcal{U}\} \in \mathcal{B}$.

- Si $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$ tales que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, dado $y \in W_1 \cap W_2$, existe $W_3 \in \mathcal{B}$ tal que $y \in W_3$ y $W_3 \subseteq W_1 \cap W_2$.

  Afirmación: $W_3 = W_1 \cap W_2$

Sean $W_1, W_2 \in \mathcal{B}$. Supongamos que $W_1 = U_1 \cup \{\mathcal{U}_1\}$ y $W_2 = U_2 \cup \{\mathcal{U}_2\}$, donde $U_1 \in \mathcal{U}_1$ y $U_2 \in \mathcal{U}_2$.

Si $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, entonces $W_1 \cap W_2 = U_1 \cap U_2$, y como U_1 y U_2 son abiertos de X, $U_1 \cap U_2$ es abierto de X. Por lo tanto $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{B}$.

Si $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, entonces $W_1 \cap W_2 = (U_1 \cap U_2) \cup \{\mathcal{U}_1\}$. Como $\mathcal{U}_1$ es un ultrafiltro abierto en X, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_1$. Por lo tanto $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{B}$.

Si $W_1 = U_1 \cup \{\mathcal{U}_1\}$ y W_2 es un abierto en X, entonces $W_1 \cap W_2 = W_1 \cap U_2$, que es abierto en X y por lo cual $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{B}$.

El caso en que W_1 y W_2 son abiertos de X es inmediato.

Así, $\mathcal{B}$ es base para una topología en κX, donde además X es abierto.

Veamos ahora que dicha topología es *Hausdorff*.

Sean $p, q \in \kappa X$.

Si $p, q \in X$, como X es *Hausdorff*, existen U, V abiertos de X tales que $p \in U$, $q \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como X es abierto en κX, U y V son los abiertos que pueden separar en κX.

Si $p \in X$ y $q \in (\kappa X \setminus X)$, es decir $q = \mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto en X. Entonces existen V un abierto en X y $U \in \mathcal{U}$ tales que $V \cap U = \emptyset$, pues $\mathcal{U}$ es un ultrafilto. Como $\mathcal{U}$ es libre, por lo cual, en particular $p \notin a(\mathcal{U})$. De esta forma V y $U \cup \{\mathcal{U}\}$, son abiertos que separan en κX.

Si $p = \mathcal{U}_1$ y $q = \mathcal{U}_2$ y $p \neq q$, entonces existen $U_1 \in \mathcal{U}_1$ y $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, de donde, $(U_1 \cup \{\mathcal{U}_1\})$ y $(U_2 \cup \{\mathcal{U}_2\})$ son abiertos ajenos que separan en κX.

Por lo tanto, κX tiene una topología Hausdorff.

□

Veamos que realmente define un extensión H-cerrada de X y cómo se compara con otras extensiones H-cerradas del mismo espacio.

Teorema 2.3.1. *Sea X un espacio topológico. Entonces:*

1. *κX es una extensión H-cerrada de X y X es abierto en κX.*

2. *Si $Y \in \mathcal{H}(X)$, entonces existe una única función $f\colon \kappa X \longrightarrow Y$ tal que $f_{\restriction X} = Id_X$, es decir, $\kappa X \geq Y$.*

3. *Si* $Z \in \mathcal{H}(X)$ *tal que* $Z \geq Y$ *para todo* $Y \in \mathcal{H}(X)$*, entonces* $\kappa X \equiv_X Z$*, es decir,* $\kappa X = sup(\mathcal{H}(X))$.

Demostración

1. Ya está probado el hecho de que X es abierto en κX y κX es *Hausdorff*.

   Ahora bien, cualquier abierto básico $V \neq \emptyset$ de κX satisface:

   a) V es abierto de X, o bien

   b) $V = U \cup \{\mathcal{U}\}$ tal que $\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X)$ y $U \in \mathcal{U}$. De donde $V \cap X = U$ y $U \neq \emptyset$ por ser un elemento del ultrafiltro.

   Por lo tanto $V \cap X \neq \emptyset$, de donde, podemos concluir que X es denso en κX. Y en consecuencia κX es una extensión de X.

   Para probar que κX es un *H-cerrado*, supondremos que existe $\mathcal{W}$ un ultrafiltro abierto libre en κX.

   Como X es denso y abierto en κX, $X \in \mathcal{W}$.

   Sea $\mathcal{U} = \{W \cap X : W \in \mathcal{W}\}$, entonces $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro abierto en X. Ya que de lo contrario, podemos encontrar un filtro $\mathcal{U}'$ tal que $\mathcal{U}$ esté contenido propiamente en $\mathcal{U}'$.

   De donde, existe $U' \in \mathcal{U}'$ tal que $U' \notin \mathcal{U}$, de esta manera podemos encontrar W' un abierto en κX de forma que $W' \cap X = U'$. Y además $W' \notin \mathcal{W}$, pues $W' \cap X \notin \mathcal{U}$. Entonces, si tomamos $\mathcal{W}' = \mathcal{W} \cup \{W'\}$ podemos encontrar un filtro que contiene propiamente a $\mathcal{W}$. Lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{W}$ es maximal.

   Además $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$.

   Sea $U \in \mathcal{U}$, entonces $(U \cup \{\mathcal{U}\}) \in \mathcal{W}$, por ser un supraconjunto abierto en κX de U. Por lo tanto, $\mathcal{W}$ converge a $\mathcal{U}$, contradiciendo el hecho de suponer $\mathcal{W}$ libre.

   Por lo tanto, κX es H-cerrado.

2. Sea $Y \in \mathcal{H}(X)$.

   Tomemos $\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X)$ y $F_{\mathcal{U}} = \{W : W \text{ es abierto en } Y \text{ y } (W \cap X) \in \mathcal{U}\}$.

   Afirmación. $F_{\mathcal{U}}$ define un ultrafiltro abierto en Y.

a) $\mathcal{U} \neq \emptyset$ por ser un ultrafiltro, entonces podemos tomar $U \in \mathcal{U}$ Así, como X es un subespacio de Y, existe W, abierto de Y tal que $W \cap X = U$. Lo cual implica que $W \in F_{\mathcal{U}}$ y por tanto, $F_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$.

b) $\emptyset \notin F_{\mathcal{U}}$. De lo contrario, $\emptyset \cap X \in \mathcal{U}$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{U}$. Lo cual es una contradicción.

c) Sean W_1 y $W_2 \in F_{\mathcal{U}}$, entonces $(W_1 \cap X)$ y $(W_2 \cap X) \in \mathcal{U}$, de donde $((W_1 \cap W_2) \cap X) \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $(W_1 \cap W_2) \in F_{\mathcal{U}}$.

d) Sean $W \in F_{\mathcal{U}}$ y V un abierto de Y tal que $W \subseteq V$, entonces $W \cap X \subseteq V \cap X$. Como $(W \cap X) \in \mathcal{U}$ y $V \cap X$ es abierto en X, $(V \cap X) \in \mathcal{U}$, y por lo tanto $V \in F_{\mathcal{U}}$.

Así queda probado que $F_{\mathcal{U}}$ es un filtro abierto en Y.

Consideremos T un abierto de Y tal que $Y \notin F_{\mathcal{U}}$, por lo cual $T \cap X \notin \mathcal{U}$.

Sea $S = (X \setminus cl_X(T \cap X))$, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, entonces $S \in \mathcal{U}$. Como

$$cl_Y(T \cap X) \cap S = cl_X(T \cap X) \cap S = \emptyset$$

se sigue que $S \subseteq Y \setminus cl_Y(T \cap X) = Y \setminus cl_Y(T)$.

Por lo tanto $(Y \setminus cl_Y(T)) \in F_{\mathcal{U}}$.

En conclusión $F_{\mathcal{U}}$ es un ultrafiltro abierto en Y.

Así, como Y es un H-cerrado existe un único punto $y_{\mathcal{U}} \in Y$ tal que $F_{\mathcal{U}}$ converge a $y_{\mathcal{U}}$.

Definamos una función $f \colon \kappa X \longrightarrow Y$, de tal forma que

$$f(x) = \begin{cases} y_{\mathcal{U}} & si \quad x = \mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \\ \\ x & si \qquad\quad x \in X \end{cases}$$

Por definición $f_{|X} = Id_X$. Así sólo resta probar que f es continua en $\kappa X \setminus X$.

Tomamos $\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X)$ y W un abierto en Y tal que $y_{\mathcal{U}} \in W$. Como $F_{\mathcal{U}}$ converge a $y_{\mathcal{U}}$, $W \in F_{\mathcal{U}}$, por lo cual $(W \cap X) \in \mathcal{U}$. Como $(W \cap X) \cup \{\mathcal{U}\}$ es una vecindad abierta de $\mathcal{U}$ en κX y $f(\mathcal{U}) \cup (W \cap X) = y_{\mathcal{U}} \cup (W \cap X) \subseteq W$, tenemos que f es continua en $\mathcal{U}$. Así, f es continua en $(\kappa X \setminus X)$ y en X. Por lo tanto es continua.

Por lo tanto $\kappa X \geq Y$.

3. Sea $Z \in \mathcal{H}(X)$ tal que $Z \geq Y$ para todo $Y \in \mathcal{H}(X)$

   Por el inciso 2 de esta proposición sabemos que $\kappa X \geq Y$ para todo $Y \in \mathcal{H}(X)$.

   En particular $Z \leq \kappa X$ y como por hipótesis $\kappa X \leq Z$ se sigue que $Z \equiv_X \kappa X$.

$\square$

Definición 2.3.3. *La extensión con las propiedades descritas anteriormente recibe el nombre de extensión de Katetov de X.*

Y si $Y \in \mathcal{H}(X)$, entonces la única función continua $f\colon \kappa X \longrightarrow Y$ tal que $f_{|X} = Id_X$, es llamada la función de Katetov de Y.

Exploramos las propiedades que posee la extensión de Katetov de un espacio X.

Proposición 2.3.4. *Sea X un espacio topológico, entonces:*

1. *$(\kappa X \setminus X)$ es un cerrado y discreto de κX.*

2. *Si $U \subseteq X$ es abierto, entonces $cl_{\kappa X}(U) = cl_x(U) \cup \{\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \colon U \in \mathcal{U}\}$.*

3. *Si U, V son abiertos de X tales que $U \cap V = \emptyset$, entonces $(cl_{\kappa X}(U) \cap cl_{\kappa X}(V)) \setminus X = \emptyset$.*

4. *Si U, V son abiertos de X tales que $cl_X(V) \cap cl_X(U) = \emptyset$, entonces $cl_{\kappa X}(U) \cap cl_{\kappa X}(V) = \emptyset$. En particular, si U es abierto y cerrado en X, entonces $cl_{\kappa X}(U)$ es abierto y cerrado en κX.*

5. *X está C^*-encajado en κX.*

Demostración

1. Como X es abierto en κX, entonces $\kappa X \setminus X$ es un cerrado en κX. Sea $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$, entonces por ser un ultrafiltro abierto existe $U \in \mathcal{U}$. Así $U \cup \{\mathcal{U}\}$ es una vecindad abierta de $\mathcal{U}$, tal que $(U \cup \{\mathcal{U}\}) \cap (\kappa X \setminus X) = \{\mathcal{U}\}$. Por lo tanto $\kappa X \setminus X$ es un subespacio discreto de κX.

2. Como $cl_{\kappa X}(U) \cap X = cl_X(U)$, basta probar que

$$cl_{\kappa X}(U) \setminus X = \{\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \colon U \in \mathcal{U}\}.$$

$\mathcal{U} \in cl_{\kappa X}(U) \setminus X$ si y sólo si $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}$ y esto sucede si y sólo si $U \in \mathcal{U}$ ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

3. Sean U, V abiertos, no vacíos de X tales que $U \cap V = \emptyset$.

   Entonces

$$(cl_{\kappa X}(V) \cap cl_{\kappa X}(U)) \setminus X = \{\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \colon U, V \in \mathcal{U}\}.$$

   Pero $U \cap V = \emptyset$, por lo tanto si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $\emptyset \in \mathcal{U}$, lo cual no puede suceder ya que $\mathcal{U}$ es un ultrafilto. Por lo tanto $(cl_{\kappa X}(V) \cap cl_{\kappa X}(U)) \setminus X = \emptyset$.

4. Sean U, V abiertos de X tales que $(cl_X(V) \cap cl_X(V)) = \emptyset$.

   Como

$$(cl_{\kappa X}(V) \cap cl_{\kappa X}(U)) = [(cl_{\kappa X}(U) \cap cl_{\kappa X}(V)) \setminus X] \cup [(cl_{\kappa X}(V) \cap cl_{\kappa X}(V)) \cap X]$$

$$= \{\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \colon U, V \in \mathcal{U}\} \cup [cl_X(U) \cap cl_X(V)]$$

   Y $cl_X(U) \cap cl_X(V) = \emptyset$, en particular $U \cap V = \emptyset$, lo cual implica que

$$\{\mathcal{U} \in (\kappa X \setminus X) \colon U, V \in \mathcal{U}\} = \emptyset$$

   Y así, $(cl_{\kappa X}(V) \cap cl_{\kappa X}(V)) = \emptyset$.

   Sea A un abierto y cerrado de X.

   Entonces A es un abierto de κX por ser abierto de X. Además $cl_X(A) \cap cl_X(X \setminus A) = \emptyset$ y por lo tanto $cl_{\kappa X}(A) \cap cl_{\kappa X}(X \setminus A) = \emptyset$. Por otro lado

$$\kappa X = cl_{\kappa X}(A \cup (X \setminus A)) = cl_{\kappa X}(A) \cup cl_{\kappa X}(X \setminus A).$$

   En consecuencia

$$cl_{\kappa X}(A) = \kappa X \setminus (cl_{\kappa X} \setminus A).$$

   Y por tanto, $cl_{\kappa X}(A)$ es abierto también.

5. Sea $f \colon X \longrightarrow K$, para un compacto K.

   Para verificar la existencia de una función $F \colon \kappa X \longrightarrow K$ tal que $F_{|X} = f$, es suficiente probar que; si $A, B \subseteq K$ son cerrados ajenos entonces por el **Teorema 1.1.1** $cl_{\kappa X}(f^{\leftarrow}(A)) \cap cl_{\kappa X}(f^{\leftarrow}(B)) = \emptyset$.

Como K es un compacto y A y B son cerrados ajenos, entonces existen U y V abiertos de K tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ y $cl_K(U) \cap cl_K(V) = \emptyset$.

Como f es continua entonces $f^{\leftarrow}[U]$ y $f^{\leftarrow}[V]$ son abiertos en X y satisfacen;

$$f^{\leftarrow}[A] \subseteq f^{\leftarrow}[U] \subseteq cl_X f^{\leftarrow}[U] \subseteq f^{\leftarrow}[cl_K(U)]$$

y

$$f^{\leftarrow}[B] \subseteq f^{\leftarrow}[V] \subseteq cl_X f^{\leftarrow}[V] \subseteq f^{\leftarrow}[cl_K(V)].$$

Además $f^{\leftarrow}[cl_K(U)] \cap f^{\leftarrow}[cl_K(V)] = \emptyset$.

Por lo tanto $cl_X(f^{\leftarrow}[U] \cap cl_X(f^{\leftarrow}[V]) = \emptyset$.

Usando el inciso 4 de esta proposición, $cl_{\kappa X}(f^{\leftarrow}[U]) \cap cl_{\kappa X}(f^{\leftarrow}[V]) = \emptyset$. Como se quería.

$\square$

Capítulo 3

Espacios extremadamente disconexos y absolutos

La primera parte de este capítulo está destinada a presentar los espacios extremadamente disconexos. Con la finalidad de estudiar algunas propiedades de éstos, ya que demostraremos que el absoluto de Iliadis es extremadamente disconexo. Y dichos resultados serán de mucha importancia hacia al final del trabajo.

En la segunda parte desarrollamos un poco la teoría de absolutos. En concreto construimos el absoluto de Iliadis de un espacio Hausdorff, que es un espacio que puede ser mapeado con una función θ-continua, perfecta e irreducible. Esto lo haremos usando el espacio de Stone asociado al conjunto de cerrados regulares del espacio. Además exploramos algunas propiedades interesantes de este.

3.1. Espacios extremadamente disconexos

Abordamos brevemente las propiedades de esta clase de espacios ya que resultará ser una herramienta muy importante para el estudio del cardinal de un espacio *H-cerrado*.

Se recomienda revisar el **Apéndice A**, en donde se incluye el teorema de representación de Stone y los resultados necesarios para abordarlo.

Definición 3.1.1. *X es un espacio extremadamente disconexo si la cerradura de un abierto es también un abierto en el espacio.*

Para construir algunos ejemplos de estos espacios requerimos algunos resultados previos.

Para empezar daremos un teorema de caracterización de espacios extremadamente disconexos.

Teorema 3.1.1. *Sea X un espacio, los siguientes son equivalentes:*

1. *X es extremadamente disconexo.*
2. *Todo subespacio denso de X es extremadamente disconexo.*
3. *Cada subconjunto abierto de X es extremadamente disconexo.*
4. *Si U, V son abiertos de X, entonces $cl(U \cap V) = cl(U) \cap cl(V)$.*
5. *Si U, V son abiertos ajenos, entonces $cl(U) \cap cl(V) = \emptyset$.*
6. *Sean $B(X)$ la colección de abiertos y cerrados de X, $R(X)$ la colección de cerrados regulares de X y $RO(X)$ la colección de abiertos regulares de X.*

   Entonces $B(X) = R(X) = RO(X)$.
7. *La extensión de Katetov, κX es extremadamente disconexo.*

Demostración

1] $\Rightarrow$ 2]

Sea $S \subseteq X$ denso y $V \subseteq S$ abierto en S.

Entonces existe $W \subseteq X$ un abierto tal que $W \cap S = V$. Como X es extremadamente disconexo, $cl_X(W)$ es abierto en X.

Pero $S \cap cl_X(W) = S \cap cl_X(V) = cl_S(V)$, de donde $cl_S(V)$ es abierto en S.

Por lo tanto S es también extremadamente disconexo.

2] $\Rightarrow$ 3]

Sea $V \subseteq X$ abierto.

Entonces $S = V \cup (X \setminus cl_X(V))$ es denso en X. En efecto, dado $U \subseteq X$ abierto no vacío, se cumple que

$$U \cap S = (U \cap V) \cup (U \cap (X \setminus cl_X(V))) = (U \cap V) \cup (U \setminus cl_X(V)).$$

Si $(U \cap V) = \emptyset = (U \setminus cl_X(V))$, entonces $U \subseteq cl_X(V)$ y $(U \cap V) = \emptyset$, lo cual genera una contradicción, porque U es abierto no vacío. Por lo tanto $U \cap S \neq \emptyset$ y así, S es denso en X. Que por hipótesis es extremadamente disconexo. Ahora bien, si tomamos W un abierto en V, entonces W es también un abierto en S, pero $cl_S(W) = cl_V(W)$, puesto que $W \subseteq V$ y $cl_V(W) = cl_X(W) \cap V = cl_S(W)$. Se sigue de aquí que $cl_V(W)$ es también un abierto en S, por lo tanto lo es en V.

Por lo tanto V es extremadamente disconexo.

3] $\Rightarrow$ 4]

Por hipótesis X es extremadamente disconexo, entonces $cl_X(U)$ y $cl_X(V)$ son abiertos y cerrados en X. Por lo tanto

$$cl_X(U \cap V) = cl_X(U \cap cl_X(V)) = cl_X(cl_X(U) \cap cl_X(V)) = cl_X(U) \cap cl_X(V).$$

4] $\Rightarrow$ 5]

Si $U \cap V = \emptyset$, entonces $\emptyset = cl_X(U \cap V) = cl_X(U) \cap cl_X(V)$.

5] $\Rightarrow$ 1]

Sea $U \subseteq X$ un abierto.

Como $U \cap (X \setminus cl_X(U)) = \emptyset$, entonces $cl_X(U) \cap cl_X(X \setminus cl_X(U)) = \emptyset$ lo cual implica

$cl_X(U) = X \setminus cl_X(X \setminus cl_X(U))$. Por lo tanto X es extremadamente disconexo.

Con esto completamos las equivalencias de 1 a 5.

Para terminar demostraremos la equivalencia de 1, 6 y 7.

1] $\Rightarrow$ 6]

Tenemos $B(X) \subseteq R(X)$ para cualquier espacio. Ahora si $A \in R(X)$, entonces

$A = cl_X(int_X(A))$. Dado que X es extremadamente disconexo $cl_X(int_X(A))$ es abierto también.

Por lo tanto A es abierto y cerrado. De donde $B(X) = R(X)$.

Además

$$RO(X) = \{X \setminus A\colon A \in R(X)\} = \{X \setminus A\colon A \in B(X)\} = B(X).$$

6] $\Rightarrow$ 7]

Sea $V \subseteq \kappa X$ un abierto, entonces $cl_X(V \cap X) \in R(X)$

Por hipótesis $R(X) = B(X)$, de donde $cl_X(V \cap X) \in B(X)$. Entonces $cl_{\kappa X}(cl_X(V \cap X)) \in B(\kappa X)$ pero

$$cl_{\kappa X}(cl_X(V \cap X)) = cl_{\kappa X}(V \cap X) = cl_{\kappa X}(V).$$

Por lo tanto $cl_{\kappa X}(V)$ es abierto y cerado tambien.

Y de esta manera comprobamos que κX es extremadamente disconexo.

7] $\Rightarrow$ 1]

Como X es un subespacio denso de κX del inciso 2, X es también extremadamente disconexo.

□

El siguiente lema es un resultado técnico bastante útil.

Lema 3.1.1. *Sea X un espacio topológico.*

Si $V \in B(X)$, entonces V está C^*-encajado en X.

Demostración

Si $f \in C^*(V)$, podemos tomar $a \in (\mathbb{R} \setminus cl_{\mathbb{R}} f[V])$.

Definimos

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in V \\ \\ a & si \quad x \notin V \end{cases}$$

Dado que $f[V]$ está acotado, $g[X] = f[V] \cup \{a\}$, es un conjunto acotado.

Veamos ahora que esta función es continua.

Sea $W \subseteq \mathbb{R}$ un abierto, $W = (g[X] \cap W) \cup (\mathbb{R} \setminus g[X]) \cap W$.

Entonces

$$g^{\leftarrow}(x) = \begin{cases} f^{\leftarrow}[W] & si \quad a \notin W \\ \\ f^{\leftarrow}[W] \cup X \setminus V & si \quad a \in W \end{cases}$$

Donde $f^{\leftarrow}[W]$ es abierto por la continuidad de f. Y dado que V es abierto y cerrado en X, $X \setminus V$ en particular es abierto. Así, en cualquier caso $g^{\leftarrow}[W]$ es abierto en X.

Por lo tanto g es continua y acotada. Y en consecuencia V está C^*-encajado en X.

Las siguientes propiedades de un espacio extremadamente disconexo nos serán de gran utilidad posteriormente.

Teorema 3.1.2. *Los siguientes son equivalentes para un espacio Tychonoff:*

1. *X es extremadamente disconexo.*
2. *Cada subespacio denso de X está C^*-encajado en X.*
3. *Cada abierto de X está C^*-encajado en X.*
4. *La compactación de Stone-Čech βX es extremadamente disconexo.*

Demostración

$1] \Rightarrow 2]$

Sean S un subespacio denso de X y Z_1, Z_2 conjuntos nulos de S.

Podemos encontrar $V_1, V_2 \subseteq S$ abiertos de S tales que $Z_1 \subseteq V_1, Z_2 \subseteq V_2$ y además $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Sean $W_1, W_2 \subseteq X$ tales que $W_1 \cap S = V_1$ y $W_2 \cap S = V_2$, entonces $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ puesto que S es denso en X.

Así por el **Teorema 3.1.1** $cl_X(W_1) \in B(X)$ y $cl_X(W_1) \cap cl_X(W_2) = \emptyset$.

Por lo tanto $\chi_{cl_X(W_1)} \in C^*(X)$ y separa a Z_1 y Z_2. Por el teorema de extensión de Urysohn S está C^*-encajado en X, pues nulos completamente separados en S lo están también en X.

2] $\Rightarrow$ 3]

Sea $V \subseteq X$ un abierto y tomemos $S = V \cup (X \setminus cl_X(V))$, así $V \in B(S)$, pues $S \setminus V$ es abierto en S. Usando el **Lema 3.1.1** podemos asegurar que V está C^*-encajado en S y como S está C^*-encajado en X por ser denso V, está C^*-encajado en X.

3] $\Rightarrow$ 4]

Sea V un abierto de βX y $S = (X \cap V) \cup (X \setminus cl_X(X \cap V))$, entonces $\chi_{X\cap V} \in C^*(S)$.

Como S es abierto en X, por hipótesis existe $f \in C^*(X)$ de tal manera que $f_{|S} = \chi_{X\cap V}$.

Así βf, la extensión de f a βX satisface lo siguiente:

$\beta f[cl_{\beta X}(V)] = \beta f[cl_{\beta X}(V \cap X)] = cl_{\mathbb{R}}(f[V \cap X]) = \{1\}$.

Análogamente $\beta f[cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(V))] = \{0\}$.

De donde $cl_{\beta X}(V) \cap cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(V)) = \emptyset$.

Como $\beta X = cl_{\beta X}(V) \cup cl_{\beta X}(X \setminus cl_{\beta X}(V))$, se sigue que $cl_{\beta X}(V)$ es abierto en βX.

Por lo tanto βX es extremadamente disconexo.

4] $\Rightarrow$ 1]

Como βX es extremadamente disconexo y X es denso en βX, X resulta extremadamente disconexo. $\square$

El siguiente teorema nos brinda información muy útil a considerar al momento de realizar la construcción del absoluto de X, donde usaremos la notación empleada en el **Apéndice A**.

El siguiente teorema nos permite traducir la completez de un álgebra de Boole a su espacio de Stone asociado.

Teorema 3.1.3. *Sea C un álgebra de Boole. Los siguientes son equivalentes:*

1. *C es completa.*

2. *El espacio de Stone asociado a C, $S(C)$ es extremadamente disconexo*

Demostración

$S(C)$ representa el conjunto de ultrafiltros del álgebra C.

Dado $a \in C$, $\lambda(a)$ es el conjunto de ultrafiltros que tienen a a.

1] $\Rightarrow$ 2]

Sea U un abierto en $S(C)$.

Entonces existe un subconjunto $\{b_i \colon i \in I\} \subseteq C$ tal que $U = \bigcup_{i \in I} \lambda(b_i)$, pues el conjunto $\{\lambda(a) \colon a \in C\}$ forma una base para $S(C)$.

Sea $b = \bigvee \{b_i \colon i \in I\}$, este existe por la hipótesis de completez de C.

Afirmamos que $\lambda(b) = cl_{S(C)}(U)$.

Como $b_i \leq b$ para cada $i \in I$, tenemos $\lambda(b_i) \subseteq \lambda(b)$ para cada $i \in I$. Por lo tanto $U \subseteq \lambda(b)$. Dado que $cl_{S(C)}(U) \subseteq cl_{S(C)}(\lambda(b)) = \lambda(b)$, esta última igualdad se da porque $\lambda(b)$ es abierto y cerrado.

Ahora supongamos que $\lambda(b) \setminus cl_{S(C)}(U) \neq \emptyset$.

Podemos hallar $a \in C$ tal que $\emptyset \neq \lambda(a) \subseteq \lambda(b) \setminus cl_{S(C)}(U)$. Entonces

$$cl_{S(C)}(U) \subseteq \lambda(b) \cap (S(C) \setminus \lambda(a)) = \lambda(b \wedge a')$$

donde a' es complemento en el álgebra de a.

Así, para cada $i \in I$ tenemos $b_i \leq b \wedge a' < b$, lo que contradice la elección de b como el supremo de la colección $\{b_i \colon i \in I\}$.

Por lo tanto $cl_{S(C)}(U) = \lambda(b)$.

Concluimos que $S(C)$ es extremadamente disconexo.

2] $\Rightarrow$ 1]

Como $S(C)$ es extremadamente disconexo, del **Teorema 3.1.1** inciso 6, $B(S(C)) = R(S(C))$ (los abiertos y cerrado de $S(C)$ coinciden con sus cerrados regulares.)

Como $R(S(C))$ es completa y $B(S(C))$ es un álgebra isomorfa a C, podemos concluir que C es completa. $\square$

Corolario 3.1.1. *1. Todo espacio compacto, extremadamente disconexo es ho-*

meomorfo al espacio de Stone de algún álgebra de Boole completa.

2. *Toda álgebra de Boole completa es isomorfa al álgebra de Boole de abiertos y cerrados de algún compacto, cero dimensional.*

Demostración

1] Sea X un espacio compacto y extremadamente disconexo.

Entonces $B(X) = R(X)$ y como $R(X)$ es completa, $B(X)$ lo es también. Además como una consecuencia del teorema de representación de Stone, X es homeomorfo a $S(B(X))$.

Con lo cual se prueba 1)

2] Sea C un álgebra de Boole completa, entonces $S(C)$ es compacto y extremadamente disconexo.

Por lo tanto C es isomorfo a $B(S(C))$. $\square$

Ejemplo 3.1.1. *Como ejemplos de espacios extremadamente disconexos tenemos un espacio discreto D.*

Por los resultados obtenidos en esta sección podemos decir también que βD y κD son espacios extremadamente disconexos, no discretos; que además tienen un subconjunto denso de puntos aislados.

Podemos también considerar X un espacio sin puntos aislados, por lo cual $R(X)$ no tendrá átomos y de aquí podemos inferir que $S(R(X))$ no tendrá puntos aislados. Además, como en general $R(X)$ es un álgebra de Boole completa $S(R(X))$ resulta ser un espacio extremadamente disconexo, sin puntos aislados.

Las funciones irreducibles son una parte fundamental de nuestro estudio del absoluto de un espacio.

3.1.1. Funciones irreducibles

Definición 3.1.2. *Sean X, Y espacios y $f : X \longrightarrow Y$ cerrada y suprayetiva. Entonces f es una función irreducible si y sólo si para cualquier $A \subseteq X$ cerrado propio, $f[A] \neq Y$.*

Nuestro interés en este tipo de funciones radica en el hecho de que el absoluto de un espacio X puede ser mapeado con una función perfecta, irreducible y θ-continua a X.

El siguiente lema es un resultado técnico.

Lema 3.1.2. *Sean X, Y espacios, $f : X \longrightarrow Y$ una función irreducible y $U \subseteq X$ un abierto no vacío. Entonces $int_Y(f[U]) \neq \emptyset$.*

Demostración

Ya que U es un abierto no vacío, $X \setminus U$ es un cerrado propio de X. Por lo cual $f[X \setminus U]$ es un cerrado propio de Y.

Por lo tanto $Y \setminus f[X \setminus U]$ es un abierto no vacío que está contenido en $f[U]$.

Este teorema, aunque muy técnico es una herramienta sumamente útil para probar la unicidad de absoluto de Iliadis.

Teorema 3.1.4. *Sea f una función irreducible y θ-continua y suprayectiva de X a Y.*

El mapeo $A \rightarrow f[A]$ es un isomorfismo de álgebras de Boole entre $R(X)$ y $R(Y)$.

Demostración

Primero probaremos que dado $A \in R(X)$, entonces $f[A] \in R(Y)$.

Sea $A \in R(X)$, entonces $f[A]$ es cerrado en Y, puesto que f es cerrada por hipótesis, por lo que basta probar que $f[A] \setminus cl_Y(int_Y(f[A])) = \emptyset$.

Sea $a \in A$ y supongamos que $f(a) \notin cl_Y(int_Y(f[A]))$.Como f es una función θ-continua, existe V un abierto en X tal que $a \in V$ y

$$f[cl_X[V] \subseteq cl_Y[Y \setminus cl_Y(int_Y(f[A]))].$$

Por lo tanto $f[cl_X(V)] \cap int_Y(f[A]) = \emptyset$. Como A es un cerrado regular de X, $V \cap int_X(A) \neq \emptyset$; y así por el **Lema 3.1.2** $int_Y(f[V \cap int_X(A)]) \neq \emptyset$. Pero

$$int_Y(f[V \cap int_X(A)) \subseteq [f[cl_X(V) \cap int_Y(f[A])]]$$

lo que genera una contradicción.

Por lo tanto $f[A] = cl_Y(int_Y(f[A]))$, es decir, $f[A]$ es un cerrado regular de Y.

Así, podemos definir la función $\phi : R(X) \longrightarrow R(Y)$ de manera que $\phi(A) = f[A]$.

- Probaremos que esta función es suprayectiva.

  Sea $B \in R(Y)$, y tomemos $p \in f^{\leftarrow}[int_Y(B)]$. Como f es θ-continua existe un subconjunto abierto en X, V_p tal que $p \in V_p$ y

  $$f[cl_X(V_p)] \subseteq cl_Y(int_Y(B)) = B.$$

  Si $V_p \setminus cl_X(f^{\leftarrow}(int_Y B)) \neq \emptyset$, entonces por el **Lema 3.1.2**

  $$int_Y f[V_p \setminus cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)])]$$

  es un abierto no vacío de Y que está contenido en B y es ajeno a $int_Y(B)$, lo cuál genera una contradicción. Por lo tanto

  $$V_p \subseteq cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)]).$$

  De lo cuál se sigue que

  $$cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)]) = cl_X[\bigcup\{V_p \colon p \in f^{\leftarrow}[int_Y(B)]\}].$$

  En consecuencia $cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)]) \in R(X)$.

  Afirmamos que $f[cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)])] = B$. Ya que f es cerrada,

  $$B = cl_Y(int_Y(B)) \subseteq f[cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)])].$$

  Recíprocamente, si $p \in X$ y $f(p) \notin B$, por la θ-continuidad de f existe W un abierto en X de forma que $p \in W$ y

  $$f[cl_X(W)] \subseteq cl_Y(Y \setminus B) = Y \setminus int_Y(B).$$

  Por lo tanto $W \cap f^{\leftarrow}[int_Y(B)]$ y así $p \notin cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)])$.

  De esta forma hemos probado que $f[cl_X(f^{\leftarrow}[int_Y(B)])] = B$, es decir, ϕ es suprayectiva.

- Inyectividad

Sean A_1 y A_2 cerrados regulares de X distintos. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(int_X A_1) \setminus A_2 \neq \emptyset$, como f es una función irreducible $p \in Y \setminus f[(X \setminus int_X A_1) \cup A_2]$. Ya que es suprayectiva, existe $a \in X$ tal que $f(a) = p$, y además $a \in int_X A_1$. Y ya que $p \notin f[A_2]$, $f[A_1] \neq f[A_2]$. Lo cual implica que ϕ es inyectiva.

- Para finalizar probaremos que ϕ es un morfismo de orden de $R(X)$ a $R(Y)$.

  Recomendamos revisar el **Apéndice A** para familiarizarse con la notación y conceptos relativos a esta parte de la demostración.

  Sean $A_1, A_2 \in R(X)$ tales que $A_1 \leq A_2$, entonces $A_1 \cup A_2 = A_2$ si y sólo si $f[A_2] = f[A_1 \cup A_2]$ si y sólo si $f[A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$ por la inyectividad de ϕ. Por lo tanto $\phi(A_1) \leq \phi(A_2)$.

  Lo cuál quiere decir que ϕ es un morfismo de orden, y como consecuencia es un morfismo de álgebras de Boole.

Así concluimos que ϕ es un isomorfismo de álgebras de Boole entre $R(X)$ y $R(Y)$.

■

3.2. Construcción del absoluto de Iliadis

Ahora daremos la construcción del absoluto de Iliadis de X, para referirnos a él sólo lo mencionaremos como el *absoluto de* X.

Esta contrucción involucra el espacio de Stone asociado al álgebra de Boole $R(X)$.

Definición 3.2.1. *Sea X un espacio. El espacio de Gleason de X se define como el espacio de Stone asociado a $R(X)$, y se denota como θX.*

Este recibe su nombre de Andrew Mattei Gleason quien hizo la descripción de este espacio para el caso en que X es compacto.

Definición 3.2.2. *Sea X un espacio. El espacio $\{\mathcal{U} \in \theta X : \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$, dotado con la topología de subespacio de θX es llamado el absoluto de Iliadis de X, y se denota por EX.*

Es decir, EX es el espacio que consiste de todos los ultrafiltros fijos en $R(X)$, visto como un subespacio de $S(R(X))$.

Definición 3.2.3. *Sea X un espacio y $x \in X$, denotamos por $F(x)$ a la familia de vecindades de cerrados regulares de x, es decir $F(x) = \{A \in R(X) \colon x \in int(A)\}$. El cual define un filtro en $R(X)$.*

Este lema presenta un hecho bastante útil para hacer una relación entre X y EX.

Lema 3.2.1. *Sea X un espacio.*

1. *Si $\mathcal{U} \in EX$, entonces $\bigcap \mathcal{U}$ consta de exactamente un punto.*
2. *Si $x \in X$, entonces existe $\mathcal{U} \in EX$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.*

Demostración

1) Sean $p, q \in X$ puntos distintos y $A \in R(X)$ tales que $p \in A$ y $q \notin A$.

Si $p \in \bigcap \mathcal{U}$, entonces para toda $B \in \mathcal{U}$, $(int(B)) \cap A \neq \emptyset$.

De donde $A \wedge B \neq 0$, para toda $b \in \mathcal{U}$, por la maximalidad de $\mathcal{U}$, $A \in \mathcal{U}$, de donde $q \notin \bigcap \mathcal{U}$. Por lo tanto $\bigcap \mathcal{U}$ tiene sólo un punto.

2) Como $F(x)$ es un filtro, existe un ultrafiltro en $R(X)$, digamos $\mathcal{U}_x$ de tal forma que $F(x) \subseteq \mathcal{U}_x$.

Si $A \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in A$, por lo tanto $x \in \bigcap \mathcal{U}_x$, y como del inciso (1) sabemos que este tiene sólo un punto, por lo tanto $\bigcap \mathcal{U}_x = \{x\}$. $\square$

Definición 3.2.4. *$k_X \colon EX \longrightarrow X$ definida de la siguiente manera: $k_X(\mathcal{U}) = x$, donde x es el único punto en $\bigcap \mathcal{U}$.*

Este teorema tiene una gran relevancia ya que presenta propiedades importantes de EX y k_X

Teorema 3.2.1. *Sea X un espacio. Entonces:*

1. *EX es un espacio extremadamente disconexo, cero dimensional, denso en θX y $\theta X \equiv_{EX} \beta(EX)$.*

2. *Sea* $\mathcal{U} \in \theta X$ *y* $x \in X$. *Entonces* $\mathcal{U} \in EX$ *y* $k_X(\mathcal{U}) = x$ *si y sólo si* $F(x) \subseteq \mathcal{U}$ *para algún* $x \in X$.

3. *Si* $A \in R(X)$, *entonces* $k_X[EX \cap \lambda(A)] = A$.

4. *Sea* $x \in X$ *y* $B \in R(X)$, *entonces* $k_X^{\leftarrow}(X) \subseteq \lambda(B)$ *si y sólo si* $x \in int(B)$.

5. k_X *es perfecta, irreducible,* θ*-continua y suprayectiva.*

6. k_X *es continua si y sólo sí* X *es regular.*

7. $B(EX) = R(EX) = \{\lambda(A) \cap EX \colon A \in R(X)\}$.

8. *La función* $EX \cap \lambda(A) \to k_X[EX \cap \lambda(A)]$ *es un isomorfosmo de álgebras booleanas de* $B(EX)$ *a* $R(EX)$.

Demostración

1] Como $R(X)$ es un álgebra de Boole completa, θX es un espacio extremadamente disconexo, y del teorema de representación de Stone resulta ser también un espacio compacto, Hausdorff y cero dimensional.

Probaremos ahora que EX es un subespacio denso de θX. Para ello basta exhibir que dado $A \in R(X)$ no vacío, $\lambda(A) \cap EX \neq \emptyset$.

Sea $x \in int(A)$, entonces $A \in F(X)$ y del lema previo existe $\mathcal{U} \in EX$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$ por lo cual $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$.

Por lo tanto EX es denso en θX.

Por el **Teorema 3.1.1** la densidad de EX en θX nos asegura que EX es extremadamente disconexo.

Como θX es cero dimensional, posee una base de abiertos y cerrados, de la cual podemos extraer una base de abiertos y cerrados para el subespacio EX y de esta forma EX es también cero dimensional.

Dado que θX es un espacio extremadamente disconexo y EX es un subespacio denso, por el **Teorema 3.1.1** EX está C^*-encajado en θX. Por lo tanto $\theta X \equiv_{EX} \beta(EX)$ pues βX es la única compactación con esta propiedad.

2]

$\Leftarrow$] Supongamos que $F(x) \subseteq \mathcal{U}$.

Sea $A \in R(X)$ tal que $x \notin A$, entonces $x \in intA'$, el complemento de A en $R(X)$, $A' = cl(X \setminus A)$. Entonces $A' \in F(X)$ de donde $A' \in \mathcal{U}$ de donde $A \notin \mathcal{U}$, por lo cual $x \in \bigcap \mathcal{U}$, pues para cualquier elemento $B \in \mathcal{U}$, $x \in B$.

Así mismo $\mathcal{U} \in EX$ y además $k_X(\mathcal{U}) = x$.

$\Rightarrow$] Si $F(x) \nsubseteq \mathcal{U}$, entonces existe $A \in F(x) \setminus \mathcal{U}$, por la maximalidad de $\mathcal{U}$, $A' \in \mathcal{U}$, como $x \in int(A) = X \setminus A'$ se sigue que $x \notin \bigcap \mathcal{U}$.

Así, si $\mathcal{U} \in EX$, entonces $k_X(\mathcal{U}) \neq x$ que contradice la hipótesis.

Por lo tanto $F(x) \subseteq \mathcal{U}$.

3] Sea $A \in R(X)$ y $\mathcal{U} \in EX \cap \lambda(A)$. Entonces $A \in \mathcal{U}$ de donde $\bigcap \mathcal{U} \in A$, entonces $k_X[EX \cap \lambda(A)] \subseteq A$.

Por otro lado, si tomamos $x \in A$ y consideramos $S = F(x) \cup \{A\}$.

Afirmamos que cualquier subconjunto finito de S tiene ínfimo distinto de cero en $R(X)$.

Sean $F_1, \ldots, F_n \in F(x)$, entonces $x \in \bigcap_{i=1}^{n} int(F_i) = int(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i)$, entonces

$int(A) \cap int(\bigwedge_{i=1}^{n} F_i)) \neq \emptyset$, por lo tanto $A \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n} F_i) \neq \emptyset$.

Así, como dicho conjunto posee la "p.i.f. del álgebra"podemos extender este a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $R(X)$ tal que $(F(x) \cup \{A\}) \subseteq \mathcal{U}$. Que por el inciso (2) satisface:

$\mathcal{U} \in EX$ y $k_X(\mathcal{U}) = x$. Como además $\mathcal{U} \in \lambda(A)$ tenemos $x \in k_X[EX \cap \lambda(A)]$.

Por lo tanto $A \subseteq k_X[EX \cap \lambda(A)]$.

4] Supongamos que $x \in int(B)$ y $\mathcal{U} \in k_X^{\leftarrow}(x)$ del inciso (2) tenemos que $F(x) \subseteq \mathcal{U}$ como $B \in F(X)$, $B \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \in \lambda(B)$. Por lo tanto $k_X^{\leftarrow}(x) \subseteq \lambda(B)$.

Si $x \notin int(B)$, entonces $x \in X \setminus int(B) = B'$. Así del inciso 3, $x \in k_X[EX \cap \lambda(B')]$ y por lo tanto

$$\emptyset \neq k_X^{\leftarrow}(x) \cap \lambda(B') = k_X^{\leftarrow}(x) \setminus \lambda(B).$$

5] Del **Lema 3.2.1**, la asignación es suprayectiva.

Probaremos ahora que k_X es una función compacta.

Para ello basta probar que $k_X^{\leftarrow}(x)$ es un cerrado en θx, pues este es compacto.

Sea $\mathcal{U} \notin k_X^{\leftarrow}(x)$, entonces $x \notin \bigcap \mathcal{U}$, por lo tanto existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin A$, por lo cual $x \in int(A')$.

Del inciso (4) $k_X^{\leftarrow}(x) \subseteq \lambda(A')$ y como $\lambda(A) \cap \lambda(A') = \emptyset$.

Enonces $\mathcal{U} \in \lambda(A)$ y $\lambda(A) \cap k_X^{\leftarrow}(x) = \emptyset$.

Por lo tanto $\theta X \setminus k_X^{\leftarrow}(x)$ es abierto.

Veremos ahora que k_X es cerrada.

Sea $F \subseteq EX$ cerrado y $x \notin X \setminus k_X[F]$.

Así, $k_X^{\leftarrow}(x) \cap F = \emptyset$, entonces para cada $\mathcal{U} \in k_X^{\leftarrow}(x)$ podemos tomar un $A_{\mathcal{U}} \in R(X)$ de tal manera que $\mathcal{U} \in \lambda(A_{\mathcal{U}}) \subseteq EX \setminus F$, es decir, tomamos un básico que lo contenga y lo separe de F.

Por la compacidad de $k_X^{\leftarrow}(x)$, existen $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ tales que $k_X^{\leftarrow}(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \lambda(A_{\mathcal{U}_i})$.

Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_{\mathcal{U}_i}$. De (4) podemos inferir que $x \in int(A)$. Por lo tanto $F \subseteq EX \setminus \lambda(A) = \lambda(A')$ y por (3) $k_X[F] \subseteq A' = X \setminus int(A)$.

Así, cada punto en $X \setminus k_X[F]$ tiene una vecindad ajena a $k_X[F]$. Por lo tanto k_X es una función cerrada.

Veamos ahora que es una función irreducible.

Sea $F \subseteq EX$ un cerrado propio, entonces existe $A \in R(X)$ tal que $\emptyset \neq \lambda(A) \cap EX \subseteq EX \setminus F$.

Por lo tanto $F \subseteq \lambda(A')$, por (3) $k_X[F] \subseteq A'$.

Como $\emptyset \neq \lambda(A)$, $X \setminus A' \neq \emptyset$. Por lo tanto k_X es irreducible.

Finalmente veremos que es θ-continua.

Sea $\mathcal{U} \in EX$ y $V \subseteq X$ un abierto tal que $k_X(U) \in V$.

Tomemos $A = cl(V)$, entonces $A \in R(X)$ y $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$ que es una vecindad abierta y cerrada del mismo. Entonces por (3) $k_X[\lambda(A)] = A$. Por lo tanto es θ-continua en $\mathcal{U}$.

6]

$\Rightarrow$] Del inciso 1, EX es un espacio cero dimensional y por tanto regular, además la imagen perfecta y continua de un espacio regular es regular, por lo tanto X es regular.

$\Leftarrow$ Por otro lado, si X es regular, entonces $\Theta C(X) = C(X)$.

Por lo tanto k_X es una función continua.

7] $B(\theta X) = \{\lambda(A) \colon A \in R(X)\}$, de donde $B(EX) \supseteq \{\lambda(A) \cap EX \colon A \in R(X)\}$.

Ahora, si $C \in B(EX)$ por (1) $cl_{\theta X}(C) \in B(\beta(EX)) = B(\theta X)$. Si existe $A \in R(X)$ tal que $cl_{\theta X}(C) = \lambda(A)$, entonces $C = EX \cap cl_{\theta X}(C) = \lambda(A) \cap EX$.

Por lo tanto $B(EX) = R(EX)$.

8] La asignación $EX \cap \lambda(A) \to k_X[EX \cap \lambda(A)] = A$, va de $B(EX)$ a $R(X)$. Como k_X es perfecta irreducible y θ-continua, por el **Teorema 3.1.4**, resulta ser un isomorfismo de álgebras de Boole. $\square$

Unicidad de EX

Teorema 3.2.2. *Sean X un espacio y Y un espacio extremadamente disconexo, cero dimensional y $f : Y \longrightarrow X$ una función perfecta, irreducible θ-continua y suprayectiva, entonces existe $h : EX \longrightarrow Y$ un homeomorfismo tal que $k_X = f \circ h$.*

Demostración

Primero construiremos la función $h : EX \longrightarrow Y$.

Como Y es extremadamente disconexo, por el **Teorema 3.1.1** inciso 6, los abiertos y cerrados del espacio coinciden con los cerrados regulares. Y por el **Teorema 3.1.4** como la funcion f es irreducible y θ-continua, existe un isomorfismo $\phi : R(Y) \longrightarrow R(X)$ que podemos pensar en realidad como $\phi : B(Y) \longrightarrow R(X)$.

Sea $\mathcal{U} \in EX$, y definamos $\mathcal{U}' = \phi^{\leftarrow}(\mathcal{U}) = \{B \in B(Y) \colon f(B) \in \mathcal{U}\}$. Así como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en $R(X)$, $\mathcal{U}'$ es también un ultrafiltro en $B(Y)$, y dado que Y es cero dimensional existe un único punto en $\bigcap \mathcal{U}'$.

Ahora bien, el conjunto $\{B \cap [(k_X)^{\leftarrow}(\mathcal{U})] \colon B \in \mathcal{U}'\}$ tiene la p.i.f. Entonces para cualquier colección finita $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{U}'$,

$$\bigwedge_{i=1}^{n} f(B_i) \in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad k_X(\mathcal{U}) \in \bigwedge_{i=1}^{n} f(B_i) = f[\bigcap_{i=1}^{n} B_i].$$

Como $f^{\leftarrow}(\mathcal{U})$ es un compacto y cada $B \in \mathcal{U}'$ es cerrado en Y, tenemos un conjunto de cerrados con la p.i.f. dentro de un compacto, por lo tanto tiene intersección no vacía, $\bigcap \mathcal{U}' \neq \emptyset$.

Por lo tanto para cada $\mathcal{U} \in EX$, existe un único punto $y_{\mathcal{U}}$ en Y, determinado por $\bigcap \mathcal{U}'$ con el cual podemos definir la función $h : EX \longrightarrow Y$, de manera que $h(\mathcal{U}) = y_{\mathcal{U}}$.

Y así $f \circ h(\mathcal{U}) = f(y_{\mathcal{U}}) \in f[B]$ para todo $B \in \mathcal{U}'$, es decir $f \circ h(\mathcal{U}) \in \bigcap \mathcal{U}'$

Por lo tanto $f \circ h = k_x$, que este es el único punto en $\bigcap \mathcal{U}'$.

Veamos ahora que esta función realmente define un homeomorfismo.

Sean $y \in Y$ y $\mathcal{U}_y = \{f(B) \colon B \in B(Y),\ y \in B\}$, este define un ultrafiltro en $R(X)$ pues $\{B \in B(Y) \colon y \in B\}$ define un ultrafiltro en $B(Y)$.

Como $f(y) \in \bigcap \mathcal{U}'$, entonces $h(\mathcal{U}') = y$ es suprayectiva de EX a Y.

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{W} \in EX$ puntos distintos, entonces existe $A \in R(X)$ tal que $A \in \mathcal{U}$ y $A' \in \mathcal{W}$, como ϕ es un isomorfismo, existe un único $B \in B(Y)$ tal que $\phi(B) = A$ y $\phi(Y \setminus B) = A'$. Por lo tanto $B \in \mathcal{U}'$ y $Y \setminus B \in \mathcal{W}'$. Y así $h(\mathcal{U}) \neq h(\mathcal{W})$, es decir h es inyectiva.

Sea $F \subseteq EX$ un cerrado, entonces existe una familia $\{A_i \colon i \in I\} \subseteq R(X)$ tal que

$$F = \bigcap \{\lambda(A_i) \cap EX \colon i \in I\}.$$

Además para cada $i \in I$ existe un único $B_i \in B(Y)$ tal que $f(B_i) = A_i$, entonces $h[F] = \bigcap \{B_i \colon i \in I\}$.

Por lo tanto h es una función cerrada.

Supongamos $\mathcal{U} \in EX$, $B \in B(Y)$ tal que $h(\mathcal{U}) \in B$. Entonces $f(B) \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \in$

$\lambda(f(B))$. Pero si $\mathcal{W} \in \lambda(f(B))$, entonces $f(B) \in \mathcal{W}$. Por lo cual $B \in \mathcal{W}'$, así $h(\mathcal{W}) \in B$.

Se sigue que $h[\lambda(f(B))] \subseteq B$, de donde podemos concluir que h es continua.

Por lo tanto h es homeomorfismo.

Podemos concluir que EX y Y son extensiones equivalentes. □

Construcción de EX como un espacio de ultrafiltros abiertos.

Hasta ahora hemos mostrado la construcción de EX como un espacio de ultrafiltros convergentes en $R(X)$.

Ya que $R(X)$ y $RO(X)$ son álgebras de Boole isomorfas, podemos hacer la misma construcción usando $RO(X)$.

Para hacer más general esta construcción, en lugar de usar sólamente $RO(X)$ usaremos la retícula de τ_X.

Esto pues dependiendo de nuestros fines, convendrá tomar la construcción con abiertos o con cerrados regulares. Vamos a construir un espacio extremadamente disconexo y cero dimensional, usando el conjunto de ultrafiltros abiertos con adherencia no vacía en X, también un mapeo perfecto, θ-continua e irreducible de dicho espacio a X.

Definición 3.2.5. *Sea X un espacio, denotaremos como $E'X$ la colección de ultrafiltros abiertos convergentes en X.*

La demostración del siguiente lema es totalmente análoga al resultado correspondiente para cerrados regulares, por lo que no será incluida.

Lema 3.2.2. *Sean X un espacio, $x \in X$ y $\mathcal{U} \in E'X$. Entonces:*

1. *$N(x) \subseteq \mathcal{U}$ si y sólo si $x \in a(\mathcal{U})$.*
2. *$a(\mathcal{U})$ contiene exactamente un punto.*
3. *Existe $\mathcal{U}_x \in E'X$ tal que $a(\mathcal{U}_x) = x$.*

Definición 3.2.6. *Sea X un espacio, $\theta'X$ representará la colección de todos los ultrafiltros abiertos de X y dado un abierto U, $O(U) = \{\mathcal{U} \in \theta'X : U \in \mathcal{U}\}$.*

Este lema representa un resultado técnico.

Lema 3.2.3. *Sean $U, V \subseteq X$ abiertos. Entonces:*

1. $O(U) = \emptyset$ *si y sólo si* $U = \emptyset$.
2. $O(U \cap V) = O(U) \cap O(V)$.
3. $\theta X \setminus O(U) = O(X \setminus cl_X(U))$.
4. $O(U) = \theta' X$ *si y sólo si* U *es denso en* X.
5. $\{O(U) \colon U \in \tau_X\}$ *es base para una topología Hausdorff en* $\theta' X$.

Demostración

1] $O(\emptyset) = \{\mathcal{U} \in \theta' X \colon \emptyset \in \mathcal{U}\} = \emptyset$.

Si tomamos U un abierto no vacío en X, y $x \in X$. Entonces $U \in N(x)$ por lo que podemos afirmar que existe $\mathcal{U}_x$ un ultrafiltro abierto tal que $U \in \mathcal{U}$ por lo que $O(U) \neq \emptyset$.

2] $\mathcal{U} \in O(U \cap V)$ si y sólo si $U \cap V \in \mathcal{U}$ si y sólo si $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{U}$ si y sólo si $\mathcal{U} \in O(U)$ y $\mathcal{U} \in O(V)$ si y sólo si $\mathcal{U} \in U \cap V$.

3] De los incisos anteriores tenemos que $O(U) \cap O(X \setminus cl_X(U)) = \emptyset$.

Si tomamos $\mathcal{U} \in \theta' X \setminus O(U)$, $\mathcal{U} \notin O(U)$, $U \notin \mathcal{U}$, entonces $X \setminus cl_X(U) \in \mathcal{U}$ por ser un ultrafiltro. Por lo tanto $\mathcal{U} \in O(X \setminus cl_X(U)$.

En particular $O(U) = O(int_X(cl_X(U)))$.

4] Supongamos que U es abierto y denso en X entonces para cualquier abierto no vacío V, $V \cap U \neq \emptyset$.

Por lo tanto $U \in \mathcal{U}$ para todo $\mathcal{U} \in \theta' X$.

En particular $O(X) = \theta' X$.

5] Ya que $O(X) = \theta' X$ podemos afirmar que $\{O(U) \colon U \in \tau_X\}$ es una cubierta para $\theta' X$.

Además dados $U_1, \ldots, U_n \in \tau_X$ tales que $\bigcap_{i=1}^{n} O(U_i) \neq \emptyset$, entonces

$$\bigcap_{i=1}^{n} O(U_i) = O(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) = \{O(U) \colon U \in \tau_X\}$$

Por lo tanto es base para una topología.

Veremos ahora que es una topología Hausdorff.

Dados $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \theta' X$ puntos distintos, entonces existen $U_1 \in \mathcal{U}_1$ y $U_2 \in \mathcal{U}_2$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, lo que implica $U_1 \notin \mathcal{U}_2$ y $U_2 \notin \mathcal{U}_1$. Y como

$$O(U_1 \cap U_2) = O(U_1) \cap O(U_2) = \emptyset,$$

$O(U_1)$ y $O(U_2)$ son los abiertos ajenos que buscamos. $\square$

En adelante supondremos a $\theta' X$ dotado con la topología que acabamos de describir y $E' X$ con la correspondiente topología de subespacio de $\theta' X$.

Definición 3.2.7. *Definiremos $k'_X : E'X \longrightarrow X$, de manera que $k'_X(\mathcal{U}) = x$, donde $\{x\} = a(\mathcal{U})$*

Observación: Esta asignación está bien definida ya que este punto de adherencia es único, y además dicha función resulta ser suprayectiva.

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio, entonces:*

1. *Si $\{U_i \colon i \in I\} \subseteq \tau_X$, entonces $cl_{\theta' X}(\bigcup_{i \in I} O(U_i)) = O(\bigcup_{i \in I} U_i)$.*
2. *$B(\theta' X) = \{O(U) \colon U \in \tau_X\}$.*
3. *$\theta' X$ es compacto y extremadamente disconexo.*
4. *$E' X$ es un subespacio denso, extremadamente disconexo y cero dimensional de $\theta' X$*
5. *$k'_X[O(U) \cap E' X] = cl_X(U)$.*
6. *$(k'_X)^{\leftarrow}(x) \subseteq O(U)$.*

7. *k'_X es perfecta, irreducible y θ-continua de $E'X$ a X.*

Demostración

1] Del **Lema 3.2.3** si $U, V \in \tau_X$ y $U \subseteq V$, entonces $O(U) \subseteq O(V)$. Entonces

$$\bigcup_{i \in I} O(U_i) \subseteq O(\bigcup_{i \in I} U_i),$$

del **Lema 3.2.3**

$$O(\bigcup_{i \in I} U_i) \in B(\theta' X) \quad \text{y} \quad cl_{\theta' X}(\bigcup_{i \in I} O(U_i)) \subseteq O(\bigcup_{i \in I} U_i).$$

Ahora supongamos que $\mathcal{U} \in O(\bigcup_{i \in I} U_i)$ y $O(V)$ un abierto básico tal que $\mathcal{U} \in O(V)$. Entonces

$$O(\bigcup_{i \in I} U_i) \cap O(V) = O((\bigcup_{i \in I} U_i) \cap V) \neq \emptyset,$$

entonces existe $j \in I$ tal que $U_j \cap V \neq \emptyset$, así que $O(U_j \cap V) \neq \emptyset$ y $\mathcal{U} \in cl_{\theta' X}(\bigcup_{i \in I} O(U_i))$.

2] Del **Lema 3.2.3** inciso 3, $\{O(U) \colon U \in \tau_X\} \subseteq B(\theta' X)$.

Si tomamos $B \in B(\theta' X)$, entonces $B = \bigcup_{i \in I} \{O(U_i) \colon i \in I\}$ para algún $\{U_i \colon i \in I\} \subseteq \tau_X$, entonces $B = cl_{\theta' X} B$.

Por lo tanto $\theta' X$ es cero dimensional.

3]

- $\theta' X$ es extremadamente disconexo.

  Cualquier abierto $V \subseteq \theta' X$ es de la forma $V = \bigcup \{O(U_i) \colon i \in I\}$ para algún $\{U_i \colon i \in I\} \subseteq \tau_X$.

  entonces, por el inciso 1, $cl_{\theta' X}(V)$ es abierto también. Por lo tanto $\theta' X$ es extremadamente disconexo.

- Compacidad.

  Sea $\{U_i \colon i \in I\} \subseteq \tau_X$ tal que $\theta' X = \bigcup_{i \in I} O(U_i)$, es decir tomamos una cubierta de básicos.

Supongamos que para cualquier $F \subseteq I$ finito $\theta' X \setminus \bigcup_{i \in F} O(U_i) \neq \emptyset$. Entonces

$$\theta' X \setminus \bigcup_{i \in F} O(U_i) = O(X \setminus cl_{\theta' X}(\bigcup_{i \in F} U_i)).$$

Entonces, como $\{X \setminus cl_X(\bigcup_{i \in F} U_i) \colon F \subseteq I \text{ finito}\}$ es una colección de abiertos en X con la p.i.f; puede ser extendido a un ultrafiltro abierto en X. Además $U_i \notin \mathcal{U}$ para toda $i \in I$ por la elección de $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U} \in \theta' X \setminus \bigcup_{i \in I} O(U_i)$, lo cuál genera una contradicción.

Por lo tanto $\theta' X$ es compacto.

4] Sea $U \subseteq X$ abierto no vacío, entonces $O(U)$ es un abierto básico de $\theta' X$.

Tomemos $x \in U$, entonces existe $\mathcal{U}_x \in E' X$ tal que $\{x\} = a(\mathcal{U}_x)$ y $U \in \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_x \in O(U) \cap E' X$. Por lo tanto $E' X$ es denso en $\theta' X$.

Y podemos asegurar también que $E' X$ es extremadamente disconexo por ser un denso de un extremadamente disconexo y cero dimensional **Teorema 3.1.1**.

5] Si $\mathcal{U} \in O(U)$, entonces $U \in \mathcal{U}$. Así $k'_X(\mathcal{U}) = p$, donde $\{p\} = a(\mathcal{U}) \in cl_X(U)$.

Ahora bien, si $x \in cl_X(U)$, entonces $N(x) \cup \{U\}$ es un conjunto de abiertos con la p.i.f. que podemos extender a un ultrafiltro abierto en X, $\mathcal{U} \in \theta' X$. Entonces $\mathcal{U} \in O(U)$ y $N(x) \subseteq \mathcal{U}$.

Por lo tanto $\mathcal{U} \in E' X$ y $x \in k'_X[O(U) \cap E' X]$.

6] Si $x \notin int_X(cl_X(U))$, $x \in cl_X(X \setminus cl_X(U))$, entonces existe un ultrafiltro abierto $\mathcal{U}$ en X tal que $N(x) \cup \{X \setminus cl_X(U)\} \subseteq \mathcal{U}$, en consecuencia $x \in a(\mathcal{U})$. Por lo que $x = k'_X(\mathcal{U})$ y

$$\mathcal{U} \in O(X \setminus cl_X(U)) = \theta' X \setminus O(U).$$

Por lo tanto $(k'_X)^{\leftarrow}(x) \nsubseteq O(U)$.

Si $x \in int(cl(U))$ y $\mathcal{U} \in k'_X(x)$, entonces $(int(cl(U))) \cap cl(V) \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{U}$. Por lo tanto $X \setminus cl(U) \notin \mathcal{U} = \theta' X \setminus O(U)$ y $\mathcal{U} \in O(U)$.

7]

- k'_X es compacta.

  Para esto basta probar que $(k'_X)^{\leftarrow}(x)$ es cerrado en $\theta' X$.

  Si $\mathcal{U} \in \theta' X \setminus (k'_X)^{\leftarrow}(x)$ entonces existe V, un abierto en X tal que $x \in V$ y $V \notin \mathcal{U}$.

  Como $(k'_X)^{\leftarrow}(x) \subseteq O(V)$. Así $\mathcal{U} \in \theta' X \setminus O(V) = O(X \setminus cl(V))$.

  Por lo tanto $\theta' X \setminus (k'_X)^{\leftarrow}(x)$ es abierto.

  De donde $(k'_X)^{\leftarrow}(x)$ es un compacto.

- k'_X es cerrada.

  Sea $F \subseteq E'X$ un cerrado y $x \in E'X \setminus k'_X[F]$. Entonces $(k'_X)^{\leftarrow}(x) \cap F = \emptyset$ y como $(k'_X)^{\leftarrow}(x)$ es compacto, podemos encontrar una colección finita $U_1, \ldots, U_n \in \tau_X$ tales que

  $$(k'_X)^{\leftarrow}(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O(U_i) \cap E'X \subseteq E'X \setminus F.$$

  Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, entonces

  $$F \subseteq E'X \setminus O(U) = O(X \setminus cl(U)) \cap E'X.$$

  Entonces $k'_X[F] \subseteq cl(X \setminus cl(U)) = X \setminus int(cl(U))$, y así $x \in int(cl(U))$ que es un abierto.

  Por lo tanto $k'[F]$ es un cerrado en X.

- k'_X es irreducible.

  Sea $F \subseteq E'X$ un cerrado propio entonces existe V un abierto no vacío en X tal que $F \subseteq E'X \setminus U(V)$, entonces $k'_X[F] \subseteq X \setminus V$.

  Por lo tanto es irreducible.

- k'_X es θ-continua.

  Si $\mathcal{U} \in E'X$ y $k'_X(\mathcal{U}) \in U$ para algún $U \in \tau_X$, entonces $U \in \mathcal{U}$ por la maximalidad de $\mathcal{U}$. Así $\mathcal{U} \in O(U)$. Por lo tanto $k'_X[O(U) \cap E'X] = cl(U)$.

  Por lo tanto k'_X es θ-continua.

Por la unicidad de EX probada en el **Teorema 3.2.2**, bajo estas condiciones existe $h : EX \longrightarrow E'X$, un homeomorfismo tal que $k_X = k'_X \circ h$.

Es decir, EX y $E'X$ son equivalentes. □

Dado que nuestro propósito es trabajar con el absoluto de espacios H-cerrados, vamos a caracterizarlos.

Teorema 3.2.4. *Sea X un espacio. Entonces EX es compacto si y sólo si X es H-cerrado, si y sólo si $\theta X = EX$.*

Demostración

$\Rightarrow$] Si EX es compacto, en particular es H-cerrado y ya que k_X es una función θ-continua y suprayectiva. Entonces por el inciso 6) de la **Proposición 2.3.3** X es H-cerrado.

$\Leftarrow$] Si X es H-cerrado, entonces por el **Teorema 2.3.1**, todo ultrafiltro abierto en X converge, por lo tanto $\theta' X = E'X$, como $\theta' X$ es compacto $E'X$ también lo es.

Además EX y $E'X$ son homeomorfos, por lo tanto EX es compacto. □

Capítulo 4

Desigualdad de Arhangel'skii

En respuesta a una cuestión planteada por Alexandroff y Urysohn 50 años antes: ¿Todo espacio Hausdorff compacto primero numerable tiene cardinal menor o igual que el continuo?

En 1960, usando el carácter y el grado Lindelöf, Arhangel'skii demostró que $\mid X \mid \leq 2^{\chi(X)L(X)}$ para cualquier espacio Hausdorff X.

El motivo de incluir este resultado es conocer la prueba en el caso general, ya que nuestro resultado principal se ve inspirado en la misma. Y posteriormente ver cómo podemos adaptarla a espacios H-cerrados.

Para ésta sección comenzaremos definiendo unas funciones especiales que nos brindarán información muy valiosa del cardinal de ciertos subconjuntos de un espacio topológico.

Definición 4.0.1. *Sea X un espacio topológico definimos:*

1. *Densidad*

   $d(X) = min\{\kappa\colon$ *existe* $D \subseteq X$ *denso, tal que* $\mid D \mid = \kappa\} + \omega$

2. *Carácter*

   Sea $p \in X$, definimos:

   $\chi(p, X) = min\{\kappa\colon$ *existe* $\mathcal{V}(p)$ *base local de* p *y* $\mid \mathcal{V}(p) \mid = \kappa\} + \omega$ *como el carácter del punto* p.

   Y de esta forma el carácter del espacio X como $\chi(X) = sup\{\chi(p)\colon p \in X\}$.

3. *Grado Lindelöf*

   Sea κ un cardinal infinito, decimos que X es $\kappa-$Lindeöf si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta de tamaño $\leq \kappa$.

   El grado Lindelöf de X se define como $L(X) = min\{\kappa\colon X \text{ es } \kappa - \text{Lindelöf}\}$.

El siguiente lema es un resultado técnico.

Lema 4.0.1. *Sea κ un cardinal infinito. Y sea X un espacio topológico tal que*

1. *Para cada $p \in X$, existe una colección $\mathcal{V}_p$ de vecindades abiertas de p tal que $\mid \mathcal{V}_p \mid \leq \kappa$ y $\cap\{cl(V)\colon V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$.*

2. *Existe S un subconjunto de X tal que $X = \cup\{cl(A)\colon A \subseteq S, \mid A \mid \leq \kappa\}$.*

Entonces $\mid X \mid \leq \mid S \mid^{\kappa}$.

Demostración

Para cada $p \in X$, sea A_p un subconjunto de S tal que $p \in cl(A_p)$ y $\mid A_p \mid \leq \kappa$.

Observación: Para cada V, vecindad abierta de p.

$$(A_p \cap V) \subseteq S, \quad \mid A_p \cap V \mid \leq \kappa \quad \text{y} \quad p \in cl(A_p \cap V).$$

Definimos $\varphi\colon X \longrightarrow [[S]^{\leq\kappa}]^{\leq\kappa}$ de la siguiente manera $\varphi(p) = \{(A_p \cap V)\colon V \in \mathcal{V}_p\}$.

Ya que para toda $V \in \mathcal{V}_p$, $p \in cl(A_p \cap V)$, entonces

$$p \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_p} cl(A_p \cap V) \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{V}_p} cl(V) = \{p\}.$$

De donde φ es inyectiva.

Y por lo tanto $\mid X \mid \leq ((S)^{\kappa})^{\kappa} = S^{\kappa}$. $\square$

Este resultado para acotar el cardinal del espacio usando la densidad es particularmente útil para calcular el cardinal de subespacios cerrados.

Teorema 4.0.1. *Sea X un espacio Hausdorff, entonces $\mid X \mid \leq d(X)^{\chi(X)}$.*

Demostración

En el lema previo podemos tomar $\kappa = \chi(X)$, con esta elección se satisface la hipótesis 1.

Y tomando un subconjunto S, un denso tal que $\mid S \mid = d(X)$, entonces para cada $p \in X$ y cada $V \in \mathcal{V}_p$ de forma que $\mid \mathcal{V}(p) \mid \leq \kappa$, existe $s_V \in S \cap V$. De donde $A_p = \{s_V : V \in \mathcal{V}_p\} \subseteq S$ satisface $p \in cl(A_p)$ y $\mid A_p \mid \leq \chi(X)$.

Por lo tanto $X = \bigcup\limits_{p \in X} cl(A_p)$, por lo cual S satisface la hipótesis 2 del **Lema 4.0.1** previo.

Y así, $\mid X \mid \leq d(X)^{\chi(X)}$. □

A continuación presentamos la desigualdad de Arhangel'skii.

Teorema 4.0.2. *Sea X un espacio topológico Hausdorff, entonces* $\mid X \mid \leq 2^{L(X) \cdot \chi(X)}$

Demostración

Sea $\kappa = L(X) \cdot \chi(X)$, para cada $p \in X$ tomamos $\mathcal{V}_p$, una base local de vecindades abiertas tal que $\mid \mathcal{V}_p \mid \leq \kappa$.

Ahora haremos una construcción de una suceción creciente de cerrados $\{H_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ y una sucesión de familias de abiertos $\{\mathcal{U}_\alpha : 0 \leq \alpha < \kappa^+\}$ tales que:

1. $\mid H_\alpha \mid \leq 2^\kappa$, $0 \leq \alpha < \kappa^+$.
2. $\mathcal{U}_\alpha = \{U \in \mathcal{V}_p : p \in \bigcup\limits_{\beta < \alpha} H_\beta\}$, $0 \leq \alpha < \kappa^+$.
3. Para todo $C \in [\mathcal{U}_\alpha]^{\leq \kappa}$ si $\bigcup C \neq X$, entonces $H_\alpha \setminus \bigcup C \neq \emptyset$.

La construcción se hará por inducción transfinita.

Para el paso cero tomamos $\mathcal{U}_0 = \emptyset$ y $H_0 = \emptyset$

Sea $0 \leq \alpha < \kappa$.

Asumiendo que H_β ha sido construido para cada $\beta < \alpha$.

Notemos que $\mathcal{U}_\alpha$ se construye usando 2

$$\mathcal{U}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p \colon p \in \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta\} \quad \text{y} \quad | \mathcal{U}_\alpha | \leq 2^\kappa,$$

pues para cada $\beta < \alpha$ se satisface $| H_\beta | \leq 2^\kappa$, $\alpha < \kappa$ y $| \mathcal{V}(p) |$, entonces $| U_\alpha | \leq 2^\kappa \cdot \kappa \cdot \kappa = 2^\kappa$.

Para cada conjunto $C \in [\mathcal{U}_\alpha]^{\leq\kappa}$ tal que $\bigcup C \neq X$, fijamos $p_C \in X \setminus \bigcup C$.

Sea

$$A_\alpha = \{p_C \colon C \in [V_\alpha]^{\leq\kappa}, \bigcup C \neq X\},$$

entonces

$$| A_\alpha | \leq | [\mathcal{U}_\alpha]^{\leq\kappa} | \leq | \mathcal{U}_\alpha |^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa.$$

Tomemos $H_\alpha = cl(A_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta))$, entonces H_α es cerrado y $H_\beta \subseteq H_\alpha$, para cada $\beta < \alpha$.

Usando el **Teorema 4.0.1** previo, como $A_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta)$ es denso en H_α,

$$| H_\alpha | \leq | A_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta) |^{\chi(H_\alpha)} \leq (2^\kappa + 2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa.$$

Esto completa la construcción de la sucesión $\{H_\alpha \colon \alpha \leq \kappa^+\}$.

Sea $H = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} H_\alpha$, este satisface $| H | \leq 2^\kappa$.

Veamos que H es cerrado; sea $p \in X \setminus H$, entonces para todo $\alpha < \kappa^+$, $p \in X \setminus H_\alpha$. Como H_α es cerrado, existe $V_\alpha \in \mathcal{V}_p$ tal que $V_\alpha \subseteq X \setminus H_\alpha$.

Como $| \mathcal{V}_p | \leq \kappa$ existe $A \subseteq \kappa^+$ cofinal y $V \in \mathcal{V}_p$ tales que para todo $\alpha \in A$, $V \subseteq X \setminus H_\alpha$

$$V \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} (X \setminus H_\alpha) = \bigcap_{\alpha<\kappa^+} X \setminus H_\alpha$$

pues la sucesión $\{X \setminus H_\alpha \colon \alpha < \kappa^+\}$ es decreciente y A es cofinal con κ^+. Así mismo

$$\bigcap_{\alpha<\kappa^+} X \setminus H_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha<\kappa^+} H_\alpha = X \setminus H.$$

Así, H es cerrado.

La prueba estaría completa si $X = H$. Si suponemos que no es así, podemos tomar $q \in X \setminus H$.

Para cada $p \in H$, tomamos $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que $q \notin V_p$, entonces $\{V_p \colon p \in H\} \cup (X \setminus H)$ forman una cubierta abierta de X. De donde podemos afirmar que existe $B \subseteq H$ tal que $\mid B \mid \leq L(X) \leq \kappa$ y $\{V_p \colon p \in B\}$ es una cubierta abierta de H.

Sea $W = \bigcup_{p \in B} V_p$, entonces $H \subseteq W$ y $q \notin W$. Como $\mid B \mid \leq \kappa$, existe $\alpha < \kappa^+$ tal que $B \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$. Como $W \neq X$, entonces $H_\alpha \setminus W \neq \emptyset$, lo cual contradice $H \subseteq W$. Por lo tanto $H = X$.

Finalmente concluimos $\mid X \mid = \mid H \mid \leq 2^\kappa$.

□

Como respuesta a la custión planteada por Urysohn yAlexandroff tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.0.1. *Para un espacio Hausdorff, compacto, primero numerable X, se tiene que:* $\mid X \mid \leq 2^{\aleph_0}$

Demostración

Como X es primero numerable $\chi(X) = \aleph_0$.

Además por ser compacto $L(X) \leq \aleph_0$.

Por lo tanto, usando la desigualdad de Arhangel'skii tenemos que:

$$\mid X \mid \leq 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

□

Capítulo 5

Cardinales de espacios H-cerrados

En el **Capítulo 4** desarrollamos las herramientas necesarias para abordar el tema central del trabajo.

Dividiremos este capítulo en tres partes, en la primera parte mostraremos que para un espacio X arbitrario y una extensión H-cerrada de él, digamos Y. Si existen un espacio Z y $f : Z \longrightarrow Y \setminus X$ una biyección continua. Entonces existe T una extensión H-cerrada de X de forma que Z es homeomorfo a $T \setminus X$ y $\chi(T) \leq max\{\chi(Z),\ \chi(Y)\}$.

En la segunda parte mostraremos que para un espacio X de cardinalidad κ, existe una extensión H-cerrada $h\kappa$ de κ de tal manera que X es homeomorfo a $h\kappa \setminus \kappa$ y $\chi(h\kappa) \leq \chi(X)$.

En la última parte resolvemos el problema de acotar κ el cardinal de un espacio H-cerrado X. Primero acotaremos la cardinalidad de una extensión H-cerrada de un espacio discreto, para así acotar el cardinal del espacio $h\kappa$ obtenido en la segunda sección. Con ello finalmente se obtendrá una cota para el cardinal del espacio X.

El siguiente teorema presenta la extensión simple asociada a una extensión fija de un espacio X.

Teorema 5.0.1. *Sean X un espacio topológico y Y una extensión de X.*

Definimos $O^p = \{W \cap X \colon W \text{ es abierto en } Y \text{ y } p \in W\}$ y $\mathcal{B} = \{U \cup \{p\} \colon U \in O^p \text{ y } p \in Y\}$.

Entonces:

1. *$\mathcal{B}$ es base para una topología τ^+ en Y y $\tau_Y \subseteq \tau^+$*

2. (Y, τ^+) *es una extensión de* X*.*

3. $Y \setminus X$ *es un subespacio cerrado y discreto de* (Y, τ^+)

Demostración

1. Para probar que $\mathcal{B}$ es base de una topología en Y probaremos que para $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ tales que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ y $p \in A_1 \cap A_2$, existe $A_3 \in \mathcal{B}$ tal que $p \in A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.

   Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ y supongamos que son de la forma $A_1 = U \cup \{p\}$ y $A_2 = V \cup \{q\}$, donde $U \in O^p$ y $V \in O^q$.

   Supongamos que existe $r \in A_1 \cap A_2$.

   Caso 1) Si $p = q$.

   Entonces $(U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{q\}) = (U \cap V) \cup \{p\}$, como $U, V \in O^p$, $U \cap V \in O^p$. De donde $(U \cap V) \cup \{p\} \in \mathcal{B}$ y así, $r \in (U \cap V) \cup \{p\} \subseteq A_1 \cap A_2$

   Caso 2) Si $p \neq q$.

   Entonces

$$(U \cup \{p\}) \cap (V \cup \{q\}) = (U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\}) \cup (\{p\} \cap \{q\})$$

$$= (U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\})$$

   Si suponemos que $p \in V$ y $q \in U$.

   Ya que $U \in O^p$ y $V \in O^q$, tenemos:

$$(U \cap \{q\}) = \{q\} \quad \text{y} \quad (V \cap \{p\}) = \{p\}.$$

   Como $U, V \subseteq X$, entonces $p, q \in X$. Así, $p, q \in U \cap V$. Por lo tanto

$$(U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\}) = (U \cap V) \cup \{p\} \cup \{q\} = (U \cap V).$$

   Si $p \in V$ y $q \notin U$.

   Tenemos:

$$(V \cap \{p\}) = \{p\} \quad \text{y} \quad (U \cap \{q\} = \emptyset).$$

Ya que $U \in O^p$,

$$(U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\}) = (U \cap V) \cup \{p\} = (U \cap V)$$

Análogamente si $p \notin V$ y $q \in U$, tenemos:

$$(U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\}) = (U \cap V) \cup \{q\} = (U \cap V)$$

Si $p \notin V$ y $q \notin U$, tenemos:

$$(V \cap \{p\}) = \emptyset = (U \cap \{q\}).$$

De donde

$$(U \cap V) \cup (U \cap \{q\}) \cup (V \cap \{p\}) = (U \cap V).$$

En cualquier caso $A_1 \cap A_2 = U \cap V$.

De esta manera podemos afirmar que $r \in (U \cap V)$. Si definimos $A_3 = (U \cap V) \cup \{r\}$, entonces $A_3 \in \mathcal{B}$ y $r \in A_3 \subseteq A_1 \cap A_2$.

Lo cual concluye el caso 2)

Mostraremos que $Y \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Sea $p \in Y$, entonces existe W un abierto de (Y, τ_Y) tal que $p \in W$. Y así $(W \cap X) \in O^p$. Definamos $A = (W \cap X) \cup \{p\}$, este es un elemento de $\mathcal{B}$ tal que $p \in A$.

Por lo tanto $Y \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Podemos concluir que $\mathcal{B}$ es base para una topología en Y, la cuál denotaremos por τ^+.

Veamos que $\tau_Y \subseteq \tau^+$.

Sea $V \subseteq Y$ un abierto no vacío. Como $V = \bigcup \{(V \cap X) \cup \{r\} : r \in V\}$, entonces V es unión de abiertos básicos de (Y, τ^+) y en consecuencia V es un abierto de (Y, τ^+).

Como la topología de Y es Hausdorff y $\tau_Y \subseteq \tau^+$, entonces (Y, τ^+) también es Hausdorff.

2. Claramente la topología de X coincide con la topología de subespacio que hereda de (Y, τ^+). Veamos que X es denso en (Y, τ^+)

Sea $U \in \mathcal{B}$, supongamos que U es de la forma $U = V \cup \{p\}$ para algún $p \in Y$, donde $V \in O^p$.

Por la definición de O^p, $V = W \cap X$, para algún $W \in \tau_Y$ tal que $p \in W$. Como X es denso en (Y, τ_Y) y $W \in \tau_Y$ no es vacío, $(W \cap X) \neq \emptyset$.

Así, $U \cap X = (V \cup \{p\}) \cap X \supseteq (V \cap X) = (W \cap X) \neq \emptyset$.

Por lo tanto (Y, τ^+) es una extensión de X.

3. Veamos que X es abierto en (Y, τ^+).

   Sea $p \in X$, entonces $X \in O^p$. Luego, $p \in (X \cup \{p\}) \in \mathcal{B}$. Con lo cual se verifica que p es un punto interior de X. Por lo tanto X es abierto en (Y, τ^+). En consecuencia $Y \setminus X$ es cerrado.

   Probaremos que $Y \setminus X$ es un subespacio discreto de (Y, τ^+).

   Sea $p \in Y \setminus X$, y sea $V = U \cup \{p\}$, donde $U \in O^p$. Por definición V es un abierto básico de (Y, τ^+) tal que $p \in V$.

   Ya que $U \in O^p$, $U \subseteq X$, de donde $V \cap (Y \setminus X) = \{p\}$.

   Por lo tanto $Y \setminus X$ es discreto en (Y, τ^+).

□

Definición 5.0.1. *Sea X un espacio y Y una extensión de X. A el espacio descrito en el* ***Teorema 5.0.1*** *se le conoce como la extensión simple de X asociada a Y. Denotaremos con Y^+ a la pareja (Y, τ^+).*

La siguiente proposición nos brinda una caracterización para saber cuándo una extensión de un espacio X es H-cerrada.

Proposición 5.0.1. *Sean X un espacio topológico y Y una extensión de X.*

Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. *Y es H-cerrado*
2. *Para cada filtro abierto $\mathcal{U}$ en X, existe $p \in Y$ tal que para todo $W \in O^p$ y para todo $U \in \mathcal{U}$, se tiene que $U \cap W \neq \emptyset$.*
3. *Cada ultrafiltro abierto en X contiene a O^p para algún $p \in Y$.*

Demostración

1⇒2

Sea $\mathcal{U}$ un filtro abierto en X. Veamos que $\mathcal{G} = \{W \in \tau_Y : W \cap X \in \mathcal{U}\}$ es un filtro abierto en Y.

Sean W_1 y $W_2 \in \mathcal{G}$, entonces $(W_1 \cap X)$ y $(W_2 \cap X) \in \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un filtro

$$(W_1 \cap X) \cap (W_2 \cap X) \in \mathcal{U}.$$

Pero $(W_1 \cap X) \cap (W_2 \cap X) = (W_1 \cap W_2) \cap X$.

De donde $(W_1 \cap W_2) \in \mathcal{G}$.

Sean $W \in \mathcal{G}$ y V un abierto de Y tal que $W \subseteq V$, entonces $W \cap X \subseteq V \cap X$. Como $W \cap X \in \mathcal{U}$ y $V \cap X$ es abierto en X, $(V \cap X) \in \mathcal{U}$ y por lo tanto $V \in \mathcal{G}$. Así podemos concluir que $\mathcal{G}$ es un filtro abierto en Y.

Como Y es H-cerrado, por la **Proposición 2.3.1**, tenemos que $a_Y(\mathcal{G}) \neq \emptyset$. Sea $p \in a_Y(\mathcal{G})$.

Sean $U \in \mathcal{U}$ y $W \in O^p$, entonces existen U_0 y $W_0 \in \tau_Y$ tales que $U_0 \cap X = U$ y $W_0 \cap X = W$.

Por lo cual $U_0 \in \mathcal{G}$ y así $p \in cl_Y(U_0)$. De modo $W_0 \cap U_0 \neq \emptyset$. Como X es denso en Y, se sigue que $W_0 \cap U_0 \cap X \neq \emptyset$, es decir, $W \cap U \neq \emptyset$.

2 ⇒3

Dado $\mathcal{U}$ un ultrafiltro abierto en X, por hipótesis existe $p \in Y$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}$ y para todo $W \in O^p$, $U \cap W \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, se sigue que para todo $W \in O^p$, $W \in U$, es decir, $O^p \subseteq \mathcal{U}$.

3⇒1

Sea $\mathcal{G}$ un filtro abierto en Y y $\mathcal{U} = \{G \cap X : G \in \mathcal{G}\}$, entonces $\mathcal{U}$ es base de filtro en X el cual está contenido en un ultrafiltro abierto $\mathcal{V}$. Por hipótesis existe $p \in Y$ tal que $O^p \subseteq \mathcal{V}$, lo cual implica $p \in a_X(\mathcal{V}) \subseteq a_X(\mathcal{U}) \subseteq a_Y(\mathcal{G})$. Por lo tanto de la proposición **2.3.1** se sigue que Y es H-cerrado. □

Lema 5.0.1. *Sean X un espacio topológico, Y una extensión de X y Y^+ la extensión* *simple de X asociada a Y.*

Consideremos $O^p = \{W \cap X : W \in \tau_Y,\ p \in W\}$ *y* $O^{+p} = \{V \cap X : V \in \tau^+,\ p \in V\}$.

Entonces para cada $p \in Y$ *se satisface* $O^p = O^{+p}$.

Demostración

Sean $p \in Y$ y $V \in O^p$.

Definimos $S = V \cup \{p\}$, como $V \in O^p$, S es un abierto básico de Y^+ y $S \cap X = V$. Por lo cual $V \in O^{+p}$. Lo que prueba que $O^p \subseteq O^{+p}$.

Para la otra contención tomemos $U \in O^{+p}$, entonces existe $W \in \tau^+$ tal que $p \in W$ y $W \cap X = U$.

Sea $A \subseteq Y$ de tal forma que $W = \bigcup_{a \in A} (W_a \cup \{a\})$, donde $W_a \in O^a$ para cada $a \in A$, es decir lo expresamos como unión de elementos de la base. Además como $p \in W$, podemos suponer que $p \in A$.

Observación:

$$U = W \cap X = \bigcup_{a \in A} (W_a \cup \{a\}) \cap X = \bigcup_{a \in A} [(W_a \cup \{a\}) \cap X] = \bigcup_{a \in A} W_a.$$

Como $W_a \in O^a$, entonces existe R_a un abierto de Y tal que $a \in R_a$ y $R_a \cap X = W_a$

Sea $R = \bigcup_{a \in A} R_a$, entonces R es un abierto de Y y dado que $p \in A$, se sigue que $p \in R$. Además

$$R \cap X = \bigcup_{a \in A} R_a \cap X = \bigcup_{a \in A} W_a = U.$$

Por lo tanto $U \in O^p$ y así $O^{+p} \subseteq O^p$.

Finalmente $O^p = O^{+p}$.

Corolario 5.0.1. *Sean X un espacio topológico, Y una extensión de X y Y^+ la extensión simple de X asociada a Y. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Y es H-cerrado.*
2. *Y^+ es H-cerrado.*

Demostración

Supongamos que Y es H-cerrado.

Sea $\mathcal{U}$ un filtro abierto en X, entonces de la **Proposición 5.0.1**, existe $p \in Y$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}$ y para todo $W \in O^p$, $U \cap W \neq \emptyset$.

Del **Lema 5.0.1** $O^p = O^{+p}$. Por lo tanto para todo $U \in \mathcal{U}$ y para todo $V \in O^{+p}$, $U \cap V \neq \emptyset$. Así de la **Proposición 5.0.1**, Y^+ es H-cerrado.

Análogamente probamos la otra parte del corolario. $\square$

A continuación mostramos el teorema principal de esta sección.

Usaremos este resultado conocido, cuya prueba no se incluye.

Lema 5.0.2. *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y $p \in A$, entonces:*

- $\chi(p, A) \leq \chi(p, X)$.
- *Si A es abierto, entonces $\chi(p, A) = \chi(p, X)$.*

Teorema 5.0.2. *Sea X un espacio topológico, Y una extensión H-cerrada de X y supongamos que Z es un espacio para el cual existe una biyección continua $f \colon Z \longrightarrow Y \setminus X$, donde $Y \setminus X$ se considera con la topología de subespacio de Y.*

Entonces existe T una extensión H-cerrada de X tal que

$$T \setminus X \cong Z \quad y \quad \chi(T) \leq \max\{\chi(Z),\ \chi(Y)\}.$$

Demostración

Consideremos Y^+ la extensión simple de X asociada a Y, por el **Corolario 5.0.1** tenemos que Y^+ es H-cerrado.

Ahora vamos a definir la extensión T de X que satisface la conclusión del teorema.

Sea $\tau^* = \{W \in \tau^+ \colon f^{\leftarrow}[W \cap (Y \setminus X)] \text{ es abierto en } Z\}$.

Veamos que τ^* define una topología en Y.

1. $\emptyset, Y \in \tau^*$ pues $f^{\leftarrow}[\emptyset] = \emptyset$ y $f^{\leftarrow}[Y \cap (Y \setminus X)] = Z$ que son abiertos de Z y además $\emptyset, Y \in \tau^+$.

2. Dada una familia $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \tau^*$, entonces para toda $i \in I$, $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \tau^+$ y para toda $i \in I$, $f^{\leftarrow}[W_i \cap (Y \setminus X)]$ es abierto en Z. Entonces

$$\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau^+ \quad \text{y} \quad f^{\leftarrow}[\bigcup_{i\in I} W_i \cap (Y \setminus X)] = \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}[W_i \cap (Y \setminus X)]$$

que es unión de abiertos, así $\bigcup_{i\in I} W_i \in \tau^*$.

3. Sean $W_1, W_2 \in \tau^*$.

   Entonces $W_1 \cap W_2 \in \tau^+$ y $f^{\leftarrow}[W_1 \cap W_2 \cap (Y \setminus X)] = f^{\leftarrow}[W_1 \cap (Y \setminus X)] \cap f^{\leftarrow}[W_2 \cap (Y \setminus X)]$, que es abierto en Z pues es intersección de abiertos, de donde $W_1 \cap W_2 \in \tau^*$

Por lo tanto tenemos una topología τ^* en Y, denotemos como Y^* a la pareja (Y, τ^*).

Sea U un abierto de Y, entonces $U \in \tau^+$. Como $U \cap (Y \setminus X)$ es un abierto relativo a $Y \setminus X$, $f^{\leftarrow}[U \cap (Y \setminus X)]$ es abierto en Z.

Como $Im(f) = Y \setminus X$, $f^{\leftarrow}[U] = f^{\leftarrow}[U \cap (Y \setminus X)]$. Se tiene que $f^{\leftarrow}[U] \in \tau_Z$ y por lo tanto $U \in \tau^*$, de donde $\tau_Y \subseteq \tau^*$ y como Y es Hausdorff, Y^* es también Hausdorff.

Veamos ahora que Y^* es una extensión de X. Claramanete la topología de X coincide con la que hereda como subespacio de Y^*

Sea $V \in \tau^*$ no vacío, como $V \in \tau^+$, entonces $V \cap X \neq \emptyset$ pues X es denso en Y^+. Así, X es denso también en Y^*.

La identidad $i\colon Y^+ \longrightarrow Y^*$ es una función continua ya que para un abierto $V \in \tau^*$, $V \in \tau^+$ y $i^{\leftarrow}[V] = V$. Usando el inciso 6 de la **Proposición 2.3.3**, Y^* es H-cerrado.

De la misma forma podemos ver que $f : Z \longrightarrow Y^* \setminus X$ es una biyección continua.

Ahora veamos que $f : Z \longrightarrow (Y \setminus X)$ es una función abierta.

Sea W un abierto no vacío de Z, entonces $f[W]$ es un abierto en $Y \setminus X$ visto como subespacio de Y^+, pues $Y \setminus X$ es un subespacio discreto de Y^+. De acuerdo a la definición de τ^+ concluimos que f es abierta y por lo tanto es un homeomorfismo entre Z y $Y^* \setminus X$.

Ahora mostremos que $\chi(Y^*) \leq \max\{\chi(Y), \chi(Z)\}$.

Sea $\kappa = \text{máx}\{\chi(Y), \chi(Z)\}$.

Caso i) $p \in X$.

Por el **Teorema 5.0.1**, X es abierto en Y^+ y además $f^{\leftarrow}[X] = \emptyset$. De acuerdo con la definición de τ^*, X es abierto en Y^*.

Por el **Lema 5.0.2**, $\chi(p, Y^*) = \chi(p, X)$. Además X es un subespacio de Y, entonces $\chi(p, X) \leq \chi(p, Y)$. Finalmente, como $\chi(Y) \leq \kappa$, tenemos entonces la siguiente cadena:

$\chi(p, Y^*) = \chi(p, X) \leq \chi(p, Y) \leq \chi(Y) \leq \kappa$.

Caso ii) $p \in Y \setminus X$.

Sea $\mathcal{B}_Z$ una base local de p en $Y^* \setminus X$ tal que $| \mathcal{B}_Z | \leq \chi(Z)$, esto se puede hacer ya que $Y^* \setminus X \cong Z$.

Ya que cada $U \in \mathcal{B}_Z$ es un abierto relativo a $Y^* \setminus X$, podemos elegir $V_U \in \tau^+$ fijo, tal que $V_U \cap (Y \setminus X) = V_U \setminus X = U$.

Sea $\mathcal{B}_Z^* = \{V_U : U \in \mathcal{B}_Z\}$, entonces $| \mathcal{B}_Z^* | \leq | \mathcal{B}_Z | \leq \chi(Z)$.

Tomemos ahora $\mathcal{B}_Y$ una base local para p en Y tal que $| \mathcal{B}_Y | \leq \chi(Y)$.

Y $\mathcal{B} = \{V_U \cap W : U \in \mathcal{B}_Z,\ W \in \mathcal{B}_Y\}$, entonces $| \mathcal{B} | \leq \chi(Z) \cdot \chi(Y) \leq \kappa$.

Sea $U_0 \in \tau^*$ tal que $p \in U_0$, entonces existe $U \in \mathcal{B}_Z$ tal que $p \in U$ y $U \subseteq U_0 \setminus X$, pues $U_0 \setminus X$ es una vecindad de p en $Y \setminus X$ ya que $p \in U_0 \cap (Y \setminus X) = (U_0 \setminus X)$, que es un abierto relativo a $Y^* \setminus X$.

Además $U_0 \in \tau^* \subseteq \tau^+$, entonces existe $W_0 \in \tau_Y$ tal que $p \in W_0$ y $(W_0 \cap X) \cup \{p\} \subseteq U_0$. Entonces existe $W \in \mathcal{B}_Y$ tal que $W \subseteq W_0$.

Afirmación: $V_U \cap W \subseteq U_0$.

Sea $y \in V_U \cap W$.

Si $y \in X$, entonces $y \in W_0 \cap X \subseteq U_0$.

Si $y \notin X$, entonces $y \in V_U \setminus X = U \subseteq U_0$.

De esta forma, $\mathcal{B}$ forma también una base local de p en Y^*

Como esto sucede para todo punto $p \in Y^*$, κ es una cota superior para $\chi(p, Y^*)$ y por lo tanto $\chi(Y^*) \leq \kappa$. $\square$

5.1. Suficiencia de densos discretos.

El propósito es encontrar una relación entre el carácter de un espacio H-cerrado y su cardinalidad.

Para ello, probaremos que es suficiente encontrar dicha relación para espacios H-cerrados con un conjunto denso de puntos aislados.

Particularmente probaremos que para cualquier H-cerrado infinito, existe otro espacio H-cerrado con un conjunto denso de puntos aislados de tal forma que ambos tienen el mismo cardinal y carácter.

Comenzaremos estudiando las extensiones H-cerradas de un espacio discreto.

Sea κ un cardinal infinito con la topología discreta. $\beta\kappa$ denota la compactación de Stone-Čech de κ. Tomemos $\{F_i \colon i \in I\}$ una familia de cerrados no vacíos y ajenos dos a dos en $\beta\kappa \setminus \kappa$.

Definimos $Y = \kappa \cup \{F_i \colon i \in I\}$ y le daremos una topología de la siguiente manera: $U \subseteq Y$ es abierto si ocurre una de las siguientes condiciones:

1. $U \subseteq \kappa$
2. Para cada $i \in I$, si $F_i \in U$, entonces $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)$.

La siguiente proposición nos asegura que estamos definiendo una extensión para κ.

Proposición 5.1.1. *Para $Y = \kappa \cup \{F_i \colon i \in I\}$, los abiertos definidos anteriormente generan una topología Hausdorff en Y.*

Más aun, Y es una extensión de κ.

Demostración

Sea τ_Y la colección de $U \subseteq Y$ que satisfacen las condiciones 1 o 2 descritas arriba.

1. *a*) $\emptyset \in \tau_Y$, pues $\emptyset \subseteq \kappa$.

$Y \in \tau_Y$ pues $cl_{\beta\kappa}(Y \cap \kappa) = \beta\kappa$ por la densidad de κ, tenemos que para toda $i \in I$, $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(Y \cap \kappa)$.

b) Para demostrar que τ_Y es cerrada bajo uniones arbitrarias, veremos tres casos:

Caso 1) $\{U_j : j \in J\} \subseteq \tau_Y$ es una familia que satisface la condición 1.
Entonces $\bigcup_{j\in J} U_j \subseteq \kappa$, el cual satisface la condición 1. Por lo tanto $\bigcup_{j\in J} U_j$ es abierto en Y.

Caso 2) $\{U_j : j \in J\} \subseteq \tau_Y$ una familia que satisface la condición 2, es decir, para todo $j \in J$ existe F_j tal que $F_j \in U_j$.

Si tomamos $j_0 \in J$ arbitrario, entonces

$$F_{j_0} \subseteq cl_{\beta\kappa}(U_{j_0} \cap \kappa).$$

A su vez

$$cl_{\beta\kappa}(U_{j_0} \cap \kappa) \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J} U_j) \cap \kappa),$$

de donde

$$F_{j_0} \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J} U_j) \cap \kappa).$$

Por lo cual, para toda $j \in J$

$$F_j \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J} U_j) \cap \kappa)$$

y así, finalmente

$$\bigcup_{j\in J} F_j \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J} U_j) \cap \kappa).$$

Lo que implica $\bigcup_{j\in J} U_j$ satisface la condición 2. Por lo tanto $\bigcup_{j\in J} U_j$ es abierto en Y.

Caso 3) $\{U_j : j \in J\} \subseteq \tau_Y$ contiene elementos que satisfacen la condición 1 o 2.

Sea $J_0 \subseteq J$ tal que para $j \in J_0$, U_j satisface la condición 2. Entonces para todo $j \in J_0$,

$$F_j \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J_0} U_j) \cap \kappa) \subseteq cl_{\beta\kappa}((\bigcup_{j\in J} U_j) \cap \kappa).$$

Así, $\bigcup_{j\in J} U_j$ satisface la condición 2. Por lo tanto es abierto en Y.

c) Veamos que es cerrado bajo intersecciones finitas.

Caso 1) $U_1, U_2 \in \tau_Y$ y sea $i \in I$ tal que $F_i \in U_1 \cap U_2$.

Entonces $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(U_1 \cap \kappa) \cap cl_{\beta\kappa}(U_2 \cap \kappa)$. Como κ es discreto, entonces $cl_{\beta\kappa}(U_1 \cap \kappa) \cap cl_{\beta\kappa}(U_2 \cap \kappa) = cl_{\beta\kappa}(U_1 \cap U_2 \cap \kappa)$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2$ cumple la condición 2. En consecuencia es abierto en Y.

Caso 2) $U_1, U_2 \subseteq \kappa$.

Entonces $U_1 \cap U_2 \subseteq \kappa$. Por lo tanto $U_1 \cap U_2$ satisface la condición 1, por lo tanto es abierto en Y.

Caso 3) $U_1 \subseteq \kappa$ y existe $i \in I$ tal que $F_i \in U_2$.

$U_1 \cap U_2 \subseteq \kappa$, por lo que se cumple la condición 1. Así, $U_1 \cap U_2$ es abierto en Y.

Por lo tanto τ_Y es topología para Y.

2. Veamos que dicha topología es Hausdorff.

Sean $p, q \in Y$ tales que $p \neq q$.

a) Si $p, q \in \kappa$, entonces $\{p\}$ y $\{q\}$ son abiertos en Y tales que $p \in \{p\}$, $q \in \{q\}$ y además $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$.

b) Si $p \in \kappa$ y $q = F_i$, para alguna $i \in I$. $\{p\}$ y $(\kappa \setminus \{p\}) \cup \{F_i\}$ son vecindades abiertas en Y tales que $p \in \{p\}$, $F_i \in (\kappa \setminus \{p\}) \cup \{F_i\}$ y $\{p\} \cap (\kappa \setminus \{p\}) \cup \{F_i\} = \emptyset$.

c) Si $p = F_i$, $q = F_j$ para algunas $i, j \in I$.

Como F_i, F_j son compactos ajenos, existen conjuntos abiertos y ajenos, $V_1, V_2 \subseteq \beta\kappa$ tales que $F_i \subseteq V_1$, $F_j \subseteq V_2$.

Entonces $(V_1 \cap \kappa) \cup \{F_i\}$, $(V_2 \cap \kappa) \cup \{F_j\}$ son vecindades abiertas en Y de F_i y F_j respectivamente tales que $[(V_1 \cap \kappa) \cup \{F_i\}] \cap [(V_2 \cap \kappa) \cup \{F_j\}] = \emptyset$.

En cualquier caso, para cada par de elementos $p, q \in Y$, donde $p \neq q$, existen abiertos ajenos $V, W \subseteq Y$ tales que $p \in V$ y $q \in W$. Por lo tanto Y es Hausdorff.

3. Demostraremos que κ es denso en Y.

Sea $U \subseteq Y$ abierto y no vacío, entonces:

$U \subseteq \kappa$ no vacío, o bien, existe $i \in I$ tal que $F_i \in U$ por lo cual $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)$, como $F_i \neq \emptyset$ para toda $i \in I$, $U \cap \kappa \neq \emptyset$. Esto implica κ es denso en Y y por lo tanto Y es una extensión de κ.

□

En el siguiente teorema encontramos condiciones necesarias y suficientes para que el espacio descrito en la **Proposición 5.1.1** sea una extensión H-cerrada de X.

Teorema 5.1.1. *$Y = \kappa \cup \{F_i \colon i \in I\}$ es H-cerrado si y sólo si $\{F_i \colon i \in I\}$ es una partición en cerrados de $\beta\kappa \setminus \kappa$.*

Demostración

$\Rightarrow$] Supongamos que Y es H-cerrado. Sea $p \in \beta\kappa \setminus \kappa$.

Queremos demostrar que existe $i \in I$ tal que $p \in F_i$. Supongamos por el contrario que para todo $i \in I$, $p \notin F_i$.

Como $p \in \beta\kappa \setminus \kappa$, p es un ultrafiltro libre en κ y esto define una base de filtro abierto en Y.

Como Y es H-cerrado entonces $a_Y(p) \neq \emptyset$, sea $z \in a_Y(p)$.

Tenemos dos posibles casos.

1. Supongamos que $z \in \kappa$. Entonces $\{z\}$ es abierto en Y y en consecuencia, para todo $U \in p$, $z \in U$, es decir, $z \in \bigcap p$, pero eso no es posible pues p es libre.

2. Si suponemos que $z \notin \kappa$, entonces existe $i \in I$ tal que $z = F_i$.

   Como $p \notin F_i$ y F_i es cerrado en $\beta\kappa$, existe $U \in p$ tal que $F_i \cap cl_{\beta\kappa}(U) = \emptyset$.

   Como κ es discreto, se sigue que $\beta\kappa = cl_{\beta\kappa}(U) \cup cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus U)$. Por lo tanto $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus U)$, esto quiere decir que $(\kappa \setminus U) \cup \{F_i\}$ es una vecindad en Y de F_i.

   Como $F_i \in a_Y(p)$, entonces $F_i \in cl_Y(U)$. De donde $((\kappa \setminus U) \cup \{F_i\}) \cap U \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto existe $i \in I$ tal que $p \in F_i$.

De acuerdo con la definición del espacio tenemos que los F_i son conjuntos cerrados, no vacíos y ajenos dos a dos.

Por lo tanto $\{F_i \colon i \in I\}$ es partición de $\beta\kappa \setminus \kappa$.

$\Leftarrow$] Supongamos que $\{F_i \colon i \in I\}$ es partición de $\beta\kappa \setminus \kappa$.

Sea $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ una cubierta abierta de Y.

Afirmamos que $\mathcal{A} = \{cl_{\beta\kappa}(U_\alpha \cap \kappa) \colon \alpha \in A\}$ es una cubierta abierta de $\beta\kappa$.

$\mathcal{A}$ es una familia de abiertos puesto que κ es discreto, y en consecuencia $\beta\kappa$ es extremadamente disconexo.

Claramente $\kappa \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap \kappa)$.

Sea $p \in \beta\kappa \setminus \kappa$. Como $\{F_i \colon i \in I\}$ es partición de $\beta\kappa \setminus \kappa$, existe $i \in I$ tal que $p \in F_i$. Por lo tanto existe $\alpha \in A$ tal que $F_i \in U_\alpha$. De donde $p \in F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(U_\alpha \cap \kappa)$.

Lo que prueba que $\mathcal{A}$ es cubierta abierta de $\beta\kappa$.

Por lo tanto existe $A_0 \subseteq A$ finito tal que $\beta\kappa = \bigcup\limits_{\alpha \in A_0} cl_{\beta\kappa}(U_\alpha \cap \kappa)$.

Como κ es discreto, necesariamente ocurre que $\kappa \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)$.

De lo contrario, si existe $p \in \kappa \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)$, entonces $\{p\}$ y $\bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)$, son abiertos en κ y además $\{p\} \cap (\bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)) = \emptyset$, de donde $cl_{\beta\kappa}(\{p\}) \cap cl_{\beta\kappa}(\bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)) = \emptyset$. Lo cual no es posible ya que $cl_{\beta\kappa}(\bigcup\limits_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)) = \beta\kappa$.

Como consecuencia

$$Y = cl_Y(\kappa) \subseteq cl_Y(\bigcup_{\alpha \in A_0} (U_\alpha \cap \kappa)) \subseteq cl_Y(\bigcup_{\alpha \in A_0} U_\alpha).$$

Por lo tanto $\bigcup\limits_{\alpha \in A_0} U_\alpha$ es denso en Y. Por lo que Y es H-cerrado.

$\square$

Esta extensión cobrará una enorme importancia pues la usaremos frecuentemente por las propiedades que describiremos a continuación.

Definición 5.1.1. *Sea X un espacio y λ un cardinal, $F \subseteq X$ es un G_λ conjunto en X si $F = \bigcap_{\alpha \leq \lambda} A_\alpha$ donde para cada $\alpha \leq \lambda$, A_α es abierto en X.*

Lema 5.1.1. *Sea $\{F_i \colon i \in I\}$ una coleccion de subconjuntos cerrados de $\beta\kappa \setminus \kappa$, entonces existe λ, un cardinal mínimo tal que $F_i = \bigcap_{\alpha < \lambda} U_\alpha$, donde U_α es abierto y cerrado de $\beta\kappa$.*

Demostración

Como $\beta\kappa$ es cero-dimensional, para cada $i \in I$ existe una familia de abiertos y cerrados

$$\{U_\alpha(i) \colon \alpha < \mu_i\} \quad \text{tal que} \quad F_i = \bigcap_{\alpha < \mu_i} U_\alpha(i).$$

Ya que $\mu_i \leq w(\beta\kappa)$, existe $\mu = sup\{\mu_i \colon i \in I\}$.

Así, dado $i \in I$, si $\mu_i \leq \alpha < \mu$, definimos $U_\alpha(i) = \beta\kappa$. De donde $F_i = \bigcap_{\alpha < \mu} U_\alpha(i)$.

Por lo tanto, existe $\lambda = min\{\gamma \colon F_i \text{ es un } G_\gamma\}$. □

Con la ayuda del siguiente teorema podemos acotar el carácter del espacio Y de la **Proposición 5.1.1**

Lema 5.1.2. *Sea $\{F_i \colon i \in I\}$ una colección de cerrados no vacíos y ajenos dos a dos de $\beta\kappa \setminus \kappa$. Sea $Y = \kappa \cup \{F_i \colon i \in I\}$ y sea λ es el mínimo cardinal tal que cada F_i puede ser escrito como la intersección de λ abiertos y cerrados en $\beta\kappa$.*

Entonces $\chi(Y) = \lambda$.

Demostración

Sea $A \subseteq \kappa$, este es abierto en κ por ser un espacio discreto, entonces $cl_{\beta\kappa}(A)$ es también abierto puesto que $\beta\kappa$ es extremadamente disconexo.

Sean $i \in I$ fijo y $A_\alpha \subseteq \kappa$, con $\alpha \leq \lambda$ tales que $F_i = \bigcap_{\alpha \leq \lambda} cl_{\beta\kappa}(A_\alpha)$.

Afirmamos que $\mathcal{F} = \{A_\alpha \colon \alpha \leq \lambda\}$ tiene la p.i.f.

En efecto, sean $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Supongamos que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$, entonces

$$(\kappa \setminus A_1) \cup (\kappa \setminus A_2) \cup \ldots \cup (\kappa \setminus A_n) = \kappa.$$

Por la densidad de κ en $\beta\kappa$,

$$\beta\kappa = cl_{\beta\kappa}((\kappa \setminus A_1) \cup (\kappa \setminus A_2) \cup \ldots \cup (\kappa \setminus A_n)) = cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_1) \cup cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_2) \cup \ldots \cup cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_n).$$

Observemos que para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\kappa = A_j \cup (\kappa \setminus A_j)$, por lo cual $\beta\kappa = cl_{\beta\kappa}(A_j \cup (\kappa \setminus A_j))$.

Como estos son abiertos y cerrados ajenos en κ se satisface que $cl_{\beta\kappa}(A_j) \cap cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_j) = \emptyset$. Por lo tanto $\beta\kappa \setminus cl_{\beta\kappa}(A_j) = cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_j)$.

De la observación podemos deducir que

$$\beta\kappa = \bigcup_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(\kappa \setminus A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} [\beta\kappa \setminus cl_{\beta\kappa}(A_i)].$$

De donde, $\bigcap_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(A_i) = \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(A_j)$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por lo tanto la familia $\mathcal{F}$ tiene la p.i.f.

Así, el conjunto $\mathcal{F}$ define una base de filtro $\mathcal{U}$ en κ tal que $\mid \mathcal{U} \mid = \lambda$.

El conjunto $\Lambda = \{\{F_i\} \cup U \colon U \in \mathcal{U}\}$ es una base de vecindades de F_i en Y.

Si tomamos $V \subseteq \kappa$ tal que $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(V)$, entonces $(\{F_i\} \cup V)$ es una vecindad abierta de F_i en Y.

Como $F_i = \bigcap_{\alpha<\lambda} cl_{\beta\kappa}(A_\alpha)$, $\bigcap_{\alpha<\lambda} cl_{\beta\kappa}(A_\alpha) \subseteq cl_{\beta\kappa}(V)$.

Recordemos que como $\beta\kappa$ es compacto, dada $\mathcal{F}$ una familia de compactos con la p.i.f. y un abierto U tal que $\bigcap \mathcal{F} \subseteq U$, entonces existe un subconjunto finito $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ de tal forma que $\bigcap \mathcal{F}_0 \subseteq U$.

Esto pues como $\beta\kappa \setminus U$ es compacto y la familia $\{\beta\kappa \setminus F \colon F \in \mathcal{F}\}$ forma una cubierta abierta de $\beta\kappa \setminus U$, existe $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ finito tal que $\beta\kappa \setminus U \subseteq \bigcup_{F\in\mathcal{F}} (\beta\kappa \setminus F)$. De donde $\bigcap \mathcal{F}_0 \subseteq U$.

Ahora bien, como $cl_{\beta\kappa}(V)$ es un abierto en $\beta\kappa$, y $\{cl_{\beta\kappa}(A_\alpha)\colon \alpha < \lambda\}$ es una familia de compactos con pa p.i.f. entonces existen $A_1, \ldots, A_n$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(A_i) \subseteq cl_{\beta\kappa}(V).$$

Además como κ es discreto

$$\bigcap_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(A_i) = cl_{\beta\kappa}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)),$$

de donde

$$cl_{\beta\kappa}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)) \subseteq cl_{\beta\kappa}(V).$$

Ya que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i, V \subseteq \kappa$ podemos afirmar que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq V$.

Sea $U = \bigcap_{A_j\in\mathcal{F}_0} A_j$, entonces $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V$, es decir $(\{F_i\} \cup U) \subseteq (\{F_i\} \cup V)$. Lo que prueba que Λ es una base de vecindades.

Por lo tanto $\chi(F_i, Y) \leq \lambda$. De esta manera λ es una cota superior para $\chi(p, Y)$ para todo $p \in Y$ puesto que κ es discreto. Así, $\chi(Y) \leq \lambda$.

Por otro lado, si $\mathcal{V}_{F_i}$ es base de vecindades abiertas de F_i en Y tal que $\mid \mathcal{V}_{F_i} \mid \leq \chi(Y)$.

Afirmamos que $F_i = \bigcap\{cl_{\beta\kappa}(\kappa \cap U)\colon U \in \mathcal{V}_{F_i}\}$.

Sea $C \subseteq \beta\kappa$ abierto en $\beta\kappa$ tal que $F_i \subseteq C$. Notemos que $C\cap\kappa$ satisface $cl_{\beta\kappa}(C\cap\kappa) = C$ por la densidad de κ en $\beta\kappa$ y $cl_{\beta\kappa}(C\cap\kappa)$ es abierto en $\beta\kappa$, de esta manera $[(C\cap\kappa)\cup\{F_i\}]$ es una vecindad abierta de F_i en Y puesto que $F_i \in [(C \cap \kappa) \cup \{F_i\}]$ y además $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(C \cap \kappa) = C$. Por lo tanto $[(C \cap \kappa) \cup \{F_i\}] \in \mathcal{V}_{F_i}$.

$$F_i = cl_{\beta\kappa}(F_i) = \bigcap\{C\colon C \text{ cerrado en } \beta\kappa \text{ y } F_i \subseteq C\} \subseteq \bigcap\{cl_{\beta\kappa}(U\cap\kappa)\colon U \in \mathcal{V}_{F_i}\} \supseteq F_i,$$

pues $F_i \subseteq cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)$ para toda $U \in \mathcal{V}_{F_i}$.

Así, $F_i = \bigcap\{cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)\colon U \in \mathcal{V}_{F_i}\}$.

Como $\{cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)\colon U \in \mathcal{V}_{F_i}\}$ es una colección de abiertos y cerrados de $\beta\kappa$ ta que $\mid \{cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)\colon U \in \mathcal{V}_{F_i}\} \mid \leq \chi(Y)$, por la elección de λ, $\lambda \leq \chi(Y)$.

Por lo tanto $\lambda = \chi(Y)$. □

En adelante para trabajar la teoría pertinente al absoluto de un espacio X utilizaremos la notación del **Capítulo 3**.

El siguiente lema presenta un resultado técnico.

Lema 5.1.3. *Sean X un espacio H-cerrado, EX el absoluto de X y $\lambda = \chi(X)$.*

Entonces $\{k_X^{\leftarrow}(x)\colon x \in X\}$ forma una partición de EX, donde cada elemento de la partición es un cerrado G_λ de EX.

Demostración

Consideraremos EX como el conjunto de ultrafiltros abiertos en X con adherencia no vacía.

Sean $x \in X$ y $\mathcal{V}_x$ una base de vecindades de x tal que $|\mathcal{V}_x| \leq \lambda$.

Afirmamos que $k_X^{\leftarrow}(x) = \bigcap\{cl_{EX}(k_X^{\leftarrow}(U))\colon U \in \mathcal{V}_x\}$.

Sea $z \in k_X^{\leftarrow}(x)$, entonces $k_X(z) = x \in U$ para toda $U \in \mathcal{V}_x$ de donde $z \in k_X^{\leftarrow}(U) \subseteq cl_{EX} k_X^{\leftarrow}(U)$ para toda $U \in \mathcal{V}_x$.

Sea $z \in \bigcap\{cl_{EX} k_X^{\leftarrow}(U)\colon U \in \mathcal{V}_x\}$, entonces $k_X(z) \in k_X[cl_{EX} k_X^{\leftarrow}(U)]$ para cada $U \in \mathcal{V}_x$.

Si suponemos que $k_X(z) \neq x$, entonces ya que X es Hausdorff, existe $V \in \mathcal{V}_x$ tal que $k_X(z) \notin cl_X(V)$, lo cual no es posible por la elección de z. Ya que

$$z \in cl_{EX}(k^{\leftarrow}(V)) \subseteq \lambda(V) = \{\mathcal{U}\colon \mathcal{U} \text{ es ultra filtro abierto y } V \in \mathcal{U}\}$$

que es un elemento de la base de abiertos y cerrados de EX, así $V \in z$, pero $k_X(z) \notin cl_X(V)$ lo cuál implica $V \notin z$ pues $k_X(z) = \bigcap_{U \in z} cl_X(U)$.

Por lo tanto $k_X(z) = x$.

Para cada $x \in X$, $cl_{EX}(k_X^{\leftarrow}(U))$ es abierto y cerrado en EX. Y $|\{cl_{EX}(k_X^{\leftarrow}(U)) \colon U \in \mathcal{V}_x\}| \leq \lambda$ lo que prueba el lema. $\square$

Teorema 5.1.2. *Sean λ y κ cardinales infinitos.*

Si existe un espacio X compacto que puede ser particionado en κ subconjuntos cerrados G_λ de X. Entonces $\beta\kappa \setminus \kappa$ también puede ser particionado en κ subconjuntos cerrados G_λ de $\beta\kappa$.

Demostración

Sea $\{A_\alpha \colon \alpha \leq \kappa\}$ una partición de X de tal manera que cada A_α es un cerrado no vacío, G_λ de X. Como estos son no vacíos elegimos $x_\alpha \in A_\alpha$.

Como $\omega \leq \kappa$ podemos dar una partición de κ en κ subconjuntos ajenos de tamaño ω, digamos que $\{B_i \colon i \leq \kappa\}$ conforma dicha partición, con $\mid B_i \mid = \omega$ para toda $i \leq \kappa$.

De esta forma podemos definir una función $f \colon \kappa \longrightarrow X$ de tal forma que para cada $i < \kappa$: $f(y) = x_i$, si $y \in B_i$, es decir, es constante x_i en cada elemento B_i de la partición.

Esta función es continua dado que κ es discreto y además $|f^{\leftarrow}(A_\alpha)| = \omega$.

Tomemos la extensión de esta función a la compactación de Stone-Čech de κ,

$\beta f : \beta\kappa \longrightarrow cl_X(f[\kappa])$, pues $cl_X(f[\kappa])$ es un compacto.

Para cada $\alpha \leq \kappa$ definimos

$$Z_\alpha = [(\beta f)^{\leftarrow}(A_\alpha)] \setminus [f^{\leftarrow}(A_\alpha)].$$

Entonces $Z_\alpha \subseteq \beta\kappa \setminus \kappa$ pues para cada $\alpha \leq \kappa$, se tiene que $A_\alpha \cap Im(f) = A_\alpha \cap \{x_\alpha \colon \alpha \leq \kappa\} = \{x_\alpha\}$, de este modo $f^{\leftarrow}(A_\alpha) = f^{\leftarrow}(\{x_\alpha\}) = B_\alpha \subseteq \kappa$.

Afirmación: Z_α es un G_λ de $\beta\kappa$.

Como A_α es un G_λ de X, entonces existe $\{U_i \colon i \leq \lambda\}$ una colección de abiertos tales que $A_\alpha = \bigcap_{i \leq \lambda} U_i$, de donde

$$A_\alpha \cap cl_X(f[\kappa]) = [\bigcap_{i \leq \lambda} U_i] \cap cl_X(f[\kappa]),$$

donde cada $U_i \cap cl_X(f[\kappa])$ es un abierto en $cl_X(f[\kappa])$.

Por la continuidad de βf, tenemos que $(\beta f)^{\leftarrow}[U_i \cap cl_X(f[\kappa])]$ es un abierto en $\beta\kappa$.

Además

$$(\beta f)^{\leftarrow}[A_\alpha \cap cl_X(f[\kappa])] = (\beta f)^{\leftarrow}[A_\alpha],$$

así

$$(\beta f)^{\leftarrow}[A_\alpha] = \bigcap_{i \leq \lambda} (\beta f)^{\leftarrow}[U_i \cap cl_X(f[\kappa])].$$

Por lo tanto $(\beta f)^{\leftarrow}[A_\alpha]$ es un G_λ de $\beta\kappa$.

Por otra parte, podemos escribir $A_\alpha = \bigcup\{\{a_\alpha\}\colon a_\alpha \in A_\alpha\}$, por lo cual $X \setminus A_\alpha = \bigcap\{X \setminus \{a_\alpha\}\colon a_\alpha \in A_\alpha\}$.

Haciendo uso de esas observaciones

$$[(\beta f)^{\leftarrow}(A_\alpha)] \setminus [f^{\leftarrow}(A_\alpha)] = [(\beta f)^{\leftarrow}(A_\alpha)] \cap [\beta\kappa \setminus f^{\leftarrow}(A_\alpha)]$$

$$[(\beta f)^{\leftarrow}(A_\alpha)] \cap [\beta\kappa \setminus f^{\leftarrow}(A_\alpha)] = \bigcap_{i \leq \lambda} (\beta f)^{\leftarrow}[U_i \cap cl_X(f[\kappa])] \cap \bigcap\{\beta\kappa \setminus \{b_\alpha\}\colon b_\alpha \in f^{\leftarrow}(A_\alpha)\}$$

donde el segundo miembro de la intersección es numerable ya que $f^{\leftarrow}(A_\alpha)$ lo es. Por lo tanto Z_α es un G_λ de $\beta\kappa$.

Veamos que $\{Z_\alpha\colon \alpha \leq \kappa\}$ es una familia de conjuntos ajenos dos a dos.

Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2 \leq \kappa$ tales que $Z_{\alpha_1} \cap Z_{\alpha_2} \neq \emptyset$. Sea $z \in Z_{\alpha_1} \cap Z_{\alpha_2}$, entonces

$$z \in [\beta f^{\leftarrow}(A_{\alpha_1}) \cap \beta f^{\leftarrow}(A_{\alpha_2})] \setminus [f^{\leftarrow}(A_{\alpha_1}) \cup f^{\leftarrow}(A_{\alpha_2})],$$

lo que quiere decir que $\beta f(z) \in A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$. Como $\{A_\alpha\colon \alpha \leq \kappa\}$ es una partición de X, entonces $\alpha_1 = \alpha_2$. Por lo tanto $Z_{\alpha_1} = Z_{\alpha_2}$.

Por lo tanto $\{Z_\alpha\colon \alpha \leq \kappa\}$ es una partición en cerrados G_λ de $\beta\kappa \setminus \kappa$.

$\square$

El siguiente teorema nos permite relacionar a un espacio H-cerrado X, de cardinalidad κ y carácter λ con una extensión H-cerrada de κ y cuyo carácter está acotado por λ.

Teorema 5.1.3. *Sean λ, κ cardinales infinitos. Entonces los siguientes son equivalentes:*

1. *Existe un espacio H-cerrado X tal que $\mid X \mid = \kappa$ y $\chi(X) = \lambda$.*
2. *Existe Y una extensión H-cerrada de κ tal que $\mid Y \mid = \kappa$ y $\chi(Y) \leq \lambda$.*
3. *Existe Z un espacio Hausdorff, compacto que puede ser particionado en κ cerrados no vacíos G_λ*

Demostración

$1 \Rightarrow 2$

Supongamos X es un espacio H-cerrado tal que $\mid X \mid = \kappa$ y $\chi(X) \leq \lambda$.

Del **Lema 5.1.3** EX puede ser particionado con $\{k_X^{\leftarrow}(x) \colon x \in X\}$ que resultan cerrados, no vacíos G_λ de EX. Además, como X es H-cerrado, por el **Teorema 3.2.4** EX es compacto.

También notemos que $\mid \{k_X^{\leftarrow}(x) \colon x \in X\} \mid = \kappa$, pues $\mid X \mid = \kappa$. Por el **Teorema 5.1.2** $\beta\kappa \setminus \kappa$ puede ser particionado en κ subconjuntos $\{F_i \colon i \leq \kappa\}$ cerrados, no vacíos, G_λ de $\beta\kappa$.

Aplicando el **Lema 5.1.2**, como cada elemento de la partición es G_λ, entonces $Y = \kappa \cup \{F_i \colon i \leq \kappa\}$ satisface que $\chi(Y) \leq \lambda$. Finalmente como los F_i son una partición del residuo, por el **Teorema 5.1.1** Y es H-cerrado y

$$\mid Y \mid = \mid \{F_i \colon i \leq \kappa\} \mid + \kappa = \kappa.$$

$2 \Rightarrow 3$

Supongamos que Y es una extensión H-cerrada de κ tal que $\mid Y \mid = \kappa$ y $\chi(Y) \leq \lambda$.

Por el **Lema 5.1.3** EY puede ser particionado por $\{k_Y^{\leftarrow}(y) \colon y \in Y\}$, donde cada elemento de la partición es un cerrado G_λ de EY. Además por el **Teorema 3.2.4**, EY es compacto puesto que Y es H-cerrado.

$3 \Rightarrow 2$

Supongamos que existe Z un Hausdorff compacto tal que puede ser particionado en κ conjuntos cerrados G_λ en Z.

Por el **Teorema 5.1.2** $\beta\kappa \setminus \kappa$ puede ser particionado en $\{F_j : j \leq \kappa\}$, κ conjuntos cerrados, no vacíos G_λ de $\beta\kappa$.

Usando el **Lema 5.1.2**, bajo estas hipótesis $Y = \kappa \cup \{F_j : j \leq \kappa\}$ es una extensión H-cerrada de κ tal que $\mid Y \mid = \kappa$ y $\chi(Y) \leq \lambda$.

$2 \Rightarrow 1$

Es inmediato.

$\square$

El siguiente corolario es importante, ya que vemos la forma de construir la extensión adecuada de κ descrita en el **Teorema 5.1.3**

Corolario 5.1.1. *Sean X un espacio H-cerrado y $\mid X \mid = \kappa$, entonces existe una extensión H-cerrada Y de κ tal que $\mid Y \mid = \kappa$ y $\chi(Y) \leq \chi(X)$.*

Demostración

Sean X un espacio H-cerrado, $\kappa = \mid X \mid$ y $\lambda = \chi(X)$.

1. Tomamos EX el absoluto de X y $k_X : EX \longrightarrow X$ la función perfecta irreducible y θ-continua, tal que para cada ultrafiltro abierto fijo $\mathcal{U}$, $k_X(\mathcal{U}) = x$, donde $\{x\} = a(\mathcal{U})$, esta función es caracterizada en el **Teorema 3.2.1**.

   Usando el **Lema 5.1.3** podemos asegurar que $\{(k_X)^{\leftarrow}(x) : x \in X\}$ forma una partición de EX en κ conjuntos G_λ de tamaño κ.

   Ya que EX es un espacio compacto, satisface las hipótesis del **Teorema 5.1.2**. Imitaremos de cierto modo la prueba de este teorema para encontrar la partición de $\beta\kappa \setminus \kappa$ en cerrados G_λ.

   Sabemos que existe $f : \kappa \longrightarrow EX$ tal que para cada $x \in X$, $A_x = f^{\leftarrow}((k_X)^{\leftarrow}(x))$ satisface que $\mid A_x \mid = \omega$.

   Dicha función tiene una extensión continua a la compactación de Stone-Čech de κ, es decir, existe $\beta f : \beta\kappa \longrightarrow EX$ continua tal que $(\beta f)_{\restriction\kappa} = f$.

2. Definamos

$$g = \beta f_{\restriction(\beta\kappa\setminus\kappa)}$$

y para cada $x \in X$,

$$F_x = g^{\leftarrow}(k_X^{\leftarrow}(x)).$$

Afirmamos que $\{F_x \colon x \in X\}$ es una partición en cerrados G_λ de $\beta\kappa \setminus \kappa$.

Notemos que como en la prueba del **Teorema 5.1.2** la partición en A_α's, se corresponden con los conjuntos A_x. Y de la misma forma los Z_α's que utilizamos en la prueba se corresponden con los conjuntos $\{F_x \colon x \in X\}$. Por lo cual podemos afirmar que sí conforma una partición en cerrados G_λ de $\beta\kappa \setminus \kappa$.

3. Sea $Y = \kappa \cup \{F_x \colon x \in X\}$ con la siguiente topología: $U \subseteq Y$ es abierto si satisface alguna de las siguientes condiciones:

   a) $U \subseteq \kappa$.

   b) Si $F_x \in U$, entonces $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U \cap \kappa)$.

   Del **Teorema 5.1.1**, sabemos que en efecto se define una topología en Y, lo denotamos por la pareja (Y, τ_Y). Además el espacio (Y, τ_Y) es H-cerrado y del **Lema 5.1.2**, $\chi(Y) \leq \chi(X)$.

Para finalizar esta sección necesitamos la extensión estricta del espacio Y construido en el **Corolario 5.1.1** para hacer un puente con la primera sección. Esta se define de la siguiente manera:

Proposición 5.1.2. *Sea Y el espacio definido en el **Corolario 5.1.1**.*

Sea $\mathcal{B} = \{\hat{T} \colon T \subseteq \kappa\}$, donde $\hat{T} = T \cup \{F_x \colon T \in \bigcap F_x\}$, entonces $\mathcal{B}$ es base de abiertos para una topología en Y.

Denotaremos con la pareja $(Y^\#, \tau^\#)$ a Y dotado con la topología generada por $\mathcal{B}$.

Demostración

1. $\hat{\kappa} = Y$, pues $\kappa \in \mathcal{U}$ para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ en κ.

   Por lo cuál $\mathcal{B}$ cubre a Y.

2. Sean $T_1, T_2 \subseteq \kappa$ tales que $\hat{T_1} \cap \hat{T_2} \neq \emptyset$.

   Entonces

$$\hat{T_1} \cap \hat{T_2} = T_1 \cap T_2 \cup \{F_x \colon (T_1 \cap T_2) \in \bigcap F_x\} = \widehat{T_1 \cap T_2} \in \mathcal{B}$$

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base para una topología en Y. $\square$

Denotaremos como $Y^{\#}$ al conjunto Y con la topología generada por esta base.

Lema 5.1.4. *Para cada $U \subseteq \kappa$ tenemos que:*

$\hat{U} = U \cup \{F_x \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)\}$.

Demostración

Sea $U \subseteq \kappa$, entonces $\hat{U} = U \cup \{F_x \colon U \in \bigcap F_x\}$.

Por lo cual basta probar que $\{F_x \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)\} = \{F_x \colon U \in \bigcap F_x\}$

Sea F_x tal que $U \in \bigcap F_x$, de donde, para todo $p \in F_x$, $U \in p$.

Ahora bien, como κ es discreto, del inciso 8 del **Teorema 3.2.4**, $cl_{\beta\kappa}(U) = U \cup \{p \in (\beta\kappa \setminus \kappa) \colon U \in p\}$. Por lo cual $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$.

Si suponemos que $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$, ya que $F_x \subseteq (\beta\kappa \setminus \kappa)$ tenemos que para todo $p \in F_x$, $U \in p$. Por lo cual, $U \in \bigcap F_x$.

Por lo tanto $\hat{U} = U \cup \{F_x \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)\}$.

$\square$

Observación: Para cada $p \in \kappa$, $\widehat{\{p\}} = \{p\}$, ya que los elementos del residuo son ultrafiltros libres en κ. Esto prueba en particular que κ es abierto y discreto de $Y^{\#}$.

Proposición 5.1.3. *$Y^{\#}$ es un espacio Hausdorff.*

Demostración

Sean $p, q \in Y^{\#}$ tales que $p \neq q$.

1. Si $p, q \in \kappa$.

   De la observación previa, $\{p\}$ y $\{q\}$ son abiertos en $Y^{\#}$, además $p \in \{p\}$, $q \in \{q\}$ y $\{p\} \cap \{q\} = \emptyset$.

2. Si $p \in \kappa$ y $q \in Y^{\#} \setminus \kappa$.

   Sea $x_q \in X$ tal que $q = F_{x_q}$. Para cada $Q \in F_{x_q}$ tenemos que $\kappa \setminus \{p\} \in Q$, puesto que Q es un ultrafiltro y $\{p\} \notin Q$ por ser libre. Así, $\kappa \setminus \{p\} \in \bigcap F_{x_q}$.

De esta manera podemos asegurar que $\{p\}$ y $\widehat{\kappa\setminus\{p\}}$ son abiertos abiertos en $Y^{\#}$ tales que $p \in \{p\}$, $q \in \kappa \setminus \hat{}\{p\}$ y $\{p\} \cap \kappa \setminus \hat{}\{p\} = \emptyset$.

3. Si $p, q \in Y^{\#} \setminus \kappa$

   Sean $x, y \in X$ tales que $p = F_x,\ q = F_y$.

   Afirmamos que existen $U, V \subseteq \kappa$ ajenos, tales que $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U),\ F_y \subseteq cl_{\beta\kappa}(V)$.

   Si suponemos que esto no es así, entonces, para cualesquiera $U, V \subseteq \kappa$ tales que $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$ y $F_y \subseteq cl_{\beta\kappa}(V)$, $U \cap V \neq \emptyset$.

   Notemos que el hecho de $\{cl_{\beta\kappa}(W) \colon W \subseteq \kappa\}$ es una base de abiertos y cerrados en $\beta\kappa$ implica que existen $\mathcal{V}_x$ y $\mathcal{V}_y \subseteq \mathbb{P}(\kappa)$ tales que

$$F_x = \bigcap_{U \in \mathcal{V}_x} cl_{\beta\kappa}(U) \quad \text{y} \quad F_y = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_y} cl_{\beta\kappa}(V).$$

   Ahora, veamos que $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{V}_y$ es una familia con la p.i.f. En efecto, dados $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{V}_x$ y $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{V}_y$, se tiene que

$$F_x \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(U_i) \quad \text{y} \quad F_y \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} cl_{\beta\kappa}(V_i).$$

   Como $\beta\kappa$ es un espacio extremadamente disconexo,

$$\bigcap_{i=1}^{n} cl_{\beta\kappa}(U_i) = cl_{\beta\kappa}(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^{m} cl_{\beta\kappa}(V_i) = cl_{\beta\kappa}(\bigcap_{i=1}^{m} V_i).$$

   Por lo tanto, de nuestra suposición inicial, tenemos:

$$(\bigcap_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{m} V_i) \neq \emptyset.$$

   Por lo tanto $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{V}_y$ tiene la p.i.f.

   Por lo cual, existe un ultrafiltro en κ, Q tal que $\mathcal{V}_x \cup \mathcal{V}_y \subseteq Q$.

   El ultrafiltro Q debe ser libre pues

$$\bigcap Q \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{V}_x} U \subseteq (\kappa \cap \bigcap_{U \in \mathcal{V}_x} cl_{\beta\kappa}(U)) = \kappa \cap F_x = \emptyset.$$

   De donde $Q \in \beta\kappa \setminus \kappa$.

Ya que κ es discreto, si $U \subseteq \kappa$, entonces $cl_{\beta\kappa}(U) = U \cup \{p \in (\beta\kappa) \setminus \kappa \colon U \in p\}$.

Así, para todo $U \in \mathcal{V}_x$ se tiene que $U \in Q$, por lo cual $Q \in cl_{\beta\kappa}(U)$. En consecuencia $Q \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}_x} cl_{\beta\kappa}(U)$.

Análogamente $Q \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_y} cl_{\beta\kappa}(V)$.

Por lo cual,

$$Q \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}_x} cl_{\beta\kappa}(U) \quad \text{y} \quad Q \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_y} cl_{\beta\kappa}(V).$$

Como consecuencia $Q \in F_x \cap F_y$. Pero esto no es posible, pues F_x y F_y son conjuntos ajenos.

Así, podemos afirmar que existen $U, V \subseteq \kappa$, ajenos tales que $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$ y $F_y \subseteq cl_{\beta\kappa}(V)$.

Por lo tanto $\hat{U}$ y $\hat{V}$ son abiertos en $Y^{\#}$ tales que $F_x \in \hat{U}$, $F_y \in \hat{V}$ y $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$.

En cualquier caso, existen los abiertos que separan a p y a q. Por lo tanto $Y^{\#}$ es Hausdorff.

□

Proposición 5.1.4. *El espacio $Y^{\#}$ es una extensión H-cerrada de κ.*

Demostración

Sea $\hat{T}$, un abierto básico no vacío de $Y^{\#}$, entonces $\hat{T} = T \cup \{F_x \colon T \in \bigcap F_x\}$. Notemos que $\hat{T} \neq \emptyset$, de donde $T \neq \emptyset$ pues de lo contrario $\{F_x \colon \emptyset \in \bigcap F_x\} \neq \emptyset$, lo cual no es posible ya que $\bigcap F_x$ es un filtro.

Así $\kappa \cap \hat{T} = \kappa \cap T$, que es no vacío para todo básico no vacío. Lo cuál quiere decir que κ es denso en $Y^{\#}$. Y por lo tanto $Y^{\#}$ es una extensión de κ.

Para probar que $Y^{\#}$ es H-cerrado tomaremos un filtro abierto $\mathcal{U}$ en $Y^{\#}$ y probaremos que este tiene un punto de adherencia.

Tomemos $\mathcal{F} = \{U \cap \kappa \colon U \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{F}$ una base de filtro en κ, el cual está contenido en un ultrafiltro en κ. Sea $\mathcal{V}$ un ultrafiltro en κ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$.

1. Si $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro fijo, entonces existe $p \in \kappa$ tal que $\{p\} \in \mathcal{V}$. Ya que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{V}$,

entonces para todo $U \in \mathcal{U}$, $p \in U$. Lo que prueba que $\mathcal{U}$ converge a p; que es en particular un punto de adherencia.

2. Si $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro libre, es decir $\mathcal{V} \in \beta\kappa \setminus \kappa$, entonces existe $x \in X$ tal que $\mathcal{V} \in F_x$, pues $\{F_x \colon x \in X\}$ es partición del residuo.

   Afirmamos que F_x es un punto de adherencia de $\mathcal{U}$.

   Sea $U \subseteq \kappa$ tal que $F_x \in \hat{U}$, como $\mathcal{V} \in F_x$ y $F_x \in \hat{U}$, entonces $U \in \mathcal{V}$.

   Sea $W \in \mathcal{U}$, entonces $W \cap \kappa \in \mathcal{U}$, por lo cual $W \cap U \neq \emptyset$. En consecuencia $W \cap \hat{U} \neq \emptyset$.

   Finalmente, $F_x \in cl_{Y^\#}(W)$. Por lo tanto F_x es un punto de adherencia de $\mathcal{U}$.

Por lo tanto $Y^\#$ es H-cerrado.

□

Definición 5.1.2. *Sean R y S, espacios y $\varphi : R \longrightarrow S$ una función. Dado $A \subseteq R$ definimos $\varphi^\#(A) = \{s \in S \colon \varphi^{\leftarrow}(s) \subseteq A\}$.*

El siguiente resultado es muy técnico.

Proposición 5.1.5. *Sean X un espacio H-cerrado, Y el espacio construido en el **Corolario 5.1.1** y $Y^\#$ la extensión estricta de Y.*

*Definimos $Z = Y^\# \setminus \kappa$, con la topología de subespacio de $Y^\#$. Definimos $\phi : Z \longrightarrow X$ de la siguiente manera $\phi(F_x) = x$. Entonces para $g : \beta\kappa \setminus \kappa \longrightarrow EX$ utilizada en el **Corolario 5.1.1**.*

1. *Si $A \subseteq Z$, entonces $\phi[A] = (k_X \circ g)[\bigcup\{F_x \colon F_x \in A\}]$*

2. *Dado $B \subseteq \beta\kappa \setminus \kappa$, $(k_X \circ g)^\#[B] = \{x \in X \colon (k_X \circ g)^{\leftarrow}(x) \subseteq B\}$.*

   Para $T \subseteq \kappa$,

$$\phi[\hat{T} \setminus \kappa] = \{x \in X \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(T)\} = (k_X \circ g)^\#[(cl_{\beta\kappa}(T)) \setminus \kappa]$$

Demostración

1) Sea $A \subseteq Z$. Para cada $F_x \in A$, $\phi(F_x) = x$, entonces

$$\phi(A) = \bigcup_{F_x \in A} \{\phi(F_x)\} = \bigcup\{x \in X \colon F_x \in A\} = (k_X \circ g)(\bigcup\{F_x \colon F_x \in A\}).$$

2) La primera parte se obtiene directamente de la definición de $(k_X \circ g)^{\#}$.

Sea $T \subseteq \kappa$, $\hat{T} = T \cup \{F_x \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(T)\}$. De donde

$$\hat{T} \setminus \kappa = \{F_x \colon F_x cl_{\beta\kappa}(T)\}.$$

Entonces

$$\phi[\hat{T} \setminus \kappa] = \{x \in X \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(T)\}.$$

Además, como $(cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa) \subseteq (\beta\kappa \setminus \kappa)$ de la primera igualdad del inciso 2 de esta proposición tenemos que

$$(k_X \circ g)^{\#}[cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa] = \{x \in X \colon (k_X \circ g)^{\leftarrow}(x) \subseteq cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa\}.$$

Donde $F_x = (k_X \circ g)^{\leftarrow}(x)$. Por lo tanto

$$(k_X \circ g)^{\#}[cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa] = \{x \in X \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(T)\}.$$

Por lo tanto

$$\phi[\hat{T} \setminus \kappa] = \{x \in X \colon F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa\} = (k_X \circ g)^{\#}[cl_{\beta\kappa}(T) \setminus \kappa].$$

□

El siguiente teorema es crucial para ligar las secciones uno y dos de este capítulo.

Teorema 5.1.4. *Sea $\phi : Z \longrightarrow X$ definida en la **Proposición 5.1.2**, ϕ es una función biyectiva y abierta.*

Demostración

1. Por construcción de la función ϕ tenemos que es una función biyectiva. Veamos ahora que ϕ es abierta.

2. Sea $\hat{T} \setminus T$ un abierto básico de Z, entonces

$$\phi[\hat{T}\setminus T] = (k_X \circ g)^{\#}[cl_{\beta\kappa}(T)\setminus T] = X\setminus(k_X \circ g)[Z\setminus(cl_{\beta\kappa}(T)\setminus T)] = X\setminus(k_X \circ g)[Z\setminus cl_{\beta\kappa}(T)],$$

como $(k_X \circ g)$ es cerrada, ya que k_X es una función perfecta y g es una función continua cuyo dominio es compacto, por lo cuál es cerrada. Así $X \setminus (k_X \circ g)[Z \setminus cl_{\beta\kappa}(T)]$ es un abierto en X.

□

Este podría ser considerado como la piedra ángular del trabajo, donde se ve reunido todo el trabajo realizado hasta ahora.

Teorema 5.1.5. *Si X es un espacio H-cerrado infinito tal que $|X| = \kappa$, entonces existe $h\kappa$ una extensión H-cerrada de κ tal que $h\kappa \setminus \kappa$ es homeomorfo a X y $\chi(h\kappa) \leq \chi(X)$.*

Demostración

Por el **Teorema 5.1.3** (2), el espacio $Y = \kappa \cup \{F_x \colon x \in X\}$, es una extensión H-cerrada de κ tal que $\chi(Y) \leq \chi(X)$.

Considerando la extensión estrícta $Y^{\#}$ del espacio Y y $Z = Y^{\#} \setminus \kappa$.

Ya hemos probado que $Y^{\#}$ es una extensión H-cerrada de κ. De acuerdo con el **Teorema 5.1.4**, $\phi : Z \longrightarrow X$ es biyectiva y abierta, de forma equivalente ϕ^{-1}, es una función biyectiva y continua.

Aplicando el **Teorema 5.0.2**, existe $h\kappa$ una extensión H-cerrada de κ tal que $h\kappa \setminus \kappa$ es homeomorfo a X y $\chi(h\kappa) \leq max\{\chi(X), \chi(Y^{\#})\}$.

Ya que $\chi(Y) \leq \chi(X)$, resta probar que $\chi(Y^{\#}) \leq \chi(Y)$.

Como los puntos de κ son aislados en $Y^{\#}$, probaremos que para toda $x \in X$, $\chi(F_x, Y^{\#}) \leq \chi(Y)$.

Sea $x \in X$, y tomemos $\mathcal{B}_Y$ una base local de F_x en el espacio Y podemos suponer que $| \mathcal{B}_Y | \leq \chi(Y)$.

Digamos que $\mathcal{B}_Y = \{W_\alpha \colon \alpha \leq \lambda\}$, para $\lambda = \chi(Y)$.

Para cada $\alpha \leq \lambda$, $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(W_\alpha \cap \kappa)$.

Definimos $\mathcal{B}_{\#} = \{\widehat{W_\alpha \cap \kappa} \colon \alpha \leq \lambda\}$, esta es una familia de vecindades abiertas de F_x en $Y^{\#}$ que satisface $\mid \mathcal{B}_{\#} \mid = \mid \mathcal{B}_Y \mid \leq \lambda$.

Basta probar que $\mathcal{B}_{\#}$ es una base local de F_x en $Y^{\#}$.

Sea $U \subseteq \kappa$ tal que $F_x \in \hat{U}$, es decir, $F_x \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$. Así $U \cup \{F_x\}$ es un abierto de Y. Por lo cual existe $\alpha \leq \lambda$ tal que $W_\alpha \subseteq U \cup \{F_x\}$, ya que $\mathcal{B}_Y$ es una base local de F_x en Y. Entonces $W_\alpha \cap \kappa \subseteq U$.

Observación: $\widehat{W_\alpha \cap \kappa} \subseteq \hat{U}$.

Sea $F_p \in \widehat{W_\alpha \cap \kappa}$, entonces $F_p \subseteq cl_{\beta\kappa}(W_\alpha \cap \kappa) \subseteq cl_{\beta\kappa}(U)$, así $F_p \in \hat{U}$.

Por lo tanto $\mathcal{B}_{\#}$ es una base local de F_x en $Y^{\#}$, de donde $\chi(F_x, Y^{\#}) \leq \mid \mathcal{B}_{\#} \mid \leq \chi(Y)$. Por lo cual $\chi(Y^{\#}) \leq \chi(Y) \leq \chi(X)$.

Por lo tanto $\chi(h\kappa) \leq \chi(X)$. $\square$

Con nuestros resultados podemos asegurar que si X es un espacio H-cerrado infinito, entonces X es homeomorfo al residuo de una extensión H-cerrada de un espacio discreto D.

5.2. Resultado principal

Del **Teorema 5.1.5** sabemos que dado un espacio H-cerrado X tal que $\mid X \mid = \kappa$ podemos encontrar $h\kappa$, una extensión H-cerrada de κ tal que X es homeomorfo a $h\kappa \setminus \kappa$.

A continuación vamos a acotar el cardinal de una extensión H-cerrada de un espacio discreto con la finalidad de acotar el tamaño de $h\kappa$. Para ello utilizaremos la técnica utilizada en la demostración de la desigualdad de Arhangel'skii.

Teorema 5.2.1. *Sea X una extensión H-cerrada de un espacio discreto D.*

Entonces $|X| \leq 2^{\chi(X)}$.

Demostración

Sean $\kappa = \chi(X)$ y $\psi : \mathbb{P}(D) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow D$ una función de elección, es decir, para todo $A \subseteq D$ no vacío se satisface que $\psi(A) \in A$.

Dado $A \subseteq X$, tal que $|A| \leq 2^\kappa$, entonces, del **Teorema 4.0.1**

$$|cl_X(A)| \leq d(cl_X(A))^{\chi(cl_X(A))}.$$

Además, como A es denso en $cl_X(A)$ y $\chi(cl_X(A)) \leq \chi(X)$, tenemos que

$$d(cl_X(A))^{\chi(cl_X(A))} \leq \mid A \mid^{\chi(X)} \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa.$$

Por lo tanto $\mid cl_X(A) \mid \leq 2^\kappa$.

Para cada $x \in X$ fijamos una base de vecindades $\mathcal{V}_x = \{G(x,\alpha) \colon \alpha \leq \kappa\}$.

Y dados $F \subseteq X$ y $h : F \longrightarrow \kappa$, definimos el abierto $G(F,h) = \bigcup\limits_{x \in F} G(x, h(x))$.

Vamos realizar una construcción recursiva para obtener una sucesión creciente de subconjuntos de D, $\{A_\alpha \colon \alpha \leq \kappa\}$ que cumpla las siguientes condiciones:

a) Para todo $\alpha \leq \kappa$, $\mid A_\alpha \mid \leq 2^\kappa$.

b) Para cada conjunto finito $F \subseteq cl_X(\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma)$ y cada función $h : F \longrightarrow \kappa$, si $D \setminus G(F,h) \neq \emptyset$, entonces $\psi(D \setminus G(F,h)) \in A_\alpha$.

Base de inducción $\kappa = 0$.

Sean $d_0 \in D$ y $A_0 = \{d_0\}$.

Sea $\alpha \leq \kappa$, y supongamos que hemos definido A_γ para cada $\gamma < \alpha$.

Definimos

$$A_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma \cup \{\psi(D \setminus G(F,h)) \colon F \in [cl_X \bigcup_{\gamma<\alpha} A_\gamma]^{<\omega},\ h : F \longrightarrow \kappa,\ D \setminus G(F,h) \neq \emptyset\}.$$

Como cada uniendo tiene cardinal menor o igual a 2^κ y tenemos menos de κ uniendos, $\mid \bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma \mid \leq 2^\kappa$, por lo cual, $|cl_X(\bigcup\limits_{\gamma<\alpha} A_\gamma)| \leq 2^\kappa$. Así, existen a lo más 2^κ pares (F,h), donde F es un conjunto finito y $h : F \longrightarrow \kappa$.

Lo que prueba que $\mid A_\alpha \mid \leq 2^\kappa + 2^\kappa = 2^\kappa$.

Lo que concluye la construcción pues A_α satisface las condiciones *a*) y *b*).

Definamos $Y = cl_X(\bigcup_{\alpha\leq\kappa} A_\alpha)$.

Veamos que $Y = \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X A_\alpha$.

Claramente $\bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha) \subseteq Y$.

Para la otra contención basta probar que $\bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$ es cerrado en X.

Sea $x \in X \setminus \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$, es decir, para toda $\alpha \leq \kappa$, $x \notin cl_X(A_\alpha)$. Como $\mathcal{V}_x$ es una base local para x, para cada $\alpha \leq \kappa$ existe $V_\alpha \in \mathcal{V}_x$ tal que $V_\alpha \subseteq X \setminus cl_X(A_\alpha)$.

Ya que $| \mathcal{V}_x |\leq \kappa$, existe $S \subseteq \kappa^+$, cofinal en κ^+ y $V \in \mathcal{V}_x$ tal que para todo $\alpha \in S$, $V \subseteq X \setminus cl_X(A_\alpha)$. Como S es cofinal en κ^+ y la familia $\{X \setminus cl_X(A_\alpha) \colon \alpha \leq \kappa\}$ es decreciente, entonces

$V \subseteq \bigcap_{\alpha\leq\kappa} X \setminus cl_X(A_\alpha) = X \setminus \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$.

Por lo que $X \setminus \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$ es abierto, por lo tanto $\bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$ es cerrado.

Como $\bigcup_{\alpha\leq\kappa} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$,

$$cl_X(\bigcup_{\alpha\leq\kappa} A_\alpha) \subseteq cl_X(\bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha).$$

Por lo tanto $Y \subseteq \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$. Y en consecuencia $Y = \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha)$.

Por construcción $| \bigcup_{\alpha\leq\kappa} A_\alpha |\leq 2^\kappa$ de donde $| \bigcup_{\alpha\leq\kappa} cl_X(A_\alpha) |\leq 2^\kappa$.

Para terminar probaremos que $X = Y$.

Supongamos que $X \setminus Y \neq \emptyset$.

Ya que D es un espacio discreto y X es una extensión de D, del **Teorema 1.1.2**, D es abierto en X. Puesto que $A_\alpha \subseteq D$, el conjunto A_α es abierto en X. De donde Y es un cerrado regular de X y por tanto es también un espacio H-cerrado ya que X lo es.

Ya que D es denso y $X \setminus Y$ es abierto y no vacío, existe $d \in D \setminus Y$. Para cada $x \in Y$, $x \neq d$. Por lo cual existe $\alpha_x < \kappa$ tal que $d \notin G(x, \alpha_x)$.

Definimos $h : Y \longrightarrow \kappa$, $h(x) = \alpha_x$.

De esta manera la familia $\{G(x, h(x)) \colon x \in Y\}$ forma una cubierta abierta de Y, como este es H-cerrado, existe un conjunto finito $F \subseteq Y$ tal que

$$Y = cl_Y(\bigcup_{x \in F} G(x, h(x))).$$

Así, por la definición de $G(F, h)$, tenemos que este conjunto es denso en Y.

Ya que F es finito y $\{A_\alpha \colon \alpha \leq \kappa\}$ es una sucesión creciente, debe existir $\alpha \leq \kappa$ de tal forma que $F \subseteq cl_X(\bigcup_{\gamma < \alpha} A_\gamma)$, esto pues la unión de todos es Y.

De la condición $b)$, como $D \setminus G(F, h)$ no es vacío, $p = \psi(D \setminus G(F, h)) \in A_\alpha \subseteq D$. Esto no es posible puesto que $p \in Y$ es aislado y $p \notin G(F, h)$, lo que contradice el hecho de que $G(F, h)$ es denso en Y.

Por lo tanto $X = Y$, y en consecuencia $\mid X \mid \leq 2^\kappa$. □

Hemos llegado al punto cumbre del trabajo. Hemos desarrollado la teoría necesaria para que nuestro resultado principal parezca fácil de probar después del recorrido que hemos realizado.

Ahora la tarea de acotar κ, el cardinal de un espacio H-cerrado X arbitrario será prácticamente una consecuencia inmediata del **Teorema 5.1.5**, con el cuál hallamos $h\kappa$, una extensión H-cerrada de κ, para la cuál sabemos acotar el carácter y cuyo residuo es homeomorfo a X. Y del **Teorema 5.2.1** con el que acotamos el cardinal de la extensión $h\kappa$.

Teorema 5.2.2. *Sea X un espacio H-cerrado, entonces $\mid X \mid \leq 2^{\chi(X)}$.*

Demostración

Del **Teorema 5.1.5**, si $\kappa = \mid X \mid$, entonces existe $h\kappa$, una extensión H-cerrada de κ tal que $h\kappa \setminus \kappa$ es homeomorfo a X y $\chi(h\kappa) \leq \chi(X)$.

Aplicando el **Teorema 5.2.1** a $h\kappa$, $\mid h\kappa \mid \leq 2^{\chi(h\kappa)}$.

Por lo tanto $\mid X \mid \leq \mid h\kappa \mid \leq 2^{\chi(h\kappa)} \leq 2^{\chi(X)}$. □

Apéndice A

Álgebras de Boole y el Teorema de representación de Stone

A.1. Álgebras de Boole

Daremos un breve recorrido por unas estructuras algebráicas sumamente útiles para nuestros fines, las *álgebras de Boole* para posteriormente adentrarnos en los *teoremas de representación y dualidad de Stone*.

Para ello comenzaremos estudiando estructuras más simples y finalmente al caso que nos ocupa.

No incluiremos las demostraciones correspondientes sino hasta el Teorema de Representación de Stone.

Definición y propiedades básicas.

Definición A.1.1. *Sea* $(A, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado y* $B \subseteq A$ *entonces* a *es cota superior de* B *(análogamente inferior) si* $b \leq a$*, para todo* $b \in B$ *(*$a \leq b$*, para todo* $b \in B$*).*

Para B *acotado superiormente llamamos* $sup(B)$ *a la mínima de dichas cotas, análogamente si* B *es acotado inferiormente* $inf(B)$ *a la mayor de dichas cotas inferiores.*

Notación: $\vee B$ denota a $sup(B)$ y $\wedge B$ a $inf(B)$.

Si dichos elementos pertenecen a B, entonces reciben el nombre de máximo y mínimo respectivamente.

Definición A.1.2. *Sea* $(A, \leq)$ *un conjunto parcialmente ordenado, este será una semi retícula superior (respectivamente inferior) si para todos* $a, b \in A$ *existe* $a \vee b$ *(respectivamente* $a \wedge b$*).*

Una retícula será completa superiormente si para todo $\emptyset \neq B \subseteq A$*, existe* $\vee B$ *(análogamente para una retícula completa inferiormente).*

Denotaremos estas retículas por $(A, \vee, \wedge)$*.*

Como ejemplos podemos tomar X un espacio topológico, $\mathcal{Z}(X)$ la colección de nulos de X, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{Z}(X), \subseteq)$, forma una retícula tomando $\vee = \cup$ y $\wedge = \cap$ (esta última sólo podemos garantizarla para cantidades numerables).

O bien si denotamos $\mathcal{B}(X)$ como la colección de abiertos y cerrados del espacio, entonces el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{B}(X), \subseteq)$ con la unión y la intersección, forma también una retícula.

Definición A.1.3. *Sea* $(A, \vee, \wedge)$ *una retícula, diremos que esta es distributiva si satisface* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *y* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *para todos* $a, b, c \in A$*.*

Definición A.1.4. *Sea* $(A, \vee, \wedge)$ *una retícula acotada con máximo y mínimo, denotados por* 1 *y* 0 *respectivamente.*

Sea $a \in A$ *llamaremos complemento de* a *al único elemento* $b \in A$ *tal que* $a \vee b = 1$ *y* $a \wedge b = 0$*, denotamos este elemento como* a'*.*

Una retícula que posee todos sus complementos es llamada una retícula complementada esta será denotada como $(A, \vee, \wedge, ')$*.*

Con este bagaje previo podemos llegar a la definición que necesitamos.

Definición A.1.5. *Una retícula con máximo y mínimo, distributiva y complementada* $(A, \vee, \wedge, ')$ *es conocida como un álgebra de Boole.*

Ejemplos:

- Para un conjunto X, $(\mathbb{P}(X), \cup, \cap, ')$ donde $A' = X \setminus A$, es un *álgebra de Boole.*

- Para un espacio topológico X, $(\mathcal{B}(X), \cup, \cap, ')$ donde $A' = X \setminus A$ es un *álgebra de Boole*.
- Sea X un espacio topológico y $RO(X)$ la colección de abiertos regulares del espacio, entonces $(RO(X), \vee, \cap, ')$ donde $A \vee B = int(cl(A \cup B))$ y $A' = X \setminus cl(A)$, define también un *álgebra de Boole*.

Proposición A.1.1. *(Propiedades de un álgebra de Boole)*

Sea $(B, \vee, \wedge, ')$ *un álgebra de Boole, entonces:*

1. *Leyes de De Morgan,* $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ *y* $(a \wedge b)' = a' \vee b'$.
2. $a'' = a$, $0' = 1$ *y* $1' = 0$.
3. $a \leq b$ *si y sólo si* $b' \leq a'$.

   $a \wedge b = 0$ *si y sólo si* $b \leq a'$.

   $a \vee b = 1$ *si y sólo si* $a' \leq b$.

Definición A.1.6. *Sean* $(A, \vee_A, \wedge_A, ')$ *y* $(B, \vee_B, \wedge_B, ')$ *dos álgebras de Boole.*

Y $f \in F(A, B)$, f *recibe el nombre de morfismo de álgebras de Boole si satisface:*

1. $f(a \vee_A b) = f(a) \vee_B f(b)$.
2. $f(a \wedge_A b) = f(a) \wedge_B f(b)$.
3. $f(a') = (f(a))'$

Observación: $f(0_A) = 0_B$ y $f(1_A) = 1_B$.

Definición A.1.7. *Si* f *es biyección y* f^{-1} *es también un morfismo de álgebras de Boole, entonces este recibe el nombre de isomorfismo de álgebras de Boole.*

Nota: Basta con pedir que f sea una biyección y morfismo de álgebras para asegurar que este es un isomorfismo.

Proposición A.1.2. *Si* ϕ *es un morfismo de órden entre dos álgebras de Boole, entonces es un morfismo de álgebras de Boole.*

Definición A.1.8. *Diremos también que B un álgebra de Boole es completa si lo es como retícula.*

Habiendo desarrollado un poco el concepto de *álgebra de Boole* procederemos ahora a desarrollar el concepto fundamental para el *teorema de representación de Stone*.

Definición A.1.9. *Sean B un álgebra de Boole y $\mathcal{F} \subseteq B$.*

- *$\mathcal{F}$ es base de filtro en B si:*

  a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$

  b) Para todos $a, b \in \mathcal{F}$ existe $c \in \mathcal{F}$ tal que $c \leq a \wedge b$ y $c \neq 0$

- *Si además satisface*

  c) $a \in \mathcal{F}$ y $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces $b \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro en B.

- *Si $\mathcal{F}$ satisface: Dado $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F}$ recibe e nombre de ultrafiltro en B.*

- *$\mathcal{F}$ es un filtro primo si dados $a, b \in B$ tales que $a \vee b \in \mathcal{F}$, entonces $a \in \mathcal{F}$ o $b \in \mathcal{F}$.*

Proposición A.1.3. *(Propiedades de filtros y ultrafiltros)*

Sea B un álgebra de Boole y $\mathcal{F}$ un filtro en B

1. *Si $a, b \in \mathcal{F}$, entonces $(a \wedge b) \in \mathcal{F}$.*

2. *$\mathcal{F}$ está contenido en algún ultrafiltro.*

3. *Son equivalentes:*

   a) *$\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en B.*

   b) *Sea $a \in B$ tal que $a \wedge b \neq 0$ para todo $b \in \mathcal{F}$, entonces $a \in \mathcal{F}$.*

   c) *$\mathcal{F}$ es un filtro primo en B.*

   d) *Sea $a \in B$, entonces $a \in \mathcal{F}$ o bien $a' \in \mathcal{F}$.*

A.2. Teorema de representación de Stone

A lo largo de esta sección expondremos una relación entre las clases de *Álgebras de Boole completas* e *isomorfosmos booleanos* y las clases de *espacios compactos cero dimensionales* y *funciones continuas*.

Dicho en otras palabras estableceremos una relación entre la categoría de *espacios compactos cero dimensionales* y la de *álgebras de Boole completas*. Dicho resultado es mejor conocido como el teorema de representación de Stone.

En adelante supondremos que toda álgebra de Boole no es trivial.

Definición A.2.1. *Sea B un álgebra de Boole, definimos:*

$S(B) = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ *es un ultrafiltro en* $B\}$.

Y dado $a \in B$ la asignación $\lambda\colon B \to \mathbb{P}(S(B))$, definida como $\lambda(a) = \{\mathcal{U} \in S(B) : a \in \mathcal{U}\}$.

Proposición A.2.1. *Sean B un álgebra de Boole y $a, b \in B$, entonces:*

1. $\lambda(0) = \emptyset$, $\lambda(1) = S(B)$.
2. $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$.
3. $\lambda(a \wedge b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$.
4. $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$.

Demostración

1. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, entonces $0 \notin \mathcal{U}$, por lo tanto $\lambda(0) = \emptyset$.

   Además, $1 \in \mathcal{U}$ por ser un filtro, por lo tanto $\lambda(1) = S(B)$.

2. Sea $\mathcal{U} \in \lambda(a \vee b)$, entonces $(a \vee b) \in \mathcal{U}$ y dado que un ultrafiltro es también un filtro primo, tenemos $a \in \mathcal{U}$ o $b \in \mathcal{U}$, es decir $\mathcal{U} \in (\lambda(a) \cup \lambda(b))$. La otra contensión se prueba de forma completamente análoga.

3. Sea $\mathcal{U} \in \lambda(a \wedge b)$, entonces $(a \wedge b) \in \mathcal{U}$, dado que $(a \wedge b) \leq a, b$, se tiene que $a, b \in \mathcal{U}$ de donde $\mathcal{U} \in \lambda(a)$ y $\mathcal{U} \in \lambda(b)$, por lo tanto $\mathcal{U} \in (\lambda(a) \cap \lambda(b))$, y así $\lambda(a \wedge b) \subseteq (\lambda(a) \cap \lambda(b))$.

Si tomamos $\mathcal{U} \in (\lambda(a) \cap \lambda(b))$, entonces $a, b \in \mathcal{U}$ por lo que $(a \wedge b) \in \mathcal{U}$ y de esta manera podemos verificar que $\mathcal{U} \in \lambda(a \wedge b)$, por lo cual $\lambda(a) \cap \lambda(b) \subseteq \lambda(a \wedge b)$.

4. Sea $a \in B$, entonces $\emptyset = \lambda(0) = \lambda(a \wedge a') = \lambda(a) \cap \lambda(a')$.

   Y $S(B) = \lambda(1) = \lambda(a \vee a') = \lambda(a) \cup \lambda(a')$.

   Por lo tanto $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$.

□

Corolario A.2.1. *Si tomamos $\Lambda = \{\lambda(a) \colon a \in B\}$, este define una base de abiertos para una topología en $S(B)$.*

Definición A.2.2. *(Espacio de Stone)*

Sea B un álgebra de Boole completa, entonces $S(B)$ dotado de la topología inducida por Λ es llamado el espacio de Stone de B.

Nota: Dado que para todo $a \in B$ se tiene $\lambda(a) = S(B) \setminus \lambda(a')$, cada $\lambda(a)$ es también un cerrado en $S(B)$.

Por lo tanto $S(B)$ es un espacio cero dimensional.

Teorema A.2.1. *(de representación de Stone)*

1. *$S(B)$ es un espacio compacto.*

2. *$\Lambda = \mathcal{B}(S(B))$.*

3. *λ es un isomorfismo booleano de B en $\mathcal{B}(S(B))$.*

Donde $\mathcal{B}(S(B))$ denota la colección de abiertos y cerrados del espacio $S(B)$.

Demostración

1. Probaremos primero que el espacio $S(B)$ es *Hausdorff*.

   Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S(B)$ tales que $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, entonces existe $a \in B$ de tal forma que $a \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$, y como $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro, $a' \in \mathcal{V}$ de donde $\mathcal{U} \in \lambda(a)$ y $\mathcal{V} \in \lambda(a')$, así $\lambda(a)$ y $\lambda(a')$ son los abiertos ajenos que estábamos buscando.

Ya hemos mencionado el por qué el espacio $S(B)$ es un espacio cero dimensional, así que sólo resta verificar su compacidad, para ello probaremos que si $\mathcal{F}$ es un filtro de cerrados en $S(B)$, entonces $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de cerrados en $S(B)$, definimos $\mathcal{G} = \{a \in B \colon F \subseteq \lambda(a), F \in \mathcal{F}\}$, dado que Λ es también una base de cerrados para $S(B)$, tenemos que $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap\limits_{a \in \mathcal{G}} \lambda(a)$.

Si $a_1, a_2 \in \mathcal{G}$, entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tales que $F_1 \subseteq \lambda(a_1)$ y $F_2 \subseteq \lambda(a_2)$ de donde $\emptyset \neq (F_1 \cap F_2) \subseteq \lambda(a_1) \cap \lambda(a_2) = \lambda(a_1 \wedge a_2)$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro de cerrados, $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, por lo cual $a_1 \wedge a_2 \in \mathcal{G}$. De esta forma podemos afirmar que $\mathcal{G}$ es base de filtro en B.

Para verificar que es un filtro tomemos $a \in \mathcal{G}$ y $b \in B$ tal que $a \leq b$, entonces dado que $a \in \mathcal{G}$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq \lambda(a)$. Y como $\lambda(a) \subseteq \lambda(b)$ se tiene $F \subseteq \lambda(b)$ por lo que $b \in \mathcal{G}$. Y ahora podemos afirmar que $\mathcal{G}$ es un filtro en B que podemos extender a un ultrafiltro en B, digamos que $\mathcal{U}$ es dicho ultrafiltro. Así $\mathcal{U} \in \lambda(a)$ para todo $a \in \mathcal{G}$, por lo tanto $\mathcal{U} \in \bigcap\limits_{a \in \mathcal{G}} \lambda(a) = \bigcap \mathcal{F}$.

Por lo tanto $S(B)$ es compacto.

2. También hemos hecho notar que $\Lambda \subseteq \mathcal{B}(S(B))$. Así pues, si tomamos $C \in \mathcal{B}(S(B))$, así como C es abierto y Λ es base, existe $D \subseteq B$ tal que $C = \bigcup\limits_{a \in D} \lambda(a)$.

   Ahora bien, dado que C también es cerrado y $S(B)$ es compacto, C es también compacto, por lo cual, existe una subcolección finita $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq D$ tal que $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \lambda(a_i)$, además $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \lambda(a_i) = \lambda(\bigvee\limits_{i=1}^{n} a_i)$, de donde $C \in \Lambda$.

   Por lo tanto $\Lambda = \mathcal{B}S(B)$.

3. Se ha visto también que la asignación λ es un morfismo de *álgebras de Boole* y del inciso previo es también suprayectivo. Demostraremos ahora que es también inyectivo.

   Sean $a, b \in B$ tales que $a \neq b$, entonces podemos suponer $a > b$, de donde $a \setminus b \neq 0$, si tomamos $\mathcal{G} = \{c \in B \colon a \setminus b \leq c\}$, este genera un filtro en B que puede ser extendido a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en B y así $(a \setminus b) \in \mathcal{U}$, esto implica $\mathcal{U} \in \lambda(a \setminus b) = \lambda(a \wedge b') = \lambda(a) \cap \lambda(b')$, por lo cual $\mathcal{U} \notin \lambda(b)$.

   Por lo tanto $\lambda(a) \neq \lambda(b)$.

   Y concluimos que λ es un *isomorfismo de álgebras de Boole.*

□

Del *teorema de representación de Stone* podemos concluir que toda álgebra de Boole B tiene una representación topológica, como el álgebra de Boole de abiertos y cerrados de un espacio compacto, cero dimensional llamado $S(B)$, el espacio de Stone de B.

Bibliografía

[1] Casarrubias Segura Fidel, Tamariz Mascarúa Ángel. Elementos de topología general. México: Institudo de Matemáticas, UNAM; 2015

[2] Dow Alan, Porter Jack. Cardinalities of H-clsed spaces. Topology proceedings, 27-50. Volumen 7; 1982

[3] Hodel R. E. Arhangelskii's solution to Alexandroff's problem: A survey. Topology and its Applications 153, 2199-2217; 2006

[4] Kenneth Kunen, Jerry E. Vaughan. Handbook of set-theorethic topology. Países Bajos: Elsevier science publishers B.V.; 1984

[5] Porter Jack R., Woods R. Grant. Extensions and absolutes of Hausdorff spaces. Estados Unidos de América: Springer-Verlag; 1988

[6] R. Pol, Short proofs of two theorems on cardinality of topological spaces, Bull. Acad. Polon., Ser. Sci., Math., Astron. et Phys. 22 (1974), 1245-1249

[7] Ryszard Engelking. General Topology. Berlín: Heldermann: Sigma series in pure mathematics; Vol. 6; 1989

[8] Willar Stephen. General Topology. Estados Unidos de América: Dover; 2004