



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**La Aumentación de Gráficas Topológicas y Geométricas  
Planas para Cumplir con Restricciones de Paridad**

T E S I S

*QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS COMPUTACIÓN*

*Presenta:*

Juan Carlos Catana Salazar

*Director de tesis:*

Dr. Jorge Urrutia Galicia

Instituto de Matemáticas

Ciudad Universitaria. Ciudad de México. Enero 2020



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.







# Declaración de autenticidad

---

Por la presente declaro que, salvo cuando se haga referencia específica al trabajo de otras personas, el contenido de esta tesis es original y no se ha presentado total o parcialmente para su consideración para cualquier otro título o grado en esta o cualquiera otra Universidad.

Esta tesis contiene algunos resultados presentados previamente en los siguientes eventos académicos:

- International Workshop on Combinatorial and Computational Aspects of Optimization, Topology and Algebra (Los Cabos 2016)
- XVII Spanish Meeting on Computational Geometry (Alicante 2017)
- Canadian Conference on Computational Geometry (Ottawa 2017)
- Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (Tokyo 2017)

bajo la autoría colaborativa de Israel Aldana Gavlán, José Luis Álvarez Rebollar, Alfredo García Olaverri, Erick Solís Villarreal, Javier Tejel Altarriba, Carlos Bruno Velarde Velázquez, José Miguel Díaz Báñez, Frank Duque, Ruy Fabila Monroy, Marco Heredia, Adriana Ramírez Viguera y Jorge Urrutia Galicia.

Agradezco a todos mis coautores, profesores y compañeros sus valiosas aportaciones e ideas para llevar a cabo este trabajo de investigación.

*¡Por mi raza hablará el espíritu!*

Juan Carlos Catana Salazar. Ciudad de México, 2019



# Índice general

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Índice de figuras</b>   | <b>VII</b> |
| <b>1. Introducción</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1. Introducción . . . . .  | 1          |
| 1.2. Planteamiento del problema . . . . .  | 3          |
| 1.3. Contribuciones . . . . .  | 4          |
| 1.4. Estructura de la tesis . . . . .  | 5          |
| <b>2. Trabajo relacionado y antecedentes</b>   | <b>7</b>   |
| 2.1. El problema de exploración de gráficas . . . . .  | 7          |
| 2.2. El problema de aumentación de gráficas . . . . .  | 9          |
| <b>3. El problema de exploración de gráficas</b>   | <b>13</b>  |
| 3.1. El problema de exploración de longitud mínima (PELM) . . . . .                                  | 14         |
| 3.1.1. Todos los agentes iniciando en un mismo vértice . . . . .                                     | 20         |
| 3.1.2. Agentes iniciando desde dos vértices . . . . .  | 22         |
| 3.2. El problema de exploración de longitud mínima con comunicación pe-<br>riódica (PELMC) . . . . . | 27         |
| 3.3. El problema de exploración de tiempo mínimo (PETM-PETMC) . . . . .                              | 31         |
| <b>4. El problema de aumentación de gráficas</b>   | <b>35</b>  |
| 4.1. Aumentación de gráficas topológicas . . . . .   | 37         |
| 4.1.1. Árboles . . . . .   | 37         |
| 4.1.2. Gráficas extraplanas maximales con encaje fijo . . . . .                                      | 40         |
| 4.1.3. Gráficas extraplanas maximales con encaje móvil . . . . .                                     | 50         |
| 4.1.4. Gráficas planas generales . . . . .   | 52         |
| 4.2. Aumentación de gráficas geométricas . . . . .   | 62         |
| 4.2.1. Cotas inferiores . . . . .  | 62         |
| 4.2.2. Complejidad del problema . . . . .  | 65         |
| <b>5. Conclusiones</b>   | <b>71</b>  |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>73</b>  |



# Índice de figuras

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.1. | (a) Una caminata que recorre la arista $(v, w)$ al menos tres veces. (b),(c) Muestran el caso cuando dos agentes recorren una arista tres veces. . . .  | 16 |
| 3.2. | Un subárbol de $T$ enraizado en un vértice $v$ . El subárbol $T_v[i]$ esta remarcado con líneas punteadas. . . . .  | 21 |
| 3.3. | El árbol $T_{u,v}[i]$ esta contenido en la región poligonal. El camino que une a $u = x_1$ con $v = x_m$ esta marcado con segmentos de líneas solidas. $T_1, \dots, T_m$ están marcados con segmentos de líneas punteadas. . . . .  | 23 |
| 3.4. | La construcción de una instancia $T$ . . . . .  | 29 |
| 4.1. | Ejemplo de gráficas no aumentables. Las arista solidas representan aristas de la gráfica inicial. La aristas punteadas representan aristas de la aumentación. (a) Encaje plano de $k_4$ . (b) Estrella de grado impar. . . .  | 37 |
| 4.2. | (a) Aumentación de un árbol topológico. (b) Aumentación cuando $T$ es una estrella. . . . .   | 39 |
| 4.3. | Posibles configuraciones para la última pareja de vértices rojos en un árbol topológico. . . . .  | 40 |
| 4.4. | Configuración de aristas en gráficas extraplanas maximales aumentables para cumplir con restricciones de paridad. . . . .   | 41 |
| 4.5. | Gráficas extraplanas maximales no aumentables. (a) Gráfica con solo diagonales rojas. (b) Gráfica con diagonales rojas y rojo-azules. . . . .   | 42 |
| 4.6. | Gráfica extraplana maximal con una diagonal azul. (a) Gráfica con todos sus vértices rojos de un lado. (b) Gráfica con un número par de vértices rojos en ambos lados. (c) Gráfica con un número impar de vértices rojos de ambos lados. . . . .  | 44 |
| 4.7. | Gráficas extraplanas maximales con dos diagonales rojo-azul en orden opuesto. (a) Gráfica extraplana con un número par de vértices rojos en cada intervalo. (b) Camino que une dos vértices rojos en diferentes intervalos. Los vértices en forma de cruz indican que no importa que color tengan, debido a que sus paridades siempre se preservan. (c) Gráfica extraplana del ejemplo (b) después de agregar el camino que conecta a $v_j$ con $v_l$ . . . . . | 45 |

|   |    |
|---|----|
| 4.9. Gráficas extraplanas maximales. (a) Gráfica no aumentable cuando es requerido preservar el encaje inicial de la gráfica. (b) Aumentación a través de la cara externa. (c) Aumentación de la gráfica por una cara interna. . . . .  | 51 |
| 4.10. Las dos posibles configuraciones de orejas que una gráfica extraplana puede tener. . . . .  | 51 |
| 4.11. Los 13 posibles casos de una gráfica extraplana de 8 vértices rojos y su correspondiente aumentación. Los casos simétricos son omitidos. . . . .  | 54 |
| 4.12. Gráfica topológica plana en la que cualquier aumentación deja a $\frac{3n}{5}$ de sus vértices sin cumplir con sus restricciones de paridad. . . . .  | 55 |
| 4.13. Gráficas topológicas. (a) Gráfica que requiere al menos 12 aristas para cumplir sus restricciones de paridad. (b) Una posible aumentación. Las aristas punteadas de color azul muestran un camino de longitud 3 uniendo a un vértice rojo interno con un vértice rojo externo. . . . .                    | 55 |
| 4.14. Gráfica topológica que requiere $\frac{22n}{29} - \mathcal{O}(1)$ aristas adicionales para cumplir con sus restricciones de paridad. . . . .  | 57 |
| 4.15. (a) Gráfica topológica que requiere $n - 3$ aristas adicionales para cumplir con sus restricciones de paridad. (b) Aumentación de la gráfica. . . . .   | 58 |
| 4.16. (a) Dispositivo básico. Posibles aumentaciones: (b) Positiva. (c) Negativa. . . . .   | 59 |
| 4.17. Posibles aumentaciones dispositivo de literal. (a) Una aumentación positiva. (b) Una aumentación negativa. . . . .  | 59 |
| 4.18. Unión de dos literales de la misma variable. (a) Caso cuando ambas ocurrencias están negadas o no negadas (con aumentación positiva). (b) Caso cuando una ocurrencia está negada y la otra no lo está (con aumentación negativa del lado izquierdo y positiva del lado derecho). . . . .                  | 60 |
| 4.19. (a) Dispositivo de clausula. (b) Dispositivo de clausula cuando es posible cumplir la paridad de sus 10 vértices rojos. . . . .   | 61 |
| 4.20. Gráfica $G_\Phi$ aumentada de acuerdo con la asignación de valores $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (F, F, V, F)$ . La distribución de los dispositivos de literales y clausulas es consistente con la topología de la formula 3SAT $\Phi$ . . . . .   | 61 |
| 4.21. En cualquier aumentación del árbol, al menos uno ya sea $v_1$ o $v_2$ no puede cambiar su paridad. . . . .  | 63 |
| 4.22. Familia de árboles geométricos tales que cualquier aumentación deja un número lineal de vértices rojos sin cumplir con sus restricciones de paridad. . . . .  | 64 |
| 4.23. (a) Un árbol geométrico plano que requiere la adición de 6 aristas para cambiar la paridad de los vértices de grado impar. (b) Construcción de una familia de árboles geométricos planos que requieren la adición de $\lceil \frac{6n}{11} \rceil$ para cumplir con sus restricciones de paridad. . . . . | 65 |
| 4.24. (a) Familia de caminos geométricos que requiere $n - \mathcal{O}(1)$ aristas para conseguir su aumentación que cumple con el conjunto de restricciones de paridad. (b) Aumentación de la familia de caminos. . . . .  | 66 |
| 4.25. Dispositivos de literal. (a) Aumentación positiva. (b) Aumentación negativa. . . . .  | 67 |

|   |    |
|---|----|
| 4.26. Dispositivo de conexión. (a) Transmisión de valor positivo. (b) Transmisión de valor positivo . . . . . | 67 |
| 4.27. (a) Subgráfica de espiral. (b) Subgráfica de flecha. . . . .  | 68 |



# Introducción

---

## 1.1. Introducción

Una forma de representar gráficamente cualquier relación entre un conjunto de objetos, puede ser a través de un diagrama consistente de nodos conectados a través de curvas. Un ejemplo, es la red de carreteras que conecta a un grupo de ciudades o la red eléctrica de una ciudad que alimenta de energía a muchos dispositivos.

Una abstracción matemática de este tipo de situaciones da pie al concepto conocido como gráfica. Una gráfica es un par ordenado consistente de un conjunto de vértices y un conjunto de aristas, junto con una función que asocia cada arista con un par no ordenado de vértices (7).

Las gráficas son también así nombradas porque pueden representarse esquemáticamente a través de puntos, que representan vértices y líneas que los conectan (aristas), lo cual ayuda a entender muchas de sus propiedades.

Muchos consideran que el origen de la *teoría de gráficas*<sup>1</sup> se debe al matemático suizo Leonhard Euler, quien al estudiar un viejo problema conocido como el problema de los puentes de Königsberg, brinda uno de los primeros resultados conocidos en la historia del área. El problema inicialmente fue planteado de la siguiente manera (Legner):

*El río Pregel divide a Königsberg en cuatro regiones, las cuales están conectadas por siete puentes. ¿Es posible caminar sobre la ciudad cruzando cada puente exactamente una vez?, es permitido iniciar y finalizar la caminata en cualquier parte de la ciudad, no necesariamente en el mismo lugar.*

Euler mostró que para el caso particular de Königsberg no es posible encontrar una solución, más aún, mostró que toda instancia resoluble del problema debía cumplir con una cierta característica. A esta caracterización se le considera como el primer teorema de teoría de gráficas.

---

<sup>1</sup>Rama de las matemáticas y ciencias de la computación que estudia las gráficas y sus propiedades.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

En la actualidad se le conoce como *gráfica Euleriana* a toda aquella gráfica que puede recorrerse, pasando una vez por sus aristas, desde un vértice inicial hasta un vértice final (sin la necesidad de que estos sean necesariamente el mismo).

Las gráficas Eulerianas han recibido mucha atención a lo largo de la historia, debido a sus propiedades y a sus aplicaciones en otros problemas relevantes. Un ejemplo claro es la relación directa con el famoso problema del cartero chino (CPP por sus siglas en inglés), también conocido como el problema de exploración de rutas. El problema del cartero chino se plantea de la siguiente manera:

*Dado el mapa de una ciudad en la que todas las calles pueden transitarse en ambos sentidos, ¿cuál es la ruta más corta que visita cada calle de la ciudad al menos una vez?*

Se sabe que el problema del cartero chino se puede resolver en tiempo  $\mathcal{O}(n^3)$ , y el correspondiente algoritmo está basado en gráficas Eulerianas y sus propiedades (13).

Una generalización directa del problema del cartero chino se da cuando la exploración se realiza en colaboración con un número  $k > 1$  de carteros (o agentes) que recorren las calles de la ciudad en paralelo. Llamamos a esta variante como el problema de *exploración de gráficas con múltiples agentes*.

El objetivo en problemas de exploración de gráficas con múltiples agentes frecuentemente se centra en minimizar el tiempo total que toma la exploración del dominio, o en la minimización del costo total de la exploración.

El tiempo de exploración de una gráfica puede establecerse como la suma de los pasos o unidades de tiempo que le toma a un agente completar su recorrido. Mientras que el costo de exploración puede establecerse como el número de aristas que recorre un agente durante su exploración.

En la práctica, el costo de exploración se puede plantear en términos de la cantidad de energía o combustible que se emplea para llevar a cabo dicha tarea, por ejemplo. El costo de energía para la exploración con múltiples agentes se minimiza al reducir la distancia de la exploración individual de cada agente.

La siguiente propiedad establece claramente una relación entre las gráficas Eulerianas y el problema de exploración de gráficas.

**Propiedad 1.1.1.** *Cuando el mapa de una ciudad inherentemente puede representarse como una gráfica Euleriana entonces, existe un camino en el que su costo/tiempo de exploración es igual al número de aristas en la gráfica.*

De la propiedad 1.1.1 podemos deducir el siguiente postulado:

**Postulado 1.1.2.** *La mejor estrategia de exploración de una gráfica Euleriana con  $k > 1$  agentes minimizando costo/tiempo, consiste en estacionar  $k - 1$  agentes en el vértice inicial del recorrido y realizar la exploración con un solo agente.*

Observe que cuando la propiedad 1.1.1 no se cumple, el problema de exploración con  $k \geq 1$  agentes se traduce en encontrar el menor número de aristas que se visitan más de una vez.

Muchos de los problemas del tipo de exploración de gráficas son catalogados como problemas altamente complejos. Estos problemas generalmente no se les conoce un algoritmo, que en tiempo razonable, obtenga una solución óptima de cualquier instancia.

## 1.2. Planteamiento del problema

En este trabajo se aborda el problema de exploración de gráficas con múltiples agentes principalmente desde dos perspectivas diferentes. La primera; la cual corresponde al problema clásico de exploración, con  $k > 1$  agentes minimizando costo o tiempo, restringido a la familia de árboles. La segunda; que surge al permitir modificar la estructura de la gráfica de entrada, de tal manera que se minimice el número de aristas que se visitan más de una vez.

La segunda perspectiva surge de la propiedad 1.1.1, debido a que si es posible modificar la gráfica de entrada de tal manera que la gráfica resultante es una gráfica Euleriana, entonces es posible resolver el problema de exploración con costo/tiempo mínimo y  $k = 1$ . Llamamos al problema de modificar la gráfica de entrada para minimizar el número de aristas que un agente tiene que visitar, como el problema de *augmentación de gráficas* para conseguir una cierta propiedad.

En el problema de exploración se supone que todos los agentes conocen de antemano la información global de la gráfica (es decir conocen el mapa de exploración).

Suponemos también que durante la exploración los agentes visitan los vértices y caminan sobre las aristas, las cuales tienen un costo unitario de recorrido. El costo unitario de recorrido de una arista refiere a que específicamente en una unidad de tiempo (o un paso), un agente se puede mover de un vértice  $u$  a un vértice  $v$  (siempre y cuando  $uv$  sea una arista en la gráfica de entrada) o puede permanecer estacionado en el mismo vértice.

Bajo nuestro modelo de exploración en gráficas con múltiples agentes, es totalmente permisible que dos o más agentes se encuentren ubicados en un vértice en común o en el mismo punto sobre una arista, sin que colisionen o se bloqueen entre ellos.

En nuestro modelo suponemos que todos los agentes están sincronizados con un reloj global.

Así mismo, en este trabajo consideramos la variante del problema en la que se requiere que los agentes se comuniquen entre ellos, a lo más cada  $p \geq 1$  unidades de tiempo. Suponemos que los agentes son capaces de comunicarse entre ellos el estar colocados en un vértice en común.

Dicha variante del problema de exploración es motivada por los artículos (20, 27).

Es importante notar que las funciones objetivo de costo y tiempo son diferentes; debido a que un agente puede permanecer estacionado en un nodo mientras que su tiempo de exploración aumenta, pero no así su longitud de exploración.

Por otro lado, en el problema de aumentación se le conoce como *objetos aumentantes* a los elementos que pueden ser agregados a la gráfica para cumplir con una cierta propiedad  $\mathcal{P}$ ; estos objetos pueden ser vértices (puntos de Steiner), aristas, o ambos.

La propiedad  $\mathcal{P}$  puede ser una propiedad general de gráficas, o bien una propiedad específica de cierta clase en particular. Por ejemplo, en una gráfica abstracta podría ser importante mantener un alto grado de conexidad, mientras que en una gráfica geométrica podría ser conseguir un factor de estiramiento<sup>1</sup> constante.

En este trabajo consideramos el problema de aumentación a través de la adición de aristas, para cumplir con un conjunto de restricciones de paridad asignadas a los vértices de una gráfica topológica o geométrica, a la vez que se preservan la simplicidad y la planaridad de la misma.

Puede notar que el problema de transformar una gráfica en una gráfica Euleriana, a través de la adición de aristas, es un caso especial del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad. Debido a que es equivalente pedir que la paridad de los grados de los vértices de la gráfica sea par (con la posible excepción de dos vértices) para que la gráfica resultante tenga la propiedad de ser Euleriana.

### 1.3. Contribuciones

Es importante notar que la  $\mathcal{NP}$ -Dureza de un problema de exploración sin la modalidad de comunicación periódica, implica directamente que la versión con comunicación también lo es. Tal es el caso del PETM.

Sin embargo la propiedad anterior no se cumple para el caso contrario. La complejidad de un problema de exploración sin comunicación no implica en lo absoluto la complejidad de su versión con comunicación. Tal es el caso del PELM y PELMC; debido a que en este trabajo se muestra que PELM es resoluble en tiempo polinomial pero, por otro lado, se muestra que PELMC es un problema  $\mathcal{NP}$ -Duro si  $r$  es parte de los parámetros de entrada.

En este trabajo mostramos que el PELM es resoluble en tiempo polinomial, con  $r$  agentes iniciando en un vértice arbitrario en una gráfica con  $n$  vértices, por un algoritmo de complejidad de tiempo  $O(k^2n)$ . Mientras que para el caso en el que se establecen 2 vértices iniciales, se propone un algoritmo de complejidad en tiempo  $O(k^4n)$ .

Los resultados del problema de exploración en gráficas con múltiples agentes se resumen en la tabla 1.1.

En este trabajo abordamos una variante del problema de aumentación, en la que se busca cumplir con un conjunto de restricciones de paridad a través de la adición de aristas, mientras se preserva la planaridad y simplicidad de la gráfica resultante. Así mismo se proveen los primeros resultados sobre esta variante del problema.

---

<sup>1</sup>El factor de estiramiento del encaje de una gráfica mide la relación de la distancia en línea recta y la distancia sobre las aristas de la gráfica, de cualesquiera dos vértices en ella. Cuando una gráfica tiene un factor de estiramiento constante, se dice que es una gráfica  $t$ -generadora.

**Tabla 1.1:** Tabla de resultados algorítmicos y de complejidad.

| Configuración                    |                         | Complejidad          |                      |
|----------------------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|
| <i>Tiempo</i><br><i>mínimo</i>   | <i>Sin comunicación</i> | $\mathcal{NP}$ -Duro |                      |
|                                  | <i>Con comunicación</i> | $\mathcal{NP}$ -Duro |                      |
| <i>Longitud</i><br><i>mínima</i> | <i>Sin comunicación</i> | <i>Única fuente</i>  | $O(k^2n)$            |
|                                  |                         | <i>Doble fuente</i>  | $O(k^4n)$            |
|                                  | <i>Con comunicación</i> |                      | $\mathcal{NP}$ -Duro |

Mostramos dos teoremas que caracterizan a un par de familias de gráficas que no son aumentables bajo las variantes de aumentación con encaje fijo y con encaje móvil.

Además, presentamos un conjunto de familias de gráficas topológicas y gráficas geométricas, en las que cualquier conjunto de aristas que es agregado a ellas (mientras se mantiene la planaridad de la gráfica resultante) deja al menos una fracción lineal de vértices sin cumplir con sus restricciones de paridad.

Mostramos un conjunto de resultados algorítmicos y de cotas combinatorias sobre dos variantes del problema de aumentación. Los resultados del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad se resumen en la tabla 1.2.

## 1.4. Estructura de la tesis

En la sección 2 presentamos los antecedentes y trabajos relacionados del problema de exploración y de aumentación de gráficas.

La sección 3 se centra en el problema de exploración. Inicialmente se definen algunos conceptos básicos y notación sobre el problema. Posteriormente la sección se divide en 3 subsecciones que estudian 4 variantes del problema. La principal diferencia entre estas variantes es la función objetivo que se desea minimizar; ya sea costo o tiempo. Luego estudiamos estas dos variantes con la restricción adicional de comunicación periódica.

La sección 4 se centra principalmente en el problema de aumentación. Al inicio de la sección se define formalmente el problema. Posteriormente la sección se divide principalmente en dos; cuando la gráfica de entrada es una gráfica topológica, o una gráfica geométrica.

<sup>1</sup>El algoritmo no garantiza una solución óptima, sólo garantiza que encuentra una gráfica topológica que aumenta a la gráfica de entrada.

<sup>2</sup>La prueba de  $\mathcal{NP}$ -Dureza se refiere a la aumentabilidad de la gráfica, a diferencia del caso para gráficas geométricas en las que se prueba la dureza sobre la minimalidad en aristas.

## 1. INTRODUCCIÓN

---

**Tabla 1.2:** Tabla de resultados algorítmicos y cotas combinatorias.

| Familia de gráficas |   | Complejidad                       |                      | Cotas combinatorias |          |
|---------------------|---|-----------------------------------|----------------------|---------------------|----------|
|                     |   | Vértices<br>Rojo-Azul             | Vértices<br>Rojos    | Inferior            | Superior |
| <i>Topológica</i>   | <i>Árboles</i>  | $\mathcal{O}(n)$                  |                      | N/A                 |          |
|                     | <i>Extraplanas<br/>maximales<br/>(con encaje fijo)</i>  | $\mathcal{O}(n^3)$                |                      | N/A                 |          |
|                     | <i>Extraplanas<br/>maximales<br/>(con encaje móvil)</i> | ?                                 | $\mathcal{O}(n^2)^1$ | ?                   | $2n$     |
|                     | <i>Planas generales</i>                                 | $\mathcal{NP}$ -Duro <sup>2</sup> |                      | $n - 3$             | ?        |
| <i>Geométrica</i>   | <i>Árboles</i>  | $\mathcal{NP}$ -Duro              |                      | $n - 2$             | ?        |
|                     | <i>Planas generales</i>                                 | $\mathcal{NP}$ -Duro              |                      | $n - 2$             | ?        |

Finalmente la sección 5 muestra las conclusiones y comentarios finales de los problemas abordados en este trabajo.

## Trabajo relacionado y antecedentes

---

### 2.1. El problema de exploración de gráficas

El problema de exploración de gráficas con múltiples agentes ha sido estudiado ampliamente en el área de optimización combinatoria, debido a la relación que tiene con otros problemas tales como; el enrutamiento de vehículos (VRP) (11, 24, 41), el enrutamiento de ubicaciones (LRP) (30) y el problema del agente viajero múltiple (mTSP) (6).

El problema de exploración de gráficas ha sido aplicado en varios ámbitos de robótica y planeación de rutas para vehículos aéreos y no tripulados. Tal es el ejemplo de un conjunto de drones que son desplegados sobre una determinada área para realizar tareas de entrega de bienes o vigilancia.

El problema de exploración de gráficas puede verse como una generalización del problema de vigilancia o patrullaje de terrenos, en el que el espacio de vigilancia puede modelarse a través de una estructura geométrica representada como la unión de obstáculos poligonales.

Bajo este modelo es posible hacer una partición del terreno en un conjunto de celdas, de tal manera que la partición induce una gráfica en la que los vértices representan celdas y las aristas relacionan a parejas de celdas contiguas.

Muchos de los problemas de planeación de rutas y vigilancia se pueden modelar como un problema abstracto de minimización, este tipo de problemas teóricos comúnmente son estudiados en el área de investigación de operaciones y optimización. Para más ejemplos sobre problemas de cobertura con robots aéreos se recomienda consultar (2, 18, 39).

El problema de encontrar un esquema de enrutamiento óptimo para un conjunto de vehículos repartidores los cuales inician sus recorrido en un deposito central, es un problema que se ha estudiado ampliamente investigación de operaciones(10). En este problema es requerido que los vehículos repartidores cubran un conjunto de ubicaciones (por ejemplo tiendas o almacenes) donde se tiene que repartir o recoger un conjunto de bienes.

## 2. TRABAJO RELACIONADO Y ANTECEDENTES

---

Otras variante del problema de enrutamiento consisten en considerar peticiones dinámicas por parte de los clientes (5, 8, 35), el caso cuando los vehículos tienen capacidades de almacenamiento acotado y el caso cuando se especifica un tiempo de entrega límite. Se recomienda consultar los trabajos (33, 36) para mayores detalles sobre dichas variantes de los problemas.

En la práctica los vehículos aéreos no tripulados presentan límites en el tiempo de autonomía (tiempo de batería) y límites en la capacidad de conectividad, dichas restricciones también han sido consideradas dentro de las variantes del problema para proponer algoritmos con persistencia de conectividad (37), robustez y tolerancia a fallas (38), y comunicaciones(26) durante el recorrido de exploración.

La extracción de un árbol generador de la gráfica de entrada es una herramienta usualmente utilizada en el problema de exploración con múltiples agentes. Particularmente para el problema de planeación de rutas, en (19) se propone un algoritmo (en el modo fuera de línea) para el modo de exploración con múltiples agentes. En dicho trabajo los autores dividen un árbol generador (extraído de la gráfica de entrada) de tal manera que cada agente cubre una porción equivalente del árbol.

Los vehículos aéreos no tripulados también pueden desplegarse a modo de enjambre para realizar tareas de exploración conjunta. La principal diferencia de esta variante es que todos los agentes pueden estar a lo más a una distancia máxima permitida, es decir, existe un número positivo  $d$  tal que la distancia entre cualquiera par de agentes es a lo más  $d$  (12). La motivación principal de esta restricción se da debido a que en la práctica las frecuencias de transmisión de datos tienen un parámetro máximo de dispersión, y que el modo de enrutamiento para enjambre de agentes toma en cuenta la posición y desplazamiento grupal.

Otro problema altamente relacionado, es aquel en el que se busca cubrir los nodos de una gráfica con conjunto de agentes(15). La técnica más empleada para este tipo de problema consiste en extraer un árbol generador mínimo y luego buscar un conjunto de  $k$  subárboles tal que el máximo tamaño de cualquier subárbol es minimizado.

La motivación principal para problemas de cobertura de vértices surge de la ubicación de estaciones de enfermería, en el cual se busca que todo paciente tenga asignada una enfermería con una distancia acotada. Este problema es conocido como un problema  $\mathcal{NP}$ -duro, sin embargo en (15) se propone un algoritmo que obtiene, en el peor caso, una solución de tamaño a lo más 4 veces el tamaño de la solución óptima. Para el caso de árboles se propone en (28, 29), un algoritmo de aproximación con factor 2.

Es importante notar que la diferencia principal entre todos los problemas mencionados anteriormente y el problema de exploración de gráficas que en este trabajo se estudia, es que en los problemas anteriores se permite explorar la gráfica pasando un número no arbitrario de veces por cada arista.

Este trabajo se enfoca en el problema de exploración de gráficas con múltiples agentes particularmente cuando la gráfica de entrada es un árbol. Existen dos posibles variantes del problema de acuerdo con el modo exploración; por un lado el modo off-line (o fuera de línea) en el cual se supone que el mapa de exploración es conocido por todos los agentes, por otro lado el modo on-linea (o en línea) es en el que no se cuenta con

información global de las rutas (9).

Algunas otras variantes del problema consideran pesos en las aristas de la gráfica de exploración. Los pesos pueden representar el costo en combustible o el tiempo que le toma a un agente moverse de un vértice a otro. Se recomienda consultar el compendio de algoritmos de cobertura escrito por H. Choset para mayor información sobre estas variantes (9).

## 2.2. El problema de aumentación de gráficas

El problema de aumentación ha sido ampliamente estudiado en teoría de gráficas y optimización combinatoria, más aún, es interesante debido a sus múltiples aplicaciones en problemas tales como la planeación, diseño y control de topologías de redes de comunicación, planeación de redes urbanas y diseño de circuitos, por mencionar algunas.

Una de las variantes más estudiadas del problema de aumentación es aquella en la que se busca obtener un cierto nivel de conexidad en la gráfica a través de la adición de aristas. Una gráfica es  $k$ -conexa si no existe un conjunto de  $k-1$  vértices tal que al eliminarlos se obtiene una gráfica desconexa. Análogamente existe una definición para gráficas  $k$ -conexas por aristas.

Dicha variante se ha atacado con diferentes técnicas y desde varias perspectivas, por ejemplo, considerando la obtención de gráficas compatibles, emparejamientos planos, e incluso desde la construcción de gráficas a partir de nubes de puntos.

El problema de aumentación para obtener cierto nivel de conexidad fue inicialmente estudiado en 1976 por Eswaran y Tarjan (así como por Plesník de manera independiente) en gráficas abstractas. Ellos dieron solución a dicho problema en (14, 31) a través de algoritmos de tiempo polinomial que calculan un conjunto mínimo de aristas para conseguir 2-conexidad (tanto por aristas como por vértices) de la gráfica de entrada.

Eswaran y Tarjan proponen en (14) una variante del problema de aumentación, en la que la gráfica de entrada tiene aristas dirigidas y se busca que la gráfica resultante sea fuertemente conexa. Ellos muestran que dicha variante es un  $\mathcal{NP}$ -Completo.

Recientemente Raghavan hizo notar (y remedió) en (32), un error en uno de los algoritmos propuestos por Eswaran y Tarjan para conseguir la aumentación de conexidad fuerte en gráficas dirigidas.

Cuando además de buscar la  $k$ -conexidad de la gráfica se desea preservar su planaridad, resulta que el problema de aumentación se vuelve aún más desafiante. Para esta variante del problema Kant y Bodlaender mostraron en 1991 que el problema de aumentación con el conjunto de mínimo de aristas para obtener  $k$ -conexidad por vértices es  $\mathcal{NP}$ -Completo, incluso cuando  $k=2$  (22).

Posteriormente, en 2008, Rutter y Wolff mostraron en (34) que el problema de aumentación con el conjunto mínimo de aristas se mantiene como un problema  $\mathcal{NP}$ -Duro, cuando se desea conseguir 2-conexidad por aristas. Más aún, el problema es  $\mathcal{NP}$ -Duro incluso cuando la gráfica de entrada es un árbol geométrico.

## 2. TRABAJO RELACIONADO Y ANTECEDENTES

---

Rutter y Wolff adicionalmente propusieron un caso especial del problema de aumentación en el que se busca garantizar que existen  $k$  caminos disjuntos (por aristas o vértices) en una pareja distinguida de vértices mientras se preserva la planaridad de la gráfica. Ellos proponen un algoritmo lineal para el caso cuando  $k=2$  y la gráfica de entrada es una gráfica topológica plana. Para el caso geométrico presentan cotas basadas en el caso cuando  $k=2$ .

El problema de aumentación para obtener  $k$ -conexidad de la gráfica ha sido estudiado también sobre gráficas geométricas, cuando además de preservar la planaridad se requiere mantener el encaje inicial de la gráfica. El estudio de dicha variante inicialmente fue hecho por Abellanas, García, Hurtado, Tejel y Urrutia en 2008 (1). Ellos proponen cotas combinatorias para la familia de árboles geométricos y gráficas geométricas planas.

Para el caso de árboles geométricos García y Tejel, en colaboración indirecta con C. Toth, mostraron en (21) que  $\frac{6n}{11}$  aristas adicionales son a veces necesarias para la aumentación de 2-conexidad por aristas, mientras que en (1) se presenta un algoritmo que muestra la suficiencia de  $\frac{2n}{3}$  aristas. Para el caso de gráficas planas generales Abellanas et. al. presentan en (1) a una familia que establece la necesidad de  $\frac{2n}{3}$  aristas adicionales, posteriormente en 2012 C. Toth propone en (40) un algoritmo que ajusta la suficiencia de aristas.

Una variante interesante e inspirada en redes de comunicación móviles es propuesta en 2010 por Kranakis et al. en (23), en la que además de preservar la planaridad de la gráfica y obtener un cierto nivel de conexidad, se restringe la longitud de las aristas debido a que en redes móviles no es posible transmitir a distancia arbitraria. Ellos proponen cotas sobre el número de aristas adicionales para conseguir 2-conexidad en gráficas planas UDG<sup>1</sup>.

Recomendamos el compendio realizado por Ferran Hurtado en 2013 (21) sobre el problema de aumentación, el cual muestra una vista general del problema así como las diferentes técnicas relacionadas que se han desarrollado a lo largo de los años.

Por otro lado, el problema de gráficas con restricciones es un problema recientemente estudiado y propuesto por O. Aichholzer et. al. en 2009 (3), el cual se define como; Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos en posición general junto con conjunto de restricciones de paridad, donde cada punto está etiquetado ya sea como par o impar, se busca encontrar una gráfica  $G$  que satisfaga con las restricciones de cada punto  $p \in S$ , es decir, una gráfica  $G$  sobre el conjunto de puntos  $S$  en la que el grado de cada vértice cumpla con la etiqueta de paridad asignada a él.

O. Aichholzer et. al. muestran que siempre es posible encontrar un árbol plano, una gráfica extraplana 2-conexa, o una pseudotriangulación puntiaguda<sup>2</sup> que satisface

---

<sup>1</sup>El acrimonia UDG (por sus siglas en inglés Unit Disk Graph) hacen referencia a aquellas gráficas en las que la longitud de sus aristas están acotadas por una unidad.

<sup>2</sup>Un pseudotriángulo es un conjunto conexo del plano que se encuentra entre tres cadenas convexas mutuamente tangentes. Una pseudotriangulación es una gráfica geométrica en la que todas sus caras, excepto la cara exterior, es un pseudotriángulo. Una pseudotriangulación puntiaguda es una pseudo-

todas las restricciones de los vértices con excepción de a lo más tres.

Para el caso de triangulaciones, ello proponen un método en el que garantizan el cumplimiento de la paridad de  $\frac{2n}{3}$ , y muestran que en el peor caso existe un número lineal de restricciones que no pueden ser satisfechas.

Posteriormente en 2015 V. Álvarez abordó en (4) el problema de triangulaciones con restricciones de paridad permitiendo la inserción de puntos Steiner. Álvarez muestra que siempre es posible construir una triangulación par (o impar) con la inserción de a lo más  $n/3 + cn/3 + c$  puntos Steiner, donde  $c$  es un entero constante positivo.

Hasta donde tenemos conocimiento, este último resultado ha sido la única de las variantes del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad estudiado, aunque el planteamiento de dicho problema no fue establecido como tal.

---

triangulación en la que en cada vértice de la gráfica tiene dos aristas incidentes que generan un ángulo menor que  $\pi$ .



## El problema de exploración de gráficas

---

Sea  $T = (V, E)$  un árbol y  $k > 1$  un número entero positivo. Representamos el recorrido hecho por un agente como una secuencia  $W := (u_1, \dots, u_m)$  de vértices de  $T$ , donde dos elementos consecutivos son ya sea adyacentes o iguales. Que dos elementos consecutivos en la secuencia sean iguales, representa que el agente quedó estacionado en el mismo vértice durante la correspondiente unidad de tiempo.

Por conveniencia, suponemos que el agente queda estacionado en el vértice que finaliza con su recorrido.

Para los fines de este trabajo, nos referimos a tal secuencia de vértices  $W$  como una *caminata* de  $T$ . Usualmente en teoría de gráficas la palabra reservada *caminata* se refiere a una secuencia de vértices, donde los elementos consecutivos son vértices adyacentes diferentes.

Similarmente, un *camino* en este trabajo se refiere a una caminata en donde cada vértice es visitado una vez. Observe que visitar a un vértice, es representado en el camino como una secuencia de elementos iguales de longitud mayor a cero.

Denotamos al conjunto de vértices de un árbol  $T$  (resp. de una caminata) como  $V(T)$  (resp.  $V(W)$ ).

El *tiempo* de una caminata  $W$ ,  $t(W)$ , es el número de pasos que un agente necesita para llevar a cabo el recorrido descrito por  $W$ . Formalmente, el tiempo es el número de elementos en  $W$  menos uno  $t(W) = m - 1$ .

La *longitud* de una caminata  $W$ ,  $l(W)$ , es el número de veces que un agente cambia de posición. Formalmente, la longitud es el número de veces que  $u_i \neq u_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, m - 1$ .

Una *estrategia* es una asignación de una caminata a cada agente. Formalmente, se define como una tupla  $S := (W_1, \dots, W_k)$  de  $k$  caminatas en  $T$ , donde  $W_i$  es la caminata asignada al  $i$ -ésimo agente. Decimos que  $S$  es una estrategia de *cobertura* si cada vértice de  $T$  esta en algún  $W_i$ .

En nuestro modelo consideramos que la comunicación de los agentes se lleva a cabo a lo más cada  $j$  unidades de tiempo, siempre y cuando todos los agentes se encuentre en el mismo vértice al mismo tiempo.

Por lo tanto para una estrategia dada, un conjunto de agentes se comunican si el

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

$j$ -ésimo termino en sus correspondientes caminatas es el mismo. Suponemos que los agentes, bajo la modalidad de comunicación, se encuentran al final de sus caminatas. Esta reconstrucción tiene sentido en escenarios en los que todos los agentes deben reunir la información parcial recabada por otros agentes.

El *tiempo* de una estrategia  $S$ ,  $t(S)$ , es el tiempo total que le toma a todos los agentes llevar a cabo el recorrido descrito por sus caminatas. Debido a que los agentes se mueven en paralelo por la gráfica, tenemos que:

$$t(S) = \max_{1 \leq i \leq k} \{t(W_i)\}.$$

La *longitud* de una estrategia  $S$ ,  $l(S)$ , es la suma de las longitudes de todas las caminatas. Por lo tanto:

$$l(S) = \sum_{i=1}^k l(W_i).$$

Dada una gráfica  $G$  denotamos con  $\mathcal{C}(G)$  al conjunto de sus componentes conexas. En este trabajo abordamos los siguientes problemas de optimización:

- **Problema de exploración de longitud mínima (PELM):**  
Encontrar una estrategia de exploración de longitud mínima con  $k > 1$  agentes iniciando en un vértice arbitrario.
- **Problema de exploración de longitud mínima con comunicación periódica (PELMC):**  
Encontrar una estrategia de exploración de longitud mínima con  $k > 1$  agentes iniciando en un vértice arbitrario, en el que los agentes se comunican en a lo más cada  $p > 0$  unidades de tiempo.
- **Problema de exploración de tiempo mínimo (PETM):**  
Encontrar una estrategia de exploración de tiempo mínimo con  $k > 1$  agentes iniciando en un vértice arbitrario.
- **Problema de exploración de tiempo mínimo con comunicación periódica (PETMC):**  
Encontrar una estrategia de exploración de tiempo mínimo con  $k > 1$  agentes iniciando en un vértice arbitrario, en el que los agentes se comunican en a lo más cada  $p > 0$  unidades de tiempo.

#### 3.1. El problema de exploración de longitud mínima (PELM)

Iniciamos estableciendo un resultado preliminar sobre el problema PELM. Con este resultado es posible transformar el problema de encontrar una estrategia de mínima

longitud para  $T$  con  $k$  agentes, en el problema de encontrar una tupla de  $k$  caminos que minimizan una cierta función objetivo.

**Lema 3.1.1.** *Sea  $S := (W_1, \dots, W_k)$  una estrategia de exploración de longitud mínima para  $T$  con  $k$  agentes. El conjunto de aristas de cada  $W_i$  se puede descomponer en dos subconjuntos: por un lado en un conjunto de aristas de un camino  $P(W_i)$ , y por otro en un conjunto de aristas de un bosque  $F(W_i)$ . Más aún,*

- (a) *Cada arista en  $P(W_i)$  es recorrida una sola vez por el  $i$ -ésimo agente;*
- (b) *Cada arista en  $F(W_i)$  es recorrida a lo más dos veces por el  $i$ -ésimo agente y nunca más es recorrida por cualquier otro agente.*
- (c) *Cada  $C \in \mathcal{C}(F(W_i))$  satisface que:*

$$\left| V(C) \cap \left( \bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)) \right) \right| = 1;$$

- (d) *Para cada pareja  $j \neq l$  tenemos que:*

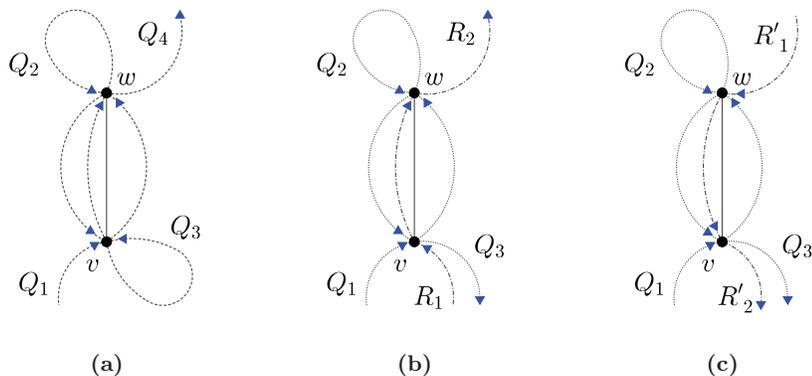
$$V(F(W_j)) \cap V(F(W_l)) \subset \bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)).$$

*Demostración.* Primero mostramos que cada agente recorre una aristas de  $T$  a lo más dos veces.

Por contradicción suponemos que  $S$  es una estrategia de exploración de longitud mínima para  $T$ , tal que existe una arista  $(v, w)$  que es recorrida al menos tres veces por el  $i$ -ésimo agente. Entonces,  $W_i$  puede escribirse como  $W_i = (Q_1, v, w, Q_2, w, v, Q_3, v, w, Q_4)$  para algunos caminos  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$ . Ver Figura 3.1a.

Note que podemos reemplazar  $W_i$  por la caminata  $(Q_1, v, Q_3, v, w, Q_2, w, Q_4)$  de tal manera que obtenemos una estrategia para  $T$  con una longitud menor, contradiciendo la optimalidad de  $S$ .

A continuación definimos  $P(W_i)$  y  $F(W_i)$ . Para cada  $W_i$ , sea  $P(W_i)$  la subgráfica de  $T$  inducida por las aristas en  $W_i$  recorridas una vez por el  $i$ -ésimo agente, y sea



**Figura 3.1:** (a) Una caminata que recorre la arista  $(v, w)$  al menos tres veces.  
 (b),(c) Muestran el caso cuando dos agentes recorren una arista tres veces.

$F(W_i)$  la gráfica de  $T$  inducida por las aristas de  $W_i$  recorridas dos veces por el  $i$ -ésimo agente.

Note que, debido a que las aristas en  $P(W_i)$  son recorridas una vez por el  $i$ -ésimo agente y  $T$  es un árbol entonces,  $P(W_i)$  es un camino y  $F(W_i)$  es un bosque; esto prueba el caso (a).

Para probar el caso (b) solo basta con mostrar que no existe otro agente más que el  $i$ -ésimo que visita las aristas de  $F(W_i)$ .

Suponga que una aristas  $(v, w)$  en  $F(W_i)$  es visitada también por el  $j$ -ésimo agente, para algún  $j \neq i$ . Sin pérdida de generalidad suponga que el  $i$ -ésimo agente visita  $(v, w)$  primero y que llega por el vértice  $v$  en dirección al vértice  $w$ , y posteriormente visita el vértice  $w$  con dirección al vértice  $v$ , entonces  $W_i$  se puede escribir como  $W_i = (Q_1, v, w, Q_2, w, v, Q_3)$ , para algunas caminatas  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$ .

Por lo tanto, tenemos los siguientes casos:

1.  $W_j$  visita primero a  $v$ :

Entonces  $W_j$  se puede escribir como  $(R_1, v, w, R_2)$ , para algunas caminatas  $R_1$  y  $R_2$ . Ver Figura 3.1b. Al reemplazar  $W_i$  con  $(Q_1, v, Q_3)$  y  $W_j$  con  $(R_1, v, w, Q_2wR_2)$  obtenemos una estrategia de exploración para  $T$  de longitud menor, contradiciendo

do la optimalidad de  $S$ .

2.  $W_j$  visita primero a  $w$ :

Entonces  $W_j$  se puede escribir como  $(R'_1, w, v, R'_2)$  para algunas caminatas  $R'_1$  y  $R'_2$ . Ver Figura 3.1c. Al remplazar  $W_i$  con  $(Q_1, v, Q_3)$  y  $W_j$  con  $(R'_1, w, Q_2, w, v, R'_2)$  obtenemos una estrategia de exploración para  $T$  de longitud menor, contradiciendo la optimalidad de  $S$ .

Ahora probamos el caso (c). Por contradicción suponga que existe una componente conexa  $C$  en algún  $F(W_i)$  tal que

$$X =: \left| V(C) \cap \left( \bigcup_{j=1}^k V(P(W_i)) \right) \right| > 1.$$

Debido a que  $T$  es un árbol y  $F(W_i)$  es disjunto por aristas con  $P(W_i)$  tenemos que  $|X \cap V(P(W_i))| = 1$ .

Sea  $\{u\} := X \cap V(P(W_i))$ ; donde  $v$  es un vértice en  $X$  diferente de  $u$  y sea  $W_j$  una caminata tal que  $u \in P(W_j)$ . Si consideramos como riza a  $u$  de  $C$  y sea  $T_v$  el subárbol de  $C$  enraizado en  $v$ . Sea  $T_u := C \setminus T_v$ . Sea  $Q_u$  y  $Q_v$  un recorrido in-order de  $T_u$  y  $T_v$ , respectivamente.

Note que  $W_i$  y  $W_j$  se pueden escribir como  $W_i =: (R_1, u, R_2, u, R_3)$  y  $W_j =: (R_4, v, R_5)$  para algunas caminatas  $R_1, R_2, R_3, R_4$  y  $R_5$ . Al remplazar  $W_i$  con  $(R_1, u, Q_u, u, R_3)$  y  $W_j$  con  $(R_4, v, Q_v, v, R_5)$  obtenemos una estrategia de exploración para  $T$  de longitud menor a  $S$ . (En particular la arista que une a  $v$  a su padre en  $C$  no es recorrida de nuevo.) Lo cual es una contradicción a la optimalidad de  $S$ .

Finalmente, probamos el caso (d). Por contradicción suponga que existe un un par  $F(W_j)$  y  $F(W_l)$  se intersectan en un vértice  $u$  que no pertenece a

$$\bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)).$$

Sea  $C_1$  y  $C_2$  las componentes conexas de  $F(W_j)$  y  $F(W_l)$  que contienen a  $u$ , respectivamente. Sea  $v$  el vértice de  $C_1$  en  $P(W_j)$ . Sea  $v$  la raíz de  $C_1$  y sea  $w$  el padre de

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

$u$  en  $C_1$ . Entonces  $W_j$  y  $W_l$  pueden ser escritos como  $W_j =: (Q_1, w, u, Q_2, u, w, Q_3)$  y  $W_l =: (R_1, u, R_2)$  para algunas caminatas  $Q_1, Q_2, Q_3, R_1$  y  $R_2$ . Al remplazar  $W_j$  con  $(Q_1, w, Q_3)$  y  $W_l$  con  $(R_1, u, Q_2, u, R_2)$  obtenemos una estrategia de exploración para  $T$  de longitud menor que  $S$ . Lo cual contradice la optimalidad de  $S$ .

□

Supongamos que  $S := (W_1, \dots, W_k)$  es una estrategia de exploración de longitud mínima para  $T$ .

Sea  $e$  una aristas de una caminata  $W_i$ . Por el Lema 3.1.1 tenemos lo siguiente:

Si  $e$  esta en exactamente  $q$  de los caminos  $P(W_i)$ , entonces es visitado exactamente  $q$  veces. De otra manera,  $e$  es visitado exactamente dos veces.

Por lo tanto, es costo de  $S$  esta dado por:

$$\begin{aligned}
 l(S) &= \sum_{i=1}^k l(P(W_i)) + 2 \sum_{i=1}^k |E(F(W_i))| \\
 &= \sum_{i=1}^k l(P(W_i)) + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{C \in \mathcal{C}(F(W_i))} (|C| - 1) \\
 &= \sum_{i=1}^k l(P(W_i)) + 2 \left| V(T) \setminus \bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)) \right| \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce de los casos (c) y (d) del Lema 3.1.1.

Observe que una propiedad importante de la Ecuación 3.1 es que el costo de  $S$  solo depende de  $P(W_i)$ .

En el siguiente Lema, mostramos que dada una tupla de  $k$ -caminos es posible obtener en tiempo lineal una estrategia de exploración con la misma estructura que se muestra en el Lema 3.1.1.

**Lema 3.1.2.** *Sea  $\mathcal{P} := (P_1, \dots, P_k)$  una tupla de  $k$  caminos en  $T$ . Entonces en tiempo  $O(n)$  es posible calcular una estrategia de exploración  $S := (W_1, \dots, W_k)$  para  $T$  con  $k$  agentes que satisface lo siguiente: El conjunto de aristas de cada  $W_i$  se puede descomponer en dos conjuntos: las aristas de un camino  $P(W_i) = P_i$  y las aristas de un bosque  $F(W_i)$ . Más aún:*

- (a) Cada arista en  $P(W_i)$  es recorrida una vez por el  $i$ -ésimo agente;
- (b) Cada arista en  $F(W_i)$  es recorrida dos veces por el  $i$ -ésimo agente y no es recorrida otra vez por cualquier otro agente.

- (c) Cada  $C \in \mathcal{C}(F(W_i))$  satisface que

$$\left| V(C) \cap \left( \bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)) \right) \right| = 1; \text{ y}$$

- (d) Para cada pareja  $j \neq l$  tenemos que

$$V(F(W_j)) \cap V(F(W_l)) \subset \bigcup_{i=1}^k V(P(W_i)).$$

*Demostración.* Iniciando desde  $i = 1$  hasta  $k$  construimos  $W_i$  como se describe a continuación.

Para cada vértice  $v$  de  $P_i$  sea  $T_v$  el árbol enraizado en  $v$  con el máximo número de aristas tal que:

- $V(T_v) \cap V(P_i) = \{v\}$
- $(V(T_v) \setminus \{v\}) \cap W_j = \emptyset$  para todo  $j < i$ .

Note que  $T_v$  se puede calcular en tiempo  $O(|T_v|)$  al realizar un búsqueda en primero profundidad iniciando en  $v$ . Sea  $Q'_v$  un recorrido in-order de  $T_v$  iniciando en  $v$ .

Sea  $P_i =: (v_1, \dots, v_m)$  y

$$W_i := (v_1, Q_{v_1}, \dots, v_m, Q_{v_m})$$

. Por lo tanto,  $W_i$  esta en la caminata en la cual el  $i$ -ésimo agente recorre  $P_i$ , parando en cada vértice  $v$  de  $P_i$  para realizar un recorrido in-order de  $T_v$ .

Sea  $P(W_i) = P_i$  y  $F(W_i) = \bigcup_{v \in V(P_i)} T_v$  y  $S = (W_1, \dots, W_k)$ . Debido a que cada vértice de  $T$  esta en algún  $T_v$  para algún  $P_i$ ,  $S$  es una estrategia de exploración para  $T$  con  $k$  agentes. Por construcción  $S$  satisface (a), (b), (c) y (d). Finalmente,  $S$  es calculada en tiempo

$$\sum_{i=1}^k \sum_{v \in P_i} O(|T_v|) = O(n)$$

□

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

Los Lemas 3.1.1 y 3.1.2 de manera conjunta implican que para encontrar una estrategia de exploración de longitud mínima para  $T$  con  $k$  agentes, es suficiente con encontrar una tupla de  $k$  caminos  $(P_1, \dots, P_k)$  tal que minimiza la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^k l(P_i) + 2 \left| V(T) \setminus \bigcup_{i=1}^k V(P_i) \right| \quad (3.2)$$

En lo que resta del capítulo y por efectos de simplicidad, representamos una estrategia de exploración como su correspondiente tupla de caminos.

Debido a la naturaleza de nuestro algoritmo (programación dinámica) representamos cada camino como una lista ligada. Dicha representación nos permite actualizar eficientemente la estrategia.

#### 3.1.1. Todos los agentes iniciando en un mismo vértice

Primero consideramos el caso cuando todos los agentes inician sus recorridos en un vértice en común.

Sea  $u$  un vértice de  $T$  y  $1 \leq j \leq k$  un entero. Sea

$$\text{ONE-SOURCE}[T, u, j]$$

el costo de una estrategia de exploración mínima para  $T$  con  $j$  agentes todos iniciando en  $u$ .

Por conveniencia, sea  $\text{ONE-SOURCE}[T, u, 0]$  el costo de una estrategia de exploración mínima para  $T$  con un sólo agente que inicia y finaliza su recorrido en  $u$ . Note que esto equivale a dos veces el número de aristas en  $T$ .

**Teorema 3.1.3.** *El conjunto*

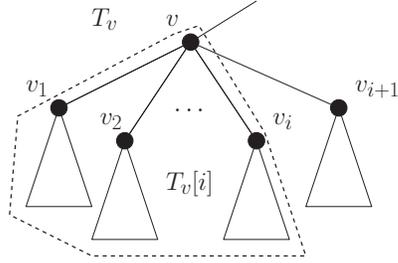
$$\{\text{ONE-SOURCE}[T, u, j] : 1 \leq j \leq k\}$$

*se puede calcular en tiempo  $O(k^2n)$ .*

*Demostración.* Supongas que  $T$  esta enraizado en el vértice  $u$  y que los hijos de todo vértice de  $T$  están listados en un orden arbitrario.

Para cada vértice  $v \in T$ , sea  $T_v$  el subárbol de  $T$  enraizado en  $v$ ; y sea  $T_v[i]$  la subgráfica de  $T$  que consiste de la unión de los subárboles enraizados en los primeros  $i$  hijos de  $v$  junto con las aristas que unen a estos hijos con  $v$ . Ver Figura 3.2.

Usamos una tabla auxiliar  $C[v, i, j]$ , donde  $v$  itera por todos los vértices de  $T$ ,  $1 \leq i \leq v$  y  $0 \leq j \leq k$ . Para  $j > 1$ , la tabla  $C[v, i, j]$  almacena los costos de la estrategia de exploración mínima para  $T_v[i]$  con  $j$  agentes todos iniciando en  $v$ .



**Figura 3.2:** Un subárbol de  $T$  enraizado en un vértice  $v$ . El subárbol  $T_v[i]$  esta remarcado con líneas punteadas.

Para cada vértice  $v$  en  $T$ , inicializamos  $C[v, i, 0]$  igual a dos veces el número de aristas en  $T_v[i]$ . Note que este es el costo de explorar  $T_v[i]$  con un agente que inicia y termina su recorrido en  $v$ . Note también que  $C[u, u, j]$  es el costo general de recorrer  $T$  con  $j$  agentes iniciando en  $u$  o ONE-SOURCE[ $T, u, j$ ].

Sea  $v$  un vértice de  $T$  y  $v_1, \dots, v_m$  su conjunto de hijos. Considere una estrategia de exploración óptima para  $T_v[i]$  con  $j$  agentes todos iniciando en  $v$ . Suponga que es representada como una tupla de caminos que minimizan (3.2).

Por el Lema 3.1.1, si ninguno de estos caminos termina en un vértice de  $T_{v_i}$ , entonces  $T_{v_i}$  se considera explorado por un agente; este agente recorre la arista  $(v, v_i)$  dos veces. Si  $l > 0$  de estos caminos termina en un vértice de  $T_{v_i}$  entonces cada uno de los correspondientes agentes recorre la arista  $(v, v_i)$  una vez; los caminos restantes terminan en un vértice de  $T_v[i - 1]$ . Por lo tanto,  $C[v, i, j]$  es igual al costo mínimo entre

$$C[v, i - 1, j] + C[v_i, v_i, 0] + 2$$

y

$$C[v, i - 1, j - l] + C[v_i, v_i, l] + l,$$

para todo  $1 \leq l \leq j$ .

Calculamos  $C[v, i, j]$  de abajo hacia arriba. Habiendo calculado  $C[v, i, j]$  para todo vértice de altura  $h$ , calculamos estos valores para los vértices de altura  $h + 1$ ; en total existen  $O(kn)$  celdas en  $C$ ; calcular cada celda toma tiempo  $O(k)$ . Por lo tanto, el algoritmo toma tiempo  $O(k^2n)$ .  $\square$

### 3.1.2. Agentes iniciando desde dos vértices

En esta subsección mostramos que el caso cuando los  $k$  agentes inician su recorrido desde dos diferentes ubicaciones  $u$  y  $v$ , se puede calcular también con un algoritmo de programación dinámica.

Sea  $s, t \geq 0$  dos enteros positivos. Para  $s, t \geq 1$  sea

$$\text{TWO-SOURCES}[T, u, v, s, t]$$

el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T$  en la cual  $s$  agentes inician en  $u$  y  $t$  agentes inician en  $v$ .

Sea

$$\text{TWO-SOURCES}[T, u, v, 0, t]$$

el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T$  en la cual 1 agente inicia y finaliza en  $u$ , y  $t$  agentes inician en  $v$ .

Sea

$$\text{TWO-SOURCES}[T, u, v, s, 0]$$

el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T$  en la cual 1 agente inicia y finaliza en  $v$ , y  $s$  agentes inician en  $u$ .

Para resolver el problema de exploración desde dos ubicaciones, primero necesitamos algunas definiciones y un par de resultados técnicos.

Sea  $u$  y  $v$  dos vértices de  $T$ ; renombramos como  $x_1, x_2, \dots, x_m$  a los vértices del camino  $\gamma$  desde  $u$  hasta  $v$  en  $T$ , i.e.  $\gamma := (u = x_1, x_2, \dots, x_m = v)$ .

Sea  $F$  el bosque obtenido al eliminar todas las aristas en  $\gamma$  desde  $T$ ; sea  $T_1, \dots, T_m$  las componentes de  $F$ , donde  $T_i$  es la componente que contiene a  $x_i$ . Suponemos que  $T_i$  esta enraizamos en  $x_i$ .

Sea  $T_{u,v}[i]$  el árbol que consiste en la unión de subcamino  $\gamma_i := (x_1, \dots, x_i)$  y los árboles  $T_1, \dots, T_i$  (ver Figura 3.3).

Para los enteros  $1 \leq k' \leq k$ ,  $0 \leq j \leq k'$  y  $1 \leq i \leq m$ , sea

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', j]$$

el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T_{u,v}[i]$  con  $k'$  agentes todos iniciando en  $u$  en la cual al menos  $j$  agentes finalizan sus caminatas en  $x_i$ ; sea

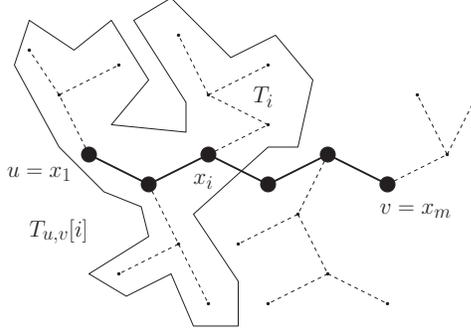
$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, 0, 0]$$

el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T_{u,v}[i]$  con 1 agente que inicia y finaliza su recorrido en  $u$ .

**Teorema 3.1.4.** *El conjunto*

$$\{\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', j] : 0 \leq j \leq k' \leq k, \text{ and } 1 \leq i \leq m\}$$

*se puede calcular en tiempo  $O(k^3n)$ .*



**Figura 3.3:** El árbol  $T_{u,v}[i]$  está contenido en la región poligonal. El camino que une a  $u = x_1$  con  $v = x_m$  está marcado con segmentos de líneas sólidas.  $T_1, \dots, T_m$  están marcados con segmentos de líneas punteadas.

*Demostración.* Primero usamos el Teorema 3.1.3 para calcular el conjunto

$$\{\text{ONE-SOURCE}[T_i, x_i, l] : 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq l \leq k\}.$$

Lo cual se puede calcular en tiempo  $\sum_{i=1}^m O(k^2|T_i|) = O(k^2n)$ . Luego mostramos como calcular  $\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', j]$  dependiendo de los valores de  $i$  y  $j$ . Considere una estrategia de exploración óptima para  $T_{u,v}[i]$  con  $k'$  agentes todos iniciando en  $x_1 = u$  en la que al menos  $j$  agentes finalizan sus caminatas en  $x_i$ ; supongamos que esta representada por una tupla de  $k'$  caminos que minimizan (3.2). Entonces tenemos los siguientes casos:

- $i = 1$ :

En este caso, al menos  $l \geq j$  caminos consisten de un solo vértice  $x_1$  y el resto de los caminos finalizan en un vértice de  $T_1$ . Por lo tanto,  $\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_1, k', j]$  es igual al mínimo de

$$\text{ONE-SOURCE}[T_1, x_1, k' - l],$$

para todo  $j \leq l \leq k'$ .

- $i > 1$  y  $j = 0$ :

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

En este caso ningún camino finaliza en  $x_i$ . Si ningún camino finaliza en un vértice de  $T_i$  entonces  $T_i$  es explorado por un solo agente; dicho agente explora la arista  $(x_{i-1}, x_i)$  dos veces. Si  $l > 0$  caminos finalizando en un vértice de  $T_i$ ; entonces cada uno de los correspondientes agentes explora la arista  $(x_{i-1}, x_i)$  una sola vez. Por lo tanto,  $\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', 0]$  es igual al mínimo de:

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_{i-1}, k', 0] + \text{ONE-SOURCE}[T_i, x_i, 0] + 2$$

y

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_{i-1}, k', l] + \text{ONE-SOURCE}[T_i, x_i, l] + l,$$

para todo  $1 \leq l \leq k'$ .

- $i > 1$  y  $j > 0$ :

Suponga que  $l \geq j$  de los caminos finalizan en un vértice de  $T_i$ ; entonces cada uno de los correspondientes agentes explora la arista  $(x_{i-1}, x_i)$  una vez, con  $j$  de ellos finalizando sus recorridos en  $x_i$  y  $l - j$  finalizando sus recorridos en un vértice de  $T_i$  diferente de  $x_i$ . Por lo tanto,  $\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', j]$  es igual al mínimo de:

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_{i-1}, k', l] + \text{ONE-SOURCE}[T_i, x_i, l - j] + l,$$

para todo  $j \leq l \leq k'$ .

Usando programación dinámica cada celda se puede calcular en tiempo  $O(k)$ . Por lo tanto, calcular todos los casos por completo se puede llevar a cabo en tiempo  $O(k^3n)$ .

□

**Lema 3.1.5.** *Sea  $(x, y)$  una arista en una estrategia de exploración óptima para  $T$  que es visitada por al menos dos agentes diferentes. Entonces todos los agentes recorren  $(x, y)$  en la misma dirección, desde  $x$  en dirección a  $y$  o desde  $y$  en dirección a  $x$ .*

*Demostración.* Por contradicción suponga que un agente recorre  $(x, y)$  desde  $x$  con dirección a  $y$  y que existe otro agente que recorre  $(x, y)$  desde  $y$  con dirección a  $x$ .

Sea  $(W_1, x, y, W_2)$  la caminata que recorrer el primer agente, y  $(W'_1, y, x, W'_2)$  la caminata que recorre el segundo agente.

Si reemplazamos la primer caminata por  $(W_1, x, W'_2)$  y la segunda caminata por  $(W'_1, y, W_2)$ , obtenemos una estrategia de exploración de longitud menor, lo cual nos lleva a una contradicción.  $\square$

El siguiente teorema mostramos como se encuentra una estrategia de exploración óptima para  $T$  para el caso cuando existen dos vértices iniciales  $u$  y  $v$ .

**Teorema 3.1.6.** *El conjunto*

$$\{\text{TWO-SOURCES}[T, u, v, s, t] : 0 \leq s, t \leq k\}$$

se puede calcular en tiempo  $O(k^4n)$ .

*Demostración.* Primero usamos el Teorema 3.1.3 para calcular en tiempo  $O(k^2n)$  el conjunto

$$\{\text{ONE-SOURCE}[T_i, x_i, l] : 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq l \leq k\}.$$

Luego, usamos el Teorema 3.1.4 para calcular los conjunto

$$\{\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, k', j] : 0 \leq j \leq k' \leq k, \text{ y } 1 \leq i \leq m\}$$

y

$$\{\text{DESTINATION-PATH}[T, v, u, x_i, k', j] : 0 \leq j \leq k' \leq k, \text{ y } 1 \leq i \leq m\}$$

en tiempo  $O(k^3n)$ . Note que en el primer conjunto, los agentes inician en  $u$ , y en el segundo conjunto los agentes inician en  $v$ .

Para toda tripleta de enteros  $1 \leq i \leq m$ ,  $0 \leq s, t \leq k$ , sea  $C[i, s, t]$  el costo de una estrategia de exploración óptima para  $T$  en la cual  $s$  agentes inician sus recorridos en  $u$ ,  $t$  agentes inician sus recorridos en  $v$  y  $(x_{i-1}, x_i)$  sea la última arista de  $\gamma$  que es recorrida por un agente que inicia su recorrido en  $u$ ; sea  $C[1, s, t]$  el costo cuando ningún agente que inicia en  $u$  visita una arista de  $\gamma$ .

Note que  $\text{TWO-SOURCES}[T, u, v, s, t]$  es igual al mínimo de  $C[i, s, t]$  para todo  $1 \leq i \leq m$ .

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

Por el Lema 3.1.5, sabemos que en una estrategia de exploración óptima a lo mas un vértice de  $\gamma$  es visitado por un agente que inicia en  $u$  y por un agente que inicia en  $v$ . Por lo tanto,  $C[i, s, t]$  se puede calcular con  $\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, s, j]$  y  $\text{DESTINATION-PATH}[T, v, u, x_i, t, j]$  como se muestra a continuación:

- $i = 1$ : En este caso consideramos que ningún agente iniciando en  $u$  recorre la arista  $(x_1, x_2)$ . Por lo tanto, al menos un agente iniciando en  $v$  visita  $x_2$ , y  $T_1$  es explorado por los  $s$  agentes iniciando en  $u$  y posiblemente por algunos agentes que inician en  $v$ .

De tal manera que,  $C[1, s, t]$  es igual al mínimo de

$$\text{ONE-SOURCE}[T_1, x_1, s + j] + \text{DESTINATION-PATH}[T, v, u, x_2, t, j] + j,$$

para todo  $0 \leq j \leq t$ .

- $i = m$ : En este caso consideramos que ningún agente iniciando en  $v$  recorre la arista  $(x_{m-1}, x_m)$ . Por lo tanto, al menos uno de los agentes iniciando en  $u$  visita  $x_m$  y  $T_m$  es explorado por los  $t$  agentes iniciando en  $v$  y posiblemente por algunos agentes iniciando en  $u$ .

De tal manera que,  $C[m, s, t]$  es igual al mínimo de

$$\text{ONE-SOURCE}[T_m, x_m, t + j] + \text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_{m-1}, s, j] + j,$$

para todo  $0 \leq j \leq t$ .

- $1 < i < m$ :

En este caso consideramos que al menos un agente iniciando en  $u$  entra a  $T_i$ . Si un agente iniciando en  $u$  visita dos veces la arista  $(x_{i-1}, x_i)$ , entonces ningún agente iniciando en  $v$  puede entrar a explorar  $T_i$ ; de otra manera la caminata cerrada desde  $x_i$  hasta  $x_i$  que ejecuta el agente iniciando en  $u$  se puede llevar a cabo por el agente iniciando en  $v$  que a su vez también visita a  $x_i$ ; lo anterior produciría una estrategia de exploración de menor longitud.

### 3.2 El problema de exploración de longitud mínima con comunicación periódica (PELMC)

---

De tal manera que,  $C[i, s, t]$  es igual al mínimo de

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_i, s, 0] + \text{DESTINATION-PATH}[T, v, u, x_{i+1}, t, 0]$$

y

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, u, v, x_{i-1}, s, j] + \text{ONE-SOURCE}[T, x_i, j + l] +$$

$$\text{DESTINATION-PATH}[T, v, u, x_{i+1}, t, l] + j + l,$$

para todo  $1 \leq j \leq s$  y  $0 \leq l \leq t$ .

Usando programación dinámica cada celda de la tabla puede ser calculada en tiempo  $O(k^2)$ . Por lo tanto, calcular todas las entradas de la tabla se puede realizar en tiempo  $O(k^4n)$ . □

### 3.2. El problema de exploración de longitud mínima con comunicación periódica (PELMC)

En esta subsección consideramos el caso cuando los agentes se deben de comunicar a lo más cada  $p$  unidades de tiempo. Suponemos que todos los agentes inician y finalizan sus recorridos en un vértice en particular. Probamos que el problema de encontrar una estrategia de exploración de longitud mínima con comunicación periódica de  $T$  es un problema  $NP$ -Duro.

A continuación formalizamos el correspondiente problema de decisión:

**Problema 3.2.1** (PELMC). *Sea  $T$  un árbol y sea  $u$  un vértice de  $T$ . Sea  $k, \ell$  y  $p$  enteros positivos. El problema de decisión si existe una estrategia de exploración  $S$  para  $T$ , con  $k$  agentes iniciando sus recorridos en un vértice  $u$  tal que los agentes se comunican a lo más cada  $p$  unidades de tiempo.*

Ahora probamos que PELMC es un problema  $NP$ -Completo a través de una reducción del problema de 3-PARTICIÓN.

**Problema 3.2.2** (3-PARTICIÓN). *Sea  $B$  un entero positivo. Sea  $A$  un conjunto de  $3m$  enteros positivos, tal que  $\frac{B}{4} < a < \frac{B}{2}$  para todo  $a \in A$ , y  $\sum_{a \in A} a = mB$ . El problema de la 3-PARTICIÓN pregunta si  $A$  se puede partir en  $m$  conjuntos  $A_1, \dots, A_m$  tal que para cada  $1 \leq i \leq m$ ,  $\sum_{a \in A_i} a = B$ .*

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

Note que en tal partición, cada  $A_i$  debe consistir de tres elementos. Este problema es conocido por ser un problema fuertemente  $\mathcal{NP}$ -completo (17). Lo cual implica que el problema permanece  $\mathcal{NP}$ -completo aún cuando  $B$  es acotado por una función polinomial en  $m$ .

**Teorema 3.2.3.** *El problema de exploración de longitud mínima con comunicación periódica (PELMC) es  $\mathcal{NP}$ -completo.*

*Demostración.* Note que dada una estrategia de exploración, es posible verificar en tiempo polinomial si dicha tupla de caminos satisface que los agentes se comunican a lo más cada  $p$  unidades de tiempo. Es posible también calcular la longitud de una tupla en tiempo lineal, por lo tanto PELMC esta en  $\mathcal{NP}$ .

Sea  $(A, B)$  una instancia del problema de la 3-PARTICIÓN tal que  $|A| = 3m$  y  $B$  esta acotado por una función polinomial en  $m$ . Construimos, en tiempo polinomial, una instancia de PELMC que tiene solución, si y solo si,  $A$  admite una 3-PARTICIÓN.

Dada  $A := \{a_1, \dots, a_{3m}\}$ , consideramos el siguiente árbol  $T$  (tal como se ilustra en la Figura 3.4). Sea  $P_1, \dots, P_{3m}$   $3m$  caminos, iniciando en el mismo  $u$ , tal que  $l(P_i) = a_i$ .

Sea

$$T' = \bigcup_{i=1}^{3m} P_i.$$

Sea  $Q = (v_1, \dots, v_{3B+4})$  un camino de longitud  $3B + 3$ .

Finalmente, sea

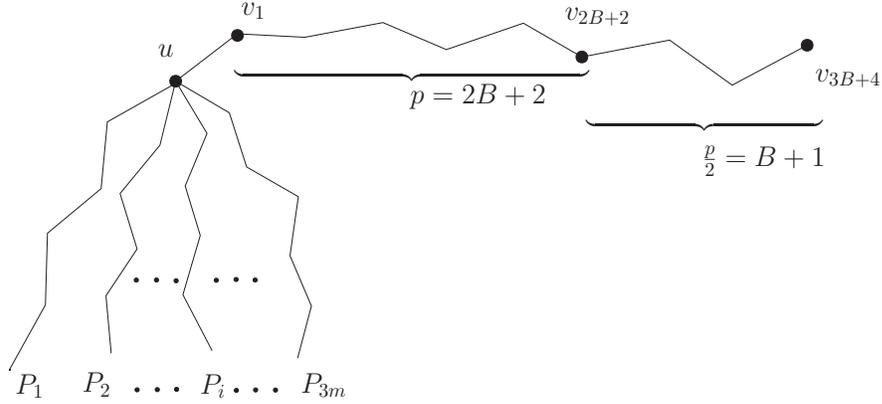
$$T := T' \cup Q \cup (u, v_1).$$

Note que  $T'$  tiene  $nB$  aristas y debido a que  $B$  esta acotado por una función polinomial en  $m$ ,  $T$  puede ser construido en tiempo polinomial. Sea  $k := m + 1$ ,  $p := 2B + 2$  y

$$\ell = m(2B + 2) + (m + 1)(2B + 2) + (2B + 2) = (2m + 2)(2B + 2)$$

Afirmamos que  $T$  tiene una estrategia de exploración con  $k$  agentes todos iniciando en  $v_1$ , en el que los agentes se comunican cada  $p$  unidades de tiempo, cuya longitud es a lo más de  $\ell$  si y solo si  $A$  admite una 3-PARTICIÓN.

Recordemos que todos los agentes se deben comunicar al final de sus recorridos, es decir, sus recorridos deben finalizar en el mismo vértice.



**Figura 3.4:** La construcción de una instancia  $T$ .

Sea  $A_1, \dots, A_m$  una 3-partición de  $A$ . La estrategia de exploración de  $T$  se da de la siguiente manera. Sean  $m$  el número de agentes explorando  $T'$  que se comunican en el vértice  $v_1$  con una longitud de exploración de  $2mB + 2m$  (usando la 3-partición, el  $i$ -ésimo agente explora los 3 caminos asociados a  $A_i$ ), mientras que un agente espera en  $v_1$  por  $2mB + 2m$  unidades de tiempo. Después de eso, los  $m + 1$  agentes se encuentran en  $v_{2B+2}$  y un solo agente explora el último vértice de  $Q$  y regresa a  $v_{2B+2}$  para comunicarse de nuevo. Es directo ver que la longitud de dicha estrategia de exploración es exactamente  $\ell$ .

Sea  $S$  una estrategia de exploración para  $T$ , con  $k$  agentes iniciando en  $v_1$ , que se comunican a lo mas cada  $p$  unidades de tiempo, y con una longitud de exploración de a lo más  $\ell$ . Probamos que  $A$  admite una 3-PARTICIÓN.

Afirmamos que en  $S$  todos los agentes visitan el vértice  $v_{2B+2}$ . Por contradicción suponga que, al menos un agente no visita  $v_{2B+2}$ . Por lo tanto, debido a que el camino de  $v_{2B+2}$  to  $v_{3B+4}$  es de longitud  $B + 1$ , el agente que visita el último vértice de  $Q$  no es capaz de comunicarse con resto de agentes de nuevo, lo cual implica una contradicción.

Así, podemos asegurar que la estrategia  $S$  tiene una longitud de al menos  $(m + 1)(2B + 2) + (2B + 2)$  para explorar  $Q$ .

Por otro lado, aseguramos que las aristas de  $T'$  son visitadas al menos dos veces. Por contradicción suponga que una arista de  $P_i$  es visitada una sola vez. Por lo tanto, los

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

agentes alcanzan su posición final en  $P_i$ ; y debido a que la longitud de  $P_i$  es menor que  $\frac{B}{2}$  entonces al menos  $mB - \frac{B}{2}$  aristas de  $T' \setminus P_i$  deben ser visitadas dos veces. ;ás aún, debido a que los agentes no alcanzan su posición final en algún vértice de  $Q$ , entonces las aristas de  $Q$  desde  $v_1$  hasta  $v_{2B+2}$  deben ser visitadas al menos dos veces por todos los agentes y las aristas desde  $v_{2B+2}$  hasta  $v_{3B+3}$  deben ser visitadas dos veces por al menos un agente.

Note que este caso todos los agentes visitan  $(u, v_1)$  al menos una vez. Así, la longitud de  $S$  es al menos de

$$2(m+1)(2B+2) + (2B+2) + (m+1) + 2(mB - \frac{B}{2}) > \ell,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, las aseveraciones anteriores implican que

$$l(S) \geq 4mB + 4B + 2m + 4$$

y entonces al menos un agente no visita  $(u, v_1)$  (debido a la restricción de la longitud de la estrategia).

En consecuencia, cuando un agente entra a  $T'$  a través de  $(v_1, u)$ , para comunicarse con el resto de agentes debe salir de  $T'$  a través de  $(v_1, u)$ . Debido a que la comunicación de los agentes se lleva a cabo a lo más en  $2B + 2$  unidades de tiempo, un agente de visitar a lo más 3 puntos finales de los caminos  $P_1, \dots, P_m$ , y posteriormente salir a través de la arista  $(u, v_1)$ . Ya que existen  $3m$  de estos caminos, esto sucede exactamente  $m$  veces.

Observe que la estrategia particiona a  $A$  de acuerdo con las exploraciones descritas anteriormente de tal manera que un conjunto  $\{a_i, a_j, a_k\}$  en esta partición corresponde a un agente que entra a  $T'$ , visita los puntos finales de  $P_i, P_j$  y  $P_k$  antes de salir de  $T'$  para comunicarse con el resto de agentes. Note que para todo  $A_i$ ,

$$\sum_{a \in A_i} a \leq B.$$

Debido a que

$$\sum_{a \in A} a = mB,$$

esto implica que para todo  $A_i$ ,

$$\sum_{a \in A_i} a = B,$$

y que  $A_1, \dots, A_m$  esta en una 3-partición de  $A$ .

□

### 3.3. El problema de exploración de tiempo mínimo (PETM-PETMC)

En esta sección probamos que el problema de calcular una estrategia de exploración de tiempo mínimo es un problema  $\mathcal{NP}$ -Duro, sin considerar la restricción adicional en la que los agentes se comunican a lo más en  $p$  unidades de tiempo.

A continuación establecemos el problema de decisión:

Sea  $T$  un árbol, con  $k$  agentes que inician sus recorridos en un vértice en particular, y  $t$  un entero positivo. Decidir si existe una estrategia de exploración  $S$  para  $T$ , tal que  $t(S)$  es a lo más  $t$ .

Para mostrar el resultado de complejidad de PETM, realizamos una reducción del problema de la 3-PARTICIÓN.

**Teorema 3.3.1.** *El problema de exploración de tiempo mínimo (PETM) es  $\mathcal{NP}$ -complete.*

*Demostración.* Note que calcular el tiempo de una estrategia de exploración dada para un árbol  $T$  se puede llevar a cabo en tiempo polinomial, tenemos que PETM esta en  $\mathcal{NP}$ .

Sea  $(A, B)$  una instancia del problema de 3-PARTICIÓN tal que  $|A| = 3m$  y  $B$  esta acotado por una función polinomial en  $m$ . Construimos en tiempo polinomial una instancia del PETM que tiene solución, si y solo si,  $A$  admite una 3-PARTICIÓN.

La instancia del PETM se construye de la siguiente manera. Dada  $A := \{a_1, \dots, a_{3m}\}$ , sea  $P_1, \dots, P_{3m}$   $3m$  caminos, todos iniciando del vértice  $u$ , tal que  $l(P_i) = a_i$ .

Sea  $L = 2 \sum_{i=1}^{3m} a_i$  y  $Q_1, \dots, Q_m$   $m$  caminos, cada uno de ellos de longitud  $L$  que inician en el vértice  $u$ .

### 3. EL PROBLEMA DE EXPLORACIÓN DE GRÁFICAS

---

Sea

$$T := \left( \bigcup_{i=1}^{3m} P_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=1}^m Q_i \right),$$

$k := m$  y  $t = L + 2B$ . Note que, debido a que  $B$  esta acotado por una función polinomial en  $m$ ,  $T$  se puede construir en tiempo polinomial.

Afirmamos que  $T$  tiene una estrategia de exploración con tiempo a lo más  $t$ , con  $k$  agentes todos iniciando en el vértice  $u$ , si y solo si,  $A$  admite una 3-partición.

Sea  $A_1, \dots, A_m$  una 3-partición de  $A$ . Denotamos como  $P^{-1}$  al camino  $P$  recorrido en dirección opuesta.

Para  $1 \leq i \leq m$ , sea  $A_i := \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}\}$ ; sea  $x_i$  el último vértice de  $P_i$  y sea  $P'_i$  el subcamino de  $P_i$  formado por sus vértices internos; tal que  $P_i = uP'_i x_i$ .

Para  $1 \leq i \leq m$ , sea

$$W_i := P_{i1} P'_{i1}{}^{-1} P_{i2} P'_{i2}{}^{-1} P_{i3} P'_{i3}{}^{-1} Q_i.$$

Note que cada  $W_i$  es de tiempo  $L + 2B$ . Por lo tanto,  $(W_1, \dots, W_m)$  es una estrategia de exploración para  $T$  de tiempo a lo más  $t$ , con  $k$  agentes todos iniciando en el vértice  $u$ .

Afirmamos que un agente explora a lo mas una hoja de  $Q_i$ . De otra manera, su caminata tomaría tiempo al menos de  $3L > L + 2B = t$ . Note que  $L = 2Bm > B$ .

La propiedad anterior nos permite hacer una asignación directa de los  $m$  agentes con los caminos de  $Q_i$ .

Sea  $q(i)$  el índice tal que el  $i$ -ésimo agente visita el último vértice de  $Q_{q(i)}$ .

Note que el  $i$ -ésimo agente no puede finalizar su recorrido en un vértice fuera de  $Q_{q(i)}$ ; de otra manera, el tiempo de su caminata  $W_i$  sería de al menos  $2L + 1 = L + 2Bm + 1 > t$  para  $m > 0$ . Suponemos que  $W_i$  finaliza en un vértice final de  $Q_{q(i)}$  debido a que antes de que visite este vértice, explora todos los vértices anteriores de  $Q_{q(i)}$ .

También suponemos que no existen dos agentes que visitan el mismo camino  $P'_i x_i$ . Por lo tanto, cada  $W_i$  es de la forma:

$$W_i := P_{i1} P'_{i1}{}^{-1} P_{i2} P'_{i2}{}^{-1} P_{i3} P'_{i3}{}^{-1} \dots P_{is} P'_{is}{}^{-1} Q_{q(i)},$$

para algunos índices  $i_1, i_2, \dots, i_s$ . Debido a que

$$l(P_{i_1} P_{i_1}'^{-1} P_{i_2} P_{i_2}'^{-1} \dots P_{i_s} P_{i_s}'^{-1} u) \leq 2B$$

y

$$l(P_j P_j'^{-1} u) > \frac{B}{2} \quad (a_j > \frac{B}{4}),$$

tenemos que  $s = 3$ . Para  $1 \leq i \leq m$ , sea  $A_i := \{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}\}$ . De lo anterior tenemos que,

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} = l(P_{i_1} P_{i_1}'^{-1} P_{i_2} P_{i_2}'^{-1} P_{i_3} P_{i_3}'^{-1} u) / 2 \leq B.$$

Donde

$$\sum_{i=1}^m a_i = mB,$$

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} = B,$$

y el resultado se sigue. □



## El problema de aumentación de gráficas

---

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica topológica (resp. geométrica). Una *gráfica topológica* es una gráfica junto con un encaje en el plano, es decir, los vértices de la gráfica están representados como puntos distintos mientras que las aristas como curvas de Jordán que conectan parejas de vértices. Una *gráfica geométrica* es una gráfica en la cual sus vértices son representados como puntos en el plano, y sus aristas como segmentos de línea recta que unen parejas de vértices.

Una gráfica *aplanable* es una gráfica que puede ser representada en el plano, de tal manera que sus aristas pueden cruzarse sólo en sus puntos finales. Tal encaje es llamado *encaje plano* de la gráfica. Una *gráfica plana* es una gráfica aplanable junto con un encaje plano.

Una *gráfica extraplana* es una gráfica que tiene un encaje plano de tal manera que todos sus vértices son incidentes a la cara externa. Una gráfica extraplana es maximal si no es posible agregar una arista tal que la gráfica resultante sea aún extraplana.

En el caso de gráficas extraplanas, suponemos que los vértices están etiquetados incrementalmente en sentido horario (módulo  $n$ ) sobre la frontera de la cara externa de la gráfica. Denotamos como  $[v_i, v_j]$  al conjunto de vértices del intervalo cerrado en sentido horario sobre la cara externa, así mismo denotamos como  $(v_i, v_j)$  al conjunto de vértices del intervalo abierto.

Llamamos *oreja* a un vértice de grado dos en una gráfica extraplana es maximal. Nota que en cada gráfica extraplana maximal existen al menos dos orejas.

Dos o más gráficas topológicas (resp. geométricas) son *compatibles* si, sus conjuntos de vértices son iguales y la unión de sus conjuntos de aristas da como resultado una gráfica topológica (resp. geométrica) plana.

Decimos que el vecindario de un vértice  $v$  está *saturado*, si no existe arista alguna incidente a  $v$  que pueda agregarse a  $G$ , evitando cruces. Por ejemplo, si  $G$  es una gráfica plana y la subgráfica inducida por un vértice  $v_i$ , junto con su vecindario, es una rueda sin ningún otro vértice dentro de ella, entonces el vecindario de  $v_i$  está saturado (o simplemente  $v_i$  está saturado).

A continuación definimos formalmente el problema de aumentación a través de aristas, para cumplir con restricciones de paridad.

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica plana con  $n$  vértices y  $C_G = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  un conjunto de restricciones de paridad, donde el vértice  $v_i \in V$  tiene asignada la restricción  $c_i \in \{\text{par}, \text{impar}\}$ .

El *problema de aumentación para cumplir con las restricciones de paridad* se refiere a encontrar una gráfica  $H = (V, E')$  tal que:

- (i)  $G' = G \cup H$  es una gráfica plana simple, es decir,  $H$  es compatible con  $G$ .
- (ii)  $H$  y  $G$  son disjuntas por aristas, es decir,  $E' \cap E = \emptyset$
- (iii) Los grados de los vértices en  $G'$  cumplen con el conjunto de restricciones  $C_G$ .

Si existe tal gráfica  $H$  entonces decimos que  $G$  es topológicamente (resp. geométricamente) aumentable.

Denotamos como  $S(G, C_G)$  al conjunto de vértices en  $G$  que no cumplen con su restricción de paridad en  $C_G$ . Llamamos (e ilustramos) a un vértice  $v_i \in S(G, C_G)$  como un vértice rojo de  $G$ , en caso contrario llamamos a dicho objeto un vértice azul. Decimos que una arista es roja, si sus extremos son vértices rojos (análogamente para el caso de una arista azul). Decimos que una arista es azul-roja, si sus extremos son de colores diferentes.

Para cambiar la paridad de un vértice, es necesario agregar un número impar de aristas incidentes a él. Por lo tanto, los vértices de rojos deben ser incidentes a un número impar de aristas y los vértices azules deben ser incidentes a un número par (o cero) de aristas de la aumentación.

En el caso de los vértices rojos es necesario que sus vecindarios no se encuentren saturados, de lo contrario es imposible cambiar su paridad preservando la planaridad o la simpleza de la gráfica.

Es fácil encontrar gráficas planas que no pueden aumentarse para cumplir con un conjunto de restricciones de paridad. Por ejemplo, si consideramos una triangulación menos dos aristas  $uv$  y  $xy$ , tal que  $u, v, x$  e  $y$  son vértices diferentes, obtenemos una gráfica en la cual no es posible cambiar la paridad de  $u$  y  $x$  sin romper con su planaridad.

Otro ejemplo de gráfica no aumentable es un encaje plano de  $k_4$ , donde podemos darnos cuenta que el vecindario de todo vértice se encuentra saturada, de tal forma que no es posible agregar aristas sin generar aristas paralelas o cruces en el encaje, tal como se muestra en la Figura 4.1a.

Incluso es posible encontrar gráficas en las que los vecindarios de la mayoría de sus vértices no están saturados, y aún así no es posible aumentarlas sin evitar aristas múltiples o cruces. Tal es el caso de una estrella de grado impar como lo muestra la figura 4.1b.

Por lo tanto, las gráficas que estudiamos en este trabajo cumplen las siguientes propiedades:

- (i) La gráfica es simple, es decir, no tienen aristas paralelas ni lazos.
- (ii) El vecindario de todo vértice rojo no está saturado.



**Figura 4.1:** Ejemplo de gráficas no aumentables. Las arista solidas representan aristas de la gráfica inicial. La aristas punteadas representan aristas de la aumentación. (a) Encaje plano de  $k_4$ . (b) Estrella de grado impar.

En este trabajo abordamos principalmente dos variantes del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad. La primera, que consideramos como *aumentación con encaje fijo* se refiere a encontrar una gráfica  $H$  que aumenta a  $G$ , mientras que se preserva el encaje inicial de  $G$  como subgráfica de la gráfica resultante  $G'$ . La segunda, la cual denominamos *aumentación con encaje móvil*, se refiere a encontrar una gráfica  $H$  que aumenta a  $G$ , mientras que es permitido cambiar el encaje inicial de la gráfica de entrada  $G$ .

## 4.1. Aumentación de gráficas topológicas

En este capítulo abordamos el problema de aumentación cuando la gráfica de entrada y salida es una gráfica topológica. Inicialmente analizamos el caso especial cuando la gráfica de entrada es un árbol topológico plano y se busca cambiar la paridad de un subconjunto arbitrario de vértices. Posteriormente abordamos el problema de aumentación para el caso de gráficas maximales extraplanas y extraplanas generales.

En el caso de gráficas maximales extraplanas abordamos el problema de aumentación topológica desde dos variantes, la primera cuando el encaje de la gráfica de entrada debe preservarse como subgráfica de la gráfica resultante, y la segunda cuando es permitido mover el encaje de la gráfica de entrada.

Finalmente mostramos la complejidad del problema de aumentación en gráficas topológicas planas generales.

### 4.1.1. Árboles

El caso, quizá más simple, de una familia de gráficas planas que no puede ser aumentada para cumplir con un conjunto de restricciones de paridad es la estrella de grado arbitrario, cuando se desea cambiar la paridad de su vértice central. Es claro que una arista (topológica) puede cambiar siempre la paridad de cualesquiera dos hojas de

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

la estrella, pero nunca es posible cambiar la paridad del vértice central y la de una de sus hojas sin generar aristas múltiples.

Por otro lado, cuando no es requerido cambiar la paridad del vértice central de la estrella es fácil encontrar un emparejamiento topológico plano de las hojas con exactamente  $\frac{2k}{2}$  aristas, siendo  $2k$  el número de hojas de la estrella.

A continuación abordamos el caso más general en el que ningún vértice rojo está saturado y el conjunto de restricciones de paridad es arbitrario.

**Teorema 4.1.1.** *Sea  $T = (V, E)$  un árbol topológico plano, y  $C_G = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  un conjunto de restricciones de paridad (con excepción de una estrella pidiendo cambiar la paridad del vértice central). Entonces,  $T$  es topológicamente aumentable para cumplir con  $C_G$  en  $\mathcal{O}(n)$  tiempo con la adición de a lo más  $\frac{2k}{2} + 1$  aristas, siendo  $|S(G, C_G)| = 2k$ . Más aún la cota es justa.*

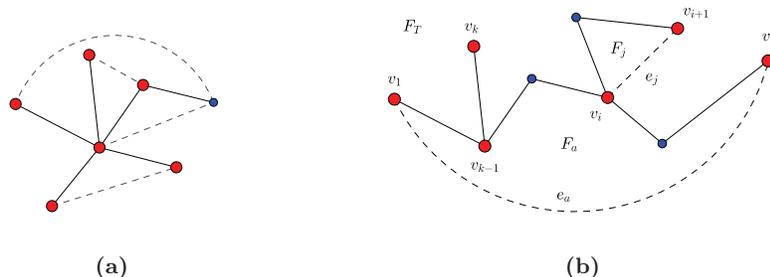
*Demostración.* Definimos los dos siguientes casos. (i) Supongamos que no existe una pareja de vértices rojos cuya distancia en aristas es al menos 3. Entonces necesariamente los vértices se encuentran a distancia uno y dos. Por lo tanto,  $T$  es una estrella con quizá vértices azules conectados a las hojas de la estrella. Si el centro de la estrella es un vértice rojo, entonces es posible conectar dicho vértice con uno azul y posteriormente realizar un emparejamiento plano de las hojas de la estrella, como se muestra en la Figura 4.2a.

(ii) Supongamos que existe una pareja de vértices rojos cuya distancia en aristas es al menos 3. Sea  $T' = (V', E')$  la subgráfica topológica minimal conexa de  $T$  que tiene a todos los vértices rojos.

Sea  $F_{T'}$  la única cara de  $T'$ . Es fácil ver que los vértices en  $T$  que no están en  $T'$  pueden ser descartados ahora, y reinsertados una vez sea finalizado el proceso de aumentación en  $T'$ .

Sean  $v_1, v_2 \in P$  dos vértices tales que su distancia en aristas en  $T'$  es al menos tres, y tales que al agregar la arista  $(v_1, v_2)$  a  $T'$  se forma un ciclo  $\mathcal{C}$  que no contiene vértices de  $T'$  en su interior. Tales vértices existen, debido a que de otra manera  $T'$  sería una estrella.

Sea  $F_a$  la cara acotada por  $\mathcal{C}$ . Ver Figura 4.2b.



**Figura 4.2:** (a) Aumentación de un árbol topológico. (b) Aumentación cuando  $T$  es una estrella.

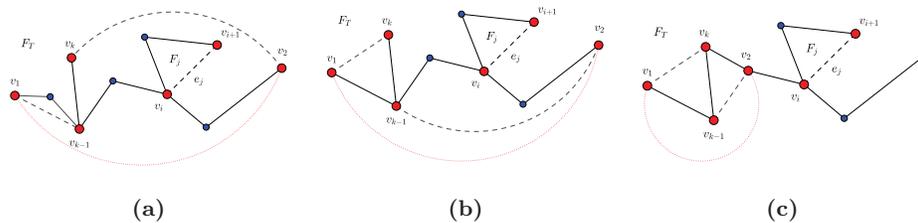
Note que las paridades de los vértices  $v_1$  y  $v_2$  cambian al agregar la aristas  $e_a$  a  $T'$ , por lo tanto estos dos vértices no pertenecen más a  $S(T', C_T)$ .

Posteriormente, procedemos iterativamente buscando una pareja de vértices  $v_i, v_{i+1} \in S(T', C_T)$ , tal que su distancia en aristas en  $T'$  es al menos dos y tal que el ciclo obtenido por la adición de la arista  $e_j = (v_i, v_{i+1})$  no contiene vértices de  $S(T', C_T)$  en su interior. Estos vértices siempre existen mientras  $|S(T', C_T)| \geq 4$ .

Sea  $v_{2k-1}, v_{2k}$  los últimos dos vértices en  $S(T', C_T)$ . Note que estos dos forman la única pareja de vértices que pueden estar a distancia menor que dos en  $T'$ . Entonces, es posible utilizar la primer pareja de vértices  $v_1, v_2$  de la siguiente manera. Debido a que  $v_1$  está al menos a distancia tres de  $v_2$ , entonces tenemos los siguientes casos:

- *Caso 1:*  $v_1$  está al menos a distancia dos de  $v_{2k-1}$  y  $v_2$  está al menos a distancia dos de  $v_{2k}$ . Vea Figura 4.3a. Entonces, es posible intercambiar la arista  $e_a$  por las aristas  $(v_1, v_{2k-1}), (v_2, v_{2k})$ , o por las aristas  $(v_1, v_{2k}), (v_2, v_{2k-1})$ .
- *Caso 2:* Supongamos s.p.g. que  $v_1$  está a distancia uno de  $v_{2k-1}$  y que  $v_2$  está a distancia dos de  $v_{2k}$ . Vea Figura 4.3b. Entonces, es posible intercambiar la arista  $e_a$  por las aristas  $(v_1, v_{2k}), (v_2, v_{2k-1})$ .
- *Caso 3:* Supongamos s.p.g. que  $v_1$  está a distancia uno de  $v_{2k-1}$  y que  $v_2$  está a distancia uno de  $v_{2k}$ . Vea Figura 4.3c. Entonces, es posible intercambiar la arista  $e_a$  por las aristas  $(v_1, v_{2k}), (v_2, v_{2k-1})$ .

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS



**Figura 4.3:** Posibles configuraciones para la última pareja de vértices rojos en un árbol topológico.

La prueba se sigue debido que al agregar a  $T$  un emparejamiento compatible de los vértices en  $S(T', C_T)$ , o un emparejamiento compatible que cubre a todos los vértices con excepción de dos (los cuales pueden ser unidos a través de un camino de longitud dos) obtenemos una gráfica topológica plana que cumple con las restricciones de paridad en  $C_T$ .

Más aún, la cota es justa debido a que existe la familia de estrellas de grado impar con un vértice azul unido a una hoja, en las que son necesarias  $\frac{n-2}{2}+2$  aristas adicionales para cambiar la paridad de sus vértices rojos.  $\square$

#### 4.1.2. Gráficas extraplanas maximales con encaje fijo

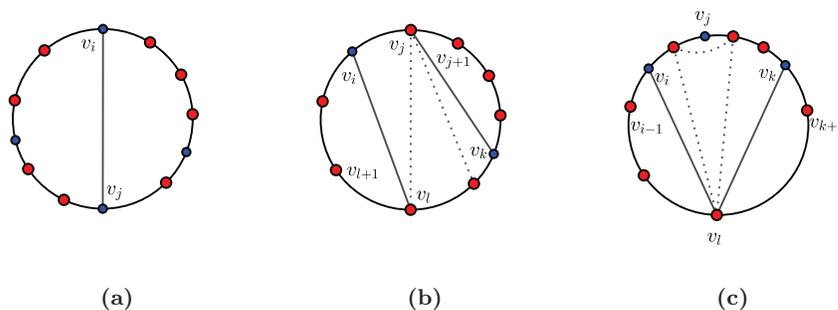
Primero caracterizamos la familia de gráficas extraplanas maximales que no son aumentables para cumplir con sus restricciones de paridad, cuando es requerido preservar el encaje de la gráfica de entrada. Para ello proponemos tres lemas que nos permiten establecer un teorema de caracterización para dichas gráficas. Posterior al teorema de caracterización damos un algoritmo de tiempo polinomial para resolver de manera óptima el problema de aumentación en gráficas extraplanas resolubles.

**Teorema 4.1.2.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces,  $G$  es topológicamente aumentable con encaje fijo si:*

- (a) *Existe una diagonal azul  $v_i v_j \in E$ . Ver Figura 4.4a.*
- (b) *Existen dos diagonales rojo-azul  $v_i v_l, v_j v_k \in E$ , tal que  $v_i, v_k$  son vértices azules,  $v_j, v_l$  son vértices rojos y siguen un orden circular horario  $v_i, v_j, v_k, v_l$ . Ver Figura 4.4b.*

(c) Existen dos diagonales rojo-azules  $v_i v_l, v_k v_l \in E$ , tal que  $v_i, v_k$  son vértices azules,  $v_l$  es un vértice rojo, existe un vértice de grado dos  $v_j$  y los vértices siguen un orden circular horario  $v_i, v_j, v_k, v_l$ . Ver Figura 4.4c.

En otro caso,  $G$  no es aumentable.



**Figura 4.4:** Configuración de aristas en gráficas extraplanas maximales aumentables para cumplir con restricciones de paridad.

*Demostración.* Para el caso 1 nos referimos al Lema 4.1.3, para el caso 2 al Lema 4.1.4 y para el caso 3 al Lema 4.1.5. Para lo tanto, para demostrar que  $G$  no es aumentable podemos suponer tiene solo diagonales rojas, y/o diagonales rojo-azul tal que sus puntos finales no están configurados como se describe en los Lemas 4.1.4 y 4.1.5.

Por contradicción supongamos que existe una gráfica  $H$  que aumenta a  $G$ . Primero demostramos el caso (a), cuando  $G$  tiene solo diagonales rojas (posiblemente con orejas azules) como la gráfica que se muestra en la Figura 4.5a. Y posteriormente demostramos el caso (b), cuando  $G$  tiene diagonales rojo-azul (posiblemente con diagonales rojas) como la gráfica que se muestra en la Figura 4.5b.

Sea  $e \in H$  la arista que encierra el mínimo número de vértices rojos de  $G$ , es decir, la arista que conecta a los dos vértices más cercanos en orden horario sobre la frontera de  $G$ .

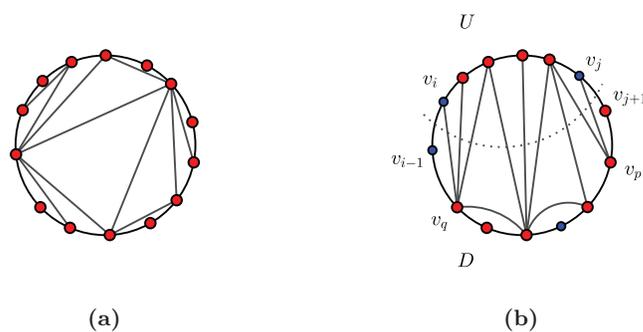
Note que  $e$  no puede conectar a dos vértices rojos consecutivos en la frontera ya que esto generaría aristas paralelas. Tampoco es posible que  $e$  conecte a dos vértices sobre

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

la frontera, que están separados por una oreja azul. De lo anterior podemos deducir que en el mejor caso  $e$  encierra a uno o dos vértices, ya que de otra manera podríamos agregar una arista que encierra un menor número de vértices rojos.

En ambos casos, es imposible cambiar de paridad a ya sea a uno o dos vértices rojos debido a que son consecutivos o adyacentes, contradiciendo la existencia de  $H$ . La parte (a) se sigue.



**Figura 4.5:** Gráficas extraplanas maximales no aumentables. (a) Gráfica con solo diagonales rojas. (b) Gráfica con diagonales rojas y rojo-azules.

Sean  $U$  y  $D$  dos intervalos sobre la cara externa de  $G$ , tal que  $U = [v_i, v_j]$  es el intervalo más pequeño que contiene a todos los vértices azules de las diagonales rojo-azules, y  $D = [v_{j+1}, v_{i-1}]$  el intervalo que contiene todos los vértices rojos de las aristas rojo-azules.

Note que  $D$  no puede tener dos vértices azules colocados uno junto al otro sobre la frontera de  $G$ , debido a que  $G$  es maximal una de esos vértices azules debe estar conectado ya sea a un vértice azul o a un vértice rojo, contradiciendo la suposición de que no existen diagonales azules ni dos diagonales rojo-azul en posiciones opuestas.

Primero mostramos que (i) no hay arista en  $H$  que conecta dos vértices en  $D$ , y posteriormente mostramos que (ii) siempre existen vértices en  $G'$  que no cumplen con su restricción de paridad.

(i) Por contradicción supongamos que existe una arista  $f \in H$  que conecta a dos vértices  $v_i, v_j$  en  $D$ . Note que  $f$  debe encerrar a un número par de vértices rojos para

intentar cambiar su paridad. Podemos aplicar un análisis similar al caso cuando  $G$  solo tiene diagonales rojas para contradecir la existencia de  $f$ . Un análisis similar se puede aplicar para el caso en que  $f$  conecta a un vértice rojo y un azul. Por lo tanto no hay arista en  $H$  que conecta vértices rojos en  $D$ .

(ii) Sea  $S$  el conjunto de vértices rojos en  $D$  que tiene al menos un vecino en  $U$ . Sean  $v_p \in S$  el primero y  $v_q \in S$  el último vértice del intervalo. Note que el vecindario de  $v_p$  en  $U$  consiste de una secuencia de vértices consecutivos posiblemente rojo y azul en la frontera de  $G$ , digamos de  $v_j$  hasta  $v_{j-k}$ , para  $k \geq 1$ . Vea Figura 4.5b.

Note que cualquier arista en  $H$  que conecta a  $v_p$  debe ir a un vértice a la izquierda de  $v_{j-k}$ , de otra manera se generarían aristas paralelas. La misma restricción aplica para los siguientes vértices en  $D$ , debido a que cualquier arista que conecta a un vértice rojo en  $D$  debe ir a la izquierda del primer vértice de su vecindario  $U$ . Por contra, el vértice  $v_q$  no tiene vértices a la izquierda de su vecindario en  $U$ , por lo tanto cualquier arista que conecta a  $v_q$  debe ir a la derecha de su último vecino, lo cual genera cruces con aristas que agregamos para cambiar la paridad de  $v_{q-1}$ .

La parte (b) se sigue. □

**Lema 4.1.3.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces,  $G$  es topológicamente aumentable para cumplir con  $C_G$  si existe una diagonal azul  $v_i v_j \in E$ .*

*Demostración.* Consideremos el intervalo cerrado de vértices  $[v_{i+1}, v_{j-1}]$  y  $[v_{j+1}, v_{i-1}]$  a lo largo de la frontera de la cara externa de  $G$ . Sea  $R$  el conjunto de vértices en el intervalo  $[v_{i+1}, v_{j-1}]$  y  $L$  el conjunto de vértices en el intervalo  $[v_{j+1}, v_{i-1}]$ .

Debido a que  $v_i v_j$  es una diagonal, entonces  $|L| \geq 1$  y  $|R| \geq 1$ .

Sea  $L_S = \{S(G, C_G) \cap L\}$  y  $R_S = \{S(G, C_G) \cap R\}$ . Entonces tenemos los siguientes casos:

Caso 1:  $|R_S| = |L_S|$ . Entonces, podemos hacer un emparejamiento perfecto plano entre los vértices en  $R_S$  con los vértices en  $L_S$ . Emparejamos al primer vértice de  $L_S$  con el último vértice de  $R_S$ , eliminamos a ambos vértices de  $L_S$  y  $R_S$  respectivamente

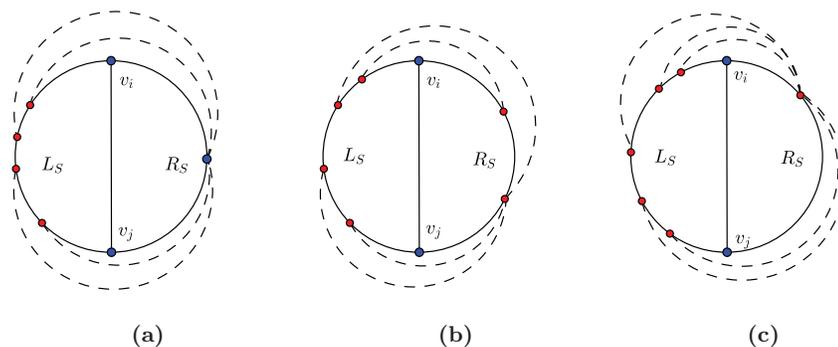
#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

y procedemos de la misma manera con el resto de vértices hasta finalizar con los vértices rojos de  $G$ . Note que ninguna de las aristas que agregamos a  $G$  existía previamente, de lo contrario hubieran sido cruzadas por  $v_i v_j$ .

Caso 2: Sin pérdida de generalidad supongamos que  $|R_S| = 0$  y que  $|L_S| > 0$ . Debido a que  $|R_S| = 0$  entonces  $L_S$  necesariamente tiene cardinalidad par. Entonces, podemos encajar una estrella, centrada en cualquier vértice de  $R$ , uniendo a todos los vértices en  $L_S$ . Debido a que el vértice central de la estrella tiene un número par de aristas adyacentes observamos que su paridad se preserva. Vea la Figura 4.6a.

Caso 3: S.p.g. supongamos que  $|L_S| > |R_S| \geq 1$ . Entonces, podemos hacer un emparejamiento plano entre los vértices en  $R_S$  con los vértices en  $L_S$  de la misma forma como describimos en el caso 1, hasta agotar con los vértices en  $R_S$ . Observe que  $|L_S| - |R_S|$  es un número par en cualquier caso, como se ilustra en la Figura 4.6b y en la Figura 4.6c. Sea  $v_r \in R_S$  el último vértice unido en el emparejamiento. Aplicamos el caso 2 seleccionando a  $v_r$  como centro de una estrella.



**Figura 4.6:** Gráfica extraplana maximal con una diagonal azul. (a) Gráfica con todos sus vértices rojos de un lado. (b) Gráfica con un número par de vértices rojos en ambos lados. (c) Gráfica con un número impar de vértices rojos de ambos lados.

El resultado se sigue. □

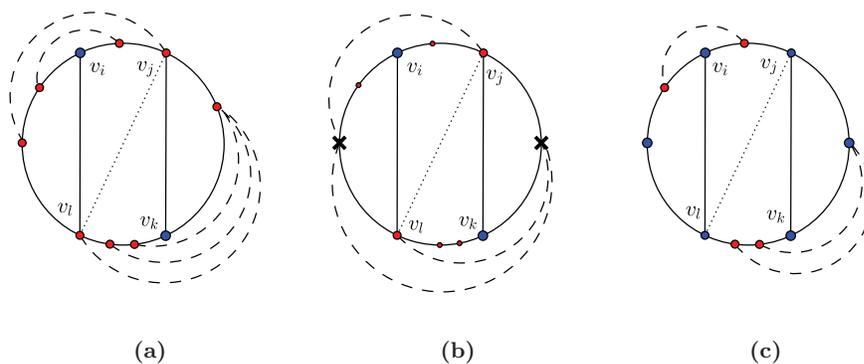
**Lema 4.1.4.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces,  $G$  es topológicamente aumentable para cumplir con*

$C_G$  si existen dos diagonales rojo-azul  $v_i v_l, v_j v_k \in E$ , tal que  $v_i, v_k$  son vértices azules,  $v_j, v_l$  son vértices rojos y siguen un orden circular horario  $v_i, v_j, v_k, v_l$ .

*Demostración.* Consideremos los intervalos cerrados de vértices  $[v_{j+1}, v_l]$  y  $[v_{l+1}, v_j]$  a lo largo de la frontera de la cara externa de  $G$ . Entonces tenemos los siguientes casos:

- (a) El número de vértices rojos en ambos intervalos es par:

Considere el intervalo  $[v_{j+1}, v_l]$ . Note que no existe en  $G$  una arista que conecta a un vértice de  $[v_{j+1}, v_{k-1}]$  con un vértice de  $[v_{k+1}, v_l]$ , por lo tanto podemos cumplir con las restricciones de paridad los vértices en estos intervalos aplicando una técnica similar a la del Lema 4.1.3. El análisis del intervalo  $[v_{l+1}, v_j]$  es similar. Vea la Figura 4.7a.



**Figura 4.7:** Gráficas extraplanas maximales con dos diagonales rojo-azul en orden opuesto.

(a) Gráfica extraplana con un número par de vértices rojos en cada intervalo. (b) Camino que une dos vértices rojos en diferentes intervalos. Los vértices en forma de cruz indican que no importa que color tengan, debido a que sus paridades siempre se preservan. (c) Gráfica extraplana del ejemplo (b) después de agregar el camino que conecta a  $v_j$  con  $v_l$ .

- (b) Ambos intervalos tienen un número impar de vértices rojos:

Entonces, podemos agregar el camino  $v_l v_{j+1}, v_{j+1} v_{l+1}, v_{l+1} v_j$  (como se muestra en la Figura 4.7b). Note que el camino que se agrega cambia la paridad solo de dos vértices rojos, uno en cada intervalo, de tal manera que el número restante de

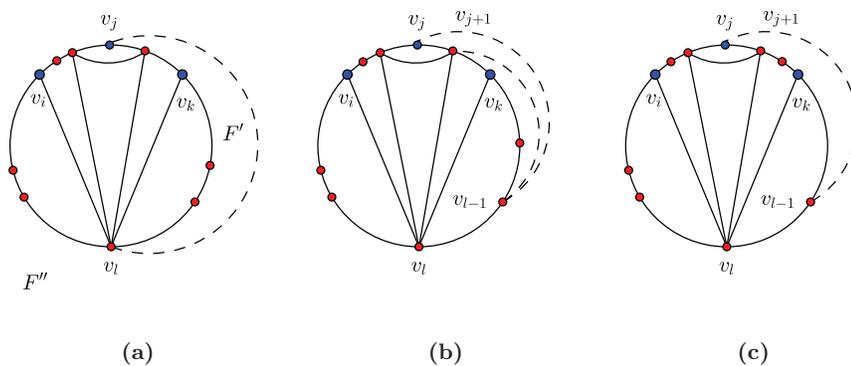
#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

vértices rojos en cada intervalo es par. Por lo tanto los segmentos caen en el caso (a).

La prueba sigue. □

**Lema 4.1.5.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces,  $G$  es topológicamente aumentable para cumplir con  $C_G$  si existen dos diagonales rojo-azules  $v_i v_l, v_k v_l \in E$ , tal que  $v_i, v_k$  son vértices azules,  $v_l$  es un vértice rojo, existe un vértice de grado dos  $v_j$  y los vértices siguen un orden circular horario  $v_i, v_j, v_k, v_l$ .*



*Demostración.* Note que en caso de no haber al menos un vértice rojo en  $(v_i, v_j)$ , y al menos un vértice rojo  $(v_j, v_k)$ , entonces la arista necesariamente  $v_i v_k$  existe ya que estamos suponiendo que  $v_j$  es de grado dos. En este caso, podemos aplicar una técnica similar a la del Lema 4.1.3.

Note también que no puede existir un vértice azul en  $(v_i, v_k)$ , de lo contrario obliga a que exista una diagonal azul o dos aristas rojo-azules en sentidos opuestos permitiendo que podamos aplicar el Lema 4.1.3 o el Lema 4.1.4 en  $G$ .

Supongamos que  $v_j$  es un vértice azul, entonces al colocar la arista  $v_l v_j$  podemos dividir la cara externa de  $G$  en dos caras, digamos las caras  $F'$  que contiene el rango de vértices  $(v_j, v_l)$  y  $F''$  que contiene al rango de vértices  $(v_l, v_j)$ , como se muestra en la Figura 4.8a.

Note que el número de vértices rojos en uno de los intervalos es impar, debido a que el vértice rojo  $v_l$  queda fuera de ambos rangos.

S.p.g. supongamos que la cara  $F'$  tiene un número impar de vértices rojos. Entonces tenemos los siguientes casos:

Caso (i) El intervalo abierto de vértices  $(v_j, v_k)$  tiene un número impar de vértices rojos, entonces necesariamente en el intervalo abierto de vértices  $(v_k, v_l)$  existe un número par de vértices rojos.

Unimos el primer vértice rojo en  $(v_j, v_k)$ , digamos  $v_{j+1}$ , con el último vértice rojo en  $(v_k, v_l)$ , digamos  $v_{l-1}$ , y unimos a  $v_{l-1}$  con  $v_j$  como se muestra en la Figura 4.8b. Si no hay ningún vértice rojo en  $(v_k, v_l)$  entonces usamos cualquier vértice azul.

Caso (ii) El intervalo de vértices  $(v_j, v_k)$  tiene un número par de vértices rojos, entonces necesariamente en el intervalo  $(v_k, v_l)$  existe un número impar de vértices rojos.

Unimos el último vértice rojo en  $(v_k, v_l)$ , digamos  $v_{l-1}$ , con  $v_j$  como se muestra en la Figura 4.8c.

Debido a que ahora existe un camino que conecta a  $v_l$  con un vértice rojo en el intervalo  $(v_j, v_l)$ , necesariamente el número de vértices rojos en  $(v_j, v_l)$  y  $(v_l, v_j)$  es par en ambos casos. Por lo tanto podemos aplicar en ambos intervalos una técnica similar a la del 4.1.3.

Supongamos que  $v_j$  es un vértice rojo, entonces al colocar la arista  $v_l v_j$  podemos dividir la cara externa de  $G$  en dos caras, digamos las caras  $F'$  que contiene el rango de vértices  $(v_j, v_l)$  y  $F''$  que contiene al rango de vértices  $(v_l, v_j)$ .

Note que el número de vértices en ambos intervalos es par o impar y que el vértice  $v_j$  después de agregar la arista  $v_l v_j$  se convierte en azul. Por lo tanto, el análisis de casos para resolver los intervalos  $(v_j, v_l)$  y  $(v_l, v_j)$  es similar a los descritos previamente en (i) y (ii). Al final de la aumentación el vértice  $v_j$  es adyacente a 3 aristas, por lo tanto su paridad se cumple.

La prueba se sigue. □

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

A continuación presentamos un algoritmo de tiempo polinomial para calcular el conjunto mínimo de aristas, cuando existe, para aumentar una gráfica extraplana maximal para cumplir con sus restricciones de paridad.

**Teorema 4.1.6.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces, encontrar una gráfica  $H = (V, E')$ , si existe, con un conjunto  $E'$  de cardinalidad mínima tal que  $G' = G \cup H$  cumple con  $C_G$  puede ser calculado en tiempo  $\mathcal{O}(n^3)$ .*

*Demostración.* Calculamos un conjunto óptimo de aristas, si existe, a través de una aproximación basada en programación dinámica. Usamos una tabla  $\mathcal{C}$  para almacenar la solución de costo mínimo de cada intervalo de vértices sobre la cara externa de  $G$ . La solución de costo mínimo de un intervalo  $[v_i, v_j]$  es almacenada en entrada  $\mathcal{C}[v_i, v_j]$  de la tabla.

Denotamos un cambio de color de un vértice  $v_i$  como  $\bar{v}_i$ .

La ecuación 4.1 y 4.2 muestran el caso base de la recurrencia cuando el rango de vértices consiste de uno o dos vértices respectivamente.

$$\mathcal{C}[v_i, v_i] = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ es azul} \\ \infty & \text{si } v_i \text{ es rojo} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{C}[v_i, v_{i+1}] = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i, v_{i+1} \text{ son azules} \\ 1 & \text{si } v_i, v_{i+1} \text{ son rojos y } v_i v_{i+1} \notin E \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.2)$$

Dado un intervalo cerrado  $[v_i, v_j]$  calculamos un solución de costo mínimo al conectar  $v_i$  con  $v_k$ , para todo  $i < k \leq j$ , y buscando la solución de mínimo costo de los intervalos  $[v_i, v_k] + [v_k, v_j]$  considerando las posibles configuraciones de colores  $v_i$  y  $v_k$ .

La ecuación 4.3 muestra la recurrencia para calcular la solución de costo mínimo de un intervalo cerrado  $[v_i, v_j]$ . Por otra parte, la ecuación 4.4 muestra la recurrencia para calcular la solución de costo mínimo de un intervalo cerrado  $[v_i, v_j]$  asumiendo que existe una arista que conecta a  $v_i$  con  $v_j$ .

$$\mathcal{C}[v_i, v_j] = \min_{i < k < j} \begin{cases} \mathcal{C}[v_{i+1}, v_j] & \text{if } v_i \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}_i, \bar{v}_k] + \mathcal{C}[v_k, v_j] + 1 & \text{if } v_k \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}_i, v_k] + \mathcal{C}[\bar{v}_k, v_j] + 1 & \text{if } v_k \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}_i, \bar{v}_k] + \mathcal{C}[\bar{v}_k, v_j] + 1 & \text{if } v_k \text{ rojo} \\ \bar{\mathcal{C}}[\bar{v}_i, v_k] + \mathcal{C}[v_k, v_j] + 1 & \text{if } v_k \text{ rojo} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\bar{\mathcal{C}}[v_i, v_j] = \min_{i < k < j} \begin{cases} \mathcal{C}(v_{i+1}, v_j) & \text{if } v_i \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}(\bar{v}_i, \bar{v}_k) + \mathcal{C}(v_k, v_j) + 1 & \text{if } v_k \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}(\bar{v}_i, v_k) + \mathcal{C}(\bar{v}_k, v_j) + 1 & \text{if } v_k \text{ azul} \\ \bar{\mathcal{C}}(\bar{v}_i, \bar{v}_k) + \mathcal{C}(\bar{v}_k, v_j) + 1 & \text{if } v_k \text{ rojo} \\ \bar{\mathcal{C}}(\bar{v}_i, v_k) + \mathcal{C}(v_k, v_j) + 1 & \text{if } v_k \text{ rojo} \end{cases} \quad (4.4)$$

Una tabla extra puede llenarse a lo largo de la ejecución de la recurrencia para almacenar el conjunto óptimo de aristas que soluciona cada intervalo de cerrado de vértices. Note que la entrada de la tabla  $\mathcal{C}[1, n]$  almacena la solución óptima de  $G$ , si existe. Por lo tanto el algoritmo toma tiempo  $\mathcal{O}(n^3)$ .  $\square$

Por el teorema descrito anteriormente podemos garantizar también que si el costo de la solución óptima es igual a  $S(G, C_G)/2$  entonces,  $H$  es un emparejamiento topológico plano del conjunto de vértices rojos de  $G$ . Por lo tanto el siguiente corolario se sigue.

**Corolario 4.1.6.1.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces, calcular un emparejamiento topológico plano  $M$  de  $S(G, C_G)$  compatible y disjunto de  $G$  puede calcularse en tiempo  $\mathcal{O}(n^3)$ .*

### 4.1.3. Gráficas extraplanas maximales con encaje móvil

En esta sección estudiamos el problema de aumentación en gráficas extraplanas, cuando es requerido mantener el encaje de la gráfica de entrada como subgráfica de la gráfica resultante. Primero caracterizamos la familia de gráficas extraplanas que no son aumentables, bajo la restricción de preservar el encaje de entrada, y posteriormente damos un algoritmo de tiempo polinomial para encontrar un encaje de la gráfica de entrada que es aumentable para cumplir con sus restricciones de paridad.

La familia quizá más directa de gráficas topológicas no aumentables, incluso cuando es permitido cambiar el encaje de la gráfica de entrada, son las estrellas con su vértice central rojo y siendo adyacentes a un número impar de vértices rojos. Podemos construir una familia de gráficas extraplanas maximales arbitrariamente grande basadas en estrellas como la que se muestra en la Figura 4.9a, de la siguiente manera.

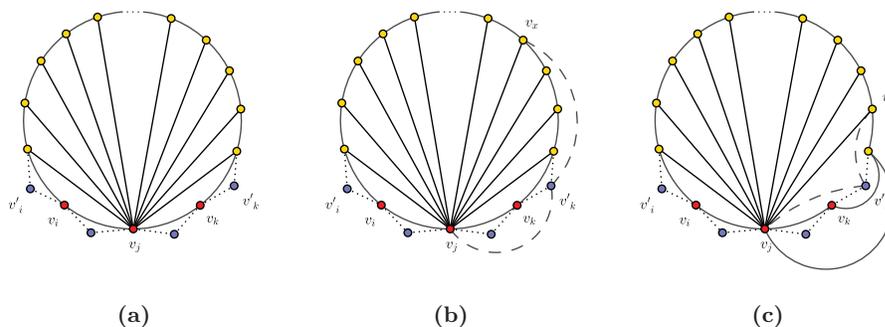
Consideremos un ciclo de  $n \geq 4$  vértices. Marcamos de color rojo a tres vértices consecutivos  $v_i, v_j$  y  $v_k$  en dicho ciclo. Con los  $n-3$  vértices restantes (ilustrados de color amarillo en la Figura 4.9a), marcamos un número impar de vértices en el ciclo, diferentes de  $v_i, v_j, v_k$ , como vértices rojos y a un número par vértices del ciclo, diferentes de los vértices previamente marcados en rojo, como vértices azules. En el interior del ciclo encajamos una estrella centrada en el vértice  $v_j$ . Finalmente es posible agregar a lo más cuatro vértices azules como orejas entre los vértices  $v_{i-1}$  y  $v_i$ ,  $v_i$  y  $v_j$ ,  $v_j$  y  $v_k$  o  $v_k$  y  $v_{k+1}$ .

Cualquier miembro de la familia de gráficas descritas anteriormente no es aumentable para cumplir con sus restricciones de paridad, debido a que la única opción para cambiar la paridad de  $v_j$ , si existe dicha opción, es ya sea conectarlo a la oreja colocada entre  $v_{i-1}$  y  $v_i$ , digamos el vértice  $v'_i$ , o a la oreja colocada entre los vértices  $v_k$  y  $v_{k+1}$ , digamos el vértice  $v'_k$ . Supongamos que agregamos la arista  $v_j v'_k$ , debido a que es necesario cambiar la paridad de  $v'_k$  es necesario conectarlo con cualquier otro vértice, digamos con  $v_x$  como es muestra en la Figura 4.9b. Note que en dicho caso  $v_k$  se encuentra aislado debido a que no hay forma de cambiar el encaje de la gráfica tal que  $v_k$  es capaz de unirse a un vértice sin evitar cruces.

Supongamos que movemos el encaje de la gráfica y colocamos a las aristas  $v_j v_k$  y  $v_k v_{k+1}$  en la cara exterior, como se muestra en la Figura 4.9c, de tal manera que es posible unir a  $v_j$  con  $v'_k$  con una arista colocada en una cara interior de la gráfica. Note que en este caso  $v_k$  se encuentra aislado debido a que no hay forma de cambiar el encaje de la gráfica de tal manera que  $v_k$  es capaz de unirse a otro vértice sin evitar cruces. Un análisis simétrico aplica para  $v'_i$ .

A continuación presentamos un algoritmo de tiempo polinomial para encontrar un encaje aumentable, de una gráfica extraplana maximal, cuando es requerido cambiar la paridad de todos sus vértices.

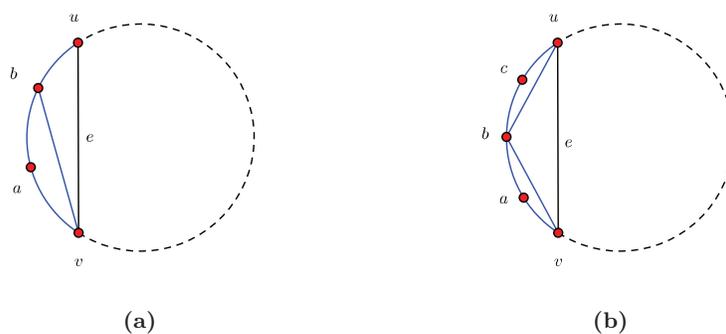
**Teorema 4.1.7.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica extraplana maximal y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad, donde  $S(G, C_G) = V$ . Entonces, decidir si  $G$  tiene un encaje plano tal que existe una gráfica  $H$  donde  $G' = G \cup H$  cumple con  $C_G$  puede ser calculado*



**Figura 4.9:** Gráficas extraplanas maximales. (a) Gráfica no aumentable cuando es requerido preservar el encaje inicial de la gráfica. (b) Aumentación a través de la cara externa. (c) Aumentación de la gráfica por una cara interna.

en tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$ .

*Demostración.* Es conocido que en toda gráfica extra plana maximal siempre existe una diagonal  $uv$  que tiene de un lado ya sea (i) dos vértices  $a$  y  $b$ , sin pérdida de generalidad,  $a$  siendo una oreja y  $b$  siendo adyacente a  $u$  y a  $v$  (como se muestra en la Figura 4.10a), o (ii) tres vértices  $a, b$  y  $c$ , sin pérdida de generalidad  $a$  y  $c$  siendo orejas y  $b$  siendo adyacente a  $u$  y a  $v$  (como se muestra en la Figura 4.10b).



**Figura 4.10:** Las dos posibles configuraciones de orejas que una gráfica extraplana puede tener.

Procedemos iterativamente cortando los vértices  $a, b$  en el caso (i), o  $a, c$  en el caso

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

(ii), de  $G$  hasta obtener ya sea una subgráfica  $G'' = (V'', E'')$  con  $|V''| = 8$ , u obtener una subgráfica no aumentable.

Si durante el proceso iterativo de cortado existen múltiples opciones entonces probamos cada una de ellas e ignoramos toda opción cuyo resultado sea una subgráfica no aumentable. Si no existe opción para continuar con el proceso de cortado y  $|V''| > 8$  entonces obtenemos como resultado que  $G''$  es una gráfica no aumentable, implicando que  $G$  tampoco lo es.

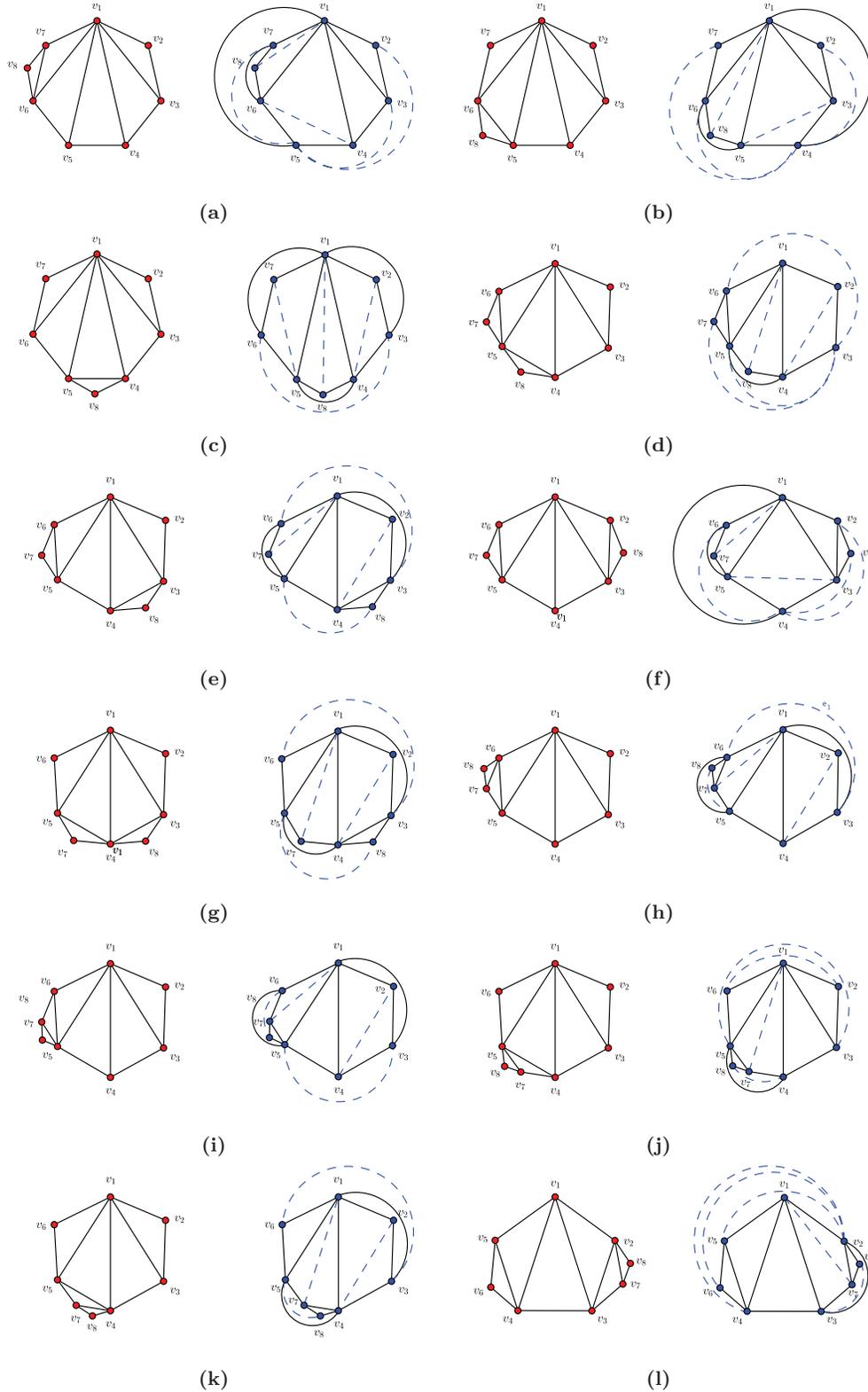
Casuísticamente probamos que toda gráfica extra plana de 8 vértices rojos es aumentable al cambiar el encaje de algunas de sus aristas. La Figura 4.11 muestra los 13 casos generales que pueden ocurrir en una gráfica extraplana de 8 vértices, y junto a cada uno de ellos su correspondiente solución.

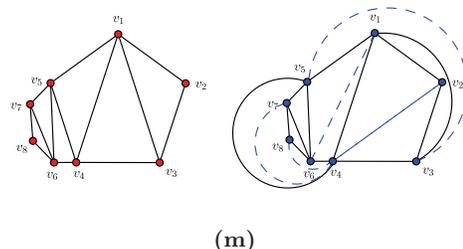
Con el fin de pegar de vuelta los vértices que fueron iterativamente cortados, analizamos las propiedades de la diagonal  $uv$  en cada caso. En el caso (i), sabemos que pudo haber sucedido que en un iteración posterior el vértice  $u$ , el vértice  $v$  o ambos fueron unidos a otros vértices, en cualquier caso  $uv$  pertenece al menos a una cara triangular, digamos  $\Delta = \{u, v, z\}$ . En cuyo caso es posible encajar a  $a$  y  $b$  con sus aristas correspondientes en  $\Delta$  y unir a  $a$  y  $b$  con  $z$ . Note que la paridad de  $a$  y  $b$  cambiar al unirlos con  $z$ . En el caso (ii) pudo haber sucedido que  $uv$  mantuvo su encaje o fue movida al exterior de la gráfica, en ambos casos  $uv$ ,  $bu$  y  $bv$  forman una cara triangular, digamos  $\Delta'$ . Note que es posible encajar a  $a$  y a  $c$  con sus aristas correspondientes en  $\Delta'$  y unir a  $x$  con  $c$  cambiando la paridad de ambos.

Debido que en cada iteración decrementamos constantemente el número de vértices de  $G$ , sabemos que el número de cortes y pegados es lineal. En cada iteración es necesario revisar que al cortar una pareja de vértices la subgráfica resultante no sea aumentable, lo cual puede verificarse en tiempo lineal solo haciendo un conteo de los grados de los vértices. Por lo tanto, la complejidad de algoritmo es  $\mathcal{O}(n^2)$ .  $\square$

##### 4.1.4. Gráficas planas generales

En esta sección estudiamos el problema de aumentación sobre gráficas topológicas planas generales. Primero damos una cota inferior sobre el número de vértices a los





**Figura 4.11:** Los 13 posibles casos de una gráfica extraplana de 8 vértices rojos y su correspondiente aumentación. Los casos simétricos son omitidos.

que es posible cambiar su paridad en gráficas planas. Posteriormente proponemos una cota inferior sobre el número de aristas necesarias para aumentar una gráfica topológica. Finalmente damos un prueba sobre la dureza del problema de aumentación en gráficas planas.

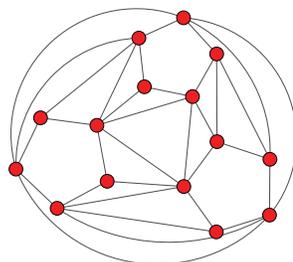
**Teorema 4.1.8.** *Existe una familia de gráficas topológicas planas en la que no es posible aumentar a ninguno de sus miembros para cumplir con las restricciones de paridad de sus  $n$  vértices, aún cuando el vecindario de sus vértices no está saturada y ninguno de sus vértices tiene grado  $n - 1$ . En estas gráficas es posible cambiar la paridad de a lo más  $\frac{2n}{5}$  de sus vértices.*

*Demostración.* Construimos la familia de gráficas de la siguiente manera: Toma  $k$  pentágonos disjuntos, y construye una gráfica cuyo conjunto de vértices esta formado por los vértices de los  $k$  pentágonos. Agrega suficientes aristas hasta que el la unión del exterior de los pentágonos se encuentre triangulado, tal como se muestra en la Figura 4.12.

El resultado se sigue debido a que solo es posible cambiar la paridad de 2 vértices en cada pentágono. □

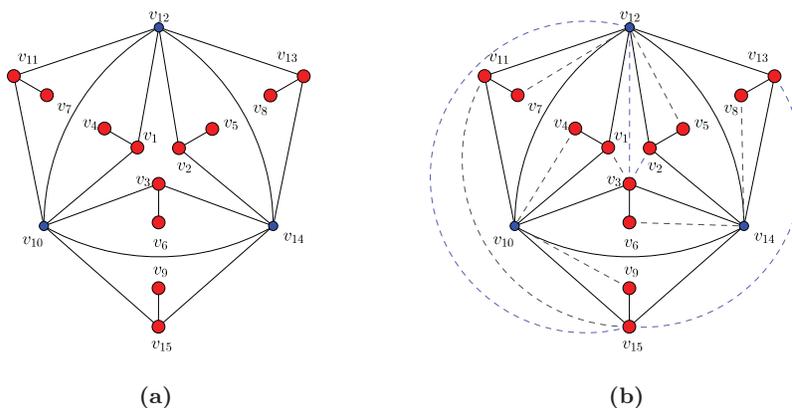
A continuación presentamos una familia de gráficas topológicas planas que requiere una fracción lineal de aristas para cumplir con sus restricciones de paridad.

**Teorema 4.1.9.** *Existe una familia de gráficas topológicas planas tal que para aumentar a cualquiera de sus miembros es necesario agregar  $\frac{22n}{29} - \mathcal{O}(1)$  aristas, cuando  $S(G, C_G) = \{x : \forall x \text{ tal que su grado en } G \text{ es impar}\}$ .*



**Figura 4.12:** Gráfica topológica plana en la que cualquier aumentación deja a  $\frac{3n}{5}$  de sus vértices sin cumplir con sus restricciones de paridad.

*Demostración.* Consideremos la gráfica que muestra la Figura 4.13a. Tal gráfica tiene 15 vértices, 12 de ellos con grado impar. Aseguramos que dicha gráfica no puede ser aumentada para cumplir con sus restricciones de paridad con menos de 12 aristas.



**Figura 4.13:** Gráficas topológicas. (a) Gráfica que requiere al menos 12 aristas para cumplir sus restricciones de paridad. (b) Una posible aumentación. Las aristas punteadas de color azul muestran un camino de longitud 3 uniendo a un vértice rojo interno con un vértice rojo externo.

Cada hoja de la gráfica se encuentra encerrada en una cara triangular. Note que no es posible unir a dos hojas a través de una arista sin evitar cruces, por lo tanto es necesario al menos una arista adicional por hoja. Note también que no hay forma de unir dos vértices rojos de la cara mas interna con dos vértices rojos de la cara

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

exterior con camino disjuntos. Por lo tanto, dos vértices rojos internos tienen que unirse con una arista. La misma observación aplica para los tres vértices rojos externos. La Figura 4.13b muestra un ejemplo de la aumentación previamente descrita. Finalmente, resta cambiar la paridad de un vértice rojo interior y de un vértice rojo exterior. La única opción para unir dichos vértices es agregar un camino de 4 aristas, tal como se muestra en la Figura 4.13b con las aristas punteadas de color azul. Por lo tanto, aumentar dicha gráfica para cumplir con sus restricciones de paridad requiere al menos 12 aristas adicionales.

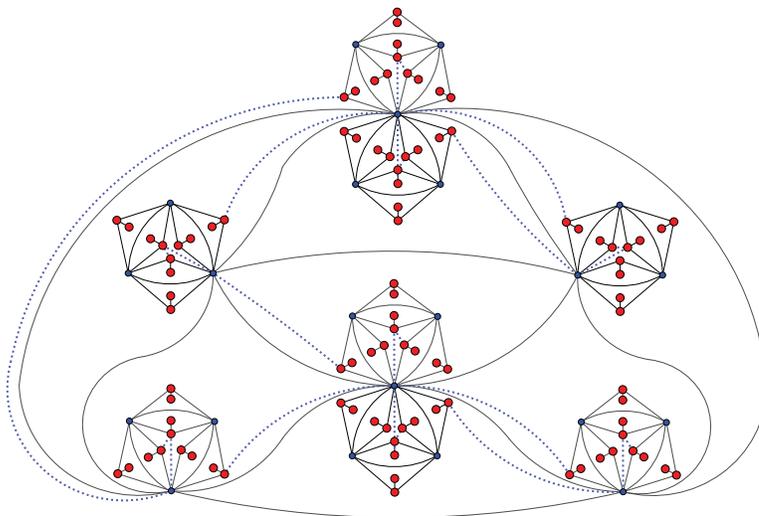
Consideremos ahora una triangulación par de  $n$  vértices (decimos que una triangulación es par si todos sus vértices tienen grado par). Asignamos 2 copias de la gráfica mostrada en la Figura 4.13a a cada vértice de la triangulación con excepción de 4 de ellos. A los cuales solo asignamos una copia de dicha gráfica. Encaja cada copia en una de las caras adyacentes de su vértice asignado, de tal manera que no hay dos copias encajadas dentro de la misma cara. Dicho encaje es posible debido a que una triangulación tiene exactamente  $2n - 4$  caras. Reemplaza cada vértice asignado de la triangulación por el vértice  $v_{10}$ ,  $v_{12}$  o  $v_{14}$  de sus copias asignadas. La Figura 4.14 muestra un ejemplo de dicha construcción para  $n=6$ .

Note que la aumentación de las hojas y de los vértices más internos de cada copia (excepto los vértices correspondientes con  $v_2$  y  $v_{13}$ ) requieren el mismo número de aristas como en la Figura 4.13b.

Podemos unir una copia del vértice  $v_2$  a una copia del vértice  $v_{13}$  con un camino de longitud 3 en vez de un camino de longitud 4, como se muestra en la Figura 4.14, de tal manera que es posible ahorrarse una arista por pareja. Se sigue que son necesarias 11 aristas por cara, de ahí que dicha familia requiere  $\frac{22n}{29} - \mathcal{O}(1)$  aristas adicionales. □

El teorema anterior muestra una familia de gráficas que requiere una fracción lineal de aristas, sin embargo existe una familia de gráficas topológicas (también realizable como gráficas geométricas) que requiere asintóticamente un número mayor de aristas para su aumentación.

**Teorema 4.1.10.** *Existe una familia de gráficas topológicas (o geométricas) planas tal*



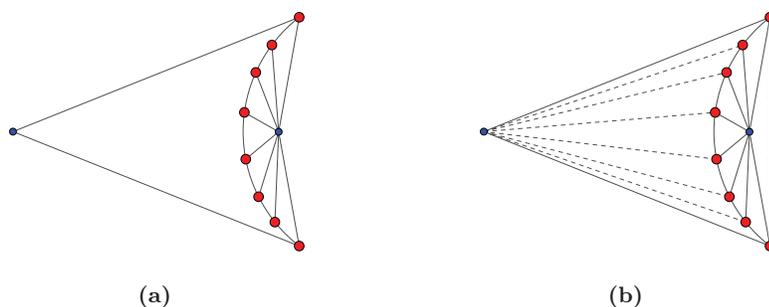
**Figura 4.14:** Gráfica topológica que requiere  $\frac{22n}{29} - \mathcal{O}(1)$  aristas adicionales para cumplir con sus restricciones de paridad.

que para aumentar a cualquiera de sus miembros es necesario agregar  $n - 3$  aristas, cuando  $S(G, C_G) = \{x : \forall x \text{ tal que su grado en } G \text{ es impar}\}$ .

*Demostración.* Construimos la familia de gráficas de la siguiente manera. Toma una cadena convexa de  $n - 2$  vértices rojos, agrega un vértice azul de cada lado de la cadena convexa. Une el vértice colocado del lado cóncavo de la cadena con todos los vértices de la cadena. Une al vértice del otro lado de la cadena con al primero y último vértice de la cadena convexa. La Figura ?? muestra un ejemplo una gráfica de esta familia cuando  $n=10$ .

Note que los  $n - 2$  vértices de la cadena son vértices rojos. El primero vértice de la cadena convexa esta obligado a unirse al último vértice de la cadena convexa, de otra manera generaríamos vértices aislados. El resto de vértices al interior de la cadena convexa deben unirse al vértice azul que se encuentra libre, de otra manera generaríamos vértices aislado.

La prueba se sigue ya que cada vértice rojo, con excepción del primero y ultimo en la cadena convexa los cuales comparten una arista, requieren necesariamente una



**Figura 4.15:** (a) Gráfica topológica que requiere  $n - 3$  aristas adicionales para cumplir con sus restricciones de paridad. (b) Aumentación de la gráfica.

arista. □

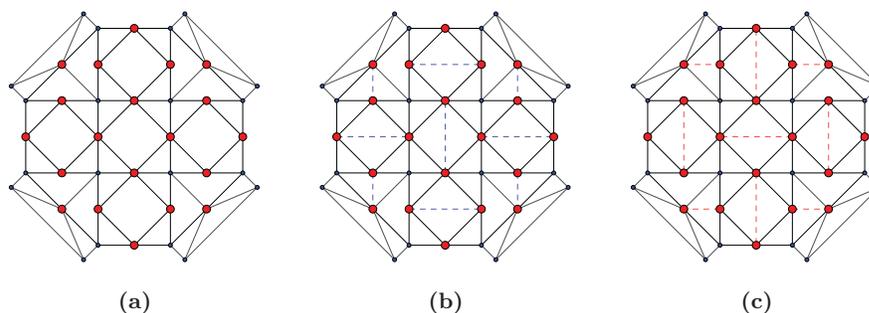
A continuación presentamos un resultado sobre la dureza del problema de aumentación en gráficas topológicas arbitrarias.

**Teorema 4.1.11.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica topológica plana y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces, decidir si existe una gráfica topológica  $H = (V, E')$  tal que  $G' = G \cup H$  cumple con  $C_G$  es  $\mathcal{NP}$ -Duro.*

*Demostración.* Hacemos la prueba rojouciendo el problema de 3SAT plano al problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad. Dada una formula de 3SAT  $\Phi$ , construimos una gráfica topológica plana  $G_\Phi$  y un conjunto de restricciones  $C_G$ , de tal manera que si es posible aumentar a  $G_\Phi$  para cumplir con restricciones de paridad, entonces es posible encontrar una conjunto de valores de las variables que satisfacen a  $\Phi$ .

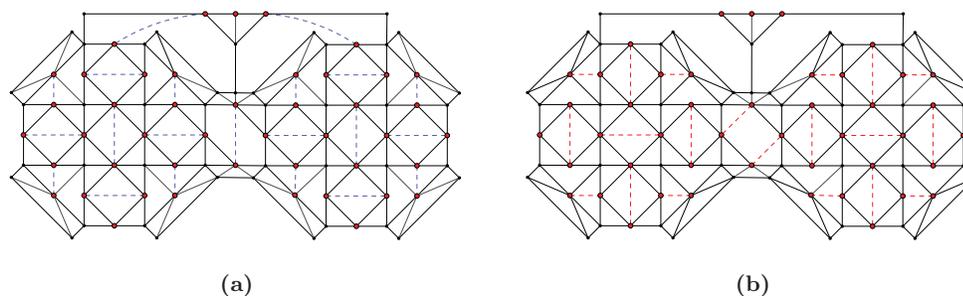
Definimos tres subgráficas o dispositivos, como unidades básicas de nuestra rojoucción: El dispositivo básico, el dispositivo de literal y el dispositivo de cláusula. El dispositivo básico consiste de una gráfica que solo puede ser aumentada de dos maneras diferentes, evitando vértices aislados en su interior. La Figura 4.16b muestra la aumentación positiva (en azul) y la Figura 4.16c muestra la aumentación negativa (en rojo).

Un dispositivo de literal es una subgráfica formada por la unión de dos dispositivos básicos a través de una caja con dos aristas en su interior, como se muestra en la



**Figura 4.16:** (a) Dispositivo básico. Posibles aumentaciones: (b) Positiva. (c) Negativa.

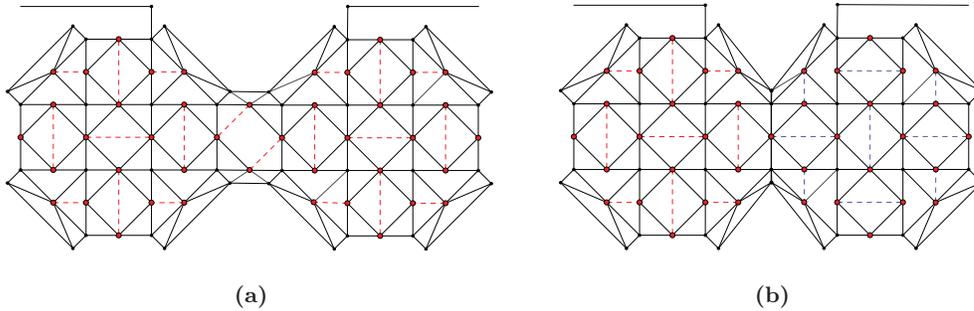
Figura 4.17. Note que las aumentaciones de ambos dispositivos básicos que componen una literal debe ser la misma, es decir, positiva o negativa en ambos lado de otra manera existen vértices aislados en dicha subgráfica. Decimos que la aumentación en una literal es positiva si sus dispositivos básicos fueron aumentados de manera positiva, como la que se muestra en la Figura 4.17a, de otra manera decimos que la literal tiene una aumentación negativa, como la que se muestra en la Figura 4.17b.



**Figura 4.17:** Posibles aumentaciones dispositivo de literal. (a) Una aumentación positiva. (b) Una aumentación negativa.

Observemos que cuando una literal tiene una aumentación negativa los vértices rojos en la parte superior permanecen sin cambiar su paridad. Caso contrario cuando una literal tiene aumentación positiva.

Por cada ocurrencia de una variable  $x \in \Phi$ , tenemos un dispositivo de literal. Todos los dispositivos de literal de una misma variable son unidos uno tras otro en forma de

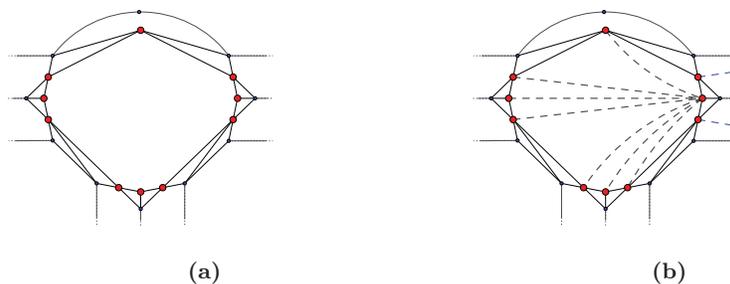


**Figura 4.18:** Unión de dos literales de la misma variable. (a) Caso cuando ambas ocurrencias están negadas o no negadas (con aumentación positiva). (b) Caso cuando una ocurrencia está negada y la otra no lo está (con aumentación negativa del lado izquierdo y positiva del lado derecho).

una cadena, de tal manera que el dispositivo básico derecho de una literal es unido al dispositivo básico izquierdo de la siguiente literal. Dos dispositivos de literal consecutivos son unidos de la siguiente manera: Si en ambas ocurrencia  $x$  está negada o no negada entonces unimos ambas literales como se muestra en la figura Figura 4.18a. De otra manera, las unimos como se ilustra en la Figura 4.18b. Finalmente, unimos el dispositivo básico más a la izquierda con el dispositivo básico más a la derecha, en la cadena de una variable, con una banda. Si la cadena de dispositivos de literal obtenida tiene un número impar de vértices rojos añadimos un vértice rojo extra dentro de la banda, como se ilustra en la Figura 4.20.

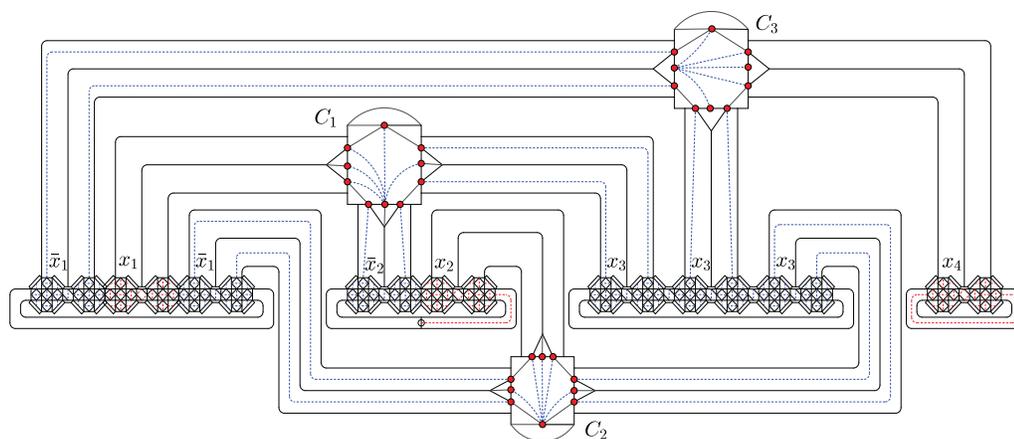
Un dispositivo de clausula está conformado por la unión de tres salidas de tres dispositivos de literal más un vértice rojo, unidos de tal manera que en una cara encontramos 10 vértices rojos. Un ejemplo de un dispositivo de cláusula se ilustra en la Figura 4.19a. Note que no es posible aumentar un dispositivo de cláusula solo colocando aristas en su interior, de tal manera que es necesario que al menos dos vértices rojos de la cláusula sean aumentados a través de su correspondiente literal (un ejemplo de tal aumentación se muestra en la Figura 4.19b), de otra manera existen vértices cuya restricción de paridad no se cumple.

La Figura 4.20 muestra el ejemplo de una gráfica topológica plana  $G_{\Phi}$  construida



**Figura 4.19:** (a) Dispositivo de clausula. (b) Dispositivo de clausula cuando es posible cumplir la paridad de sus 10 vértices rojos.

de acuerdo con la formula 3SAT  $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)$ , junto



**Figura 4.20:** Gráfica  $G_\Phi$  aumentada de acuerdo con la asignación de valores  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (F, F, V, F)$ . La distribución de los dispositivos de literales y clausulas es consistente con la topología de la formula 3SAT  $\Phi$ .

La prueba se sigue debido a que si es posible encontrar una gráfica topológica plana  $H = (V, E')$  que aumenta a  $G_\Phi$  para cumplir con sus restricciones de paridad entonces, es posible encontrar una asignación de valores a las variables tal que satisfacen a  $\Phi$ .  $\square$

## 4.2. Aumentación de gráficas geométricas

En este capítulo abordamos el problema de aumentación para cumplir con un conjunto de restricciones de paridad en gráficas geométricas. Primero proponemos dos cotas inferiores sobre esta variante del problema. La primera de ellas para establecer una cota inferior sobre el número de vértices a los que no es posible cumplir con sus restricciones de paridad. Posteriormente presentamos una familia de árboles geométricos que requieren un número lineal de aristas para su aumentación para cumplir con sus restricciones de paridad.

Finalmente mostramos la complejidad del problema de aumentación en gráficas geométricas planas arbitrarias.

### 4.2.1. Cotas inferiores

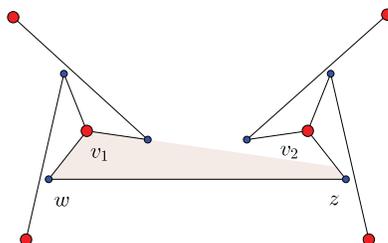
En esta sección mostramos una familia de árboles geométricos planos en la que la aumentación de cualquiera de sus miembros deja un número lineal de vértices sin cumplir con sus restricciones de paridad. Dicha familia de árboles fue inicialmente presentada por A. García et. al. en (16).

**Teorema 4.2.1.** *Existe una familia de árboles geométricos planos, tal que cualquier aumentación de cualquiera de ellas deja al menos  $\lfloor \frac{n-1}{10} \rfloor$  de sus vértices sin cumplir con sus restricciones de paridad.*

*Demostración.* Consideremos el árbol geométrico  $T$  que muestra la Figura 4.21. Mostramos que no importa la forma de aumentar dicho árbol, en cualquier caso  $\lfloor \frac{n}{10} \rfloor$  de sus vértices permanecen sin cumplir con su restricción de paridad. Note que  $v_1$  solo puede conectarse a  $z$ , y que  $v_2$  solo puede conectarse a  $w$  manteniendo la planaridad de la gráfica. Si agregamos  $v_1z$  a  $T$ , entonces  $v_2w$  no puede formar parte de la aumentación, debido a que ambas aristas se cruzarían. Por lo tanto cualquier aumentación de  $T$  mantiene a  $v_1$  o  $v_2$  sin cumplir con su restricción de paridad.

Para construir una familia arbitrariamente grande de árboles, podemos tomar múltiples copias del árbol que muestra la Figura 4.21 y conectarlos como se muestra en la Figura 4.22.

La prueba se sigue debido a que cualquier aumentación de  $T$ , deja al menos a  $\lfloor \frac{n-1}{10} \rfloor$  vértices rojos sin cumplir con sus restricciones de paridad.  $\square$



**Figura 4.21:** En cualquier aumentación del árbol, al menos uno ya sea  $v_1$  o  $v_2$  no puede cambiar su paridad.

A continuación presentamos una familia de árboles geométricos que para ser aumentados para cumplir con sus restricciones de paridad requieren una fracción lineal de aristas. Dicha familia de árboles fue inicialmente presentada por C. Toth en (40), posteriormente A. García y J. Tejel propusieron un análisis refinado de la misma familia en (21).

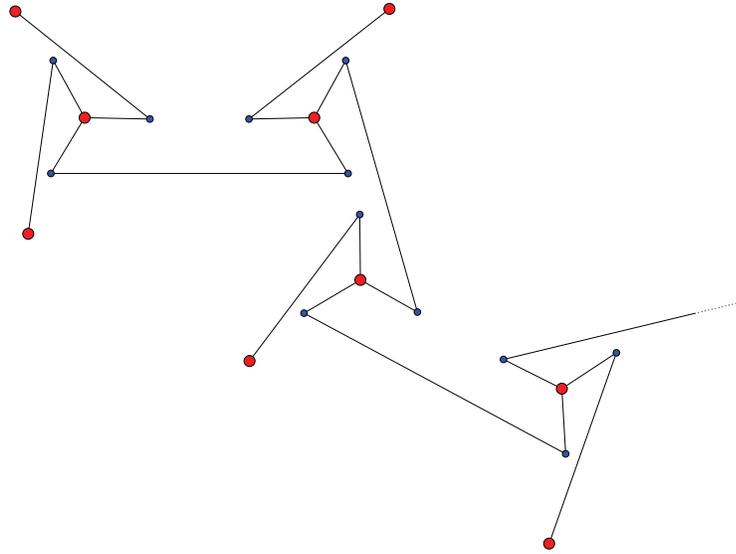
**Teorema 4.2.2.** *Existe una familia de árboles geométricos planos tal que al aumentar a cualquiera de sus miembros para cumplir con sus restricciones de paridad requiere al menos  $\lceil \frac{6n}{11} \rceil$  aristas.*

*Demostración.* La construcción básica es la que se muestra en la Figura 4.23a, la cual consiste de 7 hojas y 8 vértices de grado impar. En este árbol buscamos cambiar la paridad de aquellos vértices con grado impar.

Debido a que las cuatro hojas internas del árbol están colocadas de tal manera que no son visibles entre ellas, las únicas dos aristas que unen a dos vértices rojos internos son  $h_2v_1$  y  $h_3v_1$ . En la parte externa del árbol, solo es posible conectar con una arista a dos de las tres hojas  $h_5$ ,  $h_6$  y  $h_7$ . Por lo tanto, es posible agregar una arista en el interior del árbol, y una arista entre dos de las hojas externas. Sin pérdida de generalidad supongamos que unimos a  $h_3$  con  $v_1$  y a  $h_6$  con  $h_7$ .

Note que los 4 vértices rojos restantes permanecen sin tener visibilidad directa entre ellos, entonces son necesarias al menos dos aristas para unir a una pareja de ellos. Por lo tanto, para aumentar la construcción básica son necesarias 6 aristas.

Para generalizar la construcción a una familia de árboles geométricos planos ar-



**Figura 4.22:** Familia de árboles geométricos tales que cualquier aumentación deja un número lineal de vértices rojos sin cumplir con sus restricciones de paridad.

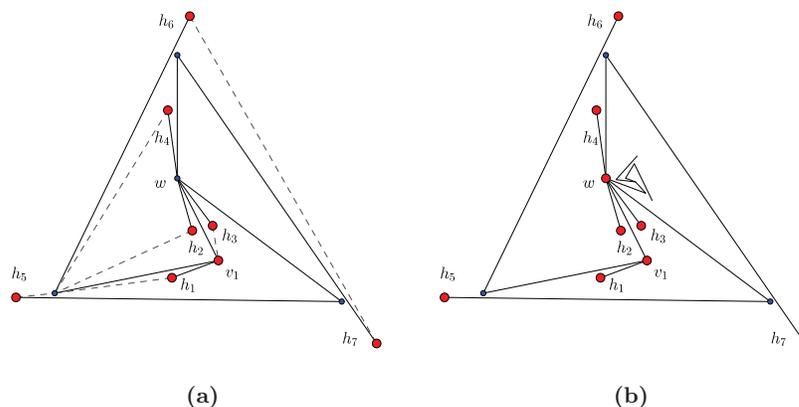
bitrariamente grande, tomamos una copia de la construcción básica, la reducimos a un tamaño conveniente, la encajamos y adherimos al vértice  $w$  como se muestra en la Figura 4.23b). Note que el vértice  $w$  se convierte en un vértice de grado impar después de dicha adición.

Si iteramos el proceso descrito previamente, en cada iteración agregamos 11 vértices y creamos 8 vértices con grado impar. La prueba se sigue ya que para aumentar cualquier miembro de la familia previamente descrita para cambiar de paridad a los vértices impares es necesario al menos  $\lceil \frac{6n}{11} \rceil$  aristas adicionales.  $\square$

La familia de gráficas que se presenta anteriormente requiere una fracción lineal de aristas adicionales para su aumentación, sin embargo existe una familia de caminos que asintóticamente requiere un número mayor de aristas necesarias para su aumentación.

**Teorema 4.2.3.** *Existe una familia de caminos geométricos planos tal que al aumentar a cualquiera de sus miembros para cumplir con sus restricciones de paridad requiere al menos  $n - 2$  aristas.*

*Demostración.* Construimos la familia de caminos de la siguiente manera. Toma una



**Figura 4.23:** (a) Un árbol geométrico plano que requiere la adición de 6 aristas para cambiar la paridad de los vértices de grado impar. (b) Construcción de una familia de árboles geométricos planos que requieren la adición de  $\lceil \frac{6n}{11} \rceil$  para cumplir con sus restricciones de paridad.

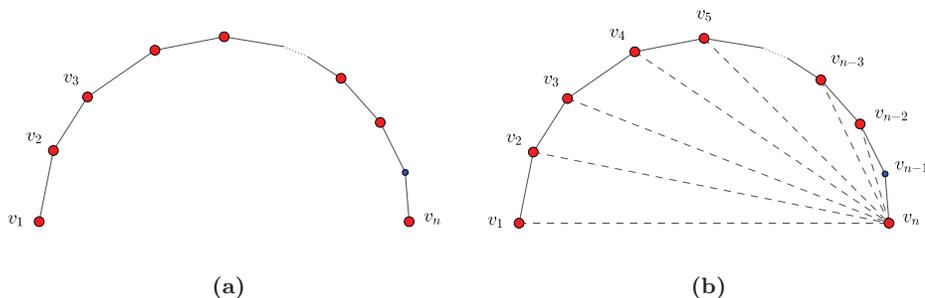
cadena convexa de  $n$  vértices, donde  $n$  es un número impar mayor o igual a 3. Marca de color rojo a todos los vértices de la cadena convexa con excepción de  $v_{n-1}$  al cual lo marcamos de color azul. La Figura 4.24a muestra un ejemplo de esta familia de árboles.

Note que la única forma de aumentar una camino de esta familia es encajando una estrella con centro en  $v_n$  adyacentes al resto de vértices rojos, como se ilustra en la Figura 4.24b. De otra manera, supongamos que al menos existe una arista que conecta a un vértice  $v_i$  con un vértice  $v_j$ , para un  $i, j \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ , con  $i \neq j$ . Podemos aplicar un razonamiento análogo al Teorema 4.1.2 para demostrar que una cara que contiene solo vértices rojos no es aumentable.  $\square$

#### 4.2.2. Complejidad del problema

En esta sección damos algunos resultados sobre la complejidad del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad, primero en gráficas geométricas arbitrarias y posteriormente extendemos la prueba para el caso cuando la gráfica de entrada es árbol plano.

**Corolario 4.2.3.1.** *Sea  $G = (V, E)$  una gráfica geométrica plana y  $C_G$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces, el problema de decidir si existe una gráfica*



**Figura 4.24:** (a) Familia de caminos geométricos que requiere  $n - \mathcal{O}(1)$  aristas para conseguir su aumentación que cumple con el conjunto de restricciones de paridad. (b) Aumentación de la familia de caminos.

geométrica plana  $H$  disjunta y compatible con  $G$ , tal que  $G' = G \cup H$  cumple con  $C_G$  es  $\mathcal{NP}$ -Duro.

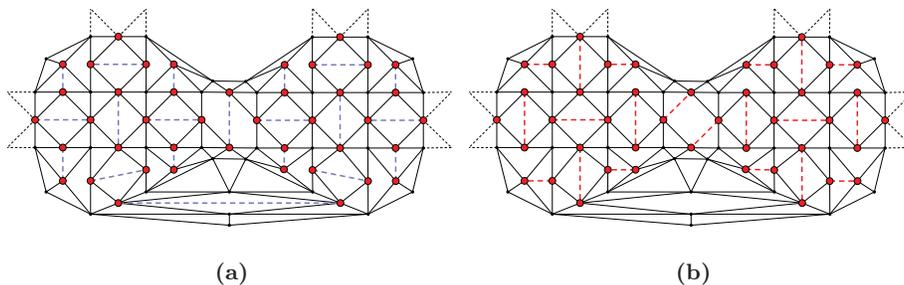
*Demostración.* Hacemos la prueba reduciendo el problema de 3SAT plano al problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad. Dada una formula de 3SAT  $\Phi$ , construimos una gráfica topológica plana  $G_\Phi$  y un conjunto de restricciones  $C_G$ , de tal manera que si es posible aumentar a  $G_\Phi$  para cumplir con restricciones de paridad, entonces es posible encontrar una conjunto de valores de las variables que satisfacen a  $\Phi$ , tal como se describe en el Teorema 4.1.11.

Reutilizamos algunos dispositivos presentados anteriormente (dispositivo básico y de cláusula), realizamos algunas modificaciones en el dispositivo de literal e incluimos un nuevo dispositivo que nos permite realizar la conexión entre el dispositivo de literal con el dispositivo de cláusula.

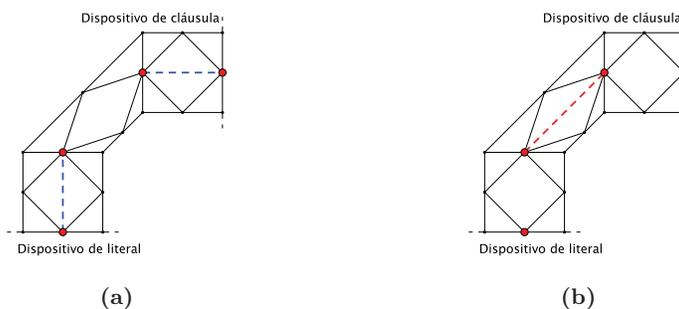
El dispositivo de literal tiene cuatro vértices de conexión, dos en la parte superior para conectarlo con la cláusula correspondiente y uno en cada lateral para conectarlo con otros dispositivos de literal. La Figura 4.25 muestra el dispositivo de literal junto con sus posibles aumentaciones.

El dispositivo de conexión consiste en un número impar de cajas (con cuatro aristas en el interior de cada caja) conectadas unas tras otra como se muestra en la Figura 4.26.

Usamos dos dispositivos de conexión para comunicar el valor de salida de un dispositi-



**Figura 4.25:** Dispositivos de literal. (a) Aumentación positiva. (b) Aumentación negativa.



**Figura 4.26:** Dispositivo de conexión. (a) Transmisión de valor positivo. (b) Transmisión de valor negativo

tivo de literal a un dispositivo de cláusula. Referimos a la Figura 4.20 donde observamos un ejemplo particular de la construcción de  $G_\Phi$ .

La prueba se sigue debido a que si es posible encontrar una gráfica topológica plana  $H = (V, E')$  que aumenta a  $G_\Phi$  para cumplir con sus restricciones de paridad entonces, es posible encontrar una asignación de valores a las variables tal que satisfacen a  $\Phi$ .  $\square$

La dureza del problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad no solo se presenta en gráficas geométricas planas generales, el siguiente resultado muestra la dureza del problema incluso en una familia más restringida de gráficas geométricas.

**Teorema 4.2.4.** *Sea  $T = (V, E)$  un árbol geométrico plano y  $C_T$  un conjunto de restricciones de paridad. Entonces, el problema de decidir si  $T$  es aumentable por una gráfica  $H = (V, E')$ , con un conjunto mínimo de aristas  $E'$ , tal que  $T' = T \cup H$  cumple con  $C_T$  es  $\mathcal{NP}$ -Duro.*

#### 4. EL PROBLEMA DE AUMENTACIÓN DE GRÁFICAS

---

*Demostración.* Hacemos la prueba reduciendo el problema de 3SAT plano al problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad, particularmente cuando la gráfica de entrada es un árbol geométrico plano. Dada una fórmula 3SAT plana  $\Phi$  construimos un árbol geométrico  $T_\Phi$  el cual buscamos aumentar con una gráfica geométrica  $H = (V, E')$  con  $|E'|$  mínima, tal que la gráfica resultante cumpla con el conjunto de restricciones de paridad.

Primero probamos que (i) el problema de aumentación es NP-Duro cuando  $S(T, C_T) \subset V$ . Posteriormente, probamos que (ii) el problema mantiene su complejidad cuando  $S(T, C_T) = V$ .

Construimos una gráfica  $G_\Phi$  tal como se describe en el Corolario 4.2.3.1. Podemos transformar a  $G_\Phi$  en un árbol  $T_\Phi$  al reemplazar una arista  $ab$ , de cada ciclo en  $G_\Phi$ , por una subgráfica de espiral como la que muestra la Figura 4.27a. Note que los dos vértices rojos en cada espiral están forzados a unirse uno a otro, debido a que si ellos se unen a otros vértices emplearíamos un número mayor de arista para aumentar dicha gráfica. La parte (i) se sigue ya que si es posible aumentar a  $T_\Phi$  entonces, es posible encontrar un conjunto de valores a las variables que satisfacen la fórmula  $\Phi$ .



**Figura 4.27:** (a) Subgráfica de espiral. (b) Subgráfica de flecha.

Consideremos una arista  $ab \in T_\Phi$ , con  $a$  y  $b$  siendo vértices azules. Podemos cambiar el color de  $a, b$  a rojo y modificar a  $T_\Phi$  de tal manera que  $a, b$  están forzados a unirse a un conjunto particular de vértices de la siguiente manera.

Agregamos dos caminos anidados, cada uno de tres vértices rojos, a distancia  $\epsilon$  en cada lado de la arista  $ab$  tal como se muestra en la Figura 4.27b. Note que los vértices del camino en la parte superior de  $ab$ , digamos  $u, u'$  y  $u''$ , están colocados de tal manera

que no tienen visibilidad con los vértices rojos de la parte inferior de la arista, digamos con  $v, v'$  y  $v''$ . Más aún  $u', u''$  y  $v', v''$  son visibles únicamente desde  $a, b$  y  $u$  o  $v$ . Por lo tanto para cambiar la paridad de  $u', u'', v'$  y  $v''$  necesariamente hay que realizar un emparejamiento con  $a, b, u$  y  $v$ .

Consideremos ahora una arista  $ab \in T_\phi$ , con  $a$  como vértice rojo y  $b$  como vértice azul. Podemos subdividir a  $ab$  en dos aristas  $aa'$  y  $a'b$ , y marcar a  $a'$  como vértice azul.

Al realizar la reconfiguración previamente descrita en aristas con extremos azules y rojo-azul en  $T_\Phi$  obtenemos un árbol geométrico plano  $T'_\Phi$  con todos sus vértices de color rojo. La parte (ii) se sigue ya que si es posible aumentar a  $T'_\Phi$  entonces, es posible encontrar un conjunto de valores a las variables que satisfacen la fórmula  $\Phi$ .  $\square$

Finalmente, la parte (ii) de la prueba anterior nos permite establecer el siguiente resultado.

**Corolario 4.2.4.1.** *Sea  $T = (V, E)$  un árbol geométrico plano. Entonces, decidir si  $T$  admite un emparejamiento compatible y disjunto de su conjunto de vértices es  $\mathcal{NP}$ -Duro.*



## Conclusiones

---

En este trabajo se aborda el problema de exploración de gráficas con múltiples agentes, principalmente desde dos perspectivas diferentes. La primera; la cual corresponde al problema clásico de exploración, con  $k > 1$  agentes minimizando costo o tiempo, restringido a la familia de árboles. La segunda; que surge al permitir modificar la estructura de la gráfica de entrada, de tal manera que se minimice el número de aristas que se visitan más de una vez durante su exploración.

La segunda perspectiva para atacar el problema de exploración surge del hecho que es posible modificar la gráfica de entrada de tal manera que la gráfica resultante es una gráfica Euleriana, entonces es posible resolver el problema de exploración con costo/tiempo mínimo y  $k = 1$ .

En este trabajo estudiamos el problema de optimización para la exploración de gráficas con múltiples agentes que se mueven en paralelo. Abordamos dos variantes del problema; la primera cuando se desea optimizar el tiempo, y la segunda cuando se desea minimizar el costo de exploración

Consideramos también la variante en la que los agentes de exploración deben comunicarse periódicamente. Mostramos que las variantes del problema no son equivalentes en complejidad. EL problema de optimización de distancia de exploración sin comunicación es de tiempo polinomial, mientras que el problema de optimización en tiempo es  $\mathcal{NP}$ -Duro.

Probamos también que las versiones del problema de exploración con comunicación periódica son problemas  $\mathcal{NP}$ -Duros.

En lo que corresponde al Para el problema de aumentación de gráficas, estudiamos dos variantes del problema. La primera, cuando se requiere que la aumentación preserve el encaje de la gráfica de entrada. La segunda, cuando se permite que la aumentación modifique el encaje de la gráfica de entrada.

En el caso de gráficas extraplanas maximales, caracterizamos la familia de gráficas que no son aumentables en ambas variantes del problema.

Proponemos algoritmos polinomiales para resolver el problema de aumentación en árboles topológicos y gráficas extraplanas maximales para ambas variantes del problema. Y mostramos la dureza del problema de aumentación en gráficas planas topológicas

## 5. CONCLUSIONES

---

generales y gráficas geométricas.

Proponemos familias de gráficas topológicas y geométricas planas que establecen cotas inferiores en el número de aristas necesarias para su aumentación y en el número de vértices que cualquier aumentación deja sin cumplir con su restricción de paridad.

Como problemas abiertos puntualizamos sobre; la aportación de algoritmos de aproximación o de cotas combinatorias para el problema de exploración con múltiples agentes en gráficas generales o subfamilias.

Sobre el problema de encontrar un algoritmo que obtenga la solución óptima para el problema de aumentación sobre gráficas extraplanas maximales, cuando se permite modificar el encaje de la gráfica de entrada.

Y el estudio de cotas combinatorias superiores para el problema de aumentación para cumplir con restricciones de paridad, sobre gráficas geométricas generales y otras subfamilias.

## Bibliografía

---

- [1] Abellanas, M., García, A., Hurtado, F., Tejel, J., and Urrutia, J. (2008). Augmenting the connectivity of geometric graphs. *Computational Geometry*, 40(3):220–230. 10
- [2] Agatz, N., Bouman, P., and Schmidt, M. (2018). Optimization approaches for the traveling salesman problem with drone. *Transportation Science*, 52(4):965–981. 7
- [3] Aichholzer, O., Hackl, T., Hoffmann, M., Pilz, A., Rote, G., Speckmann, B., and Vogtenhuber, B. (2009). Plane graphs with parity constraints. In *WADS*, volume 9, pages 13–24. Springer. 10
- [4] Alvarez, V. (2015). Parity-constrained triangulations with steiner points. *Graphs and Combinatorics*, 31(1):35–57. 11
- [5] Avellar, G., Pereira, G., Pimenta, L., and Iscold, P. (2015). Multi-uav routing for area coverage and remote sensing with minimum time. *Sensors*, 15(11):27783–27803. 8
- [6] Bektas, T. (2006). The multiple traveling salesman problem: an overview of formulations and solution procedures. *Omega*, 34(3):209–219. 7
- [7] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London. 1
- [8] Bullo, F., Frazzoli, E., Pavone, M., Savla, K., and Smith, S. L. (2011). Dynamic vehicle routing for robotic systems. *Proceedings of the IEEE*, 99(9):1482–1504. 8
- [9] Choset, H. (2001). Coverage for robotics—a survey of recent results. *Annals of mathematics and artificial intelligence*, 31(1-4):113–126. 9
- [10] Clarke, G. and Wright, J. W. (1964). Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. *Operations research*, 12(4):568–581. 7
- [11] Cordeau, J.-F., Laporte, G., Savelsbergh, M., and Vigo, D. (2007). Vehicle routing. *Handbooks in operations research and management science*, 14:367–428. 7

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] Czyzowicz, J., Pelc, A., and Roy, M. (2012). Tree exploration by a swarm of mobile agents. In *International Conference On Principles Of Distributed Systems*, pages 121–134. Springer. 8
- [13] Edmonds, J. and Johnson, E. L. (1973). Matching, euler tours and the chinese postman. *Mathematical programming*, 5(1):88–124. 2
- [14] Eswaran, K. P. and Tarjan, R. E. (1976). Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):653–665. 9
- [15] Even, G., Garg, N., Könemann, J., Ravi, R., and Sinha, A. (2004). Min–max tree covers of graphs. *Operations Research Letters*, 32(4):309–315. 8
- [16] García, A., Huemer, C., Hurtado, F., and Tejel, J. (2014). Compatible spanning trees. *Computational Geometry*, 47(5):563–584. 62
- [17] Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1975). Complexity results for multiprocessor scheduling under resource constraints. *SIAM J. Comput.*, 4(4):397–411. 28
- [18] Guerriero, F., Surace, R., Loscri, V., and Natalizio, E. (2014). A multi-objective approach for unmanned aerial vehicle routing problem with soft time windows constraints. *Applied Mathematical Modelling*, 38(3):839–852. 7
- [19] Hazon, N. and Kaminka, G. A. (2008). On redundancy, efficiency, and robustness in coverage for multiple robots. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(12):1102–1114. 8
- [20] Hollinger, G. A. and Singh, S. (2012). Multirobot coordination with periodic connectivity: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Robotics*, 28(4):967–973. 3
- [21] Hurtado, F. and Tóth, C. D. (2013). Plane geometric graph augmentation: a generic perspective. In *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, pages 327–354. Springer. 10, 63
- [22] Kant, G., Kant, G., and Bodlaender, H. L. (1991). Planar graph augmentation problems. *IN PROC. 2ND WORKSHOP ALGORITHMS DATA STRUCT*, 519(519):286–298. 9
- [23] Kranakis, E., Krizanc, D., Ponce, O. M., and Stacho, L. (2010). Bounded length, 2-edge augmentation of geometric planar graphs. In *International Conference on Combinatorial Optimization and Applications*, pages 385–397. Springer. 10
- [24] Laporte, G. (2009). Fifty years of vehicle routing. *Transportation Science*, 43(4):408–416. 7
- [Legner] Legner, P. Mathigon. 1

- 
- [26] M., N., Smith, S. L., and Waslander, S. L. (2015). Multirobot rendezvous planning for recharging in persistent tasks. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(1):128–142. 8
- [27] Meghjani, M. and Dudek, G. (2011). Combining multi-robot exploration and rendezvous. In *Computer and Robot Vision (CRV), 2011 Canadian Conference on*, pages 80–85. IEEE. 3
- [28] Nagamochi, H. and Okada, K. (2004). A faster 2-approximation algorithm for the minmax p-traveling salesmen problem on a tree. *Discrete Applied Mathematics*, 140(1-3):103–114. 8
- [29] Nagamochi, H. and Okada, K. (2007). Approximating the minmax rooted-tree cover in a tree. *Information Processing Letters*, 104(5):173–178. 8
- [30] Nagy, G. and Salhi, S. (2007). Location-routing: Issues, models and methods. *European journal of operational research*, 177(2):649–672. 7
- [31] Plesenič, J. (1976). Minimum block containing a given graph. *Archiv der mathematik*, 27(1):668–672. 9
- [32] Raghavan, S. (2005). A note on eswaran and tarjans algorithm for the strong connectivity augmentation problem. In *The Next Wave in Computing, Optimization, and Decision Technologies*, pages 19–26. Springer. 9
- [33] Ralphs, T. K. (2003). Parallel branch and cut for capacitated vehicle routing. *Parallel Computing*, 29(5):607–629. 8
- [34] Rutter, I. and Wolff, A. (2008). Augmenting the connectivity of planar and geometric graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 31:53–56. 9
- [35] Smith, S. L., Pavone, M., Bullo, F., and Frazzoli, E. (2010). Dynamic vehicle routing with priority classes of stochastic demands. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(5):3224–3245. 8
- [36] Solomon, M. M. (1987). Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations research*, 35(2):254–265. 8
- [37] Song, B. D., Kim, J., Kim, J., Park, H., Morrison, J. R., and Shim, D. H. (2014). Persistent uav service: an improved scheduling formulation and prototypes of system components. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 74(1-2):221–232. 8
- [38] Spires, S. V. and Goldsmith, S. Y. (1998). Exhaustive geographic search with mobile robots along space-filling curves. In *Collective robotics*, pages 1–12. 8
- [39] Stump, E. and Michael, N. (2011). Multi-robot persistent surveillance planning as a vehicle routing problem. In *2011 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, pages 569–575. IEEE. 7

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [40] Tóth, C. D. (2012). Connectivity augmentation in planar straight line graphs. *European Journal of Combinatorics*, 33(3):408–425. [10](#), [63](#)
- [41] Toth, P. and Vigo, D. (2002). *The vehicle routing problem*. SIAM. [7](#)