



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTENSIÓN DEL TENSOR GEOMÉTRICO CUÁNTICO BAJO EL
FORMALISMO DE INTEGRALES DE TRAYECTORIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

SERGIO JAVIER BUSTOS JUÁREZ

TUTOR

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER



CIUDAD UNIVERSITARIA, Cd. Mx., 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Sergio Javier
Bustos
Juárez
5521356394
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
311285442

2. Datos del tutor

Dr.
José David
Vergara
Oliver

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Myriam
Mondragón
Ceballos

4. Datos del sinodal 2

Dr.
Angel
Sánchez
Cecilio

5. Datos del sinodal 3

Dra.
María Catalina
Espinoza
Hernández

6. Datos del sinodal 4

Dr.
Francisco
Nettel
Rueda

7. Datos del trabajo escrito

Extensión del Tensor Geométrico Cuántico bajo el formalismo de integrales de trayectoria
112 p
2020

*Para Luis,
nunca dejes de divertirte.*

AGRADECIMIENTOS

Primero a mis papás, Ana y Arturo, así como a mi hermano Luis. Les agradezco muchísimo todo el cariño, apoyo, felicidad y educación que me han brindado en toda mi vida, gracias a ello estoy aquí. Ustedes son mis gigantes. ¡No tienen idea de cuanto los amo!

David, aprecio muchísimo todo el tiempo, conocimiento y sobre todo el apoyo que me has brindado. Si hay algo que aprendí durante este año trabajando contigo, aparte de lo que hay en esta tesis, es el que tipo de científico que quiero ser.

A mi familia, Andrea, Godolfino, Luz María, Juan Arturo, Beto, Pina, Javi, Migue, Tere, Judith, Lalo, Cristi Memo, Omar, Luz, Mari, Lalito, Pichi, Julia, Caro, Rigo, Mabel, Ítalo, Carlos, Magda, Axel, Jessi, Cristina, Moshi Dieter, Sofía, Karla, Liliana, Omarcito y David por ser parte de mi vida tanto tiempo, de una u otra forma he aprendido algo de cada uno de ustedes.

A mis amigos Brenda, Pepe, Harvey, Axel, Dulce, Vicky, Alberto, Osmar, Victor, David, Mordred, Diana, Paco y Ana, por hacer mas divertida mi vida y todos los recuerdos tan valiosos que hemos formado. ¡Me alegro mucho de haberlos conocido!

Gaby, Angel y Peña, gracias por haber creído en mí a lo largo de estos años y brindarme las oportunidades para crecer profesionalmente, ustedes se merecen ampliamente ser llamados profesores. Tienen todo mi respeto.

También agradezco el apoyo y los tips de mis compañeros Daniel y Diego, sin los cuales esta tesis habría tardado al menos un par de meses más (y yo habría dormido mucho menos en este tiempo).

Finalmente al proyecto DGAPA-PAPIIT IN103919, Información cuántica en teoría de campo y no conmutativas, por la beca otorgada para la realización de esta tesis.

ÍNDICE

| | |
|--------------|----|
| Resumen | 9 |
| Introducción | 11 |

I BASES

| | | |
|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | CONOCIMIENTOS ELEMENTALES | 15 |
| 1.1 | <u>Lagrangianos, hamiltonianos y ecuaciones de movimiento</u> | 15 |
| 1.2 | <u>Mecánica Cuántica</u> | 16 |
| 1.2.1 | Cuadro de Schrödinger | 17 |
| 1.2.2 | Ecuación de Schrödinger y ecuación de evolución | 18 |
| 1.2.3 | Cuadro de Heisenberg | 19 |
| 1.3 | <u>Kernels y funciones de Green</u> | 20 |
| 1.4 | <u>Integral de trayectoria</u> | 21 |
| 1.5 | <u>Producto cronológico de operadores</u> | 23 |
| 1.6 | <u>Funcional generadora de las funciones de Green</u> | 26 |
| 1.6.1 | Propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado | 27 |
| 2 | INFORMACIÓN CUÁNTICA | 33 |
| 2.1 | <u>Cubits</u> | 33 |
| 2.1.1 | ¿Cuánta información codifica un cubit? | 35 |
| 2.2 | <u>Estados puros y fidelidad cuántica</u> | 35 |
| 2.3 | <u>Evolución adiabática en mecánica cuántica</u> | 38 |
| 2.4 | <u>Fase de Berry</u> | 40 |
| 2.4.1 | Fases relativas y globales | 40 |
| 2.4.2 | Derivación estándar | 41 |
| 2.5 | <u>Tensor geométrico cuántico y el tensor métrico cuántico</u> | 43 |
| 2.6 | <u>Funciones de Wigner</u> | 45 |
| 2.6.1 | Transformación de Weyl | 46 |
| 2.6.2 | La función de Wigner | 46 |
| 2.7 | <u>Métrica de Fubini-Study</u> | 48 |
| 2.7.1 | Variedades de Kähler | 48 |
| 2.7.2 | Métrica de Fubini-Study | 48 |
| 3 | EJEMPLOS DEL TENSOR GEOMÉTRICO CUÁNTICO | 51 |
| 3.1 | <u>Oscilador armónico generalizado</u> | 51 |
| 3.1.1 | Fase y curvatura de Berry | 52 |
| 3.1.2 | Tensor métrico cuántico | 54 |
| 3.1.3 | Tensor geométrico cuántico | 56 |
| 3.2 | <u>Osciladores armónicos simétricamente acoplados</u> | 56 |
| | | |
| II PERSPECTIVA DEL TGC BAJO LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA | | |
| 4 | TGC Y EL TENSOR DEL ESPACIO FASE DE ESTADOS N-ÉSIMOS | 63 |
| 4.1 | <u>Tensor a partir de variaciones en el hamiltoniano para un estado n-ésimo</u> | 64 |
| 4.2 | <u>Equivalencia entre los métodos</u> | 69 |

| | | |
|-----|-------------------------------------------------------|----|
| 5 | EJEMPLOS DEL TGC PARA EL ESTADO N-ÉSIMO | 73 |
| 5.1 | <u>Oscilador armónico generalizado</u> | 73 |
| 5.2 | <u>Osciladores armónicos simétricamente acoplados</u> | 80 |
| 6 | EJEMPLOS DEL TENSOR DE VARIACIÓN DE PQS | 83 |
| 6.1 | <u>Oscilador Armónico Generalizado</u> | 83 |
| 6.2 | <u>Osciladores armónicos simétricamente acoplados</u> | 86 |
| | Conclusiones | 93 |

III APÉNDICE

| | | |
|---|----------------------------------------------------------------|-----|
| A | NOTACIÓN | 97 |
| B | DERIVADAS FUNCIONALES | 99 |
| C | PRODUCTO EXTERIOR, FORMAS DIFERENCIALES Y DERIVADA EXTERIOR | 101 |
| D | FUNCIONES DE HERMITE | 103 |
| E | FUNCIÓN DE CORRELACIÓN DE 4 PUNTOS A SEGUNDO ORDEN DE ϕ^4 | 105 |

RESUMEN

En el presente trabajo se estudia a profundidad un concepto fundamental de la teoría de información cuántica, el Tensor Geométrico Cuántico. Esto con la finalidad de generalizar su método de obtención basado en integrales de trayectoria, de modo que sea posible conseguirlo para estados excitados arbitrarios y considerando variaciones tanto en el espacio de parámetros como del espacio fase.

Para ello se utilizó el formalismo de la función de Wigner de la mecánica cuántica, así como las propiedades de las integrales de trayectoria y una regularización energética. Suponiendo un sistema que en un inicio (de $t = -\infty$ a $t = 0$) está descrito por un hamiltoniano, $H_i = H$ y después de $t = 0$ se perturba el sistema para estar descrito por $H_f = H + \delta H$ donde

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial z^A} \delta z^A \quad (0.1)$$

con

$$z^A = (q^i, p_i, \lambda_a). \quad (0.2)$$

se obtuvo que el TGC estará dado por

$$G_{AB}^{(n)} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n - \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n], \quad (0.3)$$

Con este método generalizado se encontraron nuevas Curvaturas de Berry (siendo esta la parte antisimétrica del tensor), y Métricas de Información Cuántica (la parte simétrica). Diferenciándose las estándar al contener la información correspondiente a las variaciones del espacio fase.

INTRODUCCIÓN

El punto de vista geométrico de la mecánica cuántica ha sido altamente relevante en su desarrollo moderno, donde la primera gran realización de estas ideas fue gracias a la introducción del tensor geométrico cuántico por Provost y Vallee [1]. Este concepto está compuesto por dos partes, la real es el tensor métrico cuántico del cual es posible obtener la llamada fidelidad cuántica [2]. Mientras que la imaginaria, llamada curvatura de Berry, es la que posteriormente sería identificada como la curvatura básica de la conexión de Berry [3].

El objetivo principal de este trabajo de tesis es estudiar al tensor geométrico cuántico utilizando conceptos que parten del método de cuantización de Feynman, las integrales de trayectoria [8][9]. Además, se muestra por primera vez como extender estas ideas para considerar no solo el estado base del sistema cuántico, sino los diferentes estados excitados de este. Al mismo tiempo se amplía el concepto del espacio de parámetros para incluir también al espacio fase.

En la parte inicial del texto se examinan todas las bases necesarias, empezando en el primer capítulo por las nociones fundamentales de la mecánica cuántica como lo son lagrangianos, hamiltonianos, el cuadro de Schrödinger, la ecuación de Schrödinger, la ecuación de evolución, el cuadro de Heisenberg, kernels y funciones de Green. Esto para dar paso a las integrales de trayectoria, el producto cronológico de operadores y a la funcional generadora de las funciones de Green, dando como ejemplo de esta sección el cálculo del propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado.

En el segundo capítulo se centra en las ideas provenientes de la teoría de información cuántica, particularmente los cubits, los estados puros, la fidelidad, la evolución adiabática, la fase de Berry, el tensor métrico cuántico y finalmente el tensor geométrico cuántico (TGC). Dando con cada uno de ellos los métodos estándar para calcularlos mediante la función de onda del sistema. Con estas herramientas en el tercer capítulo se calcula el TGC para dos sistemas concretos: el oscilador armónico generalizado y los osciladores simétricamente acoplados.

En la segunda parte de la tesis, se trata al método de integrales de trayectoria para obtener el TGC cuya ventaja sobresaliente, con respecto al anterior, es que no se requiere conocer a la función de onda del sistema para obtenerlo. La desventaja de este es que solo funciona bajo variaciones en el espacio de parámetros y en el estado base. Por estas razones, se generaliza en el cuarto capítulo para que pueda emplearse esta técnica alternativa en estados excitados, obteniendo así los mismos resultados (al variar el espacio de parámetros) que los encontrados mediante el método estándar. Además con esta técnica generalizada se obtienen nuevas métricas y fases de Berry para variaciones del espacio fase. Esta sección se concluye con la demostración de la equivalencia entre ambas metodologías: la estándar y la nueva versión con integrales de trayectoria.

En el quinto capítulo se vuelven a calcular los TGC para los sistemas mencionados anteriormente pero ahora con el nuevo método, esto para ejemplificar su equivalencia, y en el sexto se les obtiene su nuevo tensor de variaciones en el espacio fase. Este trabajo culmina con un capítulo de conclusiones en el cual se resaltan los logros del método extendido haciendo las comparaciones pertinentes con el estándar.

A cualquiera que acabe leyendo esta tesis, si surge alguna duda siéntete libre de mandarme un correo a sergio1@ciencias.unam.mx, espero que mi trabajo haga más fácil el tuyo.

Parte I

BASES

 CONOCIMIENTOS ELEMENTALES

Como la teoría de información cuántica y la teoría cuántica de campos utilizan gran cantidad de conceptos provenientes de la mecánica clásica, relatividad especial y mecánica cuántica, es conveniente revisar brevemente algunos de ellos antes de entrar de lleno en temas de mayor complejidad.

 1.1 LAGRANGIANOS, HAMILTONIANOS Y ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Uno de los problemas centrales de la física es poder describir y predecir el movimiento de los cuerpos que pueden sufrir distintas interacciones entre ellos. Para un sistema dado, la descripción completa de su movimiento está codificado en su *lagrangiano* (o función de Lagrange), que se define de la siguiente manera

$$L(q^1, q^2, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dots, \dot{q}^n, t) = T - V, \quad (1.1)$$

siendo T la energía cinética y V la potencial. Además, las trayectorias reales que tomará la partícula serán aquellas que extremen la *acción*, dada por

$$S = \int_{t_0}^t dt L. \quad (1.2)$$

Si esto ocurre $\delta S = 0$ y se obtienen las ecuaciones de movimiento correspondientes para cada una de las q^α , siendo dadas por las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0; \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (1.3)$$

Es conveniente muchas veces observar claramente si el lagrangiano depende explícitamente del tiempo o hacer que el movimiento esté descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, esto se logra a través del *hamiltoniano* (o la función de Hamilton). Para poder describir esta función es necesario primero definir el *momento generalizado*,

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}, \quad (1.4)$$

notemos que hay uno asociado a cada coordenada generalizada q^α . Utilizando el momento generalizado y el lagrangiano, el hamiltoniano se define a través de la *transformada de Legendre*,

$$H(p, q, t) \equiv p_\alpha \dot{q}^\alpha - L, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (1.5)$$

En el formalismo hamiltoniano el movimiento está descrito por las *ecuaciones canónicas* (o ecuaciones de movimiento de Hamilton) [4]

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a; \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_a} = -\dot{p}^a; \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (1.8)$$

de las cuales es fácil observar que si L no depende del tiempo, H es una constante de movimiento.

Pero en mecánica clásica, una partícula está descrita en su totalidad cuando se conocen su posición y momento para todo tiempo, o dicho de otro modo, cuando se tienen sus ecuaciones de movimiento y condiciones iniciales. Pero no todo en la naturaleza puede ser descrito mediante estas ideas [5], por lo que es necesario ampliarlas mediante el formalismo de mecánica cuántica.

1.2 MECÁNICA CUÁNTICA

En mecánica cuántica un estado físico es representado por un vector de estado llamado *ket*, que reside en un espacio vectorial complejo, y es denotado por $|\alpha\rangle$. Este ket es postulado a contener la **información completa del estado físico**; todo lo que nos es posible preguntarnos del estado está contenido en el ket. Además del espacio de kets, existe uno "dual" a este, el espacio de *bras*. Postulamos que por cada ket $|\alpha\rangle$ existe un bra $\langle\alpha|$ en una correspondencia uno a uno donde estos entes viven en un *espacio de Hilbert*.

Dados un bra y un ket hay dos posibles tipos de objetos que se pueden formar, un número complejo a través del producto interno, el *braket* $\langle\alpha|\beta\rangle$ o un operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ que puede ser representado por una matriz cuadrada de tamaño N [6].

Para describir la evolución de un sistema mecánico cuántico usualmente se utilizan 2 descripciones o cuadros equivalentes, difiriendo principalmente en qué es lo que cambia en el tiempo, pudiendo ser los operadores o la función de onda; a estas descripciones se les conoce como *cuadro de Schrödinger* y *cuadro de Heisenberg*.

1.2.1 Cuadro de Schrödinger

En esta descripción los operadores son independientes del tiempo, es decir, para los operadores de momento y coordenada generalizada se cumple que $\partial_t \hat{q} = 0$, $\partial_t \hat{p} = 0$. Por otra parte, para las funciones de onda se tiene que $\psi(q, t) = \langle q | \psi, t \rangle$ y que $\psi(p, t) = \langle p | \psi, t \rangle$, donde los operadores cumplen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\hat{q}^a, \hat{q}^b] = 0, \quad (1.9)$$

$$[\hat{p}^a, \hat{p}^b] = 0, \quad (1.10)$$

$$[\hat{q}^a, \hat{p}^b] = i\hbar \delta_{ab}, \quad (1.11)$$

debido a estas reglas de conmutación se obtiene el conocido *principio de incertidumbre de Heisenberg*, que establece la imposibilidad de conocer certeramente tanto la posición como el momento de una partícula a un tiempo dado,

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.12)$$

Con los *eigenkets* (o kets propios) de estas observables se define una base de la forma [4]

$$\hat{q} |q\rangle = q |q\rangle, \quad (1.13)$$

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle, \quad (1.14)$$

que es completa, por lo que cumple la propiedad de cerradura

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq |q\rangle \langle q| = \mathbb{I}, \quad (1.15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle \langle p| = \mathbb{I}, \quad (1.16)$$

nótese que aquí \mathbb{I} es la matriz identidad.

En la representación del espacio de posición se utiliza la base $|q\rangle$ y el operador \hat{p} queda definido como

$$\hat{p}_a \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^a}, \quad (1.17)$$

y la condición de ortogonalidad está dada por una delta de Dirac de la siguiente manera

$$\langle q' | q \rangle = \delta(q' - q). \quad (1.18)$$

La conexión entre las bases \hat{q} y la de \hat{p} es

$$\langle q | p \rangle = \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p q}}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (1.19)$$

Es posible pasar de la representación de posición a la de momentos (o al revés) a través de la *transformada de Fourier*

$$\psi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{e^{\frac{ipq}{\hbar}} \psi(p)}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (1.20)$$

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \frac{e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \psi(q)}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (1.21)$$

Debe notarse que toda evolución temporal dentro del cuadro de Schrödinger recae en la función de onda y no en los operadores, dicho de otro modo, los operadores no dependen del tiempo y la dependencia temporal se encuentra en la función de onda $\psi = \psi(q, t) = \langle q | \psi, t \rangle$. Para hacer evolucionar en el tiempo a la función de onda se requiere de la ecuación de evolución.

1.2.2 Ecuación de Schrödinger y ecuación de evolución

La ecuación de Schrödinger está dada por

$$\hat{H}\psi(q, t) = i\hbar\partial_t\psi(q, t), \quad (1.22)$$

o escrita en notación de Dirac con el operador $\hat{P}_t \equiv -i\hbar\partial_t$,

$$\langle q | \hat{P}_t + \hat{H} | \psi, t \rangle = 0. \quad (1.23)$$

De la ecuación de Schrödinger se obtiene la *ecuación de evolución*

$$|\psi, t\rangle = e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)} |\psi, t_0\rangle, \quad (1.24)$$

la cual se utiliza para llevar al ket de estado $|\psi, t_0\rangle$ del tiempo inicial t_0 a un tiempo posterior t mediante el *operador de evolución* dado por

$$\mathcal{U}(t, t_0) = e^{\frac{-i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}. \quad (1.25)$$

Un error común es pensar que conforme el tiempo transcurre, todos los kets en el cuadro de Schrödinger evolucionan, esto no es cierto, el punto importante es distinguir entre el comportamiento de los kets de estado $|\psi, t\rangle$ de los kets base $|q\rangle$.

En (1.13) y (1.14) se remarcó que los eigenkets de observables se usarán como kets base. ¿Qué sucede con la *ecuación de eigenvalores*

$$\hat{A} |a\rangle = a |a\rangle \quad (1.26)$$

al transcurrir el tiempo? En el cuadro de Schrödinger, \hat{A} no cambia, así que los kets base, obtenidos como solución de esta ecuación de eigenvalores, al tiempo t_0 por ejemplo, deben permanecer estáticos. A diferencia de los kets de estado, los kets base no cambian en el cuadro de Schrödinger [5] [6].

Pero observemos que hasta el momento solo hemos dado la evolución temporal a los Kets de estado, de manera alternativa podemos seguir el cuadro de Heisenberg.

1.2.3 Cuadro de Heisenberg

En contraste con el cuadro de Schrödinger en el que los operadores correspondientes a observables como \hat{p} y \hat{q} son constantes en el tiempo, en el *cuadro de Heisenberg* los operadores varían con el tiempo; los kets de estado son fijos, congelados de cierta forma a lo que fueron al tiempo t_0 [6]. Por lo que

$$\partial_t |\psi\rangle_H = 0. \quad (1.27)$$

Es importante notar que la función de onda en el cuadro de Heisenberg está dada por la de Schrödinger siendo fijada a un tiempo particular t_0 , i.e., $|\psi\rangle_H = |\psi, t_0\rangle$ (en general se fija $t_0 = 0$).

En este cuadro los operadores cargan con la evolución temporal y serán descritos a partir de los conocidos al tiempo t_0 (o los del cuadro de Schrödinger) junto con el operador de evolución de la siguiente manera[4]:

$$|q, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |q, t_0\rangle = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) |q\rangle_S = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |q\rangle_S, \quad (1.28)$$

$$|p, t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |p, t_0\rangle = \mathcal{U}^\dagger(t, t_0) |p\rangle_S = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |p\rangle_S, \quad (1.29)$$

o dicho de otro modo,

$$\hat{q}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \hat{q} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}, \quad (1.30)$$

$$\hat{p}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} \hat{p} e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}. \quad (1.31)$$

Es importante resaltar que para obtener las reglas de conmutación impuestas por (1.9), (1.10) y (1.11) dentro de este cuadro, los operadores deben de estar a tiempos iguales.

Para un operador en el cuadro de Schrödinger \hat{o}_S que no depende explícitamente del tiempo se tiene la siguiente ecuación diferencial para su contraparte del cuadro de Heisenberg \hat{o}_H

$$\frac{d\hat{o}_H}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{o}_H, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{o}_H \hat{H} - \hat{H} \hat{o}_H), \quad (1.32)$$

con la que es posible dar la evolución temporal del operador. Esta ecuación es conocida como la *ecuación de movimiento de Heisenberg* [6][5].

1.3 KERNELS Y FUNCIONES DE GREEN

De la ecuación de evolución (1.24) se observa que la función de onda evoluciona gracias al llamado *Kernel de la ecuación de Schrödinger* de la forma,

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_0 K(q, t; q_0, t_0) \psi(q_0, t_0), \quad (1.33)$$

donde el kernel está definido por

$$K(q, t; q_0, t_0) \equiv \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} | q_0 \rangle \quad (1.34)$$

$$= \langle q | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t)} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0)} | q_0 \rangle \quad (1.35)$$

$$= \langle q, t | q_0, t_0 \rangle. \quad (1.36)$$

Cuyo significado es que dada una partícula que se encontraba en la posición q_0 al tiempo t_0 , el kernel será la amplitud de probabilidad de que se le encuentre en q al tiempo t , esto es debido a

$$\psi(q, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy K(q, t; y, t_0) \psi(y, t_0) \quad (1.37)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy K(q, t; y, t_0) \delta(y - q_0), \quad (1.38)$$

por lo tanto

$$K(q, t; q_0, t_0) = \psi(q, t). \quad (1.39)$$

El Kernel tiene distintas propiedades, una de ellas es que junto con el *operador de Schrödinger* dado por

$$\hat{D}_s = i\hbar \partial_t - \hat{H} = 0 \quad (1.40)$$

cumple que $\hat{D}_s K(q, t; q_0, t_0) = 0$. Además si es a tiempos iguales da como resultado una delta de Dirac,

$$K(q, t_0; q_0, t_0) = \delta(q - q_0). \quad (1.41)$$

Por otra parte, el *propagador retardado* G_R se define como

$$G_R(q, t; q_0, t_0) \equiv -i\theta(t - t_0) K(q, t; q_0, t_0) \quad (1.42)$$

donde la θ es la *función de Heaviside*

$$\theta(t - t_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi\hbar i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\tau}}{\tau + i\epsilon} \quad (1.43)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\pi\hbar i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\tau}}{\tau - i\epsilon} \quad (1.44)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0. \end{cases} \quad (1.45)$$

La diferencia del propagador retardado con respecto al Kernel radica en la información extra que contiene acerca de la dirección de flujo temporal, siendo esta codificada dentro de la función de Heaviside.

Es importante notar que hay distintas prescripciones de la función de Green, particularmente en esta solo se están tomando tiempos mayores a t_0 mediante la función de Heaviside; pero existen otras como la de Feynman que se verá en las siguientes secciones.

Además, se cumple que la *función de Green* para el operador de Schrödinger es el propagador retardado 1.42, esto es que

$$\hat{D}_s G_R(q, t; 0, 0) = \delta(q)\delta(t). \quad (1.46)$$

Utilizando estos conceptos se llega fácilmente a uno fundamental para la teoría cuántica de campos, la *integral de trayectoria o funcional*.

1.4 INTEGRAL DE TRAYECTORIA

Clásicamente es posible predecir toda la historia de una partícula si se conocen sus condiciones iniciales, es decir, la posición y el momento que posee a un tiempo t_0 siguiendo sus ecuaciones de movimiento. Sin embargo cuánticamente esto lo prohíbe el principio de incertidumbre de Heisenberg (1.12), lo que si se puede predecir es la probabilidad de encontrar a la partícula en algún lugar a un tiempo dado, esto bajo las ideas de Feynman tomando en cuenta todas las posibles trayectorias que pudo haber recorrido la partícula; específicamente se logra integrando en todo el espacio todas las trayectorias posibles pesadas mediante la acción (1.2) como se mostrará a lo largo de esta sección.

Partiendo del kernel para los puntos (q, t) y (q_0, t_0) , dado por la ecuación (1.34)

$$K(q, t; q_0, t_0) \equiv \langle q | e^{\frac{-i}{\hbar} \hat{H}(t-t_0)} | q_0 \rangle = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle,$$

e introduciendo la identidad

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 |q_1, t_1\rangle \langle q_1, t_1|, \quad (1.47)$$

es posible que el Kernel quede definido en términos de los valores que haya tenido para el punto q_1 al tiempo t_1 , obteniendo

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \langle q, t | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle.$$

Siguiendo este proceso para tomar en cuenta N puntos dentro del intervalo (considerado una separación temporal igual entre cada uno de ellos) el kernel se verá transformado en

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \dots dq_1 \langle q, t | q_N, t_N \rangle \langle q_N, t_N | q_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle. \quad (1.48)$$

Ahora, inspeccionando el j -ésimo término, donde se ha definido $\Delta t = t_{j+1} - t_j = \frac{t-t_0}{N+1}$,

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle.$$

Para poder realizar un producto interior conocido tanto para el bra como para el ket se introduce un "uno", pero esta vez en términos del momento de este j -ésimo término,

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dp_j |p_j\rangle \langle p_j|,$$

mientras que para poder evaluar el operador hamiltoniano se toma la representación en expansión de Taylor, con respecto a δt , de la exponencial quedando

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp_j \langle q_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | 1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t \hat{H} | q_j \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)} (1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H(q_j, p_j)), \end{aligned}$$

donde $H(q_j, p_j)$ ya es función de los valores propios. Al hacer este procedimiento no permanece ningún operador, por lo que finalmente se obtiene

$$\langle q_{j+1} | e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t \hat{H}} | q_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_j}{2\pi\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t H(q_j, p_j) + \frac{i}{\hbar} p_j (q_{j+1} - q_j)}. \quad (1.49)$$

Haciendo esto para los N puntos intermedios que se insertaron dentro del intervalo de q_0 a q , es decir, agregando $N+1$ unos en términos de p a la ecuación (1.48), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0}{2\pi\hbar} \dots \frac{dp_N}{2\pi\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t H(q_0, p_0)} \dots e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t H(q_N, p_N)} \\ &\quad e^{\frac{i}{\hbar} p_N (q - q_N)} e^{\frac{i}{\hbar} p_{N-1} (q_N - q_{N-1})} \dots e^{\frac{i}{\hbar} p_1 (q_2 - q_1)} e^{\frac{i}{\hbar} p_0 (q_1 - q_0)}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Por lo que

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq_1 \dots dq_N \frac{dp_0 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}} e^{\frac{-i}{\hbar} \Delta t \sum_{j=0}^N H(q_j, p_j)} e^{\frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^N p_j (q_{j+1} - q_j)},$$

y expandiendo

$$q_{j+1} = q(t_{j+1}) = q(t_j + \Delta t)$$

con respecto a t_j , se obtiene

$$q_{j+1} = q(t_j) + \Delta t \dot{q}(t_j) = q_j + \Delta t \dot{q}_j.$$

Si hacemos tender los N puntos a infinitos, y definiendo por simplicidad

$$\mathcal{D}q = \lim_{N \rightarrow \infty} dq_1 \dots dq_N, \quad (1.51)$$

$$\mathcal{D}p = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{dp_0 \dots dp_N}{(2\pi\hbar)^{N+1}}, \quad (1.52)$$

el Kernel se vuelve

$$K(q, t; q_0, t_0) = \int_{q(t=0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt (p\dot{q} - H(q, p))}. \quad (1.53)$$

Recordando que el hamiltoniano es una transformada de Legendre (1.5) y la forma de la acción (1.2) finalmente se obtiene la representación conocida como *integral de trayectoria* o *integral funcional* [4]

$$K(q, t; q_0, t_0) = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle = \int_{q(t=0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} S}. \quad (1.54)$$

Cabe mencionar que si la parte cinética dentro del Hamiltoniano solo depende de p^2 y el potencial es $V = V(q)$ entonces la integral sobre $\mathcal{D}p$ puede hacerse explícitamente y la única integral funcional restante es sobre $\mathcal{D}q$. Por lo que la integral anterior puede escribirse en términos del lagrangiano integrándose únicamente sobre $\mathcal{D}q$.

1.5 PRODUCTO CRONOLÓGICO DE OPERADORES

Como se mencionó anteriormente hay distintas funciones de Green dependiendo del problema que se esté considerando, una de las más importantes es la relacionada con el propagador de Feynman. Para llegar a ella hay que considerar primero el elemento de matriz $\langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle$ donde $t_0 < t_j < t$ y añadiendo "unos" de la forma de (1.15), se obtiene

$$\begin{aligned} \langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_j \int_{-\infty}^{\infty} dq_N \dots dq_{j+1} \int_{-\infty}^{\infty} dq_{j-1} \dots dq_1 \\ &\quad \langle q, t | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle q(t_j) \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle, \end{aligned} \quad (1.55)$$

por lo que definiendo

$$\int \mathcal{D}q(\tau_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_j}^t d\tau_2 L} = \int dq_N \dots dq_{j+1} \langle q, t | q_N, t_N \rangle \dots \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle, \quad (1.56)$$

$$\int \mathcal{D}q(\tau_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_j} d\tau_1 L} = \int dq_{j-1} \dots dq_1 \langle q_j, t_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_0, t_0 \rangle, \quad (1.57)$$

y $\mathcal{D}q(\tau_1) dq_j \mathcal{D}q(\tau_2) = \mathcal{D}q(\tau)$ se llega a que

$$\langle q, t | \hat{q}(t_j) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_j) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}. \quad (1.58)$$

Siguiendo un proceso análogo para $t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$ se consigue

$$\langle q, t | \hat{q}(t_1) \hat{q}(t_2) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_2) q(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L} \quad (1.59)$$

$$= \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}, \quad (1.60)$$

donde $q(t_1)$ y $q(t_2)$ conmutan al ser variables reales, por lo que es equivalente a la expresión $\langle q, t | \hat{q}(t_2) \hat{q}(t_1) | q_0, t_0 \rangle$ en el caso de que $t_0 \leq t_2 \leq t_1 \leq t$. Entonces es conveniente definir el operador T que ordene cronológicamente los operadores de la siguiente manera

$$T\hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) = \begin{cases} \hat{q}(t_1)\hat{q}(t_2) & \text{si } t_1 > t_2 \\ \hat{q}(t_2)\hat{q}(t_1) & \text{si } t_1 < t_2, \end{cases} \quad (1.61)$$

así, en general

$$\langle q, t | T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau L}. \quad (1.62)$$

Esto nos es útil ya que la función de Green está dada por

$$G_n(t_1, \dots, t_n) = \langle 0 | T\hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle, \quad (1.63)$$

siendo $|0\rangle$ el estado base de nuestro sistema, cuya energía E_0 es la mínima posible; esto se puede generalizar a dos estados de vacío arbitrarios con distintos hamiltonianos, aunque no es usual [7].

Para poder obtener la función de Green explícitamente, partimos de $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle$ e introducimos un uno, pero esta vez discreto dado por

$$\mathbb{I} = \sum_n |n\rangle \langle n|, \quad (1.64)$$

donde $|n\rangle$ son los vectores propios del hamiltoniano, de la ecuación de eigenvalores $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \langle q, t | q_0, t_0 \rangle &= \sum_n \langle q | e^{\frac{-i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} | n \rangle \langle n | q_0 \rangle \\ &= e^{\frac{-i}{\hbar}(t-t_0)E_0} [\langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle + \sum_{n \geq 1} \langle q | n \rangle \langle n | q_0 \rangle e^{\frac{-i}{\hbar}(t-t_0)(E_n - E_0)}]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Haciendo el cambio de variable $(t - t_0) = \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_\eta = \mathcal{T}(1 - i\eta)$, donde η es real y mayor que cero, al tomar el límite cuando $\mathcal{T} \rightarrow \infty$ los términos en la exponencial decaen y solo queda el primer término $\langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle$. Al utilizar esto (1.65) se simplifica a

$$\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta \approx \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 \mathcal{T}_\eta}. \quad (1.66)$$

Ahora considerando dos tiempos t_a, t_b tales que $t_0 < t_a < t_1 < \dots < t_n < t_b < t$ se pueden hacer las siguientes aproximaciones

$$\langle q, t | q_b, t_b \rangle_\eta \approx \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_b \rangle e^{\frac{-i}{\hbar} E_0 (t - t_b) (1 - i\eta)}, \quad (1.67)$$

$$\langle q_a, t_a | q_0, t_0 \rangle_\eta \approx \langle q_a | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_a - t_0) (1 - i\eta)}, \quad (1.68)$$

tomando en cuenta siempre que $t_a - t_0$ y $t - t_b$, además de que $t_0 \rightarrow -\infty$ y $t \rightarrow \infty$.

Con lo que podemos escribir el término izquierdo de (1.62) como

$$\begin{aligned} \langle q, t | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_0, t_0 \rangle_\eta &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_b \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t - t_b) (1 - i\eta)} \\ &\langle q_b, t_b | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_a, t_a \rangle \langle q_a | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_a - t_0) (1 - i\eta)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dq_a \int_{-\infty}^{\infty} dq_b \langle q | 0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t (1 - i\eta)} \end{aligned} \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} &\langle 0 | q_b, t_b \rangle \langle q_b, t_b | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_a, t_a \rangle \langle q_a, t_a | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{\frac{i}{\hbar} E_0 t_0 (1 - i\eta)} \\ &= \langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t - t_0) (1 - i\eta)} \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle_\eta. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Además sabemos que $\langle q | 0 \rangle \langle 0 | q_0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t - t_0) (1 - i\eta)} = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta$, entonces tenemos

$$\langle q, t | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_0, t_0 \rangle_\eta = \langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle_\eta, \quad (1.71)$$

por lo que para obtener la función de green solo habrá que dividir entre $\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta$ y hacer tender los tiempos al infinito correspondiente. Esto es

$$\begin{aligned} G_n(t_1, \dots, t_n) &= \langle 0 | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | 0 \rangle_\eta \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \frac{\langle q, t | T \hat{q}(t_1) \dots \hat{q}(t_n) | q_0, t_0 \rangle_\eta}{\langle q, t | q_0, t_0 \rangle_\eta} \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty; t \rightarrow +\infty} \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) q(t_1) \dots q(t_n) e^{-\frac{i}{\hbar} S[q]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\frac{i}{\hbar} S[q]}} \quad (1.73)$$

donde

$$S[q] = \int_{t_0(1-i\eta)}^{t(1-i\eta)} d\tau L(q, \dot{q}) \quad (1.74)$$

y se satisface

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0 \quad (1.75)$$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} q(t_0) = 0. \quad (1.76)$$

Una aplicación del propagador de Feynman es en la teoría cuántica de campos, para la teoría ϕ^4 se muestra un ejemplo en el anexo.

En el siguiente capítulo se generalizará este concepto para poder incluir estados excitados.

1.6 FUNCIONAL GENERADORA DE LAS FUNCIONES DE GREEN

Todas las funciones de Green pueden obtenerse como derivadas funcionales de la funcional generatriz $Z[J]$ que está definida por:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (1-i\eta) d\tau [L(q,\dot{q}) + J(\tau)q(\tau)]}, \quad (1.77)$$

donde $J(\tau)$ es una fuente arbitraria. Ahora, esta expresión al expandir la segunda parte de la exponencial como sigue

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (1-i\eta) d\tau [L(q,\dot{q})]} \left[1 + i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau J(\tau)q(\tau) \right. \\ &\quad + \frac{i^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 d\tau_2 J(\tau_1)q(\tau_1)J(\tau_2)q(\tau_2) + \dots \\ &\quad \left. + \frac{i^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \dots d\tau_n J(\tau_1) \dots J(\tau_n)q(\tau_1) \dots q(\tau_n) \right]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Definimos

$$Z[0] = \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (1-i\eta) d\tau [L(q,\dot{q})]} \quad (1.79)$$

y además

$$G_1(\tau) = Z[0]^{-1} \int \mathcal{D}q(\tau) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (1-i\eta) d\tau [L(q,\dot{q})]} q[\tau] \quad (1.80)$$

por lo que el término n -ésimo queda como

$$\begin{aligned} &\frac{i^n}{n!} \int \mathcal{D}q(\tau) d\tau_1 \dots d\tau_n e^{i \int_{-\infty}^{\infty} (1-i\eta) d\tau [L(q,\dot{q})]} J(\tau_1) \dots J(\tau_n) q(\tau_1) \dots q(\tau_n) \\ &= Z[0] \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \dots d\tau_n J(\tau_1) \dots J(\tau_n) G_n(\tau_1, \dots, \tau_n), \end{aligned} \quad (1.81)$$

entonces

$$Z[J] = Z[0] \left[1 + i \int d\tau_1 J(\tau_1) G_1(\tau_1) + \dots + \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \dots d\tau_n J(\tau_1) \dots J(\tau_n) G_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \right] \quad (1.82)$$

$$= Z[0] \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d\tau_1 \dots d\tau_n J(\tau_1) \dots J(\tau_n) G_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \right]. \quad (1.83)$$

Utilizando las propiedades de la derivada funcional (que se encuentran en el apéndice) se calcula la primera derivada funcional de $Z[J]$

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(\tau_1)} = \int \mathcal{D}q(\tau) \frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \left[e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} \right] e^{i \int d\tau L(q,\dot{q})} \quad (1.84)$$

donde

$$\frac{\delta}{\delta J(\tau_1)} \left[e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} \right] = e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} i q(\tau_1), \quad (1.85)$$

entonces

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(\tau_1)} = \int \mathcal{D}q(\tau) i q(\tau_1) e^{i \int d\tau J(\tau)q(\tau)} e^{i \int d\tau L(q,\dot{q})}, \quad (1.86)$$

por lo que si se evalúa en $J = 0$

$$\left. \frac{\delta Z[J]}{\delta J(\tau_1)} \right|_{J=0} = \int \mathcal{D}q(\tau) i q(\tau_1) e^{i \int d\tau L(q, \dot{q})} \quad (1.87)$$

$$= i G_1(\tau_1) Z[0]. \quad (1.88)$$

Ahora la segunda derivada funcional

$$\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(\tau_1) \delta J(\tau_2)} = \int \mathcal{D}q(\tau) i q(\tau_1) \frac{\delta}{\delta J(\tau_2)} \left[e^{i \int d\tau J(\tau) q(\tau)} \right] e^{i \int d\tau L(q, \dot{q})} \quad (1.89)$$

$$= i^2 \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{i \int d\tau [J(\tau) q(\tau) + L(q, \dot{q})]}, \quad (1.90)$$

evaluando nuevamente en $J = 0$

$$\left. \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(\tau_1) \delta J(\tau_2)} \right|_{J=0} = i^2 \int \mathcal{D}q(\tau) q(\tau_1) q(\tau_2) e^{i \int d\tau L(q, \dot{q})} \quad (1.91)$$

$$= i^2 G_2(\tau_1, \tau_2) Z[0]. \quad (1.92)$$

Por lo que la función de Green de n puntos se obtiene de forma simple como sigue [4]

$$G_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{1}{i^n Z[0]} \frac{\delta^n}{\delta J(\tau_1) \dots \delta J(\tau_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (1.93)$$

A continuación se dará un ejemplo de como obtener el propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado.

1.6.1 Propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado

Para asentar estas ideas se realizará un ejemplo tomando utilizando el sistema del oscilador armónico generalizado

$$H(R, q, t) = \frac{1}{2} [Z \hat{p}^2 + Y(\hat{p} \hat{q} + \hat{q} \hat{p}) + X \hat{q}^2], \quad (1.94)$$

donde $R=(X,Y,Z)$ son parámetros externos. Para facilitar la resolución del problema utilizando las propiedades de los operadores de creación y de aniquilación en la base de energías, se hacen las transformaciones canónicas

$$\hat{q} = Z^{1/2} Q, \quad (1.95)$$

$$\hat{p} = Z^{-1/2} (P - YQ), \quad (1.96)$$

llevando al hamiltoniano a

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} [Z(Z^{-1/2}(P - YQ))^2 + Y(Q(P - YQ) + (P - YQ)Q) + X(Z^{1/2}Q)^2] \\ &= \frac{1}{2} [P^2 + w^2 Q^2], \end{aligned} \quad (1.97)$$

que es equivalente al de un oscilador armónico común con $m=1$, por lo que la energía es

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (1.98)$$

donde se definió

$$\omega := (\chi Z - \gamma^2)^{1/2}, \quad (1.99)$$

Además se tendrán los operadores de creación y aniquilación usuales

$$\hat{a} = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q - i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P \quad (1.100)$$

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q + i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P \quad (1.101)$$

por lo que los operadores Q y P dados en términos de los operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{Q} = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (1.102)$$

$$\hat{P} = i\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (1.103)$$

Nótese que el operador \hat{q} , en términos de estos operadores utilizando (1.95) y (1.102), queda

$$\hat{q} = \left(\frac{Z\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.104)$$

Para ilustrar como se obtiene la función de Green de dos puntos se realizará el procedimiento completo para este caso, siendo está dada por

$$G_2(t_1, t_2) = \langle 0 | T q(t_1) q(t_2) | 0 \rangle \quad (1.105)$$

$$= \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \hat{q}(1) \hat{q}(2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \hat{q}(2) \hat{q}(1) | 0 \rangle \quad (1.106)$$

y además, el *propagador de Feynman* se define como

$$G_F(t_1, t_2) = -iG_2(t_1, t_2) \quad (1.107)$$

$$= -i \langle 0 | T q(t_1) q(t_2) | 0 \rangle \quad (1.108)$$

$$= -i(\theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \hat{q}(1) \hat{q}(2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \hat{q}(2) \hat{q}(1) | 0 \rangle). \quad (1.109)$$

Es importante notar que a diferencia con (1.42), aquí se tienen dos secciones temporales marcadas por las distintas Heaviside [4].

Para resolver (1.105), primero se debe notar que los operadores $\hat{q}(1)$ y $\hat{q}(2)$ están a tiempos distintos, por lo que considerando $\langle 0 | \hat{q}(1) \hat{q}(2) | 0 \rangle$ y utilizando (1.30) se tiene

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{q}(1) \hat{q}(2) | 0 \rangle &= \langle 0 | e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_0) \hat{H}} \hat{q} e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_0) \hat{H}} e^{\frac{1}{\hbar} i(t_2-t_0) \hat{H}} \hat{q} e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_2-t_0) \hat{H}} | 0 \rangle \\
&= e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) E_0} \langle 0 | \hat{q} e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \hat{q} | 0 \rangle \\
&= e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) E_0} \langle 0 | \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | 0 \rangle \\
&= e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) E_0} \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) \langle 0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | 0 \rangle \\
&= e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) E_0} \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) \left[\langle 0 | \hat{a} e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \hat{a} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a} e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle 0 | \hat{a}^\dagger a e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \hat{a} | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}^\dagger e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle \right] \tag{1.110}
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando las siguientes propiedades del oscilador armónico y de los operadores de creación y aniquilación [6]:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \tag{1.111}$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \tag{1.112}$$

$$\langle n' | n \rangle = \delta_{n',n}. \tag{1.113}$$

al aplicarlas a (1.110) solo sobrevive el término de $\langle 0 | \hat{a} e^{-i(t_1-t_2)\hat{H}} \hat{a}^\dagger | 0 \rangle$ llegando a

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{q}(1) \hat{q}(2) | 0 \rangle &= e^{\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) E_0} \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) \langle 1 | e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) \hat{H}} | 1 \rangle \\
&= \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-\frac{1}{\hbar} i(t_1-t_2) (E_1 - E_0)} \\
&= \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-i\omega(t_1-t_2)}. \tag{1.114}
\end{aligned}$$

Utilizando el resultado anterior en (1.105) se obtiene

$$G_2(t_1, t_2) = \theta(t_1 - t_2) \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-i\omega(t_1-t_2)} + \theta(t_2 - t_1) \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-i\omega(t_2-t_1)}. \tag{1.115}$$

Ahora, para la parte de la función de Heaviside, tomando su representación del límite por la derecha (1.43)

$$\begin{aligned}
\theta(t) \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-i\omega t} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} t\tau}}{\tau + i\epsilon} \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-it\omega} \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2w} \frac{1}{\tau + i\epsilon} e^{-it(\frac{\tau}{\hbar} + \omega)}, \tag{1.116}
\end{aligned}$$

y al hacer el siguiente cambio de variable $W = \frac{\tau}{\hbar} + \omega \Rightarrow \tau = \hbar(W - \omega)$ se llega a

$$\theta(t) \left(\frac{Z\hbar}{2w} \right) e^{-i\omega t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar - \omega\hbar + i\epsilon} e^{-itW} \tag{1.117}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar - \omega\hbar + i\epsilon} e^{-itW}. \tag{1.118}$$

Por otra parte, de manera similar

$$\begin{aligned}\theta(-t)\left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)e^{iwt} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{e^{\frac{i}{\hbar}t\tau}}{\tau + i\epsilon} \left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)e^{iwt} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{2w} \frac{1}{\tau + i\epsilon} e^{it\left(\frac{\tau}{\hbar} + w\right)},\end{aligned}\quad (1.119)$$

en este caso se hace el cambio de variable $W = -\left(\frac{\tau}{\hbar} + w\right) \Rightarrow \tau = -\hbar(W + w)$ (cabe mencionar que W es un índice mudo), se obtiene

$$\theta(-t)\left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)e^{iwt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} -\frac{dW}{2w} \frac{1}{-\hbar(W + w) + i\epsilon} e^{it\left(\frac{-\hbar(W-w)}{\hbar} + w\right)} \quad (1.120)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar + w\hbar - i\epsilon} e^{-itW}. \quad (1.121)$$

Considerando $t = t_1 - t_2 \Rightarrow -t = t_2 - t_1$ para (1.118) y (1.120) respectivamente, se deduce que los términos de (1.115) son justamente

$$\theta(t_1 - t_2)\left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)e^{-iwt(t_1 - t_2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar - w\hbar + i\epsilon} e^{-i(t_1 - t_2)W}, \quad (1.122)$$

$$\theta(t_2 - t_1)\left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)e^{-iwt(t_2 - t_1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar + w\hbar - i\epsilon} e^{i(t_2 - t_1)W}, \quad (1.123)$$

por lo que sumando estas ecuaciones

$$\begin{aligned}G_2(t_1, t_2) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar - w\hbar + i\epsilon} e^{-i(t_1 - t_2)W} \\ &\quad + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} \frac{1}{W\hbar + w\hbar - i\epsilon} e^{-i(t_1 - t_2)W} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} e^{-i(t_1 - t_2)W} \left[\frac{1}{W\hbar - w\hbar + i\epsilon} - \frac{1}{W\hbar + w\hbar - i\epsilon} \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW}{2w} e^{-i(t_1 - t_2)W} \left[\frac{2w\hbar - 2i\epsilon}{(W\hbar - w\hbar + i\epsilon)(W\hbar + w\hbar - i\epsilon)} \right].\end{aligned}\quad (1.124)$$

Si se considera

$$(W\hbar - w\hbar + i\epsilon)(W\hbar + w\hbar - i\epsilon) \approx (W\hbar)^2 - (w\hbar)^2 + i\epsilon \quad (1.125)$$

y

$$2(w\hbar - i\epsilon) \approx 2w \quad (1.126)$$

se llega finalmente a la expresión final de la cual se obtiene el propagador de Feynman

$$G_2(t_1, t_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{iZ\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{e^{-i(t_1 - t_2)W}}{(W\hbar)^2 - (w\hbar)^2 + i\epsilon} \equiv i\Delta_{\text{FOAG}}(t_1 - t_2). \quad (1.127)$$

Definimos el propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado como:

$$\Delta_{\text{FOAG}}(t_1 - t_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{Z\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{e^{-i(t_1 - t_2)W}}{(W\hbar)^2 - (w\hbar)^2 + i\epsilon}, \quad (1.128)$$

$$\Delta_{\text{FOAG}}(t_2 - t_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{Z\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dW \frac{e^{-i(t_2 - t_1)W}}{(W\hbar)^2 - (w\hbar)^2 + i\epsilon}. \quad (1.129)$$

Además de los temas ya mencionados se requieren otros más especializados del área de información cuántica, que serán vistos en el siguiente capítulo.

INFORMACIÓN CUÁNTICA

Para poder extraer la información de un sistema físico es indispensable primero conocer como se codifica en general. Dentro de la mecánica cuántica la estructura fundamental que codifica los aspectos geométricos de los sistemas es el Tensor Geométrico Cuántico (TGC). A lo largo de esta sección se darán a conocer las ideas principales que llevan naturalmente a este concepto, haciendo énfasis en el significado de su parte imaginaria, la Curvatura de Berry (CB), y su parte real conocida como el Tensor Métrico Cuántico (TMC).

2.1 CUBITS

El *bit* es el concepto fundamental de la computación clásica y la teoría de información clásica. La computación cuántica se construye sobre un concepto análogo, el bit cuántico (*quantum bit* en ingles), o cubit (*qubit*).

Tal como un bit clásico tiene un estado ya sea 0 o 1, un cubit también tiene estados posibles similares, que son $|0\rangle$ y $|1\rangle$. La diferencia entre un bit y un cubit es que este último además de poder encontrarse en los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, puede estar en cualquier combinación lineal de ellos tomándolos como base. Estos estados son llamados *superposiciones* y son de la forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1)$$

donde α y β son números complejos.

Es posible examinar un bit para determinar si se encuentra en un estado 0 o 1. Para un cubit, no es posible examinarlo para determinar su estado cuántico, esto es, los valores de α y β . En su lugar, por los principios de la mecánica cuántica, solo podemos obtener información aún más restringida del estado cuántico. Cuando medimos un cubit podemos obtener el resultado 0 con probabilidad $|\alpha|^2$, o 1 con probabilidad $|\beta|^2$. Naturalmente $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, ya que la suma de las probabilidades debe dar la unidad. Geométricamente, podemos interpretar esto, como la condición de que el estado del cubit esté normalizado a 1 (véase la figura 2.1).

Un bit clásico es como una moneda, puede encontrarse cara boca arriba o cruz. Para monedas imperfectas, puede que haya estados intermedios como que se encuentre balanceada sobre el borde, pero estos casos pueden descartarse en el caso ideal. En contraste, un cubit puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$, hasta que es observado. Es importante enfatizar, que, una vez que el cubit es medido, solo puede dar los resultados 0 o 1 como resultado de dicha medición

de manera probabilista.

A pesar de las peculiaridades, los cubits son marcadamente reales, en el sentido que su existencia y comportamiento han sido validados extensivamente por experimentos. Algunos ejemplos de sistemas físicos descritos mediante cubits son la polarización de un fotón, la alineación del espín en un campo magnético uniforme y dos estados de un electrón orbitando un átomo.

Considerando que $\alpha = r_0 e^{i\varphi_0}$ y $\beta = r_1 e^{i\varphi_1}$, donde r_i son las amplitudes y φ_i los ángulos. Entonces α y β pueden ser representados por un círculo unitario imaginario. Además, en el caso de cubits, el estado cuántico no cambia si se multiplica por un número de norma unitaria, esto es

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi_0} |\psi\rangle, \quad (2.2)$$

entonces un estado equivalente a (2.1) sería

$$e^{-i\varphi_0} (r_0 e^{i\varphi_0} |0\rangle + r_1 e^{i\varphi_1} |1\rangle) = r_0 |0\rangle + r_1 e^{i(\varphi_1 - \varphi_0)} |1\rangle, \quad (2.3)$$

por lo que ahora se tienen únicamente 3 parámetros, r_0 , r_1 y φ donde $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Cabe resaltar en este punto que solo es necesario conocer la fase relativa entre ambos estados, no una fase global.

Pero se tiene una condición extra, como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ y esto implica que $r_0^2 + r_1^2 = 1$, reduciendo el número de incógnitas a solo 2. Utilizando la representación angular de esta igualdad y definiendo $r_0 = \cos(\theta)$ y $r_1 = \sin(\theta)$ se obtiene una representación equivalente de $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta) |1\rangle. \quad (2.4)$$

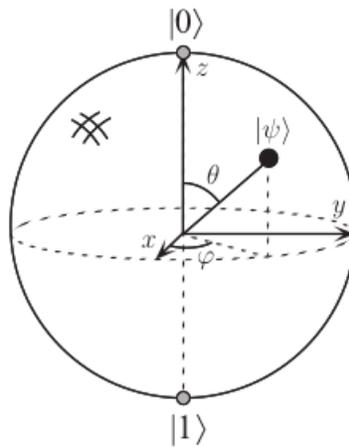


Figura 2.1: Representación del cubit como una esfera de Bloch.

Esta expresión define una esfera unitaria en un espacio tridimensional conocida como *esfera de Bloch* y provee una manera útil de visualizar el estado de un solo cubit. Sin embargo, es importante siempre recordar que esta intuición es limitada debido a que no hay generalización simple conocida de la esfera de Bloch para sistemas de múltiples cubits.

2.1.1 ¿Cuánta información codifica un cubit?

Paradójicamente existen infinitos puntos dentro sobre la esfera unitaria, así que en principio uno podría almacenar un texto completo Shakespeare en la expansión binaria infinita de θ . Sin embargo, esta conclusión resulta engañosa debido al comportamiento del cubit, ya que al hacerse la medición del cubit solo se tendrán como resultados posibles 0 o 1.

Aún más, una medición **cambia** el estado del cubit, colapsándolo de su estado de superposición en el que se encontraba a uno particular consistente con los resultados de la medición. Por ejemplo, si la medición de $|+\rangle$ da como resultado 0, entonces el estado del cubit después de la medición será justamente $|0\rangle$. La razón de este comportamiento es desconocida. Este colapso de la función de onda es uno de los postulados fundamentales de la mecánica cuántica.

La parte relevante es que al hacer una sola medición uno obtiene un único bit de información acerca del estado del cubit, por lo que se resuelve esta paradoja de "información infinita". Resulta que solo si se midieran infinitos cubits idénticamente preparados se podrían determinar α y β para un cubit en el estado dado por (2.1).

Pero una pregunta aún más interesante es: *cuánta información es representada por un cubit si no lo medimos?* Esta es una pregunta engañosa, porque ¿cómo uno cuantifica información si no es posible medirla? Sin embargo existe algo conceptualmente importante aquí, porque cuando en la Naturaleza evoluciona un sistema cuántico aislado, aparentemente se toma registro de todas las variables que describen el estado, como α y β . En un sentido, dentro del estado del cubit, se tiene gran cantidad de "información escondida". Y de manera aún más interesante, el potencial utilitario de esta información "extra" crece exponencialmente con el número de cubits [10].

2.2 ESTADOS PUROS Y FIDELIDAD CUÁNTICA

Un *estado puro* es aquel que solo puede tener valores de probabilidad 0 o 1. El conjunto completo de estados incluye tanto puros como mixtos. Para formar los estados mixtos primero se escriben todos los estados puros como operadores, definiendo los *operadores de proyección*

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.5)$$

donde hemos asumido que el vector de estado está normalizado a 1. Estos pueden representarse bajo una matriz hermitiana con valores propios no negativos, de traza unitaria y rango uno, dicho de otro modo es un operador de proyección al subespacio lineal definido por el vector de estado original.

Ahora tomamos la combinación convexa de K estados puros, obteniendo la expresión de la forma

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^K p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.6)$$

esta es la *matriz de densidad*, escrita como una combinación convexa de estados puros.

Una manera para extraer afirmaciones físicas de este formalismo es asociar los operadores de proyección (2.5) con preguntas elementales de "sí" o "no". Con este punto de vista, la *probabilidad de transición* $|\langle \psi | \phi \rangle|^2$ es la probabilidad de que un sistema en el estado $|\phi\rangle$ responda "sí" a la pregunta representada por $|\psi\rangle$, o al inverso, la expresión es simétrica en $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$.

Los operadores hermitianos pueden pensarse como sumas pesadas de operadores de proyección, donde esos operadores de proyección proyectan sobre los eigenvectores del operador. También pueden ser pensados como variables aleatorias. Con lo que uno termina es con la asociación entre observables físicas, o mediciones, y operadores hermitianos de tal forma que los posibles resultados de una medición se encuentren en una correspondencia uno a uno con los eigenvalores del operador, de tal forma que el valor de expectación de la medición es

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{A}] \quad (2.7)$$

cuando el estado es puro, esto se reduce a [11]

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle. \quad (2.8)$$

Teniendo dos estados $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ el traslape entre ellos es

$$f(\psi', \psi) = \langle \psi' | \psi \rangle \quad (2.9)$$

en información cuántica el traslape usualmente denota la probabilidad de transición de un estado a otro. Mientras que desde el punto de vista de información cuántica, el traslape puede medir la similaridad (o cercanía) entre ambos estados. Esto es que el traslape de la unidad si los dos estados son exactamente el mismo y 0 si son ortogonales [2].

Dicha interpretación puede utilizarse para cuantificar la información perdida durante un proceso haciendo el traslape entre el estado de entrada y el de salida. Sin embargo, una diferencia de fase global podría alterar el traslape, por ello se requiere una forma de medir distancias en la que esto no suceda, a esta forma de medir distancias se conoce como *fidelidad cuántica* definida como

$$F(\psi, \psi') = |\langle \psi | \psi' \rangle| \quad (2.10)$$

donde $|\psi\rangle$, $|\psi'\rangle$ son los estados de entrada y salida respectivamente y ambos están normalizados. La fidelidad también tiene una interpretación geométrica, pues al igual que en álgebra lineal en donde el producto interior de dos vectores es $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\theta)$, siendo a y b las magnitudes de sus respectivos vectores y θ el ángulo entre ellos. De igual manera en mecánica cuántica, un estado puro es un vector en el espacio de Hilbert de modo que la fidelidad entre dos estados representa

el ángulo entre ellos [2] [12].

La fidelidad cumple los siguientes axiomas

$$0 \leq F(\psi', \psi) \leq 1, \quad (2.11)$$

$$F(\psi', \psi) = F(\psi, \psi'), \quad (2.12)$$

$$F(U\psi', U\psi) = F(\psi, \psi'), \quad (2.13)$$

$$F(\psi_1 \otimes \psi_2, \psi'_1 \otimes \psi'_2) = F(\psi'_1, \psi_1)F(\psi'_2, \psi_2), \quad (2.14)$$

donde U denota una transformación unitaria y ψ_1, ψ_2 los estados de los subsistemas. Como se mencionó anteriormente, para estados puros la diferencia global de fase puede afectar el traslape más no a la fidelidad.

La fidelidad cuántica entre dos estados mixtos (ρ, ρ') está definida como

$$F(\rho, \rho') = \text{tr} \sqrt{\rho^{1/2} \rho' \rho^{1/2}}, \quad (2.15)$$

aquí las ρ s son semi-positivas definidas y normalizadas, i.e., $\text{tr} \rho = \text{tr} \rho' = 1$.

Esta definición satisface las propiedades esperadas de la fidelidad, estas son los axiomas dados anteriormente. Cabe resaltar que evaluar la fidelidad entre dos estados mixtos arbitrarios no es fácil, sin embargo, hay ciertos casos útiles

1. Si ambos estados son puros

$$F(\rho, \rho') = |\langle \psi' | \psi \rangle|, \quad (2.16)$$

2. Si un estado es puro, i.e., $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, entonces

$$F(\rho, \rho') = \sqrt{\langle \psi | \rho' | \psi \rangle} \quad (2.17)$$

que es simplemente la raíz cuadrada del valor de expectación de ρ'

3. Si ambos estados son diagonales en la misma base, tal como un estado en equilibrio térmico, la fidelidad (o fidelidad clásica) puede ser calculada como

$$F(\rho, \rho') = \sum_j \sqrt{\rho_{jj} \rho'_{jj}}. \quad (2.18)$$

Aunque la fidelidad por si misma no es una métrica, puede ser utilizada para definir las [2].

Regularmente la evolución de los sistemas cuánticos suele ser mediante procesos sumamente lentos, sin variación en la energía del sistema por lo que es importante estudiar el concepto de evolución adiabática.

2.3 EVOLUCIÓN ADIABÁTICA EN MECÁNICA CUÁNTICA

La noción de un proceso adiabático ha tenido un lugar importante en la historia de la física. El teorema adiabático de la mecánica cuántica menciona que todo sistema físico permanecerá en su eigenestado si la perturbación dada que actúa sobre él ocurre de manera lo suficientemente lenta y si hay un espaciamiento entre el eigenvalor y el resto del espectro del hamiltoniano. En pocas palabras, describe el comportamiento a largo plazo de las soluciones de la ecuación de Schrödinger con un hamiltoniano que va evolucionando lentamente en el tiempo.

Sea un hamiltoniano autoadjunto dependiente del tiempo $H = H(t)$. Para simplificar la discusión se asumirá que el espectro de H es discreto y no degenerado para todo t . Entonces

$$\hat{H}(t) |n(t)\rangle = E_n(t) |n(t)\rangle, \quad (2.19)$$

y escogemos los eigenvectores dependientes del tiempo $|n(t)\rangle$ tales que

$$\langle n(t) | m(t) \rangle = \delta_{n,m}. \quad (2.20)$$

Claramente los eigenvectores $|n(t)\rangle$ no son definidos de manera única, entonces pues es posible realizar la siguiente transformación de fase dependiente del tiempo:

$$|n(t)\rangle \rightarrow |n'(t)\rangle = e^{i\lambda_n(t)} |n(t)\rangle, \quad (2.21)$$

con funciones λ_n arbitrarias que van de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Esto es una transformación de norma y la física debe ser invariante de norma, i.e., la física no depende de la elección particular de los eigenvectores $|n(t)\rangle$.

Supóngase que el estado inicial del sistema es un eigenvector de $H(0)$, un $\psi(0) = |n(0)\rangle$ para algún n . Entonces el teorema adiabático dice que si el hamiltoniano $H(t)$ cambia en el tiempo lo "suficientemente lento" entonces a "una buena aproximación" $\psi(t) = e^{i\alpha(t)} |n(t)\rangle$, esto es, durante la evolución adiabática $\psi(t)$ permanece en el n -ésimo eigenespacio de $H(t)$. Para tener una teoría matemática rigurosa se definirá en la siguiente parte como definir cambios "suficientemente lentos" y lo que "una buena aproximación" significa.

El estado de un sistema al tiempo t puede ser expandido en la base ortonormal $|n(t)\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau} |m(t)\rangle, \quad (2.22)$$

donde hemos separado un factor estándar dinámico de fase $e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_m(\tau) d\tau}$.

La ecuación de Schrödinger implica las siguientes ecuaciones para los coeficientes $c_m(t)$

$$\begin{aligned} \dot{c}_m &= -c_m(t) \langle m(t) | \frac{d}{dt} |m(t)\rangle \\ &\quad - \sum_{k \neq m} c_k \langle m(t) | \frac{d}{dt} |k(t)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_m(\tau) - E_k(\tau)) d\tau}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Veamos que al diferenciar con respecto al tiempo (2.19) se tiene

$$\hat{H} |k\rangle + \hat{H} |\dot{k}\rangle = \dot{E} |k\rangle + E |\dot{k}\rangle, \quad (2.24)$$

y luego multiplicando por $\langle m|$, obtenemos

$$\langle m|\dot{k}\rangle = \frac{1}{E_k - E_m} \langle m|\hat{H}|k\rangle, \quad (2.25)$$

donde por simplicidad, la dependencia explícita de \hat{H} y sus correspondientes eigenvectores han sido suprimidos. Ahora es el momento de la expansión adiabática: La evolución generada por \hat{H} es considerada adiabática si

$$\left| \langle m|\hat{H}|k\rangle \right| \ll \frac{|E_k - E_m|}{\Delta T_{km}}, \quad (2.26)$$

donde T_{km} es la transición temporal característica entre los estados k y m . Esto significa que los cambios de \hat{H} son lentos comparados con la escala natural de tiempo de nuestro sistema, tal como es definido por la transición de estados entre eigenestados de energía. Claramente, en el límite adiabático $\Delta T_{km} \rightarrow \infty$, los cambios de \hat{H} son infinitamente lentos

$$\left| \langle m|\hat{H}|k\rangle \right| \rightarrow 0, \quad (2.27)$$

y por lo tanto

$$\langle m|\dot{k}\rangle \rightarrow 0, \quad \text{para } k \neq m. \quad (2.28)$$

Entonces en el límite adiabático, el sistema de ecuaciones dado por (2.23) se simplifica a

$$\dot{c}_m = c_m \langle m|\dot{m}\rangle, \quad (2.29)$$

esto junto a la condición inicial $c_m(0) = \delta_{n,m}$. Ahora del teorema adiabático (puede revisarse a detalle en [14]) se sigue naturalmente: $c_m(t) = 0$ para $m \neq n$ y la fórmula (2.22) implica

$$\psi(t) = c_n(t) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau} |n(t)\rangle, \quad (2.30)$$

i.e., durante la evolución adiabática $\psi(t)$ permanece en el n -ésimo eigensubespacio de $\hat{H}(t)$. El paso final es calcular $c_n(t)$. Es claro de (2.29) que c_n es simplemente un factor de fase

$$c_n(t) = e^{i\phi_n(t)}, \quad (2.31)$$

donde la fase $\phi_n(t)$ satisface

$$\dot{\phi}_n = i \langle n|\dot{n}\rangle. \quad (2.32)$$

Por casi 50 años esta fase adicional $\phi_n(t)$ fue completamente ignorada. El argumento era el siguiente: Usando la libertad de norma (2.21) al escoger la $|n(t)\rangle$, es posible tomar otro eigenvector $|n'(t)\rangle$ definido por

$$|n'(t)\rangle = e^{i\phi_n(t)} |n(t)\rangle. \quad (2.33)$$

de tal forma que el eigenestado transformado satisface

$$\langle n' | \frac{d}{dt} | n' \rangle = 0. \quad (2.34)$$

El eigenvector $|n'(t)\rangle$ que satisface la ecuación anterior se dice que está en la *norma Born-Fock*. Usando $|n'\rangle$ en lugar de $|n\rangle$ la fórmula (2.30) puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\psi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(\tau) d\tau} |n'(t)\rangle, \quad (2.35)$$

i.e., sin la norma adicional. De esta forma la fase adicional es completamente eliminada. Sin embargo como se verá en la siguiente sección, existen situaciones físicas de importancia donde el procedimiento de remover la fase adicional $\phi_n(t)$ falla. En estos casos la fase adicional no puede ser ignorada y adquiere un significado físico [14].

2.4 FASE DE BERRY

La fase de Berry es la fase extra adquirida por la función de onda cuando el sistema pasa por un proceso adiabático a lo largo de una curva cerrada en el espacio de parámetros y puede ser entendida como la integral de una curvatura, la llamada curvatura de Berry. De manera interesante, está conectada con las transiciones de fase cuánticas [13]. Para entender este concepto es conveniente iniciar con la diferencia entre las fases relativas y globales de los estados cuánticos.

2.4.1 Fases relativas y globales

En la representación estándar de la mecánica cuántica, los estados cuánticos puros son representados por vectores en un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H} . Cada vector $\psi \in \mathcal{H}$ describe un estado mediante el conjunto de sus valores esperados

$$A \rightarrow \frac{\langle \psi | A | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (2.36)$$

donde A es un operador auto adjunto dentro de \mathcal{H} representando alguna cantidad física. Por esta razón, dos vectores ψ y ϕ describen el mismo estado físico si y solo si son linealmente dependientes, i.e., $\psi = \lambda\phi$, con $\lambda \in \mathbb{C}$. Si normalizamos los vectores de estado, por ejemplo si tomamos $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, aun así existe la libertad de escoger el factor de fase global $e^{i\alpha}$. Dos vectores de estado normalizados son equivalentes físicamente si:

$$\psi \sim \phi \iff \psi = e^{i\alpha} \phi. \quad (2.37)$$

Por esto, usualmente es dicho que el factor de fase, $e^{i\alpha}$, no tiene un significado físico. Podemos representar estados cuánticos puros como proyectores unidimensionales en \mathcal{H} :

$$\psi \rightarrow P_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (2.38)$$

claramente

$$\psi \sim \phi \iff P_\psi = P_\phi. \quad (2.39)$$

Sin embargo, sabemos que es la fase la que controla el efecto clave de la mecánica cuántica, la interferencia cuántica. Este efecto está gobernado por la *fase relativa*. Si tenemos dos vectores de estado normalizados ψ y ϕ tales que $\psi = e^{i\alpha}\phi$, entonces se dice que α es la fase relativa entre ψ y ϕ . La fase relativa, o equivalentemente, la diferencia de fase, si tiene significado físico y por lo tanto puede ser medida. La superposición de dos estados $\psi \sim \phi$ difiriendo en fase por α dirige a la siguiente fórmula de interferencia:

$$I \propto |1 + e^{i\alpha}|^2 = 2(1 + \cos(\alpha)) = 4\cos^2(\alpha/2), \quad (2.40)$$

lo que permite medir α . Es importante resaltar la diferencia entre diferencias de fase globales y relativas. En el experimento de interferencia las diferencias de fase globales siguen siendo desconocidas y sin importancia. Es evidente que $e^{i\lambda}\psi$ y $e^{i\lambda}\phi$ tendrán la misma interferencia que ψ y ϕ . Solo la fase relativa importa.

2.4.2 Derivación estándar

Considerando la curva C en una variedad de parámetros externos M :

$$t \rightarrow x_t \in M, \quad (2.41)$$

y la evolución adiabática del estado cuántico descrito por el hamiltoniano dependiente de dichos parámetros $H = H(t)$ a lo largo de la curva C . Entonces el hamiltoniano depende únicamente del tiempo mediante la dependencia temporal de los parámetros externos: $H(t) = H(x_t)$. Supóngase que para cualquier $x \in M$ el hamiltoniano $H(x)$ tiene puramente un espectro discreto, i.e.,

$$H(x)|n(x)\rangle = E_n(x)|n(x)\rangle, \quad (2.42)$$

con

$$\langle n(x)|m(x)\rangle = \delta_{n,m}. \quad (2.43)$$

Además, asumiendo que los eigenvectores $|n(x)\rangle$ tienen valores únicos (como funciones de $x \in M$), esto quiere decir que se asumirá la existencia del mapeo

$$M \ni x \rightarrow |n(x)\rangle \in \mathcal{H} \quad (2.44)$$

con \mathcal{H} siendo el espacio de Hilbert del sistema. Este mapeo no necesita ser definido globalmente en M , por lo que se asume su existencia solo localmente. Para encontrar la evolución adiabática se aplicará la "maquinaria adiabática" descrita en la sección anterior. Asumamos que el n -ésimo eigenvalor $E_n(x)$ no es degenerado y sea $P_n(x) := |n(x)\rangle\langle n(x)|$ el correspondiente proyector unidimensional sobre el n -ésimo eigensubespacio $\mathcal{H}_n(x)$, el cual escribimos

$$\mathcal{H}_n(x) := \text{Rango}(P_n(x)) = \{\alpha|n(x)\rangle \mid \alpha \in \mathbb{C}\}. \quad (2.45)$$

Los eigenvectores $|n(x)\rangle$ no son definidos de manera única por la ecuación de Schrödinger; es posible cambiar arbitrariamente la fase de $|n(x)\rangle$:

$$|n(x)\rangle \rightarrow |n'(x)\rangle = e^{i\alpha_n(x)} |n(x)\rangle, \quad (2.46)$$

donde $\alpha_n : M \rightarrow \mathbb{R}$. Esta transformación de fase no cambia $P_n(x)$. Supóngase que $\psi(0) = |n(x_0)\rangle$. Debido al teorema adiabático, $\psi(t)$ permanece en el n -ésimo eigenespacio de $\mathcal{H}(x_t)$ durante la evolución adiabática, i.e.,

$$\psi(t) \in \mathcal{H}_n(x_t). \quad (2.47)$$

Por ello, si la evolución es cíclica, i.e., la curva C es cerrada ($x_0 = x_T$ para algún $T > 0$), entonces $\psi(0)$ y $\psi(T)$ pertenecen ambos a $\mathcal{H}_n(x_0)$ por lo que solo es posible que difieran por un factor de fase:

$$\psi(T) = e^{i\rho} \psi(0). \quad (2.48)$$

Una primera suposición de la fase γ podría ser

$$\rho = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(t) dt, \quad (2.49)$$

pero, tal como mostró Berry [3], esto es incorrecto. Existe un componente adicional con un origen puramente geométrico. Depende de la geometría de la variedad M y el circuito C por si mismo. Para encontrarlo es necesario notar primero que por (2.30) y (2.31), $\psi(t)$ y $|n(x_t)\rangle$ difieren por un factor de fase dependiente del tiempo:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau} e^{i\phi_n(t)} |n(x_t)\rangle, \quad (2.50)$$

donde la ecuación de Schrödinger implica la siguiente ecuación para la función ϕ_n :

$$\dot{\phi}_n = i \langle n | \dot{n} \rangle, \quad (2.51)$$

(aquí por simplicidad se ha omitido el argumento de $|n\rangle$). Esta fórmula define la siguiente uno-forma sobre M :

$$A^{(n)} := i \langle n | dn \rangle, \quad (2.52)$$

o en coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) , $A^{(n)} = A_k^{(n)} dx^k$, con

$$A_k^{(n)} := i \langle n | \partial_k n \rangle. \quad (2.53)$$

Es importante notar que $\langle n | dn \rangle$ es puramente imaginario, por lo que es posible escribir

$$A^{(n)} = -\text{Im} \langle n | dn \rangle. \quad (2.54)$$

Ahora, integrando

$$\phi_n(t) = i \int_0^t \langle n(\tau) | \dot{n}(\tau) \rangle d\tau = \int_C A^{(n)}, \quad (2.55)$$

donde se integra la uno-forma $A^{(n)}$ a lo largo de la curva C entre x_0 y x_t . Esto muestra que (2.49) debe ser aumentada por la siguiente cantidad geométrica:

$$\rho_n(C) := \oint_C A^{(n)}, \quad (2.56)$$

i.e., el cambio de fase total ρ se separa en dos partes:

$$\rho = \underbrace{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T E_n(\tau) d\tau}_{\text{fase dinámica}} + \underbrace{\rho_n(C)}_{\text{fase geométrica}}. \quad (2.57)$$

Esta cantidad geométrica $\rho_n(C)$ define la llamada *fase de Berry*, correspondiendo a la evolución cíclica y adiabática a lo largo de C . Usando el teorema de Stokes se puede escribir la fase de Berry como

$$\rho_n(C) = \int_{\Sigma} F^{(n)}, \quad (2.58)$$

donde Σ es una subvariedad bidimensional en M tal que $\partial\Sigma = C$, y

$$F^{(n)} = dA^{(n)} = -\text{Im} \langle dn | \wedge | dn \rangle. \quad (2.59)$$

En coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) sobre M se encuentra que

$$F^{(n)} = \frac{1}{2} (\partial_i A_j^{(n)} - \partial_j A_i^{(n)}) dx^i \wedge dx^j \quad (2.60)$$

$$= \frac{1}{2} F_{ij}^{(n)} dx^i \wedge dx^j, \quad (2.61)$$

con

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im} (\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle) \quad (2.62)$$

siendo esta la *curvatura de Berry*. Pero no es el único factor importante en el estudio de la mecánica cuántica desde un punto de vista geométrica, de hecho proviene de un ente más fundamental, el tensor geométrico cuántico.

2.5 TENSOR GEOMÉTRICO CUÁNTICO Y EL TENSOR MÉTRICO CUÁNTICO

La métrica de información cuántica (MIC) o también conocida como el Tensor Métrico Cuántico (nótese que no es el Tensor Geométrico Cuántico) está definida en el espacio de parámetros y mide la distancia entre dos estados correspondientes a parámetros infinitesimalmente diferentes, además las geodésicas inducidas por la métrica pueden indicar la presencia de transiciones de fase cuánticas [13][1].

Tal como se vio en la sección anterior, la evolución adiabática da lugar a la dos-forma $F^{(n)} \in \Lambda^2(M)$ en la variedad de parámetros externos M . Está definida por (2.59) que es

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im}(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle).$$

Este tensor antisimétrico es invariante ante transformaciones de norma (2.46) y define la curvatura de Berry correspondiente n -ésimo haz espectral. Existe otro tensor en M que es naturalmente invariante de norma, el llamado *Tensor Geométrico Cuántico*, definido por

$$G_{ij}^{(n)} := \langle \partial_i n | (\mathbb{I} - |n\rangle \langle n|) | \partial_j n \rangle \quad (2.63)$$

$$= \langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_i n | n \rangle \langle n | \partial_j n \rangle. \quad (2.64)$$

Además $G_{ij}^{(n)}$ es invariante de norma y hermitiano, i.e.,

$$G_{ij}^{(n)} = G_{ji}^{(n)*}, \quad (2.65)$$

y la parte imaginaria de $G^{(n)}$ reproduce $F^{(n)}$:

$$\text{Im}G_{ij}^{(n)} = -\frac{1}{2}F_{ij}^{(n)}. \quad (2.66)$$

Definiendo

$$g_{ij}^{(n)} := \text{Re}G_{ij}^{(n)} \quad (2.67)$$

$$= \text{Re}(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_i n | n \rangle \langle n | \partial_j n \rangle) \quad (2.68)$$

que es un tensor simétrico en M . Resulta que $g_{ij}^{(n)}$ permite medir distancias a lo largo de curvas en el espacio de parámetros. Por esta razón es llamado el *Tensor Métrico Cuántico*. Para ver por qué es esto, habrá que considerar dos estados, $|n(x)\rangle$ y $|n(x+dx)\rangle$. Se definirá la distancia $\Delta(x, dx)$ entre los puntos x y $x+dx$ en M por

$$\Delta^2(x, x+dx) = 1 - |\langle n(x) | n(x+dx) \rangle|^2. \quad (2.69)$$

Teniendo una función de distancia se habrá de considerar el correspondiente tensor métrico

$$\Delta^2(x, x+dx) = h_{ij}(x) dx^i dx^j. \quad (2.70)$$

Para mostrar que $h_{ij} = g_{ij}^{(n)}$ considérese la expansión de Taylor de $|n(x+dx)\rangle$

$$|n(x+dx)\rangle = |n(x)\rangle + |\partial_i n(x)\rangle dx^i + \frac{1}{2} |\partial_i \partial_j n(x)\rangle dx^i dx^j + \dots, \quad (2.71)$$

de donde se sigue que

$$\langle n(x) | n(x+dx) \rangle = 1 + \langle n(x) | \partial_i n(x) \rangle dx^i + \frac{1}{2} \langle n(x) | \partial_i \partial_j n(x) \rangle dx^i dx^j + \dots, \quad (2.72)$$

y quedando hasta segundo orden

$$|\langle n(x) | n(x+dx) \rangle| = 1 + \frac{1}{2} \left(\langle n(x) | \partial_i \partial_j n(x) \rangle + \langle \partial_i n(x) | n(x) \rangle \langle n(x) | \partial_j n(x) \rangle \right) dx^i dx^j. \quad (2.73)$$

Usando

$$\operatorname{Re} \langle n(x) | \partial_i \partial_j n(x) \rangle = -\operatorname{Re} \langle \partial_i n(x) | \partial_j n(x) \rangle, \quad (2.74)$$

finalmente se obtiene [14]

$$h_{ij} = \operatorname{Re} \left(\langle \partial_i n(x) | \partial_j n(x) \rangle - \langle \partial_i n(x) | n(x) \rangle \langle n(x) | \partial_j n(x) \rangle \right) = g_{ij}^{(n)}. \quad (2.75)$$

Por lo que el tensor geométrico cuántico queda descrito en función del tensor métrico cuántico y la curvatura de Berry, i.e.,

$$G_{ij}^{(n)} = g_{ij}^{(n)} - \frac{i}{2} F_{ij}^{(n)} \quad (2.76)$$

Además el TMC dado por (2.67) puede ser escrito de la siguiente manera

$$g_{ab}(\lambda) = \gamma_{ab}(\lambda) - \beta_a(\lambda)\beta_b(\lambda) \quad (2.77)$$

donde

$$\gamma_{ab} = \operatorname{Re} \langle \partial_a \psi | \partial_b \psi \rangle, \quad (2.78)$$

$$\beta_a = -i \langle \psi | \partial_a \psi \rangle \quad (2.79)$$

y λ es el conjunto de parámetros externos [12].

Hasta el momento se han trabajado con puras funciones de onda, que pueden estar en su representación del espacio de posición o de momentos pero no en ambas, por lo que sería atractivo tener una representación de la mecánica cuántica que trate ambas al mismo tiempo. Por ello es útil estudiar a las funciones de Wigner.

2.6 FUNCIONES DE WIGNER

En la mecánica hamiltoniana clásica un estado está descrito por un punto en un espacio fase $6N$ dimensional con las variables posición (q) y momento (p). No existe un principio de incertidumbre en la física clásica, por lo que es posible conocer al mismo tiempo tanto la posición como el momento de una partícula con precisión arbitraria.

Sin embargo en la mecánica cuántica el principio de incertidumbre de Heisenberg hace esto imposible, por lo que se trabaja con las funciones de onda en la base de posición ó en la de momentos. Sería entonces deseable alguna función que pudiera desplegar simultáneamente la probabilidad de ambas variables. La función de Wigner está construida de tal manera que sea capaz de hacer justamente esto, permitiendo a su vez obtener los valores esperados correctos de operadores arbitrarios. Un primer paso en su construcción es estudiar la transformación de Weyl.

2.6.1 Transformación de Weyl

Para construir la función de Wigner se debe utilizar un formalismo alternativo a la mecánica cuántica basado en el espacio fase, para ello se necesita un mapeo entre las funciones de la formulación del espacio fase y los operadores del espacio de Hilbert en el cuadro de Schrödinger. Este mapeo está dado por la *transformación de Weyl* \tilde{A} de un operador \hat{A} definida de la siguiente manera

$$\tilde{A}(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \left\langle q + \frac{y}{2} \left| \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle, \quad (2.80)$$

donde lo que se hace es tomar un operador y representarlo con una función.

Una propiedad importante de la transformación de Weyl es que la traza del producto de dos operadores \hat{A} y \hat{B} está dado por

$$\text{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \tilde{A}(q, p) \tilde{B}(q, p) \quad (2.81)$$

2.6.2 La función de Wigner

La matriz de densidad para un estado puro dada por

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|,$$

que en su representación en la base de posición es

$$\langle q | \rho | q \rangle = \psi(q) \psi^*(q'), \quad (2.82)$$

y una propiedad importante de la matriz de densidad es que está normalizada, esto es que $\text{Tr}[\rho] = 1$ y como se vio anteriormente el valor esperado de un operador \hat{A} con base en $\hat{\rho}$ es $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]$.

Utilizando esto, se define la *función de Wigner* como

$$W(q, p) = \frac{\tilde{\rho}}{2\pi\hbar} = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \psi\left(q + \frac{y}{2}\right) \psi^*\left(q - \frac{y}{2}\right), \quad (2.83)$$

con ella se pueden escribir los valores esperados de un operador \hat{A} como

$$\langle \hat{A} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p) \tilde{A}(q, p), \quad (2.84)$$

que es el promedio de una cantidad física representada por $\tilde{A}(q, p)$ sobre todo el espacio fase con la cuasi-densidad de probabilidad (puede tener valores negativos) $W(q, p)$ que caracteriza al estado. En particular, los valores esperados de \hat{q} y \hat{p} son

$$\langle \hat{q} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p) q, \quad (2.85)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p) p. \quad (2.86)$$

En general para encontrar el valor esperado de un operador a partir de la función de Wigner uno debe considerar la transformación de Weyl de dicho operador. Suponiendo que solo depende de q se obtiene una relación bastante simple

$$\tilde{A}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \left\langle q + \frac{y}{2} \left| \hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) \right| q - \frac{y}{2} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{ipy}{\hbar}} A(q - \frac{y}{2}) \delta(y) = A(q), \quad (2.87)$$

y análogamente para un operador que solo depende de p , $\tilde{B}(p) = B(p)$.

Algunas de las propiedades de la función de Wigner son [15][16]:

1. Está normalizada en el espacio fase

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p) = \text{Tr}[\hat{\rho}] = 1. \quad (2.88)$$

2. Siempre es real, esto se puede ver tomando el conjugado de (2.83) y cambiando la variable de integración de y a $-y$.
3. Puede tomar valores negativos, para observar esto primero se consideran dos operadores de densidad $\hat{\rho}_a$ y $\hat{\rho}_b$, cada uno con sus estados asociados ψ_a y ψ_b . Por lo que se puede escribir la siguiente expresión

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_a \hat{\rho}_b] = |\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2, \quad (2.89)$$

a esto se le hace la transformación de Weyl y se obtiene

$$\text{Tr}[\hat{\rho}_a \hat{\rho}_b] = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dq dp \tilde{\rho}_a \tilde{\rho}_b = \int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p)_a W(q, p)_b = |\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2, \quad (2.90)$$

y si se consideran estados ortogonales $\langle \psi_a | \psi_b \rangle = 0$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq dp W(q, p)_a W(q, p)_b = 0, \quad (2.91)$$

esto solo puede ser cierto si la función de Wigner es negativa en regiones del espacio fase. Esto es enteramente distinto al caso clásico y muestra que la función de Wigner no representa una propiedad física. Solo la integral de ella sobre ya sea q o p tiene significado físico, de manera similar a como se piensa a la función de onda en el cuadro de Schrödinger.

4. Debe cumplir que

$$|W(q, p)| \leq \frac{1}{\pi\hbar}, \quad (2.92)$$

debido a que se puede escribir la definición de la función de Wigner como el producto de dos funciones de onda.

Ahora con esta herramienta, es posible definir una métrica del espacio fase, la métrica de Fubini-Study

2.7 MÉTRICA DE FUBINI-STUDY

Para poder entender la métrica de Fubini-Study, primero conviene estudiar las llamadas variedades complejas al ser esta un tipo de métrica de Kähler.

2.7.1 Variedades de Kähler

Considerando una variedad compleja M sobre la cual hay una métrica hermitiana definida por

$$ds^2 = g_{ab^*} dz^a dz^{*b}, \quad (2.93)$$

donde g_{ab^*} es una matriz hermitiana. Se define la *forma de Kähler* como

$$K = \frac{i}{2} g_{ab^*} dz^a \wedge dz^{*b}, \quad (2.94)$$

entonces

$$K^* = -\frac{i}{2} g_{ab^*}^* dz^{*a} \wedge dz^b = \frac{i}{2} g_{ba^*} dz^b \wedge dz^{*a} = K \quad (2.95)$$

por lo que es una 2-forma real.

Se tiene una *métrica de Kähler* si

$$dK = 0, \quad (2.96)$$

i.e., la forma de Kähler es cerrada y se dice que M es una variedad de Kähler si admite una métrica de Kähler. Cualquier superficie de Riemann (real de dimensión 2) es automáticamente de Kähler ya que $dK = 0$ para cualquier 2-forma. Existen, sin embargo, variedades complejas de dimensión 4 que no admiten métrica de Kähler alguna. Un caso particular de esta es la métrica de Fubini-Study.

2.7.2 Métrica de Fubini-Study

La métrica de Fubini-Study es sobre $P_n(\mathbb{C})$ y en el espacio de parámetros pero se llega a ella con variaciones del espacio fase tomando

$$z^A = q^A + ip^A \quad (2.97)$$

entonces

$$z^{*B} = q^B - ip^B \quad (2.98)$$

por lo que las diferenciales son

$$dz^A = dq^A + idp^A \quad (2.99)$$

entonces

$$dz^{*B} = dq^B - idp^B \quad (2.100)$$

y utilizando (2.94)

$$K = \frac{i}{2} g_{AB^*} (dq^A + idp^A) \wedge (dq^B - idp^B), \quad (2.101)$$

si A y B son reales

$$K = \frac{i}{2} g_{AB} (dq^A \wedge dq^B - idq^A \wedge dp^B + idp^A \wedge dq^B + dp^A \wedge dp^B) \quad (2.102)$$

$$= \frac{i}{2} g_{AB} (-idq^A \wedge dp^B + idp^A \wedge dq^B) \quad (2.103)$$

$$= \frac{i}{2} g_{AB} (-2idq^A \wedge dp^B). \quad (2.104)$$

Por lo tanto la métrica de Fubini-Study es

$$F = g_{AB} dq^A \wedge dp^B \quad (2.105)$$

Con estas herramientas nos es suficiente para poder calcular en el siguiente ejemplos del tensor geométrico cuántico para distintos sistemas físicos.

EJEMPLOS DEL TENSOR GEOMÉTRICO CUÁNTICO

Para poder ilustrar las ideas dadas en el capítulo anterior se iniciará con un ejemplo ya conocido, el oscilador armónico generalizado, en el cual se puedan identificar de manera directa los elementos del tensor geométrico cuántico. Después se resolverá el sistema de osciladores simétricamente acoplados. Ambos son utilizados en la actualidad para describir distintos sistemas físicos, el simétricamente acoplado sirve como punto de partida para una teoría de campo escalar y para describir la complejidad de circuitos en teoría cuántica de campos [20].

3.1 OSCILADOR ARMÓNICO GENERALIZADO

El oscilador armónico generalizado tiene una gran cantidad de aplicaciones, en particular puede verse como un oscilador armónico amortiguado y como se vio anteriormente, está dado por el hamiltoniano

$$H(R, q, t) = \frac{1}{2}[Z\hat{p}^2 + Y(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + X\hat{q}^2], \quad (3.1)$$

donde $R=(X,Y,Z)$ son parámetros externos. Se tiene que los eigenestados del hamiltoniano dependen de los parámetros y provienen de la ecuación de Schrödinger, por lo que queda de la siguiente manera

$$-\frac{Z\hbar^2}{2} \frac{d^2\psi_n}{dq^2} - i\hbar Yq \frac{d\psi_n}{dq} + \left(\frac{Xq^2}{2} - \frac{i\hbar Y}{2}\right)\psi_n = E_n\psi_n. \quad (3.2)$$

Las soluciones normalizadas son

$$\psi_n(q; R) = \left(\frac{w}{Z\hbar}\right)^{1/4} \chi_n\left(q\sqrt{\frac{w}{Z\hbar}}\right) e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}}, \quad (3.3)$$

donde se definió

$$w := (XZ - Y^2)^{1/2}, \quad (3.4)$$

y $\chi_n(x)$ es la función de Hermite (las cuales se describen junto con sus propiedades en el apéndice).

Notemos que la definición de w implica que $XZ > Y^2$ y esto que la variedad de parámetros correspondiente es el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^3

$$\mathcal{M} := \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 | XZ > Y^2\}. \quad (3.5)$$

Los eigenvalores de la energía para el oscilador están dadas por la fórmula usual

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \quad (3.6)$$

3.1.1 Fase y curvatura de Berry

Utilizando (2.59) y debido a la nilpotencia de la derivada exterior (Anexo (C.8))

$$F^{(n)} = -\text{Im} \langle d_R n | \wedge | d_R n \rangle \quad (3.7)$$

$$= -\text{Im} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq d_R \psi_n^*(q; R) d_R \psi_n(q; R) \right], \quad (3.8)$$

$$= -\text{Im} \left[d_R \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_n^*(q; R) d_R \psi_n(q; R) \right], \quad (3.9)$$

con d_R denotando una derivada exterior en el espacio de parámetros [14]. Como se tienen 3 parámetros (X, Y, Z) la derivada exterior es de la forma

$$F^{(n)} = -\text{Im} \left[d_R \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_n^*(q; R) \left(\partial_X \psi_n d_R X + \partial_Y \psi_n d_R Y + \partial_Z \psi_n d_R Z \right) \right]. \quad (3.10)$$

Resolviendo las parciales con ψ_n dada por (3.3) se obtiene que

$$\partial_X \psi_n = e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \left[\left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) + \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{1}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Z(XZ - Y^2)^{-\frac{7}{8}}}{8} \right) \right], \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \partial_Y \psi_n &= -\left(\frac{1}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2Y(XZ - Y^2)^{-\frac{7}{8}}}{8} \right) \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \\ &+ \left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \partial_Y \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \\ &- \left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{iq^2}{2Z\hbar} e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \right), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \partial_Z \psi_n &= \frac{1}{4} \left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{(XZ - Y^2)^{-\frac{1}{2}} X}{2Z\hbar} - \frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z^2\hbar} \right) \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \\ &+ \left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \partial_Z \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \\ &+ \left(\frac{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{iYq^2}{2Z^2\hbar} e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

De aquí es importante notar que

$$\psi_n^*(q; R) = \left(\frac{w}{Z\hbar} \right)^{1/4} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) e^{\frac{iYq^2}{2Z\hbar}}, \quad (3.14)$$

por lo que al hacer la multiplicación de (3.7) las exponenciales se van. Además como solo nos interesa la parte imaginaria que está dada por los últimos términos de (3.12) y (3.13) nos queda:

$$F^{(n)} = -d_R \int_{-\infty}^{\infty} dq \chi_n^2 \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{w}{\hbar Z} \right)^{\frac{1}{4}} \left[- \left(\frac{w}{\hbar Z} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{q^2 d_R Y}{2\hbar Z} + \left(\frac{w}{\hbar Z} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{Y q^2 d_R Z}{2Z^2 \hbar} \right] \quad (3.15)$$

$$= d_R \int_{-\infty}^{\infty} dq \chi_n^2 \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{w}{\hbar Z} \right)^{\frac{1}{2}} q^2 \left[\left(\frac{w}{Z\hbar} \right) \left(\frac{Z\hbar}{w} \right) \left[\frac{d_R Y}{2\hbar Z} - \frac{Y d_R Z}{2Z^2 \hbar} \right] \right], \quad (3.16)$$

$$= d_R \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dq \left(\frac{w}{\hbar Z} \right)^{\frac{1}{2}} \chi_n^2 \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) q^2 \left(\frac{w}{Z\hbar} \right) \left(\frac{Z\hbar}{w} \right) \left[\frac{d_R Y}{2\hbar Z} - \frac{Y d_R Z}{2Z^2 \hbar} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Sea $a = q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}}$ entonces $da = dq \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}}$ y haciendo las substitutiones pertinentes se llega a

$$F^{(n)} = \frac{1}{2\hbar} d_R \left\{ \left(\frac{Z\hbar}{w} \right) \left[\frac{d_R Y}{Z} - \frac{Y d_R Z}{Z^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} da \chi_n^2(a) a^2 \right\} \quad (3.18)$$

y usando la siguiente propiedad de las funciones de Hermite [17]

$$\int_{-\infty}^{\infty} da a^2 \chi_n^2(a) = n + \frac{1}{2}, \quad (3.19)$$

se obtiene

$$F^{(n)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{2} d_R \left\{ \left(\frac{Z}{w} \right) \left[\frac{d_R Y}{Z} - \frac{Y d_R Z}{Z^2} \right] \right\} \quad (3.20)$$

aquí es conveniente utilizar que

$$d_R \left(\frac{Y}{Z} \right) = \left[\frac{d_R Y}{Z} - \frac{Y d_R Z}{Z^2} \right], \quad (3.21)$$

para dejar la expresión de la siguiente manera

$$F^{(n)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{2} d_R \left\{ \left(\frac{Z}{w} \right) d_R \left(\frac{Y}{Z} \right) \right\}. \quad (3.22)$$

Haciendo uso de nuevo de la nilpotencia

$$F^{(n)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{2} d_R \left(\frac{Z}{w} \right) \wedge d_R \left(\frac{Y}{Z} \right) = \frac{n + \frac{1}{2}}{2} d_R \left(\frac{Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \wedge d_R \left(\frac{Y}{Z} \right), \quad (3.23)$$

donde

$$\begin{aligned} d_R \left(\frac{Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) &= \partial_X \left(\frac{Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) d_R X + \partial_Y \left(\frac{Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) d_R Y + \partial_Z \left(\frac{Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) d_R Z \\ &= \left[- \frac{Z^2 d_R X}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2ZY d_R Y}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{d_R Z}{(XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{ZX d_R Z}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &= \frac{1}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[-Z^2 d_R X + 2ZY d_R Y + 2(XZ - Y^2) d_R Z - ZX d_R Z \right] \\ &= \frac{-1}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[Z^2 d_R X - 2ZY d_R Y - XZ d_R Z + 2Y^2 d_R Z \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por lo que sustituyendo (3.24) y (3.21) en (3.23) se obtiene

$$\begin{aligned} F^{(n)} &= \frac{n + \frac{1}{2}}{2} \frac{-1}{2(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} [Z^2 d_R X - 2ZY d_R Y - XZ d_R Z + 2Y^2 d_R Z] \left[\frac{d_R Y}{Z} - \frac{Y d_R Z}{Z^2} \right] \\ &= -\frac{n + \frac{1}{2}}{4(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} \left[Z d_R X d_R Y - Y d_R X d_R Z + \frac{2Y^2 d_R Y d_R Z}{Z} - X d_R Z d_R Y + \frac{2Y^2 d_R Z d_R Y}{Z} \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Y finalmente al utilizar (C.4) ($d\alpha d\beta = -d\beta d\alpha$) se obtiene que

$$F^{(n)} = \frac{n + \frac{1}{2}}{4(XZ - Y^2)^{\frac{3}{2}}} [Z d_R Y d_R X + Y d_R X d_R Z + X d_R Z d_R Y], \quad (3.26)$$

$$= \frac{n + \frac{1}{2}}{4w^3} [Z d_R Y d_R X + Y d_R X d_R Z + X d_R Z d_R Y]. \quad (3.27)$$

Ahora para la curvatura de Berry, se tiene que por (2.62)

$$F_{ij}^{(n)} = -\text{Im}(\langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_j n | \partial_i n \rangle)$$

y utilizando las parciales de la función de onda dadas por (3.11), (3.12) y (3.13). Notemos que si $i = j$ da cero inmediatamente. Además recordemos que $F_{ij} = -F_{ji}$, por lo que solo resta hacer 3 entradas de las cuales se obtiene que

$$F_{ij} = \frac{(n + \frac{1}{2})}{4w^3} \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

3.1.2 Tensor métrico cuántico

Para obtener rápidamente el tensor métrico cuántico es bastante útil recordar la regla de la cadena ($\partial_X \chi_n(a) = \frac{d}{da}(\chi_n(a)) \partial_X(a)$) y tener en cuenta las propiedades de las funciones de Hermite dadas en el apéndice.

El tensor métrico cuántico está dado por (2.77), por lo que se deberán calcular los factores γ_{ab} , β_a y β_b para cada caso. Se tomará $w = (XZ - Y^2)^{\frac{1}{2}}$ y que $a = q\sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \Rightarrow da = dq\sqrt{\frac{w}{Z\hbar}}$. Además es conveniente dar de una vez los valores para las parciales de a

$$\partial_X a = \frac{Zq}{4w^{\frac{3}{2}}(Z\hbar)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.29)$$

$$\partial_Y a = -\frac{Yq}{2w^{\frac{3}{2}}(Z\hbar)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.30)$$

$$\partial_Z a = \frac{q\hbar(2Y^2 - XZ)}{4w^{\frac{3}{2}}(Z\hbar)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.31)$$

Por simplicidad se iniciará con los términos de X :

$$\beta_X = -i \langle \psi | \partial_X \psi \rangle \quad (3.32)$$

$$= -i \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\left(\frac{w}{Z\hbar} \right)^{1/4} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) e^{\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \right] \\ \left[e^{-\frac{iYq^2}{2Z\hbar}} \left[\left(\frac{XZ - Y^2}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) + \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{1}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Z(XZ - Y^2)}{8} \right)^{-\frac{7}{8}} \right] \right] \quad (3.33)$$

$$= -i \left[\left(\frac{w}{Z\hbar} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) dq + \sqrt{\frac{Z}{\hbar}} \frac{(XZ - Y^2)^{-\frac{6}{8}}}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2 \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) dq \right] \\ = -i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(a) \partial_X \chi_n(a) da + \frac{Z}{8w^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2(a) da \right] \quad (3.34)$$

$$= -i \left[\frac{Z}{4w^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n(a) a \frac{d}{da} \chi_n(a) da + \frac{Z}{8w^2} \right] \quad (3.35)$$

$$= -i \left[\frac{Z}{4w^2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{Z}{8w^2} \right], \quad (3.36)$$

por lo tanto

$$\beta_X = 0, \quad (3.37)$$

y de manera análoga se obtiene

$$\beta_Y = -\frac{n + \frac{1}{2}}{2w}, \quad (3.38)$$

$$\beta_Z = \frac{Y(n + \frac{1}{2})}{2Zw} \quad (3.39)$$

Ahora el factor γ_{XX}

$$\gamma_{XX} = \text{Re} \langle \partial_X \psi | \partial_X \psi \rangle \quad (3.40)$$

$$= \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{XZ - Y^2}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) + \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \left(\frac{1}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{Z(XZ - Y^2)}{8} \right)^{-\frac{7}{8}} \right]^2 dq \quad (3.41)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{w}{Z\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (\partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right))^2 + \frac{Z(XZ - Y^2)^{-\frac{6}{8}}}{4(Z\hbar)^{\frac{1}{2}}} \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \partial_X \chi_n \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \right. \\ \left. + \frac{Z^2(XZ - Y^2)^{-\frac{7}{4}}}{64(Z\hbar)^{\frac{1}{2}}} \chi_n^2 \left(q \sqrt{\frac{w}{Z\hbar}} \right) \right] dq$$

$$= \frac{Z^2}{16w^4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{da} \chi_n(a) \right)^2 a^2 da + \frac{Z}{4w^2} \left(-\frac{Z}{8w^2} \right) + \frac{Z^2}{64w^2} \quad (3.42)$$

$$= \frac{Z^2}{16w^4} \left[\frac{2n^2 + 2n + 3}{4} \right] - \frac{Z^2}{64w^4} \quad (3.43)$$

$$= \frac{Z^2}{32w^4} [n^2 + n + 1] - \frac{Z^2}{64w^4} + \frac{Z^2}{16w^4} \left[\frac{1}{4} \right].$$

Por lo que

$$\gamma_{XX} = \frac{Z^2(n^2 + n + 1)}{32w^4}, \quad (3.44)$$

de manera análoga se obtiene que

$$\gamma_{ij} = \frac{(n^2 + n + 1)}{32w^4} \begin{bmatrix} Z^2 & -2YZ & 2Y^2 - XZ \\ -2YZ & -2(Y^2 - 3XZ) & 2Z^{-1}(Y^3 - 2XYZ) \\ 2Y^2 - XZ & 2Z^{-1}(Y^3 - 2XYZ) & Z^{-2}(-2Y^4 + 2XY^2Z + X^2Z^2) \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Haciendo las multiplicaciones y restas pertinentes se obtiene finalmente el tensor métrico cuántico para el oscilador armónico generalizado

$$g_{ij} = \frac{(n^2 + n + 1)}{32w^4} \begin{bmatrix} Z^2 & -2YZ & 2Y^2 - XZ \\ -2YZ & 4XZ & -2XY \\ 2Y^2 - XZ & -2XY & X^2 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

3.1.3 Tensor geométrico cuántico

Las relaciones entre la curvatura de Berry y el tensor métrico cuántico con el tensor geométrico cuántico están dadas por (2.76) respectivamente. Entonces con (3.28) y (3.46) se obtiene:

$$G_{ij} = \frac{(n^2 + n + 1)}{32w^4} \begin{bmatrix} Z^2 & -2YZ & 2Y^2 - XZ \\ -2YZ & 4XZ & -2XY \\ 2Y^2 - XZ & -2XY & X^2 \end{bmatrix} - i \frac{(n + \frac{1}{2})}{8w^3} \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

En este caso se encontraron independientemente el tensor métrico cuántico y la curvatura de Berry para juntar ambos resultados y llegar al tensor geométrico cuántico; en el ejemplo posterior se hará el proceso inverso.

3.2 OSCILADORES ARMÓNICOS SIMÉTRICAMENTE ACOPLADOS

El sistema formado por unos osciladores armónicos simétricamente acoplados ha tenido aplicación en temas de complejidad y además ha servido como punto de partida para una teoría de campo escalar [20]. Este sistema está descrito por el siguiente Hamiltoniano

$$H(k, k', q_1, q_2, t) = \frac{1}{2}[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + k(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + k'(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2], \quad (3.48)$$

ahora para facilitar el problema se harán las siguientes transformaciones canónicas

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2), \quad (3.49)$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2), \quad (3.50)$$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2), \quad (3.51)$$

$$P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2), \quad (3.52)$$

quedando el hamiltoniano transformado en uno de dos osciladores armónicos desacoplados de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2 + w_1^2 Q_1^2 + w_2^2 Q_2^2). \quad (3.53)$$

donde

$$w_1^2 = k, \quad (3.54)$$

$$w_2^2 = k + 2k'. \quad (3.55)$$

Ahora para encontrar la función de onda primero notemos que este hamiltoniano puede escribirse como $H = H_1 + H_2$ por lo que la ecuación de Schrödinger puede escribirse

$$H|\psi(Q_1, Q_2)\rangle = E_{Q_1, Q_2}|\psi(Q_1, Q_2)\rangle \quad (3.56)$$

$$(H_1 + H_2)|\psi(Q_1, Q_2)\rangle = (E_1 + E_2)|\psi(Q_1, Q_2)\rangle \quad (3.57)$$

$$(H_1 + H_2)|\phi_1(Q_1)\rangle|\phi_2(Q_2)\rangle = (E_1 + E_2)|\phi_1(Q_1)\rangle|\phi_2(Q_2)\rangle \quad (3.58)$$

donde $|\phi(Q_1)\rangle$ y $|\phi(Q_2)\rangle$ son las funciones de onda para cada uno de los osciladores armónicos desacoplados. Por esto la del sistema general es la multiplicación de ambas y después habrá que regresarla a la representación de q_1 y q_2 .

El hamiltoniano del oscilador armónico es

$$H_{OA} = \frac{1}{2}(P^2 + w^2 Q^2), \quad (3.59)$$

cuya solución es

$$\psi_{OA_n}(Q) = \left(\frac{w}{\hbar}\right)^{1/4} \chi_n\left(Q\sqrt{\frac{w}{\hbar}}\right), \quad (3.60)$$

entonces

$$\psi_{n,m}(Q_1, Q_2) = \left(\frac{w_1}{\hbar}\right)^{1/4} \chi_n\left(Q_1\sqrt{\frac{w_1}{\hbar}}\right) \left(\frac{w_2}{\hbar}\right)^{1/4} \chi_m\left(Q_2\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{w_1 w_2}{\hbar^2}\right)^{1/4} \chi_n\left((q_1 + q_2)\sqrt{\frac{w_1}{2\hbar}}\right) \chi_m\left((q_1 - q_2)\sqrt{\frac{w_2}{2\hbar}}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{k}\sqrt{k+2k'}}{\hbar^2}\right)^{1/4} \chi_n\left((q_1 + q_2)\sqrt{\frac{\sqrt{k}}{2\hbar}}\right) \chi_m\left((q_1 - q_2)\sqrt{\frac{\sqrt{k+2k'}}{2\hbar}}\right). \end{aligned} \quad (3.62)$$

por lo que la función de onda para los osciladores armónicos simétricamente acoplados en términos de las variables originales q_1 y q_2 será

$$\psi_{n,m} = \left(\frac{k^2 + 2kk'}{\hbar^4} \right)^{1/8} \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right). \quad (3.63)$$

Por completez se darán las parciales con respecto a k y k' en términos de q_1 y q_2

$$\begin{aligned} \partial_k \psi_{n,m} &= \frac{(k^2 + 2kk')^{-7/8}}{4\hbar^{1/2}} (k + k') \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \\ &+ \left(\frac{k^2 + 2kk'}{\hbar^4} \right)^{1/8} \partial_k \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \\ &+ \left(\frac{k^2 + 2kk'}{\hbar^4} \right)^{1/8} \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \partial_k \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{k'} \psi_{n,m} &= \frac{(k^2 + 2kk')^{-7/8} k'}{4\hbar^{1/2}} \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \\ &+ \left(\frac{k^2 + 2kk'}{\hbar^4} \right)^{1/8} \chi_n \left((q_1 + q_2) \left[\frac{k}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right) \partial_{k'} \chi_m \left((q_1 - q_2) \left[\frac{k + 2k'}{(2\hbar)^2} \right]^{1/4} \right). \end{aligned}$$

El tensor geométrico cuántico está dado por (2.64) que es

$$G_{ij} = \langle \partial_i(n, m) | \partial_j(n, m) \rangle - \langle \partial_i(n, m) | n, m \rangle \langle n, m | \partial_j(n, m) \rangle,$$

tomando $i, j \in \{k, k'\}$. Para resolver la integrales, es más fácil trabajar en los espacios de Q_1 y Q_2 mediante (3.61), esto es posible ya que es una transformación canónica y lineal.

Además es conveniente notar de una vez dos cosas: 1) debido a la falta de factores imaginarios en la función de onda, la curvatura de Berry es nula. 2) los factores $\langle \partial_i n | n \rangle$ son cero tanto para k como k' por las propiedades de las funciones de Hermite, por lo que únicamente será necesario calcular $\langle \partial_i(n, m) | \partial_j(n, m) \rangle$. Definiendo por simplicidad $f = \left(\frac{w_1 w_2}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ queda:

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \langle \partial_i \psi_{n,m} | \partial_j \psi_{n,m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_i(\psi_{n,m}) \partial_j(\psi_{n,m}) dQ_1 dQ_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\partial_i(f) \partial_j(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right. \\
&\quad + f \partial_i(f) \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_j \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \\
&\quad + f \partial_i(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_j \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f \partial_j(f) \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_i \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \\
&\quad + f^2 \partial_i \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \partial_j \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \\
&\quad + f^2 \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_i \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_j \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f \partial_j(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_i \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f^2 \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_j \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_i \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad \left. + f^2 \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_i \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \partial_j \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \right] dQ_1 dQ_2. \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Para el término con $i = k$ y $j = k'$ se simplifican las cuentas debido a que w_1 no depende de k' :

$$\begin{aligned}
G_{kk'} &= \langle \partial_k \psi_{n,m} | \partial_{k'} \psi_{n,m} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_k(\psi_{n,m}) \partial_{k'}(\psi_{n,m}) dQ_1 dQ_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\partial_k(f) \partial_{k'}(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right. \\
&\quad + f \partial_k(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_{k'} \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f \partial_{k'}(f) \chi_m^2 \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_k \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f^2 \chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_k \left(\chi_n \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_{k'} \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad + f \partial_{k'}(f) \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \partial_k \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \\
&\quad \left. + f^2 \chi_n^2 \left(Q_1 \sqrt{\frac{w_1}{\hbar}} \right) \partial_k \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \partial_{k'} \left(\chi_m \left(Q_2 \sqrt{\frac{w_2}{\hbar}} \right) \right) \right] dQ_1 dQ_2. \tag{3.65}
\end{aligned}$$

Haciendo separación de variables y utilizando las propiedades de los polinomios de Hermite del apéndice ((D.3), (D.4), (D.5), (D.6), (D.7), (D.8)), se llega a

$$\begin{aligned}
G_{kk'} &= \partial_k(f)\partial_{k'}(f)\left(\frac{\hbar^2}{w_1 w_2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{2}f\partial_k(f)\left(\frac{\hbar}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar}{w_2}\right)\partial_{k'}\left(\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}f\partial_{k'}(f)\left(\frac{\hbar}{w_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar}{w_1}\right)\partial_k\left(\sqrt{\frac{w_1}{\hbar}}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}f^2\left(\frac{\hbar}{w_1}\right)\partial_k\left(\sqrt{\frac{w_1}{\hbar}}\right)\left(\frac{\hbar}{w_2}\right)\partial_{k'}\left(\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}f\partial_{k'}(f)\left(\frac{\hbar}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar}{w_2}\right)\partial_k\left(\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right) \\
&\quad + f^2\left(\frac{\hbar}{w_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\hbar}{w_2}\right)^{\frac{3}{2}}\partial_k\left(\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right)\partial_{k'}\left(\sqrt{\frac{w_2}{\hbar}}\right)\left(\frac{2n^2+2n+3}{4}\right), \tag{3.66}
\end{aligned}$$

sustituyendo todos los valores de las derivadas y simplificando

$$\begin{aligned}
G_{kk'} &= \frac{k+k'}{16k(k+2k')^2} - \frac{k+k'}{16k(k+2k')^2} - \frac{1}{32k^2+64kk'} \\
&\quad + \frac{1}{32k^2+64kk'} - \frac{1}{32(k+2k')^2} + \left(\frac{2n^2+2n+3}{4}\right)\frac{1}{8(k+2k')^2} \\
&= \frac{n^2+n+1}{16(k+2k')^2}. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Análogamente se obtienen las entradas restantes, por lo que finalmente el tensor geométrico cuántico para los osciladores armónicos simétricamente acoplados es

$$G^{(n)} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} \left(\frac{m^2+m+1}{k^2} + \frac{n^2+n+1}{(k+2k')^2}\right) & \frac{2(n^2+n+1)}{(k+2k')^2} \\ \frac{2(n^2+n+1)}{(k+2k')^2} & \frac{4(n^2+n+1)}{(k+2k')^2} \end{pmatrix} \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{32} \begin{pmatrix} \left(\frac{m^2+m+1}{w_1^4} + \frac{n^2+n+1}{w_2^4}\right) & \frac{2(n^2+n+1)}{w_2^4} \\ \frac{2(n^2+n+1)}{w_2^4} & \frac{4(n^2+n+1)}{w_2^4} \end{pmatrix}. \tag{3.69}$$

De estos ejemplos es posible notar que el cálculo es muy dependiente de la complejidad de la función de onda (si es que se conoce en primer lugar). Pero existe una técnica alternativa que no la requiere, dicho método se estudiará a profundidad en la siguiente parte del texto.

Parte II

PERSPECTIVA DEL TGC BAJO LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA

TGC Y EL TENSOR DEL ESPACIO FASE DE ESTADOS N-ÉSIMOS

Existe otra forma de obtener el tensor geométrico cuántico aparte de la que se mencionó anteriormente, utilizando técnicas de teoría cuántica de campos. Normalmente cuando un problema no puede ser resuelto de manera exacta, en el método estándar de trabajo discutido anteriormente se utiliza teoría de perturbaciones para calcular la función de onda; sin embargo esto puede resultar sumamente complicado o incluso imposible.

Afortunadamente en teoría cuántica de campos, la teoría de perturbaciones es usada ampliamente para conseguir las funciones de Green de la teoría y ocupando una ampliación de esta técnica se ha mostrado que es posible obtener el tensor geométrico cuántico para el estado base, e incluso es posible calcularlo sin conocer en lo absoluto a la función de onda del sistema [12][22][24].

Supongamos que el sistema deseado a describir está descrito por el Lagrangiano L_i que depende de N parámetros λ^a donde $a = 1, \dots, N$. durante el intervalo temporal $(-\infty, 0)$ y después para $(0, \infty)$ se le agrega una perturbación dada por la perturbación de parámetros

$$\lambda_a \rightarrow \delta\lambda_a \quad (4.1)$$

por lo que el lagrangiano final será

$$L_f = L_i + \mathcal{O}_i \delta\lambda^a. \quad (4.2)$$

Bajo estas suposiciones se encuentra la siguiente expresión para el Tensor Geométrico Cuántico

$$G_{ab} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} d\tau_2 \int_{t_0}^{\infty} d\tau_1 [\langle \mathcal{O}_a(\tau_2) \mathcal{O}_b(\tau_1) \rangle - \langle \mathcal{O}_a(\tau_2) \rangle \langle \mathcal{O}_b(\tau_1) \rangle]. \quad (4.3)$$

Pero esto se ha obtenido en la literatura [12][22][24] para el estado base, por lo que es necesario generalizar esta técnica para un estado n -ésimo arbitrario. Además la variación que en este caso es $\delta\lambda^a$ solo se refiere al espacio de parámetros. Una forma de generalizar esta idea es incluir variaciones del tipo traslacional con respecto a los momentos y las posiciones. Dando así lugar a un tensor más general que tiene mayor información física del sistema en cuestión.

4.1 TENSOR A PARTIR DE VARIACIONES EN EL HAMILTONIANO PARA UN ESTADO N-ÉSIMO

Supongamos un sistema que en un inicio (de $t = -\infty$ a $t = 0$) está descrito por un hamiltoniano, $H_i = H$ y después de $t = 0$ se perturba el sistema para estar descrito por $H_f = H + \delta H$ donde

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial z^\Lambda} \delta z^\Lambda \quad (4.4)$$

con

$$z^\Lambda = (q^i, p_i, \lambda_a). \quad (4.5)$$

Como el TGC está relacionado a un traslape de estados es necesario considerar una expresión como (1.65) y manipularla de tal modo que solo sobreviva el estado n-ésimo deseado. Para ello se toma $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$, donde los subíndices i y f (por ejemplo $|0_f\rangle$ se refiere al vacío del hamiltoniano final) se refieren al hamiltoniano inicial y final respectivamente, e introduciendo "unos" de las bases de energía de la siguiente manera

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \sum_{m_f, m_i} \langle q_f, t_f | m_f \rangle \langle m_f | m_i \rangle \langle m_i | q_i, t_i \rangle \quad (4.6)$$

$$= \sum_{m_f, m_i} \langle q_f | e^{-\frac{it_f E_{m_f}^f}{\hbar}} | m_f \rangle \langle m_f | m_i \rangle \langle m_i | e^{\frac{it_i E_{m_i}^i}{\hbar}} | q_i \rangle, \quad (4.7)$$

asumiendo la ortonormalidad entre estados ($\langle a | b \rangle = \delta_{a,b}$) y multiplicando por las exponenciales de la energía para el estado n-ésimo deseado

$$\begin{aligned} & e^{\frac{it_f (E_n^f)}{\hbar}} e^{-\frac{it_i (E_n^i)}{\hbar}} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \\ &= e^{\frac{it_f (E_n^f)}{\hbar}} e^{-\frac{it_i (E_n^i)}{\hbar}} \left[\langle q_f | e^{-\frac{it_f E_0^f}{\hbar}} | 0_f \rangle \langle 0_f | 0_i \rangle \langle 0_i | e^{\frac{it_i E_0^i}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \right. \\ &+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f E_{n-1}^f}{\hbar}} | (n-1)_f \rangle \langle (n-1)_f | (n-1)_i \rangle \langle (n-1)_i | e^{\frac{it_i E_{(n-1)}^i}{\hbar}} | q_i \rangle \\ &+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f E_n^f}{\hbar}} | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | e^{\frac{it_i E_n^i}{\hbar}} | q_i \rangle \\ &+ \left. \langle q_f | e^{-\frac{it_f E_{n+1}^f}{\hbar}} | (n+1)_f \rangle \langle (n+1)_f | (n+1)_i \rangle \langle (n+1)_i | e^{\frac{it_i E_{(n+1)}^i}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \right] \quad (4.8) \\ &= \langle q_f | e^{-\frac{it_f (E_0^f - E_n^f)}{\hbar}} | 0_f \rangle \langle 0_f | 0_i \rangle \langle 0_i | e^{\frac{it_i (E_0^i - E_n^i)}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \\ &+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f (E_{n-1}^f - E_n^f)}{\hbar}} | (n-1)_f \rangle \langle (n-1)_f | (n-1)_i \rangle \langle (n-1)_i | e^{\frac{it_i (E_{(n-1)}^i - E_n^i)}{\hbar}} | q_i \rangle \\ &+ \langle q_f | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | q_i \rangle \\ &+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f (E_{n+1}^f - E_n^f)}{\hbar}} | (n+1)_f \rangle \langle (n+1)_f | (n+1)_i \rangle \langle (n+1)_i | e^{\frac{it_i (E_{(n+1)}^i - E_n^i)}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \quad (4.9) \end{aligned}$$

Ahora, para regularizar los términos exponenciales que oscilan se tomará la siguiente prescripción: $E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon$, $E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon$ y se hace tender $t_i \rightarrow -\infty$ y $t_f \rightarrow \infty$, asumiendo que $q(\infty) = q(-\infty) = 0$, como sigue

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{it_f(E_n^f+i\epsilon)}{\hbar}} e^{-\frac{it_i(E_n^i)}{\hbar}} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&= \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_0^f-E_n^f-i\epsilon)}{\hbar}} | 0_f \rangle \langle 0_f | 0_i \rangle \langle 0_i | e^{\frac{it_i(E_0^i, -E_n^i-i\epsilon)}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n-1}^f-E_n^f-i\epsilon)}{\hbar}} |(n-1)_f\rangle \langle (n-1)_f | (n-1)_i \rangle \langle (n-1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n-1)}^i, -E_n^i)-i\epsilon}{\hbar}} | q_i \rangle \\
&+ \left[\langle q_f | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | q_i \rangle \right] \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n+1}^f-E_n^f-i\epsilon)}{\hbar}} |(n+1)_f\rangle \langle (n+1)_f | (n+1)_i \rangle \langle (n+1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n+1)}^i, -E_n^i)-i\epsilon}{\hbar}} | q_i \rangle \\
&+ \dots, \tag{4.10} \\
&= \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_0^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\frac{t_f\epsilon}{\hbar}} | 0_f \rangle \langle 0_f | 0_i \rangle \langle 0_i | e^{\frac{it_i(E_0^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{\frac{t_i\epsilon}{\hbar}} | q_i \rangle + \dots \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n-1}^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\frac{t_f\epsilon}{\hbar}} |(n-1)_f\rangle \langle (n-1)_f | (n-1)_i \rangle \langle (n-1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n-1)}^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{\frac{t_i\epsilon}{\hbar}} | q_i \rangle \\
&+ \left[\langle q_f | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | q_i \rangle \right] \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n+1}^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\frac{t_f\epsilon}{\hbar}} |(n+1)_f\rangle \langle (n+1)_f | (n+1)_i \rangle \langle (n+1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n+1)}^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{\frac{t_i\epsilon}{\hbar}} | q_i \rangle \\
&+ \dots, \tag{4.11}
\end{aligned}$$

entonces al hacer el límite

$$\begin{aligned}
& \lim_{t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty} e^{\frac{it_f(E_n^f+i\epsilon)}{\hbar}} e^{-\frac{it_i(E_n^i)}{\hbar}} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&= \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_0^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\infty} | 0_f \rangle \langle 0_f | 0_i \rangle \langle 0_i | e^{\frac{it_i(E_0^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{-\infty} | q_i \rangle + \dots \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n-1}^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\infty} |(n-1)_f\rangle \langle (n-1)_f | (n-1)_i \rangle \langle (n-1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n-1)}^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{-\infty} | q_i \rangle \\
&+ \left[\langle q_f | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | q_i \rangle \right] \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&+ \langle q_f | e^{-\frac{it_f(E_{n+1}^f-E_n^f)}{\hbar}} e^{-\infty} |(n+1)_f\rangle \langle (n+1)_f | (n+1)_i \rangle \langle (n+1)_i | e^{\frac{it_i(E_{(n+1)}^i, -E_n^i)}{\hbar}} e^{-\infty} | q_i \rangle \\
&+ \dots, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

los factores exponenciales correspondientes al ϵ van a cero, quedando únicamente

$$\begin{aligned}
& \lim_{t_f \rightarrow \infty, t_i \rightarrow -\infty} e^{\frac{it_f(E_n^f+i\epsilon)}{\hbar}} e^{-\frac{it_i(E_n^i)}{\hbar}} \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} \\
&= \left[\langle q_f | n_f \rangle \langle n_f | n_i \rangle \langle n_i | q_i \rangle \right] \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon}. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

De la ecuación anterior, pasando los brakets $\langle q_f | n_f \rangle \langle n_i | q_i \rangle$ e insertándoles las exponenciales es posible escribir

$$\langle n_f | n_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon} = \frac{\langle q_f, \infty | q_i, -\infty \rangle}{\langle q_f, \infty | n_f \rangle \langle n_i | q_i, -\infty \rangle} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f+i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i+i\epsilon}. \tag{4.14}$$

Ahora se analizará cada término para dejarlo en términos del hamiltoniano. En el numerador insertando identidades para cada uno de los q^i se obtiene

$$\begin{aligned}
& \langle q_f, \infty | q_i, -\infty \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \\
&= \int dq^0 \langle q_f, \infty | q^0 \rangle \langle q^0 | q_i, -\infty \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \\
&= \int dq^0 \int_{q(t=0)=q^0}^{q(\infty)} \int_{p(t=0)=p^0}^{p(\infty)} \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt (p\dot{q} - H_f)} \\
& \int_{q(-\infty)}^{q(t=0)=q^0} \mathcal{D}q \int_{p(-\infty)}^{p(t=0)=p^0} \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt (p\dot{q} - H_i)} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon'} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt (p\dot{q} - H_i) - \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta H} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon'} \quad (4.16)$$

Introduciendo la notación

$$\mathcal{O}_\Lambda = \frac{\partial H}{\partial z^\Lambda}, \quad (4.17)$$

la ecuación (4.16) se reescribe como

$$\begin{aligned}
& \langle q_f, \infty | q_i, -\infty \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \\
&= \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt (p\dot{q} - H_i) - \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \mathcal{O}_\Lambda(t) \delta z^\Lambda} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Ahora notando que en este caso las funcionales generadoras son de la forma

$$Z_j = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt (p\dot{q} - H_j)}, \quad (4.19)$$

y como la teoría es reversible temporalmente se obtienen las siguientes expresiones para los factores en el denominador

$$\langle q_f, \infty | n_f \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon} = \sqrt{Z_f} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon'} \quad (4.20)$$

$$\langle n_i | q_i, -\infty \rangle \Big|_{E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} = \sqrt{Z_i} \Big|_{E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon'} \quad (4.21)$$

quedando (4.18) como

$$\langle n_f | n_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} = \frac{\int \mathcal{D}q e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt (p\dot{q} - H_i) - \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^\Lambda \mathcal{O}_\Lambda}}{\sqrt{Z_i Z_f}} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon'} \quad (4.22)$$

Ahora para simplificar este resultado es conveniente observar que puede ser expresado mediante valores medios ya que

$$\langle A \rangle_n = \langle n_i | A | n_i \rangle = \frac{1}{Z_i} \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt (p\dot{q} - H_i)} A(q) \Big|_{E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \quad (4.23)$$

donde se está tomando el valor esperado con respecto al hamiltoniano inicial H_i . En consecuencia tomando el valor esperado de la exponencial de la variación del hamiltoniano, el traslape de los estados n-ésimos de (4.22) toma la forma

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{n}_f | \mathbf{n}_i \rangle \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \\ &= \frac{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A} \right\rangle_{\mathbf{n}}}{\sqrt{\frac{Z_f}{Z_i}}} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$= \frac{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A} \right\rangle_{\mathbf{n}}}{\sqrt{\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt ((pq - H_i) - \delta z^P \mathcal{O}_P)}} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A} \right\rangle_{\mathbf{n}}}{\sqrt{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt \delta z^P \mathcal{O}_P} \right\rangle_{\mathbf{n}}}} \Big|_{E_n^f \rightarrow E_n^f + i\epsilon, E_n^i \rightarrow E_n^i + i\epsilon} \quad (4.26)$$

por lo tanto al elevar al cuadrado (de manera $zz^* = z^2$)

$$|\langle \mathbf{n}_f | \mathbf{n}_i \rangle|^2 = \frac{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A} \right\rangle_{\mathbf{n}} \left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt \delta z^B \mathcal{O}_B} \right\rangle_{\mathbf{n}}}{\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt \delta z^P \mathcal{O}_P} \right\rangle_{\mathbf{n}}}. \quad (4.27)$$

Para simplificar la expresión anterior, se expanden en series cada uno de los términos mediante la serie de Maclaurin (Taylor en 0) de la exponencial, que es

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots, \quad (4.28)$$

y tomando hasta segundo orden en la perturbación se obtiene

$$\left\langle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A(t)} \right\rangle_{\mathbf{n}} = \left\langle 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A(t) + \frac{i}{2\hbar} \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_{\mathbf{n}} \quad (4.29)$$

$$= 1 - \frac{i}{\hbar} \left\langle \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A(t) \right\rangle_{\mathbf{n}} - \frac{1}{2\hbar^2} \left\langle \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \int_0^\infty dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_{\mathbf{n}}, \quad (4.30)$$

por simplicidad se tomará

$$1 - \frac{i}{\hbar} \left\langle \int_0^\infty dt \delta z^A \mathcal{O}_A(t) \right\rangle_{\mathbf{n}} - \frac{1}{2\hbar^2} \left\langle \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \int_0^\infty dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_{\mathbf{n}} = 1 - i \langle \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}^2 \rangle \quad (4.31)$$

y del mismo modo para $B \rightarrow b$, $P \rightarrow p$ quedando

$$|\langle \mathbf{n}_f | \mathbf{n}_i \rangle|^2 = \frac{(1 - i \langle \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}^2 \rangle)(1 - i \langle \mathbf{b} \rangle - \langle \mathbf{b}^2 \rangle)}{1 - i \langle \mathbf{p} \rangle - \langle \mathbf{p}^2 \rangle}, \quad (4.32)$$

después se utiliza sobre el denominador el teorema del binomio dado por

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx \quad (4.33)$$

para llegar a (de nuevo recordando que es hasta segundo orden)

$$|\langle n_f | n_i \rangle|^2 = (1 - i \langle a \rangle - \langle a^2 \rangle)(1 - i \langle b \rangle - \langle b^2 \rangle)(1 + i \langle p \rangle + \langle p^2 \rangle) \quad (4.34)$$

$$= 1 - i \langle a \rangle - i \langle b \rangle + i \langle p \rangle - \langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a \rangle \langle p \rangle + \langle b \rangle \langle p \rangle - \langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle + \langle p^2 \rangle. \quad (4.35)$$

Los términos lineales se anulan debido a que A, B, P son índices libres y el término de P integra sobre el todo el tiempo, anulando las partes respectivas a A y B , i.e.

$$\begin{aligned} -i \langle a \rangle - i \langle b \rangle + i \langle p \rangle &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\infty dt \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t) \rangle_n - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^0 dt \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t) \rangle_n \\ &+ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^\infty dt \delta z^P \langle \mathcal{O}_P(t) \rangle_n \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$= 0. \quad (4.37)$$

Para los cruzados se tiene

$$\begin{aligned} -\langle a \rangle \langle b \rangle + \langle a \rangle \langle p \rangle + \langle b \rangle \langle p \rangle &= \frac{1}{\hbar^2} \left[-\int_0^\infty dt_1 \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^0 dt_2 \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \right. \\ &+ \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^\infty dt_2 \delta z^P \langle \mathcal{O}_P(t_2) \rangle_n \\ &+ \left. \int_{-\infty}^0 dt_1 \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^\infty dt_2 \delta z^P \langle \mathcal{O}_P(t_2) \rangle_n \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\hbar^2} \left[-\int_0^\infty dt_1 \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^0 dt_2 \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \right. \\ &+ \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^\infty dt_2 \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \\ &+ \left. \int_{-\infty}^0 dt_1 \delta z^A \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \int_{-\infty}^\infty dt_2 \delta z^B \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$= -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^\infty dt_2 \langle \mathcal{O}_A \rangle_n \langle \mathcal{O}_B \rangle_n \delta z^A \delta z^B. \quad (4.40)$$

Finalmente para los cuadrados

$$\begin{aligned} -\langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle + \langle p^2 \rangle &= \frac{1}{2\hbar^2} \left[-\left\langle \int_0^\infty dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \int_0^\infty dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_n \right. \\ &- \left\langle \int_{-\infty}^0 dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \int_{-\infty}^0 dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_n \\ &+ \left. \left\langle \int_{-\infty}^\infty dt_1 \delta z^A \mathcal{O}_A(t_1) \int_{-\infty}^\infty dt_2 \delta z^B \mathcal{O}_B(t_2) \right\rangle_n \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\hbar^2} \left[-\int_0^\infty dt_1 \int_0^\infty dt_2 \langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \right. \\ &- \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 \langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \\ &+ \left. \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \right] \delta z^A \delta z^B \end{aligned} \quad (4.42)$$

y utilizando

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 &= \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 + \int_0^{\infty} dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \\ &+ \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 + \int_0^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^0 dt_2 \end{aligned} \quad (4.43)$$

los términos con extremos iguales se van (los que tienen ambos infinitos en el mismo extremo de sus integrales) y pidiendo simetría ante inversión temporal, i.e.,

$$\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n = \langle \mathcal{O}_A(-t_1) \mathcal{O}_B(-t_2) \rangle_n, \quad (4.44)$$

solamente queda

$$-\langle a^2 \rangle - \langle b^2 \rangle + \langle p^2 \rangle = \frac{2}{2\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n \delta z^A \delta z^B. \quad (4.45)$$

Por lo que finalmente obtenemos

$$|\langle n_f | n_i \rangle|^2 = 1 - G_{AB}^{(n)} \delta z^A \delta z^B, \quad (4.46)$$

y para obtener una relación comparable con (2.10)

$$F(z, z + \delta z) = |\langle n_f | n_i \rangle| = 1 - \frac{1}{2} G_{AB}^{(n)} \delta z^A \delta z^B, \quad (4.47)$$

donde

$$G_{AB}^{(n)} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n - \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n], \quad (4.48)$$

cabe resaltar que algunos autores proponen la fidelidad como $|\langle \psi | \psi' \rangle|^2$, si es así, el factor de $\frac{1}{2}$ en la ecuación anterior no va.

Esta expresión es muy similar a (4.3), pero no es solamente para estados base ni para variaciones en los parámetros, sino que ya ha sido generalizada. Por lo que ahora se puede utilizar en estados excitados junto con variaciones del espacio fase, conservando a su vez todas las libertades que se tenían anteriormente (sobre todo poder obtener el TGC sin siquiera conocer la función de onda).

4.2 EQUIVALENCIA ENTRE LOS MÉTODOS

Partiendo de la expresión (4.48)

$$G_{AB}^{(n)} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n - \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n],$$

se le llevará al cuadro de Schrödinger, donde los operadores son independientes del tiempo, implicando que si tenemos un operador genérico $\hat{A}(t)$, habrá de escribirse de la forma $\hat{A}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\hat{A}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ donde \hat{A} ya está en el cuadro de Schrödinger, que puede pensarse como el de Hamilton pero a tiempo $t = 0$. Primero se analiza el segundo factor de los valores esperados individuales, donde

$$\langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n = \langle n | e^{\frac{i}{\hbar}Ht_1} \mathcal{O}_A e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_1} | n \rangle = \langle n | \mathcal{O}_A | n \rangle, \quad (4.49)$$

ya que se aplica la primera exponencial al bra del lado izquierdo y la segunda al ket del derecho, cancelándose entre ellas. Ahora, usando la misma manipulación, se encuentra que el primer término es

$$\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n = e^{\frac{i}{\hbar}E_n(t_2-t_1)} \langle n | \mathcal{O}_A e^{-\frac{i}{\hbar}Ht_1} e^{\frac{i}{\hbar}Ht_2} \mathcal{O}_B | n \rangle, \quad (4.50)$$

e insertando un uno en la base de las energías entre las exponenciales resulta

$$\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n = \sum_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} \langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle. \quad (4.51)$$

Ahora, notando que

$$\begin{aligned} & \sum_m e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} \langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle \\ &= \sum_{m \neq n} e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} \langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle + \langle n | \mathcal{O}_A | n \rangle \langle n | \mathcal{O}_B | n \rangle. \end{aligned} \quad (4.52)$$

el integrando de (4.48) se reduce a

$$\langle \mathcal{O}_A(t_1) \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n - \langle \mathcal{O}_A(t_1) \rangle_n \langle \mathcal{O}_B(t_2) \rangle_n = \sum_{m \neq n} e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} \langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle, \quad (4.53)$$

y por lo tanto

$$G_{AB}^{(n)} = \frac{-1}{\hbar^2} \sum_{m \neq n} \left[\int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} \right] \langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle, \quad (4.54)$$

donde se ha asilado completamente la dependencia temporal. Para integrarla, teniendo en cuenta los rangos de t_1 y t_2 se establece la prescripción

$$\int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n)(t_2-t_1)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar}(E_m-E_n+i\epsilon)(t_2-t_1)} \quad (4.55)$$

$$= \frac{-\hbar^2}{(E_m - E_n)^2} \quad (4.56)$$

y por lo tanto

$$G_{AB}^{(n)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \mathcal{O}_A | m \rangle \langle m | \mathcal{O}_B | n \rangle}{(E_m - E_n)^2}. \quad (4.57)$$

Si únicamente se consideran los parámetros λ^a que aparecen en el hamiltoniano, la expresión de arriba se lee como

$$G_{ij}^{(n)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \partial_i H | m \rangle \langle m | \partial_j H | n \rangle}{(E_m - E_n)^2}. \quad (4.58)$$

que es conocida como la forma perturbativa del tensor geométrico cuántico [2][23].

Una ventaja de esta expresión es que las divergencias se ven ocurrir explícitamente cuando el llamado cruzamiento de nivel toma lugar, el cual es una característica de las transiciones de fase cuánticas [27]. Pero al remover la dependencia temporal ahora se deben tomar los valores esperados de las variaciones del hamiltoniano sobre todos los estados cuánticos del sistema, la cual no es una tarea fácil generalmente, presentando así una desventaja con respecto a su contraparte.

De (4.58), se puede llegar fácilmente a la expresión propuesta originalmente por Provost y Vallee [1]. Diferenciando la ecuación de Schrödinger se encuentra que

$$\langle \partial_i m | n \rangle = \frac{\langle n | \partial_i H | m \rangle}{(E_n - E_m)}, \quad (4.59)$$

para una $n \neq m$, por lo que se sigue que

$$G_{ij}^{(n)} = \sum_{m \neq n} \langle \partial_i n | m \rangle \langle m | \partial_j n \rangle = \sum_m \langle \partial_i n | m \rangle \langle m | \partial_j n \rangle - \langle \partial_i n | n \rangle \langle n | \partial_j n \rangle, \quad (4.60)$$

donde se añadió (y restó) el término faltante para completar la suma. De aquí se observa que hay un uno en forma de la base de la energía ($\mathbb{I} = \sum_m |m\rangle \langle m|$), y por lo tanto

$$G_{ij}^{(n)} = \langle \partial_i n | \partial_j n \rangle - \langle \partial_i n | n \rangle \langle n | \partial_j n \rangle. \quad (4.61)$$

Siendo esta la forma más común del tensor geométrico cuántico, que ya se ha discutido anteriormente con (2.64). Cabe destacar que al ser procesos adiabáticos, el estado inicial y final suelen ser el mismo estado. Por lo que queda demostrado que ambas expresiones son equivalentes y se ejemplificará en el siguiente capítulo.

EJEMPLOS DEL TGC PARA EL ESTADO N-ÉSIMO

En el presente capítulo se volverán a calcular los TGCs para los ejemplos del oscilador armónico generalizado y los osciladores armónicos simétricamente acoplados, pero ahora utilizando el método descrito en el capítulo anterior; ejemplificando así la equivalencia de este, con el método de las funciones de onda.

5.1 OSCILADOR ARMÓNICO GENERALIZADO

Recordando que el hamiltoniano de un oscilador armónico generalizado está dado por (1.94) que es

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[Z\hat{p}^2 + Y(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + X\hat{q}^2],$$

y para facilitar la resolución del problema, se hacen las transformaciones canónicas dadas por (1.95) y (1.96), para tener los operadores de creación y aniquilación usuales

$$\hat{a} = \left(\frac{w}{2\hbar}\right)^{1/2}\hat{Q} - i\left(\frac{1}{2w\hbar}\right)^{1/2}\hat{P} \quad (5.1)$$

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{w}{2\hbar}\right)^{1/2}\hat{Q} + i\left(\frac{1}{2w\hbar}\right)^{1/2}\hat{P} \quad (5.2)$$

con los \hat{Q} y \hat{P} dados en términos de estos operadores

$$\hat{Q} = \left(\frac{\hbar}{2w}\right)^{1/2}(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (5.3)$$

$$\hat{P} = i\left(\frac{\hbar w}{2}\right)^{1/2}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (5.4)$$

Como las entradas del tensor geométrico cuántico están dadas por

$$G_{\alpha\beta}^{(n)} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_\alpha(t_1)\mathcal{O}_\beta(t_2) \rangle_n - \langle \mathcal{O}_\alpha(t_1) \rangle_n \langle \mathcal{O}_\beta(t_2) \rangle_n], \quad (5.5)$$

donde \mathcal{O}_α y \mathcal{O}_β son las variaciones del hamiltoniano con respecto a los parámetros α y β , que en este caso pueden ser X , Y o Z por lo que los operadores son

$$\mathcal{O}_X = \frac{\hat{q}^2}{2}, \quad (5.6)$$

$$O_Y = \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}}{2}, \quad (5.7)$$

$$O_Z = \frac{\partial H}{\partial Z} = \frac{\hat{p}^2}{2}. \quad (5.8)$$

Para obtener la entrada XY primero habrá que obtener $\langle O_X(t_2)O_Y(t_1) \rangle_n$, $\langle O_X(t) \rangle$ y $\langle O_Y(t) \rangle_n$ individualmente. El primero se logra de la siguiente manera

$$\langle O_X(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n = \langle n | \frac{1}{2}q^2(t_1) \frac{1}{2}[p(t_2)q(t_2) + q(t_2)p(t_2)] | n \rangle. \quad (5.9)$$

por lo que

$$\begin{aligned} 4 \langle O_X(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | [Z\hat{Q}^2(t_1)][(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_2)(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))] | n \rangle \quad (5.10) \\ &= \langle n | [Z\frac{\hbar}{2w}(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))^2] \\ &\quad [(i(\frac{\hbar w}{2})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}(t_2)) - Y(\frac{\hbar}{2w})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2))) (\frac{\hbar}{2w})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)) \\ &\quad + (\frac{\hbar}{2w})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)) (i(\frac{\hbar w}{2})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}(t_2)) - Y(\frac{\hbar}{2w})^{1/2}(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)))] | n \rangle \\ &= \langle n | [\frac{Z\hbar}{2w}(\hat{a}^{\dagger 2}(t_1) + \hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_1) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}^2(t_1))] \\ &\quad [i\hbar(\hat{a}^{\dagger 2}(t_2) - \hat{a}^2(t_2)) - \frac{Y\hbar}{w}(\hat{a}^{\dagger 2}(t_2) + \hat{a}^\dagger(t_2)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_2)\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}^2(t_2))] | n \rangle \quad (5.11) \end{aligned}$$

En este punto es importante recordar las siguientes propiedades del oscilador armónico y de los operadores de creación y aniquilación [6]H:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (5.12)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (5.13)$$

$$\langle n' | n \rangle = \delta_{n',n}. \quad (5.14)$$

de modo que al momento de hacer la multiplicación en la ecuación (5.11) solo serán distintos de cero los términos que contengan el mismo número de operadores de creación que de aniquilación, reduciéndose a

$$\begin{aligned} 4 \langle O_X(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | [(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w}) \hat{a}^{\dagger 2}(t_1)\hat{a}^2(t_2) \\ &\quad - (\frac{YZ\hbar^2}{2w^2}) (\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)\hat{a}(t_2) + \hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_1)\hat{a}(t_2)\hat{a}^\dagger(t_2) \\ &\quad + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2)\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)\hat{a}(t_2)) \\ &\quad + (\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w}) \hat{a}(t_1)\hat{a}^{\dagger 2}(t_2)] | n \rangle. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Pero notemos que los operadores se encuentra a tiempos distintos (t_2 y t_1), por lo que es necesario ligarlos a los del cuadro de Schrödinger de un tiempo t_0 . Para eso se utilizan las

ecuaciones de Heisenberg para obtener dos ecuaciones diferenciales desacopladas para \hat{a} y \hat{a}^\dagger respectivamente [6][5]

$$\frac{d\hat{a}}{dt} = \sqrt{\frac{w}{2\hbar}}(p - iwx) = -i\omega\hat{a}, \quad (5.16)$$

$$\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt} = i\omega\hat{a}^\dagger, \quad (5.17)$$

cuyas soluciones son

$$\hat{a}(t - t_0) = \hat{a}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (5.18)$$

$$\hat{a}^\dagger(t - t_0) = \hat{a}^\dagger(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}. \quad (5.19)$$

Tomando por simplicidad $\hat{a}(t_0) = \hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger(t_0) = \hat{a}^\dagger$ se tienen las siguientes propiedades para estos operadores:

$$\hat{a}(t - t_0)\hat{a}^\dagger(t - t_0) = \hat{a}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{a}^\dagger(t_0)e^{i\omega(t-t_0)} = \hat{a}\hat{a}^\dagger, \quad (5.20)$$

del mismo modo

$$\hat{a}^\dagger(t - t_0)\hat{a}(t - t_0) = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (5.21)$$

por lo que si se tienen el mismo número de operadores de creación que de aniquilación en un factor, la evolución temporal no afecta el producto (puede verse esto de otra manera al darse cuenta que el operador de número está directamente en el hamiltoniano).

Por otra parte

$$\hat{a}^2(t - t_0) = \hat{a}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{a}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} = \hat{a}^2e^{-2i\omega(t-t_0)}, \quad (5.22)$$

análogamente

$$\hat{a}^{\dagger 2}(t - t_0) = \hat{a}^{\dagger 2}e^{2i\omega(t-t_0)}, \quad (5.23)$$

y si se tiene un producto de operadores cuadrados a diferentes tiempos se obtiene

$$\hat{a}^{\dagger 2}(t_1 - t_0)\hat{a}^2(t_2 - t_0) = \hat{a}^{\dagger 2}e^{2i\omega(t_1-t_0)}\hat{a}^2e^{-2i\omega(t_2-t_0)} = \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2e^{2i\omega(t_1-t_2)}, \quad (5.24)$$

de la misma forma

$$\hat{a}^2(t_1 - t_0)\hat{a}^{\dagger 2}(t_2 - t_0) = \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2}e^{-2i\omega(t_1-t_2)}. \quad (5.25)$$

Utilizando estos resultados, la ecuación (5.15) se vuelve

$$\begin{aligned} 4 \langle O_X(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2e^{2i\omega(t_1-t_2)} \right. \\ &\quad - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger) \\ &\quad \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) \hat{a}^2\hat{a}^{\dagger 2}e^{-2i\omega(t_1-t_2)} \right] |n \rangle, \end{aligned} \quad (5.26)$$

y después de usar las propiedades de (5.12), (5.13), el producto anterior se reduce a

$$\begin{aligned}
4 \langle O_X(t_1) O_Y(t_2) \rangle_n &= \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) \\
&\quad - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (n^2 + n(n+1) + n(n+1) + (n+1)^2) \\
&\quad + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2). \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Por lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle O_X(t_1) O_Y(t_2) \rangle_n &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (2n+1)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right]. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

Para encontrar $\langle O_X(t) \rangle$ y $\langle O_Y(t) \rangle$, se procede similar como se ve a continuación

$$\begin{aligned}
\langle O_X(t) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} q^2 | n \rangle = \langle n | \frac{Z}{2} \hat{Q}^2 | n \rangle = \langle n | \frac{Z\hbar}{4w} (\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t))^2 | n \rangle \\
&= \langle n | \frac{Z\hbar}{4w} (\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) + \hat{a}(t)\hat{a}(t)) | n \rangle \\
&= \langle n | \frac{Z\hbar}{4w} (\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t)) | n \rangle = \frac{Z\hbar}{4w} (n + (n+1)). \tag{5.29}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle O_X(t) \rangle_n = \frac{Z\hbar}{4w} (2n+1), \tag{5.30}$$

y de manera análoga se obtiene que

$$\langle O_Y(t) \rangle_n = \frac{-Y\hbar}{2w} (2n+1), \tag{5.31}$$

con todo lo anterior, se calcula la entrada XY del tensor geométrico cuántico, como sigue

$$-G_{\lambda_{XY}} = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 [\langle O_X(t_1) O_Y(t_2) \rangle - \langle O_X(t_1) \rangle \langle O_Y(t_2) \rangle] \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 \left[\frac{1}{4} \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2i\omega(t_1-t_2)} (n(n-1)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (2n+1)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2i\omega(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z\hbar}{4w} (2n+1) \frac{-Y\hbar}{2w} (2n+1) \right] \quad (5.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 \int_{t_0}^{\infty} dt_2 \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2i\omega(t_1-t_2)} (n(n-1)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2i\omega(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right] \quad (5.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{4} \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) n(n-1) \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 e^{2i\omega t_1} \int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{-2i\omega t_2} \\ &\quad + \frac{1}{4\hbar^2} \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) (n+1)(n+2) \int_{-\infty}^{t_0} dt_1 e^{-2i\omega t_1} \int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{2i\omega t_2}. \quad (5.35) \end{aligned}$$

Para resolver las integrales se aplica la prescripción dada, que puede ser empleada de dos maneras tales que arrojen los mismos resultados:

La primera es multiplicar las funciones a integrar por un factor de $e^{-\epsilon_2 t_2}$, hacer la integral del respectiva a t_2 y después hacer tender $\epsilon_2 \rightarrow 0$. Ya que se tiene este resultado, se multiplica ahora por $e^{\epsilon_1 t_1}$ y se hace tender a $\epsilon_1 \rightarrow 0$.

La segunda forma es aplicarla de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{t_0} dt_1 e^{2i\omega t_1} \xrightarrow{t_1 \rightarrow -i\tau_2} -i \int_{-\infty}^{t_0} d\tau_2 e^{2w\tau_2} = \frac{-i}{2w} e^{2w t_0}, \quad (5.36)$$

$$\int_{-\infty}^{t_0} dt_1 e^{-2i\omega t_1} \xrightarrow{t_1 \rightarrow +i\tau_2} i \int_{-\infty}^{t_0} d\tau_2 e^{2w\tau_2} = \frac{i}{2w} e^{2w t_0}, \quad (5.37)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{-2i\omega t_2} \xrightarrow{t_2 \rightarrow -i\tau_1} -i \int_{t_0}^{\infty} d\tau_1 e^{-2w\tau_1} = \frac{-i}{2w} e^{-2w t_0}, \quad (5.38)$$

$$\int_{t_0}^{\infty} dt_2 e^{2i\omega t_2} \xrightarrow{t_2 \rightarrow +i\tau_1} i \int_{t_0}^{\infty} d\tau_1 e^{-2w\tau_1} = \frac{i}{2w} e^{-2w t_0}. \quad (5.39)$$

Por lo que resolviendo las integrales de esta manera la ecuación (5.35) se vuelve

$$\begin{aligned} -G_{\lambda_{XY}} &= \frac{1}{4\hbar^2} \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) n(n-1) \left(\frac{-i}{2w} e^{2w t_0} \right) \left(\frac{-i}{2w} e^{-2w t_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\hbar^2} \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) (n+1)(n+2) \left(\frac{i}{2w} e^{2w t_0} \right) \left(\frac{i}{2w} e^{-2w t_0} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{-YZ}{2w^2} - \frac{iZ}{2w} \right) n(n-1) \left(\frac{-i}{2w} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{-YZ}{2w^2} + \frac{iZ}{2w} \right) (n+1)(n+2) \left(\frac{i}{2w} \right)^2. \quad (5.40) \end{aligned}$$

Agrupando los términos reales e imaginarios y utilizando la definición de w (3.4) finalmente se obtiene

$$G_{\lambda_{XY}} = -\frac{2YZ}{32w^4}(n^2 + n + 1) + \frac{iZ}{8w^3}(n + \frac{1}{2}), \quad (5.41)$$

análogamente se resuelve para las 8 entradas restantes del tensor geométrico cuántico de este sistema. A continuación se mostrarán los resultados necesarios para calcular cada una de las entradas de dicho tensor:

$$\begin{aligned} \langle O_X(t_1)O_X(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2}q^2(t_1)\frac{1}{2}q^2(t_2) | n \rangle = \langle n | \frac{Z^2}{4}\hat{Q}^2(t_1)\hat{Q}^2(t_2) | n \rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{Z\hbar}{2w}\right)^2 \left[e^{2iw(t_1-t_2)}(n(n-1)) + (2n+1)^2 + e^{-2iw(t_1-t_2)}(n+1)(n+2) \right] \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \langle O_X(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2}q^2(t_1)\frac{1}{2}[p(t_2)q(t_2) + q(t_2)p(t_2)] | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n | [Z\hat{Q}^2(t_1)][(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_2)(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))] | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)}(n(n-1)) - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (2n+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)}(n+1)(n+2) \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \langle O_X(t_1)O_Z(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2}q^2(t_1)\frac{1}{2}p^2(t_2) | n \rangle = \frac{1}{4} \langle n | \hat{Q}^2(t_1)(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))^2 | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 - \frac{\hbar}{4} + \frac{iY\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)}(n(n-1)) + \left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) (2n+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 - \frac{\hbar}{4} - \frac{iY\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)}(n+1)(n+2) \right] \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \langle O_Y(t_1)O_X(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2}[p(t_1)q(t_1) + q(t_1)p(t_1)]\frac{1}{2}q^2(t_2) | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n | [(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))\hat{Q}(t_1) + \hat{Q}(t_1)(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))][Z\hat{Q}^2(t_2)] | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} + \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)}(n(n-1)) - \left(\frac{YZ\hbar^2}{2w^2} \right) (2n+1)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-YZ\hbar^2}{2w^2} - \frac{iZ\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)}(n+1)(n+2) \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} \langle O_Y(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2}[p(t_1)q(t_1) + q(t_1)p(t_1)]\frac{1}{2}[p(t_2)q(t_2) + q(t_2)p(t_2)] | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle n | [(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))\hat{Q}(t_1) + \hat{Q}(t_1)(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))] \\ &\quad [(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_2)(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))] | n \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\left(\frac{Y\hbar}{w} \right)^2 + \hbar^2 \right) (e^{2iw(t_1-t_2)}(n(n-1)) + e^{-2iw(t_1-t_2)}(n+1)(n+2)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{Y\hbar}{w} \right)^2 (2n+1)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Y(t_1)O_Z(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} [p(t_1)q(t_1) + q(t_1)p(t_1)] \frac{1}{2} p^2(t_2) | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle n | [(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))\hat{Q}(t_1) + \hat{Q}(t_1)(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))] [Z^{-1}(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))^2] | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-Y^3\hbar^2}{2w^2Z} - \frac{Y\hbar^2}{2Z} - \frac{i\hbar^2w}{2Z} - \frac{iY^2\hbar^2}{2wZ} \right) e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) \right. \\
&\quad - \left(\frac{Y\hbar^2}{2Z} + \frac{Y^3\hbar^2}{2wZ} \right) (2n+1)^2 \\
&\quad \left. + \left(\frac{-Y^3\hbar^2}{2w^2Z} - \frac{Y\hbar^2}{2Z} + \frac{i\hbar^2w}{2Z} + \frac{iY^2\hbar^2}{2wZ} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right] \quad (5.47)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Z(t_1)O_X(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} p^2(t_1) \frac{1}{2} q^2(t_2) | n \rangle = \frac{1}{4} \langle n | (\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))^2 \hat{Q}^2(t_2) | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 - \frac{\hbar}{4} - \frac{iY\hbar^2}{2w} \right) e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) + \left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4} \right) (2n+1)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\left(\frac{Y\hbar}{2w} \right)^2 - \frac{\hbar}{4} + \frac{iY\hbar^2}{2w} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right] \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Z(t_1)O_Y(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} p^2(t_1) \frac{1}{2} [p(t_2)q(t_2) + q(t_2)p(t_2)] | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \langle n | Z^{-1}(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))^2 [(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_2)(\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))] | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{-Y^3\hbar^2}{2w^2Z} - \frac{Y\hbar^2}{2Z} + \frac{i\hbar^2w}{2Z} + \frac{iY^2\hbar^2}{2wZ} \right) e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) \right. \\
&\quad - \left(\frac{Y\hbar^2}{2Z} + \frac{Y^3\hbar^2}{2wZ} \right) (2n+1)^2 \\
&\quad \left. + \left(\frac{-Y^3\hbar^2}{2w^2Z} - \frac{Y\hbar^2}{2Z} - \frac{i\hbar^2w}{2Z} - \frac{iY^2\hbar^2}{2wZ} \right) e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2) \right] \quad (5.49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Z(t_1)O_Z(t_2) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} p^2(t_1) \frac{1}{2} p^2(t_2) | n \rangle = \frac{1}{4} \langle n | Z^{-2}(\hat{P}(t_1) - Y\hat{Q}(t_1))^2 (\hat{P}(t_2) - Y\hat{Q}(t_2))^2 | n \rangle \\
&= \frac{1}{4} \left[\left(\left(\frac{\hbar w}{2} \right)^2 + \frac{Y^2\hbar^2}{2} + \frac{Y^4\hbar^2}{4w^2} \right) (e^{2iw(t_1-t_2)} (n(n-1)) + e^{-2iw(t_1-t_2)} (n+1)(n+2)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\hbar}{2} + \frac{Y^2\hbar}{2w} \right)^2 (2n+1)^2 \right] \quad (5.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_X(t) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} q^2 | n \rangle = \langle n | \frac{Z}{2} \hat{Q}^2 | n \rangle \\
&= \frac{Z\hbar}{4w} (2n+1) \quad (5.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Y(t) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} [p(t)q(t) + q(t)p(t)] | n \rangle \\
&= \langle n | [(\hat{P}(t) - Y\hat{Q}(t))\hat{Q}(t) + \hat{Q}(t)(\hat{P}(t) - Y\hat{Q}(t))] | n \rangle \\
&= \frac{-Y\hbar}{2w} (2n+1) \quad (5.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle O_Z(t) \rangle_n &= \langle n | \frac{1}{2} p^2 | n \rangle = \langle n | \frac{Z^{-1}}{2} (\hat{P}(t) - Y\hat{Q}(t))^2 | n \rangle \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{w\hbar}{2Z} + \frac{Y^2\hbar}{2wZ} \right) (2n+1) \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Utilizando todos estos resultados se obtiene que el tensor geométrico cuántico para el oscilador armónico generalizado es

$$G_{\lambda}^{(n)} = \frac{(n^2 + n + 1)}{32w^2} \begin{bmatrix} Z^2 & -2YZ & -XZ + 2Y^2 \\ -2YZ & 4ZX & -2YX \\ -XZ + 2Y^2 & -2YX & X^2 \end{bmatrix} - i \frac{(n + \frac{1}{2})}{8w^3} \begin{bmatrix} 0 & -Z & Y \\ Z & 0 & -X \\ -Y & X & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.54)$$

que es justamente (3.47), pero en este caso solo tuvo que utilizarse el hamiltoniano, la función de onda no fue necesario siquiera mencionarla.

5.2 OSCILADORES ARMÓNICOS SIMÉTRICAMENTE ACOPLADOS

Recordando que el sistema formado por unos osciladores armónicos simétricamente acoplados está descrito por (3.48) que es

$$H(k, k', q_1, q_2, t) = \frac{1}{2} [\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + k(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + k'(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2],$$

y utilizando las transformaciones canónicas dadas por (3.49), (3.50), (3.51) y (3.52) el hamiltoniano queda desacoplado, i.e.,

$$H = \frac{1}{2} (\hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + w_1^2 \hat{Q}_1^2 + w_2^2 \hat{Q}_2^2), \quad (5.55)$$

donde

$$w_1^2 = k, \quad (5.56)$$

$$w_2^2 = k + 2k', \quad (5.57)$$

y se puede describir con 2 bases de energía por lo que los operadores \hat{Q}_1 , \hat{P}_1 , \hat{Q}_2 y \hat{P}_2 pueden escribirse en términos de sus respectivos operadores de creación y aniquilación

$$\hat{Q}_1(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2w_1}} (\hat{a}_1^\dagger e^{iw_1 t} + \hat{a}_1 e^{-iw_1 t}), \quad (5.58)$$

$$\hat{P}_1(t) = \sqrt{\frac{\hbar w_1}{2}} (\hat{a}_1^\dagger e^{iw_1 t} - \hat{a}_1 e^{-iw_1 t}), \quad (5.59)$$

$$\hat{Q}_2(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2w_2}} (\hat{a}_2^\dagger e^{iw_2 t} + \hat{a}_2 e^{-iw_2 t}), \quad (5.60)$$

$$\hat{P}_2(t) = \sqrt{\frac{\hbar w_2}{2}} \left(\hat{a}_2^\dagger e^{i w_2 t} - \hat{a}_2 e^{-i w_2 t} \right). \quad (5.61)$$

Ahora las variaciones correspondientes al hamiltoniano son

$$\mathcal{O}_k(t) = \frac{1}{2} (q_1(t)^2 + q_2(t)^2) \quad (5.62)$$

$$\mathcal{O}_{k'}(t) = \frac{1}{2} (q_1(t)^2 - q_1(t)q_2(t) - q_2(t)q_1(t) + q_2(t)^2). \quad (5.63)$$

Entonces, empezando por los valores esperados de un solo término

$$\langle \mathcal{O}_k(t) \rangle_n = \langle m, n | [\mathcal{O}_k(t)] | m, n \rangle \quad (5.64)$$

$$= \frac{\hbar(2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2)}{4w_1 w_2}, \quad (5.65)$$

$$\langle \mathcal{O}_{k'}(t) \rangle_n = \langle m, n | [\mathcal{O}_{k'}(t)] | m, n \rangle \quad (5.66)$$

$$= \frac{2n\hbar + \hbar}{2w_2}, \quad (5.67)$$

y los de dos términos son

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_k(t_1)\mathcal{O}_k(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar^2}{16w_1^2 w_2^2} e^{-2i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left((m^2 + 3m + 2) w_2^2 e^{2i(t_1 w_2 + t_2(2w_1+w_2))} \right. \\ &\quad + (2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2)^2 e^{2i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} + (m-1)mw_2^2 e^{2i(t_1(2w_1+w_2)+t_2 w_2)} \\ &\quad \left. + (n^2 + 3n + 2) w_1^2 e^{2i(t_1 w_1 + t_2(w_1+2w_2))} + (n-1)nw_1^2 e^{2i(t_1(w_1+2w_2)+t_2 w_1)} \right), \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\langle \mathcal{O}_k(t_1)\mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle_n = \frac{\hbar^2}{8w_2^2} \left[\frac{(2n+1)(2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2)}{w_1} \right. \quad (5.69)$$

$$\left. + (n^2 + 3n + 2) e^{-2i w_2(t_1-t_2)} + (n-1)ne^{2i w_2(t_1-t_2)} \right] \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{k'}(t_1)\mathcal{O}_k(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar^2}{8w_1 w_2^2} \left[e^{-2i w_2(t_1+t_2)} \left((2n+1)e^{2i w_2(t_1+t_2)}(2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (n^2 + 3n + 2) w_1 e^{4i t_2 w_2} + (n-1)nw_1 e^{4i t_1 w_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\langle \mathcal{O}_{k'}(t_1)\mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle_n = \frac{\hbar^2}{4w_2^2} e^{-2i w_2(t_1+t_2)} \left((n^2 + 3n + 2) e^{4i t_2 w_2} + (2n+1)^2 e^{2i w_2(t_1+t_2)} + (n-1)ne^{4i t_1 w_2} \right) \quad (5.72)$$

Por lo que realizando las restas pertinentes e integrando se obtienen las entradas del tensor geométrico cuántico:

$$G_{\lambda_{11}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_k(t_1)\mathcal{O}_k(t_2) \rangle - \langle \mathcal{O}_k(t_1) \rangle \langle \mathcal{O}_k(t_2) \rangle] \quad (5.73)$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{m^2 + m + 1}{w_1^4} + \frac{n^2 + n + 1}{w_2^4} \right) \quad (5.74)$$

$$G_{\lambda_{12}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_k(t_1) \mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle - \langle \mathcal{O}_k(t_1) \rangle \langle \mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle] \quad (5.75)$$

$$= \frac{n^2 + n + 1}{16w_2^4} \quad (5.76)$$

$$G_{\lambda_{21}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_{k'}(t_1) \mathcal{O}_k(t_2) \rangle - \langle \mathcal{O}_{k'}(t_1) \rangle \langle \mathcal{O}_k(t_2) \rangle] \quad (5.77)$$

$$= \frac{n^2 + n + 1}{16w_2^4} \quad (5.78)$$

$$G_{\lambda_{22}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 [\langle \mathcal{O}_{k'}(t_1) \mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle - \langle \mathcal{O}_{k'}(t_1) \rangle \langle \mathcal{O}_{k'}(t_2) \rangle] \quad (5.79)$$

$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{16w_2^4} \quad (5.80)$$

Por lo que el tensor geométrico cuántico es

$$G_{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{m^2+m+1}{w_1^4} + \frac{n^2+n+1}{w_2^4} \right) & \frac{2(n^2+n+1)}{w_2^4} \\ \frac{2(n^2+n+1)}{w_2^4} & \frac{4(n^2+n+1)}{w_2^4} \end{array} \right), \quad (5.81)$$

que es justamente (3.68).

Con estos ejemplos se pueden ver fácilmente las ventajas y desventajas de cada método, por lo que decidir cual utilizar dependerá enteramente del problema a tratar. Hasta este punto las métricas y las fases de Berry se hicieron tomando únicamente la variación en los parámetros, en el siguiente capítulo se realizarán bajo el mismo formalismo variaciones del espacio fase.

EJEMPLOS DEL TENSOR DE VARIACIÓN DE PQS

Hasta el momento únicamente se ha calculado el TGC con las variaciones de los parámetros, pero como se vio en el capítulo 4 existe otro tensor en el espacio de parámetros, ahora tomando variaciones lineales en los momentos y las posiciones. En este capítulo se calcularán los nuevos tensores para el oscilador armónico generalizado y los osciladores linealmente acoplados que ayudan a identificar transiciones de fase cuánticas, y el enredamiento, quitándose en parte la necesidad de utilizar matrices de densidad.

6.1 OSCILADOR ARMÓNICO GENERALIZADO

De nuevo, el hamiltoniano del OAG es

$$\hat{H} = \frac{1}{2}[Z\hat{p}^2 + Y(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + X\hat{q}^2] \quad (6.1)$$

y en este caso

$$\mathcal{O}_A = \frac{\partial H}{\partial z^A} \quad (6.2)$$

con $z_A = \{\hat{q}, \hat{p}\}$, por lo que

$$\mathcal{O}_q = \frac{\partial H}{\partial \hat{q}} = Y\hat{p} + X\hat{q}, \quad (6.3)$$

$$\mathcal{O}_p = \frac{\partial H}{\partial \hat{p}} = Z\hat{p} + Y\hat{q}. \quad (6.4)$$

Igual que en los casos anteriores se utilizaran las transformaciones canónicas pertinentes que son

$$\hat{q} = Z^{1/2}\hat{Q},$$

$$\hat{p} = Z^{-1/2}(\hat{P} - Y\hat{Q}),$$

donde se definió

$$w := (XZ - Y^2)^{1/2},$$

y además se tendrán los operadores de creación y aniquilación usuales,

$$\hat{a} = \left(\frac{w}{2\hbar}\right)^{1/2}\hat{Q} - i\left(\frac{1}{2w\hbar}\right)^{1/2}\hat{P},$$

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{w}{2\hbar}\right)^{1/2} \hat{Q} + i\left(\frac{1}{2w\hbar}\right)^{1/2} \hat{P},$$

entonces los operadores \hat{Q} y \hat{P} dados en términos de los operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{P} = i\left(\frac{\hbar w}{2}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}),$$

$$\hat{Q} = \left(\frac{\hbar}{2w}\right)^{1/2} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}),$$

definiendo r y s para simplificar la notación

$$r = i\left(\frac{\hbar w}{2}\right)^{1/2}, \quad (6.5)$$

$$s = \left(\frac{\hbar}{2w}\right)^{1/2}, \quad (6.6)$$

quedando

$$\hat{P} = r(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (6.7)$$

$$\hat{Q} = s(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (6.8)$$

Al hacer los valores esperados de \mathcal{O}_q y \mathcal{O}_p uno encuentra que son 0, esto debido a que están en términos de \hat{a} y \hat{a}^\dagger a la primera potencia y debido a la ortogonalidad de los estados, se anulan; por lo que solo quedan los términos cruzados. Empezando por el termino:

$$\langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n = \langle n | (Y\hat{p}(t_1) + X\hat{q}(t_1))(Y\hat{p}(t_2) + X\hat{q}(t_2)) | n \rangle \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} &= \langle n | [Z^{-1}Y^2(\hat{P}(t_1)\hat{P}(t_2) - Y(\hat{P}(t_1)\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_1)\hat{P}(t_2))) + Y^2\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)) \\ &+ X^2Z\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2) + XY(\hat{P}(t_1)\hat{Q}(t_2) + \hat{Q}(t_1)\hat{P}(t_2)) - 2XY^2\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)] | n \rangle \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} &= \langle n | [Z^{-1}Y^2(r^2(\hat{a}^\dagger(t_1) - \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}(t_2))) \\ &- Yrs((\hat{a}^\dagger(t_1) - \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)) + (\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}(t_2))) \\ &+ Y^2s^2(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2))) + X^2Zs^2(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)) \\ &+ XYrs((\hat{a}^\dagger(t_1) - \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2)) + (\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}(t_2))) \\ &- 2XY^2s^2(\hat{a}^\dagger(t_1) + \hat{a}(t_1))(\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}(t_2))] | n \rangle. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Recordando que debido a la ortogonalidad de estados, se ve que los términos $\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)$ y $\hat{a}(t_1)\hat{a}(t_2)$ tendrán contribución nula, por lo que el valor esperado se torna

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n &= \langle n | [-Z^{-1}Y^2r^2(\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)) \\ &+ (XYrs - Y^3Z^{-1}rs)(\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) - \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2) - \hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)) \\ &+ s^2(Y^4Z^{-1} + X^2Z - 2XY^2)(\hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2) + \hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2))] | n \rangle \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} &= \langle n | [-Z^{-1}Y^2r^2(\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)) \\ &+ s^2(Y^4Z^{-1} + X^2Z - 2XY^2)(\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2))] | n \rangle \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} &= \langle n | (-Z^{-1}Y^2r^2 + s^2(Y^4Z^{-1} + X^2Z - 2XY^2))(\hat{a}^\dagger(t_1)\hat{a}(t_2) + \hat{a}(t_1)\hat{a}^\dagger(t_2)) | n \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Sustituyendo y simplificando

$$-Z^{-1}Y^2r^2 + s^2(Y^4Z^{-1} + X^2Z - 2XY^2) = \frac{1}{2}X\hbar w. \quad (6.15)$$

Por lo que solo resta operar sobre el ket, pero como están a tiempos diferentes es necesario utilizar que

$$\hat{a}(t - t_0) = \hat{a}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)}, \quad (6.16)$$

$$\hat{a}^\dagger(t - t_0) = \hat{a}^\dagger(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}, \quad (6.17)$$

donde en este caso $t_0 = 0$, entonces

$$\langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n = \frac{1}{2}X\hbar w \langle n | (\hat{a}^\dagger e^{i\omega t_1} \hat{a} e^{-i\omega t_2} + \hat{a} e^{-i\omega t_1} \hat{a}^\dagger e^{i\omega t_2}) | n \rangle \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{2}X\hbar w \langle n | (e^{-i\omega(t_2-t_1)} \hat{a}^\dagger \hat{a} + e^{i\omega(t_2-t_1)} \hat{a} \hat{a}^\dagger) | n \rangle, \quad (6.19)$$

por lo que se obtiene

$$\langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n = \frac{1}{2}X\hbar w (e^{-i\omega(t_2-t_1)} n + e^{i\omega(t_2-t_1)} (n+1)). \quad (6.20)$$

Ahora para obtener la entrada del tensor hay que integrar con respecto a t_1 y t_2 utilizando la regularización del método, si se le asigna la entrada $q \rightarrow 1$ la parte correspondiente a $G_{ef11}^{(n)}$ es

$$G_{ef11} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n \quad (6.21)$$

$$= \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_2 \int_0^{\infty} dt_1 \frac{1}{2}X\hbar w (e^{-i\omega(t_2-t_1)} n + e^{i\omega(t_2-t_1)} (n+1)) \quad (6.22)$$

$$= \frac{-1}{2\hbar} X w \left(\frac{-n}{w^2} - \frac{n+1}{w^2} \right). \quad (6.23)$$

Por lo tanto

$$G_{ef11} = \frac{(n + \frac{1}{2}) X}{\hbar w}. \quad (6.24)$$

Luego análogamente para

$$\langle \mathcal{O}_q(t_1)\mathcal{O}_p(t_2) \rangle_n = \langle n | (Y\hat{p}(t_1) + X\hat{q}(t_1))(Z\hat{p}(t_2) + Y\hat{q}(t_2)) | n \rangle \quad (6.25)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar e^{-i(t_1+t_2)\omega} (n(Yw - iXZ + iY^2) e^{2it_1\omega} + (n+1)(Yw + iXZ - iY^2) e^{2it_2\omega}), \quad (6.26)$$

e integrando,

$$G_{ef12} = \frac{(2(n + \frac{1}{2})Yw + i(XZ + Y^2))}{2\hbar w^2}. \quad (6.27)$$

Y su transpuesta sería

$$\langle \mathcal{O}_p(t_1)\mathcal{O}_q(t_2) \rangle_n = \langle n | (Z\hat{p}(t_1) + Y\hat{q}(t_1))(Y\hat{p}(t_2) + X\hat{q}(t_2)) | n \rangle \quad (6.28)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\hbar}e^{-i(t_1+t_2)\omega} \left(ne^{2it_1\omega} \left(Y\sqrt{\hbar\omega^2} + iXZ\sqrt{\hbar} - iY^2\sqrt{\hbar} \right) \right. \\ \left. + (n+1)e^{2it_2\omega} \left(Y\sqrt{\hbar\omega^2} - iXZ\sqrt{\hbar} + iY^2\sqrt{\hbar} \right) \right), \quad (6.29)$$

$$G_{ef21} = \frac{i(2i(n+\frac{1}{2})Y\omega - XZ + Y^2)}{2\hbar\omega^2} = -G_{ef12} \quad (6.30)$$

Finalmente para

$$\langle \mathcal{O}_p(t_1)\mathcal{O}_p(t_2) \rangle_n = \langle n | (Z\hat{p}(t_1) + Y\hat{q}(t_1))(Z\hat{p}(t_2) + Y\hat{q}(t_2)) | n \rangle \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{2}Z\hbar\omega e^{-i(t_1+t_2)\omega} \left(ne^{2it_1\omega} + (n+1)e^{2it_2\omega} \right), \quad (6.32)$$

$$G_{ef22} = \frac{(n+\frac{1}{2})Z}{\hbar\omega}. \quad (6.33)$$

En forma matricial esto es

$$G_{ef}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{(n+\frac{1}{2})X}{\hbar\omega} & -\frac{i(2i(n+\frac{1}{2})Y\omega - XZ + Y^2)}{2\hbar\omega^2} \\ \frac{i(2i(n+\frac{1}{2})Y\omega - XZ + Y^2)}{2\hbar\omega^2} & \frac{(n+\frac{1}{2})Z}{\hbar\omega} \end{pmatrix} \quad (6.34)$$

y simplificando se llega a

$$G_{ef}^{(n)} = \frac{(n+\frac{1}{2})}{\hbar\omega} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & Z \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\hbar\omega} \\ \frac{-1}{2\hbar\omega} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

Aquí es evidente que no es el mismo tensor que en el caso anterior, simplemente por la dimensión del mismo. Aunque es necesario notar que depende únicamente de los parámetros, no de los momentos ni las posiciones.

6.2 OSCILADORES ARMÓNICOS SIMÉTRICAMENTE ACOPLADOS

Nuevamente, el sistema formado por unos osciladores armónicos simétricamente acoplados está descrito por el siguiente Hamiltoniano

$$H(k, k', \hat{q}_1, \hat{q}_2, t) = \frac{1}{2}[\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + k(\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + k'(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2],$$

si definimos

$$w_1^2 = k \quad (6.36)$$

$$\omega_2^2 = k + 2k' \quad (6.37)$$

el hamiltoniano se ve como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \omega_1^2 (\hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2) + \frac{1}{2} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) \right). \quad (6.38)$$

Además as transformaciones canónicas que facilitan el problema son

$$\hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_1 + \hat{q}_2), \quad (6.39)$$

$$\hat{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{q}_1 - \hat{q}_2), \quad (6.40)$$

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_1 + \hat{p}_2), \quad (6.41)$$

$$\hat{P}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2), \quad (6.42)$$

que en términos de los operadores de creación y aniquilación son

$$\hat{Q}_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_1}} (\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1) \quad (6.43)$$

$$\hat{P}_1 = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_1}{2}} (\hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1) \quad (6.44)$$

$$\hat{Q}_2 = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_2}} (\hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2) \quad (6.45)$$

$$\hat{P}_2 = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_2}{2}} (\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2). \quad (6.46)$$

Como

$$\mathcal{O}_A = \frac{\partial H}{\partial z^A} \quad (6.47)$$

y en este caso $z_A = \{\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$, por lo que

$$\mathcal{O}_{q_1} = \frac{1}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\hat{q}_1(t) - \hat{q}_2(t)) + \omega_1^2 \hat{q}_1(t) \quad (6.48)$$

$$\mathcal{O}_{q_2} = \frac{1}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) (\hat{q}_2(t) - \hat{q}_1(t)) + \omega_1^2 \hat{q}_2(t) \quad (6.49)$$

$$\mathcal{O}_{p_1} = \hat{p}_1 \quad (6.50)$$

$$\mathcal{O}_{p_2} = \hat{p}_2 \quad (6.51)$$

Notemos que todos los términos son de primer orden, por lo que el valor esperado de cada uno de ellos es cero debido a la ortogonalidad de los estados.

Ahora para los 16 términos dobles

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1)\mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^3 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^3 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2^3 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^3 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1)\mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^3 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^3 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^3 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2^3 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1)\mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1)\mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1)\mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^3 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^3 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^3 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2^3 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1)\mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^3 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^3 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2^3 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^3 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1)\mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1)\mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1)\mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle_n &= -\frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1)\mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad - (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1)\mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1)\mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1)\mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle_n &= \frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad - (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.64)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1)\mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle_n &= -\frac{i\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1^2 \left(-e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right) \right. \\ &\quad + (m+1)w_1^2 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2^2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2^2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1)\mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} - nw_2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. - (n+1)w_2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right), \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1)\mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle_n &= \frac{\hbar}{4} e^{-i(t_1+t_2)(w_1+w_2)} \left(mw_1 e^{i(t_1(2w_1+w_2)+t_2w_2)} \right. \\ &\quad + (m+1)w_1 e^{i(t_1w_2+t_2(2w_1+w_2))} + nw_2 e^{i(t_1(w_1+2w_2)+t_2w_1)} \\ &\quad \left. + (n+1)w_2 e^{i(t_1w_1+t_2(w_1+2w_2))} \right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

E integrando cada uno de ellos se obtienen las entradas del tensor de variación de ps y qs

$$\mathbf{G}_{ef11} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1)\mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle \quad (6.68)$$

$$= \frac{2mw_1 + 2nw_2 + w_1 + w_2}{4\hbar}, \quad (6.69)$$

$$G_{ef_{12}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1) \mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle \quad (6.70)$$

$$= -\frac{(-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}) w_1 \hbar + (\frac{n}{2} + \frac{1}{4}) w_2 \hbar}{\hbar^2}, \quad (6.71)$$

$$G_{ef_{13}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1) \mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle \quad (6.72)$$

$$= \frac{i}{2\hbar'}, \quad (6.73)$$

$$G_{ef_{14}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q1}(t_1) \mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle \quad (6.74)$$

$$= 0, \quad (6.75)$$

$$G_{ef_{21}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1) \mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle \quad (6.76)$$

$$= -\frac{(-\frac{m}{2} - \frac{1}{4}) w_1 \hbar + (\frac{n}{2} + \frac{1}{4}) w_2 \hbar}{\hbar^2}, \quad (6.77)$$

$$G_{ef_{22}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1) \mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle \quad (6.78)$$

$$= \frac{2mw_1 + 2nw_2 + w_1 + w_2}{4\hbar}, \quad (6.79)$$

$$G_{ef_{23}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1) \mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle \quad (6.80)$$

$$= 0, \quad (6.81)$$

$$G_{ef_{24}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{q2}(t_1) \mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle \quad (6.82)$$

$$= \frac{i}{2\hbar'}, \quad (6.83)$$

$$G_{ef_{31}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1) \mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle \quad (6.84)$$

$$= -\frac{i}{2\hbar'}, \quad (6.85)$$

$$G_{ef_{32}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1) \mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle \quad (6.86)$$

$$= 0, \quad (6.87)$$

$$G_{ef_{33}} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1) \mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle \quad (6.88)$$

$$= \frac{2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2}{4w_1 w_2 \hbar}, \quad (6.89)$$

$$G_{ef34} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p1}(t_1) \mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle \quad (6.90)$$

$$= -\frac{\frac{(-\frac{m}{2}-\frac{1}{4})\hbar}{w_1} + \frac{(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\hbar}{w_2}}{\hbar^2}, \quad (6.91)$$

$$G_{ef41} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1) \mathcal{O}_{q1}(t_2) \rangle \quad (6.92)$$

$$= 0, \quad (6.93)$$

$$G_{ef42} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1) \mathcal{O}_{q2}(t_2) \rangle \quad (6.94)$$

$$= -\frac{i}{2\hbar}, \quad (6.95)$$

$$G_{ef43} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1) \mathcal{O}_{p1}(t_2) \rangle \quad (6.96)$$

$$= -\frac{\frac{(-\frac{m}{2}-\frac{1}{4})\hbar}{w_1} + \frac{(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\hbar}{w_2}}{\hbar^2}, \quad (6.97)$$

$$G_{ef44} = \frac{-1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 dt_1 \int_0^{\infty} dt_2 \langle \mathcal{O}_{p2}(t_1) \mathcal{O}_{p2}(t_2) \rangle \quad (6.98)$$

$$= \frac{2mw_2 + 2nw_1 + w_1 + w_2}{4w_1w_2\hbar}. \quad (6.99)$$

Por lo que en su representación matricial al simplificar es

$$G_{ef}^{(n)} = \frac{1}{4\hbar} \begin{pmatrix} (2m+1)w_1 & (2m+1)w_1 & 0 & 0 \\ (2m+1)w_1 & (2m+1)w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2m+1)w_2}{w_1w_2} & \frac{(2m+1)w_2}{w_1w_2} \\ 0 & 0 & \frac{(2m+1)w_2}{w_1w_2} & \frac{(2m+1)w_2}{w_1w_2} \end{pmatrix} \quad (6.100)$$

$$+ \frac{1}{4\hbar} \begin{pmatrix} (2n+1)w_2 & -(2n+1)w_2 & 0 & 0 \\ -(2n+1)w_2 & (2n+1)w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2n+1)w_1}{w_1w_2} & -\frac{(2n+1)w_1}{w_1w_2} \\ 0 & 0 & -\frac{(2n+1)w_1}{w_1w_2} & \frac{(2n+1)w_1}{w_1w_2} \end{pmatrix} \quad (6.101)$$

$$+ \frac{1}{4\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \\ -2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.102)$$

Con esto, hemos estudiado ampliamente el espacio de parámetros para estos dos sistemas físicos. Desde la perspectiva de funciones de onda así como de integrales de trayectoria, extendiendo así la información que posee el Tensor Geométrico Cuántico.

CONCLUSIONES

A lo largo de esta tesis se estudiaron todos los conceptos necesarios para entender el tensor geométrico cuántico, así como dos distintos métodos para calcularlo, ya sea utilizando a la función de onda o integrales de trayectoria. Además, se generalizó este último para obtener el tensor de un estado excitado arbitrario del sistema, por lo que ahora tiene ventajas evidentes con respecto al estándar: no se requiere a la función de onda del sistema, solo se requiere al hamiltoniano y a un solo estado excitado arbitrario del mismo. Esto mediante la prescripción de correr las energías por un factor de $i\epsilon$. También quedó demostrada la equivalencia entre ambos métodos bajo este tipo de variaciones.

Dentro de esta generalización del método de integrales de trayectoria se utilizó desde el inicio del problema un formalismo de la mecánica cuántica con base en las funciones de Wigner. Esto para poder extender al TGC de variaciones únicamente en los parámetros a poder incluir variaciones en el espacio fase.

Como ejemplos, se dio en primer lugar el cálculo del propagador de Feynman para el oscilador armónico generalizado y los TGCs obtenidos bajo el método estándar (de la función de onda) para dos sistemas concretos, el oscilador armónico generalizado y los osciladores simétricamente acoplados. A pesar de estar mostrada la equivalencia entre los métodos, en la segunda parte se obtuvieron de nuevo los TGCs de estos sistemas utilizando la nueva técnica para así ejemplificar la concordancia de los resultados obtenidos.

Esta generalización del método de integrales de trayectoria, usando la prescripción de las energías dentro del espacio fase, abre la puerta al estudio de la geometría del espacio de parámetros mediante nuevas métricas y fases de Berry, distintas a las usuales. Estas podrían ser utilizadas para estudiar el enredamiento cuántico de una manera más directa quitándose la necesidad de usar matrices de densidad. Otra posible aplicación de estos resultados es en transiciones de fase cuánticas en el modelo de Dicke, o en particular, para el oscilador armónico generalizado al momento de que el parámetro χ del factor q^2 obtiene un valor negativo. Un resultado peculiar que será interesante estudiar a futuro es la aparición de singularidades en el tensor proveniente de variaciones del espacio fase dentro de ciertos sistemas.

Parte III

APÉNDICE



NOTACIÓN

A lo largo de todo el texto se utilizará la notación de Einstein, es decir, índices repetidos van sumados, por ejemplo:

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = (\partial_\alpha F) \dot{q}^\alpha, \quad (\text{A.1})$$

donde se denota

$$\frac{\partial}{\partial q^\alpha} = \partial_\alpha. \quad (\text{A.2})$$

Para el producto exterior o cuña (\wedge) se omitirá donde sea conveniente, de modo que

$$d\alpha \wedge d\beta = d\alpha d\beta. \quad (\text{A.3})$$

Además, en todas las integrales donde haya más de una variable se escribirá únicamente un \int pero deberá entenderse que aplica para todas. Esto a menos que sea necesario establecer diferencia entre los límites de cada variable.

B

DERIVADAS FUNCIONALES

Una derivada funcional es una generalización a la derivada usual, donde se deriva una función con respecto a una variable, con la diferencia que en la derivada funcional por otra parte se deriva una funcional (o función de funciones) con respecto a una función. En estas se tiene que

$$\delta S = \int dt \delta y^i(t) \frac{\delta S}{\delta y^i(t)} \quad (\text{B.1})$$

con

$$\frac{\partial y^j}{\partial y^i} = \delta_i^j. \quad (\text{B.2})$$

Entonces la *derivada funcional* es

$$\frac{\delta y^j(t)}{\delta y^i(t')} = \delta_i^j \delta(t - t'). \quad (\text{B.3})$$

También se tiene que

$$\frac{\delta \dot{y}^j(t)}{\delta y^i(t')} = \frac{d}{dt} \frac{\delta y^j(t)}{\delta y^i(t')} = \frac{d}{dt} \delta_i^j \delta(t - t') = \delta_i^j \frac{d}{dt} \delta(t - t'), \quad (\text{B.4})$$

y en particular la derivada funcional de $L(t) = L(y^j(t), \dot{y}^j(t))$ [4]

$$\frac{\delta L(t)}{\delta y^i(t')} = \frac{\partial L(t)}{\partial y^j(t)} \frac{\delta y^j(t)}{\delta y^i(t')} + \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{y}^j(t)} \frac{\delta \dot{y}^j(t)}{\delta y^i(t')} \quad (\text{B.5})$$

$$= \frac{\partial L(t)}{\partial y^j(t)} \delta(t - t') + \frac{\partial L(t)}{\partial \dot{y}^j(t)} \frac{d}{dt} \delta(t - t'). \quad (\text{B.6})$$



PRODUCTO EXTERIOR, FORMAS DIFERENCIALES Y DERIVADA EXTERIOR

Producto Exterior: La operación \wedge , llamada producto exterior, cuña, o de Grassmann:

$$\wedge : \Lambda^k(M) \times \Lambda^l(M) \rightarrow \Lambda^{k+l}(M) \tag{C.1}$$

está definido como

$$\alpha \wedge \beta := \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathbf{A}(\alpha \otimes \beta), \tag{C.2}$$

donde \mathbf{A} es un operador alternador que selecciona la parte antisimétrica del tensor $(0, k+l)$ $\alpha \otimes \beta$ [14].

El producto exterior más simple es

$$dx^\mu \wedge dx^\nu := dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu \tag{C.3}$$

entonces tenemos por definición (por conveniencia se suele dejar de utilizar el símbolo \wedge , véase el anexo A))

$$dx^\mu dx^\nu = -dx^\nu dx^\mu \tag{C.4}$$

$$dx^\mu dx^\mu = 0 \tag{C.5}$$

de manera análoga se definen los productos exteriores mayores como productos tensoriales totalmente antisimétricos.

Formas diferenciales: con la ayuda del producto exterior se pueden definir varias formas diferenciales

| | |
|---------|-------------------------------------------------------------------------|
| 0-forma | $w = w(x)$ |
| 1-forma | $w = w_\mu(x) dx^\mu$ |
| 2-forma | $w = \frac{1}{2!} w_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ |
| ... | ... |
| p-forma | $w = \frac{1}{p!} w_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$ |

Derivada Exterior: La diferenciación de las formas se hace mediante la derivada exterior

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu \tag{C.6}$$

que actúa sobre una p-forma de la siguiente manera

$$dw = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^\nu} w_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}. \quad (\text{C.7})$$

La derivada exterior es un mapero $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ que transforma p-formas en (p+1)-formas. Además satisface la importante propiedad

$$d^2 = 0 \quad (\text{C.8})$$

llamada nilpotencia, que puede ser verificada rápidamente por aplicación directa a una p-forma

$$d^2 w = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\nu} w_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^\sigma dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Esta expresión debe ser nula debido a que las derivadas $\frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ son simétricas mientras que el producto exterior $dx^\sigma dx^\nu$ es antisimétrico.

Finalmente d obedece la *regla de antiderivación*

$$d(\alpha_p \beta_q) = (d\alpha_p) \beta_q + (-)^p \alpha_p d\beta_q, \quad (\text{C.10})$$

donde de nuevo se han indicado los grados de las formas [26].

FUNCIONES DE HERMITE

Las funciones de Hermite surgen naturalmente al solucionar la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico cuántico y están definidas como

$$\chi_n(x) = (n!2^n\sqrt{\pi})^{-1/2}e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x), \quad (\text{D.1})$$

siendo $H_n(x)$ los polinomios de Hermite, que cumplen las siguientes ecuaciones

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} + (2n - x^2 - 1)H_n(x) = 0. \quad (\text{D.2})$$

Notemos que las funciones de Hermite, al compararlas con los polinomios, ya cuentan con el factor de normalización y la función de peso, por lo que cumplen [13][14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} da a^2 \chi_n^2(a) = n + \frac{1}{2}, \quad (\text{D.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} da \chi_n(a) \chi_m(a) = \delta_{n,m}, \quad (\text{D.4})$$

$$\frac{d}{da} \chi_n(a) = \sqrt{\frac{n}{2}} \chi_{n-1}(a) - \sqrt{\frac{n+1}{2}} \chi_{n+1}(a), \quad (\text{D.5})$$

$$a \chi_n(a) = \sqrt{\frac{n}{2}} \chi_{n-1}(a) + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \chi_{n+1}(a), \quad (\text{D.6})$$

además de una sustitución directa entre ellas, surgen otras dos que serán útiles para los casos tratados en este texto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^2(a) a \frac{d}{da} \chi_n(a) = -\frac{1}{2}, \quad (\text{D.7})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{da} \chi_n(a)\right)^2 a^2 da = \frac{2n^2 + 2n + 3}{4}. \quad (\text{D.8})$$

FUNCIÓN DE CORRELACIÓN DE 4 PUNTOS A SEGUNDO ORDEN DE ϕ^4

Se tiene de forma general que

$$G'_n(t_1, \dots, t_n) = \frac{G_n(t_1, \dots, t_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{n+m k}(t_1, \dots, t_n, \tau_1^k, \dots, \tau_m^k)}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda c)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m G_{m k}(\tau_1^k, \dots, \tau_m^k)}, \quad (\text{E.1})$$

considerando hasta segundo orden en λ y un potencial de interacción de $v(\phi) = \frac{\phi^4}{4!}$, por lo que $c = 1/4!$, $n = 4$ y $k = 4$, entonces queda

$$G'_4(t_1, \dots, t_4) = \frac{G_4(t_1, \dots, t_4) + \frac{-i\lambda}{4!} \int d\tau_1 G_8(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4) + \frac{-\lambda^2}{2!4!4!} \int d\tau_1 d\tau_2 G_{12}(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4)}{1 - \left[\frac{i\lambda}{4!} \int d\tau_1 G_4(\tau_1^4) + \frac{\lambda^2}{2!4!4!} \int d\tau_1 d\tau_2 G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right]}. \quad (\text{E.2})$$

Notemos que el termino del denominador puede expandirse de la forma

$$\left[1 - \left[\frac{i\lambda}{4!} \int d\tau_1 G_4(\tau_1^4) + \frac{\lambda^2}{2!4!4!} \int d\tau_1 d\tau_2 G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) \right] \right]^{-1} = (1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad (\text{E.3})$$

por lo que multiplicando obtenemos

$$\begin{aligned} G'_4(t_1, \dots, t_4) &= G_4(t_1, \dots, t_4) \\ &\quad - \frac{i\lambda}{4!} \int [d\tau_1 G_8(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4) - G_4(t_1, \dots, t_4) G_4(\tau_1^4)] \\ &\quad - \frac{\lambda^2}{2!4!4!} \int d\tau_1 d\tau_2 [G_{12}(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) - 2G_8(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \\ &\quad - G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) G_4(t_1, \dots, t_4) + 2G_4(t_1, \dots, t_4) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4)] \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Para obtener los términos de λ^2 que son

$$\begin{aligned} L^2 &\equiv G_{12}(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) - 2G_8(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4) G_4(\tau_2^4) \\ &\quad - G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) G_4(t_1, \dots, t_4) + 2G_4(t_1, \dots, t_4) G_4(\tau_1^4) G_4(\tau_2^4), \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

se expandirá primero el G_{12} de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 G_{12}(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) &= G_2(t_1, t_2)G_{10}(t_3, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) + G_2(t_1, t_3)G_{10}(t_2, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) \\
 &+ G_2(t_1, t_4)G_{10}(t_2, t_3, \tau_1^4, \tau_2^4) + 4G_2(t_1, \tau_1)G_{10}(t_2, t_3, t_4, \tau_1^3, \tau_2^4) \\
 &+ 4G_2(t_1, \tau_2)G_{10}(t_2, t_3, t_4, \tau_1^4, \tau_2^3), \tag{E.6}
 \end{aligned}$$

expandiendo los G_{10} y haciendo uso de que tanto como τ_1 como τ_2 son índices mudos, por lo que es posible $\tau_1 \leftrightarrow \tau_2$, tenemos

$$\begin{aligned}
 G_{12}(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4, \tau_2^4) &= G_2(t_1, t_2)[G_2(t_3, t_4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 8G_2(t_3, \tau_1)G_8(t_4, \tau_1^3, \tau_2^4)] \\
 &+ G_2(t_1, t_3)[G_2(t_2, t_4)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 8G_2(t_2, \tau_1)G_8(t_4, \tau_1^3, \tau_2^4)] \\
 &+ G_2(t_1, t_4)[G_2(t_2, t_3)G_8(\tau_1^4, \tau_2^4) + 8G_2(t_2, \tau_1)G_8(t_3, \tau_1^3, \tau_2^4)] \\
 &+ 8G_2(t_1, \tau_1)[G_2(t_2, t_3)G_8(t_4, \tau_1^3, \tau_2^4) + G_2(t_2, t_4)G_8(t_3, \tau_1^3, \tau_2^4)] \\
 &+ 3G_2(t_2, \tau_1)G_8(t_3, t_4, \tau_1^2, \tau_2^4) + 4G_2(t_2, \tau_2)G_8(t_3, t_4, \tau_1^3, \tau_2^3)]. \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

Notando que $G_4(t_1, \dots, t_4) = G_2(t_1, t_2)G_2(t_3, t_4) + G_2(t_1, t_3)G_2(t_2, t_4) + G_2(t_1, t_4)G_2(t_2, t_3)$, los primeros 3 términos de los primeros 3 renglones de la ecuación E.7 se anulan con $-G_8(\tau_1^4, \tau_2^4)G_4(t_1, \dots, t_4)$ dentro de L^2 . Por otra parte, al expandir $-2G_8(t_1, \dots, t_4, \tau_1^4)G_4(\tau_2^4)$ una parte se anula con el término $+2G_4(t_1, \dots, t_4)G_4(\tau_1^4)G_4(\tau_2^4)$ y la restante con los segundos términos de los primeros 3 renglones de la ecuación E.7.

Por lo que finalmente tras haber expresado L^2 a través de funciones de correlación de dos puntos nos queda

$$\begin{aligned}
L^2 = & 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, t_4)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, t_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_4)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, t_3)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, t_4)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_3)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, t_4)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, t_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_4)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, t_3)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, t_4)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_3)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_1^2)G_2(\tau_2^2) \\
& + 288G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 192G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, t_4)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 192G_2(t_1, t_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 192G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_4)G_2(t_3, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 192G_2(t_1, t_3)G_2(t_2, \tau_1)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 192G_2(t_1, t_4)G_2(t_2, \tau_1)G_2(t_3, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 192G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, t_3)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1^2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(t_4, \tau_1) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_1)G_2(\tau_2^2)G_2(t_4, \tau_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_1)G_2(t_4, \tau_2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, \tau_1)G_2(t_4, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2) \\
& + 576G_2(t_1, \tau_1)G_2(t_2, \tau_2)G_2(t_3, \tau_2)G_2(t_4, \tau_1)G_2(\tau_1, \tau_2)G_2(\tau_1, \tau_2), \tag{E.8}
\end{aligned}$$

dando un total de 28 términos distintos.

* Despite everything, it's still you.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J. P. Provost, G. Vallee, *Riemannian Structure on Manifolds of Quantum States*, Commun. Math. Phys. **76**, 289-301 (1980).
- [2] Shi-Jian Gu, *Fidelity approach to quantum phase transitions*, Int. J. Mod. Phys. B, **24**, 4371-4458, (2010).
- [3] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45-57 (1984).
- [4] J. D. Vergara Oliver, *Notas de Teoría Cuántica de Campos*, UNAM, (2019).
- [5] R. Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Springer, 2nd ed, New York (1994).
- [6] J.J. Sakurai, S. F. Tuan, *Modern quantum mechanics Revised Edition*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., New York, (1994).
- [7] M. Miyaji, T. Numasawa, N. Shiba, T.i Takayanagi, K. Watanabe, *Distance between Quantum States and Gauge-Gravity Duality*, Phys. Rev. Lett. **115**, 261602 (2015).
- [8] Javier Alvarez-Jimenez, Aldo Dector, J.David Vergara , *Quantum Information Metric and Berry Curvature from a Lagrangian Approach*, JHEP. **1703**, 044 (2017).
- [9] Javier Alvarez-Jimenez, J.David Vergara, *The quantum geometric tensor from generating functions*, Int.J.Quant.Inf. **17** no.02, 1950017 (2019).
- [10] M. A. Nielsen, I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2010).
- [11] I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [12] J. Álvarez Jimenéz, *Elementos de la geometría del espacio de parámetros cuántico*, tesis de doctorado, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, (2019).
- [13] D. Gonzalez, D. Gutiérrez-Ruiz, J. D. Vergara, *Classical analog of the quantum metric tensor*, Phys. Rev. E **99**, 032144 (2019).
- [14] D. Chruściński, A. Jamiołkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser, New York, (2004).
- [15] Jon Brogaard, *Wigner function formalism in Quantum mechanics*, tesis de licenciatura, Niels Bohr Institute, University of Copenhagen (2015).
- [16] W. B. Case, *Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians*, Am. J. Phys., **76** No. 10, (2008).
- [17] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 3rd Edition, New York, (1968).

- [18] M. V. Berry, *The quantum phase, five years after*, Geometric Phases in Physics, eds. A. Shapere and F. Wilczek, World Scientific 7-28, Singapore (1989).
- [19] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson, *Gravitation, gauge theory and differential geometry*, Physics Reports (Review Section of Physics Letters) **66**, No. 6 213-393 (1980).
- [20] R. A. Jefferson, R.C. Myers, *Circuit complexity in quantum field theory*, J. High Energy Phys., **107** (2017).
- [21] D. N. Makarov, *Coupled harmonic oscillators and their quantum entanglement.*, Phys. Rev. E **97**, 042203 (2018).
- [22] J. Álvarez Jimenéz, J. D. Vergara, *The quantum geometric tensor from generating functions*, International Journal of Quantum Information **17**, No. 2 1950017 (2019).
- [23] P. Zanardi, P. Giorda, M. Cozzini, *Information-Theoretic Differential Geometry of Quantum Phase Transitions*, Phys. Rev. Lett. **99**, 100603 (2017).
- [24] J. Álvarez Jimenéz, A. Dector, J. D. Vergara, *Quantum information metric and Berry curvature from a Lagrangian approach*, J. High Energ. Phys. 2017: 44, (2017).
- [25] H. Arcos Octavio , *El tensor geométrico cuántico a partir del formalismo de la integral de trayectoria*, tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, (2019).
- [26] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, New York (1996).
- [27] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (2011).

