

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Química  
División de Ciencias Básicas

ALGUNOS USOS DE LOS METODOS MULTIVECTORIALES Y  
ESPINORIALES EN TEORIA CUANTICA DE  
LA MATERIA.

T E S I S

que para obtener el grado de MAESTRO EN CIENCIAS

presenta

SUEMI RODRIGUEZ ROMO

México, D.F., 1986.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INTEGRANTES DEL JURADO

Presidente	Dr. Alfonso Mondragón
1er. Vocal	Dr. Auster Valderrama
Secretario	Dr. Andoni Garritz
Suplente	Dr. Rafael Fernández
Suplente	Dr. Arnulfo Zepeda

La tesis se desarrolló en el Depto. de Física y Química Teórica de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Química, Ciudad Universitaria, bajo la asesoría del Dr. Jaime Keller Torres.



---

DR. JAIME KELLER TORRES



---

SUEMI RODRIGUEZ ROMO

## R E S U M E N .

En este trabajo se da una presentación unificada de las álgebras multivectoriales y espinoriales aplicables al análisis de diversos fenómenos naturales de interés.

Esto nos permite mostrar las ventajas de la estructura matemática aquí empleada; para reducir algunas técnicas de cálculo, reinterpretar relaciones y conceptos ya manejados y, finalmente, a partir de ellos se proporcionan las bases para generar teorías de unificación parcial de interacciones entre diversos campos de materia.

## A B S T R A C T

A unified presentation of multivector and spinor algebras is given, in a form allowing a simple and compact analysis of several physical phenomena.

The way chosen for the presentation shows explicitly the underlying mathematical structure, allows simple calculation techniques and, as a consequence, new interpretations of the relationships between several concepts in a unified form, in particular a unified presentation of the experimentally observed interaction fields.

# I N D I C E G E N E R A L

	página
INTRODUCCION	1
I. ALGEBRA GEOMETRICA	4
II. UN PUNTO DE VISTA GEOMETRICO DEL ESPACIO METRICO.	22
II.A. UNA PRIMERA PRESENTACION FORMAL DEL CONCEPTO DE ESPINOR.	28
III. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.	32
IV. LA ECUACION MULTIVECTORIAL DE DIRAC.	42
V. ALGUNAS PARTICULAS DE DIRAC.	64
VI. TECNICA DE CALCULO Y SU APLICACION A ALGUNOS CASOS DE INTERES.	78
CONCLUSIONES	92
BIBLIOGRAFIA	93

## INTRODUCCION.

Los primeros conceptos sobre algebra geométrica se deben al noruego C. Wessel que en 1797 dió un significado geométrico a la unidad imaginaria<sup>(1)</sup>, ideas que fueron extendidas por el gran matemático irlandés, W.R. Hamilton, quien en 1843 inventa los cuaterniones<sup>(2)</sup>, y por el alemán H. Grassman, que en 1842 elabora un álgebra<sup>(3)</sup> enmarcada dentro de lo que actualmente sería el área de la geometría diferencial. En 1878 W.K. Clifford en Inglaterra generaliza y reinterpreta lo hecho por Hamilton y Grassman en un álgebra que él llama geométrica<sup>(4)</sup>.

La también llamada álgebra de Clifford fue totalmente ignorada hasta que P.A.M. Dirac propuso su famosa ecuación relativista de primer orden<sup>(5)</sup> para describir al electrón y su antipartícula, cuando Suater<sup>(6)</sup>, Sommerfeld<sup>(7)</sup> y Eddington<sup>(8)</sup> descubrieron que inmersa en el álgebra matricial de Dirac se encuentra la estructura de un álgebra geométrica para el espacio tiempo, siendo los dos primeros científicos quienes logran la solución matemática del átomo de hidrógeno usando esta álgebra, mientras que el tercero dió la interpretación física complementaria.

En años más recientes M. Riez usa el álgebra de Clifford en su descripción de la electrodinámica clásica<sup>(9)</sup>, así como S. Teitler<sup>(10)</sup> y D. Hestenes<sup>(11)</sup> amplían los campos de aplicación a áreas tan diferentes como la mecánica clásica y la teoría cuántica relativista.

Los dos objetivos principales de este trabajo son: en primer lugar mostrar como se puede usar el álgebra geométrica (caso

especial de un álgebra de Clifford) en todas las áreas fundamentales de la física, conservando su natural significado geométrico y en segundo lugar, explotar al máximo posible la estructura matemática del álgebra cuyas aplicaciones a la física constituyen un camino novedoso a seguir, para facilitar cálculos prácticos de interés y evidenciar conceptos y rutas de desarrollo no explotados anteriormente.

El contenido del trabajo inicia con una presentación formal, a partir de ciertos rasgos de intuición, del instrumento matemático "álgebra geométrica", buscando siempre una presentación tal que su eficiencia computacional sea suficientemente elevada. Debido a que en física muchos problemas de naturaleza clásica y cuántica involucran la necesidad de la transformación de coordenadas en un espacio métrico, del conocimiento de la estructura intrínseca del mismo, así como del moderno y útil concepto de las isometrías entre espacios métricos, se introduce como siguiente punto de interés el correspondiente a los espacios métricos analizados mediante el uso de álgebras geométricas.

El primer ejemplo físico a desarrollar es el caso de los fenómenos electromagnéticos, en donde se usará una única ecuación multivectorial para derivar todas las propiedades del campo. A continuación se aborda un tema del área de la física cuyas respuestas no son conocidas en forma total hasta este momento: la mecánica cuántica relativista. Para ello, la siguiente parte de este trabajo se inicia con una presentación de la ecuación de Dirac con nuestra álgebra mediante el uso de una función de onda de interpretación distinta, complementaria,



a la interpretación básica en mecánica cuántica usual. Se analizan algunos casos de interés para después desarrollar en el nuevo lenguaje la conocida técnica de solución de ecuaciones diferenciales, basada en las funciones de Green y usarla en algunos cálculos de sección transversal y similares. Finalmente se establece una serie de reglas de cálculo para la sección transversal que incluyen a las usualmente llamadas reglas de Feynman.

Desde el punto de vista matemático, nuestro trabajo va más allá del cálculo vectorial tradicional<sup>(12)</sup> y se añade al resurgimiento y a la actualización de los métodos basados en las álgebras de Grassmann y de Clifford<sup>(13)</sup>.

## I. ALGEBRA GEOMETRICA.

Inicialmente se estudia, de acuerdo a propiedades que nos son familiares y útiles en geometría plana y del espacio, un álgebra cuyos objetos representan conceptos geométricos bien definidos, como son: líneas, superficies, volúmenes, etc. Posteriormente se generaliza y formaliza esta álgebra.

Comenzamos por circunscribirnos a espacios planos y definimos de la manera usual a  $P^n$  como el conjunto de todas las líneas rectas que pasan a través del origen en un espacio  $R^{n+1}$  (a  $P^n$  se le conoce normalmente como el n-espacio proyectivo real). Si la línea  $I \in P^n$  entonces  $I$  puede ser representado por cualquier punto que genere un vector diferente de cero en  $R^{n+1}$  (el vector  $A = (a', \dots, a^{n+1})$  para  $I_A$  y el vector  $B = (b', \dots, b^{n+1})$  para  $I_B$  por ejemplo) además si  $A \in R^{n+1}$ ,  $B \in R^{n+1}$  y  $A = \lambda B$  para  $0 \neq \lambda \in R$ , entonces  $A$  y  $B$  representan la misma línea  $I \in P^n$ . De hecho  $P^n$  constituye una n-variedad y un n-espacio vectorial<sup>(14)</sup>.

Sean ahora los puntos  $A$  y  $B$ , entre ellos existe en  $R^{n+1}$  un único segmento  $v$  de línea dirigida que minimiza la distancia Euclideana  $d(A, B)$  en  $R^{n+1}$ , la cual es la menor medida entre el par de puntos  $A$  y  $B$  representativos, entonces;  $v = B - A$  (aquí podemos ya sea pensar en  $A$  y  $B$  como dos vectores, definidos a posteriori, ó en la expresión  $B - A$  como la definición del vector  $v$ ).

Geométricamente  $v$  expresa una idea de translación. Sea otro punto generado por el vector  $C \in R^{n+1}$  tal que

$$v = B - A, \quad u = C - B \quad \text{y} \quad \omega = C - A$$

entonces

$$\omega = C - A = (C - B) + (B - A) = u + v.$$

Por otro lado introducimos el concepto del inverso aditivo de un vector en  $R^{n+1}$  :

haciendo  $C = A$  con  $v = B - A$ ,  $u = A - B$  luego  $\omega = u + v = 0$  y  
 $u + v = 0$

de tal manera que el inverso aditivo de  $v$  es  $u = (-v)$ .

Sean los vectores  $a \in E$  y  $b \in E$ , de tal manera que  $E$  es un espacio vectorial y sean  $m \in R$ ,  $n \in R$ , tales que

$$ma = am, \quad m(na) = mna, \quad m(a+b) = ma + mb \quad \text{y} \quad (m+n)a = ma + na \quad (\text{I.1a})$$

Estudiemos las propiedades del producto  $ab$  de dos vectores  $a$  y  $b$  del espacio  $E$  <sup>(15)</sup>. Pensemos primero en el caso particular cuando  $b = ma$  (geométricamente  $a$  es "paralelo" a  $b$  y ambos tienen distinta longitud); entonces, de acuerdo a (I.1a), el producto de vectores paralelos

$$ab = a(ma) = (ma)a = ba \quad (\text{I.1b})$$

resulta ser conmutativo.

Dependiendo del signo de  $m$  los vectores paralelos tendrán la misma dirección ( $m > 0$ ) o la contraria ( $m < 0$ ).

Se pide la existencia de una métrica, cuando se expresa la longitud  $|b|$  de un vector  $b$  cualquiera como el número real  $|b|^2 = |(b^2)|$ ; de tal manera que  $b^2 = |b|^2 \mathbb{1}$ , con  $\mathbb{1}$  un escalar  $\mathbb{1}a = a$ ,  $a \in E$ .

Si  $b = ma$  y  $a$  tiene longitud unitaria ( $|a| = 1$ ), entonces

$$|b|^2 = |(b^2)| = |(m^2 a^2)| = |m^2| |a^2| = |m^2|,$$

además si  $a$  y  $b$  son paralelos  $ab = |a||b|$ .

El producto que estudiamos define para vectores de longitud unitaria, paralelos, una nueva cantidad  $a^2 = \mathbb{1}$  llamada el escalar

fundamental.

Sean ahora  $d \in E$  y  $a \in E$  tales que geométricamente son "perpendiculares" entre sí, lo que equivale a decir que además de que son linealmente independientes,  $d \neq ma$ , si  $c = a + d$  se puede usar el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo;  $c^2 = a^2 + d^2$ . Como  $c = (a + d)$  entonces  $c^2 = (a + d)^2 = (a^2 + ad + da + d^2) = a^2 + d^2$  lo que nos lleva a la definición de vectores perpendiculares como aquellos para los que

$$ad = -da \tag{I.2}$$

o sea que el producto que estamos estudiando, en el caso de vectores perpendiculares, es anticonmutativo.

De esta manera es claro que el producto define, para  $a$  y  $d$  vectores perpendiculares, una nueva cantidad  $ad = (-da)$ , llamada bivector.

Antes de continuar adelante es importante resaltar dos propiedades del álgebra que estamos generando, que nos interesan especialmente;

- i) debe ser asociativa y conmutativa en la adición.
- ii) debe ser asociativa y no conmutativa en la multiplicación.

4). Sean ahora  $a$  y  $b$  dos vectores cualesquiera, tales que  $b = b_{11} + b_{\perp}$  con la definición  $ab_{11} = b_{11}a$ ,  $ab_{\perp} = -b_{\perp}a$ , entonces

$$ab = \frac{1}{2} (ab + ba) + \frac{1}{2} (ab - ba) = a(b_{11} + b_{\perp}) = ab_{11} + ab_{\perp} \tag{I.3}$$

que gracias a las propiedades de simetría dadas por (I.1a), (I.1b) y (I.2) podemos identificar fácilmente como

$$ab_{11} = \frac{1}{2} (ab + ba) \tag{I.4}$$

$$ab_{\perp} = \frac{1}{2} (ab - ba) \tag{I.5}$$

Usualmente a (I.4) se le conoce como el producto interior entre dos vectores y se le designa como  $a \cdot b$  mientras que (I.5) es conocido como el producto exterior entre dos vectores designado como  $a \wedge b$ .

Como se verá en la subsiguiente generalización, estos productos estarán bien definidos para cualquier elemento del álgebra.

De acuerdo a (I.3) escribimos el producto total entre  $a$  y  $b$  mediante (I.4) y (I.5) como

$$ab = \frac{1}{2} (ab + ba) + \frac{1}{2} (ab - ba) = a \cdot b + a \wedge b. \quad (I.6)$$

Partiendo de (I.3) y con  $B = \frac{a}{|a|} \frac{b_{\perp}}{|b_{\perp}|}$  resulta

$$ab = |a||b_{\perp}| + |a||b_{\perp}|B = |a||b| \left\{ \frac{|b_{\perp}|}{|b|} \right\} + |a||b| \left\{ \frac{|b_{\perp}|}{|b|} \right\} B$$

con lo que

$$ab = |a||b| \cos \theta \mathbb{1} + |a||b| \sin \theta B$$

que define a  $\theta$  como el "ángulo" entre  $a$  y  $b$  (nuestras definiciones corresponden desde luego a las usuales en geometría y trigonometría planas).

Reescribiendo:

$$ab = |a||b| \mathbb{1} (\cos \theta + B \sin \theta) = |a||b| \mathbb{1} e^{B\theta} \text{ ya que } B^2 = -1 \quad (I.7)$$

lo que permite definir al exponencial en la forma usual.

Se reconoce al bivector  $B$  como un elemento del álgebra geométrica que corresponde al plano generado por  $a$  y  $b$  de área  $|a||b| \sin \theta$ , linealmente independiente de los vectores usados para construirlo. Es costumbre omitir el escalar  $\mathbb{1}$  de las fórmulas y así lo haremos cuando no se generen confusiones.

Se puede dar además un nuevo significado geométrico al factor

$e^{B\theta}$  pensando en dos vectores unitarios cualesquiera  $a$  y  $b$  con un ángulo  $\theta$  entre ellos y en un vector  $c$  paralelo a uno de ellos, digamos al  $b$  ( $c = mb$ ) entonces, como  $e^{B\theta} = ab$  en este caso,

$$e^{B\theta}c = (ab)c = (ab)(mb) = ma(b^2) = ma = d$$

con  $|d| = |c| = m$ , por lo que  $e^{B\theta}$  es un operador que rota al vector  $c$  en un ángulo  $\theta$  (comprendido entre  $a$  y  $b$ ) sobre el plano definido por  $a$  y  $b$ , sin cambiar la magnitud del vector original.

Consideremos ahora la siguiente operación sobre  $d$

$$de^{B\theta} = d(ab) = (ma)(ab) = m(a^2)b = mb = c$$

(¡nótese que  $e^{B\theta}$  operó sobre  $d$  por la derecha!).

Claramente ambas rotaciones se efectúan en sentido contrario por lo que  $e^{B\theta}ce^{B\theta} = c$  o bien

$$e^{-B\theta}c = ce^{B\theta}. \tag{I.8}$$

En resumen  $e^{B\theta}$  es un operador que gira vectores en el plano definido por  $B$  un ángulo de  $\pm \theta$  dependiendo de que opere por la derecha o por la izquierda del vector.

En general todos los elementos del álgebra geométrica (también conocida como multivectorial) pueden usarse como operadores sobre otros elementos del álgebra misma. Otro ejemplo: sea el vector unitario  $a$  y un vector cualquiera  $b$  y considérese la operación

$$aba = a(b_{11} + b_{\perp})a = b_{11} - b_{\perp} = c \quad \text{donde } |c| = |b| \tag{I.9}$$

aquí el vector  $c$  es el resultado de la reflexión de  $b$  "a través" de  $a$ . Realmente para todo par de vectores  $a$  y  $b$  (si  $a$  es unitario  $a^{-1} = a$ )

$$aba^{-1} = a(b_{11} + b_{\perp})a^{-1} = b_{11} - b_{\perp} = c$$

Un concepto más importante todavía lo ilustramos con las operaciones que reflejan  $c$  con respecto a  $b$  y al resultado reflejarlo nuevamente con respecto a  $a$

$$a(bcb^{-1})a^{-1} = (ab)c(b^{-1}a^{-1}) = (ab)c(ab)^{-1} = e^{B\theta}ce^{-B\theta} = d \quad (I.10)$$

(con las mismas definiciones de  $a, b, c, d$  y  $B$  anteriores), de donde es evidente que el resultado de dos reflexiones sucesivas es una rotación en el plano  $ab$  con un ángulo  $2\theta$  (recordando que  $\theta$  es el ángulo entre  $a$  y  $b$ ).

En el caso general de los vectores  $g$  y  $f$ ,  $\{g, f\} \in E$  se tiene ( $g = g_P + g_F$ ;  $g_P B = -B g_P$  y  $g_F B = B g_F$ )

$$f = e^{B\theta}(g_P + g_F)e^{-B\theta} = e^{B\theta}g_P e^{-B\theta} + e^{B\theta}g_F e^{-B\theta} = e^{2B\theta}g_P + g_F$$

(solo gira la componente  $g_P$  en el plano  $ab$  y no la componente  $g_F$  fuera del plano  $ab$ , razón por la cual se obtuvo la última relación).

Iniciemos ahora una presentación más formal del álgebra geométrica o de Clifford analizando algunos puntos de interés relativos a la misma (16).

Podemos pensar en conceptos geométricos como "objetos" relacionados con algunas ecuaciones de la física y representados por los multivectores del espacio vectorial real  $E$ , expresados mediante el símbolo  $\Lambda^p E$  con  $p = 0, 1, 2, \dots$  que significa el conjunto de los productos exteriores de  $p$  factores linealmente independientes  $a_{n_i} \in E$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ :  $a_{n_1} \wedge a_{n_2} \wedge \dots \wedge a_{n_p}$ .

El álgebra de Clifford de los multivectores está constituida por

la suma directa  $\Lambda = \sum_P \Lambda^P E$  y los dos productos definidos sobre la misma; producto exterior y el producto interno. Veremos que el producto exterior es asociativo pero no manifiesta la naturaleza métrica del espacio  $E$ , mientras que el producto interior es representativo de esta estructura pero no es asociativo.

Por esta razón se necesita una nueva forma de formulación del producto que además de ser asociativa evidencie simultáneamente la estructura métrica del espacio  $E$ , este producto se conoce como producto de Clifford o producto total, por las razones históricas mencionadas en la introducción a esta obra.

Definamos el álgebra exterior, de Grassmann,  $\Lambda E$  asociada a un espacio vectorial real  $E$  como un espacio vectorial real  $\mathbb{C}$  dotado de un producto asociativo interno bilineal  $(x, y) \rightarrow x \wedge y$  tal que

$$\Lambda E = \sum_P \Lambda^P E \quad \text{donde} \quad \Lambda^0 E = \mathbb{R}1, \quad \Lambda^1 E = E \quad \text{y} \tag{I.11}$$

$$\Lambda^r E = \left\{ x : x = \sum_k \lambda_k a_1^{(k)} \wedge \dots \wedge a_r^{(k)} \right\} \quad \text{con} \quad a_j^{(k)} \in E$$

$$a_{k_1} \wedge \dots \wedge a_{k_p} = 0 \quad \text{donde} \quad a_{k_i} \in E = \Lambda^1 E \tag{I.12}$$

si y sólo si dos o más de los vectores  $a_{k_i}$  son linealmente dependientes entre sí.

Una vez hecho esto pasamos a la definición del álgebra geométrica o de Clifford  $\mathbb{C}(E)$  asociada a un espacio vectorial real  $E$ , como un espacio vectorial real dotado de un producto asociativo  $(x, y) \rightarrow xy$  tal que

$$\mathbb{C}(E) = \sum_P \mathbb{C}^P(E) \quad \text{donde} \quad \mathbb{C}^0(E) = \mathbb{R}1, \quad \mathbb{C}^1(E) = E, \tag{I.13}$$

$$\mathbb{C}^2(E) = \left\{ x = x = \sum_k \lambda_k a_1^{(k)} a_2^{(k)} \right\} \quad \text{con} \quad a_j^{(k)} \in E.$$



$$x \in E = \mathbb{C}'(E) \text{ existe } x^2 \in \mathbb{R}1 = \mathbb{C}^0(E) \quad (\text{I.14})$$

Para todo valor de  $P$  se puede definir una aplicación lineal especial de  $\Lambda^P E$  en  $\mathbb{C}(E)$ . (I.15)

Se postula que esta aplicación es inyectiva de tal manera que cada valor de una aplicación pueda ser identificado con el correspondiente argumento. Procedamos a construir esta aplicación paso por paso. Sea  $f(x, x_1) = (xx_1 - x_1x)/2$  para  $(x, x_1 \in \mathbb{R})$  que puede ser identificado a  $x \wedge x_1 \in \Lambda^2 E$ , definamos ahora en forma recurrente el siguiente elemento de  $\mathbb{C}(E)$ :

$$X_{p+1} = f(x, X_p) = (xX_p + (-1)^P X_p x)/2 \quad (\text{I.16})$$

e identificando  $X_{p+1}$  con  $x \wedge X_p \wedge \dots \wedge X_1$  para  $(x, X_k \in E)$ . Si  $x \wedge X_p = 0$  entonces  $f(x, X_p) = 0$  pero entonces puede escribirse  $X_p = x \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_{p-1}$ ; más adelante usaremos un antiautomorfismo de  $\mathbb{C}(E)$  para definir  $f(A, B)$  con toda generalidad, además:

Se piensa en  $E$  asociado con una forma bilineal simétrica (I.17)  
 $(x, y) \rightarrow x, y \in \mathbb{R}1, (x, y \in E)$ .

Por otro lado, definimos el producto interior, inicialmente izquierdo,  $x \cdot X_{p+1}$  de  $X_{p+1} \in \Lambda^{p+1}$  y  $x \in E$  de acuerdo a la relación recurrente:

$$x \cdot (y \wedge X_p) = (x \cdot y) X_p - y \wedge (x \cdot X_p) \in \Lambda^p E \quad \text{con} \quad (\text{I.18})$$

$$y \in E \text{ y } X_{p+1} = y \wedge X_p,$$

y el producto

$$x \cdot X_p = (xX_p - (-1)^P X_p x)/2. \quad (\text{I.19})$$

Podemos identificar a (I.16) con

$$x \wedge X_p = (x X_p + (-1)^p X_p x) / 2 \quad (\text{I.20})$$

dando finalmente

$$x X_p = x \cdot X_p - x \wedge X_p \quad (\text{I.21})$$

donde se observa que todo elemento de  $\mathbf{C}(E)$  es un elemento de  $\Lambda E$ .

Una propiedad interesante del álgebra geométrica es que no todos los elementos de  $\mathbf{C}(E)$  tienen inversa multiplicativa, por ejemplo sea un elemento de  $\mathbf{C}(E)$  tal que  $I^2 = I$  al que llamaremos idempotente, a su vez para todo elemento de  $\mathbf{C}(E)$  con cuadrado unitario se puede construir un idempotente  $I \in \mathbf{C}(E)$ . Si  $\alpha \in \mathbf{C}(E)$  con  $\alpha^2 = 1$  podemos construir  $I = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$  y entonces

$$I^2 = \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) \left(\frac{1+\alpha}{2}\right) = \frac{1+2\alpha+\alpha^2}{4} = \frac{2(1+\alpha)}{4} = \frac{1+\alpha}{2} = I \quad (\text{I.22})$$

Por el contrario para todo idempotente hay un elemento de  $\mathbf{C}(E)$  con módulo unitario

$$I = \frac{2I}{2} = \frac{1+(2I-1)}{2} \text{ tal que } I^2 = \frac{1+2(2I-1)+(2I-1)^2}{4} \quad (\text{I.23})$$

pero  $I^2 = I$  por lo que  $(2I-1)^2 = 1$ , esto define un elemento de  $\mathbf{C}(E)$  dado por  $2I-1$  con módulo unitario.

Otro tipo de elemento sin inversa multiplicativa son los llamados multivectores nilpotentes  $N$ , donde  $N^2 = 0$ , que se construyen de la siguiente manera:

Sean  $\alpha_1 \in \mathbf{C}(E)$  y  $\alpha_2 \in \mathbf{C}(E)$  dos multivectores que anticonmutan de módulo unitario linealmente independientes, construimos entonces  $N = \left(\frac{1+\alpha_1}{2}\right) \alpha_2$  tal que

$$N^2 = \left[ \left( \frac{1 + \alpha_1}{2} \right) \alpha_2 \right]^2 = \left( \frac{1 + \alpha_1}{2} \right) \alpha_2 \left( \frac{1 + \alpha_1}{2} \right) \alpha_2 = \left( \frac{1 + \alpha_1}{2} \right) \left( \frac{1 - \alpha_1}{2} \right)$$

$$N^2 = \frac{1 - \alpha_1^2}{4} = 0 \quad (\text{en el tercer paso se uso } \alpha_1 \alpha_2 = - \alpha_2 \alpha_1)$$

A continuación se mencionan algunos conceptos de utilidad en las álgebras geométricas:

**Teorema** - Los elementos base del espacio vectorial de un álgebra asociativa finita pueden elegirse de tal forma que constituyen un grupo.

**Definición** - Un álgebra geométrica (asociada a un espacio vectorial unidimensional) es aquella cuyos generadores  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  están sujetos a la relación  $\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$  para  $i \neq j$  y para los cuales se puede definir un tensor métrico que determine el módulo de cada generador.

**Nota:** se puede interpretar el conjunto de generadores del álgebra como la base vectorial de un espacio de interés físico.

**Teorema** - Un álgebra geométrica es asociativa bajo multiplicación y adición. En general no es un álgebra división o conmutativa.

**Teorema** - Ya que los generadores de todas las álgebras geométricas deben satisfacer la relación  $\alpha_i \alpha_j = -\alpha_j \alpha_i$  para  $i \neq j$ , se puede especificar un álgebra geométrica simplemente dando el número de generadores y la métrica del espacio.

Teorema (Fundamental del Algebra Geométrica)

- i) Toda álgebra geométrica de  $n = 2m$  generadores es isomórfica al producto directo de  $m$  álgebras geométricas de dos generadores.
- ii) Toda álgebra geométrica de  $n = 2m + 1$  generadores es isomórfica al producto directo de  $m$  álgebras geométricas de 2 generadores y un álgebra geométrica de 1 generador.

De las definiciones y propiedades antes descritas se pueden establecer las siguientes identidades de fácil comprobación y gran utilidad posterior. Sean  $a, b, c, \epsilon \in \mathbb{C}^1(E)$ , el operador vectorial  $\nabla \in \mathbb{C}^1(E)$  y la función escalar  $\phi \in \mathbb{C}^0(E)$  entonces (aquí sobreentendemos la unidad escalar  $\mathbb{1}$  y representamos  $\phi$  por un número real, el lector más formal debe leer  $\phi\mathbb{1}$ )

a)  $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

b)  $a \cdot (b \wedge c) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b$

c)  $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$  ( $\nabla \phi$  es irrotacional)

d)  $\nabla \wedge \nabla \phi = 0$  (¡luego  $\nabla \nabla \phi = \nabla^2 \phi$  para  $\phi$  escalar solamente!)

e)  $\nabla \cdot (\nabla \wedge a) = 0$  (o sea que  $\nabla \wedge a$  es solenoidal)

f)  $\nabla \wedge (\nabla \wedge a) = \nabla^2 a - \nabla \cdot (\nabla \cdot a)$  (esta fórmula es idéntica a la que usa el producto  $\times$  del cálculo vectorial de Gibbs)

g)  $\nabla \cdot (\phi a) = \phi (\nabla \cdot a) + a \cdot \nabla \phi$

h)  $\nabla \wedge (\phi a) = \phi (\nabla \wedge a) - a \wedge \nabla \phi$

Intentemos ahora redefinir el álgebra geométrica mediante un conjunto de axiomas y un sistema de definiciones e identidades que le confieran una adecuada eficiencia computacional (17).

En primer lugar identificaremos a los  $k$ -elementos como los bloques constructivos del álgebra, donde a  $k > 0$  se le conoce como el grado del elemento.

Geoméricamente el 1-elemento es un vector, el 2-elemento representa un plano y cada  $k$ -elemento representa un espacio de dimensión  $k$ . Siempre se puede pensar que si el producto de dos  $k$ -elementos es conmutativo entonces ambos representan el mismo  $k$ -espacio (comparar con lo expresado en la página 9).

A todo elemento del álgebra geométrica  $\mathbf{C}(E)$  se le llamará multivector. Se construye  $\mathbf{C}(E)$  como un espacio algebraicamente cerrado con las siguientes propiedades.

Sean  $A \in \mathbf{C}(E)$ ,  $B \in \mathbf{C}(E)$  y  $C \in \mathbf{C}(E)$ , entonces

- a)  $A + B = B + A.$
- b)  $(A + B) + C = A + (B + C)$   
 $(AB)C = A(BC)$
- c)  $A(B + C) = AB + AC$   
 $(B + C)A = BA + CA$
- d) Existen en  $\mathbf{C}(E)$  identidades multiplicativas y aditivas únicas tales que  
 $A + 0 = A$   
 $1A = A$
- e) Todo multivector  $A$  tiene un único elemento inverso aditivo  $-A$  tal que:  $(A) + (-A) = 0.$

Supondremos que todo multivector  $A$  puede escribirse como

$$A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \dots = \sum_r \langle A \rangle_r ,$$

donde  $\langle A \rangle_r$  es la parte  $r$ -vectorial de  $A$ . Cuando  $A = \langle A \rangle_r$  entonces el elemento  $A$  es homogéneo de grado  $r$  o sea es un  $r$ -vector.

El operador "grado"  $\langle \dots \rangle_r$  tiene las propiedades

- a)  $\langle A + B \rangle_r = \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r$  .
- b)  $\langle \lambda A \rangle_r = \lambda \langle A \rangle_r = \langle A \rangle_r \lambda$  si  $\lambda = (\lambda)_0$ .
- c)  $\langle \langle A \rangle_r \rangle_r = \langle A \rangle_r$ .

Se puede construir un  $r$ -vector como  $(a_i \in E)$

$$A_r = a_1 a_2 \dots a_r , \text{ donde}$$

$$a_j a_k = -a_k a_j \text{ para } j \neq k.$$

Se introduce la operación "inversión" ( $\dagger$ ) con las siguientes propiedades:

- a)  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ ,
- b)  $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$ ,
- c)  $\langle A^\dagger \rangle = \langle A \rangle$ ,
- d)  $a^\dagger = a$  donde  $a = \langle a \rangle_1$  y  $A \in \mathbf{C}(E)$ ,  $B \in \mathbf{C}(E)$ .

En otros tratados la inversión de  $A$  se denota  $\hat{A}$ , pero en las representaciones  $M(A)$  del álgebra es frecuente  $M(\hat{A}) = M^\dagger(A)$ .

Por lo tanto el producto inverso de varios vectores

$$\begin{aligned} (a_1 a_2 \dots a_r)^\dagger &= a_r \dots a_2 a_1 \text{ y} \\ \langle A^\dagger \rangle_r &= \langle A \rangle_r^\dagger = (-1)^{r(r-1)/2} \langle A_r \rangle \\ \langle AB \rangle_r &= (-1)^{r(r-1)/2} \langle B^\dagger A^\dagger \rangle_r \\ \langle A_r B_s \rangle_r &= \langle B_s^\dagger A_r^\dagger \rangle_r = (-1)^{s(s-1)/2} \langle B_s A_r \rangle_r \\ \langle AB_r C \rangle_r &= \langle C^\dagger B_r A^\dagger \rangle_r \\ \langle A_r B_s C_t \rangle_g &= (-1)^\epsilon \langle C_t B_s A_r \rangle_g \text{ con } \epsilon = \frac{1}{2} (g^2 + r^2 + s^2 + t^2 - g - r - s - t) \end{aligned}$$

Ahora se define el producto interno de los multivectores homogéneos  $A_r$  y  $B_s$  como

$$\begin{aligned} A_r \cdot B_s &\equiv \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} \quad \text{si } r, s > 0 \quad \text{donde} \\ A_r \cdot B_s &\equiv 0 \quad \text{si } r = 0 \quad \text{ó } s = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

tal que  $A \cdot B = \sum_r \sum_s A_r \cdot B_s$  para todo  $A$  y  $B \in \mathbb{C}(E)$ .

En forma semejante se define el producto exterior de dos multivectores homogéneos  $A_r$  y  $B_s$  como

$$\begin{aligned} A_r \wedge B_s &= \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \quad \text{donde} \\ A_r \wedge \lambda &= \lambda \wedge A_r = \lambda A_r \quad \text{si } \lambda = \langle \lambda \rangle_0 \quad \text{tal que} \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

$$A \wedge B = \sum_r \sum_s A_r \wedge B_s \quad \text{para todo } A \text{ y } B \in \mathbb{C}(E).$$

Además se sabe que

$$\begin{aligned} A_r \cdot B_s &= (-1)^{r(s-1)} B_s \cdot A_r \quad \text{para } r \leq s \\ A_r \wedge B_s &= (-1)^{rs} B_s \wedge A_r. \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Las propiedades del producto geométrico implican que

$$\begin{aligned} A \cdot (B + C) &= A \cdot B + A \cdot C \\ A \wedge (B + C) &= A \wedge B + A \wedge C \\ A \wedge (B \wedge C) &= (A \wedge B) \wedge C \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Sin embargo el producto interno es no-asociativo, ya que se define de manera tal que obedece las reglas

$$\begin{aligned} A_r \cdot (B_s - C_t) &= (A_r \wedge B_s) \cdot C_t \quad \text{para } r + s \leq t \text{ y } r, s > 0 \\ A_r \cdot (B_s \cdot C_t) &= (A_r \cdot B_s) \cdot C_t \quad \text{para } r + t \leq s \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

De (I.26) y (I.28) es evidente que

$$a \wedge \wedge \wedge b \wedge B = - b \wedge \wedge \wedge a \wedge B \quad \text{y} \tag{I.30}$$

$$a \wedge \wedge \wedge a \wedge B = 0 \quad \text{para toda } A \text{ y } B \in \mathbb{C}(E)$$

Usando el producto interno y externo entre un vector y un r-vec-tor se puede definir el producto geométrico tal que

$$\begin{aligned} a \cdot A_r &= \langle a A_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2} (a A_r - (-1)^r A_r a) , \\ a \wedge A_r &= \langle a A_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2} (a A_r + (-1)^r A_r a) , \end{aligned} \tag{I.31}$$

$$a A_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r = \langle a A_r \rangle_{r-1} + \langle a A_r \rangle_{r+1}$$

Por otro lado se dice que  $A_+$  es par si  $\langle A_+ \rangle_r = 0$  para todos los valores impares de  $r$ , a su vez  $A_-$  será impar si  $\langle A_- \rangle_r = 0$  para cualquier  $r$  par. Todo multivector  $A$  puede escribirse como la suma de una parte par  $A_+$  y una impar  $A_-$ .

$$A = A_+ + A_- \quad \text{y entonces}$$

$$a \cdot A_+ = \frac{1}{2} (a A_+ - A_+ a)$$

$$a \wedge A_+ = \frac{1}{2} (a A_+ + A_+ \cdot a)$$

$$a \cdot A_- = \frac{1}{2} (a A_- + A_- \cdot a)$$

$$a \wedge A_- = \frac{1}{2} (a A_- - A_- a) \quad \text{con las que finalmente podemos generalizar:}$$

$$a A = a \cdot A + a \wedge A. \tag{I.32}$$

También se encuentra que

$$A_r B_s = \sum_{k=0}^m \langle A_r B_s \rangle_{|r-2|+2k} \tag{I.33}$$



de donde es evidente que el producto de multivectores homogéneos no es homogéneo. Además como el producto de multivectores pares es par, el conjunto de todos los multivectores pares forma una subálgebra del álgebra de Clifford original.

Una forma útil de desarrollar la expresión (I.31) es

$$a \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \dots \wedge a_{k-1} \wedge a_{k+1} \wedge \dots \wedge a_r, \quad (\text{I.34})$$

que se generaliza para los n-vectores como

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_s) = (a_1 \wedge \dots \wedge a_{r-1}) \cdot [a_r \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_s)] \quad (\text{I.35})$$

Otras identidades de gran uso en la física son

$$\begin{aligned} a \cdot (A_r B) &= a \wedge A_r B - (-1)^r A_r a \wedge B \\ a \wedge (A_r B) &= a \cdot A_r B + (-1)^r A_r a \wedge B, \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

con la finalidad de tratar con multivectores más generales conviene definir el producto escalar

$$A * B \equiv (AB) \quad \text{con las propiedades} \quad (\text{I.37})$$

- a)  $A_r * B_s = 0$  si  $r \neq s$
- b)  $A_r * B_r = A_r \cdot B_r = B_r * A_r$  si  $r \neq 0$
- c)  $A * B = \sum_r A_r * B = \sum_r A_r * B_r = \langle A \rangle \langle B \rangle + \sum_r A_r \cdot B_r$ .
- d)  $A * B = (AB) = (BA) = B * A$
- e)  $A * (\alpha B + \beta C) = \alpha A * B + \beta A * C$  con  $\alpha$  y  $\beta$  como escalares.
- f)  $A * B = A^\dagger * B^\dagger$ .

Otro punto interesante es el relativo a la definición de un pro-

ducto escalar positivo asociado con todo multivector A al que se le puede llamar magnitud de A.

$$|A|^2 = A^\dagger * A = \sum_r |A_r|^2 \geq 0 \quad (\text{I.38})$$

que equivale a

$$|A|^2 = (a_1 \dots a_r)^\dagger (a_1 \dots a_r) = |a_1 \dots a_r|^2 = |a_1|^2 \dots |a_r|^2 \geq 0$$

para un r-vector.

Además es posible usar la ley distributiva para multivectores y definir un ángulo entre los mismos como

$$|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2A^\dagger * B$$

$$\cos \angle AB = \frac{A^\dagger * B}{|A||B|} \quad (\text{I.39})$$

Por último, mencionaremos algunos métodos útiles para generar y clasificar álgebras de Clifford. Sea un álgebra de Clifford universal de un espacio lineal real n-dimensional con elementos base (18)

$A_n^s = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$  asociada con la regla  $\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2g^{ij}e$  donde e es un elemento unitario del álgebra,  $g^{ij} = \pm \delta_{ij}$  es el tensor métrico y  $s = p - q$  (la signatura del espacio está dada por los índices p, q) entonces:

Teorema - Dos álgebras de Clifford son equivalentes cuando sus índices son iguales con módulo 8  $A_n^s \cong A_n^{s \bmod 8}$ .

Teorema - Dos álgebras de Clifford son equivalentes cuando sus índices de signaturas se reflejan alrededor del valor  $s = +1$   $A_n^s \cong A_n^{2-s}$ .

Corolario I Para  $s = p-q = 0 \pmod{4}$ ,  $A_n^s \cong A_n^{-s}$ .

Corolario II Para  $s = p-q = 0 \pmod{4}$ ,  $A_n^s \cong A_n^{s+2}$ .

Corolario III Para  $s = -1 \pmod{4}$ ,  $A_n^s \cong A_n^{s+4k}$ .

Es importante hacer notar que las propiedades de las álgebras de Clifford están estrechamente relacionadas con el correspondiente elemento canónico o elemento de volumen en  $n$  dimensiones denotado por  $\sigma(n) \equiv \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$  con la característica dada por

$$\sigma_k \sigma(n) = \pm \sigma(n) \sigma_k \tag{I.40}$$

donde el signo positivo corresponde a  $n$  impar, también se sabe que

$$\{\sigma(n)\}^2 = (-1)^{1/2(n-s)} \tag{I.41}$$

a partir de lo cual se definen los proyectores del tipo usado por Basri y Barut

$$P_n^\pm \equiv 1/2 (e \pm \sigma(n)) \tag{I.42}$$

que satisfacen las relaciones

$$(P_n^\pm)^2 = P_n^\pm, \quad P_n^+ P_n^- = P_n^- P_n^+ = 0$$

Un método para generar álgebras de orden superior consiste en construir el producto directo de un álgebra de orden  $p$  por  $A_m^s$  de signatura  $(p, q)$  llamada el álgebra generadora por un álgebra  $A_n^+$  de signatura  $(u, v)$  llamada el álgebra inicial que puede ser par o impar; el resultado final es un álgebra  $A_{m+n}^\omega$  de orden  $m+n$  y signatura  $(P, Q)$ .

II. UN PUNTO DE VISTA GEOMETRICO DEL ESPACIO METRICO.

Sea  $X^* = P - 0$  un vector en  $R^3$ , donde P y 0 son dos puntos que generan los correspondientes vectores en  $P^2$ . En coordenadas rectangulares podemos escribir<sup>(15)</sup> (usando de nuevo un vector considerado como la recta dirigida del origen al punto para identificar a ese punto)

$$P = 0 + X^i \alpha_i \tag{II.1}$$

con  $\alpha_i$  como vectores base del espacio físico y generadores del álgebra geométrica. Esto puede, siguiendo las ideas de Grassmann, interpretarse como una translación del punto 0 a lo largo de las direcciones  $\alpha_i$ .

También podemos pensar en describir P a partir de 0 mediante una translación de  $\rho$  unidades en la dirección  $\alpha_1$ , generando el vector  $\rho\alpha_1$ , seguida por una rotación de este vector por un ángulo  $\phi$  en el plano  $\alpha^1\alpha^2$  y finalmente se efectúa una translación de  $X^3$  unidades en la dirección  $\alpha_3$ , que queda expresado como

$$P = e^{\alpha_2\alpha_1\phi/2} (0 + \rho\alpha_1) e^{-\alpha_2\alpha_1\phi/2} + X^3\alpha_3 \tag{II.2}$$

$$P = 0 + \rho \cos \phi \alpha_1 + \rho \sin \phi \alpha_2 + X^3 \alpha_3$$

Con lo anterior se ha dado además un sentido geométrico evidente al uso de coordenadas cilíndricas. Comparando (II.1) con (II.2) resulta

$$\begin{aligned} X^1 &= \rho \cos \phi \\ X^2 &= \rho \sin \phi \\ X^3 &= X^3 \end{aligned} \tag{II.3}$$

Como último ejemplo, llegamos al punto P a partir de O efectuando en primer lugar una translación en r unidades a través de la dirección  $\alpha_3$  descrita por el vector  $r\alpha_3$ , después se efectúa una rotación de este vector por un ángulo  $\theta$  en el plano  $\alpha^1\alpha^3$  y finalmente otra rotación pero ahora por un ángulo  $\phi$  en el plano  $\alpha^1\alpha^2$ .

$$P = e^{\alpha_2\alpha_1\phi/2} e^{\alpha_3\alpha_1\theta/2} (O + r\alpha_3) e^{-\alpha_1\alpha_3\theta/2} e^{-\alpha_2\alpha_1\phi/2}$$

$$P = O + r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \alpha_1 + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \alpha_2 + r \cos \theta \alpha_3. \quad (\text{II.4})$$

Comparando (II.1) con (II.4) resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ \dot{x}^2 &= r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \dot{x}^3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

De esta forma (II.4) se encuentra escrito en coordenadas esféricas.

Como una segunda serie de ejemplos, veamos las expresiones para una diferencial vectorial  $dx$  en distintos sistemas coordenados, lo cual es de gran importancia práctica. Como su deducción es fácil y directa sólo se enlistan a continuación las diversas formas equivalentes:

a) En coordenadas rectangulares

$$dx = dx^1\alpha_1 + dx^2\alpha_2 + dx^3\alpha_3$$

b) En coordenadas cilíndricas

$$dx = (\cos \phi \alpha_1 + \operatorname{sen} \phi \alpha_2) d\rho + (\cos \phi \alpha_2 - \operatorname{sen} \phi \alpha_1) \rho d\phi + dx^3 \alpha_3$$

$$dx = d\rho u + \rho d\phi v + dx^3 \alpha_3$$

donde el coeficiente de  $d\rho$  es un vector unitario  $u$  en la dirección del incremento de  $\rho$ , en forma análoga  $v$  es un vector unitario en la dirección del incremento  $\rho d\phi$  y  $\alpha_3$  en la de  $dx$ . Podemos entonces definir un nuevo sistema de vectores (ortogonales)

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \alpha_r = \cos \phi \alpha_1 + \sin \phi \alpha_2 = u \\ \alpha'_2 &= \alpha_\phi = \cos \phi \alpha_2 - \sin \phi \alpha_1 = v \\ \alpha'_3 &= \alpha_3\end{aligned}\tag{II.6}$$

c) En coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}dx &= (\cos \phi \sin \theta \alpha_1 + \sin \phi \sin \theta \alpha_2 + \cos \theta \alpha_3) dr + \\ &+ (\cos \phi \cos \theta \alpha_1 + \sin \phi \cos \theta \alpha_2 - \sin \theta \alpha_3) r d\theta + \\ &+ r \sin \theta (-\sin \phi \alpha_1 + \cos \phi \alpha_2) d\phi.\end{aligned}$$

Se definen los siguientes vectores unitarios (ortogonales) en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \alpha_r = \sin \theta \cos \phi \alpha_1 + \sin \theta \sin \phi \alpha_2 + \cos \theta \alpha_3 \\ \alpha'_2 &= \alpha_\theta = \cos \theta \cos \phi \alpha_1 + \cos \theta \sin \phi \alpha_2 - \sin \theta \alpha_3 \\ \alpha'_3 &= \alpha_\phi = \cos \phi \alpha_2 - \sin \phi \alpha_1,\end{aligned}\tag{II.7}$$

por lo tanto  $dx = dr \alpha'_1 + r d\theta \alpha'_2 + r \sin \theta d\phi \alpha'_3 = dx'^i \alpha_i$

de nuevo, en este ejemplo  $\alpha'_1$  es un vector unitario en la dirección de incremento de  $dx'^1$ .

Un punto de interés que deseamos tratar en esta sección es el relativo a la diferencia entre rotaciones activas (o verdaderas) y rotaciones pasivas que estrictamente sólo son transformaciones

coordenadas dentro de la misma estructura de referencia. Sea el vector  $x = x^i \alpha_i$  visto desde un nuevo conjunto de ejes coordenados los cuales han sido rotados en el plano  $xy$  por un ángulo  $-\theta$  entonces

$$x^{1'} = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta$$

$$x^{2'} = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta$$

$$x^{3'} = x^3$$

con los nuevos vectores unitarios para coordenadas cilíndricas vistos anteriormente

$$\alpha_1' = \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \sin \theta$$

$$\alpha_2' = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 \cos \theta$$

$$\alpha_3' = \alpha_3$$

el vector  $x$  puede ser escrito como

$$x = x'^i \alpha_i' = x^i \alpha_i \quad (II.8)$$

Si ahora rotamos al vector  $x$  un ángulo  $\theta$  en el plano  $xy$  se obtiene un nuevo vector  $x'$  tal que

$$x' = e^{\alpha_2 \alpha_1 \theta/2} x e^{-\alpha_2 \alpha_1 \theta/2}$$

$$x' = (\cos \theta + \alpha_2 \alpha_1 \sin \theta) (x^1 \alpha_1 + x^2 \alpha_2) + x^3 \alpha_3$$

o sea

$$x' = x'^i \alpha_i \quad \text{donde} \quad x'^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta$$

$$x'^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta \quad (II.9)$$

$$x'^3 = x^3$$

La diferencia entre el vector transformado en (II.8) y (II.9) radica en que en el primer caso el vector es reescrito en término de  $\alpha_i'$  mientras que en el segundo caso el vector fue rotado en relación a  $\alpha_i$ , por lo tanto una rotación pasiva como la dada en (II.8) se puede considerar sólo como un cambio de coordenadas.

Pasemos ahora a definir el tensor métrico asociado a un espacio vectorial como la forma bilineal (comunmente llamada primera forma fundamental) dada por<sup>(14)</sup>

$$g(x,y) = \langle x,y \rangle = x \cdot y = \sum_{ij} g_{ij} x^i y^j \quad \text{donde} \tag{II.10}$$

$$g_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \alpha_i \cdot \alpha_j$$

es fácil demostrar que este tensor se asocia al cálculo de longitudes de arco y áreas en una superficie dada. Las funciones  $g_{ij}$  definen un tensor métrico.

En álgebra geométrica siempre es posible escribir una forma bilineal de  $x$  y  $y$  como  $(x \wedge y) \cdot G$  donde  $G$  es un bivector, por consiguiente toda isometría  $f$  debe satisfacer la relación<sup>(17)</sup>

$$(f(x) \wedge f(y)) \cdot G = (x \wedge y) \cdot G. \tag{II.11}$$

A la isometría asociada con una forma bilineal dada se le conoce como una transformación simpléctica, el conjunto de estas isometrías forma un grupo llamado simpléctico.

Cuando la forma  $g(x,y)$  es positiva definida se dice que el espacio tiene estructura métrica euclideana o en forma equivalente se dice que un espacio euclideano es aquel que tiene signatura donde  $n-k$  vectores base tiene signatura positiva,  $k$  vectores tienen signatura negativa o sea que la signatura es  $(n-k, k)$  con  $k = 0$ ,



en cualquier otro caso,  $k > 0$ , la métrica es pseudoeuclidea.

Sean  $x$  y  $y$  vectores en el espacio  $R_{p,q}$  de signatura  $(p,q)$ , el producto interno de estos vectores definen un tensor métrico en el espacio métrico, en este caso las isometrías del producto interno son transformaciones  $f = f(x)$  de  $R_{p,q}$  tales que

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \quad (\text{II.12})$$

si  $U = U_k \dots U_1$  con los vectores  $U_i$  y  $f = f(x)$  es una isometría de  $R_{p,q}$ , ésta puede ser expresada como

$$f(x) = (-1)^k U x U^{-1} \quad (\text{II.13})$$

A todo multivector que puede factorizarse en un producto de vectores se le llamará un versor, un  $k$ -versor es factorizable en el producto de  $k$  vectores (generalmente se considera que los vectores son unitarios). El grupo multiplicativo de todos los vectores unitarios pares en  $C(R_{p,q})$  se llama grupo de espin y se denota como espin  $(R_{p,q})$  o espin  $(p,q)$ .

Un rotor  $S$  es un versor par tal que  $S^+ S = 1$ , la rotación del elemento  $x$  dada por  $f(x)$  y correspondiente a un rotor  $S$  tiene la forma  $f(x) = S x S^+$ . Al grupo de todos los rotores en  $C(R_{p,q})$  se le conoce como el grupo rotor de  $C(R_{p,q})$  o grupo espin  $^+(p,q)$ . Para espacios métricos euclidianos el grupo espin es idéntico al grupo rotor.

Es importante en este momento establecer una conexión entre lo dicho hasta aquí y algunos conceptos físicos de importancia; el espacio-tiempo se considera como un espacio vectorial pseudocliedeano con signatura  $(1,3)$ , el grupo ortogonal  $O(1,3)$

del espacio-tiempo es el grupo de Lorentz cuyos elementos son las transformaciones de Lorentz. El grupo  $SO^+(1,3)$  es el grupo de Lorentz propio o el grupo de rotaciones de Lorentz. La representación espin  $1/2$  del grupo de Lorentz propio la dá el grupo espin  $^+(1,3)$ .

.A. UNA PRIMERA PRESENTACION FORMAL DEL CONCEPTO DE ESPINOR.

En este punto debemos introducir el concepto de espinor, para lo cual comenzaremos por establecer que toda álgebra de Clifford  $R_{s,t}$  asociada al espacio-tiempo real n-dimensional de signatura  $(s,t)$   $R^{s,t}$  puede descomponerse en los ideales mínimos izquierdos  $f^\alpha$ , ( $R_{s,t} f^\alpha = f^\beta$ ) tal que

$$R_{s,t} = \sum_{\alpha} 2^{\chi} R_{s,t} f^{\alpha} = \sum_{\alpha} 2^{\chi} S^{\alpha}, \quad (II.14)$$

donde  $\chi$  es el número de pares de idempotentes de la forma  $\frac{1}{2} (1 + e_k)$ , que conmutan entre sí y donde los  $e_k$  forman una base vectorial para  $R_{s,t}$  (19).

La expresión (II.14) equivale a la descomposición de un álgebra matricial en sus columnas, por lo tanto el espacio espinorial  $S$  queda definido como la realización de algún mínimo ideal izquierdo de  $R_{s,t}$  mientras que la  $\alpha$ -ésima columna representa a  $S^{\alpha}$ .

Definimos al álgebra  $D_{s,t}$  como aquella algebraicamente equivalente a la complexificación del álgebra de Clifford correspondiente  $R_{s,t}$ , lo que simultáneamente equivale a afirmar que los idempotentes de  $R_{s,t}$  pueden usarse en  $D_{st}$ .

Pensemos ahora en un espacio vectorial de dimensión par  $R^{s,t}$  con  $s+t = 2r$  y el idempotente  $f$  de  $R_{s',t'} = D_{s,t}$  da la

forma (aquí y hasta el final del capítulo se trabaja de tal manera que al re-

presentar  $f, \rho, s$  por matrices, una columna se considera como una matriz cuadrada con las columnas distintas a la considerada iguales a cero)

$$f = (1/2^X) (1 + e_{k_1}) \dots (1 + e_{k_X}) \quad (\text{II.15})$$

y sea  $\{\rho_1, \dots, \rho_N\}$  con  $N = 2^r$  la base del correspondiente espacio espinorial  $S(s', t)$  tal que

$$\rho_i = \bar{u}_i f \quad \text{con } i = 1, \dots, N \quad \text{y } u_i = e_i = e_{k_1} \dots e_{k_j} \quad (\text{II.16})$$

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_j \leq n.$$

Por lo tanto todo espinor  $\psi \in \Psi(s, t) = S(s', t)$  puede escribirse como

$$\psi = \bar{u} f \quad \text{mientras que} \quad (\text{II.17})$$

$$\bar{\psi} = f u.$$

Construyamos ahora los operadores

$D^+$ :  $\psi \rightarrow \bar{\psi}$  dados para todo  $\psi \in \Psi$  como

$$D^+(\psi) = \omega_+ \beta + (\psi) = f \omega + \beta + (u) \quad (\text{II.18})$$

$$D^-(\psi) = \omega - \beta - (\psi) = f \omega - \beta - (u)$$

y los correspondientes operadores  $\bar{D}^+(\bar{\psi})$  y  $\bar{D}^-(\bar{\psi})$

$$\bar{D}^+(\bar{\psi}) = \beta_+(\bar{\psi}) \omega_+ = \beta_+(\bar{u}) \omega_+ f \quad (\text{II.19})$$

$$\bar{D}^-(\bar{\psi}) = \beta_-(\bar{\psi}) \omega_- = \beta_-(\bar{u}) \omega_- f$$

donde  $\beta_+$  y  $\beta_-$  son las anti-involuciones de  $R_{s,t}$ , y además se escoge  $\omega_{\pm}$  tal que

$$\omega_{\pm} \beta_{\pm} (f) \omega_{\pm}^{-1} = f. \quad (\text{II.20})$$

También necesitamos introducir los operadores

$$\begin{aligned} T^+(\psi) &= D^+(\psi) \omega_+^{-1} = \omega_+ \beta_+(\psi) \omega_+^{-1} = f \omega_+ \beta_+(u) \omega_+^{-1} \\ T^-(\psi) &= D^-(\psi) \omega_-^{-1} = \omega_- \beta_-(\psi) \omega_-^{-1} = f \omega_- \beta_-(u) \omega_-^{-1} \\ \bar{T}^+(\bar{\psi}) &= \omega_+^{-1} \beta_+(\bar{\psi}) \omega_+ = \omega_+^{-1} \beta_+(u) \omega_+ f \\ \bar{T}^-(\bar{\psi}) &= \omega_-^{-1} \beta_-(\bar{\psi}) \omega_- = \omega_-^{-1} \beta_-(u) \omega_- f \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Ahora podemos introducir las operaciones

$$\begin{aligned} \psi^+ &= T^\epsilon(\psi) & \psi^T &= T^{-\epsilon}(\psi) \\ \psi^* &= \bar{T}^\epsilon T^{-\epsilon}(\psi) = \bar{T}^{-\epsilon} T^\epsilon(\psi) \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

donde  $\epsilon$  queda dada por  $\beta_-(i) = \epsilon i$  y  $e_0 e_1 e_2 \dots e_{s+t}$  juega el papel de la unidad imaginaria pura  $i$ .

Según K. Buggaska<sup>(19)</sup> se identifica en (II.22) al conjugado hermitiano, transpuesta y conjugado complejo de  $\psi$  respectivamente.

Procedamos a definir un producto escalar entre espinores, sean  $\Psi$  y  $\psi \in \Psi(s,t)$  tales que  $\Psi = uf$  y  $\psi = vf$  entonces

$$(\Psi, \psi)_{\pm} = D^{\pm}(\Psi) \psi = T^{\pm}(\Psi) \omega_{\pm} \psi = f \omega_{\pm} \beta_{\pm}(u) v f, \quad (\text{II.23})$$

si definimos

$$\bar{\Psi} = \Psi^+ \omega_{\epsilon} = T(\Psi) \omega_{\epsilon} = D^{\epsilon}(\Psi)$$

se reescribe (II.23) como

$$(\Psi, \psi)_\varepsilon = \overline{\Psi} \psi \quad (\text{II.25})$$

y (II.24) corresponde a la operación de conjugación "barra" tan conocida en mecánica cuántica (19).

Finalmente de (II.14) es posible pensar en el espacio vectorial  $R^{s,t}$  como aquel generado por los elementos  $\{e_\mu\}$  que son composiciones de espinores. Actualmente esta forma de entender las estructuras matemáticas de los espacios aquí involucrados, se ve continuamente fortalecida bajo la propuesta de los espinores como elementos fundamentales a partir de los cuales puede ser construído todo espacio vectorial. Por ejemplo, sea  $\gamma_\mu; \mu = 1, \dots, s+t$  la representación matricial de  $e_\mu \in D_{s,t}$  entonces

$$e_\mu = \psi_\mu^1 + \psi_\mu^2 + \dots + \psi_\mu^N$$

o en representación matricial

$$\gamma_\mu = \Psi_\mu^1 + \Psi_\mu^2 + \dots + \Psi_\mu^N$$

con  $\Psi_\mu^\alpha \in \Psi^\alpha$  diferente de cero.

### III. ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO.

Este es quizá, el ejemplo más antiguo y más desarrollado donde se muestra la utilidad superior del álgebra geométrica. Es importante en este momento hacer notar que las ecuaciones de Maxwell que rigen al fenómeno electromagnético poseen una simetría dual, que debe estar prohibida por razones no contenidas en la teoría usual de electromagnetismo; esto es claro por el hecho de que el monopolo magnético no ha sido observado experimentalmente<sup>(11)</sup>.

Mostraremos que la teoría clásica del electromagnetismo está contenida en una sola ecuación (III.1 más adelante), si se introduce el concepto de un bivector  $F \in \mathcal{D}$ , que se relaciona con el campo electromagnético ( $\mathcal{D}$  es el álgebra geométrica real de Dirac) y un vector densidad de corriente eléctrica  $J \in \mathcal{D}$  (siguiendo la propuesta de Mercier<sup>(8)</sup> y las discusiones de Riesz<sup>(9)</sup>, Teitler<sup>(10)</sup>, Hestenes<sup>(11)</sup>, etc.) Las ecuaciones de Maxwell se escriben como

$$\square F = J \quad \text{con} \quad \square \equiv \gamma^\mu \partial_\mu \quad \text{para} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (\text{III.1})$$

Podemos descomponer (III.1) en su parte vectorial y pseudo-vectorial con lo que

$$\begin{aligned} \square \cdot F &= J \\ \square \wedge F &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

La expresión (III.1) fue propuesta para reflejar que en la naturaleza no hay monopolos magnéticos.

En lugar de (III.1) podríamos usar una forma más simétrica si se introdujera una corriente (axial)  $K$  de monopolos magnéti-

cos y las ecuaciones de Maxwell serían

$$\square F = J + K \quad (\text{III.1a})$$

$$\square \cdot F = J \quad (\text{III.2b})$$

$$\square \wedge F = K ,$$

$$\text{si escribimos } F = \frac{1}{2} (F + F^D) + \frac{1}{2} (F - F^D) = F_S + F_A$$

usando la notación  $F^D$  para el dual de un multivector  $F$ , y

$$J + K = \frac{1}{2} (J + K^D + J^D + K) + \frac{1}{2} (J - K^D - J^D + K) = J'_S + J''_A$$

tenemos las formas catalogadas por dualidad

$$\square F = J + K = \begin{cases} \square F_S = J_S \\ \square F_A = J'_A \end{cases} \quad (\text{III.1b})$$

que generan las ecuaciones

$$\square \cdot F_S = \frac{1}{2} (J + K^D) \quad \square \cdot F_A = \frac{1}{2} (J - K^D) \quad (\text{III.2b})$$

$$\square \wedge F_S = \frac{1}{2} (J^D + K) \quad \square \wedge F_A = \frac{1}{2} (-J^D + K)$$

en las que las dos segundas son las duales de las dos primeras, mostrando esta simetría en la forma más evidente posible.

Podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell que hemos presentado usando un álgebra de menor número de dimensiones como lo es la de Pauli, lo que nos va a permitir hacer contacto con la formulación usual de las ecuaciones de Maxwell

$$F = E + iB \quad \text{donde} \quad E = \frac{1}{2} (F + F^*) \\ iB = \frac{1}{2} (F - F^*)$$

y  $J$  puede escribirse en la forma

$$\mathbf{J} = (\mathbf{J}\gamma_0)\gamma_0 = (\mathbf{J}\cdot\gamma_0 + \mathbf{J}\wedge\gamma_0)\gamma_0 = (\rho + \mathbf{J})\gamma_0 \quad (\text{III.4})$$

al multiplicarlo (III.1) por  $\gamma_0$  y ya que  $\gamma_0 \square = \partial_0 + \nabla$  resulta

$$(\partial_0 + \nabla)(\mathbf{E} + i\mathbf{B}) = \rho - \mathbf{J}$$

o sea

$$\partial_0 \mathbf{E} + \nabla \mathbf{E} + i(\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \mathbf{B}) = \rho - \mathbf{J} \quad (\text{III.5})$$

en donde  $\mathbf{E}$ ,  $\nabla$ ,  $\mathbf{J}$  son vectores,  $\mathbf{B}$  es un vector axial y  $\rho$  es un escalar en el álgebra de Pauli. Igualando los elementos de la misma naturaleza

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{Escalar})$$

$$\partial_0 \mathbf{E} + i\nabla \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{J} \quad (\text{Vectores}) \quad (\text{III.6})$$

$$i\partial_0 \mathbf{B} + \nabla \wedge \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Pseudovectores})$$

$$i\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Pseudoescalares})$$

que equivalen a las familiares ecuaciones de Maxwell.

Usando (III.1) podemos definir una corriente conservada  $\mathbf{J}$  tal que

$$\square^2 F = \square \mathbf{J} = \square \cdot \mathbf{J} + \square \wedge \mathbf{J}$$

que obliga a que

$$\square \cdot \mathbf{J} = 0 = \partial_0 \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (\text{III.7})$$

Además siempre es posible expresar el bivector  $F$  en función de un potencial vectorial  $A$

$$F = \square A = \square \cdot A + \square \wedge A \quad (\text{III.8})$$

de donde resulta evidente que (debido a que  $F$  es un bivector)



$$F \doteq \square \wedge A \tag{III.9}$$

viéndose forzada la elección de la norma de Lorentz  $\square \cdot A = 0$ .

Mediante (III.9) y (III.1) se obtiene la ecuación de onda para el potencial A bajo la norma covariante de Lorentz

$$\square^2 A = J \tag{III.10}$$

Sin embargo, aún existen más simetrías a considerar si se estudia la densidad del lagrangiano del campo electromagnético

$$L = \frac{1}{2} F \cdot F \tag{III.11}$$

ya que si agregamos a A el gradiente del escalar  $\chi$

$$A' = A + \square \chi \quad \text{entonces}$$

$$\square A' = \square A + \square^2 \chi = \square A$$

siempre y cuando  $\square^2 \chi = 0$ .

También es posible escribir los campos E y B en función del potencial A como

$$E = -\partial_0 A - \nabla A_0 \quad B = \nabla \times A \quad \text{donde} \tag{III.12}$$

$$A_0 = A \cdot \gamma_0 \quad \text{y} \quad \mathbb{A} = A \wedge \gamma_0.$$

Hablemos ahora de las ecuaciones que expresan conservación de energía y momento, para lo cual debemos buscar primero corrientes conservadas vectoriales, sabemos que las ecuaciones de campo electromagnético libre son

$$\square F = 0 \quad \text{o sea} \tag{III.13}$$

$$\tilde{F} \square = 0$$

donde el símbolo  $\sim$  indica la operación mediante la cual se invierte el orden de todos los productos vectoriales y se conoce como inversión.

Se define  $S^\mu = \frac{1}{2} \tilde{F} \gamma^\mu F$  de naturaleza vectorial y con el nombre de vectores energía-esfuerzo del campo electromagnético, que se pueden interpretar como la densidad de flujo de la energía-esfuerzo electromagnético a través de una hipersuperficie ortogonal a  $\gamma^\mu$ .

Mediante (III.12) se puede deducir

$$\tilde{F} \square F + \tilde{F} \square F = \partial_\mu \tilde{F} \gamma^\mu F = 0 \quad (\text{III.14})$$

Obtengamos ahora las componentes del vector  $S^\mu$  que se conocen como tensor energía momento

$$S^{\mu\nu} = S^\mu \cdot \gamma^\nu = (S^\mu \gamma^\nu)_s = \frac{1}{2} (\tilde{F} \gamma^\mu F \gamma^\nu)_s \quad (\text{III.15})$$

donde la  $s$  indica parte escalar del producto.

Obtengamos ahora el vector  $S^0$ , al que podremos identificar como la generalización del vector de Poynting

$$S^0 = S_0 = \frac{1}{2} \tilde{F} \gamma_0 F = -\frac{1}{2} F \gamma_0 F = -\frac{1}{2} FF^* \gamma_0$$

$$FF^* = (E + iB)(-E + iB) = -(E^2 + B^2) + 2iE \wedge B.$$

Entonces

$$S^0 = S_0 = \left[ \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E \times B \right] \gamma_0 \quad (\text{III.16})$$

Por otro lado podemos escribir (III.14) como

$$\partial_\mu S^\mu = 0 \quad (\text{III.17})$$

que es la expresión a generalizar si existen fuentes de carga eléctrica, sea en este caso  $\square F = J$ ,  $\tilde{F} \tilde{\square} = J$  y

$$\tilde{F} \square F + \tilde{F} \tilde{\square} F = \partial_{\mu} \tilde{F} \gamma^{\mu} F = \tilde{F} J + J F$$

por lo tanto

$$\partial_{\mu} S^{\mu} = \frac{1}{2} (\tilde{F} J + J F) = -\frac{1}{2} (F J - J F) = -F \cdot J$$

con lo que obtenemos

$$\partial_{\mu} S^{\mu} = J \cdot F = K \quad (\text{III.18})$$

con  $K$  como la generalización espacio-tiempo para la fuerza de Lorentz, esto último es claramente visto si usamos el álgebra de Pauli para descomponer al vector  $K$ , que multiplicado por  $\gamma_0$  da;

$$K \gamma_0 = K_0 + K$$

$$F \cdot J \gamma_0 = \frac{1}{2} (F J - J F) \gamma_0$$

$$F \cdot J \gamma_0 = \frac{1}{2} (F J \gamma_0 - J \gamma_0 F^*)$$

que usando (III.3) y (III.4) se expresa como

$$F \cdot J \gamma_0 = \frac{1}{2} [ (E + iB) (\rho + J) - (\rho + J) (-E + iB) ]$$

$$F \cdot J \gamma_0 = \rho E + J \cdot E + J \times B, \quad (\text{III.19})$$

esta expresión se descompondrá separando la ecuación en su parte escalar y vectorial

$$K_0 = J \cdot E \quad \text{y} \quad (\text{III.20})$$

$$K = \rho E + J \times B$$

El siguiente punto de interés consiste en obtener los términos invariantes del campo electromagnético así como las expresiones de conservación asociadas al mismo.

De (III.18) y (III.19) sabemos que

$$\partial_{\mu} S^{\mu} \gamma_0 = F \cdot J \gamma_0$$

$$\partial_{\mu} S^{\mu} \gamma_0 = \partial_{\mu} \left( \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E \times B \right) \gamma^{\mu} \gamma_0 = \rho E + J \cdot E + J \times B$$

o sea

$$- \partial_0 \left( \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E \times B \right) = \rho E + J \cdot E + J \times B ,$$

integrando esta expresión sobre todo el espacio

$$- \frac{d}{dt} \int dV \left[ \frac{1}{2} (E^2 + B^2) + E \times B \right] = \int dV [ J \cdot E + \rho E + J \times B ] . \quad (III.21)$$

Igualando la parte escalar y vectorial de la ecuación (III.21)

resulta

$$- \frac{d}{dt} \int dV \left[ \frac{1}{2} (E^2 + B^2) \right] = \int dV J \cdot E \quad (III.22)$$

y

$$- \frac{d}{dt} \int dV (E \times B) = \int dV (\rho E + J \times B) . \quad (III.23)$$

Podemos observar que de la ecuación (III.22) y (III.23) se puede interpretar a  $\frac{1}{2} (E^2 + B^2)$  como la densidad de energía del campo, a  $J \cdot E$  como el trabajo hecho por los campos y a  $E \times B$  como la densidad del momento del campo.

Por otro lado de (III.15) se sabe que para cualquier bivector  $F$ ,  $\gamma^{\mu} F \gamma_{\mu} = 0$  con  $g_{\mu}^{\mu} = 1$  y en consecuencia  $S^{\mu}_{\mu} = 0$  lo que significa que  $S^{\mu\nu}$  es un tensor sin traza.

Los términos invariantes del campo electromagnético los da  $F^2 = F \cdot F + F \wedge F$  que en forma tensorial resulta

$$F \cdot F = - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$F \wedge F = - F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} i , \quad (III.24)$$

en función de los campos eléctricos y magnéticos

$$F^2 = (E + iB)^2 = E^2 - B^2 + 2iE \cdot B ,$$

además se puede escribir  $F = f e^{\gamma_5 \phi}$ , con  $\phi$  como una fase escalar y  $f = a + ib$ , lo que equivale a pensar en  $F^2$  como un escalar rotado en el espacio dual, de tal forma que el vector energía esfuerzo se obtiene sólo de  $f$ .

Ahora exploremos las propiedades de transformación de las ecuaciones de Maxwell. Sea la rotación de Lorentz en el plano generado por  $\gamma_1 \gamma_0$  del vector  $x^{(15)}$

$$x^1 = e^{\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} x e^{-\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} = e^{\gamma_1 \gamma_0 \theta} (x^0 \gamma_0 + x^1 \gamma_1) + x^2 \gamma_2 + x^3 \gamma_3 .$$

o sea

$$x^1 = (x^0 - \beta x^1) \gamma \gamma_0 + (x^1 - \beta x^0) \gamma \gamma_1 + x^2 \gamma_2 + x^3 \gamma_3$$

$$\text{donde } \beta = \tanh \theta \quad , \quad \cosh \theta = (1 + \beta^2)^{-1/2} = \gamma \quad \gamma$$

$$\text{sen } \theta = \beta (1 - \beta^2)^{-1/2} = \beta \gamma .$$

Apliquemos esta misma rotación de Lorentz a la ecuación  $\square F = J$ .

$$e^{\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} \square F e^{-\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} = e^{\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} J e^{-\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2}$$

que equivale a

$$\square {}^1 F^1 = J^1 \tag{III.25}$$

donde

$$J^1 = e^{\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} J e^{-\gamma_1 \gamma_0 \theta / 2} = (J^0 - \beta J^1) \gamma \gamma_0 + (J^1 + \beta J^0) \gamma \gamma_1 +$$

$$J^2 \gamma_2 + J^3 \gamma_3 ,$$

$$\square' = e^{\gamma_1 \gamma_0^{\theta/2}} \square e^{-\gamma_1 \gamma_0^{\theta/2}} = (\partial_0 - \beta \partial_1) \gamma \gamma_0 + (\partial_1 - \beta \partial_0) \gamma \gamma_1 + \partial_2 \gamma^2 + \partial_3 \gamma^3 \quad \text{y finalmente}$$

$$\begin{aligned} F' &= e^{\gamma_1 \gamma_0^{\theta/2}} F e^{-\gamma_1 \gamma_0^{\theta/2}} = (E' + \gamma_5 B') \gamma_1 \gamma_0 + e^{\gamma_1 \gamma_0^{\theta}} [(E^2 + \gamma_5 B^2) \gamma_2 \gamma_0 \\ &+ (E^3 + \gamma_5 B^3) \gamma_3 \gamma_0] = E^1 \gamma_1 \gamma_0 + B^1 \gamma_5 \gamma_1 \gamma_0 + (E^2 - \beta B^0) \gamma \gamma_2 \gamma_0 \\ &+ (E^3 + \beta B^2) \gamma \gamma_3 \gamma_0 + (B^2 + \beta E^3) \gamma \gamma_5 \gamma_2 \gamma_0 + (B^3 - \beta E^2) \gamma \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0. \end{aligned}$$

De (III.25) se deduce la manifiesta covariancia de las ecuaciones de Maxwell. Por otro lado es fácil observar que la única transformación que no deja invariante a  $\gamma_5$  es la paridad o reflexión espacial, por esta razón se trata a  $\gamma_5$  como un pseudoescalar. Investiguemos lo que le ocurre a las ecuaciones de Maxwell por una transformación de paridad

$$\gamma_0 (\square F) \gamma_0^{-1} = \gamma_0 J \gamma_0^{-1} \quad \text{que equivale a}$$

$$\square' F' = J' \quad \text{(III.26)}$$

donde

$$J' = J^0 \gamma_0 - J^i \gamma_i$$

$$\square' = \gamma_0 \square \gamma_0^{-1} = \partial_0 \gamma^0 - \partial_i \gamma^i$$

$$F' = \gamma_0 F \gamma_0^{-1} = \gamma_0 (E + \gamma_5 B) \gamma_0^{-1} = -E + \gamma_5 B,$$

donde evidentemente (III.26) expresa la covariancia de las ecuaciones de Maxwell ante una transformación de paridad.

Finalmente, retomando lo antes hecho, busquemos las consecuencias físicas de la simetría siguiente del potencial  $A$  <sup>(20,21)</sup>

$$A \rightarrow A' = A + \square \chi \quad \text{siempre y cuando}$$

$$\square^2 \chi = 0, \quad \text{(III.27)}$$

además como en la norma de Lorentz  $\square^2 A = 0$  podemos proponer una expresión para A

$$A = \epsilon(p) e^{-ip \cdot x} \quad \text{(III.28)}$$

donde evidentemente  $\epsilon(p)$  es un cuadrivector que depende del momento y al que llamaremos vector polarización del fotón.

Para que (III.28) cumpla con (III.10) es forzoso que  $p^2 = 0$  lo que equivale a afirmar que el fotón no tiene masa en reposo, a su vez la condición de Lorentz aplicada sobre (III.28) obliga a que se cumpla  $p \cdot \epsilon = 0$  con lo que el número de componentes independientes de  $\epsilon(p)$  se reduce a tres.

Por otro lado proponemos como solución a (III.27),  $\chi = iae^{-ip \cdot x}$  donde  $a$  es una constante.

Substituyendo (III.28) y (III.27) en la expresión

$$A' = A + \square \chi$$

se obtiene la transformación de norma sobre el vector polarización del fotón

$$\epsilon \rightarrow \epsilon' = \epsilon + ap,$$

esta libertad de norma nos permite fijar un componente más del vector  $\epsilon$ . Arbitrariamente se escoge como cero la componente escalar y por razones físicas se establece que el vector polarización tiene dos componentes diferentes de cero ambas transversas al vector momento.

IV. LA ECUACION MULTIVECTORIAL DE DIRAC.

Para representar la teoría de Dirac en forma multivectorial, debemos considerar la relación entre los momentos observados para una partícula desde el punto de vista de dos sistemas de referencia  $S$  ( $S'$ ), en cada uno de los cuales se asocia un vector energía-momento  $P$  ( $P'$ ) a la partícula elemental, considerada de masa en reposo  $m_0$  (24)

$$P = P^\beta \gamma_\beta = P'^\alpha \gamma_\alpha = P' ,$$

teniendo en cuenta que se pueden relacionar los vectores base de los sistemas de referencia  $S'$  y  $S$  mediante una transformación de Lorentz  $L$

$$\gamma'_\alpha = L \gamma_\alpha L^{-1} \quad \text{con} \quad L^{-1} L = L L^{-1} = 1.$$

Si el sistema  $S'$  es elegido como aquel en el cual la partícula está en reposo, de tal forma que  $P' = m_0 c \gamma'_0$ , entonces en el sistema del observador ( $S$ )

$$P^\beta \gamma_\beta L = m_0 c L \gamma_0 L^{-1} L = m_0 c L \gamma_0 ,$$

que puede transformarse a la forma diferencial multivectorial

$$-\gamma_\beta \partial^\beta \psi' = m_0 c \psi' \gamma_0 I$$

si hacemos uso del operador

$$P^\beta L = h \partial^\beta \psi' I \quad \text{con} \quad I^2 = -1 \quad \text{y} \quad \psi' = AL$$

donde  $A$  es un multivector y de aquí en adelante elegimos las unidades  $h = c = 1$ .



Esta forma diferencial multivectorial describe a la partícula en movimiento relativo a S, que usaremos en la forma

$$(\square - m)\psi = 0 \quad (\text{IV.1})$$

con  $\square = \gamma_\beta \partial^\beta$ , además se define  $\psi^1 \gamma_0 = \psi$  para  $\psi$  par y tal que  $\psi I = I\psi$ , finalmente  $m = m_0 I$ .

De lo antes hecho es evidente que las únicas elecciones posibles de I son

$$I = \gamma_5 \quad \text{ó} \quad I = i1$$

Con la finalidad de simplificar el tratamiento de algunos puntos de esta sección, que se aboradarán más adelante, el término I ha sido absorbido dentro de m y por lo tanto esta última cantidad deberá ser considerada como imaginaria pura en el resto del trabajo <sup>(15)</sup>.

La ecuación (IV.1) es la ecuación de Proca y no la ecuación normal de Dirac y en consecuencia  $\psi$  no es la solución común de Dirac, la diferencia es que  $\psi$  es un elemento de nuestra álgebra geométrica y no una matriz columna de cuatro componentes (espinor de cuatro entradas), por esta razón será especialmente importante contrastar la interpretación de la función de onda del álgebra geométrica con su interpretación normal. A pesar de que las funciones de onda son diferentes, el operador  $\square - m$  es algebraicamente equivalente al operador matricial 4 x 4 usado en la ecuación normal de Dirac. El punto crucial es que la función de onda del álgebra geométrica  $\psi$  es un elemento de la misma álgebra que el operador  $\square - m$ , por facilidad de notación se llamará a (IV.1) la ecuación de Dirac.

Podemos ahora investigar los espinores del álgebra de Pauli. (P)

con más detalle, según la definición dada en II.A

para los espinores. Sea  $\phi \in \mathbb{P}$ , siempre puede escribirse como <sup>(11)</sup>

$$\phi = \phi_0 + \phi_i \sigma_i \quad (\text{IV.2})$$

y proyectarse para todo vector unitario  $\sigma_i$

$$\phi = \phi_+ + \phi_- \quad (\text{IV.3})$$

que definen los ideales mínimos izquierdos  $\mathbb{P}_+/\mathbb{P}_-$  sobre los cuales se puede construir una base espinorial ortonormal. Por ejemplo, si se escoge  $\sigma_3$  para proyectar a  $\phi$  se obtiene

$$\phi_+ = \frac{1}{2} (1 + \sigma_3) \phi \quad \text{y} \quad \phi_- = \frac{1}{2} (1 - \sigma_3) \phi \quad \text{con} \quad (\text{IV.4})$$

$$\mathbb{P}_+ = \{\phi_+\} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}_- = \{\phi_-\} .$$

Se construye la base de  $\mathbb{P}_+$  ( $u_1, u_2$ ) como

$$u_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sigma_3) \quad u_2 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sigma_3) \sigma_1 \quad (\text{IV.5})$$

y la de  $\mathbb{P}_-$  ( $v_1, v_2$ ) como

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sigma_3) \sigma_1 \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - \sigma_3) \quad (\text{IV.6})$$

con la propiedad de que

$$(u_a^+ u_b)_s = (v_a^+ v_b)_s = \delta_{ab} \quad (\text{IV.7})$$

$$\sum_a u_a u_a^+ = \sum_b v_b v_b^+ = 2$$

$$(u_a v_b^+)_s = (v_b^+ u_a)_s = 0$$

Ahora, para todo  $\phi \in \mathbb{P}$  podemos usar las bases espinoriales y escribir

$$\phi = (\phi_{1+} u_1) + (\phi_{1-} v_1) + (\phi_{2+} \bar{u}_2) + (\phi_{2-} v_2) \quad (\text{IV.8})$$

donde

$$\begin{aligned} \phi_{1+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_0 + \phi_3) & \phi_{1-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \\ \phi_{2+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) & \phi_{2-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_0 - \phi_3) \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Se puede obtener una representación matricial de  $\phi$  mediante el arreglo

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{1+} & \phi_{1-} \\ \phi_{2+} & \phi_{2-} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

A partir del estudio hecho sobre los espinores en el álgebra de Pauli podemos concluir algunos hechos importantes sobre los espinores  $\mathcal{D}_C$  (álgebra de Dirac compleja). Todo  $\psi \in \mathcal{D}_C$  puede escribirse como la suma de una parte par  $\phi$  y otra impar  $\chi\gamma_0$  tal que

$$\psi = \phi + \chi\gamma_0 \quad \text{donde} \quad \phi \in \mathcal{P} \quad \text{y} \quad \chi \in \mathcal{P} \quad (\text{IV.11})$$

Asímismo  $\psi$  puede ser proyectado usando  $\sigma_i$  en  $\psi = \psi_+ + \psi_-$  con

$$\psi_{\pm} = \psi \frac{1}{2} (1 \pm \sigma_i) = \phi_{\pm} + \chi_{\pm} \gamma_0 \quad (\text{IV.12})$$

También se puede construir una base espinoreal para el espacio  $\mathcal{D}_{C+}$  y otra para el  $\mathcal{D}_{C-}$  llamada  $w_a$  y  $\bar{w}_a \gamma_0$  respectivamente donde

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 & w_3 &= v_1 \gamma_0 = -\gamma_0 u_2 \\ w_2 &= \bar{u}_2 & w_4 &= v_2 \gamma_0 = \gamma_0 u_1 \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \psi_+ &= \sum_{a=1}^4 \psi_{a+} w_a \\ \psi_- &= \sum_{a=1}^4 \psi_{a-} w_a \gamma_0 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Por lo que resulta evidente que el espinor de Dirac puede escribirse como la suma de dos ideales mínimos e independientes, cada uno de los cuales es un espacio vectorial de cuatro dimensiones sobre los números complejos.

Continuando con el espacio  $\mathcal{D}_C$ , sea el espacio espinorial  $L$  cuyos elementos  $\chi_a$  son espinores definidos como ideales mínimos izquierdos con respecto a los multivectores  $M$  que en este caso tomaremos como los correspondientes al álgebra de Dirac compleja  $\mathcal{D}_C$  tal que si  $\chi \in L$  y  $M \in \mathcal{D}_C$  entonces  $M\chi \in L$ , sea el espacio vectorial dual  $L^+$  cuyos elementos  $\chi_a^+$  son los espinores duales construidos como ideales mínimos derechos con respecto a  $\mathcal{D}_C$  tal que si  $\chi^+ \in L^+$  y  $M \in \mathcal{D}_C$  entonces  $\chi^+ M \in L^+$ .

Además, se define el producto interno entre espinores  $\chi \in L$  y  $\chi^+ \in L^+$  como aquel que

$$\chi_{s,g}^+ \chi_{s',g'} = \delta_{ss'} \delta_{gg'} \in \mathbb{C}. \tag{IV.15}$$

De la misma sección II sabemos que toda base canónica del espacio  $R_{s,t}$  se puede describir como una combinación lineal de productos espinoriales.

En el álgebra  $\mathcal{D}_C$  siempre es posible definir operadores tales que

$$\begin{aligned} Q_R \chi_{s,q} &= \chi_{s,R} \delta_{R,q} & S_{\uparrow} \chi_{s,q} &= \chi_{\uparrow,q} \delta_{\uparrow,s} \\ Q_L \chi_{s,q} &= \chi_{s,L} \delta_{L,q} & S_{\downarrow} \chi_{s,q} &= \chi_{\downarrow,q} \delta_{\downarrow,s} \end{aligned} \tag{IV.16}$$

siendo cero en cualquier otra combinación.

Gracias a (IV.16) quedan bien definidas sobre el espinor las propiedades llamadas espín y quiralidad mediante el uso del operador proyección de quiralidad  $Q_{R/L} = \frac{1}{2} (1 \pm i\gamma_5)$  y el operador proyección de espín  $S_{\uparrow/\downarrow} = \frac{1}{2} (1 \pm i\gamma_{12})$ .

De esta forma resulta que se puede dividir el espacio  $L$  de dos formas

$$L_{\mathcal{D}_C} = L_R + L_L \quad \text{y} \quad L_{\mathcal{D}_C} = L_{\uparrow} + L_{\downarrow} \quad (\text{IV.17})$$

También es posible asociar a cada espinor una propiedad llamada masa, usando para esto el proyector  $m_{+/-} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_0)$ , sin embargo basta con definir solamente dos de estas tres propiedades asociadas al espinor, en este caso se eligen las propiedades quiralidad y espín considerándolas como primordiales sobre la masa.

Todo elemento del álgebra  $\mathcal{D}_C$  puede escribirse como:

$$\Lambda_K = \sum_{i/j} (-1)^{[i,j]} e^{i\theta_K} \chi_{ij} \chi_{ij}^+ \quad \text{para } \Lambda \in \mathcal{D}_C \quad (\text{IV.18})$$

donde  $[i,j]$  es un número dado en función de estos índices que corren sobre estados de quiralidad y espín y  $\theta_K$  es una fase.

A partir de las siguientes definiciones de los elementos usados para construir los proyectores principales de nuestra teoría se puede construir todo elemento de  $\mathcal{D}_C$  en función de espinores

$$i\gamma_5 = \sum_S (\chi_{SR} \chi_{S,R}^+ - \chi_{SL} \chi_{SL}^+) \quad (\text{IV.19})$$

$$i\gamma_{12} = \sum (\chi_{\uparrow q} \chi_{\uparrow q}^+ - \chi_{\downarrow q} \chi_{\downarrow q}^+)$$

$$1 = \sum_S \sum_{\bar{q}} \chi_{qS} \chi_{qS}^+$$

Como  $\gamma_0$  anticonmuta con  $i\gamma_5$  y conmuta con  $i\gamma_{12}$  se propone

$$\gamma_0 = \sum_S (X_{SL} X_{SR}^+ + X_{SR} X_{SL}^+) \quad (\text{IV.20})$$

donde se ha escogido  $\theta_{i\gamma_5} = \theta_{i\gamma_{12}} = \theta_0 = 0$ . El resto de los elementos de  $\mathcal{D}_C$  se obtienen usando las propiedades del álgebra

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= X_{\uparrow,L} X_{\uparrow,R}^+ + X_{\downarrow,L} X_{\downarrow,R}^+ + X_{\uparrow,R} X_{\uparrow,L}^+ + X_{\downarrow,R} X_{\downarrow,L}^+ \\ \gamma_1 &= -X_{\uparrow,L} X_{\downarrow,R}^+ - X_{\downarrow,L} X_{\uparrow,R}^+ + X_{\uparrow,R} X_{\downarrow,L}^+ + X_{\downarrow,R} X_{\uparrow,L}^+ \\ \gamma_2 &= i(-X_{\uparrow,L} X_{\downarrow,R}^+ + X_{\downarrow,L} X_{\uparrow,R}^+ + X_{\uparrow,R} X_{\downarrow,L}^+ - X_{\downarrow,R} X_{\uparrow,L}^+) \\ \gamma_3 &= -X_{\uparrow,L} X_{\uparrow,R}^+ + X_{\downarrow,L} X_{\downarrow,R}^+ + X_{\uparrow,R} X_{\uparrow,L}^+ - X_{\downarrow,R} X_{\downarrow,L}^+ \end{aligned} \quad (\text{IV.21})$$

Si se define la matriz columna  $\chi_\alpha \in L$  y la matriz renglón  $\chi_\alpha^+ \in L^+$  como

$$\chi^+ = (X_{\uparrow,R}^+, X_{\downarrow,R}^+, X_{\uparrow,L}^+, X_{\downarrow,L}^+) \quad Y$$

$$\chi = \begin{pmatrix} X_{\uparrow,R} \\ X_{\downarrow,R} \\ X_{\uparrow,L} \\ X_{\downarrow,L} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

entonces es posible evidenciar una representación matricial del álgebra  $\mathcal{D}_C$ , esta representación será la quiral ya que estamos usando a  $i\gamma_5$  para construir un proyector fundamental.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (IV.23)$$

en esta representación las matrices que se usan para construir los operadores de proyección básicas son diagonales

$$i\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i\gamma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (IV.24)$$

Regresemos ahora a la ecuación (IV.1), multiplicándola por  $(\square + m)(\square - m) \psi = (\square^2 - m^2) \psi = 0$ . (IV.25)

De (IV.25) se deduce que  $\psi$  debe ser descrita como una combinación lineal de  $\sin(p \cdot x)$  y  $\cos(p \cdot x)$  para valores de  $p$  tales que  $p^2 + m^2 = 0$ . Con el objetivo de resolver la ecuación de Dirac primero resolvemos la ecuación

$$(\square^2 - m^2) \phi = (\square - m)(\square + m) \phi = 0$$

donde reescribimos  $\psi = (\square + m) \phi$  y si escogemos a  $\phi$  como  $\cos(p \cdot x)$  entonces resulta que

$$\psi = m e^{p/m(p \cdot x)} \quad (IV.26)$$

que tiene la forma de una función de onda que describe partículas libres.

Ahora propongamos una solución más general a la ecuación de Dirac, si  $\phi = e^{ip \cdot x}$  entonces

$$\psi = (ip + m)e^{ip \cdot x} \quad (\text{IV.27})$$

con lo que se evidencia que  $\psi$  es la suma de un vector y un escalar. Podemos construir un idempotente dado por  $\frac{m + ip}{2m}$  y se reconoce que esta cantidad es tal que

$$\left( \frac{m + ip}{2m} \right) \left( \frac{ip}{m} \right) = \frac{m + ip}{2m} \quad (\text{IV.28})$$

Ahora es importante obtener las cantidades conservadas asociadas a  $\psi$ , a partir de (IV.1) sabemos que

$$\bar{\psi}(-\square - m) = 0 \quad (\text{IV.29})$$

Usando nuevamente (IV.1) y (IV.29) se deduce la ecuación de continuidad

$$\bar{\psi} \square \psi = 0 \quad (\text{IV.30})$$

que escrita por componentes resulta

$$\partial_{\mu} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi = 0 \quad (\text{IV.31})$$

que integrada en todo el espacio, da

$$\frac{d}{dt} \int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Antes de continuar con las cantidades conservadas asociadas a  $\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi$  trataremos el fenómeno de los electrones en interacción, en forma conjunta con la libertad de norma aún no totalmente explotada. Proponemos, para describir a los electrones en interacción, la siguiente ecuación

$$(\square - ieA - m)\psi = 0 \quad (\text{IV.33})$$



donde  $e$  es una constante y  $A$  es un vector con cuatro componentes, además sabemos que existe la libertad de norma adicional dada por

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)} \psi \\ A &\rightarrow A' = A + \square \theta(x) \end{aligned} \tag{IV.34}$$

Es evidente la identificación del cuadrivector  $A$  con el potencial electromagnético no observable directamente. Por consiguiente si conocemos la expresión para  $J$  podemos obtener las expresiones analíticas correspondientes a  $A$  y  $\psi$ , además de resultados numéricos sobre observables como (IV.32).

Es importante a su vez, caracterizar las propiedades de transformación de la ecuación de Dirac.

a) Transformación de Lorentz.

$$e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} (\square - ieA - m) e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \psi e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} = 0$$

lo que equivale exactamente a

$$(\square' - m - ieA') \psi' = 0 \tag{IV.35}$$

donde

$$\begin{aligned} \square' &= e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \square e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \\ A' &= e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} A e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \\ m' &= e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} m e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} = m \\ \psi' &= e^{\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \psi e^{-\gamma_\mu \gamma_\nu \theta/2} \end{aligned}$$

b) Transformación de paridad

$$(\not{\square}' - m' - ieA')\psi_p = 0 \quad \text{donde} \quad (\text{IV.36})$$

$$\not{\square}' = \gamma_0 \not{\square} \gamma_0^{-1}$$

$$A' = \gamma_0 A \gamma_0^{-1}$$

$$m' = m$$

$$\psi_p = \gamma_0 \psi \gamma_0^{-1}$$

c) Conjugación de carga

$$(\not{\square}' - m' + ieA')\psi_c = 0 \quad \text{donde} \quad (\text{IV.37})$$

$$\not{\square}' = \not{\square}$$

$$m' = m$$

$$A' = A$$

$$\psi_c = \psi^*$$

d) Inversión temporal

$$(\not{\square}' - m' + ieA')\psi_T = 0 \quad \text{donde} \quad (\text{IV.38})$$

$$\not{\square}' = \gamma_5 \gamma_0 \not{\square}^* \gamma_0^{-1} \gamma_5^{-1} = -\gamma_0 \not{\square} \gamma_0^{-1}$$

$$A' = \gamma_5 \gamma_0 A^* \gamma_0^{-1} \gamma_5^{-1} = -\gamma_0 A \gamma_0^{-1}$$

$$m' = m$$

$$\psi_T = \gamma_5 \gamma_0 \psi^* \gamma_0^{-1} \gamma_5^{-1}$$

Según (IV.42) existen 16 diferentes elementos algebraicos linealmente independientes que definen otras tantas cantidades conservadas, algunas de las cuales tienen valor cero.

Analicemos el significado físico de cada una de las cantidades conservadas mediante sus propiedades de transformación.

a)  $\int dVJ^0$  es un escalar de Lorentz que invierte su signo por conjugación de carga por lo que le asociamos el concepto carga total que directamente nos determina a  $J^\mu$  como el cuadrivector densidad de corriente.

b)  $\int dVT^{0\nu}\gamma_\nu$  es un vector de Lorentz que no cambia de signo por conjugación de carga, por lo que se puede pensar en  $T^{\mu\nu}$  como el tensor energía momento y  $\int dVT^{0\nu}$  como las cuatro componentes del vector energía total-momento.

c)  $\int dVM^{0\nu\rho}\gamma_\nu\gamma_\rho$  es un bivector por lo que ante transformaciones de Lorentz se comporta igual que el momento angular ( $x\wedge p$ ), además el tensor  $M^{\mu\nu\rho}$  es antisimétrico en sus dos últimos índices y no cambia de signo por conjugación de carga, por estas razones llamaremos a  $\int dVM^{0\nu\rho}$  las seis componentes del momento angular total y a  $M^{\mu\nu\rho}$  el tensor momento angular que da una medida intrínseca de esta propiedad considerada fundamental para la partícula.

Los últimos dos términos son más difíciles de interpretar, ambos son antisimétricos bajo intercambio de dos índices adyacentes (excepto  $\mu$ ) y mientras  $N^{\mu\nu\rho\sigma}$  no cambia por conjugación de carga  $P^{\mu\nu\rho\sigma}$  si lo hace. Esto último nos hace pensar en que  $N^{\mu\nu\rho\sigma}$  es una propiedad con igual valor para el electrón y positrón mientras que  $P^{\mu\nu\rho\sigma}$  describe cantidades opuestas para ambas partículas.

Regresemos ahora a la ecuación (IV.27) y calculemos con ella

el valor de  $-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi$ .

$$-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = (2EV) (-im + p) \quad (\text{IV.43})$$

si se normaliza (IV.27) a

$$\psi = (2EV)^{-1/2} (m + ip) e^{ip \cdot x},$$

entonces (IV.43) se transforma a

$$-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = (-im + p) \quad (\text{IV.44})$$

con lo que podemos identificar directamente

$$\int dV J^0 = -im$$

$$\int dV T^{0\nu} = p \quad (\text{IV.45})$$

$$\int dV M^{0\mu\nu} = \int dV N^{0\nu\rho\sigma} = \int dV P^{\nu\rho\sigma} = 0$$

En general, hemos visto cómo la ecuación de Dirac determina cuando menos tres leyes de conservación; de la probabilidad o el número de partículas, de la energía momento y del momento angular.

Es claro que en la medida en que se pueda reconstruir la ecuación de Dirac a partir de estas leyes de conservación podremos asegurar que

$$\int dV N^{0\nu\rho\sigma} = \int dV P^{\nu\rho\sigma} = 0$$

para toda partícula de Dirac.

Sabemos que la función de onda de Dirac  $\psi$  puede ser determinada por los parámetros reales conocidos como parámetros propios; el cuádrivector unitario velocidad  $v$ , el cuádrivector unitario espín  $s$ , la fase de norma  $\chi$ , el ángulo de Yvon-Takabayasi  $\beta$ ;

y un parámetro escalar que determina la densidad de partícula  $\rho$  <sup>(22)</sup>.

Comencemos por proponer para la función de Dirac la forma

$$\psi = (\rho e^{i\beta})^{1/2} R \quad \text{donde} \quad \text{(IV.46)}$$

a)  $\rho$  es la densidad.

b)  $R$  es una transformación de Lorentz tal que

$$v = R\gamma_0\hat{R}, \quad n_K = R\gamma_K\hat{R} \quad \text{con} \quad K = 1, 2 \quad \text{y} \quad S = R\gamma_3\hat{R} \quad \text{con} \\ \hat{R}R = R\hat{R} = 1,$$

de esta forma se ha construido una estructura de vectores ortogonales propia de la partícula  $R = (v, n, n_2, s)$ . Se definen, para usos posteriores

$$\sigma = n_1 \wedge n_2 = n_1 n_2, \quad \hat{\sigma} = -i\sigma = v \wedge s = vs.$$

Finalmente

c)  $\beta$  es el ángulo de Yvon-Takabayasi.

Se puede demostrar que la siguiente ecuación es estrictamente equivalente a la correspondiente de Dirac

$$(\hbar/2) c (\nabla (\hbar p) + \gamma^\mu \Omega_\mu + (\nabla \beta) i) + \quad \text{(IV.47)}$$

$$+ (mc^2 v (\cos \beta + i \sin \beta) + eA) \sigma = 0 \quad \text{donde}$$

$\Omega_j \in \Lambda^2 \dot{E}$  se define como

$\Omega_j = 2(\partial_j R)\hat{R}$  con  $j = 0, 1, 2, 3$  y representa la variación, debido a un desplazamiento infinitesimal en la dirección  $\gamma_j$ , del operador transformación de Lorentz.

Tomemos la parte pseudovectorial de (IV.47)

$$mc^2 \cos \beta s + (\hbar c/2) (u + \nabla \beta) + eA \cdot (v \wedge s) = 0 \quad (\text{IV.48})$$

$$\text{con } u = i(\gamma^\mu \wedge \Omega_\mu).$$

La ecuación (IV.48) solamente contiene los siete parámetros propios asociados a una partícula y el vector potencial A. Se puede inferir por lo tanto, que la ecuación de Dirac puede ser dividida en dos ecuaciones de naturaleza cuadvivectorial, la primera de las cuales ( $D_I$ ) es la ecuación (IV.48), mientras que la otra ecuación ( $D_{II}$ ) se puede obtener tomando la parte vectorial de la ecuación (IV.47) (se observa que la ecuación  $D_{II}$  si está en función de  $\rho$ ).

Ahora definiremos tres tensores asociados a importantes conceptos físicos

a) El tensor localización del plano espín

$$C: n \in E \rightarrow C(n) = n \cdot (v \wedge \sigma) \in \Lambda^2 E \quad (\text{IV.49})$$

cuyos valores, para algunos casos de interés, son

$$\begin{aligned} C(v) &= \sigma & C(n_2) &= v \wedge n_1 \\ C(n_1) &= n_2 \wedge v & C(s) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

b) El tensor rotación del plano espín

$$L: n \in E \rightarrow L(n) = (\Omega_\mu \cdot (i(n \wedge s))) \gamma^\mu \in E \quad (\text{IV.51})$$

cuyos valores, para algunos casos de interés, son

$$\begin{aligned} L(v) = \omega &= ((\Omega_\mu \cdot n_1) \cdot n_2) \gamma^\mu = (\partial_\mu n_1 \cdot n_2) \gamma^\mu \\ &= -(\partial_\mu n_2 \cdot n_1) \gamma^\mu \end{aligned}$$

$$L(n_1) = (\Omega_\mu \cdot (v \wedge n_2)) \gamma^\mu \quad (IV.52)$$

$$L(n_2) = (\Omega_\mu \cdot (n_1 \wedge v)) \gamma^\mu$$

$$L(s) = 0$$

por otro lado se sabe que

$$\text{Tr}L = u \cdot s = (\omega + \nabla \cdot \sigma) \cdot v$$

donde  $\omega$  se interpreta como la rotación del plano espín sobre sí mismo.

c) El tensor asociado al efecto sobre el espín de la aceleración de una partícula con estructura interna

$$M: n \in E \rightarrow M(n) = (s \cdot n) \nabla \beta \in E. \quad (IV.53)$$

Si se desarrolla  $u$  como

$$\begin{aligned} u &= \hat{\sigma} \cdot (\omega + \nabla \cdot \sigma) + \sigma \cdot (\bar{\omega} + \nabla \cdot \hat{\sigma}) \text{ con} \\ \hat{\sigma} &= -i\sigma \quad \text{y} \quad \bar{\omega} = (\Omega_\mu \cdot \hat{\sigma}) \gamma^\mu, \end{aligned} \quad (IV.54)$$

entonces (IV.48) se reescribe de la siguiente forma

$$mc^2 \cos \beta s + (v \wedge s) \cdot ((\hbar c/2) \omega - eA) + \quad (IV.55)$$

$$(\hbar c/2) (\hat{\sigma} \cdot (\nabla \cdot \sigma) + \sigma \cdot (\bar{\omega} + \nabla \cdot \hat{\sigma}) + \nabla \beta) = 0,$$

en donde se identifica la presencia de un vector dado por

$$p = (\hbar c/2) \omega - eA \quad (IV.56)$$

que corresponde al vector energía-momento de la partícula. Por otro lado, es posible demostrar la invariancia de norma de (IV.48)

y (IV.56) para las transformaciones

$$\begin{aligned} A \rightarrow A' &= A + \nabla\phi \\ \omega \rightarrow \omega' &= \omega + \nabla\psi \quad \text{con} \quad \rho = \frac{2e\phi}{\hbar c} \end{aligned} \quad (\text{IV.57})$$

La energía asociada a la partícula quedará determinada por tres tensores de energía:

a) Tensor energía cinética

$$K = n \in E \rightarrow K(n) = mc^2 (v \cdot n) v \in E. \quad (\text{IV.58})$$

b) Tensor energía cuántica

$$Q = Q = \frac{\hbar c}{2} (L + M) \quad (\text{IV.59})$$

c) Tensor energía potencial

$$P = n \in E \rightarrow P(n) = -e(v \cdot n)A \in E. \quad (\text{IV.60})$$

De esta forma quedan definidas la energía cinética  $E = mc^2 = \text{Tr}K$ , la cuántica  $E_Q = \text{Tr}Q$  y la potencial  $E_P = \text{Tr}P$ .

Sea  $\rho(x)$  la densidad del fluido  $P_{en} X \in E$ , por definición

$$\nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (\text{IV.61})$$

Si las partículas fueran clásicas, la ley de conservación de la energía-momento se escribiría como

$$\iiint_{\Sigma} \rho K(n) d\sigma = \iiint_V \rho f d\tau \quad (\text{IV.62})$$

donde  $f = (\nabla \wedge A) \cdot v$  es la fuerza de Lorentz que actúa sobre cada partícula y

$\rho K(n) = mcv(\rho cv \cdot n)$  es el flujo de momento clásico  $mcv$  cuya trayectoria atraviesa una hiperárea normal a  $n$ .



Debido a que es posible escribir

$$(\text{Tr}K) \cos \beta = \text{Tr}T , \quad (\text{IV.63})$$

el tensor K puede ser substituído por el tensor  $T = Q + P$  en la expresión (IV.62) que se reescribe como

$$\iiint_V \partial_\mu (\rho T^\mu) d\tau = \iiint_V \rho f d\tau \quad \text{con} \quad T^\mu = T(\gamma^\mu), \quad (\text{IV.64})$$

la cual debe ser válida para cualquier volumen, por lo tanto

$$\partial_\mu (\rho T^\mu) = \rho f. \quad (\text{IV.65})$$

La tercer ley de la conservación puede construirse como en mecánica clásica, si se interpreta a  $\rho u(n) = -\rho \hbar c \dot{C}(n)/2$  como el flujo de momento angular propio se propone

$$\iiint_\Sigma \rho (u(n) + X \wedge T(n)) d\sigma = \iiint_V \rho X \wedge f d\tau \quad (\text{IV.66})$$

que mediante el teorema de Gauss se transforma en

$$-\nabla \cdot (\rho (\hbar c/2) v \wedge \sigma) + \rho \gamma_\mu \wedge T^\mu + X \wedge \partial_\mu (\rho T^\mu) = \rho X \wedge f \quad (\text{IV.67})$$

la cual combinada con (IV.65) produce la expresión

$$\rho T^\mu \wedge \gamma_\mu = -\nabla \cdot (\rho (\hbar c/2) v \wedge \sigma). \quad (\text{IV.68})$$

Finalmente en esta sección, nos dedicaremos a deducir la ecuación  $D_{II}$  a partir de  $D_I$  y las relaciones (IV.61), (IV.65) y (IV.68), lo que equivale a afirmar que el contenido de la ecuación de Dirac que involucra a  $\rho$  solamente expresa un concepto derivado del de conservación para la probabilidad, la energía-momento y el momento angular exclusivamente. Sea el producto exterior de la ecuación (IV.48) y s:

$$(\hbar c/2)(u + \nabla\beta) - e(s \cdot A)v \wedge s = 0 \quad (\text{IV.69})$$

además se puede escribir

$$L^\mu \wedge \gamma_\mu = i(s^\mu \Omega_\mu + i(\gamma^\mu \cdot \Omega_\mu) \wedge s) , \quad (\text{IV.70})$$

definimos

$$T^\mu \wedge \gamma_\mu = (\hbar/c)c(L^\mu \wedge \gamma_\mu + \nabla\beta \wedge s) + ev \wedge A \quad (\text{IV.71})$$

que aunada a (IV.69) nos permite encontrar

$$\begin{aligned} (-\hbar/2)c\nabla \cdot (\rho s) &= (-\hbar/2)c\nabla \cdot (\rho v \wedge \sigma) = sT^\mu \wedge \gamma_\mu + \rho e(A + (A \cdot s)s) \wedge v \\ &- (\hbar/2)ci((\nabla\rho + \rho\gamma^\mu \cdot \Omega_\mu) \wedge s) . \end{aligned} \quad (\text{IV.72})$$

Por otro lado sabemos que

$$i((A + (A \cdot s)s) \wedge v) = A \cdot \sigma \wedge s , \quad (\text{IV.73})$$

esta relación aunada a (IV.72) y (IV.68) produce

$$eA \cdot \sigma + (\hbar/2)c(\nabla(\ln\rho) + \gamma^\mu \cdot \Omega_\mu) \wedge s = 0 . \quad (\text{IV.74})$$

Usando (IV.70) obtenemos

$$\begin{aligned} \rho T^\mu \wedge \gamma_\mu &= \rho((\hbar/2)c(\nabla\beta \wedge s - i((\nabla \ln\rho) \wedge s) + i(s^\mu \Omega_\mu)) \\ &- e(A \cdot s)v \wedge s \end{aligned} \quad (\text{IV.75})$$

mediante la expresión (IV.63) se sabe que

$$-mc^2 \sin\beta(\nabla\beta) = \nabla(\text{Tr}T) \quad (\text{IV.76})$$

y es posible calcular

$$\begin{aligned}
 \rho \nabla(\text{TrM}) - \partial_{\mu}(\rho M^{\mu}) &= \rho((\Omega_{\nu} \cdot s) \cdot \nabla \beta) \gamma^{\nu} - (\nabla \cdot (\rho s)) (\nabla \beta) \\
 \rho \nabla(\text{TrP}) - \partial_{\mu}(\rho P^{\mu}) &= - \rho e_0 (\Omega_{\nu} \cdot (v \wedge A)) \gamma^{\mu} - e_0 (\nabla \wedge A) \cdot v \\
 \rho \nabla(\text{TrL}) - \partial_{\mu}(\rho L^{\mu}) &= \rho((\partial_{\nu} \Omega_{\mu} - \partial_{\mu} \Omega_{\nu}) \cdot (i(\gamma^{\mu} \wedge s))) \gamma^{\nu} \\
 + \rho(\Omega_{\mu} \cdot (i(\gamma^{\mu} \wedge (\Omega_{\nu} \cdot s)))) \gamma^{\nu} &+ (\Omega_{\nu} \cdot (\nabla \cdot (\rho i s))) \gamma^{\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{IV.77}$$

De las ecuaciones (IV.76) y (IV.77) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \rho(\hbar/2)c [ ((i(\partial_{\nu} \Omega_{\mu} - \partial_{\mu} \Omega_{\nu})) \cdot \gamma^{\mu} + \Omega_{\mu} \cdot (i\Omega_{\nu}) \cdot \gamma^{\mu}) \\
 - (i\Omega_{\nu}) \cdot (\Omega_{\mu} \cdot \gamma^{\mu}) \cdot s \gamma^{\nu} ] + (\rho mc^2 \text{ sen } \beta - (\hbar/2)c \nabla \cdot (\rho s)) (\nabla \beta) &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{IV.78}$$

además a partir de la definición  $2\partial_j R = \Omega_j R$  es posible derivar la relación

$$\partial_j \Omega_K - \partial_K \Omega_j + 1/2(\Omega_K \Omega_j - \Omega_j \Omega_K) = 0 \tag{IV.79}$$

que aplicada en (IV.78) bajo la suposición de  $\beta$  constante produce la expresión

$$\rho mc^2 \text{ sen } \beta - (\hbar/2)c \nabla \cdot (\rho s) = 0 \tag{IV.80}$$

que puede ser escrita como

$$(mc^2 \text{ sen } \beta s + (\hbar/2)c(\nabla(\ln \rho) + \gamma^{\mu} \cdot \Omega_{\mu})) \cdot s = 0 \tag{IV.81}$$

que asociada con (IV.74) origina la ecuación

$$mc^2 \text{ sen } \beta s + eA \cdot \sigma + (\hbar c/2)(\nabla(\ln \rho) + \gamma^{\mu} \cdot \Omega_{\mu}) = 0$$

que es la parte vectorial de la ecuación (IV.47), a la que por cierto se llamó  $D_{II}$ .

La ecuación (IV.80) expresa la no conservación de la densidad del vector espín y es fácil reconocer que el tensor T corresponde al tensor energía momento.

Gracias a esta deducción es plausible pensar que para toda partícula de Dirac

$$N^{0\nu\rho\sigma} = p^{0\nu\rho\sigma} = 0.$$

V. ALGUNAS PARTICULAS DE DIRAC.

a) El Electrón en el Atomo de Hidrógeno.

En primer lugar resolveremos la ecuación de Dirac para un potencial simétricamente esférico de tipo coulombico con la finalidad de modelar al átomo de hidrógeno<sup>(15)</sup>.

Regresemos a la ecuación (IV.33) y propongamos como su solución a la función de onda multivectorial

$$\psi = e^{-iEt} \phi \quad (V.1)$$

donde la función  $\phi$  no tiene dependencia en  $t$ , por esta razón la ecuación de Dirac queda como

$$(iE\gamma_0 + \partial^i \gamma_i - ieA^0 \gamma_0 - ieA^i \gamma_i - m)\phi = 0. \quad (V.2)$$

Tomando a  $e = -|e|$  y  $V = eA^0$  resulta que (V.2) se transforma en

$$[(E - V)i\gamma_0 + \gamma_0(\nabla - ie\mathbf{A}) - m]\phi = 0 \quad (V.3)$$

donde  $\nabla$  y  $\mathbf{A}$  son vectores en el álgebra de tres generadores tipo espacio. Factorizando y reorganizando (V.3) obtenemos

$$[(E - V) + (-i\nabla - e\mathbf{A})]\phi = m_+ \gamma_0 \phi \quad \text{o bien} \quad (V.4)$$

$$[(E - V) - (-i\nabla - e\mathbf{A})]i\gamma_0 \phi = m\phi .$$

Sea  $\chi = i\gamma_0 \phi$  entonces (V.4) se transforma en el sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} [(E - V) + (-i\nabla - e\mathbf{A})]\phi &= m\chi \\ [(E - V) - (-i\nabla - e\mathbf{A})]\chi &= m\phi \end{aligned} \quad (V.5)$$

Sumando y restando las expresiones (V.5) aunado a la definición de

$$\phi_+ = \phi + \chi \quad y \quad \phi_- = \phi - \chi \quad (V.6)$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} (E - V + m)\phi_- &= -(-i\nabla - e\mathbf{A})\phi_+ \\ (E - V - m)\phi_+ &= -(-i\nabla - e\mathbf{A})\phi_- \end{aligned} \quad (V.7)$$

Con la finalidad de separar la parte angular y radial de estas ecuaciones definimos

$$\nabla = \hat{r}\hat{r}\nabla = \hat{r}(\hat{r}\cdot\nabla + \hat{r}\wedge\nabla) = \hat{r}(\partial_r + L/r) \quad (V.8)$$

donde  $\hat{r}$  es el vector unitario en la dirección del vector posición. En coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\phi \sin\theta\alpha_1 + \sin\phi \sin\theta\alpha_2 + \cos\theta\alpha_3 \\ L = \mathbf{x} \wedge \nabla &= (-\sin\phi\partial_\theta - \cot\theta \cos\phi\partial_\phi)\alpha_2\alpha_3 + \\ &(\cos\phi\partial_\theta - \cot\theta \sin\phi\partial_\phi)\alpha_3\alpha_1 + \partial_\phi\alpha_1\alpha_2 \end{aligned} \quad (V.9)$$

Substituyendo (V.7) en (V.8) encontramos

$$\begin{aligned} (E - V + m)\phi_- &= i\hat{r}(\partial_r + L/r - ie\hat{r}\mathbf{A})\phi_+ \\ (E - V - m)\phi_+ &= i\hat{r}(\partial_r + L/r - ie\hat{r}\mathbf{A})\phi_- \end{aligned} \quad (V.10)$$

Procederemos ahora a analizar algunos puntos de interés relativos a  $L$  a partir de cuyas propiedades podemos demostrar que

$$(\mathbf{x} \wedge \nabla)\hat{r} = -\hat{r}(\mathbf{x} \wedge \nabla) = [\hat{r}](2 - \mathbf{x} \wedge \nabla)$$

que equivale a

$$L\hat{r} = [\hat{r}](2-L) \quad (V.11)$$

de donde se puede deducir que

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} (\partial_r (r^2 \partial_r) + L - L^2). \quad (V.12)$$

Ahora podemos reconocer en (V.12) a la parte del laplaciano que sólo actúa sobre las funciones del ángulo  $\theta$  y  $\phi$  y tiene como eigenfunciones a los esféricos armónicos

$$(L - L^2) Y_{\ell}^m = -\ell(\ell + 1) Y_{\ell}^m \quad (V.13)$$

que rearrreglado da

$$(L + \ell)(L - \ell - 1) Y_{\ell}^m = 0 \quad (V.14)$$

a partir de (V.14) se definen dos esféricos armónicos especiales

$$\begin{aligned} Y_{\ell}^{m+} &= (L - \ell - 1) Y_{\ell}^m \\ Y_{\ell}^{m-} &= (L + \ell) Y_{\ell}^m \end{aligned} \quad (V.15)$$

que evidentemente responden a las ecuaciones

$$\begin{aligned} (L + \ell) Y_{\ell}^{m+} &= 0 \\ (L - \ell - 1) Y_{\ell}^{m-} &= 0, \end{aligned} \quad (V.16)$$

Son bien conocidas las relaciones siguientes entre los esféricos armónicos

$$\left. \begin{aligned} \int d\Omega \bar{Y}_{\ell'}^{m+} Y_{\ell}^{m+} &= 0 \\ \int d\Omega \bar{Y}_{\ell'}^{m-} Y_{\ell}^{m-} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{para } \ell \neq \ell' \\ \left. \begin{aligned} \int d\Omega \bar{Y}_{\ell'}^{m-} Y_{\ell}^{m+} &= 0 \\ \int d\Omega \bar{Y}_{\ell'}^{m+} Y_{\ell}^{m-} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{para todo } \ell, \ell'. \quad (V.17)$$

Regresemos ahora al par de ecuaciones (V.10), usando (V.11), multiplicando la primera ecuación por  $r$  y definiendo  $\phi_0 = \hat{r}\phi_-$  obtenemos

$$(E-V-m)\phi_+ = i\left(\partial_r + \frac{2-L}{r} - ieA\hat{r}\right)\phi_0 \quad (V.18)$$

$$(E-V+m)\phi_0 = i\left(\partial_r + \frac{L}{r} - ie\hat{r}A\right)\phi_+$$

por el momento trataremos solamente el caso del potencial electrostático simétricamente esférico, por lo que (V.18) se transforman a

$$(E-V-m)\phi_+ = i\left(\partial_r + \frac{2-L}{r}\right)\phi_0 \quad (V.19)$$

$$(E-V+m)\phi_0 = i\left(\partial_r + \frac{L}{r}\right)\phi_+$$

el siguiente paso consiste en suponer la misma dependencia angular ( $y(\theta, \phi)$  eigenfunción de  $L$ ) para  $\phi_+$  y  $\phi_0$ . Sea

$$\phi_+ = f(r)y(\theta, \phi) \quad (V.20)$$

$$\phi_0 = ig(r)y(\theta, \phi)$$

entonces (V.19) se transforman a

$$(E-V-m)fy = -\left(\partial_r + \frac{2-L}{r}\right)gy \quad (V.21)$$

$$(E-V+m)gy = \left(\partial_r + \frac{L}{r}\right)fy$$

de la suposición hecha se puede pensar que

a)  $y(\theta, \phi) = Y_\ell^{m+}$  (espín arriba) entonces

$$\begin{aligned} [(E-V-m)f + \left(\partial_r + \frac{1+(\ell+1)}{r}\right)g]y &= 0 \\ [(E-V+m)g - \left(\partial_r + \frac{1-(\ell+1)}{r}\right)f]y &= 0 \end{aligned} \quad (V.22)$$



b)  $y(\theta, \phi) = Y_{\ell}^{m-}$  (espín abajo) entonces

$$[(E-V-m)f + (\partial_r + \frac{1-\ell}{r})g]y = 0 \quad (V.23)$$

$$[(E-V+m)g - (\partial_r + \frac{1+\ell}{r})f]y = 0.$$

A partir de (V.22) se obtienen las ecuaciones radiales para el caso espín hacia arriba

$$(E-V-m)f = - [\partial_r + \frac{1+(j+1/2)}{r}]g \quad (V.24)$$

$$(E-V+m)g = [\partial_r + \frac{1-(j+1/2)}{r}]f$$

donde  $j = \ell + 1/2$ , usando (V.23) se obtienen las ecuaciones radiales para el caso espín hacia abajo

$$(E-V-m)f = - [\partial_r + \frac{1-(j+1/2)}{r}]g \quad (V.25)$$

$$(E-V+m)g = [\partial_r + \frac{1+(j+1/2)}{r}]f$$

donde  $j = \ell - 1/2$ . Por otro lado se sabe que para el caso de átomos hidrogenoides ( $V = -Ze^2/4\pi r$ ), los dos conjuntos de ecuaciones radiales solamente tienen solución para energías dadas por (25)

$$E = m \left[ 1 + \left( \frac{Z\alpha}{n + \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\alpha)^2}} \right)^2 \right]^{-1/2} \text{ donde } \alpha = \frac{e^2}{4\pi} \quad (V.26)$$

Para encontrar la expresión más general de la función de onda para el átomo de hidrógeno buscaremos construir la ecuación de Dirac. A partir de (V.21), (V.11) y (V.8) obtenemos

$$(E-V-m)fy = (i\nabla) i\hat{r}gy \quad (V.27)$$

$$(E-V+m)i\hat{r}gy = (i\nabla)fy$$

que se pueden conjuntar en la única ecuación

$$(E - V - iV)(f + i\hat{r}g)(1 + i\gamma_0)y = i\gamma_0 m(f + i\hat{r}g)(1 + i\gamma_0)y \quad (V.28)$$

multiplicando esta última por  $i\gamma_0$  y definiendo  $i\gamma_0 \partial_0 f = \gamma_0 E f$

$$- i\gamma_0 \partial_0 g = \gamma_0 E g$$

$$(\square - m - ieA)(f + i\hat{r}g)y(1 + i\gamma_0) = 0, \quad (V.29)$$

y la forma más general para escribir la función de onda de un átomo hidrogenoide para un valor determinado de energía es

$$\psi = e^{-iEt} \sum_m [ (f_{nj}^+ + i\hat{r}g_{nj}^+) Y_{j-1/2}^{m+} A_m + (f_{nj}^- + i\hat{r}g_{nj}^-) Y_{j+1/2}^{m-} B_m ] (1 + i\gamma_0) \quad (V.30)$$

donde

$$j = \ell + 1/2 \quad \text{en el caso de espín hacia arriba y}$$

$$j = \ell - 1/2 \quad \text{en el caso de espín hacia abajo.}$$

Por otro lado es posible expandir (V.26) de tal manera que

$$E = m \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{Z\alpha}{n_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{(Z\alpha)^4}{n_0^3} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n_0} \right) - \dots \right] \quad (V.31)$$

$$\text{donde } n_0 = h - (j + 1/2),$$

término por término el análisis de este valor de energía nos da: la energía en reposo, los niveles de energía de la vieja teoría cuántica de Bohr y los niveles de energía debidos al desdoblamiento de estructura fina.

Dos correcciones de energía del orden  $(Z\alpha)^4$  son:

a) el desdoblamiento debido al tamaño finito del protón que consiste en separar los estados espín-arriba y espín-abajo con los mismos valores de  $n$  y  $j$ .

b) el desdoblamiento hiperfino, que se debe al momento magnético del protón y consiste en desdoblar estados con diferentes valores de  $m$ .

Ahora partamos de la expresión (V.9) que puede ser expresada como

$$L = \alpha_3 \alpha_1 e^{\alpha_1 \alpha_2 \phi} (\partial_\theta + \alpha_1 \alpha_2 \cot \theta \partial_\phi) + \alpha_1 \alpha_2 \partial_\phi, \quad (V.32)$$

propendremos a  $Y_\ell^m$  como funciones con dependencia en  $\phi$  dada por  $e^{\alpha_1 \alpha_2 m \phi}$ , por lo que  $Y_\ell^m$  es una eigenfunción del operador  $\alpha_1 \alpha_2 \partial_\phi$  tal que

$$\alpha_1 \alpha_2 \partial_\phi Y_\ell^m = -m Y_\ell^m. \quad (V.33)$$

De las identidades del operador momento angular se puede establecer, por analogía.

$$LY_\ell^m = \sqrt{(\ell - m)(\ell + 1 + m)} \alpha_3 \alpha_1 Y_\ell^{m+1} - m Y_\ell^m \quad (V.34)$$

o bien

$$(L + m) Y_\ell^m = \sqrt{(\ell - m)(\ell + 1 + m)} \alpha_3 \alpha_1 Y_\ell^{m+1}$$

a partir de esta ecuación se puede obtener  $Y_\ell^{m+}$  y  $Y_\ell^{m-}$  en forma explícita

$$Y_\ell^{m+} = (L - \ell - 1) Y_\ell^m = (L + m - \ell - 1 - m) Y_\ell^m = \sqrt{(\ell - m)(\ell + 1 + m)} \alpha_3 \alpha_1$$

$$Y_\ell^{m+1} - (\ell + 1 + m) Y_\ell^m \quad Y \quad (V.35)$$

$$Y_\ell^{m-} = (L + \ell) Y_\ell^m = (L + m + \ell - m) Y_\ell^m = \sqrt{(\ell - m)(\ell + 1 + m)} \alpha_3 \alpha_1$$

$$Y_\ell^{m+1} + (\ell - m) Y_\ell^m$$

de donde es evidente que  $Y_{\ell}^{m+}$  y  $Y_{\ell}^{m-}$  no son eigenfunciones de  $\alpha_1 \alpha_2 \delta_{\phi}$ , sin embargo

$$Y_{\ell}^{m-} - Y_{\ell}^{m+} = (2\ell + 1) Y_{\ell}^m \quad \text{sí lo es.}$$

Como es conocido

$$\int d\Omega \bar{Y}_{\ell}^{m+} Y_{\ell}^m = (2\ell + 1) (\ell + 1 + m)$$

$$\int d\Omega \bar{Y}_{\ell}^{m-} Y_{\ell}^{m-} = (2\ell + 1) (\ell - m) \quad (\text{V.36})$$

$$\int d\Omega Y_{\ell}^{m*} Y_{\ell}^m = 1$$

Finalmente podemos escribir la función de Dirac como

$$\psi = e^{-iEt} (f + i\hat{r}g) \gamma (1 + i\gamma_0) (1 - i\gamma_1 \gamma_2) \quad (\text{V.37})$$

donde se usa el operador de proyección  $1 - i\gamma_1 \gamma_2$ .

#### b) Partículas Libres.

Regresando a la solución para la ecuación de Dirac del átomo de hidrógeno, en la expresión (V.26) es evidente que cuando  $n$  aumenta considerablemente, la energía se transforma en la masa de la partícula y la función de Dirac se comporta como<sup>(15)</sup>

$$\psi = e^{-imt} (1 + i\gamma_0) (1 - i\gamma_1 \gamma_2) \quad (\text{V.38})$$

que es una solución no normalizada de la ecuación de partícula libre en reposo. Con la finalidad de normalizar (V.38) se exige que  $\psi$  cumpla con  $-\int dV \{\bar{\psi} \gamma_0 \psi\} = -im$ , por lo tanto (V.38) se convierte en

$$\psi = (4mV)^{-1/2} (m + im\gamma_0) (1 + \gamma_5 \gamma_3) e^{-imt} \quad (\text{V.39})$$

que mediante una transformación de Lorentz resulta

$$\psi = (4EV)^{-1/2} (m + ip) (1 + \gamma_5 s) e^{ip \cdot x} \quad (V.40)$$

como la función de onda de un electrón libre.

El vector  $s$  es el cuadrivector espín y su idempotente  $(\frac{1 + \gamma_5 s}{2})$  es el operador de proyección de espín, por otro lado los dos operadores de proyección contenidos en la función de onda  $[(m + ip), (1 + \gamma_5 s)]$  conmutan entre sí. Con la finalidad de interpretar la función de onda (V.40) la usaremos para expresar las cantidades conservadas

$$-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = -im + p + \gamma_5 s p - im \gamma_5 s \quad (V.41)$$

de donde se identifica

$$\begin{aligned} \int dV J^0 &= -im \\ \int dV T^{0\nu} &= p \\ \int dV M^{\nu\rho} &= \gamma_5 s p = \epsilon_{\sigma\tau}^{\nu\rho} s^\sigma p^\tau \\ \int dV p^{\nu\rho\sigma\tau} &= -m \epsilon_{\tau}^{\nu\rho\sigma} s^\tau \end{aligned} \quad (V.42)$$

Por lo tanto un electrón libre puede tener las siguientes propiedades intrínsecas; carga, energía-momento, momento angular y algo más que llamaremos polarización.

Procedamos ahora a analizar el caso del paquete de ondas de partículas libre, si pensamos en la expresión (V.40) para describir una onda plana construiremos un paquete de ondas que se vea como

$$\psi(x) = \int d^3p [4E(2\pi)^3]^{-1/2} (m + ip) (1 + \gamma_5 s) f(p) e^{ip \cdot x}, \quad (V.43)$$

donde la función de onda  $\psi$  ha sido normalizada de tal forma que

$$-\int dV \{\bar{\psi} \gamma^0 \psi\} = -im$$

además  $f(p)$  debe ser elegida tal que  $\int d^3p \bar{f}(p) f(p) = 1$ , razón por la cual  $f(p)$  no necesita ser escalar aún cuando puede ser supuesta como tal sin pérdida de información.

A continuación obtendremos todas las cantidades conservadas usando la función de onda del paquete de ondas planas

$$-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \int dV \int d^3p \int d^3p' e^{-ip \cdot x} f^*(p) (1 + \gamma_5 s) (m + ip) \gamma_0 (m + ip') (1 + \gamma_5 s') f(p') e^{ip' \cdot x} (4E(2\pi)^3)^{-1/2} (4E'(2\pi)^3)^{-1/2},$$

finalmente

$$-\int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = -im + \int d^3p |f(p)|^2 (p^\mu \gamma_\mu + \gamma_5 s^\mu \gamma_\mu p^\mu \gamma_\mu - i\gamma_5 m s^\mu \gamma_\mu) \quad (V.44)$$

de donde asociamos al primer término con la carga total del electrón, al segundo con los promedios ponderados de la energía y el momento, el siguiente término serán los promedios del momento angular y el último dará los promedios de polarización en diferentes direcciones.

Para representar un electrón localizado real se elige la función  $f(p)$  tal que esté limitada a un rango de valores del momento, si  $|f(p)|^2$  es una función fuertemente localizada alrededor de  $p_0$  entonces las integrales de (V.44) se reducen a las cantidades conservadas de una solución de onda plana con  $p_0$  reemplazando a  $p$ . Tomemos, por ejemplo un valor de  $f(p)$  dado por

$$f(p) = \left(\frac{\alpha}{m\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} e^{-\left(\frac{\alpha(p-p_0)}{2m}\right)^2} \quad (V.45)$$

donde  $\alpha$  es una contante adimensional arbitraria.

La integral del momento será

$$\int d^3p |f(p)|^2 p^i \gamma_i = \left(\frac{\alpha}{m\sqrt{\pi}}\right)^3 p_0^i \gamma_i \quad (V.46)$$

por lo que este paquete de ondas podría ser el adecuado para un electrón con momento  $p_0$ , la integral de la energía será

$$\int d^3p |f(p)|^2 E\gamma_0 = \int d^3p \left(\frac{\alpha}{m\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{[-(\alpha(p-p_0))/m]^2} E\gamma_0, \quad (V.47)$$

si  $\alpha$  es un parámetro extremadamente grande entonces nuestro paquete de ondas es fuertemente localizado alrededor de  $p_0$ ,  $f^2(p) = \delta^3(p-p_0)$  y las cantidades conservadas en este caso son

$$\begin{aligned} \int dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi &= \int d^3p |f(p)|^2 (-im + p + \gamma_5 s p - i\gamma_5 s) \\ &= -im + p_0 + \gamma_5 s_0 p_0 - i\gamma_5 s_0. \end{aligned} \quad (V.48)$$

Al comprimir aún más  $f(p)$  alrededor de  $p_0$  tal que

$$f(p) = \delta^3(p - p_0)$$

entonces

$$- dV \bar{\psi} \gamma^0 \psi = (-im + p_0 + \gamma_5 s_0 p_0 - i\gamma_5 s_0) V (2\pi)^{-3} \quad (V.49)$$

que equivale a (V.41) hasta un factor  $V(2\pi)^{-3}$  por lo que se necesita renormalizar la función de onda tal que

$$f(p) = \delta^3(p - p_0) \left(\frac{2\pi}{V}\right)^{3/2}$$

c) La Función de Onda del Neutrino.

Tomemos ahora la solución de la ecuación de Dirac para una partícula libre dada en (V.40), si el electrón descrito por esta función de onda está en un estado de helicidad negativa se puede escribir<sup>(21)</sup>

$$\psi(x) = (4EV)^{-1/2} (m + ip) (1 - i\gamma_5 \gamma_p \gamma_0) e^{ip \cdot x}, \quad (V.50)$$

tomando el límite cuando  $m$  tiende a cero obtenemos

$$\psi(x) = (4\omega V)^{-1/2} (iK)(1 - i\gamma_5) e^{iK \cdot x}$$

que es la función de onda para un neutrino y solución a la ecuación de Dirac sin masa

$$\square \psi(x) = 0. \tag{V.51}$$

Sabemos que  $K$  es nilpotente y es posible deducir las siguientes relaciones

$$K(1 - i\gamma_5)SK(1 - i\gamma_5) = 0$$

$$K(1 - i\gamma_5)VK(1 - i\gamma_5) = 2(K \cdot V)K(1 - i\gamma_5)$$

$$K(1 - i\gamma_5)BK(1 - i\gamma_5) = 0 \tag{V.52}$$

$$K(1 - i\gamma_5)TK(1 - i\gamma_5) = 2i(K \cdot V')K(1 - i\gamma_5)$$

$$K(1 - i\gamma_5)PK(1 - i\gamma_5) = 0$$

donde  $S$  es un escalar,  $V$  un vector,  $B$  un bivector,  $T = \gamma_5 V'$  un pseudo-vector y  $P$  un pseudoescalar cualesquiera del álgebra.

Así como se realizó para el producto de operadores de proyección electrónica se puede establecer en forma general para los operadores de proyección del neutrino

$$K(1 - i\gamma_5)MK(1 - i\gamma_5) = AK(1 - i\gamma_5) \tag{V.53}$$

donde  $M$  es cualquier elemento del álgebra y  $A$  es un escalar que se escribe como

$$A = \{K(1 - i\gamma_5)M\}_S \tag{V.54}$$

por lo tanto podemos expresar (V.53) en forma general como



$$K(1 - i\gamma_5)MK(1 - i\gamma_5) = K(1 - i\gamma_5)\{K(1 - i\gamma_5)M\}_S . \quad (V.55)$$

Para obtener la función de onda de la antipartícula del electrón basta con tomar el conjugado complejo de (V.40) que origina la función de onda de un positrón

$$\psi(x) = (4EV)^{-1/2} (m - ip)(1 + \gamma_5 s) e^{-ip \cdot x} , \quad (V.56)$$

para encontrar la función de onda de un antineutrino tomaremos el límite conforme  $m$  tiende a cero para un positrón en un estado de helicidad positiva. La función de onda de un antineutrino es

$$\psi(x) = (4\omega V)^{-1/2} (-iK)(1 - i\gamma_5) e^{-iK \cdot x} . \quad (V.57)$$

Por analogía con lo antes hecho aplicamos los operadores de proyección de la solución del positrón o del antineutrino a cualquier elemento del álgebra

$$(m - ip)(1 + \gamma_5)M(m - ip)(1 + \gamma_5 s) = (m - ip)(1 + \gamma_5 s)\{(m - ip)(1 + \gamma_5 s)M\}_S \quad (V.58)$$

$$K(1 - i\gamma_5)M(1 - i\gamma_5) = K(1 - i\gamma_5)\{K(1 - i\gamma_5)M\}_S .$$

A continuación veremos la forma de las cantidades conservadas para las cuatro partículas discutidas

$$\int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \psi = -im + p + \gamma_5 sp - im\gamma_5 s \quad \text{para el electrón} \quad (V.41)$$

$$\int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \psi = imp + \gamma_5 sp + im\gamma_5 s \quad \text{para el positrón} \quad (V.59)$$

$$\int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \psi = K(1 - i\gamma_5) \quad \text{para el neutrino} \quad (V.60)$$

$$\int d^3x \bar{\psi} \gamma_0 \psi = K(1 + i\gamma_5) \quad \text{para el antineutrino} \quad (V.61)$$

Se puede ver inmediatamente que tanto el neutrino como el antineutrino carecen de carga y momento magnético así como que sus cantidades conservadas se pueden obtener tomando el límite de masa cero para las cantidades conservadas del electrón y del positrón respectivamente.

VI. TECNICA DE CALCULO Y SU APLICACION A ALGUNOS CASOS DE INTERES.

Buscando una solución a la ecuación (IV.33) partimos de la solución a (IV.1) y proponemos<sup>(20), (23), (15)</sup>

$$(\square - m)G(x, x') = \delta^4(x - x') \quad (VI.1)$$

entonces la solución a (IV.33) queda expresada como

$$\psi = \psi(x) + \int d^4x' G(x, x') ieA(x') \psi(x') \quad (VI.2)$$

donde  $\psi$  es la solución de (IV.33) mientras que  $\psi$  lo es de (IV.1).

Para transformar (VI.2) a una forma más útil se itera la ecuación (VI.2) tomándose solo algunos términos de interés

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \psi(x) + \int d^4x' G(x, x') ieA(x') \psi(x') + \\ & + \int d^4x' \int d^4x'' G(x, x') ieA(x') G(x', x'') ieA(x'') \psi(x'') + \\ & \dots \end{aligned} \quad (VI.3)$$

Si la constante e de acoplamiento es pequeña podemos pensar que la serie (VI.3) converge y se tiene un método de solución para (IV.33), siempre y cuando sea posible encontrar la función  $G(x, x')$  que satisfaga (VI.1).

Gracias a la invariancia de la ecuación (VI.1) ante translaciones, presupondremos que esta propiedad es extensiva a  $G(x, x')$ , por lo tanto

$$G(x, x') = G(x - x')$$

y es posible desarrollarla como la transformada de Fourier

$$G(x - x') = \int d^4p \tilde{G}(p) e^{ip \cdot (x - x')} \quad (VI.4)$$

que al ser substituida en (VI.1) produce

$$\tilde{G}(p) = (2\pi)^{-4} \left( \frac{1}{ip - m} \right) = (2\pi)^{-4} \left( \frac{-ip - m}{p^2 - m^2} \right)$$

donde se ha introducido el factor de normalización  $(2\pi)^{-4}$ . En consecuencia la función  $G(x - x')$  es

$$G(x - x') = (2\pi)^{-4} \int d^3p \left( \frac{-ip - m}{p^2 - m^2} \right) e^{ip \cdot (x - x')} \quad (VI.5)$$

Evidentemente (VI.5) presenta una singularidad cuando  $p_0 = p^i p_i - m^2$  por lo tanto expresaremos la integral (VI.5) como

$$G(x - x') = - \int d^3p (2\pi)^{-3} e^{ip \cdot (x - x')} \int dp^0 (2\pi)^{-1} \left( \frac{ip + m}{p^{02} - p^2 + m^2} \right) e^{-ip^0(t-t')} \quad (VI.6)$$



con dos singularidades sobre el eje real dadas por

$$p^0 = \pm (p^i p_i + m^2)^{1/2}, \quad \text{D. E. P. G.}$$

para poder continuar convendremos en que las energías positivas ( $p_0 = +E$ ) se propagan hacia adelante en el tiempo mientras que las negativas ( $p_0 = -E$ ) lo hacen para atrás ( $t < t'$ ) (21).

Para el caso de energías positivas tenemos

$$G(x - x') = \int d^3p (2\pi)^{-3} e^{ip \cdot (x - x')} (-2\pi i) (2\pi)^{-1} \left( \frac{ip + m}{2E} \right) e^{-iE(t-t')} \quad (VI.7)$$

con  $t > t'$ , mientras que para la energía negativa

$$G(x - x') = \int d^3p (2\pi)^{-3} e^{ip \cdot (x - x')} (2\pi i) (2\pi)^{-1} \left( \frac{ip + m}{-2E} \right) e^{iE(t-t')} \quad (VI.8)$$

con  $t < t'$ .

Se ha tomado a  $E = (p^i p_i + m^2)^{1/2}$  y  $p^+$  es el cuadrivector con el signo de la componente  $p_0$  invertida. Combinando las expresiones (VI.7) y (VI.8) obtenemos

$$G(x-x') = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p \left[ \frac{m+ip}{2E} e^{ip(x-x')} \theta(t-t') + \frac{m+ip}{2E} e^{-ip(x-x')} \theta(t'-t) \right]$$

(VI.9)

que es lo que normalmente se conoce como función de Green-Feynman o propagador y puede ser descrita en término de funciones de onda de partículas libres soluciones de la ecuación de Dirac. Sean

$$\psi(x) = \psi_{p,s}(x) = (4EV)^{-1/2} (m+ip)(1+\gamma_5s)e^{ip \cdot x}$$

$$\psi_{p,-s}(x) = (4EV)^{-1/2} (m+ip)(1-\gamma_5s)e^{ip \cdot x}$$

(VI.10)

$$\psi_{-p,s}(x) = (4EV)^{-1/2} (m-ip)(1+\gamma_5s)e^{-ip \cdot x}$$

$$\psi_{-p,-s}(x) = (4EV)^{1/2} (m-ip)(1-\gamma_5s)e^{-ip \cdot x}$$

Usando (VI.10) podemos escribir (VI.8) como

$$G(x-x') = \frac{-i}{m} \int d^3p \frac{V}{(2\pi)^3} (\psi_{p,s}(x)\bar{\psi}_{p,s}(x') +$$

(VI.11)

$$\psi_{p,-s}(x)\bar{\psi}_{p,-s}(x')\theta(t-t') - \frac{1}{m} \int d^3p \frac{V}{(2\pi)^3} (\psi_{-p,s}(x)\bar{\psi}_{-p,s}(x')$$

$$+ \psi_{-p,-s}(x)\bar{\psi}_{-p,-s}(x'))\theta(t'-t), \text{ de donde es evidente que}$$

$$\theta(t-t')\psi_{p,\pm s}(x) = - \int d^3x G(x,x')\gamma_0\psi_{p,\pm s}(x')$$

(VI.12)

$$\theta(t'-t)\psi_{-p,\pm s}(x) = \int d^3x G(x-x')\gamma_0\psi_{-p,\pm s}(x')$$

Regresemos ahora a la ecuación (VI.1), tomemos su adjunto y multipliquémoslo por  $\psi(x)$ , además multipliquemos (IV.1) por  $\bar{G}(x,x')$  finalmente restemos las expresiones encontradas recordando que  $\bar{G}(x-x') = G(x'-x)$  e integrando en todo el espacio,

$$\psi(x) \delta(t - t') = \frac{d}{dt} \int d^3x' G(x - x') \gamma_0 \psi(x'). \quad (\text{VI.13})$$

Por otro lado sabemos que las cantidades conservadas son constantes de movimiento por lo que proponemos

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x), \quad (\text{VI.14})$$

lo que físicamente significa que una partícula inicialmente libre se describe con las mismas propiedades intrínsecas cuando interactúa con un potencial A. Para probar la propuesta (VI.14) expandamos  $\psi$  en serie de potencias de  $e$  para observar a diferentes órdenes de  $e$  las cantidades conservadas. Sea la expresión (VI.3), para el orden más bajo

$$\int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) \quad (\text{VI.15})$$

que es la expresión a comprobar.

Para analizar los términos de orden  $e^1$  escogemos solamente el caso de energías positivas (el correspondiente a energías negativas tiene un desarrollo semejante) en donde es válido

$$\int d^3x \bar{G}(x - x') \gamma^0 \psi(x) = -\psi(x') \theta(t - t'), \quad (\text{VI.16})$$

entonces los dos términos de este orden dan

$$\int d^4x [\bar{\psi}(x') ieA(x') \psi(x') - \bar{\psi}(x') ieA(x') \psi(x')] \theta(t - t') = 0$$

que es lo mismo que ocurre cuando  $E < 0$ .

Calculemos explícitamente los tres términos en la corriente conservada del orden  $e^2$

$$\begin{aligned}
 & \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \left( \int d^4x' \int d^4x'' G(x-x') ieA(x') G(x'-x'') ieA(x'') \right. \\
 & \left. \psi(x'') \right) + \int d^3x \left( \int d^4x' \int d^4x'' \bar{\psi}(x'') ieA(x'') \bar{G}(x'-x'') ieA(x') \right. \\
 & \left. \bar{G}(x-x') \right) \gamma^0 \psi(x) + \int d^3x \left( \int d^4x' \bar{\psi}(x') ieA(x') \bar{G}(x-x') \right) \\
 & \gamma^0 \left( \int d^4x'' G(x-x'') ieA(x'') \psi(x'') \right) = \\
 & \int d^4x' \int d^4x'' \bar{\psi}(x') ieA(x') G(x'-x'') ieA(x'') \psi(x'') \theta(t-t') \\
 & - \int d^4x' \int d^4x'' \bar{\psi}(x'') ieA(x'') \bar{G}(x'-x'') ieA(x') \psi(x') \theta(t-t') \\
 & - \left( \int d^4x' \bar{\psi}(x') ieA(x') \psi(x') \right) - \frac{i}{m} V (2\pi)^{-3} \left( \int d^4x'' \bar{\psi}(x'') ieA(x'') \right. \\
 & \left. \psi(x'') \theta(t-t') \theta(t-t'') \right) = \\
 & - \frac{i}{m} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^4x' \int d^4x'' \left( \bar{\psi}(x') ieA(x') \psi(x') \right) \left( \bar{\psi}(x'') ieA(x'') \psi(x'') \right) \\
 & \left( \theta(t-t') \theta(t'-t'') + \theta(t-t'') \theta(t''-t') - \theta(t-t') \theta(t-t'') \right) = 0
 \end{aligned}$$

ya que

$$\theta(t-t') \theta(t'-t'') + \theta(t-t'') \theta(t''-t') - \theta(t-t') \theta(t-t'') = 0$$

Por lo tanto se ha demostrado hasta un orden  $e^2$  la relación (VI.14).

Ahora podemos hacer un cálculo; sea un electrón afectado por un potencial de Coulomb, la función del electrón incidente es

$$\psi(x) = (4EV)^{-1/2} (m + ip) (1 + \gamma_5 S) e^{ip \cdot x}, \quad (VI.17)$$

pensemos en el cuadvivector potencial de una carga puntual fija ( $Z_e > 0$ ) dada por

$$A(x) = \frac{Ze}{4\pi|x|} \gamma_0 \quad (VI.18)$$

entonces la solución a la ecuación de Dirac con interacción está dada por (VI.3),

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x) + \int d^4x' \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p' \left[ \frac{m+ip'}{2E'} e^{ip \cdot (x-x')} \theta(t'-t) + \right. \\ \left. \frac{m-ip'}{2E'} e^{-ip' \cdot (x-x')} \theta(t'-t) \right] (ieA(x')\psi(x')) + \dots \end{aligned} \quad (VI.19)$$

Substituyendo (VI.17) y (VI.18) en (VI.19) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x) + \int d^4x' \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3p' \frac{m+ip'}{2E'} e^{ip' \cdot (x-x')} \\ ie \frac{Ze}{4\pi|x'|} \gamma_0 (4EV)^{-1/2} (m+ip)(1+\gamma_5 s) e^{ip \cdot x'} + \dots \end{aligned} \quad (VI.20)$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x) + (2\pi)^{-3} Ze^2 (4EV)^{-1/2} \int d^3p' \frac{m+ip'}{2E'} \\ e^{ip' \cdot x} \gamma_0 (m+ip)(1+\gamma_5 s) (p'-p)^{-2} \int dt' e^{-i(E'-E)t} \end{aligned} \quad (VI.21)$$

al hacer la integral en el tiempo resulta

$$\begin{aligned} \psi(x) = \psi(x) + (2\pi)^{-2} Ze^2 (4EV)^{-1/2} \int d^3p' \frac{m+ip'}{2E'} e^{ip' \cdot x} \\ \gamma_0 (m+ip)(1+\gamma_5 s) \delta(E'-E) (p'-p)^{-2} \end{aligned} \quad (VI.22)$$

Estudiemos ahora las cantidades conservadas

$$\begin{aligned} \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) + \\ \int d^3x (2\pi)^{-4} (Ze^2) (4EV)^{-1} \int d^3p'' (p''-p)^{-2} \delta(E''-E) (m+ip) \end{aligned}$$



$$(1 + \gamma_5 s) (-\gamma_0) e^{ip'' \cdot x} \frac{m + ip''}{2E''} \gamma_0 \int d^3 p' \frac{m + ip'}{2E'} e^{ip' \cdot x} \quad (VI.23)$$

$$\gamma_0 (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \delta(E' - E) (p' - p)^{-2} + O(e^4)$$

que puede escribirse como

$$\int d^3 x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) = \int d^3 x \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) -$$

$$Z^2 e^4 (4EV)^{-1} (2\pi)^{-1} \int d^3 p' \delta^2(E' - E) (p' - p)^4 (m + ip) (1 + \gamma_5 s)$$

$$\gamma_0 \left( \frac{m + ip''}{2E''} \right) \gamma_0 \left( \frac{m + ip'}{2E'} \right) \gamma_0 (m + ip) (1 + \gamma_5 s). \quad (VI.24)$$

Para encontrar el número de electrones dispersos basta con ver la parte escalar de este término que representa la carga dispersa

$$\text{Carga dispersa} = iZ^2 e^4 (4EV)^{-1} \int d^3 p' \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \} \delta(E' - E) \quad (VI.25)$$

$$\gamma_0 \frac{m + ip''}{2E''} \gamma_0 \frac{m + ip'}{2E'} \gamma_0 (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \} \delta(E' - E)$$

$$(p' - p)^{-4} T = iZ^2 e^4 (4EV)^{-1} \int d^3 p' \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) (m + ip') \}$$

$$\gamma_0 \} (4) \left( \frac{-1}{2E'} \right) \delta(E' - E) (p' - p)^{-4} T$$

donde  $\delta^2(E' - E) = 2\pi T \delta(E' - E)$ .

El flujo disperso se calcula dividiendo la carga dispersa entre  $-imT$  y el flujo incidente  $P/EV$ , por lo tanto (20)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{iZ^2 e^4 (4EV)^{-1}}{(-imT)(P/EV)} \int d^3 p' \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) (\gamma_0) (m + ip') \gamma_0 \} \quad (VI.26)$$

$$4 \left( - \frac{1}{2E'} \right) \delta(E' - E) (p' - p)^{-4} T$$

que equivale a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^4 \int p'^2 d|p'| \frac{1}{2^2 |p| E' (p' - p)^4} \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \gamma_0 (m + ip') \gamma_0 \} \delta(E' - E), \quad (VI.27)$$

mediante la identidad  $p' d|p'| = E' dE$  la expresión (VI.27) se transforma a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2 e^4 \int \frac{E'^2 dE}{2^2 E' |p| (p' - p)^4} \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \gamma_0 (m + ip') \gamma_0 \} \delta(E' - E) \quad (VI.28)$$

$$\gamma_0 \} \delta(E' - E)$$

o bien

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{2^2 (p' - p)^4} \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \gamma_0 (m + ip') \gamma_0 \} \quad (VI.29)$$

cuya parte escalar es

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{2^2 (p' - p)^4} \{ (m + ip) \gamma_0 (m + ip') \gamma_0 \} \quad (VI.30)$$

que puede ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{2^2 (p' - p)^4} (-p \cdot p' - 2EE' - m^2), \quad (VI.31)$$

ésta es la expresión que deseabamos obtener.

Para un electrón en un potencial vectorial arbitrario  $A(x)$  la sección transversal de dispersión será

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = - \frac{i}{|p|^T} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int |p'|^2 d|p'| (m+ip) (1 + \gamma_5 s) \bar{A}(p' - p) (m+ip)$$

(VI.27)

$$\bar{A}(p' - p) (m+ip) (1 + \gamma_5 s).$$

donde  $\bar{A}(p' - p)$  es la transformada de Fourier del potencial  $A(x)$  tal que

$$\bar{A}(p' - p) = \int d^4x A(x) e^{i(p' - p) \cdot x}. \quad (VI.28)$$

Es fácil reconocer en (VI.27) dos factores usados para construir idempotentes;  $(m+ip)$  y  $(1 + \gamma_5 s)$ , por esta razón necesitamos estudiar algunas propiedades de los idempotentes cuando son parte de la función de onda. Por ejemplo se sabe que

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (m+ip)^2 &= 2m(m+ip) \\ \text{b)} \quad (1 + \gamma_5 s)^2 &= 2(1 + \gamma_5 s) \\ \text{c)} \quad (m+ip) \left( \frac{ip}{m} \right) &= m+ip \\ \text{d)} \quad (1 + \gamma_5) (\gamma_5 s) &= 1 + \gamma_5 s. \end{aligned} \quad (VI.29)$$

Por otro lado si  $V$  es un vector en el álgebra de cuatro generadores entonces

$$(m+ip) (1 + \gamma_5 s) V (m+ip) (1 + \gamma_5 s) = 4i(p \cdot V) (m+ip) (1 + \gamma_5 s), \quad (VI.30)$$

mientras que para un trivector  $T = \gamma_5 V'$

$$(m+ip) (1 + \gamma_5 s) T (m+ip) (1 + \gamma_5 s) = 4(s \cdot V') (m+ip) (1 + \gamma_5 s) \quad (VI.31)$$

para un pseudoescalar  $P$  tenemos

$$(m + ip) (1 + \gamma_5 s) P (m + ip) (1 + \gamma_5 s) = 0 , \quad (\text{VI.32})$$

para un escalar S se escribe

$$(m + ip) (1 + \gamma_5 s) S (m + ip) (1 + \gamma_5 s) = 4mS (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \quad (\text{VI.33})$$

finalmente para un bivector B

$$(m + ip) (1 + \gamma_5 s) B (m + ip) (1 + \gamma_5 s) = (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \frac{i\gamma_5}{2m} (spB + Bsp) (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \quad (\text{VI.34})$$

que se deja expresada ya que el producto escalar de dos bivectores no es necesariamente un escalar. En forma general

$$(m + ip) (1 + \gamma_5 s) M (m + ip) (1 + \gamma_5 s) = A(m + ip) (1 + \gamma_5 s) \quad (\text{VI.35})$$

donde M es un elemento cualquiera del álgebra mientras que A es un escalar que se escribe como

$$A = 4 \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) M \}_s \quad (\text{VI.36})$$

por lo tanto (VI.35) resulta ser

$$(m + ip) (1 + \gamma_5 s) M (m + ip) (1 + \gamma_5 s) = 4 (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) M \}_s \quad (\text{VI.37})$$

Ahora podemos expresar a (VI.27) como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = - \frac{4i}{|p|^T} \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int |p'|^2 d|p'| (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \{ (m + ip) (1 + \gamma_5 s) \bar{A} (p' - p) (m + ip') \bar{A} (p' - p) \}_s . \quad (\text{VI.38})$$

Es posible generalizar estos resultados descomponiendo el álgebra de cuatro generadores en el producto directo de álgebras

geométricas de dos generadores. Para toda álgebra cuaterniónica con generadores  $a$  y  $b$  tales que  $a^2 = b^2 = -1$ , cualquier elemento puede ser escrito como una combinación lineal de  $1$ ,  $a$ ,  $b$ , y  $ab$ , sea entonces

$$(1 + ia)(c_1 1 + c_2 a + c_3 b + c_4 ab)(1 + ia) = (1 + ia)(c_1 - ic_2) \quad (\text{VI.39})$$

por lo que en el álgebra cuaterniónica si encerramos cualquier elemento del álgebra entre operadores de proyección, el resultado es el mismo operador de proyección multiplicado por un escalar. El producto de estos operadores de proyección y la función de onda es un elemento de un mínimo ideal.

A continuación analicemos en forma superficial el caso de las interacciones de más de una partícula que incluyen fenómenos tan importantes como la "dispersión" de Compton y la creación o aniquilación de pares donde es conveniente definir el potencial del fotón emitido como

$$A(x) = (2\omega V)^{-1/2} \epsilon e^{ik \cdot x} \quad (\text{VI.40})$$

mientras que para un fotón absorbido se define

$$A(x) = (2\omega V)^{-1/2} \epsilon e^{-ik \cdot x}, \quad (\text{VI.41})$$

en ambos casos  $\epsilon$  es el vector de polarización.

En la única forma que podemos usar la ecuación de Dirac para describir más de una partícula, es cuando cada partícula tiene su propia ecuación de Dirac y solamente interacciona con el campo electromagnético (no directamente con otras partículas) por lo tanto si cada partícula es descrita por una función de onda que

satisface la ecuación

$$(\square - m - ieA)\psi_i = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{VI.42})$$

y el potencial A del campo electromagnético creado por todas las partículas satisface la ecuación

$$\square^2 A = - \sum_{i=1}^N J_i \quad \text{para } J_i = \frac{i}{m} \{ \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \} \gamma_\nu \quad (\text{VI.43})$$

en la norma de Lorentz.

Desafortunadamente, aún cuando es posible resolver estas ecuaciones para encontrar cada  $\psi_i$ , se obtendrían resultados incorrectos en virtud de la aproximación antes usada.

Finalmente se enunciarán algunas reglas de cálculo que incluyen las correspondientes a Feynman en nuestro formalismo.

1.- Todos los factores de espacio fase en la sección transversal son semejantes a los de dispersión coulombica, por lo tanto tenemos

$$\int d^3p (2\pi)^{-3} (2E)^{-1} \quad (\text{VI.44})$$

para cada estado final.

2.- Se define una amplitud para cada proceso de emisión o absorción como

$$S_{fi} = ie \int d^4x \frac{\{ \psi_f(x) A(x) \psi_i(x) \}}{\{ \Lambda_f \Lambda_i \}} \quad (\text{VI.45})$$

donde  $\Lambda$  es el producto de idempotentes que conmutan entre sí y constituye un elemento de algún ideal mínimo.

3.- El potencial  $A(x)$  dado en el punto anterior es tal que

$$A^\mu(x)A^\nu(y) = g^{\mu\nu}(2\pi)^{-4} \int d^4k k^{-2} e^{ik \cdot (x-y)}$$

para cada par de vértices donde un fotón ha sido emitido en un vértice y absorbido en otro.

4.- La cantidad conservada que corresponde a la carga y está normalizada por  $-im$  es el cuadrado absoluto de la amplitud  $S_{fi}$  donde

$$S_{fi} = \overline{S_{fi}} S_{fi} \quad (\text{VI.47})$$

5.- La amplitud global para todo proceso es el producto de amplitudes mutuamente excluyentes y la suma de amplitudes independientes.

6.- Se puede introducir la estadística de Bose-Einstein directamente en 5) mientras que la estadística de Fermi-Dirac requiere la introducción de un signo menos y un factor adicional de fase

$$e^{i\theta} = \{\Lambda_1 \Lambda'_1 \Lambda_2 \Lambda'_2\} (\{\Lambda_1 \Lambda'_1\} \{\Lambda_1 \Lambda'_2\} \{\Lambda'_2 \Lambda_2\} \{\Lambda'_2 \Lambda_1\})^{-1/2} \quad (\text{VI.48})$$

dada para asegurar una sección transversal correcta para la dispersión electrón-electrón.

7.- Para permitir que un electrón en el estado

$$\psi_{p,s}(x) = (4EV)^{-1/2} (m + ip)(1 + \gamma_5 s) e^{ip \cdot x}$$

haga una transición a alguno de los siguientes tres estados

$$\psi_{p,-s}(x), \quad \psi_{-p,s}(x), \quad \psi_{-p,-s}(x) \quad (\text{VI.10})$$

debido al vector potencial  $A$  actuando por la izquierda de  $\psi_{p,s}(x)$ ,

se hará la siguiente correspondencia

$$\psi_{p,s} \rightarrow \psi_{p,s}$$

$$\psi_{p,-s} \rightarrow \gamma_5 r \psi_{p,s}$$

$$\psi_{-p,s} \rightarrow r \psi_{p,s}$$

$$\psi_{-p,-s} \rightarrow \gamma_5 \psi_{p,s}$$

(VI.49)

donde  $r$  es un nuevo cuádrivector que anticonmuta con  $p$  y  $s$ , además todas las funciones involucradas en (VI.49) satisfacen las mismas ecuaciones entre sí y son elementos del mismo ideal.



## CONCLUSIONES.

Durante el desarrollo de este trabajo se ha podido constatar la posibilidad de resolver problemas típicos de la física clásica y cuántica dentro de una sola estructura matemática, normalmente sin necesidad de referirnos a un sistema de coordenadas dado. Por otro lado, el hecho de escribir la función de onda de Dirac en nuestra álgebra, nos permite establecer una sola ecuación de conservación que predice las cantidades conservadas correctas para el electrón, neutrino y sus correspondientes antipartículas, que aunada a un argumento de plausibilidad convenientemente probado, nos permite predecir el número de tensores asociados con cantidades físicas conservadas de la ecuación de Dirac diferentes de cero.

Además, se evidencia en forma notable la utilidad de concebir como objetos matemáticos primarios a los espinores sobre los multivectores, para definir propiedades físicas de interés como son el espín y la quiralidad.

BIBLIOGRAFIA.

1. Wessel C., Ensayo sobre la representación analítica de la dirección. Annals of the Royal Academy of Denmark (1899)), pero debe considerarse el trabajo precursor de Argand, J.R., "Essai sur une maniere de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, ed. J. Hoüel, Paris, 1806; los trabajos de De A. Buée en 1806 y de E. Gauss en 1831.
2. Hamilton W.R., Lectures on Quaternions, Dublin 1863, describe los 10 primeros años del descubrimiento de su álgebra.
3. Grassmann H., Cálculo de extensión, 1844, Stettin. El título completo del libro fué: "Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.
4. Clifford W.K., Preliminary Sketch of Biquaternions, 1873, (R. Tucker, London 1882).
5. Dirac P.A.M., Proc. Roy. Soc., London Ser. A114, 234, 710 (1927).
6. Sauter F., Z. Phys. 63, 803; Z. Phys. 64, 295 (1930).
7. Sommerfeld A., Atombau und Spektrallinien, Vol. II, P. 217 Braunschweig (1939).
8. Eddington A.S., Relativity Theory of Protons and Electrons, McMillan, New York, (1936),
9. Riez M., Comptes Rendus du Douzieme Congres des Mathematiques des Pays Scandinaves, Vol. 241 (Lund) (1953); Lecture Series No. 38, University of Maryland (1958).
10. Teitler S., Nuovo Cimento Suppl. 3, 1, (1965a); Nuovo Cimento

- Suppl. 3, 15 (1965); Math. Phys. 6, (1976); Math. Phys. 7, 1730 (1966).
11. Hestenes, D., Spacetime Algebra, Gordon and Breach, N. York, (1966); J. Math. Phys. 16, 556, and references therein.
  12. "A History of Vector Analysis", M.J. Grove, University of Notre Dame Press, Notre Dame, (1967).
  13. Keller J., "Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics", J.S.R. Chisholm and A.K. Common, Eds., D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland (1986).
  14. R.S. Millman, G.D. Parker, "Elements of Differential Geometry", (Prentice Hall Inc., New Jersey, 1977).
  15. M.F. Ross, "Geometric Algebra in Classical and Quantum Physics", (Ph. D. Dissertation, University of California, Irvine, 1974).
  16. R. Boudet, "An Introduction to the Clifford Algebra, Marseille, France] 1985.
  17. D. Hestenes, G. Sobczyk, "Clifford Algebra to Geometric Calculus", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1984.
  18. D. Li, Ch.P. Poole, H.A. Farach, "A General Method of Generating and Classifying Clifford Algebras", J. Math. Phys. 27 (5), May 1986.
  19. P. Budinich, K. Bugajska, "Spinors as Fundamental Objects", J. Math. Phys. 26 (4), April 1985.
  20. D. Halzen, A.D. Martin, "Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics", John Wiley and Sons, 1984.
  21. I.J.R. Aitchison, "An Informal Introduction to Gauge Field Theories", Cambridge University Press, Great Britain, 1984.

22. R. Boudet, Conservation Laws in the Dirac Theory. J. Math. Phys. 26 (4), April 1985.
23. G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, New York, 1970.
24. J. Keller, A Generalization of the Dirac Equation Admitting Isospin and Color Symmetries, Quantum Theory and Gravitation, III Symposium, Loyola University, New Orleans, June 1985.
25. J.J. Sakurai, Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley Publishing Co., 1967.