UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

LÓGICAS PARACONSISTENTES EN LA RECONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS MATEMÁTICAS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: MAESTRO EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

PRESENTA:

IAN QUALLENBERG MENKES

TUTOR PRINCIPAL: DR. MAX FERNÁNDEZ DE CASTRO,

DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA (IZTAPALAPA)

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. LUIS ESTRADA GONZÁLEZ, IIF UNAM

DR. AXEL ARTURO BARCELÓ ASPEITIA, IIF UNAM

DR. FRANCISCO HERNÁNDEZ QUIROZ, FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DR. CRISTIAN ALEJANDRO GUTIÉRREZ RAMÍREZ, F F y L UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, ENERO DEL 2020

Agradecimientos

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) la beca otorgada durante la realización de mis estudios de posgrado, que comprendió el período 2014-2016.

Igualmente, agradezco a mis padres por su apoyo y por su comprensión incondicional.

Agradezco el apoyo de mi querida maestra Itzel Sosa, quien siempre ha sido una luz en mi desarrollo intelectual.

Deseo también agradecer a mi tutor el Dr. Max Fernández por encaminar mi interés hacia el tema de esta tesis y por su apoyo, comentarios y sugerencias durante este proceso.

Finalmente agradezco las lecturas, sugerencias y retroalimentaciones aportadas por mis sinodales, las cuáles sin duda enriquecieron este trabajo.

Índice

Introducción: ¿Qué justifica el proyecto de aplicar lógicas paraconsistentes para re-construir teorías matemáticas?

La lógica clásica tiende a maravillar a los filósofos de la ciencia. Parece expresar la noción pre-teórica de inferencia deductiva con rigor matemático. Parece dar cuenta de un rasgo esencial de la racionalidad tanto al nivel del sentido común como al nivel de la empresa científica en sus formas congitivas más complejas. Parece ser capaz de expresar los conceptos que comunicamos normalmente mediante el lenguaje natural, un lenguaje ambiguo, flexible e imperfecto, con precisión. Y parece ser un médium universal que unifica a toda empresa epistémica que busque la consistencia y la verdad. Sus amplias aplicaciones, las elucidaciones que brinda en distintos campos de la filosofía y la ciencia, su fecundidad, su capacidad para re-construir rigurosamente casi cualquier conjunto de afirmaciones (desde un argumento ético hasta una teoría científica compleja)… todas estas cosas fomentan una actitud de confianza y admiración hacia la lógica clásica.

Sin embargo, esta actitud aveces entra en conflicto con otra que caracteriza a la filosofía desde sus inicios: el escepticismo, la disposición a cuestionar todo, la actitud anti-dogmática en general. Es difícil resistirnos a la tentación de ver qué pasa si quitamos un principio lógico, si añadimos otro; resistirnos a la tentación de ver qué queda del pensamiento deductivo si retocamos el sistema armónico que es la lógica clásica. En tiempos recientes han surgido múltiples lógicas alternativas, lógicas que no aceptan uno o múltiples principios inferenciales clásicos. Y han surgido tanto por simple interés o curiosidad intelectual como por la creencia de que la lógica clásica es insuficiente en ciertos dominios de aplicación. Y estas motivaciones no son totalmente independientes una de la otra. La historia de la ciencia muestra que los hallazgos más abstractos que parecieran ser meras curiosidades intelectuales pueden con el tiempo acabar siendo herramientas extremadamente útiles para otros campos de estudio. ¿Quién hubiera pensado durante el desarrollo inicial de las geometrías no euclidianas que algún día servirían para describir matemáticamente el espacio-tiempo?

Quizá el optimismo que marca el desarrollo histórico de las ciencias formales hace que, en cierto sentido, el estudio de las lógicas alternativas se justifique por sí mismo. Dichas lógicas suelen ser interesantes como objetos de estudio y su potencialidad instrumental es, en el peor de los casos, incierta. Esto parece ser suficiente para justificar la curiosidad que hacia ellas tienen varios lógicos y filósofos. Y esta curiosidad se complementa con el hecho de que uno no tiene necesariamente que renunciar a la lógica clásica (y todos los beneficios a los que ella conlleva) para tomar una lógica alternativa como objeto de estudio. Uno puede estudiar sistemas no clásicos de inferencia y seguir usando principios de inferencia que se ajusten a la lógica clásica para razonar, dar argumentos e idear demostraciones en la meta-teoría.

Así como es interesante ver qué queda del razonamiento deductivo en general cuando cambiamos ciertos principios clásicos, es interesante ver qué pasa con una teoría científica concreta cuando tratamos de re-construir su contenido bajo un sistema basado en una lógica alterna. Digamos que re-interpretamos una teoría X bajo una lógica Y. Podríamos tener diversas razones para hacer esto. Podría ser que quisiéramos simplemente experimentar, ver las relaciones estructurales que se dan entre una lógica y una teoría. Podría ser que al final del camino el estudio de X bajo Y solo haya servido para reafirmar lo imprescindible que es la lógica clásica para el razonamiento científico junto con toda la fuerza deductiva de sus principios. O tal vez X es una teoría que arroja resultados indeseables o muy poco intuitivos a pesar de que parte de principios auto-evidentes. Si este es el caso, es posible que haya que cambiar nuestra forma de razonar en torno a X. Podría ser que la lógica clásica no capture correctamente nuestra forma de pensar y Y parezca hacerlo mejor al menos en relación a X. Vale observar que aquí uno se empieza a comprometer con afirmaciones más fuertes. Pues, ¿qué principios podrían ser tan auto-evidentes como lo son los principios de la lógica clásica, de tal forma que tuviera sentido revisar estos para preservar los primeros?

De todas formas, aquí la relación entre teoría y meta-teoría tampoco es obvia. Sea X + Y el resultado de basar una re-construcción plausible de X por medio de una lógica alterna Y. Supongamos que Y no permite hacer, por ejemplo, demostraciones por reducción al absurdo y que, a pesar de ello, la única manera de probar en la meta-teoría que nuestro objeto de estudio "X + Y" arroja cierto resultado "C" es mediante una demostración por reducción al absurdo en la meta-teoría. ¿Aceptamos la demostración o no? Parece que una versión de lo que hemos notado anteriormente se mantiene aquí: no necesariamente tenemos que rechazar la lógica clásica en general para tomar una teoría enmarcada bajo una lógica alterna como objeto de estudio. Las relación de correspondencia que deseemos mantener entre la teoría y la meta-teoría dependerá de lo que pretendamos lograr al proponer un cambio de lógica, de nuestra concepción general de la lógica y de la función específica que le asignemos a una lógica particular en cierto dominio.

Bajo una visión instrumentalista de la lógica, al menos de la lógica alterna que estamos proponiendo (donde esta no afirma nada con contenido acerca del pensamiento, sino que solo es un instrumento para expresar y conectar teoremas entre sí), no parece haber nada problemático en la posible discrepancia entre teoría y meta-teoría. Tal vez el relativismo lógico (la idea de que no hay una sola lógica que usamos para razonar, sino que distintas lógicas son más útiles que otras en distintos campos de estudio) también pueda aceptar dichas discrepancias, mientras logre sostener que la teoría-objeto y el estudio de dicha teoría representan dominios distintos en los que se justifican distintas formas de razonar. Pero el lado filosófico de estas cuestiones se vuelve más interesante cuando hablamos de proyectos más amplios. ¿Qué pasa si se sostiene que más allá de las lógicas que hay en el mercado, por más útiles y/o interesantes que sean, solo puede haber un sistema capaz de expresar la noción pre-teórica de consecuencia deductiva? La idea de que hay que *reemplazar* a la lógica clásica en este sentido fuerte conlleva a retos más difíciles. Dar cuenta de la correspondencia entre teoría y meta-teoría es uno de ellos, pero hay más (como veremos más adelante). Con esta consideración empezamos a delimitar el tema que nos concierne aquí.

En tiempos recientes, hemos visto defensas de esta idea de reemplazo radical por parte de varios proponentes de la lógica paraconsistente. Veremos que hay distintos tipos de lógica paraconsistente y que hay diversos motivos y razones para proponer cada una. Pero el argumento general para proponerlas suele resumirse así: *Hay veces que razonamos a partir de conjuntos de creencias inconsistentes. Según la lógica clásica, cualquier conclusión se sigue trivialmente a partir de un conjunto inconsistente de premisas. Sin embargo, no parecemos razonar así en estos casos. Ni parece que debamos razonar así. Por lo tanto, necesitamos adoptar una lógica distinta. En particular, una lógica que no permita inferir cualquier cosa a partir de todo conjunto inconsistente de enunciados.*

La constatación de que aveces razonamos desde la inconsistencia puede ser una observación acerca del sentido común, pero también suele referirse a casos históricos concretos de la práctica científica. Aquí se instancia lo que decíamos en general sobre proponer cualquier lógica alterna: nuestro criterio de adecuación para una lógica paraconsistente dependerá de nuestro nivel de ambición al proponerla, de nuestra concepción de la lógica en general y de la función que le asignemos en cierto dominio. Este trabajo se centrará principalmente (aunque no exclusivamente) en la llamada "escuela Australiana" de la lógica paraconsistente. Algunos representantes prominentes de esta escuela (particularmente Graham Priest y Mark Colyvan) han discutido la idea de reemplazar a la lógica clásica en general, bajo una visión monista de la lógica en la que solo puede haber una lógica correcta, al menos una lógica de la ciencia. Y esto puede y suele sostenerse tanto en términos descriptivos como normativos.

Aunque la propuesta mencionada sea general, podemos discutir su veracidad en distintas áreas del conocimiento. Y aquí por fin llegamos a lo que se discutirá en este trabajo. Mark Colyvan ha sostenido que *la lógica de las matemáticas* es y siempre ha sido paraconsistente. Lo que ha de entenderse con precisión por "lógica de las matemáticas" lo discutiremos más adelante. Antes de empezar a discutir estos temas con rigor, debo decir que algunos lectores sentirán el impulso de descartar una tesis así como algo tan ridículo y evidentemente falso que no vale la pena discutir. A los lectores más ortodoxos les propongo considerar la idea de que pensadores como Colyvan y Priest son, incluso en el peor de los casos, representantes del hiper-racionalismo. El hiper-racionalismo consiste en usar argumentos racionales para cuestionar la propia razón. Y este sería el caso especialmente si se supone que la lógica (posiblemente la clásica en este caso) es un rasgo esencial de la racionalidad. Y en filosofía siempre hemos tenido que argumentar racionalmente con o contra este tipo de pensadores.

En la siguiente sección definiré con precisión algunos de los términos que he estado usando de manera laxa. Presentaré un par de ejemplos de teorías inconsistentes en la historia de las matemáticas, que han sido rescatadas y discutidas por Colyvan. Argumentaré que las observaciones de Colyvan son ambiguas, pero que podemos refinarlas gracias a una propuesta de Bryson Brown, sobre lo que se espera de la lógica en la reconstrucción de teorías. Discutiré algunas de las objeciones más naturales a Colyvan y sostendré que su tesis es *en principio* sostenible; que no es tan descabellada como inicialmente podría parecer. Una vez que quede bien enmarcada la discusión, detallaré mis objetivos y mi hipótesis general. En la segunda sección, plantearé los retos reales que una propuesta de reemplazo lógico radical debe enfrentar. Presentaré distintas clases de lógica paraconsistente y analizaré sus respectivas capacidades para elaborar estrategias que superen dichos retos. En la tercera sección, plantearé problemas filosóficos relacionados a la noción paraconsistente de la negación. Sostendré que dar cuenta de las aparentes discrepancias entre la negación paraconsistente y la noción pre-teórica de negación representa el mayor obstáculo para cualquier tesis de reemplazo lógico sobre cualquier campo del pensamiento científico. En la conclusión, haré una re-evaluación de la tesis de Colyvan a la luz de las discusiones anteriores.

Objetivos generales:

a) Analizar la propuesta de Colyvan y mostrar que las objeciones más obvias contra ella no se sostienen.

b) Problematizar su propuesta viendo cómo podría aplicarse según distintos modelos de lógica paraconsistente.

c) Discutir la noción pre-teórica de negación y analizar si la negación paraconsistente es suficiente para expresar la negación matemática

d) Reconsiderar la propuesta de Colyvan a la luz de estas discusiones.

Hipótesis principal:

La empresa que consiste en rescatar teorías particulares bajo una lógica conveniente, como un fin en sí mismo, arroja resultados interesantes y útiles. Sin embargo, tanto a nivel prescriptivo como descriptivo, no está claro si existe una estrategia paraconsistente para satisfacer propuestas tan ambiciosas como la de Colyvan: dar cuenta del razonamiento matemático en general. Un proyecto de este estilo debe poder dar cuenta tanto de la obvia naturalidad del razonamiento clásico en dominios de consistencia como de las aparentes discrepancias entre la negación paraconsistente y la noción pre-teórica de negación matemática. Un análisis detallado de estos problemas sugiere que no podemos afirmar trivialmente que existe o debe existir una clase de lógica no explosiva que cumpla con todas las propiedades meta-lógicas que buscamos. Pero también sugiere que el proyecto que consiste en buscar dicha clase de lógica está bien motivado.

Capítulo 1: Marco de referencia

Mark Colyvan ha afirmado que hay buenas razones para pensar que la lógica de las matemáticas es paraconsistente. En este trabajo analizaremos esta idea y discutiremos en qué medida es posible afirmar tal cosa. Pero para evaluar esta sugerencia con precisión, primero debemos responder algunas cuestiones iniciales: Qué es exactamente una lógica paraconsistente?, ¿Qué se espera de la lógica en general cuando se afirma que esta es *la* lógica que se usa o debe usar en un campo de la empresa científica?, ¿Cuáles son las razones que llevan a Colyvan a afirmar, en particular, que la lógica es y debe ser paraconsistente en el campo de las matemáticas? En esta sección trataremos de responder tales preguntas. Esto nos permitirá detallar el análisis de la propuesta de Colyvan y nos permitirá especificar criterios de aceptación para evaluarla.

1.1) Explosividad y paraconsistencia

El principio que expresa que cualquier oración arbitraria se sigue de una contradicción es conocido como *ex contradictione quodlibet* (ECQ), o principio de trivialización. Sea ⊨ una relación de consecuencia lógica, definida semántica o sintácticamente. Decimos que ⊨ es explosiva si y solo si valida {A, ¬A} ⊨ B para toda fórmula A y toda fórmula B. Una lógica es explosiva cuando su relación de consecuencia es lo es (cuando ECQ expresa en ella una forma argumental válida). La lógica clásica (LC) es explosiva –aunque no toda lógica explosiva se considera clásica.

Una relación de consecuencia lógica es paraconsistente si y solo si no es explosiva (Priest 1996). Una lógica se considera paraconsistente cuando su relación de consecuencia lo es. Es decir, cuando permite que por lo menos un enunciado no se siga de un conjunto inconsistente de premisas. Algunos defensores de esta clase de lógica defienden el *Dialeteismo*: la postura que se compromete con que hay verdades de la forma P y ¬P (Priest 2006). Otros tienen motivaciones prácticas para rescatar teorías que caen en contradicciones. Otros pretenden modelar el razonamiento en contextos problemáticos. Pero el objetivo estrictamente lógico es evitar la trivialización automática de conjuntos inconsistentes de enunciados.[1]

Hay muchas lógicas paraconsistentes, que se pueden clasificar según las muy diversas estrategias que pueden seguirse para rechazar ECQ. Aunque Colyvan tiende a favorecer a LP (*Logic of Paradox*), aclara que sus argumentos son generalmente compatibles con cualquier lógica paraconsistente que se preste a los propósitos que le conciernen.[2] Veremos ejemplos

[1] Un conjunto de enunciados es inconsistente cuando su clausura bajo deducción contiene A y ¬A para alguna oración A.

[2] En "Inconsistent Mathematics" presenta tablas de verdad que dan las condiciones semánticas para las conectivas de LP, con el propósito de concretar la discusión y explicar cómo LP evita la explosión en los casos

pertinentes de dichas lógicas para concretar la discusión en la sección 2. Por ahora, las definiciones que hemos dado bastan para entender, de manera general, lo que está proponiendo Colyvan.

1.2) Los ejemplos de Colyvan

Colyvan ha dado argumentos contra quienes defienden la lógica clásica en el campo matemático. En "Who's afraid of inconsistent mathematics?" ofrece una especie de reducción al absurdo. Su argumento relaciona al Último Teorema de Fermat (FLT) con la Teoría de Conjuntos "naïve" (TCN). Con este último término se refiere a la teoría temprana que contiene el axioma de Comprensión irrestricta, que dio lugar a la conocida paradoja de Russell (entre otras). El axioma de Comprensión expresa la idea de que toda propiedad o condición define un conjunto. Así, por ejemplo, el predicado "es un número par" define el conjunto de los números pares. Las inconsistencias surgen cuando consideramos predicados como "es un conjunto que no pertenece a sí mismo". Este predicado define el conjunto de Russell: R = {x: x∉x}. Es fácil ver que si R pertenece a sí mismo, no pertenece a sí mismo y viceversa.

Por otro lado, FLT dice que no hay enteros positivos x, y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ para algún entero $n > 2$. FLT cumplió un rol importante en la historia de las matemáticas y no fue demostrado sino hasta 1995 por Andrew Wiles. La demostración ocupa más de mil páginas e involucra herramientas matemáticas avanzadas. Colyvan nos pide que consideremos la siguiente prueba.

"Prueba" de Colyvan: Sea R el conjunto de Russell y FLT la oración que expresa el teorema de Fermat. Es fácil mostrar que R∈R y R∉R. Ya que R∈R (por simplificación), se sigue por simple adición que R∈R o FLT. Pero como R∉R, se sigue por silogismo disyuntivo que FLT. (Colyvan 2008).

La pregunta de Colyvan es: ¿por qué no fue desarrollada esta prueba durante el periodo en que los matemáticos aceptaban TCN? Señala que es fácil de entender y el razonamiento se atiene a inferencias de la lógica clásica. Una respuesta obvia, la respuesta que inmediatamente viene a la mente de quien conoce los desarrollos de ese periodo en la historia de las matemáticas, es que la "prueba" involucra una teoría matemática inconsistente, cuyas paradojas fueron detectadas a finales del siglo XIX. Una de las más famosas es la de Russell,

pertinentes. Pero es muy claro al decir que no es la única lógica que debe considerarse en el contexto de su argumentación general (Colyvan, 2008).

a la que se alude en la "prueba" anterior. El principio de comprensión irrestricta fue detectado como la fuente de varias de estas paradojas, y esto llevó a una crisis en matemáticas a principios del siglo XX. Es sabido que, a partir de ahí, los matemáticos buscaron maneras de limitar la excesiva fuerza de dicho principio, con el objetivo de encontrar un reemplazo consistente de la teoría "naïve".[3]

Por supuesto, la solución tenía que ser general; no sería suficiente, por ejemplo, simplemente prohibir la formación de conjuntos problemáticos como el de Russell ya que, entre otras cosas, una solución de este tipo difícilmente garantizaría que se ha anulado el posible surgimiento de nuevas contradicciones. Una solución general atractiva consiste en rechazar los conjuntos que necesitan una referencia (explícita o implícita) a sí mismos para ser definidos (partiendo de axiomas restringidos que no permitan la formación de dichos conjuntos). Esta es (burdamente) la idea detrás de ZFC (teoría de Conjuntos de Zermelo-Frenkel con el axioma de elección). Los axiomas de esta teoría establecen una jerarquía cumulativa de conjuntos, donde un conjunto solo puede ser construido a partir de conjuntos de nivel "inferior". Un conjunto que se contuviera a sí mismo no estaría bien fundado, porque eso implicaría la formación de conjuntos "del mismo nivel". Esta teoría no se ha demostrado inconsistente, y representa el reemplazo acordado de TCN.

Entonces parecería que la respuesta es muy sencilla: los matemáticos del periodo en que no se conocía la paradoja de Russell (ni alguna otra) no sabían acerca del conjunto R; mientras que los matemáticos del periodo posterior nunca hubieran razonado a partir de una teoría de cuyas inconsistencias ya estuvieran enterados. Pero el punto de Colyvan es mucho más fuerte. Debe tener una réplica similar a la anterior en mente cuando hace notar que hubo un periodo de tres décadas (entre el descubrimiento de las paradojas de TCN y el desarrollo de ZFC) durante el que los matemáticos no se quedaron quietos esperando a que la cuestión se resolviera. Por el contrario, siguieron usando TCN en el desarrollo de otras ramas de las matemáticas y en aplicaciones sobre ciencias empíricas.[4]

Otro ejemplo significativo de teoría inconsistente en la historia de las matemáticas es el Cálculo temprano (CT). Parece que, cuando fue desarrollado a finales del siglo XVII, era inconsistente. Invocaba supuestas entidades matemáticas llamadas infinitesimales o fluxiones, que eran concebidas como componentes cambiantes que se acercan a cero. En algunos lugares estos componentes de la teoría son tratados como números reales cercanos a cero y en otros lugares como idénticos a cero. Lo interesante es que a menudo esto sucede en la misma prueba. Aquí hay un ejemplo en el que se diferencia el polinomio f(x) = ax2 + bx + c.[5]

[3] Véase (Giacquinto 2002).
[4] Hay una explicación detallada de estas aplicaciones en (Halmos 1974).
[5] Colyvan (2008) toma un esquema similar de (Kline 1972).

$$f'(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} \tag{1}$$

$$= \frac{a(x+\delta)^2 + b(x+\delta) + c - (ax^2 + bx + c)}{\delta} \tag{2}$$

$$= \frac{2ax\delta + \delta^2 + b\delta}{\delta} \tag{3}$$

$$= 2ax + b + \delta \tag{4}$$

$$= 2ax + b \tag{5}$$

En las líneas 1, 2 y 3, δ se toma como distinto de 0. De lo contrario, no podría usarse para dividir. Pero en las líneas 4 y 5 encontramos que $2ax + b + \delta = 2ax + b$, lo que parece implicar que $\delta = 0$. De manera similar a lo que ocurrió con TCN, el Cálculo alcanzó mayor precisión (lo que a su vez erradicó sus al menos aparentes inconsistencias) mediante el trabajo de Bolzano, Weierstrass y otros en el siglo XIX, mediante definiciones precisas de límite. Pero de nuevo, si esta interpretación del Cálculo temprano es correcta (aunque esto es ciertamente más cuestionable que el caso de TCN), podemos sacar una conclusión sobre la historia de la práctica matemática similar a la anterior: "The point is simply that for over a hundred years mathematicians and physicists worked with what would seem to be an inconsistent theory of calculus". [6] En cualquier caso, hay que notar que los matemáticos de este periodo deben haber seguido reglas muy sutiles para que la teoría no se derrumbara por completo. Pues si se usaran propiedades contradictorias de δ sin cautela se podrían demostrar enunciados absurdos como que $4 = 9$; por ejemplo, partiendo de que $4 \times \delta = 9 \times \delta$ y luego dividiendo ambos lados de la ecuación entre δ.

Para Colyvan, estos ejemplos históricos de la práctica matemática (TCN y CT) muestran que los matemáticos no infieren cualquier cosa a partir de una contradicción; en otros términos, que no usan una lógica explosiva. De lo contrario, o bien no hubieran aceptado y utilizado estas teorías o bien hubieran aceptado cualquier teorema expresable en ellas. Él admite que se pueden hacer réplicas *ad hoc*, como que la prueba espuria que él da no es una prueba sensible, o que pertenecen a una etapa en desarrollo (contexto de descubrimiento) en donde los factores pragmáticos son sutiles y no pueden –o deben- ser explicados a través de las propiedades estrictas de una relación de consecuencia lógica. Pero argumenta que el defensor de la lógica paraconsistente solamente tiene que apelar a su noción de validez, donde una oración y su negación no (siempre) implican cualquier cosa. Bajo esta noción, la forma argumental de su "prueba" es inválida. Así, en LP no es válido el Silogismo Disyuntivo cuando involucra una fórmula *dialeteica*: si $A\rho 1$ y $A\rho 0$, entonces $\neg A\rho 1$ $\neg A\rho 0$. Por lo tanto, $(A \vee B)\rho 1$. Pero podría ser que $B\rho 0$ solamente. La no trivialización de estas teorías

[6] Hay una exposición detallada de sus aplicaciones en (Colyvan 2010).

inconsistentes lo lleva a afirmar que la lógica apropiada para modelar la práctica inferencial matemática es paraconsistente.

Hasta ahora hemos visto un argumento basado en datos de la historia de las matemáticas, y que sugiere un cambio de lógica para modelar como "de hecho" razonan (o han razonado) los matemáticos. Por otro lado, Colyvan sugiere que una lógica paraconsistente *debería* ser la lógica usada: "Even if mathematicians do use classical logic but exercise some caution about what proofs to accept above and beyond the valid ones, perhaps they ought to use a paraconsistent logic." (Colyvan, 2008). Da dos razones para apoyar esta sugerencia. La primera tiene que ver con el riesgo de trivializar una teoría nueva e interesante cuando no es posible saber si es inconsistente o no. Da un ejemplo sobre los debates iniciales en torno al uso de números complejos:

> Consider, for example, the earliest uses of complex numbers, numbers of the form $x + yi$, where $i = -1$ and x and y are real numbers. There was a great deal of debate about whether it was inconsistent or just weird to entertain the square root of negative numbers. Moreover, it was not just the status of complex analysis that was at issue. If the theory of complex analysis turned out to be inconsistent, everything that depended on it, such as some important results in real analysis, would also be in jeopardy.

Así, adoptar una lógica paraconsistente ante el riesgo de la inconsistencia sería análogo a emplear una póliza de seguros ante el riesgo de un accidente. La segunda razón tiene que ver con la posibilidad de reconstruir y rescatar TCN y CT. Señala que estas teorías son más intuitivas y simples que sus sucesores consistentes. En TCN no hay que lidiar con axiomas complejos como los de ZFC, cuya complejidad responde a una forma ad hoc de bloquear resultados paradójicos: "ZFC, for all its great power and acceptance, remains unintuitive and even ad hoc. There is no doubt that naïve set theory is the more natural theory." Similarmente, en CT no hay necesidad de establecer las sutilezas involucradas en la definición moderna (ε−δ) de límite, y los fluxiones regresan bajo un tratamiento no explosivo.

Colyvan no dice exactamente por qué estos sucesores consistentes son *ad hoc*. Por otro lado, es obvia la diferencia en la complejidad de los axiomas y las definiciones de las distintas teorías en comparación. Sin embargo, vale la pena notar que este argumento por la simplicidad pierde su fuerza si la lógica subyacente propuesta excede en complejidad a la lógica clásica. Como veremos más adelante, varias lógicas paraconsistentes útiles para la reconstrucción de estas teorías más simples necesitan recursos poco intuitivos y artificiales para garantizar un *equilibrio inferencial*: que no se infieran demasiadas consecuencias (sobre todo, evitar la trivialización) sin, por ello, truncar inferencias deseables. Pero antes de pasar a estos detalles más técnicos, es pertinente aclarar por qué estas propuestas de Colyvan son más atractivas de lo que inicialmente podrían parecer.

1.3) Objeciones elementales contra Colyvan

Las tesis que hemos visto son extremadamente fuertes y, dado que se oponen a cierta ortodoxia lógica y filosófica, podrían dar la impresión de ser inmediatamente descartables, sobre todo ante quien no está familiarizado con los “mecanismos de defensa” que existen en la jungla paraconsistente; es decir, las estrategias que algunas de estas lógicas emplean para compensar los inconvenientes involucrados en rechazar ECQ. Dichas estrategias no son perfectas, como veremos en las siguientes secciones. Pero antes de pasar a cuestiones de mayor complejidad, es conveniente tratar algunas objeciones obvias ante los argumentos de Colyvan, con el objetivo de mostrar que no son trivialmente refutables. De lo contrario, sería difícil apreciar la relevancia de las discusiones posteriores. El objetivo de este apartado no es establecer estas propuestas ni defenderlas ante cualquier objeción posible, sino mostrar que *en principio* están bien motivadas, y explicar por qué vale la pena explorarlas.

Hemos visto que la propuesta de Colyvan (la lógica paraconsistente es la lógica de las matemáticas) tiene dos acepciones distintas P1) La práctica matemática de hecho muestra (ha mostrado) el uso de una relación de inferencia paraconsistente. P2) Los matemáticos deberían usar una lógica paraconsistente. Es evidente que ambas tesis se sostienen entre sí. Por ejemplo, si aceptáramos P1, sería más fácil aceptar P2 puesto que no daría la impresión de ser una propuesta revisionista: lo único que diría es que lo que hasta ahora se ha estado haciendo en una práctica exitosa es también lo que se debería de hacer. Similarmente, si *no* aceptáramos P2, estaríamos más tentados a ver los argumentos que llevan a P1 como insistencias innecesarias sobre un periodo histórico problemático que tal vez podríamos relegar a un contexto pragmático de descubrimiento y, en base a ello, sostener que no es tan interesante desde el punto de vista lógico. Pero esta dependencia mutua no es estrictamente conceptual, así que será mejor separar ambas tesis al considerar las siguientes objeciones.

1.3.1) ¿Y si hacemos encuestas?

La objeción más obvia a P1, es que prácticamente ningún matemático aceptaría explícitamente que usa una lógica paraconsistente. Esta es una de las (pocas) objeciones que Colyvan sí considera (Colyvan, 2008):

> Surely all we need to do is ask a mathematician which logic they use and surely they’ll all answer “classical logic” (or perhaps “intuitionistic logic”). For various reasons it might be interesting to conduct such sociological research of mathematicians’ beliefs but it will not help us answer the

> question at hand about the logic of mathematics. Our question is which logic do mathematicians actually use, and this is determined by mathematical practice, not by what mathematicians claim they use. (Indeed, most mathematicians are not experts in the differences between the various logics available.)

Esta respuesta es típica de los quienes se adscriben a una filosofía de la ciencia "basada en la práctica": no hay razón para suponer que los científicos (en este caso, los matemáticos) tengan una comprensión perfecta de su meta-práctica. En cualquier caso, es claro que el análisis filosófico debe ir mucho más allá de una (posible) encuesta. La pregunta por la lógica que usan los matemáticos claramente no es una pregunta por el tipo de lógica que se enseña explícitamente en ciertos departamentos de matemáticas, sino una pregunta que tiene que ver con las relaciones de inferencia que caracterizan la noción informal de prueba y con si es posible (y hasta dónde es posible) modelar formalmente estas relaciones.

Pero incluso si se acepta la respuesta anterior, es difícil negar que la práctica matemática *muestra* un rechazo evidente a la inconsistencia. Este rechazo se refleja incluso en ciertos principios básicos. Así, J.Y. Béziau dice:

> But the people who think that classical logic makes an absurd simplification of vernacular negation that must be banished certainly are not aware of the incredible jump that was made in Greece, more than two thousands years ago, when the people started to use the principle of non-contradiction. It is probably not wrong to say that the use of the principle of non-contradiction was the start of mathematics and science in general."[7]

¿Esta clase de consideración invalida P1? No trivialmente. Aunque es cierto que algunas eminencias lógicas han sostenido que un requisito mínimo para que una lógica sea genuinamente parconsistente es que no contenga ¬(A ∧ –A) como tautología (Da Costa, 1974), también es verdad que no todas están de acuerdo (Priest, 2002). Al menos, la relación de consecuencia paraconsistente, tal como la hemos caracterizado anteriormente, no involucra *per se* un rechazo del principio de no contradicción. No hay una relación tan clara entre este principio y ECQ. De hecho, en LP ¬(A ∧ ¬A) es una verdad lógica. Supongamos que Aρ1. Según las condiciones que hemos dado anteriormente, ¬Aρ0, por lo que (A ∧

[7] Béziau (2000) discute el uso de la reducción al absurdo, que toma como la formulación más fuerte del principio de no contradicción. La reducción al absurdo también es rescatable en distintas lógicas paraconsistentes, aunque esto requiere técnicas especiales para recuperar la lógica clásica, como veremos más adelante. Béziau cree que la lógica paraconsistente simplemente no sirve en matemáticas (aunque él ha dado grandes aportaciones al estudio de la lógica paraconsistente, también es uno de los autores más críticos de la aplicación de este tipo de lógica a distintos campos). No sé si su "pesimismo" solo está basado en la razón expresada en la cita anterior. Si este es el caso, espero mostrar que es una razón superficial.

¬A)ρ0. Entonces ¬(A ∧ ¬A)ρ1. Por otro lado, si Aρ0, entonces (A ∧ A)ρ0 y, de nuevo, ¬(A ∧ ¬A)ρ1. Dada la restricción de totalidad y la definición de tautología, $\vDash_{LP}$ ¬(A ∧ ¬A). [8]

Por otro lado, al considerar las implicaciones de invalidar el principio de explosión, hay que distinguir entre dos tipos de afirmación: a) Algunas contradicciones no explotan. b) Ninguna contradicción explota. Estrictamente, la paraconsistencia solo se compromete con la primera afirmación. De hecho hay lógicas paraconsistentes cuya relación de consecuencia no cumple con la segunda (deja que algunas contradicciones exploten). Más aún, algunas de estas lógicas distinguen entre varios tipos de contradicción, e incluso logran que esta distinción sea efectiva; ya sea expresándola en el mismo lenguaje (Lógicas de la Inconsistencia Formal), o bien superponiendo una relación de consecuencia en la que algunas contradicciones son "más corrosivas" que otras, de acuerdo a un parámetro que establece las propiedades deseables/conservables de un conjunto de premisas (Lógicas Preservativas). Veremos estas clases de lógica en secciones posteriores.

Por el momento, cabe observar que la disputa de ciertas propuestas paraconsistentes con la lógica clásica no tiene que ver directamente con la cuestión de si hay que aceptar contradicciones o no, sino con la necesidad de establecer distinciones finas entre varios tipos de contradicción (y, con base en esta distinción, es posible decir por qué tienen consecuencias distintas; en particular, por qué unas se trivializan y otras no). Volviendo a la objeción anterior, podría ser que este aparente tratamiento de las contradicciones en la práctica matemática (por un lado, rechazo absoluto reflejado en principios básicos y, por el otro, aceptación y no-trivialización de TCN y CT) correspondiera a una distinción trazable lógicamente entre distintos tipos de contradicción. *Prima facie*, la objeción anterior no es concluyente.

1.3.2) Ningún modelo es perfecto.

Pero incluso si dicho proyecto es realizable, seguro no vamos a renunciar a la belleza y simplicidad de la lógica clásica solo por un par de casos históricos excepcionales de la práctica matemática (TCN y CT)[9], sobre todo tomando en cuenta los esfuerzos realizados en

[8] Curioso resultado, tomando en cuenta que (A ∧ ¬A) es satisfactible en LP (cuando Aρ1 y Aρ0). Esta peculiaridad de LP viene a un precio. Entre otras cosas, su relación de consecuencia no es simétrica: aunque preserva "verdad" de izquierda a derecha (relación con 1), no preserva "falsedad" de derecha a izquierda (relación con 0). Pero la forma de evaluar este precio no es evidente y, por tanto, su análisis pertenece a una sección posterior.

[9] Estrictamente, Colyvan no solo menciona estos casos. En un pie de página, menciona la posibilidad de que incluso los matemáticos contemporáneos acepten un marco teórico inconsistente: "After all, so long as you are careful to skirt around the known paradoxes of naïve set theory, it can be safely used in areas such as analysis,

esta misma práctica para salir de la situación de inconsistencia. Después de todo, cuando hablamos de esta lógica como "la lógica que usan los matemáticos" hablamos de un *modelo* que captura aspectos relevantes de su práctica inferencial. Y uno de los factores fundamentales que hacen que un modelo sea exitoso, es su capacidad de abstraer y simplificar fenómenos. Gentzen dio una formulación brillante de esta clase de objeción al contrastar la matemática clásica con la constructivista:

> We might consider still another example which, in its relation to physics, seems to provide even more striking analogies to the relationship between constructivist mathematics and actualist mathematics: I am thinking of the occasional attempt to construct a 'natural geometry', i.e. a geometry which is better suited to physical experience than the usual (Euclidean) geometry, for example. In this natural geometry, the theorem 'precisely one straight line passes through two distinct points' holds only if the points are not lying too close together. For if they are lying very close together, then several adjacent straight lines can obviously be drawn through the two points. The draftsman must take these considerations into account; in pure geometry, however, this is not done because here two points are idealized. The extended points of experience are replaced by the ideal, unextended, 'points' of theoretical mathematics which, in reality, have no existence. That this procedure is beneficial is borne out by its success: It results in a mathematical theory which is of a much simpler and considerably smoother form than that of natural geometry, which is continually concerned with unpleasant exceptions. The relationship between actualist mathematics and constructivist mathematics is quite analogous. (…)
>
> The question now arises: what use are elegant bodies of knowledge and particularly simple theorems if they are not applicable to physical reality in their literal sense? Would it no be preferable in that case to adopt a procedure which is more laborious and which yields more complicated results, but which has the advantage of making these results immediately meaningful in reality? The answer lies in the success of the former procedure: Again consider the example of geometry. The great achievements of mathematics in the advancement of physical knowledge stem precisely from this method of idealizing what is physically given and thereby simplifying its investigation.

Si en este amplio pasaje intercambiamos "realidad física" por "práctica inferencial matemática" y reemplazamos el contraste entre el intuicionismo y la lógica clásica por un contraste entre lógica paraconsistente y lógica clásica, tenemos un tipo de objeción absolutamente aplicable a nuestra discusión. Tal vez es más natural apelar a una noción pragmática de "prueba sensible" y relegar estos casos a un contexto problemático de descubrimiento que apelar a una noción de consecuencia lógica no explosiva (como sugiere Colyvan). Esta última opción en realidad conlleva ampliar el campo de lo que concierne a la

---

topology, algebra and the like. Most mathematical proofs, outside of set theory, do not explicitly state the set theory being employed. Moreover, typically these proofs do not show how the various set-theoretic constructions are legitimate according to ZFC. This suggests, at least, that the background set theory is naïve, where there are less restrictions on set-theoretic constructions." Omito este detalle aquí para dar relieve a la objeción, y porque Colyvan no dice nada más sobre este punto. Lo retomaremos en secciones posteriores al considerar algunos argumentos de Graham Priest, que sugieren algo similar.

lógica innecesariamente. Revisar la lógica clásica por las razones de Colyvan (sigue la objeción) sería similar a revisar un mapa del mundo porque no representa exactamente los pliegues de una montaña. En ambos casos, una evaluación racional del costo/beneficio optaría en contra de la discriminación de detalles y a favor de la simplificación. Es interesante contrastar este tipo de réplica con lo que dice E.D. Mares para justificar la(s) lógica(s) relevante(s). Mares (2002) da un argumento estructuralmente muy similar al de Colyvan:

> Since 1993, when Andrew Wiles completed his difficult proof of Fermat's Last Theorem, mathematicians have wanted a shorter, easier proof. Suppose when someone addressing a conference of number theorists suggests the following proof of the theorem:
>
> The sky is blue.
>
> ---
>
> ∴ There is no integer n greater tan or equal to 3 such that for any non-zero ingegers x, y, z, $x^n = y^n + z^n$
>
> The proof would not be well received. But it is valid, in fact sound, on the classical definition. The premise cannot be true in any posible circumstance in which the conclusión is false. For the conclusion is necessarily true. And the premise is true. Thus the argument is sound and known to be sound.

De acuerdo con Mares, esta consideración muestra que la noción clásica de validez no coincide con nuestras intuiciones pre-lógicas con respecto a la división entre buenos argumentos y non-sequiturs (o entre pruebas matemáticamente aceptables y pruebas espurias). El problema que él ve es un problema de relevancia: tiene que haber una conexión más fuerte entre premisas y conclusión en la caracterización de "argumento válido".[10] Ante una objeción similar a la que estamos considerando, él responde lo siguiente:

> Ahother line of reply is that our notion of good proof is not completely logical, but rather is partly pragmatic. There is probably some truth to this claim, but we should resist the temptation to push this problem completely into pragmatics. Theories of pragmatics are notoriously vague. They tell us, for example, to reject the above argument because it violates the Gricean maxim "be relevant". What counts as relevant is left unsaid in Grice's theory. Surely, if there is a theory of relevance that is more rigorous than this, it would be better, all things being equal, to appeal to the more rigorous theory. And relevant logic does provide a very specific view about what counts as a relevant deduction.

El punto es que Colyvan podría dar una respuesta análoga: si hay una teoría rigurosa sobre cómo se razona a partir de premisas inconsistentes, es mejor apelar a esta teoría que a una

[10] Una lógica es relevante cuando cumple la condición de relevancia: siempre que un condicional de la forma A → B es una verdad lógica, A y B comparten un parámetro proposicional. No todas las lógicas relevantes son paraconsistentes, aunque claramente lo son si cumplen el Teorema de la Deducción ($A \vDash B$ sii $\vDash A \rightarrow B$). Y veremos que muchas lógicas paraconsistentes no son relevantes.

noción pragmática vaga (como "prueba sensible"). Y la(s) lógica paraconsistente(s) aporta(n) una visión bien definida sobre lo que es razonar no explosivamente en contextos de inconsistencia.[11] Ahora bien, incluso si la explicación más rigurosa es la que debe tener prioridad, esto no nos dice exactamente cómo evaluar la cuestión del costo/beneficio entre "atención al detalle"/alcance y simplicidad, que forma parte de la objeción inicial. *Prima facie*, podríamos enfrentarnos a distintos resultados. Podría ser que al querer dar cuenta de este supuesto razonamiento no explosivo que señala Colyvan tengamos que usar lógicas especializadas, que solo sirvan para modelar el razonamiento en torno a teorías inconsistentes particulares como TCN y CT (tal vez incluso necesitemos una lógica para cada teoría). Así, nos encontraríamos en una situación similar a la del geómetra de Gentzen, que rechaza la universalidad de los principios euclidianos en nombre de la aplicación concreta. En dado caso, la primera propuesta de Colyvan tendría al menos que reformularse bajo un tono menos ambicioso ("*la* lógica que usan los matemáticos" sugiere mucho más). Por otro lado, podría ser que, tal como algunos lógicos paraconsistentes pretenden, haya *una* lógica paraconsistente universal, capaz de subsumir incluso a la lógica clásica, de manera análoga a la forma en que la Teoría de la Relatividad subsume a la Newtoniana (Priest, 1987). También podríamos encontrarnos entre ambos extremos.

Estas cuestiones solo pueden ser concretadas a través de un análisis de las distintas estrategias que existen para rechazar el principio de explosión, un análisis de qué tan intuitivos son los dispositivos semánticos o sintácticos que definen las relaciones de consecuencia resultantes, y un análisis de lo que se pierde al invalidar ECQ. Este principio no es un "accidente" de la lógica clásica, y rechazarlo involucra la invalidación de inferencias básicas. Esto se conecta con la siguiente objeción a considerar.

1.3.3) Si quitas un tabique se te cae la pared encima

Hay consideraciones que parecen indicar que necesariamente hemos de encontrarnos en la situación del geómetra de Gentzen al tratar de dar cuenta de los casos a los que apunta

[11] Seguramente Mares diría que el ejemplo de Colyvan también apunta a un problema de relevancia. Pues tanto su "prueba" absurda como la de Colyvan parecen reflejar lo que los lógicos relevantes llaman "paradojas de la implicación material". Entre otras cosas, en lógica clásica una contradicción implica cualquier oración y cualquier oración implica una tautología. La condición de relevancia anula ambos resultados. Pero esto no necesariamente quiere decir que el ejemplo de Colyvan pueda ser subsumido como un problema de relevancia. El ejemplo de Mares es mucho menos poderoso que el de Colyvan. Para empezar, su contraejemplo asume que toda verdad matemática es una verdad lógica (mientras que el supuesto análogo de Colyvan es que una idea matemática contradictoria puede ser representada como tal lógicamente). Además, se puede explicar más fácilmente por qué su "prueba" no es aceptable. Para que un argumento sea aceptable, debe ser más que correcto ("sound"). En particular, no debe pedir la cuestión. Y la única razón para suponer que el argumento que da es (clásicamente) válido es que sabemos que la conclusión (el Teorema de Fermat) es (necesariamente) verdadera. Pero cuando los matemáticos piden una prueba más simple, claramente se refieren a una forma más simple de *llegar* hasta ese saber. No hay una réplica análoga al ejemplo de Colyvan.

Colyvan. Ellas tienen que ver con el hecho de que en lógica clásica hay pruebas independientes de ECQ.

Prueba 1

1) α Premisa

2) $\neg\alpha$ Premisa

3) $\neg\beta$ Supuesto para R. A.

4) $\alpha \wedge \neg\alpha$ 1, 2 $\wedge$-Intro.

5) $\neg\neg\beta$ 3-4 R. A.

6) β 5 $\neg$ Elim.

Prueba 2

1) α Premisa

2) $\neg\alpha$ Premisa

3) $\alpha \vee \beta$ 1 v-Intro.

4) β 2, 3 S.D.

Las fórmulas α y β representan fórmulas arbitrarias. Esto quiere decir, burdamente, que rechazar el principio de explosión como regla de inferencia conlleva remover alguna(s) de las reglas usadas en las pruebas independientes. Sin embargo, todas estas reglas parecen representar principios de inferencia sumamente intuitivos y constantemente empleados en todo discurso racional (especialmente en matemáticas). La respuesta paraconsistente standard consiste en decir que estos principios son perfectamente legítimos en contextos consistentes (cuando se razona a partir de conjuntos de premisas que no contienen una oración y su negación), pero que fallan a la hora de ser aplicados en contextos de inconsistencia.[12] Si interpretamos esta respuesta como diciendo que es necesario cambiar de lógica cuando la inconsistencia está presente, la consecuencia es que acabamos usando lógicas especializadas que, en el mejor de los casos, solo son capaces de modelar lo que ocurre en estas situaciones excepcionales.

[12] Por ejemplo, Priest, al hablar de LP, dice que el Silogismo Disyuntivo es correcto siempre que la disyunción pertinente no contenga una oración dialeteica. Cuando razonamos en torno a un dominio en donde las contradicciones no se dan o son improbables (por ejemplo, cuando describimos objetos macro-físicos), el Silogismo Disyuntivo representa una inferencia *inductiva* legítima. Discutiremos esta respuesta más adelante.

Para un pluralista que cree que se usan distintas lógicas en distintos contextos (en particular, de acuerdo a las propiedades de distintas teorías) esto es fácil de aceptar. Pero las cosas no son tan fáciles para quien cree que hay una y solo una noción de consecuencia lógica capaz de modelar las inferencias de la práctica matemática. La tesis de Colyvan parece partir de un supuesto semejante, dado el artículo definido contenido en su afirmación: "*the* logic of mathematics is paraconsistent". Para el lógico clásico que comparte este supuesto, las pruebas independientes de ECQ parecen confirmar la objeción previa (el precio de no relegar estas cuestiones al campo pragmático es renunciar a la universalidad de la lógica clásica). Pero una reacción pluralista esperada consiste en decir que los ejemplos de inconsistencia sin trivialización de Colyvan junto con el hecho de las pruebas independientes de ECQ, simplemente muestran que dicho supuesto es falso: distintas lógicas son necesarias para modelar aspectos/periodos/contextos teóricos distintos del razonamiento. Vemos que P1 puede ser atacada desde varios ángulos. Precisemos algunos conceptos para aclarar lo que está en juego.

El pluralismo lógico es la postura que defiende que hay distintas lógicas correctas. Su antítesis es el monismo lógico, que defiende que hay una y solo una lógica. Por supuesto, estas posturas están indefinidas si no se especifica cuál es el criterio de corrección de una lógica (Beall y Restall, 2006). Sobre todo, no dicen nada si no se especifica un dominio de aplicación. El monismo que parece ser defendido por Colyvan obviamente se sitúa en el análisis de la práctica matemática. Como se muestra en su análisis de distintas pruebas (Colyvan 2008), el criterio de corrección de una lógica en dicho dominio es que permita codificar las formas de razonamiento matemático.[13] Llamaré MLM (monismo lógico en matemáticas) a la postura que defiende que hay una sola lógica capaz de hacer esto. Aquí "lógica" cobra un uso muy general, donde se puede hablar de los rasgos que caracterizan a un tipo de noción de consecuencia. Llamaré PLM (pluralismo lógico en matemáticas) a la postura contraria.

PLP se puede ramificar según el tipo de relación de consecuencia lógica que se proponga (paraconsistente, intuicionista, clásica, etc.) y la postura se puede especificar todavía más según las relaciones particulares de consecuencia ubicadas dentro de estas clases. Llamaré MLMP a la postura general de que hay una y solo una lógica de las matemáticas (es decir, capaz de codificar las formas de razonamiento matemático) y que esa lógica define una relación de consecuencia no explosiva. Llamaré MLME a la postura que sostiene que hay una lógica de las matemáticas y que esta lógica es explosiva.

El obstáculo que imponen las pruebas independientes de ECQ se ve ejemplificado en la siguiente consideración. Supongamos que MLMP se ramificara proponiendo una lógica como LP. ¿Cómo podría ser "la lógica de las matemáticas" una lógica que no valida inferencias tan básicas como el Silogismo Disyuntivo? Pero las pruebas independientes parecen mostrar esta clase de problema no es una peculiaridad de LP: toda lógica paraconsistente (donde las conectivas pretenden ser correlatos de las conectivas clásicas) que

[13] Esto es lo que (Hintikka, 1996) considera la función deductiva de la lógica.

pudiera proponerse se enfrentaría a un obstáculo similar; tomando en cuenta que los principios empleados en las pruebas de independencia son tan o más "básicos" que el Silogismo Disyuntivo. El análisis que hemos hecho de la teoría de Conjuntos naïve y el Cálculo temprano pretende mostrar es que MLME no se sostiene. Pues hemos visto que estas teorías eran inconsistentes y, aun así, aceptadas y usadas en la práctica matemática durante varios años. El que no hayan sido trivializadas muestra que el principio de explosión no siempre refleja adecuadamente la práctica inferencial matemática. Pero la posición de quien acepta MLMP es más fuerte: una relación de consecuencia no explosiva debe poder codificar los mecanismos de razonamiento en general.

Ahora bien, hay dos sentidos en los que podemos decir que una relación de consecuencia es inapropiada para los propósitos que estamos considerando. Diremos que se excede con respecto a un conjunto de premisas cuando permite una inferencia que no refleja la práctica inferencial. Diremos que se queda corta con respecto a un conjunto cuando invalida inferencias que sí se ven reflejadas en dicha práctica. La prueba espuria del teorema de Fermat que ofrece Colyvan es una manera de mostrar, por reducción al absurdo, que la lógica clásica (y cualquier lógica explosiva) se excede con respecto a teorías inconsistentes. Pero no muestra que la lógica clásica se exceda con respecto a las consistentes. El dilema que sugieren las pruebas de independencia de ECQ es que, si queremos hablar de una relación de consecuencia universal, tenemos que optar entre la trivialización de teorías inconsistentes y la validación de principios sumamente intuitivos, que hacen (en general) que la lógica clásica sea tan exitosa en la codificación del razonamiento. Repitiendo un punto anterior de manera más precisa, el defensor de PLM concluye a partir de este dilema que no existe dicha relación de consecuencia universal, mientras que el defensor de MLME opta por el segundo "cuerno" del dilema y concluye que los periodos problemáticos de inconsistencia están fuera del ámbito de la lógica.

¿Qué pasa con MLMP? El defensor de esta postura no tiene la opción dual a la que tiene MLME. Optar por el primer "cuerno" del dilema y relegar el razonamiento normal al ámbito pragmático sería absurdo. Parecería entonces que o bien acepta el pluralismo y se limita a proponer lógicas especializadas para teorías inconsistentes (en el mejor de los casos, una para todas) o bien acepta que el razonamiento en torno a la inconsistencia está fuera del punto de vista lógico. Sin embargo, hay maneras de sostener que este dilema es superable. Priest (1987) sugiere esto al comparar la lógica paraconsistente con la inuiticonista:

> Intuitionism is a revisionist philosophy. It sees a good part of the reasoning of classical mathematics, particularly that concerning infinite totalities, as quite fallacious. It has therefore wished to debunk it. The programme of paraconsistent logic has never been revisionist in the same sense. By and large, it has accepted that the reasoning of classical mathematics is correct. What it has wished to do is to reject the excrescence *ex contradictione quodlibet*, which does not appear to be an integral part of classical reasoning, but merely leads to trouble when reasoning ventures into the transconsistent. Since the early days of paraconsistent logic it has, however, been clear that the rejection of *ex contradictione* is not posible without the rejection of other things which appear to be much more integral to classical

> reasoning. Crucially, the disjunctive syllogism is a casualty in most paraconsistent logics. The problem is therefore posed as to how to account for the apparently aceptable classical reasoning.

Lo que quiere, según esta versión, el lógico paraconsistente es expandir el razonamiento (o la habilidad de modelarlo) hacia lo "transconsistente" y solo busca truncarlo en los casos donde no hacerlo llevaría a la trivialización. El (supuesto) dilema se vuelve entonces un reto técnico: ¿Cómo caracterizar una relación de consecuencia no explosiva que coincida con la lógica clásica en las inferencias permisibles desde premisas consistentes? Las distintas técnicas que pretender hacer frente a este reto son llamadas *técnicas de recuperación clásica*. Distintas técnicas se basan en distintas estrategias para evitar ECQ y, por eso, las analizaremos posteriormente. Por el momento, cabe señalar que si la recuperación clásica es posible y satisfactoria, y la (alguna) lógica paraconsistente cuenta con todo el poder de la lógica clásica excepto cuando esta se vuelve completamente inservible, habrían razones metodológicas para decir que MLMP supera a MLME. Pues el que una teoría o postura subsuma a una teoría o postura rival, es decir, que tenga mayor poder explicativo o dominio de aplicación sin sacrificar lo que la otra aporta, esto la vuelve metodológicamente preferible a su rival.

¿Qué ocurre con (P2)? Como he mencionado anteriormente, (P1) y (P2) son propuestas hasta cierto punto inter-dependientes. Los puntos anteriores, que apoyan el atractivo inicial de (P1), tienden a aumentar indirectamente la plausibilidad de (P2). En particular, la idea de que las motivaciones que están detrás de la paraconsistencia no son necesariamente revisionistas sugiere que aceptar (P2) es realmente aceptar que podemos y debemos ampliar la clase de situaciones desde las cuáles es posible razonar matemáticamente. Esto permea a (P2) de un carácter puramente constructivo, que contrasta con el de otras propuestas similares. Retomemos la comparación de Priest entre intuicionismo y el programa paraconsistente para aclarar este punto.

La filosofía intuicionista defiende que los principios clásicos (como el tercio excluso) fallan a la hora de razonar sobre totalidades infinitas. Puede buscar técnicas de recuperación para rescatar estos principios en otros dominios (finitos, decidibles), pero sigue revisando partes importantes y exitosas del razonamiento matemático. Por esto, la contraparte intuicionista de (P1) sería más difícil de sostener. Ello no invalidaría automáticamente la contraparte intuicionista de (P2), que es la única que se ha propuesto seriamente. Que de hecho se razone de cierta manera no implica que deba razonarse así. Pero los logros matemáticos que han surgido a pesar del empleo de un razonamiento que viola las restricciones intuicionistas juegan un rol importante en la evaluación de sus propuestas normativas. En cambio, el lógico paraconsistente defiende que los principios clásicos fallan al razonar en contextos de inconsistencia, situaciones para las que la lógica clásica no está diseñada. La diferencia es que revisar estas situaciones no involucra truncar ninguna parte importante del razonamiento clásico. Después de todo, nadie desearía dedicar tiempo de investigación matemática a averiguar cuántas conjeturas se siguen trivialmente de una teoría inconsistente. Las técnicas paraconsistentes de recuperación buscan recapturar la inferencia clásica exactamente en las situaciones que son clásicamente interesantes: lo que concierne a teorías o conjuntos de premisas que el lógico clásico no tiraría a la basura. Lo demás podría verse, en el peor de los casos, como reciclaje o control de daños y, en el mejor, como la exploración de un universo transconsistente.

Por supuesto, esta defensa inicial depende de la respuesta que se dé a ciertas preguntas básicas: ¿Qué tan efectivas/intuitivas/satisfactorias son las técnicas de recuperación?, ¿Qué tan bien trata la lógica paraconsistente (cierta lógica particular dada) teorías inconsistentes?, ¿Qué tan interesantes/útiles/intuitivas son las teorías resultantes? Está claro que lograr recuperar la lógica clásica en dominios consistentes y no trivializar toda teoría inconsistente no es suficiente (aunque sí necesario) para sostener (P2). Consideremos casos extremos para ilustrar. Supongamos que nuestra "técnica de recuperación" es una regla que dice: use lógica clásica a partir de premisas consistentes, y use LP (digamos) a partir de premisas inconsistentes. Es obvio que las tácticas de recuperación deben sostenerse en recursos semánticos/sintácticos que reflejen nociones intuitivas de una teoría general del razonamiento. Además, que una relación de consecuencia no sea explosiva no garantiza que teorías interesantes como TCN y CT no se trivialicen (como veremos más adelante). Por otro lado, supongamos que tenemos una lógica que es paraconsistente porque no permite ninguna inferencia a partir de una contradicción. Es tan malo inferir todo a partir de una teoría como no inferir nada. Bajo esta lógica, (P2) sería una propuesta vacua. Las teorías resultantes tienen despertar cierto interés, y eso requiere cierta fuerza en los principios de inferencia, aunque esta fuerza debe estar en equilibrio con el requisito de no trivialización.

1.3.4) ¿Y si dejamos la basura en el basurero?

Las respuestas rigurosas a las cuestiones anteriores tendrán que esperar a que presentemos distintas lógicas paraconsistentes, analicemos sus técnicas de recuperación, y discutamos algunos resultados de sus aplicaciones en la reconstrucción de teorías matemáticas. Pero incluso si se pudiera dar una respuesta satisfactoria a las preguntas anteriores y, por tanto, si se pudiera caracterizar (P2) como una propuesta que no involucra ningún elemento revisionista, hay consideraciones que podrían cuestionar la importancia o incluso la posibilidad de esta idea (supuestamente) constructiva de expandir la clase de situaciones desde las que es posible razonar. Considérese el siguiente argumento:

Premisa 1: La única motivación para aceptar que se *debe* usar una lógica paraconsistente es que así se podría razonar no trivialmente desde contextos de inconsistencia/rescatar teorías inconsistentes.

Premisa 2: Una teoría inconsistente contiene/implica (al menos) una oración y su negación. Y una oración y su negación no pueden ser verdaderas simultáneamente.

Premisa 3: La lógica (en este contexto) es una teoría normativa acerca del razonamiento *correcto*: su rol es asegurar la preservación de verdad de premisas a conclusión.

Conclusión: Por lo tanto, la motivación (normativa) para usar una lógica paraconsistente es incompatible con la razón principal para usar una lógica, y (P2) es inmediatamente descartable.

La tercera premisa es la que tiene más supuestos implícitos, y es la que cuestionarían los lógicos paraconsistentes menos radicales. Uno de los argumentos principales a favor del principio de explosión consiste en decir que dicho principio es simplemente la manera en que la lógica clásica nos dice que consigamos un nuevo conjunto de premisas: si tus premisas son insatisfacbles/inconsistentes, no pueden ser verdaderas simultáneamente; y si sabes que el punto de partida de todo tu conocimiento ya contiene un error, deberías eliminar el error, en lugar de tratar de sacar más consecuencias desde tus premisas falsas. Esta visión impone restricciones realistas a la función (normativa) de la lógica. Por ejemplo, una visión puramente instrumental no reconocería que la noción de verdad es esencial para los propósitos de la ciencia (o, en particular, las matemáticas). No parece haber una razón apriorística de que una teoría tenga que ser verdadera para ser útil (de acuerdo a criterios instrumentalistas habituales como predicción, manipulación, etc.). Después de todo, la historia de la ciencia muestra varios casos de teorías falsas que tuvieron amplias aplicaciones. Tampoco hay una razón apriorística que anule la posible aplicación virtuosa de una teoría inconsistente. Así, el Cálculo de los siglos XVII y XVIII tuvo una aplicación fundamental en la mecánica, la teoría electromagnética, la teoría gravitacional y la teoría de la conducción del calor, entre otras cosas (Colyvan, 2008). Aunque, como hemos mencionado, la inconsistencia fue superada posteriormente, no hay garantía de que una situación problemática similar no vuelva a surgir.

Además, no siempre es fácil eliminar la inconsistencia de nuestras premisas. Para eliminar la inconsistencia, primero hay que encontrarla. Pero la consistencia de un conjunto de premisas no es decidible: no hay un procedimiento algorítmico que muestre si un conjunto arbitrario de premisas formuladas en un lenguaje de primer orden es consistente (Brown, 2004). Una visión instrumentalista podría ver a la lógica como una herramienta sistemática que dicta las reglas que hay que seguir para preservar propiedades virtuosas (fuera de la inconsistencia o la verdad) de un conjunto de premisas y llegar a ciertos resultados deseables.[14] Esta es una de las maneras de rechazar la premisa (3) del argumento anterior. [15]

Por otro lado, hay quienes rechazan la segunda premisa, ya que, incluso si aceptan que la inferencia propiamente lógica es la que preserva verdad, sostienen que algunas contradicciones son verdaderas. Así, para Graham Priest, las contradicciones no solo representan problemas con los que la falibilidad humana se enfrenta de vez en cuando, sino que algunas contradicciones son inevitables, en el sentido de que son "inherentes al pensamiento" (Priest, 1987). En particular, defiende que las paradojas de la auto-referencia, como la conocida paradoja del mentiroso[16] y la paradoja de Russell, son argumentos *correctos* que acaban en contradicción (Priest, 2004):

> There are also reasons for supposing that the failure to solve the paradoxes is not simply a matter of lack of skill on the part of logicians. The paradoxes seem enormously robust. When steps are put forward to solve them, the contradicions concerned just seem to move elsewhere (in the shape of so called "strengthened paradoxes"). It seems that contradiction is inherent in the various set-ups, and that all we can do is juggle it around. It is like those old-fashioned children's puzles where one moves around pieces inside a frame, to try to achieve some predetermined pattern. Given a space in the frame, any adjacent piece may be moved into it. In this way, one can fill any given space; but filling it always creates another. There is always a space somewhere. The appearance of the inevitability of contradictions is, I think, correct. The contradictions involved in the paradoxes of self-reference are, in a sense, inherent in thought.

---

[14] Una preocupación que podría tener esta visión instrumentalista respecto al uso de una lógica paraconsistente es que sea demasiado débil. De nuevo, esta preocupación ya depende del análisis concreto de la aplicación a distintas teorías y de las técnicas de recuperación. La preocupación instrumentalista con respecto a las técnicas de recuperación tal vez no tendría que ver con tener una teoría general del razonamiento, aunque el instrumentalista puede reconocer las virtudes metodológicas de obtener una teoría lógica con mayor poder de unificación.

[15] Aunque no es la única manera de decir que la inferencia correcta no es solo la que preserva verdad. Por ejemplo, hay quienes sostienen que la inferencia correcta no solo consiste en preservar verdad, sino información (Restall, 2006). La preservación de información parece implicar la preservación de verdad, pero no viceversa. Así, la información de que el conjunto de Russell pertenece a sí mismo y no pertenece a sí mismo (aunque pueda ser información falsa), no contiene ningún tipo de información sobre si hay vida extraterrestre o no.

[16] Ya hemos dado una versión informal de la paradoja de Russell. La paradoja del mentiroso es la paradoja milenaria que surge con la aseveración "esta es una mentira". En términos formales, es una oración L de la forma $\neg T[L]$, donde T es el predicado de verdad y los "brackets" representan cierto dispositivo matemático de formación de nombres para las fórmulas. El esquema $T[B] \leftrightarrow B$ (para cualquier oración L) es un principio intuitivamente correcto acerca de la verdad. Sustituyendo L en este esquema tenemos que $T[L] \leftrightarrow \neg T[L]$, y la contradicción se obtiene mediante simples pasos lógicos. Veremos que la capacidad LP para lidiar con el esquema T (que conlleva la pretensión de obtener clausura semántica) es una consideración importante para evaluar (P2) en su forma más fuerte.

1.4) Paraconsistencia débil y paraconsistencia fuerte.

La diferencia entre estas maneras de descartar el argumento anterior, la diferencia entre rechazar la tercera premisa y rechazar la segunda, corresponde (burdamente) con una distinción entre *paraconsistencia débil* y *paraconsistencia fuerte* (Bremer, 2005). De acuerdo con el enfoque de la paraconsistencia débil, pueden haber distintas razones pragmáticas por las que necesitemos rescatar una teoría inconsistente a través de una lógica no explosiva, pero la paraconsistencia débil sigue viendo a las inconsistencias como algo perjudicial, que debería ser *evitado* en el mejor de los casos. La motivación principal simplemente se basa en el hecho de que se han aceptado teorías inconsistentes que no han sido consideradas triviales. La paraconsistencia débil trata de modelar estos casos, pero no sostiene que la lógica de una ciencia *madura* tenga que ser paraconsistente.

El enfoque de la paraconsistencia fuerte rechaza la idea de que las contradicciones son simplemente cosas que ocurren de vez en cuando debido a deficiencias cognitivas humanas. De acuerdo con la paraconsistencia fuerte, algunas contradicciones son completamente inevitables. Algunas contradicciones pueden ser incluso *demostradas* (mediante principios analíticos y razonamientos válidos). Dichas contradicciones, al ser demostrables, deben ser consideradas verdaderas. Por supuesto, esta postura se opone a una larga tradición filosófica y replantea concepciones tradicionales del conocimiento y la racionalidad, por lo que es mucho más controvertida y difícil de defender que la anterior. Su justificación necesita mucho mayor escrutinio filosófico del que requiere la paraconsistencia débil. Para empezar, tiene que explicar cómo es *conceptualmente posible* que hayan contradicciones verdaderas, y luego tiene que explicar cómo *de hecho* las hay (es decir, una vez admitiendo que la idea general de que hay “dialeteias” tiene sentido, hay que dar razones particulares para aceptar cada una).

El programa de la paraconsistencia fuerte busca establecer una *lógica,* entendida como una teoría general del lenguaje y la racionalidad, que sea capaz de modelar tanto el lenguaje ordinario (o fragmentos del lenguaje ordinario) como la noción general pre-teórica de argumento correcto o de inferencia deductiva racional. Esto involucra propuestas extremadamente ambiciosas que se conectan con la epistemología y la filosofía del lenguaje. El objetivo principal es alcanzar la *universalidad* expresiva y cognitiva. La universalidad involucra modelar la semántica del lenguaje en general, y no solamente un sub-lenguaje específico o una estructura formal particular. A su vez, esta teoría se expresa mediante (un fragmento de) el lenguaje, así que debe ser capaz de modelar las propiedades interesantes de su propio meta-lenguaje. En particular, busca establecer un lenguaje *semánticamente cerrado* (que sea capaz de hablar de su propia semántica).

La pretensión de universalidad también involucra un uso irrestricto de conceptos como “conjunto”. Esto incluye el proyecto de rescatar la teoría “naïve”, en particular, la adopción del esquema de abstracción como la pretendida expresión formal de la idea de que a toda propiedad o condición determina un conjunto. Esto conlleva, entre otras cosas, la idea de que hay un conjunto universal que corresponde al predicado "conjunto". La situación aquí es algo distinta de la propuesta semántica. Primero, como hemos visto que señala Colyvan, existió una práctica matemática bien definida (aunque no duradera) en torno a esta teoría. Segundo, las formalizaciones tempranas de TCN (en particular la de Frege) no fueron deformadas por un intento consciente de evitar paradojas (Priest, 1988). Muchos partidarios de la paraconsistencia fuerte (PC) sostienen que la formalización de Frege captura la noción "ingenua" de conjunto. Quizá anacronísticamente, algunos pretenden encapsular la teoría formal de Frege por los siguientes principios de primer orden:

Abstracción (Abs): $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \beta)$

Extensionalidad (Ext): $\forall x\ (x \in z \leftrightarrow x \in y) \rightarrow z = y$

donde β es cualquier fórmula que no contenga libre a y. La formalizaciónd e Frege era de segundo orden y la noción de pertenencia (expresada por $\in$) estaba bien definida en un lenguaje totalmente interpretado (Shapiro, 2004). Pero como dice Priest:

However, (Abs) and (Ext) certainly held according to Frege, and it is easy enough to interpret Frege's axioms in the above theory, since second order quantification is equivalent to quantification over arbitrary sets. Hence we may, without injustice, take the above formalisation of the notion of set to be Frege's. The central feature of this account for present purposes is that every condition is taken to define a set. Hence, according to the naive theory, a set just is the extension of an arbitrary condition, and that's that.

Como es bien sabido, esta caracterización de TCN es inconsistente. La contradicción más fácil de obtener es la de Russell, que hemos explicado informalmente y que formalmente (abreviando cosas básicas) se derivaría así:

(1) $\exists y\ \forall x\ (x \in y \leftrightarrow x \notin x)$ Aplicación insanciada de (Abs)

(2) $\exists y\ (y \in y \leftrightarrow y \notin y)$ Instanciación universal de (1)

(3) $\exists y\ (y \in y \wedge y \notin y)$ Esto se puede obtener de (2) mediante Reducción al absurdo.

La contradicción es fatal para el lógico clásico, porque clásicamente una teoría inconsistente es extensionalmente equivalente a una teoría trivial. A la luz de la inconsistencia, uno puede rechazar (Abs) o tratar de limitar su poder. La paraconsistencia fuerte propone cambiar la lógica subyacente: en una lógica no explosiva la contradicción no sería fatal. Es decir, podríamos aceptar que hay un conjunto que se contiene a sí mismo y no se contiene a sí mismo sin por ello aceptar cualquier cosa.

La paraconsistencia fuerte, al plantearse como una teoría lógica total de la racionalidad, también busca dar cuenta de su propia meta-teoría, usando recursos lingüísticos (clausura semántica) y matemáticos (basados en TCN) para definir la relación de consecuencia lógica que se considera correcta. Una vez establecida esta lógica, el razonamiento meta-teórico pretende conformarse a la noción de validez definida en ella.[17]

En principio, la paraconsistencia débil y la fuerte pueden coincidir en la adecuación de las lógicas paraconsistentes que están bajo investigación, ya que ambas posturas tratan de evitar la explosión (aunque tendrán distintas interpretaciones de lo que estas lógicas pretenden modelar). Sin embargo, sus distintos propósitos pueden verse reflejados en la elección de una lógica. Así, alguien motivado por el programa de la inconsistencia débil, guiado por la creencia de que hay que evitar las contradicciones *siempre que sea posible*, puede apartarse de las lógicas y sistemas que las hagan proliferar (particularmente las que las incluyan como verdades lógicas). En cambio, alguien motivado por los ideales de universalidad de la inconsistencia fuerte descartará una lógica que trivialice TCN o que no permita el cierre semántico. Esto no significa que no haya una lógica aceptable bajo ambos criterios.

Regresando a (P1), hay que notar que al enfoque de la paraconsistencia débil es compatible con el monismo lógico (ya sea en su versión normativa o descriptiva). Aunque no busca la universalidad en el sentido de la paraconsistencia fuerte, no hay nada en su postura que sea incompatible con la búsqueda de una teoría general del razonamiento (en particular, con MLMP). Es decir, puede sostener que hay (o debe haber) una sola noción de inferencia deductiva. Aunque no crea en la verdad de las contradicciones (o considere que la inconsistencia es inherentemente defectuosa), puede defender que la corrección de una inferencia involucra aspectos que van más allá de la preservación de verdad. Por tanto, el monismo lógico implícito en (P1) no se opone a este enfoque.

En cuanto a (P2), cabe observar que Colyvan combina propósitos característicos de la paraconsistencia débil con propósitos de la paraconsistencia fuerte para apoyar esta propuesta: recordemos que el primer argumento en favor de (P2) tiene que ver con el riesgo de trivializar teorías (posiblemente inconsistentes) indispensables mientras que el segundo propone la reconstrucción de TCN (entre otras). Claro está que quien defiende la paraconsistencia fuerte puede compartir el motivo pragmático de evitar riesgos, aunque no sea su motivo principal. Por otro lado, ¿por qué le interesaría rescatar una teoría inconsistente a quien defiende la paraconsistencia débil una vez que las inconsistencias han sido superadas y la teoría tiene un reemplazo consistente? Parece que a quien cree que la inconsistencia debe

[17] Hay partidarios de este enfoque que sostienen la idea más fuerte de que no hay diferencia significativa entre teoría y meta-teoría (Priest, 1987), al menos no tal como suele entenderse clásicamente (i.e., no hay necesidad de que la meta-teoría sea más poderosa que la teoría) y esto se basa en la respuesta dialeteista ante algunos meta-teoremas clásicos limitantes de Tarski y Gödel, como veremos más adelante.

evitarse siempre que sea posible no le interesaría, digamos, rescatar TCN si ya cuenta con ZFC. [18]

Sin embargo, hay distintas maneras de entender este "siempre que sea posible" que forma parte de la máxima de la consistencia débil. ¿Significa que una teoría consistente es inmediatamente mejor a su rival inconsistente, sin considerar otras virtudes teóricas como alcance y simplicidad? O tal vez significa que la consistencia es una virtud teórica, que debe ser balanceada con las demás (así, recordemos cómo Colyvan apela a la simplicidad de TCN y CT). En dado caso, la respuesta a la pregunta por el interés de rescatar una teoría inconsistente superada solo puede depender de una evaluación concreta de lo que una lógica paraconsistente particular puede hacer con ella. Hasta ahora no pretendo justificar ninguna concepción particular de la lógica paraconsistente. Lo que muestran estas discusiones es que nuestra reacción inicial ante las propuestas de Colyvan depende, al menos parcialmente, de nuestras nociones pre-concebidas acerca de lo que es la lógica en general, y no solamente del status epistémico o metafísico que le demos a las contradicciones.

Para resumir, en nuestras respuestas a las objeciones contra Colyvan hemos dejado dos preguntas generales abiertas: (a) ¿Es posible dar cuenta de la naturalidad de los principios clásicos en contextos de consistencia? (b) ¿Debemos entender la propuesta de Colyvan desde la paraconsistencia débil o desde la paraconsistencia fuerte? El siguiente capítulo se centra en la primera pregunta y el último capítulo explora parcialmente la segunda. Al final veremos cómo es que ambas cuestiones están relacionadas entre sí.

[18] Aunque, de nuevo, le podría interesar reconstruir TCN desde el punto de vista descriptivo de modelar el razonamiento relacionado con (P1). Así, aunque se adhiera a un reemplazo consistente de esta teoría, puede seguir sosteniendo (con Colyvan) que la aceptación y no trivialización de TCN en la historia de la práctica matemática muestra que la relación de consecuencia clásica no coincide con la noción pre-teórica de argumento correcto. Pero todavía tiene que mostrar que existe una lógica que es capaz de modelar el razonamiento matemático en relación a esta teoría. En ese sentido, le pueden interesar las lógicas que hagan una reconstrucción apropiada de TCN. De hecho algunos autores que defienden la paraconsistencia débil explícitamente (a diferencia de Colyvan, con quien no queda tan claro) también apelan a TCN (entre otras) para argumentar que no toda teoría inconsistente ha sido considerada trivial en la historia de la ciencia. Por ejemplo, véase (Brown, 2004).

Capítulo 2: Estrategias de recuperación

Hasta ahora hemos visto dos criterios mínimos que una lógica paraconsistente debe satisfacer para que sea compatible con los supuestos monistas implícitos en las propuestas de Colyvan: 1) Evitar el principio de explosión. 2) Recuperar el razonamiento "normal" en contextos de consistencia. La primera condición es necesaria si queremos reconstruir una teoría inconsistente, ya sea para rescatarla o para modelar el razonamiento asociado a ella. Por supuesto, esta condición general no es suficiente para garantizar que una teoría particular no sea trivializada, como veremos más adelante. La segunda condición es absolutamente necesaria para sostener (P1) –recordemos que (P1) asume MLMP-, y cumplirla representaría un gran punto a favor de quien quisiera sostener (P2), al hacer que su propuesta no sea revisionista sino meramente constructiva, en el sentido de que solo buscaría ampliar la posibilidad de razonar matemáticamente en distintos dominios.[19] Si la lógica clásica ofrece el mejor modelo de la inferencia correcta en contextos consistentes, cumplir con la segunda condición sería equivalente a lograr que las técnicas de recuperación clásica sean efectivas. Esta sección se centra en las lógicas no explosivas que han sido propuestas como modelos generales del razonamiento: las lógicas que presentaremos son representativas de las estrategias generales que hay para invalidar ECQ (sugieren una explicación sobre *por qué* falla generalmente este principio) y, a su vez, destacan por las maneras en que logran efectuar la recuperación clásica (sugieren una explicación sobre *cuándo* falla ECQ).

Por lo dicho anteriormente, nuestra presentación no será exhaustiva. No analizaremos todas las relaciones de consecuencia que han sido definidas para distintos propósitos en la jungla paraconsistente. Nuestra presentación parte de una taxonomía de Bryson Brown (2002), que se centra en las varias maneras en que las relaciones de consecuencia clásicas pueden ser modificadas para evitar la explosión. Cada estrategia ubica el "detonador" de la explosión en un lugar distinto. Cada una se basa en un diagnóstico particular acerca de las causas meta-teóricas que llevan a la trivialización de inconsistencias en lógica clásica.

2.1) Las fuentes de la trivialización

La concepción clásica de consecuencia lógica deriva de ciertos supuestos acerca lo que las relaciones de consecuencia semántica ($\vDash$) y sintáctica ($\vdash$) deben preservar. A grandes rasgos,

[19] Esta "expansión" se puede hacer con muchas lógicas especializadas, lo que en sí no es muy interesante desde el punto de vista filosófico: nos interesan las lógicas que han sido propuestas como modelos generales de la inferencia correcta. Para los proponentes de estas últimas es que la recuperación del razonamiento en torno a contextos de consistencia ha sido una consideración importante.

$\vDash$ preserva verdad mientras que $\vdash$ preserva consistencia. En términos algo más precisos, $\vDash$ preservaría la satisfactibilidad de todas las extensiones satisfactibles de un conjunto de premisas, mientras que $\vdash$ preservaría la consistencia de todas sus extensiones consistentes (Brown, 2002). Para dar una caracterización exacta, necesitamos algunas definiciones.

Hasta ahora hemos estado usando la palabra "consistencia" en su sentido coloquial. Diremos que el conjunto de oraciones Γ es *básicamente consistente* si y solo si no contiene una oración y su negación. Diremos que Γ es consistente (sin más) si y solo si su clausura bajo deducción es básicamente consistente (es decir, dado un sistema que valida ciertos principios de inferencia, es imposible derivar una oración y la negación de esta oración a partir de Γ). Diremos que Γ es satisfactible si y solo si alguna evaluación (en una semántica dada) asigna un valor designado a cada oración de Γ. Entonces $\vDash$ y $\vdash$ preservarían consistencia y satisfactibilidad en los siguientes sentidos:

Condición semántica general: $\Gamma \vDash \alpha$ sii $\forall\Gamma'$ [($\Gamma' \supset \Gamma$ & Γ' es satisfactible) $\Rightarrow$ $\Gamma' \cup \{\alpha\}$ es satisfactible]

Condición sintáctica general: $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\forall\Gamma'$ [($\Gamma' \supset \Gamma$ & Γ' es consistente) $\Rightarrow$ $\Gamma' \cup \{\alpha\}$ es consistente][20]

La condición semántica dice que si Γ' es una extensión satisfactible de Γ, entonces toda consecuencia de Γ debe extender a Γ' de manera que el conjunto resultante sea satisfactible. La condición sintáctica dice que si Γ' es una extensión consistente de Γ, entonces toda consecuencia de Γ debe extender a Γ' de manera que el conjunto resultante sea consistente. Dadas la corrección y completud de un sistema de derivación, estas condiciones no son más que definiciones alternativas de la misma relación de consecuencia.

Podemos ver informalmente cómo es que estas condiciones validan el principio de explosión en lógica clásica. Si Γ no es clásicamente satisfactible, ninguna extensión de Γ puede ser satisfactible. De igual forma, si Γ es inconsistente, ninguna de sus extensiones será consistente. La idea es que en lógica clásica no podemos transformar un conjunto insatisfactible o inconsistente en un conjunto satisfactible o consistente añadiéndole más oraciones. Por tanto, toda oración "preserva" vacuamente la satisfactibilidad o consistencia de todo conjunto (clásicamente) insatisfactible o inconsistente. Toda lógica paraconsistente debe modificar estas condiciones de alguna manera. La trivialización de todo conjunto inconsistente de fórmulas que surge a partir de estas condiciones se puede atribuir a dos fuentes distinguibles:

Fuente 1: Las caracterizaciones clásicas de satisfactiblidad/consistencia.

[20] Brown (2002).

Fuente 2: El supuesto de que un conjunto insatisfactible/inconsistente carece de la única propiedad que una relación de consecuencia debe preservar.

Estas dos formas de diagnosticar el problema corresponden con dos tipos de estrategia paraconsistente: las estrategias de valores designados y las estrategias preservacionistas.

2.2) Estrategias para evitar la explosión

2.2.1) Estrategias de valores designados

Si se modifican los mecanismos semánticos clásicos, es posible proponer una lógica en la que al menos algunos de los conjuntos de oraciones clásicamente insatisfactibles/inconsistentes se vuelvan satisfactibles. Una nueva versión de estas nociones puede ser la base de una relación de consecuencia lógica que no permita inferir cualquier oración vacuamente a partir de cualquier conjunto (clásicamente) inconsistente.[21] Este enfoque se centra en redefinir las condiciones clásicas de satisfactibilidad, de manera que las condiciones (a) y (b) no sean equivalentes y la condición (a) no se cumpla vacuamente para toda fórmula α y todo conjunto inconsistente Γ. Toda semántica paraconsistente que permita asignar valores designados a todos los miembros de algún conjunto de oraciones clásicamente insatisfactible (y no a cualquier oración) en una evaluación cae bajo este grupo de la taxonomía.[22] Obviamente, esto involucra hacer los ajustes necesarios en las reglas de inferencia de un sistema formal dado para que sea (al menos) correcto con respecto a la

[21] Si se redefinen ambas nociones (satisfactibilidad y consistencia) simultáneamente, surge la cuestión de si la lógica propuesta es *realmente* paraconsistente, ya que la idea de invalidar ECQ no era mostrar que podemos entender la inconsistencia/insatisfactibilidad de forma distinta, sino mostrar que a partir de (lo que todos pensábamos que era) una inconsistencia no se sigue cualquier cosa. Muchas propuestas buscan romper con la equivalencia entre la satisfactibilidad y la consistencia. Priest emplea la noción "normal" de consistencia cuando habla de un conjunto inconsistente de oraciones (como uno que implica una oración y su negación, dado un símbolo que se supone que representa la negación), y cambia la semántica de tal forma que estos conjuntos puedan ser satisfactibles. El dialeteismo solo es enunciable al separar la noción de verdad de la noción de consistencia. El énfasis es semántico, y la tarea "secundaria" es buscar sistemas deductivos correctos y (si es posible) completos. En la escuela de Da Costa (a la que pertenece una familia de lógicas que presentaremos), hay quienes sostienen que hay que hacer separaciones entre distintos tipos de consistencia (unas son más defectuosas que otras), y es posible proponer una semántica que refleje estas distinciones. Estrictamente, es la noción de consistencia lo que se modifica y la semántica sirve para hacer esto. Yo me centro en la semántica al hacer comparaciones entre lógicas, porque es la forma más iluminadora de hacerlo.

[22] Este es, por obvias razones, el enfoque por el que suelen optar quienes sostienen el dialeteismo. Pero no es necesario ser dialeteista para seguir este enfoque. Aunque el valor "verdad" es el ejemplo típico de un valor designado, no todo proponente de una lógica paraconsistente que siga esta estrategia tiene que comprometerse con que su semántica represente una teoría formal de la verdad.

revisión semántica. Muchas lógicas paraconsistentes caen en este grupo. Sin embargo, solo nos centraremos en las que son particularmente interesantes desde el punto de vista de la recuperación clásica.

a) Sistemas-C de negación debilitada

Newton da Costa propuso sus Sistemas-C (que abreviaremos como "S-C") en la década de los sesenta. Una semántica para estas lógicas fue desarrollada años después, por lo que decir que siguen una estrategia de valores designados es anacrónico en términos históricos. Pero estamos siguiendo una taxonomía conceptual, no histórica. Nos centraremos en la semántica de estas lógicas, ya que el análisis semántico es más iluminador con respecto a las técnicas de recuperación y hace que las comparaciones con otras lógicas sean bastante intuitivas.

Una evaluación de da Costa, v, es un mapeo de las fórmulas de un lenguaje al conjunto de valores $\{1, 0\}$, donde 1 es el valor designado, de tal forma que se satisfagan las siguientes condiciones:

Condición da Costa 1: $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 2: $v(\alpha \vee \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 3: Si $v(\alpha) = 0$ entonces $v(\neg\alpha) = 1$

Condición da Costa 4: Si $v(\neg\neg\alpha) = 1$ entonces $v(\alpha) = 1$

Es claro que las condiciones anteriores solo difieren de las clásicas en el tratamiento de la negación. Nótese que las condiciones 3 y 4 están formuladas como condicionales (no bicondicionales): el valor de α es independiente del valor de $\neg\alpha$ en la condición 3, aunque no viceversa. La independencia (asimétrica) entre el valor de una oración y el de su negación rompe con la equivalencia entre consistencia y satisfactibilidad: Sea p cualquier parámetro proposicional. El conjunto $\{p, \neg p\}$ es satisfactible porque una evaluación en la que $v(p) = v(\neg p) = 1$ es permisible. Es fácil ver que si añadiéramos la condición de que $v(\neg\alpha) = 0$ si $v(\alpha) = 1$, obtendríamos una clase de evaluaciones clásicas. En ese sentido decimos que el operador de negación de estas lógicas, "¬", representa una negación débil.

Esta clase de evaluaciones nos da el fragmento no implicativo de Cω, el Sistema-C menos fuerte. Cω pertenece al primer grupo de nuestra taxonomía semántica, porque sus condiciones de validez están formuladas en términos de preservación de valores designados: $\Gamma \vDash_{c\omega} \alpha$ si y solo si cada evaluación que asigne 1 a todos los miembros de Γ también asigna 1 a α. La relación de consecuencia obviamente no es explosiva, dado que hay conjuntos inconsistentes satisfactibles.

Obtenemos un sistema más fuerte, C1, de acuerdo con la siguiente idea: el lenguaje-objeto debería ser capaz de expresar el supuesto de que una fórmula se comporta de manera consistente. Esto es, el mismo lenguaje debería marcar una diferencia entre fórmulas que expresan oraciones supuestamente no problemáticas (v.g., "todo número natural tiene un sucesor") y fórmulas que expresan oraciones que caen en contradicción (v.g., "el conjunto de Russell se pertenece a sí mismo"). Intuitivamente, la fórmula que dice que α se comporta consistentemente debería ser la fórmula que dice que no es el caso que se dan α y $\neg\alpha$ simultáneamente: $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Abreviemos $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ como α^0. Sin embargo, α^0 no expresa estrictamente la consistencia de α en Cω, ya que $\alpha^0 \wedge \alpha \wedge \neg\alpha$ puede resultar verdadero en una interpretación. Esto ocurre cuando $v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1$, como se puede constatar fácilmente. En particular, el problema es que no hay nada que evite que α^0, es decir $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, se satisfaga cuando α y $\neg\alpha$ tienen el mismo valor designado. Esta posibilidad se anula mediante la siguiente restricción:

Condición da Costa 5: Si $v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ entonces $v(\alpha^0) = 0$.

Con esta restricción, si fuera el caso que en una evaluación arbitraria $v(\alpha^0 \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) = 1$, por las condiciones de la conjunción tendríamos que $v(\alpha^0)= 1$ y $v(\alpha) = 1$ y $v(\neg\alpha) = 1$. Pero, dado que $v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ en esta evaluación, tendríamos que $v(\alpha^0) = 0$ por la condición 5, lo que es absurdo. Por tanto, $v(\alpha^0 \wedge \alpha \wedge \neg\alpha) = 0$. Es decir, α^0 no es compatible con que se den α y su negación, lo que sugiere que en C1 α^0 puede interpretarse como un *postulado* que expresa la consistencia de α. Ahora bien, para garantizar que la expresabilidad de la consistencia se preserve bajo toda construcción sintáctica, se impone la siguiente restricción:

Condición da Costa 6: Si $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ entonces $v((\neg\alpha)^0) = v((\alpha \wedge \beta)^0)$.

La clase de evaluaciones para C1 se obtiene añadiendo las restricciones 5 y 6 a las anteriores. La validez también se define en términos de preservación del valor designado. Hemos sugerido que α^0 es un postulado que expresa la consistencia de α. ¿Qué pasaría si el mismo postulado de consistencia se comportara de manera inconsistente? Esta idea está detrás del sistema (más débil) C2, que se obtiene al igual que C1, excepto que en las condiciones toda ocurrencia de α^0 se sustituye por $\alpha^0 \wedge \alpha^{00}$. Para obtener C3 se sustituye α^0 por $\alpha^0 \wedge \alpha^{00} \wedge \alpha^{000}$, y así sucesivamente. Tal vez ya es posible ver en general cómo la expresabilidad de la consistencia de una fórmula puede servir como una herramienta para dar cuenta del razonamiento clásico en cierto sistema. Nos concentraremos en las técnicas de recuperación de C1, pero las detallaremos más adelante porque es más iluminador compararlas con las de otras lógicas.

b) LP: semántica funcional

LP parece ser la lógica favorecida por Colyvan y otros miembros de la escuela australiana. Existen semánticas relacionales para LP (esto se encuentra en el apéndice). Pero es técnicamente más fácil contrastar sus propiedades meta-lógicas con las otras lógicas presentadas (particularmente, al discutir sus respectivas técnicas de recuperación) si concebimos una evaluación como una función que mapea a cada fórmula al conjunto de valores de verdad con los que está relacionada. Podemos formular la semántica relacional en términos funcionales tomando una evaluación como una función que va de las fórmulas al conjunto potencia de $\{1,0\}$. Sea $\pi = \{\{1\} \ \{0\} \ \{1,0\}\}$. Sea v' una evaluación para los parámetros proposicionales del lenguaje (v' asigna a cada parámetro proposicional, p, un miembro de π). Podemos extender esto a una evaluación para las fórmulas complejas mediante las siguientes condiciones:

Condición LP 1: $1 \in v(\neg\alpha)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$

Condición LP 2: $0 \in v(\neg\alpha)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$

Condición LP 3: $1 \in v(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$ y $1 \in v(\beta)$

Condición LP 4: $0 \in v(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$ o $0 \in v(\beta)$

Condición LP 5: $1 \in v(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$ o $1 \in v(\beta$

Condición LP 6: $0 \in v(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$ y $0 \in v(\beta)$

De nuevo, la relación de consecuencia se define en términos de preservación de valores designados:

$\Gamma \vDash_{LP} \alpha$ si y solo si en toda evaluación v es el caso que si $1 \in v(\beta)$ para toda $\beta \in \Gamma$, entonces $1 \in v(\alpha)$.

Si interpretamos "$1 \in v(\alpha)$" como "α es verdadero en v" y "$0 \in v(\alpha)$" como "α es falso en v", queda claro, por las primeras dos condiciones, que la semántica permite que una oración sea verdadera y falsa al mismo tiempo (cuando $v(\alpha) = \{1,0\}$). No es sorprendente, entonces, que los dialeteistas opten por una lógica de este estilo. Pero en términos técnicos, este posible "aglutinamiento" de los valores de verdad es el mecanismo que le permite evitar la explosión de cualquier conjunto inconsistente de fórmulas, ya que una fórmula y su negación pueden satisfacerse simultáneamente en esta semántica y, por tanto, existirán conjuntos de fórmulas que contengan tales *contradicciones*, y de los cuáles no se siga válidamente cualquier cosa por vacuidad. Pero este mecanismo también contrasta con la asignación exclusiva de valores de los Sistemas-C, que en lugar de ofrecer condiciones semánticas para construir dialeteias, establecen una (in)dependencia asimétrica entre el valor de una oración y el de su negación. Veremos que esta diferencia es importante en el contexto de sus respectivos métodos de recuperación.

2.2.2) Preservacionismo

Las estrategias preservacionistas ubican la fuente de la trivialización en el hecho de que la relación de consecuencia esté diseñada para preservar meramente la consistencia y la satisfactibilidad (Brown, 2002). Si optáramos por preservar propiedades distintas o más generales, el que un conjunto de oraciones careciera de consistencia/satisfactibilidad no necesariamente llevaría a la anulación de toda restricción inferencial en nuestra relación de consecuencia. ¿Qué otras propiedades querríamos preservar, además de la consistencia y la satisfactibilidad?

En la idea original de la escuela preservacionista, se propone preservar una propiedad llamada *nivel*, que es una generalización de la noción de consistencia. Intuitivamente, el nivel de un conjunto de fórmulas Γ es el mínimo número n tal que Γ puede ser subdividido en n subconjuntos consistentes. Según esto, se define una relación de consecuencia, $[\vdash$, llamada "forcing", tal que $\Gamma \;[\vdash \alpha$ sii α es una consecuencia (relativa a una lógica de base) de Γ en cada subdivisión de α en n subconjuntos consistentes. Veremos una versión generalizada de su propuesta original a continuación.

a) Definiendo "Forcing".

En la estrategia preservativa que (Payette y Schotch 2009) proponen, se define una relación de inferencia ("forcing"), derivada de una lógica base, que preserva el nivel de inconsistencia de un conjunto de fórmulas.

La relación de consecuencia que vamos a analizar se deriva a partir de cierta lógica de base. Por una lógica de base (ß), sobre un lenguaje (L), se entiende el conjunto de pares (Γ,α) de tal forma que Γ es un conjunto de fórmulas de L y α es una fórmula de L y $\Gamma \vdash_{ß} \alpha$ (donde $\vdash_{ß}$ es la relación de consecuencia de la lógica ß). Cuando ß es una lógica, la clausura deductiva del conjunto de fórmulas Γ bajo $\vdash_{ß}$ se denotará como "$\mathcal{C}x(\Gamma)$". Las únicas restricciones sobre las lógicas base es que sean compactas y su relación de consecuencia quede caracterizada por las siguientes propiedades estructurales:[23]

[R]: $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

[23] Las razones de estas restricciones están en (Payette y Déntremont, 2009).

[C]: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ & $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \beta$

[M]: $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$

Diremos que un conjunto Γ es consistente con respecto a la lógica ß si y solo si su clausura bajo $\vdash_ß$ no contiene todos los enunciados de L. Formalmente, expresamos la consistencia de Γ con respecto a ß así: $C_ß(\Gamma)$. En un lenguaje con negación, esto es extensionalmente equivalente a la definición de consistencia que hemos dado, si ß es una lógica clásica.

Para definir la noción de nivel, necesitamos expresar formalmente que una colección indexada de conjuntos es una partición de Γ en la lógica ß. Diremos que $A(\Delta) = \{a0, a1, . . . , ak\}$ es un conjunto indexado que empieza por Δ siempre que $a0 = \Delta$ y todos los índices 0 . . . k sean tomados de un conjunto indexado *I* (Jennings y Schotch, 2009). Digamos que Ꞙ es un conjunto indexado que empieza por ∅. Entonces Ꞙ es una partición lógica del conjunto Γ, en relación a una lógica ß si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

Condición Schotch-Jennings 1: Para cada miembro *a* de la familia indexada, $C_ß$ (*a*)

Condición Schotch-Jennings 2: $\Gamma \subseteq \bigcup_{i \in I} \not\subset_ß (a_i)$.

Informalmente, llamamos "celdas" a los miembros de una partición. La primera condición garantiza que toda celda de una partición sea consistente. La segunda garantiza que la partición sea capaz de "recuperar" a Γ en el sentido de que el conjunto de las consecuencias lógicas de la unión de todas las celdas contenga (al menos) a todos los miembros de Γ. Para abreviar, se indica que Ꞙ es una partición de Γ en relación a la lógica ß de la forma $PAR_ß$(Ꞙ,Γ). Si I es el conjunto indexado para Ꞙ y Ꞙ es una partición lógica del conjunto de fórmulas Γ, diremos que |I| − 1 es la longitud de Ꞙ, lo que se abrevia como "w(Ꞙ)".

Ya tenemos las herramientas necesarias para definir la noción de nivel de inconsistencia. Diremos que "$N^ß(\Gamma)$" representa el nivel de inconsistencia del conjunto de fórmulas Γ en relación a una lógica ß. El valor de $N^ß(\Gamma)$ se define así:

$N^ß(\Gamma) = \min_{w(F)} [PAR_ß(Ꞙ,\Gamma)]$ si este límite existe

$N^ß(\Gamma) = \infty$ si el límite no existe

Dicho de manera más simple, el nivel de Γ se asigna de acuerdo a la longitud de la(s) partición(es) menos larga(s) de Γ, si es posible encontrar dicha(s) partición(es). Si Γ es consistente, su nivel es 1.[24] Si Γ es inconsistente, vemos el mínimo número de celdas consistentes en las que lo podemos partir, y este número representa el nivel de inconsistencia de Γ. Si no es posible generar esta partición (respetando las condiciones que indican lo que

[24] A menos que Γ sea un conjunto de tautologías de la lógica base. En tal caso, su nivel es 0. Esta diferencia no es muy importante en el contexto de nuestra discusión, por lo que tiendo a omitirla.

cuenta como una partición), se asigna ∞ al nivel de Γ. ¿Cómo podría no existir una partición mínima de Γ? En el caso más simple, esto ocurre siempre que Γ contiene lo que (Jennings y Schotch 2009) llaman una *fórmula absurda*.

Una fórmula absurda, en relación a una lógica de base, es una fórmula que, por sí misma, trivializa cualquier conjunto de fórmulas que la contenga. Por ejemplo, la fórmula $p \wedge \neg p$ es absurda en una lógica clásica. Si Γ contiene a esta fórmula, no es posible satisfacer las dos condiciones que indican lo que cuenta como una partición simultáneamente: Supongamos que se cumple la segunda. Entonces en toda partición hay al menos una celda cuya clausura lógica contiene $p \wedge \neg p$. En una partición arbitraria, llamemos a_1 a la celda tal que $p \wedge \neg p \in \not{C}_ß(a_1)$. Pero entonces no es verdad que $C_ß(a_1)$ en esta partición, por lo que no se cumple la primera condición. Por lo tanto, no existe una partición mínima de Γ si $p \wedge \neg p$ pertenece a este conjunto y diríamos que su nivel de inconsistencia es ∞. Es evidente que este razonamiento aplica con cualquier fórmula absurda (cualquier fórmula que en sí misma lleve a la trivialización de cualquier conjunto que la contenga en una lógica de base).

Finalmente, podemos definir “forcing”, que es una relación de inferencia derivada de la relación de consecuencia que caracteriza a cierta lógica de base. Cuando la lógica base es ß, la relación de consecuencia derivada es $[\vdash_ß$, y se define así: $\Gamma \, [\vdash_ß \alpha$ si y solo si en toda partición de Γ en $N^ß(\Gamma)$ celdas, hay al menos una celda Σ tal que $\Sigma \vdash_ß \alpha$. Siempre que $\vdash_ß$ preserve consistencia, esta definición garantiza que $[\vdash_ß$ va a preservar el nivel de inconsistencia de todo conjunto Γ, en el siguiente sentido: Si $\Gamma \, [\vdash_ß \alpha$ entonces $N^ß(\Gamma) = N^ß(\Gamma \cup \{\alpha\})$.[25] Burdamente, α es una consecuencia “forzada” de Γ siempre que agregar α a Γ no aumente el nivel de inconsistencia inicial.

b) “Forcing” no es explosiva

Podemos ver cómo “forcing” logra evitar en general la explosión: Supongamos que la lógica de base es clásica. Sean $\Gamma = \{p, \neg p\}$ y $\alpha = q \wedge \neg q$. El conjunto Γ es (simplemente) inconsistente. El nivel de inconsistencia de Γ es 2, ya que $[\{\emptyset\}, \{p\}, \{\neg p\}]$ es una partición mínima. En esta misma partición, ninguna de las celdas implica (clásicamente) α, por lo que no es verdad que en toda partición mínima de Γ hay una celda cuya clausura lógica contiene a α. Por definición se sigue que no es el caso que $\Gamma \, [\vdash \alpha$. Esto va de acuerdo a lo esperado. Nuestro ejemplo particular también muestra que inferir cosas arbitrarias a partir de Γ *puede* aumentar el nivel de inconsistencia inicial: $N^ß(\Gamma) = 2$, mientras que $N^ß(\Gamma \cup \{\alpha\}) = \infty$, dado que α es una fórmula absurda. Notemos que en este enfoque no es necesario alterar las condiciones de satisfactibilidad de la lógica de base para evitar el principio de explosión. El enfoque es preservacionista porque propone una relación de inferencia basada en la

---

[25] La prueba de que la definición de “forcing” garantiza la preservación de nivel es larga y está en (Payette y Schotch, 2009).

preservación de una propiedad (nivel de inconsistencia) que algunos conjuntos inconsistentes tienen y que no todas sus extensiones tienen.

2.3) Técnicas de recuperación

Hemos visto la importancia de dar cuenta del éxito de la lógica clásica como un modelo del razonamiento en contextos "normales". La propuesta paraconsistente se vuelve particularmente interesante cuando otorga que razonar de acuerdo con los principios clásicos es legítimo en situaciones de consistencia. Esto evita la aparente incompatibilidad entre el propósito de dar un modelo general del razonamiento (al menos tan general como el que ofrece la lógica clásica) y el deseo de no caer en una forma inaceptable de revisionismo. Por supuesto, esta idea pierde su fuerza si no viene acompañada de una explicación intuitiva del cambio inferencial y, más aún, si esta explicación no se ve reflejada en los mecanismos mediante los que se define la relación de consecuencia de cierta lógica.[26] Las lógicas que hemos visto ofrecen maneras filosóficamente interesantes, aunque muy distintas, de recuperar inferencias clásicas desde una perspectiva paraconsistente.

2.3.1) Recuperación forzada

Tal vez la forma más natural de hablar de un cambio inferencial consiste en romper con la condición de monotonía. El enfoque preservacionista ofrece buenos recursos conceptuales para justificar esta idea, ya que propone la preservación de propiedades distintas o más generales que la verdad. En particular, la preservación del nivel de inconsistencia relativa que caracteriza a la relación inferencial "forcing" ya lleva implícita una técnica de recuperación. Ahora explicaré por qué "[⊢" es tan fuerte como su lógica de base cuando se razona a partir de un conjunto de premisas consistente.

Digamos que X es una lógica que cumple con las condiciones de una lógica de base ([R], [C] y [M]) y Γ un conjunto consistente con respecto a X. Entonces $[\{\emptyset\}, \{\Gamma\}]$ es una partición mínima de Γ.[27] No es necesario partir a Γ en más celdas consistentes si ya lo es y las

---

[26] He omitido, en particular, las llamadas "recuperaciones de fuerza bruta". Una manera trivial de recuperar la lógica clásica en muchas lógicas consiste en emplear una constante absurda, $\perp$, de manera que se satisfaga la condición $\vDash \perp \rightarrow \alpha$ para toda α y el condicional sea desmontable (valide MP). Semánticamente, se asigna a $\perp$ en toda evaluación (o en una evaluación relativa a un mundo posible) un valor no designado o bien el valor de la conjunción (infinita) de todas las fórmulas del lenguaje. Si se agrega a cualquier teoría el esquema axiomático $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \perp$. y, si la conjunción permite juntar conyuntos y el condicional es transitivo, se pueden obtener los resultados clásicos. Esta estrategia genera sus propios problemas técnicos (Priest, 2002), que no analizaré aquí, ya que de todas formas no ofrece una explicación intuitiva o filosóficamente interesante del cambio de inferencia en contextos de consistencia/inconsistencia.

[27] A menos que Γ sea un conjunto de tautologías. En tal caso la partición mínima sería $\{\emptyset\}$. En ese caso, la explicación análoga es obvia.

consecuencias de Γ incluyen a Γ. Por tanto, $N^X(T) = \min_{w(F)} [PAR_X(\nvdash, \Gamma)] = 1$. Ahora bien, si $N^x(T) = 1$, toda partición mínima de Γ incluye al conjunto vacío y a el contenido de una celda Σ tal que $\Gamma \subseteq \not{C}x(\Sigma)$. Esto quiere decir que en cada partición mínima de Γ hay una celda Σ tal que si $\Gamma \vdash_x \alpha$ entonces $\Sigma \vdash_x \alpha$. Pero, según la definición de "forcing", si hay por lo menos una celda Σ en cada partición mínima de Γ tal que $\Sigma \vdash_x \alpha$, tenemos que $\Gamma [\vdash_x \alpha$. Por lo tanto, si Γ es consistente, siempre que $\Gamma \vdash_x \alpha$ tenemos que $\Gamma [\vdash_x \alpha$.

En particular, si derivamos $[\vdash$a partir de la relación de consecuencia de una lógica clásica, $[\vdash$ coincide con esa relación de consecuencia en conjuntos de premisas (clásicamente) consistentes. Sin embargo, discreparía con esta lógica en algunas de las inferencias que aumentaran el nivel de inconsistencia de un conjunto. Es fácil ver, con un ejemplo que hemos dado anteriormente, por qué la lógica clásica no preserva dicho nivel. Consideremos de nuevo el conjunto $\{p, \neg p\}$. El nivel de este conjunto es 2, ya que $[\{\emptyset\}, \{p\}, \{\neg p\}]$ es una partición mínima. Debido a ECQ, la clausura de dicho conjunto bajo una relación de consecuencia explosiva contendría todas las fórmulas clásicamente absurdas. Sin embargo, hemos visto que no existe una partición para un conjunto que contenga a estas fórmulas, por lo que el nivel de inconsistencia pasaría de 2 a ∞. Es decir, el principio de explosión añade a un conjunto inconsistente fórmulas que generan un conjunto máximamente inconsistente. La distinción fina entre distintos niveles de inconsistencia ofrece una versión muy razonable de por qué la inferencia clásica parece fallar en ciertos contextos. A la vez, permite explicar el éxito de la lógica como un modelo del razonamiento en situaciones de consistencia

Podemos decir que "forcing" subsume al modelo inferencial clásico en el siguiente sentido: hemos visto supuestos que establecen una equivalencia entre la preservación de verdad y la preservación de (mera) consistencia. Si la (mera) consistencia es equivalente a (in)consistencia de nivel 1 (o nivel 0), la preservación de verdad no es más que un caso singular de preservación del nivel de inconsistencia.

2.3.2) Semi-negación y negación fuerte.

Sin embargo, no todas las técnicas de recuperación rompen con la condición de monotonía. Las estrategias de valores designados que hemos visto ofrecen técnicas muy distintas de dar cuenta del razonamiento clásico en contextos de consistencia. C1 logra esto formalmente a través de la idea de que es posible expresar el comportamiento consistente de las fórmulas de un lenguaje mediante *postulados* de consistencia. Ilustraremos con la parte no implicativa (a nivel proposicional) de C1. La siguiente manera de explicar la técnica de recuperación es más larga que las habituales, pero servirá para establecer un punto conceptual importante en las secciones posteriores.

Reitero las condiciones semánticas de este sistema para la comodidad del lector.

Condición da Costa 1: $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 2: $v(\alpha \vee \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 3: Si $v(\alpha) = 0$ entonces $v(\neg\alpha) = 1$

Condición da Costa 4: Si $v(\neg\neg\alpha) = 1$ entonces $v(\alpha) = 1$

Condición da Costa 5: Si $v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ entonces $v(\alpha^0) = 0$.

Condición da Costa 6: Si $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ entonces $v((\neg\alpha)^0) = v((\alpha \wedge \beta)^0)$

Es importante observar que si la condición 3 es un "si y solo si" en lugar de un condicional, es decir, si añadimos la condición

Condición da Costa 3': Si $v(\neg\alpha) =1$ entonces $v(\alpha) = 0$

obtenemos evaluaciones equivalentes a las clásicas (y las condiciones 4, 5 y 6 son redundantes) en este fragmento del lenguaje.

Hemos explicado que, para una fórmula α, α^0 expresaría la consistencia de α en C1. En otras palabras, que α^0 no es compatible con α y $\neg\alpha$: la fórmula $\alpha^0 \wedge \alpha \wedge \neg\alpha$ siempre recibe el valor (no designado) 0. Una consecuencia de esto es que podemos usar α^0 para reconstruir la negación Booleana. Llamemos NEGα a la fórmula de la forma $\alpha^0\wedge\neg\alpha$. Mostraremos que las condiciones de verdad de NEGα en una evaluación de C1 son equivalentes a las clásicas. Es decir, demostraremos que se cumple lo siguiente:

Resultado da Costa 1: $v(\alpha) = 0$ si y solo si $v(\text{NEG}\alpha) = 1$

Paso 1: Mostraremos que si $v(\alpha) = 0$, entonces $v(\text{NEG}\alpha) = 1$.

Supongamos que en una evaluación $v(\alpha) = 0$. Por la *condición 3*, $v(\neg\alpha) = 1$. Por la *condición 1*, $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$ y por la *condición 3*, $v(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = v(\alpha^0) = 1$. Entonces, por la *condición 1*, $v(\alpha^0 \wedge \neg\alpha) = v(\text{NEG}\alpha) = 1$.

Paso 2: Mostraremos que si $v(\text{NEG}\alpha) = 1$, entonces $v(\alpha) = 0$.

Supongamos que v(NEGα) = 1. Por la *condición 1* (y por definición de “NEG”), v($\neg\alpha$) = 1 y v(α^0) = 1. Si v(α) = 1, tendríamos que v(α) = v($\neg\alpha$), lo que por la *condición 5* implicaría que v(α^0) = 0. Por lo tanto, v(α) = 0.

De los pasos 1 y 2 se sigue inmediatamente el Resultado A. Dado que las condiciones semánticas para las conectivas “$\wedge$” y “$\vee$” también son clásicas y la validez se define en términos de valores designados, no es difícil inferir que “NEG” se comporta tal como lo hace la negación Booleana con respecto a “$\wedge$” y “$\vee$” en este fragmento no implicativo de C1.

Ahora veamos la técnica de recuperación. Informalmente, la idea es que para negar clásicamente una oración, la negación débil debe venir acompañada de un supuesto que expresa que dicha oración se comporta de manera consistente. “NEG” expresaría esta negación fuerte en C1. La técnica de recuperación está a la mano: si queremos recuperar un pedazo de razonamiento clásico, lo suplementamos con postulados que expresan que las fórmulas empleadas en tal razonamiento no llevan a inconsistencias.

Resultado da Costa 2: *Sea Σ un conjunto arbitrario de premisas de nuestro fragmento no implicativo de C1. Sea v una evaluación de C1 tal que v(α^0) = 1 para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$. Entonces v es una evaluación clásica para Σ.* No es difícil ver que v satisface la *condición 3'*: Supongamos que v($\neg\beta$) = 1 para una β arbitraria tal que $\beta \in \Gamma$. Entonces v(β^0) = 1 y por las condiciones de “$\wedge$” tenemos que v(NEGβ) = 1. Por el Resultado A tenemos que v(β) = 0. De acuerdo con lo que hemos observado anteriormente acerca de añadir la *condición 3'*, sabemos que v es una evaluación clásica para Σ.

Recuperación clásica en C1: Digamos que queremos dar cuenta de un fragmento de razonamiento clásicamente válido que concierne a un conjunto de fórmulas compuestas por los parámetros p1…pn. Si suponemos $p1^0 \ldots pn^0$ estos postulados de consistencia transmiten el valor designado a los postulados para fórmulas complejas: en toda evaluación v' de C1 en la que dichos supuestos reciben el valor designado, tenemos que v'(α^0) = 1 para cada fórmula α del conjunto inicial (debido a la *condición da Costa 6).*

Supongamos que no es el caso que $\Gamma \vDash \beta$ en C1 y sí es el caso que $\Gamma \vDash \beta$ en lógica clásica (LC) para algún conjunto de premisas Γ y una fórmula β. Si extendemos Γ con los postulados de consistencia para todos los parámetros que componen a las fórmulas involucradas en esta inferencia (llamemos Γ' a esta extensión) tenemos $\Gamma' \vDash_{C1} \beta$. Pues supongamos para R.A. que no es el caso. Entonces hay una evaluación v'' de C1 tal que v''(α) = 1 para todo $\alpha \in \Gamma'$ y tal que v''(β) = 0. Como los postulados de consistencia para los parámetros transmiten el valor designado al resto de las fórmulas, del *Resultado da Costa 2* se sigue que esta es una evaluación clásica.[28] Como $\Gamma \subseteq \Gamma'$, este sería también un contraejemplo clásico de $\Gamma \vDash \beta$. Pero esto es incompatible con nuestro supuesto inicial. Entonces si $\Gamma \vDash_{LC} \beta$ tenemos que $\Gamma' \vDash_{C1} \beta$. En otras palabras, podemos recuperar las consecuencias clásicas de Γ si añadimos los postulados apropiados de consistencia.

2.3.3) Técnicas de fuerza bruta

Hemos visto que LP, al igual que los Sistemas-C, sigue una estrategia de valores designados para evitar la explosión. Sin embargo, sus condiciones semánticas (debido a la posibilidad de fórmulas dialeteicas) dificultan la tarea de traducir la recuperación del razonamiento clásico al lenguaje-objeto. Las técnicas de recuperación que puede ofrecer LP se basan en máximas metodológicas y pragmáticas que dependen del contexto filosófico en el que se formula el dialeteismo. Priest reconoce la importancia de reparar el daño colateral implicado en el rechazo de ECQ:

> As one would expect, dialetheism deviates in crucial respects from classical logical theory. But considering how radical dialetheism is, perhaps the surprising thing is how little its logical theory differs from the classical theory. Essentially, it just generalises classical theory to allow it to handle a domain that was, before, beyond the pale (and therefore could not be admitted to exist in any non-trivial way) –the inconsistent. By increasing the scope of logical theory, it increases its power. However, it is clear that this gain is accompanied by a loss –at least in one sense. Specifically, certain rules of inference which were taken to be truth-preserving classically are not so dialetheically. Perhaps no one except the most hardened classicist would mourn the loss of paradoxes of implication such as ex contradictione quodlibet; but the loss goes beyond these. For classical principles of inference that do appear to be used quite commonly are dialetheically invalid.

Hay un principio de inferencia muy básico que rechaza LP: el Silogismo Disyuntivo (SD). Esto es equivalente al rechazo de Modus Ponens siempre que en el fragmento extensional de LP se defina $\alpha \supset \beta$ como $\neg\alpha \vee \beta$. El problema que describe Priest se puede generalizar con la noción de inferencia semi-válida (“quasi-valid”). Una inferencia es semi-válida si y solo si involucra conectivas extensionales ($\wedge$, $\vee$, $\neg$) y es clásicamente válido e inválido en LP. Entonces el problema se puede generalizar así: si uno adopta LP como la lógica adecuada (como un modelo general del razonamiento) las inferencias semi-válidas ya no pueden ser consideradas universalmente válidas. Pero, al igual que en otros enfoques paraconsistentes, el problema no es tan grave si se encuentra la manera de dar cuenta de estas inferencias en los contextos adecuados. Las técnicas de recuperación que ofrece Priest se basan en la idea

[28] La única forma en que v’’ no podría ser una evaluación clásica es si β no comparte un parámetro proposicional con algún miembro de Γ' (si lo comparte, la conclusión se sigue inmediatamente por el Resultado B, ya que por la condición 6 tendríamos $v''(\alpha 0) = 1$toda $\alpha \in (\Gamma' U\beta)$). Si no lo comparte y no es una evaluación clásica esto querría decir que hay una fórmula β que puede recibir el valor 0 en una evaluación de C1 y recibe el valor 1 en toda evaluación clásica. Pero esto no puede ser, porque C1 es una sub-lógica.

de legitimar las inferencias semi-válidas en situaciones de consistencia. Nótese que el problema es que la relación de consecuencia de LP sea demasiado débil, y nunca de que sea demasiado fuerte (valide resultados clásicamente inválidos), ya que esta parte extensional de LP es una sub-lógica de la lógica clásica.[29]

¿Cuándo falla en LP una inferencia semi-válida? Si pensamos en sus condiciones semánticas, esto parece ocurrir cuando se abre la posibilidad de que una fórmula sea dialeteica (verdadera y falsa). Así, para dar un contraejemplo del Silogismo Disyuntivo, es decir, una evaluación v en la que α y $(\neg\alpha \vee \beta)$ son verdaderas y β no lo es, necesitamos que $v(\alpha) = \{1,0\}$. Dicha idea podría sugerir que es posible reconstruir el argumento expresando la consistencia de α, implementando una estrategia de recuperación análoga a la de los Sistemas-C. Sin embargo, $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ no necesariamente expresa la consistencia de α en LP, ya que ambas afirmaciones son compatibles, en el sentido de que ambas pueden recibir el valor deisgnado en una evaluación. Si $v(\alpha) = \{1, 0\}$, por las condiciones semánticas de la negación en LP, $v(\neg\alpha) = \{1,0\}$ y por las condiciones de la conjunción $v(\alpha\wedge\neg\alpha) = \{1,0\}$; de nuevo, por las condiciones de la negación, $v(\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)) = \{1,0\}$. De hecho, toda fórmula de la forma $\neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ es una verdad lógica en LP, por lo que toda evaluación v' en la que $1\in v'(\neg\alpha \vee \beta)$ y $1 \in v'(\alpha)$ pero $v'(\beta) = \{0\}$ es una evaluación en la que $1\in v'(\alpha\wedge\neg\alpha)$. Es decir, todo contraejemplo de

$\alpha, (\neg\alpha\vee \beta) \vDash_{LP} \beta$.

es también es un contraejemplo de

$\neg (\alpha \wedge \neg\alpha), \alpha, (\neg\alpha\vee \beta) \vDash_{LP} \beta$.[30]

Estas dificultades sugieren que hay que tomar una ruta distinta para alcanzar la recuperación clásica. Priest propone la siguiente máxima metodológica para dar cuenta del uso legítimo del Silogismo Disyuntivo en dominios consistentes:

---

[29] Siempre que $\Sigma \vDash LP\ \alpha$, $\Sigma \vDash CL\ \alpha$. Daré una explicación poco rigurosa. Esto se puede establecer una vez que se ha demostrado lo siguiente: Sean v1 y v2 dos evaluaciones funcionales de LP. Si para todo parámetro proposicional, p, se cumple que v1(p) SUB v2(p) entonces esta condición se extiende a toda fórmula α: v1(α) SUB v2(α). Se puede verificar fácilmente este resultado por inducción sobre la complejidad de las fórmulas, lo que no haré aquí por razones de espacio. Digamos que $\Sigma \vDash LP\ \alpha$. Supongamos para R.A. que esto es clásicamente inválido: $\Sigma \vDash CL\ \alpha$. Entonces hay una evaluación clásica que hace a todo miembro de Σ verdadero y a α falso. Esta evaluación correspondería a una evaluación de LP en la que no hay parámetros dialeteicos: para todo parámetro proposicional p, $v(p) = \{1\}$ o bien $v(p) = \{0\}$. Por el resultado anterior, se sigue que esto se extiende al resto de las fórmulas. Por lo tanto, hay una evaluación de LP tal que para todo $\beta \in \Sigma$, $v(\beta) = \{1\}$ y en la que $v(\alpha) = \{o\}$. Pero esto no es compatible con nuestro supuesto. Por lo tanto, $\Sigma \vDash CL\ \alpha$. Sabemos que también es una sublógica propia, ya que no valida ECQ ni DS, como hemos mostrado anteriormente. LP es una sub-lógica de CL también en sus respectivas extensiones de primer orden, pero esta propiedad meta-lógica se pierde en las extensiones de segundo orden (véase Priest, 2002).

[30] Esto no se debe a la elección particular con la que hemos tratado de expresar consistencia. Nosotros hemos ejemplificado este intento con $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ porque contrasta con lo que su análogo α0 logra en C1.Priest da una prueba general de que ninguna fórmula expresa estrictamente la consistencia de α en este (y otros) fragmento(s) de LP (toda fórmula bien formada es compatible con que se den α y $\neg\alpha$) . Un resultado es que no es posible lograr una recuperación clásica uniforme mediante supuestos adicionales en los que figuren los parámetros proposicionales. En particular, muestra que no hay fórmula y(p) cuyo único contenido proposicional sea p de tal manera que y(p), p, $(\neg p v q) \vDash_{LP} q$.

Máxima A: Si una disyunción es racionalmente aceptable y uno de los disyuntos es racionalmente rechazable, entonces el otro es racionalmente aceptable.

Priest hace notar que esta máxima no representa estrictamente una aplicación formal del Silogismo Disyuntivo:

> It is important to see that this is not an application of the DS. The argument is not: $\alpha \vee \beta$ is true; therefore β is true. The justification is not a formal one but a pragmatic one: $\alpha \vee \beta$ is rationally aceptable; α is rationally rejectable; hence β is rationally aceptable.

Esta aclaración tiene sentido desde una concepción particular de la negación; en particular, en la idea de que rechazar α no es equivalente a aceptar $\neg\alpha$. Pues en LP α y $\neg\alpha$ son semánticamente compatibles (lo que indica que uno podría aceptar ambas aserciones a la vez), mientras que el rechazo de α parece ser conceptualmente incompatible con su aceptación. Volviendo a la cuestión de SD, supongamos que Sofía acepta que LP es la lógica correcta para modelar la noción de inferencia racional, y además acepta α y acepta la disyunción $\neg\alpha \vee \beta$. Ahora bien, α , $\neg\alpha \vee \beta \vDash$LP $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta$. [31] Por tanto, Sofía también acepta que $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta$. Pero si Sofía piensa que hay buenas razones para rechazar $\alpha \wedge \neg\alpha$, de la Máxima A se sigue que está racionalmente comprometida con la aceptación de β.

En general, la idea es que es legítimo aceptar la conclusión de un argumento que usa el Silogismo Disyuntivo siempre que existan buenas razones para rechazar la contradicción involucrada (o la posibilidad de que uno de los disyuntos sea contradictorio). Sin embargo, la Máxima A solo considera la aplicación de SD. Para extender esto a todas las inferencias semi-válidas, es necesario exponer algunos resultados meta-lógicos de LP, y analizar algunos puntos comparativos entre LP y la relación de consecuencia clásica. En lo que sigue de esta sección, se sobreentiende que todas las fórmulas se prestan a una comparación clásica (solo contienen las conectivas extensionales $\wedge$ $\vee$ y $\neg$, y $\supset$, donde $\alpha \supset \beta$ en una lógica se define como $\neg\alpha \vee \beta$). Usaremos $\vDash$CL para indicar la relación de consecuencia (semántica) clásica. Doy breves explicaciones informales de los resultados para que se entienda mejor el análisis posterior de estos, pero las pruebas rigurosas se encuentran en (Priest,1987), y (Priest, 2006).

Resultado LP 1: Sean v_1 y v_2 dos evaluaciones funcionales de LP. Si para todo parámetro proposicional, *p*, se cumple que $v_1(p) \subseteq v_2(p)$ entonces esta condición se extiende a toda

[31] Supongamos que esta inferencia falla en LP. Entonces hay una evaluación v en la que $1 \in v(\alpha)$ y $1 \in (\neg\alpha \vee \beta)$ pero ni $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ni β reciben este valor designado. Entonces $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \{0\}$ y $v(\beta) = \{0\}$. Si tenemos que $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = \{0\}$ y $1 \in v(\alpha)$, la única forma de que esto ocurra es que $v\{\neg\alpha\} = \{0\}$. Pero como $v(\beta) = \{0\}$, de las condiciones de la disyunción se sigue que $v(\neg\alpha \vee \beta)= \{0\}$, lo que es incompatible con el supuesto inicial.

fórmula α; es decir, $v_1(\alpha) \subseteq v_2(\alpha)$. Se puede verificar fácilmente este resultado por inducción sobre la complejidad de las fórmulas, lo que no haré aquí por razones de espacio.

Resultado LP 2: LP es una sub-lógica de la lógica clásica.
Ya hemos observado que si eliminamos la posibilidad de que una fórmula sea simultáneamente "verdadera" y "falsa" en una evaluación de LP, las condiciones de verdad para las conectivas $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ en LP son equivalentes a las condiciones clásicas. Digamos que una evaluación v de LP es una evaluación clásica cuando en v no hay fórmulas dialeteicas: para toda fórmula α, $v(\alpha) = \{1\}$ o bien $v(\alpha) = \{0\}$.[32] Supongamos que no es el caso que $\Sigma \vDash$CL α. De la observación anterior se sigue que hay una evaluación v' de LP tal que para todo $\beta \in \Sigma$, $v'(\beta) = \{1\}$ y en la que $v'(\alpha) = \{o\}$. Entonces no es el caso que $\Sigma \vDash$LP α, y tenemos el resultado. Ya sabemos que también es una sub-lógica propia, porque es paraconsistente.[33]

Resultado LP 3: Una fórmula es una tautología en LP si y solo si es una tautología clásica.
(a) Supongamos que $\vDash_{LP} \alpha$. Del Resultado 2 se sigue que $\vDash_{CL} \alpha$.
(b) Ahora supongamos que no es el caso que $\vDash_{LP} \alpha$. Entonces hay una evaluación v_1 tal que $1 \notin v_1(\alpha)$. Sea v_2 una evaluación igual a v_1 excepto que para todo parámetro proposicional *p*, siempre que $v_1(p) = \{1,0\}$, $v_2(p) = \{0\}$. Del Resultado 1 se sigue que $1 \notin v_2(\alpha)$. Pero v_2 es una evaluación clásica. Por lo tanto, no es el caso que $\vDash_{CL} \alpha$.

Resultado LP 4: Para todo conjunto de premisas Γ y toda fórmula α, $\Gamma \vDash_{CL} \alpha$ si y solo si para alguna fórmula β es el caso que $\Gamma \vDash_{LP} \alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta)$.
(a) Supongamos que $\Gamma \vDash_{CL} \alpha$. Entonces hay un conjunto contable de fórmulas Σ tal que $\Sigma \subseteq \Gamma$ y $\Sigma \vDash \alpha$.[34] Sea β la conjunción de todos los miembros de Σ. Por el Teorema de la Deducción se sigue que $\vDash_{CL} \beta \supset \alpha$. Por Equivalencia Material tendríamos que $\vDash_{CL} \neg\beta \vee \alpha$. Como esta es una tautología clásica, por el Resultado 3 tenemos que $\vDash_{LP} \neg\beta \vee \alpha$.
(b) Supongamos que $\Gamma \vDash_{LP} \alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta)$. Entonces del Resultado 2 se sigue que $\Gamma \vDash_{CL} \alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta)$. Dado que $\beta \wedge \neg\beta$ es clásicamente insatisfactible, y por las condiciones clásicas de la disyunción, siempre que la inferencia de Γ a $\alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta)$ preserve verdad, la inferencia de Γ a α preservará verdad. Por lo tanto, $\Gamma \vDash_{CL} \alpha$.

---

[32] Para obtener una evaluación clásica, es suficiente que la evaluación de los parámetros no sea dialeteica: para todo parámetro proposicional p, $v(p) = \{1\}$ o bien $v(p) = \{0\}$. Las condiciones de verdad de las conectivas garantizan que esta condición se extiende a todas las fórmulas complejas (es fácil verificar que ninguna condición da una evaluación dialeteica cuando las fórmulas más simples no la reciben).

[33] LP es una sub-lógica de CL también en sus respectivas extensiones de primer orden, pero este resultado se pierde en las extensiones de segundo orden (véase Priest, 2002).

[34] Esta inferencia se basa en el Teorema de Compacidad.

Ya tenemos las herramientas para explicar la generalización a todas las inferencias semi-válidas. Supongamos que Sofía acepta $\alpha 1, \ldots, \alpha n$. Llamemos Y a la conjunción de estas fórmulas. Supongamos que la inferencia de $\alpha 1, \ldots, \alpha n$ a β es semi-válida. Entonces (por las condiciones de la conjunción) la inferencia de Y a β es semi-válida. Del Resultado 4 se sigue que $\beta \vee (Y \wedge \neg Y)$ es una verdad lógica de LP. Si Sofía tiene buenas razones para rechazar la contradicción $Y \wedge \neg Y$, de la Máxima A se sigue que es β es racionalmente aceptable. Priest llama a $Y \wedge \neg Y$ la *contradicción crucial* de la inferencia. Tenemos la siguiente generalización de la Máxima A:

Máxima B: si las premisas de una inferencia semi-válida son racionalmente aceptables también lo es la conclusión, siempre que existan buenas razones para rechazar la *contradicción crucial.*

¿Qué constituyen buenas razones para rechazar una contradicción (posiblemente crucial)? La respuesta de quien sigue la lógica clásica sería "el mero hecho de que sea una contradicción". Por supuesto, dicha respuesta no es aceptable desde el dialeteismo, por lo que Priest propone criterios extra-lógicos. Un tipo de razón concierne al contenido de las contradicciones. Para Priest, las contradicciones están sujetas a una evaluación racional, al igual que cualquier otra clase de aseveración. Defiende que hay que distinguir entre buenas y malas contradicciones. No es lo mismo decir "el conjunto de Russell pertenece y no pertenece a sí mismo" que decir "la Tierra es plana y no es plana". La primera afirmación sería una consecuencia irremediable del pensamiento complejo (y parte integral de una teoría interesante –TCN, a la que Priest se adhiere), mientras que la segunda (el segundo conyunto de la segunda) es fácilmente refutable. El segundo tipo de razón tiene que ver con la probabilidad epistémica de que surjan inconsistencias en cierto dominio:

> The dialetheist considers the hypothesis of inconsistency or, better, local inconsistency (i.e. the truth of $\alpha \wedge \neg\alpha$ for particular α) to be no different, in principle from any other hypothesis, and therefore to be evaluated on its merits. There are, however, certain considerations that will, other things being equal, cause her to reject it. The reason is a simple one: the statistical frequency of dialetheias in normal discourse is low.

Priest usa el éxito normal de la inferencia clásica para argumentar que las inconsistencias locales se dan con poca frecuencia:

> It is a fact, to be verified by simple observation, that people do commonly use quasi-valid arguments. DS, for example, is used commonly in mathematics, as well as in more common-or-garden reasoning. Moreover, it is also a fact, to be verified in the same way, that such reasoning is by and large successful, or at least does not lead to recognisable errors. (…) Now if dialetheias were common, we would expect quasi-valid inferences to go wrong quite frequently. But they do not. Hence they are not common. The normal success of quasi-valid reasoning therefore provides the basis of a trascendental argument for the infrequency of dialetheias.

Si estamos justificados en pensar que la inconsistencia local ocurre con poca frecuencia y si otorgamos que su nivel de frecuencia dicta su probabilidad, estaríamos inductivamente justificados en asumir que no ocurre una inconsistencia local sobre la que no tenemos información particular. Es decir, para un α arbitraria, hay buenas razones inductivas para pensar que α no se comporta de manera inconsistente (no hay un razonamiento válido que lleve a $\alpha \wedge \neg\alpha$) hasta que no se demuestre lo contrario. Lo mismo aplica en el caso de una contradicción crucial. De esto se deriva que en general el dialeteista está justificado en rechazar la contradicción crucial de un razonamiento semi-válido y, siguiendo la Máxima B, está justificado en aceptar este razonamiento. Podemos formular esto como una especificación de la Máxima B.

Máxima C: A menos que existan razones particulares para no rechazar/asignar baja probabilidad a las contradicciones cruciales en un fragmento de razonamiento semi-válido, es permisible aceptar dicho razonamiento.

Supongamos que el lógico clásico y el dialeteista (o el lógico que adopta LP) sacan consecuencias de un conjunto de axiomas teóricos aparentemente inconsistente. El lógico clásico usará la lógica clásica. El dialeteista, usando la Máxima metodológica C, razonará con inferencias válidas (según la relación de consecuencia de LP) y semi-válidas. De acuerdo con Priest, ambos razonarían del mismo modo hasta que no aparezca una inconsistencia (local). Pero las cosas cambias cuando aparece una inconsistencia. En este caso, para el lógico clásico la teoría es trivial y debe ser abandonada. El dialeteista también tiene la opción de abandonar la teoría, si piensa que las inconsistencias que genera son inaceptables. Pero tiene otras opciones: en vista de la(s) inconsistencia(s) local(es) detectadas, puede dejar de usar el razonamiento semi-válido y revertirse a la noción de validez más débil dictada por la relación de consecuencia de LP. Basándose en estas consideraciones, Priest afirma que adoptar la lógica dialeteica (LP y sus extensiones)[35] no es más que extender el dominio de aplicación de la lógica:

> Classical logic recognises no situations other than consistent ones. (Or, to be precise, recognises only one other –the absolutely trivial one- which is also recognised dialetheically.) Hence dialetheism matches the power of classical logic. And dialetheic logic not only matches the power, but extends it. For dialetheism is able to acount for non-trivial reasoning in inconsistent situations. In short, dialetheic logic gives the full power of classical logic except where classical logic is demonstrably useless, and then more.

[35] En distintos textos defiende distintas extensiones. Su propuesta actual parece ser LPm, una lógica no monotónica basada en LP que veremos posteriormente.

Sobra decirlo, Priest ve su propuesta lógica como una teoría o modelo general del razonamiento.[36] Por consiguiente, cree que hay que usar los criterios científicos habituales de adecuación teórica para decidir cuál es *la* lógica en sentido estricto. La idea de que LP tiene mayor poder o mayor rango de aplicaciones lo lleva a establecer una analogía conveniente con la Teoría de la Relatividad y la Dinámica Newtoniana:

> For the fact that a theory has greater power, or a wider range of applications, or, in general subsumes a rival is a well known methodological test for that theory to be preferable to its rival. In many ways, dialetheic logic relates to classical logic, as does Special Relativity to Newtonian Dynamics. At low velocities/consistent situations, the rival theories are practically equivalent. (Though not theoretically, since the understandings the theories give of what is going on are rather different.) At high velocities/inconsistent situations, the newer theory works while the older theory crashes.

Nótese que, en principio, toda propuesta paraconsistente puede dar un argumento similar, en la medida en que ofrezca técnicas de recuperación satisfactorias. Si las técnicas de recuperación clásica de las lógicas que hemos visto son aceptables, estas lógicas pueden ser tomadas (desde el monismo lógico) como propuestas que expanden la clase de contextos desde los que es posible razonar deductivamente. [37] De hecho, hasta ahora las técnicas de LP parecen ser las menos satisfactorias desde un punto de vista formal. Lo que muestra hasta ahora la discusión es que quien propone LP tiene métodos para justificar su uso de razonamientos semi-válidos, bajo una hipótesis de consistencia que es inductivamente justificable. Pero estos métodos están basados en máximas metodológicas extra-lógicas, y no es claro cómo formular el contenido de estas máximas o al menos lo que ellas permiten lograr extra-lógicamente en LP. Lo ideal sería traducirlas al vocabulario lógico. Pero esto es difícil, ya que contienen la noción de rechazo, y en LP no es posible expresar estrictamente esta noción. Hemos visto que la negación no expresa rechazo en LP, porque permite la compatibilidad entre una oración y su negación (aceptar $\neg\alpha$ no implica rechazar/no aceptar α). De hecho, no hay fórmulas incompatibles en (el framento discutido de) LP. Una simple inducción sobre la complejidad de las fórmulas muestra que en una evaluación en donde todo parámetro proposicional es "verdadero" y "falso" (para todo parámetro p, $v(p) = \{1,0\}$) es una evaluación en donde esto se cumple para todas las fórmulas (para toda α, $v(\alpha) = \{1,0\}$).[38] Este resultado subsume en particular a las fórmulas contradictorias y a las negaciones de estas fórmulas y, por lo tanto, también a las contradicciones cruciales. En consecuencia, no

[36] Aunque a veces oscila entre la afirmación de que es un modelo descriptivo y la afirmación de que es un modelo normativo. A veces dice que la lógica, como cualquier ciencia descriptiva, debe responder a los "datos";en este caso, la inferencia pre-lógica que se da en la práctica (lo que también está implícito en la primera ramificación de la propuesta de Colyvan), y a veces defiende que la adopción de LP representa una especie de cambio de paradigma inferencial.

[37] Por supuesto, sus respectivos dominios de aplicación no son los mismos. Por ejemplo, "forcing" trivializa fórmulas absurdas (lo que equivale a lo que Priest llama "inconsistencias locales") y LP no.

[38] Este resultado permanece también en sus extensiones de primer orden, como veremos más adelante.

hay nada que quien adopta LP pueda expresar (lógicamente) que garantice que no acepta o rechaza una aseveración.

Un método de fuerza bruta para hacer que la recuperación clásica sugerida por las máximas metodológicas de Priest se vuelva lógicamente efectiva consiste en suplementar a LP con un condicional intensional $\rightarrow$. Hay muchas formas de hacer esto (basadas en semánticas para condicionales estrictos o condicionales relevantes). Supongamos que se desea representar el razonamiento involucrado en una teoría matemática consistente, basada en un conjunto de axiomas Γ_1. Digamos que tenemos una constante proposicional F, que informalmente representaría la conjunción de todas las fórmulas y para la que se cumple el esquema $F \rightarrow \alpha$. Sea Γ_2 el resultado de añadir a los axiomas en Γ_1 el esquema axiomático $(\beta \wedge \neg\beta) \rightarrow F$. Priest se refiere a este último como el *supuesto clásico*. Si $\Gamma_1 \vDash_{CL} \alpha$ entonces $\Gamma_1 \vDash_{LP} \alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta)$, por el Resultado 4. Si $\rightarrow$ cumple las condiciones apropiadas (entre otras cosas, si es desmontable -cumple MP- y es transitivo), entonces α es una consecuencia de Γ_2 en una versión intensional de LP a la que se añada dicho condicional.

2.4) Análisis conceptual de las técnicas de recuperación

Las lógicas que hemos visto sugieren interpretaciones conceptuales muy distintas acerca de cuándo sirve y cuándo falla el razonamiento clásico. En el enfoque preservacionista que da lugar a "forcing", el razonamiento clásico falla cuando no preserva una propiedad deseable de una teoría o de un conjunto de premisas: el nivel de inconsistencia. Este razonamiento es apropiado cuando parte de premisas consistentes, donde la preservación de verdad/consistencia coincide con la preservación de inconsistencia nivel 1. Esto subsume al modelo de inferencia clásico bajo una concepción de la lógica que distingue entre varios tipos de inconsistencia.

En el enfoque de Da Costa (al menos en C1), muchos principios clásicos de inferencia fallan simplemente por el comportamiento y las condiciones de satisfactibilidad de la negación débil (y la relación de (in)dependencia asimétrica entre una oración y si negación débil). Por supuesto, esto supone que la negación del fragmento del lenguaje natural que se está modelando corresponde (o debería corresponder) con esta caracterización de la negación. Pero el razonamiento clásico es recuperable una vez que se aceptan ciertos postulados apropiados de consistencia (que permiten reconstruir una negación fuerte).

En el enfoque dialeteico de Priest, fallan los principios clásicos de inferencia que suponen que la verdad y la falsedad son exclusivas. Si este no es el caso, se abre la posibilidad de que una oración y su negación sean simultáneamente verdaderas, lo que implicaría que ECQ, SD y otros principios de inferencia relacionados no preservan verdad. La posibilidad de que ocurran dialeteias es supuestamente suficiente para dar contraejemplos a dichos principios. Pero si es posible descartar esta posibilidad, es decir, si es razonable detectar y rechazar las contradicciones cruciales involucradas en un pedazo de razonamiento clásico, es permisible aceptar dicho razonamiento.

Volvamos a la concepción de la lógica como un modelo descriptivo del razonamiento para ver si es posible conectar lo que ofrecen estos enfoques lógicos con (P1) y la discusión previa en torno a MLMP. Desde esta concepción, el criterio metodológico implícito que Colyvan y autores similares proponen para evaluar si relación de consecuencia lógica se ajusta a la noción pre-teórica de argumento o inferencia correcta parece ser el siguiente:

a) *Determinamos qué oraciones del lenguaje natural (o de un fragmento del lenguaje natural) parecen ser aceptadas por un individuo o una comunidad (o una práctica científica)*. Así, Colyvan trata de argumentar, desde un punto de vista histórico, que la práctica matemática aceptó (o se comprometió implícitamente con) la existencia de los fluxiones – tanto con la afirmación que dice que estas son entidades iguales a 0 como con la afirmación que dice que son distintas a 0- y la existencia del conjunto de Russell -la afirmación que dice que este conjunto pertenece y no pertenece a sí mismo.

b) *Traducimos estas oraciones (o algunas de estas oraciones) a un vocabulario lógico; o al menos suponemos que esta traducción es posible. En el mejor de los casos, establecemos una correspondencia entre cada oración aceptada o aceptable α' del lenguaje natural con una fórmula α del vocabulario lógico*. Cuando Colyvan ofrece su argumento espurio para derivar FLT a partir de TCN, dice que dicho argumento se ajusta a los principios clásicos de inferencia. Aunque no da una prueba lógica formal, esto supone al menos que el uso de "y" en dicho argumento corresponde con la conectiva "$\wedge$" de la lógica clásica, "o" corresponde con la conectiva "$\vee$", etc. De lo contrario, no habría razón para aceptar que el razonamiento que esboza es clásicamente válido.

c) *Determinamos qué conclusiones relevantes de hecho se infieren o no se infieren a partir de las oraciones aceptadas y vemos si estas inferencias se ajustan a lo que una relación de consecuencia lógica valida en torno a sus traducciones lógicas correspondientes*. Si Σ' es un conjunto de oraciones aceptadas y α' no es una inferencia permisible (de acuerdo a los estándares pre-lógicos de la práctica inferencial pertinente) a partir de Σ', pero de acuerdo con la caracterización de validez de cierta relación de consecuencia $\vDash$, ocurre que $\Sigma \vDash \alpha$ (donde cada miembro de Σ corresponde a cada miembro de Σ' y α corresponde a α') decimos que $\vDash$ se excede al modelar la práctica inferencial en cuestión o que es demasiado fuerte. Así, Colyvan trata de mostrar que la lógica clásica se excede al modelar la práctica inferencial matemática de cierto periodo. Por supuesto, esto supone argumentar que la razón de que α' no se infiriera de hecho a partir de Σ' no se debe al nivel de complejidad del argumento. Recordemos que Colyvan hace notar que su "prueba" de FLT es bastante sencilla, y que era epistémicamente disponible a cualquiera que aceptara TCN y concordara con principios clásicos básicos de inferencia. Si de Σ' se puede establecer pre-lógicamente α', pero no es el caso que $\Sigma \vDash \alpha$, decimos que $\vDash$ se queda corta o que es demasiado débil. En esta última preocupación se apoya una réplica obvia a Colyvan y a MLMP, basada en las pruebas independientes de ECQ. Ahora hay que evaluar si las técnicas de recuperación que hemos visto son capaces de contrarrestar esta objeción.

d) *Idealmente, vemos si hay una relación de consecuencia que no se queda corta ni se excede con respecto a la práctica inferencial que nos interesa. Si no la encontramos, usamos los criterios habituales de contrastación teórica para evaluar la adecuación empírica: juzgamos entre varias relaciones de consecuencia disponibles cuál es la que mejor se ajusta (tal vez evaluando un equilibrio entre fuerza y debilidad).* La idea de las técnicas de recuperación, desde el punto de vista descriptivo, es mostrar que un modelo general del razonamiento no explosivo puede evitar los excesos de la lógica clásica sin quedarse corto a la hora de explicar los datos aparentes de la inferencia pre-lógica en situaciones de consistencia –al menos no "más corto" que la lógica clásica. Esto lograría un equilibrio entre fuerza y debilidad que se ajustaría mejor que el que ofrece el modelo clásico; recordemos la analogía de Priest entre la lógica paraconsistente/Teoría de la Relatividad y la Dinámica Newtoniana/lógica clásica: ambas son capaces de dar cuenta de lo que ocurre en situaciones de consistencia/velocidades normales, mientras que solo la lógica paraconsistente/Teoría de la relatividad es capaz de dar cuenta de lo que ocurre en situaciones de inconsistencia/velocidades altas. Si esto es correcto, MLMP es preferible a MLME (en términos descriptivos), debido a los criterios metodológicos habituales de adecuación empírica. Por supuesto, esa cuestión de la lógica particular que elija la defensora de MLMP.

Nótese que este procedimiento metodológico pasa por alto varios factores; por ejemplo, no toma en cuenta la capacidad de una lógica para crear un sistema deductivo cuyas reglas de inferencia sintácticas reflejen *patrones de inferencia* específicos. Lo único que importa es el ajuste entre una relación de consecuencia (como sea que se caracterice esta relación, ya sea semánticamente o con otros recursos bien definidos) y los datos inferenciales. Tampoco toma en cuenta cuestiones meta-lógicas de computabilidad y complejidad. Intuitivamente, no es difícil establecer que las lógicas que hemos visto añaden complicaciones al modelo clásico (y esto se ve desde el nivel proposicional). En particular, sus técnicas de recuperación nos meten en vericuetos argumentales que contrastan con la naturalidad y simplicidad de los principios que dan lugar a la explosión. Por otro lado, la Teoría de la Relatividad es mucho más compleja que la Dinámica Newtoniana, y los criterios de adecuación empírica parecen ser suficientes para elegir la primera. En cualquier caso, este procedimiento aporta un criterio inicial de comparación, donde el ajuste descriptivo de distintas relaciones de consecuencia puede ser evaluado desde un punto de vista neutral.

Dicho lo anterior, hace falta observar que las estrategias de recuperación de las distintas lógicas que hemos visto se acoplan de maneras muy diferentes al procedimiento descrito. Sus puntos de discrepancia están relacionados particularmente con los pasos (a) y (b). Hasta ahora hemos asumido que distintas lógicas pueden hablar de los mismos conjuntos de premisas, caracterizadas como conjuntos de fórmulas a nivel sintáctico, (debido a que hay una correspondencia visual obvia entre la conjunción "∧" de LP y la conjunción clásica, la negación "¬" de C1 y la negación clásica, etc.), aunque el comportamiento y las condiciones de satisfactibilidad de las respectivas conectivas difieran. Las lógicas que siguen estrategias (monotónicas) de valores designados se ven forzadas a añadir premisas adicionales para reconstruir un fragmento de razonamiento clásico. Así, con los Sistemas-C hay que añadir postulados de consistencia y en LP (monotónica) hay que añadir supuestos clásicos que requieren un condicional intensional. Esto implica que difieren del procedimiento clásico desde el paso (a). Para mantener la idea de que estas estrategias modelan correctamente la noción pre-lógica de inferencia correcta, y que este modelo se ajusta a situaciones normales de consistencia, es necesario sostener que siempre que hay un aparente uso del razonamiento clásico, en realidad hay premisas suprimidas que están implícitas en los pasos inferenciales del argumento.

¿Cómo entender esto? En lo que concierne a las técnicas de fuerza bruta de LP, parece que la inferencia semi-válida común no involucra un uso consciente de supuestos clásicos y, si este es el caso, parece incorrecto imputar un uso implícito de estos supuestos. Se podría decir algo similar con respecto al enfoque de Da Costa, si se maneja la idea de que los postulados de consistencia son premisas implícitas de todo razonamiento aparentemente clásico. Pero aquí hay otras justificaciones disponibles. Tal vez hay múltiples usos de la negación en el lenguaje natural, de tal forma que ciertos usos no crean "absurdos" o incompatibilidades con la oración "no negada" y que, por tanto, no llevan a la trivialización de una inconsistencia local. La idea es que hay nociones pre-lógicas basicas de la negación, que coinciden con la relativa independencia que imputan los Sistemas-C a la negación débil. También habría el uso de la negación fuerte, cuyas condiciones de verdad coincidirían con las de la negación clásica (pero, según este enfoque, al negar α de manera fuerte uno realmente estaría diciendo algo como "no es el caso que α y α se comporta consistentemente"). Ya hemos ejemplificado cómo es que la negación fuerte puede reconstruirse con NEG en C1. Al haber distintos significados de la negación, sería preferible usar lógicas capaces de codificarlos de manera precisa, lo que a su vez permitiría hacer distinciones finas entre distintos tipos de inconsistencia.[39]

De todas formas, ambas estrategias de valores designados contrastan radicalmente con lo que aporta el enfoque preservacionista en su apropiación del razonamiento clásico. Aquí, nada tiene que ser reconstruido; solo hay que apelar a las propiedades de un conjunto de premisas, y a la relación de consecuencia que está diseñada para preservarlas. La correspondencia entre preservación de verdad/consistencia y preservación de inconsistencia nivel 1 da la recuperación clásica. En ese sentido, quien propone "forcing" no discrepa (necesariamente) con el lógico clásico en el paso (a). Ambos pueden estar de acuerdo en el conjunto inicial de premisas que es aceptado (o, más específicamente, en el conjunto de axiomas que caracterizan una teoría particular).

Pero hay una diferencia más importante entre estos tipos de apropiación clásica. Hemos visto que el enfoque preservacionista no necesita redefinir las condiciones de satisfactibilidad y consistencia de su lógica de base. Si la lógica de base es clásica, esto implica que quien propone "forcing" también puede coincidir con el lógico clásico en las condiciones de verdad de las conectivas y, por tanto, en los criterios para evaluar una codificación de cierto fragmento del lenguaje natural al lenguaje lógico. En principio, ambos pueden concordar en

[39] Esta es una versión simplificada de la justificación que aporta Catarina Dutilh Novaes para dar una defensa general de los Sistemas de Inconsistencia Formal en (Dov Gabbay, 2008).

el paso (b) del procedimiento. En cambio, las estrategias de valores designados redefinen las condiciones de verdad de (algunas de) las conectivas y, si es verdad que estas condiciones determinan el significado de una expresión, también redefinen su significado.[40] En base a esta observación, el lógico clásico puede rechazar la analogía de Priest con las teorías de la física. Pues, al menos en algunas concepciones de la ciencia, una teoría subsume a otra cuando da cuenta de los mismos datos o la misma evidencia observacional. Pero hay quienes sostienen que el lógico paraconsistente -al menos el que emplea una estrategia de valores designados- no propone un modelo que se ajusta mejor a la evidencia inferencial (es decir, la relación entre premisas aceptadas y conclusiones correctamente inferidas/inferibles en un fragmento del lenguaje natural), sino que solo interpreta los datos de manera distinta. Resonando un conocido argumento quineano, el lógico clásico podría replicar que estas lógicas no explosivas no hacen más que cambiar el tema.

[40] Se puede remplazar "condiciones de verdad" por "condiciones de asertabilidad", en caso de que no se quiera interpretar la semántica de una de estas lógicas como una teoría formal de la verdad.

Capítulo 3: El problema de la negación paraconsistente

Quien propone una lógica paraconsistente se enfrenta a retos filosóficos particulares. Por un lado, debe dar buenas razones por las que el sistema que propone puede ser llamado *lógica* en sentido estricto. Por otro lado, debe dar buenas razones por las que esta lógica (de serlo) puede ser llamada paraconsistente. En una lógica paraconsistente, debería existir al menos un conjunto de premisas Γ tal que Γ sea inconsistente y tal que Γ no *implique* cualquier cosa. Según lo hemos definido anteriormente, Γ es inconsistente solo si su clausura deductiva contiene tanto a cierta oración α como a la *negación* de α. Entonces, para que una lógica pueda ser llamada paraconsistente, tienen que existir conjuntos cuya clausura deductiva no sea trivial (bajo la lógica en cuestión) y que, al mismo tiempo, sean genuinamente inconsistentes. Pero para que un conjunto de premisas sea genuinamente inconsistente es necesario que el operador de negación usado represente una negación genuina.[41]

Como veremos a continuación (3.1), esto no quiere decir necesariamente que la negación Booleana sea la única negación legítima y que toda modificación a su comportamiento lógico sea necesariamente un cambio de tema. Pero sí quiere decir (como veremos en 3.2) que tienen que existir criterios mínimos e independientes para afirmar que un operador de negación no es un símbolo arbitrario, sino que se ajusta en cierto modo a nuestra noción pre-teórica. Veremos que estos retos son más difíciles de enfrentar para quienes siguen estrategias de valores designados, y que las soluciones que ofrecen, incluso en caso de ser adecuadas en general, seguirían siendo problemáticas en relación al contexto argumentativo específico de Colyvan.

3.1) Expresividad y operadores lógicos

Es bien conocida la objeción general de Quine contra la lógicas no clásicas (Quine, 1971). La base de su argumento es que al cambiar de lógica (al proponer una lógica distinta a la clásica) uno "cambia de tema", es decir, solamente se logra dar cuenta de algo distinto. Bajo esta idea general, Quine dio una objeción particular a la lógica paraconsistente:

> To turn to a popular extravaganza, what if someone were to reject the law of con-contradiction and so accept an occasional sentence and its negation both as true? An answer one hears is that this would vitiate all science. Any conjunction of the form "p . ¬p" logically implies every sentence whatever; therefore acceptance of one sentence and its negation as true would commit us to accepting every sentence as true, and thus forgeiting all distinction between true and false. In answer to this answer, one hears that suck a full-width trivialization could perhaps be staved off by making compensatory adjustments to block this indiscriminate deducibility of all sentences from an inconsistency. Perhaps, it is suggested, we can so rig our new logic that it will isolate its contradictions and contain them. Mi

[41] Esta manera de plantear la centralidad de la negación en la lógica paraconsistente surgió de una conversación con el Dr. Axel Barceló, quien me ayudó a clarificar mi propio razonamiento implícito.

> view of this dialogue is that neither party knows what he is talking about. They think they are talking about negation, "¬", "not"; but surely the notation ceased to be recognizable as negation when they took to regarding some conjunctions of the form "p . ¬p" as true, and stopped regarding such sentences as implying all others. Here, evidently, is the deviant logician's predicament: when he tries to deny the doctrine he only changes the subject.

Priest (2010), replicando a la objeción quineana, responde que la idea de que cambiar de lógica es cambiar de tema no es más que una confusión entre el modelo y aquello que se pretende modelar:

> This just confuses logic, *qua* theory, with logic, *qua* object of theory. Changing one's theory of logic no more changes what it is one is theorising about- in this case, relationships grounding valid reasoning -than changing one's theoretical geometry changes the geometry of the cosmos. Nor does it help to suppose that logic, unlike geometry, is analytic (i.e., true solely in virtue of meanings). Whether or not, e.g., "There will be a sea battle tomorrow or there will not" is analytic in this sense, is no more obvious than is the geometry of the cosmos. And changing from one theory, according to which it is analytic, to another, according to which it is not, does not change the facts of meaning.

Esta analogía de Priest se amolda bien a la concepción de la lógica que ha venido enmarcando nuestra discusión. La idea es que es un modelo (normativo o descriptivo) de la noción de inferencia correcta también involucra la habilidad de dar cuenta de ciertas nociones pre-lógicas (negación, conjunción, disyunción, etc.) que establecen relaciones de validez entre conceptos. El significado de estas nociones es una cuestión de hecho, y distintas lógicas pueden ser contrastadas en relación a los hechos, tal como distintas teorías se pueden evaluar respecto a cierta evidencia neutral. En este sentido, es posible discutir, por ejemplo, si la negación vernácula (o la noción pre-lógica de negación) se comporta (o se debería comportar) explosivamente, y si el operador "¬" en cierta lógica paraconsistente la representa mejor que el operador Booleano. Así, desde el enfoque de Da Costa se podría decir que los ejemplos de Colyvan, además de ser evidencia del uso de una lógica no explosiva, muestran que hay un uso de una noción de negación débil. Y esta clase de respuesta (en general, decir que la evidencia inferencial siempre es evidencia de que ciertas nociones pre-lógicas coinciden con la caracterización de ciertas conectivas) parece formar parte de cualquier propuesta paraconsistente que redefina los operadores mediante una estrategia de valores designados.

Pero incluso si es incorrecto suponer que toda desviación de la caracterización clásica de las conectivas lógicas es un cambio de tema, es obvio que la familiaridad notacional no es suficiente para justificar la adecuación expresiva de un operador lógico. Tomando un ejemplo de Béziau, reemplazar algún símbolo unario de necesidad por el símbolo usual de negación (digamos "□" en *S5* por "¬"), no muestra que hay una *lógica* en la que una oración y su *negación* son compatibles (o no implican cualquier cosa). Una justificación apropiada para decir que una conectiva lógica representa cierta noción supone una teoría aceptable acerca de lo que realmente es, cómo se comporta y qué significa esa noción. Incluso si no contamos con una teoría unívoca y universal que determine esto mediante condiciones necesarias y suficientes, pueden establecerse criterios mínimos para decir que un operador lógico representa lo que pretende representar. Nos centraremos en la negación y la implicación, que son las nociones más problemáticas (y más discutidas) en las lógicas de valores designados que hemos visto.

3.2) El problema de la pseudo-negación

El problema de la negación es un problema persistente y ampliamente discutido en la literatura paraconsistente -y en la literatura "anti-paraconsistente". La centralidad de este tema se debe a que la noción de negación forma parte de la caracterización general de una lógica no explosiva. Una lógica paraconsistente es una lógica en la que hay un operador de negación, una *negación paraconsistente*, de tal forma que este operador no obedece ECQ. De las pruebas de independencia de este principio, se sigue que una negación paraconsistente tampoco obedece principios clásicos básicos. Dicha entidad puede parecer una cosa extraña o ambigua, como un auto sin llantas o una silla sin patas. Peor aún, hay quienes defienden que la idea de una negación paraconsistente es un sinsentido y que el objeto que el operador paraconsistente de negación supuestamente representa es un objeto imposible, como un círculo cuadrado o un triángulo de Penrose. Notablemente, B.H. Slater ha defendido que las negaciones paraconsistentes no son negaciones (no *pueden* ser negaciones) y que, por tanto, la lógica paraconsistente no existe.

Según Slater, una negación real es un *operador de formación de contradictorios* (OFC). Este sería un requisito mínimo o una condición necesaria de toda caracterización adecuada de la negación, tal como tener tres ángulos es una condición necesaria para que algo sea un triángulo. Tradicionalmente –al menos desde la tradición arostotélica- se entiende que α y β son contradictorios o están en una relación de contradicción si y solo si 1) uno de los dos se da necesariamente (si no se da α se da β y viceversa) y 2) no es posible que ambos se den simultáneamente. Pero en las semánticas paraconsistentes, por ejemplo en LP, hay evaluaciones que asignan a α y $\neg\alpha$ el valor designado "verdad". Hemos visto que una oración α es verdadera de acuerdo a una evaluación v de LP cuando $1 \in v(\alpha)$. Podemos asignar a α el valor $\{1,0\}$ y, en este caso α y $\neg\alpha$ se dan (son verdaderas) simultáneamente. Pero, según Slater, la compatibilidad entre ambas muestra que $\neg\alpha$ no está en relación de contradicción con α, debido a que esto violaría la segunda condición de la definición tradicional. De acuerdo con lo anterior, en LP α y $\neg\alpha$ no son contradictorias sino sub-contrarias (solo cumplen con la primera condición de la definición). A su vez, esto parecería implicar que el operador de negación de LP no es un OFC sino un operador de formación de sub-contrarios (OFS) y, por definición, que el concepto formalizado por "¬" en esta lógica no puede ser el de negación.

Es obvio que se podría decir lo mismo con respecto a la negación débil de los Sistemas C. De hecho, el argumento de Slater pretende ser generalizable a toda lógica paraconsistente:

Argumento general:

Premisa1: Dos oraciones contradictorias o en relación de contradicción no pueden darse simultáneamente.

Premisa2: La negación es un OFC.

Premisa3: Si L es una lógica paraconsistente, entonces no es el caso que $\alpha, \neg\alpha \vDash_L \beta$ (para alguna α y alguna β y para un operador $\neg$, que supuestamente representa una negación). Esto querría decir que en la semántica para L hay evaluaciones que asignan tanto a α y como a $\neg\alpha$ un valor designado.

Premisa4: Si dos oraciones reciben un valor designado bajo una evaluación en la semántica para L, esto significa que ambas pueden darse (ser verdaderas) simultáneamente de acuerdo con L.

Conclusión1: De las premisas 1, 3 y 4 se sigue que α y $\neg\alpha$ no están en relación de contradicción (en el mejor de los casos, son sub-contrarias).

Conclusión2: De la premisa 2 y la conclusión 1 se sigue que la "negación" de L no representa una negación.

De acuerdo con Slater, el término "lógica paraconsistente" no es más que el resultado de una confusión verbal. El truco está en pretender que los contradictorios son sub-contrarios (si acaso). Tratar a la negación como un OFS en lugar de un OFC y, en base a ello, decir que hay una lógica en la que una oración y su negación no implican cualquier cosa no sería más que una confusión de cambio de significado. Sería similar a que alguien decidiera llamar "cuadrados" a los triángulos y "triángulos" a los cuadrados. En tal caso, uno podría sostener que ha mostrado que hay tríangulos que tienen cuatro lados. En estos casos, según Slater, no hemos descubierto algo nuevo acerca de los hechos, sino que hemos cambiado la manera de referirnos a ellos.

Nótese que, aunque Slater hace una crítica de espíritu quineano, no se le puede acusar de confundir el modelo con lo modelado, al menos no por las mismas razones que Priest da contra Quine. Según Slater, la noción de negación, el objeto conceptual que se desea representar, es *de hecho* un OFC y, por tanto, solo es aceptable una lógica que lo modele de tal manera. Su argumento tampoco asume que cualquier desviación de la lógica clásica sea incorrecta y/o cambie el tema. Su argumento solo apela a una (supuesta) condición mínima de la negación; el que en particular el operador Booleano se ajuste a esta condición o no es irrelevante ante su objeción.

La manera más obvia de tirar el argumento general de Slater consiste en rechazar la segunda premisa: decir que la negación realmente no es (o no siempre es usada como) un OFC. La afirmación de que la negación es un OFC en todo contexto es cuestionable. Entre otras cosas, no parece funcionar así en contextos metafóricos.[42] Pero la afirmación de que la negación matemática es un OFC es mucho más plausible. Y la afirmación de que la negación que figura en la matemática "normal" (el razonamiento en torno a teorías consistentes, un ámbito del que las técnicas de recuperación pretenden dar cuenta) es un OFC parecería casi evidente. Por tanto, el argumento de Slater representa un gran obstáculo para MLMP y las propuestas de Colyvan.[43] Pero veremos que no es necesariamente un *impasse*.

3.3) Dos respuestas a Slater.

3.3.1) La respuesta preservacionista.

En el Capítulo 2 hemos visto que hay distintas estrategias para evitar la trivialización de todo conjunto inconsistente de enunciados. A la luz de la clasificación que hemos empleado, es fácil ver lo que Slater no toma en cuenta en su argumento general contra la lógica paraconsistente. Para ponerlo en nuestros términos: la tercera premisa de su argumento supone que toda estrategia paraconsistente es una estrategia de valores designados. Pero hemos visto que la estrategia preservacionista no necesita cambiar las condiciones de satisfactibilidad de la lógica que se escoja como lógica de base.

En el enfoque preservacionista, se super-pone una relación de inferencia con ciertas restricciones sobre una lógica más básica, y estas restriccions están diseñadas para dar cuenta de ciertas propiedades que la relación de consecuencia de esta lógica más básica no logra preservar por sí misma. Ya hemos definido una de estas propiedades (el nivel de inconsistencia) y hemos visto que la lógica de base puede ser cualquier lógica compacta y monotónica. Así, se puede super-poner "forcing" a la lógica clásica, y para hacer esto no es necesario re-interpretar las condiciones semánticas clásicas para las conectivas.

En síntesis, el operador de negación empleado en estas lógicas puede seguir siendo un OFC (siempre que la negación de su lógica de base lo sea). Aquí, la caracterización de una inferencia válida solo cambia con respecto a la función que se asigne a la lógica en términos de hacer que ciertas propiedades de las premisas se mantengan en la conclusión. Desde esta visión generalizada, el valor de verdad es solo una de las propiedades que podríamos querer

---

[42] Por ejemplo, en los versos de Neruda: Te amo y *no* te amo como si tuviera/ en mis manos las llaves de la dicha/ y un incierto destino desdichado.

[43] La relación con (P1) es evidente. En cuanto a (P2), el argumento de Slater la afecta indirectamente al afectar a (P1), por lo que hemos discutido acerca de la interdependencia entre ambas propuestas. Pero también la afecta de forma directa. Incluso si se ve a la lógica desde el punto de vista puramente normativo, la idea general de (P2) es prescribir algo como "de una teoría que contiene o implica una oración y su negación no debe inferirse cualquier cosa". Pero si Slater está en lo correcto y la negación paraconsistente no es lo que pretende ser, en realidad se está prescribiendo algo así como "de una teoría que contiene una oración y su X no debe inferirse cualquier cosa", donde X representa lo que sea que de hecho represente cierta "pseudo-negación" paraconsistente. De hecho, la objeción de Slater es incluso un obstáculo para PLM, debido a que implicaría que incluso la idea de que hay una negación para una lógica no explosiva especializada es un sinsentido.

preservar. Subsumir a la lógica clásica bajo este concepto más amplio de aplicación no tiene nada que ver con un truco verbal.

Entonces está claro que las lógicas que siguen una estrategia preservacionista no están sujetas a la objeción de Slater. Sin embargo, la discusión que gira en torno a dicha objeción será muy útil para nuestros propósitos. Nos permitirá elucidar mayores contrastes entre distintos enfoques lógicos y entre la paraconsistencia débil y la fuerte. Esto, a su vez, nos permitirá re-evaluar las propuestas de Colyvan con mayor claridad. A continuación analizaremos respuestas que se han dado desde el enfoque dialeteico que emplea la estrategia de valores designados.

3.3.2) La respuesta dialeteista.

a) Contradicción meta-teórica: un OFC paradójico

En cambio, parecería que quien propone una estrategia paraconsistente de valores designados tiene que impugnar la idea de que la negación es un OFC -al menos objetar que no funciona así en el contexto en el que se desea aplicar la lógica resultante. Sorprendentemente, Priest otorga este punto: [44]

> Slater and I agree that negation, whatever it is, is a contradictictory-forming operator. It is the relation that obtains between pairs such as"Socrates is mortal", "Socrates is not mortal", and "Some person is mortal", "No person is mortal". The crucial question, then, is what exactly this relationship amounts to.

Sin embargo, defiende que la negación de LP satisface las condiciones mínimas para ser un formador de contradicciones. Esto depende de cómo se caracterice la definición meta-teórica de un OFC en el lenguaje-objeto. Priest acepta las equivalencias (implícitas en el argumento de Slater) entre posible/verdadero en una interpretación y necesario/verdadero en toda interpretación. Hemos visto que, según la definición informal tradicional, las oraciones α y β son contradictorias cuando *necesariamente* se da una de las dos y no es *posible* que se den ambas simultáneamente. Estas nociones modales empleadas en la definición se prestan a una formulación lógica. Según el formalismo modal convencional, α y β son contradictorias si y solo si podemos sostener las dos afirmaciones:

Afirmación1: $\Box\,(\alpha \vee \beta)$

Afirmación2: $\neg\, \Diamond(\alpha \wedge \beta)$

---

[44] Incluso se basa en esta idea para criticar otras lógicas paraconsistentes rivales y para ofrecer un argumento a favor de LP. Véase (Priest, 2008).

donde $\lozenge$ es algún operador de posibilidad y $\Box$ un operador de necesidad en algún lenguaje lógico. Si estos operadores se interdefinen de la manera convencional (como en la lógica modal clásica), la segunda condición es equivalente a

Afirmación2': $\Box\neg(\alpha \wedge \beta)$

Reinterpretando así la noción de negación de Slater, podemos decir que un operador "¬" es un operador de negación cuando para toda α siempre es el caso que $\Box(\alpha \vee \neg\alpha)$ y $\Box\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Supongamos que L es una lógica proposicional cualquiera. Digamos que de acuerdo con la extensión modal de esta lógica (L+) toda tautología es una verdad necesaria; es decir, que se cumple el principio de Necesitación: si $\vDash_L \alpha$ entonces $\vDash_{L+} \Box\alpha$. Entonces siempre que el Principio del Tercio Excluido $(\alpha \vee \neg\alpha)$ y el Principio de no Contradicción $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ sean tautologías de esta lógica, su operador de negación es un OFC. Pero estas últimas son tautologías de LP. [45] Y, aunque esto no lo hemos visto, en las extensiones modales de LP se cumple el Principio de Necesitación (Priest, 2002). Por tanto, según Priest, la negación de LP sigue representando una negación legítima.

Sin embargo, el que en LP $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ sea una verdad lógica no implica que α y ¬α sean incompatibles. Pero para Priest esto no muestra que la negación no represente un OFC en LP. Solo muestra que es algo más que un formador de contradictorios, es decir, que es un OFC con *contenido sobrante* ("surplus content"):

> The theory of interpretations is a twentieth (or late nineteenth) century construction aimed at giving an account of validity –an account that has somewhat tenuous links to Aristotle's own notion of syllogistic validity. Now, in the model theory of classical logic –by which I mean logical theory in the tradition of Frege and Russell – A cannot be both true-in-an-interpretation and false-in-an-interpretation. This delivers (…) the fact that negation is a contradictory-forming-operator. The semantics of LP do likewise, but also make room for negation to have surplus content. They also show why the inference of Explosion is invalid –which it is, incidentally, in syllogistic.

El contenido sobrante de la negación dialeteica lleva a una contradicción en la meta-teoría. El dialeteista sostiene que *pueden* haber (de hecho hay) contradicciones verdaderas. Por otro lado, si el dialeteista sostiene que toda verdad lógica de LP es una verdad necesaria (lo que es un requisito para argumentar que la negación de LP es un OFC) también acepta la necesidad del Principio de no Contradicción. El dialeteista acepta y *niega* la necesidad de este principio. Pero esta no es, por sí misma, una refutación de una postura que sostiene que ciertas contradicciones son aceptables. Recordemos que la paraconsistencia fuerte busca

[45] Esto se sigue fácilmente a partir del Resultado LP3.

validar su propia práctica inferencial meta-teórica, y una contradicción no es fatal para quien basa su práctica inferencial en una lógica no explosiva como LP. El argumento de Slater muestra hasta dónde llegan las contradicciones que el dialeteista está dispuesto a aceptar. Pero para refutar esta postura (sin pedir la cuestión) hace falta mostrar que se compromete con una *mala* contradicción, o con un resultado repugnante como 0 = 1. En síntesis, incluso si Slater tiene razón al decir que lo que la negación de LP pretende representar es un objeto imposible, esta es difícilmente una objeción novedosa contra una propuesta que defiende que de hecho *hay* objetos imposibles.

b) Conservatividad, significado y negación

Priest admite que se puede tratar de impugnar la idea de que la negación tiene contenido sobrante. Pero esta impugnación requeriría argumentos más específicos que los de Slater porque, incluso si se acepta que la negación es un OFC, el comportamiento inferencial de un OFC no puede establecerse mediante una definición explícita. Tal vez se podría reformular el argumento de Slater apelando a una definición implícita que elimine la posibilidad de que un OFC tenga contenido adicional. Priest dice que esta es la única manera en que podría entender la relevancia de las observaciones de Slater:

> But maybe one can define some operator, let us call this $, which is a cfo and has no surplus content. If one can, then, in some ways, the behaviour of ¬ is beside the point: a classical logician can simply concede it to the paraconsistent logician, and make their point in terms of $. If we interrpet Slater's remarks about definition in this way, they have a point. The crucial question then becomes: how is $ to be defined? Slater does not say exactly what sort of definition he has in mind, nor what, exactly, he takes the definition to be. Clearly, an explicit definition, of the form "dialetheia means true contradiction", is not going to get us very far. Such definitions are eliminable without loss –or if they are not, they are creative, and so objectionable. We must appeal therefore to some notion of implicit definition.

Considera dos estrategias para tratar de caracterizar lógicamente la noción de negación que Slater tiene en mente (un OFC sin contenido adicional). La primera consistiría en caracterizar a $ semánticamente, *imponiendo* las condiciones clásicas de verdad mediante una definición como la siguiente:

Definición de \$α: \$α es verdadera si y solo si α *no* es verdadera

Lo que en términos la semántica funcional de LP sería equivalente a decir que $1 \in v(\$\alpha)$ si y solo si no es el caso que $1 \in v(\alpha)$. Si es ¬ o $ lo que expresa la negación vernácula ahora es irrelevante. El punto sería que lo que el lógico clásico *quiere* expresar cuando habla de negación puede ser expresado por $ (se verá la importancia de este punto en el siguiente apartado). Si se puede establecer que \$ caracteriza una negación con las mismas propiedades que la negación Booleana y que esto es inteligible para quien adopta LP, tal vez el "desacuerdo" entre el clásico y la defensora de la paraconsistencia fuerte sí es resultado de una confusión verbal. El problema está en establecer que las condiciones anteriores le dan a \$ el comportamiento inferencial de la negación clásica. Supongamos que se quiere establecer que una versión fuerte de ECQ es válida al emplear \$, esto es $\alpha \wedge \$\alpha \vDash \beta$. Tendríamos que razonar así:

Razonamiento meta-teórico: En una evaluación cualquiera v, no es el caso que $1 \in v(\alpha \wedge \$\alpha)$. Por tanto, en una evaluación, o no es el caso que $1 \in v(\alpha \wedge \$ \alpha)$ o sí es el caso que $1 \in v(\beta)$. Dado que sabemos que no es el caso que $1 \in v(\alpha \wedge \$\alpha)$, concluimos que $1 \in v(\beta)$ (para cualesquier α y β).

¿Cómo hay que entender este "no"? Si el "*no*" se entiende como el operador "¬" de LP, el razonamiento no tiene una forma argumental válida según las condiciones de esta lógica. Pues claramente tiene la forma de un Silogismo Disyuntivo, y hemos visto anteriormente (sección 1.2) que el Silogismo Disyuntivo es inválido en LP, incluso desde el nivel proposicional. Pero supongamos que debe entenderse como \$. Si \$ tiene el mismo comportamiento de la negación clásica, la inferencia sería aceptable pero, de acuerdo con Priest, entramos en un círculo vicioso. Queríamos mostrar que las condiciones de verdad de \$ caracterizaban una noción particular: un OFC (sin contenido adicional) que se comporta como la negación Booleana. Para inferir que este es el caso, tendríamos que afirmar la conclusión en la meta-teoría.

La segunda estrategia estaría basada en teoría de pruebas. Uno simplemente asumiría que \$ es una conectiva que obedece todas las reglas de inferencia que gobiernan a la negación en lógica clásica (se asume que el lector está familiarizado con ellas, al menos a nivel proposicional). En este caso, se podría establecer fácilmente que \$ cumple ECQ (y otros principios clásicos) y, con ello, estaríamos seguros de que \$ representa un OFC sin contenido adicional. Según Priest, el problema con esta estrategia es que no hay garantía de que esta especificación determine una noción significativa. Un punto similar fue defendido anteriormente por Prior (1960) con respecto a la famosa conectiva "tonk".[46] Priest sostiene que esta clase de inserción bruta del operador unario \$ sería tan desastrosa como la inserción de la conectiva binaria "tonk". La razón es que la extensión resultante no sería *conservativa*[47] desde el punto de vista de la paraconsistencia fuerte:

---

[46] Prior mostró que las reglas que determinan el comportamiento lógico de una conectiva no son suficientes para determinar su significado (ni para mostrar que dicha conectiva represente algo que tenga sentido). Su reducción al absurdo se basa en la conectiva binaria "tonk", gobernada por las reglas $\alpha \vDash \alpha \text{tonk} \beta$ y $\alpha \text{tonk} \beta \vDash \beta$. Claramente, si tonk representara una noción legítima podríamos probar cualquier cosa.

[47] Una conectiva es conservativa cuando su adición a un sistema no permite inferir fórmulas que no la contienen y que no son inferibles previamente a su adición.

> Clearly, if tonk were a legitimate notion, we could prove everything. But if \$ were a legitimate notion we could, similarly, prove everything, given only that we have the T-schema and some way of forming self-referential truth-bearers. We simply formulate a liar sentence, L, of the form \$T[L], and establish L ∧ \$ L in the usual way.

Hemos visto anteriormente que la paraconsistencia fuerte busca una semántica cerrada, bajo una adopción no trivial de un predicado de verdad gobernado por el esquema-T.[48] El hecho de que \$ permita inferir cualquier cosa a partir de un resultado de este esquema muestra que la adición de \$ no es conservativa. A su vez, este hecho implicaría que ninguna conectiva que obedezca todos los principios inferenciales de la negación clásica puede representar una noción que tenga sentido. La noción de negación que *quiere* expresar el clásico estaría, para la paraconsistencia fuerte, tan vacía de contenido como “tonk”. Claro que este argumento lleva mucha carga teórica. Lo que es o no es una extensión conservativa depende de lo que uno desea extender. La conectiva “tonk” no es conservativa para la lógica clásica (y otras) porque interfiere con su “maquinaria” inicial. En el argumento de Priest, se supone que un predicado de verdad forma parte de la “maquinaria” lógica universal de la paraconsistencia fuerte. Pero él defiende que el esquema-T es una constante lógica (similar al predicado de identidad en lógica de primer orden, cuando es caracterizado por sus axiomas habituales).

Un argumento similar en contra de la conservatividad de la negación clásica se basa en el esquema de Abstracción/Comprensión Irrestricta:

(Abs): $\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \alpha)$ (donde x no ocurre libre en α)

Recordemos que la reconstrucción de TCN es otro objetivo central de la paraconsistencia fuerte y que esta teoría está supuestamente gobernada por el esquema anterior. A su vez, la justificación para introducir este esquema en la encapsulación de TCN es que (junto con el esquema de Extensionalidad) permite expresar la idea de que toda propiedad determina un conjunto y viceversa. Hemos visto que (Abs) genera una contradicción en lógica clásica de primer orden: sustituyendo α por $y \notin y$, o sea $\neg (y \in y)$, e instanciando el existencial por r obtenemos $\forall y ((y \in r) \leftrightarrow \neg (y \in y))$. Instanciando el universal tenemos $(r \in r) \leftrightarrow \neg(r \in r)$. El proceso de desabreviación de $\leftrightarrow$ en términos de $\vee$ y $\neg$ nos da la contradicción $(r \in r) \wedge \neg(r \in r)$. En las extensiones de LP a primer orden obtenemos la misma contradicción. Sin embargo, el operador de negación de LP no es explosivo, por lo que si esta es la lógica subyacente $(r \in r) \wedge \neg(r \in r)$ no implica cualquier cosa. Pero, como en el caso anterior, si \$ representara una noción de negación legítima podríamos sustituir α por \$(y ϵ y) y, mediante un procedimiento análogo, obtener (r ϵ r) ∧ \$(r ϵ r). De aquí se seguiría cualquier cosa. Por tanto, la adición de

[48] $T[\alpha] \leftrightarrow \alpha$, donde los “brackets” indican un dispositivo de formación de nombres. . Por el típico proceso de diagonalización, si L es de la forma \$T[L], obtenemos la contradicción (explosiva) usual.

\$ no generaría una extensión conservativa. De nuevo, de esto se seguiría que la negación Booleana no tiene sentido (más precisamente, que ninguna conectiva significativa puede satisfacer todos los principios inferenciales de la negación clásica).

Es muy poco intuitivo afirmar que la negación Booleana no tiene sentido, y Priest admite esto. Pero replica que lo que es o no es una especificación significativa no es una cuestión auto-evidente, y que estas cuestiones siempre conllevan mucha carga teórica. Propone evaluarlas de manera holística. La cuestión de qué nociones son significativas depende de supuestos auxiliares que acompañan una propuesta lógica, por lo que dependen de nuestra evaluación de la propuesta general. En esta evaluación, deben tomarse en cuenta los logros totales, las consecuencias que se seguirían de atrincherar esta propuesta en el corazón de la ciencia. Muchos criterios pueden entrar en tensión. Por ejemplo, las lógicas paraconsistentes que se prestan a los propósitos de la paraconsistencia fuerte no ofrecen la armonía y simplicidad que caracterizan a la lógica clásica. Por otro lado, la paraconsistencia fuerte permite establecer concepciones más simples de "conjunto" y "verdad". Obviamente, él cree que la balanza total, últimamente, se inclina a favor de la paraconsistencia fuerte.

3.4) Puntos de quiebre entre las estrategias de valores designados

En contraste con lo que sucede en LP, el Principio de no Contradicción no es una verdad lógica para la negación débil en los Sistemas-C. Por tanto, el enfoque da Costa no puede usar una defensa análoga a la de Priest contra la objeción de Slater. La negación débil de estos sistemas parece ser solamente un OFS: tenemos que $\alpha \vee \neg \alpha$ es una verdad lógica en Cw (el sistema más débil), mientras que $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ no es una verdad lógica en C1 (el sistema más fuerte).[49] Si la negación débil en estos sistemas no cumple con los requisitos mínimos para representar un OFC (y no hay una respuesta desde la meta-teoría similar a la de Priest), no están claras las razones para interpretar este operador como una negación; al menos en relación a los criterios mínimos que hemos dado (y *tienen* que haber criterios mínimos). Ahora bien, ¿qué pasa con la negación fuerte que podemos reconstruir en estos sistemas?

Hay una diferencia más importante entre nuestros dos enfoques estratégicos de valores designados, que atañe a los objetivos principales de la paraconsistencia fuerte. En la discusión expuesta anteriormente, Priest no solo defiende que hay una noción legítima de negación con contenido sobrante que es al mismo tiempo un OFC (llamémosla OFC+). También *rechaza* la idea de que pueda darse una concepción inteligible de la negación Booleana o, más precisamente, una caracterización lógica significativa de un OFC sin contenido sobrante

[49] $\alpha \vee \neg \alpha$ es una verdad lógica en Cw por la tercera condición de los valores de verdad de este sistema (si $v(\alpha) = 0$ entonces $v(\neg\alpha) = 1$), y por las condiciones de la disyunción, que son equivalentes a las clásicas. En C1, el siguiente es un contraejemplo de PNC:si $v'(p) = 1$ y $v'(\neg p) = 1$, tenemos que $v(p \wedge \neg p) = 1$; por tanto, no se viola ninguna restricción cuando $v' \neg(p \wedge \neg p) = 0$ (recordando la independencia asimétrica de la negación débil y que sus condiciones no son veritativo-funcionales). Obviamente Cw es una sub-lógica de C1, ya que la clase de evaluaciones admisibles en C1 está propiamente más restringida.

(llamémosla OFC-).[50] El argumento era que el operador resultante no generaría una extensión conservativa en relación al proyecto lógico total de la paraconsistencia fuerte. De aquí surge una especie de situación de inconmensurabilidad (a falta de una descripción más precisa) entre el proponente de LP y el lógico clásico. En cambio, desde C1 (y otros sistemas de esta clase) la negación clásica, la noción de negación que Slater quiere expresar, es perfectamente inteligible. Más aún, de esto depende la posibilidad de lograr una recuperación clásica efectiva. NEG es un OFC según el criterio de Priest: teniendo en mente el Resultado A, es obvio que todas las fórmulas de la forma $\alpha \vee NEG\alpha$ y $NEG(\alpha \wedge NEG\alpha)$ son verdades lógicas de C1. También es obvio que NEG es un OFC según el criterio de Slater (es, de hecho, un OFC-): α y $NEG\alpha$ no son compatibles (nunca se satisfacen en la misma interpretación) y forzosamente se da una de las dos (una de las dos siempre se satisface en toda interpretación). Como hemos visto, NEG concuerda con los principios clásicos de inferencia (al menos lo hemos visto en nuestro fragmento no implicativo). En particular, tenemos una versión de ECQ: $\alpha, NEG\alpha \vDash_{C1} \beta$ (para α y β arbitrarias).

La discusión entre quien propone C1 y Slater no sería si la concepción Booleana de la negación tiene sentido. El proponente de C1 la toma como una negación fuerte, una noción reconstruible a través de supuestos capaces de expresar el comportamiento consistente del lenguaje empleado. Tal vez diferirían en si la negación vernácula es siempre un OFC, o si existen nociones más débiles de negación. Tal vez hay múltiples maneras de negar algo en distintos contextos; de tal forma que no todos generarían incompatibilidades u oraciones que estén en relación estricta de contradicción. Pero conceptualmente estarían de acuerdo en que un OFC- (ya sea NEG en C1 o $\neg$ en LC) satisface ECQ.

Sin embargo, otorgar este punto viene a un precio en cuanto al proyecto de la paraconsistencia fuerte. Pues se supone que (Abs) expresa la idea de que toda condición determina un conjunto. Ahora bien, ¿qué pasa con el conjunto de los conjuntos que no se contienen a sí mismos, donde este "no" representa una negación fuerte? Llamemos a este conjunto R-. El argumento habitual parecería establecer que R- pertenece a sí mismo y no pertenece a sí mismo y, si este "no" es un OFC-, se avecina la explosión. Por razones de espacio, no veremos las ramificationes implicativas de los Sistemas-C, ni sus posibles extensiones a primer orden. Simplemente reporto que en las que se puede expresar la consistencia de una fórmula (todos los Ci, para i finita), se puede obtener un operador al estilo de NEG (que se comporta como la negación Booleana, tal como hemos ejemplificado con C1) y si (Abs) no se adopta con restricciones, hay argumentos usuales que llevan a una contradicción fuerte. La cuestión, vista de manera informal, es que se podría contruir una fórmula α de la forma $\beta \wedge \beta 0$ de tal manera que β exprese que hay un conjunto de conjuntos que no pertenecen a sí mismos y $\beta 0$ exprese la consistencia de β. Si α define una condición, los argumentos usuales de sustitución en (Abs) llevan a una contradicción fuerte de la forma $\alpha \wedge NEG\alpha$.[51] Los detalles no son importantes aquí, ya que el consenso parece ser que el

[50] Nótese que digo "rechaza" y no "niega". Como hemos visto, estas nociones no son equivalentes para quien sigue LP.

[51] Recordemos que la parte ($\vee, \wedge \neg$) de estos sistemas es la adición de una negación no veritativo-funcional a un fragmento positivo de la lógica clásica. Una de las ramificaciones implicativas consiste en dar condiciones

problema está en la capacidad de reconstruir una negación Booleana. El resultado es que debe restringirse el poder de (Abs) para evitar la explosión[52]. Pero entonces se vuelve difícil argumentar que el esquema resultante realmente expresa la idea de que toda condición determina un conjunto.[53]

No hay que meternos en detalles técnicos para expresar un punto conceptual interesante en torno a las estrategias de valores designados que hemos visto, y su plausibilidad como ramificaciones de MLPM. Hemos visto que la negación de LP no expresa rechazo (α y ¬ α son compatibles), y que no hay nada con que se pueda suplementar ¬α para que la fórmula resultante sea incompatible con α. Es decir, en LP rompemos con la equivalencia fregeana entre aceptar la negación de una oración y rechazar esa oración y no hay reconstrucciones complejas para expresar la noción de rechazo o para reconstruir un OFC-. Como hemos visto, esta incapacidad no es solo una curiosidad de LP, sino que es un requisito para llevar a cabo el proyecto de la paraconsistencia fuerte (la adición de un OFC- no es conservativa). En los Sistemas-C también se rompe esta equivalencia en cuanto a la negación débil, pero en algunos de ellos es posible expresar que uno rechaza α reconstruyendo una negación fuerte. La capacidad de hacer esto es vital para lograr la recuperación clásica bajo la idea de que en ciertos contextos hay supuestos de consistencia implícitos y, por tanto, para defender un monismo lógico paraconsistente plausible. Sin embargo, conceder que hay reconstrucciones legítimas de la noción de negación Booleana abre la puerta a la explosión, al permitir una versión fortalecida de las paradojas auto-referenciales: siempre que sea posible expresar un OFC-, se podrán formar nuevas versiones de la paradoja de Russell. Así, “el conjunto de conjuntos que no se contienen a sí mismos”, donde este “no” expresa rechazo, parecería expresar una condición legítima; y el razonamiento habitual parecería llevarnos a aceptar y rechazar que este conjunto se contiene a sí mismo simultáneamente. En un enfoque de valores designados, dos fórmulas incompatibles (en este caso, una oración y la oración que expresa su rechazo) sí implican cualquier cosa.

3.5) El dilema de la negación fuerte

Si contrastamos ambas estrategias de valores designados, el enfoque dialeteista de Priest con los enfoques que admiten usar una negación débil, parece que entramos en un dilema: o bien tenemos que imponer restricciones sobre el esquema de abstracción o bien tenemos que renunciar a la capacidad de expresar la actitud de rechazo. Supongamos que optamos por el

“clásicas” al condicional: *$\alpha \rightarrow \beta$ si y solo si $v(\alpha) = 0$ o $v(\beta) = 1$*. Los postulados que expresen consistencia permiten de nuevo definir una negación fuerte en dicha extensión. Otra ramificación implicativa consiste en dar un condicional que recupera el fragmento positivo de la lógica intuicionista. Pero esta diferencia no importa en los sistemas que tienen un operador de consistencia (todo Ci para i finita), ya que este operador siempre permite definir una negación (al estilo NEG) con las propiedades de la negación clásica, y esta extensión no es conservativa para el fragmento positivo de la lógica intuicionista. Véase (Priest, 2002).

[52] Véase (da Costa, 1986)

[53] Véase (Priest, 2002).

primer cuerno del dilema. Aquí, las restricciones mencionadas no podrían ir en contra de la afirmación según la cual este esquema expresa y siempre expresó una idea simple: que toda condición determina un conjunto. Este es ciertamente un requisito en nuestro contexto de discusión, dado que la afirmación mencionada es una premisa de los argumentos de Colyvan. Pero si se admite que un OFC- es una noción legítima, *prima facie* no está claro cómo evitar paradojas fortalecidas sin que ello implique modificar (Abs) de tal manera que deje de expresar dicha idea simple. Pues siempre que sea posible expresar que se rechaza algo a través de una negación fortalecida, habrá una condición simple que hable de un conjunto de conjuntos que <u>no</u> se contienen a sí mismos.

Si optáramos por el segundo cuerno del dilema, perderíamos la capacidad de expresar la relación entre lo que se acepta y se rechaza. Pues se pierde la equivalencia fregeana entre rechazar P y aceptar la negación de P. En la propuesta general de Colyvan hay una concepción implícita de la lógica como un modelo descriptivo inferencial. Y la incapacidad de expresar la relación entre la aceptación, la negación y el rechazo parecería representar una gran pérdida de amplitud para un modelo de este tipo.

Técnicamente, este último problema solo afectaría a la versión descriptiva de la propuesta de Colyvan (P1). De hecho Priest está en contra de una visión descriptiva de la lógica en este sentido, ya que no cree que debamos asumir que las inferencias del sentido común siempre corespondan con *la* lógica correcta (cualquiera que esta sea). Esto es porque tiene una concepción total de la lógica, como una teoría general nada obvia que se compromete con sub-teorías de la verdad, del lenguaje y del pensamiento. Como hemos visto, para la paraconsistencia fuerte el rechazo absoluto de una oración, aquello que el lógico clásico quiere expresar al imponer sus reglas sintácticas, representaría un concepto ininteligible. Esto se debe a que no es una noción conservativa con respecto al proyecto total de la paraconsistencia fuerte. Es decir, no ve el proyecto de rescatar TCN o el de buscar una teoría universal de la verdad como razones extra-lógicas para no aceptar la negación Booleana. Todo lo que afecte al proyecto general de la paraconsistencia fuerte es algo propiamente lógico para sus defensores. Colyvan podría adherirse a este proyecto total de Priest para seguir sosteniendo la versión normativa de su propuesta (P2), pero también tendría que rechazar P1 (por las mismas razones por las que Priest no acepta una concepción linealmente descriptiva de la lógica).

Sorprendentemente, para mantener P2 desde una estrategia que cambie las condiciones de satisfactibilidad de la negación, la paraconsistencia fuerte parece ser la única alternativa. Desde la paraconsistencia débil, no parecen haber razones de peso para decir que la negación clásica es un sinsentido. Y siempre que se admita que esta noción tiene sentido, surgirán versiones fortalecidas de las paradojas a las que llevan las teorías que quien sostiene P2 quiere rescatar; y estas versiones fortalecidas parecerían siempre llevarnos de vuelta a la explosión (como hemos visto). Una evaluación de la paraconsistencia fuerte como proyecto general rebasa los límites de este trabajo. Para nuestros propósitos, basta con haber aclarado esta dependencia. Estos resultados se dan desde la concepción de un cambio de lógica que sigue una estrategia de valores designados. Pero hemos visto que el preservacionismo ofrece una respuesta mucho más simple contra la objeción de Slater. Todavía falta ver si al adoptar la estrategia preservacionista es posible rescatar P1 y/o interpretar P2 desde la paraconsistencia débil.

3.6) Unificación de las escuelas paraconsistentes: una conjetura preservacionista.

Hemos visto que el enfoque preservacionista no tiene que proponer ningún operador alterno de negación. Queda por ver qué implica optar por este enfoque en relación a P1 y P2. Para rescatar una teoría inconsistente, lo que este enfoque *en general* propone hacer es (a) determinar si la teoría tiene propiedades deseables (más allá de la satisfactibilidad y la consistencia), (b) definir tales propiedades deseables y, finalmente, (c) idear una relación de inferencia super-puesta que sea capaz de preservarlas. Presentamos una instanciación de esta estrategia, en donde el nivel de consistencia define la propiedad deseable y donde "forcing" representa la relación de inferencia que garantiza la preservación lógica de esta propiedad. Pero no hemos visto cómo es que esta instanciación del enfoque se aplica a una teoría particular. Lo primero que hay que admitir es que "forcing" no fue originalmente diseñada para rescatar las teorías que Colyvan propone recuperar. La presentación que hemos dado ha servido para ilustrar los mecanismos que sigue esta estrategia y para concretar las técnicas de recuperación que es capaz de ofrecer.

Pero lo que importa aquí es el enfoque general; sobre todo porque Bryson Brown ha demostrado que en cualquier caso es posible re-interpretar otras lógicas paraconsistentes desde la estrategia preservacionista.[54] En efecto, Brown muestra que podemos encontrar otras propiedades generales para formar una relación de consecuencia que las preserve y que sea equivalente a la relación de consecuencia original de LP. Y esto sugiere una conjetura nada improbable: que cualquier lógica paraconsistente es susceptible de ser re-interpretada así.[55] Este sería, en principio, un resultado espectacular desde el punto de vista de la paraconsistencia débil. Pues quierría decir que uno no tendría que comprometerse con una teoría de la verdad particular, ni con una interpretación excéntrica sobre el significado de las conectivas para elegir una lógica paraconsistente en general, ni para emplear la lógica paraconsistente que fuera más conveniente en cierto dominio. Cabe también observar que dicho resultado incluso permitiría enmarcar la discusión anterior (Sección 1.3.3) entre monismo y pluralismo lógico de manera más clara. La pregunta sería: ¿Hay un conjunto determinado de propiedades estructurales que siempre es racional preservar mediante una inferencia o es la preservación lógica de distintas propiedades dependiente de un contexto o dominio de aplicación específico?

Hemos visto que una condición necesaria para que P2 y P1 se justifiquen es que MLMP sea sostenible. Es nuestra nueva forma de enmarcar la cuestión, sostener MLMP equivaldría a decir que hay un conjunto delimitado de propiedades teóricas que definen aquello que hay

[55] Véase (Brown, 2003).

que preservar en toda inferencia matemática correcta. El valor de verdad designado sería tal vez la única propiedad que debiera preservarse en dominios de consistencia -al menos una propiedad que fuera indistinguible de las demás en estos dominios, así como en "forcing" la preservación clásica de verdad o satisfactibilidad coincide con la preservación de consistencia de primer nivel. Esto último armonizaría perfectamente con la necesidad de dar cuenta de la naturalidad de las inferencias clásicas en contextos de consistencia.

Entonces, desde este enfoque, sostener P2 equivaldría a decir que toda inferencia matemática correcta debería basarse en el hipotético conjunto de propiedades preservables. Mientras que sostener P1 equivaldría a decir que la inferencia pre-teórica siempre ha operado así (de manera no autoconsciente) en la práctica. Incluso si se cumplieran todos estos resultados hipotéticos esperanzadores, habría un problema serio con P1. No es fácil sostener que la noción de inferencia pre-lógica se ajusta a los mecanismos complejos que utiliza la estrategia preservacionista. La idea, por ejemplo, de que hacer una partición indexada para definir el nivel de consistencia del conjunto de nuestros compromisos teóricos es algo que hacemos intuitivamente no parece muy plausible. Y lo mismo podría decirse en cuanto a la re-interpretación preservacionista de LP que hace Brown (es tan o más compleja que nuestra presentación de "forcing"). E incluso si se cumpliera la conjetura de Brown, no tenemos la garantía de que toda re-interpretación de una lógica paraconsistente pueda ser intuitiva y natural. Tampoco tenemos la garantía de que cualquier lógica que queramos re-interpretar pueda ser caracterizada como la preservadora de una propiedad que tenga sentido extra-teórico (al menos, que dicha propiedad no sea el producto de una serie de definiciones lógicas *ad hoc*). Hemos admitido en el primer capítulo que ningún modelo descriptivo es perfecto. Tal vez no es justo exigir que este modelo se apegue fielmente a la realidad. Pero aquí muere la esperanza de lo que planteábamos en la sección 1.3.2: que fuera posible encontrar un modelo paraconsistente que subsumiera estrictamente al clásico, al extender el dominio de explicación de la lógica sin hacer sacrificios excesivos de simplicidad.

En cambio, el ángulo normativo de la propuesta de Colyvan (P2) no sufriría tan directamente a causa de este desajuste entre la inferencia intuitiva o pre-teórica y los mecanismos nada evidentes que el enfoque preservacionista suele usar (aunque sí es un problema indirecto si se toma el cuenta el equilibrio reflexivo que en la sección 1.3 dijimos que debía darse entre P2 y P1). Pues para evaluar una propuesta normativa no se exige que *de hecho* exista cierta concordancia entre estos elementos. Dada la complejidad mencionada, P2 podría seguir pareciendo una imposición exagerada. Pero, tal como hemos visto en las técnicas de recuperación del capítulo 2, en el enfoque preservacionista la complejidad deductiva solo sube de nivel cuando la inconsistencia sube de nivel (y cabría esperar lo mismo en cuanto a la re-interpretación de distintas lógicas paraconsistentes siempre que la preservación de verdad subsuma a otras propiedades en contextos de consistencia). Exigir que suba el nivel de complejidad deductiva cuando surge una inconsistencia en cierta teoría no suena nada descabellado cuando se tiene en mente que la alternativa (clásica) consiste en trivializarla por completo; lo que en términos prácticos equivaldría a tirar la teoría a la basura.

Pero todas estas consideraciones dependen de la veracidad de MLMP junto a varias conjeturas que hemos venido planteando. Es necesario enlistar tales conjeturas con exactitud:

(a) Que la conjetura de Brown sea verdadera. Es decir, que toda lógica paraconsistente de valores designados sea re-interpetable en términos preservacionistas. En el peor de los casos, que toda lógica paraconsistente *pertinente* sea re-interpretable ("pertinente" en el sentido de ser la mejor o la única que hay para rescatar las teorías que nos conciernen aquí).

(b) Que en la(s) lógica(s) pertinente(s) la preservación clásica de verdad/consistencia subsuma a la preservación de las otras propiedades relevantes para MLMP siempre que se razone dentro de un dominio de consistencia.

(c) Que en toda lógica pertinente que sea caracterizable como la preservadora de una o varias propiedades, esta(s) propiedad(es) tenga(n) sentido extra-teórico. Que nos quede claro qué representan estas propiedades y por qué es deseable mantenerlas al hacer inferencias; así como en la presentación de "forcing" queda claro qué representa el nivel de inconsistencia y qué logramos al preservarlo (i.e., que no proliferen las inconsistencias).

(d) Que las propiedades relevantes para MLMP sean compatibles entre sí. Podría ser el caso que para preservar cierta propiedad relevante sea necesario romper con las condiciones que definen la preservación de otra(s). O podría ocurrir que, incluso si dichas propiedades fueran compatibles, una relación de inferencia que las tomara en cuenta a todas fuera tan débil que no pudiera ayudarnos a re-construir ninguna teoría inconsistente de manera satisfactoria (recordemos que una lógica que no permite inferir nada sigue siendo, técnicamente, una lógica paraconsistente). Por ejemplo, podría ocurrir que no existiera una única relación de consecuencia caracterizable bajo una re-interpretación preservacionista que tuviera la fuerza deductiva necesaria para re-construir de manera congruente tanto a TCN como a CT. En el mejor de los casos, estas cosas no ocurrirían. En el peor de los casos, la preservación de una propiedad relevante siempre sería dependiente del contexto. Aquí la última opción sería que esta dependencia contextual fuera expresable y justificable lógicamente. Sería algo análogo a lo que logran hacer las técnicas de recuperación que hemos explorado en el Capítulo 2 (solo que en vez de dar cuenta del razonamiento clásico en dominios de consistencia, daríamos cuenta del razonamiento paraconsistente en distintos dominios de inconsistencia).

Apenas y es posible imaginar la tarea titánica que haría falta para resolver todas estas cuestiones. Pero aquí se manifiesta un alto contraste entre nuestra presentación y el planteamiento original de Colyvan. A la luz de nuestro análisis, queda claro que Colyvan planteaba una dicotomía con demasiado optimismo. A saber: que o bien la lógica de las matemáticas es explosiva o no lo es. Y que si no siempre es o debe ser explosiva (como parecería ser el caso en torno a los ejemplos que él discute) entonces es o debe ser paraconsistente. Pero queda abierta la posibilidad de que simplemente no exista una lógica que se amolde al nivel de amplitud que exige su propuesta. Hasta ahora no hay cómo descartar la posibilidad de que tengamos que conformarnos con las idealizaciones del modelo clásico y que, al final del camino, tengamos que ceder a la tentación (advertida por Mares en 1.3.2) de relegar las excepciones que no se ajustan a este modelo al campo de la pragmática. Sin embargo, el planteamiento de Colyvan nos ha llevado por un camino que muestra que hay buenas razones para buscar una lógica –o al menos una estrategia lógica generalizada- que ayude a realizar el proyecto de la paraconsistencia universal (ya sea en su versión débil o en su versión fuerte). En la medida en que esto sea cierto, valdrá la pena tratar de contestar las preguntas que aquí hemos dejado abiertas.

Conclusiones:

La idea de que la lógica de las matemáticas es paraconsistente no es tan superflua como podría parecer antes de haber investigado los mecanismos de defensa (tanto formales como conceptuales) que coexisten en la jungla paraconsistente. Al mismo tiempo, el nivel de ambición de esta idea, tanto en su versión normativa como en su versión descriptiva, conlleva exigencias difíciles de enfrentar. De entrada no es claro si es posible extender la amplitud del modelo clásico para dar cuenta de casos históricos de razonamiento no explosivo sin entrar en una situación análoga a la del geómetra constructivista Gentzen, que al tratar de ajustar su ciencia a la realidad con precisión absoluta se ve forzado a renunciar a la universalidad y a la simplicidad que ofrecen las idealizaciones tradicionales. Los proponentes más vehementes de la paraconsistencia rechazan esta analogía y defienden que la relación entre el modelo paraconsistente y el modelo clásico es más similar a la de una teoría que subsume estrictamente a otra, tal como la Teoría de la Relatividad supuestamente subsume a la física Newtoniana. Pero para defender que esta última analogía es la correcta, es necesario superar varios problemas.

Así como el físico relativista puede dar cuenta de la precisión del modelo Newtoniano en bajos niveles de aceleración, el lógico paraconsistente anheloso debe poder dar cuenta de la naturalidad de los principios clásicos en dominios de consistencia. Al rechazar el principio de explosión, uno está forzado a rechazar otros principios clásicos esenciales. Así que es necesario explicar por qué es que tales principios nos parecen tan intuitivos. La explicación pro-paraconsistente más obvia consiste en decir que tales principios operan correctamente en dominios de consistencia (a los que estamos más acostumbrados), pero fallan a la hora de extender el razonamiento hacia la inconsistencia. Para para que esta distinción no sea una mera excusa y se convierta en una virtud teórica, es necesario que la dependencia contextual sea lógicamente expresable, o que esté presente en los mecanismos bajo los que opera una relación de consecuencia lógica. Este es el proyecto de las técnicas de recuperación.

No hemos visto todas las técnicas de recuperación que existen en el mercado de la paraconsistencia, pero hemos hecho una taxonomía que nos permite clasificar distintos tipos de estrategia general y hemos visto algunos ejemplos de tales tipos de estrategia. El preservacionismo extiende el conjunto de las propiedades que una relación de consecuencia debe mantener. Siempre que la preservación tradicional de un valor designado equivalga vacuamente a la preservación de otras propiedades en contextos de consistencia (como la preservación de consistencia/verdad coincide con la preservación del nivel de consistencia en dominios consistentes), la dependencia contextual (la diferencia entre razonar desde la consistencia y razonar desde la inconsistencia) quedará inserta en el mismo engranaje del sistema. En cambio, las escuelas que simplemente cambian las condiciones de satisfactibilidad de las conectivas se ven forzadas a expresar la dependencia contextual en el lenguaje lógico.

La escuela de da Costa logra la recuperación mediante supuestos que expresan la idea de que una fórmula se comporta de manera consistente. Estos supuestos de consistencia operan como suplementos adicionales que permiten re-construir el razonamiento clásico. Nosotros hemos interpretado los supuestos de consistencia como elementos que permiten re-construir una negación equivalente a la clásica. La escuela australiana ofrece técnicas mucho menos elegantes que las de da Costa: se extiende el lenguaje mediante un condicional intensional y se expresan tal cual todas las contradicciones que "implican" (en el sentido de este condicional) cualquier fórmula. Pero a pesar de que el enfoque de da Costa es más intuitivo y más deseable desde el punto de vista de la simplicidad que el último, la capacidad de re-construir una negación fuerte se convierte en una desventaja en el contexto de nuestra discusión.

En efecto, así como el físico relativista debe poder afirmar que su teoría lidia (al menos parcialmente) con los mismos objetos que son descritos por la teoría Newtoniana para poder sostener que ha subsumido y superado esta teoría, el lógico paraconsistente debe poder afirmar que su lógica lidia con los mismos objetos conceptuales que ocupan a la lógica clásica. En particular, es necesario argumentar que al rechazar la explosión no se ha simplemente sustituido la noción pre-teórica de negación por algún concepto enteramente nuevo. La familiaridad notacional no es suficiente para sostener que una conectiva representa una noción. Hay que establecer condiciones mínimas, y la definición lógicamente neutral de un operador formador de contradictorios parece representar al menos una condición necesaria para que una conectiva sea interpretada como una negación. En el caso de los Sistemas-C, el lógico clásico puede decir que la negación fuerte (NEG) es lo que él realmente entiende por negación y que la negación débil de estos sistemas es solo un formador de sub-contrarios. Pero la desventaja mencionada en el párrafo anterior es más grave que esto. Incluso si se concediera que la negación débil es una negación real, el problema para nosotros empieza desde que se concede que la negación que el lógico clásico tiene en mente tiene sentido y es expresable. Pues si, tal como Colyvan sostiene, una característica esencial de TCN es que contiene la idea de que toda condición representa un conjunto, siempre que la negación clásica fuera expresable debería ser posible crear paradojas de Russell reforzadas.

El enfoque de Priest sí tiene una respuesta, por más excéntrica que sea, ante este problema. Es necesario para este enfoque sostener que le negación clásica es un sinsentido. Si se impone mediante condiciones semánticas para caracterizarla, estas condiciones serán re-interpretadas dialeteicamente en la meta-teoría, y si se imponen condiciones sintácticas se argumentará que tales condiciones no son preservativas, porque arruinan el proyecto lógico general de la paraconsistencia fuerte. Así, Priest tiene una respuesta más congruente (irónicamente) en defensa de su enfoque. La renuencia a aceptar una lógica común en la meta-teoría hace que se manifieste una aparente dimensión de inconmensurabilidad dentro de estas discusiones.

Al final, solo una evaluación total de las ventajas y desventajas teóricas de los modelos lógicos que entran en esta relación de rivalidad podrá decidir la cuestión. Y solo será posible empezar a hacer esta comparación cuando se manifieste todo el potencial del proyecto de la paraconsistencia fuerte (que sigue en desarrollo). Y por esta razón no podemos dar un argumento concluyente en favor de interpretar las propuestas de Colyvan desde la paraconsistencia débil. Solamente hemos notado una desventaja particular de la paraconsistencia fuerte en relación a P1: Aunque en una lógica como LP no es necesario reconstruir un OFC- para lograr la recuperación clásica (en extensiones intensionales o en

LPm), su adopción como un modelo general del razonamiento claramente implica una pérdida en expresividad y, junto con la incapacidad de re-construir la negación clásica, se pierde la capacidad de modelar lógicamente la relación de inferencia racional entre lo que se acepta y se rechaza. Esta es una razón de peso para decir que se rompe la analogía con las teorías de la física (una subsumiendo a la otra sin pérdidas), al menos desde el ángulo descriptivo.

El enfoque preservacionista no sufre ante el problema del cambio de tema, ya que no necesita modificar las condiciones de satisfactibilidad para las conectivas lógicas. Esta es una gran ventaja con respecto a los otros enfoques, al menos desde un punto de vista puramente filosófico. Sin embargo, las instanciaciones originales de este enfoque general no fueron diseñadas para tratar todas las teorías inconsistentes que son pertinentes para el planteamiento de Colyvan (de hecho "forcing" trivializa cualquier teoría que contenga una *fórmula* contradictoria). Pero los hallazgos de Bryson Brown sugieren que es posible hacer una re-interpretación preservacionista de las lógicas que sí son capaces de re-construir dichas teorías. Su conjetura, junto con sus posibles corolarios, crea la esperanza de unificar varias lógicas paraconsistentes pertinentes bajo el mismo esquema conceptual. Este sería un resultado muy prometedor para quienes deseamos encontrar un modelo universal que explique cómo razonamos y/o debemos razonar desde la inconsistencia.

A partir de los resultados obtenidos en este trabajo, no podemos sostener ni rechazar por completo las propuestas de Colyvan. Nuestro análisis solo ha explorado diversas opciones y sus posibles consecuencias. A pesar de que hemos dejado varias preguntas abiertas, hemos alumbrado el camino que conduce a sus respuestas en la medida de lo posible. También hemos enmarcado la cuestión central con mayor precisión. No hemos discutido resultados de lógicas específicas aplicadas a teorías matemáticas particulares, sino que hemos visto los requisitos puramente lógicos y filosóficos generales que una propuesta pro-paraconsistente con ambiciones de universalidad debe superar antes de entrar en estos detalles. Ahora al menos tenemos una idea más clara de todo lo que haría falta para poder afirmar que la lógica de las matemáticas es o debería ser paraconsistente. Un trabajo exhaustivo sobre este tema tendría que hacer un compendio de los resultados concretos que han surgido al aplicar distintas lógicas para re-construir distintas teorías. Al mismo tiempo, esperamos que este trabajo parcial sirva como un marco de referencia para evaluar las implicaciones filosóficas que entrañan las conquistas puntuales de la lógica paraconsistente aplicada.

Apéndice:

a) Abreviaciones

CT: Cálculo temprano. Se refiere ampliamente al Cálculo que fue desarrollado a finales del siglo XVII y que invocaba entidades matemáticas llamadas infinitesimales o fluxiones, que eran concebidas como componentes cambiantes que se acercan a cero.

ECQ: *Ex Contradictione Quodlibet* (en latín). Es el principio que expresa que cualquier oración arbitraria se sigue a partir de una contradicción. También suelo referirme a esto como *principio de trivialización*.

FLT: Último Teorema de Fermat. En este caso uso la abreviación del inglés (Fermat's last Theorem) para que no haya confusión con las citas usadas. Este teorema dice que no hay enteros positivos x, y y z tales que $x^n + y^n = z^n$ para cualquier entero n mayor o igual a 3.

LC: Uso esta abreviación para referirme, ampliamente, a la lógica clásica.

LP: *Logic of Paradox* (en inglés) o Lógica de la Paradoja.

MLM: Monismo lógico en matemáticas.

MLME: Monismo lógico en matemáticas que se compromete con una lógica explosiva (generalmente la clásica).

MLMP: Monismo lógico en matemáticas que se compromete con una lógica paraconsistente.

NEG: Esto corresponde a la posible construcción de una negación fuerte, que se comportaría como un equivalente de la negación Booleana, en los Sistemas-C.

OFC: Operador de formación de contradictorios. A y B son aseveraciones contradictorias si no es *posible* que ambas sean verdaderas.

OFS: Operador de formación de sub-contrarios. A y B son afirmaciones sub-contrarias si es *necesario* que al menos una de ellas sea verdadera.

PLM: Pluralismo lógico en matemáticas.

P1: El primer componente de la propuesta general de Colyvan. Este componente corresponde a la afirmación descriptiva según la cual la práctica matemática de hecho muestra o ha mostrado el uso de una relación inferencial paraconsistente.

P2: El segundo componente de la propuesta general de Colyvan. Este componente corresponde a la aseveración normativa de que los matemáticos deberían usar una lógica paraconsistente.

TCN: Teoría de Conjuntos "naïve". La teoría de conjuntos temprana que contiene el axioma de Comprensión irrestricta, que dio lugar a la conocida paradoja de Russell (entre otras)

ZFC: Teoría de Conjuntos de Zermelo-Frenkel con el axioma de elección.

b) Condiciones y definiciones lógicas

Semántica relacional para LP:

Una manera de evitar ECQ consiste en concebir las evaluaciones como relaciones en lugar de funciones. Esto permite que una fórmula y su negación puedan relacionarse con 1, sin que necesariamente ocurra lo mismo con cierta fórmula arbitraria. Sea P el conjunto de parámetros proposicionales. Una evaluación, ρ, es un subconjunto de $P \times \{1, 0\}$. Esta evaluación se extiende a todas las fórmulas del lenguaje en una interpretación mediante las siguientes condiciones recursivas:

Condición 1a: $(\neg A)\rho 1$ sii $A\rho 0$

Condición 1b: $(\neg A)\rho 0$ sii $A\rho 1$

Condición 2a: $(A \wedge B)\rho 1$ sii $A\rho 1$ y $B\rho$

Condición 2b: $(A \wedge B)\rho 1$ sii $A\rho 0$ o $B\rho 0$

Condición 3a: $(A \vee B)\rho 1$ sii $A\rho 1$ o $B\rho 1$

Condición 3b: $(A \vee B)\rho 0$ sii $A\rho 0$ y $B\rho 0$

En cuanto a la implicación material, $A \supset B$ se define como $\neg A \vee B$. Por tanto, tenemos las siguientes condiciones:

Condición 4a: $A \supset B\rho 1$ sii $A\rho 0$ o $B\rho 1$

Condición 4b: $A \supset B\rho 0$ sii $A\rho 1$ y $B\rho 0$

Digamos que una fórmula es verdadera cuando se relaciona con 1 y falsa cuando se relaciona con 0. Entonces la validez es caracterizable como preservación de verdad bajo toda interpretación. Definimos así las nociones de tautología y consecuencia semántica:

Tautología: $\vDash A$ sii en toda ρ, $A\rho 1$

Consecuencia semántica: $\Sigma \vDash A$ sii en toda ρ es el caso que si $B\rho 1$ para toda $B \in \Sigma$, entonces $A\rho 1$

Consideremos las siguientes dos restricciones sobre estas evaluaciones:

Restricción 1: Ningún parámetro proposicional se relaciona con más de un valor de verdad.

Restricción 2: Todo parámetro se relaciona con (al menos) un valor de verdad.

Si una de estas condiciones se cumple para los parámetros, se cumple para todas las fórmulas complejas obtenibles con las conectivas lógicas anteriores. Así, la primera restricción hace que la relación de evaluación sea funcional, mientras que la segunda hace que sea total. Si imponemos ambas restricciones obtenemos una semántica equivalente a la clásica. Si quitamos ambas, obtenemos una semántica para la lógica relevante (y paraconsistente) FDE (First Degree Entailment). Si quitamos *solamente* el requisito funcional, obtenemos la parte extensional de la lógica *dialeteica* LP (Logic of Paradox).

Semántica funcional para LP:

Sea $\pi = \{\{1\} \ \{0\} \ \{1,0\}\}$ y sea v' una evaluación para los parámetros proposicionales del lenguaje. Podemos extender esto a una evaluación para las fórmulas complejas mediante las siguientes condiciones:

Condición LP 1: $1 \in v(\neg\alpha)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$

Condición LP 2: $0 \in v(\neg\alpha)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$

Condición LP 3: $1 \in v(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$ y $1 \in v(\beta)$

Condición LP 4: $0 \in v(\alpha \wedge \beta)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$ o $0 \in v(\beta)$

Condición LP 5: $1 \in v(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $1 \in v(\alpha)$ o $1 \in v(\beta$

Condición LP 6: $0 \in v(\alpha \vee \beta)$ si y solo si $0 \in v(\alpha)$ y $0 \in v(\beta)$

Definición de la consecuencia semántica en LP-funcional:

$\Gamma \vDash_{LP} \alpha$ si y solo si en toda evaluación v es el caso que si $1\in v(\beta)$ para toda $\beta \in \Gamma$, entonces $1 \in v(\alpha)$.

Condiciones semánticas de los Sistemas-C de negación debilitada:

Una evaluación de da Costa, v, es un mapeo de las fórmulas de un lenguaje al conjunto de valores $\{1, 0\}$, donde 1 es el valor designado. Tenemos las siguientes condiciones:

Condición da Costa 1: $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 2: $v(\alpha \vee \beta) = 1$ si y solo si $v(\alpha) = 1$ o $v(\beta) = 1$

Condición da Costa 3: Si $v(\alpha) = 0$ entonces $v(\neg\alpha) = 1$

Condición da Costa 4: Si $v(\neg\neg\alpha) = 1$ entonces $v(\alpha) = 1$

Condición da Costa 5: Si $v(\alpha) = v(\neg\alpha)$ entonces $v(\alpha^0) = 0$.

Condición da Costa 6: Si $v(\alpha) = v(\beta) = 1$ entonces $v((\neg\alpha)^0) = v((\alpha \wedge \beta)^0)$.

Las condiciones 1-4 nos dan el fragmento no implicativo de Cω (el Sistema-C más débil), si definimos $\Gamma \vDash_{c\omega} \alpha$ en términos de preservación del valor designado (1). Al añadir las condiciones 5 y 6 obtenemos C1 (el más fuerte). Aquí podemos generar una jerarquía de lógicas con distintos grados de fuerza deductiva. C2 se obtiene al igual que C1, excepto que en las condiciones toda ocurrencia de α^0 se sustituye por $\alpha^0 \wedge \alpha^{00}$. Para obtener C3 se sustituye α^0 por $\alpha^0 \wedge \alpha^{00} \wedge \alpha^{000}$, y así sucesivamente.

Condiciones generales de la preservación de consistencia y satisfactibilidad:

Condición semántica general: $\Gamma \vDash \alpha$ sii $\forall\Gamma'$ [($\Gamma' \supset \Gamma$ & Γ' es satisfactible) $\Rightarrow \Gamma' \cup \{\alpha\}$ es satisfactible]

Condición sintáctica general: $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\forall\Gamma'$ [($\Gamma' \supset \Gamma$ & Γ' es consistente) $\Rightarrow \Gamma' \cup \{\alpha\}$ es consistente]

Definiciones y condiciones para caracterizar la relación super-puesta de inferencia "Forcing":

Condiciones para una lógica de base:

Por una lógica de base (ß), sobre un lenguaje (L), se entiende el conjunto de pares (Γ,α) de tal forma que Γ es un conjunto de fórmulas de L y α es una fórmula de L y $\Gamma \vdash_{ß}$. Cuando ß es una lógica, la clausura deductiva del conjunto de fórmulas Γ bajo $\vdash_{ß}$ se denotará como "$\not\subset x(\Gamma)$". Las restricciones sobre la lógica (compacta) de base son:

[R]: $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

[C]: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ & $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \beta$

[M]: $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$

Caracterización de una partición:

Diremos que un conjunto Γ es consistente con respecto a la lógica ß si y solo si su clausura bajo $\vdash_ß$ no contiene todos los enunciados de L. Formalmente, expresamos la consistencia de Γ con respecto a ß así: $C_ß(\Gamma)$.

Diremos que $A(\Delta) = \{a0, a1, . . . , ak\}$ es un conjunto indexado que empieza por Δ siempre que $a0 = \Delta$ y todos los índices 0 . . . k sean tomados de un conjunto indexado *I*. Digamos que Ғ es un conjunto indexado que empieza por $\emptyset$. Entonces Ғ es una partición lógica del conjunto Γ, en relación a una lógica ß si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:

Condición Schotch-Jennings 1: Para cada miembro *a* de la familia indexada, $C_ß(a)$

Condición Schotch-Jennings 2: $\Gamma \subseteq \bigcup_{i \in I} \not{C}_ß(a_i)$.

Definición de nivel de (in)consistencia:

Diremos que "$N^ß(\Gamma)$" representa el nivel de inconsistencia del conjunto de fórmulas Γ en relación a una lógica ß. El valor de $N^ß(\Gamma)$ se define así:

$N^ß(\Gamma) = \min_{w(F)} [PAR_ß(Ғ,\Gamma)]$ si este límite existe

$N^ß(\Gamma) = \infty$ si el límite no existe

Caracterización de la relación de consecuencia super-puesta [⊢ ß:

Γ [$\vdash_ß$ α si y solo si en toda partición de Γ en $N^ß(\Gamma)$ celdas, hay al menos una celda Σ tal que $\Sigma \vdash_ß \alpha$.

Bibliografía:

Beall, J. C., and Greg Restall. *Logical Pluralism*. Oxford: Clarendon Press ;, 2006.

Béziau, Jean-Yves, Walter Alexandre Carnielli, and Dov M. Gabbay. *Handbook of*

Paraconsistency:. London: Kings College, 2007. Batens, Diderik. *Frontiers of Paraconsistent Logic*. Baldock, Hertfordshire, England: Research Studies Press, 2000.

Beziau, J. (n.d.). From Consequence Operator to Universal Logic: A Survey of General Abstract Logic. *Logica Universalis, 2005*

Brady, Ross. *Universal Logic*. Stanford, CA: CSLI Publications, 2006.

Brown, Bryson. "Knowledge and Non-Contradiction." The Law of Non-Contradiction, 2004, 126-55.

Brown, Bryson. "On Paraconsistency." A Companion to Philosophical Logic, 2006, 628-50.

Colyvan, Mark. "Applying Inconsistent Mathematics." 2010. Consultado el 1 de septiembre del 2015.

Colyvan, Mark. "Who's Afraid of Inconsistent Mathematics?" Philosophy of Mathematics Set Theory, Measuring Theories, and Nominalism, 2008.

Colyvan, Mark. *The Indispensability of Mathematics*. New York: Oxford University Press, 2001.

Friend, M. *Introducing Philosophy of Mathematics*. Stocksfield: Acumen, 2007.

Giaquinto, M. *The Search for Certainty: A Philosophical Account of Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press; 2002.

Halmos, Paul R. *Naive Set Theory*. Repr. ed. Heidelberg: Springer, 1974.

Harman, G: 'Internal Critique: A Logic is not a Theory of Reasoning and a Theory of Reasoning is not a Logic'. Handbook of the Logic of Argument and Inference, Elsevier, Amsterdam, 2002, 171-186.

Hintikka, Jaakko. *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Jennings, R. y Peter Schotch. "Paraconsistency: Who Needs It?". En *On Preserving: Essays on Preservationism and Paraconsistent Logic*, editado por P.K. Jennings, P. Schotch, y B. Brown. Toronto [Ont.: University of Toronto Press, 2009

Kline, Morris. *Mathematical Thought from Ancient to Modern times*. New York: Oxford University Press, 1972.

Payette, G. y Peter Schotch. “On Preserving.” En *On Preserving: Essays on Preservationism and Paraconsistent Logic*, editado por P.K. Jennings, P. Schotch, y B. Brown. Toronto [Ont.: University of Toronto Press, 2009.

Payette, G. y Blaine Déntremont. “Level and Compactness”. En *On Preserving: Essays on Preservationism and Paraconsistent Logic*, editado por P.K. Jennings, P. Schotch, y B. Brown. Toronto [Ont.: University of Toronto Press, 2009

Priest, Graham. *In Contradiction a Study of the Transconsistent*. Oxford: Clarendon Press, 2010.

Priest, Graham. "Paraconsistent Logic." Stanford University. 1996.

Priest, Graham. *An Introduction to Non-classical Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

Priest, Graham. "Logicians Setting Together Contradictories: A Perspective on Relevance,

Paraconsistency, and Dialetheism." A Companion to Philosophical Logic, 2006, 651-64.

Schotch, P. y Ray Jennings (1989). On detonating. En Paraconsistent Logic. Editado por G. Priest, R. Routley, J. Norman (Eds.), Paraconsistent Logic, pp. 306– 327. Philosophia Verlag

Shapiro, Stewart. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*. Oxford: Clarendon Press