



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

**Sistemas muestreados estabilizados mediante
señal de control pulsada**

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA

P R E S E N T A :
OCTAVIO ORIOL CASTILLO GUTIÉRREZ.

Director de Tesis :
Dr. Héctor Benítez Pérez
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx. enero 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Luis A. Álvarez Icaza Longoria.

Secretario: Dr. Gerardo René Espinosa Pérez.

1er. Vocal: Dr. Héctor Benítez Pérez.

2do. Vocal: Dr. Javier Gómez Castellanos.

3er. Vocal: Dr. Leonid Fridman.

IIMAS, Ciudad Universitaria, Cd. Mx.

TUTOR DE TESIS:
Dr. Héctor Benítez Pérez.

FIRMA

Índice general

I	Fundamentos y Antecedentes	1
1.	Introducción	2
2.	Modelado de SDS y NCS	5
2.1.	Definiciones preliminares	5
2.2.	Modelado de sistemas muestreados (SDS)	6
2.2.1.	Modelo discreto	7
2.2.2.	Modelo con retardo a la entrada	7
2.2.3.	Modelo como sistema impulsivo	8
2.3.	Modelado de sistemas de control sobre redes (NCS)	8
3.	Antecedentes de la señal de control pulsada	11
3.1.	La ley de control switcheada	12
3.2.	Agrandamiento de la región de periodos de muestreo estabilizantes	12
3.3.	Estabilización SPI	13
3.4.	Comentarios finales	14
II	Señal de control pulsada en SDS	15
4.	Motivación: La respuesta impulsiva	16
4.1.	Simulaciones	17
5.	Efectividad de la ley de control pulsada	24
5.1.	Región de periodos de muestreo estabilizantes	24
5.2.	Efectos del ZOH-control en la dinámica de SDS	27
6.	FLK como herramienta de análisis	31
6.1.	Planteamiento del problema	31
6.2.	Análisis vía Funcionales de Lyapunov-Krasovskii	32
6.2.1.	Análisis de estabilidad	32
7.	Ejemplos de efectividad	35
7.1.	Lazo abierto inestable	35
7.2.	Lazo abierto estable	35
7.3.	Prueba experimental	41
8.	Conclusiones	42

Índice de figuras

2.1. Sistema muestreado	6
2.2. Sistema de control sobre redes	9
4.1. Configuración propuesta de NCS	16
4.2. Respuesta del NCS clásico ante un 30% de pérdidas de información.	18
4.3. Respuesta del NCS propuesto ante un 30% de pérdidas de información.	19
4.4. Respuesta del NCS clásico ante un 60% de pérdidas de información.	20
4.5. Respuesta del NCS propuesto ante un 60% de pérdidas de información.	21
4.6. Respuesta del NCS propuesto ante un 80% de pérdidas de información. La modificación de la variable $\varepsilon = \frac{1}{50}$ a $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ logra que sistema se mantenga estable.	22
5.1. Comportamiento de la función $V(t) = x'(t)Px(t)$ en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$	28
7.1. Trayectoria $x(t)$ del ejemplo 7.1 para un periodo de muestreo de $T = 1.99[s]$. De acuerdo al control digital, el sistema es inestable para este periodo de muestreo utilizando la ley de control tipo ZOH, sin embargo cuando la señal de control se aplica como una señal pulsada con $h = 0.9[s]$, el sistema se estabiliza.	36
7.2. Comportamiento de la FLK $\nu(t)$, $\dot{\nu}(t)$, y la señal de control $u(t)$ en el ejemplo 7.1.	37
7.3. Trayectoria $x(t)$ para el ejemplo 7.2 cuando el periodo de muestreo es $T = 1.95[s]$. El sistema es inestable bajo la ley de control tipo ZOH, sin embargo cuando la señal de control es aplicada como señal pulsada de anchura $h = 0.5[s]$, el sistema se estabiliza.	39
7.4. Comportamiento de la FLK $\nu(t)$, $\dot{\nu}(t)$, y la señal de control $u(t)$ en el ejemplo 7.2.	40
7.5. Control de un cuadricóptero para un periodo de muestreo de $60[ms]$. De $0[s]$ a $40[s]$ se aplicó señal de control tipo ZOH, y de $40[s]$ a $80[s]$ la señal de control se aplicó como una señal pulsada con $h = 24[ms]$	41

Índice de cuadros

7.1. MSSP's estimados por el Teorema 3 en el ejemplo 7.1, usando la <i>ley de control pulsada</i> (6.2) con ancho de pulso h	38
7.2. MSSP's estimados por el Teorema 3 en el ejemplo 7.2, usando la <i>ley de control pulsada</i> (6.2).	38

NOTACIÓN

\mathbb{R}	Conjunto de los números reales.
\mathbb{C}	Conjunto de los números complejos.
\mathbb{Z}^+	Conjunto de los números enteros reales positivos.
j	Parte imaginaria de los número complejos.
\mathbb{R}^n	Espacio Euclideo real de orden n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espacio de las matrices reales de orden $n \times m$.
I	Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
$M > 0$	Matriz M positiva definida.
$'$	Transposición.
\cdot	Producto interno en \mathbb{R}^n .
$\ x\ $	Norma Euclidea de $x \in \mathbb{R}^n$.
$\ M\ $	Norma inducida de $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, definida como $\ A\ = \sup \frac{\ Ax\ }{\ x\ } \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
\hat{x}	Vector unitario de $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $\ \hat{x}\ = 1$.
$2M$	Suma de M y M' , i.e. $2M = M + M'$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Parte I

Fundamentos y Antecedentes

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de control es una de las ramas científico-tecnológicas más bellas y sorprendentes que el ser humano ha construido. Los más simples ejemplos de su aplicación en los niveles de educación superior sorprenden y atraen estudiantes que buscan la causa de tan perfectos comportamientos; el control de un motor DC, el sistema Maglev, el péndulo invertido y el control de un giróscopo son algunos de estos ejemplos.

Actualmente, además de los ejemplos de control mencionados, casi cualquier sistema de control implementado en la industria, instituto, o universidad, involucra comunicaciones digitales. Esto resulta del éxito que la computación ha adquirido debido a la modularidad, flexibilidad, ligereza, y sobre todo la facilidad de implementación que un dispositivo digital proporciona a cualquier sistema. Así, un sistema de control implementado *digitalmente*, goza de estas características y sobre todo facilita su programación. Sin embargo, la desventaja que surge de esta digitalización, es el flujo discontinuo de información inducido por los dispositivos digitales: la discontinuidad de las señales surge del *muestreo* realizado por los dispositivos digitales. Por supuesto, esto no representa un problema cuando el periodo de muestreo del sistema es suficientemente pequeño tal que las señales de comunicación parecen continuas, pero cuanto más grande es el periodo de muestreo, la discontinuidad del flujo de información comienza a afectar la estabilidad y el desempeño de cualquier sistema de control.

Ante la llegada y expansión de los dispositivos digitales, y con esto la problemática del flujo discontinuo de información, la Teoría de control requirió de análisis capaces de estudiar la estabilidad de un sistema cuando las señales de comunicación son digitales (discontinuas). Así nació la *Teoría de control digital*, que yace en 3 restricciones fundamentales:

1. Periodo de muestreo constante,
2. Señal de control constante durante todo el periodo de muestreo (retén de orden zero ZOH, o bien señal digitalizada),
3. Existencia de un **máximo periodo de muestreo estabilizante** del sistema, que en términos del Teorema de Shannon-Nyquist, implica mantener la frecuencia de muestreo suficientemente alta tal que la señal obtenida por el muestreador reproduzca fielmente la señal continua que esta siendo muestreada.

Así, mientras un sistema de control cumpla estas restricciones, la Teoría de control digital es la herramienta de análisis perfecta para estudiar su estabilidad.

Lamentablemente, aunque existen sistemas de control tal que puede considerarse satisfacen estas restricciones, la administración de recursos dentro de cualquier sistema de cómputo real, dificulta el cumplimiento de éstas. Por ejemplo, si un sistema de control opera sobre una red TCP/IP, o bien es administrado por un sistema operativo, los retardos debidos al envío de información (“*Jitter*”) generarán periodos de muestreo irregulares haciendo que la teoría digital sea incapaz de realizar un análisis adecuado de estabilidad. Además, si existe congestión en la red de comunicación, el intercambio de información podría no ser lo suficientemente rápido tal que se mantenga la estabilidad del sistema. A los sistemas de control que operan bajo estos inconvenientes durante la comunicación, se les conoce como sistemas muestreados (*Sampled-Data System* (SDS)) o sistemas de control sobre redes (*Networked Control Systems* (NCS)).

En Teoría de control, han surgido dos enfoques capaces de realizar análisis de estabilidad para SDS y NCS:

1. Enfoques basados en Teoría discreta, y
2. Enfoques continuos que consideran la evolución del sistema como una secuencia de subdinámicas donde las señales digitales son continuas a trozos.

Los enfoques de tiempo discreto (más populares), van desde un replanteamiento de la matriz de transición del sistema, hasta la implementación de técnicas de control predictivo. Por su parte, los enfoques continuos (más recientes), explotan la Teoría de sistemas con retardos (*Time-delay system theory*), resurgida a partir de 1990: algunas razones de su resurgimiento, es que el análisis resulta muy semejante al análisis clásico de Lyapunov, y el problema de *muestreo no constante* resulta fácil de abordar. Empero, los enfoques continuos resultan ser más conservativos que los enfoques discretos

Una observación importante sobre los enfoques utilizados para analizar la estabilidad de SDS y NCS, es que la mayor parte de la literatura ha considerado que la señal de control es aplicada al sistema como un *retén de orden cero* (ZOH) durante todo el periodo de muestreo (durante el *intermuestreo*). Debido a esto, aunque muchos de los trabajos de investigación aportan avances en la metodología de análisis, en realidad no representan alguna mejora en el desempeño real del sistema de control (a excepción de las técnicas de predicción). Diferente a esto, solo algunos trabajos han estudiado el efecto de modificar la señal de control durante el *intermuestreo*: en Sala (2007), se reporta que el uso de un multi-ZOH durante el intermuestreo puede mejorar la estabilidad exponencial de un sistema cuando el *jitter* es grande. En Li, Cela, Niculescu, y Reama (2009); Li, Niculescu, Reama, y cols. (2009); Sun, Liu, Rees, y Wang (2008), se habla de una *ley de control switchheada* capaz de alargar la región de periodos de muestreo estabilizantes de un sistema, incluso periodos de muestreo infinitos. En Castillo y Benítez-Pérez (2017), utilizando un enfoque basado en la *respuesta impulsiva*, se reporta que una *señal de control pulsada* es capaz de mantener estable un sistema por periodos de muestreo más largos que los establecidos por la Teoría discreta. La *ley de control switchheada* de Li, Niculescu, y cols. (2009), es equivalente a la *ley de control pulsada* en Castillo y Benítez-Pérez (2017): esta ley de control consiste en mantener la señal de control durante algún periodo de tiempo y después anularla hasta el próximo instante de muestreo.

En este trabajo de tesis, que esta basada en los resultados de Castillo y Benítez-Pérez (2017), se estudia el efecto dinámico que tiene la señal de control aplicada como ZOH en el sistema, i.e. se estudia el efecto que tienen una señal de control digital en la dinámica del sistema a controlar. Como se detallará adelante, se encontró que cuando el periodo de muestreo es grande, la señal de control aplicada como un ZOH, contribuye a que el sistema se aleje más rápido del punto de equilibrio, aún cuando el periodo de muestreo es estabilizante. Esta es la verdadera razón por la que el retardo de tiempo degrada el desempeño de un sistema de control. A partir de este resultado, se justifica la

efectividad de la *ley de control pulsada* reportada en Briat y Jönsson (2011); Castillo y Benítez-Pérez (2017); Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009); Sun y cols. (2008). Además, aunque nuestros resultados surgen de un análisis clásico de Lyapunov, también mostramos que la Teoría de sistemas con retardos resulta ser una herramienta adecuada para el análisis de estabilidad de sistemas con *ley de control pulsada*.

Esta tesis se estructura como sigue. En el Capítulo 2 se expone el modelado de sistemas muestreados (SDS) y sistemas de control en red (NCS), ambos modelos populares en la descripción de sistemas con flujo de información digital. En el Capítulo 3, se describen brevemente los trabajos previos relacionados a la *ley de control pulsada*. En el Capítulo 4, inspirados en la respuesta de un sistema con entrada impulsiva, se da la motivación a la estabilización de sistemas mediante *ley de control pulsada*. Utilizando Teoría lineal, en el Capítulo 5 se estudia el efecto que tiene sobre el sistema la aplicación del ZOH-control; con base en estos resultados explicamos por qué la señal de control pulsada mejora el desempeño de un sistema. En el Capítulo 6, utilizando la Teoría de sistemas con retardos, formulamos condiciones de estabilidad para sistemas con *ley de control pulsada*. El Capítulo 7 presenta algunos ejemplos de estabilización. Finalmente en el Capítulo 8 se dan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Modelado de Sistemas muestreados y Sistemas de control sobre redes

Con la aparición de sistemas de control digitalizados, la Teoría de control ha requerido de nuevos esquemas de análisis capaces de acercar la teoría de estabilidad a la realidad de la implementación. El primer paso para lograrlo, es por supuesto el modelado del sistema. Entre más cercano sea el modelo matemático del sistema al sistema real, el análisis de estabilidad será mucho más efectivo. En este capítulo se presenta el modelado de las dos aproximaciones principales: 1) los sistemas muestreados (SDS) y 2) los sistemas de control sobre redes (NCS).

2.1. Definiciones preliminares

En general, el flujo de información dentro de cualquier sistema de control es el responsable de mantener la estabilidad del sistema. En particular, si un sistema de control está digitalizado, se distinguen dos instantes de tiempo importantes durante el flujo de información: 1) El instante en el que se mide el estado del sistema $x(s_k)$ denotado por ' s_k ', y 2) El instante en que se actualiza la señal de control denotado por ' t_k '. Formalmente, definimos estos instantes como sigue

Definición 1. Sea $k \in Z^+$ tal que $\{s_k\}$ es una secuencia creciente en \mathbb{R} para $k = 1, 2, 3, \dots$. Entonces, $\{s_k\}$ define una **secuencia de muestreo**, si en cada instante s_k se mide el estado del sistema $x(s_k)$. Cada punto s_k en una secuencia de muestreo, se conoce como **instante de muestreo**.

Definición 2. Sea $\{t_k\}$ una secuencia creciente en $[0, \infty)$ para $k = 1, 2, 3, \dots \in Z^+$. Entonces, $\{t_k\}$ define una **secuencia de actualización**, si la señal de control es actualizada en cada punto t_k a consecuencia de la información medida $x(s_k)$. Cada punto t_k en una secuencia de actualización, se conoce como **instante de actualización**.

De la Definición 1, se sigue que

Definición 3. El **periodo de muestreo** se define como

$$T_k = s_{k+1} - s_k$$

para $k = 1, 2, 3, \dots$

Con base en estas definiciones, notamos que en un sistema de control ideal, -en el que el flujo de información es continuo-, los instantes de muestreo son tan próximos que $\{s_k\}$ y $\{t_k\}$ son líneas de tiempo continuas que satisfacen $s = t$. Por el contrario, cuando un sistema de control se implementa físicamente, -y en particular si se utilizan dispositivos digitales-, la información a través del controlador fluye como una señal digital (discontinua) causando que $\{s_k\}$ y $\{t_k\}$ se conviertan en *secuencias contables* en el tiempo. En el caso más sencillo de implementación, que es el de sistema muestreado (SDS), se tiene que $s_k = t_k \forall k \in \mathbb{Z}^+$, mientras que en el caso de sistema de control sobre redes (NCS), se tiene que $s_k < t_k$. Estas diferencias se detallan enseguida.

2.2. Modelado de sistemas muestreados (SDS)

Un sistema muestreado no es más que un sistema de control con planta continua y señal de control digital. En otras palabras, dentro de un sistema muestreado, el flujo continuo de información es interrumpido por la presencia de un muestreador que digitaliza la señal de salida del sistema (ver Figura 2.1). En esta configuración, la función del muestreador es entregar al controlador una señal

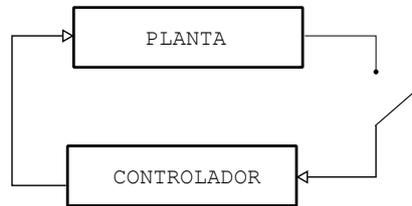


Figura 2.1: Sistema muestreado

muestreada $x(s_k)$ del estado del sistema $x(t)$ con periodo de muestreo $T_k = s_{k+1} - s_k$. A consecuencia de esto, la señal de control aplicada al sistema también será una señal muestreada (digital) con periodo $T_k = t_{k+1} - t_k$, donde $s_k = t_k \forall k \in \mathbb{Z}^+$. Por tanto, la dinámica de un sistema lineal en configuración de sistema muestreado quedará descrita por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado del sistema, $x(t_k)$ es la señal muestreada, (A, B, K) son matrices constantes de dimensiones apropiadas, $\bigcup_{k=1}^{\infty} [t_k, t_{k+1}) = [0, \infty)$, y el control, que llamaremos también *ZOH-control*, viene dado por

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.2)$$

El modelo (2.1)-(2.2) es conocido como el *modelo estándar de un sistema muestreado*. Para analizar la estabilidad del sistema (2.1)-(2.2), existen 3 enfoques principales de modelado:

1. Sistema discreto.
2. Sistema con retardo a la entrada.
3. Sistema impulsivo.

Estos enfoques se describen a continuación.

Observación 1. Note que si la frecuencia del muestreador es suficientemente alta, entonces, por el Teorema de Shannon-Nyquist, la señal muestreada $x(t_k)$ reproducirá con fidelidad la señal continua $x(t)$. En este sentido, podemos decir que mientras $x(t_k)$ reproduzca $x(t)$, la señal de control $u(t) = Kx(t_k)$ será una versión muestreada de la señal de control ideal $u(t) = Kx(t)$.

2.2.1. Modelo discreto

Note que si $T_k = T_{k+1} \forall k \in Z^+$, entonces el sistema muestreado (2.1)-(2.2) tiene una representación discreta. A saber, sea $T = T_k \forall k \in Z^+$. Entonces, resolviendo la ecuación diferencial (2.1)-(2.2) de $t = t_k$ a $t = t_{k+1}^-$ bajo la condición inicial $x(t)|_{t=t_k} = x(t_k)$, se obtiene

$$x(t_{k+1}^-) = \underbrace{\left(e^{AT} + \int_0^T e^{As} ds BK \right)}_{\Phi(T)} x(t_k). \quad (2.3)$$

Esta es la descripción discreta del sistema muestreado (2.1)-(2.2) con periodo de muestreo constante T y comúnmente escrita como

$$x(k+1) = \Phi(T) x(k).$$

Es importante recordar, que de acuerdo a la teoría de control digital, el sistema muestreado (2.3) será estable mientras, -dado T -, la matriz $\Phi(T)$ sea Schur. De aquí se sigue entonces que debe existir un conjunto de periodos de muestreo que estabilizan el sistema muestreado (2.3), y otro conjunto que lo inestabiliza. Inspirados en esta observación, presentamos la definición siguiente.

Definición 4. Sea \mathbb{S}_{zoh} el conjunto de todos los periodos de muestreo T que estabilizan el sistema muestreado (2.3), y asuma que \mathbb{S}_{zoh} es no vacío. Entonces, el **máximo periodo de muestreo estabilizante** (MSSP) del sistema muestreado se define como

$$\text{MSSP} = \sup \mathbb{S}_{zoh}$$

Esta definición será muy importante durante el desarrollo del trabajo.

2.2.2. Modelo con retardo a la entrada

A la fecha, el modelo con retardo a la entrada se ha convertido en uno de los modelos más populares en sistemas muestreados. Con el fin de presentar este modelo, considere la siguiente definición

Definición 5 (Miheev, Sobolev, y Fridman (1988)). Defínase el **retardo de tiempo** como

$$\tau(t) = t - s_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}.$$

Utilizando la Definición 5, la señal de control (2.2) del sistema muestreado puede reescribirse en la forma

$$u(t) = Kx(t - \tau(t)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.4)$$

De este modo, el modelo de un sistema muestreado resulta en

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \tau(t)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.5)$$

Este modelo fue presentado por primera vez en Miheev y cols. (1988), y a diferencia de los modelos (2.1) y (2.3), este hace explícita la presencia del retardo en la entrada del sistema $u(t)$ (de ahí su nombre).

La característica más importante reflejada en este modelo, es que una señal digital induce retardos temporales en la dinámica del sistema. Así, bajo este enfoque, es evidente que la *Teoría de sistemas con retardos* es aplicable al análisis de estabilidad de sistemas muestreados. La ventaja inmediata de este nuevo enfoque, es que no es necesario que el periodo de muestreo del sistema sea constante como lo requiere el análisis digital (Fridman, 2010; Seuret, 2012). Por el contrario, la desventaja de este tipo de análisis es que resulta ser conservativo respecto al análisis discreto: mientras el análisis discreto es exacto, el análisis de sistemas con retardos depende de la selección de una Funcional de Lyapunov-Krasovskii.

Observación 2. *Note que, tras la Definición (5), en sistemas muestreados se tiene que*

$$\inf_{t_k \leq t < t_{k+1}} \tau(t) = 0 \quad \& \quad \sup_{t_k \leq t < t_{k+1}} \tau(t) = T_k. \quad (2.6)$$

Además

$$T_k = \text{MSSP} \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad \sup \tau(t) = \text{MSSP}.$$

Por esta razón, a lo que en este trabajo se ha definido como MSSP, otros trabajos lo han llamado *Maximum allowable delay bound (MADB)* (Yue, Han, y Peng, 2004) o *Maximum allowable transefer interval (MATI)* (Kim, Lee, Kwon, y Park, 2003).

2.2.3. Modelo como sistema impulsivo

El modelo de un sistema muestreado como sistema impulsivo explota el hecho que en los instantes $t = t_k$, el muestreo permite el conocimiento exacto del estado del sistema en ese instante t_k . Así, ya que $\{t_k\}$ es una secuencia creciente en $[0, \infty)$, resulta fácil ver que el sistema (2.1) puede escribirse $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ como

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_k(x(t), x(t_k)) = Ax(t) + BKx(t_k), & t_k < t < t_{k+1} \\ x(t) = x(t_k^+), & t = t_k. \end{cases}$$

Este modelo es conocido como el modelo impulsivo del sistema muestreado (2.1), y su construcción es detallada en Naghshtabrizi, Hespanha, y Teel (2008). La interpretación importante de esta descripción, y que fue aprovechada en este trabajo, se funda en el hecho que la dinámica del sistema muestreado puede ser vista como una secuencia de *sub-dinámicas* gobernadas por $g_k(\cdot, \cdot)$ con condiciones iniciales $x(t_k)$ para todo k .

Los análisis de estabilidad mediante este enfoque, utilizan Funciones de Lyapunov *ad-hoc* a estos sistemas (Briat y Seuret, 2012; Naghshtabrizi y cols., 2008).

2.3. Modelado de sistemas de control sobre redes (NCS)

Como se mencionó anteriormente, los sistemas muestreados nacen con el fin de acercar el modelo matemático del sistema a la realidad de la implementación digital: el sistema muestreado, es el modelo más simple que incorpora la naturaleza digital de las señales a la dinámica del sistema. Sin embargo, un modelo más completo y cercano a la operación real de un sistema digitalizado, es el modelo de sistema de control sobre redes (NCS). Este nuevo modelo, además de considerar la discontinuidad inducida por el muestreador, también considera los retardos inducidos durante el procesamiento y la transmisión de la información en el sistema (“*Jitter*”). Esta extensión resulta natural si se entiende que toda tarea de control consume tiempo de procesamiento; por ejemplo el acondicionamiento de la señales, el cálculo de la ley de control, y el envío de información.

Por supuesto si un sistema de control es administrado por un sistema computacional que esta dedicado exclusivamente a las tareas de ese sistema de control, los tiempos de procesamiento de aquellas tareas no afectarán la estabilidad del sistema ya que las tareas serán atendidas casi inmediatamente. Sin embargo, si el sistema computacional esta dedicado a administrar muchas otras tareas y procesos, los retardos inducidos en la atención a tareas (de control) comenzarán a degradar la estabilidad del sistema. Aunado a esto, surge también el problema de la pérdida de información cuando la comunicación entre los componentes de un sistema se realiza a través de una red de comunicación (imperfecciones en el flujo de información), como ocurre por ejemplo cuando los componentes del sistema no se encuentran en el mismo sitio y se requiere de protocolos especializados en comunicaciones como TCP/UDP o CAN para interconectarlos.

Un hecho importante durante la operación real de un sistema de control, es que los tiempos de procesamiento de información, los tiempos de envíos de información, y la pérdida de información, aparecen como retardos de tiempo en la dinámica del sistema controlado. En otras palabras, las imperfecciones en la comunicación generadas por una red de comunicación digital también son representadas como retardos temporales en el modelo del sistema, de forma similar al impacto que tiene la señal digital inducida por el muestreador en un SDS. Para aclarar este punto, considere un sistema de control digitalizado con la estructura mostrada en la Figura 2.2. Imagine que al tiempo

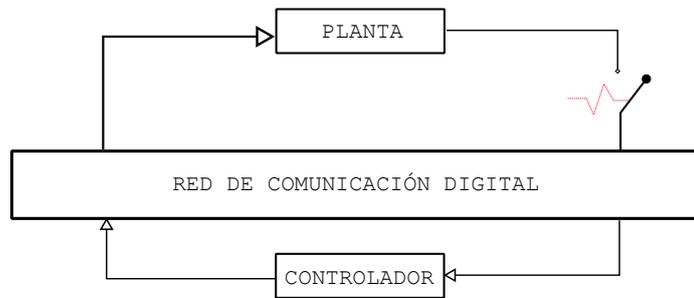


Figura 2.2: Sistema de control sobre redes

$t = s_k$, el muestreador mide el estado del sistema $x(s_k)$ y lo envía al nodo controlador a través de un puerto de comunicación. En el nodo controlador, se realiza el cálculo de la ley de control, y se envía la señal de control al nodo actuador. Llamemos T_{sc} al tiempo consumido desde el muestreo a la llegada al controlador, T_c al tiempo de cálculo de la ley de control, y T_{ca} al tiempo de traslado del nodo controlador al actuador. Ahora, llamando t_k al instante de actualización de control en el nodo actuador, es claro que

$$t_k - s_k = T_{sc} + T_c + T_{ca}. \quad (2.7)$$

Es decir, el retardo que existe entre el muestreo y la actualización de la señal de control, es la suma de los consumos de tiempo producidos por la operación de la red de comunicación. Un sistema de control que opera bajo estos inconvenientes, se conoce como sistema de control sobre redes (NCS), nombre adoptado debido a que el tiempo consumido durante el envío de información a través de la red de comunicación (T_{sc} y T_{ca}) es mucho mayor que el tiempo de procesamiento de información T_c (Hong, 1995). En la literatura existen numerosos trabajos que consideran cada uno de estos retardos en forma aislada, sin embargo, la forma más simple y general es considerar un solo retardo de tiempo (Fridman, 2014). Al igual que en Fridman (2014), llamamos a (2.7) el retardo en la red de comunicación. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 6. Sea $\{s_k\}$ una secuencia de muestreo y $\{t_k\}$ una secuencia de actualización de un sistema de control como se presentó en las Definiciones 1 y 2. Entonces, se define el retardo η_k en la

red de comunicación como

$$\eta_k = t_k - s_k \quad \forall k \in Z^+, \quad (2.8)$$

donde $\eta_k > 0$.

Tras la Definición 6, el modelo estándar de un NCS viene dado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(s_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (2.9)$$

donde $u(t) = Kx(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, es nuevamente el *ZOH-control*. A diferencia del SDS (2.1)-(2.2), en el modelo (2.9), se tiene que $s_k < t_k$.

Capítulo 3

Antecedentes de la señal de control pulsada

En el Capítulo 2, se mencionó que los modelos estándar de SDS y NCS, ayudan a realizar análisis más adecuados de estabilidad a un sistema digitalizado. Partiendo de este hecho, en la literatura existe gran cantidad de trabajos enfocados en mejorar los análisis de estabilidad mediante diferentes técnicas: control digital, control robusto, control difuso, control predictivo, sistemas con retardo, sistemas impulsivos (Fridman, 2010; Naghshtabrizi y cols., 2008; Seuret, 2012). Sin embargo, aunque dichos trabajos representan avances significativos en las técnicas de análisis, solo muy pocos trabajos abordan la mejora del desempeño del sistema digitalizado (a excepción de las técnicas predictivas).

Dentro del grupo de trabajos que intentan mejorar el desempeño del sistema, existe una característica casi común en ellos: la señal de control (muestreada) se ha tratado como una aproximación de orden cero a la señal de control ideal (continua). Es decir, se ha supuesto que el *ZOH-control* es la forma más adecuada de estabilizar un sistema digitalizado. Diferente a esto, existen pocos trabajos que modifican la señal de control dentro del periodo de muestreo (Castillo y Benítez-Pérez, 2017; Li, Niculescu, y cols., 2009; Sala, 2007; Sun y cols., 2008). Los resultados dentro de estos trabajos son bastante interesantes: en general, se reporta que una señal de control del tipo

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t_k), & t_k \leq t < t_k + h \\ 0, & t_k + h \leq t < t_{k+1} \end{cases} \quad (3.1)$$

presenta mejores propiedades estabilizantes que el clásico *ZOH-control* cuando un sistema está expuesto a retardos de tiempo largos ocasionados por la comunicación. La ley de control (3.1) es conocida bajo distintos nombres: *ley de control switcheada* (Li, Niculescu, y cols., 2009; Sun y cols., 2008), *Reten de Función Generalizada* (Briat, 2014; Kabamba, 1987), o bien *ley de control pulsada* (Castillo y Benítez-Pérez, 2017). En particular, los trabajos de Li, Niculescu, y cols. (2009); Sun y cols. (2008) son los primeros que reportan resultados interesantes en la estabilización de SDS mediante la ley de control (3.1). En este Capítulo, se presenta una descripción general de los resultados reportados en Li, Niculescu, y cols. (2009), obtenidos mediante un enfoque de *sistemas switcheados*.

3.1. La ley de control switcheada

Un *sistema switcheado*, es un sistema compuesto de una familia de subsistemas de dinámicas continuas, y una *señal de switcheo* que orquesta el cambio entre esos subsistemas (Zhai, Hu, Yasuda, y Michel, 2001). En general, un sistema switcheado esta descrito por una ecuación de la forma

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.2)$$

donde $\sigma : [t_0, \infty] \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ es una función llamada la *señal de switcheo*, y $\{A_i : 1 \leq i \leq N\}$ es una familia de subsistemas. El tiempo transcurrido entre cada switcheo, es llamado el *tiempo de reposo* o “*dwell-time*”.

La estabilidad del sistema (3.2) ha sido estudiado en Hespanha y Morse (1999); Morse (1996); Zhai y cols. (2001). Como resultado general, se tiene que si cada matriz A_i es *Hurwitz-estable*, el sistema se mantendrá estable si el *dwell-time* es suficientemente largo. En Zhai y cols. (2001), se estudia el caso en que conviven subsistemas estables e inestables, y el resultado mencionado arriba se mantiene: el sistema se mantendrá estable si el *dwell-time* es lo suficientemente largo. Este resultado, ha inspirado las *estrategias de switcheo* en la estabilización de SDS.

Aunque el modelo (2.1) no es parecido al modelo (3.2), el enfoque del *sistema switcheado* fue utilizado para analizar la estabilidad de un SDS en Sun y cols. (2008) bajo la ley de control (3.1). La idea en Sun y cols. (2008) consiste en analizar la estabilidad del SDS cuando la ley de control es switcheada de “ $Kx(t_k)$ ” a “0”. El criterio de estabilidad utilizado para analizar esta *ley de control switcheada*, se basa en Funcionales de Lyapunov-Krasovskii. A saber, se evalúa la respuesta forzada y no forzada del sistema sobre la funcional, y con base en el promedio de las evoluciones (análogo al “*average dwell-time*” en *sistemas switcheados*), se estima el tiempo en que la funcional mantiene su decaimiento. De aquí se construyen condiciones de estabilidad en forma de desigualdades lineales matriciales (LMI).

En Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009) se estudia el mismo problema planteado en Sun y cols. (2008), pero mediante el análisis de la Matriz de transición del sistema. En efecto, las condiciones de estabilidad formuladas en Li, Niculescu, y cols. (2009) son menos conservativas que las de Sun y cols. (2008) al ser planteados desde un enfoque discreto. No obstante, el análisis en Li, Niculescu, y cols. (2009) revela algunos fenómenos interesantes: 1) La región de periodos de muestreo estabilizantes de un sistema se extiende al utilizar la ley de control (3.1), y además 2) existe una clase de SDS que pueden ser estabilizados con cualquier periodo de muestreo $T > 0$. Este fenómeno ha sido llamado *Estabilización independiente del periodo de muestreo*, o *Estabilización SPI* (Briat, 2014).

Los resultados más relevantes respecto a la *ley de control pulsada* (3.1), y la estabilización SPI, se presentan a continuación.

3.2. Agrandamiento de la región de periodos de muestreo estabilizantes

El análisis presentado en Li, Niculescu, y cols. (2009) se basa en el cálculo de la Matriz de transición. A saber, la solución del sistema muestreado (2.1) bajo la ley de control pulsada (3.1), desde $t = t_k$ a $t = t_{k+1}$ viene dada por

$$x(t_{k+1}) = \left(e^{AT} + \int_0^h e^{A(T-s)} ds BK \right) x(t_k),$$

y puede ser reescrita como

$$x(t_{k+1}) = e^{A(T-h)} \left(e^{Ah} + \int_0^h e^{As} ds BK \right) x(t_k). \quad (3.3)$$

Luego, de la Teoría de control discreta, se sigue el siguiente Teorema

Teorema 1 (Li, Niculescu, y cols. (2009)). *El sistema (2.1)-(3.1) es asintóticamente estable si y solo si la matriz*

$$\Phi(h, T) = e^{A(T-h)} \left(e^{Ah} + \int_0^h e^{As} ds BK \right) \quad (3.4)$$

es Schur.

El Teorema 1, establece condiciones suficientes y necesarias para que la *ley de control pulsada* (3.1) estabilice el sistema (2.1). No obstante, el cálculo de la matriz $\Phi(h, T)$ resulta complicado y por esta razón, se formulan condiciones de estabilidad en forma de desigualdades lineales matriciales (LMI's) en Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009). Al evaluar estas condiciones de estabilidad en ejemplos numéricos, resulta que los periodos de muestreo estabilizantes del sistema utilizando la ley de control (3.1), son mucho mayores que los obtenidos con el clásico *ZOH-control*¹.

3.3. Estabilización SPI

Un resultado adicional en Li, Niculescu, y cols. (2009), es que el análisis de la matriz de transición del sistema (3.3), revela la posibilidad de estabilizar un sistema para cualquier periodo de muestreo $T > 0$. En el mismo trabajo, Li presenta el siguiente Teorema

Teorema 2 (Li, Niculescu, y cols. (2009)). *El sistema (2.1)-(3.1) puede ser estabilizado con cualquier periodo de muestreo T , con $T \in [h, \infty]$, si $A + \mu BK$ es Hurwitz para $0 < \mu < 1$.*

En este teorema, la condición $(A + \mu BK)$ -Hurwitz para $0 < \mu < 1$, implica que aunque el control BK sea pequeño, los *eigenvalores del sistema* deben mantenerse en la parte izquierda del plano complejo.² Li establece que para que dicha condición se mantenga, la matriz A no debe contener eigenvalores con parte real positiva. En Briat (2014), este problema es estudiado y el resultado se enuncia de manera semejante: *Si la matriz A no tiene eigenvalores no defectuosos, entonces el sistema (2.1) es SPI estabilizable, si y solo si el espectro de A esta en el plano izquierdo cerrado del plano complejo.* Este resultado generaliza y aclara los resultados de Li, Niculescu, y cols. (2009) respecto a la *estabilización SPI*.

Más adelante, cuando expliquemos el problema de la *estabilización SPI*, mostraremos que este resultado se mantiene aún cuando el sistema posea *eigenvalores defectuosos* siempre que $A + BK$ sea Hurwitz. Estos resultados no son sorprendentes, ya que si uno observa la matriz (3.4) y supone $h \rightarrow 0$, los eigenvalores de (3.4) dependerán casi solo de e^{AT} . Luego, si A es estable y T es grande, tendremos que $e^{AT} \rightarrow 0$ y entonces (3.4) siempre se mantendrá Schur.

¹De esta misma forma, en Castillo y Benítez-Pérez (2017) encontramos el mismo resultado

²Desde un punto de vista personal, esto es un intento por mantener el análisis de estabilidad apegado a la teoría de *sistemas switcheados*, en la que la retroalimentación del sistema es continua durante todo el "*dwell-time*". Sin embargo, esto no refleja el verdadero fenómeno en un SDS (o NCS), ya que estrictamente, la matriz $A + BK$ representa la matriz del sistema solo cuando $x(t) = x(t_k)$, que se satisface solo si $t = t_k$. Este enfoque es una diferencia clara entre los análisis realizados en Briat (2014); Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009), y el presentado en esta tesis.

3.4. Comentarios finales

Este Capítulo está basado en los resultados de Li, Niculescu, y cols. (2009). Debe notarse, que esta formulación se basa en el análisis de la Matriz de transición, y los resultados interesantes sobre agrandamiento de la región de periodos de muestreo estabilizantes, y la estabilización SPI, aparecen una vez que las condiciones de estabilidad son establecidas. Diferente a esta estrategia, el análisis contenido en los capítulos siguientes de este trabajo, se basan en un análisis dinámico del mismo fenómeno. La importancia de nuestro análisis recae en el hecho que mostramos la razón dinámica por la que los *retardos de tiempo* degradan el desempeño de un sistema de control: en los capítulos posteriores, se presenta este resultado exactamente en el sentido en que fue inspirado: la *respuesta impulsiva* del sistema.

Parte II

Señal de control pulsada en SDS

Capítulo 4

Motivación: La respuesta impulsiva

Uno de los enfoques más interesantes dentro del modelado de sistemas muestreados, es sin duda el modelo impulsivo presentado en Naghshtabrizi y cols. (2008). El enfoque impulsivo resulta relevante porque, diferente al control digital que describe al sistema solo en los instantes de muestreo, el impulsivo expresa la evolución del sistema como una secuencia de subdinámicas temporales. Sin embargo, aunque el modelo impulsivo representa una ventaja en la descripción del sistema, en la mayoría de la literatura aún se considera que la ley de control es constante dentro de cada subdinámica. Dicho de otra manera, tanto el enfoque discreto como los enfoques impulsivo y con retardo a la entrada, continúan considerando que la señal de control $Kx(s_k)$ es aplicada al sistema como un ZOH. De hecho, la teoría de control digital establece un máximo periodo de muestreo estabilizante del sistema (MSSP) bajo esta restricción, cota que los recientes análisis continuos han casi establecido como cotas dogmáticas de estabilidad.

Aquí surge una pregunta que motiva el desarrollo de este trabajo: ¿Es posible que el MSSP establecido por el control digital pueda extenderse al modificar la señal de control $u(t) = Kx(s_k)$ dentro de cada subdinámica? La respuesta es por supuesto afirmativa si se piensa que la señal de control $u(t)$ esta *empujando* al sistema en una sola dirección en todo el intervalo $[t_k, t_{k+1})$.

Con esto en mente, se realizaron simulaciones en las que se propuso reconfigurar la estructura de un NCS tal que se permita modificar la señal de control $u(t)$ dentro del intervalo $[t_k, t_{k+1})$. La reconfiguración se muestra en la Figura 4.1. Bajo esta reconfiguración, el modelo matemático del

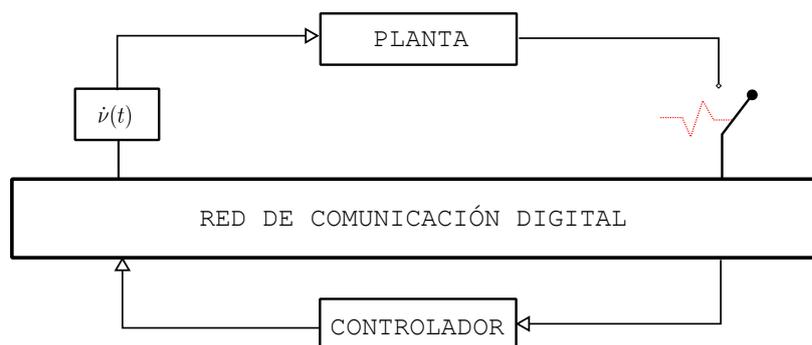


Figura 4.1: Configuración propuesta de NCS

sistema se escribe como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(s_k)v(t) \quad (4.1)$$

$$\epsilon \dot{v}(t) = g(v(t)) \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (4.2)$$

donde $s_k < t_k$, $\epsilon > 0$, y $v(t)$ y $g(\cdot)$ son funciones reales tal que $v(t) : [t_k, t_{k+1}) \rightarrow [0, 1]$. Como debe intuirse, $v(t)$ es introducida con el fin de modificar la magnitud del control $u(t)$.

Durante las simulaciones, se probaron dos tipos de comportamientos en $v(t)$. Uno creciente que consistió en colocar $v(t)$ en algún punto inicial $v(t_k) \in (0, 1)$ y hacer que $\lim_{t \rightarrow t_{k+1}} v(t) = 1$. Y otro decreciente en que $v(t_k) = 1$ y $\lim_{t \rightarrow t_{k+1}} v(t) \in (1, 0]$. De estos dos comportamientos, solo el decreciente obtuvo buenos desempeños, que es el que se presenta a continuación. Antes de presentar estos resultados, es importante mencionar que las simulaciones se realizaron en Simulink y TrueTime, ésta última una biblioteca capaz de simular congestión y pérdidas de información durante la comunicación entre los elementos de un sistema de control.

4.1. Simulaciones

Las simulaciones consideraron el sistema lineal

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} Kx(s_k) \quad (4.3)$$

con $K = -[3.75 \ 11.5]$. Este sistema ha sido objeto de pruebas en trabajos como Fridman (2010); Naghshtabrizi y cols. (2008). En ellos se menciona que, en configuración de sistema muestreado, las técnicas de control digital revelan que $MSSP = 1.7[s]$.

La dinámica de este sistema, de acuerdo a la reconfiguración de la Figura 4.1, viene dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(s_k)v(t) \quad (4.4)$$

$$\epsilon \dot{v}(t) = v(t)(v(t) - 1) \quad (4.5)$$

$$v(t_k) \approx 1, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}),$$

llamado en lo que resta de la sección, modelo del NCS propuesto.

Las simulaciones consistieron en comparar la respuesta de un NCS clásico (en la que la señal de control se mantiene constante durante todo el periodo de muestreo), contra el NCS propuesto de la Figura 4.1 (en la que la señal de control se modifica mediante $v(t)$ en $[t_k, t_{k+1})$). Ambos sistemas fueron sometidos a diferentes niveles de pérdida de información y se obtuvo lo siguiente

Prueba 1 Ante una pérdida de información del 30 %, ambos sistemas, tanto el NCS clásico como el NCS propuesto (con $\epsilon = \frac{1}{50}$), se mantuvieron estables. Los resultados se muestran en las Figuras 4.2 y 4.3.

Prueba 2 Ante una pérdida de información del 60 %, el NCS clásico perdió su estabilidad mientras el NCS propuesto (con $\epsilon = \frac{1}{50}$) se mantuvo estable (Figuras 4.4 y 4.5).

Prueba 3 Ante una pérdida de información del 80 %, el NCS propuesto logró mantenerse estable al aumentar la rapidéz de la dinámica $v(t)$ mediante $\epsilon = \frac{1}{1000}$. La Figura 4.6 muestra este resultado.

Los resultados de estas simulaciones sugieren dos cosas interesantes

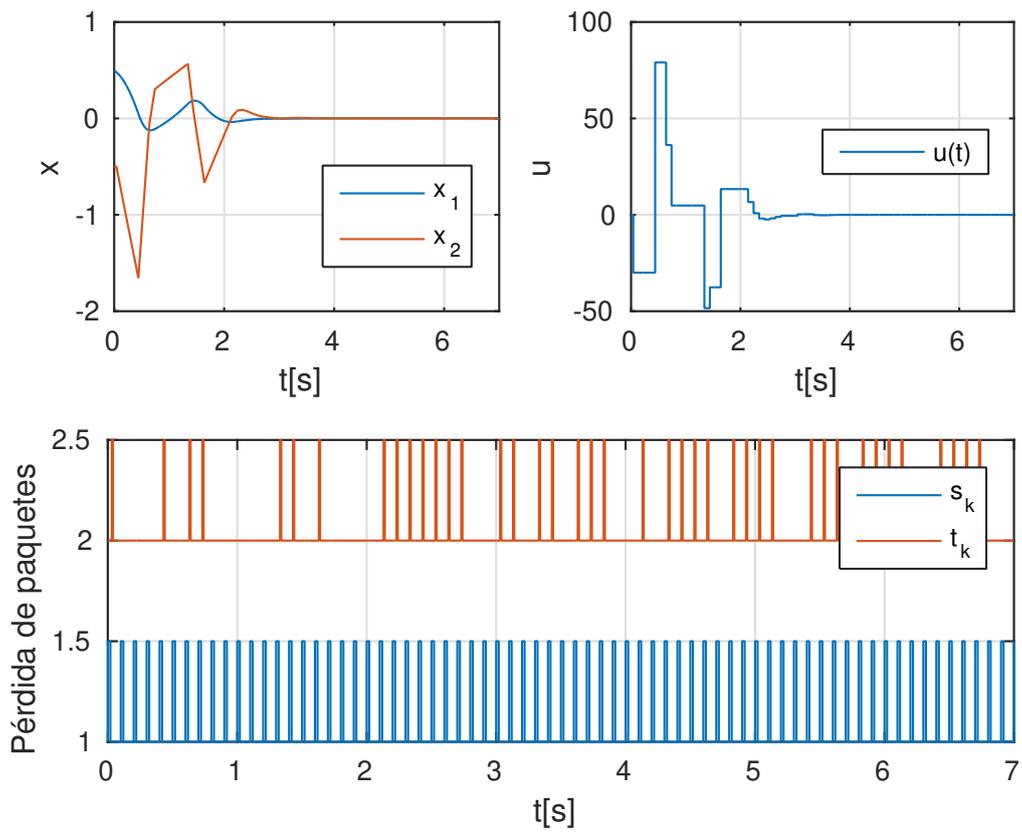


Figura 4.2: Respuesta del NCS clásico ante un 30% de pérdidas de información.

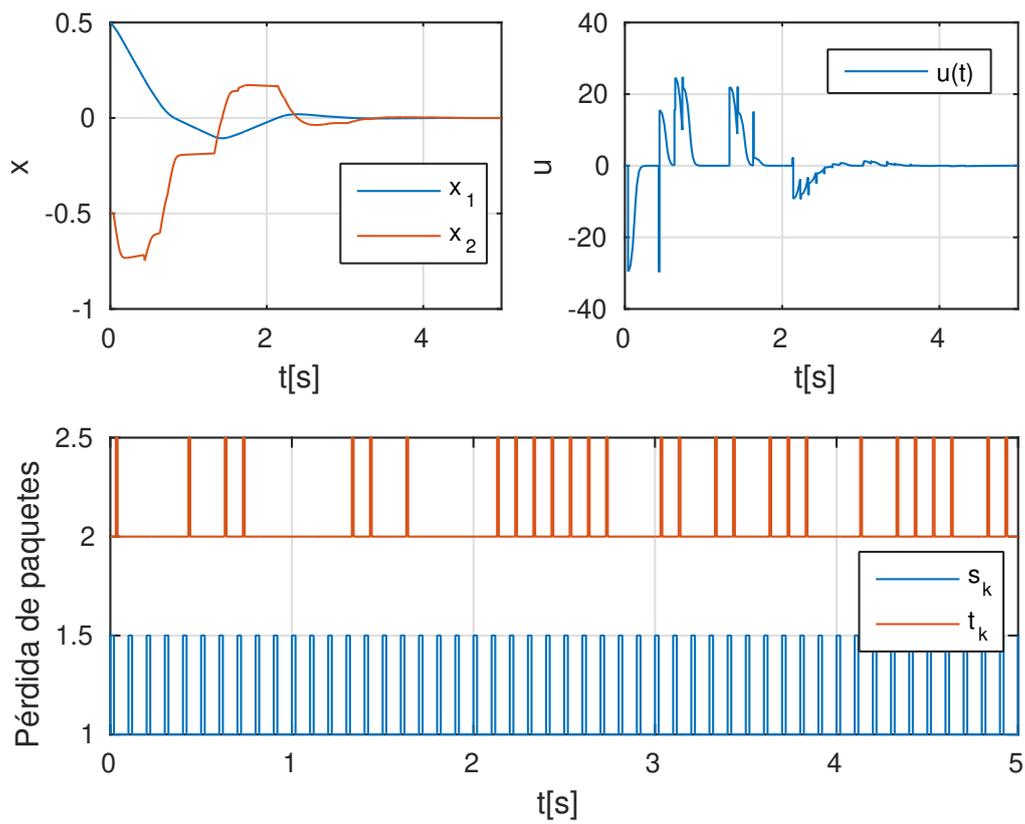


Figura 4.3: Respuesta del NCS propuesto ante un 30% de pérdidas de información.

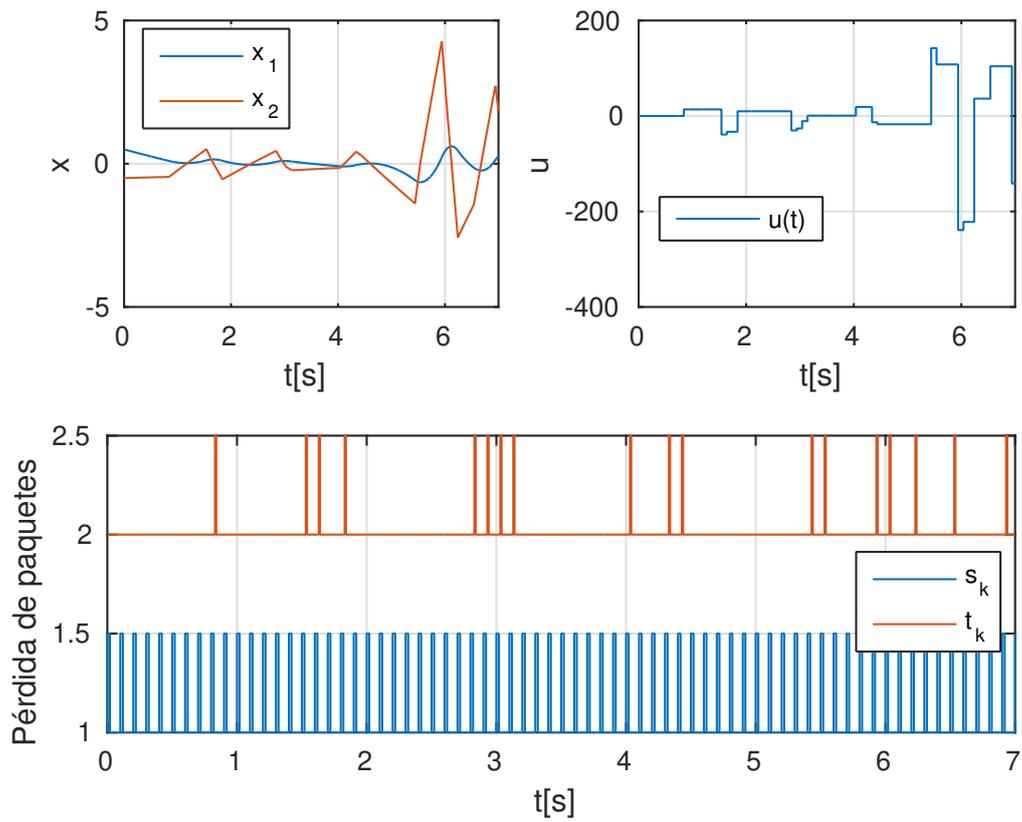


Figura 4.4: Respuesta del NCS clásico ante un 60% de pérdidas de información.

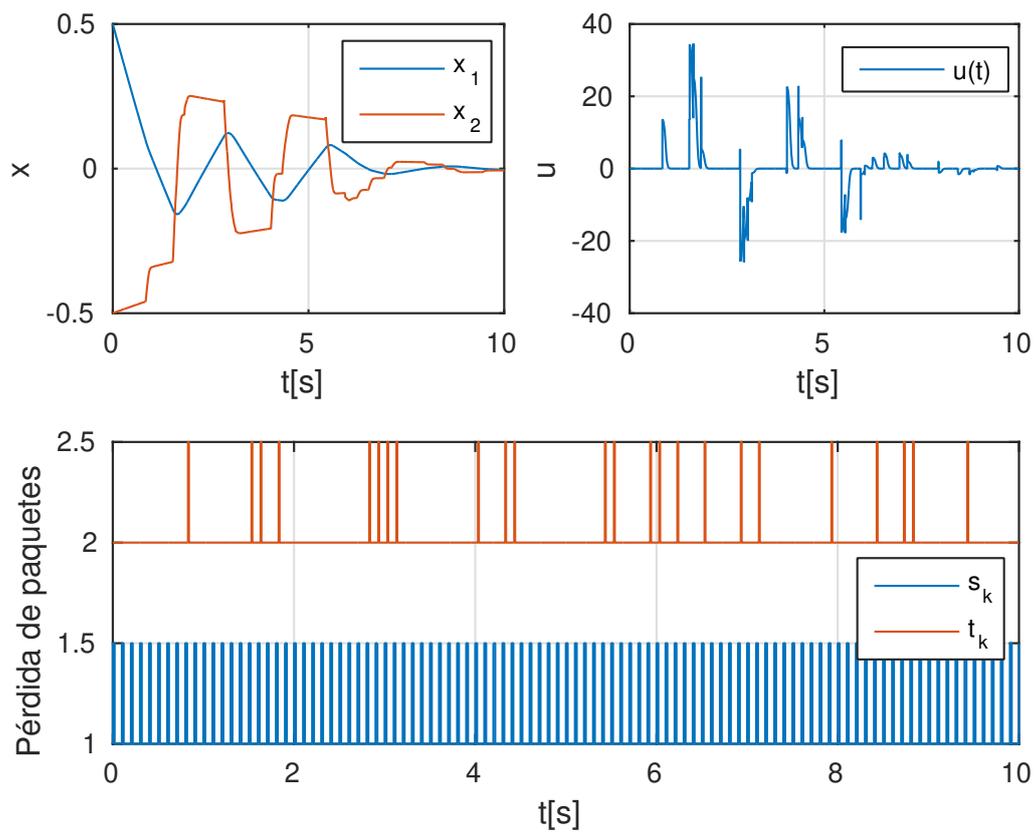


Figura 4.5: Respuesta del NCS propuesto ante un 60% de pérdidas de información.

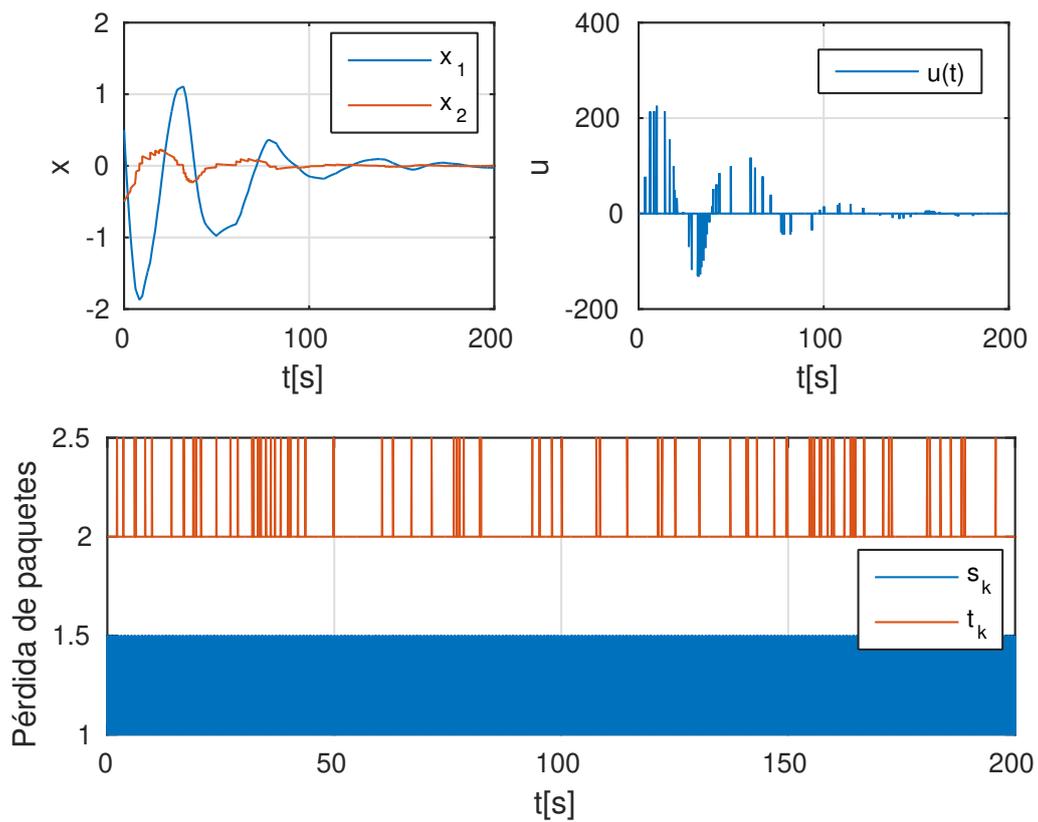


Figura 4.6: Respuesta del NCS propuesto ante un 80% de pérdidas de información. La modificación de la variable $\varepsilon = \frac{1}{50}$ a $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ logra que sistema se mantenga estable.

1. La primera es que efectivamente al modificar la señal de control dentro del intervalo $[t_k, t_{k+1})$, el sistema logra mantenerse estable para retardos de tiempo muy largos.
2. La segunda es que la mejora en el desempeño parece atribuirse a la señal de control aplicada como un impulso. Este último caso se logró aumentando la rapidéz de la dinámica $v(t)$ haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$.

Motivados por estas observaciones, buscamos trabajos que realizaran estabilización de sistemas mediante entradas impulsivas. En la literatura existen dos trabajos relacionados a estas observaciones (De La Sen y Luo, 2003; Jafari, Mathis, Mukherjee, y Khalil, 2016). En De La Sen y Luo (2003) se realizó un análisis de estabilidad para un sistema con retardos cuando la señal de control es una señal impulsiva; esto muestra que un sistema con retardos puede ser estabilizado mediante impulsos. Y en Jafari y cols. (2016) se bosqueja la idea de modificar la región de atracción de un sistema por medio de entradas impulsivas. Ambos trabajos, muestran la capacidad de las entradas impulsivas para estabilizar sistemas, resultados acorde a nuestras observaciones.

Por otro lado, aunque las entradas impulsivas parecen tener ventajas en la estabilización de sistemas con retardos, su desventaja es la dificultad para implementarlas en sistemas de control real. Lo más cercano a una señal impulsiva es evidentemente una señal de pulsos con amplitud distinta de cero y magnitud finita. Así que bajo esta similitud, se esperaría que una **señal de control pulsada** también mejore el desempeño de un sistema con retardos, como de hecho sucede.

En lo que sigue de este trabajo, se estudia el efecto de aplicar una *señal de control pulsada* a un SDS. Se mostrará, que la aplicación de la señal de control en forma **pulsada**, es capaz de mantener la estabilidad de un SDS por periodos de muestreo más largos que los establecidos por la teoría de control digital clásica. En el siguiente capítulo se explica la razón de este resultado.

Capítulo 5

Efectividad de la ley de control pulsada

En el Capítulo 4, se explicó cualitativamente la capacidad que tienen las señales impulsivas para estabilizar sistemas. Sin embargo, ya que una señal impulsiva resultaría dañina para los componentes físicos de un sistema de control, se optó por estudiar la aplicación de una **ley de control pulsada**; este capítulo presenta los resultados de este análisis. Comenzaremos definiendo la *región de periodos de muestreo estabilizantes* de un SDS bajo intervalos de muestreo constante, y enseguida se estudia el efecto que tiene la aplicación de una señal de control tipo ZOH en la dinámica del sistema. A partir de este análisis, se dice por qué la *ley de control pulsada* es capaz de mantener la estabilidad de un SDS por periodos de muestreo más grandes que los establecidos por la Teoría digital.

5.1. Región de periodos de muestreo estabilizantes

Considere un SDS descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (5.1)$$

donde

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5.2)$$

De aquí en adelante, llamaremos el *ZOH-control* a la ley de control (2.2).

Ahora, si el sistema (5.1) es controlado bajo muestreo constante, i.e. $T = T_k \forall k$, entonces el sistema (5.1) tiene la representación discreta

$$x(t_{k+1}) = \Phi(T)x(t_k) \quad (5.3)$$

donde

$$\Phi(T) = e^{AT} + \int_0^T e^{As} ds BK. \quad (5.4)$$

Luego, interesados en la estabilidad de (5.3), realizamos la definición siguiente

Definición 7. Sea \mathbb{S}_{zoh} el conjunto de todos los periodos de muestreo T que estabilizan el sistema (5.3). Entonces, el máximo periodo de muestreo estabilizante del sistema (5.3) se define como

$$\text{MSSP} = \sup \mathbb{S}_{zoh} \quad (5.5)$$

Note que la definición anterior establece que \mathbb{S}_{zoh} es la region de periodos de muestreo estabilizantes del sistema (5.3), i.e. que $\Phi(T)$ es Schur para todo $T \in \mathbb{S}_{zoh}$. Sin embargo, hasta ahora no sabemos nada acerca de la topología de \mathbb{S}_{zoh} d un sistema en particular. Así, con el fin de asegurar que \mathbb{S}_{zoh} sea al menos no vacío, presentamos el siguiente lema.

Lema 1. *Considere el sistema muestreado (5.1). Entonces, el conjunto \mathbb{S}_{zoh} de todos los periodos de muestreo que estabilizan el sistema (5.1) es no vacío, si la matriz $(A + BK)$ es Hurwitz. Además*

1. *Si la matriz A no tiene eigenvalores en el eje imaginario del plano complejo, entonces el conjunto \mathbb{S}_{zoh} es acotado a menos que A sea una matriz Hurwitz tal que la matriz $A^{-1}BK$ sea Schur.*
2. *Si la matriz A tiene eigenvalores en el eje imaginario, entonces el conjunto \mathbb{S}_{zoh} es acotado a menos que A tenga eigenvalores con parte real positiva o iguales a cero.*

Demostración. • Para mostrar que \mathbb{S}_{zoh} es un conjunto no vacío si $(A + BK)$ es Hurwitz, considere el hecho

$$e^{AT} = I + \left(\int_0^T e^{As} ds \right) A. \quad (5.6)$$

Usando (5.6), tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= e^{AT} + \int_0^T e^{As} ds BK \\ &= I + \int_0^T e^{As} ds (A + BK). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ahora, considerando la primera aproximación de (5.7), la representación discreta (5.3) se transforma en

$$x(t_{k+1}) = [I + (A + BK)T]x(t_k).$$

Luego, por la teoría de Lyapunov, sabemos que este sistema será estable si existe $P > 0$ tal que la siguiente desigualdad se satisface

$$(I + (A + BK)T)'P(I + (A + BK)T) - P < 0$$

que es equivalente a

$$P(A + BK) + (A + BK)'P + T(A + BK)'P(A + BK) < 0. \quad (5.8)$$

Ya que $A + BK$ es una matriz Hurwitz, por el teorema de Lyapunov se sigue que existe $P > 0$ tal que $P(A + BK) + (A + BK)'P < 0$. Por tanto, ya que $P > 0 \Rightarrow (A + BK)'P(A + BK) > 0$, debe existir T^* suficientemente pequeño tal que la desigualdad (5.8) siempre se satisface. De aquí podemos concluir que la representación discreta (5.3) debe ser estable para periodos de muestreo T tal que $0 < T < T^*$. Esto prueba que el conjunto \mathbb{S}_{zoh} es no vacío, y además que el sistema (5.3) es asintóticamente estable para periodos de muestreo pequeños. En efecto, $\Phi(T)$ debe ser Schur cuando $0 < T < T^*$.

• Para probar si \mathbb{S}_{zoh} es acotado o no acotado, escribimos el sistema (5.3) en una base distinta a la canónica en \mathbb{R}^n . Con este fin, sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ el conjunto de eigenvectores y eigenvectores generalizados de la matriz A que forman una base en \mathbb{R}^n , siendo λ_i el eigenvalor asociado a cada v_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces

$$(A + BK)x(t_k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (5.9)$$

$$x(t_k) = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \quad (5.10)$$

para α_i y $\beta_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Además, escribiendo $e^{As} = e^{s\lambda_i I} e^{s(A-\lambda_i I)}$, y partiendo del hecho que $e^{Is} = e^s I \forall s \in \mathbb{C}$, es fácil mostrar que

$$e^{As} v_i = e^{s\lambda_i} \left(I + s(A - \lambda_i I) + \frac{s^2}{2}(A - \lambda_i I)^2 + \dots \right) v_i \quad (5.11)$$

para cada par (v_i, λ_i) . Por simplicidad, considere inicialmente el caso en que $\{v_i\}$ es una base solo de eigenvectores (A no es defectuosa, A -non-defective). Entonces de (5.11) se tiene que

$$e^{As} v_i = e^{s\lambda_i} v_i. \quad (5.12)$$

Ahora, multiplicando la matriz $\Phi(T)$ por $x(t_k)$ obtenemos que

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_0^T e^{As} ds (A + BK) x(t_k). \quad (5.13)$$

Y sustituyendo (5.9) y (5.10) en (5.13) y usando (5.12), obtenemos

$$x(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(\alpha_i \int_0^T e^{s\lambda_i} ds + \beta_i)}_{d_i} v_i. \quad (5.14)$$

Para saber si \mathbb{S}_{zoh} es acotado o no acotado, tenemos que observar el incremento de $\|x(t_{k+1})\|$ cuando T se incrementa, ya que si $\|x(t_{k+1})\|$ se incrementa cuando T se incrementa, entonces $\Phi(T)$ inevitablemente perderá su propiedad Schur y \mathbb{S}_{zoh} será acotado. Entonces, observando el crecimiento de las componentes d_i cuando T crece, concluimos lo siguiente:

- (a) Si $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$ o $\lambda_i = 0 + j0$ para algún i , entonces d_i es no convergente cuando $T \rightarrow \infty$. Así, esta es una condición suficiente para que $\Phi(T)$ deje de ser Schur en algún $T < \infty$. En este caso, el conjunto \mathbb{S}_{zoh} será acotado ya que $\|x(t_{k+1})\|$ se incrementa siempre que T se incrementa.
- (b) Si $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$ para algún i , entonces d_i es convergente cuando $T \rightarrow \infty$. En el caso particular que $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0 \forall i$, entonces $\|x(t_{k+1})\|$ será acotada y la propiedad Schur de $\Phi(T)$ dependerá de las matrices A, B, K . A saber, ya que A es Hurwitz, de (5.7) se sigue que

$$\Phi(T) = I + A^{-1}(e^{AT} - I)(A + BK)$$

así que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Phi(T) = -A^{-1}BK.$$

Por tanto, si $A^{-1}BK$ es Schur, entonces el conjunto \mathbb{S}_{zoh} será no acotado. De otro modo \mathbb{S}_{zoh} será acotado.

- (c) Si $\lambda_i = 0 + jb$, donde $b = \text{Im}\{\lambda_i\} \neq 0$ para algún i , entonces $|d_i|$ es una componente que oscila cuando $T \rightarrow \infty$. Esto se debe a que

$$\int_0^T e^{s\lambda_i} ds = \frac{1}{b}(\sin bT + j(1 - \cos bT)).$$

Por supuesto $|d_i|$ es una oscilación acotada. Sin embargo, esta oscilación generará oscilaciones en $\|x(t_{k+1})\|$ cuando T se incrementa. Por tanto, en el caso que todas las componentes d_i sean acotadas, pero exista alguna d_i oscilante, el conjunto \mathbb{S}_{zoh} se mantendrá acotado, pero podría ser disjunto (no convexo).

Estas observaciones se resumen en el Lema 1. Por otro lado, en el caso que existan eigenvalores generalizados en $\{v_i\}$ (caso en que A es defectuosa, A -defective), de (5.11) vemos que

$$e^{As}v_i = e^{\lambda_i s}v_i + se^{\lambda_i s}(A - \lambda_i I)v_i + \dots \quad (5.15)$$

y entonces (5.13) resultará en

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^T e^{s\lambda_i} ds v_i + \alpha_i \int_0^T se^{s\lambda_i} ds (A - \lambda_i I)v_i + \dots \quad (5.16)$$

De aquí, vemos que $\|x(t_{k+1})\|$ nuevamente dependerá de integrales del término $e^{s\lambda_i}$. Así, los argumentos (a)-(c) en esta prueba son válidos nuevamente. \square

Observación 3. *Note que si A tiene eigenvalores en el eje imaginario de los complejos, el conjunto \mathbb{S}_{zoh} puede resultar en un conjunto disjunto. Esta posibilidad ha sido mencionada en Briat y Jönsson (2011). Aquí, enfatizamos que esto sucede debido a eigenvalores imaginarios puros en la matriz A .*

5.2. Efectos del ZOH-control en la dinámica de SDS

El Lema 1 establece que si la matriz $A + BK$ es Hurwitz, entonces el conjunto \mathbb{S}_{zoh} es no vacío. Sin embargo, el Lema 1 también nos dice que $A + BK$ -Hurwitz no asegura que el conjunto \mathbb{S}_{zoh} sea acotado o no acotado, e incluso disjunto o no-disjunto. No obstante, si $A + BK$ es Hurwitz, y \mathbb{S}_{zoh} es acotado y no-disjunto, ocurre un hecho interesante que facilita la obtención de nuestro resultado principal. En esta sección describimos este hecho.

Consideremos nuevamente el sistema (5.1) bajo el ZOH -control y muestreo constante, con $(A + BK)$ -Hurwitz, y \mathbb{S}_{zoh} acotado y no disjunto. Ahora, observe que la representación discreta (5.3) es la solución exacta del sistema (5.1) en los instantes $t = t_k$ para cualquier periodo de muestreo $T \in \mathbb{S}_{zoh}$. Entonces, si elegimos como Función discreta de Lyapunov

$$V(t_k) = x'(t_k)Px(t_k), \quad P > 0, \quad (5.17)$$

y extendemos su dominio al intervalo $[t_k, t_{k+1})$, entonces la función

$$V(t) : [t_k, t_{k+1}) \rightarrow \mathbb{R} : (V \circ x)(t) = x'(t)Px(t), \quad (5.18)$$

deberá ser igual en los instantes $t = t_k$ cuando es evaluada sobre las trayectorias (5.1) y (5.3). Además, la condición discreta de estabilidad

$$V(t_{k+1}) - V(t_k) < 0 \quad (5.19)$$

debe cumplirse mientras $t_{k+1} - t_k = T \in \mathbb{S}_{zoh}$.

Ahora suponga que el periodo de muestreo es ligeramente menor que el MSSP, digamos $T = \text{MSSP} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. En esta situación, ya que (5.19) esta cerca de ser violada, debe ocurrir que $V(t_{k+1}) \rightarrow V(t_k)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esto implica que dentro de la función (5.18) debe estar ocurriendo que

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \dot{V}(t) > 0, \quad (5.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_k^+} \dot{V}(t) < 0. \quad (5.21)$$

En consecuencia, por (5.20)-(5.21), la función (5.18) debe comportarse como muestra la Figura 5.1 durante el intervalo $[t_k, t_{k+1})$. Note que el significado geométrico de este comportamiento en el espacio

de estados (\mathbb{R}^n), consiste en imaginar la trayectoria $x(t)$ entrando a la superficie de nivel $V(t_k)$ al instante $t = t_k$, y tratando de escapar de la misma superficie $V(t_k)$ al instante $t = t_{k+1}$. En este contexto, nuestra premisa es que el *ZOH-control* $u(t) = Kx(t_k)$, $t_k \leq t < t_{k+1}$, precipita el escape de $x(t)$ de la superficie $V(t_k)$, o en otras palabras, el *ZOH-control* contribuye a que $x(t)$ se aleje más rápido del origen cuando $t \rightarrow t_{k+1}^-$. El Lemma 2 muestra este resultado.

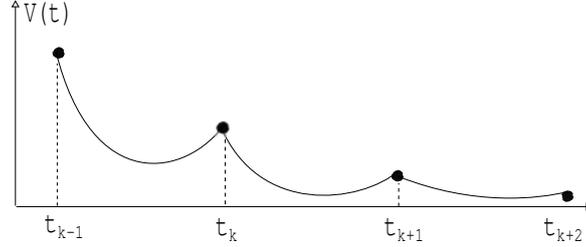


Figura 5.1: Comportamiento de la función $V(t) = x'(t)Px(t)$ en el intervalo $[t_k, t_{k+1})$.

Lema 2. Considere el sistema muestreado (5.1) sujeto a las siguientes suposiciones

1. $(A + BK)$ -Hurwitz
2. \mathbb{S}_{zoh} acotado y no disjunto.
3. $T = \text{MSSP}$.

Entonces, el crecimiento de la función (5.18), es incrementado por el *ZOH-control* $u(t) = Kx(t_k)$ cuando $t \rightarrow t_{k+1}^-$.

Demostración. Por las suposiciones del lema, se sigue que \mathbb{S}_{zoh} es no vacío y entonces $\forall T \in \mathbb{S}_{zoh}$ existe una Función discreta de Lyapunov que garantiza la existencia de la función (5.18). Además, ya que \mathbb{S}_{zoh} es acotado, entonces el *MSSP* existe. Sea $T = \text{MSSP} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ tal que $T \in \mathbb{S}_{zoh}$. Entonces, por (5.20), tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \dot{V}(t) = \lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} \cdot Ax(t) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k) \right\} > 0. \quad (5.22)$$

siendo $\frac{\partial V}{\partial x}$ el gradiente de la función (5.18). Para demostrar nuestro lema, probaremos que

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k) > 0. \quad (5.23)$$

Con esto en mente, discriminamos dos casos: 1) A es una matriz Hurwitz, y 2) A no es Hurwitz.

Caso 1. A-Hurwitz. Ya que A es una matriz Hurwitz, por el teorema de Lyapunov tenemos que $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot Ax(t) < 0 \forall t > 0$. Entonces, para que (5.22) se cumpla, necesariamente debemos tener que

$$\lim_{t \rightarrow t_{k+1}^-} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k) > 0$$

satisfaciendo (5.23).

Case 2. A-no es Hurwitz. Defina los vectores

$$\begin{aligned} b &= BKx(t_k) \\ v &= \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}$$

y note que

$$\hat{x} \cdot \hat{v} = \cos \delta > 0 \quad (5.24)$$

donde δ es cercano a cero. Esto significa que los vectores x y $\frac{\partial V}{\partial x}$ casi tienen la misma dirección para todo $x \in \mathbb{R}^n$, i.e. $x \sim \frac{\partial V}{\partial x}$.

Comenzaremos mostrando que

$$0 < \dot{x}(t) \cdot b \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (5.25)$$

Para $t = t_k$, la condición (5.21) implica que

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x}(t_k) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot Ax(t_k) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k) < 0 \quad (5.26)$$

En la desigualdad anterior, ya que A no es Hurwitz, $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot Ax(t_k) > 0$, y entonces $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k) < 0$. Esto significa que al instante $t = t_k$, el vector $BKx(t_k)$ y el vector $\dot{x}(t_k)$ apuntan dentro de la superficie de nivel $V(t_k)$. Entonces, al instante $t = t_k$ debemos tener que

$$0 < \dot{x}(t_k) \cdot BKx(t_k). \quad (5.27)$$

se satisface. Por otro lado, cuando $t \in (t_k, t_{k+1})$ tenemos que

$$\dot{x}(t) \cdot BKx(t_k) = Ax(t) \cdot BKx(t_k) + BKx(t_k) \cdot BKx(t_k) \quad (5.28)$$

$$= \underbrace{x(t) \cdot A' BKx(t_k)}_{\varphi(x(t))} + x(t_k) \cdot (BK)' BKx(t_k). \quad (5.29)$$

Definiendo $\varphi(x) = x(t) \cdot A' BKx(t_k)$, notamos que $\varphi(\cdot)$ es un *operador lineal acotado*¹. Ahora, ya que $x(t)$ esta entrando a la superficie $V(t_k)$ en $t = t_k$, instantes después de $t = t_k$ debe ocurrir que $\|x(t)\| < \|x(t_k)\|$. Además, ya que $x(t)$ es continuo en t y $\varphi(x)$ es lineal, debemos tener que

$$\|x(t)\| < \|x(t_k)\| \Rightarrow |\varphi(x(t))| < |\varphi(x(t_k))| \quad (5.30)$$

o equivalentemente

$$-|x(t_k) \cdot A' BKx(t_k)| < \varphi(x(t)) < |x(t_k) \cdot A' BKx(t_k)|. \quad (5.31)$$

Para asegurar que (5.29) es positiva, tomamos el peor caso en que $x(t_k) \cdot A' BKx(t_k) < 0$. En ese caso, usando (5.31) podemos escribir

$$\varphi(x(t)) = x(t_k) \cdot A' BKx(t_k) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (5.32)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (5.29), tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \cdot BKx(t_k) &= \varepsilon + x(t_k) \cdot A' BKx(t_k) + x(t_k) \cdot (BK)' BKx(t_k) \\ &= \varepsilon + \dot{x}(t_k) \cdot BKx(t_k) \end{aligned}$$

¹It is a *linear functional* $\varphi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, bounded and continuous in x (Pedersen, 2017).

y por (5.27), obtenemos que

$$0 < \dot{x}(t) \cdot BKx(t_k) \quad (5.33)$$

se satisface mientras $\|x\| < \|x(t_k)\|$.

Ahora integrado (5.33), tenemos que

$$0 < \int_{t_k}^t \dot{x}(s) \cdot \hat{b} ds = (\dot{x}(t^*) \cdot \hat{b})(t - t_k) \quad (5.34)$$

para algún t^* tal que $t_k \leq t^* < t$. Y de (5.34), tenemos

$$x(t) \cdot \hat{b} = (\dot{x}(t^*) \cdot \hat{b})(t - t_k) + x(t_k) \cdot \hat{b} \quad (5.35)$$

de donde concluimos que $x(t) \cdot \hat{b}$ es una cantidad creciente en $(t - t_k)$. Por tanto, ya que $x(t) \cdot \hat{b}$ es creciente en $(t - t_k)$, y $\|x(t)\|$ decrece dentro de la superficie $V(t_k)$, debe ocurrir que $x(t)$ debe estar rotando hacia $BKx(t_k)$ cuando $(t - t_k)$ se incrementa. En efecto, (5.35) tiene que ser positiva para $(t - t_k)$ suficientemente grande. Luego, ya que $x \sim \frac{\partial V}{\partial x}$, se sigue que

$$0 < \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \hat{b} \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow t_{k+1} \quad (5.36)$$

se satisface. \square

El Lema 2 asegura que, bajo $T = \text{MSSP}$, mientras el *ZOH-control* fuerza a que $x(t)$ entre a la superficie $V(t_k)$ en $t = t_k$, el mismo *ZOH-control* contribuye a que $x(t)$ abandone la superficie $V(t_k)$ cuando t se esta aproximando a t_{k+1} . Esto es a lo que nos referimos cuando decimos que el *ZOH-control* contribuye a que $x(t)$ se aleje más rápido del origen. De hecho, esta es precisamente la interpretación de que $0 < \frac{\partial V}{\partial x} \cdot BKx(t_k)$ se satisfaga cuando $t \rightarrow t_{k+1}$, ya que $\frac{\partial V}{\partial x} \sim x$ (ver (5.24)). En este sentido, observe que el Lema 2 revela una forma de extender el conjunto de periodos de muestreo estabilizantes de un SDS. A saber, si $u(t) = Kx(t_k)$ precipita la salida de $x(t)$ de la superficie $V(t_k)$ cuando $t \rightarrow t_{k+1}$, entonces el control $u(t) = 0$ cuando $t \rightarrow t_{k+1}$ contribuirá a que $x(t)$ se mantenga dentro de la superficie $V(t_k)$ por periodos de tiempo más largos (o bien que $x(t)$ se aleje más lentamente del origen). Con base en este resultado, proponemos realizar tareas de control mediante una *señal de control pulsada*. En lo que resta del trabajo, planteamos este problema de control, y mostramos que las Funcionales de Lyapunov-Krasovskii son capaces de realizar análisis de estabilidad apropiados bajo este tipo de señal.

Observación 4. *Note que el Lemma 2, justifica los resultados obtenidos en Castillo y Benítez-Pérez (2017); Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009): ante periodos de muestreo tal que $\mathbb{S}_{zoh} \ni T \sim \text{MSSP}$, la ley de control pulsada alenta la salida de $x(t)$ de la superficie de nivel $V(t_k)$.*

Observación 5. *Es importante remarcar que de acuerdo a nuestra discusión en el Lema 2, se deduce también que el control $u(t) = Kx(t_k)$ solo es efectivo mientras $\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) < 0$ se cumpla, ya que debido a $x \sim \frac{\partial V}{\partial x}$, solo en este caso la trayectoria $x(t)$ se estará acercando al origen.*

Capítulo 6

Funcionales de Lyapunov-Krasovskii como herramienta de análisis

En capítulos anteriores se ha explicado que un SDS puede ser modelado como *sistema discreto*, como *sistema impulsivo*, o como *sistema con retardo*. También se ha explicado que estos enfoques (en su mayoría) han considerado que la señal de control es aplicada al sistema como un ZOH: esto quiere decir que la señal de control es constante durante el *intermuestreo*. Por otro lado, en el Capítulo 5 mostramos que si el periodo de muestreo es cercano al MSSP, entonces la señal de control tipo ZOH favorece la inestabilidad del sistema. Debido a esto, se ha propuesto realizar tareas de control en SDS's mediante una señal de control pulsada. En este capítulo planteamos este problema de control, y realizamos el análisis de estabilidad utilizando una Funcional de Lyapunov-Krasovskii (Teoría de sistemas con retardos).

6.1. Planteamiento del problema

Como mencionamos anteriormente, la dinámica de un sistema muestreado puede ser expresada como

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad (6.1)$$

donde A y B son matrices constantes. Entonces, nuestro problema de control consiste en analizar la estabilidad del sistema (6.1) cuando la señal de control $u(t)$ viene dada por

$$u(t) = \begin{cases} Kx(t_k), & \text{if } t_k \leq t < t_k + h \\ 0, & \text{if } t_k + h \leq t < t_{k+1}, \end{cases} \quad (6.2)$$

siendo K una matriz constante de dimensiones apropiadas, $x(t_k)$ la señal muestreada de $x(t)$, y $h \in (0, T)$.

6.2. Análisis vía Funcionales de Lyapunov-Krasovskii

Como se mencionó en el Capítulo 2, la señal digital $x(t_k)$ inducida por el muestreador origina retardos de tiempo en la dinámica del sistema. Esto significa que los retardos de tiempo surgen intrínsecamente cuando la información fluye como una señal digital a través del sistema. Obviamente, con la aparición de retardos en la dinámica, la teoría de sistemas con retardos se vuelve una herramienta de análisis poderosa.

Ya anteriormente se ha mencionado que la Teoría de sistemas con retardos se ha vuelto popular tanto en SDS como en NCS. La razón de esta popularidad, recae en el hecho que las *Funcionales de Lyapunov-Krasovskii* (FLK) son fáciles de manipular, y además el análisis resulta muy semejante al utilizado en el análisis estándar por *Funciones de Lyapunov* (FL) (véase por ejemplo Fridman (2014); Hale y Lunel (1993); Kharitonov (2012)). La diferencia principal entre el análisis por FLK y el análisis por FL, es que una FLK depende de la trayectoria pasada del sistema (un conjunto de puntos), y no solo de un punto de esa trayectoria como en una FL. En otras palabras, a diferencia de un FL, una FLK almacena información acerca de lo que le ha ocurrido al sistema en el pasado. Esta es la razón por la que una FLK resulta adecuada para el análisis de estabilidad de un SDS estabilizado con la *ley de control pulsada* (6.2); una FLK es capaz de recordar el pulso aplicado en el intervalo $[t_k, t_k + h)$, una vez que el control se anula en el intervalo $[t_k + h, t_{k+1})$. Esta característica fue aprovechada en el análisis de estabilidad siguiente.

6.2.1. Análisis de estabilidad

Teorema 3. *Dados $h, T > 0$, tales que $0 < h < T$, el sistema (6.1)-(6.2), es asintóticamente estable con periodo de muestreo T , si existen matrices $P > 0$, $U > 0$, N_1 y $N_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que las siguientes desigualdades se satisfacen*

$$\Pi_0 + (T - h)\Pi_1 < 0 \quad (6.3)$$

$$\Pi_2 < 0 \quad (6.4)$$

$$\Pi_3 < 0 \quad (6.5)$$

$$\Pi_4 < 0 \quad (6.6)$$

donde

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 2PA - 2N_1 & N_1 - N_2' \\ * & -\frac{1}{h}(I - \Phi(h)^{-1})'U(I - \Phi(h)^{-1}) + 2N_2 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} A'UA & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Pi_2 = \begin{bmatrix} 2PA - 2N_1 & N_1 - N_2' & (T - h)N_1 \\ * & -\frac{1}{h}(I - \Phi(h)^{-1})'U(I - \Phi(h)^{-1}) + 2N_2 & (T - h)N_2 \\ * & * & -(T - h)U \end{bmatrix},$$

$$\Pi_3 = 2(A + BK)'P + T(A + BK)'U(A + BK),$$

$$\Pi_4 = 2(A\Phi(h) + BK)'P\Phi(h) + (T - h)(A\Phi(h) + BK)'U(A\Phi(h) + BK) - \frac{1}{h}(\Phi(h) - I)'U(\Phi(h) - I),$$

$$\Phi(h) = e^{Ah} + \int_0^h e^{As} ds BK.$$

Demostración. Considere la Funcional presentada en Fridman (2010)

$$\nu(t, x(t), \dot{x}_t) = x'(t)Px(t) + (T - \tau(t)) \int_{t_k}^t \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds, \quad (6.7)$$

$$\forall t \in [t_k, t_{k+1}),$$

donde $\dot{x}_t \in L_2[-T, 0]$, $P > 0$, $U > 0$, y $\tau(t)$ = dado por la Definición 5 del Capítulo 2. Tomando la derivada respecto al tiempo de (6.7) tenemos

$$\dot{\nu}(t) = 2\dot{x}'(t)Px(t) + (T - \tau(t))\dot{x}'(t)U\dot{x}(t) - \int_{t_k}^t \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds, \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (6.8)$$

Luego, para todo $t \in [t_k + h, t_{k+1})$, (6.8) puede escribirse como

$$\dot{\nu}(t) = 2\dot{x}'(t)Px(t) + (T - \tau(t))\dot{x}'(t)U\dot{x}(t) - \int_{t_k+h}^t \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds - \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds. \quad (6.9)$$

Ahora, similar a Naghshtabrizi y cols. (2008); Seuret (2012), usando la desigualdad

$$\dot{x}'(s)U\dot{x}(s) > 2\varepsilon'(t) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \dot{x}(s) - \varepsilon'(t) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}' \varepsilon(t)$$

donde $U > 0$, $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\varepsilon(t) = \text{col}\{x(t), x(t_0)\}$, y reemplazando la dinámica no forzada $\dot{x}(t) = Ax(t) \forall t \in [t_k + h, t_{k+1})$ causada por el control (6.2), de (6.9) se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{\nu}(t) &\leq 2x'(t)A'Px(t) + (T - \tau(t))x'(t)A'UAx(t) - 2\varepsilon'(t) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} (x(t) - x(t_k + h)) \\ &+ (\tau(t) - h)\varepsilon'(t) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}' \varepsilon(t) - \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds, \quad \forall t \in [t_k + h, t_{k+1}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Por otro lado, ya que $u(t) = Kx(t_k) \forall t \in [t_k, t_k + h)$ por (6.2), podemos escribir $x(t_k + h)$ como

$$x(t_k + h) = \Phi(h)x(t_k) \quad (6.11)$$

donde

$$\Phi(h) = e^{Ah} + \int_0^h e^{As}dsBK. \quad (6.12)$$

Note que $\Phi(h)$ es el operador discreto que transforma $x(t_k)$ en $x(t_k + h)$ con periodo de muestreo h . Luego, usando la *desigualdad de Jensen*, podemos estimar el término integral constante de (6.10) como

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}'(s)U\dot{x}(s)ds &\geq \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}'(s)dsU \int_{t_k}^{t_k+h} \dot{x}(s)ds \\ &= \frac{1}{h} (x(t_k + h) - x(t_k))'U(x(t_k + h) - x(t_k)) \\ &= \frac{1}{h} x'(t_k + h)(I - \Phi(h)^{-1})'U(I - \Phi(h)^{-1})x(t_k + h). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Finalmente sustituyendo la cota (6.13) en la desigualdad (6.10), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) \leq & \varepsilon'(t) \left(\begin{bmatrix} 2PA - 2N_1 & N_1 - N_2' \\ * & -\frac{1}{h}(I - \Phi(h)^{-1})'U(I - \Phi(h)^{-1}) + 2N_2 \end{bmatrix} \right. \\ & + (T - \tau(t)) \begin{bmatrix} A'UA & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} \\ & \left. + (\tau(t) - h) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}' \right) \varepsilon(t), \quad \forall t \in [t_k + h, t_{k+1}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Por tanto, para garantizar estabilidad asintótica del sistema para el intervalo $[t_k + h, t_{k+1})$, es suficiente que el lado derecho sea negativo definido de $\tau(t) = h$ a $\tau(t) = T$. Las desigualdades (6.3) y (6.4) se siguen de esta exigencia respectivamente. Las desigualdades (6.5) y (6.6) se deducen al exigir que la derivada (6.8) sea negativa en los puntos $t = t_k$ y $t = t_k + h$. \square

En la prueba del Teorema 3, debe observarse que a consecuencia de la *señal de control pulsada*, aparece un término integral constante en el intervalo $[t_k + h, t_{k+1})$. Podemos pensar en este término, como un término de almacenamiento negativo que impide el crecimiento inmediato de la funcional (6.7) al anular la señal de control $u(t)$. Este comportamiento es una característica particular de la *Teoría de sistema con retardos*, y que es diferente a la *Teoría de Lyapunov clásica* donde una Función de Lyapunov se incrementa repentinamente cuando se anula la señal de control. A este comportamiento nos referimos cuando decimos que la *Teoría de sistemas con retardos* almacena información de lo ocurrido al sistema en el pasado.

En el capítulo siguiente, utilizando el Teorema 3, mostramos algunos ejemplos que prueban que la *ley de control pulsada* (6.2) mantiene la estabilidad de un SDS por periodos de muestreo más grandes que la ley de control tipo ZOH.

Capítulo 7

Ejemplos de efectividad

Con el fin de validar este trabajo, esta sección presenta tres ejemplos que muestran la efectividad de la *señal de control pulsada* en SDS; dos simulaciones y una prueba sobre una planta experimental. Como se verá, en los ejemplos simulados, el Teorema 3 muestra que los máximos periodos de muestreo estabilizantes son mayores al MSSP establecido por el *Control digital*.

7.1. Ejemplo 1 (Lazo abierto inestable)

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, K = - [3.5 \quad 11.5],$$

matrices del SDS (6.1)-(6.2). Para este sistema, el control digital establece un MSSP = 1.75[s]. Por otro lado, si aplicamos la señal de control como un pulso de anchura h , podemos utilizar el Teorema 3 para estimar los máximos periodos de muestreo estabilizantes del sistema. La Tabla 7.1 muestra los resultados. Note que de acuerdo a la Tabla 7.1, existen periodos de muestreo más largos que 1.75[s] para los que el sistema se mantiene estable. Para probar este resultado, realizamos la siguiente simulación: elegimos un periodo de muestreo de $T = 1.99[s]$ y colocamos el sistema en la condición inicial $x_0 = (0.5, 0.5)$ al instante $t = 0[s]$. Luego, de $t = 0[s]$ hasta $t = 6T = 11.94[s]$ aplicamos la señal de control tipo ZOH, y de $t = 11.94[s]$ hasta $t = 40[s]$ se aplicó la *ley de control pulsada* con $h = 0.9[s]$. La Figura 7.1 muestra la trayectoria del sistema durante la simulación. Observe que cuando $t < 11.94[s]$ el sistema tiene comportamiento inestable, sin embargo, cuando se aplica la *ley de control pulsada* el sistema se estabiliza. Además, para comprobar que el sistema comienza a estabilizarse a partir de $t = 11.94[s]$, en la Figura 7.2 hemos graficado la evolución de la FLK (6.7), su derivada respecto al tiempo, y la señal de control aplicada al sistema durante el intervalo de tiempo [11.94, 25.87].

7.2. Ejemplo 2 (Lazo abierto estable)

Sean

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, K = - [3.5 \quad 11.5],$$

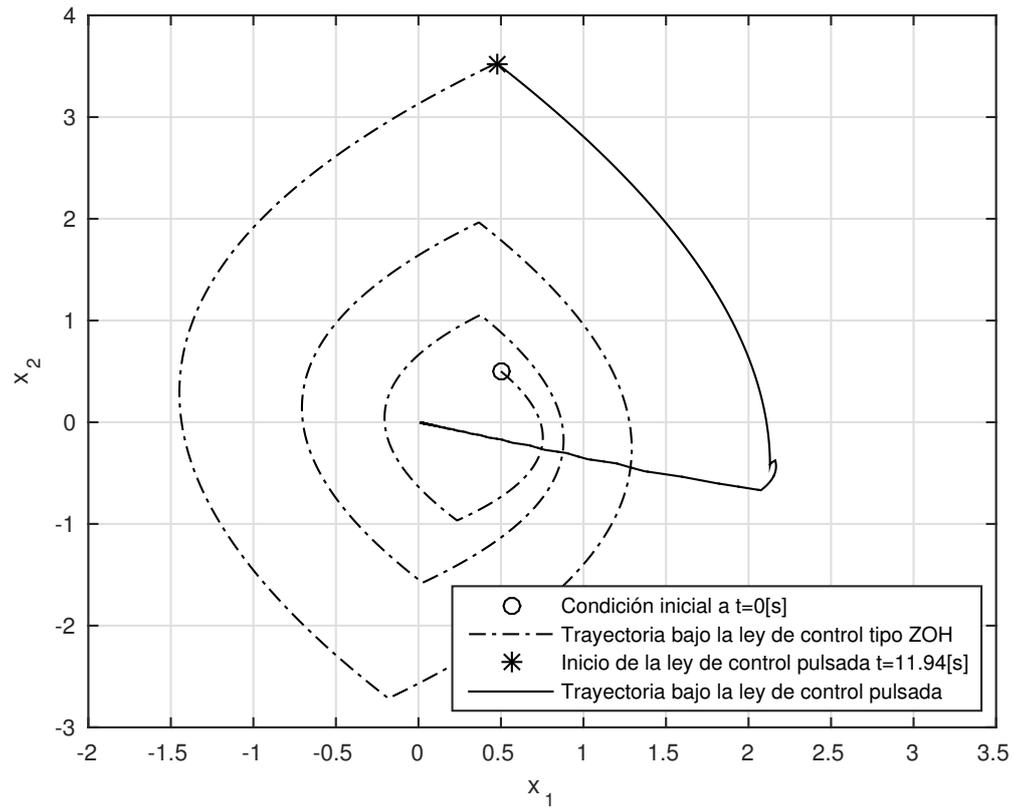
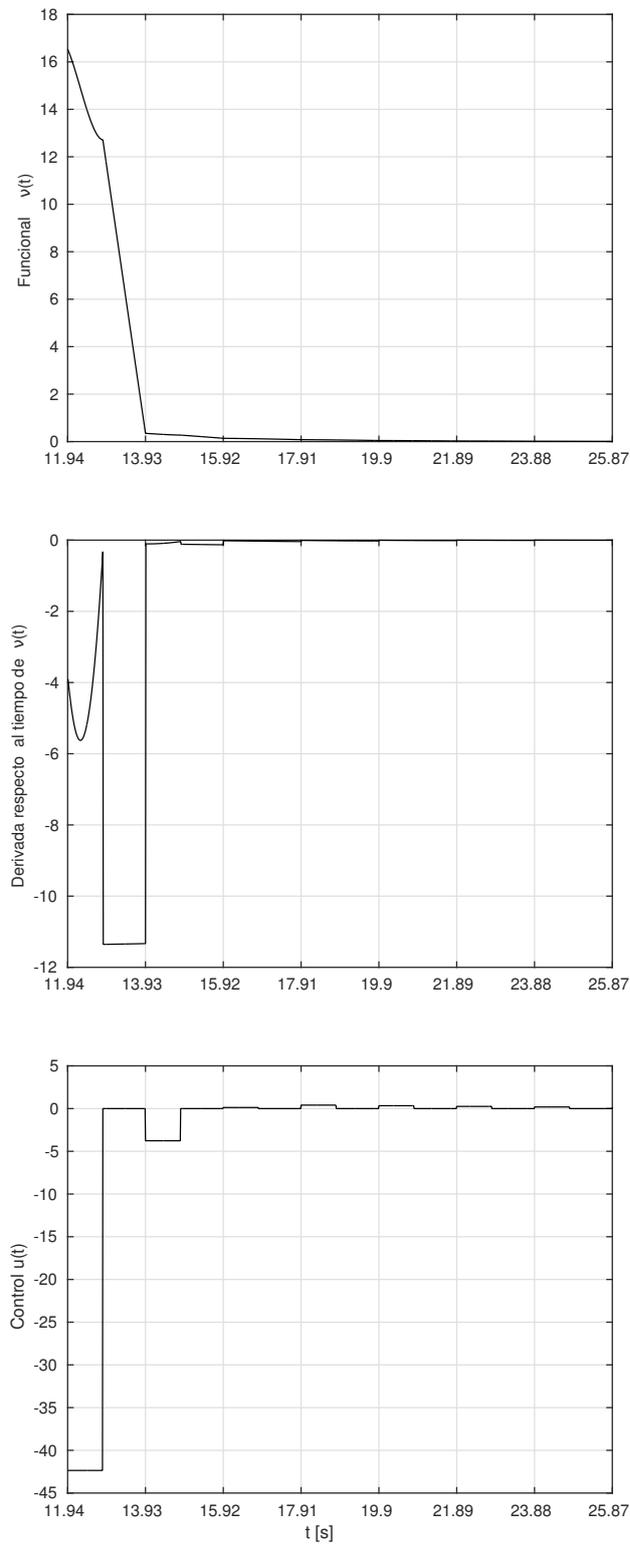


Figura 7.1: Trayectoria $x(t)$ del ejemplo 7.1 para un periodo de muestreo de $T = 1.99$ [s]. De acuerdo al control digital, el sistema es inestable para este periodo de muestreo utilizando la ley de control tipo ZOH, sin embargo cuando la señal de control se aplica como una señal pulsada con $h = 0.9$ [s], el sistema se estabiliza.

Figura 7.2: Comportamiento de la FLK $\nu(t)$, $\dot{\nu}(t)$, y la señal de control $u(t)$ en el ejemplo 7.1.

Cuadro 7.1: MSSP's estimados por el Teorema 3 en el ejemplo 7.1, usando la *ley de control pulsada* (6.2) con ancho de pulso h .

$h[s]$	Máximo periodo de muestreo estabilizante (MSSP) [s]
0.1	0.53
0.5	1.98
0.9	1.99
1.3	1.75
1.7	1.76

matrices del SDS (6.1)-(6.2). En este caso, el MSSP de acuerdo al control digital, corresponde a $T = 1.70[s]$. Cuando la señal de control se aplica como una señal pulsada, la Tabla 7.2 muestra los MSSP's estimados por el Teorema 3. De forma análoga al ejemplo 7.1, el Teorema 3 revela que existen periodos de muestreo mas grandes que $1.7[s]$ para los que el sistema se mantiene estable. Nuevamente, para comprobar estos resultados, asignamos $T = 1.95[s]$ como periodo de muestreo, y colocamos al sistema en el punto inicial $x_0 = (-0.5, -0.5)$ al instante $t = 0[s]$. Luego, de $t = 0[s]$ a $t = 6T = 11.70[s]$ aplicamos la señal de control tipo ZOH, y de $t = 11.70[s]$ hasta $t = 30[s]$ aplicamos la señal de control en forma pulsada con $h = 0.5[s]$. La Figura 7.3 muestra la trayectoria del sistema en el espacio de estados, y la Figura 7.4 ilustra el comportamiento de la FLK (6.7), su derivada, y la señal de control aplicada en el intervalo $[11.70, 30]$.

Cuadro 7.2: MSSP's estimados por el Teorema 3 en el ejemplo 7.2, usando la *ley de control pulsada* (6.2).

$h[s]$	Máximo periodo de muestreo estabilizante (MSSP) [s]
0.1	1.76
0.5	1.95
0.9	1.88
1.3	1.68
1.6	1.68

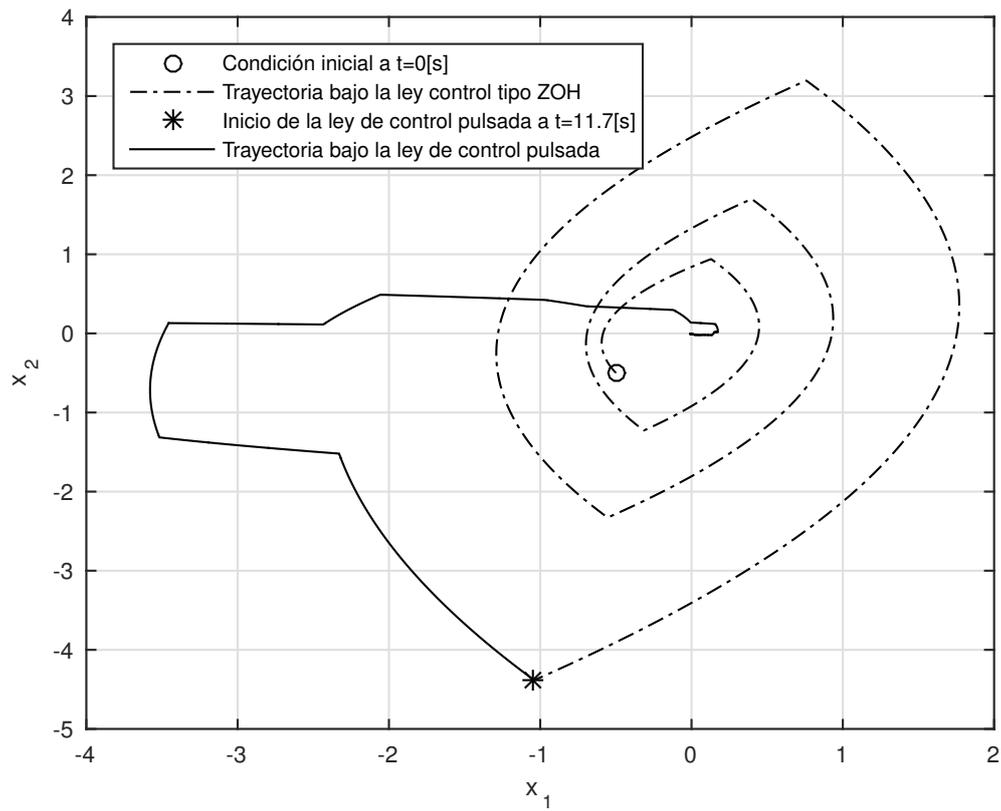


Figura 7.3: Trayectoria $x(t)$ para el ejemplo 7.2 cuando el periodo de muestreo es $T = 1.95[s]$. El sistema es inestable bajo la ley de control tipo ZOH, sin embargo cuando la señal de control es aplicada como señal pulsada de anchura $h = 0.5[s]$, el sistema se estabiliza.

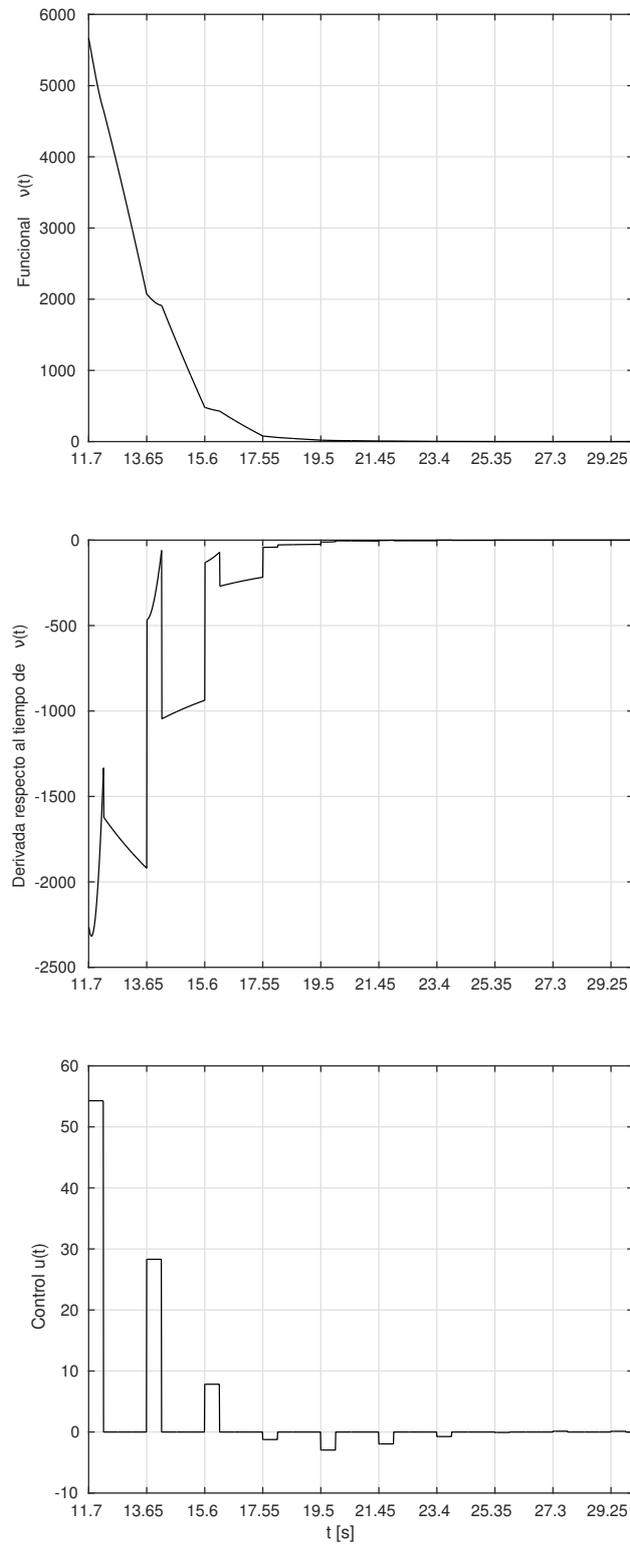


Figura 7.4: Comportamiento de la FLK $\nu(t)$, $\dot{\nu}(t)$, y la señal de control $u(t)$ en el ejemplo 7.2.

7.3. Prueba experimental

Finalmente, se realizó la técnica de pulsado en una planta experimental. En ? se desarrolló el modelado y control de un cuadricóptero cuyo objetivo es orientar sus ángulos $Roll(\phi)$, $Pitch(\theta)$ y $Yaw(\psi)$. En este trabajo, la prueba consistió en regular este sistema de la posición $(\phi, \theta, \psi) = (0, 0, 0)$ a la posición $(0, 0, 20^\circ)$, y comparar la respuesta del sistema cuando la señal de control se aplica con un ZOH, y cuando se aplica como una señal pulsada. En la prueba se asignó un periodo de muestreo de 60 milisegundos, y la anchura del pulso de la señal de control se dispuso ser de 24 milisegundos. Durante los primeros 40 segundos se aplicó la señal de control tipo ZOH, y de 40 a 80 segundos se aplicó la ley de control pulsada (6.2) con $h = 24[ms]$. La Figura 7.5 muestra los resultados.

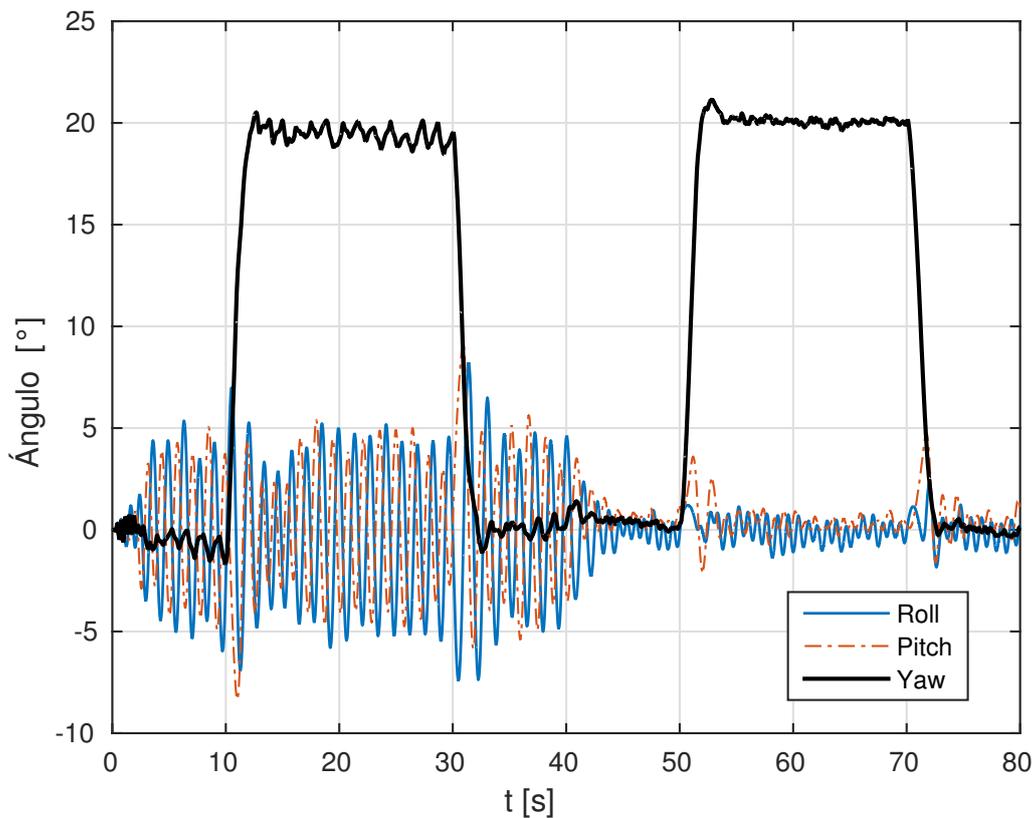


Figura 7.5: Control de un cuadricóptero para un periodo de muestreo de 60[ms]. De 0[s] a 40[s] se aplicó señal de control tipo ZOH, y de 40[s] a 80[s] la señal de control se aplicó como una señal pulsada con $h = 24[ms]$.

Capítulo 8

Conclusiones

En la actualidad, la Teoría de control digital y la Teoría de sistemas discretos han marcado el camino en el análisis de sistemas de control digitalizados (SDS y NCS). La idea subyacente y casi dogmática en este tipo de análisis, es que una señal de control tipo ZOH es la mejor aproximación a la señal de control ideal necesaria para estabilizar al sistema. En efecto, esta es una premisa correcta cuando el periodo de muestreo es pequeño. Sin embargo, cuando el periodo de muestreo comienza a crecer, la señal de control tipo ZOH comienza a diferenciarse de aquella señal de control ideal en el siguiente sentido: aunque el periodo de muestreo es constante, el sistema tiene una dinámica durante el intermuestreo que se hace más evidente cuando el periodo de muestreo es largo. Esto implica que la señal de control ideal necesaria para estabilizar al sistema sea diferente para cada periodo de muestreo, es decir, la señal de control ideal necesaria para estabilizar el sistema ante periodos de muestreo pequeños, es diferente a la señal necesaria para estabilizar el sistema ante periodos de muestreo grandes. En este trabajo hemos propuesto a la señal de control pulsada como mejor aproximación a la señal estabilizadora cuando el periodo de muestreo es grande. A su vez, hemos mostrado que la señal de control tipo ZOH no es adecuada ante periodos de muestreo largos y hemos dado la justificación dinámica de este hecho.

Los resultados de este trabajo pueden ser de interés para sistemas de control que esten expuestos a imperfecciones durante la comunicación como sucede en SDS y NCS. A saber, cuando un SDS (o NCS) está expuesto a pérdidas de información (*packet dropouts*), una técnica ampliamente utilizada consiste en mantener la señal de control constante con la información previa cuando un paquete no llega en el instante esperado. Este trabajo muestra, que posiblemente esto no sea lo más conveniente si el paquete se demora mucho tiempo en llegar al nodo actuador: una mejor decisión es anular la señal de control.

Es importante mencionar, que este trabajo no contradice ni la teoría de control digital, ni la teoría discreta. A saber, ya que estas técnicas de análisis no consideran la evolución del sistema durante el intermuestreo, aún usando la ley de control pulsada siempre podemos representar al sistema de forma discreta mediante la matriz de transición $\Phi(T, h)$ propuesta en Li, Cela, y cols. (2009); Li, Niculescu, y cols. (2009). Así, la ley de control pulsada solo reemplaza a la ley de control tipo ZOH cuando existen periodos de muestreo largos. Esto hace posible, por ejemplo, la utilización de técnicas de control predictivo de forma usual.

Referencias

- Briat, C. (2014). Spectral necessary and sufficient conditions for sampling-period-independent stabilisation of periodic and aperiodic sampled-data systems using a class of generalised sampled-data hold functions. *International Journal of Control*, 87(3), 612–621.
- Briat, C., y Jönsson, U. T. (2011). Dynamic equations on time-scale: application to stability analysis and stabilization of aperiodic sampled-data systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 11374–11379.
- Briat, C., y Seuret, A. (2012). A looped-functional approach for robust stability analysis of linear impulsive systems. *Systems & Control Letters*, 61(10), 980–988.
- Castillo, O., y Benítez-Pérez, H. (2017). A novel technique to enlarge the maximum allowable delay bound in sampled-data systems..
- De La Sen, M., y Luo, N. (2003). A note on the stability of linear time-delay systems with impulsive inputs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 50(1), 149–152.
- Fridman, E. (2010). A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2), 421–427.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. Springer.
- Hale, J. K., y Lunel, S. M. V. (1993). *Introduction to functional differential equations* (Vol. 99). Springer Science & Business Media.
- Hespanha, J. P., y Morse, A. S. (1999). Stability of switched systems with average dwell-time. En *Proceedings of the 38th IEEE conference on decision and control (cat. no. 99ch36304)* (Vol. 3, pp. 2655–2660).
- Hong, S. H. (1995). Scheduling algorithm of data sampling times in the integrated communication and control systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(2), 225–230.
- Jafari, R., Mathis, F. B., Mukherjee, R., y Khalil, H. (2016). Enlarging the region of attraction of equilibria of underactuated systems using impulsive inputs. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(1), 334–340.
- Kabamba, P. (1987). Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions. *IEEE transactions on Automatic Control*, 32(9), 772–783.
- Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5), 5–1.
- Kharitonov, V. (2012). *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*. Springer Science & Business Media.
- Kim, D.-S., Lee, Y. S., Kwon, W. H., y Park, H. S. (2003). Maximum allowable delay bounds of networked control systems. *Control Engineering Practice*, 11(11), 1301–1313.
- Li, X.-G., Cela, A., Niculescu, S.-I., y Reama, A. (2009). A switched control method for networked control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(14), 61–65.
- Li, X.-G., Niculescu, S.-I., Reama, A., y cols. (2009). Stability analysis of networked control systems based on a switched control. *IFAC Proceedings Volumes*, 42(20), 358–363.
- Miheev, Y. V., Sobolev, V. A., y Fridman, È. M. (1988). Asymptotic analysis of digital control

- systems. *Avtomatika I Telemekhanika*(9), 83–88.
- Morse, A. S. (1996). Supervisory control of families of linear set-point controllers-part i. exact matching. *IEEE transactions on Automatic Control*, 41(10), 1413–1431.
- Naghshtabrizi, P., Hespanha, J. P., y Teel, A. R. (2008). Exponential stability of impulsive systems with application to uncertain sampled-data systems. *Systems & Control Letters*, 57(5), 378–385.
- Pedersen, M. (2017). *Functional analysis in applied mathematics and engineering*. Routledge.
- Sala, A. (2007). Improving performance under sampling-rate variations via generalized hold functions. *IEEE transactions on control systems technology*, 15(4), 794–797.
- Seuret, A. (2012). A novel stability analysis of linear systems under asynchronous samplings. *Automatica*, 48(1), 177–182.
- Sun, X.-M., Liu, G.-P., Rees, D., y Wang, W. (2008). A novel method of stability analysis for networked control systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 4852–4856.
- Yue, D., Han, Q.-L., y Peng, C. (2004). State feedback controller design of networked control systems. En *Control applications, 2004. proceedings of the 2004 ieee international conference on* (Vol. 1, pp. 242–247).
- Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K., y Michel, A. N. (2001). Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach. *International Journal of Systems Science*, 32(8), 1055–1061.
- Zhang, C.-K., He, Y., Jiang, L., y Wu, M. (2017). Notes on stability of time-delay systems: bounding inequalities and augmented lyapunov-krasovskii functionals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(10), 5331–5336.
- Zhang, X.-M., y Han, Q.-L. (2016). On tighter estimation of the time derivative of lyapunov-krasovskii functionals and stability criteria for time-delay systems. En *Industrial electronics society, iecon 2016-42nd annual conference of the ieee* (pp. 6806–6811).