Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Sobre la incompletud de teorías geométricas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

Andrés Alonso Flores Marín

TUTOR

Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

A los matemáticos parias
doblemente marginales al serles negados
incluso las mieles del malditismo

Índice general

A manera de arranque o justificación

Creemos firmemente en la máxima monterrosiana sobre la brevedad. Razón por la que el lector se encontrará frente a pocas páginas, las cuales si una virtud tienen es la de ahorrarse algún argumento prescindible. Esto último es particularmente cierto en la demostración del tercer teorema del tercer capítulo.

Esta tesis es sobre topos clasificantes. Tenemos la idea de que éstos son una especie de análogo del álgebra de Lindenbaum-Tarski estudiada en los cursos usuales de lógica. Esta idea se fundamenta, entre otras cosas, por algunos de los resultados que el lector podrá encontrar en el último capítulo. De éstos algunos son originales, a menos en el sentido de que quien escribe no los ha encontrado previamente.

Una variación de lo dicho hasta ahora: esta tesis es un ejercicio de reescritura (en el sentido de Mac), por donde se filtran una o dos ideas ligeramente originales (i.e. desconocidas por quien escribe hasta antes de haberlas escrito.) ¿Quién es Walter?

Quien escribe no pudo evitar pensar antes como lógico que como categórico, había que decirlo bajo riesgo de ser llamado *a less experienced mathematician*, cosa relativa pero evidentemente cierta casi desde cualquier perspectiva. El hilo conductor fue dado por la lógica porque no hubo otra opción. A tal grado que creemos poder demostrar el teorema de factorización usual de morfismos geométricos pensando en el topos contradominio como el topos clasificante de una teoría geométrica y considerar una extensión completa y consistente de ésta. Por el momento no lo haremos.

En este ejercicio de reescritura la parte central fue el cambio de lentes sintácticos por los lentes semánticos. Esto fue hecho para evitarnos cálculos inmensamente tediosos, de hecho ni siquiera presentamos un cálculo deductivo (por ello no podemos probar el teorema de completud de Gödel, cosa que podría hacerse si, por ejemplo, hubiéramos desarrollado la teoría como es usual y argumentado con las completaciones consistentes de las teorías consistentes en su contraparte categórica, el topos clasificante.) Este cambio de lentes nos permitió ahorrarnos un par de parráfos y nos evitó emprender la burocrática tarea de las pruebas formales en un sistema deductivo. El enfoque sin embargo tiene sus desventajas: en ocasiones hay problemas no muy graves con el tamaño de las cosas, pero la principal desventaja es que a momentos dejamos de ser constructivistas lo cual por el momento no nos preocupa porque nunca habíamos sido constructivistas. Los agradecimientos. De manera esencial para Araceli y María del Carmen, sin ellas nada fuera posible; a Juvencio, Cástulo, los dos Aldos y a María Concha y su prole. A mis amigos proletarios: Rodolfo en especial, JJ, Alondra y un largo etcétera. A Don Cruz, con todo respeto. A Óscar, Rodrigo y Judith. A personas que alguna vez les di clases, muy en especial a Isvy que me ha escuchado sobre estas

ideas. A Gabriela mejor amiga en el sentido de que en el español no existe la palabra maximal y que decir mi máxima amiga suena realmente ridículo. A Hernán, maestro. A la gran amabilidad de Hugo Rincón. A mis profesores de matemáticas y vida por sus conocimientos compartidos, su amabilidad y paciencia (también en la retícula de preferencias son máximos por lo que el orden de aparición no significa nada): Alejando Díaz-Barriga, Francisco Marmolejo y Fernando Vilchis, todo agradecimiento es una aproximación. Y porque esta tesis está escrita sin paracaídas *a mi mejor amiga de lejos*, Violeta García, directora no oficial del campus América Latina de la U.D.

Esta tesis es, por definición, un intento fallido de texto matemático shandy.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo recopilamos una serie de definiciones y resultados tratando de dar un panorama general de la teoría que el lector debería conocer para leer las páginas siguientes. Todos los resultados aquí citados pueden encontrarse en la unión de [1] con [2], teniendo el debido cuidado porque algunos nombres para nociones en la intersección no coinciden, interesección que, por lo demás, no es vacía. Más aún, en ocasiones se usan nombres en uno para denotar nociones que aparecen en el otro y el nombre del primero aparece en el segundo como nombre de otra noción que resulta no ser equivalente con la antes referida. Empero, todo esto no será problema alguno para un lector medianamente despierto e incluso el problema al que nos referimos no aparece aquí sino hasta el capítulo 3.

1.1. Categorías con suficiente estructura

Decimos que la imagen de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ en una categoría $\mathcal{C}$ es el menor subobjeto de B a través del cual se factoriza f. Las imágenes no tienen porque existir, pero de hacerlo son, casi por definición, únicas (salvo isomorfismo.) En Con, la categoría de conjuntos, las imágenes de funciones son las usuales; en la categoría de grupos el primer teorema de isomorfismo nos dice que todo morfismo de grupos se factoriza a través de su imagen.

Definición 1.1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ es regular si es cartesiana (es decir, tiene límites finitos), existen los coigualadores de pares núcleo (es decir, existen los coigualadores de los morfismos dados por el producto fibrado de un morfismo a lo largo de sí mismo) y los epimorfismos regulares (es decir, los coigualadores de pares de morfismos) son estables bajo productos fibrados. Un funtor regular es un funtor cartesiano (preserva productos finitos) que respeta epimorfismos regulares.

Es un hecho bien conocido que

Proposición 1.1.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría regular y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de ésta. Existen un monomorfismo m y un epimorfismo regular e tales que $f = me$. Además esta factorización es única: si $f = m'e'$ con m' monomorfismo y e' epimorfismo* *regular, entonces existe un isomorfismo $r : cod(e) \longrightarrow cod(e')$ tal que $re = e'$ y $m'r = m$. Ésta es la factorización de f a través de su imagen.*

Definición 1.1.2. Se dice que una categoría es geométrica si es regular, bien potenciada y tiene uniones arbitrarias de subobjetos estables bajo productos fibrados. Se dice que un funtor entre categorías geométricas es geométrico si es regular y respeta uniones arbitrarias.

1.2. Topos de Grothendieck

Definición 1.2.1. Una pregavilla en una categoría pequeña $\mathcal{C}$ es un funtor $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow$ Con. Denotamos por $\mathrm{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$ a la categoría de pregavillas en $\mathcal{C}$.

Denotamos por y_C al funtor contravariante (pregavilla) representable por C; si $f : D \longrightarrow C$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, escribiremos $y_f : y_D \longrightarrow y_C$ para referirnos a la transformación natural evidente. Para ser más claros, cuando variamos el subíndice de nuestros funtores representables y_C obtenemos el encaje de Yoneda, $y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$.

Definición 1.2.2. Una criba S sobre un objeto C de una categoría $\mathcal{C}$ es una familia de morfismos con codominio C cerrada bajo composición por la derecha. Equivalentemente, una criba sobre C es un subobjeto del funtor representable y_C en la categoría de pregavillas de $\mathcal{C}$.

Si S es una criba sobre C y $h : D \longrightarrow C$ es un morfismo, denotaremos a la familia de morfismos $\{g : \mathrm{cod}(g) = D, hg \in S\}$ por $h^\star(S)$. Es fácil ver que esta familia es el producto fibrado a lo largo de y_f del subobojeto $S \rightarrowtail y_C$. Es claro de esto que $h^\star(S)$ es una criba sobre D.

Definición 1.2.3. Una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathcal{C}$ es una asignación J que a cada objeto C de $\mathcal{C}$ le asocia una colección $J(C)$ de cribas sobre C que satisfacen

1. La criba máxima $t_C = \{f : \mathrm{cod}(f) = C\}$ está en $J(C)$.
2. (Axioma de estabilidad.) Si $S \in J(C)$, entonces $h^\star(S) \in J(D)$ para todo morfismo $h : D \longrightarrow C$.
3. (Axioma de transitividad.) Si $S \in J(C)$ y R es cualquier criba sobre C tal que $h^\star(R) \in J(D)$ para todo morfismo $h : D \longrightarrow C$ en S, entonces $R \in J(C)$

Definición 1.2.4. Un sitio es un par ordenado $(\mathcal{C}, J)$ donde $\mathcal{C}$ es una categoría y J una topología de Grothendieck sobre $\mathcal{C}$. Por lo regular a las cribas $R \in J(C)$ les llamaremos cribas cubrientes.

Proposición 1.2.1. *Si $(\mathcal{C}, J)$ es un sitio de Grothendieck y $S, T \in J(C)$, entonces $S \cap T \in J(C)$.*

Demostración. Note que para cada $f : D \longrightarrow C \in S$, $f^\star(S \cap T) = f^\star(T) \in J(D)$. □

Proposición 1.2.2. *Si $(\mathcal{C}, J)$ es un sitio de Grothendieck, S y T son cribas sobre C tales que $T \in J(C)$ y $T \subset S$, entonces $S \in J(C)$*

Demostración. Note que para cada $f : D \longrightarrow C \in T$, $f^\star(S) = t_C \in J(C)$. $\square$

Definición 1.2.5. Una base para una topología de Grothendieck sobre una categoría $\mathcal{C}$ con productos fibrados es una función K que asigna a cada objeto $\mathcal{C}$ una colección $K(C)$ de familias de morfismos con codominio C tales que

1. Si $f : C' \longrightarrow C$ es un isomorfismo, entonces $\{f : C' \longrightarrow C\} \in K(C)$.

2. Si $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i \in I} \in K(C)$, entonces para cualquier morfismo $g : D \longrightarrow C$, la familia de productos fibrados $(C_i \times_C D \longrightarrow D)_{i \in I}$ está en $K(D)$.

3. Si $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i \in I} \in K(C)$ y para cada $i \in I$ tenemos una familia $(g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C_i)_{j \in I_i} \in K(C_i)$, entonces la familia de composiciones $(f_i g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C)_{i \in I, j \in I_i}$ está en $K(C)$.

Dada una familia A de morfismos con codominio C podemos considerar a la familia de todos los morfismos que se factorizan a través de algún morfismo en A. Esta familia es una criba sobre C que contiene a A, que denotaremos por (A) y a la que llamaremos la criba generada por A.

Proposición 1.2.3. *Sea $(\mathcal{C}, J)$ un sitio de Grothendieck y sea $S = (f_i : C_i \longrightarrow C)_{i \in I}$ una familia de morfismos tal que $(S) \in J(C)$ y tal que para cada $i \in I$ existe una familia de morfismos $T_i = (g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C_i)_{j \in I_i}$ con $(T_i) \in J(C_i)$, entonces la criba generada por $R = (f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C)_{i \in I, j \in I_i}$ está en $J(C)$.*

Demostración. Supongamos que $f : D \longrightarrow C \in (S)$. Demostraremos que $f^\star((R)) \in J(D)$. Como $f \in (S)$, entonces existen $h : D \longrightarrow C_i$ y $f_i : C_i \longrightarrow C$ tales que $f = f_i \circ h$.

Note que $h^\star((T_i)) = \{k : K \longrightarrow D : h \circ k \in (T_i)\}$, por lo tanto, si $k \in h^\star((T_i))$, entonces $h \circ k = g_{ij} \circ l$ para alguna $l : K \longrightarrow D_{ij}$ y $g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C_i \in T_i$. De donde, al componer con f_i como se muestra abajo

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "l"'] & D \arrow[r, "h"] & C_i \arrow[r, "f_i"] & C \\ & D_{ij} \arrow[ur, "g_{ij}"'] \arrow[urr, dashed] & & \end{tikzcd}$$

tenemos que $h^\star((T_i)) \subset (f_i \circ h)^\star((R)) = f^\star((R))$, y como $h^\star((T_i)) \in J(D)$, hemos acabado. $\square$

Proposición 1.2.4. *Toda base para una topología de Grothendieck genera una topología de Grothendieck.*

Demostración. Supongamos K base para una topología de Grothendieck. Definimos, para cada C, la familia de cribas $J(C)$ estableciendo que una criba R pertenece a $J(C)$ si y sólo si existe $T \in K(C)$ tal que $T \subset R$. Es fácil ver que J es una topología de Grothendieck. $\square$

Definición 1.2.6. Una pregavilla $F : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Con}$ es una gavilla para una topología de Grothendieck J sobre $\mathcal{C}$ si para todo diagrama

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, tail] & F \\ y_C \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

con S una criba cubriente, existe un único morfismo punteado que lo hace conmutativo como se muestra arriba.

A la subcategoría plena de $\mathrm{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$ cuyos objetos son gavillas con respecto a una topología J la denotaremos por $\mathrm{Gav}(\mathcal{C}, J)$.

Definición 1.2.7. Decimos que una categoría $\mathcal{E}$ es un topos de Grothendieck si es (equivalente a) una categoría de gavillas $\mathrm{Gav}(\mathcal{C}, J)$.

Definición 1.2.8. Un morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ entre dos topos de Grothendieck (o entre dos topos elementales, que se definirán más abajo) es un par adjunto $f^\star : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \dashv f_\star : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ con $f^\star$ un funtor cartesiano. A $f^\star$ se le conoce como la imagen inversa y a $f_\star$ como la imagen directa del morfismo geométrico. Denotaremos por **Groth** a la (2-)categoría cuyos objetos son topos de Grothendieck y cuyos morfismos son morfismos geométricos (y 2-celdas, transformaciones naturales entre las imágenes inversas de los morfismos geométricos.)

Se puede demostrar que todo topos de Grothendieck es una categoría geométrica, ello no es, de modo alguno, trivial y la manera que el autor conoce para demostrar esto es haciendo uso del teorema de Giraud que caracteriza a los topos estudiados bajo condiciones de exactitud. Este teorema es el 0.45 de [3]

Teorema 1.2.1. *Si $(\mathcal{C}, J)$ es un sitio de Grothendieck, entonces la inclusión $Gav(\mathcal{C}, J) \rightarrowtail Con^{\mathcal{C}^{op}}$ tiene un adjunto izquierdo cartesiano $a : Con^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow Gav(\mathcal{C}, J)$.*

Demostración. La demostración de este hecho puede encontrarse en la sección 5 del capítulo III. de [1]. □

Definición 1.2.9. 1. Sea $S = (s_i : A_i \longrightarrow B)_{i \in I}$ una familia de morfismos en un topos de Grothendieck. Una familia $(f_i : A_i \longrightarrow E)_{i \in I}$ es compatible con S si todos los cuadrados exteriores de

$$\begin{tikzcd} A_i \times_B A_j \arrow[r] \arrow[d] & A_j \arrow[d, "s_j"] \arrow[ddr, bend left, "f_j"] & \\ A_i \arrow[r, "s_i"] \arrow[drr, bend right, "f_i"'] & B \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$

son cuadrados conmutativos.

2. La familia $(s_i)_{i\in I}$ se dice efectiva si para toda familia compatible $(f_i)_{i\in I}$ existe un único morfismo $f : B \longrightarrow E$ que hace conmutativo al diagrama de arriba.

Definición 1.2.10. Decimos que una familia de morfismos $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es epimórfica si siempre que para todo par de morfismos $C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} D$ se tenga que $gf_i = hf_i$ para toda $i \in I$, entonces $g = h$.

Proposición 1.2.5. *En una categoría con coproductos pequeños, una familia $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es epimórfica si y sólo si el morfismo inducido $f : \amalg_{i\in I} C_i \longrightarrow C$ es un epimorfismo.*

Demostración. Supongamos que $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es una familia epimórfica y supongamos que $\amalg_{i\in I} C_i \xrightarrow{f} C \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} D$ es un diagrama conmutativo. Entonces, para cada $i \in I$ tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} \amalg_{i\in I} C_i \arrow[r, "f"] & C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & D \\ C_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[ur, bend right, "f_i"'] & & \end{tikzcd}$$

que conmuta. Como $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es una familia epimórfica, que $g = h$.

Por otro lado, si suponemos que $f : \amalg_{i\in I} C_i \longrightarrow C$ es un epimorfismo y que, para cada $i \in I$, se tiene que $gf_i = hf_i$, entonces, usando la propiedad universal del coproducto en un diagrama similar al anterior, se puede deducir que $gf = hf$ y, como f es un epimofismo, entonces $g = h$. $\square$

Proposición 1.2.6. *En un topos de Grothendieck una familia $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es epimórfica si y sólo si $\bigvee_{i\in I} Im(f_i) = C$.*

Demostración. Es fácil ver que la imagen del morfismo $f : \amalg_{i\in I} C_i \longrightarrow C$ inducido por $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es la unión de las imágenes de cada f_i (página 30 de [2].) Por lo tanto si dicha familia es epimórfica entonces, f es un epimorfismo y por lo tanto, su imagen es todo C.

Por otro lado, si $\bigvee_{i\in I} Im(f_i) = C$, entonces la imagen de f es C, de donde éste es un epimorfismo y por lo tanto, la familia de morfismos es epimórfica. $\square$

Proposición 1.2.7. *Si $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es una familia epimórfica y para cada $i \in I$, $(g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C_i)_{j\in I_i}$ es una familia epimórfica, entonces $(f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \longrightarrow C)_{i\in I, j\in I_j}$ es una familia epimórfica.*

Demostración. Supongamos que $h\circ(f_i \circ g_{ij}) = k\circ(f_i \circ g_{ij})$ para toda $i \in I$ y para toda $j \in I_i$. Como las g_{ij} forman una familia epimórfica, entonces $h \circ f_i = k \circ f_i$ para toda $i \in I$, como las f_i forman una familia epimórfica, podemos deducir que $h = k$. $\square$

Proposición 1.2.8. *Si $B = (f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I}$ es una familia epimórfica y A es una familia de morfismos con codominio C tal que $B \subset A$, entonces A es una familia epimórfica.*

Demostración. Si dos morfismso son igualados por A en particular son igualados por B y por lo tanto iguales. □

Proposición 1.2.9. *En un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ toda familia epimórfica es efectiva.*

Demostración. Este es el lema 1.3.2 de [4]. □

Definición 1.2.11. Decimos que un funtor $F : C \longrightarrow \mathcal{E}$ de un sitio de Grothendieck $(\mathcal{C}, J)$ a un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ es continuo con respecto a J si para cada familia $(f_i : C_i \longrightarrow C)_{i\in I} \in J(C)$ tenemos que $(F(f_i))_{i\in I}$ es una familia epimórfica.

Proposición 1.2.10. *Para todo funtor $A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck, el funtor $R_A : \mathcal{E} \longrightarrow Con^{\mathcal{C}^{op}}$, definido en objetos como $R_A(E) = \mathcal{E}(A(-), E)$ tiene un funtor adjunto izquierdo $- \otimes_{\mathcal{C}} A : Con^{\mathcal{C}^{op}} \longrightarrow \mathcal{E}$*

Demostración. El funtor $- \otimes_{\mathcal{C}} A$ envía a una pregavilla $P : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Con}$ a $P \otimes_{\mathcal{C}} A = \mathrm{colím}(A \circ \pi_P)$, donde $\pi_P : \int P \longrightarrow \mathcal{C}$ es la proyección canónica a $\mathcal{C}$ desde la categoría de elementos, $\int P$, de P (cuyos objetos son parejas (x, PC) con $x \in PC$ y morfismos entre dichos objetos, $f : (x, PC) \longrightarrow (y, PC')$, morfismos $f : C \longrightarrow C'$ de $\mathcal{C}$ que satisfacen $P(f)(y) = x$.) Los detalles pueden encontrarse en [1] buscando el teorema 2 de la sección 5 del capítulo 1. □

Definición 1.2.12. Decimos que un funtor $A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck, es un funtor plano si $- \otimes_{\mathcal{C}} A$ es cartesiano (es decir, si $- \otimes_{\mathcal{C}} A \dashv R_A$ forman un morfismo geométrico.) Denotamos por $\mathrm{Plano}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ a la categoría de funtores planos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{E}$.

Proposición 1.2.11. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña y $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck, entonces tenemos una equivalencia de categorías*

$$Geom(\mathcal{E}, Con^{\mathcal{C}^{op}}) \simeq Plano(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

natural en $\mathcal{E}$.

Demostración. Definimos una asignación en la que un funtor plano $A : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es enviado al morfismo geométrico dado por la adjunción $- \otimes_{\mathcal{C}} A \dashv R_A$. Su inversa, salvo isomorfismo, envía a cada morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Con}^{\mathcal{C}^{op}}$ al funtor plano dado por la composición $f^\star \circ y : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$. Los detalles pueden encontrarse en la sección 7 del capítulo 7 de [1] o bien hacerse fácilmente. □

Para un sitio de Grothendieck $(\mathcal{C}, J)$ consideremos a la subcategoría plena de $\mathrm{Plano}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ conformada por todos los funtores planos y continuos con respecto a J, a la que denotaremos por $\mathrm{Plano}_J(\mathcal{C}, \mathcal{E})$, tenemos, entonces, que la equivalencia anterior puede restringirse por el siguiente teorema

Teorema 1.2.2. *Si $(\mathcal{C}, J)$ es un sitio y $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck, tenemos una equivalencia*

$$Geom(\mathcal{E}, Gav(\mathcal{C}, J)) \simeq Plano_J(\mathcal{C}, \mathcal{E})$$

natural en $\mathcal{E}$

Demostración. La prueba se encuentra en la página 393 de [1]. Sólo diremos que a un morfismo geométrico $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Gav}(\mathcal{C}, J)$ lo enviaremos, bajo la equivalencia que afirmamos que existe, al funtor plano y continuo $f^\star \circ y$, donde y es la inmersión de Yoneda. □

A estas equivalencias se les conoce como las equivalencias de Diaconescu.

Definición 1.2.13. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, con $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck, se dice filtrante si satisface las siguientes condiciones:

1. La familia $(FC \longrightarrow 1)_{C \in \mathcal{C}}$ es epimórfica

2. Para cualesquiera dos objetos C y D en $\mathcal{C}$, al considerar todos los objetos B y todos los diagramas de la forma $C \xleftarrow{u} B \xrightarrow{v} D$ en $\mathcal{C}$, tenemos que los morfismos
$$(A(u), A(v)) : A(B) \longrightarrow A(C) \times A(D)$$
forman una familia epimórfica.

3. Para cualesquiera dos morfismos paralelos $u, v : C \longrightarrow D$ en $\mathcal{C}$ sea $E_{u.v}$ el igualador en $\mathcal{E}$ de $A(u)$ y $A(v)$. Considerando todos los objetos B de $\mathcal{C}$ y todos los morfismos $w : B \longrightarrow C$ con $uw = vw$, tenemos que los morfismos $A(w)$ se factorizan a través de $E_{u,v}$ y que los morfismos punteados del siguiente diagrama
$$\begin{tikzcd} A(B) \arrow[r, "A(w)"] \arrow[d, dashed] & A(C) \arrow[r, shift left, "A(u)"] \arrow[r, shift right, "A(v)"'] & A(D) \\ E_{u,v} \arrow[ur, tail] & & \end{tikzcd}$$
forman una familia epimórfica.

Teorema 1.2.3. *Sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ un funtor, con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck. $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor plano si y sólo si es filtrante. Además si $\mathcal{C}$ es cartesiana tenemos que F es filtrante si y sólo si F es cartesiano.*

Demostración. La prueba no es para nada trivial, de hecho es muy técnica pero puede consultarse en las secciones 8 y 9 del capítulo 7 de [1]. □

1.3. Topos elementales

Definición 1.3.1. Un topos elemental es una categoría cartesiana, cartesianamente cerrada y con clasificador de subobjetos.

Se puede demostrar que todo topos de Grothendieck es un topos elemental (pero no todo topos elemental es de Grothendieck, el ejemplo usual: la categoría de conjuntos finitos.) Por lo regular, se denota por Ω al clasificador de subobjetos de $\mathcal{E}$, y por $v : 1 \rightarrowtail \Omega$ al morfismo de verdad.

Denotamos por $\wedge : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ al morfismo que clasifica al subobjeto $(v, v) : 1 \rightarrowtail \Omega \times \Omega$. Nos interesa, por el momento, rescatar la siguiente definición que resulta ser una generalización de las topologías de Grothendieck.

Definición 1.3.2. Sea $\mathcal{E}$ un topos elemental. Una topología de Lawvere-Tierney es un morfismo $j : \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que los siguientes diagramas son conmutativos

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, tail, "v"] \arrow[dr, tail, "v"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j"'] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
& \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"] \arrow[d, "j \times j"] & \Omega \arrow[d, "j"] \\
\Omega \times \Omega \arrow[r, "\wedge"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Definición 1.3.3. Si $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ son dos topos elementales, decimos que $\mathcal{F}$ es un subtopos de $\mathcal{E}$ si existe un morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ cuya imagen directa es fiel y plena.

Se prueba que el concepto de topología de Lawvere-Tierney subsume al concepto de topología de Grothendieck (véase por ejemplo la sección 4 del capítulo 5 de [1].) Más aún, puede probarse que si tenemos un subtopos de un topos de Grothendieck, éste es también un topos de Grothendieck.

Capítulo 2

Lógica Geométrica

En este capítulo revisaremos la teoría concerniente a la lógica geométrica. Esta lógica es la que naturalmente posee un topos de Grothendieck (y, en general, toda categoría geométrica) pues las imágenes inversas de morfismos geométricos respetarán las interpretaciones de todos los elementos sintácticos que a contiuación presentaremos.

2.1. Lenguajes geométricos

Definición 2.1.1. Un lenguaje geométrico es un par ordenado de conjuntos $\mathcal{L}_\Sigma = (\mathcal{L}, \Sigma)$ donde:

1. $\mathcal{L} = \{\bot, \top, \wedge, \bigvee, \exists, =\}$ es el conjunto de símbolos lógicos del lenguaje.
2. Σ es la signatura del lenguje y consiste de los siguientes conjuntos ajenos dos a dos de símbolos

   a) Un conjunto distinto del vacío Σ-tip de tipos.

   b) Para cada $A \in \Sigma$-tip, un conjunto infinito contable de variables $\{x_1^A, x_2^A, \ldots\}$.

   c) Un conjunto Σ-fun de símbolos funcionales. Cada símbolo funcional f posee una $n+1$-tupla $(A_1, \ldots, A_n, B) \in \Sigma\text{-tip}^{n+1}$, para refereir este hecho escribiremos $f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B$.

   d) Un conjunto Σ-rel de símbolos relacionales. Cada símbolo relacional R posee una n-tupla $(A_1, \ldots, A_n) \in \Sigma\text{-tip}^n$, para referir este hecho escribiremos $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$.

Los lenguajes de primer orden en general, y en particular los geométricos, son formalizaciones del (meta-)lenguaje común usado por todos los matemáticos. Es de esperarse que dichos lenguajes sean usados para hablar de propiedades de objetos matemáticos, estos objetos se formalizarán con el cocepto de *término*, mientras que sus propiedades se formalizarán con el concepto de *fórmula (geométrica)*.

Definición 2.1.2. Definimos el conjunto de términos de Σ, al que denotaremos por Σ-term, recursivamente por las siguientes cláusulas, al mismo tiempo definimos el tipo de cada término y escribiremos $t : A$ para denotar el hecho de que t es un término de tipo A.

1. Si x es una variable de tipo A, entonces x es un término de tipo A.

2. Si $t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n$ son términos previamente construidos y $f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B \in \Sigma$-fun entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un término de tipo B

Definición 2.1.3. Definimos el conjunto de fórmulas geométricas de Σ, al que denotamos por Σ-form, recursivamente por las siguientes cláusulas, al mismo tiempo definimos el conjunto de variables libres para cada fórmula ϕ, $VL(\phi)$.

1. Si $t : A$ y $s : A$ son términos, entonces $(t = s)$ es una fórmula de Σ y $VL(t = s)$ es el conjunto de variables que ocurren tanto en t como en s.

2. Si $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n \in \Sigma$-rel y $t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula de Σ y $VL(R(t_1, \ldots, t_n))$ es el conjunto de todas las variables que aparecen en cada t_i con $1 \leq i \leq n$.

3. $\perp$ es una fórmula de Σ y $VL(\perp) = \emptyset$.

4. $\top$ es una fórmula de Σ y $VL(\top) = \emptyset$.

5. Si ϕ y ψ son fórmulas de Σ previamente construidas, entonces $(\phi \wedge \psi)$ es una fórmula de Σ y $VL(\phi \wedge \psi) = VL(\phi) \cup VL(\psi)$.

6. Si I es un conjunto distinto al vacío, ϕ_i es una fórmula de Σ para toda $i \in I$ y $\bigcup_{i \in I} VL(\phi_i)$ es un conjunto finito, entonces $\bigvee_{i \in I} \phi_i$ es una fórmula de Σ y $VL(\bigvee_{i \in I} \phi_i) = \bigcup_{i \in I} VL(\phi_i)$.

7. Si ϕ es una fórmula de Σ y x es una variable, entonces $\exists x \phi$ es una fórmula de Σ y $VL(\exists x \phi) = VL(\phi) \setminus \{x\}$.

Si en una fómula una variable ocurre dentro del alcance de un cuantificador (esta noción se puede hacer recursivamente precisa) decimos que ésta ocurre acotada en la fórmula; además no hacemos distinción entre fórmulas que sólo difieren en el nombre de las variables acotadas (esta noción se puede formalizar vía una relación de equivalencia, cosa que no haremos.)

Nosotros no estudiaremos fórmulas en sí, sino dentro de un contexto:

Definición 2.1.4.

1. Una lista finita $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ diremos que es un contexto. Los contextos pueden ser vacíos en cuyo caso escribiremos [].

2. Si $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son contextos ajenos, denotamos por $\vec{x}, \vec{y}$ al contexto que resulta de yuxtaponer en dicho orden las variables de $\vec{x}$ y las variables de $\vec{y}$

3. Si $\vec{x} = x_1, \ldots x_n$ es un contexto con $x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$, diremos que $(A_1, \ldots, A_n)$ es el tipo del contexto $\vec{x}$.

4. Si $\vec{t} = t_1, \ldots t_n$ es una lista de términos con $t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n$, diremos que $(A_1, \ldots, A_n)$ es el tipo de la lista $\vec{t}$.

5. Diremos que $\vec{x}$ es un contexto adecuado para $t \in \Sigma$-term si todas las variables de t aparecen en $\vec{x}$.

6. Un término en contexto es una expresión de la forma $\vec{x}.t$ donde t es un término y $\vec{x}$ es un contexto adecuado para t.

7. Diremos que $\vec{x}$ es un contexto adecuado para $\phi \in \Sigma$-form si todas las variables libres de ϕ ocurren en $\vec{x}$.

8. Una fórmula en contexto es una expresión de la forma $\vec{x}.\phi$ donde ϕ es una fórmula y $\vec{x}$ es un contexto adecuado para ϕ.

Definición 2.1.5 (substitución)**.** 1. Sean t un término de $\mathcal{L}_\Sigma$, $\vec{x}$ un contexto adecuado para t de tipo $(A_1, \ldots, A_n)$ y $\vec{s}$ una lista de términos de Σ del mismo tipo que $\vec{x}$. Denotamos por $t[\vec{s}/\vec{x}]$ al término que resulta de sustituir simultáneamente s_i en cada presencia de x_i en t.

2. Sean ϕ una fórmula de $\mathcal{L}_\Sigma$, $\vec{x}$ un contexto adecuado para ϕ de tipo $(A_1, \ldots, A_n)$ y $\vec{s}$ una lista de términos de Σ del mismo tipo que $\vec{x}$ tales que las variables que aparecen en éstos no ocurren como variables acotadas en ϕ. Denotamos por $\phi[\vec{s}/\vec{x}]$ a la fórmula que resulta de sustituir simultanteamente s_i en cada presencia de x_i en ϕ.

Definición 2.1.6. Un secuente es una expresión de la forma $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ donde $\phi, \psi \in \Sigma$-form y $\vec{x}$ es un contexto adecuado para ambas.

Definición 2.1.7. Una teoría geométrica $\mathbb{T}$ es una colección de secuentes.

2.2. Semántica

Se expondrá la manera en que se interpretan los lenguajes geométricos en categorías con productos finitos; además se extenderá la noción de verdad de Tarski a cualquier categoría geométrica.

Definición 2.2.1. Sean $\mathcal{L}_\Sigma$ un lenguaje geométrico y $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos. Una Σ-estructura en $\mathcal{C}$ está dada por la siguiente información:

1. Una asignación que a cada tipo A le asocia un objeto MA de $\mathcal{C}$. Denotaremos por $M(A_1, \ldots, A_n)$ al producto $MA_1 \times \cdots \times MA_n$.

2. Una asignación que a cada $f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B$ en Σ-fun le asocia un morfismo $Mf : M(A_1, \ldots, A_n) \longrightarrow MB$ de $\mathcal{C}$.

3. Una asignación que a cada $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ en Σ-rel le asocia un monomorfismo $MR \rightarrowtail M(A_1, \ldots A_n)$ en $\mathcal{C}$.

Definición 2.2.2. Sean $\mathcal{L}_\Sigma$ un lenguaje geométrico, $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, M y N Σ-estructuras en $\mathcal{C}$. Un morfismo $h : M \longrightarrow N$ de Σ-estructuras es una colección de morfismos $(h_A : MA \longrightarrow NA)_{A\in\Sigma\text{-tip}}$ en $\mathcal{C}$ que satisfacen:

1. Para cada letra funcional $f : A_1 \cdots A_n \longrightarrow B$ el siguiente cuadrado es conmutativo:
$$\begin{tikzcd} M(A_1,\dots,A_n) \arrow[r, "Mf"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"'] & MB \arrow[d, "h_B"] \\ N(A_1,\dots,A_n) \arrow[r, "Nf"'] & NB \end{tikzcd}$$

2. Para cada $R \rightarrowtail A_1 \cdots A_n$ en Σ-rel existe un cuadrado conmutativo de la siguiente forma:
$$\begin{tikzcd} MR \arrow[r, tail] \arrow[d] & M(A_1,\dots,A_n) \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"] \\ NR \arrow[r, tail] & N(A_1,\dots,A_n) \end{tikzcd}$$

El lector podrá observar fácilmente que para cada lenguaje $\mathcal{L}_\Sigma$ y cada categoría con productos finitos $\mathcal{C}$ existe una categoría Σ-estr$(\mathcal{C})$ cuyos objetos son Σ-estructuras y morfismos entre éstas morfismos de Σ-estructuras como los acabamos de definir.

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor que preserva productos finitos y monomorfismos entre categorías con productos finitos se puede observar que este funtor induce un funtor Σ-estr(F) : Σ-estr$(\mathcal{C}) \longrightarrow \Sigma$-estr$(\mathcal{D})$ y que si $\alpha : T_1 \longrightarrow T_2$ es una tranformación natural entre funtores $T_1, T_2 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que preservan productos finitos y monomorfismos, entonces existe Σ-estr(α) : Σ-estr$(T_1) \longrightarrow \Sigma$-estr$(T_2)$ una transformación natural definida de la manera obvia.

Escribiremos FM en lugar de la engorrosa notación Σ-estr$(F)(M)$.

Definición 2.2.3 (Interpretación de términos)**.** Sean $\mathcal{L}_\Sigma$ un lenguaje, $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, M una Σ-estructura en $\mathcal{C}$ y $\vec{x}.t$ un término en un contexto de tipo $(A_1,\dots,A_n)$. Definiremos la interpretación de $\vec{x}.t$ en la Σ-estructura M, en símbolos $[\![\vec{x}.t]\!]_M$, recursivamente de la siguiente manera:

1. Si t es x_i para alguna $1 \le i \le n$, definimos $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ como la proyección $\pi_i : M(A_1,\dots A_n) \longrightarrow MA_i$

2. Si t es de la forma $f(t_1,\dots,t_m)$ con $t_1 : B_1,\dots,t_m : B_m$ y $f : B_1 \cdots B_m \longrightarrow C$ un símbolo funcional, definimos $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ como la composición:
$$M(A_1,\dots,A_n) \xrightarrow{([\![\vec{x}.t_1]\!]_M,\dots,[\![\vec{x}.t_m]\!]_M)} M(B_1,\dots,B_m) \xrightarrow{Mf} MC$$

Proposición 2.2.1. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, $M \in \Sigma$-estr$(\mathcal{C})$, $\vec{y}.t$ un término en un contexto de tipo $(B_1,\dots,B_m)$, $\vec{s}$ una sucesión de términos del mismo tipo que el contexto $\vec{y}$ y $\vec{x}$ un contexto del tipo $(A_1,\dots,A_n)$ adecuado para todo s_i, entonces $[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M$ es la composición:*
$$M(A_1,\dots,A_n) \xrightarrow{([\![\vec{x}.s_1]\!]_M,\dots,[\![\vec{x}.s_m]\!]_M)} M(B_1,\dots,B_m) \xrightarrow{[\![\vec{y}.t]\!]_M} MC$$

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la complejidad de t. Si t es y_i para alguna $1 \leq i \leq m$, entonces $t[\vec{s}/\vec{y}] = y_i[\vec{s}/\vec{y}] = s_i$ y además

$$\begin{aligned}
\llbracket \vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}] \rrbracket_M &= \llbracket \vec{x}.s_i \rrbracket_M \\
&= \pi_i(\llbracket \vec{x}.s_1 \rrbracket_M, \ldots, \llbracket \vec{x}, s_m \rrbracket_M) \\
&= \llbracket \vec{y}.y_i \rrbracket_M(\llbracket \vec{x}.s_1 \rrbracket_M, \ldots, \llbracket \vec{x}, s_m \rrbracket_M) \\
&= \llbracket \vec{y}.t \rrbracket_M(\llbracket \vec{x}.s_1 \rrbracket_M, \ldots, \llbracket \vec{x}, s_m \rrbracket_M)
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que el enunciado es cierto para $t_1 : C_1, \ldots, t_k : C_k$ y que t es de la forma $f(t_1, \ldots, t_k)$ donde $f : C_1, \ldots, C_k \longrightarrow C$ es un símbolo funcional, el siguiente diagrama conmutativo contiene la prueba del enunciado:

$$\begin{tikzcd}
 & & MC_i \\
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.s_i \rrbracket_M)_{i=1}^m"] \arrow[urr, bend left, "\llbracket \vec{x}.t_i[\vec{s}/\vec{y}] \rrbracket_M"] \arrow[rr, bend right, "(\llbracket \vec{x}.t_i[\vec{s}/\vec{y}] \rrbracket_M)_{i=1}^k"'] \arrow[drr, bend right, "\llbracket \vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}] \rrbracket_M"'] & M(B_1, \ldots, B_m) \arrow[r, "(\llbracket \vec{y}.t_i \rrbracket_M)_{i=1}^k"] \arrow[ur, "\llbracket \vec{y}.t_i \rrbracket_M"] & M(C_1, \ldots, C_k) \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[d, "Mf"] \\
 & & MC
\end{tikzcd}$$

□

Proposición 2.2.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría con productos finitos, $M, N \in \Sigma$-estr$(\mathcal{C})$, $\vec{x}.t$ un término del tipo B en un contexto del tipo $(A_1, \ldots, A_n)$ y $h : M \longrightarrow N$ un morfismos de Σ-estructuras, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M"] \arrow[d, "h_{A_1} \times \ldots \times h_{A_n}"'] & MB \arrow[d, "h_B"] \\
N(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_N"'] & NB
\end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la complejidad de t. Si t es de la forma x_i para alguna $1 \leq i \leq n$, entonces la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M = \pi_i"] \arrow[d, "h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}"'] & MA_i \arrow[d, "h_{A_i}"] \\
N(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_N = \pi_i"'] & NA_i
\end{tikzcd}$$

es trivial por la propiedad universal del producto.

Si t es de la forma $f(t_1,\ldots,t_m)$ con $f : B_1,\ldots,B_m \longrightarrow C$ letra funcional, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
M(A_1,\ldots,A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t_i \rrbracket_M)_{i=1}^m"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"'] \arrow[rr, bend left, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M"] & M(B_1,\ldots B_m) \arrow[r, "Mf"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"] & MC \arrow[d, "h_C"] \\
N(A_1,\ldots,A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_N)_{i=1}^m"'] \arrow[rr, bend right, "\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_N"'] & N(B_1,\ldots B_n) \arrow[r, "Nf"'] & NC
\end{tikzcd}$$

pues el cuadrado de la izquierda conmuta por hipótesis de inducción y el de la derecha por definición de morfismo de Σ-estructuras. $\square$

Definiremos ahora como interpretar nuestras fórmulas geométricas en cualquier estructura sobre cualquier categoría geométrica.

Definición 2.2.4. Sean $\vec{x}.\phi$ una fórmula del lenguaje $\mathcal{L}_\Sigma$ en el contexto $\vec{x}$ de tipo $(A_1,\ldots,A_n)$ y M una Σ-estructura sobre una categoría geométrica $\mathcal{C}$. Definimos recursivamente la interpretación de $\vec{x}.\phi$ en M, en símbolos $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M$, por las siguientes cláusulas

1. Si ϕ es de la forma $(t = s)$ con s y t términos de tipo B, definimos $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M$ con el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & MB \arrow[d, tail, "\Delta"] \\
M(A_1,\ldots A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M, \llbracket \vec{x}.s \rrbracket_M)"'] & MB \times MB
\end{tikzcd}$$

2. Si ϕ es de la forma $R(t_1,\ldots,t_m)$ con $t_i : B_i$, definimos $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M$ por el siguiente producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & MR \arrow[d, tail] \\
M(A_1,\ldots,A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t_i \rrbracket_M)_{i=1}^m"'] & M(B_1,\ldots,B_m)
\end{tikzcd}$$

3. Si ϕ es $\top$ entonces $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M$, se define como el subobjeto mayor de $M(A_1,\ldots,A_n)$.

4. Si ϕ es $\perp$ entonces $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M$, se define como el subobjeto menor de $M(A_1,\ldots,A_n)$.

5. Si ϕ es de la forma $\psi \wedge \chi$ se define $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ como la intersección de los subobjetos $[\![\vec{x}.\psi]\!]_M$ y $[\![\vec{x}.\chi]\!]_M$ en $M(A_1, \ldots, A_n)$.

6. Si ϕ es de la forma $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ con I un conjunto no vacío, se define $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ como la unión en $M(A_1, \ldots, A_n)$ de los subobjetos $[\![\vec{x}.\psi_i]\!]_M$

7. Si ϕ es de la forma $\exists y \psi$ con $y : B$, se define $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ como la imagen en la factorización de la siguiente composición

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}, y.\psi]\!]_M} \arrow[r, tail] \arrow[dr] & M(A_1, \ldots, A_n, B) \arrow[r, "\pi"] & M(A_1, \ldots, A_n) \\
& {[\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

Observe que la interpretación de la fórmula $(t = s)$ se puede definir equivalentemente como el igualador del diagrama

$$\begin{tikzcd}
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, shift left, "{[\![\vec{x}.t]\!]}"] \arrow[r, shift right, "{[\![\vec{x}.s]\!]}"'] & MB
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.3. *Sean $\mathcal{L}_\Sigma$ un lenguaje geométrico, ϕ una fórmula del lenguaje, $\vec{y}$ un contexto de tipo $(B_1, \ldots, B_m)$ adecuado para ϕ, $\vec{s}$ una sucesión de términos del mismo tipo que $\vec{y}$ y $\vec{x}$ un contexto de tipo $(A_1, \ldots, A_n)$ adecuado para cada s_i, entonces existe un producto fibrado:*

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.\phi[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M} \arrow[r] \arrow[d, tail] & {[\![\vec{y}.\phi]\!]_M} \arrow[d, tail] \\
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "{([\![\vec{x}.s_i]\!]_M)_{i=1}^m}"'] & M(B_1, \ldots, B_m)
\end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración se realizará por inducción sobre la complejidad de ϕ. Si ϕ es de la forma $(t = r)$ con r y t términos de tipo B, entonces el siguiente diagrama conmutativo contiene la demostración de este hecho:

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.(t = r)[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M} \arrow[r] \arrow[d, tail] & {[\![\vec{y}.(t = r)]\!]_M} \arrow[r] \arrow[d, tail] & MB \arrow[d, tail, "\Delta"] \\
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "{([\![\vec{x}.s_i]\!]_M)_{i=1}^m}"] \arrow[rr, bend right, "{([\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M, [\![\vec{x}.r[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M)}"'] & M(B_1, \ldots, B_m) \arrow[r, "{([\![\vec{y}.t]\!]_M, [\![\vec{y}.r]\!]_M)}"] & MB \times MB
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado de la derecha es un producto fibrado por definición, y donde se ha usado la proposición 2.2.1 para deducir que el cuadrado externo es también un producto fibrado y que, por lo tanto, lo es el cuadrado de la izquierda. Si ϕ es de la forma $R(t_1, \ldots, t_m)$ el arguemento es similar.

Si $\vec{y}.\phi$ es de la forma $\bigvee_{i\in I}\psi_i$ y nuestra hipótesis de inducción es que el resultado es cierto para cada ψ_i, recordando que en una categoría geométrica las uniones arbitrarias son estables bajo productos fibrados tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\![\vec{x}.\bigvee_{i\in I}\psi_i[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M &= \bigvee_{i\in I}[\![\vec{x}.\psi_i[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M \\
&= \bigvee_{i\in I}(([\![\vec{x}.s_i]\!]_M)_{i=1}^m)^\star([\![\vec{y}.\psi_i]\!]_M) \\
&= (([\![\vec{x}.s_i]\!]_M)_{i=1}^m)^\star(\bigvee_{i\in I}]\!]\vec{y}.\psi_i]\!]_M)
\end{aligned}$$

todos los demás casos son análogos a éste y se dejan como ejercicio. De hecho puede decirse que la estabilidad bajo productos fibrados de cubiertas y uniones de subobjetos en las definiciones de categoría regular y categoría geométrica están ahí para que tengamos una substitución en fórmulas que se comporte bien con las interpretaciones. Visto esto así, esta demostración es casi tautológica. $\square$

Proposición 2.2.4. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría geométrica, $h : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de Σ-estructuras de $\mathcal{C}$ y sea $\vec{x}.\phi$ una fórmula geométrica. Entonces existe un único diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \arrow[r, tail] \arrow[d] & M(A_1,\dots A_n) \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"] \\
[\![\vec{x}.\phi]\!]_N \arrow[r, tail] & N(A_1,\dots A_n)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Como es de esperarse, la demostración se realizará por inducción sobre la complejidad de la fórmula. Si ϕ es de la forma $R(t_1,\dots,t_m)$ el siguiente diagrama conmutativo contiene la demostración de la afirmación para este caso:

$$\begin{tikzcd}
[\![\vec{x}.R(t_1,\dots,t_m)]\!]_M \arrow[rr] \arrow[d, tail] \arrow[ddd, dashed, bend right] & & MR \arrow[d, tail] \arrow[ddd, bend left] \\
M(A_1,\dots,A_n) \arrow[rr, "([\![\vec{x}.t_i]\!]_M)_{i=1}^m"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"] & & M(B_1,\dots,B_m) \arrow[d, "h_{B_1}\times\cdots\times h_{B_m}"'] \\
N(A_1,\dots,A_n) \arrow[rr, "([\![\vec{x}.t_i]\!]_N)_{i=1}^m"] & & N(B_1,\dots B_m) \\
[\![\vec{x}.R(t_1,\dots,t_m)]\!]_M \arrow[rr] \arrow[u, tail] & & NR \arrow[u, tail]
\end{tikzcd}$$

donde tanto el cuadrado superior como el inferior son productos fibrados, el cuadrado lateral derecho existe por definición de morfismo de estructuras, el cuadrado del centro conmuta como una aplicación de la proposición 2.2.2 y la flecha punteada existe por la propiedad universal del producto fibrado inferior.

Si ϕ es de la forma $(s = t)$ el argumento es totalmente análogo.

Demostraremos la proposición para el caso en que ϕ sea de la forma $\bigvee_{i\in I}\psi_i$ y se dejarán los demás casos (que son similares a éste) para que el lector los escriba.

Antes que nada observe que nuestra hipótesis de inducción para cada ψ_i es equivalente a que en el siguiente diagrama cada morfismo punteado exista si y sólo si el otro existe:

$$
\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, tail, bend left] \arrow[ddr, dashed, bend right] & & \\
& (h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n})^\star(\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M) \arrow[r, tail] \arrow[d] & M(A_1,\dots,A_n) \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"] \\
& \llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_N \arrow[r, tail] & N(A_1,\dots,A_n)
\end{tikzcd}
$$

es decir, nuestra hipótesis inductiva es equivalente a que $\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M \leq (h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n})^\star(\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_N)$ en $M(A_1,\dots,A_n)$. Usnado que las uniones son estables bajo productos fibrados en las categorías geométricas tenemos que: $(h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n})^\star(\llbracket \vec{x}.\bigvee_{i\in I}\psi_i \rrbracket_N) = (h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n})^\star(\bigvee_{i\in I}\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_N) = \bigvee_{i\in I}(h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n})^\star(\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_N) \geq \bigvee_{i\in I}\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M = \llbracket \vec{x}.\bigvee_{i\in I}\psi_i \rrbracket_M$. $\square$

En seguida definiremos una noción de verdad que extiende aquella estudiada en lógica clásica.

Definición 2.2.5 (Tarski)**.** Sea M una Σ-estructura en una categoría geométrica $\mathcal{C}$

1. Sea $\sigma = (\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ un secuente. Decimos que M satisface al secuente σ si $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \leq \llbracket \vec{x}.\psi \rrbracket_M$ como subobjetos de $M(A_1,\dots,A_n)$, donde $(A_1,\dots,A_n)$ es el tipo de $\vec{x}$, escribiremos $M \vDash \sigma$ para denotar a este hecho.

2. Sea $\mathbb{T}$ una teoría geométrica. Decimos que M es un modelo de la teoría $\mathbb{T}$ si para todo secuente σ de ésta tenemos que $M \vDash \sigma$, escribiremos $M \vDash \mathbb{T}$ para denotar a este hecho.

3. Denotamos por $\mathbb{T}$-Mod$(\mathcal{C})$ a la subcategoría plena de Σ-estr$(\mathcal{C})$ cuyos objetos son todos modelos de $\mathbb{T}$.

Lema 2.2.1. *Si $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor cartesiano y $\vec{x}.t$ es un término, entonces $T(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M) = \llbracket \vec{x}.t \rrbracket_{TM}$*

Demostración. La demostración se hará por inducción sobre la complejidad del término. Si t es una variable, digamos, x_i, entonces, como T preserva productos por ser cartesiano, tenemos que, $T(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M) = T(\pi_i : M(A_1,\dots,A_n) \longrightarrow MA_i) = \pi_i : TM(A_1,\dots,A_n) \longrightarrow TMA_i$.

Supongamos cierta la proposición para los términos $t_1 : B_1, \ldots, t_m : B_m$ y consideremos el término $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ de tipo C. Observe que el diagrama

$$M(A_1, \ldots, A_n) \xrightarrow{(\llbracket \vec{x}.t_i \rrbracket_M)_{i=1}^n} M(B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{Mf} MC$$

Se mapea bajo T al diagrama

$$TM(A_1, \ldots, A_n) \xrightarrow{(\llbracket \vec{x}.t_i \rrbracket_{TM})_{i=1}^n} TM(B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{TMf} TMC$$

obsérvese que para determinar el primer morfismo hicimos uso de la hipótesis de inducción y de la propiedad universal del producto.

□

Lema 2.2.2. *Sea $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor geométrico y sea $\vec{x}.\phi$ una fórmula geométrica, entonces $T(\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M) \cong \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_{TM}$.*

Demostración. La demostración se realizará por inducción sobre la complejidad de la fórmula ϕ y, como lo hemos venido haciendo, sólo probaremos un caso para la base de la inducción y un caso para el paso inductivo.

Si ϕ es de la forma $(t = s)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x}.(t = s) \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & MB \arrow[d, tail, "\Delta"] \\
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_M, \llbracket \vec{x}.s \rrbracket_M)"'] & MB \times MB
\end{tikzcd}$$

es un produto fibrado. Es fácil ver que T envía la diagonal de MB en la diagonal de TMB y que, como además T es cartesiano, hace que el siguiente diagrama sea un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
T(\llbracket \vec{x}.(t = s) \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & TMB \arrow[d, tail, "\Delta"] \\
TM(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "(\llbracket \vec{x}.t \rrbracket_{TM}, \llbracket \vec{x}.s \rrbracket_{TM})"'] & TMB \times TMB
\end{tikzcd}$$

y que por lo tanto, $T(\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M) \cong \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_{TM}$.

Supongamos ahora que ϕ es de la forma $\bigvee_{i \in I} \psi_i$ y que el lema es cierto para toda ψ_i, entonces, usando que T al ser geométrico respeta uniones de subobjetos, tenemos que

$$T(\llbracket \vec{x}.\bigvee_{i \in I} \psi_i \rrbracket_M) = T(\bigvee_{i \in I} \llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M) = \bigvee_{i \in I} T(\llbracket \vec{x}.\psi_i \rrbracket_M) \cong \bigvee_{i \in I} \llbracket \vec{x}.\psi \rrbracket_{TM} = \llbracket \vec{x}.\bigvee_{i \in I} \psi_i \rrbracket_{TM}$$

□

Teorema 2.2.3. *Sean $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor geométrico, M una Σ-estructura, σ un secuente tal que $M \vDash \sigma$, entonces $TM \vDash \sigma$. Además, si T es un funtor conservativo, entonces $TM \vDash \sigma$ implica que $M \vDash \sigma$*

Demostración. Sea $\sigma = (\psi \vdash_{\vec{x}} \phi)$ un secuente cualquiera. Es inmediato que T al ser un funtor geométrico preserva el orden de subobjetos, así, si $M \vDash \sigma$, entonces $[\![\vec{x}.\psi]\!]_M \leq [\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ en $M(A_1, \ldots, A_n)$ y, por lo tanto aplicando T y el lema 2.2.2 tenemos que $[\![\vec{x}.\psi]\!]_{TM} \leq [\![\vec{x}.\phi]\!]_{TM}$ en $TM(A_1, \ldots, A_n)$, es decir, $TM \vDash \sigma$.

Para demostrar la segunda parte tan sólo note $[\![\vec{x}.\psi]\!]_{TM} \leq [\![\vec{x}.\phi]\!]_{TM}$ es equivalente a que $[\![\vec{x}.(\psi \wedge \phi)]\!]_{TM} \cong [\![\vec{x}.\phi]\!]_{TM}$. □

2.3. Otras nociones a considerar

Noción que jugará en un importante lugar en el próximo capítulo es la del topos clasificante de una teoía. Note que al ser cualquier topos de Grothendieck una categoría geométrica y dado que toda imagen inversa de un morfismo geométrico es un funtor geométrico, podemos pensar en el funtor $\mathbb{T}\text{-Mod}(-) : \mathbf{Groth} \longrightarrow \text{Cat}$ definido de manera obvia según la última proposición de la sección anterior. Diremos que $\mathbb{T}$ tiene un topos clasificante, al que denotaremos por $\text{Con}(\mathbb{T})$, cuando exista una equivalencia categórica

$$\text{Geom}(\mathcal{E}, \text{Con}(\mathbb{T})) \simeq \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$$

natural en $\mathcal{E}$. Es decir, una equivalencia tal que para todo morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ entre topos de Grothendieck exista un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{Geom}(\mathcal{E}, \text{Con}(\mathbb{T})) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "(-)\circ f"] & \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \arrow[d, "f^\star"] \\
\text{Geom}(\mathcal{F}, \text{Con}(\mathbb{T})) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

conmutativo salvo isomorfismo.

El lector puede replicar aquí el argumento de Yoneda para concluir que de existir el topos clasificante de una teoría, éste es único (salvo equivalencia categórica.) También podrá deducir la existencia de un modelo universal dentro del topos clasificante al que llamaremos $U_{\mathbb{T}}$, el cual tiene la propiedad de que cualquier otro modelo en cualquier topos de Grothendieck puede ser visto como la imagen inversa de algún morfismo geométrico aplicado a $U_{\mathbb{T}}$.

Por último, decimos que un secuente es consecuencia lógica de una teoría si para todo modelo sobre un topos de Grothendieck de dicha teoría, tenemos que ese modelo hace verdad al secuente; diremos que dos teorías son equivalentes si tienen los mismos modelos sobre cualquier topos de Grothendieck (equivalentemente si ambas teorías tienen las mismas consecuencias lógicas), y diremos que una es cociente de otra si los modelos sobre un topos de Grothendieck de la última son modelos de la primera.

Evidentemente, tenemos un orden parcial en las teorías de un lenguaje geométrico (módulo equivalencia.)

Capítulo 3

Tres teoremas fuertes

En este capítulo abordaremos el estudio de los topos clasificantes y demostraremos tres hechos interesantes sobre éstos: 1) toda teoría geométrica posee un topos clasificante, 2) todo topos de Grothendieck es el topos clasificante de una teoría y 3) existe una biyección entre los subtopos del topos clasificante de una teoría geométrica y los cocientes de ésta (salvo equivalencias.)

Ninguno de estos resultados es original, sin embargo, ofrecemos pruebas ligeramente distintas a las usuales como en cada sección se especificará.

3.1. Teorema 1

En esta sección demostraremos que toda teoría geométrica tiene un topos clasificante asociado. La demostración es esencialmente aquella encontrada en [1], salvo que a lo que nosotros nos referimos por teoría geométrica es la versión infinitaria de lo que en aquel libro se considera una teoría geométrica. Los cambios son mínimos y sólo demostraremos las proposiciones que requieren ajustes en los argumentos originales.

3.1.1. La categoría de objetos definibles

Fijemos $\mathbb{T}$ una teoría geométrica para lo que resta de esta sección y sea M un modelo de $\mathbb{T}$ en un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$. Construiremos la categoría de objetos definibles de $\mathbb{T}$ en M, en símbolos, simplemente, sin riesgo de confusión, $\mathrm{Def}(M)$.

Los objetos de $\mathrm{Def}(M)$ son todos los subobjetos de $\mathcal{E}$ definidos por una fórmula geométrica, es decir, son los subobjetos de la forma $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \rightarrowtail M(A_1, \ldots, A_n)$ (¿todo subobjeto de $\mathcal{E}$ es definible en M?) Nótese que podemos tener tantas presentaciones del mismo subobjeto como fórmulas definan a éste. Note también que no tienen porque ser estas fórmulas lógicamente equivalentes, tan sólo equivalentes en M.

Un morfismo entre dos de estos subobjetos, digamos, un morfismo con dominio $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \rightarrowtail M(A_1, \ldots, A_n)$ y con codominio $[\![\vec{y}.\psi]\!]_M \rightarrowtail M(B_1, \ldots, B_m)$ es, por definición, un morfismo $s : [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ de $\mathcal{E}$ tal que al considerar su gráfica

$$S \rightarrowtail [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \times [\![\vec{y}.\psi]\!]_M \rightarrowtail M(A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m)$$

ésta sea definible por una fórmula geométrica $\sigma(\vec{x},\vec{y})$ en M, es decir, si $S = [\![\vec{x},\vec{y}.\sigma]\!]_M$ como subobjetos de $M(A_1,\ldots,B_m)$.

Aquí es pertinente recordar al lector que en cualquier categoría cartesiana, la gráfica de un morfismo $f : A \longrightarrow B$ es el subobjeto determinado por el morfismo $(1_A, f) : A \rightarrowtail A \times B$, también es sabido que a cada morfismo le corresponde una y sólo una gráfica.

Teorema 3.1.1. *Def(M) es una categoría.*

Demostración. La demostración de este hecho se puede encontrar en las páginas 541-544 de [1]. Tan sólo haremos explícitos algunos detalles importantes. Por ejemplo, si $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ es un objeto de Def(M), la identidad de éste estará dada por el morfismo identidad correspondiente de $\mathcal{E}$ cuya gráfica es definible por la fórmula: $(\phi \wedge \phi[\vec{x'}/\vec{x}] \wedge (\vec{x'} = \vec{x}))$.

Por otro lado, si $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \xrightarrow{s} [\![\vec{y}.\phi]\!]_M \xrightarrow{t} [\![\vec{z}.\chi]\!]_M$ es un diagrama en Def(M) con s y t definibles por σ y τ respectivamente, entonces, la composición de éstos es aquella de $\mathcal{E}$, es decir, ts, y la fórmula geométrica que representa su gráfica es $\exists\vec{y}(\sigma(\vec{x},\vec{y}) \wedge \tau(\vec{y},\vec{z}))$ □

El siguiente teorema no se encuentra en [1].

Teorema 3.1.2. *Si $s : [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ es un morfismo de Def(M) definido por σ, entonces los siguientes secuentes son verdaderos en M*

1. $\sigma \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\phi \wedge \psi)$
2. $\phi \vdash_{\vec{x}} \exists\vec{y}\sigma$
3. $(\sigma \wedge \sigma[\vec{y'}/\vec{y}]) \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{y'}} (\vec{y'} = \vec{y})$

Demostración. Para demostrar que M hace verdad al primer secuente debemos ver que $[\![\vec{x},\vec{y}.\sigma]\!]_M$ está por debajo de $[\![\vec{x},\vec{y}.\phi]\!]_M$ y de $[\![\vec{x},\vec{y}.\psi]\!]_M$ en la retícula de subobjetos de $M(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m)$. Para esto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo en donde aparece la gráfica de s

$$\begin{tikzcd}
 & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[r, tail] & M(A_1,\ldots,A_n) \\
{[\![\vec{x},\vec{y}.\sigma]\!]_M} \arrow[r, tail] \arrow[ur, dashed, bend left] \arrow[dr, dashed, bend right] & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \times [\![\vec{y}.\psi]\!]_M} \arrow[r, tail] \arrow[u, "\pi_\phi"] \arrow[d, "\pi_\psi"'] & M(A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m) \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi"] \\
 & {[\![\vec{y}.\psi]\!]_M} \arrow[r, tail] & M(B_1,\ldots,B_m)
\end{tikzcd}$$

y observemos que de éste y usando la proposición 2.2.3, tenemos para el caso de ϕ el siguiente diagrama de producto fibrado junto con un cuadrado externo también conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x},\vec{y}.\sigma \rrbracket_M \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, tail, bend right] & & \\
& \llbracket \vec{x},\vec{y}.\phi \rrbracket_M \arrow[r] \arrow[d, tail] & \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[d, tail] \\
& M(A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m) \arrow[r] & M(A_1,\dots,A_n)
\end{tikzcd}$$

con lo que demostramos que $\llbracket \vec{x},\vec{y}.\sigma \rrbracket_M \leq \llbracket \vec{x},\vec{y}.\phi \rrbracket_M$. De la misma manera uno prueba la desigualdad restante.

Para demostrar que M hace verdadero al segundo secuente basta exhibir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[r, tail, "{(1,s)}"] \arrow[dr, "1_{\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M}"'] & \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \arrow[r, tail] \arrow[d, "\pi_\phi"] & M(A_1,\dots,B_m) \arrow[r, "\pi"] & M(A_1,\dots,A_n) \\
& \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[urr, tail] & &
\end{tikzcd}$$

como $1_{\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M}$ es un epimorfismo regular puesto que es un isomorfismo y ya que $\llbracket \vec{x},\vec{y}.\sigma \rrbracket_M = \mathrm{Graf}(s)$ podemos concluir no sólo la desigualdad que necesitábamos probar, sino incluso la igualdad entre los subobjetos determinados por el segundo secuente.

Por último, demostraremos que el tercer secuente también es verdadero en M. Es intuitivamente claro y fácil de ver que si $\vec{z}.\chi$ es una fórmula geométrica, entonces $\llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M = \llbracket \vec{z'}.\chi \rrbracket_M$. Para que el secuente sea verdadero tenemos que demostrar que el subobjeto $R = \llbracket \vec{x},\vec{y},\vec{y'}.(\sigma \wedge \sigma[\vec{y'/y}]) \rrbracket_M$ iguala a los morfismos

$$M(A_1,\dots,B_1,\dots B_m,B_1,\dots,B_m) \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} M(B_1,\dots,B_m)$$

pero esto es trivial por la observación anterior y el siguiente diagrama conmutativo dado por el morfismo s

$$\begin{tikzcd}
& & \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \arrow[drr, tail] & & \\
R \arrow[r, tail] & \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{y'}.\psi \rrbracket_M \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_3"'] \arrow[rr, tail] & & M(A_1,\dots,B_m) \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & M(B_1,\dots,B_m) \\
& & \llbracket \vec{y'}.\psi \rrbracket_M \arrow[urr, tail] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Observe que existe de manera obvia un funtor que olvida $U_M : \mathrm{Def}(M) \longrightarrow \mathcal{E}$ una vez que en cada clase de isomorfismo de un monomorfismo hemos escogido a algún representante.

Teorema 3.1.3. *La categoría Def(M) es cartesiana.*

Demostración. Presentaremos solamente algunos puntos de la demostración. Los detalles pueden encontarse en la páginas 547-551 de [1].

Observemos como están construido los productos fibrados y el objeto terminal de nuestra categoría. Si $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ es un objeto de $\mathrm{Def}(M)$, entonces existe un único morfismo $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \longrightarrow 1 = [\![[].\top]\!]_M$ en $\mathcal{E}$. Este morfismo está representado por ϕ misma.

Por otro lado, si

$$\begin{tikzcd} & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[d, "s"] \\ {[\![\vec{y}.\psi]\!]_M} \arrow[r, "t"] & {[\![\vec{z}.\chi]\!]_M} \end{tikzcd}$$

es un diagrama en $\mathrm{Def}(M)$ donde s está representada por σ y t es un morfismo representado por τ, entonces su prodcuto fibrado se calcula como en $\mathcal{E}$ y la fórmula que lo define es $\exists\vec{z}(\sigma(\vec{x},\vec{z})\wedge\tau(\vec{y},\vec{z}))$, mientras que la proyección a $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ está definida por la fórmula $\exists\vec{z}(\sigma(\vec{x},\vec{z}) \wedge \tau(\vec{y},\vec{z}) \wedge \phi(\vec{x'}) \wedge (\vec{x} = \vec{x'}))$; la proyección a $[\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ está definida análogamente. □

Note que el producto de dos objetos en la categoría definible es su conjunción.

Corolario 3.1.3.1. *U_M : Def(M) $\longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor cartesiano.*

Demostración. Evidente de la construcción de los límites en $\mathrm{Def}(M)$ □

Definición 3.1.1. Sea $A = (s_i : [\![\vec{x_i}.\phi_i]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M)_{i\in I}$ una familia de morfismos de $\mathrm{Def}(M)$. Decimos que A es una familia cubriente si $U_M(A)$ es una familia epimórfica pequeña.

Proposición 3.1.1. *La colección de familias cubrientes en Def(M) forma una base para una topología de Grothendieck a la que llamamos la topología de Grothendieck geométrica.*

Demostración. Supongamos que $s : [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ es un isomorfismo en $\mathrm{Def}(M)$, entonces s es un isomorfismo en $\mathcal{E}$ que además es definible por una fórmula geométrica (¿será cierto que si s es un isomorfismo en $\mathcal{E}$ definible por una fórmula geométrica, entonces s^{-1} es un morfismo definible?) Como s es un isomorfismo en $\mathcal{E}$, entonces el mismo forma una familia epimórfica, y por lo tanto $\{s\}$ es una familia cubriente.

Supongamos $(f_i : [\![\vec{x_i}.\phi_i]\!] \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M)_{i\in I}$ una familia cubriente en $\mathrm{Def}(M)$, entonces la imagen de ésta bajo U_M es, por definición, una familia epimórfica y por la proposición 1.2.5 el morfismo inducido $s : \amalg_{i\in I}[\![\vec{x_i}.\phi_i]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ es un epimorfismo en $\mathcal{E}$, como en un un topos los epimorfismos son estables bajo productos fibrados, entonces para toda $h : [\![\vec{z}.\rho]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ en $\mathrm{Def}(M)$, tenemos que $h^\star(s)$

es un epimorfismo, y por lo tanto que las familias cubrientes en Def(M) son estables bajo producto fibrado (recuerde que nuestro funtor U_M es cartesiano.)

Por la proposición 1.2.7 es claro que composición de familias cubrientes en Def(M) es cubriente, y por lo tanto que nuestra colección forma una base para una topología de Grothendieck. $\square$

Proposición 3.1.2. *La familia* $(s_i : \llbracket \vec{x_i}.\phi_i \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M)_{i\in I}$ *es una familia cubriente si y sólo si M hace verdad al secuente* $\psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{i\in I} \exists \vec{x_i}\sigma_i$*, donde σ_i es la fórmula geométrica que define a s_i.*

Demostración. Empecemos por observar que para toda $i \in I$ tenemos que $\mathrm{Im}(si_i) = \llbracket \vec{y}.\exists \vec{x_i}.\sigma_i \rrbracket_M$, lo cual es sencillo por el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Im(s_i) \arrow[r, tail] & \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \arrow[drr, tail] & & \\
\llbracket \vec{x_i}.\phi \rrbracket_M \arrow[u] \arrow[ur, "s"] \arrow[r, tail, "{(1,s)}"] \arrow[drr] & \llbracket \vec{x_i}.\phi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, tail] & M(A_1,\dots,B_m) \arrow[r, "\pi"] & M(B_1,\dots,B_m) \\
& & \llbracket \vec{y}.\exists \vec{x_i}\sigma_i \rrbracket_M \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

por la proposición 1.2.6 podemos concluir que nuestra demostración (de hecho, podemos cambiar en nuestra proposición la desigualdad por una igualdad.) $\square$

Proposición 3.1.3. *El funtor U_M es continuo.*

Demostración. Por definición. $\square$

Proposición 3.1.4. *La topología geométrica en Def(M) es subcanónica.*

Demostración. Supongamos que $\llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M$ es un objeto de Def(M) y veamos que $y_{\llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M}$ es una gavilla, para ello consideremos una familia cubriente cualquiera, digamos, $S = (s_i : \llbracket \vec{x_i}.\phi_i \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M)_{i\in I}$ con cada s_i definida por la fórmula geométrica $\sigma_i(\vec{x_i}, \vec{y})$; y supongamos una familia compatible con S, $(f_i : \llbracket \vec{x_i}.\phi_i \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M)_{i\in I}$ donde cada f_i está definida por una fórmula geométrica $\tau_i(\vec{x}, \vec{z})$. Tenemos que ver que existe un único morfismo $f : \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M$ en Def(M). Sabemos por la proposición 1.2.9 que dicho morfismo existe en $\mathcal{E}$, basta ver que está definido por una fórmula geométrica. Proponemos a $\bigvee_{i\in I} \exists \vec{x_i}(\sigma_i(\vec{x_i}, \vec{y}) \wedge \tau_i(\vec{x_i}, \vec{z}))$ como la fórmula que define a f.

Observe que, si denotamos con S_i a la gráfica de s_i y por F_i a la gráfica de f_i, tenemos el siguiente diagrama de producto fibrado en donde todas los morfismos, por razones obvias, son isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & S_i \arrow[d] \\
F_i \arrow[r] & \llbracket \vec{x_i}.\phi_i \rrbracket_M
\end{tikzcd}$$

por ello mismo, podemos deducir que, la imagen de $P \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M$ coincide con la imagen de $(s_i, f_i) : \llbracket \vec{x}_i \phi_i \rrbracket \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M$ y ambas, como es claro, con el subobjeto $\llbracket \vec{y}, \vec{z}.\exists \vec{x}_i(\sigma(\vec{x}_i, \vec{y}) \wedge \tau_i(\vec{x}_i, \vec{z})) \rrbracket_M$. Además como tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \llbracket \vec{x}_i.\phi_i \rrbracket_M \arrow[r, "s_i"] \arrow[dr, "(s_i,f_i)"'] & \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \arrow[d, tail, "(1,f)"] \\ & \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M \times \llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M \end{tikzcd}$$

pues $fs_i = f_i$, tenemos que $\mathrm{Im}(s_i, f_i) \leq \mathrm{Graf}(f)$; como $\amalg_{i \in I} \llbracket \vec{x}_i.\phi \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M$ es un epimorfismo (S es cubriente), entonces $\bigvee_{i \in I} \mathrm{Im}(s_i, f_i) = \mathrm{Graf}(f)$. Con esto podemos concluir que nuestra f está en $\mathrm{Def}(M)$ y que, por lo tanto, $y_{\llbracket \vec{z}.\chi \rrbracket_M}$ es una gavilla; es decir, hemos deducido que nuestra topología es subcanónica

□

3.1.2. Sitios sintácticos

Apoyados en nuestra construcción previa de $\mathrm{Def}(M)$ construiremos ahora una categoría, la categoría sintáctica de $\mathbb{T}$; si nuestra primera construcción nos permitía trabajar con la verdad dentro de M, con esta nueva categoría estaremos manejando aquellos secuentes que son verdaderos en todos los modelos de $\mathbb{T}$. Podemos hacer una pequeña analogía entre esto y aquella diferencia que usualmente se señala en los libros de lógica entre lo válido en un modelo y lo universalmente válido.

Los objetos de nuestra categoría sintáctica, $\mathrm{B}(\mathbb{T})$, serán clases de equivalencia de fórmulas geométricas en contexto, $\{\vec{x}.\phi\}$, donde dos fórmulas geométricas en contexto son equivalentes si son logicamente equivalentes.

Un morfismo entre dos objetos, digamos, $\{\vec{x}.\phi\} \longrightarrow \{\vec{y}.\psi\}$, es una clase de equivalencia de una fórmula geométrica σ en contexto $\vec{x}, \vec{y}$, en donde ambos contextos son ajenos y, además, satisface que para todo modelo M se tiene que $\llbracket \vec{x}, \vec{y}.\sigma \rrbracket_M$ es la gráfica de algún (evidentemente, único) morfismo $s : \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \longrightarrow \llbracket \vec{y}.\psi \rrbracket_M$ de $\mathcal{E}$ y, por lo tanto, morfismo de $\mathrm{Def}(M)$. Una buena pregunta sería si toda fórmula geométrica es un morfismo, una respuesta (negativa) la da el teorema 3.1.2.

Teorema 3.1.4. *$B(\mathbb{T})$ es una categoría.*

Demostración. Observe que M no tiene nada de especial, salvo ser modelo de $\mathbb{T}$, en la prueba del teorema de 3.1.1. Es decir, las identidades y las composiciones están dadas por las fórmulas que en dicha prueba decíamos nosotros definían a los correspondientes morfismos del topos, véase [1]. □

Teorema 3.1.5. *$B(\mathbb{T})$ es una categoría cartesiana.*

Demostración. Ídem □

Observe que para todo modelo M de $\mathbb{T}$ en el topos $\mathcal{E}$ hay un funtor $F_M : \mathrm{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathrm{Def}(M)$ que a cada objeto lo envía a su correspondiente interpretación en M y a cada morfismo al único morfimo que existe por definición en $\mathrm{Def}(M)$. Es fácil ver que la colección de todos éstos resulta ser conjuntamente inyectiva y conjuntamente fiel.

Definición 3.1.2. Decimos que una familia de morfismos en B($\mathbb{T}$), $(\sigma_i : \{\vec{x_i}.\phi_i\} \longrightarrow \{\vec{y}.\psi\})_{i\in I}$ es cubriente si para todo modelo M su imagen bajo $U_M F_M$ es epimórfica. Equivalentemente si para todo modelo M tenemos una familia cubriente en el viejo sentido. Estas familias forman una base para una topología de Grothendieck a la que llamaremos geométrica y denotaremos por $J_{\mathbb{T}}$.

Proposición 3.1.5. *F_M es un funtor cartesiano y continuo.*

Demostración. Ídem. □

Proposición 3.1.6. *La topología $J_{\mathbb{T}}$ es subcanónica.*

Demostración. Ídem. □

Debemos, cuando menos, unas palabras sobre el tamaño de las cosas. Nada es grave como parece.

Lema 3.1.6. *Sean $\phi, \psi \in \Sigma$-form y sea M una Σ-estructura, entonces $[\![\vec{x}.\phi \wedge \exists y \psi]\!]_M = [\![\vec{x}.\exists y(\phi \wedge \psi)]\!]_M$, si y no está en el contexto $\vec{x}$.*

Demostración. Este lema es un corolario directo, después de recordar como hemos definido la interpretación de fórmulas, del lema A.1.3.3 de [2]. □

Diremos que una fórmula es regular si en su construcción los únicos conectivos usados fueron $\wedge$ y $\exists$, y diremos que una fórmula es Horn si el único conectivo usado fue $\wedge$.

Lema 3.1.7. *Toda fórmula regular en contexto es equivalente en toda Σ-estructura a una de la forma $\exists \vec{x} \phi$ con ϕ una fórmula Horn.*

Demostración. Observe que toda fórmula de la forma $\phi \wedge \exists x \psi$ puede cambiarse por el lema anterior a una de la forma $\exists x(\phi \wedge \psi)$, quizá después de renombrar las variables acotadas de $\exists \psi$. Llevando a cabo este proceso reiteradas veces, tenemos que toda fórmula puede escribirse como se indica en el enunciado del lema. □

Un hecho que se deduce de manera inmediata de que nuestras Σ-estructuras estén definidas sobre categorías geométricas es el siguiente lema

Lema 3.1.8. *En toda Σ-estructura M tenemos que $[\![\vec{x}.\phi \wedge (\bigvee_{i\in I} \psi_i)]\!]_M = [\![\vec{x}.\bigvee_{i\in I}(\phi \wedge \psi)]\!]_M$.*

Lema 3.1.9. *Toda fórmula geométrica en contexto es equivalente en toda Σ-estructura a una de la forma $\bigvee_{i\in I} \phi_i$, con ϕ_i una fórmula regular del tipo descrito en el lema 3.1.7.*

Demostración. Usando el lema 3.1.9 y el hecho de que $\exists x(\bigvee_{i\in I} \psi_i)$ es equivalente a $\bigvee_{i\in I} \exists x \psi_i$ en cualquier Σ-estructura, podemos escribir a nuestra fórmula con todas las disyunciones al frente y luego aplicar el proceso del lema 3.1.7. □

Como sólo hay una cantidad pequeña de fórmulas geométricas, tenemos que nuestras categorías son esencialmente pequeñas. Demostrando así que nada es tan grave como parece.

Es fácil ver que B($\mathbb{T}$) hereda la estructura de categoría geométrica. (para el demostrar que, en efecto, es bien potenciada, véase el lema 1.4.10 de [2])

3.1.3. El topos clasificante

Usando la equivalencia de Diaconescu basta demostrar que tenemos la siguiente equivalencia categórica $\mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \simeq \text{Plan}_J(\text{B}(\mathbb{T}), \mathcal{E})$ natural en $\mathcal{E}$.

Teorema 3.1.10. $\mathbb{T}$*-Mod*$(\mathcal{E}) \simeq$ *Plan*$_{J_{\mathbb{T}}}(B(\mathbb{T}), \mathcal{E})$

Demostración. Supongamos $F : \text{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ un funtor continuo y plano. Definiremos la Σ-estructura M_F en $\mathcal{E}$ de la siguiente manera: Si $A \in \Sigma$-tip, definimos $M_F(A)$ como $F(\{x.x = x\})$ con $x : A$. Por otro lado, si $f : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A \in \Sigma$-fun, definimos f^{M_F} como el morfismo

$$F(\{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\}) = M_F A_1 \times \cdots \times M_F A_n \xrightarrow{F([f(\vec{x})=y])} F(\{y.y = y\}) = M_F A$$

donde $\vec{x} : \vec{A}$ y $y : A$. Observe que hemos usado el hecho de que F es un funtor cartesiano (puesto que es plano). Además note que

$$[f(\vec{x}) = y] : \{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\} \longrightarrow \{y.y = y\})$$

es un morfismo de $\text{B}(\mathbb{T})$ puesto que para todo modelo $M \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$ tenemos que $\{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\}^M = M(A_1, \ldots, A_n)$, $\{y.y = y\}^M = MA$ y que la gráfica de Mf es $[\![\vec{x}, y.f(\vec{x}) = y]\!]_M$ ya que

$$M(A_1, \ldots, A_n) \overset{(1,Mf)}{\rightarrowtail} M(A_1, \ldots, A_n) \times MA \underset{\pi_2}{\overset{Mf\pi_1}{\rightrightarrows}} MA$$

es un diagrama igualador en $\mathcal{E}$. Por último, si $R \rightarrowtail A_1 \times \cdots \times A_n \in \Sigma$-rel definimos $M_F R$ como el morfismo

$$F(\{\vec{x}.R(x_1, \ldots, x_n\}) \overset{F([R(x_1,\ldots x_n])}{\rightarrowtail} F(\{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\})$$

el cual es un monormorfismo puesto que $\{\vec{x}.R(x_1, \ldots, x_n)\} \rightarrowtail \{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\}$ es un monormofismo en $\text{B}(\mathbb{T})$ (lo es en todo modelo por definición.)

Demostraremos en el lema 3.1.11 que M_F es un modelo de $\mathbb{T}$ y así nuestra asignación estará bien definida. Por el momento extendamos a ésta a una asignación funtorial. Para una transformación natural $\alpha : F \longrightarrow G$ entre dos funtores planos y continuos $F, G : \text{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ construiremos un morfismo de Σ-estructuras como sigue: si $A \in \Sigma$-tip definimos $h_A^\alpha : M_F A \longrightarrow M_G A$ como el morfismo $\alpha_{\{x.x=x\}}$ con $x : A$. Si $f : A_1 \times \cdots \times A_n \longrightarrow A \in \Sigma$-fun observe que

$$\begin{array}{ccc} M_F(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{M_F f} & M_F A \\ {\scriptstyle h_{A_1}^\alpha \times \cdots \times h_{A_n}^\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_A^\alpha} \\ M_G(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{M_G f} & M_G A \end{array}$$

es un diagrama conmutativo puesto que

$$\begin{tikzcd} F(\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}) \arrow[r, "F({[f(\vec{x})=y]})"] \arrow[d, "\alpha_{\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}}"] & F(\{y.y=y\}) \arrow[d, "\alpha_{\{y.y=y\}}"] \\ (\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}) \arrow[r, "G({[f(\vec{x})=y]})"] & G(\{y.y=y\}) \end{tikzcd}$$

conmuta por la naturalidad de α. Por último, observe que para todo $R \in \Sigma$-rel existe un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_F R \arrow[r, tail] \arrow[d] & M_F(A_1,\ldots,A_n) \arrow[d, "h^{\alpha}_{A_1}\times\cdots\times h^{\alpha}_{A_n}"] \\ M_G R \arrow[r, tail] & M_G(A_1,\ldots,A_n) \end{tikzcd}$$

puesto que, de la naturalidad de α tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} F(\{\vec{x}.R(x_1,\ldots,x_n)\}) \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha_{\{\vec{x}.R(x_1,\ldots,x_n)\}}"] & F(\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}) \arrow[d, "\alpha_{\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}}"] \\ G(\{\vec{x}.R(x_1,\ldots,x_n)\}) \arrow[r, tail] & G(\{\vec{x}.\vec{x}=\vec{x}\}) \end{tikzcd}$$

Esta asignación es claramente funtorial.

El funtor que acabamos de definir es esencialmente suprayectivo en objetos: si $M \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$, entonces $M \cong M_{U_M F_M}$ donde $U_M F_M$ es el funtor

$$\mathrm{B}(\mathbb{T}) \xrightarrow{F_M} \mathrm{Def}(M) \xrightarrow{U_M} \mathcal{E}$$

el cual es claramente plano y continuo. El isomorfismo de modelos se sigue al revisar las definiciones.

Por último, el funtor es fiel y pleno: puede probarse por inducción sobre la complejidad de fórmulas (y de términos), que si $\alpha, \beta : F \longrightarrow G$ son dos transformaciones naturales entre dos funtores planos y continuos, tales que $h^{\alpha} = h^{\beta}$, entonces $\alpha = \beta$, esto demuestra que nuestro funtor es fiel, el argumento es directo y por lo tanto dejaremos los trámites burocraticos de lado. Más interesante es el hecho de que nuestro funtor sea pleno: para todo morfismo de modelos de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{E}$, $h : M_F \longrightarrow M_G$, podemos construir una colección de morfismos $\alpha_{\phi} : [\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_F} \longrightarrow [\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_G}$ usando la proposición 2.2.4 de tal manera que esta colección sea una transformación natural (nótese que la existencia de los morfismos de la proposición antes citada es unívoca), de tal manera que $h^{\alpha} = h$. Supongamos $[\sigma] : \{\vec{x}.\phi\} \longrightarrow \{\vec{y}.\psi\}$ un morfismo en $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ y denotemos por $\sigma_M : [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ al morfismo que existe en $\mathcal{E}$ por definición de $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ y cuya gráfica es precisamente $[\![\vec{x},\vec{y}.\sigma]\!]_M$ y consideremos el diagrama de las siguientes gráficas:

$$\begin{tikzcd} {[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_F}} \arrow[r, tail, "{(1,\sigma_{M_F})}"] \arrow[d, "\alpha_{\phi}"] & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_F} \times [\![\vec{y}.\psi]\!]_{M_F}} \arrow[r, tail] \arrow[d, "\alpha_{\phi}\times\alpha_{\psi}"'] & M_F(A_1,\ldots,B_m) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{B_m}"'] & M_F(A_1,\ldots,A_n) \arrow[d, "h_{A_1}\times\cdots\times h_{A_n}"'] \\ {[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_G}} \arrow[r, tail, "{(1,\sigma_{M_G})}"'] & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_G} \times [\![\vec{y}.\psi]\!]_{M_G}} \arrow[r, tail] & M_G(A_1,\ldots,B_m) \arrow[r, "\pi"'] & M_G(A_1,\ldots,A_n) \end{tikzcd}$$

el cual es conmutativo por construcción al igual que los cuadrados de la extrema derecha y del centro, por consiguiente el cuadrado de extrema izquierda resulta ser también conmutativo. De este último no es difícil concluir que nuestra coleección de morfismos es una transformación natural (tan sólo hace falta proyectar a la segunda coordenada.)

$\square$

La hipótesis de continuidad se usará en los siguientes lemas que terminan con nuestra demostración.

Lema 3.1.11. *Si $F : B(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor $J_{\mathbb{T}}$-continuo y plano y M_F es su Σ-estructura en $B(\mathbb{T})$ asociada, entonces para cualquier fórmula geométrica ϕ se cumple que $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \cong F(\{\vec{x}.\phi\})$.*

Demostración. Demostraremos unicamente aquello que requiere una pequeña modificación. La prueba se hace por inducción sobre la complejidad de ϕ, nosotros sólo consideraremos el paso inductivo correspondiente al caso en que ϕ sea de la forma $\bigvee_{i\in I}\phi_i$, los demás casos pueden encontrarse en la página 561 de [1].

Observe que si ϕ es de la forma $\bigvee_{i\in I}\phi_i$ entonces, para toda $i \in I$ existe un (mono)morfismo $\sigma_i : \{\vec{x_i}.\phi_i\} \longrightarrow \{\vec{y}.\bigvee_{i\in I}\phi_i\}$ (con ambos contextos del mismo tipo), dado por la fórmula $\sigma_i = (\vec{x_i} = \vec{y}) \wedge \phi(\vec{x_i}) \wedge (\bigvee_{i\in I}\phi_i(\vec{y}))$. La familia $(\sigma_i)_{i\in I}$ es $J_{\mathbb{T}}$ cubriente si para todo modelo M de $\mathbb{T}$ tenemos que $(\sigma_i^M)_{i\in I}$ es una familia epimórfica en $\mathcal{E}$; lo cual sucede, si y sólo si $p : \amalg_{i\in I}[\![\vec{x_i}.\phi_i]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{y}.\bigvee_{i\in I}\phi_i]\!]_M$ es un epimorfismo, equivalentemente, si la imagen de p es todo $[\![\vec{y}.\bigvee_{i\in I}\phi_i]\!]_M$, pero la imagen de p es precisamente $\bigvee_{i\in I}\mathrm{Im}(\sigma_i) = \bigvee_{i\in I}[\![\vec{x_i}.\phi_i]\!]_M$ y es trivialmente cierto que $\bigvee_{i\in I}[\![\vec{x_i}.\phi_i]\!]_M = [\![\vec{y}.\bigvee_{i\in I}\phi_i]\!]_M$. Usando nuestra hipótesis de inducción, podemos concluir que, como F respeta familias cubrientes, $F(\{\vec{x}.\bigvee_{i\in I}\phi_i\}) = \bigvee_{i\in I}F(\{\vec{x}.\phi_i\}) \cong \bigvee_{i\in I}[\![\vec{x}.\phi]\!]_M = [\![\vec{x}.\bigvee_{i\in I}\phi_i]\!]_M$. $\square$

Lema 3.1.12. *La Σ-estructura M_F asociada a un funtor $F : B(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ $J_{\mathbb{T}}$-continuo y plano es un modelo de $\mathbb{T}$.*

Demostración. Supongamos $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi \in \mathbb{T}$, entonces para todo $M \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$ tenemos que $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \leq [\![\vec{x}.\psi]\!]_M$ y de aquí podemos deducir la existencia de un monomorfismo $\{\vec{x}.\phi\} \rightarrowtail \{\vec{y}.\psi\}$ en $\mathrm{B}(\mathbb{T})$. Como F es cartesiano, sabemos que $F(\{\vec{x}.\phi\}) \longrightarrow F(\{\vec{y}.\psi\})$ es un monomorfismo. Usando el lema anterior, concluimos que, $[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_F} \leq [\![\vec{x}.\psi]\!]_{M_F}$, es decir que, M_F hace verdadero a $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$, es decir concluimos que, M_F es un modelo de $\mathbb{T}$. $\square$

Por último, la equivalencia es natural en $\mathcal{E}$. Para esto tomemos $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$ un funtor geométrico y veamos que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Plan}_{J_{\mathbb{T}}}(\mathrm{B}(\mathbb{T}),\mathcal{E}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f\circ(-)"] & \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \arrow[d, "f^*"] \\
\mathrm{Plan}_{J_{\mathbb{T}}}(\mathrm{B}(\mathbb{T}),\mathcal{F}) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo salvo isomorfismo. Esto es cierto ya que si $F : \mathrm{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor $J_{\mathbb{T}}$-continuo y plano, entonces existe un isomorfismo de modelos $M_{f\circ F} \cong f^{\star}M_F$ dado por los morfismos $f^{\star}(F(\{x.x = x\})) \longrightarrow (f^{\star}F)(\{x.x = x\})$evidentes, con $x : A$ para todo $A \in \Sigma$-tip. Esto da por concluido la demostración de la existencia de un topos clasificante para toda teoría geométrica.

Terminaremos esta sección con un teorema sobre el modelo universal de una teoría geométrica.

Teorema 3.1.13. *Sea $\mathbb{T}$ una teoría geométrica. El secuente $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ se satisface en todos los modelos de $\mathbb{T}$ sobre un topos de Grothendieck si y sólo si dicho secuente es verdadero en el modelo universal, $U_{\mathbb{T}}$.*

Demostración. Demostraremos sólo la parte no trivial. Supongamos que $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ es un secuente que $U_{\mathbb{T}}$ hace verdadero. Entonces tenemos el siguiente diagrma conmutativo

$$\begin{tikzcd} \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_{U_{\mathbb{T}}} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, tail] & & \llbracket \vec{x}.\psi \rrbracket_{U_{\mathbb{T}}} \arrow[dl, tail] \\ & U_{\mathbb{T}}(A_1, \ldots, A_n) & \end{tikzcd}$$

como nuestra topología es subcanónica y, tomando en cuenta la prueba de la equivalencia de Diaconescu, tenermos que el funtor continuo y plano que se corresponde con la identidad en $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}})$ es el encaje de Yoneda y que, por lo tanto, tenemos que para toda fórmula geométrica ϕ, $\llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_{U_{\mathbb{T}}} \cong y(\{\vec{x}.\phi\})$. Como en el diagrama todos los objetos son representables y, como bien sabe el lector, el encjae de Yoneda es fiel y pleno (sic), tenemos en $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \{\vec{x}.\phi\} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, tail] & & \{\vec{x}.\psi\} \arrow[dl, tail] \\ & \{\vec{x}.\vec{x} = \vec{x}\} & \end{tikzcd}$$

de aquí, es trivial concluir que la afirmación es cierta. □

3.2. Teorema 2

La prueba de nuestro teorema 2 es trivial. La única dificultad que reside en ella es la de no confundir lo real con el lenguaje, que son, a fin de cuentas, en este caso, casi lo mismo.

Teorema 3.2.1. *Todo topos de Grothendieck es el topos clasificante de alguna teoría geométrica.*

Demostración. Supongamos $\mathrm{Gav}(\mathcal{C}, J)$ un topos de Grothendieck. Consideremos el lenguaje geométrico dado por la siguiente signatura: Σ-tip $= \{\overline{A} : A \in \mathcal{C}\}$, Σ-fun $= \{\overline{f} : \overline{A} \longrightarrow \overline{B} : f : A \longrightarrow B \in \mathcal{C}\}$, Σ-rel $= \emptyset$; y consideremos la teoría geométrica $\mathbb{T}$ dada por los siguientes axiomas:

1. $\top \vdash_x \overline{1_C}(x) = x$, para todo morfismo identidad.

2. $\top \vdash_x \overline{f}(x) = \overline{h}(\overline{g}(x))$, para toda composición $f = hg$ de $\mathcal{C}$.

3. $\top \vdash_{[]} \bigvee_{A \in \mathcal{C}} \exists x^A \top$

4. $\top \vdash_{x^A, y^B} \bigvee_S \exists z^C((\overline{f}(z^C) = x^A) \wedge (\overline{g}(z^C) = y^B))$, para cada conjunto S, con S es el conjunto de todos los diagrmas de la forma $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$, con C fija.

5. $\overline{f}(x^A) = \overline{g}(x^A) \vdash_{x^A} \bigvee_E \exists z^C(\overline{h}(z^C) = x^A)$, para cada conjunto E, con E el conjunto de todos los morfismos $h : C \longrightarrow A$ que igualan a dos morfismos fijos $f, g : A \longrightarrow B$.

6. $\top \vdash_{x^C} \bigvee_{i \in I} \exists y^{B_i}(\overline{f_i}(y_i^{B_i}) = x^C)$ para toda familia de morfismos $(f_i)_{i \in I} \in J(C)$.

Veremos que existe una equivalencia categórica $\mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E}) \simeq \text{Plan}_J(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ natural en $\mathcal{E}$. Definimos para cada modelo M de $\mathbb{T}$ un funtor $\overline{M} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ de la siguiente manera: $\overline{M}(C) = M(\overline{C})$, para todo C objeto de $\mathcal{C}$; $\overline{M}(f) = M(\overline{f})$, para f morfismo de $\mathcal{C}$.

De las dos primeras clases de axiomas se demuestra que $\overline{M}$ es, en efecto, un funtor. Como M satisface el primer tipo de axiomas, entonces, para todo morfismo identidad 1_C tenemos que el igualador de los morfismos $\overline{M}(1_C) = M(\overline{1_C})$ y $1_{\overline{M}C} = 1_{M\overline{C}}$ es un isomorfismo y por lo tanto que éstos son iguales. Por otro lado, si tenemos una composición $f = hg$, sabemos que M satisface el secuente del tipo 2 en los axiomas de $\mathbb{T}$ y que, por lo tanto, el igualador de los morfismos $\overline{M}(f) = M(\overline{f})$ y $M(\overline{g}) \circ M(\overline{h}) = \overline{M}(g) \circ \overline{M}(h)$ es un isomorfismo, y que, en consecuencia, éstos son iguales.

Los axiomas de $\mathbb{T}$ del tipo 3,4 y 5, nos dicen que $\overline{M}$ es un funtor plano (filtrante). Para ver, por ejemplo, que la familia de morfismos de la forma $\overline{M}C \longrightarrow 1$ indicados sobre todos los objetos de $\mathcal{C}$ es epimórfica, basta ver que para cada C el morfismo $\overline{M}C \longrightarrow 1$ es la interpretación de $[\![x^C.\top]\!]_M$ y que, entonces, la familia de éstos es epimórfica si y sólo si el subobjeto $\bigvee_{C \in \mathcal{C}} [\![[].\exists x^C \top]\!]_M$ es máximo, esto ocurre, si y sólo si M satisface el secuente $\top \vdash_{[]} \bigvee_{C \in \mathcal{C}} \exists x^C \top$.

Por último, para ver que $\overline{M}$ es un funtor J-continuo usaremos la última familia de axiomas. Supongamos $A = (f_i : B_i \longrightarrow C)_{i \in I}$ una familia J-cubriente. Tenemos que demostrar que $\overline{M}(A)$ es una familia epimórfica. Observe que $\overline{M}(A) = (M(\overline{f_i}) : M(\overline{B_i}) \longrightarrow M(\overline{C}))_{i \in I}$. Como $M \vDash (\top \vdash_{x^C} \bigvee_{i \in I} \exists y_i^{B_i} \overline{f_i}(y_i^{B_i}) = x^C)$, sabemos que la colección de morfismos

$$\begin{tikzcd} [\![y_i^{B_i}x^C.\overline{f_i}(y_i^{B_i}) = x^C[\![_M \arrow[r, tail] \arrow[rr, bend left, "M\overline{f_i}\circ\pi_1"] & MB \times MC \arrow[r, "\pi_2"'] & MC \end{tikzcd}$$

con $i \in I$, es epimórfica, por lo tanto los morfismos $M\overline{f_i}$ forman también una familia epimórfica.

Es claro que nuestra asignación es funtorial: si $h : M \longrightarrow N$ es un morfismo de modelos de $\mathbb{T}$ entonces se puede definir la transformación natrual $\overline{h} : \overline{M} \longrightarrow \overline{N}$ definida para $A \in \mathcal{C}$ como el morfismo $h_A : M\overline{A} \longrightarrow N\overline{A}$. Ésta es trivialmente, por definicion de morfismo de estructuras, una transformación natural. Claramente nuestro funtor así definido es fiel y pleno.

Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ es un funtor plano y J-continuo note que podemos definir un modelo de $\mathbb{T}$ dado por F como sigue: para $\overline{A}$ un tipo de nuestro lenguaje, definimos $M_F(\overline{A})$ como $F(A)$; si $\overline{f}$ es una letra funcional, definimos $M_F(\overline{f})$ como $F(f)$. Es claro que $\overline{M_F} \cong F$. Así, hemos demostrado tener una equivalencia categórica entre $\mathbb{T}$-Mod$(\mathcal{E})$ y la categoría Plan$_J(\mathcal{C}, \mathcal{E})$.

Por último, veamos que la equivalencia es natural en $\mathcal{E}$. Supongamos un morfismo geométrico $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}$, observe que, objeto por objeto y morfismo por morfismo, por definición, tenemos $\overline{f^\star M} \cong f^\star\overline{M}$. □

3.3. Teorema 3

Lo siguiente es un ejercicio de reescritura de la prueba encontrada en [5] pero no podemos afirmar que sean las mismas.

Lema 3.3.1. *Dados un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck y P una familia de morfismos con codominio C en $\mathcal{C}$. F envía a P a una familia epimórfica si y sólo si F envía a (P) a una familia epimórfica.*

Demostración. Supongamos $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ y P como en el enunciado de nuestro lema. Supongamos que F envía a P a una familia epimórfica; como $P \subset (P)$, tenemos que si $gf = hf$ para toda $f \in F((P))$, en particular los morfismos g y h son igualados por todos los morfismos de $F(P)$ y como ésta es una familia epimórfica, podemos concluir que $g = h$.

Por otro lado, supongamos que F envía a (P) a una familia epimórfica y supongamos que para toda f en $F(P)$ tenemos que $gf = hf$ para dos morfismos g y h. Tenemos que demostrar que $g = h$. Sea $\overline{f}$ un morfismo cualquiera de $F((P))$, basta ver que $g\overline{f} = h\overline{f}$. Como $\overline{f} \in F((P))$, entonces existe $f \in F(P)$ y m morfismos tales que $\overline{f} = fm$; como por hipótesis $hf = gf$, entonces $h\overline{f} = hfm = gfm = g\overline{f}$ y, por lo tanto $g = h$. □

Lema 3.3.2. *Sea K una familia de cribas en una categoría $\mathcal{C}$ cerrada bajo productos fibrados. Entonces la topología de Grothendieck J generada por K es la menor familia de cribas en $\mathcal{C}$ que contiene a K y satisface*

1. *Para todo objeto C de $\mathcal{C}$, la criba máxima t_C está en $J(C)$.*
2. *Si R y S son cribas sobre C y $R \in J(C)$ son tales que $f^\star(S) \in J(dom(f))$ para toda $f \in R$, entonces $S \in J(C)$.*

Demostración. Sea J la menor familia de cribas que contiene a K y satisface 1. y 2. Basta ver que J es cerrada bajo productos fibrados. Consideremos J' la familia de cribas cuyos productos fibrados se encuentran dentro de J. Demostraremos que $J \subset J'$. Observe que J' contiene a K puesto que, por hipótesis K es cerrado bajo productos fibrados y está contenido en J; además, como J contiene a las cribas máximas y todo producto fibrado de una criba máxima es una criba máxima, podemos afirmar que J' contiene a todas las cribas máximas. Por último, observaremos que J' satisface 2. Supongamos R y S cribas tales que $R \in J'$ y tales que para toda $f \in R$ se tiene que $f^\star(S) \in J'$, tenemos que demostrar que $S \in J'$, para ello consideremos un morfismo $g : C' \longrightarrow C$ cualquiera de $\mathcal{C}$ y veamos que $g^\star(S) \in J$. Como $g^\star(R)$ y $g^\star(S)$ son ambas cribas en C' y, además, $g^\star(R) \in J$ ya que $R \in J'$, como J satisface 2., basta ver que para toda $h \in g^\star(R)$ se cumple que $h^\star g^\star(S) \in J$, pero $h \in g^\star(R)$ implica que $gh \in R$ y por hipótesis de S sabemos que $(gh)^\star(S) = h^\star g^\star(S) \in J$. $\square$

Lema 3.3.3. *Sean K una familia de cribas en una categoría $\mathcal{C}$ cerrada bajo productos fibrados y $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ un funtor plano con $\mathcal{E}$ un topos de Grothendieck. F es J-continuo, con J la menor topología de Grothendieck que contiene a K si y sólo si F envía a toda criba en K a una familia epimórfica en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Demostraremos sólo la parte no trivial del lema. Para ello mostraremos que para todo funtor plano $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ la familia de cribas J_F que son enviadas a familias epimórficas bajo F satisfacen 1. y 2. del lema 3.3.2. Supongamos que $K \subset J_F$ aplicando el lema arriba citado podremos concluir que $J \subset J_F$. J_F satisface 1. ya que el morfismo identidad pertenece a $F(t_C)$ para toda criba máxima t_C y, por lo tanto, $F(t_C)$ es una familia epimórfica. Supongamos ahora R y S cribas sobre C tales que $R \in J_F$ y que para toda $f \in R$ tenemos que $f^\star(S) \in J_F$; debemos demostrar que $S \in J_F$, para ello, supongamos dos morfismos $p, q : F(C) \longrightarrow X$ tales que para toda $h \in S$ se cumpla que $pF(h) = qF(h)$ y veamos que $p = q$; mostraremos esto último haciendo ver que para toda $f \in F(R)$ se tiene que $pF(f) = qF(f)$ y esto bastará ya que ya que $F(R)$ es una familia epimórfica; a su vez, para mostrar que esto último es cierto, haremos ver que $pF(f)F(g) = qF(f)F(g)$ para toda $g \in f^\star(S)$, ya que $F(f^\star(S))$ es una familia epimórfica esto será suficiente. Pero $g \in f^\star(S)$ implica que $fg \in S$ y por hipótesis sabemos que p y q son igualadas por los morfismos de $F(S)$ y como $pF(f)F(g) = pF(fg) = qF(fg) = qF(f)F(g)$, podemos concluir nuestra demostración. $\square$

Lema 3.3.4. *Si $\mathbb{T}'$ es un cociente de una teoría geométrica $\mathbb{T}$ y $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ es una axioma de $\mathbb{T}'$, entonces $\{\vec{x'}.\phi \wedge \psi\} \xrightarrow{[\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x'}=\vec{x})]} \{\vec{x}.\phi\}$ es un monomorfismo de $B(\mathbb{T})$.*

Demostración. Es claro que para cualquier $M \in \mathbb{T}\text{-Mod}(\mathcal{E})$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\llbracket \vec{x'}.\phi \wedge \psi \rrbracket_M \arrow[rr, tail, "l"] \arrow[dr, tail, "q"'] & & \llbracket \vec{x}.\phi \rrbracket_M \arrow[dl, tail, "p"] \\
& M(A_1, \dots, A_n) &
\end{tikzcd}$$

por lo que sólo nos queda ver que graf(l) es definible por la fórmula $\phi \wedge \psi \wedge (\vec{x'} = \vec{x})$, para esto notemos que $\llbracket \vec{x}, \vec{x'}.(\phi\wedge\psi)\wedge(\vec{x'} = \vec{x})\rrbracket_M = \llbracket \vec{x}, \vec{x'}.(\phi\wedge\psi)\wedge(\phi\wedge\psi)\wedge(\vec{x'} = \vec{x})\rrbracket_M =$

$[\![\vec{x},\vec{x'}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M \wedge [\![\vec{x},\vec{x'}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M \wedge [\![\vec{x},\vec{x'}.(\vec{x'}=\vec{x})]\!]_M = M(A_1,\ldots,A_n)\times[\![\vec{x'}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M \wedge$ $[\![\vec{x}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M \times M(A_1,\ldots,A_n)\wedge\Delta_{M(A_1,\ldots,A_n)} = ([\![\vec{x'}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M, [\![\vec{x}.(\phi\wedge\psi)]\!]_M) = (q,q)$

Por otro lado, note que el diagrama que define a la gráfica de $l : [\![\vec{x'}.\phi\wedge\psi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & {[\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[r, tail, "p"] & M(A_1,\ldots,A_n) \\
{[\![\vec{x'}.\phi\wedge\psi]\!]_M} \arrow[ur, "l"] \arrow[r, "{(1,l)}"] \arrow[dr, "1"'] & {[\![\vec{x'}.\phi\wedge\psi]\!]_M \times [\![\vec{x}.\phi]\!]_M} \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[r, tail, "{(q,p)}"] & M(A_1,\ldots,A_n)\times M(A_1,\ldots A_n) \arrow[u, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & {[\![\vec{x'}.\phi\wedge\psi]\!]_M} \arrow[r, tail, "q"] & M(A_1,\ldots,A_n)
\end{tikzcd}$$

observe que $pl = q = q1$ y que por lo tanto $[\![\vec{x}\vec{x'}.(\phi\wedge\psi)\wedge(\vec{x'}=\vec{x})]\!]_M$ define a la gráfica de $l : [\![\vec{x'}.\phi\wedge\psi]\!]_M \longrightarrow [\![\vec{x}.\phi]\!]_M$. □

Lema 3.3.5. *La familia A de monomorfismos $\{\vec{x'}.\phi\wedge\psi\} \xrightarrow{[\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x}=\vec{x'})]} \{\vec{x}.\phi\}$ asociados con cada axioma lógica $\phi\vdash_{\vec{x}}\psi$ de un cociente $\mathbb{T}'$ de una teoría geométrica $\mathbb{T}$ es cerrada bajo productos fibrados.*

Demostración. Supongamos $\{\vec{x'}.\phi\wedge\psi\} \xrightarrow{[\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x}=\vec{x'})]} \{\vec{x}.\phi\}$ un monomorfismo de A asociado al secuente $\phi\vdash_{\vec{x}}\psi$ y sea $\{\vec{y}.\chi\} \xrightarrow{\sigma} \{\vec{x}.\phi\}$ un morfismo de $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ cualquiera. Recuerde que

$$\begin{tikzcd}
\{\vec{x''}\vec{y'}.\exists\vec{x}(\sigma(\vec{y'},\vec{x})\wedge(\phi\wedge\psi)\wedge(\vec{x''}=\vec{x}))\} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, tail, "\alpha'"] & \{\vec{x'}.\phi\wedge\psi\} \arrow[d, tail] \\
\{\vec{y}.\chi\} \arrow[r, "\sigma"'] & \{\vec{x}.\phi\}
\end{tikzcd}$$

es un diagrama de producto fibrado en $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ (véase [1]), con $\alpha' = [\exists\vec{x}(\sigma(\vec{y'},\vec{x})\wedge\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x''}=\vec{x}))\wedge(\vec{y}=\vec{y'})]$, la cual es una fórmula equivalente a $[\exists\vec{x}(\sigma(\vec{y'},\vec{x})\wedge\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x''}=\vec{x}))\wedge(\vec{y}=\vec{y'})\wedge\chi(\vec{y'})]$ (vea, por ejemplo, que en todo modelo M de $\mathbb{T}$, el secuente $\exists\vec{x}\sigma\vdash_{\vec{y'}}\chi$ es verdadero, para esto use el teorema 3.1.2.) Claramente, entonces, α' es uno de los monomorfismo de A, a saber, el que corresponde con el secuente $\chi\vdash_{\vec{y}}\exists\vec{x}(\sigma(\vec{y},\vec{x})\wedge(\phi\wedge\psi)\wedge(\vec{x''}=\vec{x}))$, el cual puede verse facilmente que es verdadero en todo modelo de $\mathbb{T}'$. □

Es claro que la familia de cribas principales generadas por los monomorfismos de A es también cerrada bajo productos fibrados. Nos referiremos a ambas familias indistintamente como A.

Lema 3.3.6. *Si $J_{\mathbb{T}}\subset J$ entonces, J es generada sobre $J_{\mathbb{T}}$ por una colección de cribas principales generadas por un único monomorfismo.*

Demostración. Supongamos C un objeto cualquiera de $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ y R una criba en C. Sea r el subobjeto de C dado por la unión en $\mathrm{Sub}(C)$ de todas las imágenes de morfismos en R (recuerde que hemos mencionado que $\mathrm{B}(\mathbb{T})$ es una categoría geométrica y, por lo tanto, bien potenciada.) Basta probar que $R \in J(C)$ si y sólo si $(r) \in J(C)$. Si $R \in J(C)$ y como $R \subset (r)$ por la proposición 1.2.2 tenemos que $(r) \in J(C)$. Por otro lado, si $(r) \in J(C)$, entonces, por la proposición 1.2.3 y ya que $J_{\mathbb{T}} \subset J$, tenemos que la criba generada por la inclusión en r de imágenes de morfismos en R es J cubriente. □

Teorema 3.3.7. *Todo cociente de una teoría geométrica $\mathbb{T}$ es clasificado por un subtopos de su topos clasificante.*

Demostración. Supongamos $\mathbb{T}'$ un cociente de $\mathbb{T}$. Consideremos todos los secuentes $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ en $\mathbb{T}'$ que no pertencen a $\mathbb{T}$. Note que

$$\{\vec{x}'.\phi \wedge \psi\} \xrightarrow{[\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x}=\vec{x'})]} \{\vec{x'}.\psi\}$$

es un monomorfismo en $\mathrm{B}(\mathbb{T})$.

Recuerde que la clase A de todas las cribas principales generadas por los monomorfismos anteriores es cerrada bajo productos fibrados.

Considere $K = J_{\mathbb{T}} \cup A$, es claro que esta colección también es cerrada bajo productos fibrados y que, por lo tanto todo funtor $F_M : \mathrm{B}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{E}$ $J_{\mathbb{T}}$-continuo y plano asociado a un modelo M de $\mathbb{T}$ es $J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}$-continuo, con $J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}$ la menor topología que contiene a K, y plano si y sólo si F_M envía a cada monomorfismo de A a un epimorfismo (lema 3.3.3), es decir, si $F_M(\phi \wedge \psi \wedge (\vec{x} = \vec{x'}))$ es un epimorfismo, lo cual ocurre si y sólo si el secuente $\exists \vec{x'}(\phi \wedge \psi \wedge (\vec{x} = \vec{x'}) \vdash_{\vec{x'}} \psi$ es verdadero en M, lo cual es claramente equivalente a que M haga verdad al secuente $\phi \vdash_{\vec{x'}} \psi$, es decir, si M es modelo de $\mathbb{T}'$. Por lo tanto, tenemos que, usando Diaconescu, $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'})$ es el topos clasificante de $\mathbb{T}'$.

Claramente, como $J_{\mathbb{T}} \subset J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}$, tenemos que este topos es un subtopos del topos clasificante de $\mathbb{T}$. □

Si pensamos en el teorema anterior como una asignación que a cada cociente de una teoría $\mathbb{T}$ le asigna un subtopos de su topos clasificante que resulta ser el topos clasificante de dicho cociente, tenemos que demostrar que dicha asignación está bien definida.

Si $\mathbb{T}'$ y $\mathbb{T}''$ son dos cocientes de $\mathbb{T}$ equivalentes, entonces para todo topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ tenemos que $\mathbb{T}'$-$\mathrm{Mod}(\mathcal{E}) = \mathbb{T}''$-$\mathrm{Mod}(\mathcal{E})$. En particular tenemos que

$$\mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'})) \simeq \mathrm{Geom}(\mathcal{E}, \mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}''}))$$

es una equivalencia natural en $\mathcal{E}$ y que, por un argumento de Yoneda, tenemos que los topos $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'})$, $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}''})$ son equivalentes. Sin pérdida de generalidad esta equivalencia es también una adjunción y así tenemos que existen las siguientes inmersiones (los funtores de la equivalencia son fieles y plenos)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}) \arrow[r] \arrow[dr, "\iota"'] & \mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}, J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}, J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}''}) \arrow[dl, "\iota"] \\
& \mathrm{Con}^{B(\mathbb{T})^{op}} &
\end{tikzcd}$$

donde el triángulo derecho nace conmutativo, los morfismos horizontales son todos equivalencias, las ι son las inclusiones canónicas y el triángulo izquierdo existe por el corolario 7 de la página 375 de [1].

Así, los subtopos asociados a los cocientes $\mathbb{T}'$ y $\mathbb{T}''$ son iguales.

Teorema 3.3.8. *Todo subtopos del topos clasificante de una teoría geométrica $\mathbb{T}$ es el topos clasificante de un cociente de $\mathbb{T}$*

Demostración. Supongamos $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J) \rightarrowtail \mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}})$, entonces $J_{\mathbb{T}} \subset J$ y J está generada sobre $J_{\mathbb{T}}$ por una familia de cribas principales dadas por monomorfismos.

Supongamos $[\theta] : \{\vec{x}.\chi\} \rightarrowtail \{\vec{x'}.\psi\}$ uno de éstos. Note que existe una $\phi \in \Sigma$-form tal que $\phi \wedge \psi$ es lógicamente equivalente a χ, a saber[1]

$$\bigvee_{i\in I} \{\vec{x}.\phi_i : \vec{x}.(\psi \wedge \phi_i) \text{ es logicamente equivalente a } \vec{x}.\chi\}$$

así, nuestro monomorfismo es de la forma

$$\{\vec{x}.\phi \wedge \psi\} \rightarrowtail \{\vec{x'}.\psi\}$$

y por un argumento similar al usuado en la prueba del lema 3.3.4, tenemos que θ es equivalente a $\phi \wedge \psi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})$.

Agregamos a los axiomas de $\mathbb{T}$ todos los secuentes de la forma $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$, este nuevo conjunto de secuentes es claramente un cociente de $\mathbb{T}$ y de la construcción anterior sabemos que $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J)$ es su topos clasificante. □

Podemos pensar en el teorema anterior como una asignación que a cada subtopos le asocia un cociente $\mathbb{T}^J$ de $\mathbb{T}$.

Teorema 3.3.9. *Las asignaciones descritas por los dos teoremas anteriores son una la inversa de la otra.*

Demostración. Supongamos $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J)$ un subtopos de $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}})$ y consideremos $\mathbb{T}^J$ el cociente de $\mathbb{T}$ asociado a éste. Note que tanto $\mathrm{Gav}(\mathbb{T}), J)$ como $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}^J})$ son los topos clasificantes de $\mathbb{T}^J$ y que, por lo tanto, son el mismo subtopos.

Por otro lado, si suponemos $\mathbb{T}'$ un cociente de $\mathbb{T}$ el subtopos $\mathrm{Gav}(\mathrm{B}(\mathbb{T}), J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'})$ es el topos clasificante de este cociente y es también por construcción el topos clasificante de $\mathbb{T}^{J_{\mathbb{T}}^{\mathbb{T}'}}$, por lo tanto ambas teorías tiene el mismo topos clasificante y éstas deben ser equivalentes. □

[1] El problema puede ser el contexto. No lo es: siempre podemos reemplazar $[\theta]$ por un subobjeto isomorfo con los contextos adecuados, a saber, aquel dado por la factorización epi-mono de $[\theta]$ (esto es un análogo del lema D.1.4.10 de [2]) y, en lo que sigue a este lema, basta reemplazar la criba correspondiente con aquella dada por un producto fibrado a lo largo del isomorfismo evidente.

A los anteriores teoremas se les suele nombar el teorema de dualidad.

Capítulo 4

A manera de no acabar

Decimos que una teoría geométrica $\mathbb{T}$ es completa si para cualquier fórmula ϕ se cumple alguna de las siguientes condiciones *i)* $\phi \vdash_{\vec{x}} \bot$ es consecuencia lógica de $\mathbb{T}$ o bien *ii)* $\top \vdash_{\vec{x}} \phi$ es consecuencia lógica de $\mathbb{T}$. Cuando ambas condiciones se cumplen diremos que $\mathbb{T}$ es inconsistente; equivalentemente, decimos que una teoría $\mathbb{T}$ es inconsistente si el secuente $\top \vdash_{\vec{x}} \bot$ es una consecuencia lógica de $\mathbb{T}$. Una teoría es consistente si no es inconsistente.

Decimos que un topos de Grothendieck es simple si no tiene subtopos propios. Veremos que esta clase de topos es aquella correspondiente a los topos clasificantes de teorías completas.

Dos modelos de una teoría son elementalmente equivalentes si satisfacen los mismos secuentes.

Teorema 4.0.1. *Si $\mathbb{T}$ consistente, entonces $\mathbb{T}$ es completa si y sólo si $Con(\mathbb{T})$ es un topos simple.*

Demostración. Supongamos $\mathbb{T}$ consistente. Si $\mathrm{Con}(\mathbb{T})$ no es simple, entonces existe $\mathcal{E} \rightarrowtail \mathrm{Con}(\mathbb{T})$ un subtopos propio (éste no puede ser trivial porque entonces $mboxCon(\mathbb{T})$ sería trivial.) Sea $\mathbb{T}^J$ el cociente de $\mathbb{T}$ asociado a $\mathcal{E}$ y sea $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ un secuente en $\mathbb{T}^J$ que no pertenezca a $\mathbb{T}$ (ni a su cerradura deductiva, recuerde que la cerradura deductiva de una teoría es equivalente a la teoría.)

No puede ocurrir que $\phi \vdash_{\vec{x}} \bot$ sea consecuencia lógica de $\mathbb{T}$, pues $\bot \vdash_{\vec{x}} \psi$ siempre lo es y entonces $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ lo sería también.

No puede ocurrir que $\top \vdash_{\vec{x}} \psi$ sea consecuencia lógica de $\mathbb{T}$, pues $\phi \vdash_{\vec{x}} \top$ siempre lo es y entonces $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ lo sería también.

No puede ocurrir que $\mathbb{T}$ sea completa porque entonces $\top \vdash_{\vec{x}} \phi$ y $\psi \vdash_{\vec{x}} \bot$ serían consecuencias lógicas de $\mathbb{T}$ y también lo serían de $\mathbb{T}^J$ y, como $\phi \vdash_{\vec{x}} \psi$ es consecuencia lógica de este cociente, entonces se podría deducir que $\top \vdash_{\vec{x}} \bot$ sería una consecuencia lógica de $\mathbb{T}^J$ cosa imposible puesto que la inconsitencia de éste implicaría la inconsitencia de $\mathbb{T}$ (lo dicho, si un topos tiene como subtopos al trivial entonces éste es trivial -la imagen directa es cartesiana.)

Por último, si $\mathbb{T}$ no es completa, entonces existe $\phi \in \Sigma$-form tal que ni $\top \vdash_{\vec{x}} \phi$ ni $\phi \vdash_{\vec{x}} \bot$ son consencuencias lógicas de $\mathbb{T}$. Tenemos así, al menos dos subtopos propios de $\mathrm{Con}(\mathbb{T})$. $\square$

Un ejemplo: la teoría de $\mathbb{Z}_2$-conjuntos. Tomemos como lenguaje aquel con un único tipo, digamos A; y con tres símbolos funcionales, $a, b : A \longrightarrow A$ y $c : 1 \longrightarrow A$ (nuestros $\mathbb{Z}_2$-conjuntos no son vacíos.) Sus axiomas son la tabla de multiplicar de $\mathbb{Z}_2$, es decir $aa = a, ba = b = ab, bb = a$.

Consideremos $\mathbb{Z}_2$ como una categoría con un único objeto. Afirmamos que $\mathrm{Con}^{\mathbb{Z}_2}$ es el topos clasificante de nuestra teoría. Como éste es simple, entonces la teoría será completa.

Observe que para todo topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ hay una equivalencia

$$\mathrm{Plano}(\mathbb{Z}_2, \mathcal{E}) \simeq \mathbb{T}\text{-}\mathrm{Mod}(\mathcal{E})$$

(la primera condición de la definición de funtor filtrante se satisface por la constante que hemos agregado a nuestro lenguaje; la tercera por vacuidad; y la segunda porque en un topos de Grothendieck las familias epimórficas son estables bajo productos fibrados y estas familias siempre son cerradas bajo supraconjuntos.)

Teorema 4.0.2. *Si $\mathbb{T}$ es completa, entonces cualesquiera dos modelos de $\mathbb{T}$ son elementalmente equivalentes.*

Demostración. Supongamos $\mathbb{T}$ completa, entonces $\mathrm{Con}(\mathbb{T})$ es un topos simple.

Veamos que los secuentes que satisface cualquier modelo de $\mathbb{T}$ son exactamente aquellos que hace verdad $U_{\mathbb{T}}$.

Si M es un modelo de $\mathbb{T}$ en $\mathcal{E}$, sabemos que existe un morfismo geométrico $f_M : \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Con}(\mathbb{T})$ tal que $f^\star(U_{\mathbb{T}}) \cong M$.

Como todo morfismo geométrico puede factorizarse como una suprayección seguido de una inmersión (teorema 6 y 8, páginas 373 y 376 de [1].) Tenemos que existe un topos $\mathcal{F}$ y una factorización como la antes descrita

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f_M"] \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{Con}(\mathbb{T}) \\ & \mathcal{F} \arrow[ur, tail] & \end{tikzcd}$$

como $\mathrm{Con}(\mathbb{T})$ es simple, entonces $\mathcal{F} \rightarrowtail \mathrm{Con}(\mathbb{T})$ es una equivalencia y por lo tanto f_M una suprayección. Por el lema 3 en la página 373 de [1] tenemos que entonces $f_M^\star$ refleja y respeta el orden de los subojetos. Con esto podemos concluir nuestra demostración. $\square$

Un problema abierto: ¿Será cierto que si tenemos una teoría geométrica $\mathbb{T}$ tal que todos sus modelos en un topos de Grothendieck $\mathcal{E}$ son isomorfos, entonces ésta es una teoría completa?

Por último: la tesis la motivó un problema de incompletud, lo cual se ve reflejado en estos últimos teoremas. Queda, sin embargo, para otras páginas nuestras extender los resultados aquí expuestos y hablar de Gödel.

Escribiendo hasta que cae la noche
con un estruendo de los mil demonios.
Los demonios que han de llevarme al infierno,
pero escribiendo. Roberto Bolaño.

Bibliografía

[1] Mac Lane S. y Moerdijk I. *Sheaves in geometry and logic: a first introduction to topos theory.* Springer-Verlag, 1992.

[2] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: a topos theory compendium. Vols. I y II.* Oxford University Press, 2002.

[3] P. T. Johnstone. *Topos Theory.* Academic Press, Inc. New York, 1977.

[4] Michael Makkai y Gonzalo E. Reyes. *First Order Categorical Logic: Model Theoretical Methods in the Theory of Topoi and Related Categories.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[5] Caramello O. *Theories, sites, toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic bridges.* Oxford University Press, 2018.