



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**Simetría dual conforme en amplitudes
de gluones**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

Eduardo Toledo García



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. José Antonio Rafael García Zenteno
2019**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres, quienes siempre me han apoyado.

Índice general

Introducción	III
1. Formalismo de helicidad	1
1.1. Los grupos de Lorentz y Poincaré.	1
1.2. Espinores.	3
1.2.1. Ecuación de Dirac.	5
1.2.2. Ecuación de Weyl.	8
1.3. Introducción al formalismo.	9
1.3.1. Notación y herramientas del formalismo.	9
2. $\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills	15
2.1. Supersimetría y el modelo estándar.	15
2.2. Álgebra (super)simétrica.	15
2.3. Contenido de campos.	17
2.4. Ordenamiento de color.	17
3. Vértices MHV y funciones <i>on-shell</i>	21
3.1. Vértices MHV.	21
3.2. Funciones <i>on-shell</i>	22
3.2.1. Relaciones de recursión.	22
3.2.1.1. Relaciones BCFW.	24
3.2.2. Fórmula de Parke-Taylor.	25
4. Simetría dual conforme	29
4.1. Espacios duales.	29
4.2. Transformaciones conformes.	29
4.3. Surgimiento de la simetría dual.	40
4.3.1. Amplitudes	44
5. Conclusiones	49

A. Reglas de Feynman	51
B. Propiedades de los espinores	53
C. Cálculo de $A_4[p_1^-, p_2^-, p_3^+, p_4^+]$	55

Introducción

Este trabajo aborda una nueva aproximación al cálculo de las amplitudes de dispersión a nivel árbol. Se introduce el formalismo de helicidad, el cual es la base de este método y se apoya, en lugar de los usuales espinores de Dirac, de espinores de Weyl construidos a partir de los anteriores. Las amplitudes bajo este formalismo utilizan sólo estados físicos externos que estén *on-shell* y se basa en que los campos de espín 1 transforman en la representación $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz por lo que estos campos quedan simbolizados por biespinores (p^{ab}) . En lugar de trabajar con campos espinoriales, los objetos con los que se construye este formalismo son espinores constantes de valores reales o complejos llamados espinores de helicidad, es decir, dobletes transformando en las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ del grupo de Lorentz, por lo cual ya no hay dependencia de las coordenadas x_μ , es decir, no hay localidad. Dichas amplitudes son muy específicas, pues sólo se toman en cuenta procesos entre gluones en una teoría $\mathcal{N} = 4$ SYM (sin considerar la supersimetría) que entran en una clasificación de vértices de máxima violación de helicidad, que por sus siglas en inglés se conocen como MHV; estos vértices son aquellos que tienen la primer configuración de helicidad no trivial que da un valor para la amplitud distinto de cero. Tales configuraciones están regidas por el ordenamiento de color de los gluones.

Los vértices MHV dan lugar a construir funciones que se denominan *on-shell*, las cuales como su nombre lo dice toma de bloques los estados *on-shell* de las partículas que las componen. En particular dentro de toda la gama de este tipo de funciones se toman las descritas por Britto, Cachazo, Feng y Witten, es decir las relaciones BCFW [1, 2], las cuales consisten en reescribir un par de las variables de momento como cantidades complejas creando subamplitudes en los vértices de las amplitudes MHV. Todo este proceso da lugar a un fórmula que hace el cálculo de amplitudes de n -gluones a nivel árbol muy sencillas comparado con el método usual que utiliza las reglas de Feynman y las variables de Mandelstam; dicha fórmula recide el nombre de *fórmula de Parke-Taylor*.

Lo interesante de contar con esta forma de calcular las amplitudes más allá de simplificar los cálculos con la fórmula mencionada anteriormente, es poder observar una simetría que de otra manera sería algo complicada: la simetría dual conforme. Para lograr describir esto es necesario utilizar coordenadas duales, las cuales se definen a partir de diferencias de momentos de las partículas involucradas en el proceso que se quiere describir, creando con éstas un polígono en el espacio

dual el cual brinda de una relación cíclica entre las coordenadas que nace a partir de lo que en el espacio *on-shell* sería la condición de conservación de momento. Los generadores de esta simetría son los mismo que se encuentran en la simetría de Poincaré añadiendo además una transformación conocida como inversión, la cual al aplicarla a la amplitud MHV de Parke-Taylor se descubre una propiedad de éstas que, tentativamente, no existe en otros tipos de amplitudes de gluones en la parte no supersimétrica de $\mathcal{N} = 4$ SYM.

Capítulo 1

Formalismo de helicidad

1.1. Los grupos de Lorentz y Poincaré.

Debido a su relación con la relatividad especial, una teoría cuántica de campos debe permanecer invariante ante transformaciones bajo el grupo de Lorentz $O(1,3)$ y en particular, al buscar que la teoría sea unitaria, bajo el subgrupo cuyos elementos tienen determinante igual a uno, $SO(1,3)$. Las transformaciones de Lorentz actúan sobre los elementos del espacio $x^\mu = (t, x, y, z)$ mediante matrices Λ que preservan la métrica g de la forma

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}. \quad (1.1)$$

En el caso de la relatividad especial g es la métrica de Minkowski, la cual se escribe como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

De la ecuación (1.1) se tiene inmediatamente que $\Lambda_\nu{}^\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$, mientras que por definición se debe cumplir que $(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu\Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\rho{}_\sigma$. Por lo tanto:

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\rho. \quad (1.2)$$

Infinitesimalmente, las matrices Λ se escriben de la forma $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \mathcal{O}(\omega^2)$ con un tensor antisimétrico $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$. Por otra parte, los generadores de la simetría se representan con operadores unitarios $\mathcal{U}(\Lambda)$, que de manera infinitesimal se escriben como $\mathcal{U}(\mathbb{1} + \omega) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}$ con los operadores Hermitianos $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ actuando en el espacio de Hilbert de la teoría cuántica de campos en cuestión. Estos son los generadores del grupo de Lorentz [3, 4].

Los operadores \mathcal{U} cumplen:

$$\mathcal{U}(\Lambda)\mathcal{U}(\Lambda') = \mathcal{U}(\Lambda\Lambda'), \quad \mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\mathcal{U}(\Lambda')\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda^{-1}\Lambda').$$

Tomando el lado izquierdo de la segunda igualdad, con $\Lambda' = \mathbb{1} + \omega'$, se tiene que:

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\mathcal{U}(\mathbb{1} + \omega)\mathcal{U}(\Lambda) = \mathcal{U}(\Lambda)^{-1}(\mathbb{1} + \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu})\mathcal{U}(\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\mathcal{U}(\Lambda).$$

Mientras que para el lado derecho:

$$\mathcal{U}(\Lambda^{-1}(\mathbb{1} + \omega')\Lambda) = \mathcal{U}(\mathbb{1} + \Lambda^{-1}\omega'\Lambda) = \mathbb{1} + \frac{i}{2}(\Lambda^{-1})^{\rho}_{\mu}\omega'_{\rho\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu}M^{\mu\nu}.$$

Igualando la última parte de los dos desarrollos anteriores y tomando en cuenta que se satisface (1.2) así como el hecho de que $\omega'_{\mu\nu}$ es antisimétrico, se tiene finalmente que:

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}M^{\mu\nu}\mathcal{U}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{\sigma}M^{\rho\sigma}. \quad (1.3)$$

Debido a lo cual cada componente de M se transforma con su propia Λ , por lo que se puede deducir la existencia de un P que satisfaga una relación similar pero cambiando con una única Λ .

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}P^{\mu}\mathcal{U}(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu}P^{\nu}. \quad (1.4)$$

Los P^{μ} son llamados operadores de momento (donde P^0 es el Hamiltoniano y los P^i son los componentes del vector de momento de tres dimensiones) y fungen como los generadores del grupo de traslaciones, los cuales junto con los $M^{\mu\nu}$ del grupo de Lorentz, generan el grupo de Poincaré.

Tomando $\Lambda = \mathbb{1} + \omega$ con ω arbitrario se obtienen las relaciones de conmutación para los generadores M y P :

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma}), \quad (1.5)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^{\sigma}] = i(g^{\mu\sigma}P^{\nu} - g^{\nu\sigma}P^{\mu}), \quad (1.6)$$

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0. \quad (1.7)$$

Con lo anterior se definen los operadores de momento angular $J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk}$ y los *boosts* $K_i \equiv M^{i0}$ y mediante (1.5) y (1.6) se obtienen las siguientes relaciones:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

$$[J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k,$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k,$$

$$[J_i, P_0] = 0,$$

$$[J_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk}P_k,$$

$$[K_i, P_0] = iP_i,$$

$$[K_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0.$$

Estas últimas relaciones forman el álgebra de Poincaré.

Las representaciones irreducibles del grupo de Lorentz pueden construirse a partir de las representaciones irreducibles de $SU(2)$. A partir de los generadores J_i y K_j se construyen:

$$J_i^+ \equiv \frac{1}{2}(J_i + iK_i), \quad J_i^- \equiv \frac{1}{2}(J_i - iK_i),$$

los cuales satisfacen:

$$\begin{aligned} [J_i^+, J_j^+] &= i\varepsilon_{ijk}J_k^+, \\ [J_i^-, J_j^-] &= i\varepsilon_{ijk}J_k^-, \\ [J_i^+, J_j^-] &= 0. \end{aligned}$$

Las relaciones de conmutación anteriores indican que el álgebra de Lie del grupo de Lorentz tiene dos subálgebras:

$$su(1,3) = su(2) \oplus su(2),$$

en donde cada representación irreducible de $su(2)$ está representada por un número semientero j . Las representaciones del grupo de Lorentz están representadas por dos números semienteros m, n , en donde la representación (m, n) tiene $(2m+1)(2n+1)$ grados de libertad. Dado que $J_i = J_i^+ + J_i^-$, se tienen como valores restringidos de espín j a $|m-n|, |m-n|+1, \dots, m+n$ [5].

Las siguientes son las representaciones más usadas:

$$\begin{aligned} (0,0) &= \text{escalar}, \\ (\frac{1}{2},0) &= \text{espinor izquierdo}, \\ (0,\frac{1}{2}) &= \text{espinor derecho}, \\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) &= \text{vector}. \end{aligned}$$

1.2. Espinores.

En analogía con el caso escalar, en donde se tiene que un campo transformado como:

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\varphi(x)\mathcal{U}(\Lambda) = \varphi(\Lambda^{-1}x),$$

se puede escribir una relación similar para un campo vectorial A^μ agregando una matriz Λ a la transformación así como en (1.4):

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}A^\mu(x)\mathcal{U}(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (1.8)$$

Como en el caso vectorial, también se puede escribir un campo espinorial ψ que se transforme siguiendo las mismas reglas. Para comenzar, se considerará a ψ en la representación $(\frac{1}{2}, 0)$, es decir será tratado como un espinor izquierdo. Partiendo de lo más general, dicho campo se transformaría con alguna combinación de las matrices $L_a^b(\Lambda)$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\psi_a\mathcal{U}(\Lambda) = L_a^b(\Lambda)\psi_b(\Lambda^{-1}x), \quad (1.9)$$

donde las matrices L_a^b están también en la representación $(\frac{1}{2}, 0)$.

Una propiedad con la que cumplen estas matrices es la llamada regla de composición de grupo $L_a^b(\Lambda')L_b^c(\Lambda) = L_a^c(\Lambda'\Lambda)$. Para una transformación infinitesimal se tiene

$$L_a^b(\mathbb{1} + \omega) = \delta_a^b + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S_L^{\mu\nu})_a^b, \quad (1.10)$$

donde $(S_L^{\mu\nu})_a^b = (S_L^{\nu\mu})_a^b$ es un conjunto de matrices de 2×2 que obedecen (1.5). Aplicando esto a (1.9) se tiene la siguiente relación de conmutación:

$$[\psi_a(x), M^{\mu\nu}] = -i(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu)\psi_a(x) + (S_L^{\mu\nu})_a^b\psi_b(x). \quad (1.11)$$

Dado que $M^{ij} = \varepsilon^{ijk}J_k$ y evaluando (1.11) en $x^\mu = 0$ se tiene que $\varepsilon^{ijk}[\psi_a(0), M^{\mu\nu}] = (S_L^{ij})_a^b\psi_b(0)$, de donde se define: $(S_L^{ij})_a^b = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}(\sigma_k)_a^b$, con σ_k las tres matrices de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En cambio, si se hace un tratamiento similar partiendo de los *boosts* $K_k = M^{k0}$ se llega a que $(S_L^{k0})_a^b = \frac{i}{2}i(\sigma_k)_a^b$. En general:

$$(S_L^{\mu\nu})_a^b = \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a^b, \quad (1.12)$$

con $(\sigma^\mu)_{ab} = (1, \sigma^i)_{ab}$, $(\bar{\sigma}^\mu)^{ab} = (1, -\sigma^i)^{ab}$.

Ahora, es sabido que la conjugación hermítica intercambia las dos álgebras $su(2)$ que comprenden el álgebra de Lie del grupo de Lorentz, por lo que al conjugar el espinor izquierdo ψ_a se obtiene un ψ_a^\dagger en la representación $(0, \frac{1}{2})$, es decir, un espinor derecho. Dicho campo transforma bajo Lorentz como:

$$\mathcal{U}(\Lambda)^{-1}\psi_a^\dagger(x)\mathcal{U}(\Lambda) = R_a^{\dot{b}}(\Lambda)\psi_{\dot{b}}^\dagger(\Lambda^{-1}x), \quad (1.13)$$

donde la matriz R en $(0, \frac{1}{2})$ juega el mismo papel que L en $(\frac{1}{2}, 0)$ transformando análogamente a (1.10) pero con una matriz $(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}}$ tal que $(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = -(S_R^{\nu\mu})_{\dot{a}}^{\dot{b}}$. Como en el caso (1.11) para $x^\mu = 0$ se tiene:

$$[\psi_{\dot{a}}^\dagger(0), M^{\mu\nu}] = (S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} \psi_{\dot{b}}^\dagger(0). \quad (1.14)$$

Al conjugar esta ecuación se obtiene: $[M^{\mu\nu}, \psi_a(0)] = [(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}}]^* \psi_b(0)$, la cual al compararlo con (1.11) es notorio que se debe satisfacer que $(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = -[(S_L^{\mu\nu})_a^b]$ donde ahora:

$$(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} = -\frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)_{\dot{a}}^{\dot{b}}. \quad (1.15)$$

Con esta última igualdad y (1.12) se puede armar una matriz:

$$S^{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} +(S_L^{\mu\nu})_a^b & 0 \\ 0 & -(S_R^{\mu\nu})_{\dot{a}}^{\dot{b}} \end{pmatrix} = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)_a^b & 0 \\ 0 & (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu)_{\dot{a}}^{\dot{b}} \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Esta matriz es una representación del álgebra de Lorentz que será retomada más adelante.

1.2.1. Ecuación de Dirac.

Para construir un Lagrangiano a partir de dos campos espinoriales izquierdos $\psi_{i,a}$ (con $i = 1, 2$ y a el índice espinorial) se requiere que dicha expresión sea invariante bajo transformaciones de Lorentz y que sea hermitiano, también debe ser cuadrático en $\psi_{i,a}$ y $\psi_{i,a}^\dagger$ para que la ecuación de movimiento sea lineal y con soluciones de onda plana, esto último para poder describir partículas libres.

Para esto se buscan términos sin derivadas y en este caso los candidatos obvios son

$$\frac{1}{2} m \psi_i^a \psi_{i,a} = \frac{1}{2} m \varepsilon^{ab} \psi_{i,b} \psi_{i,a}, \quad \frac{1}{2} m^* \psi_i^{\dagger \dot{a}} \psi_{i,\dot{a}}^\dagger = \frac{1}{2} m^* \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \psi_{i,\dot{b}}^\dagger \psi_{i,\dot{a}}^\dagger, \quad (1.17)$$

donde se entiende que hay una suma implícita al repetirse los índices y se agregaron los términos constantes $\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m^*$ a $\psi_i^a \psi_{i,a}$ y $\psi_i^{\dagger \dot{a}} \psi_{i,\dot{a}}^\dagger$ respectivamente pues estos representan términos cinemáticos y por lo tanto deben ir acompañados de un término de masa.

Ahora se busca un término con derivadas que cumpla hermiticidad. Tomando para tal fin:

$$i \psi_{i,\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu \psi_{i,b}, \quad (1.18)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} (i \psi_{i,\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu \psi_{i,b})^\dagger &= -i (\partial_\mu \psi_{i,b}^\dagger) (\bar{\sigma}^\mu)^{ba} \psi_{i,a} \\ &= i \psi_{i,\dot{a}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} \partial_\mu \psi_{i,b} - i \partial_\mu (\psi_{i,\dot{b}}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{b}a} \psi_{i,a}). \end{aligned}$$

Es notorio que el segundo término de la última igualdad estorba para la hermiticidad, sin embargo también lo es el hecho de que es una divergencia total, por lo que no contribuirá en el

lagrangiano. Por lo tanto se puede concluir que (1.17) y (1.18) son términos que conforman el lagrangiano, en el cual, si por simplicidad se toma $m = m^*$, queda como:

$$\mathcal{L} = i\psi_{i,a}^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \partial_\mu \psi_{i,b} - \frac{1}{2} m \psi_i^a \psi_{i,a} - \frac{1}{2} m \psi_i^{\dagger a} \psi_{i,\dot{a}}^\dagger. \quad (1.19)$$

Se definen los campos auxiliares

$$\chi_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,a} + i\psi_{2,a}), \quad \xi_a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{1,a} - i\psi_{2,a}), \quad (1.20)$$

con los cuales el lagrangiano (1.19) se reescribe como:

$$\mathcal{L} = i\chi_a^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \partial_\mu \chi_b + i\xi_a^\dagger (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \partial_\mu \xi_b - m\chi_b \xi^b - m\chi^{\dagger a} \xi_a^\dagger. \quad (1.21)$$

El siguiente paso es utilizarlas ecuaciones de Euler-Lagrange para hallar la ecuación de movimiento:

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_a^\dagger} = -i(\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \partial_\mu \chi_b + m\xi^{\dagger a}, \quad (1.22)$$

$$0 = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^a} = -i(\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \xi^{\dagger b} + m\chi_a. \quad (1.23)$$

Se pueden escribir las ecuaciones (1.22) y (1.23) en una sola con ayuda de matrices de la siguiente manera:

$$0 = \begin{pmatrix} m\delta_a^b & -i(\sigma^\mu)_{ab} \partial_\mu \\ -i(\bar{\sigma}^\mu)^{ab} \partial_\mu & m\delta_b^{\dot{a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_b \\ \xi^{\dagger b} \end{pmatrix} = \left[-i \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu + m\mathbb{1} \right] \begin{pmatrix} \chi_b \\ \xi^{\dagger b} \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

donde $\gamma^\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{ab} & 0 \end{pmatrix}$ y $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \chi_b \\ \xi^{\dagger b} \end{pmatrix}$ son las matrices y el campo de Dirac, respectivamente.

Con ayuda de las dos definiciones anteriores se puede reescribir (1.24) como:

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \quad (1.25)$$

ésta es la *ecuación de Dirac*.

Tomando el conjugado hermitiano de Ψ : $\Psi^\dagger \equiv (\chi_a^\dagger, \xi^a)$ se construye $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \beta = (\xi^a, \chi_a^\dagger)$ donde $\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \delta_c^{\dot{a}} \\ \delta_a^c & 0 \end{pmatrix}$. Cabe mencionar que la distinción entre las matrices β y γ^0 es solamente la estructura de índices. Con lo anterior (1.21) queda escrito como:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi, \quad (1.26)$$

y así como para Ψ se satisface la ecuación de Dirac (1.25), para $\bar{\Psi}$ se cumple la ecuación adjunta de Dirac:

$$i\partial^\mu\bar{\Psi}\gamma_\mu + m\bar{\Psi} = 0. \quad (1.27)$$

Las matrices γ^μ cumplen con un álgebra. La relación de conmutación que satisfacen es:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.28)$$

donde, al definirse $(\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(g^{\mu\rho}\delta^\sigma{}_\nu - \delta^\rho{}_\nu g^{\mu\sigma})$, se cumple con esta propiedad: $[\gamma^\mu, S^{\rho\sigma}] = (\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ la cual se puede leer de manera equivalente como:

$$(1 + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}S^{\rho\sigma})\gamma^\mu(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}) = (1 - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}\mathcal{J}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (1.29)$$

con $S^{\rho\sigma}$ definida en (1.16) la cual, ahora que se tienen las matrices γ^μ , se puede reescribir en términos de éstas de la forma: $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Definiendo $\Lambda_{\frac{1}{2}} = \exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu})$, a la ecuación (1.29) se le puede aproximar por:

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu, \quad (1.30)$$

donde $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ es la representación espinorial de la transformación de Lorentz Λ que permite transformar los campos como: $\Psi \rightarrow \Lambda_{\frac{1}{2}}\Psi$ y $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$, con lo cual se puede comprobar la invarianza de Lorentz de las ecuaciones (1.25) y (1.27). Para la primera de éstas:

$$\begin{aligned} [i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\Psi(x) &\rightarrow [i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\Lambda_{\frac{1}{2}}\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}[i\gamma^\mu(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\Lambda_{\frac{1}{2}}\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^\mu\Lambda_{\frac{1}{2}}(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\Lambda^\mu{}_\sigma\gamma^\sigma(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu\partial_\nu - m]\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \Lambda_{\frac{1}{2}}[i\gamma^\nu\partial_\nu - m]\Psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Y para la ecuación adjunta se logra lo mismo con un procedimiento análogo.

Finalmente, al considerar ondas planas como solución de la ecuación de Dirac, se tiene que Ψ y $\bar{\Psi}$ deben ser de la forma:

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\sim u_s(p)e^{+ipx} + v_s(p)e^{-ipx}, \\ \bar{\Psi}(x) &\sim \bar{u}_s(p)e^{-ipx} + \bar{v}_s(p)e^{+ipx},\end{aligned}$$

donde el momento p está *on-shell*, es decir, satisface que: $p^2 \equiv p^\mu p_\mu = -m^2$ y $s = \pm$ representa el espín si se elige una base en la cual estos espinores son los eigenestados de la componente z de la matriz de espín.

Si se quiere resolver (1.25) se necesita que:

$$(\not{p} + m)u_s(p) = 0, \quad (-\not{p} + m)v_s(p) = 0, \quad (1.31)$$

así como para (1.27):

$$\bar{u}_s(p)(\not{p} + m) = 0, \quad \bar{v}_s(p)(-\not{p} + m) = 0, \quad (1.32)$$

con $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$. Estas ecuaciones son la mismas ecuaciones de Dirac y adjunta de Dirac pero en el espacio de momentos y cada una de estas tiene dos soluciones independientes identificadas con el subíndice s .

En su forma de matriz la contracción $\gamma^\mu p_\mu$ se escribe como: $\not{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{ab} \\ p^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix}$, en donde se han definido $p_{ab} \equiv p_\mu (\sigma^\mu)_{ab}$ y $p^{\dot{a}b} \equiv p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}$, objetos los cuales pueden verse como dos matrices de 2×2 cuyo determinante es un invariante de Lorentz: $\det p = -p^\mu p_\mu = m^2$.

1.2.2. Ecuación de Weyl.

El enfoque que se tomará a partir de este momento es para fermiones sin masa; en este caso los subíndices de los espinores $u_\pm(p)$ y $v_\pm(p)$ representan la helicidad de la partícula.

En los diagramas de Feynman los espinores $u(p)$ y $\bar{v}(p)$ representan fermiones y anti-fermiones entrantes, respectivamente, mientras que $\bar{u}(p)$ y $v(p)$, los salientes (ver reglas en Apéndice A). La simetría de cruce hace cambios entre fermiones y anti-fermiones así como entre partículas entrantes y salientes y además intercambia el signo de la helicidad, por lo que para el caso de masa cero se tiene que estos espinores satisfacen: $u_\pm = v_\mp$ y $\bar{v}_\pm = \bar{u}_\mp$ [6].

Entonces, las ecuaciones de Dirac (1.31) y (1.32) pasan a ser de la forma:

$$\not{p}u_\pm(p) = 0, \quad \not{p}v_\pm(p) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{u}_\pm(p)\not{p} = 0, \quad \bar{v}_\pm(p)\not{p} = 0, \quad (1.33)$$

en donde u_\pm y v_\pm se escriben de manera muy conveniente como:

$$v_+(p) = \begin{pmatrix} |p\rangle_a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_-(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ |p\rangle^{\dot{a}} \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

$$\bar{u}_-(p) = (0, \langle p|_{\dot{a}}), \quad \bar{u}_+(p) = ([p]^a, 0). \quad (1.35)$$

Por obvias razones, a los nuevos espinores $[\cdot |, | \cdot]$, $\langle \cdot |, | \cdot \rangle$ se les llamará cuadrados y angulares y estos serán tales que satisfagan un conjunto de ecuaciones que enseguida serán presentadas.

Para llegar a éstas, se toma en cuenta la forma matricial de \not{p} en (1.33), obteniendo así las llamadas *ecuaciones sin masa de Weyl*:

$$p^{\dot{a}b}|p\rangle_b = 0, \quad p_{ab}|p\rangle^{\dot{b}} = 0, \quad [p]^a p_{ab} = 0, \quad \langle p|_{\dot{a}} p^{\dot{a}b} = 0. \quad (1.36)$$

1.3. Introducción al formalismo.

La helicidad es la componente del espín en la dirección del 3-vector de momento \vec{p} . En el caso de los fermiones los hay con helicidad $+1/2$, llamados *derechos* y con helicidad $-1/2$, llamados *izquierdos*. Como ya se hizo notar en la sección anterior, todo el trabajo se hará en un contexto en el cual las partículas se traten como si no tuvieran masa. Esta aproximación es válida en un límite de energías muy altas, es decir, tomando los valores de las variables de Mandelstam mucho más grandes que los del cuadrado de la masa de las partículas [3].

Se puede elegir una base tal que en el marco de reposo los espinores u_{\pm} y v_{\pm} denoten los eigenestados de la componente z de la matriz de espín, con lo cual \pm representa el espín hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje z . Para el caso $m = 0$ se tiene entonces que el subíndice \pm denota la helicidad [6]. Con lo cual en este formalismo se pasa de trabajar con $u_s(p)$ y $v_s(p)$ a hacerlo con $\langle p|_{\dot{a}}$, $|p\rangle^{\dot{a}}$, $[p]^a$, $|p\rangle_a$; dichos objetos no anticonmutan y son también conocidos como twistores, los cuales tienen como ventaja que no es necesario conocerles una representación explícita para trabajar con ellos, es decir se pueden tomar como objetos abstractos.

1.3.1. Notación y herramientas del formalismo.

Para comenzar, los espinores cuadrados y rectangulares suben y bajan índices mediante el tensor antisimétrico de Levi-Citiva ε :

$$[p]^a = \varepsilon^{ab}|p\rangle_b, \quad |p\rangle_a = \varepsilon_{ab}|p\rangle^{\dot{b}},$$

$$|p\rangle^{\dot{a}} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}\langle p|_{\dot{b}}, \quad \langle p|_{\dot{a}} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}\langle p|_{\dot{b}}.$$

Por otro lado, se puede hallar una relación entre los espinores cuadrados y angulares de acuerdo a lo siguiente:

$$(0, \langle p|\dot{a}) = \bar{u}_-(p) = \bar{v}_+(p) = \overline{\begin{pmatrix} |p\rangle_a \\ 0 \end{pmatrix}} = (0, (|p\rangle_a)^*),$$

$$\therefore \langle p|\dot{a} = (|p\rangle_a)^* \text{ y análogamente } |p\rangle^a = (|p\rangle^{\dot{a}})^* \text{ para } p^\mu \text{ real.} \quad (1.37)$$

Otra herramienta útil para poder utilizar este formalismo es la relación de completitud:

$$\sum_{s=\pm} u_s(p)\bar{u}_s(p) = -\not{p} + m, \quad \sum_{s=\pm} v_s(p)\bar{v}_s(p) = -\not{p} - m, \quad [3]$$

donde en este caso $m = 0$. Es fácil ver que en la base de helicidad lo anterior se ve como:

$$\begin{pmatrix} 0 & |p\rangle_a \langle p|_b \\ |p\rangle^{\dot{a}} [p]^b & 0 \end{pmatrix} = -\not{p},$$

$$\therefore p_{ab} = -|p\rangle_b \langle p|_a, \quad p^{\dot{a}b} = -|p\rangle^{\dot{a}} [p]^b. \quad (1.38)$$

Abusando de la notación se puede escribir una relación que llegará a ser útil más adelante:

$$-\not{p} = |p\rangle[p] + [p]\langle p|. \quad (1.39)$$

Como los espinores son antisimétricos se cumple que: $\langle pq\rangle = -\langle qp\rangle$ y $[pq] = -[qp]$ en donde para simplificar las cuentas ha escrito que $\langle pq\rangle = \langle p|\dot{a}|q\rangle^{\dot{a}}$ y $[pq] = [p]^a|q\rangle_a$ para dos momentos p^μ y q^μ . [7] Usando lo anterior y (1.38) se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle pq\rangle[pq] &= -\langle pq\rangle[qp] = -(|q\rangle^{\dot{a}}[q]^b)(|p\rangle_b \langle p|_a) = -q^{\dot{a}b}p_{ba} \\ &= -[q_\mu(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}][p_\nu(\sigma^\nu)_{ba}] = -q_\mu p_\nu(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}(\sigma^\nu)_{ba} \\ &= q_\mu p_\nu[-\text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu)] = q_\mu p_\nu[2g^{\mu\nu}] \\ &= 2p \cdot q, \end{aligned}$$

y como $p^2 = -m_p^2 = 0$ y $q^2 = -m_q^2 = 0$, entonces se puede escribir:

$$\langle pq\rangle[pq] = (p + q)^2. \quad (1.40)$$

En ocasiones, en los diagramas, aparecerán objetos de la forma: $\bar{u}_s(p)\gamma^\mu v_{s'}(q)$, los cuales en el formalismo de helicidad se ven como:

$$\bar{u}_-(p)\gamma^\mu v_+(q) = (0 \quad \langle p|\dot{a}) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |q\rangle_b \\ 0 \end{pmatrix} = \langle p|\dot{a}(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}|q\rangle_b,$$

$$\bar{u}_+(p)\gamma^\mu v_-(q) = ([p]^a \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & (\sigma^\mu)_{ab} \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ |q\rangle^b \end{pmatrix} = [p]^a(\sigma^\mu)_{ab}|q\rangle^b,$$

mientras que los casos en los que $s = s'$ sucederá que $\langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}|q\rangle_b = \langle p|^a(\sigma^{\mu})_{ab}|q\rangle^{\dot{b}} = 0$.

Ahora, sabiendo cómo se suben y bajan los índices de los twistores, se obtienen las siguientes identidades:

$$\langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}|q\rangle_b = (\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}}|p\rangle^{\dot{c}})(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}(\varepsilon_{bd}|q\rangle^d) = [q]^d(\sigma^{\mu})_{d\dot{c}}|p\rangle^{\dot{c}}.$$

Para mayor comodidad en los cálculos a realizar, en próximas ocasiones se abusará de la notación escribiendo $\langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}|q\rangle_b \equiv \langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle$ y $[p]^a(\sigma^{\mu})_{ab}|q\rangle^{\dot{b}} \equiv [p|\gamma^{\mu}|q]$, tal que la identidad anterior queda escrito como:

$$\langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle = [q|\gamma^{\mu}|p]. \quad (1.41)$$

además, por obra de (1.37):

$$[p|\gamma^{\mu}|q]^* = [q|\gamma^{\mu}|p] \quad \text{para } p^{\mu}, q^{\mu} \text{ real.} \quad (1.42)$$

Con lo que se acaba de construir se puede llegar a esta importante identidad:

$$\begin{aligned} \langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle\langle p'|\gamma_{\mu}|q'\rangle &= \langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle[q'|\gamma_{\mu}|p'] = \{\langle p|_{\dot{a}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}|q\rangle_b\}\{[q']^c(\sigma_{\mu})_{cd}|p'\rangle^{\dot{d}}\} \\ &= \langle p|_{\dot{a}}|p'\rangle^{\dot{d}}[q']^c|q\rangle_b\{(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{a}b}(\sigma_{\mu})_{cd}\} = \langle p|_{\dot{a}}|p'\rangle^{\dot{d}}[q']^c|q\rangle_b\{-2\delta_c^b\delta_{\dot{d}}^{\dot{a}}\} \\ &= -2\langle pp'\rangle[q'q], \end{aligned}$$

$$\therefore \langle p|\gamma^{\mu}|q\rangle\langle p'|\gamma_{\mu}|q'\rangle = 2\langle pp'\rangle[qq']. \quad (1.43)$$

ésta es la *identidad de Fierz*.

Otra identidad útil es la *identidad de Schouten*. Comenzando tomando tres espinores $|p_i\rangle$, $|p_j\rangle$ y $|p_k\rangle$, se puede escribir, para algunas a , b :

$$|p_k\rangle = a|p_i\rangle + b|p_j\rangle,$$

así, $\langle p_i p_k\rangle = b\langle p_i p_j\rangle$ y $\langle p_j p_k\rangle = a\langle p_j p_i\rangle$. Entonces:

$$\begin{aligned} |p_i\rangle\langle p_j p_k\rangle &= a|p_i\rangle\langle p_j p_i\rangle = \left(|p_k\rangle - b|p_j\rangle\right)\langle p_j p_i\rangle \\ &= |p_k\rangle\langle p_j p_i\rangle - |p_j\rangle\left(b\langle p_j p_i\rangle\right) = |p_k\rangle\langle p_j p_i\rangle - |p_j\rangle\langle p_k p_i\rangle, \end{aligned}$$

$$\therefore |p_i\rangle\langle p_j p_k\rangle + |p_j\rangle\langle p_k p_i\rangle + |p_k\rangle\langle p_i p_j\rangle = 0. \quad (1.44)$$

Que al multiplicar por la izquierda por un espinor arbitrario $\langle p_l |$ se llega finalmente a lo que se quería, la identidad de Schouten [8]:

$$\langle p_l p_i \rangle \langle p_j p_k \rangle + \langle p_l p_j \rangle \langle p_k p_i \rangle + \langle p_l p_k \rangle \langle p_i p_j \rangle = 0. \quad (1.45)$$

Cabe mencionar dos cosas: la relación anterior también es válida para espinores cuadrados y como conclusión de esta identidad se tiene algo obvio: tres vectores en un plano no pueden ser linealmente independientes.

Ahora, en el caso de tener otro momento k^μ , se tiene que:

$$\langle p | k | q \rangle = \langle p |_{\dot{a}} k^{\dot{a}b} | q \rangle_b = \langle p |_{\dot{a}} (-|k\rangle^{\dot{a}} [k]^b) | q \rangle_b = -\langle p k \rangle [k q], \quad (1.46)$$

para $k^2 = 0$, caso contrario se tendría que: $\langle p | k | q \rangle \equiv k_\mu \langle p | \gamma^\mu | q \rangle$.

Una regla importante que hay que llevar al lenguaje de este nuevo formalismo es la conservación de momentos en los diagramas de n partículas. Partiendo de que $p^{\dot{a}b} = -|p_i\rangle^{\dot{a}} [p_i]^b$, $p^{\dot{a}b} = p^\mu (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b}$ y $\sum_{i=1}^n p_i^\mu = 0$ (la regla en su forma convencional) se tiene que:

$$-\sum_{i=1}^n |p_i\rangle^{\dot{a}} [p_i]^b = \sum_{i=1}^n p_i^{\dot{a}b} = \sum_{i=1}^n p_i^\mu (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b} = \left(\sum_{i=1}^n p_i^\mu \right) (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b} = 0 \quad \implies \quad \sum_{i=1}^n |p_i\rangle [p_i] = 0.$$

Utilizando ahora (1.46) para cualesquiera q y k vectores tales que $q^2 = k^2 = 0$, lo anterior se ve como:

$$\sum_{i=1}^n \langle q p_i \rangle [p_i k] = 0. \quad (1.47)$$

ésta es la *regla de conservación de momento* en el lenguaje de helicidad para un sistema de n -partículas [8].

Por otro lado, si se tienen todos los momentos salientes, las *variables de Mandelstam* quedan definidas de la siguiente manera:

$$s_{ij} = -(p_i + p_j)^2, \quad s_{ijk} = -(p_i + p_j + p_k)^2, \quad \text{etc.}, \quad (1.48)$$

en donde, en particular, $s = 2_{12}$, $t = s_{13}$, $u = s_{14}$.

Finalmente, en la teoría de Dirac hay objetos que son llamados los vectores de polarización, los cuales se asocian a los fotones que aparecen en alguna de las patas de los diagramas. Dichos vectores están definidos como resultados de una corriente de Dirac $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$, es decir:

$$\epsilon_-^\mu(p; q) = \frac{\bar{u}_-(p)\gamma^\mu u_-(q)}{2\sqrt{q \cdot p}}, \quad \epsilon_+^\mu(p; q) = \frac{\bar{u}_+(p)\gamma^\mu u_+(q)}{2\sqrt{q \cdot p}}. \quad [9]$$

Bajo este formalismo, dichos vectores toman la forma:

$$\epsilon_-^\mu(p; q) = -\frac{\langle p|\gamma^\mu|q\rangle}{\sqrt{2}[qp]}, \quad \epsilon_+^\mu(p; q) = -\frac{\langle q|\gamma^\mu|p\rangle}{\sqrt{2}\langle qp\rangle}, \quad (1.49)$$

donde $q \neq p$ es un espinor de referencia arbitrario y es justo esta arbitrariedad del momento q la que guarda la invarianza de norma en este formalismo. Además el resultado final no dependerá de ninguna manera de este momento auxiliar; sin embargo, una vez hecha la elección para q se deberá mantener igual durante todo el proceso del cálculo.

En los diagramas, con estos vectores usualmente habrá una matriz de Dirac con la que se haga contracción $\epsilon_\pm^\mu(p; q)\gamma_\mu = \not{\epsilon}_\pm(p; q)$. Bajo el formalismo de helicidad, esto se ve como:

$$\begin{aligned} \not{\epsilon}_-(p; q) &= -\frac{\langle p|\gamma^\mu|q\rangle}{\sqrt{2}[qp]}\gamma_\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}[qp]}\langle p|\bar{\sigma}^\mu|q\rangle_b \begin{pmatrix} 0 & (\sigma_\mu)_{cd} \\ (\bar{\sigma}_\mu)^{cd} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\langle p|\bar{\sigma}^\mu|q\rangle_b}{\sqrt{2}[qp]} \begin{pmatrix} 0 & (\bar{\sigma}^\mu)^{ab}(\sigma_\mu)_{cd} \\ (\bar{\sigma}_\mu)^{ab}(\bar{\sigma}_\mu)^{cd} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\langle p|\bar{\sigma}^\mu|q\rangle_b}{\sqrt{2}[qp]} \begin{pmatrix} 0 & -2\delta_c^b\delta_d^a \\ -2\epsilon^{ac}\epsilon^{bd} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{[qp]} \begin{pmatrix} 0 & |q\rangle_c\langle p|_d \\ |p\rangle^c|q|^d & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \frac{\sqrt{2}}{[qp]}(|p\rangle[q] + |q\rangle\langle p|), \end{aligned}$$

pudiéndose obtener de manera análoga $\not{\epsilon}_+(p; q)$, quedando entonces:

$$\not{\epsilon}_-(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{[qp]}(|p\rangle[q] + |q\rangle\langle p|), \quad \not{\epsilon}_+(p; q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle qp\rangle}(|p\rangle\langle q| + |q\rangle[p]). \quad (1.50)$$

Ahora bien, con todo lo anterior se puede ver que el cálculo de amplitudes será un trabajo más sencillo, teniendo que para realizarlo se satisficará:

$$\langle |A_n(p_1, \dots, p_n)|^2 \rangle = \sum_{h_1 \dots h_n} |A_n(p_1^{h_1}, \dots, p_n^{h_n})|^2, \quad (1.51)$$

con p_i una partícula, ya sea un fermión, antifermión, fotón o escalar, siendo que en ese último caso como la helicidad es cero, ésta no participa en la suma.

Estudiando el caso de tres partículas (sin masa), la conservación de momento establece que $p_1^\mu + p_2^\mu + p_3^\mu = 0$, entonces de (1.40):

$$\langle p_1 p_2 \rangle [p_1 p_2] = (p_1 + p_2)^2 = p_3^2 = 0, \quad (1.52)$$

por lo que $\langle p_1 p_2 \rangle = 0$ o $[p_1 p_2] = 0$. Suponiendo que $\langle p_1 p_2 \rangle \neq 0$ entonces, por (1.46) y la ecuación de Weyl (1.36) se tiene:

$$\langle p_1 p_2 \rangle [p_2 p_3] = -\langle p_1 | p_2 | p_3 \rangle = \langle p_1 | (p_1 + p_3) | p_3 \rangle = 0,$$

y asÃ: $[p_2 p_3] = 0$. De manera anÃloga, $[p_1 p_3] = 0$, por lo que $[p_1 p_2] = [p_2 p_3] = [p_3 p_1] = 0$, es decir:

$$|p_1] \propto |p_2] \propto |p_3]. \quad (1.53)$$

Alternativamente, si se parte de la suposici3n de que $[p_1 p_2] \neq 0$, entonces:

$$|p_1\rangle \propto |p_2\rangle \propto |p_3\rangle. \quad (1.54)$$

Por lo que, como conclusi3n se tiene que para tres partÃculas sin masa *on-shell* que satisfacen la conservaci3n de momento, los espinores cuadrados y angulares asociados deben satisfacer (1.53) o bien (1.54) y como consecuencia una amplitud de este tipo s3lo puede depender s3lo de espinores cuadrados o angulares pero jams de ambos.

AsÃ, han quedado sentadas las bases del formalismo de helicidad, con lo cual es ahora posible continuar a realizar algunos ejemplos y compararlos con los procedimientos y resultados del m3todo convencional para el cÃlculo de amplitudes. (En el Ap3ndice B se encuentran otras caracterÃsticas y propiedades de los espinores).

Capítulo 2

$\mathcal{N} = 4$ Super Yang-Mills

2.1. Supersimetría y el modelo estándar.

Las interacciones entre las partículas de espín uno y los quarks y leptones están dictaminadas por la invarianza de norma del modelo estándar, $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, en donde, para cada uno de los factores del grupo de norma hay una constante de acoplamiento independiente (g_1 , g_2 , g_3), sinodo la constante de estructura fina α y el ángulo de mezcla débil θ_W combinaciones de los acoplamientos g_2 y g_1 .

En el modelo estándar no hay candidato alguno para algún par supersimétrico de partículas, sin embargo, las simetrías en este modelo se rompen espontáneamente, lo que significa que las leyes de la física son invariantes bajo cierta simetría pero la soluciones a las ecuaciones no lo son. Para lograr la supersimetría, el espectro de partículas del modelo estándar debe ser extendido. La manera mínima de lograrlo es introduciendo el menor número posible de partículas suplementarias, a esto se le llama el *Modelo Estándar Mínimo Supersimétrico*. Básicamente, a cada partícula no supersimétrica o ya conocida, se le provee de un hipotético *compañero supersimétrico* con la excepción de que la supersimetría requiere de al menos dos campos de Higgs [10, 11].

2.2. Álgebra (super)simétrica.

La supersimetría amplía el álgebra de Poincaré incluyendo espinores de supercarga:

$$I = 1, \dots, \mathcal{N} \quad \left\{ \begin{array}{ll} Q_a^I & \text{espinor izquierdo de Weyl,} \\ \bar{Q}_{\dot{a}I} = (Q_a^I)^\dagger & \text{espinor derecho de Weyl.} \end{array} \right.$$

donde $\alpha = 1, 2$ indica el número del espinor, \mathcal{N} es el número de supersimetrías independientes del álgebra complexificada de Lorentz.

Las supercargas Q transforman como espinores de Weyl en $SO(1,3)$ y son invariantes bajo traslaciones, es decir: $[P_\mu, Q_a^I] = 0$. La estructura algebraica del superálgebra de Lie es:

$$\begin{aligned}\{Q_a^I, \bar{Q}_{bI}\} &= 2p_{ab}\delta^I_J, \\ \{Q_a^I, Q_b^J\} &= 2\varepsilon_{ab}Z^{IJ},\end{aligned}$$

donde, por construcción, $Z^{IJ} = -Z^{JI}$ definiéndose Z como una *carga central* ya que conmutan con todos los generadores del álgebra supersimétrica [12, 6].

Este álgebra se deja invariante bajo rotaciones de fase globales de todas las supercargas Q_a^I formando así un supergrupo $U(1)_R$, además, cuando $\mathcal{N} > 1$ se tiene que las distintas supercargas pueden ser rotadas entre sí bajo una transformación unitaria perteneciente a $SU(\mathcal{N})$. Estas simetrías del álgebra supersimétrica son llamadas *simetrías-R* [10].

En el caso de partículas sin masa, al considerar representaciones unitarias, en las cuales sucede que las Q_a^I actúan en un espacio de Hilbert positivo definido, se tiene que:

$$\begin{aligned}a = \dot{b} = 2, I = J: \quad &\{Q_2^I, \bar{Q}_{2I}\} = 0 \implies Q_2^I = 0, Z^{IJ} = 0. \\ a = 2, \dot{b} = \dot{1} \quad &\begin{cases} Q_1^I & \text{baja el valor de helicidad por } 1/2, \\ \bar{Q}_1^I & \text{eleva el valor de helicidad por } 1/2. \end{cases}\end{aligned}$$

Juntas, Q_1^I y \bar{Q}_1^I , con $I = 1, \dots, \mathcal{N}$ forman una representación de dimensión $2^{\mathcal{N}}$ del álgebra de Clifford asociada con el álgebra de Lie $SO(2\mathcal{N})$.

Para una teoría en la cual el espectro de partículas es simétrico bajo el cambio en el signo de helicidad, tomando $\mathcal{N} = 4$ se tiene que:

Helicidad	Número de estados
1	1
1/2	4
0	6
-1/2	4
-1	1
16 estados en total	

Tabla 2.1: Número de estados sin masa asociados a los valores de helicidad para $\mathcal{N} = 4$ [10].

2.3. Contenido de campos.

Los campos en teorías supersimétricas con espín menor o igual a 1 son campos de norma de espín 1, fermiones de Weyl de espín 1/2 y campos escalares de espín 0 restringidos a entrar en multipletes de las superálgebras [10].

Para $\mathcal{N} = 4$ SYM el multiplete está conformado por un vector (A_μ), cuatro espinores de Weyl ($|p\rangle, |p], |p\rangle, |p]$) y seis escalares reales (Φ_I con $I = 1, \dots, 6$), tales que la acción de dicha teoría es:

$$S = \int d^4x \operatorname{Tr} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (D\Phi_I)^2 + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \not{D} \Psi + \frac{g}{2} \bar{\Psi} \Gamma^I [\Phi_I, \Psi] + \frac{g^2}{4} [\Phi_I, \Phi_J]^2 \right). \quad (2.1)$$

donde $\Gamma^I = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^I \\ (\sigma^I)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ son las matrices gamma del álgebra de Clifford y $D_\mu = \partial_\mu - ig[A_\mu, \cdot]$ es la derivada covariante [6, 13].

Bajo una transformación de norma \mathcal{U} en la parte bosónica de la teoría, el campo A_μ y los escalares Φ^I transforman como:

$$A_\mu \longrightarrow \mathcal{U} A_\mu \mathcal{U}^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu \mathcal{U}) \mathcal{U}^\dagger, \quad \Phi_I \longrightarrow \mathcal{U} \Phi_I \mathcal{U}^\dagger.$$

Resultando para éstos las ecuaciones de movimiento [14]:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = ig[\Phi_I, D_\nu \Phi_I], \quad (2.2)$$

$$D_\mu D^\mu \Phi_I = g^2[\Phi_J, [\Phi_J, \Phi_I]]. \quad (2.3)$$

2.4. Ordenamiento de color.

La parte de la teoría que describe a los gluones está descrita a partir del primer término de la acción (2.1) mediante el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \operatorname{Tr} \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right\}, \quad (2.4)$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} [A_\mu, A_\nu]$ y $A_\mu = A_\mu^a T^a$, tomando el grupo $SU(N)$ yendo de los 3 colores en QCD a N tal que los índices del color son $a, b, \dots = 1, 2, \dots, N^2 - 1$. Los generadores T^a satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(T^a T^b) &= \delta^{ab}, \\ [T^a, T^b] &= i \tilde{f}^{abc} T^c, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde $\tilde{f}^{abc} = \sqrt{2}f^{abc}$ son las constantes de estructura de $SU(N)$ normalizadas. [6, 15]

Definiendo ahora $H_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \frac{ig}{\sqrt{2}}A_\mu A_\nu$, el lagrangiano (2.4) queda reescrito como:

$$\mathcal{L}_{GN} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(H_\mu^\mu)^2 = \text{Tr}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - i\sqrt{2}g\partial^\mu A^\nu A_\nu A_\mu + \frac{g^2}{4}A^\mu A^\nu A_\mu A_\nu\right). \quad (2.6)$$

La definición de $H_{\mu\nu}$ es la elección de la norma de Gervais-Neveu. A partir de (2.6), las reglas de Feynman dan un propagador para los gluones de la forma: $-i\delta^{ab}\frac{g_{\mu\nu}}{p^2}$ [6, 16]. Tal manera de escribir el propagador en esta teoría permite utilizar los vectores de polarización (1.49) como una corriente en la cual los espinores $\bar{\Psi}$ y Ψ representan quarks de masa cero.

Las amplitudes construídas a partir de estas reglas pueden organizarse entre distintas teorías de grupo cada una caracterizada por un factor cinemático como por ejemplo los factores de color, que para los canales s , t y u quedan dados por:

$$c_s \equiv \tilde{f}^{a_1 a_2 b} \tilde{f}^{b a_3 a_4}, \quad c_t \equiv \tilde{f}^{a_1 a_3 b} \tilde{f}^{b a_4 a_2}, \quad c_u \equiv \tilde{f}^{a_1 a_4 b} \tilde{f}^{b a_2 a_3},$$

dichos factores satisfacen una identidad de Jacobi: $c_s + c_t + c_u = 0$, por lo que en realidad sólo se tienen dos factores que son realmente independientes.

En términos de los generadores, a partir de (2.5) se puede escribir que:

$$\text{Tr}(T^a [T^b, T^c]) = \text{Tr}(T^a i\tilde{f}^{bcd} T^d) = i\tilde{f}^{bcd} \text{Tr}(T^a T^b) = i\tilde{f}^{bcd} \delta^{ad} = i\tilde{f}^{abc},$$

mientras que, por otro lado:

$$\text{Tr}(T^a [T^b, T^c]) = \text{Tr}(T^a T^b T^c - T^a T^c T^b) = \text{Tr}(T^a T^b T^c) - \text{Tr}(T^a T^c T^b) = \text{Tr}(T^a T^b T^c) - \text{Tr}(T^b T^a T^c),$$

por lo tanto:

$$i\tilde{f}^{abc} = \text{Tr}(T^a T^b T^c) - \text{Tr}(T^b T^a T^c).$$

siendo así que los factores de color quedan escritos en términos de trazas como por ejemplo:

$$c_s = \tilde{f}^{a_1 a_2 b} \tilde{f}^{b a_3 a_4} = \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4}) - \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_4} T^{a_3}) + \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_3} T^{a_4} T^{a_2}) - \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_4} T^{a_3} T^{a_2}),$$

con lo cual, la amplitud de cuatro gluones queda entonces como [6]:

$$A_4 = g^2 \left(A_4[p_1, p_2, p_3, p_4] \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4}) + \text{perms}(234) \right), \quad (2.7)$$

donde las amplitudes parciales $A_4[p_1 p_2 p_3 p_4]$ y sus permutaciones son llamadas *amplitudes ordenadas por colores* las cuales para diferenciarlas de las no ordenadas se escriben con corchetes en lugar de con paréntesis.

Ahora para aplicar lo ya expuesto se calculará el valor de la amplitud de tres gluones que será útil más tarde; este vértice se puede observar en el segundo término de la última igualdad del lagrangiano (2.6). Para comenzar tal cálculo, hay que elegir la configuración de helicidad del conjunto de partículas, en este caso se hará p_1^+ , p_2^+ y p_3^- , siendo así:

$$\begin{aligned}
A_3[p_1^+, p_2^+, p_3^-] &= -\sqrt{2}[(\epsilon_1^+ \epsilon_2^+)(\epsilon_3^- p_1^+) + (\epsilon_2^+ \epsilon_3^-)(\epsilon_1^+ p_2^+) + (\epsilon_3^- \epsilon_1^+)(\epsilon_2^+ p_3^-)] \\
&= \sqrt{2} \frac{\langle q_1 | \gamma_\mu | p_1 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_1 p_1 \rangle} \frac{\langle q_2 | \gamma^\mu | p_2 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_2 p_2 \rangle} \frac{\langle p_3 | \gamma_\nu | q_3 \rangle}{\sqrt{2} [q_3 p_3]} p_1^\nu + \sqrt{2} \frac{\langle q_2 | \gamma_\mu | p_2 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_2 p_2 \rangle} \frac{\langle p_3 | \gamma^\mu | q_3 \rangle}{\sqrt{2} [q_3 p_3]} \frac{\langle q_1 | \gamma_\nu | p_1 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_1 p_1 \rangle} p_2^\nu \\
&+ \sqrt{2} \frac{\langle p_3 | \gamma_\mu | q_3 \rangle}{\sqrt{2} [q_3 p_3]} \frac{\langle q_1 | \gamma^\mu | p_1 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_1 p_1 \rangle} \frac{\langle q_2 | \gamma_\nu | p_2 \rangle}{\sqrt{2} \langle q_2 p_2 \rangle} p_3^\nu \\
&= \frac{\langle q_1 q_2 \rangle [p_1 p_2]}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3]} \langle p_3 | p_1 | q_3 \rangle + \frac{\langle q_2 p_3 \rangle [p_2 q_3]}{\langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3] \langle q_1 p_1 \rangle} \langle q_1 | p_2 | p_1 \rangle \\
&+ \frac{\langle p_3 q_1 \rangle [q_3 p_1]}{[q_3 p_3] \langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle} \langle q_2 | p_3 | p_2 \rangle \\
&= -\frac{\langle q_1 q_2 \rangle [p_1 p_2] \langle p_3 p_1 \rangle [p_1 q_3] + \langle q_2 p_3 \rangle [p_2 q_3] \langle q_1 p_2 \rangle [p_2 p_1] + \langle p_3 q_1 \rangle [q_3 p_1] \langle q_2 p_3 \rangle [p_3 p_2]}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3]},
\end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se utilizó la identidad de Fierz (1.43) y en la cuarta, la propiedad descrita en (1.46). Considerando ahora la dinámica especial de tres partículas ($|p_1\rangle \propto |p_2\rangle \propto |p_3\rangle$) (1.54) se tiene que $\langle p_3 p_1 \rangle = 0$, por lo que el primer sumando del numerador desaparece, quedando la amplitud como:

$$A_3[p_1^+, p_2^+, p_3^-] = -\frac{\langle q_2 p_3 \rangle [p_2 q_3] \langle q_1 p_2 \rangle [p_2 p_1] + \langle p_3 q_1 \rangle [q_3 p_1] \langle q_2 p_3 \rangle [p_3 p_2]}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3]}.$$

Aplicando ahora la conservación de momento (1.47) se tiene que: $\langle q_1 p_2 \rangle [p_2 p_1] = -\langle q_1 p_3 \rangle [p_3 p_1]$, entonces:

$$A_3[p_1^+, p_2^+, p_3^-] = \frac{\langle q_1 p_3 \rangle \langle q_2 p_3 \rangle ([p_2 q_3] [p_3 p_1] + [q_3 p_1] [p_3 p_2])}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3]}.$$

Recordando la identidad de Schouten (1.45), se puede escribir lo que está dentro del paréntesis en el numerador como:

$$[p_2 q_3] [p_3 p_1] + [q_3 p_1] [p_3 p_2] = -[p_2 p_1] [q_3 p_3],$$

con lo cual la amplitud se escribe ahora:

$$A_3[p_1^+, p_2^+, p_3^-] = -\frac{\langle q_1 p_3 \rangle \langle q_2 p_3 \rangle [p_2 p_1] [q_3 p_3]}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle [q_3 p_3]} = [p_1 p_2] \frac{\langle q_1 p_3 \rangle \langle q_2 p_3 \rangle}{\langle q_1 p_1 \rangle \langle q_2 p_2 \rangle}.$$

Finalmente, recurriendo de nuevo a la conservación de momento, se tiene que para los productos de espinores se satisface que:

$$\begin{aligned} \langle q_1 p_3 \rangle [p_2 p_3] &= -\langle q_1 p_1 \rangle [p_2 p_1] \implies \frac{\langle q_1 p_3 \rangle}{\langle q_1 p_1 \rangle} = \frac{[p_1 p_2]}{[p_2 p_3]}, \\ \langle q_2 p_3 \rangle [p_1 p_3] &= -\langle q_2 p_2 \rangle [p_1 p_2] \implies \frac{\langle q_2 p_3 \rangle}{\langle q_2 p_2 \rangle} = \frac{[p_1 p_2]}{[p_3 p_1]}, \end{aligned}$$

y sustituyendo esto en la amplitud se llega al resultado final:

$$A_3[p_1^+, p_2^+, p_3^-] = \frac{[p_1 p_2]^3}{[p_2 p_3][p_3 p_1]}. \quad (2.8)$$

Capítulo 3

Vértices MHV y funciones *on-shell*

3.1. Vértices MHV.

Es importante estudiar ciertos vértices muy particulares, dichos son los *vértices* MHV por sus siglas en inglés *Maximally Helicity Violating*, es decir, vértices de máxima violación de helicidad. Lo que esto significa es que estos vértices son los últimos que permiten “violiar” la helicidad sin hacer cero la amplitud.

A partir de las definiciones de los vectores de polarización (1.49) es fácil ver que:

$$\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+ \propto \langle q_i q_j \rangle, \quad \epsilon_i^- \cdot \epsilon_j^- \propto [q_i q_j], \quad \epsilon_i^- \cdot \epsilon_j^+ \propto \langle p_i q_j \rangle [p_j q_i].$$

Si se eligen todas las q_i tales que sean igual a una misma q , entonces se tendrá que: $\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+ = 0$, por lo que la única manera de que los vectores de polarización con helicidad positiva figuren en el numerador de una amplitud de gluones es mediante el producto $\epsilon_i^+ \cdot p_j$ y para una amplitud de n gluones con todas las helicidades positivas se necesita que todos los índices de Lorentz se contraigan de esta manera, lo cual daría un numerador que tenga potencia n debido a todos los momentos que figuran en ella. Sin embargo, haciendo un simple análisis dimensional se puede ver que un diagrama, el número de vértices y propagadores crecen linealmente con n siendo que el número de vértices es $n - 2$ mientras que el de propagadores es $n - 3$. Así que:

$$[A_n] \sim \frac{(\text{masa})^{n-2}}{(\text{masa}^2)^{n-3}} \sim (\text{masa})^{4-n}, \quad (3.1)$$

por lo tanto, la amplitud con todas las helicidades positivas no es posible, es decir:

$$A_n(p_1^+, p_2^+, \dots, p_n^+) = 0. \quad (3.2)$$

Ahora, para una amplitud $A_n(p_1^-, p_2^+, \dots, p_n^+)$, eligiendo $q_2 = q_3 = \dots = q_n = p_1$ se tiene que $\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+ = 0$ y $\epsilon_1^- \cdot \epsilon_j^+ = 0$, por lo que de nuevo se tienen n factores de $\epsilon_i^+ \cdot p_j$ en el numerador de la

amplitud, así que se vuelve a concluir que:

$$A_n(p_1^-, p_2^+, \dots, p_n^+) = 0. \quad (3.3)$$

Análogamente, para signos volteados se tiene el mismo resultado, es decir:

$$A_n(p_1^-, p_2^-, \dots, p_n^-) = 0, \quad A_n(p_1^+, p_2^-, \dots, p_n^-) = 0. \quad (3.4)$$

El siguiente caso es el de la amplitud $A_n(p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+)$, para la cual la elección de q 's que maximiza el número de productos entre vectores de polarización en el numerador que se hacen cero es: $q_1 = q_2 = p_n$ y $q_3 = q_4 = \dots = q_n = p_1$, con lo cual $\epsilon_i \cdot \epsilon_j = 0$ excepto $\epsilon_2^- \cdot \epsilon_i^+$ para $i = 3, \dots, n-1$, haciendo así que deban haber $(n-2)$ factores de $(\epsilon_j \cdot p_k)$, satisfaciéndose entonces las dimensiones de masa necesarias para que exista la amplitud, por lo que ésta queda como:

$$A_n(p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+) \sim \sum_{\text{diagramas}} \frac{\sum (\epsilon_2^- \cdot \epsilon_i^+) (\epsilon_j \cdot p_k)^{n-2}}{\prod P_J^2}. \quad (3.5)$$

Con esto se concluye que $\{-, -, +, \dots, +\}_n$ y $\{+, +, -, \dots, -\}_n$ son las primeras configuraciones de helicidad para las cuales las respectivas amplitudes no son cero bajo el entendido de que menos gluones de helicidad negativa (positiva) resultan en amplitudes que no son posibles. Por lo tanto las demás que tengan una mayor cantidad de gluones con helicidad negativa (positiva) están permitidas siempre y cuando haya al menos dos estados de helicidad positiva (negativa), siendo la única excepción el caso de tres partículas tal y como se demostró en (2.8).

Resultando que las amplitudes descritas por (3.5) son justo las amplitudes MHV, mientras que en el caso contrario ($\{p_1^+, p_2^+, p_3^-, \dots, p_n^-\}$) las amplitudes son llamadas *anti*-MHV. Como agregado, es prudente mencionar que para los casos donde $K+2$ partículas tienen helicidad negativa y el resto $(n-K-2)$ positiva, las amplitudes serán llamadas *amplitudes* N^K MHV, por sus siglas en inglés *Next to Maximally Helicity Violating* [6].

3.2. Funciones *on-shell*.

Las funciones *on-shell* dependen de datos que describen la física en los estados externos, descritos por cantidades como el momento, la masa, el espín y la helicidad. En este caso, las partículas cuyo momento cumple la relación de Einstein $p^2 = -m^2$ (o bien, $p^2 = 0$ para el caso a tratar) se dice que están *on-shell* [17].

3.2.1. Relaciones de recursión.

Las relaciones de recursión proveen de un método para calcular amplitudes complejas a partir de otras más sencillas. Estas relaciones *on-shell* utilizan información sólo de objetos invariantes de

norma y se ha demostrado que son una herramienta muy poderosa para poder ver la estructura matemática de las amplitudes de dispersión [6].

Para comenzar, se introducen n vectores complejos r^μ tal que:

$$(i) \sum_{j=1}^n r_j^\mu = 0,$$

$$(ii) r_j \cdot r_k = 0 \text{ para toda } j, k = 1, 2, \dots, n. \text{ En particular, } r_j^2 = 0,$$

$$(iii) p_j \cdot r_j = 0 \text{ para cada } j \text{ (no hay suma).}$$

Con ayuda de estos vectores r_j^μ , se construye un momento desplazado:

$$\hat{p}_j^\mu \equiv p_j^\mu + z r_j^\mu \quad \text{con } z \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Además, se tiene que [6, 18]:

$$(A) \text{ De (i) se sigue que } \sum_{j=1}^n \hat{p}_j^\mu = 0 \text{ (conservación de momento desplazado).}$$

$$(B) \text{ De (ii) y (iii) se sigue que el momento desplazado está } \textit{on-shell}, \text{ es decir: } \hat{p}_j^2 = 0.$$

$$(C) \text{ Se define } P_J^\mu = \sum_{j \in J} p_j^\mu \text{ para un subconjunto de momentos } \{p_j\}_{j \in J} \text{ tal que al menos 2 y no más de } n - 2 \text{ de ellos cumplen que } P_J^2 \neq 0. \text{ Para lo cual:}$$

$$\hat{P}_J^2 = \left(\sum_{j \in J} \hat{p}_j \right)^2 = \left(\sum_{j \in J} p_j \right)^2 + 2z \left(\sum_{j \in J} p_j \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} r_j \right) + z^2 \left(\sum_{j \in J} r_j \right)^2 \equiv P_J^2 + 2z P_J \cdot R_J,$$

en donde $R_J \equiv \sum_{j \in J} r_j$ y el término que acompaña a z^2 se hace cero por (ii). Ahora, al definir $z_J = -\frac{P_J^2}{2P_J \cdot R_J}$, se tiene que:

$$\hat{P}_J^2 = -\frac{P_J^2}{z_J} (z - z_J).$$

Por (A) y (B), las amplitudes A_n se pueden reescribir ahora en términos de los momentos desplazados \hat{p}_j^μ en lugar de los p_j^μ . En particular esta *amplitud desplazada* se puede ver como una función de z como $\hat{A}_n(z)$ en donde $A_n = \hat{A}_n(z = 0)$ ya que la estructura analítica de las amplitudes

$$|\hat{p}\rangle = |p\rangle + z|k\rangle, \quad |\hat{k}\rangle = |k\rangle, \quad |\hat{p}\rangle = |p\rangle, \quad |\hat{k}\rangle = |k\rangle - z|p\rangle. \quad (3.11)$$

A esto se le conoce como un *desplazamiento* $-[p, k]$. Hay que notar que $[\hat{p}q]$ y $\langle \hat{k}q \rangle$ son lineales en z para $q \neq p, k$ mientras que $\langle \hat{p}\hat{k} \rangle = \langle pk \rangle$, $[\hat{p}\hat{k}] = [pk]$, $\langle \hat{p}q \rangle = \langle pq \rangle$ y $[\hat{k}q] = [kq]$ se mantienen sin ser desplazados.

Bajo esto mismo, los vectores de polarización cambian a:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_+^\mu(p; q) &= \epsilon_+^\mu(p; q) + z \frac{\langle q|\gamma^\mu|k\rangle}{\sqrt{2}\langle pq \rangle}, & \hat{\epsilon}_-^\mu(p; q) &= \epsilon_-^\mu(p; q) \frac{[pq]}{[qp] + z[qk]}, \\ \hat{\epsilon}_+^\mu(k; q) &= \epsilon_+^\mu(k; q) \frac{\langle qk \rangle}{\langle qk \rangle + z\langle qp \rangle}, & \hat{\epsilon}_-^\mu(k; q) &= \epsilon_-^\mu(k; q) + z \frac{\langle p|\gamma^\mu|q\rangle}{\sqrt{2}[qk]}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La validez de estas relaciones requiere que el término de frontera B_n definido en (3.7) esté ausente, lo cual se satisface cuando la amplitud desplazada $\hat{A}_n(z)$ tiende a cero para $z \rightarrow \infty$. El comportamiento para valores grandes de z puede entenderse a partir de una expansión de $1/z$ que, de acuerdo a [21], para dos momentos adyacentes p_i, p_j :

$$\begin{array}{cccccc} [p_i, p_j] & [-, -] & [-, +] & [+, +] & [+, -] & \\ \hat{A}_n(z) \sim & 1/z & 1/z & 1/z & z^3. & \end{array}$$

En el caso de que p_i y p_j no sean adyacentes, entonces la amplitudes crecen por un factor de $1/z$ dejando así sólo los primeros tres casos como amplitudes válidas.

3.2.2. Fórmula de Parke-Taylor.

A partir de las relaciones anteriores se puede construir una fórmula que ayuda a calcular con suma facilidad las amplitudes de gluones en una teoría de (Super) Yang-Mills; dicha fórmula recibe el nombre de *fórmula de Parke-Taylor*.

Recordando (3.2) y (3.3) se tiene que $A_n[p_1^+, p_2^+, \dots, p_n^+] = 0$ y que $A_n[p_1^-, p_2^+, \dots, p_n^+] = 0$, respectivamente. Por lo que se procede a trabajar con la amplitud MHV: $A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]$, quedando definida la fórmula de Parke-Taylor:

$$A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle}, \quad (3.13)$$

la cual se demuestra mediante inducción.

Para comenzar con la demostración, primero se hace un desplazamiento $-[p_1, p_2]$ con lo cual se tiene que considerar [19]:

1. El ordenamiento de color debe preservarse en las dos subamplitudes.
2. Las patas correspondientes a los momentos desplazados (\hat{p}_1 y \hat{p}_2 , en este caso) deben pertenecer a distintas subamplitudes, de lo contrario la línea interna P_J no estaría desplazada, es decir, no habría contribución del polo a la función.
3. Las helicidades de la línea interna P_J deben ser opuestas para las dos subamplitudes.

Así, los únicos diagramas que contribuyen a esta amplitud son:

$$\begin{aligned}
A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, n^+] &= \begin{array}{c} \hat{1}^- \\ \diagdown \\ \text{L} \\ \diagup \\ n^+ \end{array} \begin{array}{c} \hat{P}_J \\ \text{---} \\ \text{R} \\ \text{---} \\ n^- \end{array} \begin{array}{c} \hat{2}^- \\ \diagup \\ 3^+ \\ \diagdown \\ n^- \end{array} + \begin{array}{c} \hat{1}^- \\ \diagdown \\ \text{L} \\ \diagup \\ 4^+ \end{array} \begin{array}{c} \hat{P}_J \\ \text{---} \\ \text{R} \\ \text{---} \\ 3^+ \end{array} \begin{array}{c} \hat{2}^- \\ \diagup \\ 3^+ \end{array} \\
&= \hat{A}_3[\hat{p}_1^-, -\hat{P}_{1n}^+, p_n^+] \frac{1}{P_{1n}^2} \hat{A}_{n-1}[\hat{P}_{1n}^-, \hat{p}_2^-, p_3^+, \dots, p_{n-1}^+] \\
&+ \hat{A}_{n-1}[\hat{p}_1^-, \hat{P}_{23}^-, p_4^+, \dots, p_n^+] \frac{1}{P_{23}^2} \hat{A}_3[-\hat{P}_{23}^+, \hat{p}_2^-, p_3^+],
\end{aligned}$$

en donde $P_{ij} = p_i + p_j$ y \hat{P}_J está evaluada en el residuo $z = z_J$ tal que $\hat{P}_J^2 = 0$.

A partir de la amplitud de tres puntos anti-MHV (2.8): $\hat{A}_3[\hat{p}_1^-, -\hat{P}_{1n}^+, p_n^+] = \frac{[\hat{P}_{1n} p_n]^3}{[p_n \hat{p}_1][\hat{p}_1 \hat{P}_{1n}]}$, tomando en cuenta que $\hat{P}_{1n}^\mu = \hat{p}_1^\mu + p_n^\mu$, se tiene que:

$$0 = \hat{P}_{1n}^2 = (\hat{p}_1 + p_n)^2 = \langle \hat{p}_1 p_n \rangle [\hat{p}_1 p_n] = \langle p_1 p_n \rangle [\hat{p}_1 p_n],$$

dado lo anterior, la única manera de hacer el final de la ecuación cero, es elegir un valor de z (3.11) tal que $[\hat{p}_1 p_n] = 0$. Así:

$$|\hat{P}_{1n}\rangle^{\dot{a}} [\hat{P}_{1n} p_n] = -\hat{P}_{1n}^{\dot{a}b} [p_n]_b = -(\hat{p}_1 + p_n)^{\dot{a}b} [p_n]_b = |p_1\rangle^{\dot{a}} [\hat{p}_1 p_n] = 0,$$

por lo tanto: $[\hat{P}_{1n} p_n] = 0$. Análogamente se puede llegar a que $[\hat{p}_1 \hat{P}_{1n}] = 0$ y así, $\hat{A}_3[\hat{p}_1^-, -\hat{P}_{1n}^+, p_n^+] = 0$, por lo que la contribución del primer diagrama también se hace cero. Dejando así la amplitud como:

$$A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, n^+] = \hat{A}_{n-1}[\hat{p}_1^-, \hat{P}_{23}^-, p_4^+, \dots, p_n^+] \frac{1}{P_{23}^2} \hat{A}_3[-\hat{P}_{23}^+, \hat{p}_2^-, p_3^+].$$

Suponiendo que (3.13) es válida para amplitudes de $n-1$ puntos y sustituyendo para la primer subamplitud retomando a la vez (2.8) para la segunda subamplitud, se tiene que:

$$A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, n^+] = \frac{\langle \hat{p}_1 \hat{P}_{23} \rangle^4}{\langle \hat{p}_1 \hat{P}_{23} \rangle \langle \hat{P}_{23} p_4 \rangle \langle p_4 p_5 \rangle \cdots \langle p_n \hat{p}_1 \rangle} \frac{1}{\langle p_2 p_3 \rangle [p_2 p_3]} \frac{[p_3 \hat{P}_{23}]^3}{[\hat{P}_{23} \hat{p}_2][\hat{p}_2 p_3]}, \quad (3.14)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}_1 \hat{P}_{23} \rangle [p_3 \hat{P}_{23}] &= -\langle \hat{p}_1 \hat{P}_{23} \rangle [\hat{P}_{23} p_3] = \langle \hat{p}_1 | \hat{P}_{23} | p_3 \rangle = \langle \hat{p}_1 | (\hat{p}_2 + p_3) | p_3 \rangle = \langle \hat{p}_1 | \hat{p}_2 | p_3 \rangle \\ &= -\langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle [\hat{p}_2 p_3] = \langle p_1 p_2 \rangle [p_2 p_3], \end{aligned}$$

y también: $\langle \hat{P}_{23} p_4 \rangle [\hat{P}_{23} \hat{p}_2] = \langle p_4 | \hat{P}_{23} | \hat{p}_2 \rangle = \langle p_4 | p_3 | p_2 \rangle = -\langle p_4 p_3 \rangle [p_3 p_2] = -\langle p_3 p_4 \rangle [p_2 p_3]$.

Sustituyendo lo anterior en (3.14), se llega finalmente a lo que se quería, es decir:

$$A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = \frac{-\langle p_1 p_2 \rangle^3 [p_2 p_3]^3}{(-\langle p_3 p_4 \rangle [p_2 p_3]) \langle p_4 p_5 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle [p_2 p_3] [p_2 p_3]}.$$

Finalmente, la conservación de momento entra en juego en esta fórmula mediante la distribución delta $\delta^4(\sum_{j=1}^n p_j^{aa}) \equiv \delta^4(P)$ multiplicando a la amplitud (3.13), quedando entonces que las amplitudes MHV a nivel árbol con desplazamiento $-[p_1, p_2]$ se escriben como:

$$A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_4 p_5 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \delta^4(P). \quad (3.15)$$

Hacer cálculos con esta fórmula es mucho más sencillo que calcular las trazas para cada diagrama, lo único que faltaría hacer para cada caso particular es pasar al lenguaje de las variables de Mandelstam lo cual se logra fácilmente mediante (1.48).

En el Apéndice C está el desarrollo para una amplitud de cuatro gluones siguiendo las reglas de Feynman con los elementos del formalismo de helicidad. El resultado que se encuentra es el mismo que se obtendría al sólo aplicar la fórmula de Parke-Taylor, lo cual es evidentemente mucho más sencillo.

Capítulo 4

Simetría dual conforme

4.1. Espacios duales.

El espacio dual V^* es un espacio vectorial que consiste de todas las funciones lineales en el espacio V $\phi : V \rightarrow F$ (espacio de funciones lineales) con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar:

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(x) &= \phi(x) + \psi(x), \\ (a\phi)(x) &= a\phi(x),\end{aligned}$$

para cualesquiera $\phi, \psi \in V^*$, $x \in V$ y $a \in F$.

En este caso el espacio V es es espacio *on-shell* ($\langle p|, |p\rangle, [p], |p]$) y el espacio dual correspondiente V^* es aquel cuya base la forman $(y, [p], |p])$ y será discutido en la Sección 4.3.

4.2. Transformaciones conformes.

Una transformación conforme de las coordenadas es un mapeo invertible $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu(x)$ tal que deja invariante el tensor métrico.

$$dx_\mu dx^\mu \rightarrow \Lambda(x) dx'_\mu dx'^\mu. \tag{4.1}$$

El conjunto de transformaciones conformes generan un grupo que tiene como subgrupo al grupo de Poincaré. Estas transformaciones no afectan los ángulos entre dos curvas arbitrarias que se cruzan entre sí en algún punto, de allí el nombre de *conforme* [22].

Para hallar una solución general a (4.1) se toman en cuenta para la transformación de las coordenadas: traslaciones a_μ , rotaciones $m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu}$, dilataciones λ y transformaciones especiales conformes b_μ tal que la transformación queda como:

$$\begin{aligned}
x_\mu \rightarrow x'_\mu &= x_\mu + (a_\mu + m_{\mu\nu}x^\nu + \lambda x_\mu + 2b_\nu x^\nu x_\mu - b_\mu x_\rho x^\rho), \\
&= x_\mu + a_\nu \delta_\mu^\nu + m_{\rho\sigma}(x^\sigma \delta_\mu^\rho - x^\rho \delta_\mu^\sigma) + \lambda x_\nu \delta_\mu^\nu + 2b_\nu x^\nu x_\rho \delta_\mu^\rho - b_\nu x_\rho x^\rho \delta_\mu^\nu, \\
&= x_\mu + a_\nu \partial^\nu x_\mu + m_{\rho\sigma}(x^\sigma \partial^\rho x_\mu - x^\rho \partial^\sigma x_\mu) + \lambda x_\nu \partial^\nu x_\mu + 2b_\nu x^\nu x_\rho \partial^\rho x_\mu - b_\nu x_\rho x^\rho \partial^\nu x_\mu, \\
&= [1 + a_\nu \partial^\nu + m_{\rho\sigma}(x^\sigma \partial^\rho - x^\rho \partial^\sigma) + \lambda x_\nu \partial^\nu + b_\nu(2x^\nu x_\rho \partial^\rho - x_\rho x^\rho \partial^\nu)]x_\mu, \\
&\equiv (1 + ia_\nu P^\nu + im_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} + i\lambda D + ib_\nu K^\nu)x_\mu.
\end{aligned}$$

donde se han definido:

$$\begin{aligned}
P^\nu &\equiv -i\partial^\nu && 4 \text{ traslaciones,} \\
M^{\rho\sigma} &\equiv i(x^\rho \partial^\sigma - x^\sigma \partial^\rho) && 6 \text{ rotaciones,} \\
D &\equiv -ix_\nu \partial^\nu && 1 \text{ dilatación,} \\
K^\nu &\equiv -i(2x^\nu x_\rho \partial^\rho - x_\rho x^\rho \partial^\nu) && 4 \text{ boosts conformes especiales.}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Los anteriores son los generadores del grupo conforme, los cuales satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0, \\
[D, P^\mu] &= iP^\mu, \\
[D, K^\mu] &= -iK^\mu, \\
[K^\mu, P^\nu] &= 2i(g^{\mu\nu}D - M^{\mu\nu}), \\
[K^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho}K^\sigma - g^{\mu\sigma}K^\rho), \\
[P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}),
\end{aligned}$$

ésta es el álgebra conforme.

En el caso infinitesimal, para los *boosts* conformes especiales K^ν se tiene que las transformaciones finitas correspondientes están dadas por [13]:

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - 2b^\nu x_\nu + b^2 x^2}, \tag{4.3}$$

donde se puede escribir x'_μ/x'^2 como:

$$\frac{x'_\mu}{x'^2} = \frac{x_\mu - b_\mu x^2}{1 - 2b^\nu x_\nu + b^2 x^2} \left(\frac{1 - 2b^\rho x_\rho + b^2 x^2}{x_\sigma - b_\sigma x^2} \right)^2 = \frac{x_\mu}{x^2} - b_\mu,$$

con lo cual, al definir una operación de inversión:

$$\mathbb{I} : x_\mu \rightarrow \frac{x_\mu}{x^2} \equiv x^{-1}, \quad (4.4)$$

se logra ver que la transformación (4.3) es una composición de una inversión, una traslación por $(-b^\mu)$ y otra inversión. Cabe mencionar que las inversiones ayudan a determinar las consecuencias de la simetría conforme en funciones de correlación; sin embargo hay que recalcar que no existe un generador de grupo asociado a esta transformación.

Para continuar hay que escribir los generadores (4.2) en el espacio de momentos. Tomando en cuenta que $p^\nu = -i\partial/\partial x_\nu$ y $x^\nu = i\partial/\partial p_\nu$, éstos quedan como:

$$\begin{aligned} P^\nu &= p^\nu, \\ M^{\rho\sigma} &= i(p^\rho\partial^\sigma - p^\sigma\partial^\rho), \\ D &= i(p^\nu\partial_\nu + 1), \\ K^\nu &= -2(p^\rho\partial^\nu\partial_\rho + \partial^\nu) + p^\nu\partial_\rho\partial^\rho. \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde ∂^ν es ahora la derivada respecto al momento p_ν .

Para poder pasar al formalismo de helicidad es necesario deshacerse de los índices de Lorentz; para lo cual se contrae lo escrito en (4.5) con las matrices de Pauli [6].

$$\begin{aligned} P^{\dot{a}b} &= P^\nu(\bar{\sigma}_\nu)^{\dot{a}b} = p^{\dot{a}b}, \\ M_a^b &= i(p^\rho\partial^\sigma - p^\sigma\partial^\rho)(\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma - \sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho)_a^b \\ &= i(p^\rho\partial^\sigma\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma - p^\rho\partial^\sigma\sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho - p^\sigma\partial^\rho\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma + p^\sigma\partial^\rho\sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho)_a^b \\ &= i(p^\rho\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma\partial^\sigma - p^\rho\sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho\partial^\sigma - p^\sigma\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma\partial^\rho + p^\sigma\sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho\partial^\rho)_a^b \\ &= 2i(p^\sigma\sigma_\sigma\bar{\sigma}_\rho\partial^\rho - p^\sigma\sigma_\rho\bar{\sigma}_\sigma\partial^\rho)_a^b \\ &= 2i(p_{a\dot{c}}(\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} - (\sigma_\rho)_{a\dot{c}}p^{\dot{c}b})\partial^\rho, \\ M_{\dot{b}}^{\dot{a}} &= i(p^\rho\partial^\sigma - p^\sigma\partial^\rho)(\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma - \bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho)_{\dot{b}}^{\dot{a}} \\ &= i(p^\rho\partial^\sigma\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma - p^\rho\partial^\sigma\bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho - p^\sigma\partial^\rho\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma + p^\sigma\partial^\rho\bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho)_{\dot{b}}^{\dot{a}} \\ &= i(p^\rho\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma\partial^\sigma - p^\rho\bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho\partial^\sigma - p^\sigma\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma\partial^\rho + p^\sigma\bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho\partial^\rho)_{\dot{b}}^{\dot{a}} \\ &= 2i(p^\sigma\bar{\sigma}_\sigma\sigma_\rho\partial^\rho - p^\sigma\bar{\sigma}_\rho\sigma_\sigma\partial^\rho)_{\dot{b}}^{\dot{a}} \\ &= 2i(p^{\dot{a}c}(\sigma_\rho)_{c\dot{b}} - (\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{a}c}p_{c\dot{b}})\partial^\rho, \end{aligned}$$

$$D = i(p^\nu \partial_\nu + 1),$$

$$\begin{aligned} K_{a\dot{a}} &= (-2(p^\rho \partial^\nu \partial_\rho + \partial^\nu) + p^\nu \partial_\rho \partial^\rho)(\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \\ &= -2(p^\rho (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial^\nu \partial_\rho + (\sigma_\nu)_{a\dot{a}} \partial^\nu) + p_{a\dot{a}} \partial_\rho \partial^\rho. \end{aligned}$$

Ahora hay que escribir las contracciones con índice de Lorentz en términos de índices de espinores. Por ejemplo:

$$p^\nu \partial_\mu = p^\nu \partial_\mu p^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} = p^\nu (\partial_\mu p^\lambda (\bar{\sigma}_\lambda)^{\dot{a}b}) \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} = p^\nu (\bar{\sigma}_\lambda)^{\dot{a}b} \delta_\mu^\lambda \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} = p^\nu (\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}}.$$

Si en el procedimiento anterior se elige p_{ab} en lugar de $p^{\dot{a}b}$, se llega a que: $p^\nu \partial_\mu = p^\nu (\sigma_\mu)_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}}$. Por lo que $p^\nu \partial_\mu$ queda escrito como:

$$p^\nu \partial_\mu = \frac{1}{2} p^\nu \left((\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} + (\sigma_\mu)_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}} \right), \quad (4.6)$$

y de manera particular:

$$p^\nu \partial_\nu = \frac{1}{2} \left(p^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} + p_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}} \right). \quad (4.7)$$

Además, ahora es posible escribir la derivada con respecto a p^μ en términos de derivadas respecto a $p^{\dot{a}b}$ y p_{ab} :

$$\partial_\mu = \frac{1}{2} \left((\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} + (\sigma_\mu)_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}} \right), \quad (4.8)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \partial_\rho \partial^\rho &= \frac{1}{2} \left((\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} + (\sigma_\rho)_{cb} \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \right) \frac{1}{2} \left((\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} + (\sigma^\rho)_{ed} \frac{\partial}{\partial p_{ed}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} (\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} + (\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} (\sigma^\rho)_{ed} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{ed}} + (\sigma_\rho)_{cb} (\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}d} \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_\rho)_{cb} (\sigma^\rho)_{ed} \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p_{ed}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-2\varepsilon^{bd} \varepsilon^{\dot{c}\dot{e}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} - 2\delta_e^b \delta^{\dot{c}}_{\dot{d}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{ed}} - 2\delta_c^d \delta_b^{\dot{e}} \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} - 2\varepsilon_{ce} \varepsilon_{bd} \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p_{ed}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{bc}} + \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{bc}} + \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} + \frac{\partial}{\partial p_{cb}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \right), \end{aligned}$$

$$\therefore \partial_\rho \partial^\rho = -\frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{b\dot{c}}} - \frac{\partial}{\partial p_{c\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}}. \quad (4.9)$$

Mientras que por otro lado:

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho)_{c\dot{b}} \partial^\rho &= \frac{1}{2} (\sigma_\rho)_{c\dot{b}} \left((\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} + (\sigma^\rho)_{e\dot{d}} \frac{\partial}{\partial p_{e\dot{d}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-2\delta_c^d \delta_{\dot{b}}^{\dot{e}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}d}} - 2\varepsilon_{ce} \varepsilon_{\dot{b}\dot{d}} \frac{\partial}{\partial p_{e\dot{d}}} \right), \\ \therefore (\sigma_\rho)_{c\dot{b}} \partial^\rho &= -2 \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

y análogamente:

$$(\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} \partial^\rho = -2 \frac{\partial}{\partial p_{b\dot{c}}}. \quad (4.11)$$

Para los espinores angulares:

$$|p\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} = |p\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial p^{\dot{c}d}}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}d}} = -|p\rangle^{\dot{a}} \left(\frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} |p\rangle^{\dot{c}} [p]^d \right) \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}d}} = -|p\rangle^{\dot{a}} [p]^d \delta_{\dot{b}}^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}d}} = p^{\dot{a}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}d}},$$

y de la misma manera para los demás espinores:

$$\langle p|_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \langle p|_{\dot{b}}} = p_{d\dot{a}} \frac{\partial}{\partial p_{d\dot{b}}}, \quad |p]_a \frac{\partial}{\partial |p]_b} = p_{ad} \frac{\partial}{\partial p_{bd}}, \quad [p]^a \frac{\partial}{\partial [p]^b} = p^{\dot{a}a} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}}.$$

Con lo cual las derivadas en términos de los espinores quedan como:

$$\frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} = -[p]^b \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}}, \quad \frac{\partial}{\partial \langle p|_{\dot{a}}} = -|p]_b \frac{\partial}{\partial p_{b\dot{a}}}, \quad \frac{\partial}{\partial |p]_a} = -\langle p|_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial p_{a\dot{b}}}, \quad \frac{\partial}{\partial [p]^a} = -|p\rangle^{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}}. \quad (4.12)$$

Con todo esto es fácil obtener los generadores conformes en términos de espinores cuadrados y angulares:

$$P^{\dot{a}b} = -|p\rangle^{\dot{a}} [p]^b,$$

$$\begin{aligned}
M_{ab} &= \varepsilon_{bd} M_a^d \\
&= 2i\varepsilon_{bd} \left(p_{ac} (\bar{\sigma}_\rho)^{cd} \partial^\rho - \frac{1}{2} (\sigma_\rho)_{ac} p^{\dot{c}d} \left((\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}f} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}f}} + (\sigma^\rho)_{ef} \frac{\partial}{\partial p_{ef}} \right) \right) \\
&= 2i\varepsilon_{bd} \left(-2p_{ac} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}d}} - \frac{1}{2} \left(-2p^{\dot{c}d} \delta_a^f \delta_c^{\dot{e}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}f}} - 2p^{\dot{c}d} \varepsilon_{ae} \varepsilon_{cf} \frac{\partial}{\partial p_{ef}} \right) \right) \\
&= 2i\varepsilon_{bd} \left(-2|p\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p\rangle_d} + 2p^{\dot{c}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}a}} \right) \\
&= 4i\varepsilon_{bd} \left(-|p\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p\rangle_d} - |p\rangle^d |p\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}a}} \right) \\
&= -4i\varepsilon_{bd} \left(|p\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p\rangle_d} + |p\rangle^d \frac{\partial}{\partial |p\rangle^a} \right) \\
&= -4i \left(|p\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p\rangle^b} + |p\rangle_b \frac{\partial}{\partial |p\rangle^a} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\dot{a}\dot{b}} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} M_{\dot{b}}^{\dot{c}} \\
&= 2i\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \left(p^{\dot{c}d} (\sigma_\rho)_{db} \partial^\rho - \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}d} p_{db} \left((\bar{\sigma}^\rho)^{\dot{e}f} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}f}} + (\sigma^\rho)_{ef} \frac{\partial}{\partial p_{ef}} \right) \right) \\
&= 2i\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \left(-2p^{\dot{c}d} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}d}} - \frac{1}{2} \left(-2p_{db} \varepsilon^{df} \varepsilon^{\dot{c}\dot{e}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{e}f}} - 2p_{db} \delta_e^d \delta_f^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial p_{ef}} \right) \right) \\
&= 2i\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \left(-2|p\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} + 2p_{db} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}d}} \right) \\
&= 4i\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \left(-|p\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} - \langle p|_{\dot{b}} |p\rangle^d \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}d}} \right) \\
&= -4i\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \left(|p\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} + \langle p|_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \langle p|_{\dot{c}}} \right) \\
&= -4i \left(\langle p|_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{b}}} + \langle p|_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= i \left(\frac{1}{2} \left(p^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} + p_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}} \right) + 1 \right) \\
&= \frac{i}{2} \left(p^{\dot{a}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}b}} + p_{ab} \frac{\partial}{\partial p_{ab}} + 2 \right) \\
&= \frac{i}{2} \left(|p\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} + |p\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p\rangle_a} + 2 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{a\dot{a}} &= -2 \left(p^\rho \left(-2 \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \right) \frac{1}{2} \left((\bar{\sigma}_\rho)^{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} + (\sigma_\rho)_{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \right) \\
&+ p_{a\dot{a}} \left(-\frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{b}c}} - \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}} \right) \\
&= 2 \left(p^{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} + p_{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} + 2 \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \right) - p_{a\dot{a}} \left(\frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{b}c}} + \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}} \right) \\
&= 2 \left(\frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} p^{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} - \frac{\partial p^{\dot{c}b}}{\partial p^{\dot{a}a}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} + \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} p_{\dot{c}b} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} - \frac{\partial p_{\dot{c}b}}{\partial p^{\dot{a}a}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} + 2 \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \right) \\
&- \frac{\partial}{\partial p^{\dot{c}b}} p_{a\dot{a}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{b}c}} + \frac{\partial p_{a\dot{a}}}{\partial p^{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p_{\dot{b}c}} - \frac{\partial}{\partial p_{\dot{c}b}} p_{a\dot{a}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}} + \frac{\partial p_{a\dot{a}}}{\partial p_{\dot{c}b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}c}} \\
&= p^{\dot{b}c} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}c}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} + \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}a}} \\
&= -|p\rangle^{\dot{b}} [p]^c \frac{\partial}{\partial p^{\dot{a}c}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} - \delta_a^{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} \\
&= -|p\rangle^{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} - \frac{\partial |p\rangle^{\dot{b}}}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} \\
&= \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} \left(-|p\rangle^{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}a}} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial |p\rangle^{\dot{a}}} \frac{\partial}{\partial |p|^a}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para reflejar la localidad de esta simetría, es necesario ver a los generadores como sumas de los operadores anteriores en cada pata externa j de los diagramas. Siendo así a que los generadores del grupo conforme toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P^{\dot{a}b} &= -\sum_j |p_j\rangle^{\dot{a}} [p_j]^b, \\
M_{ab} &= -4i \sum_j (|p_j\rangle_a \partial_{[p_j]^b} + |p_j\rangle_b \partial_{[p_j]^a}), \\
M_{\dot{a}\dot{b}} &= -4i \sum_j (\langle p_j |_{\dot{a}} \partial_{|p_j\rangle^{\dot{b}}} + \langle p_j |_{\dot{b}} \partial_{|p_j\rangle^{\dot{a}}}), \\
D &= \frac{i}{2} \sum_j (|p_j\rangle^{\dot{a}} \partial_{|p_j\rangle^{\dot{a}}} + |p_j\rangle_a \partial_{[p_j]_a} + 2), \\
K_{a\dot{a}} &= -\sum_j \partial_{|p_j\rangle^{\dot{a}}} \partial_{[p_j]^a}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Ahora sólo hace falta comprobar el comportamiento de la amplitud MHV (3.15) bajo estos generadores, para lo cual es útil ver que, para cualesquiera dos momentos q y k :

$$\sum_{j=1}^n |p_j\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^b} \langle qk\rangle = 0, \quad \sum_{j=1}^n \langle p_j|_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} \langle qk\rangle = \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} \langle qk\rangle,$$

y para la delta de conservación de momento:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} \delta^4(P) &= \sum_{j=1}^n p^{\dot{a}\dot{d}} \frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}\dot{d}}} \delta^4(P) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial p^{\dot{b}\dot{d}}} p^{\dot{a}\dot{d}} \delta^4(P) - \frac{\partial p^{\dot{a}\dot{d}}}{\partial p^{\dot{b}\dot{d}}} \delta^4(P) \right), \\ \therefore \sum_{j=1}^n |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} \delta^4(P) &= -2\delta_{\dot{b}}^{\dot{a}} \delta^4(P), \end{aligned} \quad (4.14)$$

análogamente:

$$\sum_{j=1}^n |p_j\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle_b} \delta^4(P) = -2\delta_a^b \delta^4(P). \quad (4.15)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} P^{\dot{a}a} A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &\propto \sum_{j=1}^n |p_j\rangle^{\dot{a}} |p_j\rangle^a \delta^4(P) \\ &= 0, \\ M_{ab} A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &\propto \sum_{j=1}^n \left(|p_j\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^b} + |p_j\rangle_b \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^a} \right) \delta^4(P) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_{bc} |p_j\rangle_a \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j\rangle_c} + \varepsilon_{ac} |p_j\rangle_b \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j\rangle_c} \right) \\ &= (-2\varepsilon_{bc} \delta_a^c - 2\varepsilon_{ac} \delta_b^c) \delta^4(P) \\ &= -2(\varepsilon_{ba} + \varepsilon_{ab}) \delta^4(P) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\dot{a}b}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &\propto \sum_{j=1}^n \left(\langle p_j |_{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} + \langle p_j |_{\dot{b}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \right) \langle qk \rangle \delta^4(P) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\langle p_j |_{\dot{a}} \frac{\partial \langle qk \rangle}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} + \langle p_j |_{\dot{b}} \frac{\partial \langle qk \rangle}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \right) \delta^4(P) \\
&\quad + \langle qk \rangle \sum_{j=1}^n \left(\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} |p_j\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j\rangle^{\dot{b}}} + \varepsilon_{\dot{b}\dot{c}} |p_j\rangle^{\dot{c}} \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \right) \\
&= (\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \varepsilon_{\dot{b}\dot{a}}) \langle qk \rangle \delta^4(P) + \langle qk \rangle (-2\varepsilon_{\dot{a}\dot{c}} \delta_b^{\dot{c}} - 2\varepsilon_{\dot{b}\dot{c}} \delta_a^{\dot{c}}) \delta^4(P) \\
&= (\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} - \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}) \langle qk \rangle \delta^4(P) + \langle qk \rangle (-2\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} + 2\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}) \delta^4(P) \\
&= 0, \\
DA_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &\propto \sum_{j=1}^n \left(|p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} + |p_j]_a \frac{\partial}{\partial |p_j]_a} + 2 \right) \langle qk \rangle \delta^4(P) \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\langle qk \rangle |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} + \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \langle p_j |_{\dot{c}} \frac{\partial \langle qk \rangle}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \delta^4(P) + \langle qk \rangle |p_j]_a \frac{\partial \delta^4(P)}{\partial |p_j]_a} \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle qk \rangle \delta^4(P) \right) \\
&= -2 \langle qk \rangle \delta_a^{\dot{a}} \delta^4(P) + \varepsilon^{\dot{a}\dot{c}} \varepsilon_{\dot{c}\dot{a}} \langle qk \rangle \delta^4(P) - 2 \langle qk \rangle \delta_a^a \delta^4(P) + 2 \langle qk \rangle \delta^4(P) \\
&= -2 \langle qk \rangle \delta^4(P) + 2 \langle qk \rangle \delta^4(P) - 2 \langle qk \rangle \delta^4(P) + 2 \langle qk \rangle \delta^4(P) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Habiendo calculado ya cómo actúan estos cuatro generadores sobre la amplitud, falta calcular $K_{\dot{a}a}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]$ pero ésto se hará más adelante con otras herramientas.

Experimentando ahora con las derivadas (4.14) y (4.15), si se toma su diferencia se puede definir un operador \mathcal{O}_j

$$\mathcal{O}_j \equiv |p_j]_a \frac{\partial}{\partial |p_j]_a} - |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}},$$

tal que al aplicarlo a la amplitud se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_j A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \mathcal{O}_j \delta^4(P) \\
&- \delta^4(P) |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \\
&= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} (-2\delta^4(P) + 2\delta^4(P)) \\
&- \delta^4(P) |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle},
\end{aligned}$$

y, por ejemplo, si se toma $j = 1$, es decir uno de los dos gluones con helicidad negativa ($h_1 = -1$), entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_1 A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= -\delta^4(P) |p_1\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_1\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) \frac{|p_1\rangle^{\dot{a}}}{\langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_{n-1} p_n \rangle} \frac{\partial}{\partial |p_1\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^3}{\langle p_n p_1 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) \frac{|p_1\rangle^{\dot{a}}}{\langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_{n-1} p_n \rangle} \left(\frac{3\langle p_1 p_2 \rangle^2 (-\langle p_2 | \dot{a} \rangle \langle p_n p_1 \rangle - \langle p_1 p_2 \rangle^3 \langle p_n | \dot{a} \rangle)}{\langle p_n p_1 \rangle^2} \right) \\
&= -\delta^4(P) \frac{-3\langle p_1 p_2 \rangle^2 \langle p_2 p_1 \rangle \langle p_n p_1 \rangle - \langle p_1 p_2 \rangle^3 \langle p_n p_1 \rangle}{\langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle \langle p_n p_1 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) \frac{3\langle p_1 p_2 \rangle^4 - \langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle},
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{O}_1 A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] = -2A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+], \quad (4.16)$$

mientras que si se toma un gluón con helicidad positiva, por ejemplo $j = 3$ ($h_3 = +1$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_3 A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &= -\delta^4(P) |p_3\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_3\rangle^{\dot{a}}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) \frac{|p_3\rangle^{\dot{a}} \langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_4 p_5 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \frac{\partial}{\partial |p_3\rangle^{\dot{a}}} \frac{1}{\langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle} \\
&= -\delta^4(P) \frac{|p_3\rangle^{\dot{a}} \langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_4 p_5 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \left(\frac{1}{\langle p_2 p_3 \rangle} \left(-\frac{1}{\langle p_3 p_4 \rangle^2} (-\langle p_4 | \dot{a} \rangle) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\langle p_3 p_4 \rangle} \left(-\frac{1}{\langle p_2 p_3 \rangle^2} \langle p_2 | \dot{a} \rangle \right) \right) \\
&= -\delta^4(P) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \left(\frac{\langle p_4 p_3 \rangle}{\langle p_3 p_4 \rangle} - \frac{\langle p_2 p_3 \rangle}{\langle p_2 p_3 \rangle} \right) \\
&= -A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] (-1 - 1), \\
\mathcal{O}_3 A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &= 2A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Así, se puede concluir que:

$$\left(|p_j\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle_a} - |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = 2h_j A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+], \tag{4.18}$$

donde el término h_j referente a la helicidad de la partícula j está allí pues se busca construir una función que dependa tanto de los espinores como de la helicidad de la partícula, que en este caso toma los valores ± 1 [23]. Por lo tanto se puede definir un nuevo operador, el operador de helicidad [18]:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(|p_j\rangle_a \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle_a} - |p_j\rangle^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial |p_j\rangle^{\dot{a}}} \right), \tag{4.19}$$

tal que

$$H A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = h A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+], \text{ con } h = \sum_{j=1}^n h_j \text{ la helicidad de la amplitud,}$$

y como en este caso $h_1 = h_2 = -1$ y $h_3 = \dots = h_n = +1$, entonces: $\sum_j h_j = (2)(-1) + (n-2)(+1) = n - 4$. Por lo tanto:

$$H A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = (n - 4) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]. \tag{4.20}$$

4.3. Surgimiento de la simetría dual.

En la simetría de Poincaré, las traslaciones no actúan linealmente sobre los espinores. En el espacio de momentos, estas transformaciones corresponden a conservación de momento y están asociadas a las amplitudes mediante la distribución delta:

$$\delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j^{\dot{a}a} \right).$$

Para decodificar esta información es necesario incluir nuevas variables [6, 24]. La conservación de momento se puede representar gráficamente como en la siguiente imagen:

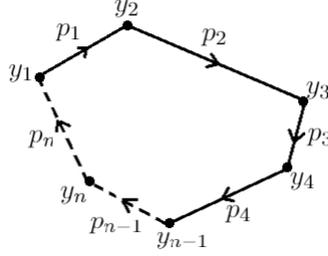


Figura 4.1

Eligiendo representar el contorno anterior mediante sus vértices, entonces se definen:

$$(y_j)^{\dot{a}a} - (y_{j+1})^{\dot{a}a} = (p_j)^{\dot{a}a}, \quad (4.21)$$

dichos vértices se encuentran en un espacio dual y por consecuencia son llamadas *coordenadas duales* o bien, variables de zona o región, por lo cual no son coordenadas del espacio-tiempo, sino variables duales de momento con dimensión de masa uno. Es decir:

$$y_j^\mu \neq (t, x, y, z).$$

Es posible también describir las coordenadas duales y_j a partir de un punto arbitrario en el espacio dual, por ejemplo y_1 :

$$(y_j)^{\dot{a}a} = (y_1)^{\dot{a}a} - \sum_{k=1}^{j-1} |p_k\rangle^{\dot{a}} |p_k|^a. \quad (4.22)$$

En el espacio dual la conservación de momento de un sistema de n partículas corresponde a la condición de periodicidad: $y_{n+1} = y_1$ [18, 25]. Se puede ver que el arreglo de momentos influye de manera fuerte en las definiciones de las coordenadas duales por lo que se necesita una convención

al respecto, la cual en el caso de (Super) Yang-Mills es el ordenamiento de color, el cual permite definir:

$$y_{jk} \equiv y_j - y_k = p_j + p_{j+1} + \cdots + p_{k-1}.$$

Con las descripciones hechas hasta ahora se puede estudiar una nueva simetría conforme en las coordenadas duales y llamada *simetría dual conforme*. Debido a que (4.21) es invariante bajo traslaciones, se garantiza que las amplitudes sean traslacionalmente invariantes en el espacio- y , donde P^μ es el operador correspondiente y $K^\mu = IP^\mu I$ es el generador de los *boosts*. Dado lo anterior, la propiedad dual conforme de la amplitud puede ser extraída simplemente de estudiar cómo la amplitud transforma bajo inversiones I (4.4) para lo cual hay que observar cómo transforman cada uno de los objetos que la componen, como las coordenadas en sí:

$$I[y_{ab}] = \frac{y_{b\dot{a}}}{y^2} \equiv (y^{-1})_{b\dot{a}}, \quad (4.23)$$

tal que:

$$I^2[y_{ab}] = I\left[\frac{y_{b\dot{a}}}{y^2}\right] = \frac{y_{ab}/y^2}{(y_{ab}/y^2)^2} = \frac{y_{ab}/y^2}{1/y^2} = y_{ab}, \quad \text{i.e.,} \quad I^2 = \mathbb{1}.$$

Mientras que la resta de éstas:

$$\begin{aligned} I[(y_{jk})_{a\dot{b}}] &= \frac{(y_j)_{b\dot{a}}}{y_j^2} - \frac{(y_k)_{b\dot{a}}}{y_k^2} = \frac{(y_j)_{b\dot{a}}y_k^2 - y_j^2(y_k)_{b\dot{a}}}{y_j^2y_k^2} = -\frac{(y_j(y_j - y_k)y_k)_{b\dot{a}}}{y_j^2y_k^2} = -\frac{(y_{jk})_{b\dot{a}}}{y_jy_k} \\ &= -(y_k^{-1})_{b\dot{c}}(y_{jk})^{\dot{c}d}(y_j^{-1})_{d\dot{a}} = -(y_j^{-1}y_{jk}y_k^{-1})_{b\dot{a}}, \end{aligned}$$

donde en el caso $k = j + 1$ sucede que:

$$I[(y_{j,j+1})_{a\dot{b}}] = -(y_{j+1}^{-1})_{b\dot{c}}(y_{j,j+1})^{\dot{c}d}(y_j^{-1})_{d\dot{a}}. \quad (4.24)$$

Contrayendo (4.21) con los espinores cuadrados y angulares, por la ecuación de Weyl se tiene:

$$\begin{aligned} (y_{j,j+1})^{\dot{a}a}[p_j]_a &= [p_j]^a(y_{j,j+1})_{a\dot{a}} = 0, \\ \langle p_j |_{\dot{a}}(y_{j,j+1})^{\dot{a}a} &= (y_{j,j+1})_{a\dot{a}}[p_j]^{\dot{a}} = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

entonces:

$$0 = I[\langle p_j |_{\dot{a}}(y_{j,j+1})^{\dot{a}b}] = -(y_{j+1}^{-1})^{\dot{b}c}(y_{j,j+1})_{cd}(y_j^{-1})^{\dot{d}a}I[\langle p_j |_{\dot{a}}],$$

por lo que se necesita que $(y_j^{-1})^{\dot{d}a}I[\langle p_j |_{\dot{a}}] \sim |p_j\rangle^{\dot{d}}$ para que se satisfaga una de las ecuaciones (4.25), o bien:

$$I[\langle p_j |_{\dot{a}}] = \kappa_j(y_j)_{a\dot{b}}|p_j\rangle^{\dot{b}} \text{ y equivalentemente } I[|p_j\rangle^{\dot{a}}] = \kappa_j\langle p_j |_{\dot{b}}(y_j)^{\dot{b}a}, \quad (4.26)$$

donde κ_j es un factor arbitrario de peso que depende de y . Con lo cual se puede calcular la inversión de un producto de espinores angulares:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[\langle p_j p_{j+1} \rangle] &= \kappa_{j+1} \langle p_{j+1} |_{\dot{b}} (y_{j+1})^{\dot{b}a} \kappa_j (y_j)_{a\dot{c}} | p_j \rangle^{\dot{c}} \\
&= \kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_{j+1} |_{\dot{b}} (y_{j+1})^{\dot{b}a} (y_{j+1})_{a\dot{c}} | p_j \rangle^{\dot{c}} \\
&= \kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_{j+1} |_{\dot{b}} (y_{j+1})^{\dot{b}a} (- (y_{j+1})_{a\dot{c}} \langle p_j |_{\dot{c}}) \\
&= -\kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_{j+1} |_{\dot{b}} (y_{j+1}^2)^{\dot{b}\dot{c}} \langle p_j |_{\dot{c}} \\
&= -\kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_{j+1} |_{\dot{b}} y_{j+1}^2 | p_j \rangle^{\dot{b}},
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{I}[\langle p_j p_{j+1} \rangle] = \kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_j p_{j+1} \rangle y_{j+1}^2. \quad (4.27)$$

A partir de (4.21) se puede ver que $(y_{j,j+1})^{\dot{a}a} = -|p_j\rangle^{\dot{a}} [p_j]_a$ y además $(y_{j,j+1})_{a\dot{a}} = -[p_j]_a \langle p_j |_{\dot{a}}$, expresiones las cuales si se contraen con $\langle p_{j+1} |_{\dot{a}}$ y $|p_{j+1}\rangle^{\dot{a}}$ respectivamente, queda entonces para $[p_j]^a$ y $[p_j]_a$:

$$[p_j]^a = \frac{\langle p_{j+1} |_{\dot{a}} (y_{j,j+1})^{\dot{a}a}}{\langle p_j p_{j+1} \rangle}, \quad [p_j]_a = -\frac{(y_{j,j+1})_{a\dot{a}} |p_{j+1}\rangle^{\dot{a}}}{\langle p_j p_{j+1} \rangle}, \quad (4.28)$$

por lo que es claro que en este espacio dual los espinores cuadrados y angulares no son independientes y entonces ya es posible ver cada una de las bases para los distintos espacios:

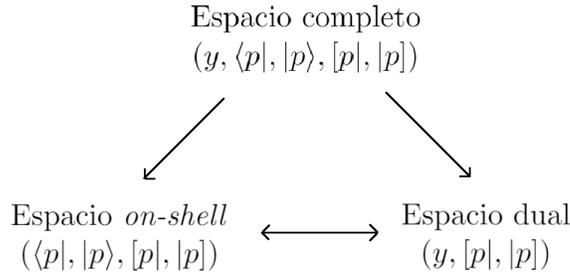


Figura 4.2: Bases en los distintos espacios

Como (4.24), (4.26) y (4.27) muestran la inversión de cada uno de los elementos de las expresiones (4.28), entonces la inversión de $[p_j]^a$ queda como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[[p_j|^a] &= \mathbb{I} \left[\frac{\langle p_{j+1} | \dot{a}(y_{j,j+1})^{\dot{a}a} \rangle}{\langle p_j p_{j+1} \rangle} \right] \\
&= \frac{-(y_j^{-1})^{\dot{a}b} (y_{j,j+1})_{b\dot{d}} (y_{j+1}^{-1})^{\dot{d}a} \kappa_{j+1} (y_{j+1})_{a\dot{c}} |p_{j+1}\rangle^{\dot{c}}}{\kappa_j \kappa_{j+1} \langle p_j p_{j+1} \rangle y_{j+1}^2} \\
&= -\frac{(y_j)^{\dot{a}b} (y_{j,j+1})_{b\dot{d}} \delta_{\dot{c}}^{\dot{d}} |p_{j+1}\rangle^{\dot{c}}}{\kappa_j y_j^2 y_{j+1}^2 \langle p_j p_{j+1} \rangle} \\
&= \frac{1}{\kappa_j y_j^2 y_{j+1}^2} (y_j)^{\dot{a}b} \left(-\frac{(y_{j,j+1})_{b\dot{c}} |p_{j+1}\rangle^{\dot{c}}}{\langle p_j p_{j+1} \rangle} \right)
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{I}[[p_j|^a] = \tilde{\kappa}_j (y_j)^{\dot{a}b} |p_j]_b \text{ y equivalentemente } \mathbb{I}[[p_j]_a] = \tilde{\kappa}_j |p_j]^b (y_j)_{b\dot{a}}, \quad (4.29)$$

con $\tilde{\kappa}_j = (\kappa_j y_j^2 y_{j+1}^2)^{-1}$.

Así, análogamente a (4.27) se puede calcular la inversión de un producto de espinores cuadrados:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[[p_j p_{j+1}]] &= \tilde{\kappa}_{j+1} [p_{j+1}]^b (y_{j+1})_{b\dot{a}} \tilde{\kappa}_j (y_j)^{\dot{a}c} |p_j]_c \\
&= \tilde{\kappa}_j \tilde{\kappa}_{j+1} [p_{j+1}]^b (y_{j+1})_{b\dot{a}} (y_j)^{\dot{a}c} |p_j]_c \\
&= \tilde{\kappa}_j \tilde{\kappa}_{j+1} [p_{j+1}]^b (y_{j+1})_{b\dot{a}} (- (y_{j+1})_{\dot{c}}^{\dot{a}} |p_j]_c) \\
&= -\tilde{\kappa}_j \tilde{\kappa}_{j+1} [p_{j+1}]^b (y_{j+1}^2)_{bc} |p_j]_c \\
&= -\tilde{\kappa}_j \tilde{\kappa}_{j+1} [p_{j+1}]^b y_{j+1}^2 |p_j]_b, \\
\therefore \mathbb{I}[[p_j p_{j+1}]] &= \tilde{\kappa}_j \tilde{\kappa}_{j+1} [p_j p_{j+1}] y_{j+1}^2. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Finalmente, para construir las amplitudes los objetos deben ser funciones invariantes de Lorentz que dependan sólo de y_j , $\langle p_j |$, $|p_j \rangle$, $[p_j]$ y $]p_j]$ construídas a partir de las transformaciones duales conformes definidas anteriormente. Eligiendo $\kappa_j \equiv 1/y_j^2$ [26] se llega a que $\tilde{\kappa}_j \equiv 1/y_{j+1}^2$. Por lo tanto (4.26) se escribe como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[\langle p_j | \dot{a}] &= \frac{1}{y_j^2} (y_j)_{a\dot{b}} |p_j \rangle^{\dot{b}a} = (y_j^{-1})_{a\dot{b}} |p_j \rangle^{\dot{b}}, \\
\mathbb{I}[|p_j \rangle^{\dot{a}}] &= \langle p_j |_{\dot{b}} \frac{1}{y_j^2} (y_j)^{b\dot{a}} = \langle p_j |_{\dot{b}} (y_j^{-1})^{\dot{b}a},
\end{aligned} \quad (4.31)$$

mientras que (4.29):

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[[p_j]^a] &= \frac{1}{y_{j+1}^2} (y_j)^{\dot{a}b} |p_j]_b = \frac{(y_{j+1})^{\dot{a}b}}{y_{j+1}^2} |p_j]_b = (y_{j+1}^{-1})^{\dot{a}b} |p_j]_b, \\
\mathbb{I}[[p_j]_a] &= [p_j]^b \frac{1}{y_{j+1}} (y_j)_{b\dot{a}} = [p_j]^b \frac{(y_{j+1})_{b\dot{a}}}{y_{j+1}^2} = [p_j]^b (y_{j+1}^{-1})_{b\dot{a}}.
\end{aligned} \quad (4.32)$$

Además, para (4.27) y (4.30) se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}[\langle p_j p_{j+1} \rangle] &= \frac{1}{y_j^2} \frac{1}{y_{j+1}^2} \langle p_j p_{j+1} \rangle y_{j+1}^2 = \frac{\langle p_j p_{j+1} \rangle}{y_j^2}, \\ \mathbb{I}[[p_j p_{j+1}]] &= \frac{1}{y_{j+1}^2} \frac{1}{y_{j+2}^2} [p_j p_{j+1}] y_{j+1}^2 = \frac{[p_j p_{j+1}]}{y_{j+2}^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sin embargo todas las demás contracciones $\langle p_j p_k \rangle$ y $[p_j p_k]$ tales que $k \neq j + 1$ no son covariantes bajo la simetría dual conforme.

Resumiendo:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}[y_{ab}] &= (y^{-1})_{ab}, \\ \mathbb{I}[\langle p_j | \dot{a} \rangle] &= (y_j^{-1})_{ab} |p_j \rangle^{\dot{b}}, \quad \mathbb{I}[|p_j \rangle^{\dot{a}}] = \langle p_j |_{\dot{b}} (y_j^{-1})^{\dot{b}a}, \\ \mathbb{I}[|p_j \rangle^a] &= (y_{j+1}^{-1})^{\dot{a}b} |p_j \rangle_b, \quad \mathbb{I}[|p_j \rangle_a] = [p_j]^b (y_{j+1}^{-1})_{b\dot{a}}, \\ \mathbb{I}[\langle p_j p_{j+1} \rangle] &= \langle p_j p_{j+1} \rangle / y_j^2, \quad \mathbb{I}[[p_j p_{j+1}]] = [p_j p_{j+1}] / y_{j+2}^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Así, se tienen tres distintas descripciones para la amplitudes que sin embargo son equivalentes en el espacio *on-shell* ($\langle p|$, $|p\rangle$, $[p|$, $|p]$), el espacio completo (y , $\langle p|$, $|p\rangle$, $[p|$, $|p]$) y el espacio dual (y , $[p|$, $|p]$) [26, 27].

4.3.1. Amplitudes

Recordando la fórmula de Parke-Taylor para amplitudes MHV de gluones a nivel árbol (3.15):

$$A[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] = \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \delta^4(P),$$

se puede ver que todos excepto uno de los elementos del lado derecho son de la forma $\langle p_j p_{j+1} \rangle$. El elemento que no está descrito por lo anterior es el $\langle p_n p_1 \rangle$ por lo que hace falta ver cómo éste se comporta ante inversiones.

Para esto hay que retomar la condición cíclica: $y_{n+1} = y_1$ teniendo así, a partir de (4.21), que:

$$\begin{aligned} (y_n)_{a\dot{a}} - (y_1)_{a\dot{a}} &= (p_n)_{a\dot{a}} \\ \therefore (y_n)_{a\dot{a}} |p_n \rangle^{\dot{a}} &= (y_1)_{a\dot{a}} |p_n \rangle^{\dot{a}}. \end{aligned}$$

Siguiendo la misma línea que llevó a encontrar (4.27) se llega a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}[\langle p_n p_1 \rangle] &= \kappa_1 \langle p_1 |_{\dot{b}} (y_1)^{\dot{b}a} \kappa_n (y_n)_{a\dot{c}} | p_n \rangle^{\dot{c}} \\
&= \kappa_1 \kappa_n \langle p_1 |_{\dot{b}} (y_1)^{\dot{b}a} (y_n)_{a\dot{c}} | p_n \rangle^{\dot{c}} \\
&= \kappa_1 \kappa_n \langle p_1 |_{\dot{b}} (y_1)^{\dot{b}a} (- (y_1)_{a\dot{c}} | p_n |_{\dot{c}}) \\
&= -\kappa_1 \kappa_n \langle p_1 |_{\dot{b}} (y_1^2)^{\dot{b}\dot{c}} \langle p_n |_{\dot{c}} \\
&= -\kappa_1 \kappa_n \langle p_1 |_{\dot{b}} y_1^2 | p_n \rangle^{\dot{b}}, \\
\therefore \mathbb{I}[\langle p_n p_1 \rangle] &= \kappa_1 \kappa_n \langle p_n p_1 \rangle y_1^2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Y como $\kappa_j = 1/y_j^2$, entonces:

$$\mathbb{I}[\langle p_n p_1 \rangle] = \frac{1}{y_1^2} \frac{1}{y_n^2} \langle p_n p_1 \rangle y_1^2 = \frac{\langle p_n p_1 \rangle}{y_n^2}. \tag{4.36}$$

Así, juntando (4.27) y (4.36) se puede obtener la inversión de una amplitud de gluones MHV a nivel árbol:

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} \left[\frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \right] &= \frac{\mathbb{I}[\langle p_1 p_2 \rangle^4]}{\mathbb{I}[\langle p_1 p_2 \rangle] \mathbb{I}[\langle p_2 p_3 \rangle] \cdots \mathbb{I}[\langle p_n p_1 \rangle]} \\
&= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle / (y_1^2)^4}{(\langle p_1 p_2 \rangle / y_1^2) (\langle p_2 p_3 \rangle / y_2^2) \cdots (\langle p_n p_1 \rangle / y_n^2)} \\
&= \frac{y_1^2 y_2^2 \cdots y_n^2}{(y_1^2)^4} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \\
\therefore \mathbb{I} \left[\frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} \right] &= \frac{1}{y_1^8} \left(\prod_{j=1}^n y_j^2 \right) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Considerando ahora la amplitud completa, es decir, metiendo en juego la conservación de momento, se debe hacer ver a ésta como una condición de las coordenadas duales. Lo anterior es realmente sencillo, pues la equivalencia yace en la relación cíclica que estas coordenadas satisfacen: $y_{n+1} = y_1$, por lo que:

$$\delta^4 \left(\sum_{j=1}^n p_j \right) \longrightarrow \delta^4(y_1 - y_{n+1}).$$

Como esta delta satisface $\int d^4 y_1 \delta^4(y_1 - y_{n+1}) = 1$ y dado que $\mathbb{I}[d^4 y_1] = (y_1^{-2})^4 d^4 y_1$, con y_1^{-8} el jacobiano, entonces se necesita que para que la relación integral se siga satisfaciendo bajo la inversión la delta transforme como [6][26]:

$$I[\delta^4(y_1 - y_{n+1})] = y_1^8 \delta^4(y_1 - y_{n+1}), \quad (4.38)$$

por lo que, juntando (4.37) y (4.38), la inversión de la amplitud de gluones MHV a nivel árbol queda como:

$$I[A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]] = \frac{1}{y_1^8} \left(\prod_{j=1}^n y_j^2 \right) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \cdots \langle p_n p_1 \rangle} y_1^8 \delta^4(y_1 - y_{n+1})$$

$$\therefore I[A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]] = \left(\prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+]. \quad (4.39)$$

Con lo cual se observa que bajo inversión dual conforme la amplitud (3.15) transforma covariantemente con el mismo peso en cada pata del diagrama correspondiente, a dicho peso se le conoce como *peso conforme*; sin embargo es importante notar que las contracciones $\langle p_i p_j \rangle$ tales que $|i - j| > 1$ no son covariantes.

Así, las amplitudes de gluones MHV donde los gluones de helicidad negativa no están en puntos adyacentes no son conformes duales, por lo tanto las amplitudes con un desplazamiento $-|p_1, p_2\rangle$ y otras amplitudes de gluones se comportan de manera distinta ante la simetría dual conforme.

Y es justo el operador de inversión el que genera la simetría dual conforme a partir de la simetría de Poincaré, por ejemplo se tiene que [6]:

$$K_{a\dot{a}} = IP_{a\dot{a}}I, \quad (4.40)$$

donde, en analogía con las coordenadas del espacio tiempo se puede tomar el operador de traslaciones en el espacio dual como [18]:

$$P_{a\dot{a}} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{a\dot{a}}}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
K_{a\dot{a}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= \mathbb{I}P_{a\dot{a}}\mathbb{I} [A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+]] \\
&= \mathbb{I}P_{a\dot{a}} \left[\left(\prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right] \\
&= \mathbb{I} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \left(\prod_{j=1}^n y_j^2 A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right) \right] \\
&= \mathbb{I} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right. \\
&\quad \left. + \prod_{j=1}^n y_j^2 \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \delta^4(y_1 - y_{n+1}) \right]
\end{aligned}$$

como $f(x)\delta'(x) = -f'(x)\delta(x)$, se tiene:

$$\begin{aligned}
K_{a\dot{a}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= \mathbb{I} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \dots \langle p_n p_1 \rangle} \delta^4(y_1 - y_{n+1}) \right] \\
&= \mathbb{I} \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k^{\dot{a}a}} \prod_{j=1}^n y_j^2 \right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] \right] \\
&= 0, \\
&\therefore K_{a\dot{a}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] = 0,
\end{aligned}$$

la cual era la última relación que hacía falta para concluir que todos los generadores de la simetría dejan invariante las amplitudes de gluones MHV a nivel árbol.

Finalmente, a manera de resumen podemos escribir que los generadores de Poincaré mantienen invariante la amplitud mientras que aplicar los operadores de helicidad y de inversión la hacen covariante. Matemáticamente esto se ve como:

$$\begin{aligned}
P_{a\dot{a}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= 0, \\
M_{ab}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= 0, \\
M_{\dot{a}\dot{b}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= 0, \\
DA_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, \dots, p_n^+] &= 0, \\
K_{a\dot{a}}A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= 0, \\
HA_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= (n-4)A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+], \\
IA_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+] &= \left(\prod_{j=1}^n y_j^2\right) A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+ \dots, p_n^+].
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Capítulo 5

Conclusiones

Como se pudo observar a lo largo de este trabajo, el formalismo de helicidad es un método alternativo para el cálculo de amplitudes de gluones que no sólo se presenta como uno más simple al usual cálculo de trazas, sino que también permite estudiar la simetría dual conforme en dichos procesos. Cabe mencionar que se puede trabajar también en un régimen en el cual las partículas tengan masa para lo cual se han de redefinir los espinores $\langle \cdot |$, $|\cdot \rangle$, $[\cdot |$ y $|\cdot]$ agregándoles un término que incluya las masas de las partículas que se quieren describir. También cabe mencionar que este formalismo no se limita a gluones, sino que las amplitudes construídas a partir de estas reglas se pueden aplicar a otras teorías como la propia QED, la misma $\mathcal{N} = 4$ SYM pero ahora considerando sus partes fermiónica y/o supersimétrica o hasta supergravedad, teoría en la cual, como se puede ver en: [6], los cálculos de amplitudes se pueden calcular como volúmenes de politopos, los cuales son la generalización de un polígono en dimensiones ≥ 4 .

Como se ve en (3.15), bajo el formalismo de helicidad, las amplitudes a nivel árbol son funciones racionales de $\langle p_i p_j \rangle$ o $[p_i p_j]$ tales que tienen una dimensión de masa (energía) finita, como se ve en (3.1). Sin embargo, hay restricciones a estas funciopnes dadas por la física del problema, como por ejemplo el tipo de polos que tienen, los cuales se estudian en las relaciones de recursión que permiten después obtener la fórmula de Parke-Taylor. Tales relaciones utilizan sólo información de objetos invariantes de norma y su funcionalidad es exponer la estructura matemática de las amplitudes.

Finalmente, la simetría dual conforme emerge de una manera tal que se pude observar que con el cambio que se le ha realizado a los objetos que representan las partículas la información se ha mantenido, es decir, se ha demostrado que los generadores de la simetría conforme dejan invariantes las amplitudes bajo el formalismo de helicidad así como sucede también en una base de espín y sin utilizar los objetos aquí introducidos. Más allá de eso, lo que este formalismo nos ha permitido en este apartado es poder utilizar sólo grados de libertad *on-shell* manteniendo una simetría global, pues de manera común se utilizan grados de libertad de este estilo en normas de cono de luz o de

conos tipo espacio pero en tal caso dichas normas no son invariantes de Lorentz [28].

Apéndice A

Reglas de Feynman

Para construir los diagramas y poder calcular las amplitudes correspondientes es necesario seguir una serie de convenciones conocidas como las *reglas de Feynman*. [16]

1. Notación:

Se asignan flechas a las líneas de la siguiente manera:

- En las líneas externas las flechas que apuntan hacia el vértice indican partículas entrantes o antipartículas salientes, mientras que las que apuntan en dirección contraria corresponden a partículas salientes o antipartículas entrantes.
- Las flechas en las líneas internas se colocan de tal manera que se siga el flujo de las flechas en las líneas externas.

2. Líneas externas:

La contribución de cada partícula a las líneas externas está dada por la siguiente regla:

Fermiones y quarks	:	Entrantes	$(u_{\pm}(p)c),$
		Salientes	$(\bar{u}_{\pm}(p)c^{\dagger}).$
Antifermiones y antiquarks	:	Entrantes	$(\bar{v}_{\pm}(p)c^{\dagger}),$
		Salientes	$(v_{\pm}(p)c).$
Fotones	:	Entrantes	$(\epsilon_{\mu}^*),$
		Salientes	$(\epsilon_{\mu}).$
Gluones	:	Entrantes	$(\epsilon_{\mu}(p)a^a),$
		Salientes	$(\epsilon_{\mu}^*(p)a^{a*}),$

donde c, c^\dagger son factores de color para quarks y antiquarks son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para los colores rojo, azul y verde, respectivamente, mientras que para el caso de fermiones y antifermiones este factor no se toma en cuenta. Mientras tanto a es también un factor de color pero para los gluones el cual se define análogo a c pero con vectores de 8 filas.

3. Factores de vértice:

En QED la aportación a la amplitud de cada vértices está dada por un factor

$$ig_e \gamma^\mu,$$

donde g_e es una constante que depende de la teoría.

Por otro lado, para QCD se tienen varios casos:

$$\begin{aligned} \text{Quark-gluon} & : & -i\frac{g_s}{2}\lambda^a\gamma^\mu, \\ \text{Tres gluones} & : & -g_s f^{abc} [g_{\mu\nu}(p_1 - p_2)_\rho + g_{\nu\rho}(p_2 - p_3)_\mu + g_{\rho\mu}(p_3 - p_1)_\nu], \\ \text{Cuatro gluones} & : & -ig_s^2 [f^{abe} f^{cde} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \\ & & + f^{ace} f^{dbe} (g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma})]^1, \end{aligned}$$

con g_s la constante de la teoría y λ^a las matrices de Gell-Mann.

4. Propagadores:

La contribución de cada partícula a las líneas internas está dada por la siguiente regla:

$$\begin{aligned} \text{Fermiones, antifermiones, quarks y antiquarks} & : & i\frac{\not{q} + m}{q^2 - m^2}, \\ \text{Fotones} & : & -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}, \\ \text{Gluones} & : & -i\frac{g_{\mu\nu}\delta^{ab}}{q^2}. \end{aligned}$$

¹Hay una suma implícita sobre e .

Apéndice B

Propiedades de los espinores

Usando la convención de la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, se definen:

$$(\sigma^\mu)_{ab} = (1, \sigma^i)_{ab}, \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}\dot{b}} = (1, -\sigma^i)^{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\text{B.1})$$

donde σ^i son las matrices de Pauli.

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Los índices de los espinores con dos entradas se suben y bajan usando:

$$\varepsilon^{ab} = \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon_{ab} = -\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\text{B.3})$$

tal que $\varepsilon_{ab}\varepsilon^{bc} = \delta_a^c$.

De lo anterior, se obtienen las siguientes propiedades:

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} = \varepsilon^{ab}\varepsilon^{\dot{a}\dot{b}}(\sigma^\mu)_{b\dot{b}}, \quad (\text{B.4})$$

$$(\sigma^\mu)_{a\dot{a}}(\sigma^\mu)_{b\dot{b}} = -2\varepsilon_{ab}\varepsilon_{\dot{a}\dot{b}}, \quad (\text{B.5})$$

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_a^b = -2\eta^{\mu\nu}\delta_a^b, \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = \text{Tr}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu) = -2\eta^{\mu\nu}. \quad (\text{B.7})$$

Para 4-momentos $p^\mu = (p^0, p^i) = (E, p^i)$ con $p^\mu p_\mu = -m^2$, se definen los *espinores de bi-momento*:

$$p_{a\dot{b}} \equiv p_\mu(\sigma^\mu)_{a\dot{b}}, \quad p^{\dot{a}b} \equiv p_\mu(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}b}, \quad (\text{B.8})$$

donde su determinante es:

$$\det p = -p^\mu p_\mu = m^2. \quad (\text{B.9})$$

El conjugado de Dirac $\bar{\Psi}$ se define como:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \beta, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\dot{b}}^{\dot{a}} \\ \delta_a^{\dot{b}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Nótese que la matrix β es la misma que γ^0 pero con diferente estructura de índices.

Existen otras identidades que los espinores satisfacen, las cuales se enlistan a continuación:

$$\begin{aligned} [p|^a &= \varepsilon^{ab} |p]_b, & [p]_a &= \varepsilon_{ab} |p]^b, \\ |p\rangle^{\dot{a}} &= \varepsilon^{\dot{a}\dot{b}} \langle p|_{\dot{b}}, & \langle p|_{\dot{a}} &= \varepsilon_{\dot{a}\dot{b}} |p\rangle^{\dot{b}}, \\ p_{ab} &= -|p]_a \langle p|_b, & p^{\dot{a}\dot{b}} &= -|p\rangle^{\dot{a}} [p]^{\dot{b}}, \\ \langle pq \rangle &= \langle p|_{\dot{a}} |q\rangle^{\dot{a}}, & [pq] &= [p]^a |q]_a, \\ \langle pq \rangle [pq] &= 2p \cdot q = (p+q)^2, \\ [k|\gamma^\mu |p\rangle &= \langle p|\gamma^\mu |k], & [k|\gamma^\mu |p\rangle^* &= [p|\gamma^\mu |q] \quad \text{para } p, k \text{ reales,} \\ \langle p|P|k\rangle &= \langle p|_{\dot{a}} P^{\dot{a}b} |k]_b, & \langle p|y_1 \cdot y_2 |k\rangle &= \langle p|_{\dot{a}} (y_1)^{\dot{a}b} (y_2)_{bc} |k\rangle^{\dot{c}}, \\ \langle p|q|k\rangle &= -\langle pq\rangle [qk], & \langle 1|\gamma^\mu |2\rangle \langle 3|\gamma_\mu |4\rangle &= 2\langle 13\rangle [24]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Los espinores conmutan analíticamente:

$$|-p\rangle = -|p\rangle, \quad |-p] = -|p]. \quad (\text{B.12})$$

La relacion entre los espinores angulares y rectangulares está dada por:

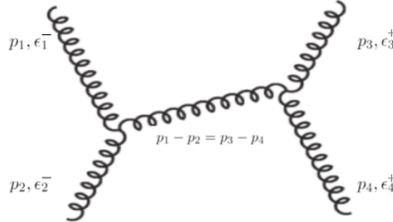
$$[p|^a = (|p\rangle^{\dot{a}})^*, \quad \langle p|_{\dot{a}} = ([p]_a)^*, \quad (\text{B.13})$$

si p^μ es real.

Apéndice C

Cálculo de $A_4[p_1^-, p_2^-, p_3^+, p_4^+]$

A partir de las reglas de Feynman (Apéndice A) se puede construir la amplitud para 4 gluones. Eligiendo los momentos de referencia q de los vectores de polarización ϵ como $q_1 = q_2 = p_4$ y $q_3 = q_4 = p_1$ se tiene para la amplitud MHV:



$$\begin{aligned}
 iA_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, p_4^+] &= \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 \left(\frac{-i}{s_{12}}\right) \left(\epsilon_1^- \cdot \epsilon_2^- (p_1 - p_2)^\mu + (\epsilon_2^\mu)^- \epsilon_1^- \cdot (2p_2 + p_1) \right. \\
 &+ \left. (\epsilon_1^\mu)^- \epsilon_2^- \cdot (-2p_1 - p_2) \right) \left(\epsilon_3^+ \cdot \epsilon_4^+ (p_3 - p_4)_\mu + (\epsilon_\mu^+)_4 \epsilon_3^+ \cdot (2p_4 + p_3) \right. \\
 &+ \left. (\epsilon_\mu^+)_3 \epsilon_4^+ \cdot (-2p_3 - p_4) \right) \\
 &= -\frac{2i}{s_{12}} (\epsilon_2^- \cdot \epsilon_3^+) (\epsilon_1^+ \cdot p_2) (\epsilon_4^+ \cdot p_3) \\
 &= -\frac{2i}{s_{12}} \left(-\frac{2}{2} \frac{[p_4 p_3] \langle p_1 p_2 \rangle}{[p_4 p_2] \langle p_1 p_3 \rangle} \right) \left(-\frac{[p_4 p_2] \langle p_2 p_1 \rangle}{\sqrt{2} [p_4 p_1]} \right) \left(+\frac{\langle p_1 p_3 \rangle [p_3 p_4]}{\sqrt{2} \langle p_1 p_4 \rangle} \right) \\
 &= -i \frac{\langle p_1 p_2 \rangle [p_3 p_4]^2}{[p_1 p_2] \langle p_1 p_4 \rangle [p_1 p_4]},
 \end{aligned}$$

Recordando que $\langle p_j p_i \rangle = -\langle p_i p_j \rangle$, $[p_j p_i] = -[p_i p_j]$, $\langle p_i p_i \rangle = [p_i p_i] = 0$, además $\sum_i [p_j p_i] \langle p_i p_k \rangle = 0$ y que $s_{34} = s_{12}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, p_4^+] &= -\frac{\langle p_1 p_2 \rangle (\langle p_2 p_3 \rangle [p_3 p_4]) ([p_3 p_4] \langle p_3 p_4 \rangle)}{[p_1 p_2] \langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_1 p_4 \rangle [p_1 p_4]} \\
&= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle (-\langle p_2 p_1 \rangle [p_1 p_4]) ([p_1 p_2] \langle p_1 p_2 \rangle)}{[p_1 p_2] \langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_4 p_1 \rangle [p_1 p_4]} \\
&= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^3}{\langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_4 p_1 \rangle}, \\
\therefore A_n[p_1^-, p_2^-, p_3^+, p_4^+] &= \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^4}{\langle p_1 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_4 p_1 \rangle}, \tag{C.1}
\end{aligned}$$

el cual es el mismo resultado que el dado por la fórmula de Parke-Taylor (3.13).

Bibliografía

- [1] Bo Feng Ruth Britto, Freddy Cachazo. New Recursion Relations for Tree Amplitudes of Gluons. *Nucl.Phys.*, B715:499–522, 2005.
- [2] Bo Feng Edward Witten Ruth Britto, Freddy Cachazo. Direct Proof Of Tree-Level Recursion Relation In Yang-Mills Theory. *Phys.Rev.Lett.*, 94:181602, 2005.
- [3] Mark Srednicki. *Quantum Field Theory*. 2006.
- [4] J. M. Henn y J. C. Plefka. *Scattering Amplitudes in Gauge Theories*. Springer, 2014.
- [5] Matthew D. Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [6] H. Elvang y Y. Huang. *Scattering amplitudes in gauge theory and gravity*. Cambridge University Press, 2015.
- [7] Kitran Macey M. Colwell. *Dualities, Helicity Amplitudes, and Little Conformal Symmetry*. Springer, 2017.
- [8] Lance Dixon. Calculating scattering amplitudes efficiently. *arXiv:hep-ph/9601359v2*, 1996.
- [9] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books Publishing, 1995.
- [10] E. D’Hoker y D.H. Phong. Lectures on Supersymmetric Yang-Mills Theory and Integrable Systems. *arXiv:hep-th/9912271v1*, 1999.
- [11] Michael Dine. *Supersymmetry and String Theory. Beyond the Standard Model*. Cambridge University Press, 2007.
- [12] Stefano Kovacs. N=4 supersymmetric Yang-Mills theory and the AdS/SCFT correspondence. *arXiv:hep-th/9908171v1*, 1999.
- [13] J.M. Henn. Duality between Wilson loops and gluon amplitudes. *Fortsch.Phys.*, 57:729–822, 2009.

- [14] J. Alvarez-Jimenez I. Cortese J. Antonio García D. Gutiérrez-Ruiz y J. David Vergara. Relativistic Runge-Lenz vector: from N=4 SYM to SO(4) scalar field theory. *arXiv:1805.12165v1 [hep-th]*, 2018.
- [15] Theodor Schuster. Color ordering in QCD. *Phys. Rev. D*, 89:105022, 2014.
- [16] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY-VHC Verlag GmbH Co. KGaA, 2004.
- [17] N. Arkani-Hamed J. Bourjaily F. Cachazo A. Goncharov A. Postnikov y J. Trnka. *Grassmannian Geometry of Scattering Amplitudes*. Cambridge University Press, 2016.
- [18] J.M. Drummond. Hidden Simplicity of Gauge Theory Amplitudes. *Class.Quant.Grav.*, 27:214001, 2010.
- [19] Yikun Wang. On-shell Recursion Relations of Scattering Amplitudes at Tree-level. Notes for Journal Club, 2016.
- [20] Brecht Truijen. Britto-Cachazo-Feng-Witten Recursion. An Introduction. Master's thesis, Utrecht University, Institute for Theoretical Physics, 2012.
- [21] N. Arkani-Hamed y J. Kaplan. On Tree Amplitudes in Gauge Theory and Gravity. *JHEP*, 0804:076, 2008.
- [22] P. Di Francesco P. Mathieu y D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Springer, 1997.
- [23] Edward Witten. Perturbative Gauge Theory As A String Theory In Twistor Space. *Commun.Math.Phys.*, 252:189–258, 2004.
- [24] Lance J. Dixon Johannes M. Henn Jan Plefka y Theodor Schuster. All tree-level amplitudes in massless QCD. *JHEP*, 1101:035, 2011.
- [25] Ruth Britto. Constructing Scattering Amplitudes Lecture 3: Twistors and N=4 Supersymmetric Yang-Mills. 2010.
- [26] J.M. Drummond J. Henn G.P. Korchemsky y E. Sokatchev. Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in N=4 super-Yang-Mills theory. *Nucl.Phys.*, B828:317–374, 2010.
- [27] J.M. Drummond. Tree-level amplitudes and dual superconformal symmetry. *arXiv:1107.4544v1 [hep-th]*, 2011.
- [28] W. Siegel. Fields. *arXiv:hep-th/9912205v3*, 2005.