



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Estabilidad y simulación del Protocolo Aloha

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

José Emiliano González Muñoz

TUTOR

Dr. Sergio Iván López Ortega





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincera gratitud a mi amada familia; César Alberto, María de los Ángeles y Juan Pablo. Les agradezco su amor, cariño, comprensión, consejos y apoyo incondicional durante todos estos años. También quiero mencionar a mis tíos Sergio René, Silvia, Concepción y Consuelo por ser tan atentos y cariñosos conmigo, así como a mis abuelos José, Alicia, Paula y Eliseo por las mismas razones.

Agradezco al Dr. Sergio Iván López Ortega por su tiempo, sus consejos y su entusiasmo en las asesorías para la realización del presente trabajo. Quiero agradecer también a Rodrigo Quijón, por las buenas clases de procesos estocásticos que me impartió y por sus recomendaciones.

A mis queridos amigos que hice durante mi estadía en la UNAM; José Luis, Víctor, Pedro, Rodrigo, Amaury, Jhaziel, Wendy, Félix, Larragoitia, Carlos, Omar, Chucho, Armando, Daniel, Rolando, Juan, Yamileth, Aim y Héctor. Por los buenos momentos, las reflexiones, la ayuda y los ánimos. A Brian, Erick, Irving, Olif y Axel, por más de una década de amistad incondicional.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>4</b>
<b>1. Recurrencia en Cadenas de Markov</b>	<b>6</b>
<b>2. Una introducción a la Teoría de Colas</b>	<b>22</b>
2.1. Resultados básicos . . . . .	23
2.2. Ejemplos de cadenas de nacimiento y muerte . . . . .	31
2.3. Criterios de Kolmogorov . . . . .	35
2.4. Procesos reversibles truncados . . . . .	38
2.5. Procesos de Markov reversos . . . . .	41
2.6. Teorema de Burke . . . . .	45
<b>3. Protocolo Aloha</b>	<b>50</b>
3.1. Motivación del protocolo Aloha . . . . .	50
3.2. Supuestos . . . . .	51
3.3. Protocolo Aloha . . . . .	52
3.4. Análisis del protocolo . . . . .	55
<b>4. Estabilidad del protocolo</b>	<b>66</b>
4.1. Protocolo Aloha estable . . . . .	66

4.2. Protocolo de resolución de colisión . . . . .	70
<b>5. Simulación</b>	<b>82</b>
5.1. Cola M/M/1 . . . . .	82
5.2. Modelo de Erlang . . . . .	88
5.3. Protocolo Aloha y protocolo Aloha estable . . . . .	94
5.4. Protocolo de resolución de Colisión . . . . .	98
<b>Conclusión</b>	<b>100</b>
<b>Apéndice A.</b>	<b>102</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>

# Introducción

En la presente tesis analizaremos algunas cualidades del modelo matemático conocido como protocolo Aloha. Dicho modelo es una red de acceso aleatorio, que intenta resolver un problema en específico: ¿Cómo podemos evitar, que al tener varias estaciones de transmisión que envían paquetes de información a un mismo destino, estos caigan en una colisión?. Un ejemplo de esto, es cuando varios teléfonos móviles intentan conectarse a una estación base. Una forma en la que podemos proceder para evitar las colisiones, es la de etiquetar las estaciones en un orden cíclico, una por una, cada estación transmitirá su respectivo mensaje hacia su destino. Cuando esto suceda, transmitirá un mensaje indicando que se acabó la transmisión, lo que permite a la siguiente estación transmitir. Si la estación no tiene algún paquete para transmisión, simplemente manda el mensaje de que no tiene nada que transmitir para que el ciclo continúe. Naturalmente nos podemos preguntar qué tipos de dificultades presenta este enfoque. Una dificultad es que, si existe una cantidad muy grande de estaciones, nos tomará mucho tiempo pasar el mensaje entre todas las estaciones. Aquí es donde entran los protocolos de transmisión.

El objetivo de esta tesis consiste en presentar un problema al que difícilmente se le asocia con la rama de los procesos estocásticos, pero que tenga una solución usando herramientas usadas en los procesos. Para que podamos estudiar los protocolos a través de las matemáticas, en el primer capítulo veremos resultados que tienen que ver con la recurrencia positiva en Cadenas de Markov. Presentaremos algunos resultados básicos como

el teorema de Foster para recurrencia positiva de Cadenas de Markov y la propiedad fuerte de Markov. Para el segundo capítulo analizaremos resultados que tienen que ver con Teoría de Colas (puesto que el protocolo Aloha puede modelarse como una Cola discreta), necesarios para llegar al teorema de Burke. Ya en el tercer capítulo estudiaremos de lleno el protocolo Aloha, construyendo el modelo con sus supuestos y sus probabilidades de transición. También probaremos que este protocolo no es positivo recurrente y lo que implica esto en términos de los paquetes de información. En el cuarto capítulo propondremos una variación al protocolo para poder hacerlo estable, así como otro modelo, similar al Aloha, llamado protocolo de Resolución de Colisión, que también es estable y más realista que la variación. Por último, presentaremos una simulación, usando el lenguaje R de programación, de los tres Protocolos, para comprobar que la teoría concuerda con los ejemplos numéricos que proveen las simulaciones. También haremos una simulación de algunos modelos vistos en el capítulo dos, como por ejemplo el modelo de Erlang. Esta implementación computacional se hace a través de códigos de mi autoría, realizados para la presente tesis.

# Capítulo 1

## Recurrencia en Cadenas de Markov

En este capítulo estudiaremos algunos resultados básicos, pero a la vez importantes que tienen que ver con que una Cadena de Markov a tiempo discreto sea irreducible, transitoria o recurrente. Posteriormente revisaremos criterios de recurrencia positiva; estos criterios nos serán útiles en los capítulos tres y cuatro, para los sistemas de transmisión del Aloha y sus variaciones. Las definiciones y resultados utilizados en este capítulo fueron publicados por [Brémaud, 2013].

Denotaremos como  $p(i, j)$  a la probabilidad de transición en un paso del estado  $i$  al estado  $j$  y a  $p(i, j)^n$  a la probabilidad en  $n$  pasos. Estamos suponiendo que todas las Cadenas de Markov en esta tesis son homogéneas, por lo que omitiremos mencionarlo de aquí en adelante.

**Definición 1.0.1** *El tiempo de retorno (o de regreso) a un estado  $i \in E$  es*

$$T_i = \inf\{n \geq 1 | X_n = i\}.$$

**Definición 1.0.2** *Los tiempos de retorno sucesivos a un estado  $i \in E$  son aquellos*



que cumplen:

$$\tau_2 = \inf\{n \geq T_1 | X_n = i\},$$

.

.

.

$$\tau_m = \inf\{m \geq \tau_{m-1} | X_m = i\}.$$

**Definición 1.0.3** Un **tiempo de paro** con respecto a un proceso estocástico  $\{X_t\}$  es una variable aleatoria  $\tau$ , que toma valores en  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$  tales que para  $m \geq 0$ , el evento  $\{\tau = m\}$ , se expresa en términos de  $X_0, X_1, \dots, X_{m-1}, X_m$ .

**Observación 1.0.1** Un tiempo de retorno es un tiempo de paro.

**Demostración.** Sea  $T_i$  el tiempo de regreso a  $i \in E$  con  $E$  el espacio de estados de un proceso estocástico, entonces

$$\{T_i = m\} = \{X_0 \neq i, X_1 \neq i, X_2 \neq i, \dots, X_m = i\}.$$

El conjunto anterior depende de la información del conjunto  $\{X_0, \dots, X_m\}$ , por lo que  $T_i$  es un tiempo de paro. ■

**Definición 1.0.4** El **tiempo de retorno (o de regreso)** a un espacio de estados  $F$  se define como

$$T = \inf\{n \geq 1 | X_n \in F\}.$$

De manera análoga podemos demostrar que estos tiempos de retorno, también son tiempos de paro.

Veamos a continuación, que las Cadenas de Markov satisfacen la propiedad fuerte de Markov.

**Teorema 1.0.1 (propiedad fuerte de Markov)** *Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una Cadena de Markov (abreviado C.M.), con un espacio de estados  $E$  numerable y  $\tau$  un tiempo de paro. Para todo  $i \in E$ , dado que  $X_\tau = i$  se cumple que:*

a) *El proceso posterior a  $\tau$  es independiente del proceso anterior a  $\tau$ .*

b) *El proceso posterior a  $\tau$  es una C.M.*

**Demostración.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una C.M.H. con  $\tau$  un tiempo de paro (abreviado t.d.p) y  $\{i_0, \dots, i, j_1, \dots, j\} \subset E$  con  $E$  el espacio de estados .

**Parte a).**

Notemos que

$$P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n) = \quad (1.1)$$

$$\frac{P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j, X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n)}{P(X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n)}.$$

El numerador de la expresión anterior puede escribirse como

$$\sum_{r \geq 0} P(\tau = r, X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j, X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n). \quad (1.2)$$

Cada sumando de la expresión anterior puede escribirse como

$$P(\tau = r, X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j, X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n) =$$

$$P(\tau = r, X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j, X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n) \frac{P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r)}{P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r)} =$$

$$P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n, \tau = r) P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r).$$

Ahora, dado que  $\tau \wedge n \leq n$ , para toda  $n$  en los naturales y  $\{\tau = r\}$  es un t.d.p., entonces al evento

$$B = \{X_{\tau \wedge 0}, \dots, X_{\tau \wedge n}, \tau = r\}$$

lo podemos expresar en términos de los siguientes eventos

$$\{X_0, \dots, X_\tau\}, \{\tau = r\}. \quad (1.3)$$

Por lo tanto

$$B \in \sigma\{X_0, \dots, X_\tau, \tau = r\}.$$

Como los eventos en  $\sigma\{X_0, \dots, X_\tau, \tau = r\}$  se cumple la propiedad de Markov. Le podemos aplicar dicha propiedad a  $B$  y se obtiene

$$P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n, \tau = r) =$$

$$P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i) = p^n(i, j). \quad (1.4)$$

Entonces, sustituyendo la ecuación (1.4) en la expresión (1.2), se obtiene

$$\sum_{r \geq 0} P(\tau = r, X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j, X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n) =$$

$$\sum_{r \geq 0} P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n, \tau = r) P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r) =$$

$$(1.5)$$

$$\sum_{r \geq 0} p^n(i, j) P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r) =$$

$$p^n(i, j) \sum_{r \geq 0} P(X_\tau = i, \dots, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \tau = r).$$

Realizando otra sustitución en la ecuación (1.1), se sigue que

$$\frac{p^n(i, j) P(X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n)}{P(X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n)} = p^n(i, j). \quad (1.6)$$

Por otro lado usando que  $\{X_n\}$  es una C.M., ocurre

$$P(X_{\tau+n} = j, \dots, X_{\tau+1} = j_1 | X_\tau = i) = p^n(i, j), \quad (1.7)$$

por lo que (1.6) y (1.7) son iguales. Se concluye que

$$P(X_{\tau+1} = j_1, \dots, X_{\tau+n} = j | X_\tau = i, X_{\tau \wedge 0} = i_0, \dots, X_{\tau \wedge n} = i_n) = p^n(i, j) = \quad (1.8)$$

$$P(X_{\tau+n} = j, \dots, X_{\tau+1} = j_1 | X_\tau = i),$$

que es lo que deseamos.

**Parte b).**

Definamos

$$\tau_n = \tau + n \quad (1.9)$$

para cualquier  $n$  no negativo. Como  $\tau$  es un t.d.p., entonces  $\{\tau = m\}$  depende de  $\{X_0, \dots, X_m\}$ , y puesto que  $\tau = m \leq m + n = \tau_n$ , esto implica

$$\sigma\{X_0, \dots, X_m\} \subset \sigma\{X_0, \dots, X_{m+n}\},$$

entonces

$$\sigma\{X_0, \dots, X_m\} \cup \sigma\{X_0, \dots, X_{m+n}\} \subset \sigma\{X_0, \dots, X_{m+n}\},$$

lo que implica que

$$\{\tau_n \leq n + m\} \in \{X_0, \dots, X_{n+m}\}.$$

Por lo tanto  $\tau_n$  es un tiempo de paro.

Entonces

$$P(X_{\tau+n+1} = k | X_{\tau+n} = j, \dots, X_\tau = i) = P(X_{\tau+n+1} = k | X_{\tau_n=j}, \dots, X_\tau = i) = P(X_{\tau+n+1} = k | X_{\tau_n} = j). \quad (1.10)$$

Concluimos que usando la **Parte a)**, tenemos la independencia de los procesos futuro y pasado condicionados a  $X_{\tau_n} = j$ . Por otro lado, la ecuación (1.10) no es más que  $p(j, k)$ .

Concluimos que el proceso futuro es una Cadena de Markov.

Por lo tanto se cumple que el proceso posterior y anterior del proceso con respecto a  $\tau$  son independientes y que el proceso posterior es una C.M. ■

**Teorema 1.0.2** Sean  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una Cadena de Markov con espacio de estados  $E$  y  $\{\tau_k\}_{1 \leq k}$  una sucesión de tiempos de regreso sucesivos y finitos casi seguramente de un subconjunto  $F \subset E$ . Se define el proceso  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  como  $Y_0 = X_0 = i \in F$  y  $Y_n = X(\tau_n)$  para  $n$  natural. Entonces  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es una Cadena de Markov con espacio de estados  $F$ .

**Demostración.**

$$P(Y_{n+1} = j_n | Y_n = j_{n-1}, \dots, Y_2 = j_1, Y_1 = j) = P(X(\tau_{n+1}) = j_n | X(\tau_n) = j_{n-1}, \dots, X(\tau_1) = j). \quad (1.11)$$

Por definición, y utilizando la propiedad fuerte de Markov, tenemos que la expresión anterior es igual a

$$P(X(\tau_{n+1}) = j_n | X(\tau_n) = j_{n-1}), \quad (1.12)$$

esto prueba que tenemos una Cadena de Markov. Notemos que entre el proceso  $\{X_t|t \leq \tau_{n+1}\}$  tiene la misma distribución que el proceso  $\{X_t|t \leq \tau_1\}$  pues tienen el mismo punto de inicio y las mismas probabilidades de transición. Por lo tanto:

$$P(X(\tau_{n+1}) = j_n | X(\tau_n) = j_{n-1}) = P(X(\tau_1) | X_0 = j_{n-1}). \quad (1.13)$$

Lo que prueba que las transiciones

$$P(Y_{n+1} = j_n | Y_n = j_{n-1})$$

no dependen de  $n$ , con esto probamos la homogeneidad de la Cadena. ■

**Lema 1.0.1** *Sea  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  una sub-cadena de Markov de la Cadena de Markov irreducible  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ , suponemos que el espacio de estados de  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es finito y está contenido en el espacio de estados de  $\{X_n\}_{n \geq 0}$ . Entonces la Cadena  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  debe ser irreducible.*

**Demostración.** Haremos la siguiente demostración por contrapositiva, por lo que suponemos que la Cadena de Markov  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  tiene un espacio de estados  $F \subset E$  con  $|F| = k + 1$  y es reducible.

Entonces existen dos estados, digamos  $y_0, y_k$  que pertenecen a  $F$  tales que para toda  $m$  no negativa se cumple que  $p^m(y_0, y_k) = 0$ . Por hipótesis, podemos afirmar que

$$\sum_{j=0}^k p(y_0, y_j) = 1,$$

lo que implica que para todo estado  $x_s$  que no pertenezca a  $F$ , se sigue que  $p(y_0, x_s) = 0$ . Calcularemos la probabilidad de transición que va de  $y_0$  a  $y_k$ , pero esta vez usando estados que puedan o no puedan pertenecer a  $F$  (puesto que  $F$  está contenido en el espacio de

estados de la otra Cadena). Para cualquier  $m$  no negativa podemos aplicar la fórmula de Chapman-Kolmogorov

$$p^m(y_0, y_k) = \sum_r p(y_0, x_r) p^{m-1}(x_r, y_k) =$$

$$p(y_0, x_r) p^{m-1}(x_r, y_k) + p(y_0, x_{r+1}) p^{m-1}(x_{r+1}, y_k) + \dots + p(y_0, y_i) p^{m-1}(y_i, y_k) + \dots$$

En la expresión anterior, para cada sumando hay dos posibilidades.

**Caso 1.0.1** *Primeramente, que la probabilidad de transición sea del estado  $y_0$  a uno  $x_s$ , es decir, que no se encuentre dentro de  $F$ , por lo que*

$$p(y_0, x_s) p^{m-1}(x_s, y_k) = 0,$$

porque  $p(y_0, x_s) = 0$  para cualquier  $x_s$ .

**Caso 1.0.2** *La siguiente posibilidad tiene que ver con que la probabilidad de transición vaya de  $y_0$  a otro estado  $y_i$ , es decir, el sumando toma la forma*

$$p(y_0, y_i) p^{m-1}(y_i, y_k).$$

*Aplicamos el hecho de que la Cadena es reducible y tenemos la desigualdad*

$$p^m(y_0, y_k) \geq p(y_0, y_i) p^{m-1}(y_i, y_k),$$

entonces,

$$0 \geq p(y_0, y_i)p^{m-1}(y_i, y_k).$$

Concluimos que  $p(y_0, y_i)p^{m-1}(y_i, y_k) = 0$ .

Por lo tanto

$$p^m(y_0, y_k) = 0,$$

y como  $y_0, y_k \in F \subset E$  para un  $m$  arbitrario, la Cadena  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  es reducible. ■

**Lema 1.0.2** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una C.M. irreducible con  $F$  un subconjunto de cardinalidad finita del espacio de estados  $E$ . Definimos a  $\tau(F)$  como el tiempo de regreso a  $F$ . Si  $\mathbb{E}_j[\tau(F)] < \infty$  para cualquier  $j$  que pertenezca a  $F$ , entonces la Cadena es positiva recurrente.

**Demostración.** Sean  $i \in F$  y  $T_i = \inf\{n \geq 1 | X_n = i\}$ , que es el tiempo de regreso de la Cadena a  $i$ , definimos  $Y_0 = X_0 = i$  junto con  $Y_n = X_{\tau_n}$  y aplicamos el **Teorema 1.0.2**, por lo que se cumple que  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es una C.M. con espacio de estados  $F$ . Dado que  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  es irreducible, entonces  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  lo es, y como  $|F| < \infty$ , esto implica que  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es positiva recurrente.

Definimos a  $J_i = \inf\{m \geq 1 | Y_m = X_{\tau_m} = i\}$  como el tiempo de regreso de  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  a  $i$ . Ahora, la recurrencia positiva de la Cadena asegura que  $\mathbb{E}_i[J_i] < \infty$ , también se definen  $S_0 = \tau_1$  y  $S_k = \tau_{k+1} - \tau_k$  para  $k \geq 1$  y  $f \in F$ , por lo que

$$T_i = \sum_{k=0} \mathbb{I}_{\{k < J_i\}} S_k,$$

entonces

$$\mathbb{E}_i[T_i] = \sum_{k=0} \mathbb{E}_i[\mathbb{I}_{\{k < J_i\}} S_k], \tag{1.14}$$



lo que implica a su vez que,

$$\mathbb{E}_i[\mathbb{I}_{\{k < J_i\}} S_k] = \sum_{f \in F} \mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\}} \mathbb{I}_{\{Y_k = X_{\tau_k} = f\}}].$$

Ahora,

$$\mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\}} \mathbb{I}_{\{Y_k = X_{\tau_k} = f\}}] = \mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\} \cap \{Y_k = f\}}] =$$

$$\mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\} \cap \{Y_k = f\}}] \frac{P_i(Y_k = f, k < J_i)}{P_i(Y_k = f, k < J_i)} = \mathbb{E}_i[S_k | k < J_i, X_{\tau_k} = f] P_i(k < J_i, X_{\tau_k} = f). \quad (1.15)$$

Utilizamos la propiedad fuerte de Markov (**Teorema 1.0.1**) en el proceso  $\{X_{\tau_k}\}$ , junto el t.d.p.  $\tau_k$  y observando que el evento  $\{k < j_i\}$  pertenece al pasado del proceso, la ecuación (1.15) es igual a

$$\mathbb{E}_i[S_k | X_{\tau_k} = f] P_i(X_{\tau_k} = f, k < J_i). \quad (1.16)$$

Es necesario ver también que se cumple lo siguiente,

$$\mathbb{E}_i[S_k | X_{\tau_k} = f] = \mathbb{E}_i[\tau_{k+1} - \tau_k | X_{\tau_k} = f]. \quad (1.17)$$

La igualdad (1.17) significa que es el tiempo esperado de que en el tiempo  $\tau_k$  se encuentre el proceso en el estado  $f \in F$  y se regrese a algún estado perteneciente al conjunto  $F$ , por lo que (1.17) es  $\mathbb{E}_L[\tau(F)]$ . Acotamos esto por su máximo

$$\mathbb{E}_f[\tau(F)] \leq \max_{f \in F} \mathbb{E}_f[\tau(F)].$$

Regresamos a (1.14)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[T_i] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\}}] = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{f \in F} \mathbb{E}_i[S_k \mathbb{I}_{\{k < J_i\} \cap \{X_{\tau_k} = f\}}] \right) = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{f \in F} \mathbb{E}_i[S_k | X_{\tau_k} = f] P_i(k < J_i, X_{\tau_k} = f) \right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{f \in F} \mathbb{E}_i[S_k | X_{\tau_k} = f] P_i(k < J_i) \right) = \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{f \in F} \mathbb{E}_L[\tau(F)] P_i(k < J_i) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} P_i(k < J_i) \sum_{f \in F} \mathbb{E}_i[\tau(F)] = \\ & \mathbb{E}_i[J_i] \sum_{f \in F} \mathbb{E}_f[\tau(F)] \leq (M \max_{f \in F} \mathbb{E}_f[\tau(F)]) \mathbb{E}_i[J_i] < \infty. \end{aligned}$$

Donde  $|F| = M$  puesto que es un conjunto finito.

Por lo tanto

$$\mathbb{E}_i[T_i] \leq (M \max_{f \in F} \mathbb{E}_f[\tau(F)]) \mathbb{E}_i[J_i] < \infty. \quad (1.18)$$

Concluimos que la Cadena es positiva recurrente. ■

**Teorema 1.0.3 (Foster)** *Sea  $P$  la matriz de transición de un espacio de estados  $E$  numerable, que sea irreducible y supongamos que existe una función*

$$h : E \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.19)$$

tal que  $\inf_i h(i) > -\infty$  y que

$$\sum_{k \in E} p_{i,k} h(k) < \infty, \quad (1.20)$$

para cada  $k$  en el conjunto  $F$ .

$$\sum_{k \in F} p_{i,k} h(k) \leq h(i) - \epsilon, \quad (1.21)$$

para todo  $i$  que no pertenezca a  $F$ .

Con  $|F| < \infty$  y  $\epsilon > 0$  entonces la C.M. es positiva recurrente.

**Demostración.** Sea  $X_0^n = (X_0, \dots, X_n)$ , y por hipótesis, tenemos que  $\inf_i h(i) > -\infty$ . Podemos afirmar que  $h$  es no negativa (se le puede sumar a la función una constante en caso necesario). Sea  $\tau$  el tiempo de regreso a  $F$  y definimos  $Y_n = h(X_n) \mathbb{I}_{\{n < \tau\}}$ . Demostraremos que la ecuación (1.21) es  $\mathbb{E}_i[Y_{n+1} | X_0^n]$ . Tomando  $i \notin F$  ocurre

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[Y_{n+1} | X_0^n] &= \mathbb{E}_i[Y_{n+1} \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] + \mathbb{E}_i[Y_{n+1} \mathbb{I}_{\{n \geq \tau\}} | X_0^n] = \\ &= \mathbb{E}_i[Y_{n+1} \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] + \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) \mathbb{I}_{\{n+1 < \tau\}} \mathbb{I}_{\{n \geq \tau\}} | X_0^n] = \\ &= \mathbb{E}_i[Y_{n+1} \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] + \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) \mathbb{I}_\emptyset | X_0^n] = \mathbb{E}_i[Y_{n+1} \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] = \\ &= \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) \mathbb{I}_{\{n+1 < \tau\}} \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] = \\ &= \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) \min\{\mathbb{I}_{\{n+1 < \tau\}}, \mathbb{I}_{\{n < \tau\}}\} | X_0^n] \leq \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} | X_0^n] = \\ &= \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) | X_0^n] = \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \mathbb{E}_i[h(X_{n+1}) | X_n]. \end{aligned} \quad (1.22)$$

El lado izquierdo de la identidad (1.22) se sigue de que  $\tau$  es un tiempo de regreso, entonces es tiempo de paro por lo que depende de  $X_0^n$ , lo que implica que  $1_{\{n < \tau\}}$  sea una función de  $X_0^n$ . El lado derecho de (1.22) es consecuencia de la propiedad de Markov.

Por la definición de esperanza condicional obtenemos

$$\mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \mathbb{E}_i[h(X_{n+1})|X_0^n] = \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \sum_{j \in F} h(X_n) p_{i,j},$$

y por la hipótesis (1.21) se tiene

$$\mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \sum_{j \in F} h(X_n) p_{i,j} \leq \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} (h(X_n) - \epsilon) = \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} h(X_n) - \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \epsilon. \quad (1.23)$$

Esto es cierto porque  $X_n \notin F$  con una probabilidad  $p_i$  siempre y cuando se cumpla el evento  $\{n < \tau\}$ , por lo que

$$\mathbb{E}_i[Y_{n+1}|X_0^n] \leq \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} h(X_n) - \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \epsilon = Y_n - \mathbb{I}_{\{n < \tau\}} \epsilon, \quad (1.24)$$

entonces

$$\mathbb{E}_i(\mathbb{E}_i[Y_{n+1}|X_0^n]) \leq \mathbb{E}_i[Y_n] - \epsilon \mathbb{E}_i[\mathbb{I}_{\{n < \tau\}}] = \mathbb{E}_i[Y_n] - \epsilon P_i(n < \tau),$$

lo que implica que,

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_{n+1}] \leq \mathbb{E}_i[Y_n] - \epsilon P_i(n < \tau). \quad (1.25)$$

De la desigualdad (1.25), iteramos empezando en  $n = 0$  ;

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_1] \leq \mathbb{E}_i[Y_0] - \epsilon P_i(0 < \tau),$$

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_2] \leq \mathbb{E}_i[Y_1] - \epsilon P_i(1 < \tau),$$

.

.

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_{n+1}] \leq \mathbb{E}_i[Y_n] - \epsilon P_i(n < \tau).$$

Entonces,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}_i[Y_k] \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_i[Y_k] - \epsilon \sum_{k=0}^n P_i(k < \tau),$$

lo que implica que,

$$0 \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E}_i[Y_k] - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}_i[Y_k] - \epsilon \sum_{k=0}^n P_i(k < \tau),$$

y que,

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_0] - \mathbb{E}_i[Y_{n+1}] - \epsilon \mathbb{E}_i[\tau],$$

por lo que concluimos,

$$0 \leq \mathbb{E}_i[Y_{n+1}] \leq \mathbb{E}_i[Y_0] - \epsilon \mathbb{E}_i[\tau]. \quad (1.26)$$

Ya que empezamos en el estado  $i \notin F$ , con  $Y_0 = h(i)$ , entonces para toda  $i \notin F$  se cumple que

$$0 \leq h(i) - \epsilon \mathbb{E}_i[\tau],$$

lo que implica

$$\epsilon \mathbb{E}_i[\tau] \leq h(i),$$

entonces

$$\mathbb{E}_i[\tau] \leq \frac{1}{\epsilon} h(i). \quad (1.27)$$

Para un  $j$  arbitrario que pertenezca a  $F$  y aplicando el análisis de primer paso se obte-

nemos

$$\mathbb{E}_j[\tau] = 1 + \sum_{i \notin F} p_{j,i} \mathbb{E}[\tau | Y_0 = 1],$$

entonces

$$\mathbb{E}_j[\tau] = 1 + \sum_{i \notin F} p_{j,i} \mathbb{E}[\tau | Y_0 = i] = 1 + \sum_{i \notin F} \mathbb{E}_i[\tau] p_{i,j} \leq 1 + \epsilon \sum_{i \notin F} p_{j,i} h(i) < \infty. \quad (1.28)$$

La desigualdad se sigue de (1.27) y podemos afirmar que  $1 + \epsilon \sum_{i \notin F} p_{j,i} h(i) < \infty$  por la hipótesis (1.20).

Por lo tanto el tiempo de espera que empieza en  $F$  y regresa a  $F$  es finito y cuando usamos el hecho de que  $F$  tiene cardinalidad finita, se cumplen las hipótesis del **Lema 1.0.2**, con esto podemos asegurar que se da la recurrencia positiva. ■

**Lema 1.0.3 (Pakes)** *Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una C.M. irreducible con espacio de estados  $E = \mathbb{N}$  tal que para todo  $i$  que sea elemento de  $E$ , se cumple que*

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | X_n] < \infty \quad (1.29)$$

y

$$\limsup_{i \uparrow \infty} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = i] < \infty. \quad (1.30)$$

*Entonces la Cadena es positiva recurrente.*

**Demostración.** Sea  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  una C.M. irreducible con espacio de estados  $\mathbb{N}$  que cumple las condiciones (1.29) y (1.30). Entonces para algún  $\epsilon > 0$  se sigue que

$$\limsup_{i \uparrow \infty} \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n | X_n = i] = -2\epsilon.$$

La hipótesis (1.29) se puede ver en términos de una sucesión de números reales, es decir,  $\{\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n]\} = \{a_n\}$ , y usando el hecho de que para una sucesión de números reales, existe un  $n_0$  natural tal que para toda  $n$  mayor a  $n_0$  pasa que

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} a_n - \epsilon < a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \epsilon. \quad (1.31)$$

Obtenemos para cualquier  $i$  que pertenezca a los naturales y que sea mayor a una  $i_0$ , se cumple que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = i] < \limsup_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = i] + \epsilon = -2\epsilon + \epsilon = -\epsilon. \quad (1.32)$$

Por lo que definimos una función  $h(i) = i$  para cualquier  $i$  natural y un conjunto  $F = \{i | i \leq i_0\}$ . Entonces,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = i] < -\epsilon < h(i) - \epsilon = i - \epsilon. \quad (1.33)$$

Con esto, conseguimos las hipótesis para aplicar el teorema de Foster y concluir que la Cadena es positiva recurrente. ■

# Capítulo 2

## Una introducción a la Teoría de Colas

En este capítulo estudiaremos los procesos estocásticos conocidos como Colas, presentaremos varios resultados, básicos dentro de esta teoría, que tienen que ver con estacionariedad y reversibilidad de dichos procesos, así como varios ejemplos de Colas, como la Cola M/M/1 o el modelo de Erlang. Por último enunciaremos y probaremos el teorema de Burke.

Los resultados y ejemplos de las primeras cinco secciones, así como el ejemplo dado en la última sección fueron publicados por [Kelly, 1979]. La prueba del teorema de Burke se basa en la demostración dada por [Konstantopoulos, 2016]. Empezaremos con algunas definiciones.

**Definición 2.0.1** *Sea  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  un proceso estocástico que tiene la misma distribución que el proceso  $(X_{t_1+\tau}, X_{t_2+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}) \forall t_1, \dots, t_n, \tau \in F$ , con  $F$  el espacio de estados, a dicho proceso se le llamará **estacionario**.*



**Definición 2.0.2** Un proceso se dice que es **homogéneo en el tiempo** cuando la probabilidad  $P(X_{t+\tau} = k | X_t = j)$  no depende de  $t$ .

**Definición 2.0.3** Sea  $p(j, k) = P(X_{t+1} = k | X_t = j)$ , donde se tiene que  $\sum_{k \in F} p(j, k) = 1$  con  $j \in F$  para el caso discreto. Para el caso continuo se define  $q(j, k) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+\tau} = k | X_t = j)}{\tau}$  con  $j \neq k$ .

Una **distribución de equilibrio**, es una distribución que cumple lo siguiente:  $0 \leq \pi(j) \forall j \in F$ , cuya suma sea uno y además que para  $j \in F$

$$\pi(j) = \sum_{k \in F} \pi(k) p(k, j),$$

en el caso discreto. Para el caso continuo en lugar de la ecuación anterior se debe cumplir que

$$\pi(j) \sum_{k \in F} q(j, k) = \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j). \quad (2.1)$$

**Definición 2.0.4** Un proceso es **reversible** cuando  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  tiene la misma distribución que el proceso  $(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n}) \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in F$  y con  $\tau$  natural.

## 2.1. Resultados básicos

**Teorema 2.1.1** Un proceso que es reversible es estacionario.

**Demostración.** Sea  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  un proceso reversible, entonces tiene la misma distribución que el proceso

$$(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n}), \quad (2.2)$$

para todo  $0, t_1, t_2, \dots, t_n, j_1, \dots, j_n$  pertenecientes a  $F$  y con  $\tau$  natural.

Proponemos a  $\tau = 0$  y obtenemos que los procesos

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$$

y

$$(X_{-t_1}, X_{-t_2}, \dots, X_{-t_n})$$

se distribuyen de la misma manera.

Al proceso reversible le asignamos los siguientes subíndices  $j_i = t_i + \tau$  con  $1 \leq i \leq n$ , entonces

$$(X_{j_1}, \dots, X_{j_n}) = (X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau}).$$

Por lo que el proceso tiene la misma distribución que

$$(X_{\tau-(t_1+\tau)}, \dots, X_{\tau-(t_n+\tau)}) = (X_{-t_1}, \dots, X_{-t_n}).$$

Por lo tanto  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  tiene la misma distribución que  $(X_{t_1+\tau}, \dots, X_{t_n+\tau})$ , es decir, es estacionario. ■

**Teorema 2.1.2** *Una Cadena estacionaria de Markov es reversible si y solo si existe una colección de números positivos  $\pi(j)$ , tales que sumen uno y cumplan las ecuaciones de balance detalladas*

$$\pi(j)p(j, k) = \pi(k)p(k, j). \quad (2.3)$$

**Demostración.** Primeramente, suponemos que la cadena es reversible y estacionaria. Puesto que es estacionaria  $P(X_t = j)$  no depende de  $t$ , entonces definimos  $\pi(j) = P(X_t = j)$ . Es claro que la suma de todos los números  $\pi(j)$  es uno. Como la cadena es reversible,

definimos  $\tau = 2t + 1$  y observamos que el vector  $(X_t^1, X_{t+1}^2)$  tiene la misma distribución que

$$(X_{\tau-t}^1, X_{\tau-(t+1)}^2) = (X_{2t+1-t}^1, X_{2t+1-(t+1)}^2) = (X_{t+1}^1, X_t^2).$$

Entonces, se sigue que  $P(X_t = j, X_{t+1} = k) = P(X_t = k, X_{t+1} = j)$ .

Esto implica que

$$\pi(j)p(j, k) = P(X_t = j)P(X_{t+1} = k|X_t = j) =$$

$$P(X_t = j) \frac{P(X_{t+1} = k, X_t = j)}{P(X_t = j)} = P(X_t = j) \frac{P(X_t = k, X_{t+1} = j)}{P(X_t = j)} =$$

(por ser reversible)

$$P(X_t = j) \frac{P(X_t = k, X_{t+1} = j)}{P(X_t = j)} \frac{P(X_t = k)}{P(X_t = k)} = P(X_t = k) \frac{P(X_t = k, X_{t+1} = j)}{P(X_t = k)} =$$

$$\pi(k)P(X_{t+1} = j|X_t = k) = \pi(k)p(k, j).$$

Esto demuestra la primera implicación.

En el regreso suponemos que la existencia de las  $\pi(j)$  positivas que sumen uno, entonces al sumar sobre  $k$  la expresión (2.3), obtenemos que

$$\sum_k \pi(j)p(j, k) = \sum_k \pi(k)p(k, j).$$

Entonces

$$\pi(j) \sum_k p(j, k) = \sum_k \pi(k) p(k, j),$$

lo que implica

$$\pi(j)(1) = \sum_k \pi(k) p(k, j), \quad (2.4)$$

que es la distribución de equilibrio de la **Definición 2.0.3**.

Se consideran los estados  $j_0, j_1, \dots, j_m \in F$ , por lo que

$$\begin{aligned} P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m} = j_m) &= 1^{m+1} P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m} = j_m) = \\ &= \frac{P(X_t = j_0) P(X_{t+1} = j_1, X_t = j_0)}{P(X_t = j_0) P(X_{t+1} = j_1, X_t = j_0)} \cdots \frac{P(X_{t+m} = j_m, \dots, X_{t+1} = j_1, X_t = j_0)}{P(X_{t+m} = j_m, \dots, X_{t+1} = j_1, X_t = j_0)} \\ &= P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m} = j_m) = \\ &= P(X_t = j_0) \frac{P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1)}{P(X_t = j_0)} \cdots \frac{P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m} = j_m)}{P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m-1} = j_{m-1})} = \\ &= \pi(j_0) P(X_{t+1} = j_1 | X_t = j_0) \cdots P(X_{t+m} = j_m | X_{t+m-1} = j_{m-1}, \dots, X_t = j_0) = \end{aligned}$$

(usando el hecho de que es de Markov)

$$\begin{aligned} \pi(j_0) P(X_{t+1} = j_1 | X_t = j_0) \cdots P(X_{t+m} = j_m | X_{t+m-1} = j_{m-1}) &= \\ \pi(j_0) p(j_0, j_1) \cdots p(j_{m-1}, j_m). \end{aligned}$$

De manera análoga, usando otro tiempo  $s$ , deducimos que

$$P(X_s = j_m, \dots, X_{s+m} = j_0) = \pi(j_m) p(j_m, j_{m-1}) \cdots p(j_1, j_0).$$

Dado que se cumple la ecuación de balance detallada  $\pi(j)p(j, k) = \pi(k)p(k, j)$ , entonces

$$\pi(j_0)p(j_0, j_1) \dots p(j_{m-1}, j_m) = \pi(j_m)p(j_m, j_{m-1}) \dots p(j_1, j_0),$$

lo que implica que

$$P(X_s = j_m, \dots, X_{s+m} = j_0) = P(X_t = j_0, X_{t+1} = j_1, \dots, X_{t+m} = j_m), \quad (2.5)$$

es decir, estos vectores deben tener la misma distribución. Poniendo que  $\tau = t + s + m$ , se sigue que

$$(X_{\tau-t}, X_{\tau-t-1}, \dots, X_{\tau-t-m}) = (X_{t+s+m-t}, \dots, X_{t+s+m-t-m}) = (X_{s+m}, X_{s+m-1}, \dots, X_s).$$

Concluimos que los vectores  $(X_{\tau-t}, X_{\tau-t-1}, \dots, X_{\tau-t-m})$  y  $(X_t, \dots, X_{t+m})$  son iguales en distribución, por lo tanto el proceso es reversible. ■

**Teorema 2.1.3 (Versión continua)** *Un proceso de Markov estacionario es reversible si y solamente si existen  $\pi(j)$  que sumen uno y que  $\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(k, j)$ .*

**Demostración.** Suponemos que el proceso es reversible y se define, de manera igual que en el **Teorema 2.2.1** a  $\pi(j) = P(X_t = j)$  y de manera análoga deducimos que

$$P(X_t = j, X_{t+\tau} = k) = P(X_t = k, X_{t+\tau} = j).$$

Entonces

$$\frac{P(X_t = j)}{P(X_t = j)} P(X_t = j, X_{t+\tau} = k) = \frac{P(X_{t+\tau} = k)}{P(X_{t+\tau} = k)} P(X_t = k, X_{t+\tau} = j) =$$

$$\pi(j)P(X_{t+\tau} = k|X_t = j) = \pi(k)P(X_t = j|X_{t+\tau} = k),$$

lo que implica

$$\pi(j)\frac{P(X_{t+\tau} = k|X_t = j)}{\tau} = \pi(k)\frac{P(X_t = j|X_{t+\tau} = k)}{\tau}.$$

Haciendo  $\tau$  tender a cero, se obtienen las ecuaciones deseadas.

En el regreso suponemos la existencia de la colección de  $\pi(i)$ , con  $i$  en  $F$ , que cumplen la igualdad  $\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(k, j)$  y que al sumar sobre  $k$ , se obtienen las ecuaciones de la **Definición 2.0.3**, por lo tanto la colección es la distribución de equilibrio.

Consideramos el comportamiento de  $X_t$  para  $t \in [-T, T]$ . El proceso puede iniciar en  $t = -T$  al estado  $j_1$  y se queda en ese estado por un período de tiempo  $H_1 = h_1$ , antes de saltar al estado  $j_2$  donde, igualmente, espera un tiempo  $H_2 = h_2$  antes de saltar al estado  $j_3$ , de esta forma iteramos hasta llegar al estado  $j_m$  en el tiempo  $t = T$ . Por lo que la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $H_1$  es de una variable aleatoria exponencial con parámetro  $q(j_i) = \sum_{k \in F} q(j_i, k)$ , es decir

$$q(j_1)e^{-q(j_1)h_1}. \quad (2.6)$$

La probabilidad de que  $j_2$  sea el siguiente estado, después de  $j_1$  es

$$\frac{q(j_1, j_2)}{q(j_1)}. \quad (2.7)$$

La probabilidad de que el proceso se quede en estado  $j_m$  al menos por un período de tiempo  $h_m$  es

$$e^{-q(j_m)h_m}. \quad (2.8)$$

Por lo que la densidad de probabilidad del comportamiento descrito es

$$\pi(j_1)e^{-q(j_1)h_1}q(j_1, j_2)e^{-q(j_2)h_2}q(j_2, j_3)\dots q(j_{m-1}, j_m)e^{-q(j_m)h_m}, \quad (2-1)$$

esto es la densidad respecto a  $h_1, h_2, \dots, h_m$ .

La relación  $\pi(j)q(j, k) = q(k)q(k, j)$  implica que

$$\pi(j_1)q(j_1, j_2)\dots q(j_{m-1}, j_m) = \pi(j_m)q(j_m, j_{m-1})\dots q(j_2, j_1),$$

y así la expresión (2.8) es igual a la densidad de probabilidad de que el proceso inicie al tiempo  $t = -T$  en el estado  $j_m$  y que se quede por un período de tiempo  $h_m$  hasta saltar al estado  $j_{m-1}$ , iteramos de esta manera hasta llegar al estado  $j_1$ .

Por lo que el comportamiento probabilístico de  $X_t$  y  $X_{-t}$  es el mismo y  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  se distribuye igual que  $(X_{-t_1}, \dots, X_{-t_n})$ , pero esto tiene la misma distribución que  $(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n})$  puesto que el proceso es estacionario, por lo tanto es reversible. ■

Se entenderá como "**flujo de probabilidad**" de un estado  $j$  a otro  $k$ , a la expresión  $\pi(j)p(j, k) = \pi(k)p(k, j)$ .

Para los siguientes dos teoremas es conveniente que pensemos una gráfica  $G$  asociada al proceso, donde el conjunto de nodos de  $G$  representan al espacio de estados  $F$ , y que entre dichos nodos haya una arista siempre que  $q(j, k)$  o  $q(k, j)$  sean positivas. Una cortadura de la gráfica representa la división del espacio de estados en dos conjuntos.

**Teorema 2.1.4** *Para un proceso de Markov que estacionario, el flujo de probabilidad se equilibra en cada extremo, esto es para cualquier  $A \subsetneq F$*

$$\sum_{j \in A} \sum_{k \in F-A} \pi(j)q(j, k) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in F-A} \pi(k)q(k, j). \quad (2.10)$$

**Demostración.** Se tienen las ecuaciones de balance, por lo que

$$\pi(j) \sum_{k \in F} q(j, k) = \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j),$$

entonces

$$\sum_{k \in F} \pi(j) q(j, k) = \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j).$$

Al sumar sobre  $j \in A$ , obtenemos

$$\sum_{j \in A} \sum_{k \in F} \pi(j) q(j, k) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j). \quad (2.11)$$

Tenemos la identidad (de intercambiar el orden de la suma):

$$\sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \pi(j) q(j, k) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \pi(k) q(k, j)$$

y restando (2.11) con (2.12)

$$\sum_{j \in A} \sum_{k \in F} \pi(j) q(j, k) - \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \pi(j) q(j, k) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j) - \sum_{j \in A} \sum_{k \in A} \pi(k) q(k, j).$$

Concluimos con la siguiente expresión

$$\sum_{j \in A} \sum_{k \in F-A} \pi(j) q(j, k) = \sum_{j \in A} \sum_{k \in F-A} \pi(k) q(k, j),$$

que es precisamente la ecuación (2.10). ■

**Teorema 2.1.5** *Cuando la gráfica  $G$  asociada a un proceso de Markov estacionario es un árbol, entonces el proceso es reversible.*



**Demostración.** Sean  $j$  y  $k$  estados del proceso, entonces son dos nodos de la gráfica  $G$ , si dichos nodos no están unidos por una arista entonces, la expresión

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(k, j)$$

se cumple de manera trivial puesto que tanto  $q(j, k)$  como  $q(k, j)$  deben valer cero. Ahora, suponiendo que existe una arista que une a los nodos  $j$  y  $k$ , al borrarla, se crean dos componentes conexas de  $G$ , pues se está suponiendo que es un árbol (es conexo), así se cumplen las condiciones del teorema anterior, y a su vez, al aplicarlo se cumplen las ecuaciones de balance detallado, por lo que es reversible el proceso asociado a  $G$ . ■

## 2.2. Ejemplos de cadenas de nacimiento y muerte

Los procesos de nacimiento y muerte, son aquellos cuyo espacio de estados es  $F = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $q(j, k) = 0$  a menos que  $|j - k| = 1$ , es decir solamente hay movimiento entre los estados  $j$  a  $j - 1$ , o bien, de los estados  $j$  a  $j + 1$ . Si suponemos que el proceso es estacionario, entonces debería ser reversible, pues al proceso se le puede asociar como una gráfica de tipo árbol gracias al teorema anterior. Por lo que se deben cumplir las ecuaciones de balance detallado que, por como fue construido el proceso, son de la forma

$$\pi(j)q(j, j - 1) = \pi(j - 1)q(j - 1, j).$$

Por ser estacionario, su distribución es de la forma

$$\pi(j) = \pi(0) \prod_{r=1}^j \frac{q(r - 1, r)}{q(r, r - 1)}.$$

### Ejemplo 2.2.1 Cola $M/M/1$

La Cola simple es un proceso de nacimiento y muerte. Una cantidad de clientes llega a una Cola (el proceso de llegada) formando un proceso Poisson con parámetro  $v$ , con la condición de que en la Cola solamente hay un cajero que atiende a las personas formadas, y los tiempos en que son atendidas las personas por el cajero se distribuyen de forma exponencial, siendo independientes de cada uno y del proceso de llegada, con media  $u^{-1}$ . Por último se define  $n(t)$  como el número de clientes en la Cola al tiempo  $t$ . Siendo un proceso de nacimiento y muerte, tiene las siguientes asignaciones:

$$q(j, j - 1) = u \quad (2.13)$$

(sale el cliente de la cola)

$$q(j, j + 1) = v \quad (2.14)$$

(entra el cliente a la cola).

Suponiendo que  $v < u$ , calcularemos su distribución de equilibrio; gracias al hecho de que la distribución de este tipo de procesos es

$$\pi(j) = \pi(0) \prod_{r=1}^j \frac{q(r-1, r)}{q(r, r-1)},$$

esto se convierte en,

$$\pi(j) = \pi(0) \prod_{r=1}^j \frac{v}{u} = \pi(j) = \pi(0) \left(\frac{v}{u}\right)^j.$$

Puesto que  $\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = 1$  entonces, al hacer la sustitución queda

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(0) \left(\frac{v}{u}\right)^j.$$

Por la condición de que  $v < u$ , se sigue que  $\frac{v}{u} < 1$ , esto es una serie geométrica,

$$1 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(j) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi(0) \left(\frac{v}{u}\right)^j = \frac{\pi(0)}{1 - \frac{v}{u}},$$

entonces

$$1 = \frac{\pi(0)}{1 - \frac{v}{u}},$$

lo que implica que

$$\pi(0) = 1 - \frac{v}{u},$$

así que

$$\pi(j) = \left(1 - \frac{v}{u}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^j.$$

Tomando en cuenta que el proceso de llegada es Poisson, la probabilidad de que en el intervalo  $(t_0, t_0 + \delta t)$  un cliente llegue y se encuentre con  $j$  clientes es de

$$\pi(j)v(\delta t) + o(\delta t) = \pi(j)(q(j, j+1)\delta t) + o(\delta t),$$

por ser un proceso Poisson. La probabilidad de que en el intervalo un solo cliente llegue es de

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j)(v\delta t) + o(\delta t).$$

Por lo que, definiendo a  $B$  como el evento en que solamente un cliente llegue a la cola, y  $A$  como el evento en el que se encuentren  $j$  clientes antes que él en la cola, ocurre que

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{\pi(j)(v\delta t) + o(\delta t)}{\sum_{j=0}^{\infty} \pi(j)(v\delta t) + o(\delta t)}.$$

Calculamos el límite

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\pi(j)(v\delta t) + o(\delta t)}{\sum_{j=0} \pi(j)(v\delta t) + o(\delta t)} = \frac{\pi(j)v}{\sum_{j=0} \pi(j)v} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta t}{\delta t} =$$

$$\frac{\pi(j)v}{\sum_{j=0} \pi(j)v} (1) = \frac{\pi(j)v}{(1)v} = \pi(j).$$

### Ejemplo 2.2.2 *Intercambio telefónico*

Supongamos para este ejemplo que las llamadas son iniciadas en puntos en el tiempo, el cuál forma un proceso Poisson de tasa  $v$ , pero el intercambio solamente tiene  $K$  líneas disponibles, así que una llamada que entra justamente cuando  $K$  llamadas están en progreso, se pierde. Suponemos también, que las llamadas que esten conectadas duran por longitudes de tiempo, que son independientes y distribuidas de forma exponencial con media  $u^{-1}$ . Entonces el número de llamadas en progreso al tiempo  $t$  es una cadena de nacimiento y muerte con

$$q(j, j - 1) = ju \quad j = 1, \dots, K \quad (2.15)$$

y

$$q(j, j + 1) = v \quad j = 1, \dots, K - 1. \quad (2.16)$$

Como en el ejemplo anterior, la distribución de equilibrio para  $F = \{1, \dots, K\}$  es

$$\pi(j) = \pi(0) \prod_{r=1}^j \frac{q(r-1, r)}{q(r, r-1)} = \pi(0) \left( \frac{1}{j!} \right) \left( \frac{v}{u} \right)^j. \quad (2-2)$$

Por lo que en equilibrio, el número de llamadas en progreso tiene una distribución Poisson

trunca. Falta calcular  $\pi(0)$ ,

$$\sum_{j=0}^K \pi(j) = 1,$$

entonces

$$1 = \sum_{j=0}^K \pi(j) = \sum_{j=0}^K \pi(0) \left(\frac{1}{j!}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^j = \pi(0) \sum_{j=0}^K \left(\frac{1}{j!}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^j,$$

por lo que

$$\pi(0) = \frac{1}{\sum_{j=0}^K \left(\frac{1}{j!}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^j}. \quad (2.18)$$

Una llamada se pierde cuando el número de llamadas en progreso es  $K$  por lo que

$$\pi(K) = \left(\frac{1}{K!}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^K \frac{1}{\sum_{j=0}^K \left(\frac{1}{j!}\right) \left(\frac{v}{u}\right)^j}, \quad (2.19)$$

representa la probabilidad de que una llamada se pierda cuando el sistema es estacionario.

## 2.3. Criterios de Kolmogorov

**Teorema 2.3.1** *Una Cadena de Markov estacionaria es reversible si y solamente si las probabilidades de transición cumplen que*

$$p(j_1, j_2), \dots, p(j_{m-1}, j_m)p(j_m, j_1) = p(j_1, j_m)p(j_m, j_{m-1}) \dots p(j_2, j_1) \quad (2.20)$$

*para una cantidad finita de estados.*

**Demostración.** Suponemos que la Cadena es reversible, por lo que las ecuaciones de

balance detallado se cumplen

$$\pi(j_1)p(j_1, j_2) = \pi(j_2)p(j_2, j_1),$$

.

.

.

$$\pi(j_m)p(j_m, j_1) = \pi(j_1)p(j_1, j_m),$$

entonces multiplicamos las expresiones anteriores.

$$\pi(j_1)p(j_1, j_2)\dots\pi(j_m)p(j_m, j_1) = \pi(j_2)p(j_2, j_1)\dots\pi(j_1)p(j_1, j_m),$$

al cancelar todas las  $\pi(i)$  se encuentra la expresión deseada.

Para el regreso, supongamos que para una cantidad finita de estados dentro de una Cadena estacionaria se cumple que

$$p(j_1, j_2), \dots, p(j_{m-1}, j_m)p(j_m, j_1) = p(j_1 j_m)p(j_m, j_{m-1})\dots p(j_2, j_1). \quad (2.21)$$

Tomamos un estado  $j_0$  como referencia y debido a que la Cadena es irreducible, existen estados  $j, j_m, \dots, j_1, j_0$  que van de  $j$  a  $j_0$  tales que

$$q(j, j_m)\dots p(j_1, j_0) > 0.$$

La igualdad (2.21) implica

$$0 < p(j, j_m), \dots, p(j_1, j_0) = p(j_0 j_1)\dots p(j_m, j).$$

Es decir, podemos dividir porque la expresión no es cero, y proponemos

$$\pi(j) = B \frac{p(j_0, j_1) \dots p(j_m, j)}{p(j, j_m) \dots p(j_1, j_0)}.$$

La probabilidad  $\pi(j)$  no depende de la sucesión de estados, pues si se eligen otros estados que van de  $j$  a  $j_0$ , como por ejemplo,  $j, s_m, \dots, s_1, j_0$  tales que  $p(j, s_m) \dots p(s_1, j_0) > 0$ , conseguimos que

$$1 = \frac{p(j, s_m) \dots p(s_1, j_0)}{p(j_0, s_1) \dots p(s_m, j)} = \frac{p(j_0, j_1) \dots p(j_m, j)}{p(j_m, j) \dots p(j_1, j_0)}.$$

Falta ver que se cumple la ecuación de balance detallado.

Sea  $p(k, j) > 0$  y

$$\pi(k) = B \frac{p(j_0, j_1) \dots p(j_m, j) p(j, k)}{p(j_m, j) \dots p(j_1, j_0)},$$

entonces

$$\pi(k) p(k, j) = B \frac{p(j_0, j_1) \dots p(j_m, j) p(j, k)}{p(j_m, j) \dots p(j_1, j_0)} p(k, j) = B \frac{p(j_0, j_1) \dots p(j_m, j) p(k, j)}{p(j_m, j) \dots p(j_1, j_0)} p(j, k) = \pi(j) p(j, k).$$

Por lo que el proceso es reversible. ■

### Ejemplo 2.3.1 Cola con dos cajeros

Sea una Cola con dos cajeros, donde el proceso de llegada es Poisson con media  $v$ . Los dos cajeros pueden que difieran en eficiencia, suponemos que cada cajero se distribuye de forma exponencial con media  $u_1^{-1}$  y  $u_2^{-1}$ , donde  $u_1 + u_2 > v$ .

Si el cliente ve a los dos cajeros libres, tiene la misma probabilidad de escogerlos. El estado  $n$  es la cantidad de clientes en la Cola con  $n = 0, 2, 3, \dots$  y los estados  $1A, 1B$  corresponden a un cliente que va en el cajero uno o dos. Debemos verificar que se cumpla

$$q(0, 1A)q(1A, 2)q(2, 1B)q(1B, 0) = q(0, 1B)q(1B, 2)q(2, 1A)q(1A, 0). \quad (2.22)$$

La ecuación (2.22) es cierta porque

$$q(0, 1A)q(1A, 2)q(2, 1B)q(1B, 0) = \frac{v}{2}vu_1u_2 = \frac{v}{2}vu_2u_1 = q(0, 1B)q(1B, 2)q(2, 1A)q(1A, 0).$$

Aplicando el cálculo de la distribución de los procesos de nacimiento y muerte estacionarios, observamos que

$$\pi(1A) = \pi(0) \frac{q(0, 1A)}{q(1A, 0)} = \pi(0) \frac{\frac{v}{2}}{u_1} = \frac{v}{2u_1}. \quad (2.23)$$

De manera similar se obtiene

$$\pi(1B) = \pi(0) \frac{v}{2u_2}.$$

Calculamos además

$$\pi(n) = \pi(0) \prod_{r=1}^n \frac{q(r-1, r)}{q(r, r-1)} = \pi(0) \frac{v}{2u_1} \frac{v}{2u_2} \prod_{r=2}^n \frac{q(r-1, r)}{q(r, r-1)} =$$

(y aplicando el mismo razonamiento que cuando se calculó la distribución para el proceso de nacimiento y muerte)

$$\pi(0) \frac{v}{2u_1} \frac{v}{2u_2} \left( \frac{v}{u_1 + u_2} \right)^{n-2}.$$

## 2.4. Procesos reversibles truncados

**Teorema 2.4.1** *Cuando las tasas de equilibrio de un proceso de Markov reversible, con su distribución de equilibrio  $\pi(j)$  sean alterados por una constante  $c > 0$ , de  $q(j, k)$  a  $cq(j, k)$ , con  $j \in A$  y  $k \in F - A$ . Ocurre que el proceso es reversible en equilibrio y tiene*



la distribución de equilibrio,  $B\pi(j)$ , con  $j \in A$  y  $Bc\pi(j)$  con  $j \in F - A$ .

**Demostración.** De acuerdo a las hipótesis, se verificará que se cumplen las condiciones de balance detallado (**Teorema 2.2.3**). Dado que el proceso es reversible, se cumple que para  $j \in A$  y  $k \in F - A$

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(j, k) = Bc\pi(j)q(j, k) = Bc\pi(k)q(k, j).$$

Donde  $B$  es una constante normalizadora de la distribución, dada como

$$B = \frac{1}{\sum_{j \in A} \pi(j) + c \sum_{j \in F-A} \pi(j)}.$$

Por el **Teorema 2.2.3** el proceso sigue siendo reversible, solo falta ver que suma uno la distribución propuesta. Lo mostraremos a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in A} B\pi(j) + \sum_{i \in F-A} Bc\pi(j) &= B \left( \sum_{j \in A} \pi(j) + c \sum_{i \in F-A} \pi(j) \right) = \\ &= \left( \frac{1}{\sum_{j \in A} \pi(j) + c \sum_{j \in F-A} \pi(j)} \right) \left( \sum_{j \in A} \pi(j) + c \sum_{i \in F-A} \pi(j) \right) = 1. \end{aligned}$$

Concluimos que suma uno, por lo que es una distribución. ■

**Corolario 2.4.1** *Dado un proceso de Markov que sea reversible y con su distribución de equilibrio  $\pi(i)$ . Al truncar y normalizar su matriz de transición a un subconjunto de  $A$  del espacio de estados, ocurre que el proceso obtenido asociado a tal matriz truncada es*

reversible con distribución estacionaria

$$\frac{\pi(j)}{\sum_{k \in A} \pi(k)} \quad k \in A.$$

**Demostración.** Usando el **Teorema 2.5.1** y proponiendo  $c = 0$  en caso de que  $q(k, j)$ , con  $j \in A$  y  $k \in F - A$ , el proceso sigue siendo reversible y

$$B \sum_{j \in A} \pi(j) = \frac{1}{\sum_{j \in A} \pi(j)} \sum_{j \in A} \pi(j) = 1.$$

Esta es la distribución estacionaria. ■

Para el siguiente ejemplo necesitamos de este lema.

**Lema 2.4.1** Sean  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ,  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  dos procesos reversibles e independientes de Markov, entonces el proceso  $\{(X_t, Y_t)\}_{t \geq 0}$  es reversible.

**Demostración.** Sean  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ,  $\{Y_t\}_{t \geq 0}$  dos procesos reversibles e independientes de Markov, entonces definimos el proceso  $\{(X_t, Y_t)\}_{t \geq 0}$ . Sean  $t_1, \dots, t_n$  y

$$P(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) = P(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})P(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) =$$

(usando la independencia de los procesos para separar)

$$P(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n})P(Y_{\tau-t_1}, \dots, Y_{\tau-t_n}) = P(X_{\tau-t_1}, \dots, X_{\tau-t_n}, Y_{\tau-t_1}, \dots, Y_{\tau-t_n})$$

(ambos procesos son reversibles y usando la independencia otra vez),

para alguna  $\tau \in F$ .

Ambos vectores tienen la misma distribución, por lo tanto es reversible el proceso. ■

### Ejemplo 2.4.1

Este es el ejemplo de las dos Colas con una sala de espera conjunta, aquí se van a considerar dos Colas simples e independientes, ambas con sus parámetros de entrada  $v_1, v_2$  y de salida  $u_1^{-1}, u_2^{-1}$ , tomando  $n_1, n_2$  como el número de clientes en cada una de las colas, el proceso  $(n_1, n_2)$  es reversible por el **Lema 2.5.1** con

$$\pi(n_1, n_2) = \left(1 - \frac{v_1}{u_1}\right) \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{n_1} \left(1 - \frac{v_2}{u_2}\right) \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{n_2}.$$

Supongamos que ambas Colas tienen que compartir una sala de espera conjunta de tamaño  $R$ , así que cuando un cliente llega y encuentra  $R$  personas esperando por el cajero, se va sin ser atendida. Esta dinámica corresponde precisamente a un proceso que se trunca en un subconjunto  $A$  del espacio de estados, donde  $A$  es el conjunto donde no más de  $R$  clientes están esperando ser atendidos. Entonces el proceso tendrá la distribución

$$\pi(n_1, n_2) = \frac{\pi(0, 0) \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{n_1} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{n_2}}{\sum_{k \in A} \pi(k)} = \pi(0, 0) \left(\frac{v_1}{u_1}\right)^{n_1} \left(\frac{v_2}{u_2}\right)^{n_2},$$

con  $n_1, n_2 \in A$ .

## 2.5. Procesos de Markov reversos

**Teorema 2.5.1** *Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov estacionario con sus  $q(j, k)$   $j, k \in F$ , entonces el proceso reverso  $\{X_{\tau-t}\}$  es estacionario, con  $Q(j, k) = \frac{\pi(k)q(k, j)}{\pi(j)}$  y con la misma distribución de equilibrio.*

**Demostración.** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov estacionario con sus  $q(j, k)$   $j, k \in F$

y se tiene que

$$P(X_{t+h} = k)P(X_t = j|X_{t+h} = k) = P(X_t = j)P(X_{t+h} = k|X_t = j),$$

entonces

$$P(X_t = j|X_{t+h} = k) = \frac{P(X_t = j)}{P(X_{t+h} = k)}P(X_{t+h} = k|X_t = j),$$

lo que implica

$$\frac{P(X_t = j|X_{t+h} = k)}{h} = \frac{\pi(j)}{\pi(k)} \frac{P(X_{t+h} = k|X_t = j)}{h},$$

por lo que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X_t = j|X_{t+h} = k)}{h} = \frac{\pi(j)}{\pi(k)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X_{t+h} = k|X_t = j)}{h} = Q(k, j) = \frac{\pi(j)}{\pi(k)} q(j, k).$$

Ahora, el proceso reverso es estacionario porque como el proceso original es estacionario, para los estados  $-t_1, \dots, -t_n, \tau$  que pertenecen a  $F$ ,  $(X_{-t_1}, \dots, X_{-t_n})$  tiene la misma distribución que  $(X_{-t_1+\tau}, \dots, X_{-t_n+\tau})$ .

Que tengan la misma distribución de equilibrio, viene de que tienen la misma distribución estacionaria, aunque de igual manera verificamos las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \pi(j) \sum_{k \in F} Q(j, k) &= \pi(j) \sum_{k \in F} \frac{\pi(k)}{\pi(j)} q(k, j) = \\ &= \sum_{k \in F} \pi(k) q(k, j) = \pi(j) \sum_{k \in F} q(j, k) = \\ &= \sum_{k \in F} \pi(j) \frac{\pi(k)}{\pi(k)} q(j, k) = \sum_{k \in F} \pi(k) \frac{\pi(j)}{\pi(k)} q(j, k) = \\ &= \sum_{k \in F} \pi(k) Q(j, k). \end{aligned}$$

Por lo tanto tienen la misma distribución de equilibrio. ■

**Teorema 2.5.2** Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Markov estacionario con tasas de equilibrio  $q(j, k)$ , si se puede encontrar una colección de números  $s(j, k)$ , tales que  $q(j) = s(j)$  (donde  $q(j) = \sum_{k \in F} q(j, k)$ ) y una colección de números positivos  $\pi(j)$  que sumen uno y

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k)s(k, j).$$

Entonces  $s(j, k)$  son las tasas de transición del proceso enreversado y  $\pi(j)$  la distribución de transición.

**Demostración.** Usando las hipótesis se nota que como

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k)s(k, j),$$

entonces

$$\sum_{j \in F} \pi(j)q(j, k) = \sum_{j \in F} \pi(k)s(k, j) = \pi(k) \sum_{j \in F} s(k, j) = \pi(k)s(k) = \pi(k)q(k).$$

Por lo que las  $\pi(j)$  son la distribución de equilibrio de  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  y aplicando el teorema anterior, se cumple que  $s(j, k)$  es la tasa de transición. ■

Algunas veces no tenemos un proceso reversible, pero si hacemos un intercambio de índices en los estados, lo tendríamos. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2.5.1** Supongamos que para cada estado  $j \in F$  de un proceso estacionario de Markov, se le asocia un conjugado  $j^+ \in F$  tal que  $(j^+)^+ = j$ . Entonces el proceso  $\{X_t\}$  es **dinámicamente reversible** si  $\{X_t\}$  tiene la misma distribución que  $[X_{t-\tau}]^+$  como proceso.

**Teorema 2.5.3** Un proceso estacionario de Markov con  $q(j) = q(j^+)$ , es dinámicamente

reversible si y solamente si existe una colección de números positivos  $\pi(j)$  tales que sumen uno y que cumplan que

$$\pi(j) = \pi(j^+) \quad (2.24)$$

y

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k^+)q(k^+, j^+), \quad (2.25)$$

con las  $\pi(j)$  como la distribución de equilibrio.

**Demostración.** Primeramente suponemos que el proceso cumple que  $s(j, k) = q(k^+, j^+)$ , por lo que

$$s(j, k) = \frac{\pi(j)}{\pi(j^+)}q(j, k) = \frac{\pi(j)}{\pi(k)}q(j, k).$$

Aparte,

$$s(j) = \sum_{k \in F} s(j, k) = \sum_{k \in F} q(j^+, k^+) = q(j^+) = q(j).$$

Entonces las tasas de transición  $s(j, k)$  cumplen las ecuaciones del **Teorema 2.6.1** y por ese mismo teorema se tiene la distribución de equilibrio en  $\pi(j)$ . El proceso reverso  $\{X_{\tau-t}\}$  tiene dichas tasas de transición, como  $s(j, k) = q(j^+, k^+)$ , se sigue que el proceso  $\{X_t\}$  es dinámicamente reversible.

Para el regreso, suponemos que el proceso es dinámicamente reversible, se propone a

$$\pi(j) = P(X_t = j).$$

Ahora, como es dinámicamente reversible, se sigue que

$$P(X_t = j) = P([X_{\tau-t}]^+ = j).$$

Por lo que se  $\pi(j^+) = P([X_{\tau-t}]^+ = j)$ , con esto se demuestra que  $\pi(j) = \pi(j^+)$ . Por último

$$\pi(j)q(j, k) = \pi(k)q(k, j) = \pi(k^+)q(k^+, j^+).$$

Es lo que buscábamos. ■

## 2.6. Teorema de Burke

**Teorema 2.6.1 (De Burke)** *Para una Cola estacionaria M/M/1 denotada por  $Q$ , los siguientes objetos aleatorios  $Q_0$ ,  $A_{(0,\infty)}$  y  $D_{(-\infty,0)}$  son independientes. Más aún  $D$  es un proceso Poisson con parámetro  $\lambda$ .*

**Demostración.** Sea  $Q$  una cola estacionaria M/M/1 con un proceso de arribo  $A \sim \text{Poisson}(\lambda)$  y uno de servicio  $D \sim \text{Poisson}(\mu)$ . Al principio probaremos que el proceso  $\{Q_t, t \in R\}$  con  $\lambda < \mu$  es reversible, definiendo  $P(Q_t = i) =: \pi(i)$ , donde  $\pi(i)$  es la distribución que se propone como estacionaria.

De la **Sección 2.2.**, ya habíamos calculado el valor de  $\pi(i)$  para una cola M/M/1, dicho valor es  $\pi(i) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ . Por lo que

$$\pi(j+1)q(j+1, j) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{j+1} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) q(j+1, j) = \left(\frac{\lambda^{j+1}}{\mu^{j+1}} - \frac{\lambda^{j+2}}{\mu^{j+2}}\right) \mu =$$

$$\frac{\lambda^{j+1}}{\mu^j} - \frac{\lambda^{j+2}}{\mu^{j+1}} = \frac{\lambda^j}{\mu^j} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\mu}\right) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \lambda = \pi(j)q(j, j+1).$$

Es importante mencionar que si  $|i - j| > 1$ , el resultado es trivial pues  $q(i, j) = 0$  de acuerdo a como se define un proceso de nacimiento y muerte.

Dado que estamos usando un proceso estacionario de Markov, podemos aplicar el **Teorema 2.5.1**, para así poder obtener la tasa del proceso reverso de la Cola,

$$s(k, j) = \frac{\pi(j)}{\pi(k)} q(j, k). \quad (2.26)$$

Luego el proceso reverso tiene las mismas tasas de transición que el proceso original porque

$$s(k, j) = \frac{\pi(j)}{\pi(k)} q(j, k) = \frac{1}{\pi(k)} \pi(j) q(j, k) = \frac{1}{\pi(k)} (\pi(k) q(k, j)) = q(k, j).$$

Puesto que tienen las mismas tasas de transición, entonces tienen las mismas probabilidades de transición. Por lo que el proceso es reversible.

$(Q_0, A_{(0, \infty)})$  y  $(Q_0, D_{(-\infty, 0)})$  tienen la misma distribución por la reversibilidad del proceso, se sigue que  $D_{(-\infty, 0)} \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

Se puede reemplazar el 0 por cualquier tiempo  $\tau$  en el proceso  $D$ , es decir  $D_{(-\infty, \tau)}$  y sigue siendo Poisson ( $\lambda$ ).

Ahora, dado que  $A_{(0, \infty)}$  es proceso Poisson, entonces tiene incrementos independientes, por lo que

$$P(Q_0, A_{(0, t_m)}) = P(Q_0 = i, Q_{t_1} - Q_0 = x_1, \dots, Q_{t_m} - Q_{t_{m-1}} = x_m),$$

para  $0 < t_1 < \dots < t_m$ .

Lo que implica

$$P(Q_0, A_{(0, t_m)}) = P(Q_0 = i, Q_{t_1} - Q_0 = x_1, \dots, Q_{t_m} - Q_{t_{m-1}} = x_m) =$$



$$P(Q_0 = i)P(Q_{t_1} - Q_0 = x_1), \dots, P(Q_{t_m} - Q_{t_{m-1}} = x_m) =$$

$$P(Q_0)P(A_{(0,t_m)}) = P(Q_0)P(D_{(-t_m,0)}). \quad (2.27)$$

Por lo tanto  $Q_0$  es independiente de  $A_{(0,\infty)}$  y de  $D_{(-\infty,0)}$ .

Falta ver la independencia de  $A_{(0,\infty)}$  y de  $D_{(-\infty,\tau)}$ . Usando el hecho de que 0 es un tiempo de paro y esto es una Cadena de Markov

$$P(A_{0+t_m} = x_m, \dots, A_{0+t_1} = x_1 | Q_0 = i, A_{0 \wedge -t_1}, \dots, A_{0 \wedge -t_m}) =$$

$$P(A_{0+t_m} = x_m, \dots, A_{0+t_1} = x_1 | Q_0 = i, D_{-t_1}, \dots, D_{-t_m}) =$$

$$P(A_{0+t_m} = x_m, \dots, A_{0+t_1} = x_1 | Q_0 = i). \quad (2.28)$$

Lo que prueba independencia condicionando al estado  $Q_0$ .

Por lo tanto los objetos  $A_{(0,\infty)}$ ,  $Q_0$ ,  $D_{(-\infty,0)}$  son independientes. ■

En pocas palabras lo que el teorema dice es que las llegadas futuras, las salidas y el estado actual en la cadena son independientes.

### **Ejemplo 2.6.1** *Una sucesión de colas simples (M/M/1)*

Una aplicación del teorema de Burke es a una sucesión de  $J$  colas con un cajero. Estas Colas están acomodadas de tal manera que cuando un cliente salga de la Cola, se una a la siguiente Cola, hasta que haya pasado por las  $J$ . Se supone que para la llegada a la cola 1 se distribuye Poisson con tasa  $v$ , y los tiempos de atención en la cola  $i$  se distribuyen exponencial con media  $u_i^{-1}$  y  $v < u_i^{-1}$ . Estamos considerando que los tiempos de servicio son independientes, entre distintos clientes o para el mismo clientes en colas diferentes. También consideramos que el proceso de llegada a la Cola 1 es independiente de todos

los tiempos de servicio.

Sea  $n_i(t)$  el número de clientes al tiempo  $t$  en la cola  $i$ , la cola 1, vista por separado es una cola simple, el proceso de salida es Poisson igualmente, y usando el teorema de Burke, el proceso de llegada a la siguiente cola es Poisson igualmente. Al ver por separado la cola 2, resulta ser también una M/M/1.

Repitiendo este análisis otras  $j - 2$  veces, se observa que cada cola tiene un proceso Poisson como arribo, entonces tenemos una sucesión de colas M/M/1, en la que la Cola  $j$  tiene distribución estacionaria

$$\pi_j(n_j) = \left(1 - \frac{v}{u_j}\right) \left(\frac{v}{u_j}\right)^{n_j}. \quad (2.29)$$

Para calcular la distribución conjunta de  $(n_1, n_2, \dots, n_j)$ , se va a fijar el punto  $t_0$  en el tiempo y se considera:

1. La cantidad  $n_1(t_0)$ .
2. Salidas desde la cola 1 antes del tiempo  $t_0$ .
3. Los tiempos de servicio de las colas 2, 3, ...,  $J$
4.  $(n_2, \dots, n_j)$ .

Por el teorema de Burke, las condiciones 1 y 2 son independientes, y por construcción los tiempos de atención de las colas 2, ...,  $j$  son independientes del proceso de arribo y su

tiempo de servicio, por lo que la condición 3 es independiente de 1 y 2.

Las condiciones 1, 2, 3 son mutuamente independientes, en particular 1 es independiente de 2 y 3, y como la cuarta condición está en función de 2 y 3, se sigue que 1 y 4 son independientes. De forma análoga para cada  $i$  entre 1 y  $j$  hay una independencia de  $n_i(t_0)$  con respecto al vector  $(n_{i+1}(t_0), \dots, n_j(t_0))$  y concluimos que

$$\pi(n_1, n_2, \dots, n_j) = \prod_{i=1}^j \pi_i(n_i). \quad (2-3)$$

La conclusión es interesante: la distribución estacionaria es un producto de distribuciones estacionarias, a pesar de que es el sistema tiene una alta dependencia entre sus componentes.

# Capítulo 3

## Protocolo Aloha

El objetivo de este capítulo es el de presentar el modelo conocido como protocolo Aloha, junto con sus supuestos, su construcción y la demostración de algunos resultados de interés con lo que podemos contestar a la pregunta sobre la estabilidad del protocolo. Las **Secciones 3.2., 3.3.y 3.4.** se basaron en [Kelly y Yudovina, 2014], salvo las transiciones de la Cadena, que fueron publicadas en [Brémaud, 2013].

### 3.1. Motivación del protocolo Aloha

Se menciona en [Abramson, 1970], que durante el mes de septiembre de 1968, la Universidad de Hawaii empezó un programa de investigación, cuya objeto de estudio fuera la comunicación vía radio de computadoras a computadoras, y de consolas a computadoras. El objetivo principal de la investigación era proporcionar una posible solución para determinar cuando eran más efectivas las comunicaciones basadas en radio transmisiones con respecto a las transmisiones que dependían de cableado. Las comunicaciones cableadas presentaban problemas, uno de ellos era la falta de redes de cableado de buena calidad, problema que se encontraba en varias partes del mundo. Por este motivo, el programa

de investigación desarrolló un método de comunicación aleatorio, al que se nombró como protocolo Aloha.

## 3.2. Supuestos

1. Suponemos que el tiempo se va a dividir en forma discreta.
2. Se define el conjunto de estados de los canales como  $Z_t = \{0, 1, *\}$  con  $t \in \mathbb{N}$ . Se da el caso  $Z_t = 0$ , si no hubieron intentos de transmisión al tiempo  $t$ . El caso  $Z_t = 1$  representa cuando hubo exactamente un intento de retransmisión, y finalmente  $Z_t = *$  pasa cuando hubieron 2 o más intentos de transmisión.
3. Durante cada tiempo  $t$ , el número aleatorio de los paquetes recién llegados, se distribuye Poisson con parámetro  $v$ . Una vez que el paquete se transmite con éxito, la estación sale del sistema.
4. Sea  $Y_t$  la variable aleatoria que representa el número de paquetes que han llegado al tiempo  $t - 1$ , con una distribución  $Poisson(\lambda)$ . Estos se encuentran en nuevas estaciones. Se agrega el supuesto de que al tiempo  $t$ , todas las nuevas estaciones transmiten y se permite que las estaciones que fallaron al transmitir al tiempo  $t - 1$  puedan retransmitir al tiempo  $t$ . Como se mencionó en el supuesto anterior, el intento de transmisión es exitoso con  $Z_t = 1$ , si pasa que  $Z_t = *$ , entonces hubo una colisión que impidió la transmisión.

5. El paquete nuevo de información que llegue al nodo, inmediatamente se intenta retransmitir.

### 3.3. Protocolo Aloha

Después de un intento fallido de transmisión, una estación intenta una retransmisión luego de un retraso, que se distribuye geoméricamente con media  $v^{-1}$ , independiente de todo lo demás. De forma equivalente, la estación retransmite independientemente el paquete con una probabilidad  $v$  en cada tiempo  $t$ , hasta que sea un éxito.

Se define  $X_t$  como el número de paquetes que llegaron antes del tiempo  $t - 1$  y no han sido transmitidos con éxito.

Entonces el número de paquetes que llegaron y que intentan retransmitir al tiempo  $t$  se distribuye como una Binomial  $(X_t, v)$ . Se observa también que la variable  $X_t$  evoluciona como

$$X_{t+1} = X_t + Y_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}.$$

Recordando que  $Z_t = 1$  representa que hubo exactamente un intento de retransmisión, como se mencionó en el segundo supuesto de la sección anterior.

Se define

$$P(Y_t = j) = a_j$$
$$q_r(i) = \binom{n}{i} (1-v)^{n-i} v^i,$$

donde se asume que  $X_t = n$  y el subíndice  $r$  en la probabilidad  $q_r(i)$  se usa por la palabra retransmisión.

1. El valor  $a_i$  es la probabilidad de que  $i$  paquetes que no pertenecen al conjunto de paquetes que llegaron antes del tiempo  $t - 1$  y no han sido transmitidos con éxito, transmita en un tiempo dado.
  
2. La expresión  $q_r(i)$  es la probabilidad de que  $i$  paquetes dentro del conjunto de paquetes que llegaron antes del tiempo  $t - 1$  y no han sido transmitidos con éxito, transmitan en un tiempo dado.

Podemos entonces calcular la probabilidad de transición del proceso  $\{X_t\}$ , del valor  $n$  al valor  $n + 1$  como sigue:

$$p(n, n + i) = \begin{cases} a_i & 2 \leq i \leq m - n \\ a_1(1 - q_r(0)) & i = 1 \\ a_1q_r(0) + a_0(1 - q_r(1)) & i = 0 \\ a_0q_r(1) & i = -1 \\ 0 & i \leq -2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Procederemos ahora a mostrar las justificaciones del calculo de las probabilidades de transición, analizándolas caso por caso.

$$p(n, n + i) = a_i \quad 2 \leq i \leq m - n. \quad (3.2)$$

Cuando dos o más paquetes son transmitidos en un tiempo  $t$ , todos los paquetes se pierden debido a colisión en el canal y así el número de paquetes a retransmitir sube otras  $i$  unidades.

$$p(n, n + 1) = a_1(1 - q_r(0)). \quad (3.3)$$

Mandar un nuevo paquete, junto con uno o más paquetes esperando retransmisión resulta en la pérdida de los paquetes por colisión y el nuevo paquete que se perdió aumenta el número de paquetes a retransmitir en una unidad.

$$p(n, n) = a_1q_r(0) + a_0(1 - q_r(1)). \quad (3.4)$$

Se describen dos situaciones mutuamente exclusivas donde existe el mismo número de paquetes esperando retransmisión. Primeramente  $a_1q_r(0)$  el paquete recién llegado se transmite y ninguno de los que han esperando retransmisión lo hacen. En el otro caso  $a_0(1 - q_r(1))$ , no hay paquetes recién llegados transmitidos, mientras que cero o dos o más se transmiten (cuando dos o más paquetes se transmiten hay una colisión).

$$p(n, n - 1) = a_0q_r(1). \quad (3.5)$$

Se transmiten cero paquetes recién llegados y se retransmite exactamente un paquete esperando retransmisión.

**Teorema 3.3.1** *La Cola de paquetes que intentan transmisión bajo los supuestos del protocolo Aloha es una Cadena de Markov.*

**Demostración.** Para demostrar esto, basta comprobar que a la Cola se le asocia una matriz de transiciones. Para todo estado  $j \geq -2$ , se sigue que  $p(n, j) = 0$  y por lo tanto la suma de estas probabilidades es de cero. Para el caso en que  $-1 \leq j$  sumamos de la



siguiente manera;

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-1}^m p(n, j) &= a_0 q_r(1) + a_1 q_r(0) + a_0(1 - q_r(1)) + a_1(1 - q_r(0)) + a_2 + \dots + a_m = \\
&= a_0 q_r(1) + a_1 q_r(0) + a_0 - a_0 q_r(1) + a_1 - a_1 q_r(0) + a_2 + \dots + a_m = \\
&= a_0 q_r(1) - a_0 q_r(1) + a_1 q_r(0) - a_1 q_r(0) + a_0 + a_1 + \dots + a_m = \\
&= a_0 + a_1 + \dots + a_m = 1.
\end{aligned}$$

La última igualdad es cierta porque cada término de la suma es una probabilidad que definimos anteriormente. Puesto que a la Cola se le asocia una matriz de transiciones, es una Cadena de Markov. ■

### 3.4. Análisis del protocolo

En esta sección analizaremos a la cadena de Markov dada por el número de paquetes en espera en el protocolo.

Empezaremos con un resultado que tiene que ver con la deriva del proceso.

**Proposición 3.4.1**  $\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = n] = \lambda - e^{-\lambda}(nv + (1 - v)\lambda)(1 - v)^{n-1}$

**Demostración.**

Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  la cadena del protocolo, se calcula la deriva a continuación:

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = n] = \mathbb{E}[X_t + Y_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} - X_t | X_t = n] =$$

$$\mathbb{E}[Y_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} | X_t = n] = \mathbb{E}[Y_t | X_t = n] - \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} | X_t = n] =$$

$$v - \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t = n] = v - P(Z_t = 1|X_t = n).$$

Es necesario observar la igualdad de eventos

$$\{Z_t = 1\} = \{Y_t = 1 \text{ y cero intentos de retransmisión}\} \cup \{Y_t = 0 \text{ y un intento de retransmisión}\}$$

y que estos dos últimos eventos son independientes:

$$P(Z_t = 1|X_t = n) = P(\{Y_t = 1, 0\} \cup \{Y_t = 0, 1\}|X_t = n) =$$

$$P(\{Y_t = 1, 0\}|X_t = n) + P(\{Y_t = 0, 1\}|X_t = n) =$$

$$P(Y_t = 1)P(0|X_t = n) + P(Y_t = 0)P(1|X_t = n) =$$

$$e^{-\lambda} \lambda \binom{n}{0} v^0 (1-v)^{n-0} + e^{-\lambda} \binom{n}{1} v^1 (1-v)^{n-1} =$$

$$e^{-\lambda} \lambda (1-v)^n + e^{-\lambda} v n (1-v)^{n-1} =$$

$$e^{-\lambda} (nv + (1-v)\lambda) (1-v)^{n-1}.$$

Concluimos que

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = n] = \lambda - P(Z_t = 1 | X_t = n) = \lambda - e^{-\lambda} (nv + (1-v)\lambda) (1-v)^{n-1},$$

que es lo que necesitábamos. ■

Del resultado anterior podemos ver la siguiente observación.

**Observación 3.4.1**  $\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = n] > 0$  siempre y cuando  $\lambda > e^{-\lambda} (nv + (1-v)\lambda) (1-v)^{n-1}$ .

Calculemos el límite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}(nv + (1-v)\lambda)(1-v)^{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}\lambda(1-v)^n + e^{-\lambda}vn(1-v)^{n-1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}\lambda(1-v)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}vn(1-v)^{n-1}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $1-v < 1$ , puesto que  $v$  es una probabilidad, obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}\lambda(1-v)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}vn(1-v)^{n-1} = e^{-\lambda}\lambda(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}vn(1-v)^{n-1} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}vn(1-v)^{n-1} = e^{-\lambda}v \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-v)^{n-1} = (e^{-\lambda}v)(0) = 0.$$

Intuitivamente esto sugiere que, para cualquier tasa  $\lambda > 0$  de paquetes, si la cantidad de los paquetes que no han sido transmitidos con éxito, es lo suficientemente grande, se espera que crezca aún más, es decir que la Cadena es posiblemente transitoria.

Aunque es necesario recalcar que hay cadenas con deriva positiva que son recurrentes.

En lo que sigue veremos que el cuadrado del incremento (condicional al valor anterior) es uniformemente acotado. Calculemos

$$\mathbb{E}[(X_{t+1} - X_t)^2 | X_t] = \mathbb{E}[X_{t+1}^2 - 2X_{t+1}X_t + X_t^2 | X_t] = \mathbb{E}[X_{t+1}^2 | X_t] - 2\mathbb{E}[X_{t+1}X_t | X_t] + \mathbb{E}[X_t^2 | X_t].$$

Se calcula cada término por separado:

$$\mathbb{E}[X_t^2 | X_t] = X_t^2$$

$$-2\mathbb{E}[X_{t+1}X_t | X_t] = -2X_t\mathbb{E}[X_{t+1} | X_t] = -2X_t\mathbb{E}[X_t + Y_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} | X_t] =$$

$$-2X_t(\mathbb{E}[X_t|X_t] + \mathbb{E}[Y_t|X_t] - \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t]) = -2X_t(X_t + \lambda - P(Z_t = 1|X_t)).$$

Por último falta calcular la esperanza condicional para el término  $X_{t+1}^2$ . Lo hacemos a continuación:

$$\begin{aligned} X_{t+1}^2 &= (X_t + Y_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}})^2 = \\ &X_t^2 + X_t Y_t - X_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} + Y_t X_t + Y_t^2 - Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} - \mathbb{I}_{\{Z_t\}} X_t - \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} Y_t + \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}^2, \end{aligned}$$

lo que implica

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[X_t^2|X_t] + \mathbb{E}[X_t Y_t|X_t] - \mathbb{E}[X_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] + \mathbb{E}[Y_t X_t|X_t] \\ &+ \mathbb{E}[Y_t^2|X_t] - \mathbb{E}[Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] - \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t\}} X_t|X_t] - \mathbb{E}[Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] + \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}^2|X_t] = \\ &X_t^2 + X_t \mathbb{E}[Y_t|X_t] - X_t \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t\}}|X_t] + X_t \mathbb{E}[Y_t|X_t] + \mathbb{E}[Y_t^2|X_t] - 2\mathbb{E}[Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] \\ &\quad - X_t \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t\}}|X_t] + \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{Z_t\}}|X_t] = \\ &X_t^2 + X_t \lambda - X_t P(Z_t = 1|X_t = n) + X_t \lambda + (\lambda^2 + \lambda) - X_t P(Z_t = 1|X_t) \\ &\quad - 2\mathbb{E}[Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] + P(Z_t = 1|X_t). \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(X_{t+1} - X_t)^2|X_t] = \\ &X_t^2 + X_t \lambda - X_t P(Z_t = 1|X_t = n) + X_t \lambda + (\lambda^2 + \lambda) - X_t P(Z_t = 1|X_t) \\ &\quad - 2\mathbb{E}[Y_t \mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] + P(Z_t = 1|X_t) - 2X_t(X_t + \lambda - P(Z_t = 1|X_t)) + X_t^2 = \\ &X_t^2 + X_t \lambda - X_t P(Z_t = 1|X_t = n) + X_t \lambda + (\lambda^2 + \lambda) + P(Z_t = 1|X_t) - X_t P(Z_t = 1|X_t) \\ &\quad - 2X_t^2 - 2X_t \lambda + 2X_t P(Z_t = 1|X_t) + X_t^2 = \end{aligned}$$

$$2X_t^2 - 2X_t^2 + 2X_t\lambda - 2X_t\lambda + 2X_tP(Z_t = 1|X_t) - 2X_tP(Z_t = 1|X_t) + \lambda + \lambda^2 + P(Z_t = 1|X_t)$$

$$-2\mathbb{E}[Y_t\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] = \lambda + \lambda^2 + P(Z_t = 1|X_t) - 2\mathbb{E}[Y_t\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t].$$

Claramente  $\lambda^2$  y  $\lambda$  son valores positivos y acotados, al igual que la probabilidad  $P(Z_t = 1|X_t)$  es acotada y no negativa. Ahora notando que  $Y_t\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}} \leq Y_t$ , se deduce que  $\mathbb{E}[Y_t\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t] \leq \mathbb{E}(Y_t|X_t) < \infty$ . Entonces se propone una  $M$  positiva dada por  $M = \lambda + \lambda^2 + 1 + 2\mathbb{E}[Y_t|X_t]$ , lo que implica

$$|\mathbb{E}[(X_{t+1} - X_t)^2|X_t]| = |\lambda + \lambda^2 + P(Z_t = 1|X_t) - 2\mathbb{E}[Y_t\mathbb{I}_{\{Z_t=1\}}|X_t]| \leq M. \quad (3.6)$$

Concluimos que el incremento cuadrático es uniformemente acotado.

Utilizando las propiedades que hemos probado (la positividad de la deriva, y el acotamiento uniforme del incremento cuadrático) podemos probar el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.1** *El protocolo Aloha es una cadena transitoria.*

En lugar de proceder a su prueba, mostraremos un resultado más específico (la **Proposición 3.3.2**) que muestra que la Cadena de Markov asociada al protocolo Aloha no solo es transitoria, sino que a partir de cierto momento solamente sube (es decir, se vuelve incapaz de transmitir nada). Para ello, utilizaremos el siguiente resultado clásico de probabilidad.

**Teorema 3.4.2 (Primer Lema de Borel-Cantelli)** *Si una sucesión de eventos  $\{A_n\}$  cumple que  $\sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , entonces la probabilidad de que ocurran infinitamente muchos eventos es cero.*

**Demostración.**

Sea  $\{A_n\}$  una sucesión de eventos como en las hipótesis y se define  $A = \{\text{número de eventos que ocurren}\}$ , entonces

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}\left[\sum_n (\mathbb{I}_{A_n})\right] = \sum_n \mathbb{E}[\mathbb{I}_{A_n}] = \sum_n P(A_n) < \infty$$

Es decir el número de eventos que ocurren tiene una esperanza finita, entonces el número de eventos que ocurren debe ser finito con probabilidad 1, por lo tanto la probabilidad de que ocurran infinitos eventos es cero. ■

**Proposición 3.4.2 (Atoramiento de paquetes)** *Consideremos el protocolo Aloha con una tasa de llegada  $\lambda > 0$  y una probabilidad  $v \in (0, 1)$  casi seguramente existe un tiempo (aleatorio)  $J$  que es finito, en el cuál siempre se tendrá que  $Z_t = *$  después de dicho tiempo  $J$ . Esto es, el protocolo Aloha transmite solamente una cantidad finita de paquetes y luego se atasca para siempre.*

$$P(\exists J < \infty : Z_t = * \forall t \geq J) = 1$$

**Observación 3.4.2**  *$J$  no es un tiempo de paro, puesto que  $J$  puede ser visto como*

$$J = \text{máx}\{t \geq 0 : Z_t = 1, 0\},$$

*por lo que el evento es igual a*

$$\{J = t\} = \{X_t = \{1, 0\}, X_{t+1} = *, X_{t+2} = *, \dots\}.$$

*Claramente esto depende de estados mayores a  $J = t$ , es decir, no se encuentra dentro de la información anterior al tiempo  $t$ , entonces no pertenece a la filtración del proceso ( $J$  es un último tiempo de salida conocido en inglés como "last exit time").*

**Demostración.** Se considera la probabilidad de que el canal se desatore antes de que la cantidad de paquetes que intenten retransmisión aumente;

$$p(n) = (\exists J < \infty : X_t, \dots, X_T = n, Z_t = 0, 1 | X_0 = n). \quad (3.6)$$

Para calcular  $p(n)$  uno puede pensar esto como un juego con tres posibilidades:

1. Se **gana**, cuando al tiempo  $t$  ocurre que  $Z_t = 0$  o  $Z_t = 1$ , entonces  $T = t$ .
2. Se **pierde**, cuando  $X_t > n$  y  $Z_t = *$ .
3. Existe el **inténtalo de nuevo**, en el caso  $X_t = n$  y  $Z_t = *$ .

Se define  $p_k(n)$  como la probabilidad de ganar en exactamente  $k$  intentos

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(n), \quad (3.7)$$

y se observa que ;

$$p_k(n) = p(\text{intentarlo de nuevo})^{k-1} p(\text{ganar en un intento}),$$

entonces

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\text{intentarlo otra vez})^{k-1} p(\text{ganar en un intento}) =$$

$$p(\text{ganar en un intento}) \sum_{k=1}^{\infty} p(\text{intentarlo otra vez})^{k-1} =$$

$$p(\text{ganar en un intento}) \sum_{k=0}^{\infty} p(\text{intentarlo otra vez})^k =$$

$$p(\text{ganar en un intento}) \frac{1}{1 - p(\text{intentarlo})} = \frac{p(\text{Ganar})}{1 - p(\text{intentarlo})}.$$

Por lo que se obtiene,

$$p(n) = \frac{p(\text{Ganar})}{1 - p(\text{intentarlo})} = \frac{p(Z_t = 0 \text{ o } 1 | N_t = n)}{1 - p(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{P(Z_t = 0 | X_t = n) + P(Z_t = 1 | X_t = n)}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} = \frac{P(Z_t = 0 | X_t = n) + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^n}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{P(Y_t = 0, 0 \text{ retransmisiones} | X_t = n) + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^n}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{P(Y_t = 0) P(0 \text{ retransmisiones} | X_t = n) + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^n}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda} \binom{n}{0} v^0 (1 - v)^{n-0} + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^n}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda} (1 - v)^n + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^n}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{(1 - v)^n (e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}) + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1}}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} = \frac{(1 - v)^n (1 + \lambda) e^{-\lambda} + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1}}{1 - P(X_{t+1} = n, Z_t = * | X_t = n)} =$$

$$\frac{(1 - v)^n (1 + \lambda) e^{-\lambda} + e^{-\lambda} n v (1 - v)^{n-1}}{1 - P(\{Y_t = 0 \text{ y más de } 0 \text{ retransmisiones}\} - \{Y_t = 0, \{0 \text{ ret}\} \cup \{1 \text{ ret}\}\} | X_t = n)} =$$



$$\begin{aligned}
& \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - (P(\{Y_t = 0, ret \geq 0|X_t = n\}) - P(\{Y_t = 0, ret \geq 0\}) \cap \{Y_t = 0, \{0 \text{ ret}\} \cup \{1 \text{ ret}\}\}|X_t = n))} = \\
& \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - (P(\{Y_t = 0, ret \geq 0\}|X_t = n) - P(\{Y_t = 0, \{0 \text{ ret}\} \cup \{1 \text{ ret}\}\}|X_t = n))} = \\
& \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - (P(Y_t = 0)P(ret \geq 0|X_t = n) - P(Y_t = 0)P(\{0 \text{ ret}\} \cup \{1 \text{ ret}\}))} = \\
& \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - (e^{-\lambda}(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} v^k (1-v)^{n-k}) - e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1} - e^{-\lambda}(1-v)^n)} = \\
& \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - (e^{-\lambda}(1) - e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1} - e^{-\lambda}(1-v)^n)} = \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)}.
\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando n crece a infinito obtenemos

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)} = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)} = \\
& \frac{(0)(1+\lambda)e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}(1 - 0 - 0)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)} = \\
& 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1 - e^{-\lambda}(1 - nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)} = \frac{0}{1 - e^{-\lambda}(1 - 0 - 0)} = 0.
\end{aligned}$$

El límite existe, esto ayudará a ver que la serie sea convergente, es decir,  $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) < \infty$ .

Usando el criterio de D´Alembert tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1-v)^{n+1}(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(n+1)v(1-v)^n}{1-e^{-\lambda}(1-(n+1)v(1-v)^n - (1-v)^{n+1})}}{\frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1-e^{-\lambda}(1-nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-v)^{n+1}(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}(n+1)v(1-v)^n}{1-e^{-\lambda}(1-(n+1)v(1-v)^n - (1-v)^{n+1})}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-v)^n(1+\lambda)e^{-\lambda} + e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1-e^{-\lambda}(1-nv(1-v)^{n-1} - (1-v)^n)}} = \\ &= \frac{0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}(n+1)v(1-v)^n}{1-e^{-\lambda}}}{0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}}{1-e^{-\lambda}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda}(n+1)v(1-v)^n}{e^{-\lambda}nv(1-v)^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} \right) \left( \frac{v}{v} \right) \left( \frac{n+1}{n} \right) \left( \frac{(1-v)^n}{(1-v)^{n-1}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1)(1) \left( \frac{n}{n} + \frac{1}{n} \right) (1-v) = (1-v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = (1-v) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = \\ &= (1-v) \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = (1-v)(1) = (1-v) < 1, \end{aligned}$$

por lo que converge la serie.

Es necesario definir a los **valores récord** que lleguen a **tiempos récord**. Sean  $R(1) = 1$  y  $R(r+1) = \inf\{t > R(r) : X_t > X_{R(r)}\}$ .

Se afirma que los **tiempos récord** son tiempos de paro. Sean  $B = \{1\}$  y  $A = \{X_t > X_{R(r)}\}$  dos conjuntos, que son claramente numerables, entonces para el primer valor se tiene que

$$\{R(1) = 1\} = \{X_1 \in B\},$$

y para  $n > 1$

$$\{R(r+1) = n\} = \{X_2 \notin A, X_3 \notin A, \dots, X_n \in A\}.$$

Esto implica que solamente depende de  $\{X_2, \dots, X_n\}$ , (ya que  $R(r+1)$  es el ínfimo de los valores) como se requiere para ser tiempo de paro.

Hay que notar que por definición solamente se llega a cada **valor récord** una vez y que

la sucesión de **valores récord** es infinita, por lo que la cantidad de paquetes atrasados no está acotada.

Además, dado que  $\{X_{R(r)}\} \subset \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\sum_{r=1}^{\infty} P(X_{R(r)}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(n) < \infty. \quad (3.8)$$

$M(r)$  es el evento de que el canal se desatore antes de que la cantidad de paquetes atrasados llegue a su  $r$ -ésimo **valor récord**. Gracias al **primer lema de Borel-Cantelli** existe solamente una cantidad finita de eventos de  $M(r)$  que puedan ocurrir. Como se llegó al  $r$ -ésimo **valor récord** en un tiempo finito, quiere decir que habrán solamente una cantidad finita de transmisiones con éxito;

$$P(\exists J < \infty : Z_t = * \forall t \geq J) = 1,$$

para cualquier tasa de llegada  $\lambda > 0$ . ■

Como vimos en este capítulo, el protocolo Aloha tiene la propiedad de inestabilidad (transitoriedad): existe un momento aleatorio a partir del cuál hay un atascamiento de paquetes y el protocolo deja de transmitir información. En el capítulo siguiente exploraremos variaciones del protocolo buscando estabilidad.

# Capítulo 4

## Estabilidad del protocolo

Presentamos las variaciones necesarias para hacer del protocolo una Cadena estable. Además estudiamos otro modelo, que es más eficaz que el protocolo modificado, pues no requiere de cierta condición que es fundamental en el protocolo modificado. Tanto la variación al protocolo Aloha, así como el modelo del protocolo de resolución de colisión fueron tomados de [Brémaud, 2013].

### 4.1. Protocolo Aloha estable

Recordando que el protocolo Aloha con probabilidad fija de retransmisión  $v$  era inestable, se cambiará la probabilidad de retransmisión  $v$  por una  $v(k)$  donde  $k$  es el número de paquetes atrasados, es decir por una función que depende de  $k$ . Por lo que se van a dejar los supuestos del modelo original tal como estaban, salvo que se sustituye a  $v$  por  $v(k)$ . Recordando la **Proposición 3.4.1**, teníamos que

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = k] = \lambda - (e^{-\lambda} k v (1 - v)^{k-1} + \lambda e^{-\lambda} (1 - v)^k).$$

Sustituyendo  $e^{-\lambda}\lambda = a_1$  y  $e^{-\lambda} = a_0$  y de acuerdo con el **lema de Pakes (lema 1.2.3)**, es necesario encontrar una función  $v(k)$  que garantice que

$$\lambda \leq \lim_{k \uparrow \infty} (a_0 k v (1-v)^{k-1} + a_1 (1-v)^k) - \epsilon, \quad (4.1)$$

para alguna  $\epsilon > 0$ .

Definamos la siguiente función

$$g_k(v) = a_0 k v (1-v)^{k-1} + a_1 (1-v)^k. \quad (4.2)$$

Se calculará la derivada de  $g_k(v)$  para  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dv} a_0 k v (1-v)^{k-1} + a_1 (1-v)^k &= a_1 \frac{d}{dv} ((1-v)^k) + a_0 k \frac{d}{dv} (v(1-v)^k - 1) = \\ &= a_1 k (1-v)^{k-1} \frac{d}{dv} (1-v) + a_0 k \left( \frac{d}{dv} ((1-v)^{k-1}) v + (1-v)^{k-1} \frac{d}{dv} (v) \right) = \\ &= a_1 k (1-v)^{k-1} (-1) + a_0 k \left( (1)(1-v)^{k-1} + (k-1)(1-v)^{k-2} v \left( \frac{d}{dv} (1-v) \right) \right) = \\ &= -a_1 k (1-v)^{k-1} + a_0 k \left( (1-v)^{k-1} + (-1)(1-v)^{k-2} v (k-1) \right) = \\ &= -a_1 k (1-v)^{k-1} + a_0 k (1-v)^{k-1} - a_0 k (k-1) (1-v)^{k-2} v = \\ &= -a_1 k (1-v)^{k-1} + a_0 k (1-v)^{k-1} + (-a_0 k^2 (1-v)^{k-2} v + a_0 k (1-v)^{k-2} v) = \\ &= (1-v)^{k-1} (-a_1 k + a_0 k - a_0 k^2 v (1-v)^{-1} + a_0 k (1-v)^{-1} v) = \\ &= k (1-v)^{k-1} (-a_1 + a_0 - a_0 k v (1-v)^{-1} + a_0 v (1-v)^{-1}) = \\ &= k (1-v)^{k-2} ((-a_1 + a_0)(1-v) - a_0 k v + a_0 v) = \\ &= k (1-v)^{k-2} (-a_1 + a_1 v + a_0 - a_0 v - a_0 v - a_0 k v + a_0 v) = \end{aligned}$$

$$k(1 - v)^{k-2}((a_0 - a_1) - v(ka_0 - a_1)). \quad (4.3)$$

Se va a suponer que  $a_0 > a_1$  y se propone

$$v = v(k) = \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}. \quad (4.4)$$

Al sustituir la función  $v(k)$  por la expresión (4.4) en la derivada, se anula como lo mostramos a continuación:

$$\frac{d}{dv}g_k(v) = k(1 - v)^{k-2}((a_0 - a_1) - v(ka_0 - a_1)) = k(1 - v(k))^{k-2}((a_0 - a_1) - v(k)(ka_0 - a_1)) =$$

$$k\left(1 - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^{k-2}((a_0 - a_1) - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}(ka_0 - a_1)) = k\left(1 - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^{k-2}((a_0 - a_1) - (a_0 - a_1)) =$$

$$k\left(1 - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^{k-2}(0) = 0.$$

Al evaluar la función  $g_k$  en el punto  $v(k)$  obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g_k(v(k)) &= (1 - v(k))^k a_1 + (1 - v(k))^{k-1} a_0 k v(k) = \\ & \left(1 - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^k a_1 + \left(1 - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^{k-1} k \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1} a_0 = \\ & \left(\frac{ka_0 - a_1}{ka_0 - a_1} - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^k a_1 + \left(\frac{ka_0 - a_1}{ka_0 - a_1} - \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1}\right)^{k-1} a_0 \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1} k = \\ & \left(\frac{ka_0 - a_0}{ka_0 - a_1}\right)^k a_1 + \left(\frac{ka_0 - a_0}{ka_0 - a_1}\right)^{k-1} a_0 \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1} k = \\ & \left(\frac{a_0(k-1)}{ka_0 - a_1}\right)^k a_1 + \left(\frac{a_0(k-1)}{ka_0 - a_1}\right)^{k-1} a_0 k \frac{a_0 - a_1}{ka_0 - a_1} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\frac{1}{a_0} a_0(k-1)}{\frac{1}{a_0} k a_0 - a_1}\right)^k a_1 + \left(\frac{\frac{1}{a_0} a_0(k-1)}{\frac{1}{a_0} k a_0 - a_1}\right)^{k-1} a_0 k \frac{a_0 - a_1}{k a_0 - a_1} = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^k a_1 + a_0 k \frac{a_0 - a_1}{k a_0 - a_1} \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(a_0 k \frac{a_0 - a_1}{k a_0 - a_1} + a_1 \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(a_0 k \frac{a_0 - a_1}{k a_0 - a_1} + a_1 \left(\frac{a_0(k-1)}{k a_0 - a_1}\right)\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(\frac{k a_0(a_0 - a_1) + a_1 a_0(k-1)}{k a_0 - a_1}\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(a_0 \left(\frac{k(a_0 - a_1) + a_1(k-1)}{k a_0 - a_1}\right)\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(a_0 \frac{k a_0 - k a_1 + k a_1 - a_1}{k a_0 - a_1}\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} \left(a_0 \frac{k a_0 - a_1}{k a_0 - a_1}\right) = \\
& \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} (a_0).
\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando  $k$  crece a infinito obtenemos que

$$\lim_{k \uparrow \infty} g_k(v(k)) = \lim_{k \uparrow \infty} \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} (a_0) =$$

$$a_0 \lim_{k \uparrow \infty} \left(\frac{k-1}{k - \frac{a_1}{a_0}}\right)^{k-1} = a_0 e^{-1 + \frac{a_1}{a_0}}. \quad (4.5)$$

Notemos que

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{e^{-\lambda} \lambda}{e^{-\lambda}} = \lambda,$$

entonces

$$\lambda < a_0 e^{-1 + \frac{a_1}{a_0}} = e^{-\lambda} e^{-1 + \lambda} = e^{-1}. \quad (4.6)$$

La ecuación (4.6) es condición suficiente para la estabilidad del protocolo dado que

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = k] < \infty$$

y

$$\limsup_{k \uparrow \infty} \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | X_t = k] = \limsup_{k \uparrow \infty} \lambda - g_k(v(k)) =$$

$$\lambda - \limsup_{k \uparrow \infty} g_k(v(k)) = \lambda - e^{-1} < 0.$$

Por el **lema de Pakes** concluimos que la cadena es positiva recurrente.

## 4.2. Protocolo de resolución de colisión

Antes de definir el nuevo protocolo, mostraremos un resultado clásico de probabilidad que utilizaremos más adelante.

**Lema 4.2.1 (Wald)** *Sea  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias idénticamente independientes con media finita y sea  $T$  un tiempo de paro tal que  $\mathbb{E}[T] < \infty$ , entonces  $\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_T] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_T]$ .*

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_T] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^T X_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbb{I}_{\{T \geq n\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{\{T \geq n\}}] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{\{T \geq n\}} | X_1, \dots, X_{n-1}]]. \end{aligned}$$



Es importante notar que  $\mathbb{I}_{\{T \geq n\}} = \mathbb{I} - \mathbb{I}_{\{T \leq n-1\}}$ , esto quiere decir que  $1_{\{T \geq n\}}$  es una función de  $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$  porque  $\{T \leq n-1\}$  depende de tal información.

Notemos ahora que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mathbb{I}_{\{T \geq n\}} | X_1, \dots, X_{n-1}]] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \geq n\}} \mathbb{E}[X_n | X_1, \dots, X_{n-1}]] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \geq n\}} \mathbb{E}[X_n]] =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \geq n\}} \mathbb{E}[X_1]] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \geq n\}}] \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{T \geq n\}}] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geq n). \quad (4.7)$$

Como  $T$  es un tiempo de paro, es una variable aleatoria y en este caso, toma valores en los naturales, por lo que su esperanza puede calcularse como,

$$\mathbb{E}[T] = 1P(T = 1) + 2P(T = 2) + 3P(T = 3) + \dots =$$

$$\begin{cases} P(T = 1) \\ P(T = 2) + P(T = 2) \\ P(T = 3) + P(T = 3) + P(T = 3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

Al sumar las columnas se obtiene que

$$\mathbb{E}[T] = P(T \geq 1) + P(T \geq 2) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geq n), \quad (4.8)$$

por lo tanto al combinar las ecuaciones (4.7) y (4.8) se obtiene que

$$\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_T] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geq n) = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[T].$$

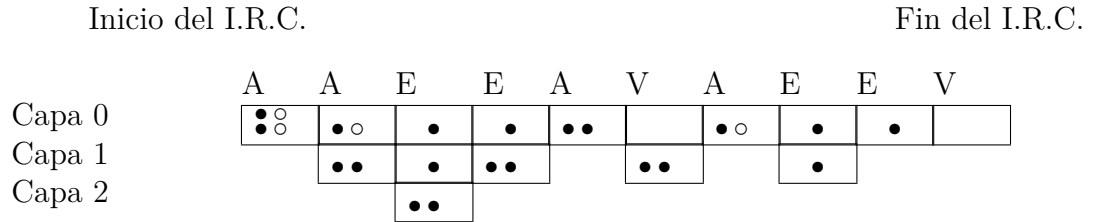
Esto es lo queríamos demostrar. ■

### Protocolo de resolución de colisión

En este protocolo, cuando una colisión ocurre, todas las peticiones nuevas son puestas en espera hasta que todos los mensajes envueltos en la colisión hayan logrado una forma de salir de ella. Ya que los mensajes hayan resuelto su problema de colisión, los mensajes en espera intentan retransmitir. Estos mensajes a su vez, tal vez entren en una colisión y después la resuelvan.

El tiempo se dividirá en períodos sucesivos, que se llamarán **intervalos de resolución de colisión** (I.R.C.). Los mensajes que llegan al primer tiempo del I.R.C., son lo que llegaron al final del anterior I.R.C.. Todos ellos intentan retransmitir al primer tiempo del I.R.C. por lo que, si hay dos o más mensajes, una colisión ocurre (en caso contrario el I.R.C. solamente duró un tiempo y el nuevo I.R.C. inicia al siguiente tiempo). Usando el volado de una moneda justa (es decir, una distribución Bernoulli) para cada mensaje que participa de la colisión, cuando cae cara, el mensaje se une a la capa 0 del apilamiento de los mensajes, en caso contrario, el mensaje se va a la capa 1.

Al siguiente tiempo, todos los mensajes de la capa 0 intentan el enlace, si no hay colisión (existen los casos en que la capa estuviera vacía, o que hubiera un mensaje) la capa 0 se elimina, y la capa 1 (que es la de abajo) sube y se convierte en la nueva capa 0. Por lo contrario hay colisión porque en la capa 0 hay más de dos mensajes, los mensajes que están en dicha colisión tienen que lanzar el volado otra vez, los que tienen cara, forman una nueva capa 0, los sobrantes forman una nueva capa 1 y la capa 1 de antes baja a ser la capa 2 del apilamiento de mensajes.



A= atasco de paquetes, E= éxito de transmisión ,V= capa vacía.

Figura 4-1: Diagrama de lo que pasa en el I.R.C.

En general, en cada paso del modelo, solamente la capa 0 intenta retransmitir, si no hay colisión las capas 1, 2, 3... se convierten en las capas 0, 1, 2, .... Con la colisión la capa 0 se parte en la nueva capa 0 y en la capa 1 y las antiguas capas 1, 2, 3, ... son ahora las capas 2, 3, 4, .... Se hace la observación de que cada mensaje sabe en que capa está, solamente por escuchar en qué canal está dando la información, por lo que hay colisión o no hay colisión.

Una vez que la colisión se resuelve, es decir, cuando todas las capas desaparecen, un nuevo I.R.C. comienza. Con los mensajes que inician en este I.R.C. son los que llegaron en el anterior.

Se supondrá que las solicitudes nuevas al tiempo  $t$  son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas,  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , donde  $X_t$  es la longitud del  $t$ -ésimo I.R.C. Sea  $Z_t$  el número de llegadas recientes en el  $t$ -ésimo I.R.C.. Se tiene

$$\mathbb{E}[X_{t+1} | X_t = i] = \frac{\mathbb{E}[X_{t+1} \mathbb{I}_{\{X_t=i\}}]}{P(X_t = i)} \mathbf{1} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathbb{E}[X_{t+1}\mathbb{I}_{\{X_t=i\}}] P(X_t = i, Z_t = k)}{P(X_t = i) P(X_t = i, Z_t = k)} = \\
& \frac{\mathbb{E}[X_{t+1}\mathbb{I}_{\{X_t=i\}}] P(X_t = i, Z_t = k)}{P(X_t = i, Z_t = k) P(X_t = i)} = \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X_{t+1}\mathbb{I}_{\{X_t=1\}}\mathbb{I}_{\{Z_t=k\}}] P(Z_n = k|X_n = i)}{P(X_t = i, Z_t = k)} P(Z_n = k|X_n = i) = \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_{t+1}|X_t = i, Z_t = k] P(Z_t = k|X_t = i). \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Se define  $\mathbb{E}[X_{t+1}|Z_t = k] = L_k$ . Dadas las condiciones de este protocolo, con cero o un paquete al inicio del I.R.C. no hay colisiones, de lo que se sigue que  $L_0 = L_1 = 1$ . Cuando ocurre  $k \geq 2$  se da la colisión y los  $k$  paquetes lanzan un volado. Dependiendo del resultado se separan en dos conjuntos, el de la capa 0 y el de la capa 1, entre estos  $k$  usuarios,  $i$  obtienen cara con probabilidad

$$q_i(k) = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{4.11}$$

la longitud promedio del I.R.C., dado que hay  $k \geq 2$  paquetes en el inicio y dado que la primer capa 0 contiene  $i$  paquetes es,

$$L_{k,i} = 1 + L_i + L_{k-i}.$$

La interpretación de la ecuación anterior es la siguiente: al primer tiempo dentro del I.R.C. se da una colisión, los  $i$  paquetes en la primer capa 0 entrarán en los tiempos  $L_i$  promedio para resolver su colisión, y  $L_{k-i}$  tiempos serán necesitados para los  $k - i$

paquetes en la primer capa 1. Notemos que

$$L_k = \sum_{i=0}^k q_i(k) L_{k,i} = \sum_{i=0}^k q_i(k) (1 + L_i + L_{k-i}) =$$

$$\sum_{i=0}^k q_i(k) + \sum_{i=0}^k q_i(k) (L_i + L_{k-i}) = 1 + \sum_{i=0}^k q_i(k) (L_i + L_{k-i}).$$

Resolviendo para  $L_k$ :

$$L_k = 1 + \sum_{i=0}^k q_i(k) (L_i + L_{k-i}) =$$

$$1 + q_0(k) (L_0 + L_k) + \dots + q_k(k) (L_k + L_0) =$$

$$1 + q_0(k) L_0 + q_0 L_k + \dots + q_k(k) L_k + q_k(k) L_0 =$$

$$1 + q_0(k) L_0 + q_k(k) L_0 + \dots + q_{k-1}(k) L_{k-1} + q_1(k) L_{k-1} + q_0(k) L_k + q_k(k) L_k,$$

si y solo si

$$1 + (q_0(k) + q_{k-0}(k)) L_0 + \dots + (q_{k-1}(k) + q_{k-(k-1)}(k)) L_{k-1} = L_k - L_k q_0(k) - L_k q_k(k),$$

si y solo si

$$1 + (q_0(k) + q_{k-0}(k)) L_0 + \dots + (q_{k-1}(k) + q_{k-(k-1)}(k)) L_{k-1} = L_k (1 - q_0(k) - q_k(k)),$$

so y solo si

$$L_k = \frac{\sum_{i=0}^{K-1} (q_i(k) + q_{k-i}(k)) L_i}{1 - q_0(k) - q_k(k)}. \quad (4.12)$$

Se define el conjunto

$$A = \{a_j | a_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)(q_i(j) + q_{j-i}(j))}{\sum_{i=0}^{m-1} i(q_i(j) + q_{j-i}(j))}, \quad j > m\}.$$

A continuación verificaremos que  $A$  es acotado.

Sea  $a_j \in A$ , entonces

$$a_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)(q_i(j) + q_{j-i}(j))}{\sum_{i=0}^{m-1} i(q_i(j) + q_{j-i}(j))}, \quad j > m.$$

Claramente el denominador es mayor que cero, puesto que es una suma finita de productos de naturales con probabilidades mayores a cero, y en el caso del numerador pasa lo mismo, por lo tanto se sigue que  $a_j > 0$ .

Para todo  $j$  mayor que  $m$ ,

$$\sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)(q_i(j) + q_{j-i}(j)) = \sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)q_i(j) + \sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)q_{j-i}(j) =$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} q_i(j)L_i + \sum_{i=0}^{m-1} q_i(j) + \sum_{i=0}^{m-1} q_{j-i}(j)L_i + \sum_{i=0}^{m-1} q_{j-i}(j) < \sum_{i=0}^j q_i(j)L_i + 1 + \sum_{i=0}^j q_{j-i}(j)L_i + 1 < \infty,$$

puesto que son sumas finitas de productos de probabilidades con números. Además ocurre que,

$$\sum_{i=0}^{m-1} i(q_i(j) + q_{j-i}(j)) = \sum_{i=0}^{m-1} iq_i(j) + \sum_{i=0}^{m-1} iq_{j-i}(j) < \sum_{i=0}^j iq_i(j) + \sum_{i=0}^j iq_{j-i}(j) = \sum_{i=0}^j iq_i(j) + \sum_{i=0}^j iq_{j-i}(j) < \infty,$$

pues ambas sumas son finitas. De lo anterior se sigue que  $a_j < \infty$ . Entonces para cada  $j > m$  existe un  $M_j$  tal que  $a_j < |M_j|$ . Definamos  $M = \sup M_j$ , tal número es una cota superior para el conjunto  $A$ .

Ya que  $A$  es un conjunto acotado debe tener supremo. Se supone que para  $m \geq 2$  y  $\alpha_m$  ocurre que

$$\alpha_m \geq \sup_{j>m} \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (L_i + 1)(q_i(j) + q_{j-i}(j))}{\sum_{i=0}^{m-1} i(q_i(j) + q_{j-i}(j))}, \quad (4.13)$$

pasa que

$$L_m \leq \alpha_m m - 1. \quad (4.14)$$

Se probará por inducción que se cumple para  $\forall m \leq n$ .

Supongamos que fue válido para  $n = m, m + 1, \dots, j - 1, j$ . Usando la igualdad (4.12) podemos calcular

$$\begin{aligned} L_j(1 - q_0(j) - q_j(j)) &= 1 + \sum_{i=0}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i = \\ &1 + \sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i + \sum_{i=m}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i \leq \\ &1 + \sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i + \sum_{i=m}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))(\alpha_m i - 1) = \\ &1 + \sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i + 0 + \sum_{i=m}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))(\alpha_m i - 1) = \\ &1 + [L_0(q_0(j) + q_j(j)) + \dots + L_{m-1}(q_{m-1}(j) + q_{j-(m-1)}(j))] + \\ &(-\alpha_m(0) + 1)(q_0(j) + q_j(j)) + (\alpha_m(0) - 1)(q_0(j) + q_j(j)) + \dots \\ &(-\alpha_m(m) + 1)(q_{m-1}(j) + q_{j-(m-1)}(j)) + (\alpha_m(m) - 1)(q_{m-1}(j) + q_{j-(m-1)}(j)) + \\ &\sum_{i=m}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))(\alpha_m i - 1) = 1 + [L_0(q_0(j) + q_j(j)) + \\ &(-\alpha_m(0) + 1)(q_0(j) + q_j(j)) + \dots + L_{m-1}(q_{m-1}(j) + q_{j-(m-1)}(j))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\alpha_m(m-1)+1)(q_{m-1}(0)+q_{j-(m-1)}(j)) + \sum_{i=0}^{j-1}(q_i(j)+q_{j-i}(j))(\alpha_m i-1) = \\
& 1+(q_0(j)+q_j(j))[L_0-\alpha_m(0)+1]+\dots+(q_{m-1}(j)+q_{j-(m-1)}(j))[L_{m-1}-\alpha_m(m-1)+1]+ \\
& \sum_{i=0}^{j-1}(q_i(j)+q_{j-i}(j))(\alpha_m i-1)+(q_0(j)+q_j(j))(-\alpha_m j-1)-(q_0(j)+q_j(j))(-\alpha_m j-1) = \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]+\sum_{i=0}^j(q_i(j)+q_{j-i}(j))(\alpha_m i-1)-(q_0(j)+q_j(j))(-\alpha_m j-1) = \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]+\sum_{i=0}^j q_i(j)[\alpha_m i-1]+\sum_{i=0}^j q_{j-1}(j)[\alpha_m i-1] \\
& -(q_0(j)+q_j(j))(-\alpha_m j-1)=1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1] \\
& +\sum_{i=0}^j(q_j(j)\alpha_m i-q_i(j))+\sum_{i=0}^j(q_{j-i}(j)\alpha_m i-q_{j-i}(j))-[q_0(j)+q_j(j)](\alpha_m j-1)= \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]+\alpha_m \sum_{i=0}^j i q_i(j)-\sum_{i=0}^j q_i(j)+ \\
& \alpha_m \sum_{i=0}^j(j-i)q_{j-i}(j)-\sum_{i=0}^j q_{j-i}(j)-[q_0(j)+q_j(j)](\alpha_m j-1)= \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]+\alpha_m(jp)-1+\alpha_m(1-p)j-1-[q_0(j)+q_j(j)](\alpha_m j-1)= \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]-2+\alpha_m(jp)+\alpha_m(1-p)j-[q_0(j)+q_j(j)](\alpha_m j-1)= \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]-2+\alpha_m(jp)+\alpha_m j-\alpha_m jp-[q_0(j)+q_j(j)](\alpha_m j-1)= \\
& 1+\sum_{i=0}^{m-1}(q_i(j)+q_{j-1}(j))[L_i-\alpha_m i+1]+\alpha_m j-2-[q_0+q_j](\alpha_m j-1)=
\end{aligned}$$



(por lo que recordando (4.12))

$$\begin{aligned}
(1 - q_0(j) - q_j(j))L_j &= \sum_{i=0}^{j-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))L_i \leq \\
(\alpha_m j - 1) + \sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))[L_i - \alpha_m i + 1] - 1 + 1 - q_0 + q_j &(\alpha_m j - 1) = \\
(\alpha_m j - 1)(1 - q_0(j) - q_j(j)) + \sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))[L_i - \alpha_m i + 1] &+ 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$L_j \leq (\alpha_m j - 1) + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))[L_i - \alpha_m i + 1]}{1 - q_0(j) - q_j(j)}. \quad (4.15)$$

Y para que  $L_j \leq \alpha_m j - 1$ , basta ver que

$$\sum_{i=0}^{m-1} (q_i(j) + q_{j-i}(j))[L_i - \alpha_m i + 1] < 0 \quad \forall j > m,$$

pero la desigualdad (4.13) lo garantiza.

Con esto la desigualdad (4.14) se cumple. Ahora tenemos que

$$\mathbb{E}[X_{t+1}|Z_t = k] = L_k \leq \alpha_m k - 1 \leq \alpha_m k + 1,$$

entonces

$$\mathbb{E}[X_{t+1}|X_t = k] \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_m + 1)P(Z_n = k|X_t = i) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_m k P(Z_t = k|X_t = i) + P(Z_n = k|X_t = i) =$$

$$\alpha_m \sum_{k=0}^{\infty} k P(Z_t = k|X_t = i) + \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k|X_t = i) = \alpha_m \mathbb{E}[Z_t|X_t = i] + 1. \quad (4.15)$$

Con el **lema de Wald (4.2.1)** obtenemos

$$\mathbb{E}[Z_t|X_t = i] = \mathbb{E}\left[\sum_{t=i}^i Z_t\right] = \lambda i.$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[x_{t+1} - X_t|X_t=i] = \mathbb{E}[X_{t+1}|X_t = i] - \mathbb{E}[X_t|X_t = i] \leq$$

$$\alpha_m \mathbb{E}(Z_t|X_t = i) + 1 - \mathbb{E}(X_t|X_t = i) = \alpha_m(\lambda i) + 1 - i = 1 + i(\lambda\alpha_m - 1),$$

lo que implica

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t|X_t = i] \leq 1 + i(\lambda\alpha_m - 1). \quad (4.16)$$

Con esto se observa que la primera condición del **Lema de Pakes** se cumple, es decir

$$\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t|X_t = i] < \infty.$$

la sucesión de números  $\{a_i\} = \{\mathbb{E}[X_{t+1} - X_t|X_t = i]\}$  tiene límite superior porque es acotada por arriba y la segunda condición se da porque

$$\lambda < \frac{1}{\alpha_m},$$

ya que  $\lambda\alpha_m < 1$ .

Por lo que  $\lambda\alpha_m - 1 < 0$ , y a su vez se cumple que  $i(\lambda\alpha_m - 1) < 0$ . Por lo tanto

$$\limsup_{i \uparrow \infty} \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t|X_t = i] \leq \limsup_{i \uparrow \infty} 1 + i(\lambda\alpha_m - 1) = 1 + \limsup_{i \uparrow \infty} i(\lambda\alpha_m - 1) < 0. \quad (4.17)$$

Concluimos que el protocolo es estable.

Estudiamos una variación al protocolo Aloha que permite hacer estable al modelo. Dicha variación consiste en hacer de la probabilidad de transmisión, en una función que dependa del número de paquetes atrasados. Por esta misma razón, la variación no es muy útil en la realidad, pues no es posible saber con exactitud la cantidad de paquetes atrasados a cada tiempo  $t$ . Se propone otro modelo estable, que no depende de la cantidad de paquetes atrasados.

# Capítulo 5

## Simulación

En este capítulo presentaremos los resultados que obtuvimos al simular algunos de los procesos presentados a lo largo del este texto. El objetivo de esto fue el de comprobar que la teoría que estudiamos en los capítulos dos, tres y cuatro es verificable, al menos computacionalmente. Para todas la simulaciones, utilizaremos el mismo valor de tres unidades de tiempo, en el caso continuo. Las gráficas de las simulaciones se encuentran después de la explicación de cada uno de sus respectivos modelos.

### 5.1. Cola M/M/1

**Caso 5.1.1** *Primeramente analizamos el modelo de la Cola M/M/1, suponiendo que el parámetro de arribo  $\lambda$  sea menor al parámetro de salida  $\mu$ , numéricamente propusimos los valores  $\lambda = 20$  y  $\mu = 90$ . Los datos que surgieron de correr el programa sugieren, que durante la mayoría del tiempo, entraba un cliente, e inmediatamente era atendido por el cajero. Esto sugiere que la longitud de la Cola nunca va a ser muy grande. En este caso, su longitud máxima fue de cuatro clientes esperando ser atendidos. En la Figura 5-1 se puede apreciar la gráfica de este caso particular.*

### Cola M/M/1

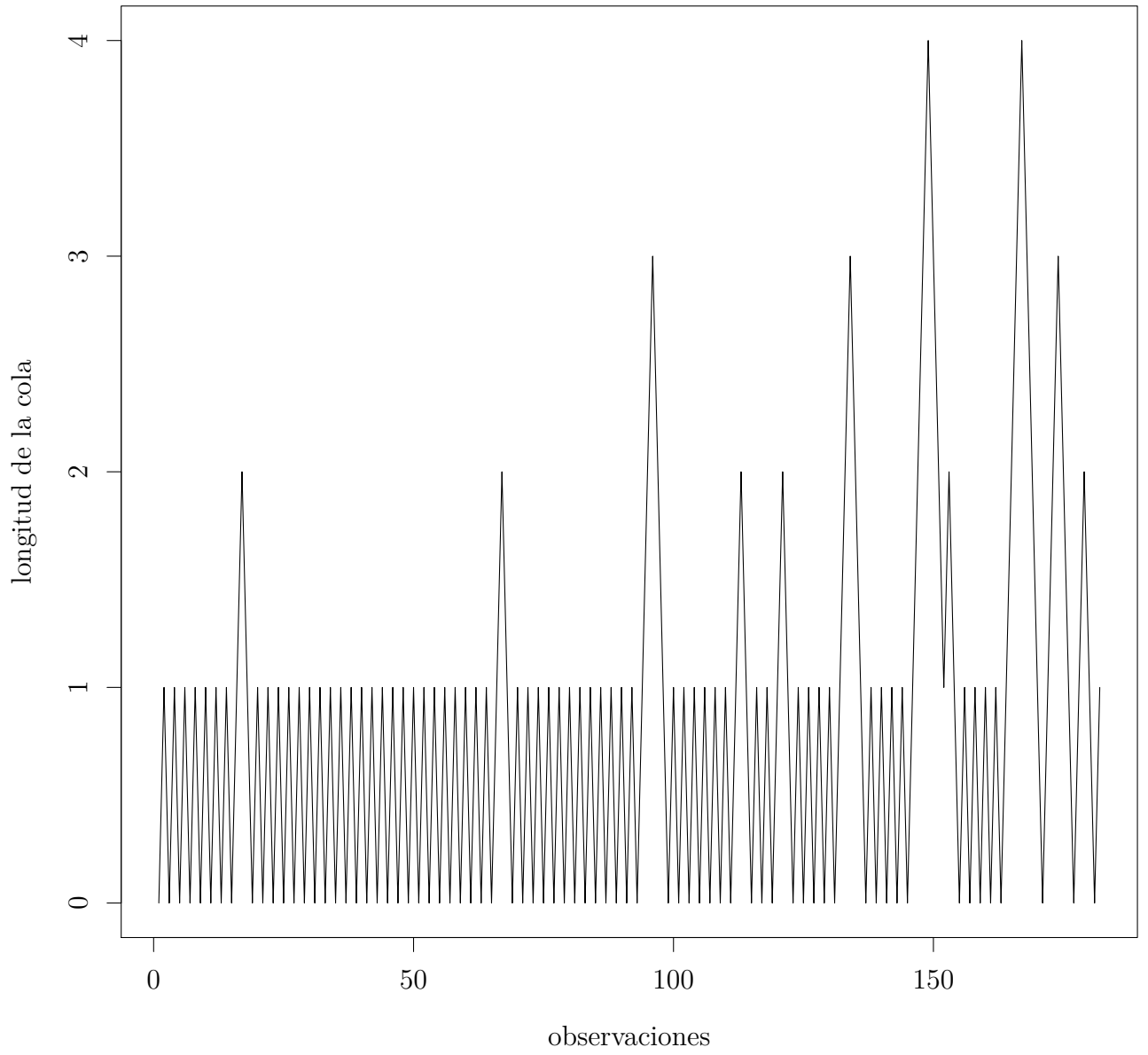


Figura 5-1: Simulación 1.

**Caso 5.1.2** Proponemos el caso contrario, con  $\lambda = 70$  y  $\mu = 17$ , suponiendo que  $\lambda$  es el parámetro de arribo y  $\mu$  el de salida. Esta vez, los datos nos indican que la longitud de la Cola tiende a crecer, puesto que de vez en vez, dicha cantidad baja un poco, nunca llega a bajar al punto en que hayan cero personas esperando. Con esto inferimos que la longitud de la Cola va tender a una cantidad infinita de clientes esperando que sean atendidos por el cajero. Es importante que hagamos hincapié en que este caso es el menos ideal y presenta un contraste muy grande con respecto al **Caso 5.1.2**. Es claro que necesitamos de la condición primordial  $\lambda < \mu$  (como lo supusimos en el **Capítulo 2**), para que podamos calcular la distribución estacionaria de una Cola M/M/1. En la **Figura 5-2** podemos apreciar la gráfica que modela los datos que obtuvimos de esta simulación.

## Cola M/M/1

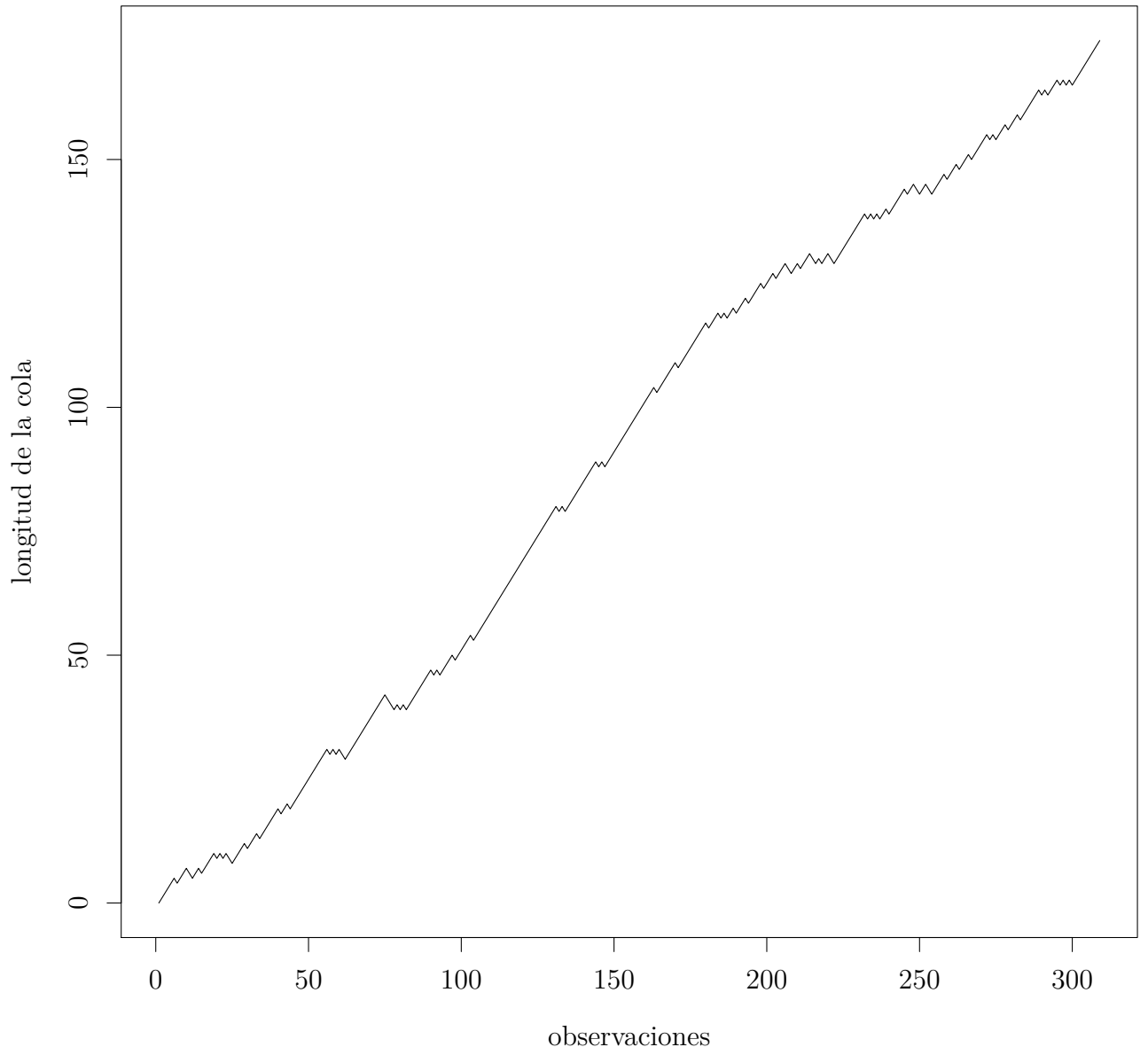


Figura 5-2: Simulación 2.

**Caso 5.1.3** *Suponemos que los parámetros tienen el mismo valor, es decir,  $\lambda = \mu = 40$ . Los datos obtenidos, nos indican que la Cola no es tan rápida atendiendo a los clientes, como en el **Caso 5.1.1**, pues su longitud máxima es mucho mayor, que cuando teníamos a  $\lambda$  como el parámetro menor. Notemos también, que varias veces a lo largo de la simulación, la longitud de esta Cola supera la longitud máxima de la Cola del caso anterior, por lo que es mejor tener al parámetro de entrada con valor más chico. Las simulaciones no permiten inferir lo que en teoría se sabe: que el régimen es inestable y la cola eventualmente se atasca. En la **Figura 5-3** presentamos la gráfica que nos dió al utilizar estos parámetros en el código.*



### Cola M/M/1

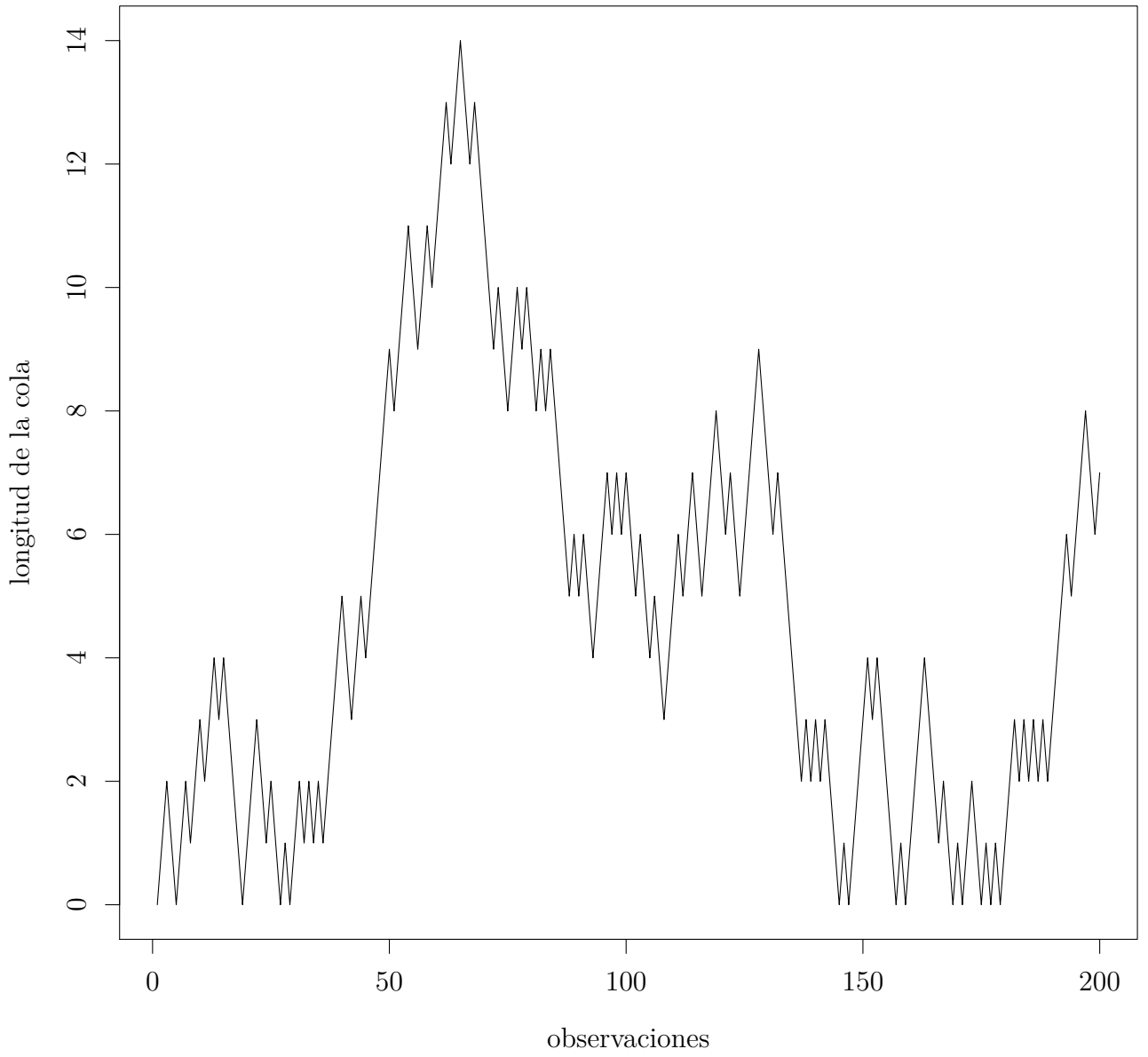


Figura 5-3: Simulación 3.

## 5.2. Modelo de Erlang

**Caso 5.2.1** *Para la el modelo de Erlang, necesitamos contar con el parámetro  $k$ , que representa la cantidad de cajeros disponibles para atender. Con esto proponemos los valores para  $\lambda = 55$ ,  $\mu = 90$  y  $k = 30$ .*

*De manera similar que con la Cola M/M/1, podemos notar que la longitud máxima de la Cola fue de cuatro clientes, los datos también nos muestran que los clientes fueron atendidos de forma rápida, pues durante buena parte de la simulación, la cantidad de clientes que están en la Cola se encuentra entre los valores cero y uno, de hecho pocas veces se llega a la cantidad de cuatro clientes. En la **Figura 5-4** mostramos la gráfica de esta simulación.*

## Modelo Erlang

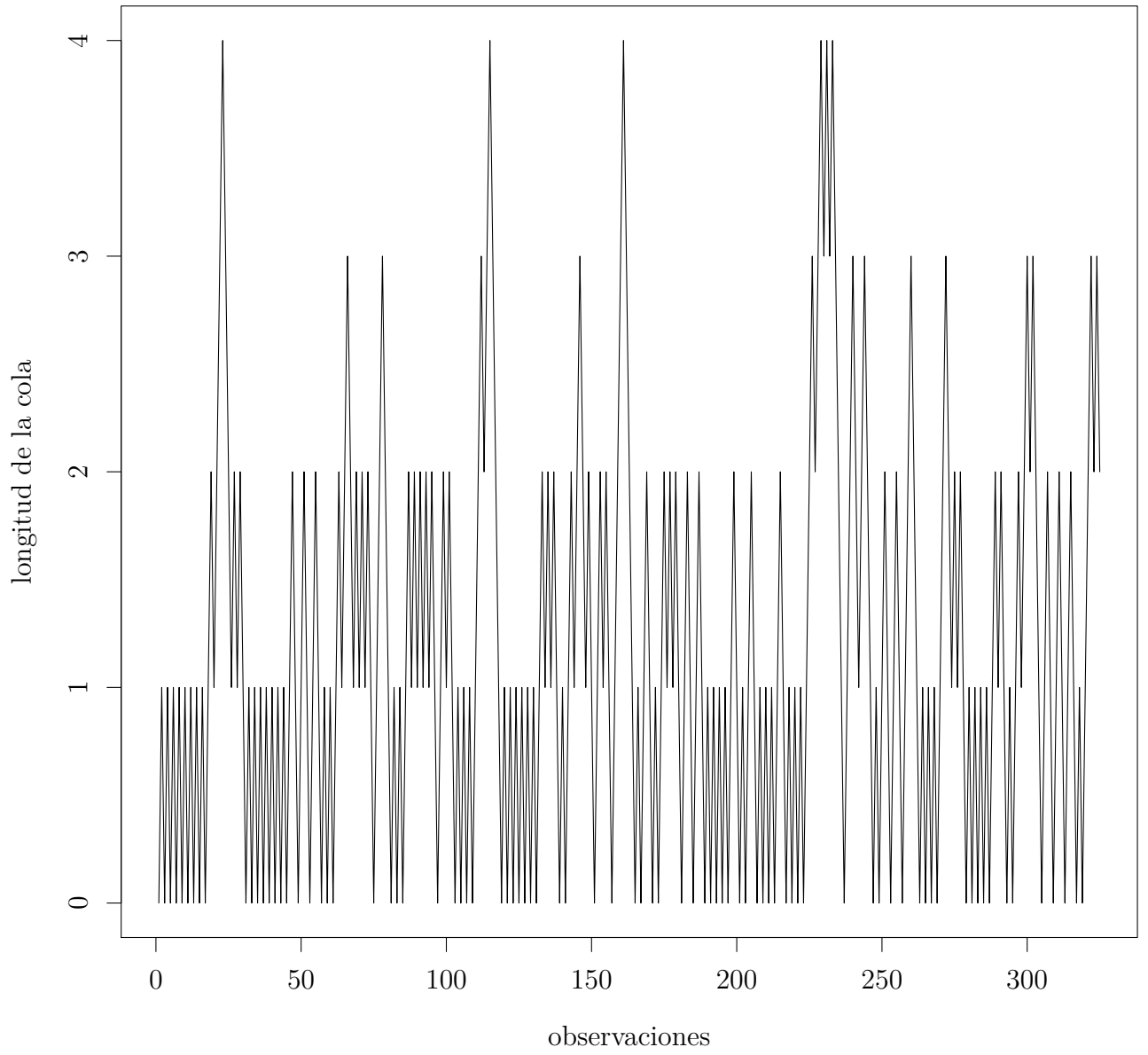


Figura 5-4: Simulación 4.

**Caso 5.2.2** *Manteniendo el mismo valor para  $k$ , suponemos ahora que  $\lambda = 100$  y  $\mu = 17$ , la simulación con estos parámetros nos indica que un crecimiento considerable en la longitud máxima de la Cola con respecto al caso anterior, puesto que obtuvimos una longitud mayor a diez clientes en más de una ocasión, además de que durante casi toda la simulación, la longitud de la Cola fue mayor a cuatro clientes. Claramente la Cola se atascó de clientes, puesto que solamente una vez hubo un cliente formado y de hecho solamente al inicio de la simulación se llegó al valor cero. En la **Figura 5-5**, mostramos la gráfica de este experimento.*

## Modelo Erlang

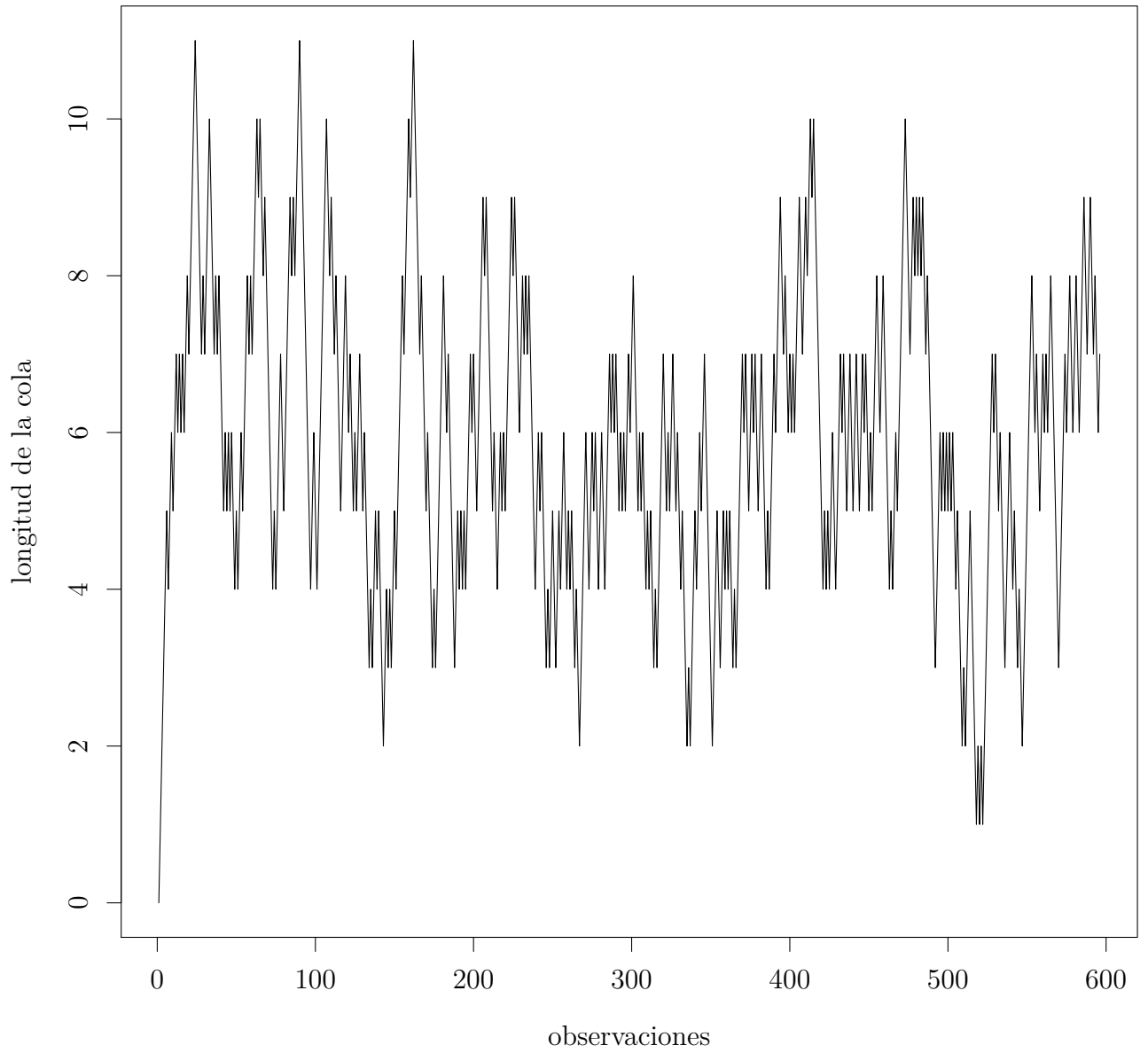


Figura 5-5: Simulación 5.

**Caso 5.2.3** Vamos a utilizar los valores  $\lambda = \mu = 47$ , junto con  $k = 30$ , de manera similar al caso de la Cola  $M/M/1$ , la longitud máxima de la Cola aumentó con respecto al **Caso 5.2.1**, así como se llega al valor cero de la Cola menos veces de las que uno podría pensar, gran parte de los datos nos sugieren que la longitud se encuentra entre los valores uno y cinco.

La simulación no permite tampoco inferir que en este caso la Cola es inestable, pese a que lo sabemos de manera teórica. La **Figura 5.6** representa la gráfica de la simulación.

## Modelo Erlang

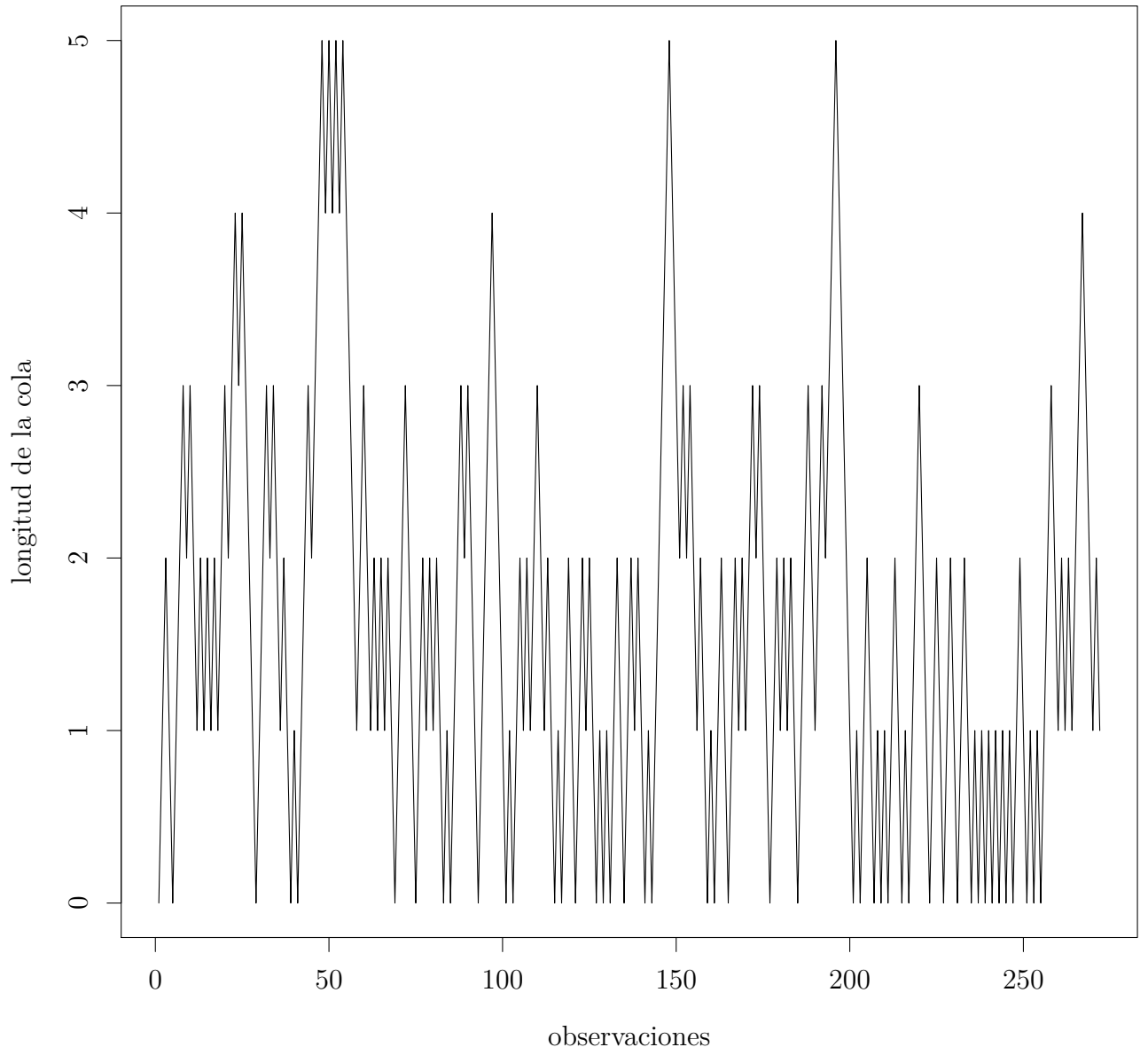


Figura 5-6: Simulación 6.

### 5.3. Protocolo Aloha y protocolo Aloha estable

Para las siguientes simulaciones, vamos a hacer una aclaración, debido a que en el lenguaje R, las columnas y los renglones de las matrices se numeran a partir del uno, entonces en las gráficas el estado cero se vera representado en las gráficas por el uno, el primer estado se representará por el dos, y así sucesivamente.

**Caso 5.3.1 (Protocolo Aloha)** *Para realizar esta simulación necesitamos de un parámetro  $\lambda = .9$ , que es la tasa de la variable aleatoria con distribución Poisson mencionada en la **Sección 3.1**, así como necesitamos de los parámetros de una variable aleatoria que se distribuye Binomial de tamaño  $n = 7$  y probabilidad  $p = 0.7$ . Claramente necesitamos de la matriz de transición asociada al protocolo, en este caso será de  $7 \times 7$ . A continuación presentamos la matriz*

$$\begin{pmatrix} b & a & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \\ c & b & a & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 0 & c & b & a & p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & 0 & c & b & a & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & c & b & a & p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}$$

donde  $b$  es la probabilidad de quedarse en un estado,  $a$  de saltar del estado  $i$  al  $i + 1$ ,  $c$  de ir del estado  $i$  al  $i - 1$ . Las  $p_j$  son las probabilidades de ir del estado  $i + 1$  al  $i + 1 + j$ . La simulación nos indica que la Cadena, después de 2000 observaciones, se queda casi siempre en los últimos tres estados, así como nunca baja al estado inicial ni al estado uno. La **Figura 5-7** muestra esto.



## Protocolo Aloha

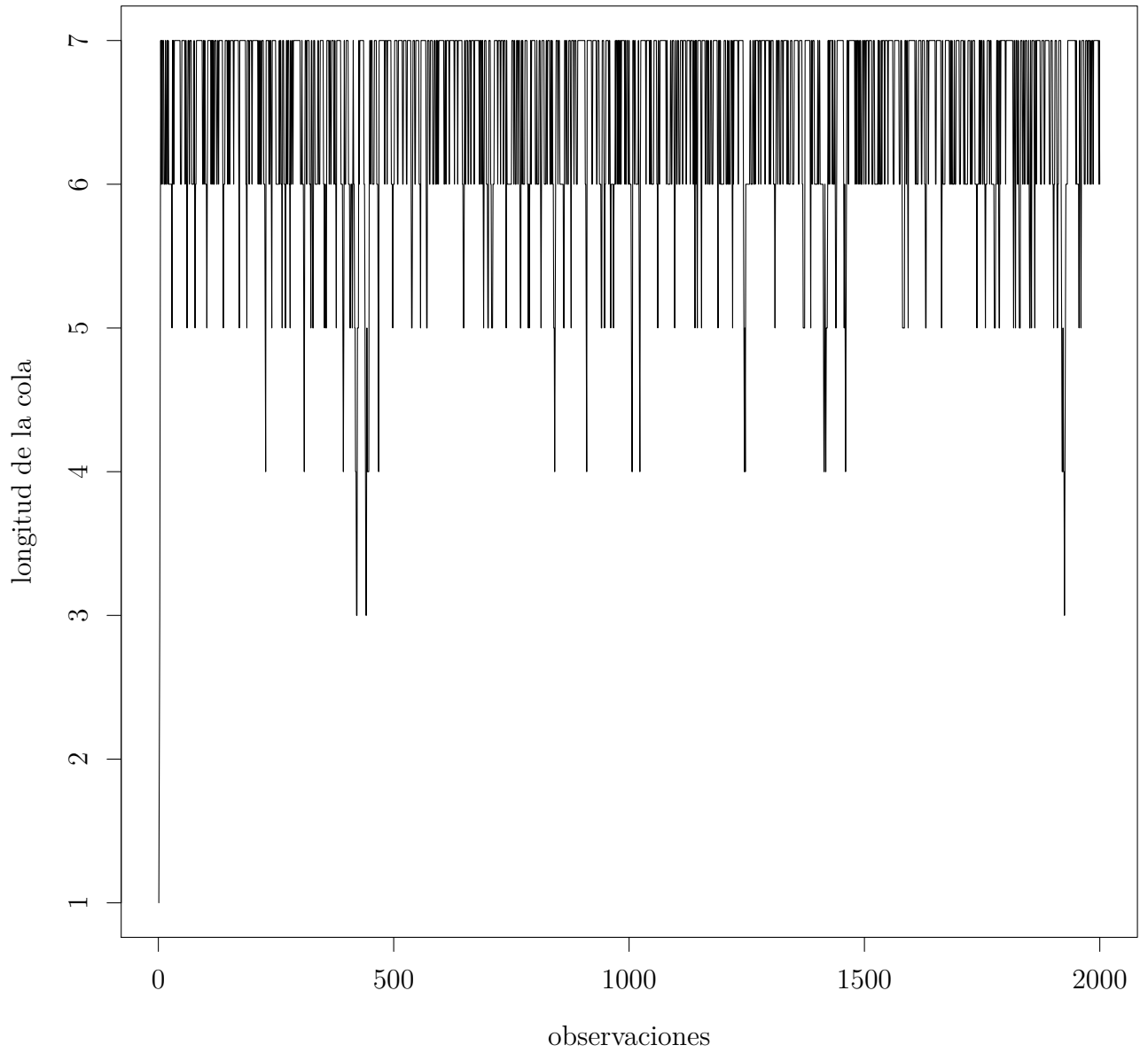


Figura 5-7: Simulación 7.

**Caso 5.3.2 (Protocolo Aloha estable)** *De este caso hicimos varias simulaciones, puesto que agregando la función  $v(7)$ , pudimos comprobar que efectivamente, hay más saltos de los últimos estados a los primeros, solamente que no es tan común que lleguen a los dos primeros estados (justamente es nuestro interés), pero sí llegan. Mantuvimos el mismo valor para  $\lambda$  que en el caso anterior, simplemente cambiamos el valor de  $p$  por  $p = v(7) = .0207$ .*

*La **Figura 5-8** muestra precisamente que hubo más veces que el proceso saltó a los estados tres, cuatro y en especial al dos (justo como queríamos).*

## Protocolo Aloha Estable

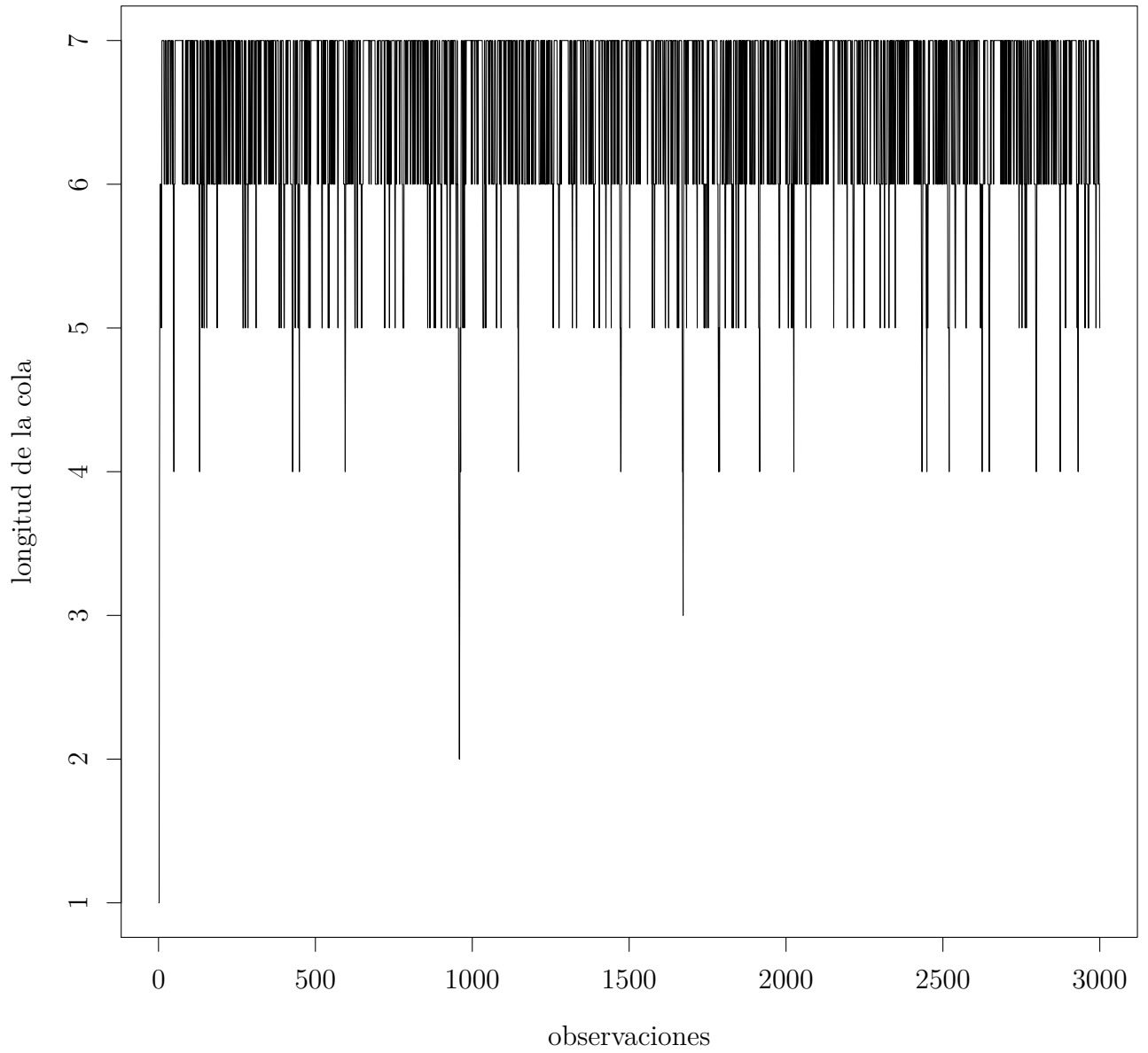


Figura 5-8: Simulación 8.

## 5.4. Protocolo de resolución de Colisión

**Caso 5.4.1** *Simulamos para 70 observaciones y utilizando la probabilidad  $q_8(20)$  definida en la **Sección 4.2**. Los datos arrojados por varias simulaciones no fueron tan buenos, puesto que, aunque sí llega a bajar al estado inicial la longitud de la Cadena eventualmente, esta varía entre las longitudes cuatro y siete con mucha oscilación. La **Figura 5-9** nos muestra la gráfica de una de las simulaciones realizadas.*

### Protocolo de Resolución de Colisión

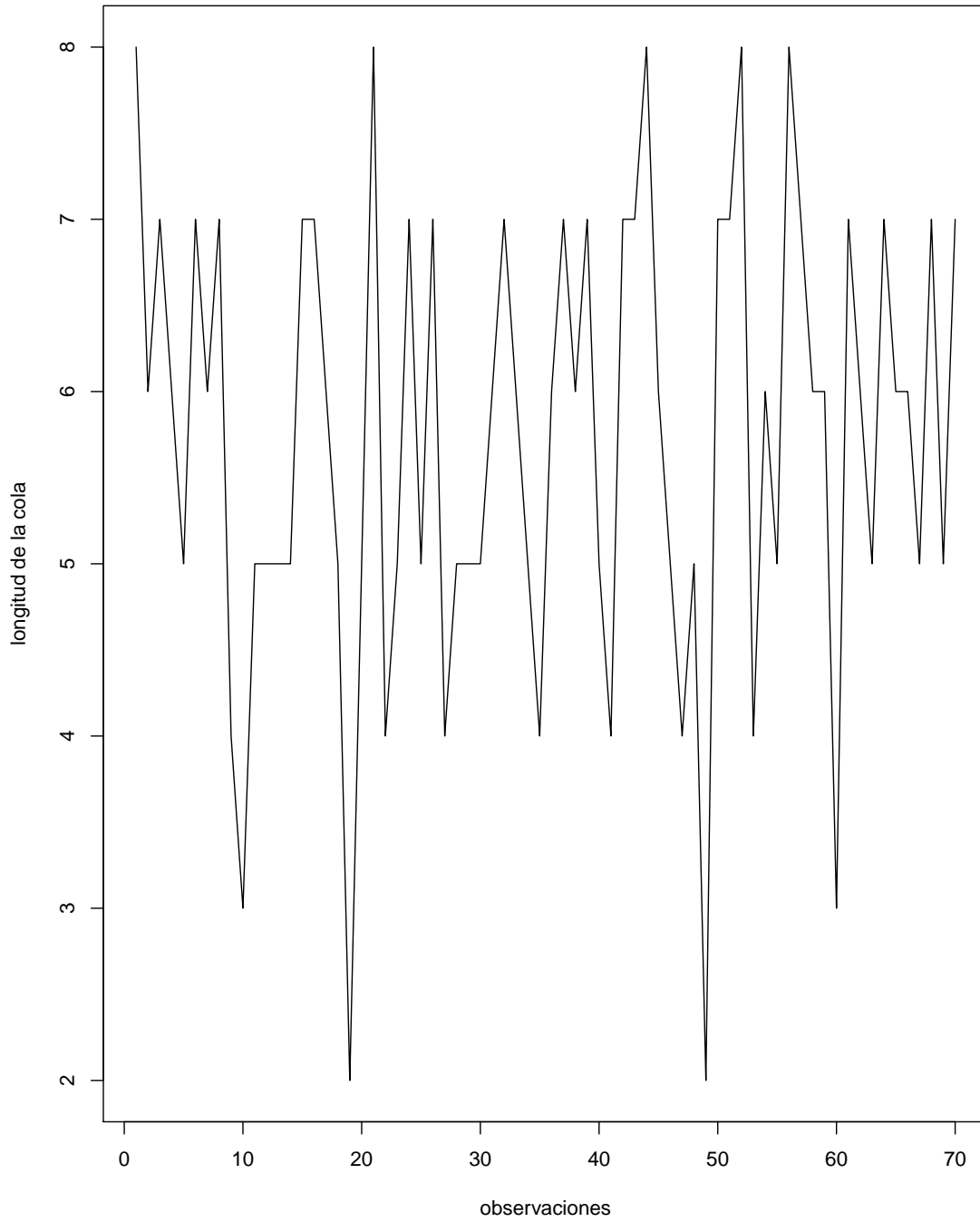


Figura 5-9: Simulación 9.

# Conclusión

La Cadena de Markov asociada al protocolo Aloha presenta un problema fundamental para que el modelo funcione de manera óptima; la Cadena es incapaz de bajar a partir de algún momento (aleatorio), lo que provoca que los paquetes de información no se transmitan (o retransmitan). Existe una forma de resolver este atascamiento de paquetes, la cual consiste en conocer la cantidad de paquetes atrasados y definir una función que dependa de dicha cantidad. La probabilidad de transmisión del protocolo se sustituye por esta función. Con esto podemos asegurar la estabilidad del modelo. Desafortunadamente, esta solución en la práctica no es viable, puesto que sería necesario saber la cantidad de paquetes atrasados siempre. Por eso, verificamos otro modelo alternativo, que es estable y en el cual no es necesario conocer información concerniente a la cantidad de paquetes atrasados. Es necesario notar, que los modelos que estudiamos en los **Capítulos 3 y 4**, al ser redes de acceso aleatorio, diseñadas para transmitir información, tienen una poca probabilidad de que fuera del campo de las comunicaciones, puedan tener una adaptación útil a otras ramas, como por ejemplo, en la rama de transporte de bienes de un lugar a otro, porque existen diferencias entre el tiempo de llegada de un paquete de información de una computadora a otra y el tiempo que requiere algún transporte de carga en llegar a su destino.

Actualmente existen adaptaciones hechas al protocolo Aloha, un ejemplo de esto se puede encontrar en [Badgotya y Rai, 2018], donde se expone la utilidad de modelos de acceso

aleatorio, en particular del protocolo Aloha, para la implementación de aplicaciones basadas en el internet de las cosas.

Del presente trabajo se espera que ilustre el uso de herramientas que existen dentro de la teoría de los procesos estocásticos para resolver problemas de ramas que aparentemente no tienen relación con esta teoría, en específico con las telecomunicaciones.

# Apéndice A

En este apéndice presentamos los códigos usados para las simulaciones en el **Capítulo 5**, dichos códigos fueron escritos en el lenguaje R.

## Cola M/M/1

```
#Programa 1
#Simulamos una variable aleatoria exponencial de parametro lambda.
lambda=
generaexp<-function(lambda){
  u<-runif(1)
  E=log(1-u)/-(lambda)
  return(E)
}
```

```
#Programa 2
#Cola M/M/1, con lambda la tasa de entrada,
#mu de salida y T el tiempo

cola_M_M_uno<-function(lambda,mu,T){
  tiempo=T
```



```

#la cola no esta vacia
t=0
historia_cola=0
s=0
#se genera un arribo con tasa lambda
#Programa 3
t1=generaexp(lambda)
cola=1
tiempos_eventos=t1
t=t1
num_evento=1
while(t<tiempo){
#la cola ya no es vacia,
#entonces es una llegada o una salida
    num_evento=num_evento+1

    if(cola>0){
        t1=generaexp(lambda+mu)
        p=runif(1)
        historia_cola[num_evento]=cola
        cola=ifelse(p<lambda/(lambda+mu),cola+1,cola-1)
    }

#en este caso, llegan arribos pues la cola
#esta vacia
else{
    t1=generaexp(lambda)

```

```

        historia_cola[num_evento]=cola
        cola=1

    }

    t=t+t1

    tiempos_eventos[num_evento]=t1

    s=s+t1*historia_cola[num_evento]

}

return(historia_cola)}

```

## Modelo de Erlang

```

#Programa 3
#parametro de tasa de entrada lambda,tasa de salida mu,
#tiempo T y numero de servidores k
modelo_Erlang<-function(lambda,mu,T,k){
    tiempo=T
    t=0
    historia_cola=0
    s=0
    t1=generaexp(lambda)
    cola=1
    tiempos_eventos=t1
    t=t1
    num_evento=1
    while(t<tiempo){
        num_evento=num_evento+1
    }
}

```

```

if (cola==0){
    t1=generaexp(lambda)
    historia_cola[num_evento]=cola
    cola=0
}

if (cola==k){t1=generaexp(mu*k)
    historia_cola[num_evento]=cola
    cola=k-1
}

else{
    t1=generaexp(lambda+mu*(cola))
    u=runif(1)
    historia_cola[num_evento]=cola
    cola=ifelse(u<lambda/(lambda+mu*(cola)),cola+1,cola-1)
}

#en este caso solamente llegan arribos
#pues la cola es vacia
t=t+t1

tiempos_eventos[num_evento]=t1
s=s+t1*historia_cola[num_evento]
}

return(historia_cola)}

```

Cadena de Markov a tiempo discreto

```

#Programa 4
#Cadena de Markov a tiempo discreto que
#depende de una matriz de transiciones y de la cantidad
# de observaciones n
markov <- function( matriz, n ) {
  estados<- numeric(n)
  estados[1]<- 1
  for(i in 2:n) {
    a<- matriz[estados[i-1], ]
    estados[i] <- which(rmultinom(1, 1, a) == 1)
  }
  return(estados)
}

```

### Protocolo Aloha

Usamos el programa anterior junto con la matriz de transiciones definida para el protocolo Aloha.

```

#Protocolo Aloha
#entradas de la matriz y parametros lambda y de las
#distribuciones binomiales negativas

lambda=
a=dpois(1,lambda)*(1-dbinom(0,size=,prob=))
q= dpois(1,lambda)*dbinom(0,size=,prob=)+dpois(0,lambda )
b=q*(1-dbinom(1,size=,prob=))

```

```

d=dpois(0,lambda)*dbinom(1,size=,prob=)

#matriz de transiciones para el caso 3x3
matriz_aloha<-matrix(c(b,c,0,a,b,c,dpois(1,lambda),a,b,nrow=3)

#se utiliza el programa 3
markov(matriz_aloha,n)

```

### Variación del protocolo Aloha

De igual manera, se utiliza el programa tres, pero con la matriz que se le asocia a la variación

```

#Variacion del protocolo Aloha
#Parametro lambda
lambda

#definimos la funcion v que depende de la cantidad k de estaciones
v<-(dpois(0,lambda)-dpois(1,lambda=) / k*dpois(0,lambda)-dpois(1,lambda ))

#entradas de la matriz
a=dpois(0,lambda)*(1-dbinom(0,size=,prob=v))
q=dpois(0,lambda)*dbinom(0,size=,prob=v)+dpois(1,lambda)
b=q*(1-dbinom(1,size=,prob=v))
c=dpois(1,lambda)*dbinom(1,size=,prob=v)

#matriz de transiciones en el caso 3x3
matriz_aloha_estable<-matrix(c(b,c,0,a,b,c,dpois(1,lambda),a,b,nrow=3)

#programa 3

```

```
markov(matriz_aloha_estable,n)
```

## Protocolo de resolución de colisión

```
#Definimos la probabilidad que separa a los paquetes en las capas,  
#es decir, la probabilidad de que k usuarios,  
#a i usuarios tengan cara
```

```
probabilidad<-function(i,k){  
  a<-(.5)^k * factorial(k)/(factorial(i)*factorial(k-i))  
  return(a)  
}
```

```
#calculamos la transicion de un estado j al siguiente
```

```
transicion<-function(j){  
  s=0  
  j=0  
  u<-runif(1)  
  
  while(s<u){  
    s=s+ probabilidad(j,k)  
    j=j+1  
  }  
  return(j)  
}
```

```
#lo automatizamos para hacerlo en N observaciones y  
#obtenemos una simulacion del protocolo de resolucion de  
#colision
```

```
#Programa 4
resolucion_colision<-function(N){
  a<-0
  for(i in 1:N){
    a[i]<-transicion(i)
  }
  return(a)
}
```

# Bibliografía

ABRAMSON, N. THE ALOHA SYSTEM - ANOTHER ALTERNATIVE FOR COMPUTER COMMUNICATIONS (1970)

BADGOTYA, S. Y RAI, D. INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES & RESEARCH TECHNOLOGY A SURVEY ON ALOHA PROTOCOL FOR IOT BASED APPLICATIONS (2018)

BRÉMAUD, P. *Markov chains: Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues*. Springer Science & Business Media (2013)

KELLY, F. Y YUDOVINA, E. *Stochastic Networks*. Cambridge University Press (2014)

KELLY, F.P. *Reversibility and stochastic networks*. Wiley (1979)

KONSTANTOPOULOS, T. A review of Burke's theorem for Brownian motion. *Queueing Systems* (2016)