



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Dinámica y producción de Materia Oscura en  
Portales de Higgs

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Juan Esau Cervantes Hernández

TUTOR

Dr. Saúl Noé Ramos Sánchez

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1. Datos del alumno

Cervantes  
Hernández  
Juan Esau  
5615399064  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Física  
312295125

2. Datos del tutor

Dr  
Saúl Noé  
Ramos  
Sánchez

3. Datos de sinodal 1

Dra  
Myriam  
Mondragón  
Ceballos

4. Datos de sinodal 2

Dr  
Ángel  
Sánchez  
Cecilio

5. Datos del sinodal 3

Dr  
Jaime  
Besprosvany  
Fridzon

6. Datos del sinodal 4

Dra  
Celia del Carmen  
Escamilla  
Rivera

7. Datos del trabajo escrito

Dinámica y producción de materia oscura en portales de Higgs  
74 pp  
2019

*Dedicada a Tina*

Quiero agradecer a mi familia, en especial a mi madre Blanca, sin su apoyo incondicional no hubiera llegado hasta este punto de mi vida.

Esta investigación fue realizada con el apoyo del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN100217 “Altas energías y cuerdas tras el hallazgo del Higgs.” Agradezco a la DGAPA la beca recibida. Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos CONACyT F-252167 y 278017, así como por el PIIF.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción: La búsqueda de materia oscura</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría cuántica de campos</b>	<b>5</b>
1.1. Simetrías y teorema de Noether . . . . .	5
1.2. Cuantización de una teoría de campo no abeliano . . . . .	7
1.3. Cuantización del campo de Dirac . . . . .	10
1.4. Rompimiento espontáneo de simetría . . . . .	13
1.4.1. Teorema de Goldstone . . . . .	16
1.5. Mecanismo de Higgs . . . . .	17
1.6. Modelo electrodébil . . . . .	19
<b>2. Materia oscura</b>	<b>21</b>
2.1. Producción de materia oscura . . . . .	24
2.1.1. Milagro WIMP . . . . .	25
2.2. Ecuación de Boltzmann . . . . .	28
2.2.1. Freeze out . . . . .	31
<b>3. El Higgs y la materia oscura</b>	<b>35</b>
3.1. Candidato escalar . . . . .	35
3.2. Singulete fermiónico . . . . .	40
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>50</b>
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>58</b>
<b>A. Constantes de acoplamiento efectivas</b>	<b>60</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

## Resumen

En esta tesis se ha propuesto un modelo de Portales de Higgs para explicar la existencia de la materia oscura desde la física de partículas. En dicho modelo, incluimos dos campos adicionales al Modelo Estándar, el primero de ellos es el candidato a materia oscura que es un fermión de Dirac  $\mathcal{X}$  y el segundo es un mediador escalar real  $S$  que se acopla con el candidato y con el doblete de Higgs con un acoplamiento cuártico renormalizable. A este mediador le imponemos una simetría  $\mathbb{Z}_2$ , por lo que el acoplamiento con el candidato ( $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}S^2$ ) es no renormalizable. Para remediar este hecho imponemos una escala de corte energética  $\Lambda$  a este término. Posteriormente calculamos la densidad de reliquia de la partícula  $\mathcal{X}$  usando micrOMEGAs y ajustando los parámetros emergentes del modelo para que la densidad coincidiera con el reporte experimental  $\Omega_{\text{CDM}}h^2 = 0.1196 \pm 0.0014$ , obteniendo así su espacio de parámetros. Se encontró que el espacio se encuentra en tres regiones importantes: la resonancia del Higgs, la resonancia del mediador y en aquellos parámetros donde la masa de la partícula candidata es mayor a la del mediador.

## Introducción: La búsqueda de materia oscura

Discusiones sobre objetos astronómicos “oscuros” que no se pueden observar pero cuyos efectos gravitacionales sí, se remontan a 1783 cuando se teorizaron los agujeros negros por primera vez por John Mitchell y una década posterior se discutió esta idea por Pierre-Simon Laplace. De hecho Lord Kelvin fue uno de los primeros en intentar un estimado dinámico de la cantidad de materia oscura en la Vía Láctea usando la teoría de gases ideales con las estrellas como partículas que interactúan únicamente por la fuerza gravitacional, estableciendo una relación entre el tamaño del sistema y la velocidad de dispersión de las estrellas. Para un estudio histórico sobre la materia oscura ver [1].

Por otro lado, el descubrimiento de la materia oscura (DM, por sus siglas en inglés) se remonta tal vez a 1933, cuando el astrofísico suizo Fritz Zwicky aplicó el teorema del virial al cúmulo de galaxias Coma y obtuvo (entonces controversial) evidencia de masa no visible (ver e.g. [2]). El teorema del virial establece que la energía cinética promedio de las galaxias en el cúmulo debería igualar en magnitud a la mitad del total de su energía gravitacional, proporcional a su masa total. Zwicky estimó la masa total del cúmulo observando especialmente las velocidades radiales de ocho galaxias cercanas al borde del cúmulo. Cuando comparó su masa estimada de esta forma con otra estimación basada en el conteo de galaxias y el brillo total del cúmulo, encontró que el movimiento de las galaxias revelaba la existencia de unas 400 veces más masa que la observada lumínicamente.<sup>1</sup>

Actualmente se cuenta con evidencia adicional de la existencia de DM. Aplicando técnicas similares a las de Zwicky en galaxias espirales, desde 1970 Vera Rubin y sus colaboradores aportaron evidencia sólida de que las enormes velocidades radiales de las estrellas en los bordes de galaxias aisladas se pueden explicar al suponer la existencia de una dominante cantidad de DM en forma de halo alrededor de la materia visible galáctica [3]. Estas y otras observaciones conducen a la conclusión de que la DM es aproximadamente 85 % del total de la materia (masa) contenida en el Universo, es decir, el 85 % de la densidad de energía asociada a la materia (masa) del Universo sólo tiene efectos gravitacionales.

Entender la naturaleza de la DM constituye uno de los mayores retos de la física fundamental. Se han propuesto posibles explicaciones en términos de modificaciones de la gravedad, tales como escenarios gravitacionales geométricos en los que el escalar de Ricci  $R$  es reemplazado por una función  $f(R)$  [4–9] o modificaciones de la gravedad Newtoniana tipo MoND [10–12]. Desafortunadamente, aunque esos escenarios pueden explicar los excesos de masa observados en galaxias y cúmulos de galaxias, frecuentemente fallan cuando se les intenta incorporar en modelos cosmológicos más globales que pueden ser contrastados con otras observaciones (como las asociadas a la radiación cósmica de fondo, o CMB por sus siglas en inglés, y las abundancias primigenias de los elementos más ligeros).

También se ha propuesto que la DM podría estar compuesta de *objetos astrofísicos masivos de halo compacto* (MACHOs, por sus siglas en inglés) [13], tales como agujeros negros, estrellas

---

<sup>1</sup>Con el valor actual de la constante de Hubble,  $H_0 \equiv H(t_0) = 67.41 \text{ km/s Mpc} \approx 2.18 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1} = 1.434 \times 10^{-42} \text{ GeV}$ , (unas 8.2 veces menor que el empleado por Zwicky), el exceso se reduce a unas 48 veces más masa que la de la materia visible en el cúmulo Coma.

enanas café y estrellas de neutrones. Sin embargo, las estimaciones más optimistas, basadas en observaciones de lentes gravitacionales, revelan que no más del 20 % de la DM esperada se puede explicar de esta forma. Otra opción quizá más exitosa, base de esta investigación, es explorar la posibilidad de que la materia oscura se deba a la existencia de partículas elementales aún no descubiertas.

Con la detección reciente del bosón de Higgs, la única partícula elemental escalar conocida y cuya detección fue la última confirmación de las predicciones del Modelo Estándar de partículas elementales (SM, por sus siglas en inglés), la física de partículas codificada en la densidad Lagrangiana del SM es, sin duda, uno de los mayores éxitos de la física teórica del siglo pasado. Su triunfo explicando la naturaleza fundamental de toda la materia observable en términos de campos cuánticos e interacciones de norma permite especular que la DM podría explicarse también mediante algún(os) campo(s) cuántico(s), cuyas interacciones con los quarks y leptones del SM poseen propiedades muy particulares que impiden que la DM sea observada por los telescopios más sensibles, es decir, que hacen que la DM sea totalmente transparente en el espectro electromagnético.

Estos modelos corresponden a teorías de campos cuánticos que incluyen partículas y/o fuerzas adicionales, con diversas propuestas para las interacciones entre los campos responsables de la DM y los de la materia observada (ver e.g. [14–16] y sus referencias). Los modelos de este tipo se pueden clasificar por el tipo de campo o partícula responsable de la materia oscura en i) modelos con partículas masivas interactuantes débilmente (WIMPs) [17] y ii) modelos con axiones pseudoescalares (ALPs) [18]. En esta tesis, adoptaremos la primera hipótesis que es también la más popular en la literatura, aunque recientemente modelos con ALPs han cobrado mayor importancia debido a las restricciones cada vez más exigentes puestas por la ausencia de evidencia de WIMPs en experimentos de detección directa de DM, tales como PandaX [19], LUX [20] y Xenon1T [21].

Las WIMPs han recibido mayor atención debido al llamado *milagro WIMP*: si uno supone a) que las WIMPs interactúan gravitacionalmente y mediante alguna otra fuerza tan o más débil que la fuerza débil, b) que tienen masa alrededor de la escala electrodébil ( $\sim 100$  GeV) y c) que fueron producidas mediante un proceso térmico como todas las partículas del SM durante los primeros instantes de *la gran explosión*, se obtiene con gran precisión la densidad de energía de DM actual, codificada en la llamada *abundancia de reliquia de DM*, cuyo valor más actualizado es el calculado por la colaboración Planck [22],  $\Omega_{\text{CDM}}h^2 = 0.1196 \pm 0.0014$ , donde  $h = 0.6741 \pm 0.0062$  es el factor de escala de la constante de Hubble.<sup>2</sup>

Las WIMPs se modelan típicamente como campos escalares, similares al campo de Higgs, pero sin las cargas electrodébiles que lo caracterizan. No obstante, también pueden ser campos fermiónicos o vectoriales, cuyas interacciones con las partículas del SM son indirectas (suprimidas por lazos) o sólo ocurren mediante interacciones directas con una sola partícula del sector débil del SM (que incluye a leptones y quarks con quiralidad izquierda, y al bosón de Higgs). Por ejemplo, existen los modelos denominados *MeV dark matter* [23] que como su nombre lo indica, la masa de esta partícula se encontraría en el rango de los Mega electronvoltios por lo que puede evadir los

<sup>2</sup>Nótese que  $\Omega_{\text{CDM}} = 0.1196 h^{-2} \approx 0.263$  corresponde a la fracción de DM en el contenido total de materia y energía (oscura) del Universo.

experimentos de detección directa que consisten en la interacción con núcleos atómicos. También se encuentran las denominadas *WIMPzilla's* [24] que son partículas super-débilmente interactuantes y super-pesadas. Uno de los modelos de WIMPs más sencillos y prometedores es el llamado *Portal de Higgs* [25–29]. En este escenario, uno o más campos adicionales (escalares reales o complejos, espinoriales o vectoriales)  $C$ , con su propia dinámica expresada en su potencial  $V(C)$ , se acoplan al SM a través del campo del Higgs  $H$  mediante un acoplamiento cuártico del tipo

$$\mathcal{L}_{\text{portal de Higgs}} \supset -\lambda_C \bar{C} C H^\dagger H,$$

donde  $\lambda_C$  se ajusta con base en las restricciones observacionales de observatorios y aceleradores,<sup>3</sup> y  $\bar{C}C$  simboliza los términos cuadráticos  $C^2$  para un escalar real,  $C^\dagger C$  para un escalar complejo,  $C^\dagger \gamma^0 C$  para un espinor de Dirac, y  $C^\mu C_\mu$  para un vector.

Independientemente de la complejidad del potencial  $V(C)$ , modelos en donde  $C$  es el campo asociado a la DM han sido enormemente restringidos [30–36], sobre todo en el caso en el que  $C$  es un escalar. No obstante, las cotas se relajan considerablemente cuando se considera que  $C$  es sólo un mediador entre el sector del SM y el sector de la DM, caracterizado por sus propios campos  $D$  (igualmente escalares, espinoriales o vectoriales) que sólo sostienen acoplamientos con  $C$  y ninguna otra partícula vinculada con el SM. Este es el punto de vista que usaremos en esta tesis.

Es claro que la riqueza de este escenario yace en las opciones que existen para la naturaleza de  $C$  y  $D$ , y en los potenciales  $V(C)$ ,  $V(D)$  y  $V(C, D)$ . Los modelos que uno puede construir de esta forma se pueden volver tremendamente intrincados. En esta tesis, abordaremos uno de los casos más sencillos, discutido en detalle en la sección 3.2, en el que  $C$  es un escalar real al que denotamos  $S$  y  $D$  es un espinor de Dirac denotado aquí como  $\mathcal{X}$ . A pesar de su relativa complejidad, el número de nuevos parámetros es pequeño y permite una exploración bastante amplia. En este trabajo, estudiaremos principalmente bajo qué condiciones este modelo satisface la restricción esencial de que la abundancia de reliquia coincida con la  $\Omega_{\text{CDM}}$  observada.

## Organización de la tesis

- En el primer capítulo se introducirán los elementos de teoría cuántica de campos necesarios para abordar a la materia oscura como un campo cuántico y por lo tanto como un candidato WIMP. Se abordará el campo de Klein-Gordon y el de Dirac, discutiendo algunas de sus propiedades. Quien esté familiarizado con este tema puede omitir este capítulo.
- En el segundo capítulo se trata a la DM desde el punto de vista de la cosmología y astrofísica, revisando la métrica de Friedmann-Robertson-Walker y la ecuación de Friedmann para determinar la abundancia de una especie. Se revisará la producción de materia oscura en el universo temprano haciendo uso de la ecuación de Boltzmann para determinar la abundancia

---

<sup>3</sup>Cuando  $C$  es un vector,  $\lambda_C$  es inversamente proporcional al valor de una escala energética de corte  $\Lambda_C$  asociada a física más fundamental.

de una especie de partículas, en nuestro caso el de las partículas hipotéticas WIMPs, revisando también el milagro WIMP y comparando con la principal restricción experimental, la densidad de reliquia observada por la colaboración PLANCK [22]. Este capítulo también es introductorio, aquellos familiarizados con el tópico pueden omitir este capítulo.

- En el capítulo 3 se introducirá el modelo más sencillo de Portales de Higgs que consiste en la extensión del SM en un campo escalar  $S$  que se acopla con términos renormalizables con el campo de Higgs. Esta discusión establece las bases del modelo principal de nuestro estudio, en el que, como mencionamos antes, el candidato a DM es un campo de Dirac  $\mathcal{X}$  con un mediador escalar  $S$ . Las interacciones entre el campo de Dirac y el escalar ocurren mediante el término no renormalizable  $\frac{\kappa}{\Lambda}\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}S^2$ , donde  $\kappa$  es una constante y  $\Lambda$  una escala de corte. La dinámica de  $S$  permite que este campo adquiera un valor de expectación (VEV) y que se genere un término de masa para  $\mathcal{X}$ . Posteriormente, cuando el Higgs también se estabiliza en su mínimo, rompiendo la simetría electrodébil, suponiendo que el escalar adicional se encuentra en equilibrio térmico con el Higgs, observamos una mezcla de ambos campos, el cual es restringido por la física del Higgs observada. Estudiamos con cuidado la física emergente codificada en la densidad Lagrangiana efectiva, identificando que hay sólo cuatro parámetros libres que determinan el modelo: la masa del fermión de DM, la masa del escalar mediador entre el sector de DM y el SM, el “ángulo” de mezcla entre el Higgs y el escalar mediador, denotado como  $\theta$ , y la magnitud de la interacción  $\kappa$  entre el mediador y la DM. También se presentan cálculos analíticos de  $\langle\sigma v_r\rangle$  de la aniquilación de DM en partículas observables del SM, cantidad que es necesaria para plantear la ecuación de Boltzmann de la partícula  $\mathcal{X}$  para así determinar su abundancia de reliquia.
- En el capítulo 4 realizamos un análisis fenomenológico del modelo efectivo propuesto. En el espacio de los cuatro parámetros libres identificados, presentamos los puntos que dan el valor observado de densidad de reliquia, determinados mediante rutinas computacionales y el software libre micrOMEGAs [37]. Imponemos restricciones fenomenológicas, tales como la perturbatividad del modelo y las cotas en el ángulo de mezcla del sector escalar [38], para identificar especialmente las relaciones entre las masas de las partículas nuevas favorecidas y prohibidas para nuestro modelo de materia oscura.
- En el capítulo 5 se presentan las principales conclusiones de este trabajo, discutiendo posibles extensiones o variantes del modelo.

# Capítulo 1

## Teoría cuántica de campos

La teoría cuántica de campos (QFT, por sus siglas en inglés) es una serie de ideas y herramientas que combinan tres de los más importantes tópicos de la física moderna: la teoría cuántica, el concepto de campo y el principio de relatividad. Surge de la necesidad de explicar aquello que la mecánica cuántica (no relativista) no puede. Si uno escribe una versión relativista de la ecuación de Schroedinger, surgen problemas como probabilidades o estados de energía negativa. Es por esta y otras razones que para sistemas relativistas se requiere usar QFT. En este capítulo se abordarán los elementos de la teoría necesarios para entender a la materia oscura desde la física de partículas.

### 1.1. Simetrías y teorema de Noether

Esta y las siguientes dos secciones están basadas enteramente en el segundo y tercer capítulo del libro *Introduction to Quantum Field Theory* de los autores Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder [39].

La formulación Lagrangiana de la teoría cuántica de campos es especialmente conveniente para la dinámica relativista pues todas las expresiones son explícitamente invariantes de Lorentz. Recordemos que la cantidad fundamental en mecánica clásica es la acción  $S$ , la integral temporal del Lagrangiano  $L = T - V$ . En una teoría cuántica de campos, el Lagrangiano se puede escribir como la integral espacial de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la cual es función de uno o más campos  $\phi(x)$  y de sus derivadas  $\partial_\mu\phi$ . Así, tenemos

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) d^4x. \quad (1.1)$$

El principio de mínima acción establece que cuando un sistema evoluciona de una configuración dada a otra entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ , lo hace a través del “camino” en el espacio de configuración

para el cual  $S$  es un extremo, por lo general un mínimo. Se puede escribir tal condición como

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right] = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) \right], \quad (1.2)$$

y factorizando  $\delta \phi$  de los primeros dos términos, notamos que como la integral debe desaparecer para un  $\delta \phi$  arbitrario, entonces la cantidad que multiplica el diferencial debe hacerse cero para todos los puntos, de donde se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L)

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.3)$$

Consideremos ahora brevemente la relación entre simetrías y leyes de conservación, i.e., el teorema de Noether. Considérese una transformación continua del campo  $\phi$ , que en forma infinitesimal se puede escribir como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x), \quad (1.4)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro infinitesimal y  $\Delta \phi$  es una deformación del campo. Se llama a esta transformación una simetría si deja las ecuaciones de movimiento invariantes. Esto se puede garantizar si la acción es invariante bajo (1.4). Más generalmente, podemos permitir que la acción cambie por un término de superficie, ya que tal término no afectaría las ecuaciones de E-L. El Lagrangiano, entonces, puede ser invariante bajo (1.4) hasta una 4-divergencia

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu(x), \quad (1.5)$$

para algún  $\mathcal{J}^\mu$ .

Notemos que

$$\alpha \Delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} (\alpha \Delta \phi) + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \partial_\mu (\alpha \Delta \phi) = \alpha \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \alpha \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \Delta \phi. \quad (1.6)$$

El segundo término es cero por las ecuaciones de E-L y hacemos el término restante igual a  $\alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$  por lo que si definimos

$$j^\mu(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi - \mathcal{J}^\mu, \quad \implies \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0. \quad (1.7)$$

Este resultado nos dice que la corriente  $j^\mu(x)$  es una constante (se conserva). Por cada simetría continua de  $\mathcal{L}$ , se tiene una cantidad conservada. Como consecuencia, tenemos que la carga

$$Q \equiv \int_{\mathbb{R}^3} j^0 d^3x \quad (1.8)$$

es constante en el tiempo.

Se puede aplicar el teorema de Noether a transformaciones espacio temporales tales como traslaciones y rotaciones

$$x^\mu \rightarrow x^\mu - a^\mu, \quad (1.9)$$

que son equivalentes a una transformación de la configuración del campo de la forma,

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x + a) = \phi(x) - a^\mu \partial_\mu \phi(x). \quad (1.10)$$

El Lagrangiano es también un escalar, por lo que se debe transformar de la misma manera,

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}). \quad (1.11)$$

Comparando con la ecuación (1.5) notamos que tenemos un  $\mathcal{J}^\mu$  distinto de cero. Tomando esto en cuenta, podemos aplicar el teorema de Noether para obtener cuatro corrientes (similares a  $j^\mu$  en (1.7)) numeradas con el índice  $\nu$

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.12)$$

Las componentes  $T^\mu{}_\nu$  corresponden justamente a las del *tensor de energía-momento* del campo  $\phi$ . La carga conservada asociada a las traslaciones temporales (con índice  $\nu = 0$ ) es el Hamiltoniano

$$H = \int T^{00} d^3x = \int \mathcal{H} d^3x, \quad (1.13)$$

mientras que las cargas conservadas asociadas a las traslaciones espaciales (índice  $\nu = i$ ) son

$$P^i = \int T^{0i} d^3x = - \int \pi \partial_i \phi d^3x. \quad (1.14)$$

## 1.2. Cuantización de una teoría de campo no abeliano

Consideremos ahora la teoría de un campo gobernado por el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (1.15)$$

con  $\phi$  un campo real. La ecuación de E-L es

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi &= 0, \\ (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

la cual es conocida como la ecuación de Klein-Gordon (K-G). Notemos que el momento conjugado es  $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ , por lo que de (1.13) se tiene

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]. \quad (1.17)$$

Para cuantizar el campo de K-G proponemos a  $\phi$  y a  $\pi$  como operadores e imponemos las relaciones de conmutación análogas a las de sistemas discretos de una o más partículas

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})] &= [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

El Hamiltoniano y cualquier combinación de los campos también se convierten en operadores.

Para encontrar el espectro de  $H$ , debido a que (1.16) tiene la estructura de una ecuación de onda, podemos expandir el campo clásico de K-G como

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{p}, t), \quad (1.19)$$

con  $\phi^*(\mathbf{p}) = \phi(-\mathbf{p})$  para respetar que  $\phi(\mathbf{x})$  es real. La ecuación de K-G se reescribe como una colección infinita de ecuaciones para los modos  $\phi(\mathbf{p}, t)$  con momento  $\mathbf{p}$ , de la forma

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (|\mathbf{p}|^2 + m^2) \right] \phi(\mathbf{p}, t) = 0, \quad (1.20)$$

la cual es la ecuación de un oscilador armónico simple con frecuencia

$$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}. \quad (1.21)$$

Recordemos cómo obtener el espectro de un oscilador armónico simple con el Hamiltoniano

$$H_{\text{OAS}} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2\phi^2. \quad (1.22)$$

Para encontrar los autovalores de  $H_{\text{OAS}}$ , escribimos  $\phi$  y  $p$  en términos de operadores de ascenso  $a^\dagger$  y descenso  $a$ ,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger), \quad (1.23)$$

donde  $a^\dagger$  y  $a$  satisfacen  $[a, a^\dagger] = 1$  debido a (1.18) el Hamiltoniano puede ahora reescribirse como

$$H_{\text{OAS}} = \omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1.24)$$

El estado  $|0\rangle$ , tal que  $a|0\rangle = 0$  es un autoestado de  $H$  con autovalor  $\frac{1}{2}\omega$ , el punto cero de energía. Además, los conmutadores

$$[H_{\text{OAS}}, a^\dagger] = \omega a^\dagger; \quad [H_{\text{OAS}}, a] = -\omega a \quad (1.25)$$

hacen fácil verificar que los estados

$$|n\rangle := (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (1.26)$$

son autoestados de  $H_{\text{OAS}}$  con autovalores  $(n + \frac{1}{2})\omega$ . Estos estados agotan el espectro.

Se puede encontrar el espectro del Hamiltoniano de K-G usando este método. En analogía con (1.23) introducimos los operadores

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (1.27)$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{p}}}{2}} (a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}), \quad (1.28)$$

donde estamos trabajando en la representación de Schroedinger, es decir, el campo no depende del tiempo. Las relaciones de conmutación  $[a, a^\dagger] = 1$  se pueden generalizar como

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (1.29)$$

Estamos listos ahora para expresar en Hamiltoniano en términos de operadores de ascenso y descenso

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right). \quad (1.30)$$

El segundo término es proporcional a  $\delta(0)$ , un infinito. Es simplemente la suma de todos los modos del punto cero de energía  $\omega_{\mathbf{p}}/2$ , por lo que su presencia era de esperarse. Sin embargo, experimentalmente siempre se miden diferencias de energía del estado base de  $H$ , por lo que podemos ignorarlo.

Usando estas expresiones para el Hamiltoniano en términos de  $a_{\mathbf{p}}$  y  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ , podemos evaluar los conmutadores

$$[H, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger, \quad [H, a_{\mathbf{p}}] = -\omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}. \quad (1.31)$$

Podemos ahora escribir el espectro de la teoría como se hizo para el oscilador armónico simple. El estado  $|0\rangle$ , tal que  $a_{\mathbf{p}}|0\rangle = 0$  para toda  $\mathbf{p}$  es el estado base o *vacío* y tiene  $E = 0$  después de haber ignorado el infinito en (1.30). El resto de los autoestados de energía se obtienen con el operador de ascenso actuando sobre  $|0\rangle$ , el estado  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \dots |0\rangle$  es un autoestado de  $H$  con energía  $\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{q}} \dots$ . Estos estados agotan el espectro.

El operador de momento es

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \pi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathbf{p} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}, \quad (1.32)$$

que, al evaluar  $\mathbf{P} a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ , permite concluir que  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  crea momento  $\mathbf{p}$  y en consecuencia (ver también (1.31)) energía  $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . De la misma forma el estado  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger \dots |0\rangle$  tiene momento  $\mathbf{p} + \mathbf{q} \dots$ . Es entonces natural llamar a estas excitaciones del campo “partículas”, pues son entidades discretas que tienen la adecuada relación de energía-momento relativista (notemos que  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  crea partículas en los autoestados de momento, por lo que no nos referimos a partículas localizadas en el espacio).

Notemos que la energía es siempre positiva,  $E_{\mathbf{p}} = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Este formalismo también nos permite determinar la estadística de nuestras partículas. Como  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  y  $a_{\mathbf{q}}^\dagger$  conmutan, entonces  $a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{q}}^\dagger |0\rangle = a_{\mathbf{q}}^\dagger a_{\mathbf{p}}^\dagger |0\rangle$ , por lo que las dos partículas son intercambiables. Además, un único modo  $\mathbf{p}$  puede contener un número arbitrario de partículas, por lo que se concluye que las partículas obedecen la *estadística de Bose-Einstein*.

### 1.3. Cuantización del campo de Dirac

Consideremos el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (1.33)$$

donde  $\gamma^\mu$  son las matrices de Dirac  $4 \times 4$  para el espacio de Minkowski 4-dimensional. Una representación en un bloque  $2 \times 2$  es

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

donde  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli y  $\mathbb{1}$  es la matriz identidad en 2D. Esta representación es llamada de *Weyl* o *Quiral*. En esta representación, los generadores de las rotaciones y los empujones son respectivamente

$$S^{0i} = \frac{i}{4}[\gamma^0, \gamma^i] = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

y

$$S^{ij} = \frac{i}{4}[\gamma^i, \gamma^j] = -\frac{i}{2}\epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\Sigma^k. \quad (1.36)$$

$\psi$  es un campo de 4 componentes que se transforma bajo rotaciones y empujones como  $\psi \rightarrow S^{ij}\psi$  y  $\psi \rightarrow S^{0i}\psi$  y es llamado *espinor de Dirac*. Además,  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ , pues  $\psi^\dagger \psi$  no es un escalar de Lorentz. De la ecuación de E-L para  $\bar{\psi}$  obtenemos la ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \quad (1.37)$$

Como cada componente del campo de Dirac  $\psi$  también obedece la ecuación de K-G (multiplíquese la ec. de Dirac por su conjugado y se obtiene la ec. de K-G en cada componente), sabemos de inmediato que se puede escribir como una combinación lineal de ondas planas

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip \cdot x}, \quad \text{donde} \quad p^2 = m^2, \quad (1.38)$$

donde  $u(p)$  debe también satisfacer la ecuación de Dirac  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0$ . Existen dos soluciones linealmente independientes para  $u(p)$ ,

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (1.39)$$

para cualquier espinor  $\xi$  con dos componentes. Se normaliza  $\xi$  de tal forma que  $\xi^\dagger \xi = 1$ . Además se sabe que se cumple la relación  $(p \cdot \sigma)(p \cdot \bar{\sigma}) = p^2 = m^2$ , con  $\sigma^\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma})$  y  $\bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\boldsymbol{\sigma})$ , por lo que  $u(p)$  se puede normalizar mediante

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}, \quad u^{r\dagger}(p)u^s(p) = 2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs}. \quad (1.40)$$

Exactamente de la misma forma, podemos encontrar soluciones con frecuencias negativas

$$\psi(x) = v(p)e^{+ip \cdot x}, \quad p^2 = m^2, \quad p^0 > 0. \quad (1.41)$$

(Notemos que se ha elegido poner el signo  $+$  en la exponencial en lugar de tener  $p^0 < 0$ ). Análogamente, tenemos dos soluciones linealmente independientes de  $v(p)$ ,

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta^s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \quad (1.42)$$

donde  $\eta^s$  es otra base espinorial de dos componentes. Estas soluciones son normalizadas acorde a

$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs} \quad \text{o} \quad v^{r\dagger}(p)v^s(p) = +2E_{\mathbf{p}}\delta^{rs} \quad (1.43)$$

y las  $u$ 's y las  $v$ 's satisfacen la regla de ortogonalidad

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0. \quad (1.44)$$

Para evaluar diagramas de Feynman, frecuentemente será necesario sumar sobre los estados polarizados de un fermión. Para esto, derivamos primero las relaciones de completez relevantes con un cálculo simple,

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \xi^s \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} (\xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}}, \xi^{s\dagger} \sqrt{p \cdot \sigma}) = \begin{pmatrix} m & p \cdot \sigma \\ p \cdot \bar{\sigma} & m \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

pues

$$\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = \mathbb{1}_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

por lo que hemos llegado a las siguientes fórmulas:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) = \gamma \cdot p + m, \quad (1.47)$$

$$\sum_s v^s(p)\bar{v}^s(p) = \gamma \cdot p - m, \quad (1.48)$$

las cuales son importantes pues servirán para evaluar los diagramas de Feynman de la aniquilación de materia oscura en fermiones del SM en la sección 3. Procedamos ahora a cuantizar el campo de Dirac.

Primero escribimos el Hamiltoniano. Usando (1.13), tenemos

$$H = \int d^3x \bar{\psi} (-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m) \psi = \int d^3x \psi^\dagger [-i\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\gamma^0] \psi \quad (1.49)$$

y si definimos  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\beta = \gamma^0$ , tenemos entre los corchetes el Hamiltoniano de Dirac de una partícula

$$h_D = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + m\beta. \quad (1.50)$$

Por la forma del Hamiltoniano en (1.50), será de utilidad expandir  $\psi(x)$  en una base de autofunciones de  $h_D$ . Como las soluciones (1.38) son autofunciones de la ecuación de Dirac,

$$[i\gamma^0 \nabla_0 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m] u^s(p) e^{-ip \cdot x} = 0, \quad (1.51)$$

entonces proponemos que  $u^s(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  sean las autofunciones de  $h_D$  con autovalores  $E_{\mathbf{p}}$ . Similarmente, tomamos  $v^s(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$  como la base de autofunciones de  $h_D$  con autovalores  $-E_{\mathbf{p}}$ . Estos forman un conjunto completo de autofunciones, pues para cada  $\mathbf{p}$ , las funciones  $u^1, u^2, v^1$  y  $v^2$  dan un total de 4 autovectores de la matriz  $h_D$ .

Expandiendo  $\psi$  en esta base, tenemos

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \sum_{s=1,2} (a_{\mathbf{p}}^s u^s(\mathbf{p}) + b_{-\mathbf{p}}^s v^s(-\mathbf{p})), \quad (1.52)$$

donde  $a_{\mathbf{p}}^s$  y  $b_{\mathbf{p}}^s$  son los operadores coeficientes en la representación de Schroedinger. Podemos también usar las siguientes relaciones

$$e^{iHt} a_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = a_{\mathbf{p}}^s e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt} b_{\mathbf{p}}^s e^{-iHt} = b_{\mathbf{p}}^s e^{+iE_{\mathbf{p}}t}, \quad (1.53)$$

y por lo tanto tenemos

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} (a_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^s v^s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (1.54)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} (b_{\mathbf{p}}^s \bar{v}^s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \bar{u}^s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (1.55)$$

Para cuantizar el campo de Dirac, se propone al campo como operador y se imponen relaciones de *anticomutación*. Estas relaciones son

$$\{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{ab}, \quad \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y})\} = \{\psi_a^\dagger(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} = 0. \quad (1.56)$$

A partir de estas relaciones, se obtiene que los operadores de creación y aniquilación obedecen de la misma manera la relación de anticomutación,

$$\{a_{\mathbf{p}}^r, a_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = \{b_{\mathbf{p}}^r, b_{\mathbf{q}}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^{rs}, \quad (1.57)$$

con las otras relaciones de anticonmutación igual a cero.

Por otro lado, el vacío  $|0\rangle$  es definido como aquel estado que cumple que

$$a_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = b_{\mathbf{p}}^s |0\rangle = 0 \quad (1.58)$$

y podemos escribir el Hamiltoniano como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (1.59)$$

También podemos escribir el operador de momento,

$$\mathbf{P} = \int d^3x \psi^\dagger (-i\nabla) \psi = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} a_{\mathbf{p}}^s + b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s). \quad (1.60)$$

Análogo al caso del campo escalar, los operadores  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  y  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  crean partículas con energía  $+E_{\mathbf{p}}$  (ver ecuación (1.59)) y momento  $\mathbf{p}$  (ver ecuación (1.60)). A estas partículas creadas por  $a_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  se les conoce como fermiones y las creadas por  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  como *antifermiones* y el estado de una partícula

$$|\mathbf{p}, s\rangle \equiv \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{s\dagger} |0\rangle, \quad (1.61)$$

se define de tal forma que el producto interno

$$\langle \mathbf{p}, r | \mathbf{q}, s \rangle = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta^{rs} \quad (1.62)$$

es invariante de Lorentz.

## 1.4. Rompimiento espontáneo de simetría

Esta sección está basada enteramente en el capítulo 14 del libro *Quarks & Leptons : An introductory course in modern particle physics*, de los autores Francis Halzen y Alan D. Martin [40].

En la Electrodinámica Cuántica y la Cromodinámica Cuántica (QED y QCD, por sus siglas en inglés respectivamente), uno de los requerimientos para los fotones y los gluones es que estos no deben tener masa ya que la presencia de un término de masa acaba con la invariancia de norma del Lagrangiano. Al querer aplicar estas ideas a la interacción débil, uno se encuentra con problemas, ya que esta interacción está mediada por los bosones de norma  $W^\pm$  y  $Z$ , los cuales se sabe tienen masas del orden de 100 GeV. Si uno introduce un término al Lagrangiano de la forma  $M^2 W_\mu W^\mu$  e ignora los términos adicionales y su efecto de rompimiento de la simetría, entonces aparecen divergencias no-renormalizables [40].

Empezaremos nuestro análisis del rompimiento espontáneo de simetría con una teoría de campo clásico. Considérese el Lagrangiano de la teoría  $\phi^4$  (para un campo escalar real),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \quad (1.63)$$

pero con  $m^2$  reemplazado por un parámetro negativo,  $-\mu^2 < 0$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (1.64)$$

Este Lagrangiano tiene una simetría discreta, pues es invariante bajo la operación  $\phi \rightarrow -\phi$ . El Hamiltoniano correspondiente es

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \right]. \quad (1.65)$$

Por otro lado, la configuración clásica de energía es un campo uniforme  $\phi(x) = \phi_0$ , donde  $\phi_0$  minimiza el potencial

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (1.66)$$

Este potencial tiene dos mínimos dados por

$$\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu, \quad (1.67)$$

donde la constante  $v$  es llamada el *valor de expectación en el vacío* de  $\phi$  (VEV, por sus siglas en inglés).

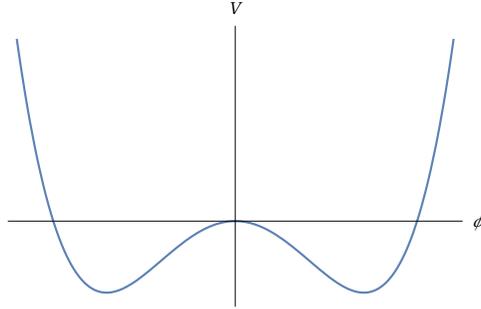


Figura 1.1: Potencial del Lagrangiano (1.64). Nótese que hay dos mínimos del potencial a diferencia del caso  $-\mu^2 > 0$ , donde solamente hay uno. En la gráfica se observan tres puntos críticos, uno de ellos (el que corresponde a  $V(0)=0$ ) es inestable por tratarse de un máximo local, mientras que los otros dos son estables.

Para interpretar esta teoría, supóngase que el sistema se encuentra cerca de un mínimo (e.g., en el que  $\phi_0$  es positivo). Entonces es conveniente definir

$$\phi(x) \rightarrow v + \sigma(x) \quad (1.68)$$

y escribir  $\mathcal{L}$  en términos de  $\sigma(x)$ . Poniendo (1.68) en (1.64), se obtiene el siguiente Lagrangiano (omitiendo los términos constantes)

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{6}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4. \quad (1.69)$$

Este Lagrangiano describe un campo escalar simple con masa  $\sqrt{2}\mu$ , con interacciones  $\sigma^3$  y  $\sigma^4$ . La simetría  $\phi \rightarrow -\phi$  ya no es aparente. Este es el ejemplo más sencillo de un rompimiento espontáneo de simetría.

Un modelo más interesante aparece cuando la simetría espontáneamente rota es continua. Un ejemplo interesante es una generalización de la teoría previamente presentada llamado el *modelo sigma lineal*. El Lagrangiano de este modelo involucra un conjunto de  $N$  campos escalares reales  $\phi^i(x)$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad (1.70)$$

con una suma implícita sobre  $i$  en cada factor  $(\phi^i)^2$ . Nótese que se ha reescalado el acoplamiento  $\lambda$  de la teoría  $\phi^4$  del Lagrangiano para remover el factor 6 que aparece en el análisis de arriba. El Lagrangiano anterior es invariante bajo la simetría

$$\phi^i \rightarrow R^{ij} \phi^j, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (1.71)$$

para cada matriz ortogonal  $R$  de dimensiones  $N \times N$ . El grupo de transformaciones (1.71) es simplemente el grupo de rotaciones en  $N$ -dimensiones denotado  $O(N)$ . De nuevo, la configuración clásica de mínima energía es un campo constante  $\phi_0^i$ , cuyo valor es elegido de tal manera que minimiza el potencial

$$V(\phi^i) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2, \quad (1.72)$$

i.e., este potencial es mínimo para cada combinación de  $\phi_0^i$  que satisface

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (1.73)$$

Esta condición solamente determina la longitud del vector  $(\phi_0^i)$  y su dirección es arbitraria, por lo que es conveniente escoger coordenadas de tal forma que  $\phi_0^i$  apunte en la dirección  $N$ -ésima,

$$\phi_0^i = (0, 0, \dots, 0, v), \quad \text{con} \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (1.74)$$

Se puede ahora definir un conjunto de campos distintos escribiendo

$$(\phi^i(x)) \rightarrow (\pi^k(x), v + \sigma(x)), \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (1.75)$$

Es ahora inmediato reescribir el Lagrangiano en términos de campos  $\pi$  y  $\sigma$

$$\mathcal{L} \rightarrow \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}[(\pi^k)^2]^2. \quad (1.76)$$

Aparece de nuevo un campo masivo  $\sigma$  como en (1.69) y también un conjunto de  $(N-1)\pi$  campos sin masa. La simetría original  $O(N)$  está ahora oculta, dejando únicamente el subgrupo

$O(N - 1)$ , el cual rota los campos  $\pi$  entre ellos. El campo masivo  $\sigma$  describe oscilaciones de  $\phi^i$  en la dirección radial, en la cual el potencial tiene una segunda derivada distinta de cero, mientras que el campo sin masa  $\pi$  describe oscilaciones de  $\phi^i$  en la dirección tangencial. El canal tangencial es una superficie  $(N - 1)$ -dimensional y todas las  $N - 1$  direcciones son equivalentes, dejando de manifiesto la simetría intacta  $O(N - 1)$ .

### 1.4.1. Teorema de Goldstone

Esta sección está basada enteramente en las notas del profesor Michael Kachelriess de la universidad noruega NTNU (Norwegian University of Science and Technology) [41].

La aparición de partículas sin masa cuando una simetría continua se rompe espontáneamente es un resultado muy general conocido como el *Teorema de Goldstone*. Este teorema dice que por cada simetría continua que se rompe espontáneamente, la teoría debe contener una partícula sin masa. Dichas partículas son llamadas *bosones de Goldstone*.

Iniciemos el estudio de este teorema con una teoría que involucra distintos campos  $\Phi = (\phi^a)$ , con un Lagrangiano de la forma

$$\mathcal{L} = (\text{términos con derivadas}) - V(\Phi), \quad (1.77)$$

que cuenta con un grupo de simetría  $G$  y un VEV  $\Phi_0 = (\phi_0^a)$  que minimiza  $V$ , el cual es invariante en su mínimo bajo un subgrupo  $H$  (no confundir con el Hamiltoniano) de  $G$ . Denotamos a  $U(g)$  como una representación de del elemento  $g$  de  $G$  que actúa sobre  $\Phi$  y a  $U(h)$  como una representación de  $h \in H$ .

El potencial por sí mismo debe ser simétrico bajo  $G$ , i.e.

$$V(U(g)\Phi) = V(\Phi). \quad (1.78)$$

Además, sabemos que el vacío debe permanecer invariante para todo  $h \in H$ ,  $\Phi'_0 = U(h)\Phi_0$ , pero cambia para algún  $g$ ,  $\Phi'_0 \neq U(g)\Phi_0$ . Usando la invariancia del potencial y expandiendo  $V(U(g)\Phi_0)$  para una transformación infinitesimal del grupo tenemos

$$V(\Phi_0) = V(U(g)\Phi_0) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right|_{\Phi_0} \delta \phi^a \delta \phi^b + \dots, \quad (1.79)$$

donde  $\delta \phi_a$  denota la variación resultante de los campos. Definimos la matriz de masas  $\mathcal{M}^2$  como

$$\mathcal{M}_{ab}^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \right|_{\Phi_0} \geq 0, \quad (1.80)$$

la cual es simétrica y diagonalizable por construcción y cuyos autovalores corresponden a las masas de los campos.

La expansión (1.79) implica que

$$\mathcal{M}_{ab}^2 \delta \phi^a \delta \phi^b = 0. \quad (1.81)$$

La variación  $\delta\phi_a$  depende de si la transformación pertenece a  $H$  o no. Si es el caso, entonces el vacío  $\Phi_0$  no cambia,  $\delta\phi_i = 0$  y (1.81) se satisface automáticamente. Si, por el contrario,  $g$  no pertenece a  $H$ , i.e., es miembro del conjunto  $G/H$ , entonces  $\delta\phi_a \neq 0$ , implicando que la matriz  $\mathcal{M}^2$  tiene un autovalor cero. También es claro que el número de partículas sin masa está determinado por la dimensión de  $G/H$ , o en otras palabras, del número de simetrías que se han roto espontáneamente.

## 1.5. Mecanismo de Higgs

Esta sección también está basada en el capítulo 14 del libro *Quarks & Leptons : An introductory course in modern particle physics*, de los autores Francis Halzen y Alan D. Martin [40].

Ahora estudiaremos el rompimiento espontáneo de simetría de una simetría de norma local. Se trabajará el ejemplo más sencillo correspondiente a una simetría de norma  $U(1)$ . Primero consideremos a un escalar complejo  $\phi$  cuya dinámica es gobernada por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad (1.82)$$

el cual es invariante bajo la transformación  $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$  (i.e., una simetría de norma  $U(1)$  global). Nos gustaría ahora que este Lagrangiano sea invariante bajo una transformación de norma  $U(1)$  local

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi. \quad (1.83)$$

Esto requiere que  $\partial_\mu$  sea reemplazado por la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (1.84)$$

donde el campo de norma se transforma como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha. \quad (1.85)$$

El Lagrangiano que sí es invariante bajo (1.83) es

$$\mathcal{L}' = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi^* (\partial^\mu - ieA^\mu) \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.86)$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  es el tensor de campo. Si  $\mu^2 > 0$ , entonces (1.86) es el Lagrangiano de SQED (Scalar Quantum Electrodynamics) para una partícula cargada de masa  $\mu$  (y la autointeracción  $\phi^4$ ). Nos interesa el caso de rompimiento espontáneo de simetría, por lo que consideramos el caso  $\mu^2 < 0$  y repetimos el procedimiento de trasladar el campo  $\phi$  a un verdadero estado base.

Dado que el campo es complejo, entonces podemos escribirlo en términos de su parte real e imaginaria,  $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ , con  $\phi_1$  y  $\phi_2$  reales. Como  $\lambda > 0$  y  $\mu^2 < 0$ , entonces el mínimo del potencial  $V$  se encuentra en el plano  $(\phi_1, \phi_2)$  y es un círculo de radio  $v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$ .

Trasladamos el campo a una posición de mínima energía, tomando, por ejemplo, el punto  $\phi_1 \rightarrow v$ ,  $\phi_2 = 0$ ,

$$\phi(x) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)], \quad (1.87)$$

donde  $\eta$  y  $\xi$  son campos escalares reales, y expandiendo (1.86) alrededor de este vacío, se tiene

$$\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - v^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \text{términos de interacción}. \quad (1.88)$$

El espectro de partículas de  $\mathcal{L}''$  parece ser un bosón de Goldstone  $\xi$  sin masa, un escalar masivo  $\eta$  y un vector masivo  $A_\mu$ . Del Lagrangiano anterior se tiene

$$m_\xi = 0, \quad m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}, \quad m_A = ev. \quad (1.89)$$

Se ha generado dinámicamente una masa para el campo de norma, pero aún se tiene el problema de la existencia del bosón de Goldstone sin masa. Al darle masa a  $A_\mu$ , se han incrementado los grados de libertad de polarización de 2 a 3, ya que ahora puede tener una polarización longitudinal. Sin embargo, trasladar las variables de campo, como en (1.87), no debe crear nuevos grados de libertad pues la física no ha cambiado. Se deduce entonces, que los campos en  $\mathcal{L}''$  no corresponden todos a distintas partículas físicas. Para encontrar la partícula no-física, nótese que

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta + i\xi) \simeq \sqrt{\frac{1}{2}}(v + \eta)e^{i\xi/v}, \quad (1.90)$$

al orden más bajo en  $\xi$  y  $\eta$ . Esto sugiere sustituir los campos que aparecen en (1.88) por un conjunto distinto de campos reales que denotamos como  $h$ ,  $\theta$  y  $A_\mu$  y donde el campo complejo  $\phi$  y el campo de norma  $A_\mu$  se transforman respectivamente como

$$\phi \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}(v + h(x))e^{i\theta(x)/v} \quad y \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu \theta \quad (1.91)$$

en el Lagrangiano (1.86). Esta es una elección particular, con  $\theta(x)$  tomado de tal forma que  $h$  es real, por lo que se anticipa que la teoría sea independiente de  $\theta$ . De hecho se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'' = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2 + \frac{1}{2}e^2 v^2 A_\mu^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 \\ + \frac{1}{2}e^2 A_\mu^2 h^2 + v e^2 A_\mu^2 h - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

El bosón de Goldstone en realidad no aparece en la teoría. Es decir, el aparente grado de libertad extra es falso, ya que corresponde únicamente a la libertad de realizar la transformación de norma. El Lagrangiano describe únicamente dos partículas masivas interactuantes, un vector de norma bosónico  $A_\mu$  y un escalar masivo  $h$ , que es llamado la partícula de *Higgs*. El bosón de Goldstone no masivo y no deseado se ha convertido en la polarización longitudinal de la partícula de norma masiva. Este proceso es llamado el *mecanismo de Higgs*.

## 1.6. Modelo electrodébil

Los cálculos de esta sección están basados en el capítulo 20 de [39].

Se puede ahora escribir el rompimiento espontáneo de simetría de una teoría de norma que nos da la descripción experimental correcta de las interacciones débiles, un modelo introducido por Glashow, Weinberg y Salam (GWS) en los años 1960.

Empezamos con una teoría que cuenta con una simetría de norma  $SU(2)$ . Para romper espontáneamente la simetría, introducimos un doblete escalar complejo en la representación espinorial de  $SU(2)$ , el cual denotamos como  $H$  (no confundir con definiciones previas). Se sabe que esta teoría lleva a un sistema con bosones de norma masivos, por esta razón se introduce también una simetría de norma adicional  $U(1)$  y se asigna carga  $+1/2$  al campo escalar bajo esta simetría  $U(1)$ , por lo que su transformación de norma es

$$H \rightarrow e^{i\alpha^a \tau^a} e^{i\beta/2} H, \quad (1.93)$$

donde  $\tau^a = \sigma^a/2$ . Si el campo  $H$  obtiene un valor de expectación de la forma

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.94)$$

entonces una transformación de norma con

$$\alpha^1 = \alpha^2 = 0, \quad \alpha^3 = \beta \quad (1.95)$$

deja  $\langle H \rangle$  invariante. De este modo, la teoría tendrá un bosón de norma no masivo correspondiente a esta combinación particular de generadores. Los otros dos campos de norma adquirirán masa a través del mecanismo de Higgs.

Podemos ahora escribir la derivada covariante de  $H$ ,

$$D_\mu H = \left( \partial_\mu - ig\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{W}_\mu - i\frac{1}{2}g'B_\mu \right) H, \quad (1.96)$$

y trabajar el doblete de Higgs en la norma unitaria. Para esto parametrizamos el campo escalar  $H$  como

$$H(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h'(x) \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

El doblete de la derecha tiene una única componente real arbitraria  $h'$  y sobre este espinor actúa una transformación de norma  $U(x)$  de  $SU(2)$  para producir la forma más general del espinor, i.e., con componentes complejas. Podemos aplicar otra transformación de norma para eliminar  $U(x)$  del Lagrangiano, por lo que  $H$  se reduce a un campo con un único grado de libertad físico.

Así, podemos escribir la derivada covariante en su forma matricial explícitamente,

$$D_\mu H = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i\frac{1}{2}gW_\mu^3 - i\frac{1}{2}g'B_\mu & -\frac{1}{2}ig(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ -\frac{1}{2}ig(W_\mu^1 + iW_\mu^2) & \partial_\mu + i\frac{1}{2}W_\mu^3 - i\frac{1}{2}g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (1.98)$$

Al expandir el cuadrado de la derivada covariante, se tiene

$$(D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) = \frac{1}{2}(\partial_\mu h')^2 + \frac{1}{8}g^2(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(W_\mu^1 + iW_\mu^2)h'^2 + \frac{1}{8}(gW_\mu^3 - g'B_\mu)^2h'^2. \quad (1.99)$$

Observamos que hay 4 bosones vectoriales que podemos identificar como sigue:

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2); \\ Z_\mu^0 &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gW_\mu^3 - g'B_\mu); \\ A_\mu &= \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'W_\mu^3 + gB_\mu). \end{aligned} \quad (1.100)$$

Para encontrar las masas de estos bosones, expandimos alrededor del vacío, i.e., hacemos  $h' = h + v$ . De este modo, el término cinético (1.99) se reescribe como

$$\begin{aligned} (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{4}g^2W^{\mu+}W_\mu^-(h+v)^2 + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)Z_\mu^0Z^{\mu 0}(h+v)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \left[ \frac{1}{4}g^2v^2W^{\mu+}W_\mu^- + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)v^2Z_\mu^0Z^{\mu 0} \right] \left( 1 + \frac{h}{v} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.101)$$

de donde podemos identificar los términos de masa:

$$m_W = g\frac{v}{2}, \quad m_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \quad \text{y} \quad m_A = 0. \quad (1.102)$$

De esta manera,

$$\mathcal{L}_{\text{cinético}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \left( m_W^2W^{\mu+}W_\mu^- + \frac{1}{2}m_Z^2Z_\mu^0Z^{\mu 0} \right) \left( 1 + \frac{h}{v} \right)^2 \quad (1.103)$$

y tenemos interacciones cuárticas y cúbicas entre los bosones de norma y el bosón de Higgs, las cuales permiten, por ejemplo, decaimientos del tipo  $h \rightarrow W^{\mu+}W_\mu^-, Z_\mu^0Z^{\mu 0}$ . Veremos en el capítulo 3 que estas interacciones son importantes pues la DM, al acoplarse cuárticamente con el Higgs, se puede aniquilar y dar como resultado bosones de norma en el estado final,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow h \rightarrow W^{\mu+}W_\mu^-, Z_\mu^0Z^{\mu 0}$ , proceso que es relevante al calcular la sección transversal de aniquilación de DM.

## Capítulo 2

# Materia oscura

La discusión que se muestra a continuación está enteramente basada en la sección 3.5 del texto [42]. Se tratarán primero principios cosmológicos que nos ayudan a entender la expansión del universo y el rol de la materia oscura en este proceso.

Como se mencionó en la introducción de esta tesis, la hipótesis de la existencia de materia oscura se remonta a 1933, introducida por el astrofísico suizo Fritz Zwicky ante la evidencia de una “masa no visible” que influía en las velocidades orbitales de los cúmulos en las galaxias.

Es posible estudiar la dinámica del universo como un sistema. La evolución del universo usualmente es descrita mediante el modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). El universo visible a gran escala parece el mismo en todas las direcciones alrededor de nosotros; de hecho, las observaciones indican que cualquier marco de referencia tiene la misma evidencia independientemente de donde se encuentre. Es decir, el universo observable parece homogéneo e isotrópico. Las observaciones anteriores nos llevan a formular el principio cosmológico: *no existe un lugar privilegiado en el universo*. A pesar de que solo podemos observar una fracción del universo, es válido pensar que *el universo es completamente homogéneo e isotrópico*.

Bajo estas ideas se puede encontrar entonces una métrica adecuada para la descripción del universo. La métrica que describe mejor una geometría adecuada al principio cosmológico es la métrica de FLRW, dado en coordenadas esférico-polares y en unidades naturales por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

de donde se puede escribir el elemento de línea

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.2)$$

donde  $a(t)$  es conocido como el *factor de escala* y aquí tiene unidades de longitud,<sup>1</sup> por lo que la coordenada radial  $r$  no tiene unidades. El factor de escala, por lo tanto, es una medida de la tasa de crecimiento de las distancias en (o expansión de) el universo y no una medida del tamaño del universo. La constante  $k$  representa el tipo de curvatura del espacio y puede adquirir los siguientes valores

$$k = \begin{cases} +1 & \text{universo cerrado,} \\ 0 & \text{universo plano,} \\ -1 & \text{universo abierto.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Estos valores son independientes del tamaño del universo; sin embargo, resulta claro que si nuestro universo es plano o abierto, puede ser infinitamente grande, mientras que, si  $k = +1$ , es fácil mostrar que la métrica de FLRW corresponde a la métrica de una esfera y que, por lo tanto, vivimos en un universo con un tamaño preciso que aún no podemos medir porque no hemos alcanzado a observar los objetos celestes que habitan en los límites de la esfera.<sup>2</sup>

Supóngase que la dinámica del universo está gobernada por las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

que satisfaga una ecuación de conservación, la cual, como es modelada como un fluido perfecto, satisface la ecuación de estado  $P = \omega\rho$ . Supondremos a  $\omega$  como una constante adimensional, cuyos valores dependen del contenido del universo, de acuerdo a

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación,} \\ 0 & \text{materia,} \\ -1 & \text{energía del vacío.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Por lo tanto, el tensor de energía-momento se escribe como

$$(T^\mu{}_\nu) = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P), \quad (2.6)$$

donde  $\rho$  y  $P$  corresponden respectivamente a la densidad de energía y presión del fluido que modela el contenido del universo.

Por otro lado, las componentes no nulas del tensor de Ricci y del escalar de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

<sup>1</sup>En otras convenciones es adimensional.

<sup>2</sup>Mediciones indirectas de  $\kappa$  indican que el universo observable es plano, es decir que  $\kappa = 0$ .

Empleando (2.7), la componente  $(\mu, \nu) = (0, 0)$  de las ecuaciones de campo de Einstein (2.4) conducen a

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a}\right] = 8\pi\rho, \quad (2.8)$$

que, al simplificarse, se puede escribir como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad (2.9)$$

Definimos el *parámetro de Hubble* al tiempo  $t$  como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.10)$$

y sustituyendo en (2.9) tenemos la ecuación de Friedmann,

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad \text{Ecuación de Friedmann.} \quad (2.11)$$

Se puede expresar a la ecuación de Friedmann como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho - 1 = \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \quad (2.12)$$

donde la llamada *densidad crítica*  $\rho_c = 3H^2/8\pi$  define el valor que la densidad de energía  $\rho$  debe tomar a un tiempo  $t$  para que el lado derecho de (2.12) se anule y, por lo tanto, el espacio-tiempo (al tiempo  $t$ ) sea plano, i.e.,  $k = 0$ . Por ejemplo, al tiempo actual  $t_0$ , con el valor medio del parámetro de Hubble [22]

$$H_0 \equiv H(t_0) = (67.41 \pm 0.62) \text{ km/s Mpc} \approx (2.18 \times 10^{-18}) s^{-1}, \quad (2.13)$$

se tiene que la densidad crítica presente es  $\rho_{0,c} \equiv \rho_c(t_0) = 3H_0^2/8\pi \approx 4.765 \text{ keV/cm}^3$ .

Definimos ahora el *parámetro de densidad o abundancia*<sup>3</sup>

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.14)$$

que permite reescribir la ecuación de Friedmann como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1 = \frac{\rho}{\rho_c} - 1. \quad (2.15)$$

Por ejemplo, para la materia oscura, encontramos que  $\Omega_{\text{CDM}} = 0.263 \pm 0.008$  (i.e. un 26.3%  $\pm$  0.8%) [22] (CDM denota ‘‘Cold Dark Matter’’) corresponde a la fracción de DM en el contenido

<sup>3</sup>En la literatura es habitual que  $\Omega$  sólo se refiera a la fracción *actual* de energía con respecto a la densidad crítica. Aquí, la abundancia actual se denota como  $\Omega_0 \equiv \Omega(t = t_0)$ .

total de materia y energía oscura en el Universo, mientras que para la energía oscura,  $\Omega_{\text{DE}} = 0.6861 \pm 0.0085$  (68.61 %  $\pm$  0.85 %) y para masa bariónica es  $\Omega_b = 0.049 \pm 0.0013$  (4.9 %  $\pm$  0.13 %).

Las evidencias observacionales sobre la existencia de DM se pueden consultar en el Review [43] y sus referencias. A pesar de que su existencia es frecuentemente considerada un hecho entre los astrofísicos y cosmólogos, no se ha podido determinar su naturaleza, pregunta abierta que también concierne a la física de partículas, razón por la que en esta tesis se abordará la partícula hipotética WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) como candidata de DM. Esta partícula fue propuesta una década después de que el problema de DM se haya establecido en los años 70's y resuelve un gran número de problemas astrofísicos y cosmológicos relacionados con la materia oscura [44]. Estas soluciones se resumen en el llamado *Milagro WIMP*, tópico que será tratado en la siguiente sección.

## 2.1. Producción de materia oscura

Esta discusión esta basada en el capítulo 3.1 de las notas en [45].

En esta sección se calculará la densidad de reliquia de la partícula hipotética WIMP. Como es el caso para fotones y neutrinos, suponemos que la materia oscura se crea térmicamente y que la densidad de reliquia observada [22] está determinada por el congelamiento (freeze-out en inglés) combinando la expansión del universo discutida en la sección anterior. En este punto no se tratarán modelos de materia oscura específicos; es en el siguiente capítulo donde se mostrarán los modelos de física de partículas que se tratan en esta tesis.

Supongamos que la materia oscura está formada por WIMPs que son fermiones representados por la partícula  $\mathcal{X}$  y que interacciona con fermiones del SM,

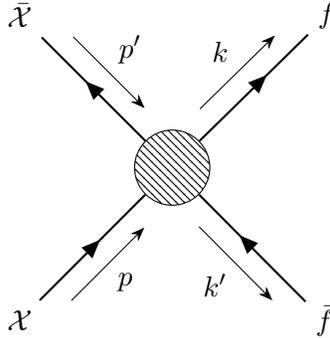


Figura 2.1: Interacción de la partícula WIMP con fermiones observables del SM.

A diferencia de materia oscura asimétrica, en este proceso no importa si la materia oscura tiene una antipartícula  $\bar{\mathcal{X}}$  o si es su propia antipartícula  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}$ .

La amplitud del diagrama de la figura anterior trata tres procesos diferentes:

- de izquierda a derecha el proceso correspondiente es aniquilación  $\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow f\bar{f}$  el cual será en el que nos concentraremos en este trabajo. Los experimentos que se basan en este proceso para la detección de DM son denominados de “detección indirecta”;
- de arriba a abajo se describe el proceso de dispersión  $\bar{\mathcal{X}}f \rightarrow \mathcal{X}\bar{f}$ . Los experimentos correspondientes a este proceso son llamados de “detección directa” (e.g., XENON1T, ver [46]);
- de derecha a izquierda se describe el proceso de producción de pares de partícula,  $f\bar{f} \rightarrow \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}$ , en colisionadores, tales como el LHC [47].

Este vínculo tan fuerte entre diferentes observables es lo que hace a la materia oscura tan interesante desde el punto de vista de la física de partículas, incluyendo la posibilidad de análisis globales para cualquier modelo que pueda predecir estas amplitudes de dispersión.

### 2.1.1. Milagro WIMP

Ahora supondremos algún tipo de interacciones que mantienen a la partícula  $\mathcal{X}$  en equilibrio térmico con las partículas del SM y al mismo tiempo capaz de aniquilarse.

Al momento del desacoplamiento térmico, la materia oscura se “congela” y mantiene una densidad de reliquia específica. Dicho proceso es descrito por un elemento de matriz para la aniquilación de materia oscura,

$$\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow f\bar{f}. \quad (2.16)$$

La tasa de interacción  $\Gamma$  correspondiente a este proceso solamente compensa el incremento del factor de escala al momento del desacoplamiento,

$$\Gamma(T_{\text{dec}}) = H(T_{\text{dec}}), \quad (2.17)$$

donde  $T_{\text{dec}}$  es la temperatura del desacoplamiento de las partículas  $\mathcal{X}$  con el SM (i.e. cuando deja de ocurrir el proceso de aniquilación (2.16)). Suponiendo que esta tasa de interacción está dada por interacciones electrodébiles (con DM no relativista), la dependencia en la temperatura se reemplaza por la masa de la materia oscura.

Para permitir un proceso en el canal  $s$ , como el de (2.16), se usan la masa y el acoplamiento del bosón  $Z$  en la correspondiente sección transversal de aniquilación

$$\sigma(T \ll m_{\mathcal{X}}) = \frac{\pi\alpha^2 m_{\mathcal{X}}^2}{c_w^4 m_Z^4}, \quad (2.18)$$

donde  $g \equiv e/\sin\theta_w \equiv e/s_w$  y  $s_w^2 \approx 1/4$  definen el acoplamiento débil  $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137$ . Esta fórmula combina la masa de la materia oscura con una interacción electrodébil representada por el término  $1/m_Z^4$  [40].

Dado el número limitado de escalas energéticas en esta descripción, estimamos de forma muy aproximada

$$\frac{m_{\mathcal{X}}}{2} \langle v^2 \rangle = T \iff \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2T}{m_{\mathcal{X}}}}, \quad (2.19)$$

donde  $T$  corresponde a la temperatura del colectivo de partículas  $\mathcal{X}$  y  $\langle v^2 \rangle$  a su velocidad cuadrada promedio. Además, escogemos un número relevante de grados de libertad para la materia oscura, e.g.  $g = 2$ , que puede corresponder a un campo escalar complejo o a un fermión de Majorana. Por otro lado, los términos relevantes de la ecuación de Friedmann se pueden escribir como

$$H(t)^2 = \frac{\rho_m(t) + \rho_r(t)}{3M_{\text{pl}}^2} \iff 1 = \frac{\rho_m(t) + \rho_r(t)}{\rho_c(t)} = \Omega_m(t) + \Omega_r(t), \quad (2.20)$$

y como para bosones o fermiones en el caso no relativista ( $T \gg m_{\mathcal{X}}$ ),  $\rho_{\text{eq}} \propto g_{\text{eff}}(T)T^4$ , donde  $g_{\text{eff}}$  son los grados de libertad efectivos, entonces  $H(t) = \frac{\pi\sqrt{g_{\text{eff}}}}{\sqrt{90}} \frac{T^2}{M_{\text{pl}}}$ , y como  $\Gamma \equiv n_{\mathcal{X}}\langle\sigma v\rangle$  [40], donde  $n_{\mathcal{X}}$  es el número de partículas no relativistas por unidad de volumen con la distribución de Boltzmann, entonces en este caso la condición para el congelamiento de la materia oscura (2.17) es

$$\begin{aligned} \Gamma \equiv \langle\sigma v\rangle n_{\mathcal{X}} &= \sigma \sqrt{\frac{2T_{\text{dec}}}{m_{\mathcal{X}}}} g \left( \frac{m_{\mathcal{X}}T_{\text{dec}}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_{\mathcal{X}}/T_{\text{dec}}} \stackrel{!}{=} H = \frac{\pi}{3\sqrt{10}M_{\text{pl}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} T_{\text{dec}}^2 \\ \iff \sigma \frac{m_{\mathcal{X}}T_{\text{dec}}^2}{\pi^{3/2}} e^{-x_{\text{dec}}} &= \frac{\pi}{3\sqrt{10}M_{\text{pl}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} T_{\text{dec}}^2, \quad \text{con } x \equiv \frac{m_{\mathcal{X}}}{T} \\ \iff e^{-x_{\text{dec}}} &= \frac{\pi^{5/2}}{3\sqrt{10}} \frac{\sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})}}{m_{\mathcal{X}}M_{\text{pl}}\sigma} \\ &= 1.8 \frac{\sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})}}{m_{\mathcal{X}}M_{\text{pl}}\sigma}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $g_{\text{eff}}$  son los grados activos de libertad en nuestro sistema y dependen de la temperatura, por ejemplo, arriba de la escala electrodébil,  $v = 246$  GeV, se tiene  $g_{\text{fermiones}} = 90$  y  $g_{\text{bosones}} = 28$ . Nótese que en el cálculo (2.21) la dependencia explícita en la temperatura decae. Esto significa que el resultado puede considerarse una ecuación para la tasa de  $x_{\text{dec}}$ . Además, si se quiere incluir la dependencia de la temperatura en  $g_{\text{eff}}$ , no se puede resolver esta ecuación, pero se puede estimar el valor de  $x_{\text{dec}}$ , pues se puede usar la sección transversal electrodébil para aniquilación de la ecuación (2.18) para encontrar que

$$e^{-x_{\text{dec}}} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{10}\alpha^2} \frac{c_w^4 m_Z^4}{m_{\mathcal{X}}^3 M_{\text{pl}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})}. \quad (2.22)$$

Además suponemos que la mayoría de las partículas del SM contribuyen a los grados de libertad activos. Se sabe que el número total nos da  $g_{\text{eff}} = 106.75$ . En el, un tanto reducido, rango de  $T_{\text{dec}} = 5, \dots, 80$  GeV, los bosones débiles y los quarks top se desacoplan, por lo que  $g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}}) = 86.25$  también es una buena aproximación. Combinando todos los factores, se encuentra que

$$e^{-x_{\text{dec}}} \approx 6 \cdot 10^5 \frac{m_Z^4}{m_{\mathcal{X}}^3 M_{\text{pl}}} = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-9} & \iff x_{\text{dec}} \approx 20 & (m_{\mathcal{X}} = 10 \text{ GeV}) \\ 6 \cdot 10^{-11} & \iff x_{\text{dec}} \approx 23 & (m_{\mathcal{X}} = 30 \text{ GeV}) \\ 8 \cdot 10^{-12} & \iff x_{\text{dec}} \approx 26 & (m_{\mathcal{X}} = 60 \text{ GeV}). \end{cases} \quad (2.23)$$

Hoy en día la búsqueda de la materia oscura va de los pocos GeV hasta los TeV, en este caso consideramos únicamente regiones de masas pequeñas ( $m_{\mathcal{X}} = 30$  GeV y  $x_{\text{dec}} \approx 23$ ).

Siguiendo la distribución de Boltzmann y la relación (2.22), la temperatura al momento del desacoplamiento nos da el número de partículas no relativistas por unidad de volumen.

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{X}}(T_{\text{dec}}) &= g \left( \frac{m_{\mathcal{X}} T_{\text{dec}}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-x_{\text{dec}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{10}M_{\text{Pl}}} \sqrt{\frac{m_{\mathcal{X}}}{T_{\text{dec}}}} \sqrt{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} T_{\text{dec}}^2 \frac{c_w^4 m_Z^4}{\pi \alpha^2 m_{\mathcal{X}}^2} \\ &\approx 10^3 \frac{m_Z^4}{M_{\text{Pl}}} \left( \frac{T_{\text{dec}}}{m_{\mathcal{X}}} \right)^{3/2} \approx \frac{10^3}{x_{\text{dec}}^{3/2}} \frac{m_Z^4}{m_{\text{Pl}}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En el desacoplamiento no relativista, tenemos que “evolucionar” la densidad de energía hasta el tiempo actual o temperatura  $T_0$ . Se empieza con el hecho de que una vez que la partícula se ha desacoplado, su densidad de número cae como  $1/a^3$ ,

$$\rho_{\mathcal{X}}(T_0) = m_{\mathcal{X}} n_{\mathcal{X}}(T_0) = m_{\mathcal{X}} n_{\mathcal{X}} \left( \frac{a(T_{\text{dec}})}{a(T_0)} \right)^3. \quad (2.25)$$

Para traducir esta dependencia en el factor de escala  $a$  en la temperatura, recuérdese que para entropía constante se puede estimar  $a(T) \sim 1/T$ , por lo que  $a(T)T \sim \text{cte}$ . Si tomamos en cuenta los grados de libertad activos y sus dependencias individuales en la temperatura, entonces la relación es más bien

$$\left( \frac{a(T_{\text{dec}})T_{\text{dec}}}{a(T_0)T_0} \right)^3 = \frac{g_{\text{eff}}(T_0)}{g_{\text{eff}}(T_{\text{dec}})} \approx \frac{3.6}{100} = \frac{1}{28}, \quad (2.26)$$

de nuevo, para  $T_{\text{dec}} > 5$  GeV. Podemos usar este resultado para calcular la densidad de energía no relativista,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{X}}(T_0) &= m_{\mathcal{X}} \left( \frac{a(T_{\text{dec}})T_{\text{dec}}}{a(T_0)T_0} \right)^3 \frac{T_0^3}{T_{\text{dec}}^3} n_{\mathcal{X}}(T_{\text{dec}}) = \frac{x_{\text{dec}}}{28} T_0^3 \frac{n_{\mathcal{X}}(T_{\text{dec}})}{T_{\text{dec}}^2} = T_0^3 \frac{n_{\mathcal{X}}(T_{\text{dec}}) x_{\text{dec}}^3}{28 m_{\mathcal{X}}^2} \\ &\approx 3 \cdot 10^3 \frac{m_Z^4}{m_{\mathcal{X}}^2 M_{\text{Pl}}} T_0^3, \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde en la última aproximación se utilizó la relación (2.24).

Usando este resultado, podemos calcular la densidad de reliquia para la materia oscura con ayuda de la ecuación (2.15),

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{X}} h^2 &= \frac{\rho_{\mathcal{X}}(T_0) h^2}{3M_{\text{Pl}} H_0^2} \approx 3 \cdot 10^3 \frac{m_Z^4}{m_{\mathcal{X}}^2 M_{\text{Pl}}} \frac{(2.4 \cdot 10^{-4})^3 h^2}{(2.5 \cdot 10^{-3})^4 \text{eV}} \approx 3 \cdot 10^3 \frac{7 \cdot 10^7 \text{ GeV}^3}{2 \cdot 10^{18}} \frac{1}{m_{\mathcal{X}}^2} \frac{10^9}{5 \text{ GeV}} \\ &\approx 20 \frac{\text{GeV}^2}{m_{\mathcal{X}}^2} \iff \Omega_{\mathcal{X}} h^2 \approx 0.12 \left( \frac{13 \text{ GeV}}{m_{\mathcal{X}}} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde recordemos que  $h^2 = 0.6741 \pm 0.0062$ . La última aproximación en (2.28) es usualmente llamada el *milagro WIMP*: si se supone que el agente de materia oscura tiene una masa y un proceso de aniquilación electrodébil, i.e., mediado por interacciones débiles, entonces la densidad de reliquia resulta ser la observada.

## 2.2. Ecuación de Boltzmann

Esta y la siguiente sección están basadas en el capítulo 5 del libro [48].

Casi todos los componentes en la historia temprana del universo se encontraban en equilibrio térmico, por lo que una descripción en equilibrio es una buena aproximación. Sin embargo, han habido notables desviaciones de equilibrio térmico como el desacoplamiento de neutrinos, desacoplamiento de la radiación de fondo de microondas, nucleosíntesis primordial, y del lado más especulativo, inflación, bariogénesis y el caso que nos interesa, desacoplamiento de reliquias WIMPs, etc. Las salidas de equilibrio térmico han ocasionado la abundancia de importantes reliquias, elementos de luz, el fondo de neutrinos, el número bariónico neto y reliquias WIMPs.

Un criterio aproximado para que una especie de partículas se encuentren acopladas o desacopladas incorpora la comparación de la tasa de interacción  $\Gamma$  de la partícula, con la tasa de expansión del universo,  $H$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma &\geq H && \text{acoplado,} \\ \Gamma &< H && \text{desacoplado,} \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde  $\Gamma$  es la tasa de interacción (por partícula) de las reacciones que mantienen a la especie en equilibrio térmico. Mientras que las condiciones (2.29) son muy útiles y sorprendentemente precisas, para tratar adecuadamente el desacoplamiento, se debe seguir la evolución microscópica de la función de distribución del espacio fase  $f(p^\mu, x^\mu)$ , la cual es gobernada por la ecuación de Boltzmann que se puede escribir en su forma más general como

$$\hat{L}[f] = C[f], \quad (2.30)$$

donde  $C$  es el operador de colisión y  $\hat{L}$  es el operador de Liouville.

El operador de Liouville no relativista para la densidad de espacio fase  $\rho(\mathbf{v}, \mathbf{x})$  de una especie de partículas de masa  $m$  sujeta a una fuerza  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  es

$$\hat{L}_{\text{NR}} = \frac{d}{dt} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}. \quad (2.31)$$

La generalización relativista y covariante del operador de Liouville es entonces

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}. \quad (2.32)$$

Nótese que, como era de esperarse, efectos gravitacionales entran en la ecuación a través de la conexión afin. Para el modelo de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), la densidad del espacio fase es espacialmente homogénea e isotrópica,  $f = f(|\mathbf{p}|^2, t)$  (o equivalentemente  $f(E, t)$ ).

Para la métrica de FLRW, el operador de Liouville es

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.33)$$

Usando además la definición de densidad de partículas en términos de la densidad del espacio fase

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(E, t). \quad (2.34)$$

Usamos el método de integración por partes, para reescribir la ecuación de Boltzmann como

$$\frac{dn}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p}{E}. \quad (2.35)$$

El término de colisión para el proceso  $\mathcal{X} + a + b + \dots \leftrightarrow i + j + \dots$  está dado por

$$\begin{aligned} & \frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p_{\mathcal{X}}}{E_{\mathcal{X}}} = - \int d\Pi_{\mathcal{X}} d\Pi_a \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \times \delta^4(p_{\mathcal{X}} + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j \dots) \\ & \times \left[ |\mathcal{M}|_{\mathcal{X}+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 f_a f_b \dots f_{\mathcal{X}} (1 \pm f_i)(1 \pm f_b) \dots - |\mathcal{M}|_{i+j+\dots \rightarrow \mathcal{X}+a+\dots}^2 f_i f_j \dots (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) \dots (f \pm f_{\mathcal{X}}) \right], \end{aligned} \quad (2.36)$$

donde  $f_i, f_j, \dots, f_a, f_b$  son las funciones de densidad del espacio fase de las especies  $i, j, \dots, a, b, \dots$  y  $f_{\mathcal{X}}$  es la función de densidad del espacio fase de  $\mathcal{X}$  (la especie cuya evolución nos interesa). El signo positivo aplica para bosones, mientras que el negativo para fermiones y

$$d\Pi \equiv g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E}, \quad (2.37)$$

donde  $g$  cuenta los grados internos de libertad. La delta de dirac 4-dimensional impone conservación de energía y momento y el elemento de la matriz de transición al cuadrado,  $|\mathcal{M}|_{i+j+\dots \rightarrow \mathcal{X}+a+\dots}^2$ , para el proceso  $i + j + \dots \rightarrow \mathcal{X} + a + b \dots$ , es promediado sobre los espines iniciales y finales e incluye los factores simétricos apropiados para partículas idénticas en los estados iniciales o finales.<sup>4</sup>

En el caso más general, la ecuación de Boltzmann resulta en un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales para el espacio fase de todas las especies presentes. Afortunadamente, la materia oscura y las partículas del SM con las que interacciona, tienen, en buena aproximación, una función de distribución del espacio fase en equilibrio debido a su rápida interacción con otras especies, reduciendo el problema a una única ecuación integro-parcial diferencial para la especie de interés (DM), denotada como  $\mathcal{X}$ .

<sup>4</sup>Para un número  $n$  de partículas idénticas de una especie dada en el estado inicial o final,  $1/n!$ . Las reglas para calcular  $|\mathcal{M}|^2$  están dadas en cualquier libro estándar de QFT, e.g., [39].

Hay dos aproximaciones bien motivadas que simplifican enormemente (2.36). La primera de ellas es la suposición de la invariancia T (o CP), que implica

$$|\mathcal{M}|^2 \equiv |\mathcal{M}|_{\mathcal{X}+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 = |\mathcal{M}|_{i+j+\dots \rightarrow \mathcal{X}+a+b+\dots}^2. \quad (2.38)$$

La segunda simplificación es el uso de la estadística de Maxwell-Boltzmann para todas las especies, en lugar de la de Fermi-Dirac para fermiones o Bose-Einstein para bosones.<sup>5</sup>

En la ausencia de condensados de Bose o fermiones degenerados,<sup>6</sup> los factores  $f$  pueden ser ignorados,  $1 \pm f \approx 1$  y  $f_i(E_i) = e^{-(E_i - \mu_i)/T}$  para todas las especies en equilibrio cinético. Con estas dos suposiciones, la ecuación de Boltzmann se puede escribir como

$$\dot{n}_{\mathcal{X}} + 3Hn_{\mathcal{X}} = - \int d\Pi_{\mathcal{X}} d\Pi_a d\Pi_i d\Pi_j \dots (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \times \delta^4(p_i + p_j + \dots - p_{\mathcal{X}} - p_a - p_b \dots) [f_a f_b \dots f_i f_j \dots] \quad (2.39)$$

donde, como en la sección anterior,  $H \equiv \dot{a}/a$ . El término individual es ahora manifiesto, el término  $3Hn_{\mathcal{X}}$  cuenta los efectos de dilución de la expansión del universo y la parte derecha contiene las interacciones que cambia el número de las  $\mathcal{X}$ 's presentes. En ausencia de interacciones, la solución es  $n_{\mathcal{X}} \propto R^{-3}$ .

Finalmente, es usualmente útil escalar el efecto de la expansión del universo considerando la evolución del número de partículas en un volumen comóvil. Esto se logra usando la densidad de entropía,  $s$ , como cantidad fiducial y definiendo como variable independiente  $Y \equiv n_{\mathcal{X}}/s$ . Usando la conservación de entropía por volumen comóvil, se sigue que

$$\dot{n}_{\mathcal{X}} + 3Hn_{\mathcal{X}} = s\dot{Y}. \quad (2.40)$$

Además, como el término de interacción es usualmente dependiente explícito de la temperatura en lugar de el tiempo, es útil introducir la variable independiente  $x \equiv m_{\text{DM}}/T$ , donde  $m_{\text{DM}}$  es la masa de la partícula WIMP.

Durante la época dominada por radiación,  $x$  y  $t$  están relacionados por

$$t = 0.301 g_{\text{eff}}^{-1/2} \frac{m_{\text{Pl}}}{T^2} = 0.301 g_{\text{eff}}^{-1/2} \frac{m_{\text{Pl}}}{m^2} x^2, \quad (2.41)$$

por lo que la ecuación de Boltzmann se puede reescribir como

$$\frac{dY}{dx} = - \frac{x}{H(m)s} \int d\Pi_{\mathcal{X}} d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots (2\pi^4) |\mathcal{M}|^2 \times \delta^4(p_i + p_j + \dots - p_{\mathcal{X}} - p_a - p_b \dots) [f_a f_b \dots f_{\mathcal{X}} - f_i f_j \dots], \quad (2.42)$$

<sup>5</sup>En la ausencia de fermiones degenerados (i.e.,  $\mu_i > T$ ) o de un condensado de Bose, el uso de la estadística de Maxwell-Boltzmann introduce solamente una pequeña corrección, pues las tres distribuciones son muy similares (y mucho menor que uno) para momentos cerca del pico de la distribución. Además, la materia oscura es no relativista y a bajas velocidades la distribución de Maxwell-Boltzmann se vuelve exacta en el límite  $(m_i - \mu_i)/T \gg 1$ .

<sup>6</sup>Un condensado de Bose-Einstein es un gas conformado por bosones que ocupan en su mayoría su mínimo estado de energía, en tal caso el fenómeno cuántico de interferencia se vuelve aparente macroscópicamente. El caso fermiónico es análogo, sin embargo el principio de exclusión de Pauli impide que dos fermiones ocupen el mismo estado cuántico por lo que el condensado se logra por un proceso llamado transición BCS.

donde  $H(m) = 1.67g_*^{1/2} m^2/m_{Pl}$  y  $H(x) = H(m)x^{-2}$ . Ahora se considerarán algunas aplicaciones específicas del formalismo que se ha desarrollado aquí para tratar termodinámica en desequilibrio.

### 2.2.1. Freeze out

Si la WIMP de materia oscura hubiese permanecido en equilibrio térmico hasta el presente, entonces su abundancia,  $n/s \sim (m_{DM}/T)^{3/2} e^{-m_{DM}/T}$ , sería absolutamente despreciable por el factor exponencial. Si la interacción de las partículas WIMP se congela (i.e.,  $\Gamma < H$ ) a una temperatura tal que  $m_{DM}/T$  no es mucho mayor que uno, entonces esta especie de partículas tendrán una densidad de reliquia significativa en el presente, lo cual es justamente lo reportado por la colaboración Planck [22].

Supóngase primero que la WIMP es estable (o de vida media mayor que la edad del universo cuando ocurrió el congelamiento), esto lo veremos más adelante cuando se imponga una simetría  $\mathbb{Z}_2$  al campo que represente a la partícula WIMP. Dado que es estable, solamente procesos de aniquilación y aniquilación inversa ( $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \leftrightarrow \bar{P}P$ ) pueden cambiar el número de  $\mathcal{X}$ 's y  $\bar{\mathcal{X}}$ 's en un volumen comóvil.<sup>7</sup> Aquí  $P$  denota las especies en las cuales  $\mathcal{X}$  se puede aniquilar, por lo general especies del SM, tales como fermiones y/u otras partículas del sector oscuro.

También se supondrá que todas las especies  $P$  y  $\bar{P}$  en las que  $\mathcal{X}$  y  $\bar{\mathcal{X}}$  se aniquilan, tienen distribuciones térmicas con cero potencial químico. Como estas partículas  $P$  tendrán usualmente interacciones entre sí que son más “fuertes” que las interacciones con  $\mathcal{X}$ 's, la suposición de equilibrio para las  $P$ 's es muy buena. Consideremos ahora el término  $[f_{\mathcal{X}}f_{\bar{\mathcal{X}}} - f_Pf_{\bar{P}}]$  del término de colisión en la ecuación de Boltzmann (2.42). Como  $P$  y  $\bar{P}$  se encuentran en equilibrio térmico (y por simplicidad suponemos que poseen potencial químico cero),<sup>8</sup> entonces

$$\begin{aligned} f_P &= e^{-E_P/T}, \\ f_{\bar{P}} &= e^{-E_{\bar{P}}/T}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

La parte energética de la función  $\delta$  asegura que  $E_{\mathcal{X}} + E_{\bar{\mathcal{X}}} = E_P + E_{\bar{P}}$ , de tal forma que

$$f_Pf_{\bar{P}} = e^{-(E_P+E_{\bar{P}})/T} = e^{-(E_{\mathcal{X}}+E_{\bar{\mathcal{X}}})} = f_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}}f_{\bar{\mathcal{X}}}^{\text{EQ}}, \tag{2.44}$$

como  $f_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}} \equiv e^{-E_{\mathcal{X}}/T}$  y  $f_{\bar{\mathcal{X}}}^{\text{EQ}} \equiv e^{-E_{\bar{\mathcal{X}}}/T}$ . Entonces, se sigue que

$$[f_{\mathcal{X}}f_{\bar{\mathcal{X}}} - f_Pf_{\bar{P}}] = [f_{\mathcal{X}}f_{\bar{\mathcal{X}}} - f_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}}f_{\bar{\mathcal{X}}}^{\text{EQ}}]. \tag{2.45}$$

Ahora, el término de interacción se puede escribir en términos de  $n_{\mathcal{X}}$ , el cual es la cantidad de partículas de  $\mathcal{X}$  por unidad de volumen, y en  $n_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}}$ , el cual es la densidad de partículas de  $\mathcal{X}$  en

<sup>7</sup>Por simplicidad solamente consideraremos procesos  $2 \leftrightarrow 2$  de creación y aniquilación.

<sup>8</sup>Mientras que la ecuación de Boltzmann es explícitamente covariante, especificar la función distribución de partículas destaca un marco -el comóvil- y rompe la covarianza. Una vez que se ha realizado esto, todas las cantidades deben ser evaluadas en este marco.

equilibrio, como

$$\frac{dn_{\mathcal{X}}}{dt} + 3Hn_{\mathcal{X}} = -\langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle \left[ n_{\mathcal{X}}^2 - (n_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}})^2 \right] \quad (2.46)$$

o

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-x \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle}{H(m)s} (Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2), \quad (2.47)$$

donde  $Y \equiv n_{\mathcal{X}}/s = n_{\bar{\mathcal{X}}}$ , es el número de partículas  $\mathcal{X}$  y  $\bar{\mathcal{X}}$  por unidad de volumen y  $Y_{\text{EQ}} \equiv n_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}}/s = n_{\bar{\mathcal{X}}}^{\text{EQ}}/s$  es número de partículas  $\mathcal{X}$  y  $\bar{\mathcal{X}}$  en *equilibrio* por unidad de volumen.

Además, la sección transversal de aniquilación veces la velocidad promediada térmicamente está dada por [48]

$$\langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle = \left( n_{\mathcal{X}}^{\text{EQ}} \right)^{-2} \int d\Pi_{\mathcal{X}} d\Pi_{\bar{\mathcal{X}}} d\Pi_P d\Pi_{\bar{P}} (2\pi)^4 \times \delta^4(p_{\mathcal{X}} + p_{\bar{\mathcal{X}}} - p_{\bar{P}} - p_P) |\mathcal{M}|^2 e^{-E_{\mathcal{X}}/T} e^{-E_{\bar{\mathcal{X}}}/T}. \quad (2.48)$$

En la literatura también se puede encontrar la fórmula en términos del canal  $s = (p+p')^2 = (k+k')^2$  [49],

$$\langle \sigma |\mathbf{v}| \rangle = \frac{1}{8m_{\mathcal{X}}^4 T k_2^2(m_{\mathcal{X}}/T)} \int_{4m_{\mathcal{X}}^2}^{\infty} \sigma(s - 4m_{\mathcal{X}}^2) \sqrt{s} K_1(\sqrt{s}/T) ds. \quad (2.49)$$

donde también es común encontrar la expansión

$$\langle \sigma |\mathbf{v}| \rangle = \langle a + b |\mathbf{v}|^2 + c |\mathbf{v}|^4 + \dots \rangle = a + \frac{3}{2} b x^{-1} + \frac{15}{8} c x^{-2} + \dots \quad (2.50)$$

Por otro lado, en la región no relativista ( $x \gg 3$ ) y en la región relativista ( $x \ll 3$ ), la distribución para las partículas  $\mathcal{X}$  tienen la siguiente forma [48]

$$Y_{\text{EQ}} = n_{\text{EQ}}/s = \frac{45}{2\pi^4} \left( \frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x} \quad (x \gg 3), \quad (2.51)$$

$$Y_{\text{EQ}} = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} \quad (x \ll 3),$$

donde  $g_{\text{eff}} = g$  para bosones y  $g_{\text{eff}} = 3g/4$  para fermiones. En el caso en que la DM fuera una WIMP, entonces sería *no* relativista, así que nos restringiremos al caso  $x \gg 3$ .

Recordando que  $H \propto x^{-2}$ , de tal manera que  $H(T) = x^{-2}H(m)$ , entonces podemos reescribir (2.47) en la siguiente forma sugerente,

$$\frac{x}{Y_{\text{EQ}}} \frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma}{H} \left[ \left( \frac{Y}{Y_{\text{EQ}}} \right)^2 - 1 \right], \quad \Gamma \equiv n_{\text{EQ}} \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle. \quad (2.52)$$

El cambio de número de partículas  $\mathcal{X}$  por volumen comóvil es controlado por el factor  $\Gamma/H$ , el cual está multiplicado por una desviación de equilibrio. Es entonces claro que cuando  $\Gamma/H < 1$ , el cambio relativo en el número de  $\mathcal{X}$ 's en un volumen comóvil se hace pequeño, i.e.,

$$-\frac{\Delta Y}{Y} \sim -\frac{x}{Y_{\text{EQ}}} \frac{dY}{dx} \sim \frac{\Gamma}{H} < 1 \quad (2.53)$$

y las aniquilaciones se “congelan”. Obsérvese que la ecuación de Boltzmann para la evolución de la abundancia de una especie de partículas, es una forma particular de ecuación de Riccati, para la cual no existe solución analítica, esto significa que se tendrá que realizar alguna aproximación. Primero observamos que la tasa de aniquilación  $\Gamma$  varía como  $n_{\text{EQ}} \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle$  y en la región relativista,  $n_{\text{EQ}} \sim T^3$  y como es de esperarse,  $\Gamma$  siempre varía en potencias de  $T$ . En la aproximación no relativista,  $n_{\text{EQ}} \sim (m_{\mathcal{X}} T)^{3/2} e^{-m_{\mathcal{X}}/T}$ , de tal forma que  $\Gamma$  decrece exponencialmente. En cualquier régimen,  $\Gamma$  decrece cuando  $T$  lo hace y así eventualmente la aniquilación se vuelve despreciable, digamos, ocurre en  $x = x_f$ . A este evento se le conoce como congelamiento o “freeze-out” por sus siglas en inglés. De esta forma, se espera que para  $x < x_f$ , se cumpla que  $Y \simeq Y_{\text{EQ}}$ .

Es útil parametrizar la dependencia de la temperatura de la sección transversal para aniquilación. Teóricamente la sección transversal de aniquilación debe tener una dependencia en la velocidad,  $\sigma |\mathbf{v}| \propto v^p$ , donde  $p = 0$  corresponde a aniquilación denominada *s-wave* y para  $p = 2$  a aniquilación denominada *p-wave*, etc. Como  $\langle v \rangle \sim T^{1/2}$ ,  $\langle \sigma |\mathbf{v}| \rangle \propto T^n$ ,  $n = 0$  para aniquilación *s-wave* y  $n = 1$  para *p-wave*, etc. Por lo tanto, parametrizamos a  $\langle \sigma |\mathbf{v}| \rangle$  como

$$\langle \sigma |\mathbf{v}| \rangle \equiv \sigma_0 (T/m_{\mathcal{X}})^n = \sigma_0 x^{-n} \quad (\text{con } x > 3). \quad (2.54)$$

Con esta parametrización, la ecuación de Boltzmann para la abundancia de  $\mathcal{X}$  se convierte en,

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-n-2} (Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2), \quad \lambda \equiv \left[ \frac{x \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} |\mathbf{v}| \rangle s}{H(m)} \right]_{x=1} = 0.264 (g_{*s}/g_*^{1/2}) m_{\text{Pl}} m_{\mathcal{X}} \sigma_0, \quad (2.55)$$

donde  $Y_{\text{EQ}}$  está dado por (2.51) para el caso no relativista ( $x \gg 3$ ) y esta ecuación diferencial se puede resolver de forma aproximada pero con gran exactitud.

Para empezar, considérese la ecuación diferencial para  $\Delta' = -Y'_{\text{EQ}} - \lambda x^{-n-2} \Delta (2Y_{\text{EQ}} + \Delta)$ , donde la prima denota  $d/dx$ . A tiempos tempranos ( $1 < x \ll x_f$ ),  $Y$  sigue el mismo comportamiento que  $Y_{\text{EQ}}$  muy de cerca y tanto  $\Delta$  como  $|\Delta'|$  son pequeños, de tal forma que una solución aproximada se obtiene al suponer  $\Delta' = 0$ ,

$$\Delta \simeq -\lambda^{-1} x^{n+2} Y'_{\text{EQ}} / (2Y_{\text{EQ}} + \Delta) \simeq x^{n+2} / 2\lambda. \quad (2.56)$$

A tiempos más avanzados ( $x \gg x_f$ ),  $Y$  deja de comportarse como  $Y_{\text{EQ}}$ ,  $\Delta \simeq Y \gg Y_{\text{EQ}}$  y los términos que involucran  $Y'_{\text{EQ}}$  y  $Y_{\text{EQ}}$  se pueden ignorar, del tal forma que,

$$\Delta' = -\lambda x^{-n-2} \Delta^2. \quad (2.57)$$

La solución en infinito se obtiene integrando (2.55) de  $x = x_f$  a  $x = \infty$ ,

$$Y_{\infty} = \Delta_{\infty} = \frac{n+1}{\lambda} x_f^{n+1}. \quad (2.58)$$

Ahora debemos determinar  $x_f$ , recuérdese que  $x = x_f$  es el tiempo en el que  $Y$  deja de seguir el comportamiento de  $Y_{\text{EQ}}$ , o equivalentemente, cuando  $\Delta$  se convierte del orden de  $Y_{\text{EQ}}$ . Definiendo

$x_f$  por el criterio,  $\Delta(x_f) = cY_{\text{EQ}}(x_f)$ ,  $c = cte$  del orden de la unidad, entonces la solución para tiempos tempranos de (2.55) se convierte en  $\Delta(x_f) \simeq x_f^{n+2}/\lambda(2+c)$  y el criterio de congelamiento nos da

$$x_f \simeq \ln[(2+c)\lambda ac] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln[\ln[(2+c)\lambda ac]] , \quad (2.59)$$

donde  $a = 0.145(g/g_{*s})$ . Escogiendo  $c(c+2) = n+1$  nos da el mejor ajuste numérico para la abundancia final  $Y_\infty$ . Con esta elección

$$x_f = \ln[0.038(n+1)(g/g_*^{1/2})M_{\text{Pl}}m_{\mathcal{X}}\sigma_0] - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \ln[0.038(n+1)(g/g_*^{1/2})M_{\text{Pl}}m_{\mathcal{X}}\sigma_0] , \quad (2.60)$$

$$Y_\infty = \frac{3.79(n+1)x_f^{n+1}}{(g_{*s}/g_*^{1/2})M_{\text{Pl}}m_{\mathcal{X}}\sigma_0} . \quad (2.61)$$

De esta forma, tanto la densidad de partículas  $\mathcal{X}$ , como su densidad de reliquia son fáciles de calcular,

$$n_{\mathcal{X}} = s_0 Y_\infty = 2970 Y_\infty \text{ cm}^{-3} = 1.13 \cdot 10^4 \frac{(n+1)x_f^{n+1}}{g_{*s}/g_*^{1/2} M_{\text{Pl}} m_{\mathcal{X}} \sigma_0} \text{ cm}^{-3} \quad (2.62)$$

$$\Omega_{\mathcal{X}} h^2 = 1.07 \cdot 10^9 \frac{x_f}{\sqrt{g_*} M_{\text{Pl}} m_{\mathcal{X}} \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} | \mathbf{v} | \rangle} \text{ GeV}^{-1} , \quad (2.63)$$

donde se ha usado  $n = 0$ .

Es importante destacar que la densidad de reliquia es inversamente proporcional a la sección transversal promediada térmicamente, tal y cómo se observa en la ecuación anterior, pues

$$Y_\infty = \frac{3.79(n+1)(g_*^{1/2}/g_{*s})x_f}{m_{\mathcal{X}} M_{\text{Pl}} \langle \sigma_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow P\bar{P}} | \mathbf{v} | \rangle} . \quad (2.64)$$

Entonces a menor sección eficaz, mayor densidad de reliquia. En el siguiente capítulo se verá que la aniquilación de materia oscura puede ocurrir a través del campo de Higgs en modelos denominados *Portales de Higgs*.

El valor observado de densidad de reliquia de materia oscura está dado en la lista de datos de *Planck* 2018, en esta tesis se usa el dato de TT, TE, EE+lowE (el método de likelihood es CamSpec para este caso) [22] ,

$$\Omega_{\text{CDM}} h^2 = 0.1196 \pm 0.0014 , \quad (2.65)$$

donde CDM denota “Cold Dark Matter”. Si la materia oscura fuera una partícula, entonces (2.65) nos dice que el SM se encuentra incompleto, por lo que se tiene que extender para tomarla en cuenta. Como ya se había discutido al inicio de esta tesis, se abordarán candidatos de DM como WIMPs, con modelos específicos de teoría de campos y la construcción experimental con la que se ponen a prueba estos modelos es la densidad de reliquia (2.65). De este modo, los modelos que se presentarán en la siguiente sección serán comparados con este valor.

## Capítulo 3

# El Higgs y la materia oscura

Como ya se ha discutido previamente en este trabajo, determinar la naturaleza de la materia oscura sigue siendo una pregunta abierta en la física de partículas. Suponiendo que su es una partícula, entonces a pesar del innegable éxito del SM, éste se encuentra incompleto porque justamente no puede explicar (entre algunos otros problemas) la existencia de la DM.

En los modelos conocidos como portales de Higgs (el término se acuñó en [50]), las WIMPs de materia oscura interactúan con las partículas del modelo estándar únicamente a través del bosón de Higgs. Estos modelos son atractivos ya que todas las interacciones del Modelo Estándar están asociadas a interacciones renormalizables y el Higgs posee un lugar privilegiado en el SM por ser el único operador 4-dimensional renormalizable e invariante de Lorentz.

En este capítulo revisaremos primero el modelo más sencillo y ampliamente estudiado que consiste en agregar una partícula escalar real (sin espín),  $S$ , a aquellas del SM, usando solamente interacciones renormalizables. Para asegurar que las interacciones entre  $S$  y las partículas del SM sean suficientemente débiles, suponemos que la partícula nueva es completamente neutra bajo los grupos de norma del SM. Posteriormente se estudiará un modelo más interesante donde el sector oscuro consiste en un campo escalar  $S$  y un campo de Dirac fermiónico  $\mathcal{X}$ , los cuales son singuletes de norma en el SM.

### 3.1. Candidato escalar

Primero discutiremos la mínima modificación al SM que podemos explicar como materia oscura por ser el caso más sencillo y el cual consiste en agregar una única especie de partículas nuevas sin espín,  $S$ , a aquellas del SM. A diferencia de si se agregan singuletes de partículas con espín  $1/2$  o espín  $1$ , es posible para un singulete escalar tener *tanto* autointeracciones como interacciones renormalizables con los campos del SM.

Podemos también preguntarnos cuáles son las características con las que debe contar cualquier modelo de DM. Es claro que una de las principales propiedades que se requieren es la estabilidad

de la nueva partícula, sugiriendo que el campo  $S$ , representante de tales partículas, aparezca en el Lagrangiano en potencias pares, de tal forma que su decaimiento no está permitido.

Consideremos entonces el siguiente Lagrangiano [25]

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{2}(\partial_\mu S)^2 - \frac{\mu_S^2}{2}S^2 - \frac{\lambda_S}{4}S^4 - \lambda S^2 H^\dagger H, \quad (3.1)$$

donde  $H$  y  $\mathcal{L}_{\text{SM}}$  denotan el doblete de Higgs (1.97) y el Lagrangiano del SM respectivamente.  $S$  es un escalar real neutro bajo los grupos de norma del SM. Suponemos aquí que  $S$  es el nuevo grado de libertad relevante en la escala electrodébil, permitiendo despreciar los acoplamientos no renormalizables en el Lagrangiano (3.1), el cual contiene todas las posibles interacciones renormalizables consistentes con la simetría  $S \rightarrow -S$ . En este marco, de (3.1) notamos que las propiedades del campo  $S$  están descritas por tres parámetros. Dos de estos,  $\lambda_S$  y  $\mu_S$ , son internos al sector  $S$ .  $\lambda_S$  puede ser escogido arbitrariamente, solamente se tiene que suponer que es lo suficientemente pequeño para permitir un análisis perturbativo. Acoplamientos con los campos del SM son controlados por el parámetro  $\lambda$ .

Después del rompimiento de simetría electrodébil, i.e., haciendo  $h' = h + v$  como en la sección 1.6, el potencial del Lagrangiano anterior se reescribe como

$$V(h, S) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\lambda v^2 + \mu_S^2)S^2 + \frac{\lambda_S}{4}S^4 + \frac{\lambda}{4}S^2 h^2 + \frac{\lambda}{2}vS^2 h. \quad (3.2)$$

Notemos que el último término permite la aniquilación de materia oscura a través del campo de Higgs. Suponiendo que las partículas  $S$  se encuentran en equilibrio térmico en el universo temprano, podemos usar el formalismo del capítulo anterior para obtener la densidad de reliquia (2.63) para este modelo. Para calcular  $\langle \sigma v \rangle$  es necesario conocer los modos de aniquilación de  $S$ . La matriz de transición para el proceso  $SS \rightarrow \bar{f}f$  basada en el portal de Higgs es dominada por el canal  $s$  y es descrita por el diagrama 3.1. Los momentos de  $S$  son entrantes por definición, dándonos para un fermión-antifermión saliente la matriz

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(k_2) \frac{-im_f}{v} v(k_1) \frac{-i}{(k_1 + k_2)^2 - m_H^2 + im_H \Gamma_H} (-i\lambda v), \quad (3.3)$$

donde  $\Gamma_H$  es el ancho de decaimiento de la partícula en el propagador, en este caso el Higgs  $h$ , e incluye todos los posibles decaimientos de la partícula. Por ejemplo, para el caso de fermiones observables

$$= \frac{-im_f}{v} v^s(k_2) \bar{u}^{s'}(k_1). \quad (3.4)$$

Entonces la suma sobre todos los espines del cuadrado de la matriz de transición es

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2 = \lambda^2 m_f^2 \left( \sum_{\text{espín}} \bar{v}(k_1) v(k_1) \right) \left( \sum_{\text{espín}} \bar{u}(k_2) u(k_2) \right) \frac{1}{[(k_1^2 + k_2^2)^2 - m_H^2]^2 + m_H^2 \Gamma_H^2} \quad (3.5)$$

y usando las relaciones (1.47) y (1.48),

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2 = \lambda^2 m_f^2 \text{Tr}[(\gamma \cdot k_1 - m_f)(\gamma \cdot k_2 + m_f)] \frac{1}{[(k_1^2 + k_2^2)^2 - m_H^2]^2 + m_H^2 \Gamma_H^2}. \quad (3.6)$$

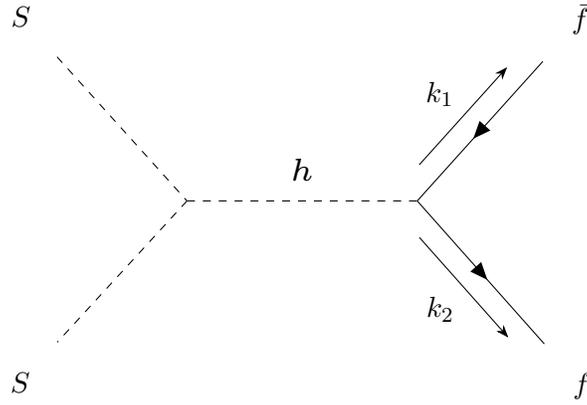


Figura 3.1: Diagrama de Feynman para el proceso  $SS \rightarrow \bar{f}f$ , donde  $k_2$  y  $k_1$  son los momentos del fermión y antifermión observables respectivamente. Varios canales de aniquilación están abiertos o son prohibidos dependiendo del valor de  $2m_S$ . En los diagramas de Feynman de este capítulo el eje temporal corresponde al horizontal.

Se sabe que  $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$ ,  $\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$ , usando estas relaciones para simplificar la expresión anterior,  $\text{Tr}[(\gamma \cdot k_1 - m_f)(\gamma \cdot k_2 + m_f)] = 4(k_1 \cdot k_2 - m_f^2)$  y en el sistema de referencia del centro de masa, se satisface lo siguiente

$$s = 4E^2 = (k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cdot k_2 \implies k_1 \cdot k_2 = 2E^2 - m_f^2, \quad E = \frac{E_{\text{CM}}}{2}, \quad (3.7)$$

así, podemos simplificar la suma del cuadrado de la matriz de transición,

$$\sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}|^2 = 8\lambda^2 m_f^2 \frac{E^2 (1 - m_f^2/E^2)}{[(k_1 + k_2)^2 - m_H^2]^2 + m_H^2 \Gamma_H^2}. \quad (3.8)$$

Para calcular la sección transversal y la tasa de decaimiento, se usan las siguientes formulas [39],

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{CM}} = \frac{1}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \frac{|\mathbf{p}_1|}{(2\pi^2)4E_{\text{CM}}} |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_1, p_2)|^2, \quad (3.9)$$

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left( \prod_f \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_A \rightarrow p_f)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f). \quad (3.10)$$

Además, la materia oscura es no relativista, por lo que podemos hacer la aproximación  $E \approx m_S$ . De esta forma, integrando sobre todo el ángulo solido  $\int d\Omega = 4\pi$ , podemos calcular la sección transversal para su aniquilación,

$$\sigma_S = \frac{\lambda^2 m_f^2}{4\pi v_r} \frac{(1 - m_f^2/m_S^2)^{3/2}}{(4m_S^2 - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2}, \quad (3.11)$$

así como la tasa de decaimiento usando (3.10),

$$\Gamma_{H \rightarrow \bar{f}f} = \frac{m_S^2 m_f^2}{2\pi v^2 m_H} \sqrt{1 - 4 \frac{m_f^2}{m_H^2}} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_S^2}\right), \quad (3.12)$$

donde la velocidad relativa en el límite no relativista es  $v_r = |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ .

Promediando térmicamente [51],

$$\langle \sigma v_r \rangle = \frac{\int dv_r v_r^2 (\sigma v_r) e^{-v_r^2/4y}}{\int dv_r v_r^2 e^{-v_r^2/4y}}, \quad (3.13)$$

donde  $y = x^{-1}$ . Nótese que  $\sigma v_r$  no depende de la velocidad relativa  $v_r$ , pues hemos realizado la aproximación no relativista  $E \approx m_S$ ,

$$\langle \sigma_S v_r \rangle = \frac{\lambda^2 m_f^2}{4\pi} \frac{(1 - m_f^2/m_S^2)^{3/2}}{(4m_S^2 - m_H^2)^2 + m_H^2 \Gamma_H^2}, \quad (3.14)$$

la cual depende únicamente de  $m_S$  y  $\lambda$  y nos interesa encontrar aquellos puntos  $(m_S, \lambda)$  que mantengan la densidad de reliquia igual a la observada por Planck [22]. Al conjunto de puntos que cumplen con esta condición se le denomina “espacio de parámetros”. Para calcular la densidad de reliquia (2.63) de este modelo usamos el software libre micrOMEGAs [37] y se obtuvo el espacio de parámetros de la figura 3.2. El programa calcula la sección transversal promediada térmicamente a nivel árbol con la ecuación (2.49) y resuelve la ecuación diferencial de Boltzmann (2.47) numéricamente. Por ejemplo, para  $(m_S, \lambda) = (70.64 \text{ GeV}, 0.058)$  se obtuvieron los datos mostrados en la figura 3.3.

Este modelo, por ser el más sencillo, el primero propuesto históricamente y haber sido ya ampliamente estudiado, se encuentra precargado en el programa, por lo que otras contribuciones,

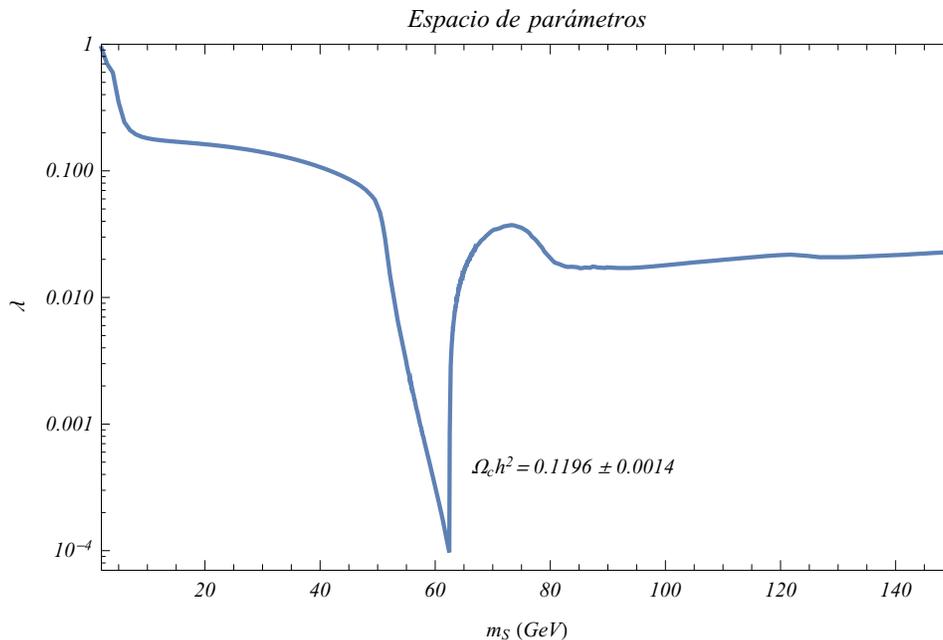


Figura 3.2: Puntos en el espacio  $(m_S, \lambda)$  que dan el valor experimental de densidad de reliquia  $\Omega_c h^2 = 0.1196 \pm 0.0014$ . En  $m_S = m_H/2$  encontramos la resonancia del Higgs. Masas cercanas a este valor requieren que el acoplamiento cuártico  $\lambda$  sea muy pequeño. En la siguiente sección veremos que si hay dos *Higgses*, entonces habrá una resonancia correspondiente a cada una de sus masas.

tales como  $SS \rightarrow W^-W^+, ZZ, gg, \dots$ , también son tomadas en cuenta. La figura 3.2 es bien conocida en la literatura y la podemos encontrar, e.g., en [25, 26]. Nótese que cerca del polo  $m_S \approx m_H/2$  el acoplamiento se hace pequeño hasta el orden de  $\lambda \sim 10^{-4}$  como es de esperarse para que (3.14) permanezca constante.

Para DM más pesada y lejos del polo de Higgs, contribuciones de partículas más pesadas como  $t\bar{t}, \tau^+\tau^-, HH, \dots$  se vuelven relevantes. Además se puede asegurar que hasta el orden  $m_S \sim 1$  TeV el acoplamiento  $\lambda < 1$ , por lo que se preserva perturbatividad, lo que hizo muy atractivo a este modelo desde sus inicios. El modelo se encuentra además sujeto a constricciones experimentales y observacionales. Estos incluyen límites de detectores directos [52, 53], búsquedas indirectas [54, 55], así como cotas de colisionadores [56, 57].

Sin embargo, el espacio de parámetros de este modelo se encuentra ya agotado, quedando solo por explorar regiones de masa más pesada del orden de TeV. Dado el poco éxito que ha tenido en la búsqueda experimental y en las observaciones, se ha intentado, e.g., ampliar el espacio de parámetros incluyendo las contribuciones a un lazo para el diagrama 3.2 [58] o ampliar el modelo incluyendo otro candidato escalar  $S_2$  [27].

En la siguiente sección estudiaremos a un candidato fermiónico con un mediador escalar que se

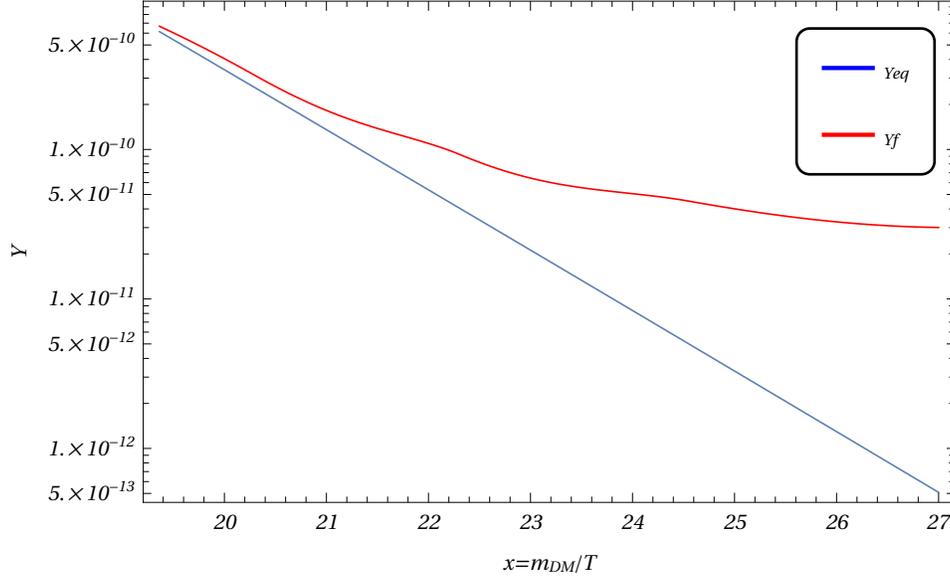


Figura 3.3: Solución de la ecuación de Boltzmann para  $(m_S, \lambda) = (70.64 \text{ GeV}, 0.058)$ .  $Y_f$  es la solución de la ecuación de Boltzmann (2.47) y  $Y_{\text{eq}}$  está dado por (2.51) en el caso  $x \gg 3$ . Nótese que  $Y_{\text{eq}}(\infty)$  tiende a cero, mientras que  $Y_f(\infty) \propto 10^{-11}$ . El dominio  $x \in [19.36, 27]$  está dado automáticamente por el programa, pues se sabe que la materia oscura es no relativista (caso  $x \gg 3$  de (2.51)) y que el congelamiento ocurre alrededor de  $x = 20$ . Obsérvese que para  $x = 19$ ,  $Y_f \approx Y_{\text{eq}}$  y en el congelamiento las curvas se separan, dándonos una abundancia distinta de cero para la partícula  $S$  para un tiempo lo suficientemente grande.

acopla débilmente con el SM a través del campo de Higgs  $H$  como en el potencial del Lagrangiano (3.1).

### 3.2. Singulete fermiónico

Con la finalidad de explicar la existencia de la materia oscura identificada mediante observaciones gravitacionales, nuestro modelo de partículas incluye los siguientes elementos adicionales a los del SM:

- un fermión de Dirac  $\mathcal{X}$  invariante bajo las simetrías del SM, que da lugar a la partícula que consideramos candidata a materia oscura,
- un singulete escalar real  $S$ , también invariante bajo las simetrías del SM, que se acopla al campo (escalar complejo) de Higgs  $H$  y al candidato a materia oscura  $\mathcal{X}$ ,
- una simetría  $\mathbb{Z}_2$  bajo la cual sólo el campo  $S$  se transforma como  $S \rightarrow -S$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Es común en la literatura (e.g. [28]) desarrollar este modelo sin imponer esta simetría. Por supuesto, el análisis

Los acoplamientos de  $S$  con el Higgs y  $\mathcal{X}$  establecen un puente entre el sector oscuro y el del SM, el frecuentemente llamado *portal de Higgs*. El Lagrangiano de este modelo es

$$\mathcal{L} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{X}} i \not{\partial} \mathcal{X} + \frac{1}{2} (\partial_\mu S)^2 - \frac{1}{2} \mu_{\mathcal{X}} \bar{\mathcal{X}} \mathcal{X} - \frac{\kappa}{\Lambda} \bar{\mathcal{X}} \mathcal{X} S^2 - \sum_f \frac{g_f}{\sqrt{2}} \bar{f} H f - V(H, S), \quad (3.15)$$

donde  $\kappa$  es un parámetro arbitrario y  $\Lambda$  puede considerarse la escala de una teoría más fundamental de la que podría surgir este modelo<sup>2</sup> tal como la de la teoría de cuerdas o una teoría de gran unificación, en este trabajo fijaremos  $\Lambda = 10$  TeV, motivado por teorías de supersimetría buscadas en el LHC, tales como [59]. Además,  $f$  denota a los fermiones del Modelo Estándar y el potencial  $V(H, S)$  contiene los acoplamientos entre el campo de Higgs y el campo escalar real  $S$ , dado por

$$V(H, S) = \lambda_H (H^\dagger H)^2 + \frac{\lambda_S}{4} S^4 + \lambda_{HS} (H^\dagger H) S^2 + \mu_H^2 H^\dagger H + \frac{\mu_S^2}{2} S^2. \quad (3.16)$$

Notemos que si  $\mu_H^2, \mu_S^2 < 0$ ;  $\lambda_H, \lambda_S > 0$ , hay puntos críticos del potencial diferentes de  $V(0, 0) = 0$ . Trabajamos el doblete de Higgs en la norma unitaria, entonces podemos reescribir el potencial como

$$V(h', S) = \frac{\lambda_H}{4} h'^4 + \frac{\lambda_S}{4} S^4 + \frac{\lambda_{HS}}{4} h'^2 S^2 + \frac{\mu_H^2}{2} h'^2 + \frac{\mu_S^2}{2} S^2. \quad (3.17)$$

Por otro lado, para producir las masas de los bosones  $W$  y  $Z$ ,  $h'$  debe obtener un VEV,  $\langle h' \rangle \simeq 246.2$  GeV, y consideramos el caso en el que  $S$  adquiere también un VEV distinto de cero (por eso se tomó  $\mu_S^2 < 0$ ). Para encontrar los puntos críticos primero calculamos el gradiente del potencial e igualamos a cero,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h'} &= \lambda_H h'^3 + \frac{\lambda_{HS}}{2} h' S^2 + \mu_H^2 h' = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= \lambda_S S^3 + \frac{\lambda_{HS}}{2} h'^2 S + \mu_S^2 S = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

se vuelve más complejo pues se tienen tadpoles los cuales podrían generar partículas en gran número en el universo temprano “de la nada” y conducen a una constante cosmológica muy grande. Sin embargo, sería posible deshacerse del término lineal y cúbico haciendo una redefinición del campo escalar  $S \rightarrow S' = S + a$ , donde  $a$  es una constante arbitraria (e.g. el VEV de  $S$ ). Si  $V(S) = \mu_1^3 S + \frac{1}{2} \mu_S^2 S^2 + \frac{1}{3} \mu_3 S^3 + \frac{\lambda_S}{4} S^4$ , entonces  $V(S') = V(S + a) \supset (\mu_1^3 + \mu_S^2 a + \mu_3 a^2 + \lambda_S a^3) S + (\frac{1}{3} \mu_3 + \lambda_S a) S^3$ , por lo que basta con imponer  $\mu_1^3 + \mu_S^2 a + \mu_3 a^2 + \lambda_S a^3 = 0 = \frac{1}{3} \mu_3 + \lambda_S a$  y esto fijaría algunos parámetros pero el análisis del espacio de parámetros seguiría siendo más complicado que el del caso con simetría  $\mathbb{Z}_2$ . En [29] se realiza un estudio del espacio de parámetros para ese modelo considerando una WIMP ligera de hasta 30 GeV. La ventaja de imponer  $\mathbb{Z}_2$  al mediador escalar desde un inicio es que se abre la puerta para explorar la posibilidad de tener dos componentes DM, una proveniente de  $\mathcal{X}$  y la otra de  $S$ .

<sup>2</sup>Términos de la forma  $S^2 \bar{\mathcal{X}} \mathcal{X}$  son no renormalizables ya que  $\kappa/\Lambda$  debe tener unidades de  $[\text{masa}]^{-1}$ , por esta razón  $\Lambda/\kappa \ll 1$  GeV<sup>-1</sup> y después de que  $S$  adquiere un VEV, aparecerán los términos lineales en  $S$  que nos interesan y que sí son renormalizables. Tomamos  $\kappa$  adimensional, por lo que  $[\Lambda] = [\text{masa}]$ .

Descartamos la solución trivial  $h' = 0$ ,  $S = 0$ ,<sup>3</sup> por lo que se tiene el sistema de ecuaciones

$$\lambda_H h'^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} S^2 + \mu_H^2 = 0, \quad \lambda_S S^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} h'^2 + \mu_S^2 = 0, \quad (3.19)$$

nótese que si  $\lambda_{HS} = 0$ , entonces se tiene la solución  $\langle h' \rangle = \pm \sqrt{\frac{-\mu_H^2}{\lambda_H}}$ ,  $\langle S \rangle = \pm \sqrt{\frac{-\mu_S^2}{\lambda_S}}$  como en (1.67). Si consideramos el caso  $\lambda_{HS} \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} h'^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2\lambda_H} S^2 + \frac{\mu_H^2}{\lambda_H} &= 0, \\ h'^2 + \frac{2\lambda_S}{\lambda_{HS}} S^2 + \frac{2\mu_S^2}{\lambda_{HS}} &= 0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

restamos las ecuaciones y despejamos para  $S^2$ ,

$$\langle S \rangle^2 = \frac{\frac{\mu_H^2}{\lambda_H} - \frac{2\mu_S^2}{\lambda_{HS}}}{\frac{2\lambda_S}{\lambda_{HS}} - \frac{\lambda_{HS}}{2\lambda_H}} = \frac{2\lambda_{HS}\mu_H^2 - 4\lambda_H\mu_S^2}{4\lambda_S\lambda_H - \lambda_{HS}^2} \equiv w^2, \quad (3.21)$$

y análogamente

$$\langle h' \rangle^2 = \frac{2\lambda_{HS}\mu_S^2 - 4\lambda_S\mu_H^2}{4\lambda_H\lambda_S - \lambda_{HS}^2} \equiv v^2. \quad (3.22)$$

Por otro lado, los elementos de la matriz de masa son las segundas derivadas parciales del potencial:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h'^2} \right|_{v,w} &= 3\lambda_H v^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} w^2 + \mu_H^2 = 2\lambda_H v^2; \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right|_{v,w} &= 3\lambda_S w^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} v^2 + \mu_S^2 = 2\lambda_S w^2; \\ \left. \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial h'} \right|_{v,w} &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial h' \partial S} \right|_{v,w} = \lambda_{HS} v w. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo que la matriz de masas para este modelo es

$$\mathcal{M}^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_H v^2 & \lambda_{HS} v w \\ \lambda_{HS} v w & 2\lambda_S w^2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Esta matriz no está diagonalizada pues tiene el término cruzado  $\lambda_{HS} v w$ . Para deshacernos de este término, es necesario diagonalizar la matriz y es necesario que los eigenvalores sean reales positivos, i.e., que la matriz sea positiva definida.

<sup>3</sup>También existen las soluciones  $h' \neq 0$  con  $S = 0$  ó  $h' = 0$  con  $S \neq 0$ , pero no son interesantes físicamente, por lo que no serán tratadas en este trabajo. Por ejemplo, para el caso en el que  $h' = 0$ , entonces el Higgs no adquiere el VEV medido experimentalmente (246 GeV), por lo que ni los fermiones ni los bosones del SM adquieren masa. El caso en el que  $S = 0$ , entonces no aparecerán el término cúbico  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}s$  que nos interesa.

Recordemos del cálculo diferencial que un punto crítico es un mínimo local si la matriz Hessiana evaluada en tal punto es positiva definida (además también se debe pedir que alguna segunda derivada parcial *no*-cruzada sea positiva, esto lo garantizamos al pedir  $\lambda_H, \lambda_S > 0$ ) y que una matriz simétrica  $2 \times 2$  es positiva definida si y sólo si su determinante es positivo. Como  $v, w > 0$ , entonces se debe satisfacer la desigualdad

$$\lambda_H > \frac{\lambda_{HS}^2}{4\lambda_S} \quad (3.25)$$

para garantizar que  $V(v, w)$  sea un mínimo local y que los eigenvalores de  $\mathcal{M}^2$  sean positivos. Además,  $\mathcal{M}^2$  se puede diagonalizar con una transformación ortogonal

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\sen \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

de tal forma que  $\mathcal{O}^\dagger \mathcal{M}^2 \mathcal{O}$  es una matriz diagonal. Expandiendo el producto de matrices, se tiene

$$\begin{pmatrix} -\lambda_{HS}vw \sen 2\theta + 2\lambda_H v^2 \cos^2 \theta + 2\lambda_S w^2 \sen^2 \theta & \lambda_{HS}vw \cos 2\theta + (\lambda_H v^2 - \lambda_S w^2) \sen 2\theta \\ \lambda_{HS}vw \cos 2\theta + (\lambda_H v^2 - \lambda_S w^2) \sen 2\theta & \lambda_{HS}vw \sen 2\theta + 2\lambda_H v^2 \sen^2 \theta + 2\lambda_S w^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

De la expresión anterior, se puede definir una masa para cada uno de los eigenvalores:

$$\begin{aligned} m_\phi^2 &\equiv -\lambda_{HS}vw \sen 2\theta + 2\lambda_H v^2 \cos^2 \theta + 2\lambda_S w^2 \sen^2 \theta, \\ m_Y^2 &\equiv \lambda_{HS}vw \sen 2\theta + 2\lambda_H v^2 \sen^2 \theta + 2\lambda_S w^2 \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Además, de la condición  $\lambda_{HS}vw \cos 2\theta + (\lambda_H v^2 - \lambda_S w^2) \sen 2\theta = 0$ , podemos escribir

$$\tan 2\theta = \frac{\lambda_{HS}vw}{\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2} \quad (3.29)$$

por lo que

$$\sen 2\theta = \frac{\lambda_{HS}vw}{\sqrt{(\lambda_{HS}vw)^2 + (\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2)^2}}, \quad \cos 2\theta = \frac{\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2}{\sqrt{(\lambda_{HS}vw)^2 + (\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2)^2}}. \quad (3.30)$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado también se pueden obtener los eigenvalores de la matriz y deben ser los mismos que en (3.28). Las soluciones de la ecuación cuadrática, que resulta de diagonalizar (3.24) por medio del determinante, son

$$m_{\phi, Y}^2 = \lambda_H v^2 + \lambda_S w^2 \mp \sqrt{(\lambda_{HS}vw)^2 + (\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2)^2} = \lambda_H v^2 + \lambda_S w^2 \mp \frac{\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2}{\cos 2\theta}, \quad (3.31)$$

en la última igualdad se usa la relación del  $\cos 2\theta$  de (3.30).

Estas son las masas físicas de nuestro modelo siempre y cuando se cumpla la desigualdad (3.25). Después del rompimiento de simetría electrodébil, es decir, desplazando los campos alrededor de sus respectivos mínimos,  $h' = h + v$  y  $S = s + w$ , nuestro potencial (y Lagrangiano), dependerán de  $h$ ,  $s$ ,  $v$  y  $w$ . Al rotar estos campos  $h$  y  $s$  con la transformación  $\mathcal{O}^\dagger$ , no aparece el término cruzado en nuestra ecuación cuadrática de masas. Esto lo podemos expresar en término de los siguientes campos<sup>4</sup>

$$\begin{pmatrix} \phi \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \cos \theta - s \sin \theta \\ h \sin \theta + s \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

o de forma equivalente

$$\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \cos \theta + Y \sin \theta \\ -\phi \sin \theta + Y \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Identificamos el estado  $\phi$  con el Higgs encontrado en el LHC de masa  $m_\phi = 125$  GeV. Mientras tanto, la partícula  $Y$  se comporta como un bosón de Higgs que se acopla más débilmente con los fermiones del SM. Como  $h = \phi \sin \theta + Y \cos \theta$ , si  $\theta \ll 1$ , entonces el factor  $Y \sin \theta$  se ve suprimido, restricción que debemos imponer pues  $Y$  no ha sido observada.<sup>5</sup>

Podemos reescribir ahora nuestro Lagrangiano fundamental (3.15), en un Lagrangiano efectivo en términos de  $Y$  y  $\phi$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} - \frac{1}{2} m_\chi \bar{\chi} \chi - \frac{2\kappa w}{\Lambda} \bar{\chi} \chi (Y \cos \theta - \phi \sin \theta) - \cos \theta \sum_f \frac{g_f}{2} \bar{f} f \phi \\ - \sin \theta \sum_f \frac{g_f}{2} \bar{f} f Y - \sum_f \frac{g_f}{2} v \bar{f} f - V(\phi, Y) \dots, \end{aligned} \quad (3.34)$$

con  $m_\chi \equiv \mu_\chi + \frac{2\kappa}{\Lambda} w^2$  y  $\mathcal{L}_{\text{kin}}$  son los términos cinéticos de nuestro Lagrangiano. Los puntos suspensivos provienen del término  $\bar{\chi} \chi s^2$  que está más suprimido que  $\bar{\chi} \chi s$  y puede ser ignorado. Del término de masa para  $\chi$ , podemos desprestigiar por simplicidad  $\mu_\chi$ , por lo que,

$$w = \sqrt{\frac{m_\chi \Lambda}{2\kappa}}. \quad (3.35)$$

El término cinético de la derivada covariante ya se calculó en el capítulo 1.6, al hacer la sustitución (3.33) en (1.103), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cinético}} = \frac{1}{2} \cos^2 \theta (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\partial_\mu Y)^2 + \sin \theta \cos \theta (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu Y) \\ + \left( m_W^2 W^{\mu+} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^0 Z^{\mu 0} \right) \left( 1 + \frac{\phi \cos \theta + Y \sin \theta}{v} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

<sup>4</sup>El potencial (3.16) lo podemos encontrar en [60], trabajo en el que también aplican una transformación ortogonal como en (3.26), para diagonalizar la matriz de masas y expresar el Lagrangiano del SM en términos del eigenestado de masas. En esta tesis se sigue el mismo procedimiento.

<sup>5</sup>Habrà quien haya notado que la ecuación (3.29) tiene una ambigüedad en el dominio,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  pero dada la restricción en  $\theta$ , esta ambigüedad desaparece.

y  $(\partial_\mu s)^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta (\partial_\mu Y)^2 - \sin \theta \cos \theta (\partial_\mu Y)(\partial^\mu \phi)$ , por lo que

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu Y)^2 + \left( m_W^2 W^{\mu+} W_\mu^- + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu^0 Z^{\mu 0} \right) \left( 1 + \frac{\phi \cos \theta + Y \sin \theta}{v} \right)^2. \quad (3.37)$$

El potencial se reescribe como

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\phi, Y) = & \frac{1}{2} m_Y^2 Y^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2 + \lambda_{\phi^3} \phi^3 + \lambda_{Y^3} Y^3 + \lambda_{Y\phi^2} Y \phi^2 + \lambda_{Y^2\phi} Y^2 \phi \\ & + \lambda_{Y^3\phi} Y^3 \phi + \lambda_{Y^2\phi^2} Y^2 \phi^2 + \lambda_{Y\phi^3} Y \phi^3 + \lambda_{Y^4} Y^4 + \lambda_{\phi^4} \phi^4. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Cada uno de los acoplamientos  $\lambda$  de este potencial depende de los parámetros fundamentales y del ángulo  $\theta$ . Sin embargo, en (A.3)-(A.6) se han escrito a las constantes  $\lambda_S$ ,  $\lambda_H$  y  $\lambda_{HS}$  en términos de los parámetros efectivos  $m_Y$ ,  $\theta$ ,  $m_\chi$  y  $\kappa$ , por lo que podemos poner los acoplamientos de  $V_{\text{eff}}$  en términos de éstos también (ver apéndice).

Del Lagrangiano (3.34) es sugerente definir:

$$\lambda_{\bar{f}f\phi} \equiv \frac{g_f}{2} \cos \theta = \frac{m_f}{v} \cos \theta, \quad (3.39)$$

$$\lambda_{\bar{\chi}\chi\phi} \equiv -\frac{2\kappa}{\Lambda} w \sin \theta = -\sqrt{\frac{2\kappa m_\chi}{\Lambda}} \sin \theta, \quad (3.40)$$

$$\lambda_{\bar{\chi}\chi Y} \equiv \frac{2\kappa}{\Lambda} w \cos \theta = \sqrt{\frac{2\kappa m_\chi}{\Lambda}} \cos \theta \quad (3.41)$$

y

$$\lambda_{\bar{f}f Y} \equiv \frac{g_f}{2} \sin \theta = \frac{m_f}{v} \sin \theta. \quad (3.42)$$

Existen dos procesos de aniquilación de materia oscura que tenemos que considerar para calcular la sección transversal promediada térmicamente (2.49). El primero de ellos es  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \bar{f}f$  cuya matriz de transición es dominada por el canal  $s$ . El diagrama de Feynman que contribuye al proceso mencionado (a nivel árbol) se muestra en la figura 3.4. La matriz de transición para el proceso  $\bar{\chi}\chi \rightarrow Y \rightarrow \bar{f}f$  es

$$i\mathcal{M}_Y = (-2i\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}) u_\chi^r(p) \bar{v}_\chi^{r'}(p') \frac{i}{(k+k')^2 - m_Y^2 + im_Y \Gamma_Y} (-2i\lambda_{\bar{f}f Y}) v_f^s(k') \bar{u}_f^{s'}(k). \quad (3.43)$$

Procedemos como en la sección anterior, elevamos al cuadrado la matriz de transición y sumamos sobre todos los espines

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_Y|^2 = & \lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{\bar{f}f Y}^2 \left( \sum_{s,s'} v_f^s(k') \bar{v}_f^s(k') u_f^{s'}(k) \bar{u}_f^{s'}(k) \right) \left( \sum_{r,r'} u_\chi^r(p) \bar{u}_\chi^r(p) v_\chi^{r'}(p') \bar{v}_\chi^{r'}(p') \right) \\ & \frac{1}{[(k+k')^2 - m_Y^2]^2 + m_Y^2 \Gamma_Y^2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

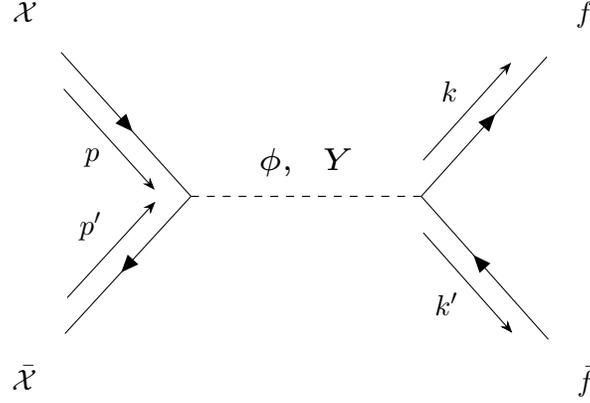


Figura 3.4: Aniquilación de materia oscura en fermiones observables ya sea a través del Higgs  $\phi$  o del mediador  $Y$  del modelo (3.34). Esta contribución a la densidad de reliquia es relevante cuando  $m_\chi < m_Y$ . Como en el caso anterior, diferentes canales de aniquilación se encuentran abiertos o son prohibidos dependiendo del valor de  $2m_\chi$ .

para simplificar la expresión anterior, aplicamos las relaciones (1.47) y (1.48) a las sumas,

$$\sum_{s,s'} v_f^s(k') \bar{v}_f^s(k') u_f^{s'}(k) \bar{u}_f^{s'}(k) = \text{Tr}[(\gamma \cdot k' - m_f)(\gamma \cdot k + m_f)] = 4(k \cdot k' - m_f^2), \quad (3.45)$$

$$\sum_{r,r'} u_\chi^r(p) \bar{u}_\chi^r(p) v_\chi^{r'}(p') \bar{v}_\chi^{r'}(p') = \text{Tr}[(\gamma \cdot p + m_\chi)(\gamma \cdot p' - m_\chi)] = 4(p \cdot p' - m_\chi^2). \quad (3.46)$$

Entonces, (3.44) se simplifica en

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_Y|^2 = \lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{ffY}^2 \frac{64(k \cdot k' - m_f^2)(p \cdot p' - m_\chi^2)}{[(k + k')^2 - m_Y^2]^2 + m_Y^2 \Gamma_Y^2}. \quad (3.47)$$

En este punto es importante señalar que no se puede hacer la aproximación no relativista  $E \approx m_\chi$ , pues entonces  $p \cdot p' - m_\chi^2 = 2E^2 - 2m_\chi^2 \approx 0$ . Para remediar este hecho, como  $E^2 = m_\chi^2 + |\mathbf{p}|^2$ , entonces aproximamos el momento  $|\mathbf{p}|^2$  a primer orden, i.e.,  $|\mathbf{p}|^2 \approx m_\chi^2 v^2$ .

Procedemos ahora a calcular  $\sigma v$  con ayuda de la ecuación para la sección transversal en (3.9),

$$\sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow Y \rightarrow \bar{f}f} = \frac{\sqrt{E^2 - m_f^2}}{16\pi E^2 E_{\text{CM}}} \frac{1}{4} \sum |\mathcal{M}|^2 = \frac{(E^2 - m_f^2)^{3/2}}{\pi E^3} \frac{4 \cdot 2(E^2 - m_\chi^2)}{(4E^2 - m_Y^2)^2 + \Gamma_Y^2 m_Y^2} \lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{ffY}^2, \quad (3.48)$$

simplificando,

$$\sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow Y \rightarrow \bar{f}f} = \left[ 1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2(1 + v^2)} \right]^{3/2} \frac{8m_\chi^2 v^2 \lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{ffY}^2}{\pi(4m_\chi^2 + 4m_\chi^2 v^2 - m_Y^2)^2}. \quad (3.49)$$

Sin embargo, este cálculo es únicamente para el proceso  $\bar{\chi}\chi \rightarrow Y \rightarrow \bar{f}f$  y  $\bar{\chi}\chi \rightarrow \bar{f}f$  debe tener contribución de  $\phi$  también, i.e.,  $\mathcal{M}_{\text{Tot}} = \mathcal{M}_Y + \mathcal{M}_\phi$  y al elevar al cuadrado,  $|\mathcal{M}_{\text{Tot}}|^2 = |\mathcal{M}_Y|^2 + 2\mathcal{M}_Y\overline{\mathcal{M}}_\phi + |\mathcal{M}_\phi|^2$ . El cálculo de  $|\mathcal{M}_\phi|^2$  es en esencia el mismo que en (3.44),

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espín}} |\mathcal{M}_\phi|^2 = \lambda_{\bar{\chi}\chi\phi}^2 \lambda_{\bar{f}f\phi}^2 \frac{64(k \cdot k' - m_f^2)(p \cdot p' - m_\chi^2)}{\left[ (k + k')^2 - m_\phi^2 \right]^2 + m_\phi^2 \Gamma_\phi^2} \quad (3.50)$$

y los términos cruzados,

$$\frac{1}{4} \sum_{\text{espín}} 2\mathcal{M}_Y\overline{\mathcal{M}}_\phi = \lambda_{\bar{\chi}\chi Y} \lambda_{\bar{\chi}\chi\phi} \lambda_{\bar{f}f Y} \lambda_{\bar{f}f\phi} \frac{128(k \cdot k' - m_f^2)(p \cdot p' - m_\chi^2)}{\left[ (k + k')^2 - m_Y^2 \right] \left[ (k + k')^2 - m_\phi^2 \right] + m_Y \Gamma_Y m_\phi \Gamma_\phi}. \quad (3.51)$$

De este modo podemos calcular la sección transversal total (este cálculo no se encuentra en la literatura),

$$\begin{aligned} \sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow \bar{f}f} &= \left[ 1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2(1+v^2)} \right]^{3/2} \frac{8m_\chi^2 v^2}{\pi} \left[ \frac{\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{\bar{f}f Y}^2}{(4m_\chi^2 + 4m_\chi^2 v^2 - m_Y^2)^2 + m_Y^2 \Gamma_Y^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_{\bar{\chi}\chi\phi}^2 \lambda_{\bar{f}f\phi}^2}{(4m_\chi^2 + 4m_\chi^2 v^2 - m_\phi^2)^2 + m_\phi^2 \Gamma_\phi^2} + \frac{2\lambda_{\bar{\chi}\chi Y} \lambda_{\bar{\chi}\chi\phi} \lambda_{\bar{f}f Y} \lambda_{\bar{f}f\phi}}{(4m_\chi^2 + 4m_\chi^2 v^2 - m_Y^2)(4m_\chi^2 + 4m_\chi^2 v^2 - m_\phi^2) + m_Y \Gamma_Y m_\phi \Gamma_\phi} \right] \\ &= \frac{8\lambda_{\text{eff}}^2 m_\chi^2 v^2}{\pi} \left[ 1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2(1+v^2)} \right]^{3/2} \left[ \frac{1}{(4m_\chi(1+v^2) - m_Y^2) + im_Y \Gamma_Y} - \frac{1}{(4m_\chi(1+v^2) - m_Y^2) + im_Y \Gamma_Y} \right]^2, \end{aligned} \quad (3.52)$$

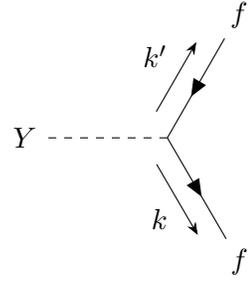
donde  $\lambda_{\text{eff}}^2 \equiv \lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2 \lambda_{\bar{f}f Y}^2 = \lambda_{\bar{\chi}\chi\phi}^2 \lambda_{\bar{f}f\phi}^2 = -\lambda_{\bar{\chi}\chi Y} \lambda_{\bar{\chi}\chi\phi} \lambda_{\bar{f}f Y} \lambda_{\bar{f}f\phi}$

La cantidad que nos interesa en este caso es  $\langle \sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow \bar{f}f} \rangle$ . Dicho promedio térmico se puede calcular con (3.13) o con (2.49). Realizar dicha integral analíticamente puede resultar en un trabajo no sólo arduo, sino tal vez incluso imposible. Por suerte, no es necesario ensuciarnos las manos escribiendo siquiera la integral, pues ya existen herramientas computacionales que la calculan numéricamente. Aún así, como la sección transversal es proporcional a  $\lambda_{\text{eff}}^2$  y esta a su vez se encuentra en términos de las constantes definidas en (3.39), (3.40), (3.41) y (3.42), entonces de la ecuación (3.52) se puede decir que

$$\frac{1}{\Omega_\chi h^2} \propto \langle \sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow \bar{f}f} \rangle \propto \lambda_{\text{eff}}^2 \propto \left( \frac{m_f \cdot \kappa}{\Lambda} \sin 2\theta \right)^2, \quad (3.53)$$

por lo que, como en el caso del singulete escalar, cerca del polo de Higgs  $\phi$  y del polo del mediador  $Y$ , se espera que el valor de  $\kappa$  sea suprimido para mantener la densidad de reliquia constante.

Podemos también con (3.10) obtener las tasas de decaimiento  $\Gamma_Y$  y  $\Gamma_\phi$ . Primero, para el decaimiento de una partícula  $Y$  en un par fermión-antifermión observables, la matriz  $\mathcal{M}$  es



$$= -2i\lambda_{\bar{f}fY}v_f^s(k')\bar{u}_f^{s'}(k). \quad (3.54)$$

Por lo que el decaimiento resulta ser

$$\Gamma_{Y \rightarrow \bar{f}f} = \frac{2m_\chi^2(1+v^2)\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2}{\pi m_Y} \sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_Y^2} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2(1+v^2)}\right)}, \quad (3.55)$$

donde hemos realizado de nuevo la aproximación  $|\mathbf{p}|^2 \approx m_\chi^2 v^2$ . Análogamente,

$$\Gamma_{\phi \rightarrow \bar{f}f} = \frac{2m_\chi^2(1+v^2)\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^2}{\pi m_\phi} \sqrt{1 - 4\frac{m_f^2}{m_\phi^2} \left(1 - \frac{m_f^2}{m_\chi^2(1+v^2)}\right)}. \quad (3.56)$$

Ahora calcularemos la sección transversal para el segundo proceso que nos falta,  $\bar{\chi}\chi \rightarrow YY$ . El diagrama de este proceso se encuentra en la figura 3.5.

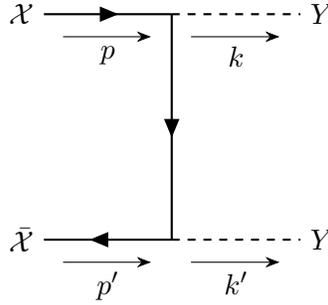


Figura 3.5: Producción de la partícula  $Y$ . Este proceso es relevante cuando  $m_\chi \geq m_Y$ .

cuya matriz de transición es

$$i\mathcal{M} = (-2i\lambda_{\bar{\chi}\chi Y})\bar{v}(p') \frac{i[\gamma \cdot (p - k) + m_\chi]}{(p - k)^2 - m_\chi^2 + im_\chi\Gamma_\chi} (-2i\lambda_{\bar{\chi}\chi Y})u(p). \quad (3.57)$$

Nótese que este proceso es en el canal  $t = (p - k)^2 = (p' - k')^2$  a diferencia del proceso pasado que era en el canal  $s = (k + k')^2 = (p + p')^2$ . En este proceso, al elevar al cuadrado  $\mathcal{M}$ , habrá contribuciones de los términos cruzados  $p \cdot k = p' \cdot k' = E^2 - E |\mathbf{k}| \cos \alpha$ , donde  $\alpha$  es el ángulo entre los momentos  $p' = (E, -E\hat{z})$  y  $k = (E, \mathbf{k})$ . La sección transversal de este proceso se puede encontrar en [28],

$$\sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow YY} = \frac{3\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^4 v^2}{128\pi m_{\chi}^2}, \quad (3.58)$$

promediamos térmicamente usando la ecuación (3.13) (para este caso es posible resolver la integral analíticamente),

$$\langle \sigma v_{\bar{\chi}\chi \rightarrow YY} \rangle = \frac{3\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^4 \langle v^2 \rangle}{128\pi m_{\chi}^2} = \frac{9\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^4}{256\pi m_{\chi}^2} x^{-1}, \quad x = \frac{m_{\chi}}{T}. \quad (3.59)$$

La expresión anterior corresponde al segundo término en la expansión (2.50).

Recuérdese que el congelamiento ocurre en  $x \approx 20$  y una buena aproximación para el cálculo de densidad de reliquia es tomar  $x_f \approx 27$  como lo hace micrOMEGAs en la gráfica de la figura 3.3. Además  $\lambda_{\bar{\chi}\chi Y}^4 \propto m_{\chi}^2$ , por lo que la sección transversal (3.59) no depende de  $m_{\chi}$ .

Tenemos en total cuatro parámetros libres,  $\kappa$ ,  $m_{\chi}$ ,  $\theta$  y  $m_Y$ , que podemos variar para explorar el alcance de nuestra teoría efectiva con la restricción experimental (2.65). El Lagrangiano efectivo (3.34) se escribió en el software libre LanHEP [61], programa que genera los archivos que contienen las reglas de Feynman del modelo y que son utilizados por micrOMEGAs para calcular observables de DM y cuyos resultados presentamos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos

En este capítulo se mostrarán distintos escaneos del espacio de parámetros del modelo (3.34) donde la restricción con la que compararemos el modelo es la densidad de reliquia (2.65). La solución de la ecuación de Boltzmann de la partícula  $\mathcal{X}$  es una curva como la de la figura 3.3 pues estamos asumiendo que el mediador  $Y$  se encuentra en equilibrio térmico con  $\mathcal{X}$  y con las partículas del SM. En la figura 4.1 hemos realizado un escaneo como en 3.2, para lograr esto, hemos fijado dos de los cuatro parámetros, los cuales fueron  $\sin\theta = 10^{-3}$ ,  $m_Y = 100$  GeV y, como ya habíamos mencionado en el capítulo anterior,  $\Lambda = 10$  TeV. Se tomaron diferentes valores de  $m_{\mathcal{X}}$  con números aleatorios en el intervalo  $41 \text{ GeV} < m_{\mathcal{X}} < 120 \text{ GeV}$ . En el intervalo  $62.7 \text{ GeV} < m_{\mathcal{X}} < 75.5 \text{ GeV}$ , el valor de  $\kappa$  está acotado por  $1.5 \cdot 10^3 < \kappa < 1.98 \cdot 10^8$ , alcanzando su máximo valor en  $m_{\mathcal{X}} = 73.05 \text{ GeV}$ ; las contribuciones a la densidad de reliquia en este punto están dadas por la aniquilación en un par bottom,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \bar{b}b$ , en un 96% y en un par tau,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \bar{\tau}\tau$ , en un 4%. Dichos porcentajes son similares hasta  $m_{\mathcal{X}} = 76.38 \text{ GeV}$  donde la contribución total proviene ahora de la aniquilación de materia oscura en un par  $Y$  en el canal  $t$ ,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow YY$ , y observamos que  $\kappa \approx 2$  para  $m_{\mathcal{X}} \geq m_Y = 100 \text{ GeV}$ . Estos puntos donde  $\kappa$  alcanza estos enormes ordenes de magnitud no son permisibles porque entonces el cociente  $\kappa/\Lambda \gg 1 \text{ GeV}^{-1}$  y uno de los principales motivaciones para imponer  $\Lambda = 10 \text{ TeV}$  como una escala de corte energética era que  $\kappa/\Lambda \ll 1 \text{ GeV}^{-1}$  para poder ignorar el término no renormalizable después del rompimiento de simetría del campo  $S$  y recuperar una teoría perturbativa.

Por lo regular, aquellos puntos del espacio de parámetros que reproducen la densidad de reliquia observada pero en los que  $\kappa \gg 1$ , tienen como principal contribución la aniquilación de DM en fermiones del SM. Para tener una intuición física de este hecho, sabemos por las reglas de Feynman que la probabilidad de que el proceso de aniquilación de DM ocurra debe ser proporcional al acoplamiento de Yukawa de nuestra partícula candidata,  $\mathcal{X}$ , con el Higgs  $\phi$  o el mediador  $Y$ . De esta forma, encontramos que la sección transversal de la aniquilación en fermiones es proporcional a esta constante de acoplamiento cuadrada. Esto ocurre tanto en el modelo (3.1) como en el modelo efectivo (3.34) para la sección transversal promedio (3.53),  $\langle \sigma v_{\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \bar{f}f} \rangle \propto \lambda_{\text{eff}}^2$ . Además, como  $\theta$  mide la mezcla entre ambos *Higgses*, entonces las constantes de acoplamiento del modelo efectivo

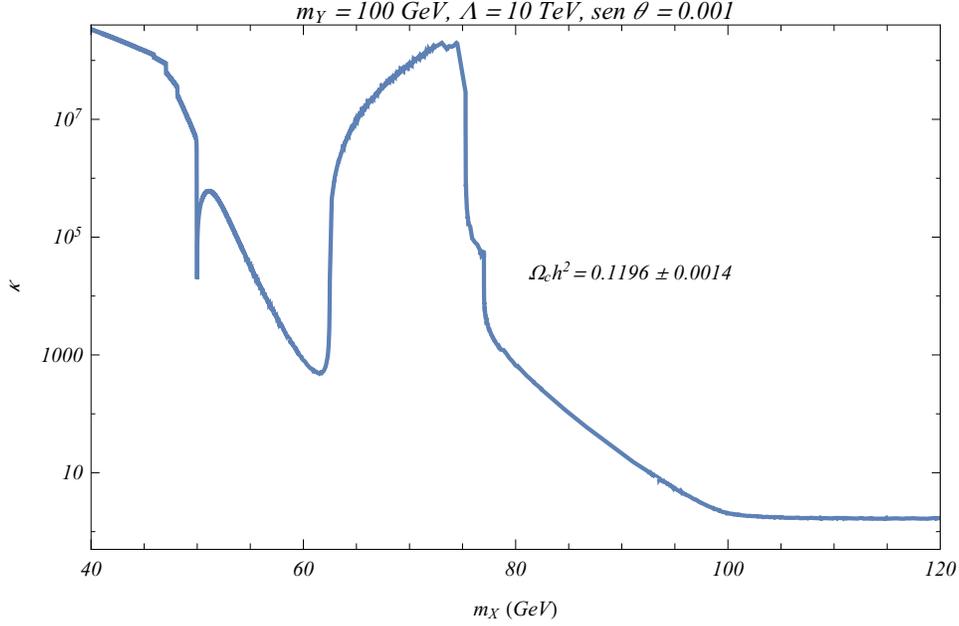


Figura 4.1: Puntos en el plano  $(m_{\mathcal{X}}, \kappa)$  que dan el valor observado de densidad de reliquia. Obsérvese la similitud con la figura 3.2, en este caso tenemos dos “sumideros” correspondientes a ambos *Higgses*.

$\lambda_{\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}\phi}$  y  $\lambda_{\bar{f}fY}$  tienen  $\text{sen } \theta$  multiplicando como factor, pues estos acoplamientos son más débiles que  $\lambda_{\bar{f}f\phi}$  y  $\lambda_{\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}Y}$ , lo cual tiene sentido, pues ni  $\mathcal{X}$  ni  $Y$  han sido observados. De esta forma, la sección transversal se ve suprimida por el factor  $\text{sen}^2 2\theta$ , razón por la cual,  $\kappa$  tiene que incrementarse para que  $\sigma$  permanezca constante.

Por esta razón, ignoraremos los puntos donde  $\kappa \gg 1$ . Es necesario, entonces imponer una restricción perturbativa sobre este parámetro, escogemos  $\kappa < 10$ . Por ejemplo, en la figura 4.1 vemos que si  $m_{\mathcal{X}} > 91 \text{ GeV}$ , entonces  $\kappa < 16$  por lo que con esta elección de  $m_Y$  y  $\theta$ , la teoría efectiva es válida para masas que cumplen con  $m_{\mathcal{X}} \geq m_Y$ . Por otro lado, en el polo  $m_{\mathcal{X}} = m_Y/2 = 50 \text{ GeV}$ , el valor de  $\kappa$  cae precipitadamente, pero no lo suficiente para cumplir con la restricción que acabamos de imponer. Fijamos ahora  $m_Y = 300 \text{ GeV}$ , cuyos resultados se encuentran en 4.2.

Como en el caso anterior, descartamos aquellos puntos donde  $\kappa > 10$ . Notamos que para  $m_{\mathcal{X}} < 40 \text{ GeV}$  siempre se tiene  $\kappa > 10$ , veremos que esto ocurre también para otros valores de  $m_Y$ , por lo que no vale la pena explorar masas  $m_{\mathcal{X}}$  más ligeras. Cuando  $m_{\mathcal{X}} \sim m_Y$  se recupera perturbatividad, pues el proceso dominante es  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow YY$ . La cantidad (2.49) de este proceso se mantiene independiente de  $m_{\mathcal{X}}$  como ya se había observado en el capítulo anterior. También es importante notar que masas cercanas al polo  $Y$  pueden tener también contribuciones provenientes de la producción en un par  $\phi$ ,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \phi\phi$ .

En la figura 4.2 se muestran gráficas de  $(m_{\mathcal{X}}, \kappa)$  con  $m_Y = 300 \text{ GeV}$  para diferentes valores

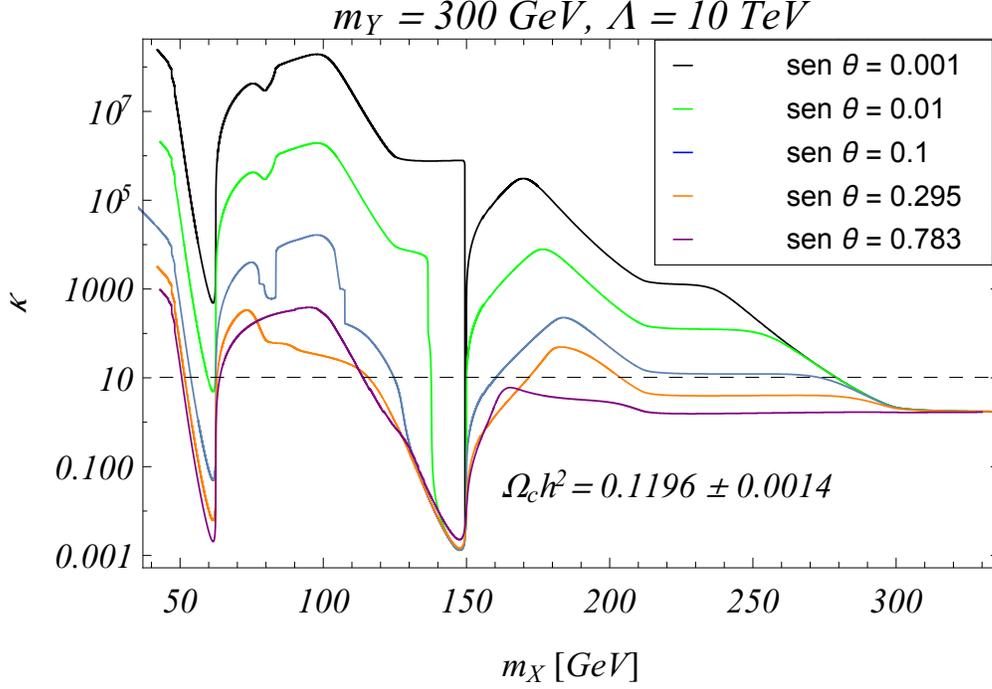


Figura 4.2: Espacio de parámetros fijando  $m_Y$  y variando  $\theta = 0.001, 0.01, 0.3, \text{ y } 0.9$ . La línea punteada corresponde a  $\kappa = 10$  y observamos que conforme  $\theta$  aumenta, entonces más puntos alrededor de los polos quedan por debajo de  $\kappa = 10$ , i.e., el espacio de parámetros es sensible a  $\theta$ , sobre todo en las regiones de la resonancia  $m_X \sim m_Y/2, m_\phi/2$ .

de  $\sin \theta$ . Observamos que cuando el ángulo  $\theta$  se vuelve grande, entonces  $\kappa$  decrece. De hecho,  $\kappa$  se encuentra considerablemente suprimido en comparación con el caso anterior, pues aquí su máximo es del orden de  $10^7$  para  $\theta = 0.001$  y del orden de  $10^3$  para  $\theta = 0.3$  y  $0.9$ , i.e., una diferencia de 5 ordenes de magnitud.

Además, el “sumidero” del polo  $Y$  se hace más estrecho conforme  $\theta$  aumenta, esto se debe a que además del proceso  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \phi\phi$ , el término cinético correspondiente a la derivada covariante (3.37) también permite la aniquilación en los bosones de norma,  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow W^+W^-, Z^0Z^0$ . Cuando el ángulo de mezcla incrementa, este proceso se vuelve relevante, ya que su sección transversal tendrá también un factor  $\sin^2 2\theta$  ocasionando que  $\kappa$  disminuya en compensación.

El caso  $\theta < 0$  se muestra en la figura 4.3 con curvas de ángulos positivos y sus respectivos ángulos negativos. Encontramos que las curvas para ambos casos son casi idénticas, por lo que basta solamente explorar  $\theta > 0$ .

En las figuras ??, 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8 presentamos un escaneo del espacio  $(m_X, m_Y, \kappa)$  para diferentes valores de  $\theta$ , explorando el intervalo  $40 \text{ GeV} \leq m_X, m_Y \leq 10 \text{ TeV}$  y  $40 \text{ GeV} \leq m_X, m_Y \leq$

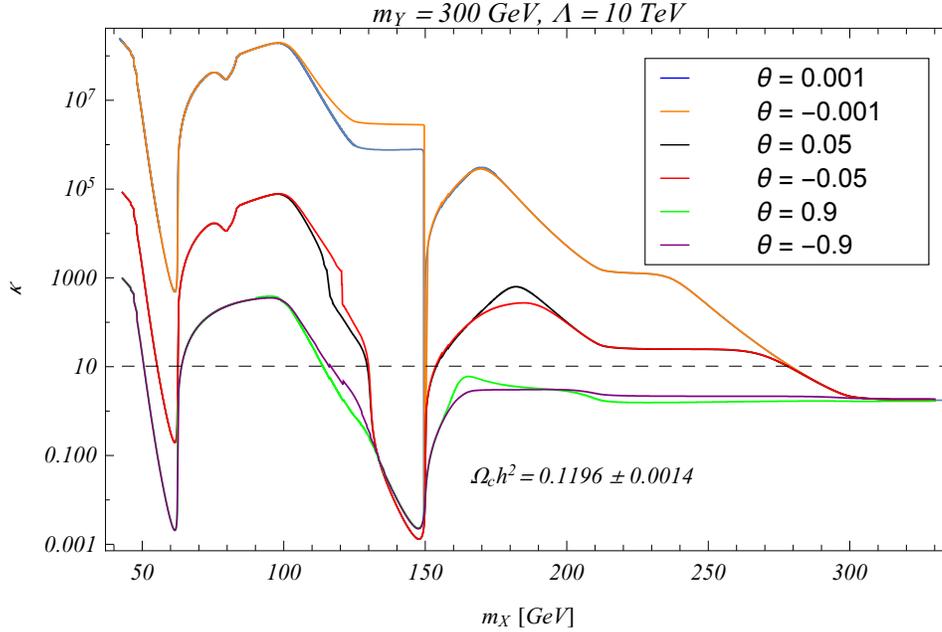


Figura 4.3: Espacio de parámetros fijando  $m_Y = 300$  GeV y tomando  $\theta = 0.001, 0.05, 0.9$  con el negativo de estas cantidades. Las curvas para cada ángulo y su negativo son prácticamente las mismas, por lo que basta con analizar el caso de  $\theta > 0$ .

600 GeV e imponiendo  $\kappa < 10$ . La figura ?? es el caso de  $\theta$  pequeño, en  $m_\chi \sim m_Y/2$  se encuentra el polo de  $Y$ , aquí  $\kappa$  es pequeña como se ve también en las figuras 4.1 y 4.2. Mientras tanto en  $m_\chi \geq m_Y$ ,  $\kappa \approx 2$  acorde también con las curvas de las gráficas de arriba. Así, gran parte del espacio de parámetros que cumple con nuestra restricción perturbativa se encuentra en la zona de resonancia  $m_\chi \approx m_Y/2$  o en  $m_\chi \geq m_Y$ .

Para el resto de las figuras el comportamiento es similar en  $m_\chi \geq m_Y$ . Sin embargo, el número de puntos cercanos a la resonancia  $m_\chi \sim m_Y/2$  crece conforme  $\theta$  y  $m_Y$  aumentan. Por ejemplo, tomemos los casos  $|\sin \theta| = 0.0425$  y  $|\sin \theta| = 0.1025$  (ver figura 4.5 y 4.6). En el segundo caso, el ángulo es más o menos el doble que en el primero, sin embargo, muchos más puntos sobreviven la restricción sobre  $\kappa$ , del tal forma que las regiones  $m_\chi < m_Y$  y  $m_\chi \geq m_Y$  están prácticamente “conectadas”. Puntos en la resonancia del Higgs  $\phi$  aparecen a partir de la figura 4.5 sobre la línea vertical  $m_\chi = 62.5$  GeV =  $m_\phi/2$  y son más visibles en la figuras subsecuentes.

Por otro lado, el ángulo  $\theta$  se encuentra constreñido por experimentos en colisionadores, e.g., en [38] se muestran los datos experimentales del LHC de la producción del bosón Higgs  $gg \rightarrow h$  seguido de su decaimiento en un par de gammas o bosones  $W$ , lo cual nos da la restricción  $\cos \theta > 0.9$  ( $\theta = 0.45$ ,  $\sin \theta = 0.43$ ). Además, constricciones más severas podrían obtenerse de otros experimentos en colisionadores y observaciones cosmológicas. Por esta razón, las gráficas en 4.8 son

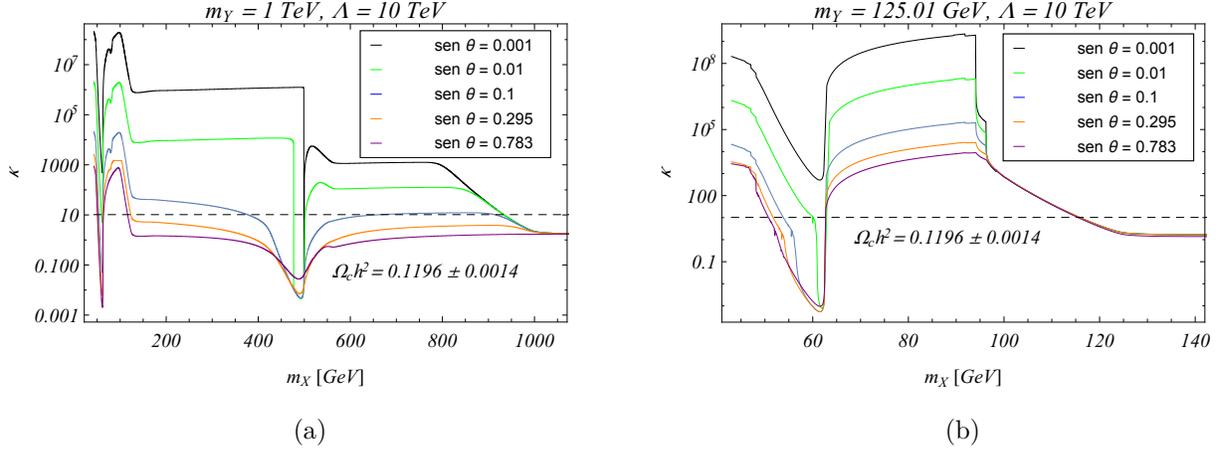


Figura 4.4: Gráficas de la izquierda: la resonancia en  $m_Y/2 = 500 \text{ GeV}$  es más estrecha en comparación con el de la figura 4.2 (comparar sobre todo los casos  $\sin \theta = 0.3, 0.793$ ), esto significa que si  $m_Y$  aumenta, entonces habrá más puntos permisibles en el espacio de parámetros alrededor de la resonancia  $m_\chi \sim m_Y/2$ . Gráficas de la derecha: los dos polos son muy cercanos, para  $m_\chi > 100 \text{ GeV}$  las curvas son en esencia la misma.

meramente ilustrativas. Otra restricción que vale la pena señalar es que  $m_Y \neq m_\phi$ , esto se puede ver de la ecuación (A.6) para que  $\lambda_{HS} \neq 0$  y por esta razón en 4.4(b) no se pudo tomar la igualdad.

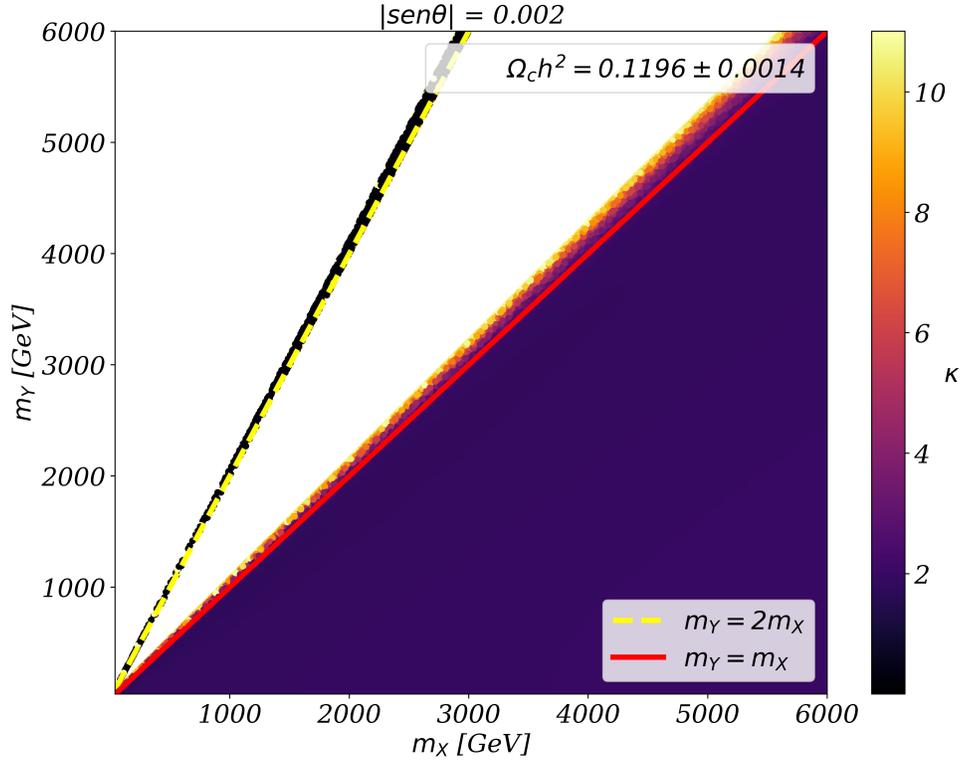


Figura 4.5: Escaneo proyectado sobre el plano  $(m_X, m_Y)$  de los puntos que reproducen la densidad de reliquia (2.65), donde  $40 \text{ GeV} < m_X, m_Y < 6 \text{ TeV}$ , fijando  $\theta = 0.002$  e imponiendo la constrictión perturbativa  $\kappa < 10$ . Los valores de  $\kappa$  están representados por una escala de colores que van de los más claros a los más oscuros. Las zonas en blanco corresponden a una  $\kappa > 10$  y por eso no se han graficado los puntos. En esta gráfica podemos identificar dos regiones importantes que cumplen con la condición de densidad de reliquia y con la condición perturbativa: el polo de  $Y$ ,  $m_X \sim m_Y/2$  y aquellos puntos que cumplen  $m_X \geq m_Y$ . Nótese que en esta última región se tiene  $\kappa \approx 2$  pues el promedio térmico de la sección transversal para  $m_X > m_Y$  está principalmente dado por la producción de partículas  $Y$  y así, como lo habíamos discutido con (3.59), la densidad de reliquia no depende de  $m_X$ . Mientras tanto, en la resonancia de  $Y$  se observan valores de  $\kappa$  considerablemente suprimidos.

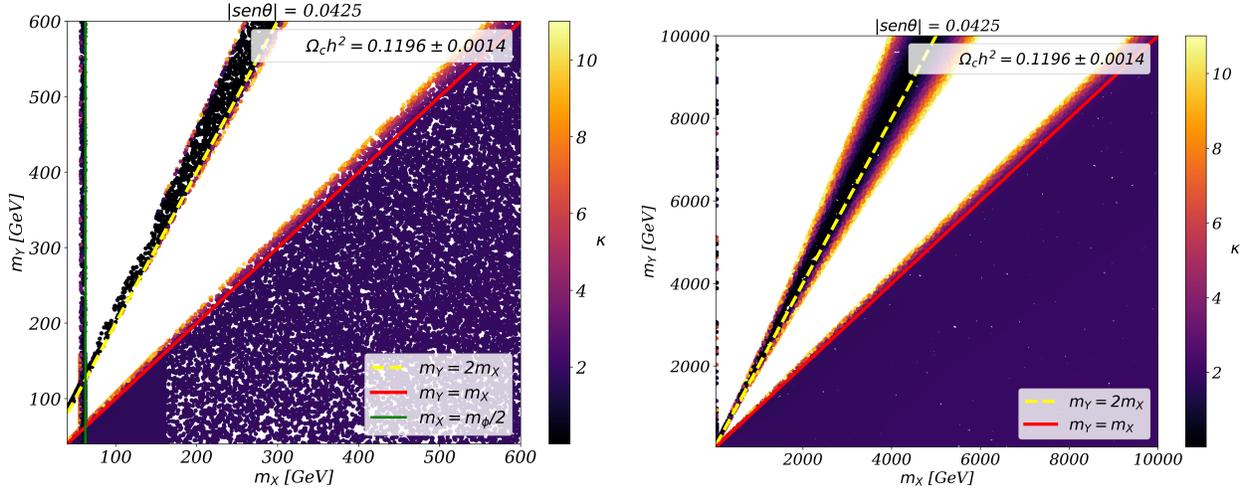


Figura 4.6: Escaneo proyectado sobre el plano  $(m_X, m_Y)$  como en ???. La gráfica de la izquierda es un “zoom” de la gráfica de la derecha. Aquí se ha fijado  $\theta = 0.0425$ . Notemos que ya son visibles puntos en el polo de Higgs  $\phi$  en contraste con el caso anterior. También nótese que hay más puntos alrededor de la resonancia de  $Y$  pues el sumidero se “ensancha” conforme  $m_Y$  y  $\theta$  aumentan (comparar e.g. con la figura 4.4 (a)).

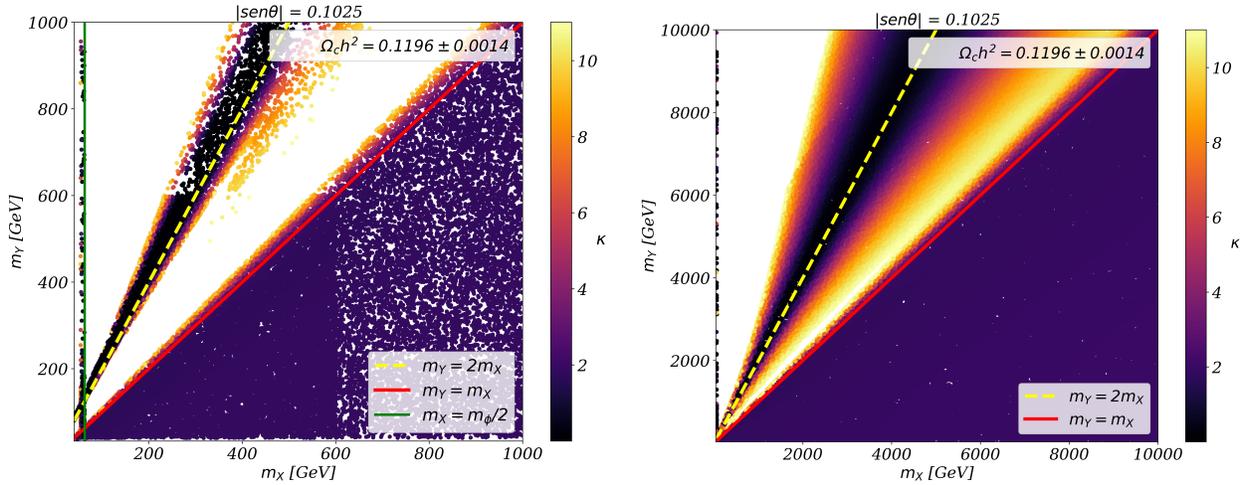


Figura 4.7: En estas gráficas el patrón es el mismo que en la figura 4.5 pues encontramos de nuevo las tres regiones mencionadas en las gráficas anteriores. Aquí se ha fijado  $|\text{sen } \theta| = 0.1025$ . A pesar de que  $\theta$  solamente ha aumentado aproximadamente el doble que en 4.5, se observa un aumento significativo del número de puntos alrededor resonancia de  $Y$ , sobre todo para valores grandes de  $m_Y$ , es decir, la cantidad de puntos en esta zona cambia significativamente con  $\theta$ .

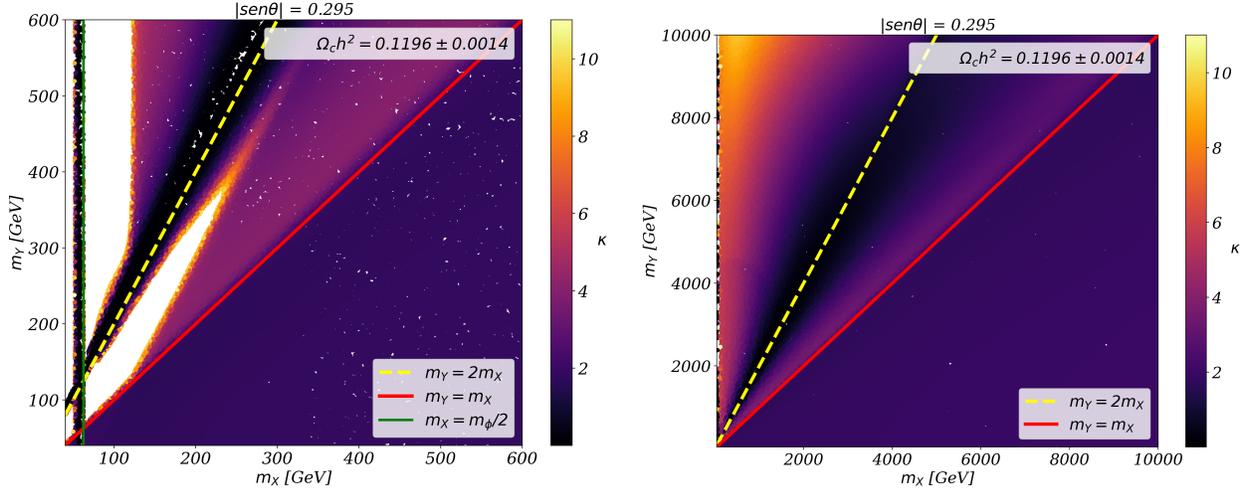


Figura 4.8: En este caso  $|\text{sen}\theta| = 0.295$  y se observa que el espacio de parámetros ocupa casi todo el plano. Hay tres regiones que *no* son ocupadas. Las primeras dos correspondientes a la aniquilación en fermiones observables antes y después de la resonancia del Higgs  $\phi$  ( $m_{\mathcal{X}} < m_{\phi}/2$  y  $m_{\mathcal{X}} > m_{\phi}/2$ ) y la tercer región correspondiente  $m_Y < 400$  GeV y  $m_{\mathcal{X}} > m_Y/2$ . Esto se puede apreciar mejor en la figura de la izquierda.

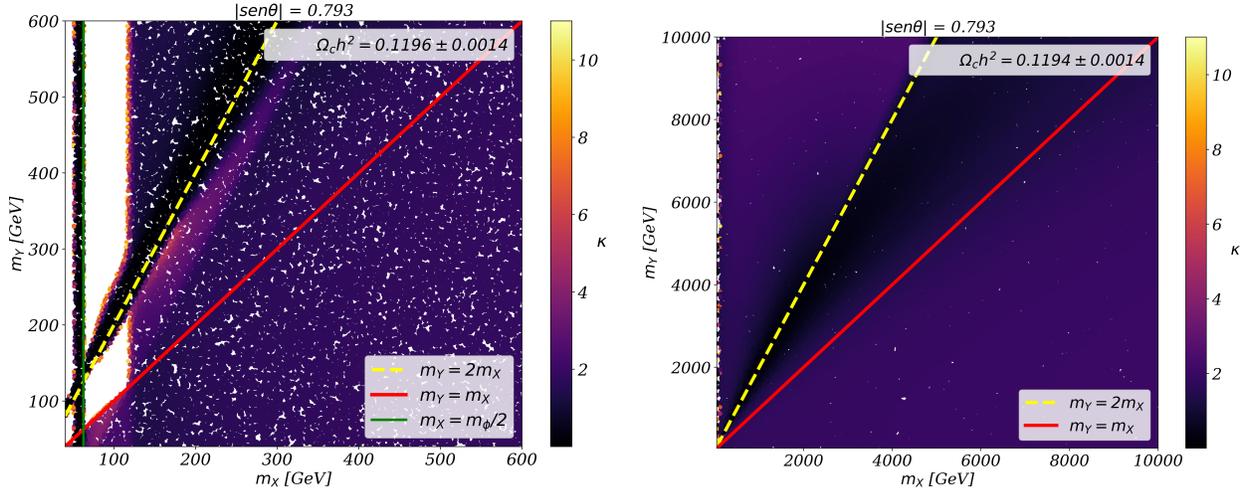


Figura 4.9: Este es el caso de ángulo grande, donde  $|\text{sen}\theta| = 0.793$ . Observamos que, como en el caso anterior, prácticamente todo el plano se encuentra cubierto y además  $\kappa \approx 2$  para casi todos los puntos. De hecho se observa que la única zona donde no hay puntos es antes y después del polo de Higgs. Así, como lo habíamos observado en la sección anterior,  $\kappa$  y  $\theta$  son inversamente proporcionales entre sí, por lo que el aumento de  $\theta$  beneficia a la constricción perturbativa sobre  $\kappa$ . Sin embargo,  $\theta$  no puede ser arbitraria, existen cotas que suprimen considerablemente este parámetro por experimentos de colisionadores, ya que la partícula  $Y$  no ha sido detectada, por esta razón, este caso es meramente ilustrativo.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo hemos propuesto y estudiado un modelo para explicar la existencia de materia oscura. Para esto, proponemos a la materia oscura como una partícula WIMP fermiónica y extendemos el SM para tomarla en cuenta. Los elementos del sector oscuro están compuestos por un campo fermiónico  $\mathcal{X}$ , el candidato a materia oscura, y un escalar real  $S$  al que se le impuso una simetría  $\mathbb{Z}_2$ . Este modelo lo presentamos en (3.15) donde el acoplamiento entre el fermión oscuro  $m_{\mathcal{X}}$  y el mediador escalar  $S$  es un término no renormalizable  $\frac{\kappa}{\Lambda}\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X}S^2$ , fijando  $\Lambda = 10$  TeV como una escala energética de corte que hace referencia a una teoría más fundamental. Después de que  $S$  adquiere un VEV ( $S \rightarrow S' = s + w$ ), aparece el término de Yukawa que nos interesa que sí es renormalizable. Expresamos a  $s$  y  $h$  en términos del eigenestado de masas,  $Y$  y  $\phi$  en (3.33) e identificamos a la partícula  $\phi$  como el bosón de Higgs observado en el LHC.

Posteriormente, se obtuvo el Lagrangiano efectivo en (3.34) en términos de estos campos e ignoramos el término no renormalizable. Para este modelo se calcularon los principales procesos a nivel árbol para determinar la sección transversal de la aniquilación de las partículas  $\mathcal{X}$  en el proceso  $\bar{\mathcal{X}}\mathcal{X} \rightarrow \bar{f}f, YY$ , que se encuentra en el canal  $s$  para la aniquilación en fermiones y en el canal  $t$  para la producción del mediador  $Y$ . Encontramos que este último proceso no depende de  $m_{\mathcal{X}}$ . La densidad de reliquia para la partícula  $\mathcal{X}$  se calculó con micrOMEGAs [37] variando los parámetros  $m_{\mathcal{X}}, m_Y, \kappa$  y  $\theta$  fijando la restricción experimental (2.65) medida por Planck [22]. Los resultados numéricos se muestran en las gráficas del capítulo anterior.

Impusimos la restricción  $\kappa < 10$  para que la teoría sea perturbativa y encontramos que gran parte del espacio de parámetros se encuentra en tres regiones importantes. La primera es la región correspondiente al polo del Higgs  $\phi$ ,  $m_{\mathcal{X}} \sim m_{\phi}/2$ , la segunda al polo de  $Y$ ,  $m_Y \sim 2m_{\mathcal{X}}$  y la tercera a  $m_Y \leq m_{\mathcal{X}}$ . La segunda y tercer región mencionadas arriba son de especial importancia. Para empezar, el conjunto de puntos que cumplen con  $m_Y \leq m_{\mathcal{X}}$  abarcan la mitad del plano para toda  $\theta$ . En segundo lugar, la región del polo de  $Y$  “crece” conforme  $\theta$  y  $m_Y$  aumentan. De hecho, la cantidad de puntos en esta región es considerablemente mayor para  $|\text{sen } \theta| = 0.1$  en comparación con  $|\text{sen } \theta| = 0.002$  (comparar gráficas de las figuras 4.5 y 4.9), por lo que la región  $m_{\mathcal{X}} > m_Y$  puede sobrevivir a la restricción sobre  $\kappa$  aunque  $\theta$  sea muy pequeño. Esto ocurre ya que para mantener a

la densidad de reliquia constante, se requiere que  $\theta$  y  $\kappa$  sean inversamente proporcionales entre sí.

Además, se sabe que  $\theta$  debe encontrarse considerablemente suprimido por los experimentos en colisionadores. Por ejemplo, en los resultados encontrados en [38], debemos imponer al menos  $\cos \theta > 0.9$  ( $\theta = 0.45$ ,  $\sin \theta = 0.43$ ) considerando que constricciones más severas pueden venir de otros experimentos.

Por otro lado, como discutimos en el capítulo 3.2, se impuso una simetría  $\mathbb{Z}_2$  al mediador escalar  $S$  motivados por la idea de considerarlo también una partícula de materia oscura, en cuyo caso esta partícula debería ser estable y no puede decaer. Sin embargo, en nuestro modelo después del rompimiento de simetría, justamente surgen los términos cúbicos que permiten el decaimiento de la partícula mediadora  $Y$  en partículas del SM (fermiones y bosones de norma, ver figura 3.4), por esta razón, si queremos estudiar a  $S$  como un candidato a materia oscura, debemos prohibir un rompimiento de simetría i.e., deberíamos suponer que  $S$  se encuentra ya en su estado de mínima energía permitiendo únicamente su aniquilación a través del Higgs  $h$ .

Otro proyecto que vale la pena revisar es considerar a la partícula  $Y$  como mediador pero en desequilibrio térmico con  $\mathcal{X}$ , i.e.  $Y_{\mathcal{X}(Y)}/Y_{\mathcal{X}(Y)}^{\text{eq}} \neq 1$  y los procesos que jugarían un rol importante en la determinación de la densidad de reliquia serían

$$\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \leftrightarrow YY, \quad \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \leftrightarrow PP \quad \text{y} \quad Y \rightarrow PP \quad (5.1)$$

donde  $P$  representa algún estado final del SM. La evolución del sistema DM-mediador es determinada por un sistema de ecuaciones de Boltzmann para la densidad de DM y del mediador análogos a la ecuación (2.47),

$$\begin{aligned} \frac{dY_{\mathcal{X}}}{dx} &= \frac{1}{3H} \frac{ds}{dx} \left( \langle \sigma v_r \rangle_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow PP} (Y_{\mathcal{X}}^2 - Y_{eq,\mathcal{X}}^2) + \langle \sigma v_r \rangle_{\mathcal{X}\bar{\mathcal{X}} \rightarrow YY} \left( Y_{\mathcal{X}}^2 - Y_Y^2 \frac{Y_{eq,\mathcal{X}}^2}{Y_{eq,Y}^2} \right) \right), \\ \frac{dY_Y}{dx} &= \frac{1}{3H} \frac{ds}{dx} \left( \langle \sigma v_r \rangle_{YY \rightarrow PP} (Y_Y^2 - Y_{eq,Y}^2) + \langle \sigma v_r \rangle_{YY \rightarrow \mathcal{X}\bar{\mathcal{X}}} \left( Y_Y^2 - Y_{\mathcal{X}}^2 \frac{Y_{eq,Y}^2}{Y_{eq,\mathcal{X}}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \Gamma \rangle_{Y \rightarrow PP}}{s} (Y_Y - Y_{eq,Y}) \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

lo cual nos daría una densidad de reliquia tanto para  $\mathcal{X}$  como para  $Y$ , sin embargo, resolver el sistema de ecuaciones podría tener un coste de cómputo considerablemente mayor en comparación con el caso en equilibrio. Si se considera a  $S$  como candidato también, habrá que resolver un sistema similar y la suma de ambas densidades deberá coincidir con la observación de Planck [22].

## Apéndice A

# Constantes de acoplamiento efectivas

En el capítulo 3 se desarrolló el cálculo del Lagrangiano efectivo de nuestro modelo. Aquí se mostrarán algunos cálculos ilustrativos de los parámetros. Primero pondremos a los parámetros  $\lambda_H$ ,  $\lambda_S$  en términos de las masas efectivas y sus respectivos mínimos. Recuerdese que de (3.28), las masas efectivas son

$$m_{Y,\phi}^2 = 2\lambda_H v^2 + \lambda_S w^2 \pm \left( \frac{\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2}{\cos 2\theta} \right)$$

si sumando ambas ecuaciones,

$$\lambda_S w^2 + \lambda_H v^2 = \frac{1}{2}(m_Y^2 + m_\phi^2), \quad (\text{A.1})$$

y si restamos las ecuaciones, entonces

$$\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2 = \frac{1}{2} \cos 2\theta (m_Y^2 - m_\phi^2), \quad (\text{A.2})$$

y sumando estas dos ecuaciones, podemos obtener  $\lambda_S$ ,

$$\lambda_S = \frac{1}{2w^2} (m_Y^2 + m_\phi^2 + m_Y^2 \cos 2\theta - m_\phi^2 \cos 2\theta) = \frac{1}{2w^2} (m_Y^2 \cos^2 \theta + m_\phi^2 \sin^2 \theta) \quad (\text{A.3})$$

y sustituyendo el valor de  $w$  de (3.35),

$$\lambda_S = \frac{\kappa}{m_\chi \Lambda} (m_Y^2 \cos^2 \theta + m_\phi^2 \sin^2 \theta) \quad (\text{A.4})$$

análogamente

$$\lambda_H = \frac{1}{2v^2} (m_Y^2 \sin^2 \theta + m_\phi^2 \cos^2 \theta). \quad (\text{A.5})$$

Podemos expresar también a  $\lambda_{HS}$  en términos de los parámetros efectivos y  $\kappa$ . Para esto, primero notemos que de (3.29)

$$\lambda_{HS} v w = \tan 2\theta (\lambda_S w^2 - \lambda_H v^2)$$

por lo que con (A.2),

$$\lambda_{HS} = \sqrt{\frac{2\kappa}{m_{\mathcal{X}}\Lambda}} \frac{(m_Y^2 - m_\phi^2) \text{sen } 2\theta}{2v}. \quad (\text{A.6})$$

Ahora, para escribir el potencial efectivo, primero escribimos el potencial fundamental  $V(h', S)$  después del rompimiento de simetría, i.e.,  $V(h', S) = V(h + v, s + w)$

$$V(h, s) = \lambda_H v^2 h^2 + \lambda_S w^2 s^2 + \frac{\lambda_S}{4} s^4 + \frac{\lambda_H}{4} h^4 + \lambda_{HS} v w h s + \lambda_S w s^3 + \lambda_H v h^3 + \frac{\lambda_{HS}}{4} s^2 h^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} v h s^2 + \frac{\lambda_{HS}}{2} w s h^2, \quad (\text{A.7})$$

después de hacer la sustitución (3.33), se tiene el potencial (3.38). Cálculamos las potencias de  $h$  y  $s$ :

$$\begin{aligned} h^2 &= \phi^2 \cos^2 \theta + Y^2 \text{sen}^2 \theta + \phi Y \text{sen } 2\theta, \\ s^2 &= \phi^2 \text{sen}^2 \theta + Y^2 \cos^2 \theta - \phi Y \text{sen } 2\theta, \\ hs &= \frac{1}{2}(Y^2 - \phi^2) \text{sen } 2\theta + \phi Y \cos 2\theta \\ h^3 &= \phi^3 \cos^3 \theta + 3\phi^2 Y \cos^2 \theta \text{sen } \theta + 3\phi Y^2 \cos \theta \text{sen}^2 \theta + Y^3 \text{sen}^3 \theta, \\ s^3 &= -\phi^3 \text{sen}^3 \theta + 3\phi^2 Y \text{sen}^2 \theta \cos \theta - 3\phi Y^2 \text{sen } \theta \cos^2 \theta + Y^3 \text{sen}^3 \theta, \\ h^4 &= \phi^4 \cos^4 \theta + 4\phi^3 Y \cos^3 \theta \text{sen } \theta + 6\phi^2 Y^2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta + 4\phi Y^3 \cos \theta \text{sen}^3 \theta + Y^4 \text{sen}^4 \theta, \\ s^4 &= \phi^4 \text{sen}^4 \theta - 4\phi^3 Y \text{sen}^3 \theta \cos \theta + 6\phi^2 Y^2 \cos^2 \theta \text{sen}^2 \theta - 4\phi Y^3 \text{sen } \theta \cos^3 \theta + Y^4 \cos^4 \theta, \\ hs^2 &= \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta (\phi^3 \text{sen } \theta + Y^3 \cos \theta) + \phi^2 Y \cos \theta (\cos^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) - \phi^2 Y \text{sen } \theta (\cos 2\theta + \cos^2 \theta), \\ h^2 s &= \frac{1}{2} \text{sen } 2\theta (Y^3 \text{sen } \theta - \phi^3 \cos \theta) + \phi^2 Y \cos \theta (\cos 2\theta - \text{sen}^2 \theta) + \phi Y^2 \text{sen } \theta (\cos 2\theta + \cos^2 \theta), \\ h^2 s^2 &= \frac{1}{4} (\phi^4 + Y^4) \text{sen}^2 2\theta + Y^2 \phi^2 (\cos 4\theta + \frac{1}{2} \text{sen}^2 2\theta) + \phi Y^3 \text{sen } 2\theta \cos 2\theta - \phi^3 Y \text{sen } 2\theta \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Podemos sustituir los términos cuadráticos y verificar que son las masas (3.28). Por ejemplo, el término de masa para  $\phi$  proviene de los términos  $\phi^2$ , de los cuales hay contribuciones de  $h^2$ ,  $s^2$  y  $hs$ ,

$$\frac{1}{2} m_\phi^2 = \lambda_H v^2 \cos^2 \theta + \lambda_S w^2 \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} \lambda_{HS} v w \text{sen } 2\theta.$$

También se puede verificar que el acoplamiento  $\lambda_{\phi Y} = 0$ ,

$$\lambda_{\phi Y} = \lambda_H v^2 \text{sen } 2\theta - \lambda_S w^2 \text{sen } 2\theta + \lambda_{HS} v w \cos 2\theta,$$

el cual es justamente el elemento fuera de la diagonal en la matriz (3.24). También podemos calcular los acoplamientos del potencial efectivo (3.38).

$$\lambda_{Y^2\phi} \equiv \frac{2m_Y^2 + m_\phi^2}{2v} \cos \theta \left( \sin^2 \theta - \sqrt{\frac{\kappa \sin^2 2\theta}{2m_\chi \Lambda v^2}} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$\lambda_{Y\phi^2} \equiv \frac{2m_\phi^2 + m_Y^2}{2v} \sin \theta \left( \cos^2 \theta + \sqrt{\frac{\kappa \sin^2 2\theta}{2m_\chi \Lambda v^2}} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\lambda_{Y^3} \equiv \frac{m_Y^2 \sin \theta}{2v} \left( \sin^2 \theta + \sqrt{\frac{\kappa \sin^2 2\theta}{2m_\chi \Lambda v^2}} \cot^2 \theta \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_{\phi^3} \equiv \frac{m_\phi^2 \cos \theta}{2v} \left( \cos^2 \theta - \sqrt{\frac{\kappa \sin^2 2\theta}{2m_\chi \Lambda v^2}} \tan^2 \theta \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\lambda_{Y^4} \equiv \frac{1}{8v^2} (m_Y^2 \sin^2 \theta + m_\phi^2 \cos^2 \theta) \sin^4 \theta + \frac{\kappa}{4m_\chi \Lambda} (m_Y^2 \cos^2 \theta + m_\phi^2 \sin^2 \theta) \cos^4 \theta + \sqrt{\frac{2\kappa}{m_\chi \Lambda}} \frac{m_Y^2 - m_\phi^2}{32v} \sin^2 2\theta, \quad (\text{A.12})$$

$$\lambda_{\phi^4} \equiv \frac{1}{8v^2} (m_Y^2 \sin^2 \theta + m_\phi^2 \cos^2 \theta) \cos^4 \theta + \frac{\kappa}{4m_\chi \Lambda} (m_Y^2 \cos^2 \theta + m_\phi^2 \sin^2 \theta) \sin^4 \theta + \sqrt{\frac{2\kappa}{m_\chi \Lambda}} \frac{m_Y^2 - m_\phi^2}{32v} \sin^2 2\theta, \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda_{Y^3\phi} \equiv \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[ \left( \frac{1}{2v^2} \sin^4 \theta - \frac{\kappa}{m_\chi \Lambda} \cos^4 \theta \right) m_Y^2 + \left( \frac{1}{2v^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\kappa}{m_\chi \Lambda} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) m_\phi^2 + \sqrt{\frac{2\kappa}{m_\chi \Lambda}} \frac{m_Y^2 - m_\phi^2}{v} \sin 2\theta \cos 2\theta \right], \quad (\text{A.14})$$

$$\lambda_{Y\phi^3} \equiv \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[ \left( \frac{1}{2v^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\kappa}{m_\chi \Lambda} \cos^2 \theta \sin^2 \theta \right) m_Y^2 + \left( \frac{1}{2v^2} \cos^4 \theta - \frac{\kappa}{m_\chi \Lambda} \sin^4 \theta \right) m_\phi^2 - \sqrt{\frac{2\kappa}{m_\chi \Lambda}} \frac{m_Y^2 - m_\phi^2}{v} \sin 2\theta \cos 2\theta \right], \quad (\text{A.15})$$

$$\lambda_{Y^2\phi^2} \equiv \frac{3}{8} \sin^2 2\theta \left[ \left( \frac{1}{2v^2} \sin^2 \theta + \frac{\kappa}{m_\chi} \cos^2 \theta \right) m_Y^2 + \left( \frac{1}{2v^2} \cos^2 \theta + \frac{\kappa}{m_\chi} \sin^2 \theta \right) m_\phi^2 \right] + \sqrt{\frac{2\kappa}{m_\chi \Lambda}} \frac{(m_Y^2 - m_\phi^2)}{8v} \sin 2\theta (\cos 4\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta). \quad (\text{A.16})$$





# Bibliografía

- [1] G. Bertone and D. Hooper, *Rev. Mod. Phys.* **90** (2018), no. 4, 045002, [1605.04909].
- [2] S. van den Bergh, *Publ. Astron. Soc. Pac.* **111** (1999), 657, [astro-ph/9904251].
- [3] Y. Sofue and V. Rubin, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **39** (2001), 137–174, [astro-ph/0010594].
- [4] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010), 451–497, [0805.1726].
- [5] A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13** (2010), 3, [1002.4928].
- [6] H. Saiedi, (2018), 1801.00911.
- [7] N. Alkofer, *Quantum Gravity from Fundamental Questions to Phenomenological Applications*, Ph.D. thesis, Nijmegen U., 2018.
- [8] L. Perivolaropoulos and L. Kazantzidis, *Int. J. Mod. Phys.* **D28** (2019), no. 05, 1942001, [1904.09462].
- [9] B. Giblin, M. Cataneo, B. Moews, and C. Heymans, (2019), 1906.02742.
- [10] M. Milgrom, *MOND vs. dark matter in light of historical parallels*, 2019.
- [11] A. Hodson and H. Zhao, *Astron. Astrophys.* **598** (2017), A127, [1701.03369].
- [12] R. H. Sanders, *Can. J. Phys.* **93** (2015), no. 2, 126–138, [1404.0531].
- [13] N. W. Evans and V. Belokurov, *RIP: The MACHO Era (1974-2004)*, in *Proceedings, 5th International Workshop on The identification of dark matter (IDM 2004): Edinburgh, UK, September 6-10, 2004*, 2004, pp. 141–150.
- [14] C. Arina et al., *JHEP* **11** (2016), 111, [1605.09242].
- [15] V. Beylin, M. Yu. Khlopov, V. Kuksa, and N. Volchanskiy, *Symmetry* **11** (2019), no. 4, 587, [1904.12013].
- [16] S. Profumo, L. Giani, and O. F. Piattella, *Universe* **5** (2019), no. 10, 213, [1910.05610].

- [17] T. Lin, PoS **333** (2019), 009, [1904.07915].
- [18] R. Daido, F. Takahashi, and W. Yin, JCAP **1705** (2017), no. 05, 044, [1702.03284].
- [19] PandaX-II, J. Xia et al., Phys. Lett. **B792** (2019), 193–198, [1807.01936].
- [20] LUX, D. S. Akerib et al., (2019), 1908.03479.
- [21] XENON, E. Aprile et al., Phys. Rev. Lett. **121** (2018), no. 11, 111302, [1805.12562].
- [22] Planck, N. Aghanim et al., (2018), 1807.06209.
- [23] D. Choudhury and D. Sachdeva, Phys. Rev. D **100** (2019), 035007.
- [24] E. W. Kolb and A. J. Long, Phys. Rev. **D96** (2017), no. 10, 103540, [1708.04293].
- [25] C. P. Burgess, M. Pospelov, and T. ter Veldhuis, Nucl. Phys. **B619** (2001), 709–728, [hep-ph/0011335].
- [26] A. Djouadi, O. Lebedev, Y. Mambrini, and J. Quevillon, Phys. Lett. **B709** (2012), 65–69, [1112.3299].
- [27] J. A. Casas, D. G. Cerdeño, J. M. Moreno, and J. Quilis, JHEP **05** (2017), 036, [1701.08134].
- [28] G. Krnjaic, Phys. Rev. **D94** (2016), no. 7, 073009, [1512.04119].
- [29] S. Matsumoto, Y.-L. S. Tsai, and P.-Y. Tseng, JHEP **07** (2019), 050, [1811.03292].
- [30] Y. G. Kim and K. Y. Lee, Phys. Rev. **D75** (2007), 115012, [hep-ph/0611069].
- [31] R. Essig, Phys. Rev. **D78** (2008), 015004, [0710.1668].
- [32] M. A. Fedderke, J.-Y. Chen, E. W. Kolb, and L.-T. Wang, JHEP **08** (2014), 122, [1404.2283].
- [33] A. Beniwal, F. Rajec, C. Savage, P. Scott, C. Weniger, M. White, and A. G. Williams, Phys. Rev. **D93** (2016), no. 11, 115016, [1512.06458].
- [34] M. Escudero, A. Berlin, D. Hooper, and M.-X. Lin, JCAP **1612** (2016), 029, [1609.09079].
- [35] G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, M. Lindner, Y. Mambrini, M. Pierre, S. Profumo, and F. S. Queiroz, Eur. Phys. J. **C78** (2018), no. 3, 203, [1703.07364].
- [36] GAMBIT, P. Athron et al., Eur. Phys. J. **C79** (2019), no. 1, 38, [1808.10465].
- [37] G. Belanger, F. Boudjema, and A. Pukhov, *micrOMEGAs : a code for the calculation of Dark Matter properties in generic models of particle interaction*, in *The Dark Secrets of the Terascale: Proceedings, TASI 2011, Boulder, Colorado, USA, Jun 6 - Jul 11, 2011*, 2013, pp. 739–790.

- [38] ATLAS, CMS, G. Aad et al., JHEP **08** (2016), 045, [1606.02266].
- [39] D. V. S. Michael E. Peskin, *An introduction to quantum field theory*, CRC Press, 1995.
- [40] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics*, John Wiley and Sons, 1984, 1984.
- [41] M. Kachelriess, *Symmetries and symmetry breaking*, <http://web.phys.ntnu.no/~mika/ CPP/ch11.pdf>.
- [42] S. N. Ramos-Sánchez, *Relatividad para futuros físicos*, las prensas de ciencias, 2018.
- [43] K. Freese, EAS Publ. Ser. **36** (2009), 113–126, [0812.4005].
- [44] J. de Swart, G. Bertone, and J. van Dongen, (2017), 1703.00013, [Nature Astron.1,0059(2017)].
- [45] G. Lazarides, Lect. Notes Phys. **720** (2007), 3–34, [hep-ph/0601016].
- [46] XENON, E. Aprile et al., Phys. Rev. Lett. **119** (2017), no. 18, 181301, [1705.06655].
- [47] M. Felcini, *Searches for Dark Matter Particles at the LHC*, in *53rd Rencontres de Moriond on Cosmology La Thuile, Italy, March 17-24, 2018*, 2018.
- [48] M. S. T. Edward W. Kolb, *The early universe*, Addison-Wesley, 1987.
- [49] P. Gondolo and G. Gelmini, Nuclear Physics B **360** (1991), no. 1, 145 – 179.
- [50] B. Patt and F. Wilczek, (2006), hep-ph/0605188.
- [51] J. D. Wells, (1994), hep-ph/9404219.
- [52] B. Feldstein, A. L. Fitzpatrick, and E. Katz, JCAP **1001** (2010), 020, [0908.2991].
- [53] S. Chang, A. Pierce, and N. Weiner, Phys. Rev. **D79** (2009), 115011, [0808.0196].
- [54] V. Bonnivard, C. Combet, D. Maurin, and M. G. Walker, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **446** (2015), 3002–3021, [1407.7822].
- [55] K. Ichikawa, M. N. Ishigaki, S. Matsumoto, M. Ibe, H. Sugai, K. Hayashi, and S.-i. Horigome, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **468** (2017), no. 3, 2884–2896, [1608.01749].
- [56] J. Kozaczuk and T. A. W. Martin, JHEP **04** (2015), 046, [1501.07275].
- [57] X.-G. He, T. Li, X.-Q. Li, and H.-C. Tsai, Mod. Phys. Lett. **A22** (2007), 2121–2129, [hep-ph/0701156].
- [58] J. A. Arroyo and S. Ramos-Sanchez, J. Phys. Conf. Ser. **761** (2016), no. 1, 012014, [1608.00791].

- [59] J. Ellis, PoS **PLANCK2015** (2015), 041, [1510.06204].
- [60] A. Falkowski, C. Gross, and O. Lebedev, JHEP **05** (2015), 057, [1502.01361].
- [61] A. Semenov, Comput. Phys. Commun. **180** (2009), 431–454, [0805.0555].