



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

ENTROPÍA Y COMPLEJIDAD EN
SISTEMAS NUCLEARES: CASO DEL
 ^{48}Ca .

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS
(FÍSICA)

PRESENTA:

LEONARDO LÓPEZ HERNÁNDEZ.

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VÍCTOR MANUEL VELÁZQUEZ AGUILAR.
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

CD. MX.

ENERO

2020



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

HOJA DE DATOS

1. Datos del alumno

López

Hernández

Leonardo

55 17 67 12 97

Universidad Nacional Autónoma de México

Posgrado en Ciencias Físicas

Maestría en Ciencias

40906621-2

2. Datos del Tutor Dr.

Velázquez

Aguilar

Víctor Manuel

3. Datos Sinodal 1 Dr.

Martínez

Quiroz

Enrique

4. Datos Sinodal 2 Dra.

Amador

Valenzuela

Paulina

5. Datos Sinodal 3 Dr.

Fossion

Ruben Yvan Maarten

6. Datos Sinodal 4 Dra.

Ortiz

Salazar

María Esther

*“El azar no es más que la medida
de la ignorancia del hombre”*

Henri Poincaré

*A mis padres que siguen estando conmigo a pesar de las adversidades,
que sintiendo el peso de la vida y el tiempo, no han sabido rendirse.*

Agradecimientos

Agradezco profúndamente a mis padres por apoyarme en todo momento, por haber inspirado en mí la curiosidad de pensar más allá de lo que ven nuestros ojos y a no claudicar aún si los escenarios son contrarios. A mis hermanas y a toda mi familia por estar conmigo incluso en los peores momentos brindando apoyo y confort para salir de los problemas de la mejor manera posible.

Agradezco también al Dr. Víctor Manuel Velázquez Aguilar, director de este trabajo, por haberme acompañado con sus conocimientos y todo su apoyo durante el transcurso de mis estudios de maestría.

Finalmente, pero no menos importantes, a todos los compañeros y amigos del laboratorio de óptica cuántica de la facultad de ciencias, pues sus pláticas y discusiones han servido para reforzar muchos de los conocimientos empleados en el desarrollo de este trabajo.

Índice

Agradecimientos	iii
Índice	v
Introducción	1
1 Breve revisión del Modelo de Capas Nuclear.	3
2 Simetrías en el núcleo.	11
2.1 Momento Angular y Spin	11
2.2 Potencial de una partícula y el término espin-órbita en el modelo de capas.	13
2.3 Isospín Nuclear	20
3 Método de Tri-diagonalización de Lanczos.	27
3.1 Método de Lanczos.	27
3.2 Aplicación en el Esquema m.	31
4 Caos Cuántico en espectro nuclear del modelo de capas.	33
4.1 Caos Clásico	33
4.2 Caos Cuántico	34
4.3 El núcleo como un sistema caótico.	38
4.4 Caracterización de sistemas cuánticos caóticos por el ruido $1/f$	51
5 Complejidad de los estados nucleares. Entropía de Shannon como medida de la caoticidad.	61
5.1 Complejidad de los estados nucleares en el ^{48}Ca	63
5.2 Longitud de coherencia y ancho de la curva.	69
6 Comportamiento de la distribución de los coeficientes de expansión como reflejo de la caoticidad.	85
Conclusiones	97

Introducción

La búsqueda por una generalización del concepto de caos clásico al régimen cuántico tuvo un boom cuando Bogihas, Giannoni y Schmidt conjeturaron que el espectro de las diferencias a primeros vecinos, sigue una distribución de Wigner para aquellos sistemas que son clásicamente caóticos, teniendo con ello un criterio base para decir cuando un sistema cuántico es caótico.

Con ello en mente se empezó por analizar distintos sistemas de gran importancia en la física de hoy en día, uno de ellos, el núcleo atómico, el cual fue descrito de buena manera por el modelo de capas nuclear, que en primera instancia es similar al modelo de capas atómico con sus respectivas diferencias.

Posteriormente, A. Relaño et. al. conjeturaron que en los sistemas cuánticos el espectro de energías puede ser tratado como una serie temporal, siendo posible de esta idea caracterizar un sistema cuántico como caótico cuando éste presenta un ruido del tipo $1/f$, mientras que los sistemas integrables, presentan un ruido $1/f^2$. Con más de un criterio para decidir si un sistema es caótico o integrable, se busca de alguna manera entender el grado de caoticidad de tal sistema.

Si bien, en el marco clásico la caoticidad de un sistema viene dada por medio de los exponentes de Lyapunov que miden la separación espacial de dos trayectorias inicialmente cercanas, para tiempos posteriores en el caso de sistemas caóticos, esta separación crece de forma exponencial, teniendo una medida del caos al fijarse en el tamaño de los coeficientes de Lyapunov. Este concepto no puede ser trasladado al régimen cuántico debido a que el concepto de trayectoria pierde sentido debido al principio de incertidumbre de Heisenberg.

Distintas ideas han sido desarrolladas en estos últimos años, por ejemplo, dar una generalización de los coeficientes de Lyapunov cuánticos y medir la caoticidad midiendo el grado de simetría del sistema, sin embargo, no son teorías totalmente desarrolladas y además, en el caso de la formulación del caos vía la simetría, no se puede asegurar que las constantes de movimiento sean independientes entre sí.

Por todo lo anterior, aún hace falta tener una idea que pueda decir si un sistema es más caótico que otro, una solución posible se encuentra en considerar los valores de entropía de información para cada uno de los eigenestados del sistema.

Para el caso nuclear, se tiene que el núcleo es un sistema de muchos cuerpos, el cuál se puede modelar microscópicamente por medio del modelo de capas nuclear cuando las configuraciones de uno o pocos nucleones son dominantes, cálculos hechos en este esquema revelan la caoticidad del núcleo, y en base a ello, se tiene que un sistema nuclear es más caótico que otro dependiendo de un parámetro que puede variar al modelar el Hamiltoniano nuclear como un término en una representación diagonal más un término cuadrupolar, el parámetro es, en este caso, una pequeña interacción.

Para los cálculos, se empleó un isótopo del ^{48}Ca modelado a partir de un carozo de ^{40}Ca y ocho neutrones distribuidos en la capa pf , se obtuvieron las energías de los estados nucleares puestos en la base del modelo de capas y se corroboró, al analizar la distribución del espaciamiento de niveles cercanos y el ruido del espectro considerando las energías como una serie temporal, que cuando la interacción crece el sistema se acerca más a ser un sistema no integrable.

Se analizó la entropía de información, encontrándose que una medida de qué tan caótico es un núcleo está, en la anchura de la distribución de la exponencial de la entropía de los estados nucleares puestos a estos últimos como función de las energías de cada estado, esto resulta en que la distribución es una gaussiana y su ancho está en correspondencia con el tamaño de la interacción, teniendo como resultado que, para un núcleo con una interacción mayor, la complejidad de la distribución de los estados es mayor.

Finalmente, lo anterior se corroboró al analizar todos los coeficientes de expansión en la base del modelo de capas, encontrándose que para cuando el sistema tiene una interacción más grande, es decir, es más cercano a un sistema no integrable, la distribución de los coeficientes que presenta una forma descrita por una distribución de Lorentz, modifica la anchura y el alto de dicha distribución, pudiéndose cuantificar el caos empleando éstas medidas.

Capítulo 1

Breve revisión del Modelo de Capas Nuclear.

El núcleo atómico constituye un sistema de muchos cuerpos, en general, con muchos componentes y cada uno de estos posee sus respectivos grados de libertad, por lo que, describir de una manera exacta a tal sistema es muy complicado, sin embargo, en el desarrollo de la ciencia nuclear, se han propuesto modelos que son capaces de describir al núcleo de buena manera, haciendo aproximaciones dependiendo de las propiedades que se quieran describir y con ello permitiendo que los cálculos se puedan llevar a cabo [1].

Las distintas maneras de entender o modelar al núcleo se pueden clasificar en tres clases: *modelos microscópicos*, *modelos macroscópicos o geométricos* y *modelos algebraicos*. Unos de estos modelos, es el modelo de capas nuclear (Nuclear Shell Model), que describe las propiedades nucleares en términos del comportamiento de los nucleones que constituyen al núcleo, dando buenos resultados al describir los procesos que en él suceden, sin embargo, esto no siempre fue así. En sus inicios tuvo un desarrollo muy lento debido a que fallaba al reproducir las energías de enlace. Esto motivó a Mayer en 1949 y a Haxel, Jensen y Suess en el mismo año, a introducir un término de acoplamiento espín-órbita en el potencial de una partícula, esto llevó a que los niveles de energía dados por el número cuántico orbital se dividieran debido a la contribución del término espín-órbita, logrando con eso un mejor tratamiento de las energías de enlace y una mejor descripción de los datos experimentales.

El núcleo está compuesto esencialmente de neutrones y protones, confinados a un volumen en donde actúan fuerzas débiles, fuertes y de Coulomb; a los neutrones y protones en el núcleo se les llama “nucleones”, en el modelo de capas nuclear, se asume que, en primera aproximación, cada uno de los nucleones se mueve de manera independiente en un potencial medio que contiene los potenciales de interacción con

los otros nucleones en el núcleo. Hay que notar que esto no es así, ya que el núcleo constituye un problema de A cuerpos interactuantes vía el potencial nucleón-nucleón, misma que es diferente de la interacción libre nucleón-nucleón.

Describir lo que sucede en el núcleo es un problema difícil, ya que en él se presentan dos hechos importantes:

- La dificultad de describir A nucleones interactuantes hace que se requiera describir la dinámica de un problema de A cuerpos.
- Es necesario describir el campo promedio nuclear a partir de la interacción nucleón-nucleón proveniente de un potencial de la forma $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ existente entre cada dos nucleones.

En el modelo de capas nuclear, se propuso que el núcleo tiene una estructura de capas, parecido a su análogo en el caso atómico, sin embargo, con diferencias bastante marcadas debido a que el potencial promedio dentro del núcleo es muy diferente al potencial de Coulomb presente en el caso atómico; aunado a esto, los componentes del núcleo (neutrones y protones), pueden ser tratados de una manera similar como estados de una sola partícula, lo cual lleva a la introducción de un número cuántico adicional llamado isospín; además, en el núcleo, no hay un centro de fuerzas como en el caso atómico.

Debido a la naturaleza fermiónica de los nucleones, la distribución de éstos en las diferentes capas, debe estar de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, el cual dicta que dos partículas de esta naturaleza no pueden ocupar estados con los mismos números cuánticos, con lo cual, cada capa descrita con j número cuántico de momento angular total, solo puede estar ocupada por un cierto número de nucleones idénticos, lo cual lleva a que se formen sub-capas dentro de una capa. Cada capa está caracterizada, al igual que en el caso atómico, por números n , l y j , que son el número cuántico principal, el número cuántico de momento angular orbital y el número cuántico de momento angular total. Las capas totalmente cerradas se identifican con $J = 0$, donde $\vec{J} = \sum_{k=1}^{2j+1} \vec{j}(k)$, el cual denota el momento angular total para las $2j+1$ partículas que llenan los estados $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ disponibles de la capa.

Al igual que en el caso atómico, se tiene la presencia de los llamados números mágicos, que corresponden a las estructuras de capas cerradas:

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$$

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82$$

EXPERIMENTAL EVIDENCE FOR MAGIC NUMBERS

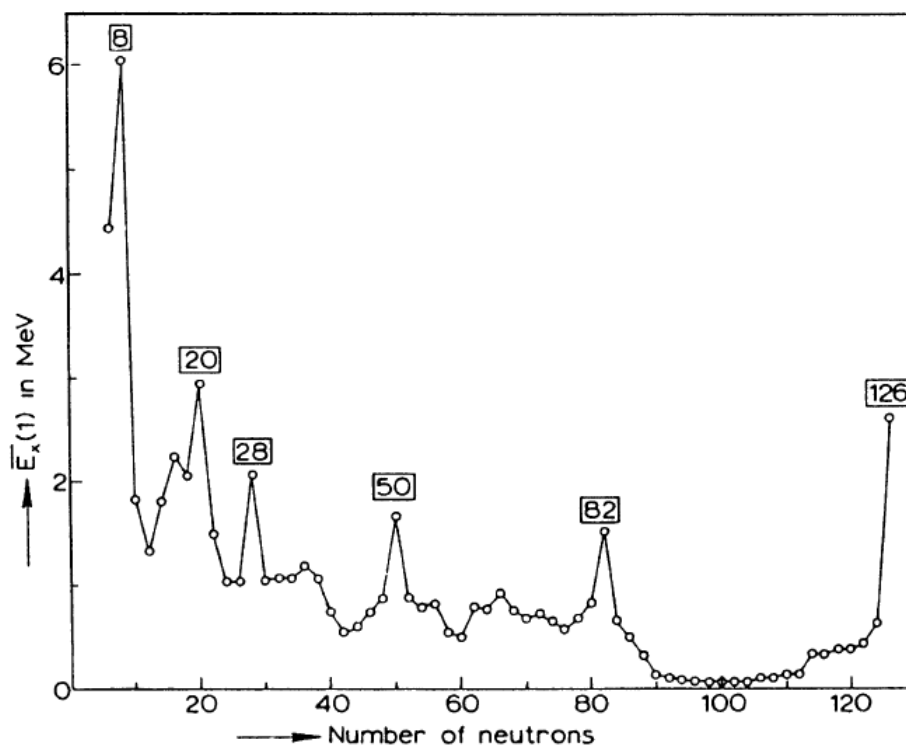


Figura 1.1: Evidencia experimental de los números mágicos, se grafica la energía de excitación como función del número de neutrones, para núcleos doblemente par esta energía alcanza máximos notables con respecto a los demás. [Tomada de Broussard 1977]

Donde N indica el número de neutrones y Z el número de protones. Los núcleos caracterizados por estos números, son particularmente estables y se denominan “núcleos mágicos”, cuando ambos, Z y N son números mágicos, se denominan “doblemente mágicos”, por ejemplo: ${}^4\text{He}^2$, ${}^{16}\text{O}^8$, ${}^{40}\text{Ca}^{20}$, ${}^{48}\text{Ca}^{20}$ y ${}^{208}\text{Pb}^{82}$ ¹, los cuales tienen una gran estabilidad, la evidencia experimental de la existencia de los números mágicos puede ser observada en la figura 1.

El modelo de capas se encarga pues, de describir lo que sucede en el núcleo, llegando a tener buenos resultados a la hora de obtener los diferentes números mágicos cuando al hamiltoniano de una partícula se le agrega el término de interacción

¹Aquí se emplea la siguiente notación:

$${}^A_Z X_N$$

Donde A es el número de nucleones, Z el número de protones y N el número de neutrones.

espín-órbita. Para ver esto considérese soluciones $\phi_a(\vec{r})$ a la ecuación de Schrödinger, donde el subíndice a , etiqueta al conjunto de números cuánticos que describe al sistema $a = n_a, l_a, j_a, m_a, \dots$, tales funciones se pueden tomar ortogonales, de tal manera que:

$$[T + U(r)]\phi_a(\vec{r}) = \varepsilon_a \phi_a(\vec{r}) \quad (1.1)$$

Donde T es el operador de la energía cinética, $U(r)$ es un potencial medio y ε_a es la energía de una sola partícula.

Ya que el núcleo es un conjunto de A cuerpos, el Hamiltoniano para estos nucleones considerándolos como partículas independientes, se puede escribir como

$$H_0 = \sum_{i=1}^A [T_i + U(r_i)] = \sum_{i=1}^A h_0(i) \quad (1.2)$$

Las eigenfunciones de H_0 , pueden ser expresadas como el producto de eigenfunciones de una sola partícula, esto sin considerar la naturaleza de estas:

$$\Phi_{a_1, a_2, \dots, a_A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \prod_{i=1}^A \phi_{a_i}(\vec{r}_i) \quad (1.3)$$

Donde la energía será la suma de los términos de partícula individual:

$$E_0 = \sum_{i=1}^A \varepsilon_{a_i} \quad (1.4)$$

Para el caso de dos nucleones, estos son partículas de spin $\frac{1}{2}$, por lo que debido al principio de exclusión de Pauli, no pueden tener los mismos números cuánticos, y debido a la indistinguibilidad de las partículas, su función de onda será en la forma de un determinante de Slater, de tal manera que sea antisimétrica ante el intercambio de las partículas:

$$\begin{aligned} \Phi_{a_1, a_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_{a_1}(\vec{r}_1) & \phi_{a_1}(\vec{r}_2) \\ \phi_{a_2}(\vec{r}_1) & \phi_{a_2}(\vec{r}_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{a_1}(\vec{r}_1) \cdot \phi_{a_2}(\vec{r}_2) - \phi_{a_1}(\vec{r}_2) \cdot \phi_{a_2}(\vec{r}_1)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Hay que enfatizar que si las eigenfunciones tienen, por ejemplo, la parte espacial simétrica, esto lleva a que la parte spinorial sea antisimétrica y viceversa, teniendo así para el caso de dos nucleones idénticos funciones antisimétrica total, pues de lo contrario

si se tiene por ejemplo, funciones antisimetricas en ambos espacios de coordenadas, la paridad de la función completa será 1, por lo que al final, se tendría una función de onda de paridad par ante el intercambio de partículas.

El caso general significa tener ahora A nucleones, para ello, las funciones de onda serán dadas como una generalización de (1.5):

$$\Phi_{a_1, a_2, \dots, a_A}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{a_1}(\vec{r}_1) & \phi_{a_1}(\vec{r}_2) & \cdots & \phi_{a_1}(\vec{r}_A) \\ \phi_{a_2}(\vec{r}_1) & \phi_{a_2}(\vec{r}_2) & \cdots & \phi_{a_2}(\vec{r}_A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{a_A}(\vec{r}_1) & \phi_{a_A}(\vec{r}_2) & \cdots & \phi_{a_A}(\vec{r}_A) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

Por su parte, en el Hamiltoniano el término del potencial para A nucleones, no está explícitamente dado debido a la complejidad de las interacciones entre los nucleones que componen al núcleo. Sin embargo, se puede suponer que este Hamiltoniano consiste de una suma de términos de energía cinética de partícula independiente más un término, que lleva la interacción de un par de partículas; por lo que la ecuación completa de Schrödinger tendrá la forma:

$$H = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V_{i,j} \quad (1.7)$$

Donde se ha considerado una restricción a interacciones de solo dos cuerpos. En la expresión anterior, se puede introducir cualquier potencial de una sola partícula, lo cual permite escribir el Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^A (T_i + U(r_i)) + \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V_{i,j} - \sum_{i=1}^A U(r_i) \right) \\ &= H_0 + H_{res} \\ &= \sum_{i=1}^A h_0(i) + H_{res} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Donde se ha tomado

$$H_{res} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A V_{i,j} - \sum_{i=1}^A U(r_i) \quad (1.9)$$

H_0 describe el movimiento de A nucleones independientes unos de otros en el mismo campo medio, mientras que H_{res} , representa la interacción residual que refleja el hecho de que las partículas no se mueven de forma completamente independiente. Se puede determinar $U(r)$, partiendo de un potencial de interacción conocido $V_{i,j}$ y una función de onda tipo determinante de Slater que sería una buena aproximación para la descripción de un sistema de A partículas, ésta teoría se conoce como el método de Hartree-Fock.

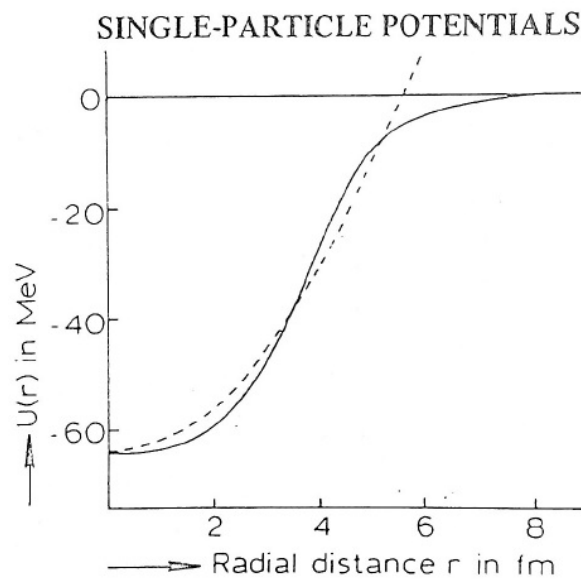


Figura 1.2: Dos potenciales que usados frecuentemente como potenciales de una partícula, la línea punteada es de tipo oscilador armónico, mientras que la línea sólida es el potencial de Saxon-Woods. [Tomada de Broussard 1977]

Cálculos numéricos del método de Hartree-Fock, indican que las soluciones a un potencial de tipo oscilador armónico, son una buena aproximación al estudio de nucleones independientes. La forma de este potencial es conocida en todas las áreas de la física pues modela de forma correcta diversos fenómenos en distintas áreas:

$$U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (1.10)$$

Donde m , se refiere a la masa de la partícula y ω a su frecuencia angular. Este

potencial tiene la ventaja de que se puede tratar de manera analítica, sin embargo, posee la característica de que cuando la distancia r al origen crece, el potencial se va al infinito. Otro potencial es el de Saxon-Woods, el cual se anula para distancias grandes al origen (véase figura 2), sin embargo, tiene la desventaja de ocupar métodos numéricos para su solución.

En el Hamiltoniano dado en (1.8), se puede ignorar la interacción residual (H_{res}), la cual es tratada como una perturbación en el sistema de partícula independiente. Por otra parte, los estados nucleares son independientes de su orientación en el espacio, por lo que el momento angular J se conserva, lo cual hace que este número sea un buen número cuántico para describir el sistema. Por esta razón, es común construir estados de muchas partículas de momento angular definido.

El acoplamiento de funciones de onda de una sola partícula a sistemas de muchas partículas con un spin bien definido, se realiza empleando los llamados coeficientes de Clebsch-Gordan. Debido al principio de exclusión de Pauli, estos estados deben ser antisimétricos en las coordenadas de partículas idénticas.

Otro tratamiento para generar estados base en el espacio de configuración en el cual las funciones de onda de un sistema de muchas partículas no se acoplan a un momento angular J bien definido, en el cual se especifica si los estados de una partícula $|n, l, j, m\rangle$ están o no ocupados, se da en el llamado esquema m .

Por su parte, la dimensión de un espacio de configuración, incrementa muy rápidamente con el número de capas que se toman en cuenta, esto debido a los distintos valores de m . La dimensión también depende fuertemente del número de partículas.

Capítulo 2

Simetrías en el núcleo.

Como ya se dijo, el núcleo está compuesto de protones y neutrones, estos dos componentes guardan cierta relación, la más evidente es que su masa es muy parecida, pues se cumple $\frac{\Delta m}{m} \cong 1.4 \times 10^{-3}$, además de exhibir comportamientos idénticos en sus interacciones nucleares. Esto llevó a Heisenberg en 1932 a considerar a estas dos partículas como estados distintos de una sola partícula a la cual denominó “nucleón”.

En una clara analogía al tratamiento del spin, Heisenberg introdujo un nuevo número cuántico para el nucleón cuyo valor es de $\frac{1}{2}$ al cual se le denomina “isospin”, mientras que los protones y neutrones tienen valores dados por la proyección del operador de isospin en alguno de los ejes (usualmente el eje z) $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$, respectivamente¹.

Antes de llegar a la teoría del isospin es necesario recordar la teoría del momento angular y del spin para un sistema de dos partículas, la cual se describirá a continuación.

2.1 Momento Angular y Spin

La definición del operador de momento angular lleva a que se satisfagan las relaciones de conmutación propias de este tipo de álgebras, las cuales son:

$$[l_x, l_y] \equiv l_x l_y - l_y l_x = i l_z \quad (2.1)$$

Una relación análoga se cumple para los operadores de spin, los cuales describen el grado de libertad interna de las partículas y a su vez sus eigenvalores en la proyección z , describen dos naturalezas diferentes para éstas.

$$[s_x, s_y] = i s_z \quad (2.2)$$

¹Esto es una elección arbitraria, algunos autores dan valores de la proyección de isospin $+\frac{1}{2}$ al protón y $-\frac{1}{2}$ al neutron, sin que esto modifique en absoluto el tratamiento descrito.

Además, se puede ver que también el cuadrado de los operadores de momento y de espín, son operadores que conmutan con cada una de las componentes respectivas de éstos, esto es:

$$[\mathbf{l}^2, l_i] = 0 \quad (2.3)$$

$$[\mathbf{s}^2, s_i] = 0 \quad (2.4)$$

Con i etiquetando a cualquiera de las tres componentes del momento angular y de espín. Tanto \mathbf{l} y \mathbf{s} , actúan sobre diferentes espacios, es decir, están referidos a grados de libertad diferente, por lo cual, estos conmutan $[\mathbf{l}, \mathbf{s}] = 0$, de todo esto, resulta adecuado definir al operador \mathbf{j} como la suma de \mathbf{l} y \mathbf{s} :

$$\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s} \quad (2.5)$$

Llamado momento angular total, el cual tiene la misma álgebra en su conmutador:

$$[j_x, j_y] = ij_z \quad (2.6)$$

Que se cumple además para permutaciones cíclicas de los índices x, y y z . Debido a las relaciones de conmutación que cumplen \mathbf{l} y \mathbf{s} , también se cumple que el cuadrado de \mathbf{j} conmuta con cada una de sus componentes. La importancia de esta construcción es que ahora se tiene un conjunto completo de operadores que conmutan, a saber, $\{\mathbf{l}^2, \mathbf{s}^2, \mathbf{j}^2, j_z\}$, por lo que si se tiene un estado de cualquiera de ellos será también estado de los restantes. Considerando esto, y notando que el espín intrínseco de los nucleones tiene un valor semi-entero igual a $s = \frac{1}{2}$, se pueden construir eigenfunciones $\Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m}$ que satisfacen:

$$\mathbf{l}^2 \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = l(l+1) \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{s}^2 \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = \frac{3}{4} \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{j}^2 \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = j(j+1) \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} \quad (2.9)$$

$$j_z \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = m \Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} \quad (2.10)$$

Donde $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$, mientras que $j = |l \pm \frac{1}{2}|$. Los estados $\Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m}$ llevan la parte orbital y la parte de espín, por lo que se obtienen como el producto de estas, esto es así porque pertenecen a espacios diferentes, de tal manera que, de una forma más general y explícita, los estados tienen la forma:

$$\Psi_{l, \frac{1}{2}, j, m} = \sum_{m_1, m_2} \langle l, m_l, \frac{1}{2}, m_s | j, m \rangle \varphi_{l, m_l} \chi_{\frac{1}{2}, m_s} \quad (2.11)$$

El término $\langle l, m_l, \frac{1}{2}, m_s | j, m \rangle$ son los llamados coeficientes de Clebsch-Gordan, la presencia de éstos en la ecuación anterior, restringe la suma de tal forma que se debe satisfacer la condición $m_l + m_s = m$.

Falta decir que el tratamiento del problema para un sistema de nucleones es más fácil si se usa el esquema de acoplamiento $j - j$, ya que en él, el momento angular total dado como:

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^A \mathbf{j}(k) \quad (2.12)$$

con k etiquetando a cada nucleón, $\mathbf{j}(k) = \mathbf{j}(k) + \mathbf{s}(k)$ es el momento angular total de cada nucleón y A es el número de nucleones; aquí $\mathbf{j}(k)$ conmuta con el término de acoplamiento spin-órbita de la forma $\sum_{k=1}^A f(r(k)) \mathbf{l}(k) \cdot \mathbf{s}(k)$, así en este esquema, cada elemento del conjunto $\{\mathbf{l}^2, \mathbf{s}^2, \mathbf{j}^2, j_z\}$, conmuta también con el término de acoplamiento spin-órbita, por lo que se pueden usar los correspondientes números cuánticos para describir estados de muchas partículas.

2.2 Potencial de una partícula y el término espín-órbita en el modelo de capas.

La hipótesis más importante para el modelo de capas es la suposición de que un nucleón está sujeto a una interacción que es un promedio de todos los nucleones, esto hace que se pueda modelar con potenciales del tipo oscilador armónico o del tipo Saxon-Woods (potenciales centrales), en la práctica, estos potenciales no reproducen satisfactoriamente los datos experimentales del espectro nuclear, sin embargo, la hipótesis impulsada principalmente por Mayer, que agrega un término de fuerte acoplamiento del tipo espín-órbita, sí reproduce con más fiabilidad los datos nucleares.

El potencial más empleado suele ser el potencial de tipo oscilador armónico, aunque

este potencial diverge cuando r es grande caso contrario al potencial de Saxon-Woods, aún así este potencial saca ventaja pues se pueden obtener soluciones analíticamente y ha sido en general, muy estudiado en diversos campos de la física.

El potencial dado como:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}M_n\omega^2r^2 \quad (2.13)$$

Es un potencial central con M_n es la masa de un nucleón y tiene una energía dada por $\hbar\omega$, r es la distancia entre el nucleón y el origen del marco de coordenadas. Se buscan soluciones que satisfagan la ecuación de Schrödinger para un nucleón en este potencial:

$$H_0\phi(\vec{r}) = E_0\Phi(\vec{r}) \quad (2.14)$$

Donde el Hamiltoniano tiene al forma:

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2M_n} + \frac{1}{2}M_n\omega^2r^2 \quad (2.15)$$

Las soluciones pueden ser puestas en la forma de un producto de soluciones (soluciones separables) para la coordenada radial y para la coordenada angular:

$$\Phi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.16)$$

Aquí, n es el número cuántico asociado a la cuantización de la energía, l es el número cuántico de momento angular y m su proyección. Las soluciones arrojan valores para la energía[1, 3]²:

$$E_{0nl} = (2n + l + \frac{1}{2})\hbar\omega = (N + \frac{3}{2})\hbar\omega \quad (2.17)$$

Donde se ha puesto en la ecuación anterior $N = 2(n - 1) + l$, el cual representa el número cuántico total de osciladores excitados, por su parte, l toma valores tales que $l = N, N - 2, \dots, 1$ o 0 . $N = 0$ tiene la energía característica del estado vacío, además, se puede jugar con las combinaciones de n y l para dar el mismo valor de N , con lo cual se observa que existen estados degenerados, también hay que notar que las soluciones a la parte angular tienen una paridad definida por:

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \phi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.18)$$

²Para una discusión detallada del oscilador armónico cuántico puede verse textos como: Introducción a la mecánica cuántica de Luis de la Peña y Quantum mechanics concepts and applications de Zettili.

La cual corresponde a una paridad par si l es par e impar para valores de l impar, con esto, los valores en la degeneración de la energía para algunos valores de N se pueden ver con claridad en la tabla 2.1.

Energía	N	n	l	nl>	paridad
3/2	0	1	0	1s	+
5/2	1	1	1	1p	-
7/2	2	1	2	1d	+
		2	0	2s	+
9/2	3	1	3	1f	-
		2	1	2p	-
11/2	4	1	4	1g	+
		2	2	2d	+
		3	0	3s	+

Figura 2.1: Degeneración para los estados de energía de un nucleón en el potencial de oscilador armónico, la primera columna está expresada en unidades de $\hbar\omega$.

Para cada valor del momento angular orbital l , hay $2(2l + 1)$ estados, que corresponden a $2l + 1$ proyecciones que son los valores de $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$, el factor de 2 viene del hecho que existen dos proyecciones de spin $+\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$; tomando en cuenta la presencia de neutrones y protones, el número total de nucleones presentes en una capa estará dado por:

$$D_N = 2 \sum_{l=0 \text{ o } 1}^N 2(2l + 1) = (N + 1)(N + 2) \quad (2.19)$$

Así el número total de nucleones que llenan todas las capas desde $N = 0$ hasta $N = N_{max}$ está dado como:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{N=0}^{N_{max}} 2(N + 1)(N + 2) \\ &= \frac{2}{3}(N_{max} + 1)(N_{max} + 2)(N_{max} + 3) \\ &\approx \frac{2}{3}(N_{max} + 2)^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

De (2.19) al sumar sobre N , se puede obtener el número máximo de nucleones (tanto para protones como para neutrones) que pueden ocupar una capa, estos son los números mágicos para el potencial de oscilador armónico:

$$N = 2, 8, 20, 40, 70, 112, 168, \dots$$

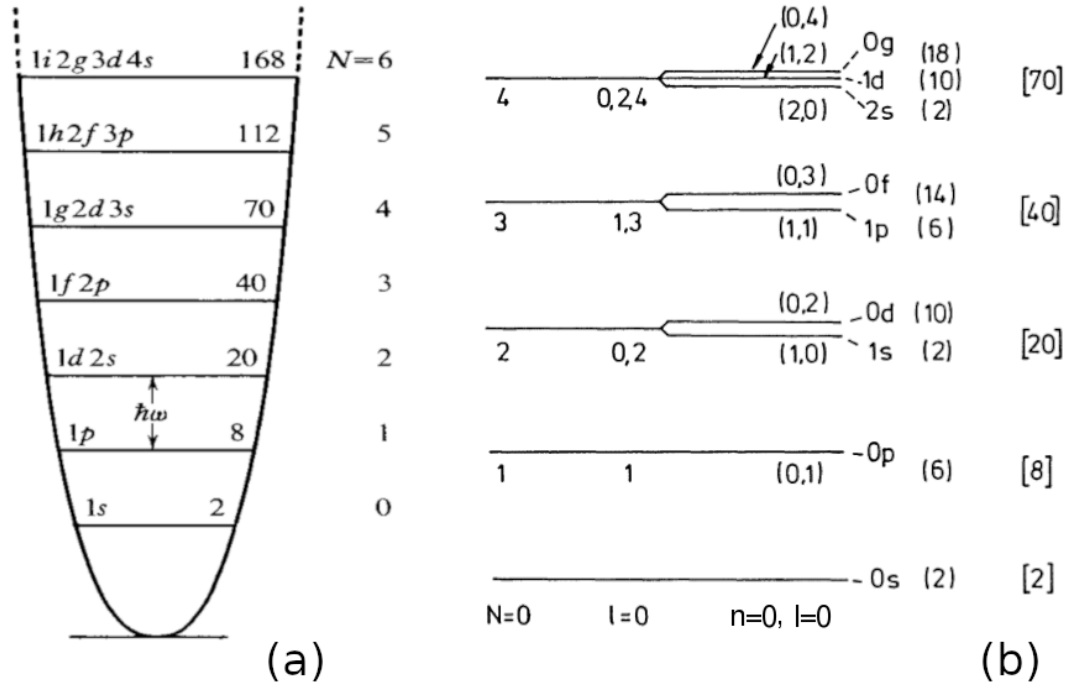


Figura 2.2: (a) Potencial de oscilador armónico, se puede ver el espaciamiento uniforme de los niveles, los niveles son de paridad par (impar) cuando N es par (impar). (b) Estados degenerados del espectro de energías del oscilador armónico. Tanto en (a) como en (b), para este potencial se muestra el número de nucleones posibles en cada capa.

Es decir, este potencial no reproduce los números mágicos presentes en el espectro nuclear a excepción de los primeros cuatro. Se puede estimar el espaciamiento de niveles en el potencial de oscilador armónico al considerar al núcleo como una esfera de materia nuclear con radio $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, lo cual lleva a:

$$\bar{r}^2 = \frac{3}{5} R^2 = \frac{3}{5} A^{\frac{2}{3}} r_0^2 \quad (2.21)$$

Por otra parte, la media del radio al cuadrado se calcula como:

$$\langle r^2 \rangle = \langle \Psi_{nlm} | r^2 | \Psi_{nlm} \rangle = b^2 \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad (2.22)$$

Donde el valor de b se obtiene de reescribir la ecuación de Schrödinger, de manera adimensional al hacer el cambio $\vec{r} \rightarrow \vec{r}/b$, y está dado como:

$$b = \sqrt{\frac{\hbar}{M_n \omega}} \quad (2.23)$$

Por lo que combinando la expresión anterior con la ecuación (2.21) y (2.22) se obtiene que el espaciamiento de niveles está dado como:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2}{M_n r_0^2} \frac{5}{4} \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} A^{-\frac{1}{3}} = 41 A^{-\frac{1}{3}} \text{MeV} \quad (2.24)$$

Como es claro solo al comparar los números mágicos del espectro nuclear, el potencial de tipo oscilador armónico no reproduce tales números, para lograr esto se hicieron varios intentos insatisfactorios hasta que Meyer y Haxel, en conjunto con Jensen y Suess en 1949, añadieron al Hamiltoniano una componente de tipo no central que debería incluirse en el término del potencial que actúa sobre un nucleón dada la presencia de los demás en el núcleo, si este término dependiera de la orientación del momento angular orbital y del espín, se puede inducir una periodicidad diferente.

Un término de fuerza del tipo espín-órbita, separa el movimiento de un nucleón con momento angular orbital l en dos sub-estados de momento angular $j = l \pm \frac{1}{2}$, siendo más estable el nivel con espín más alto. Hay que notar que en cada estado de una j dada, se pueden acomodar $2j + 1$ protones y $2j + 1$ neutrones, modificando así, el número al cual se cierran las capas y con esto reproduciendo los números mágicos nucleares.

Este término, dado por la interacción espín-órbita añadido al Hamiltoniano de una partícula deja al Hamiltoniano en la forma:

$$H = H_0 + f(r) \vec{l} \cdot \vec{s} \quad (2.25)$$

Donde $f(r)$ se relaciona al potencial en el cual se mueven los nucleones.

El término agregado a la ecuación anterior, lleva a efectos del tipo magnético que son demasiado débiles, una evidencia experimental de tal término puede encontrarse en la existencia de un término de fuerza del tipo espín-órbita en la dispersión de protones y neutrones por ${}^4\text{He}$ el cual muestra una división en el p -doblete lo cual evidencia el hecho de la polarización de las partículas dispersadas, por lo que la polarización de nucleones de alta energía confirma la presencia de un potencial del tipo espín-órbita [8, 9].

El término del acoplamiento espín-órbita da una energía que se puede calcular del valor de expectación entre los estados de una partícula con el término dado por las funciones de spin incluidos, esto es:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{nljm} | f(r) \vec{l} \cdot \vec{s} | \Psi_{nljm} \rangle &= \langle \Psi_{nljm} | f(r) [(\vec{l} + \vec{s})^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2] | \Psi_{nljm} \rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle f(r) \rangle_{nl} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \\
&= \begin{cases} -\frac{1}{2}(l+1) \langle f(r) \rangle_{nl} & \text{para } j = l - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}l \langle f(r) \rangle_{nl} & \text{para } j = l + \frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Según Bohr y Mottelson (1929), el término de expectacion de $f(r)$, empíricamente está aproximado como:

$$\langle f(r) \rangle_{nl} \approx -20A^{-\frac{2}{3}} \text{MeV} \tag{2.27}$$

Lo anterior implica que el espaciamiento entre las energías debido al término de acoplamiento espín-órbita crece conforme el momento angular crece.

Por su parte, el signo negativo en (2.26) confirma el hecho experimental de que el estado con $j = l + \frac{1}{2}$ es más bajo con respecto al estado con $j = l - \frac{1}{2}$, esto indica que el primero es más estable que el segundo, es decir, está más ligado al núcleo.

La división de niveles y el llenado de las capas, puede verse en la figura (2.3) tomada de Broussard [3], en la cual se muestran también los números a los cuales se llenan las capas, es decir, los números mágicos.

APPROXIMATE SEQUENCE OF SINGLE-PARTICLE STATES

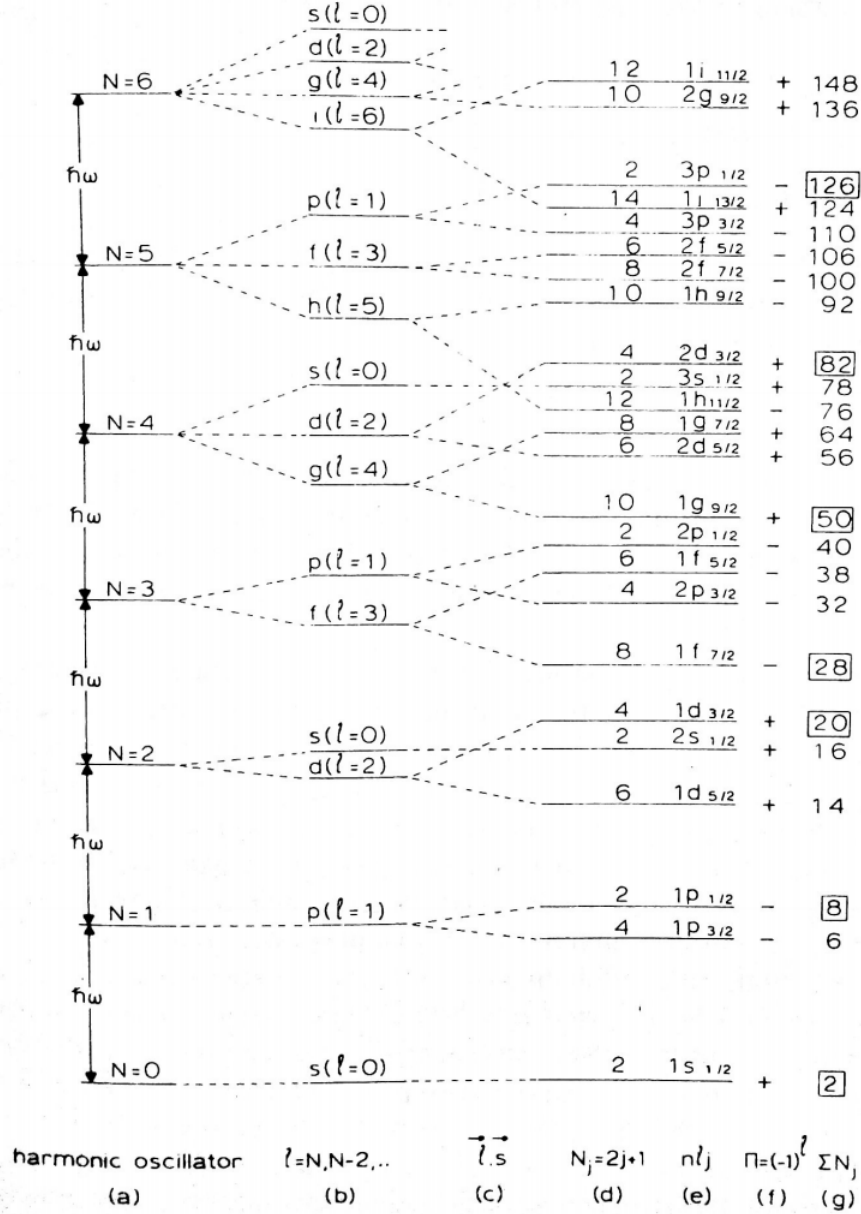


Figura 2.3: (a) Energías de una sola partícula sujeta a un potencial del tipo oscilador armónico. (b) Representación esquemática de las energías de una partícula sujeta a un potencial del tipo Saxon-Woods. (c) Espaciamiento de niveles debido al término de acoplamiento del tipo spin-órbita. (d) Número de partículas idénticas $N_j = 2j + 1$ que pueden ocupar cada estado. (e) Notación espectroscópica para los niveles empleando los números n , l y j . (f) Paridad de cada estado. (g) Números mágicos que aparecen en las diferencias de energía. [Tomada de Broussard 1977]

2.3 Isospín Nuclear

Poco después del descubrimiento del neutrón, realizado por James Chadwick, Heisenberg propuso un aparato matemático en completa analogía con el tratamiento del espín por medio de las matrices de Pauli, considerandolo al protón y neutrón como estados de carga de una sola partícula, el nucleón. Esto no solo por el hecho de que protones y neutrones tienen casi la misma masa si no que además, ambos son partículas del mismo valor de espín.

Por otra parte, los experimentos sugieren que si se desprecia la contribución de la interacción electromagnética, la fuerza nuclear fuerte entre dos nucleones con espines antiparalelos, es aproximadamente independiente del hecho de que los nucleones sean protones o neutrones, lo anterior implica la existencia de una simetría en la interacción fuerte, lo que se conoce como la independencia o simetría de carga, aunado a esto, los espectros de energía presentes en los llamados núcleos espejos son muy parecidos, estos últimos se refieren a un par de núcleos para los cuales el número de nucleones es el mismo, pero el número de protones de uno es igual al número de neutrones del otro, y viceversa. Un ejemplo de estos núcleos espejos se encuentra en el ${}^{15}_7N_8$ y su núcleo espejo ${}^{15}_8O_7$.

Debido a las similitudes existentes entre los nucleones, resulta que el Hamiltoniano se mantiene invariante frente a transformaciones de estados de protones y neutrones, esto es válido al considerar al nucleón como una partícula a la cual se le puede asignar un número de “isospín” dado por $t = \frac{1}{2}$, siendo los protones y neutrones proyecciones sobre un espacio abstracto de la tercera componente con valor $t_z = -\frac{1}{2}$ (isospín “abajo”) y $t_z = \frac{1}{2}$ (isospín “arriba”), respectivamente.

Se pueden definir los estados del nucleón introduciendo un espacio generado por los vectores:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Se pueden introducir de una manera análoga al formalismo de las matrices de Pauli, las matrices en el espacio de isospín:

$$\tau_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

$$\tau_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\tau_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Por lo que el operador vectorial de isospín se puede definir como:

$$\vec{t} = \frac{1}{2} \vec{\tau} \quad (2.33)$$

Para estos operadores se cumplen también las relaciones de conmutación del tipo momento angular:

$$[t_x, t_y] = it_z \quad (2.34)$$

$$[\vec{t}^2, t_i] = 0 \quad (2.35)$$

Donde los eigenvalores de \vec{t}^2 están dados por $t(t+1)$. Estas relaciones de conmutación implican que la transformación de un protón en neutrón y viceversa, se pueden entender como una rotación en el espacio abstracto del isospín. Hay que notar además que la acción del operador t_z sobre los estados del nucleón, se encuentra fácilmente como sigue:

$$t_z |n\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} |n\rangle \quad (2.36)$$

$$t_z |p\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} |p\rangle \quad (2.37)$$

De las ecuaciones anteriores no es muy difícil mostrar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{2}(1 - \tau_z) |p\rangle = |p\rangle \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \tau_z) |n\rangle = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{1}{2}(1 + \tau_z) |p\rangle = 0 \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{2}(1 + \tau_z) |n\rangle = |n\rangle \quad (2.41)$$

Con esto, el operador de carga se puede definir como:

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2}(1 - \tau_z) \quad (2.42)$$

Otros operadores útiles se pueden definir mediante la combinación de las componentes del operador de isospín, los llamados operadores escalera, los cuales están dados por:

$$t_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(\tau_x \pm i\tau_y) \quad (2.43)$$

Y la acción de estos sobre los estados de protón y neutrón está dada como:

$$t_+ |p\rangle = |n\rangle, \quad t_+ |n\rangle = 0, \quad t_- |p\rangle = 0, \quad t_- |n\rangle = |p\rangle. \quad (2.44)$$

Por lo que en resumidas cuentas, los operadores del tipo escalera, transforman un protón en un neutrón y un neutrón en un protón, este tipo de operadores, se emplean en la descripción de decaimientos β .

Considérese ahora, un sistema de muchos nucleones, se tendrá entonces un isospín total T y una proyección T_z , el isospín de todos los nucleones se acoplan a un isospín total para el sistema, en la forma:

$$\mathbf{T} = \sum_{k=1}^A \mathbf{t}_k \quad (2.45)$$

Se encuentra que el operador de isospín total obedece las relaciones de conmutación propias del momento angular, por lo que sus eigenvalores pueden ser encontrados de una manera análoga a la empleada en el formalismo del momento angular, estos resultan ser:

$$\mathbf{T}^2 \Rightarrow T(T + 1) \quad (2.46)$$

$$T_z \Rightarrow -T, -T + 1, \dots, T - 1, T \quad (2.47)$$

Este número cuántico de isospín total \mathbf{T} tiene valores enteros o semienteros dependiendo

de si A es par o impar, y para cada estado de un valor dado de T , existirán $2(T + 1)$ isomultipletes, esto debido a la $2(T + 1)$ -degeneración dada por la proyección en z la cual es $T_z = \frac{1}{2}(N - Z)$, por lo que los niveles de isospín total se pueden escribir como $T = |T_z|, |T_z| + 1, |T_z| + 2, \dots, \frac{1}{2}A$.

De la misma manera que en el caso de un nucleón, se puede definir los operadores escalera para un sistema de A nucleones:

$$T_{\pm} = T_x \pm iT_y = \sum_{k=1}^A [t_x(k) \pm t_y(k)] \quad (2.48)$$

Como se dijo al inicio de esta sección, la interacción de Coulomb se puede despreciar y se asume además que la interacción fuerte no distingue entre protones y neutrones, por lo que el Hamiltoniano resulta ser invariante ante el intercambio de estos, es decir, es invariante isospín, lo que matemáticamente significa que se cumple:

$$[H, T_z] = [H, T_{\pm}] = 0 \quad (2.49)$$

Empleando la definición del operador de carga, se puede escribir la interacción de Coulomb en la forma:

$$\begin{aligned} V_C &= \sum_{j < k}^Z \frac{e^2}{|\vec{r}(j) - \vec{r}(k)|} \\ &= \sum_{j < k}^Z \frac{e^2 [1 - \tau_z(j)][1 - \tau_z(k)]}{4|\vec{r}(j) - \vec{r}(k)|} \\ &= \sum_{j < k}^Z \frac{e^2 [1 - [\tau_z(j) - \tau_z(k)] + \tau_z(j)\tau_z(k)]}{4|\vec{r}(j) - \vec{r}(k)|} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Hay que notar que T_x y T_y no conmutan con el potencial de Coulomb, por lo que el isospín no puede ser una cantidad conservada de esta interacción, así que finalmente se tiene:

$$[H + V_C, T] \neq 0 \quad (2.51)$$

El resultado anterior implica, que la interacción de Coulomb entre los protones destruye la equivalencia con los neutrones, por lo que rompe la simetría de isospín. El efecto de la interacción de Coulomb puede ser estimada, en muchos de los casos, vía la teoría de perturbaciones, teniendo una corrección a la energía.

Este tratamiento, explica las diferencias de energía que existe entre los núcleos espejos, por ejemplo, los isobaros dados en la figura (2.4).

Los decaimientos β suceden en los isobaros tal como en la imagen, se pueden corregir las masas nucleares al despreciar el efecto de la interacción de Coulomb, la cual es mayor para el ^{10}C que para el ^{10}B , y así mismo, es mayor para ^{10}B que para ^{10}Be , además se puede agregar una corrección a la masa dada por la pequeña diferencia entre protón y neutrón, lo cual se puede ver en la figura 2.4 (b).

Se puede notar, que hay una correspondencia bien definida entre las energías que corresponden a los isobaros par-par (^{10}B , ^{10}C), mismos que tienen su contraparte en el isobaro impar-impar (^{10}Be), el cual tiene más niveles que los anteriores.

Esto se puede entender en términos de la independencia de carga, si se considera que los isobaros de masa 10, tienen un “core”³ dado por ^8Be más dos nucleones en la capa $p_{3/2}$, por lo que cada isobaro queda interpretado de la siguiente manera:

- Isobaro ^{10}Be \longrightarrow un core ^8Be más dos neutrones en la capa $p_{3/2}$.
- Isobaro ^{10}B \longrightarrow un core ^8Be más un neutrón y un protón en la capa $p_{3/2}$.
- Isobaro ^{10}C \longrightarrow un core ^8Be más dos protones en la capa $p_{3/2}$.

Este formalismo tiene que cumplir con el principio de exclusión de Pauli, por lo que no todos los estados accesibles del sistema neutrón-protón son posibles si el par de nucleones es idéntico, lo cual explica que hayan menos estados en los isobaros de núcleo par-par, es decir, el isobaro ^{10}B , posee más niveles de energía que los dos restantes.

³Core o Carozo en la traducción española, se refiere a que hay una parte del núcleo que tiene todos los niveles de sus capas cerradas, a estos niveles de capa cerrada (con todos los protones o neutrones posibles) se le llama core.

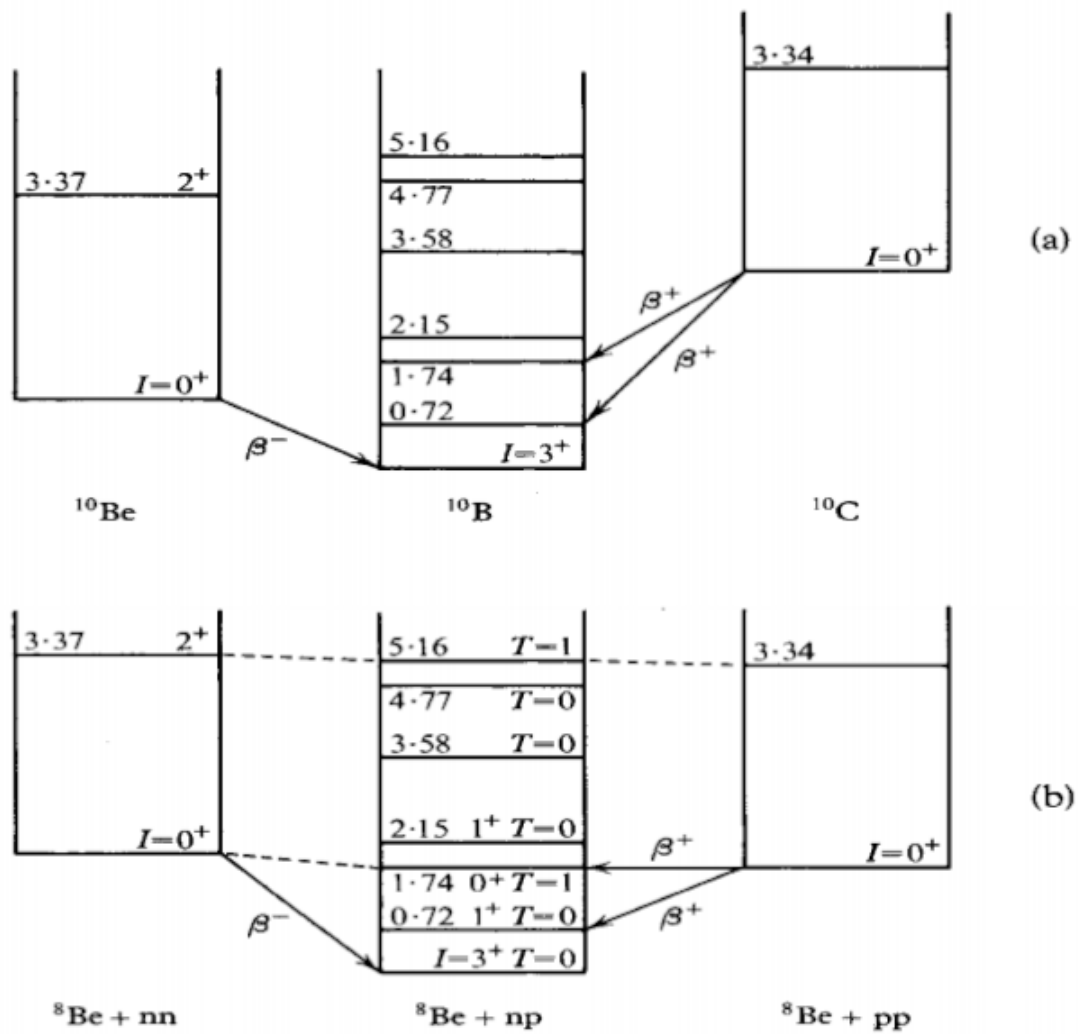


Figura 2.4: Niveles de energía más bajos en los isobaros de masa 10, en unidades de MeV. (a) Masas de núcleos isobaros. (b) Masas nucleares corregidas para la energía de Coulomb y diferencia de masas para neutrón-protrón. [Tomada de W. E. Burcham]

Capítulo 3

Método de Tri-diagonalización de Lanczos.

Los cálculos en la espectroscopía del modelo de capas suelen hacerse vía programas de cómputo capaces de manipular una gran cantidad de datos. Usualmente, las correcciones a la energía debido a la interacción residual entre los nucleones se hacen con el uso de la teoría de perturbaciones a primer orden, de esto resulta que se tiene que diagonalizar una matriz muy grande, es decir, de muchas entradas.

Uno de los métodos que suele ser empleado en los cálculos nucleares es el método de tri-diagonalización de Lanczos, en el cual no es necesario calcular todos los elementos de una matriz hermitiana de grandes dimensiones, si no solo una parte de ella, razón por la cual suele ser bastante cómodo. Lo anterior se hace imponiendo una condición de convergencia, es decir, suele imponerse una cota inferior en la diferencias de las energías para la cual todas las diferencias por debajo de la cota no se toman en cuenta, o cualquier otra condición que permita el truncamiento del método.

3.1 Método de Lanczos.

Las características que hacen que el método de Lanczos sea uno de los más empleados en el cálculo de espectros nucleares que implica la diagonalización de una matriz de dimensiones grandes son en esencia dos:

- a Los eigenvalores de una submatriz¹ de $m \times m$ tomados después de realizar m interacciones, convergen rápidamente de manera monótona a la solución de eigenvalores de la matriz completa.

¹Una parte de la matriz.

b Cuenta con una precisión y estabilidad bastante grande, para poder ser aplicado a distintos sistemas altamente sensibles [11].

Para la exposición de este método hay que considerar el Hamiltoniano en el modelo de capas nuclear, el cual se dió como²:

$$H = H_0 + H_{res} \quad (3.1)$$

Donde H_0 y H_{res} están dados por las ecuaciones (1.8) - (1.9).

Donde H_{res} , suele considerarse pequeño para ser tratado como una perturbación, por lo que la solución al problema tendrá las soluciones de eigenfunciones y eigenvalores dados para H_0 más una corrección dada por H_{res} . Tal contribución a los valores de energía, en el formalismo de la teoría de perturbaciones se obtiene al encontrar los valores de expectación del Hamiltoniano perturbativo en la base de las eigenfunciones del Hamiltoniano no perturbado.

En el método de Lanczos, lo que se hace es elegir un eigenvector arbitrario (elegido convenientemente) y aplicarle el Hamiltoniano H , hay que notar que el primer eigenvector debe ser dado como una combinación de los eigenfunciones del Hamiltoniano no perturbado, tales eigenfunciones cumplen que:

$$H_0 |\Psi_i\rangle = E_0^i |\Psi_i\rangle \quad (3.2)$$

Por lo que el vector inicial (pivote) se puede escribir de la forma:

$$|v_1\rangle = \sum_i C_i |\Psi_i\rangle \quad (3.3)$$

Ahora, se debe generar un conjunto de vectores mutuamente ortogonales e independientes, al aplicar H dado en (3.1) sucesivas veces a $|v_1\rangle$, así, al operar H una vez a $|v_1\rangle$ se obtiene otro vector que puede ser descompuesto en dos vectores ortogonales, uno dado por $|v_1\rangle$ y otro que puede ser hallado a partir del primero al cual se le denotará como $|v_2\rangle$, de tal forma que:

$$\begin{aligned} H |v_1\rangle &= \langle v_1 | H |v_1\rangle |v_1\rangle + \langle v_2 | H |v_1\rangle |v_2\rangle \\ &= \alpha_1 |v_1\rangle + \beta_1 |v_2\rangle \end{aligned} \quad (3.4)$$

²Véase Capítulo 1 para más detalles.

De manera análoga, se puede generar un vector $|v_3\rangle$ al operar H sobre $|v_2\rangle$, y un vector $|v_4\rangle$ al operar sobre el vector $|v_3\rangle$:

$$H |v_2\rangle = \langle v_1|H|v_2\rangle |v_1\rangle + \langle v_2|H|v_2\rangle |v_2\rangle + \langle v_3|H|v_2\rangle |v_3\rangle \quad (3.5)$$

$$H |v_3\rangle = \langle v_2|H|v_3\rangle |v_2\rangle + \langle v_3|H|v_3\rangle |v_3\rangle + \langle v_4|H|v_3\rangle |v_4\rangle \quad (3.6)$$

Hay que notar que debido a la ortogonalidad entre cada uno de los vectores generados, el elemento $|v_3\rangle$ no tiene componente en $|v_1\rangle$. El proceso se puede hacer las veces que sea necesario, notando que los coeficientes tienen la forma:

$$\alpha_i = \langle v_i|H|v_i\rangle \quad (3.7)$$

$$\beta_i = \langle v_{i+1}|H|v_i\rangle = \langle v_i|H|v_{i+1}\rangle \quad (3.8)$$

Además, se cumple en general:

$$\langle v_j|H|v_i\rangle = \langle v_i|H|v_j\rangle = 0 \quad |i - j| \geq 2 \quad (3.9)$$

Así que se pueden generar k vectores siguiendo la regla:

$$H |v_k\rangle = \beta_{k-1} |v_{k-1}\rangle + \alpha_k |v_k\rangle + \beta_k |v_{k+1}\rangle \quad (3.10)$$

Mientras que en el último paso, de n iteraciones requeridas, se tendrá:

$$H |v_{n-1}\rangle = \beta_{n-1} |v_{n-1}\rangle + \alpha_n |v_n\rangle \quad (3.11)$$

Por lo que se obtiene, después de hacer el proceso iterativo n -veces, la forma de H como una matriz con elementos no nulos en la diagonal y en las diagonales superior e inferior a la diagonal central:

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \beta_{k-1} & \alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Los eigenvalores de H se pueden obtener al diagonalizar la representación matricial para el operador H . Como ya se dijo, los eigenvalores de una parte de la matriz, convergen a los eigenvalores de toda la matriz³. Hay que notar además, que los $n - 1$ vectores generados a partir de v_1 , pueden ponerse como una expresión del mismo v_1 , notar por ejemplo que:

$$|v_2\rangle = \frac{1}{\beta_1} (H - \alpha_1) |v_1\rangle \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} |v_3\rangle &= \frac{1}{\beta_2} [(H - \alpha_1) |v_2\rangle - \beta_1 |v_1\rangle] \\ &= \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1}{\beta_1} (H - \alpha_1)(H - \alpha_2) |v_1\rangle - \beta_1 |v_1\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1}{\beta_1} (H - \alpha_1)(H - \alpha_2) - \beta_1 \right] |v_1\rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esto hace que si se toma $|v_1\rangle$ ahora en la base de los eigenvectores de H , se pueda escribir la siguiente relación:

$$H^p |v_1\rangle = \sum_{i=1}^n E_i^p C_i |\Phi_i\rangle \quad (3.15)$$

³Para más detalles acerca de la convergencia del método de Lanczos, se puede dirigir a Brussaard y Glaudemans (pág. 373-374) o al artículo de J. S. Dehesa citado en las referencias.

Donde p indica el número de veces que se ha aplicado el Hamiltoniano H sobre $|v_1\rangle$ y las eigenfunciones de H satisfacen la ecuación de Schrödinger $H |\Phi_i\rangle = E_i |\Phi_i\rangle$.

3.2 Aplicación en el Esquema m .

En el problema de la descripción de los nucleones que se encuentran fuera del core, hay que buscar soluciones que consideren la naturaleza fermiónica de estos, es decir, la descripción se logrará si al final se tienen funciones de onda que sean totalmente antisimétrica ante el intercambio de un par de nucleones, esto es, que sean antisimétricas ya sea en la parte espacial o en la parte de spin pero no de ambas, pues si se cumple esto último, al final la función de onda resultaría simétrica.

La forma de construir funciones de onda válidas para un sistema de partículas idénticas es hacerlo empleando el determinante de Slater planteado en (1.6), sin embargo, hay una forma más eficaz y fácil de hacerlo, la cual ahorra cálculos engorrosos, esto se logra haciendo los cálculos pertinentes en el llamado esquema m^4 .

Aquí se utiliza el formalismo de segunda cuantización, donde los estados de un sistema de partículas están representados por un producto de operadores de creación y aniquilación, y es el álgebra de los conmutadores de estos operadores lo que garantiza los requerimientos de simetría, pues dependiendo de la naturaleza del sistema de partículas, los operadores conmutan o anticonmutan, si se tienen bosones o fermiones.

Uno de los programas de cómputo desarrollados en el lenguaje Fortran, está implementado en el esquema m , el código Antoine [38], aunque existe otra versión implementada en el esquema de acoplamiento $j - j$, llamado código Nathan. El desarrollo posterior de este trabajo se realiza con la ayuda del código Antoine.

⁴ m -scheme en la bibliografía de textos en Inglés.

Capítulo 4

Caos Cuántico en espectro nuclear del modelo de capas.

Cuando suele hablarse de caos comunmente se entiende como algo que tiende al desorden, sin embargo esto suele ser falso, el concepto de caos en física clásica da a entender qué tanto se aleja una trayectoria de una original ante una modificación pequeña de las condiciones al rededor de un punto, pudiéndose cuantificar qué tan caótico es un sistema vía los exponentes de Lyapunov. Esta alta sensibilidad presentada por los sistemas caóticos hace que parezcan tener comportamientos de tipo aleatorio.

Sin embargo, no existe una analogía cuando se trata de sistemas cuánticos ya que en este campo no existe como tal el concepto de trayectoria, pues está prohibido directamente del principio de incertidumbre de Heisenberg, pues conocer en todo momento la posición de una partícula implicaría una incerteza de momento infinita; aún con todo lo anterior, el concepto de caos cuántico ha sido implementado en la física de nuestros días teniendo interesantes avances y siendo una herramienta útil para el estudio de sistemas complejos, como por ejemplo, la estructura nuclear del modelo de capas.

4.1 Caos Clásico

En la naturaleza, un gran número de fenómenos exhiben comportamientos muy complejos, impredecibles y aparentemente aleatorios, ejemplos de esto, se pueden encontrar en fenómenos de turbulencia, variabilidad del clima y el comportamiento de las finanzas mundiales, entre otras. Esta complejidad en el comportamiento de los sistemas no lineales deterministas, podría asociarse con un gran número de grados de libertad, sin embargo, esto suele resultar falso, pues se puede tener un comportamiento bastante complejo en sistemas de solo uno o dos grados de libertad, como por ejemplo

el mapeo logístico [14].

Comúnmente, el término caos ha sido tergiversado de distintas maneras, haciendo alusión al desorden y a comportamientos erráticos, sin embargo, en física clásica, el caos busca patrones de orden en las propiedades de sistemas dinámicos no lineales en términos de atractores regulares o extraños, y está asociado a una alta sensibilidad a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales que llevan a diferencias marcadas para tiempos posteriores.

Se puede definir al caos, como el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales deterministas que exhiben comportamientos de tipo mezcla¹, lo cual da lugar a la sensibilidad extrema a las variaciones en las condiciones iniciales, esto es, que para dos trayectorias que inician en condiciones iniciales cercanas (condiciones iniciales y una pequeña perturbación a éstas), divergen de forma exponencial. Esta discrepancia en la trayectoria original y la perturbada viene también de la no linealidad de los sistemas, pues si considera una perturbación pequeña en un sistema lineal, la discrepancia no crece exponencialmente.

Este concepto de caos es totalmente determinista, puesto que es necesario conocer la solución completa del sistema en todo momento (trayectoria). La cuantificación del caos o qué tan caótico es un sistema tiene lugar vía los exponentes de Lyapunov, dados por:

$$\lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta y(t)}{\delta y(t_0)} \right| \quad (4.1)$$

Donde $\delta y(t)$ es la distancia entre las trayectorias al tiempo t y $\delta y(t_0)$ es la distancia entre las trayectorias al tiempo t_0 . Hay que notar que hay tantos exponentes de Lyapunov como la dimensión del sistema.

4.2 Caos Cuántico

Una de las cuestiones que ha tomado un relativo interés, es el problema de trasladar las definiciones del caos clásico al régimen cuántico, puesto que éste es el régimen donde persisten comportamientos caóticos en sistemas físicos microscópicos, tales como la descripción de átomos o moléculas, que son sistemas que entran en la descripción de la mecánica cuántica.

¹La propiedad de mezcla, implica que las trayectorias obtenidas de las condiciones iniciales y una perturbación a ella, se cruzan una y otra vez.

Ya que el caos se aplica al estudio del comportamiento de sistemas no lineales deterministas, la generalización al régimen cuántico se encuentra con serias dificultades, en primer lugar, la ecuación que caracteriza un sistema mecano-cuántico es la ecuación de Shrödinger, la cual es lineal, por lo que es incapaz de presentar comportamientos caóticos.

Otro punto en contra de la generalización del caos al regimen cuántico, va ligado al hecho de que el caos es una teoría determinista, y la cuantización de este es mediante los exponentes de Lyapunov, los cuales miden la separación entre dos trayectorias originadas en puntos muy cercanos. Para poder definir el caos vía esta ruta, es necesario contar con el concepto de trayectoria, sin embargo, en el régimen cuántico, este concepto pierde el sentido debido al principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual no permite definir trayectorias infinitesimalmente cercanas en el espacio fase. Sin embargo, se podría pensar en definir un tipo de exponente de Lyapunov al fijarse en la separación en el tiempo de dos funciones de onda originadas ambas de una pequeña variación en las condiciones iniciales del sistema descrito, pero esto es nuevamente insatisfactorio, ya que la distancia entre las funciones de onda resulta ser constante para todo tiempo:

$$\langle \Psi(0) | \Phi(0) \rangle = \langle \Psi(t) | \Phi(t) \rangle \quad (4.2)$$

Los hechos anteriores resultan en que actualmente, no se cuente con una definición formal para el concepto de caos cuántico dada la imposibilidad de trasladar el concepto de caos, del régimen clásico al cuántico; sin embargo, existen varias ideas de lo que puede ser el caos en el regimen cuántico.

Una de ellas, propone definir al caos cuántico en términos de un lenguaje válido tanto para el régimen cuántico como para el clásico, este concepto viene a ser la simetría, por lo que definen un sistema cuántico regular como aquel que posee un alto grado de simetría como para asegurar que dado un número M de “buenos” números cuánticos que describen el sistema, no sea menor que el número N de grados de libertad del mismo, por lo que para sistemas tales que $M < N$, el sistema deja de ser regular y adquiere comportamientos caóticos², sin embargo, este formalismo se topa con el problema de no contar con un buen criterio para asegurar la independencia de las constantes de movimiento y por tanto de los M números cuánticos que describen al sistema, es decir, se puede tener un sistema con muchas simetrías pero no se puede decir cuando las constantes de movimiento asociadas a esas simetría son independientes.

²Para más información acerca de este tipo de tratamiento, véase [15].

Incluso con todos los problemas que se presentan al tratar de entender el caos cuántico como una generalización del caos clásico, es un hecho que la mecánica cuántica es una teoría bastante robusta y en algún momento cuando la mecánica cuántica se acerca a los límites clásicos, el sistema debe “decidir” si clásicamente será integrable o caótico. Lo cierto es que, las propiedades observadas en sistemas que clásicamente son caóticos, son diferentes a las que se observan en sistemas cuyos análogos clásicos no lo son, este hecho arrojó luz sobre lo que ahora se entiende como caos a nivel cuántico. La ideología más difundida para entender ésto es aquella en la que se hace referencia, al caos cuántico como la observación de las propiedades de sistemas cuánticos que clásicamente son caóticos, lo cual se ha denominado también como “quantum signatures”.

Esta forma de visualizar el caos a nivel cuántico surgió del estudio espectral de billares, que son sistemas integrables, en donde la mezcla de estados resultó en una aleatoriedad, posteriormente se vió que si se cambia la forma del billar, ya sea que se deforme o se trunque de alguna manera, el patrón de aleatoriedad se pierde y el patrón de energías muestra rasgos de ordenamientos debido a la correlación existente entre los niveles. Este hecho dio pie a que M. V. Berry y M. Tabor, analizaran el espaciamiento de niveles vecinos dada por ³

$$s_j = E_{j+1} - E_j \quad (4.3)$$

Concluyendo que, “la distribución del espaciamiento de niveles tiene la forma exponencial característica de los procesos puramente aleatorios”[16]. Lo anterior se generaliza como: La distancia s entre cada dos niveles consecutivos, normalizada a uno $\langle s \rangle = 1$, sigue una distribución de Poisson:

$$P(s) = e^{-s} \quad (4.4)$$

para todos los sistemas integrables de más de un grado de libertad.

Para el caso de sistemas caóticos, la aleatoriedad se pierde debido a la correlación existente entre los niveles de energía, por lo que ahora, la curva que caracteriza la distribución del espaciamiento de vecinos cercanos, ya no es una Poissoniana si no que ahora es una distribución de Wigner:

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s e^{-\left(\frac{\pi}{4} s^2\right)} \quad (4.5)$$

³Aquí se estudian correlaciones de corto alcance, sin embargo, existen otros desarrollos donde se estudian correlaciones de largo alcance por medio de las estadísticas Δ_3 y Σ_2 , ejemplos de estos desarrollos pueden verse en [29, 30, 31, 32, 49].

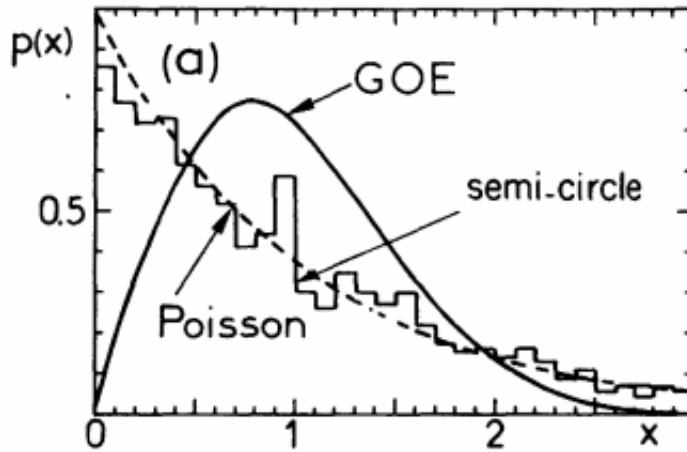


Figura 4.1: Distribución de los espaciamientos de niveles de energía para un billar semicircular, se puede notar que sigue un comportamiento bien modelado con la distribución de Poisson. [Tomada de [17]]

Los estudios hechos por Bohigas, Giannoni y Schmidt sobre el billar cuántico de Sinai y su distribución espectral de espaciamientos vecinos, dieron una conexión con la teoría de matrices aleatorias, formulando su famosa conjetura: “Espectros de sistemas invariantes ante inversión temporal cuyos análogos clásicos son sistemas K^4 , muestran las mismas propiedades espectrales predichas por el GOE”, esto está dado justo por la ecuación anterior.

Para sistemas menos simétricos, que rompen su simetría bajo una inversión temporal, el tratamiento del ensamble GOE debe ser cambiado por el ensamble GUE (Gaussian Unitary Ensemble):

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 e^{-\left(\frac{4}{\pi} s^2\right)} \quad (4.6)$$

Mientras que para sistemas invariantes ante inversión temporal pero con rompimiento de la simetría ante rotaciones son descritos por el GSE (Gaussian Symplectic Ensemble):

⁴Los sistemas K son aquellos que presentan comportamientos fuertemente caóticos, es decir, son muy caóticos.

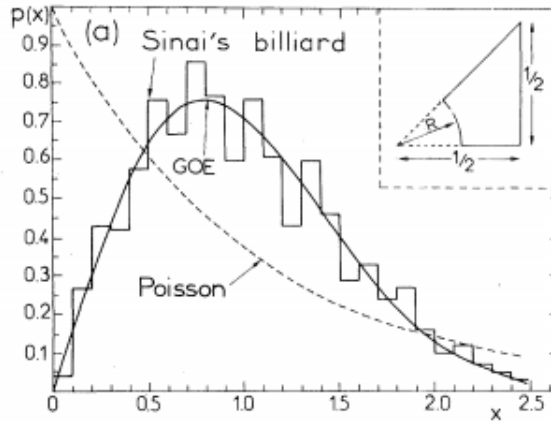


Figura 4.2: Distribución de los espaciamentos de niveles de energía para un billar de Sinai, el cual es un sistema K , el comportamiento de la distribución del espaciamento de niveles vecinos se aproxima a la distribución de Wigner para el ensamble GOE (Gaussian Ortogonal Ensemble). [Tomada de [18]]

$$P(s) = \frac{21^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 e^{-\left(\frac{64}{9\pi} s^2\right)} \quad (4.7)$$

Con el uso de la teoría de las matrices aleatorias, se renuncia a tener detalles a cerca de la interacción, ya que el hamiltoniano del sistema se sustituye por un Hamiltoniano aleatorio con las mismas propiedades de simetría, en el cual todas las interacciones son igualmente probables.

4.3 El núcleo como un sistema caótico.

El modelo de capas nuclear, provee una teoría sólida para entender la estructura y los procesos que existen en el núcleo, como se vió en el capítulo 1, el modelo de capas establece una estructura en capas para el núcleo en forma similar al modelo de capas atómico con sus respectivas diferencias: el potencial de Coulomb ahora es diferente y además, la similitud entre las masas de los protones y neutrones da lugar que puedan tratarse como estados de una sola partícula, lo cual introduce un número cuántico de “isospín”.

Los estudios de los niveles de energía indican que el núcleo es un sistema no integrable, es decir, caótico, para el cual se tiene una descripción en términos del

ensamble GOE, esto debido a la invariancia ante una inversión temporal. Esta caoticidad del núcleo, sirvió de confirmación o prueba para la existencia entre las diferencias en el espectro de energías de un sistema caótico y otro no caótico, incluso, en los inicios de la teoría, entender el “conjunto de datos nucleares” abrió paso a la búsqueda de lo que hoy se entiende como caos cuántico, posteriormente, la teoría de matrices aleatorias fue empleada para describir a los sistemas caóticos basándose en la conjetura BGS.

Para ver que el núcleo es un sistema caótico se tendría que cumplir que la distancia entre niveles energéticos de vecinos cercanos, siga una distribución de tipo Wigner, esto es, que la conjetura BGS sea cierta, para ello, hay que calcular todo el espectro nuclear, el cual se hace vía programas de cómputo que realizan cálculos enormes y complejos, por lo que en principio este tipo de estudios toma su tiempo.

Por simplicidad, se considera el núcleo del $^{48}\text{Ca}^5$, con el número de isospin $T = 0$, y el momento angular y la paridad $J^\pi = 3^+$, por lo que la dimensión del espacio es $N = 1627$. Hay que notar que en este caso se llenan todas las capas hasta llegar a los 40 nucleones en la capa sd y los ocho nucleones restantes se distribuyen en las capas pf , esta situación se puede simular con un carozo dado por el ^{40}Ca y ocho neutrones dispuestos en las capas pf (espacio de valencia). Por su parte el Hamiltoniano que se emplea está dado como:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \chi \hat{Q} \cdot \hat{Q} \quad (4.8)$$

Donde χ es un parámetro que medirá la perturbación al Hamiltoniano H_0 . Los cálculos se hicieron con ayuda del código “Antoine”⁶, el cual trabaja en el esquema m de acoplamiento y diagonaliza el sistema utilizando el método de tridiagonalización de Lanczos. Se calcula el espectro de energías para los 1627 estados disponibles para este sistema. Los resultados se obtienen de variar el parámetro de perturbación χ , al cual se le ha asignado los valores: $\chi = 0.01, 0.025, 0.04, 0.07, 0.11, 0.14, 0.18, 0.21, 0.25$, las primeras impresiones se dan en los valores obtenidos para la energía, los cuales se muestran en la serie de gráficas siguientes.

⁵El cálculo del espectro de energías es más rápido ya que solo se cuenta con un tipo de partículas, a saber, neutrones.

⁶Antoine Shell Mode Code.

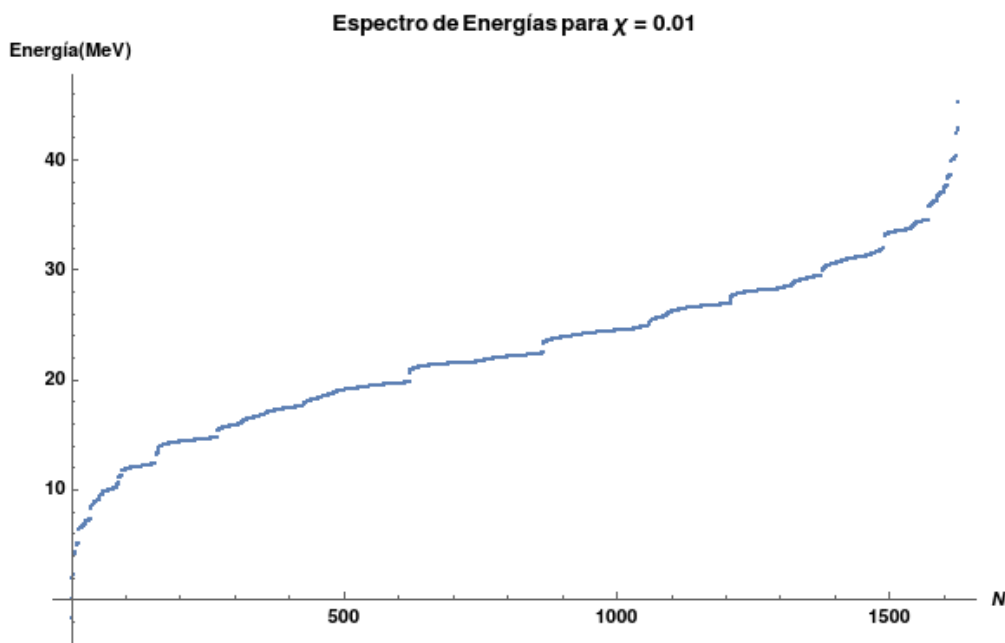


Figura 4.3: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.01$.

Se puede comparar cuatro de ellas con valores diferentes de la interacción, esto muestra diferencias visibles entre ambas series de los valores de energía, se puede ver que cuando la interacción es pequeña, la curva de energías es discontinua, debido a que todavía se encuentra algún grado de degeneración en estas, sin embargo, conforme la perturbación aumenta, esta degeneración se va rompiendo de tal forma que la curva del espectro de energías se suaviza, además, también la pendiente cambia, cuando la perturbación crece, también lo hace la pendiente de la curva.

Por su parte, la estadística de los espaciamientos de niveles vecinos, busca evidencia que estos tienen una distribución de tipo Wigner. Para llevar a cabo el análisis de la distribución de los espaciamientos vecinos, es necesario hacer un “reescalado”⁷, el cual divide al espectro en una parte suave y una parte fluctuante y reescala a una unidad de espaciamiento medio, permitiendo con ello la comparación de las propiedades del

⁷Unfolding en inglés, para un tratamiento más a fondo véase [19].

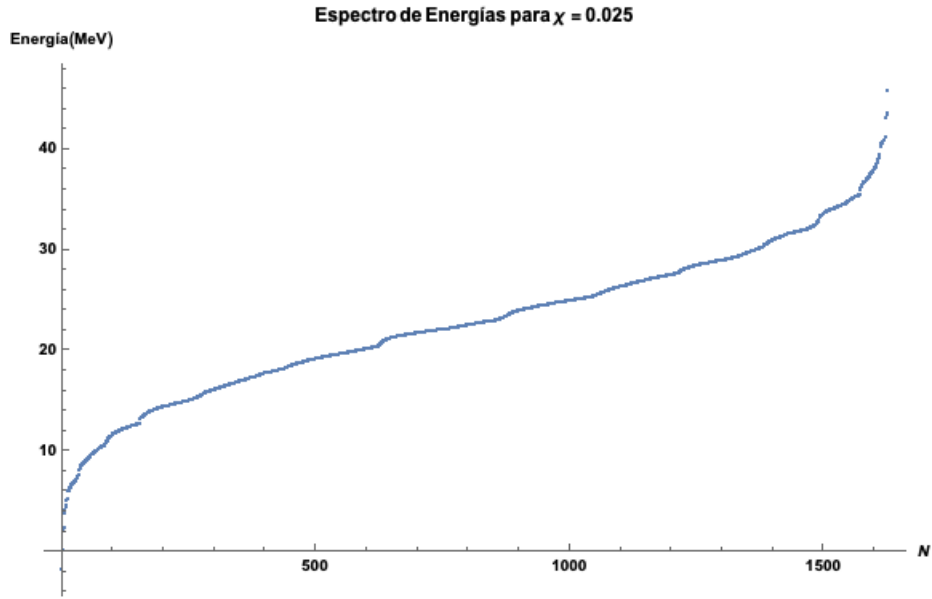


Figura 4.4: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.025$.

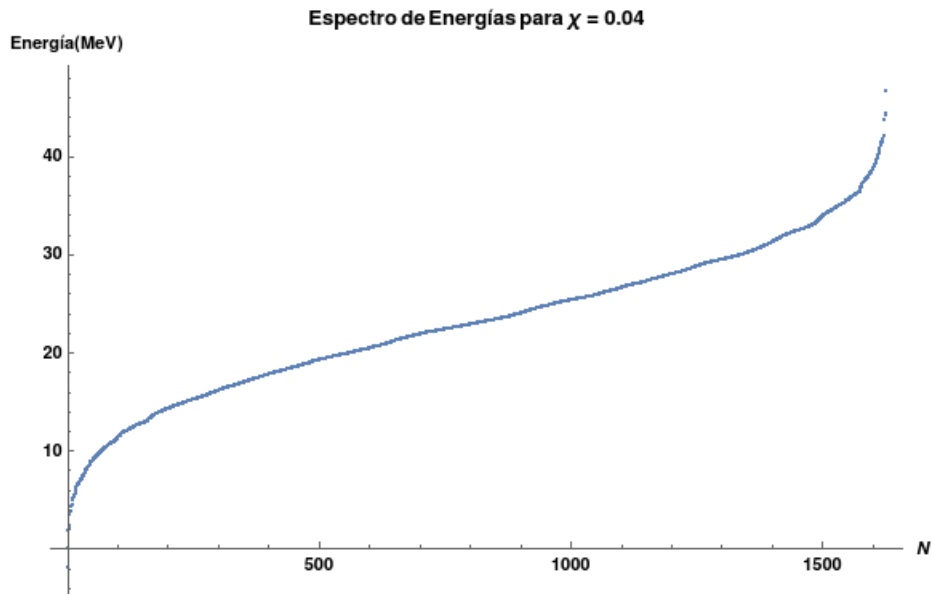


Figura 4.5: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.04$.

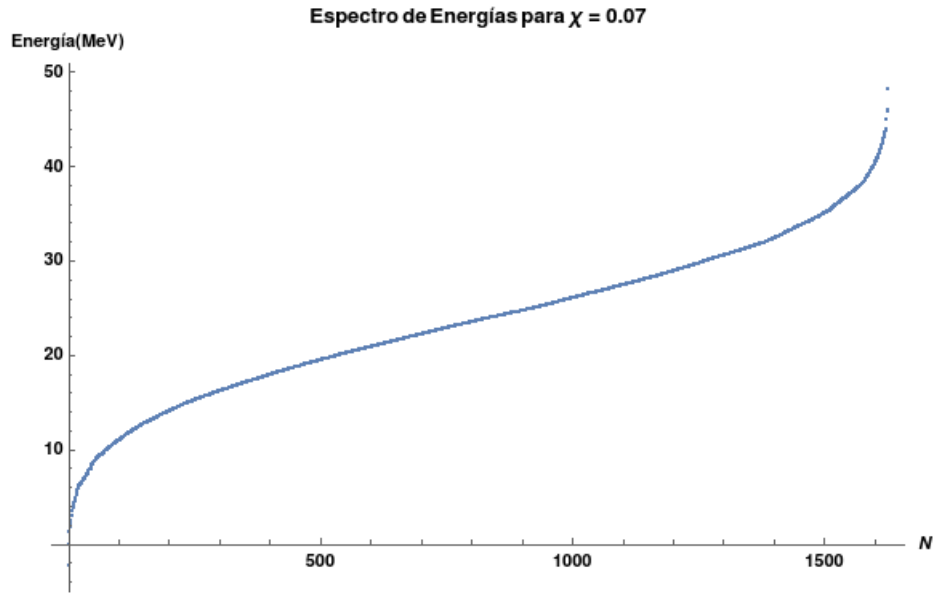


Figura 4.6: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.07$.

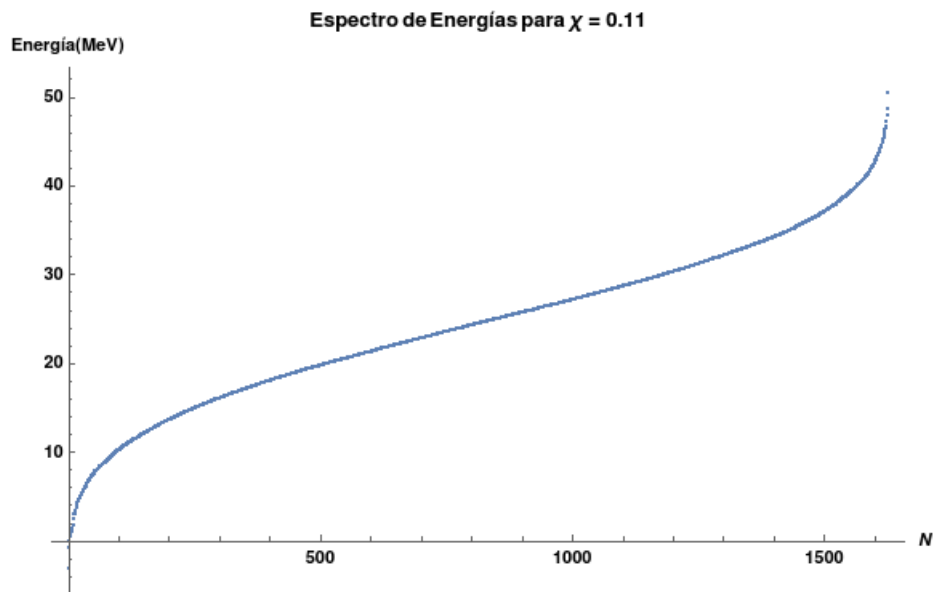


Figura 4.7: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.11$.

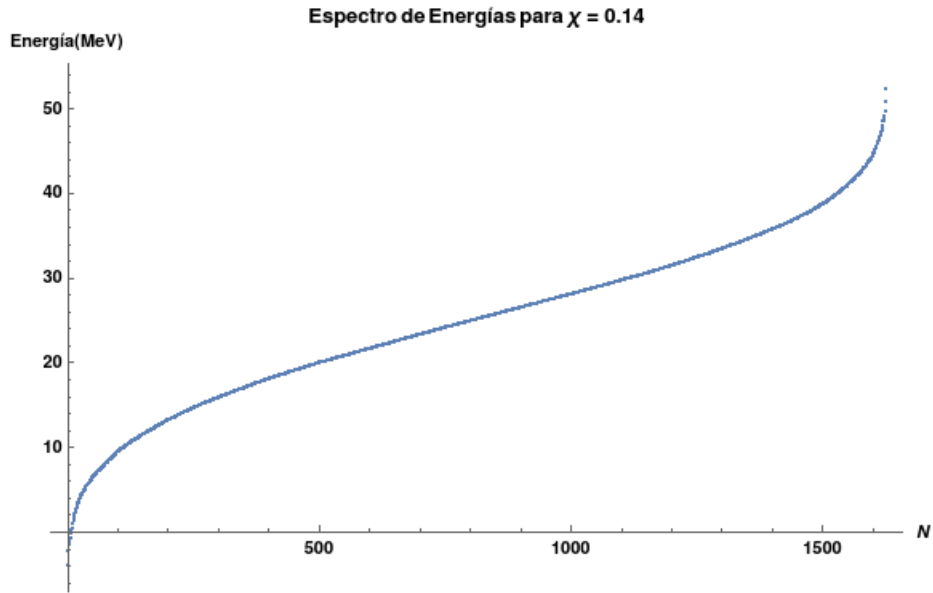


Figura 4.8: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.14$.

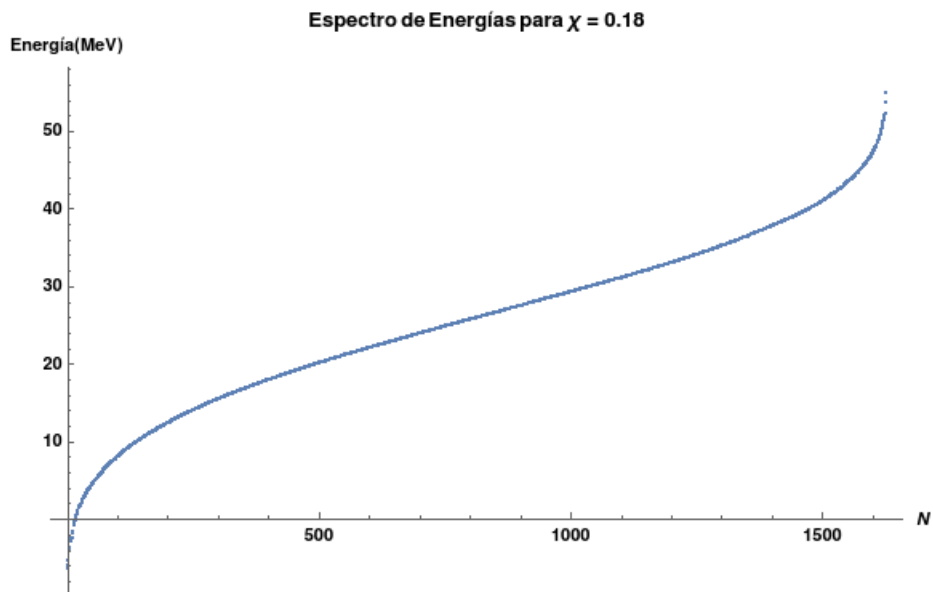


Figura 4.9: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.18$.

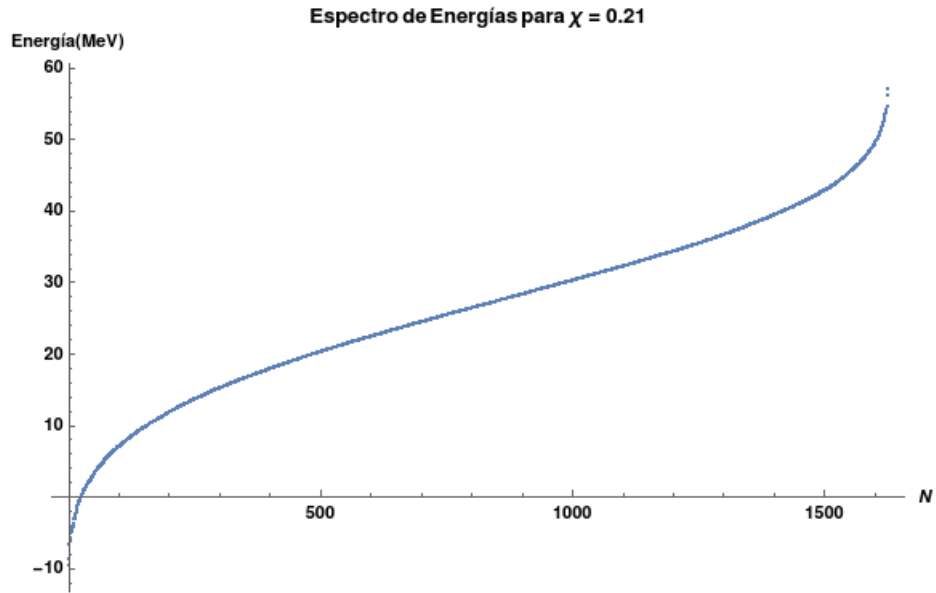


Figura 4.10: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.21$.

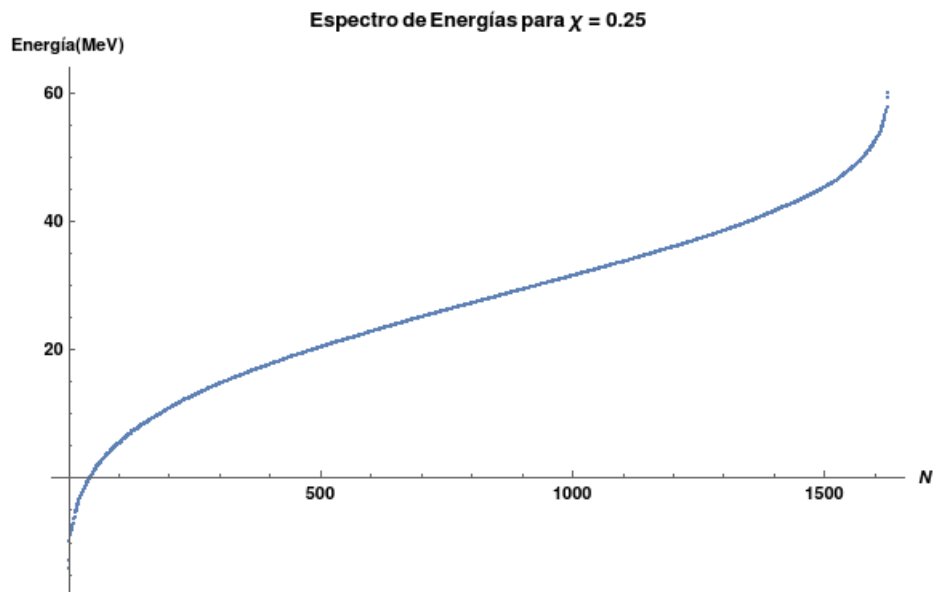


Figura 4.11: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente al parámetro $\chi = 0.25$.

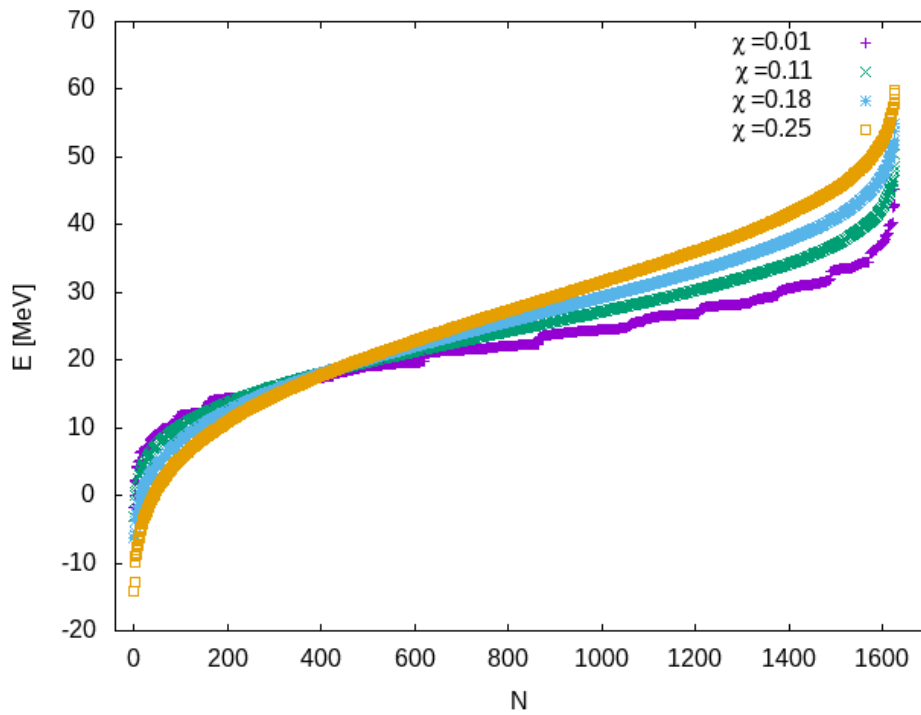


Figura 4.12: Espectro de energías para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, correspondiente a cuatro interacciones del Hamiltoniano esquemático con el parámetro $\chi = 0.01, 0.11, 0.18, 0.25$.

sistema con otros sistemas de acuerdo con las predicciones de la teoría de matrices aleatoria. En este caso, el reescalado es necesario, ya que se quiere ver como cambian las fluctuaciones debido al aumento del parámetro perturbativo, una vez teniendo el reescalado de los valores de la energía, se obtienen los histogramas de frecuencia, los cuales se normalizan a uno, y se les ajusta una curva de Wigner.

En el primer caso con un parámetro de interacción de $\chi = 0.01$, se observa un comportamiento que se encuentra en medio ser ajustado por una distribución de tipo Poisson y otra de tipo Wigner, por lo que en este caso, de acuerdo con la conjetura *BGS* se puede decir que el sistema ha dejado de ser integrable pero aún no es del todo caótico. Se puede notar que la curva de tipo Poisson ajusta bastante bien a la última parte de la distribución (*cola*), esto es así puesto que se están estudiando correlaciones de corto alcance, en la cual el parámetro $\chi \hat{Q} \cdot \hat{Q}$ hace interactuar primero niveles vecinos y solo para valores más grandes de χ interaccionan niveles más lejanos ⁸.

Conforme se aumenta la intensidad de la interacción, surge una correlación entre los niveles de energía a la vez que la degeneración se rompe y la curva se suaviza, este hecho se traslada al análisis de la distribución de espaciamientos vecinos al hecho de que ahora, la distribución se ajusta en mayor medida a una tipo Wigner, lo cual se observa para todas las interacciones restantes.

⁸Nota sugerida por R. Fossion.

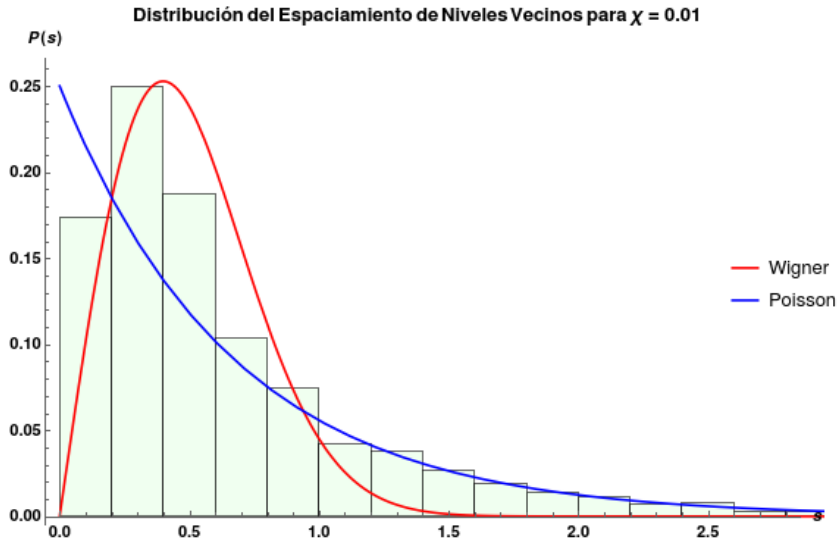


Figura 4.13: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento que se encuentra entre una distribución tipo Wigner y una tipo Poisson.

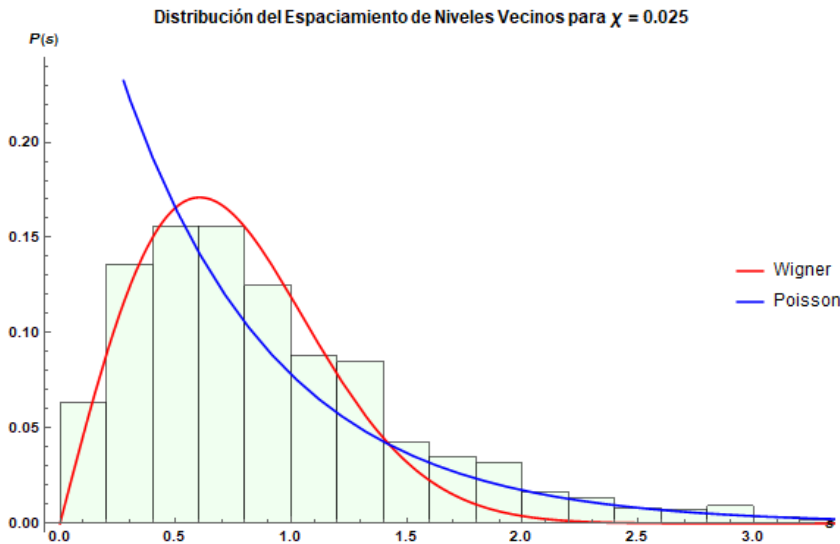


Figura 4.14: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, con $\chi = 0.025$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución no tiene un comportamiento de una distribución tipo Wigner mientras que la parte final se modela con una distribución tipo Poisson.

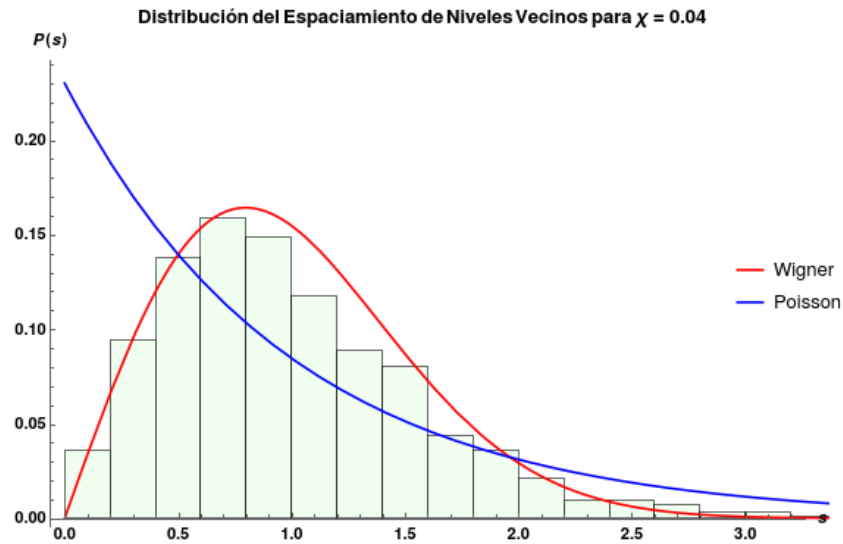


Figura 4.15: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.04$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

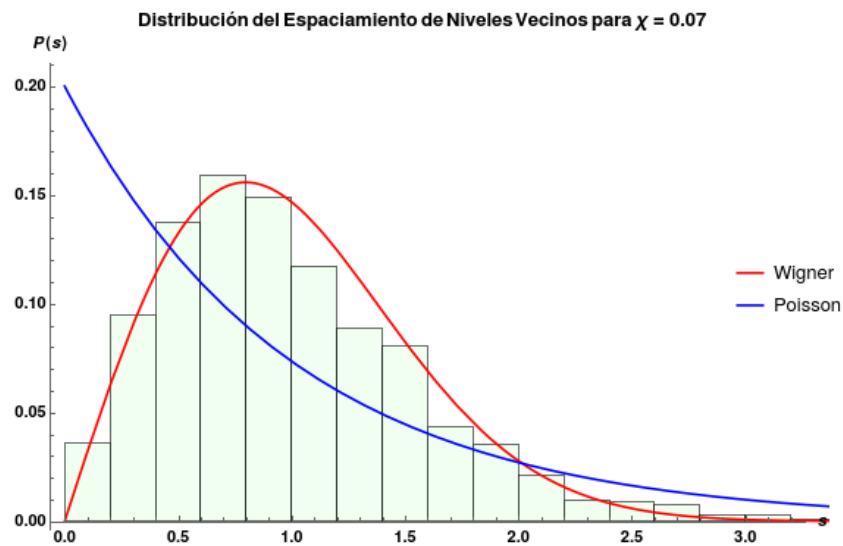


Figura 4.16: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.07$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

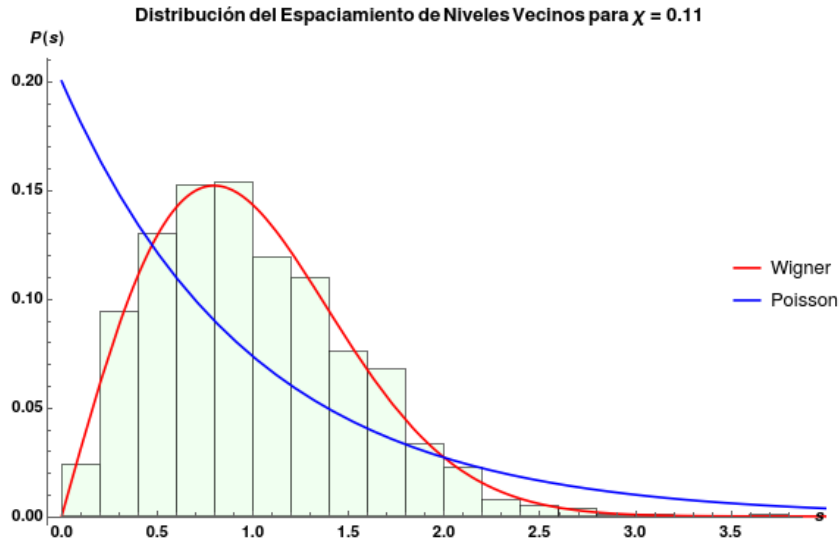


Figura 4.17: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

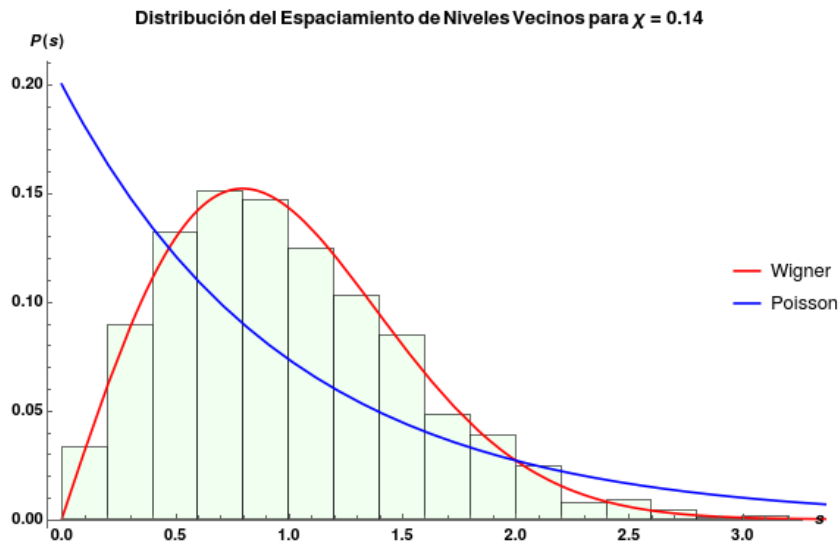


Figura 4.18: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.14$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

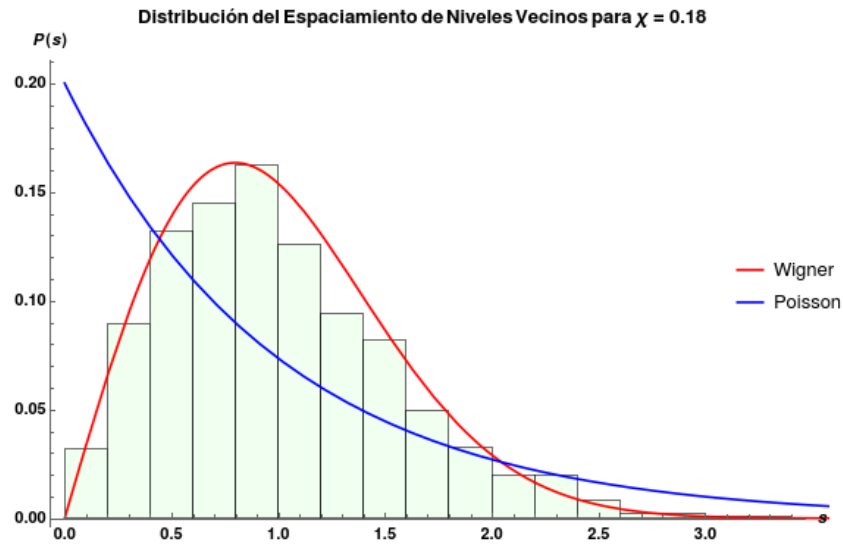


Figura 4.19: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

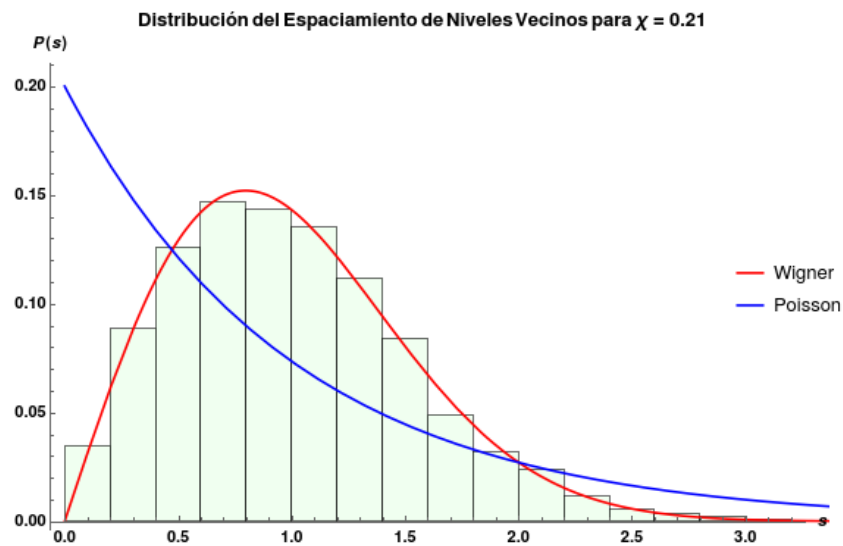


Figura 4.20: Distribución del reescalado de los espaciamentos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.21$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

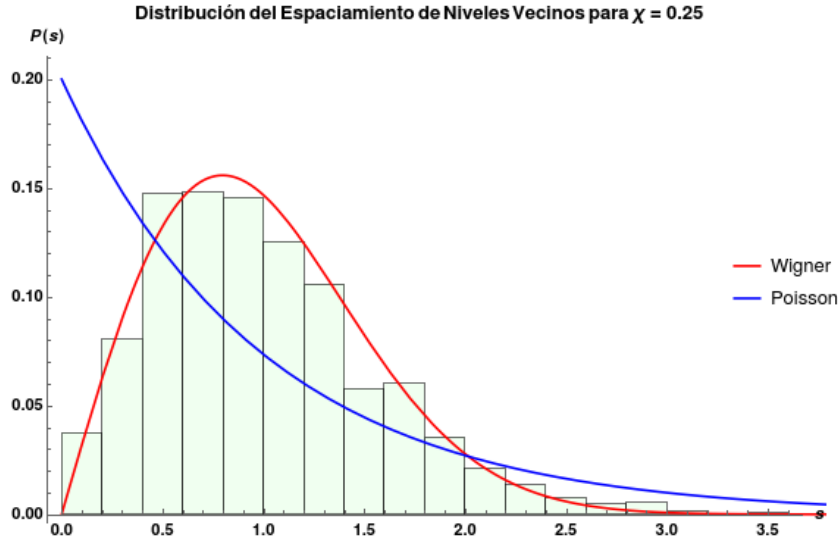


Figura 4.21: Distribución del reescalado de los espaciamientos de niveles de energía para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$, el ajuste de las curvas muestra que la distribución tiene un comportamiento de tipo Wigner.

4.4 Caracterización de sistemas cuánticos caóticos por el ruido $1/f$.

Ya que se ha tenido en claro a lo que se refiere el estudio de sistemas cuánticos caóticos o caos cuántico, se necesita saber de qué otra forma se puede caracterizar un sistema (además de la distribución del espaciamiento de vecinos cercanos) y decidir si es caótico o integrable, uno de los métodos desarrollados recientemente, consiste en caracterizar a los sistemas cuánticos caóticos, considerando al espectro de energías como una señal discreta y a la secuencia de los niveles de energía como una serie de tiempo.

Estudios sobre este tipo de tratamiento han sido desarrollados por A. Relaño, J. M. Gómez, R. A. Molina y J. Retamosa en su artículo: *Quantum Chaos and $1/f$ Noise* [20], en el cual se estudia espectros de sistemas integrables y no integrables, y en base a los resultados obtenidos han conjeturado que, los espectros de energías de sistemas cuánticos caóticos, están caracterizados por un ruido del tipo $1/f$, mientras que para sistemas integrables, el ruido es del tipo $1/f^2$.

Se ha estudiado en la sección anterior, las propiedades de las fluctuaciones del espectro de energías utilizando la distribución del espaciamiento de vecinos cercanos, la cual da información a cerca de las correlaciones a corto alcance, también se ha hecho

mención, a estudios basados en el análisis de correlaciones a largo alcance (estadísticas Σ_2 y Δ_3); por otra parte, se puede emplear la distribución δ_n , la cual da una medida de qué tanto se separa una variable de su valor promedio.

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle) = \sum_{i=1}^n w_i \quad (4.9)$$

La cantidad w_i , mide las fluctuaciones del i-ésimo desplazamiento de su valor medio $\langle s \rangle = 1$.

Los pasos a seguir para poder hacer este análisis son los siguientes:

- Tomar los valores del espectro de energías del sistema y hacer un reescalado.
- Medir la separación de un valor arbitrario del reescalado del espectro a su valor medio, es decir, encontrar δ_n .
- Tomar la transformada de Fourier de la serie δ_n .
- Encontrar el espectro de potencias asociado a la transformada de Fourier de la serie δ_n .

El espectro de potencias, de una serie finita y discreta δ_n está dada por:

$$P(k) = |\hat{\delta}_n|^2 \quad (4.10)$$

Donde $\hat{\delta}_n$ es la transformada de Fourier de la serie δ_n , la cual está dada como:

$$\hat{\delta}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \delta_n \exp\left(\frac{-2\pi i k n}{N}\right) \quad (4.11)$$

Con N el tamaño de la serie.

Al promediar el espectro de potencias $P(f)$ asociado a δ_n , se encuentra que tiene la forma:

$$\langle P(f) \rangle \sim \frac{1}{f^b} \quad (4.12)$$

Por lo que para considerar la igualdad se tiene que considerar la introducción de una constante de proporcionalidad α , de tal forma que $\langle P(f) \rangle = \alpha/f^b$, por lo que se si se aplica el logaritmo natural a ambos lados de la igualdad anterior, por las propiedades

de la función logaritmo, se tendrá:

$$\ln(\langle P(f) \rangle) = \ln(\alpha) - b * \ln(f) \quad (4.13)$$

La cual es la ecuación de una recta con pendiente negativa igual a b y ordenada al origen $\ln(\alpha)$.

Tomando los datos obtenidos para el espectro de energías del ^{48}Ca en la capa pf , se ha calculado espectro de potencias correspondiente a cada interacción, y a cada espectro de potencias se le ajusta una recta de la forma dada en la ecuación (4.13). Los espectros de potencia correspondiente a cada interacción se muestran en las siguientes gráficas.

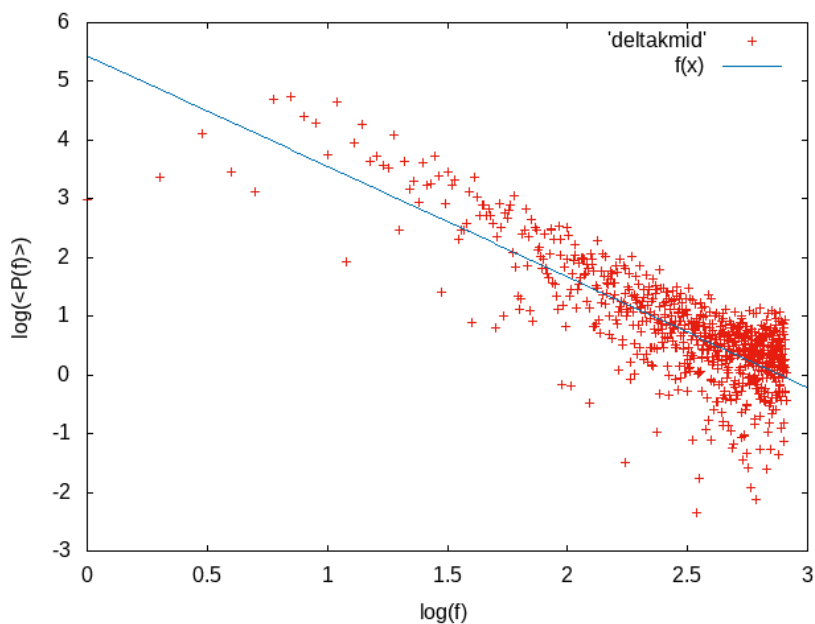


Figura 4.22: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 5.43695 - 1.88278 * \ln(f)$.

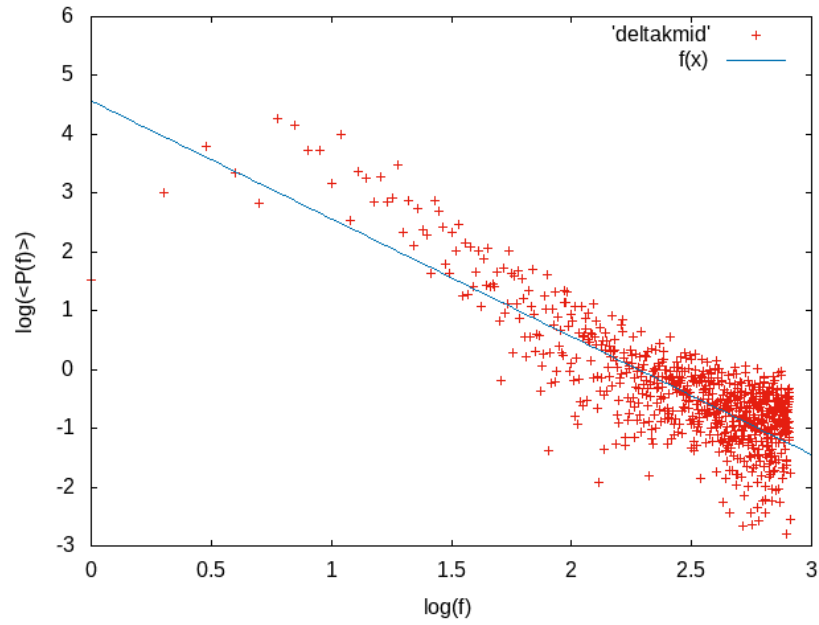


Figura 4.23: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.025$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 4.568332 - 2.00318 * \ln(f)$.

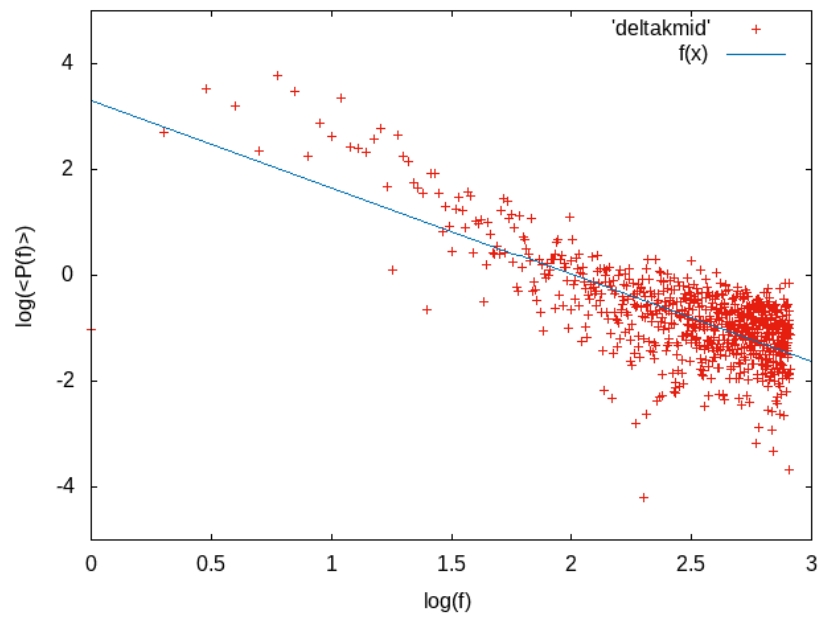


Figura 4.24: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.04$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 3.29423 - 1.63965 * \ln(f)$.

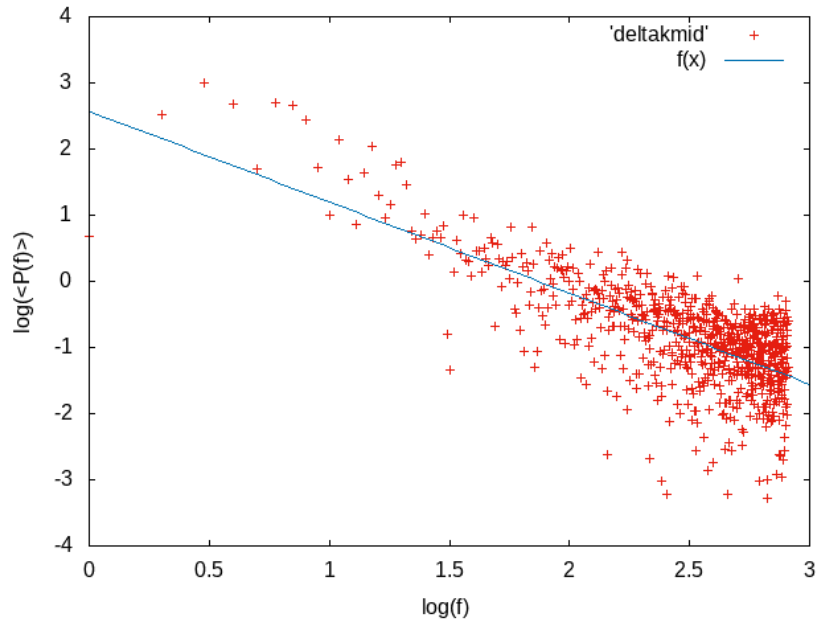


Figura 4.25: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.07$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 2.57162 - 1.37466 * \ln(f)$.

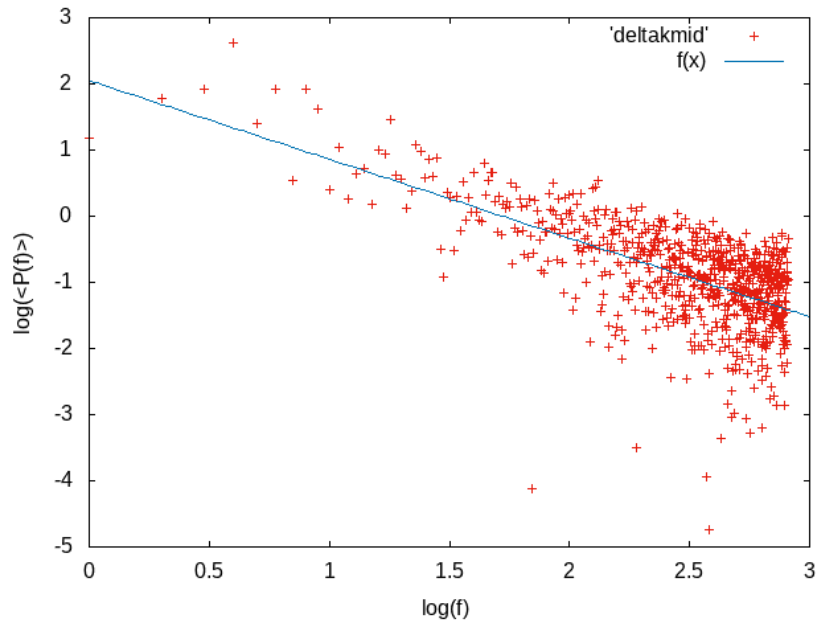


Figura 4.26: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 2.04735 - 1.18881 * \ln(f)$.

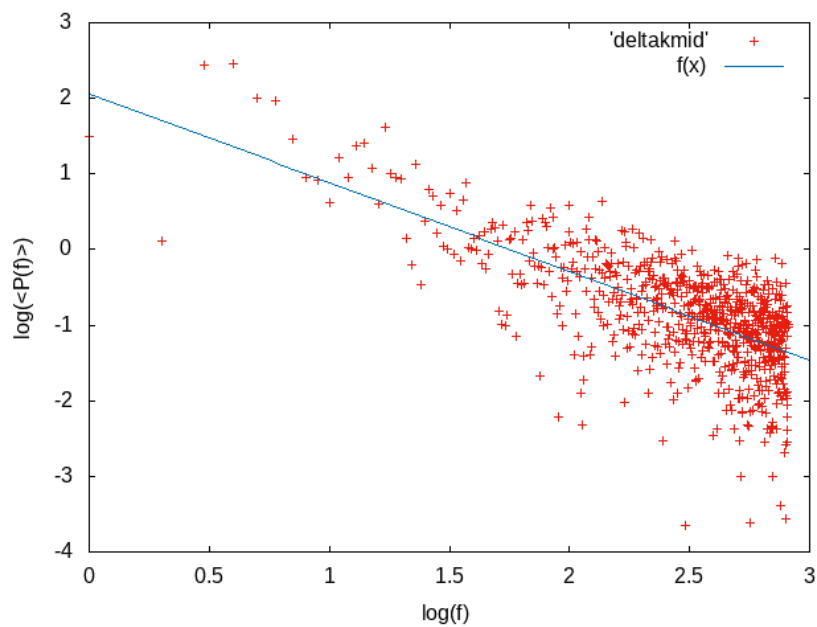


Figura 4.27: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.14$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 2.06265 - 1.17597 * \ln(f)$.

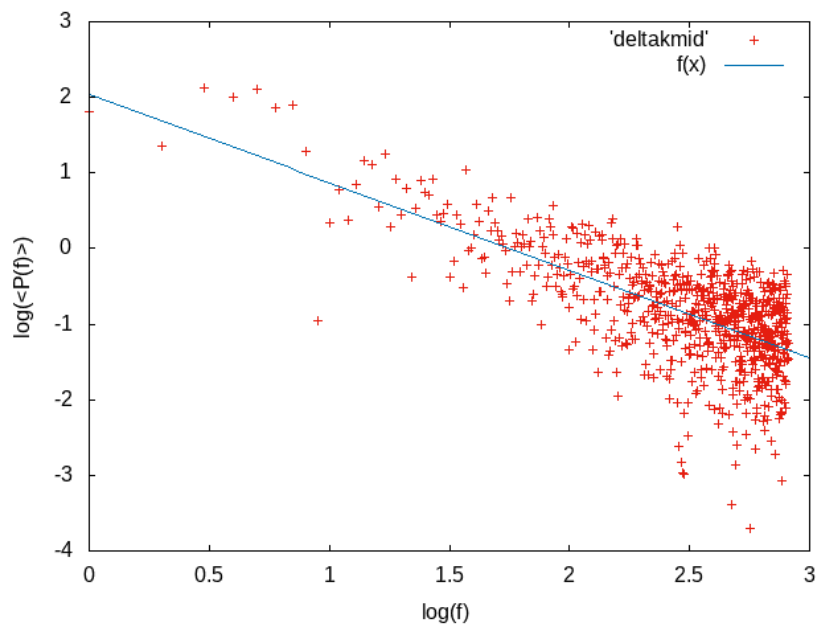


Figura 4.28: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 2.03375 - 1.1607 * \ln(f)$.

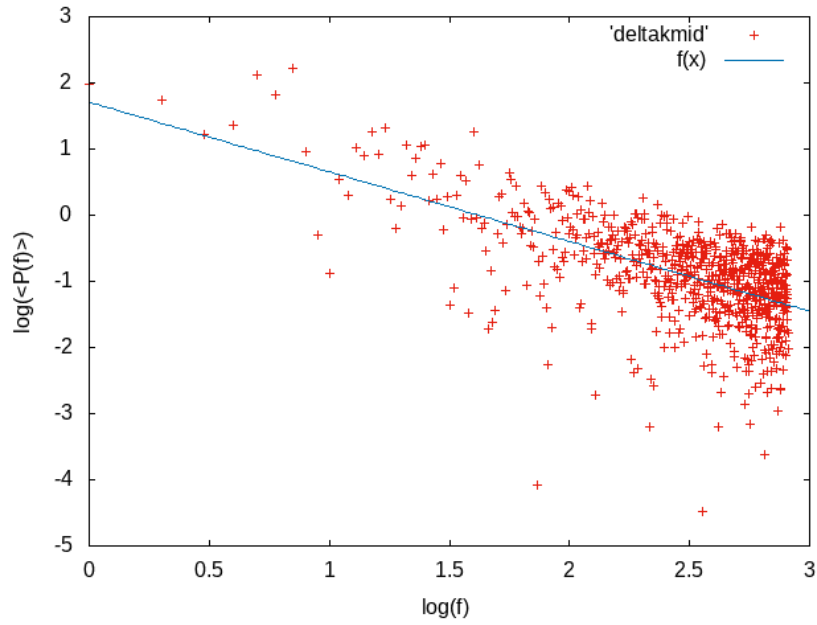


Figura 4.29: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.21$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 1.70703 - 1.05218 * \ln(f)$.

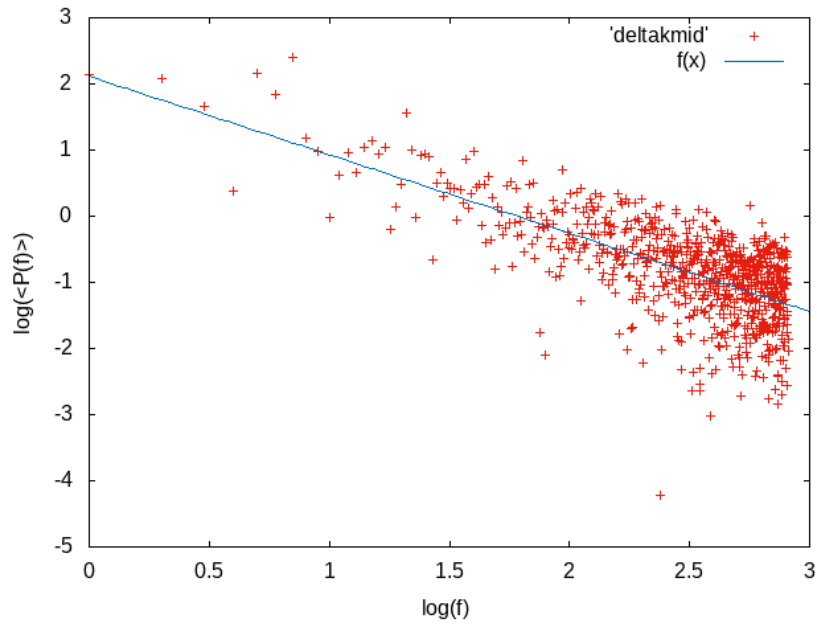


Figura 4.30: Espectro de potencias de la función δ_n para el núcleo del ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$, el ajuste da la ecuación de la recta $\ln(\langle P(f) \rangle) = 2.11276 - 1.18482 * \ln(f)$.

Como se puede ver, los resultados se resumen en la siguiente tabla:

χ	a	b	$\pm\Delta a$	$\pm\Delta b$	R^2
0.01	5.43695	1.88278	0.1218	0.04843	0.65079
0.025	4.56832	2.00318	0.126	0.0501	0.66344
0.04	3.29423	1.63965	0.1308	0.0520	0.55058
0.07	2.57162	1.37466	0.117	0.04655	0.51819
0.11	2.04735	1.18881	0.1252	0.04978	0.41283
0.14	2.06265	1.17597	0.1132	0.04503	0.45675
0.18	2.03375	1.1607	0.1122	0.04463	0.45475
0.21	1.70703	1.05218	0.1252	0.04979	0.35509
0.25	2.11276	1.18482	0.1145	0.04555	0.45479

Tabla 4.1: Parámetros obtenidos del ajuste de la recta al espectro de potencias correspondiente a cada coeficiente de interacción χ , incertidumbres y bondad de ajuste.

El comportamiento del exponente del espectro de potencias para el núcleo analizado, decrece conforme la interacción aumenta, esto se ve al graficar en el eje x al parámetro χ y en el eje y al exponente del espectro de potencias correspondiente, dejando de lado la última interacción, ya que con ésta el comportamiento de los datos se aleja un poco más de una recta, esto se puede hacer, debido a que con una interacción mayor, los cálculos realizados para diagonalizar la matriz son cada vez más complejos y en el programa utilizado, se tiene que considerar un pivote mayor, por lo que aparecen errores agregados dada la complejidad de los cálculos realizados.

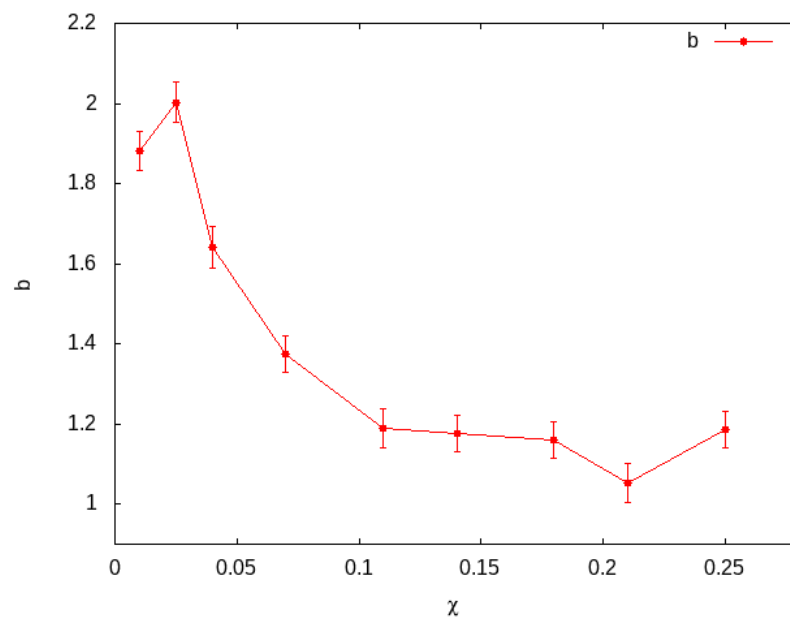


Figura 4.31: Valores de b obtenidos de ajuste al espectro de potencias vs parámetro χ para el núcleo de ^{48}Ca .

De los resultados anteriores, se nota que cuando el núcleo inicia con una interacción muy pequeña $\chi = 0.01$, el exponente del espectro de potencias correspondiente, está muy cercano a 2 pero sin serlo, lo cual indica que con tan solo esa pequeña interacción, el sistema ha dejado de ser integrable, y si se incrementa el tamaño de la interacción, el exponente empieza a disminuir salvo para la segunda interacción en la cual el exponente indica que el sistema es integrable, sin embargo, si el parámetro de interacción crece hasta $\chi = 0.21$, el exponente decae teniendo uaproximándose a un valor de b muy cercano a la unidad, por lo que se puede afirmar, que el núcleo del ^{48}Ca , con esta interacción está en el régimen caótico de acuerdo a la conjetura de A. Relaño, et. al. Los resultados aquí obtenidos, son similares a los reportados por E. Landa et al., en *Criticality and long-range correlations in time series in classical and quantum systems*.

Lo dicho en el párrafo anterior, concuerda totalmente con los resultados obtenidos de analizar las distribuciones del espaciamiento de vecinos cercanos, se encuentra por tanto que, un sistema cuántico como el núcleo, puede ser caracterizado como un sistema integrable o caótico al observar los comportamientos predichos por los ensambles de la RMT y a su vez, analizar la ley que sigue el espectro de potencias (ruido), el cual se vió que para un núcleo de ^{48}Ca , con una interacción suficientemente grande, se encuentra con comportamientos caóticos. La importancia de esto radica en el hecho de que cuando un sistema cuántico está en el régimen caótico, aparecen más correlaciones entre sus valores del espectro de energías, lo cual se puede ver evidente en la suavización de la curva de energías mientras más fuerte sea la interacción dada por el parámetro χ .

Capítulo 5

Complejidad de los estados nucleares. Entropía de Shannon como medida de la caoticidad.

Ya que se ha comprendido de una manera más clara el estudio del caos en sistemas cuánticos a través de los ensambles de la teoría de matrices aleatorias o bien, considerando al espectro de energía como una serie temporal, es necesario cuantificar el grado de caoticidad que presenta un sistema mecano-cuántico.

Si bien es cierto que, en mecánica clásica, una medida de la caoticidad está dada por los exponentes de Lyapunov, los cuales miden la distancia entre dos trayectorias cercanas que se originan de una condición inicial y una pequeña variación, en un sistema cuántico dada la naturaleza de la no existencia del concepto de trayectoria, es imposible definir unos coeficientes de Lyapunov tal cual al caso clásico, sin embargo, se han hecho trabajos que tratan de extender el concepto detrás de los exponentes de Lyapunov para sistemas cuánticos [26, 27].

Otra puerta de salida ante esta situación viene a ser la llamada entropía de Shannon o entropía de la información, usada comúnmente como medida de la pérdida de información en sistemas de variable aleatoria. Para el caso de sistemas caóticos, puede ser empleada para medir el grado de caoticidad o complejidad de un sistema dado [28, 29, 30], entendiendo la complejidad como una mezcla de estados en una base dada.

La entropía de información o de Shannon, se puede definir para una función de onda normalizada $|\alpha\rangle$ como:

$$S^\alpha = - \sum_k |C_k^\alpha|^2 \ln |C_k^\alpha|^2 \quad (5.1)$$

Donde $|\alpha\rangle$ está dada como una combinación lineal de una base dada:

$$|\alpha\rangle = \sum_k C_k^\alpha |k\rangle \quad (5.2)$$

Donde los coeficientes $|C_k^\alpha|^2$ son reales. Hay que notar además que, la entropía de información es dependiente de la base elegida; esta cantidad, refleja la complejidad relativa a la base y a la base de referencia, lo cual permite obtener información acerca de como se interrelacionan las bases.

Si todos los estados de la base son igualmente probables, es decir, el estado $|\alpha\rangle$ está distribuido uniformemente en toda la base, los coeficientes serán de tal manera que $|C_k^\alpha|^2 = 1/\sqrt{N}$, dando como resultado un valor máximo para la entropía de información de $S^\alpha = \ln N$, con N la dimensión del espacio. Sin embargo, la ortogonalidad de los eigenestados lleva a fluctuaciones [30, 32, 34], es decir, que el vector $|\alpha\rangle$ no se distribuye de manera uniforme, por lo que para el GOE, el valor promedio de la entropía de información es de [31, 49]

$$S_{GOE} = \ln(0.48 N) \quad (5.3)$$

Por otra parte, se puede definir una longitud de delocalización tomando la exponencial de los valores de la entropía $l^\alpha = \exp(S^\alpha)$, para una función totalmente delocalizada se tiene que $l \rightarrow N$, y su desviación en el límite GOE indica la mezcla incompleta de los estados base.¹

¹Otra medida para el estudio del grado de delocalización se encuentra en el llamado *inverse participation ratio* [31, 32, 49], el cual está dado como:

$$\Lambda^\alpha = \left[\sum_k |C_k^\alpha|^4 \right]^{-1} \quad (5.4)$$

Esta medida puede ser interpretada como el número de componentes principales de una función de onda dada $|\alpha\rangle$, respecto a la base original $|k\rangle$. Tanto el *inverse participation ratio* como la entropía de información caracterizan el grado de complejidad de un sistema, sin embargo, la entropía de información es más sensible cuando se tienen $|C_k^\alpha|$ pequeños, mientras que la otra medida, cuantifica el número de componentes de mayor peso, y aquí los componentes de menor peso no son tan importantes.

Estas dos medidas, se pueden comparar al tomar la razón entre la longitud de delocalización y el *inverse participation ratio*, que para el caso de sistemas descritos por el GOE, tal relación se reduce a:

$$\frac{\exp(S^\alpha)}{\Lambda^\alpha} \Rightarrow 1.446 \quad (5.5)$$

La cual no depende de la dimensión N .

5.1 Complejidad de los estados nucleares en el ^{48}Ca .

Estudiar la complejidad de los estados nucleares en el núcleo del ^{48}Ca es el objetivo de esta sección, para ello hay que notar que la base sobre la que se trabaja es la dada por la aproximación de campo medio, además, se tiene como integrales de movimiento el número de isospin $T = 0$, y el momento angular y la paridad $J^\pi = 3^+$, por lo que la dimensión del espacio es $N = 1627$.

Los eigenvalores y eigenvectores, se obtuvieron usando un programa que diagonaliza una matrix tri-diagonal, los elementos diagonales y no diagonales del Hamiltoniano del sistema fueron obtenidos con la ayuda del código Antoine, posteriormente, el programa reconstruye la matriz y la diagonaliza.

Al igual que en el capítulo anterior, se trabajó con diferentes interacciones del Hamiltoniano esquemático dado por la ecuación (4.8). Para cada interacción se obtuvo la entropía de Shannon para cada uno de los 1627 estados, lo cual resultó en la siguientes gráficas.

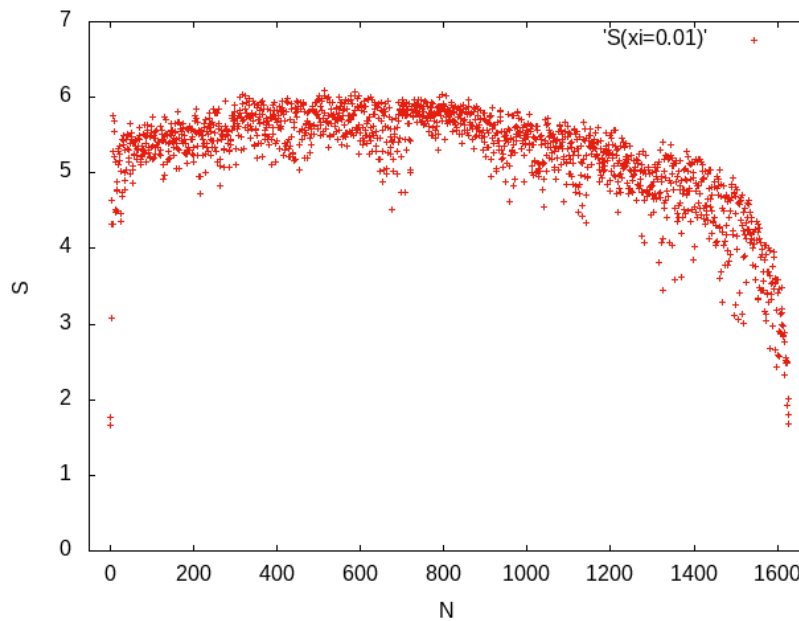


Figura 5.1: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$.

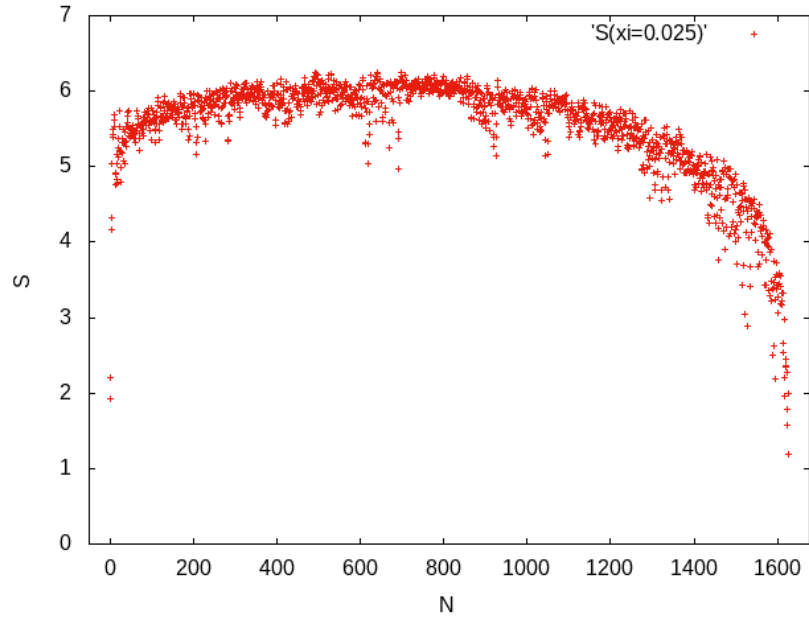


Figura 5.2: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.025$.

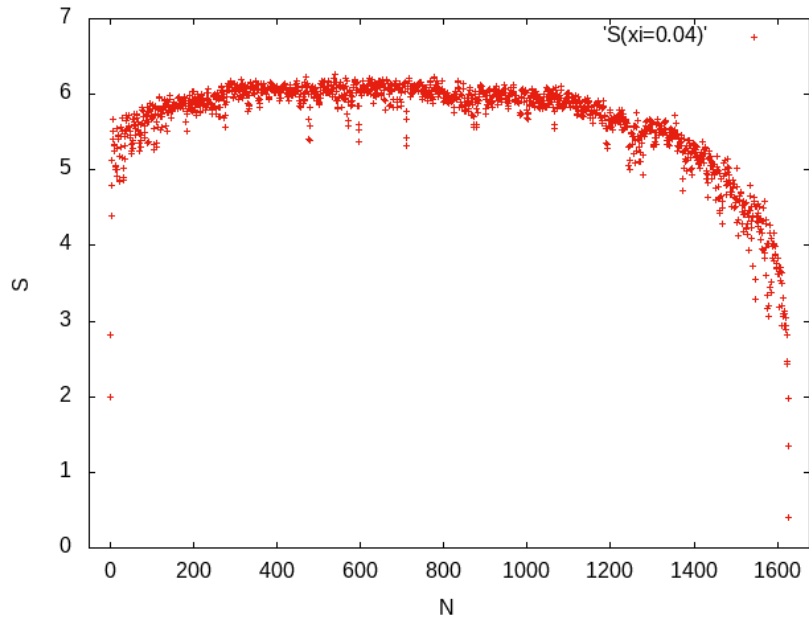


Figura 5.3: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.04$.

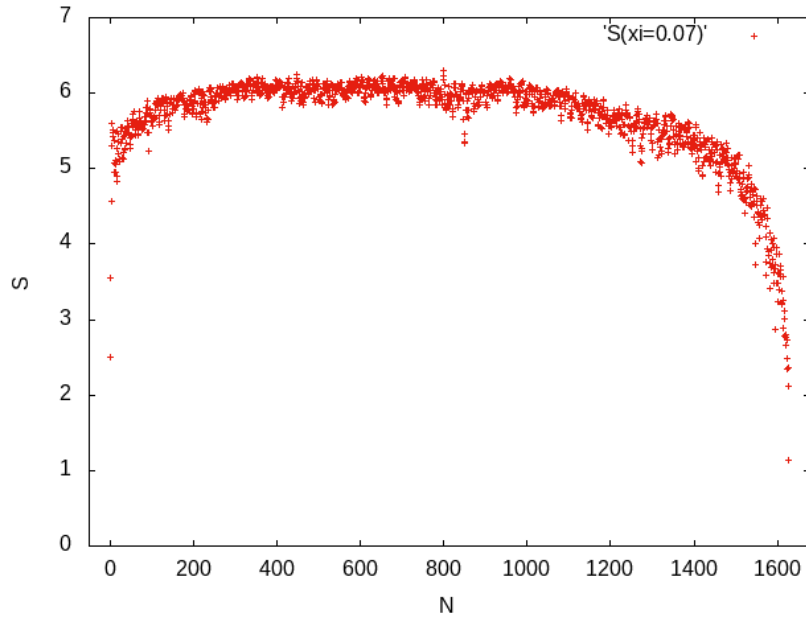


Figura 5.4: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.07$.

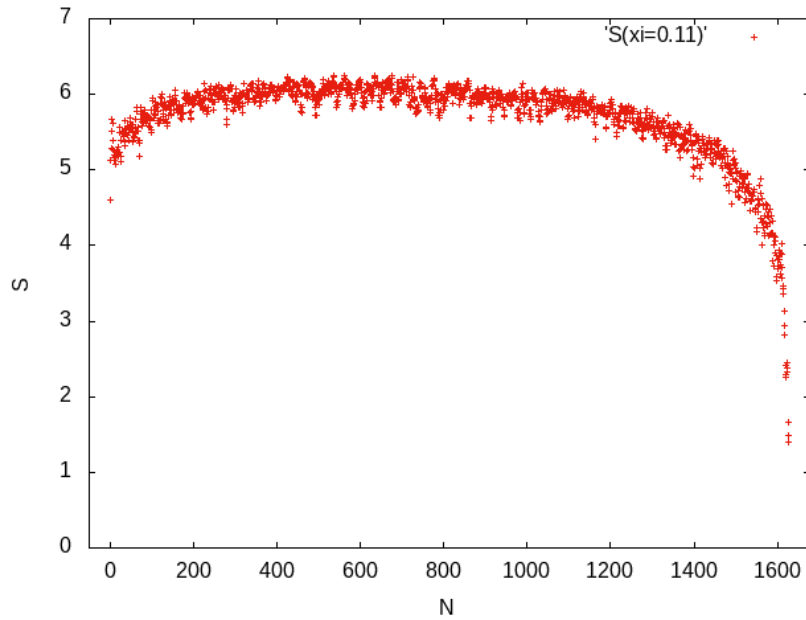


Figura 5.5: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$.

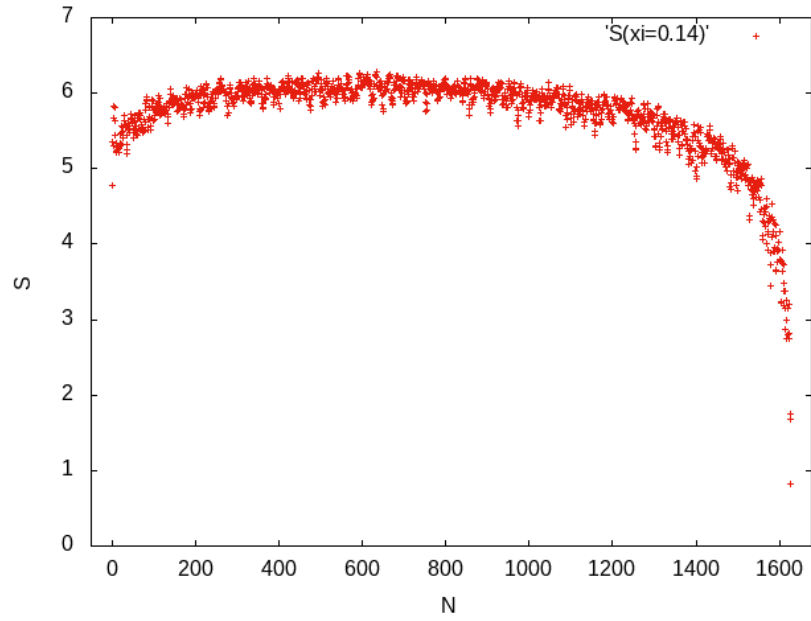


Figura 5.6: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.14$.

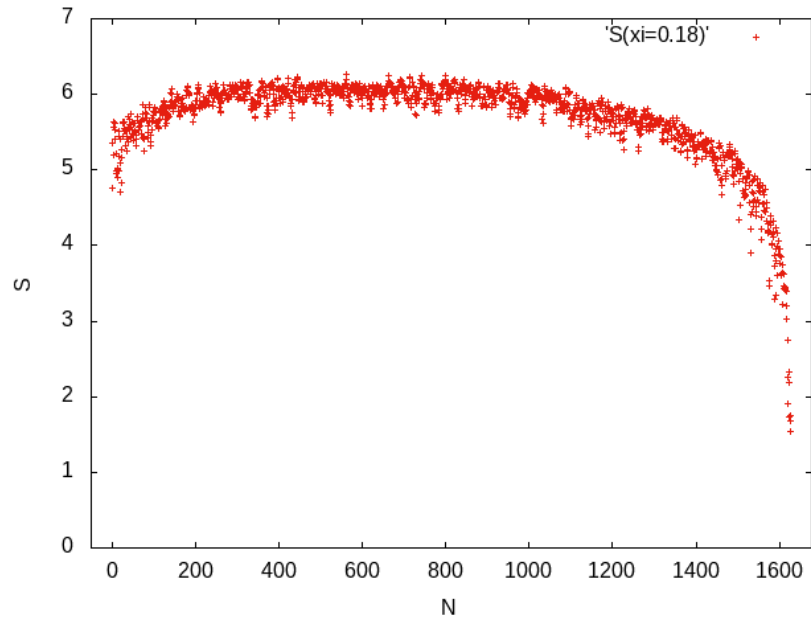


Figura 5.7: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$.

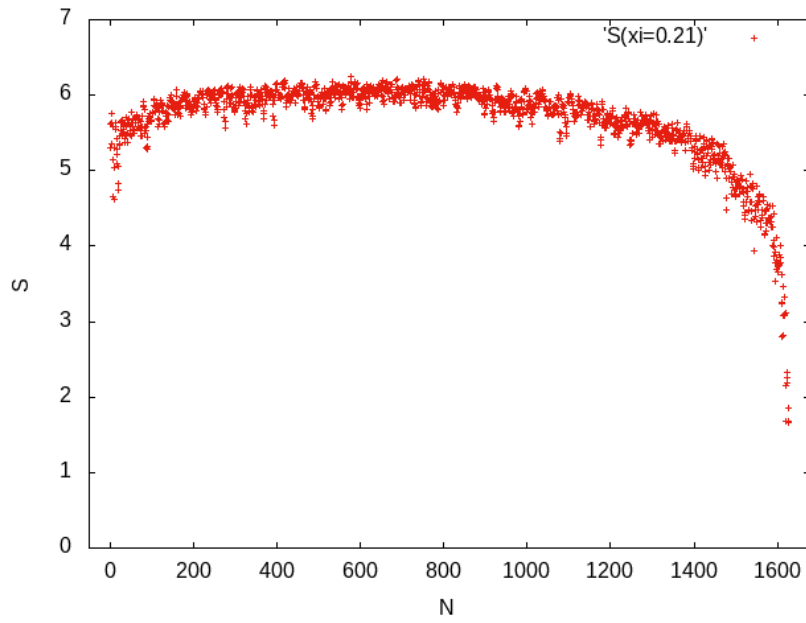


Figura 5.8: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.21$.

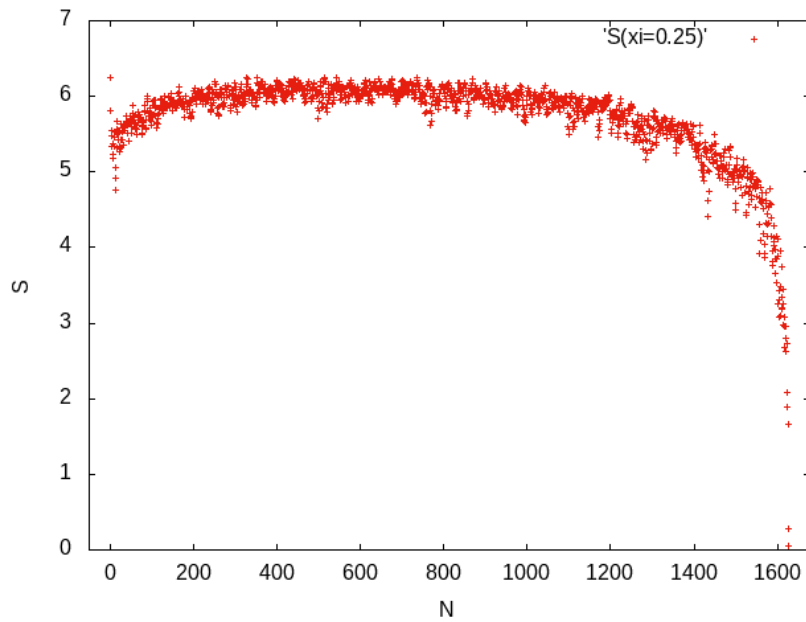


Figura 5.9: Entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$.

Se puede notar al comparar las dos primeras gráficas que, en principio, el valor de la entropía alcanza a lo más un valor algo menor que 6 para la primera interacción y para la segunda hay incluso valores que pasan de 6. Además la forma de la entropía en función del número de niveles, muestra que para los niveles más bajos y más altos, la entropía es menor, lo que está totalmente de acuerdo con el hecho de que los estados de en medio tienen una mayor representación, lo cual, se comprueba al notar que los niveles centrales son los que se acercan más al valor máximo de la entropía. Este comportamiento, corresponde al exhibido en el espectro de energías, en donde, la mayor representación se encuentra en los niveles centrales.

Otra característica que salta a la vista es el hecho de que para la interacción de $\chi = 0.01$, los valores de la entropía para algunos estados se alejan más de lo que sería la tendencia, es decir los valores no se pegan a valores cercanos a 6, si no que se alejan, en forma global lo que se observa es una mayor dispersión de los datos de la tendencia principal para los estados intermedios, formándose patrones o estructuras de barras o “dedos”. Este comportamiento tiene que ver con la interferencia de los estados nucleares [?], estos se organizan en subconjuntos, y para interacciones lo suficientemente bajas, los estados de un subconjunto no se mezclan con los estados de otros subconjuntos.

Además, para la interacción dada por el parámetro $\chi = 0.01$, se sabe ya del capítulo anterior que ya no se trata de un sistema integrable pero tampoco es un sistema totalmente caótico, mismo que se obtuvo de analizar la estadística de los niveles de energía así como el ruido. Lo anterior también es válido para la segunda interacción dada por $\chi = 0.025$, sin embargo, tanto la distribución de espaciamentos de vecinos cercanos para la energía y el análisis del ruido, revelan que este sistema está más cerca de ser caótico que el sistema con $\chi = 0.01$.

Conforme la interacción crece, se hace notar que lo que se ha llamado dispersión de los valores de entropía para algunos estados o estructura de barras o “dedos”, respecto de la tendencia principal, se hace menor (desaparece) y además, los valores de entropía crecen un poco cuando se da el salto de la primera interacción a la segunda considerada, es decir, cuando el parámetro de interacción χ aumenta de 0.01 a 0.025, la interferencia de los estados tiende a desaparecer, lo cual implica una mezcla entre los estados pertenecientes a subconjuntos diferentes.

A partir del tercer valor de la interacción, ya se está tratando con núcleos muy próximos al comportamiento caótico, y esto se ve en el hecho de que aunque hay diferencias en las gráficas de entropía, no son muy notorias, pues la forma es la misma para todas las interacciones pero con la diferencia que hay una menor dispersión. Por su parte, dado que la dimensión del espacio en este caso es $N = 1627$, el valor máximo de la entropía que pudiera alcanzar sería de $S^\alpha \approx 6.66$, dado que este valor no se alcanza,

se puede decir que los estados no se mezclan completamente.

5.2 Longitud de coherencia y ancho de la curva.

Un análisis un poco más detallado se puede realizar al intentar fijarse en las pequeñas diferencias en el comportamiento de la entropía de los estados conforme la interacción aumenta, esto se puede hacer si en lugar de tomar la entropía se toman ahora los valores de la exponencial de la misma, esto hará que pequeñas diferencias sean más visibles.

A continuación, se presentan las gráficas de la exponencial de la entropía como función del número de estados, solo para cinco interacciones representativas.

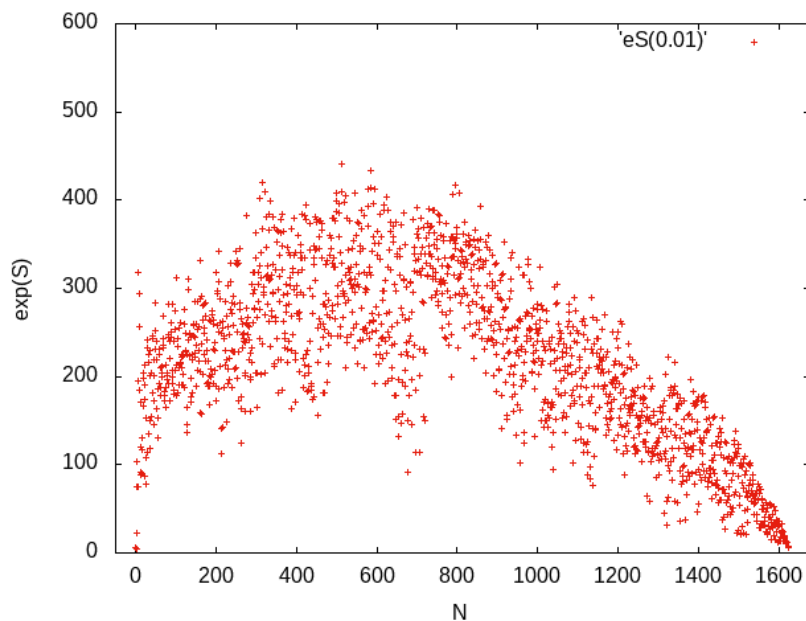


Figura 5.10: Valores exponenciales de la entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$.

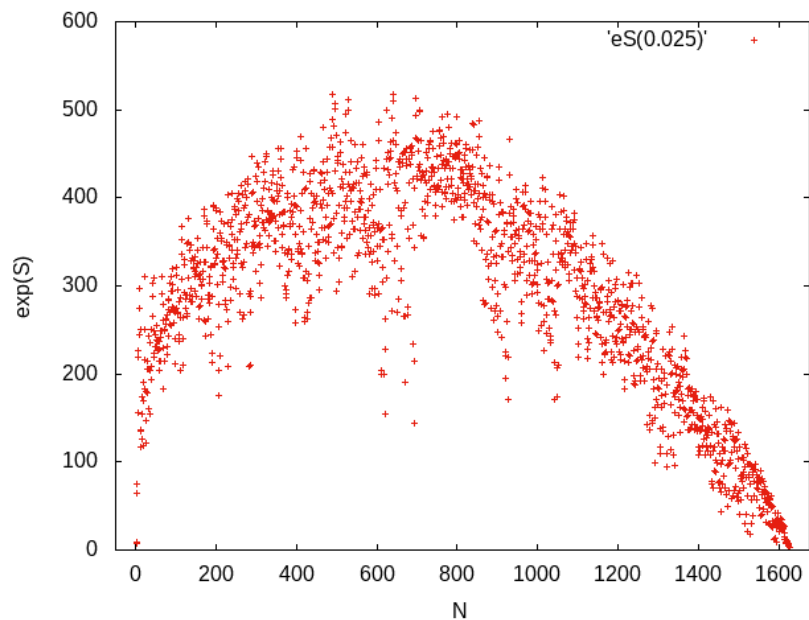


Figura 5.11: Valores exponenciales de la entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.025$.

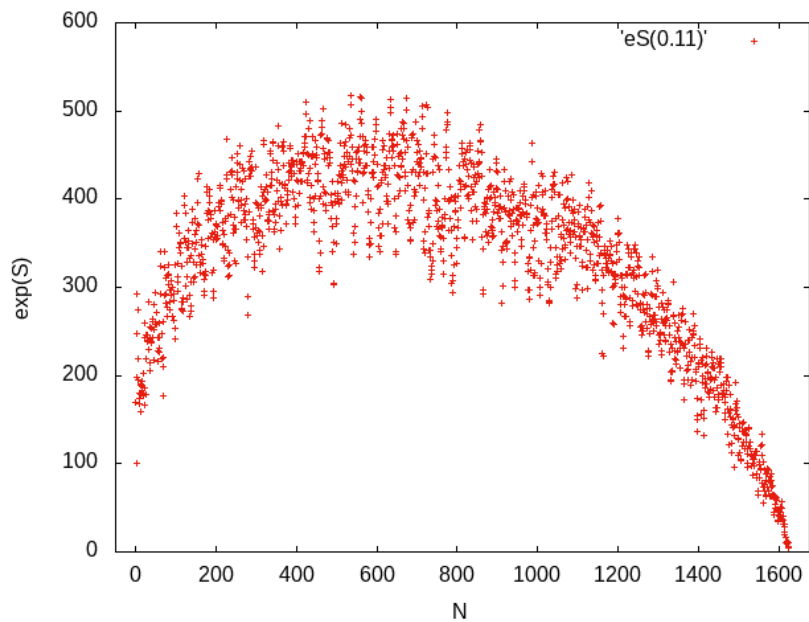


Figura 5.12: Valores exponenciales de la entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$.

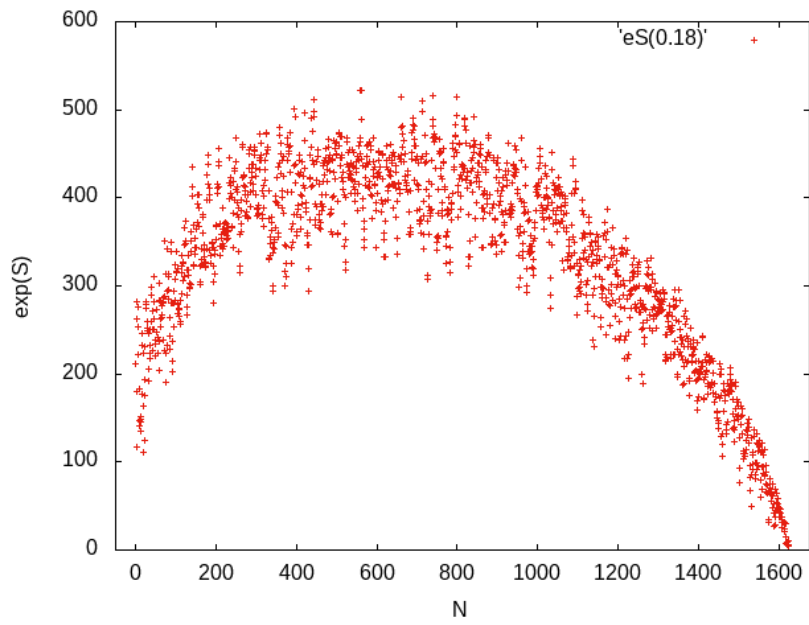


Figura 5.13: Valores exponenciales de la entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$.

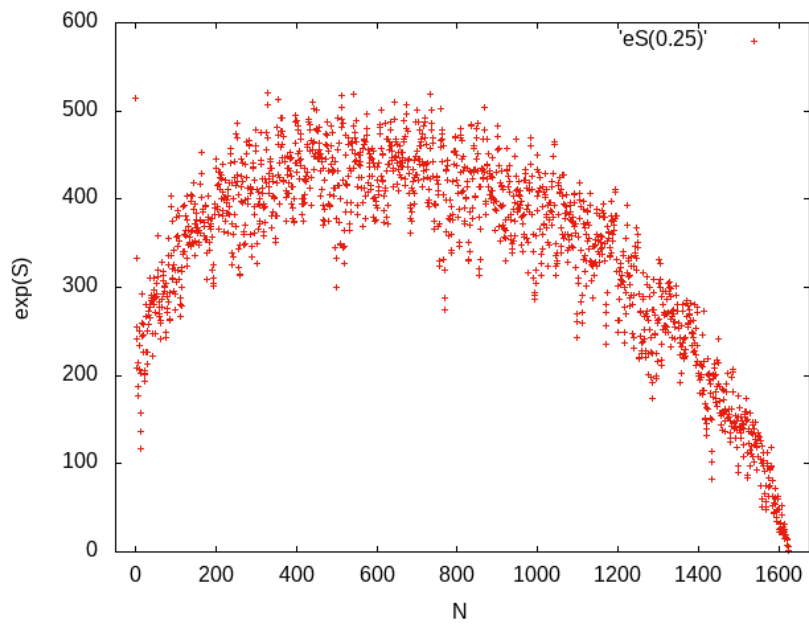


Figura 5.14: Valores exponenciales de la entropía de información para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$.

Como ya se anticipó, las diferencias entre la gráfica correspondiente a la interacción $\chi = 0.01$ y la correspondiente a $\chi = 0.11$ por ejemplo, en la primera, la forma de la exponencial de la entropía llega a valores máximos que rondan cerca de 400, mientras que en la segunda situación, los valores llegan hasta cerca de 500.

Otra de las diferencias consiste en la forma que tienen, la segunda tiene una forma de medio óvalo y la primera, se aleja un poco de este comportamiento, aunado a esto se puede ver una mayor dispersión de los valores de la exponencial de entropía con respecto a una curva envolvente, lo cual está de acuerdo con el hecho ya comprobado de que a una mayor interacción, la caoticidad del sistema es mayor, con ello la complejidad en la disposición de los eigenvectores también lo es.

Se puede ahora poner a la exponencial de la entropía para los estados nucleares en función de la energía, para lo cual se obtienen comportamientos que se aproximan a una gaussiana, por lo cual a cada interacción se le ajustó una gaussiana, obteniendo resultados interesantes.

La curva ajustada a los datos de la exponencial de la entropía en función de la energía para cada interacción, es de la forma:

$$f(x) = a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2c^2}\right) \quad (5.6)$$

Donde $f(x) = \exp(S^\alpha)$, $x = E$, b da el valor en el eje de las x en el cual estará centrada la curva gaussiana, por su parte a indica el valor máximo que alcanza la gaussiana, y c será una medida de la anchura y es justo este parámetro que dará una medida de la complejidad o bien de la caoticidad del sistema.

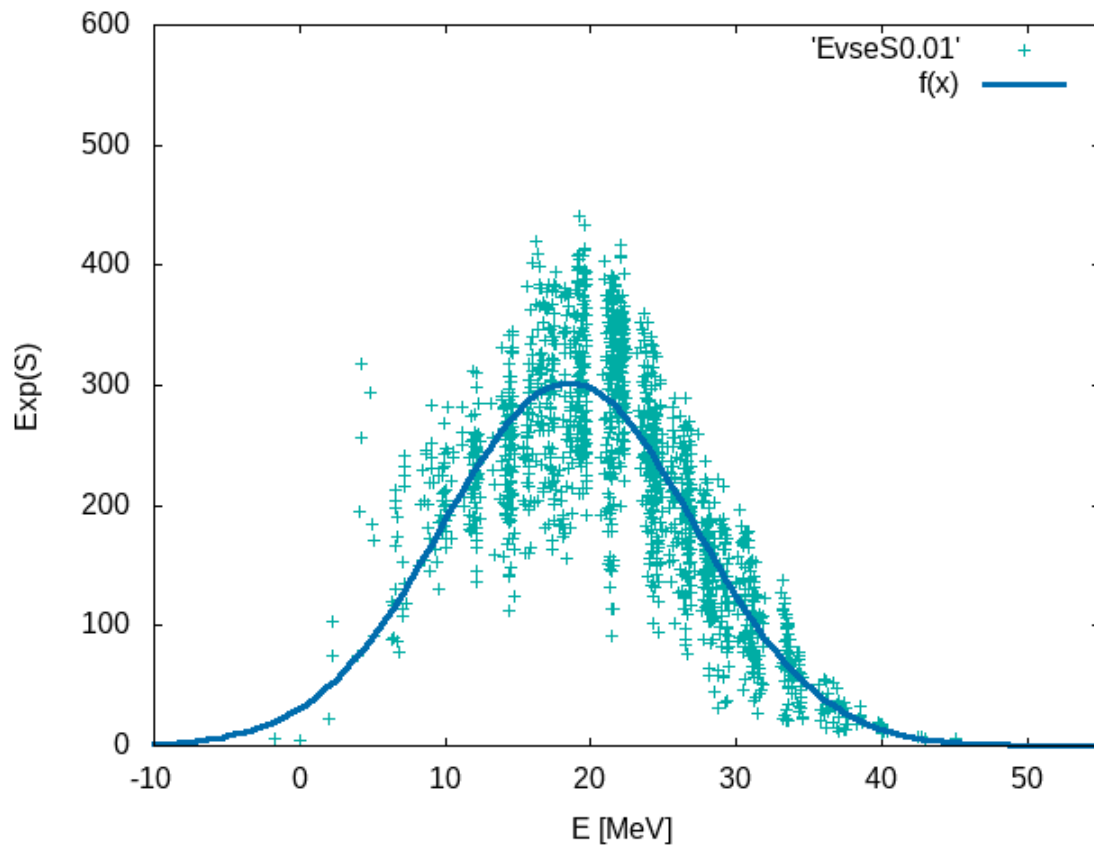


Figura 5.15: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$.

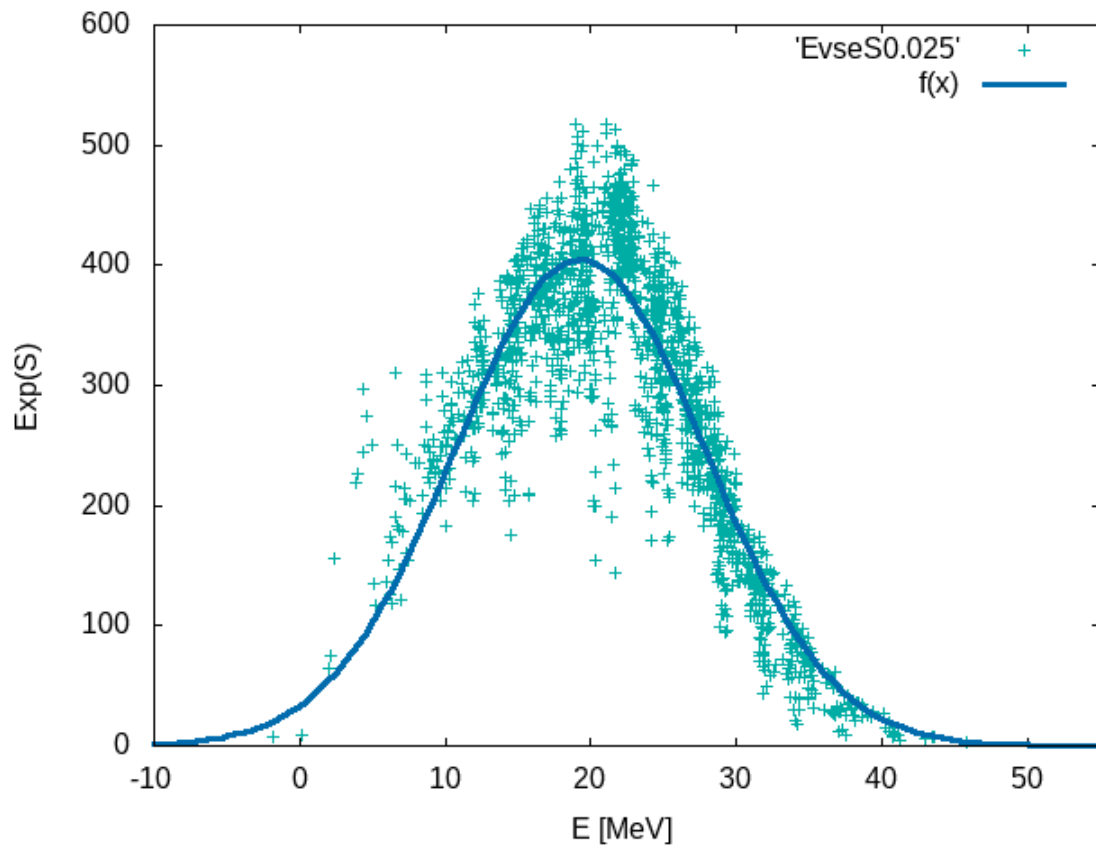


Figura 5.16: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.025$.

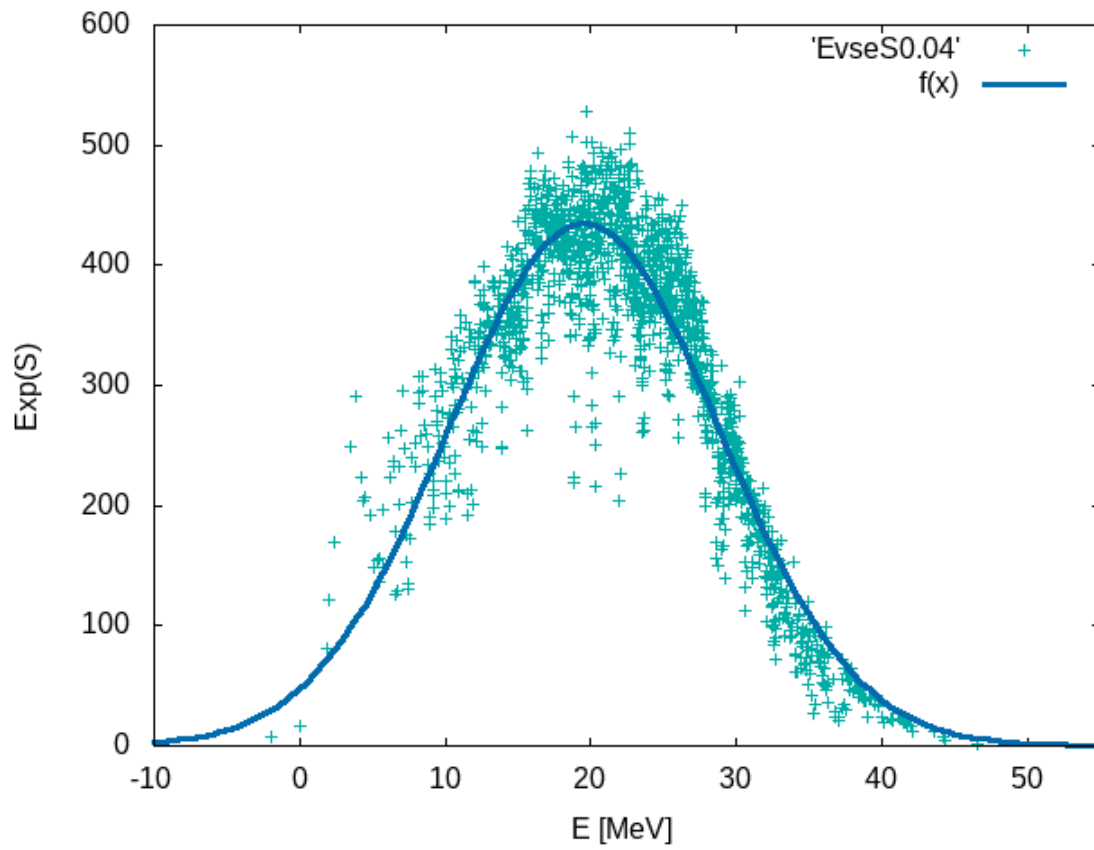


Figura 5.17: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.04$.

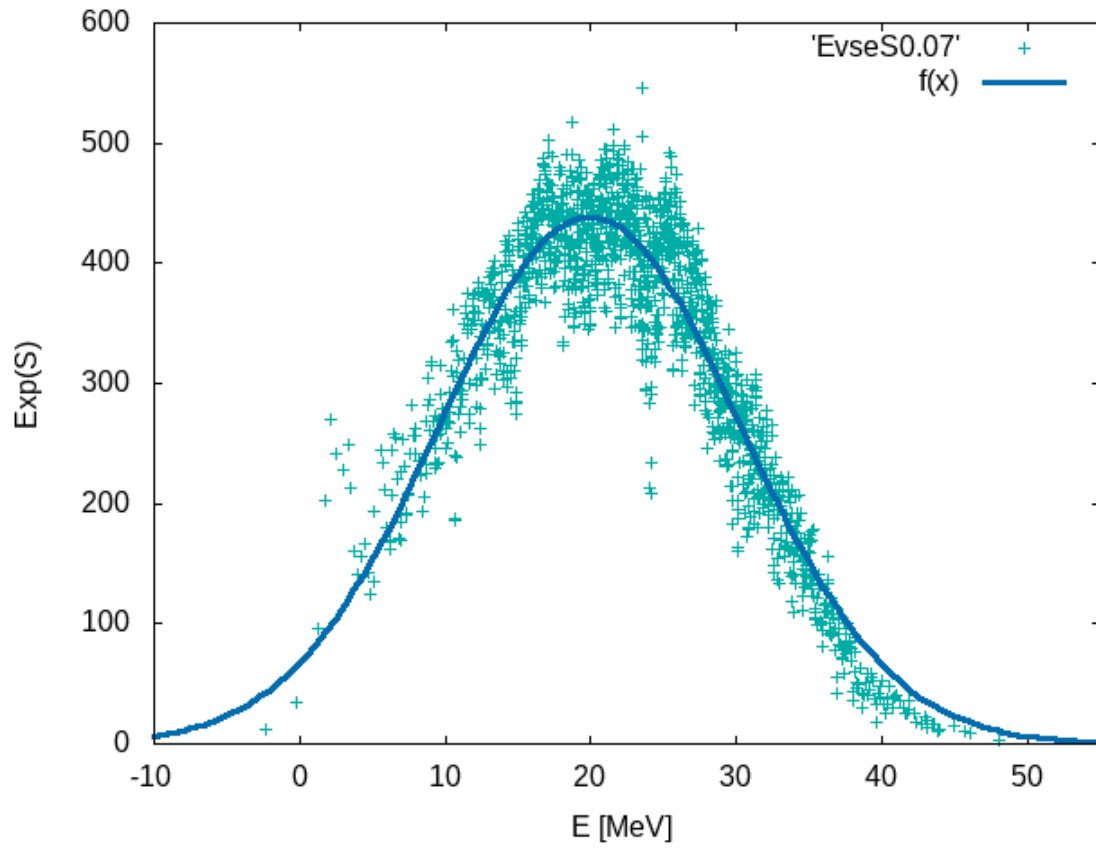


Figura 5.18: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.07$.

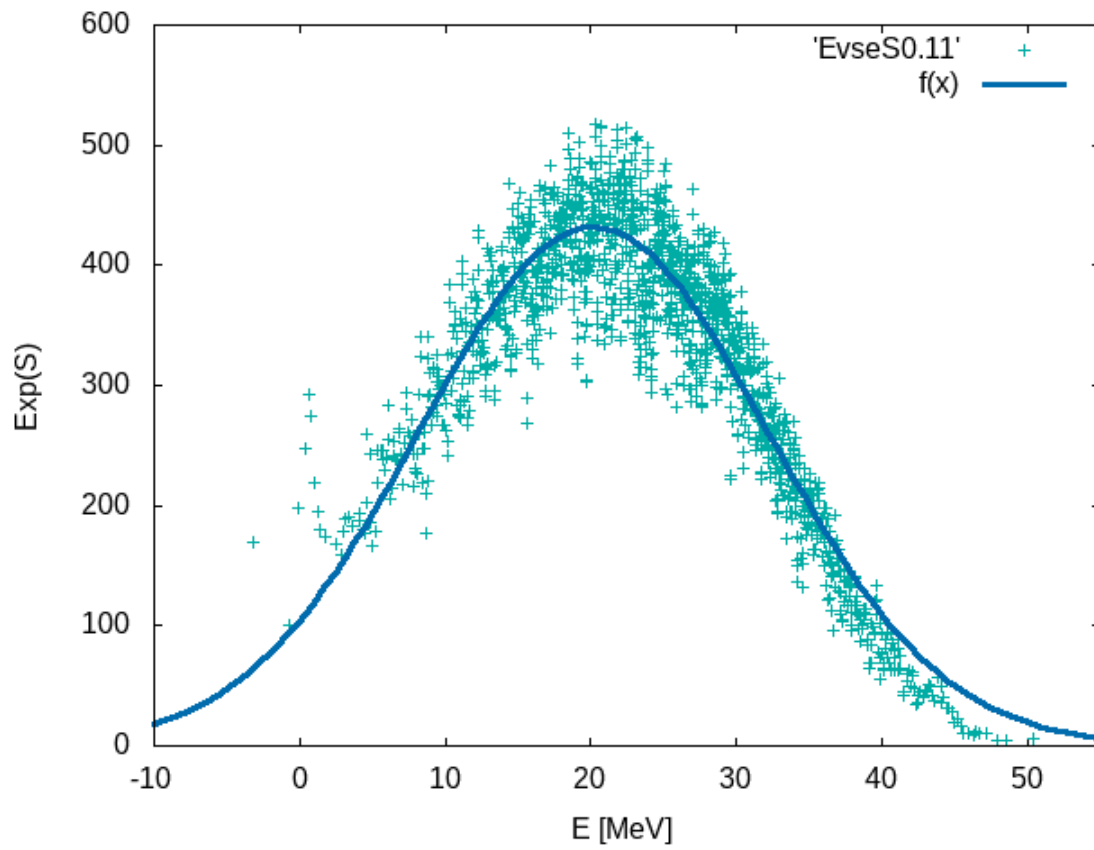


Figura 5.19: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$.

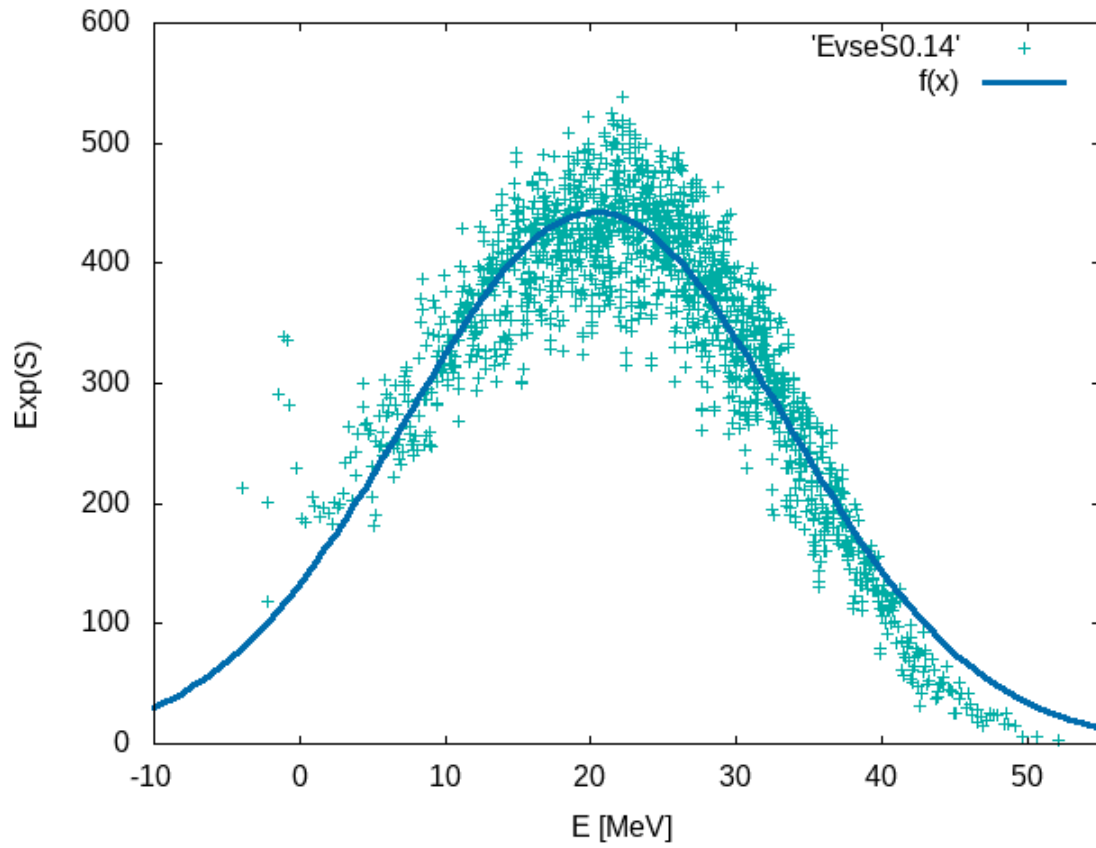


Figura 5.20: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.14$.

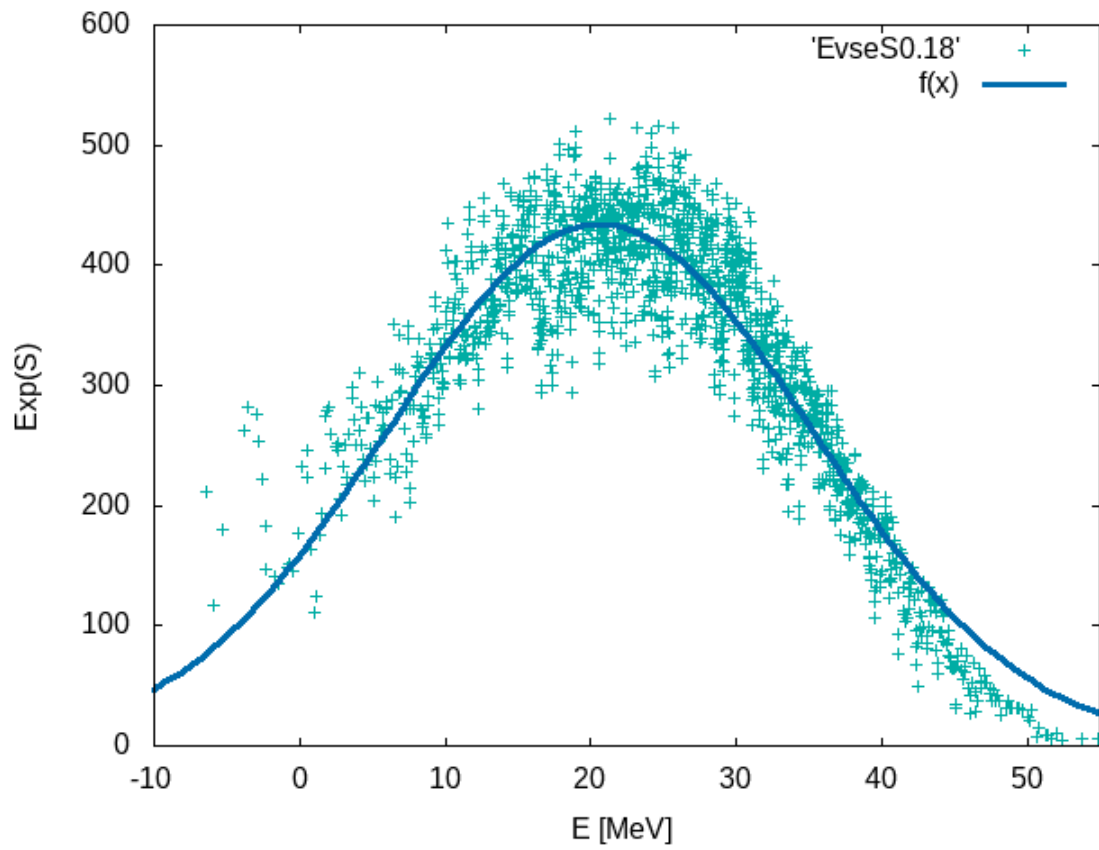


Figura 5.21: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$.

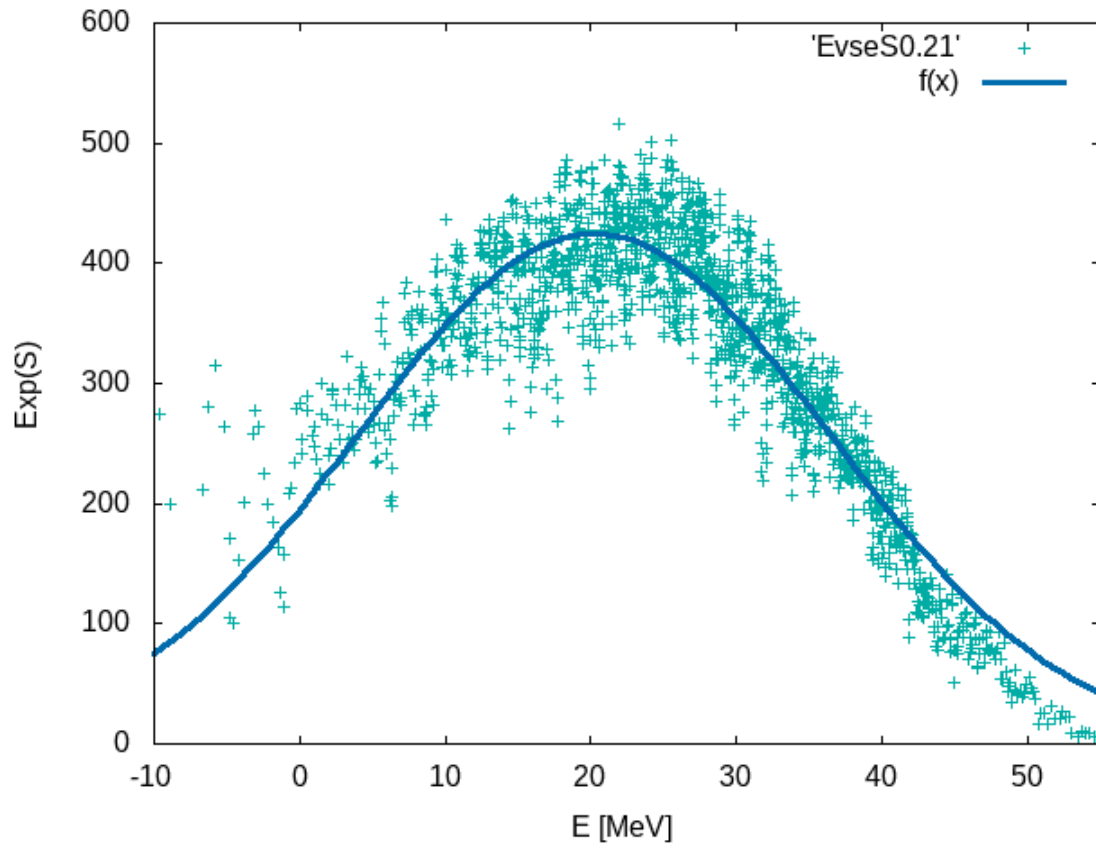


Figura 5.22: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.21$.

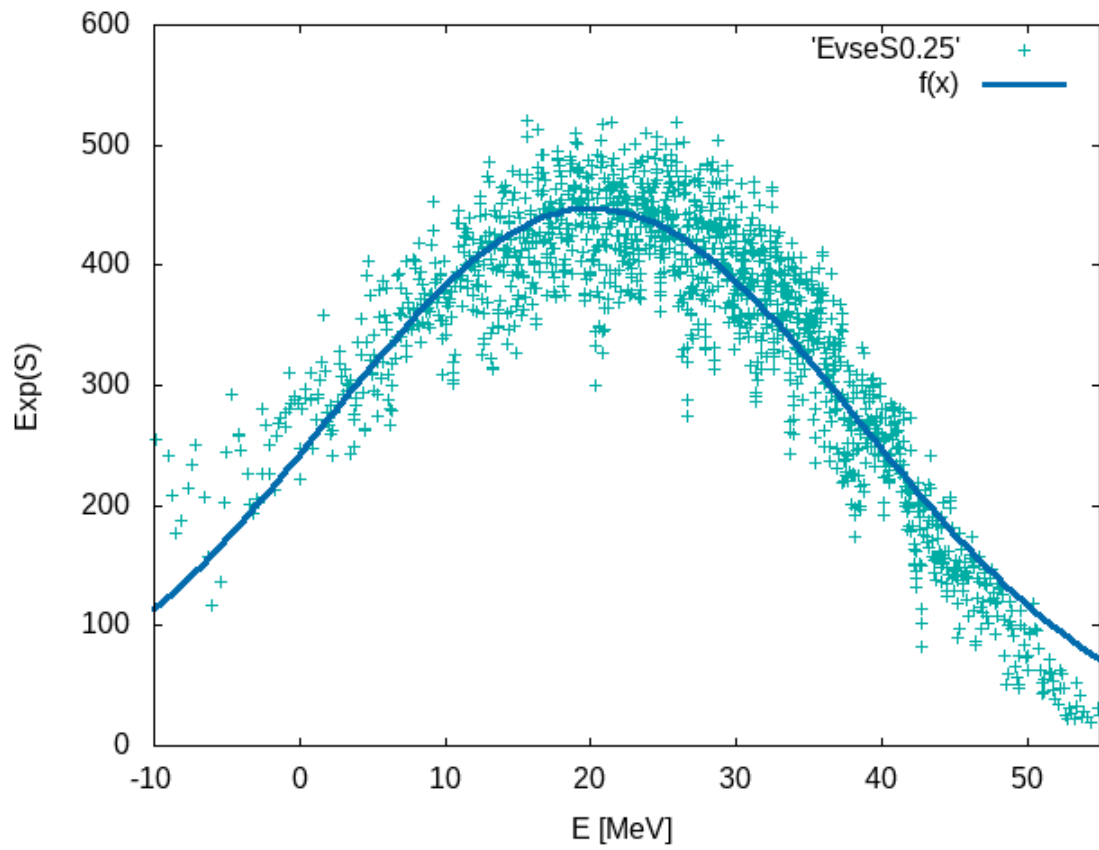


Figura 5.23: Valores exponenciales de la entropía de información en función de la energía y ajuste gaussiano, para los estados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$.

Los resultados obtenidos del ajuste, son resumidos en la siguiente tabla:

χ	a	b	c	R ²
0.01	440	20	8.66025	0.6962
0.025	507	20.5	8.71779	0.7971
0.04	515	21	8.83176	0.8391
0.07	518	21.5	9.32738	0.8563
0.11	520	22	10.3923	0.8467
0.14	528	23	11.13553	0.8338
0.18	526	22.5	12.80625	0.8305
0.21	512	23.5	13.49074	0.8185
0.25	525	23.5	15.49193	0.8165

Tabla 5.1: Parámetros obtenidos del ajuste de la envolvente gaussiana para la exponencial de la entropía en función de la energía, correspondiente a cada interacción χ .

Hay que notar que el parámetro c que es el que da la anchura de la envolvente, va aumentando conforme la intensidad de la interacción también lo hace, reflejando así que cuanto mayor sea la interacción, el sistema se vuelve más caótico pues la anchura de la envolvente aumenta, con lo que los estados están más delocalizados.

La variación del parámetro c como función de la intensidad de la interacción se muestra en la gráfica (5.21). Por su parte, los parámetros a y b , no cambian mucho salvo en la primer interacción que como ya se dijo es un sistema que ha dejado de ser integrable pero que aún no es del todo caótico. Se puede ver que el parámetro a aumenta un poco excepto para la interacción de $\chi = 0.21$ en la que se observa que disminuye un poco, este aumento de a brinda información acerca de la magnitud de la entropía para los estados del núcleo, lo cual quiere decir que, los valores de entropía van creciendo cuando la interacción es más fuerte pero los cambios son muy pequeños.

Lo anterior es notorio si se consideran las gráficas de la entropía en función del número de estados. La tendencia principal en estados intermedios puede verse como próxima a una recta con un cierto grosor, y cuando la intensidad de la interacción crece, el grosor de tal recta disminuye pegándose a los valores más altos que el sistema puede alcanzar.

Otro hecho revelado de la inspección de las gráficas es el siguiente: Se puede ver para las gráficas que corresponden a la primera y segunda interacción más pequeñas, que aparece un patron un poco difuso de líneas y sombras, por lo que se puede asociar a

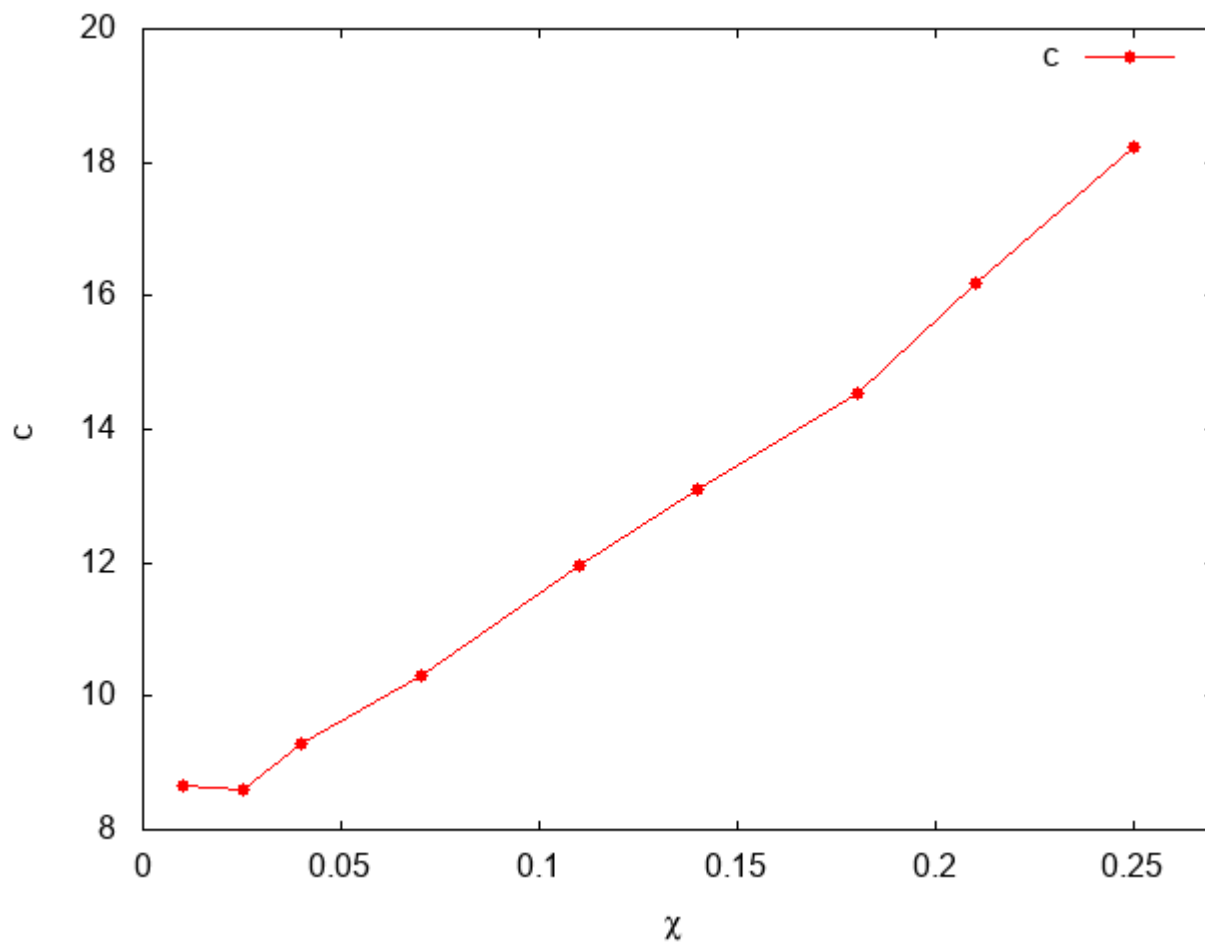


Figura 5.24: Parámetro c en función de la intensidad de la interacción para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$.

un patrón de interferencia entre los estados de la base, mientras que para interacciones mayores, ese patrón desaparece.

De lo anterior se puede decir, que cuando el sistema está sujeto a una interacción pequeña, que lo saca del régimen integrable pero que aún no es del todo caótico, los estados de la base interfieren de tal forma que aún no hay suficientes correlaciones entre los niveles de energías, lo cual se vió en el hecho de que tal curva presenta discontinuidades. Cuando la interacción aumenta, esas discontinuidades se suavizan, lo que refleja el hecho de una mayor correlación entre los niveles y más aún, el patrón de líneas y sombras apreciado (patrón de interferencia de estados pertenecientes a subconjuntos distintos), tiende a desaparecer como resultado de la mezcla de los estados.

Capítulo 6

Comportamiento de la distribución de los coeficientes de expansión como reflejo de la caoticidad.

En los capítulos anteriores se han analizado las diferentes formas que se tienen para determinar si un sistema cuántico es caótico, y más aún, se ha dado también una forma de medir el grado de caoticidad analizando la entropía de información de los estados en la base del modelo de capas, vía la exponencial de esta, misma que tiene un comportamiento Gaussiano cuando se tiene como función de la energía de los estados.

Este tipo de comportamiento, debe de alguna manera transmitirse a todas las partes involucradas, por ejemplo, en el comportamiento de los coeficientes de expansión obtenidos al diagonalizar el Hamiltoniano perturbado.

Ya que el núcleo analizado en este trabajo es el ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, por lo que el Hamiltoniano a diagonalizar es una matriz de 1627×1627 , siendo así que cada eigenvector tendrá 1627 coeficientes de expansión en la base $|\alpha\rangle$, por lo que al considerar todos los elementos de expansión se tendrán 1627^2 , esto será así para cada una de las interacciones tomadas en el Hamiltoniano esquemático.

Dado que se quiere ver de alguna manera como es el comportamiento de todos los coeficientes de expansión de todos los eigenvectores obtenidos, lo que hay que hacer es colocar todos en una sola lista y ver cuál es el resultado al tomar las gráficas del número de elementos *vs* la magnitud de los coeficientes. Esto se ve de la siguiente manera:

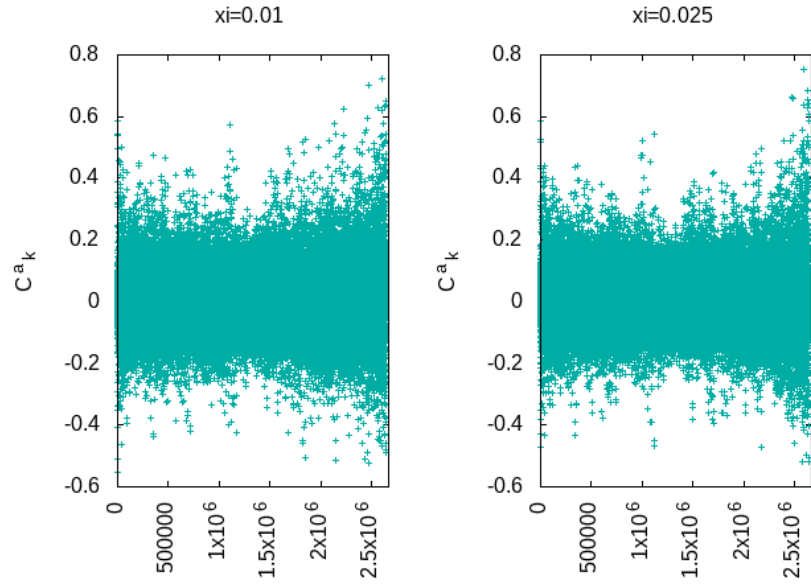


Figura 6.1: Distribución de los componentes de expansión *vs* el número total de elementos para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi=0.01, 0.025$.

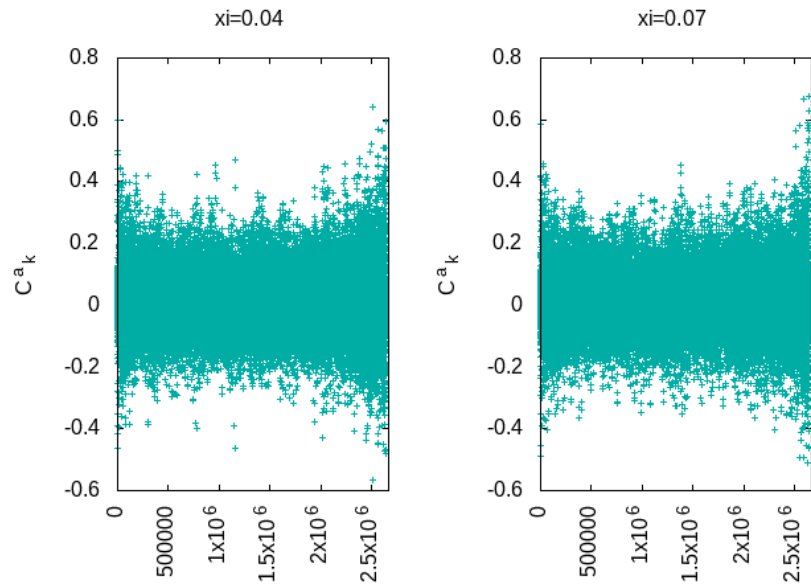


Figura 6.2: Distribución de los componentes de expansión *vs* el número total de elementos para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi=0.04, 0.07$.

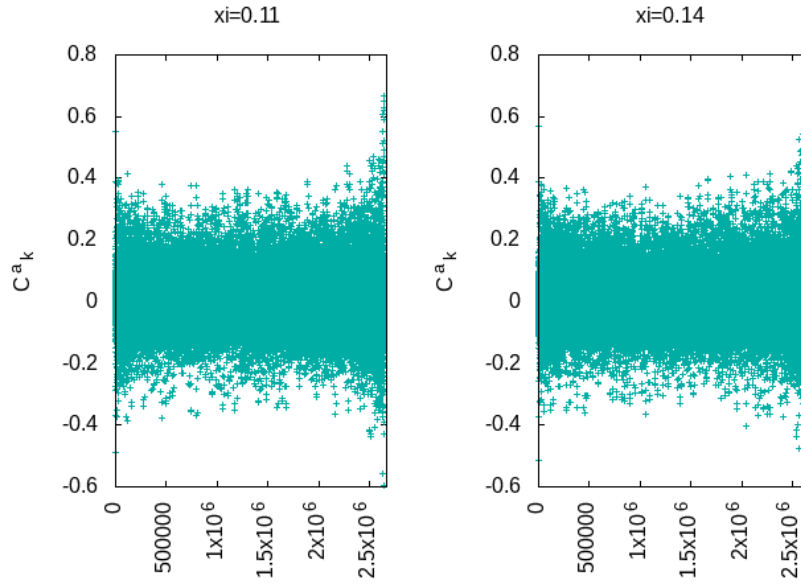


Figura 6.3: Distribución de los componentes de expansión vs el número total de elementos para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi=0.11, 0.14$.

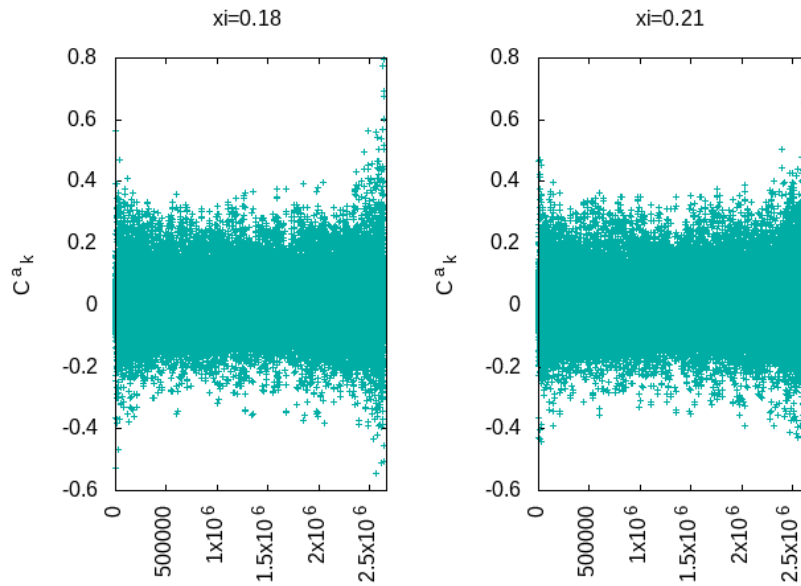


Figura 6.4: Distribución de los componentes de expansión vs el número total de elementos para el núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi=0.18, 0.21$.

Las diferencias apreciables a simple vista son difíciles de ver, sin embargo, se puede notar un poco de diferencia en el ancho, aunque esto es mínimo ya que la densidad de puntos es muy grande. Para ver de una manera correcta los cambios en las diferentes interacciones tomadas, es mejor considerar obtener la forma de la curva de distribución cuando todos estos datos son ordenados en cajas, esto es, obteniendo el histograma para ellos.

Haciendo lo anterior, se ha encontrado que la distribución sigue el comportamiento de una curva lorentziana, la cual describe muy bien el comportamiento de esta serie de datos si se ajusta de la forma:

$$f(x) = \frac{a}{\pi(1 + bx^2)} \quad (6.1)$$

Donde a y b son los parámetros de ajuste, los cuales cambian dependiendo de la interacción que se tenga. Hay que notar que el parámetro a controla la altura de la distribución mientras que el parámetro b controla el ancho de la misma. Las gráficas de los histogramas de la distribución de los coeficientes de expansión se muestran a continuación.

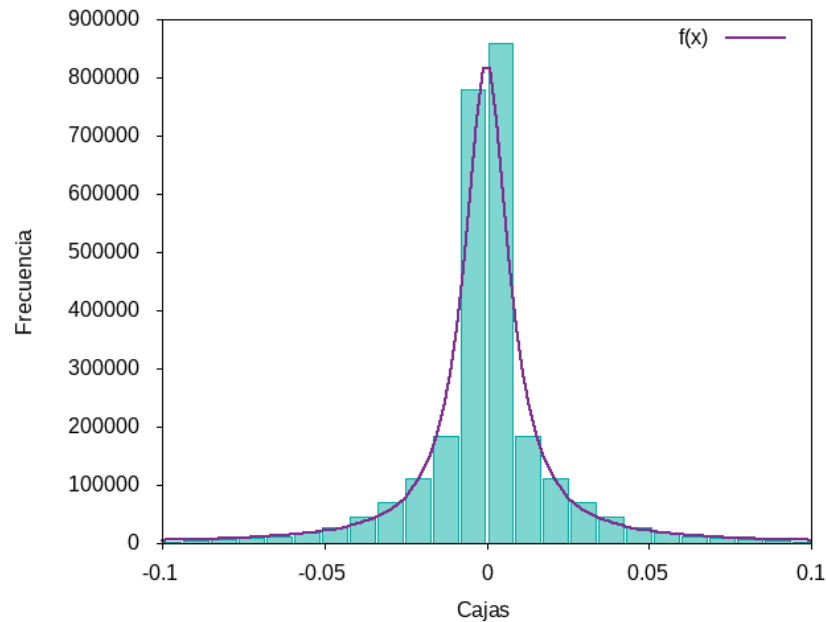


Figura 6.5: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.01$.

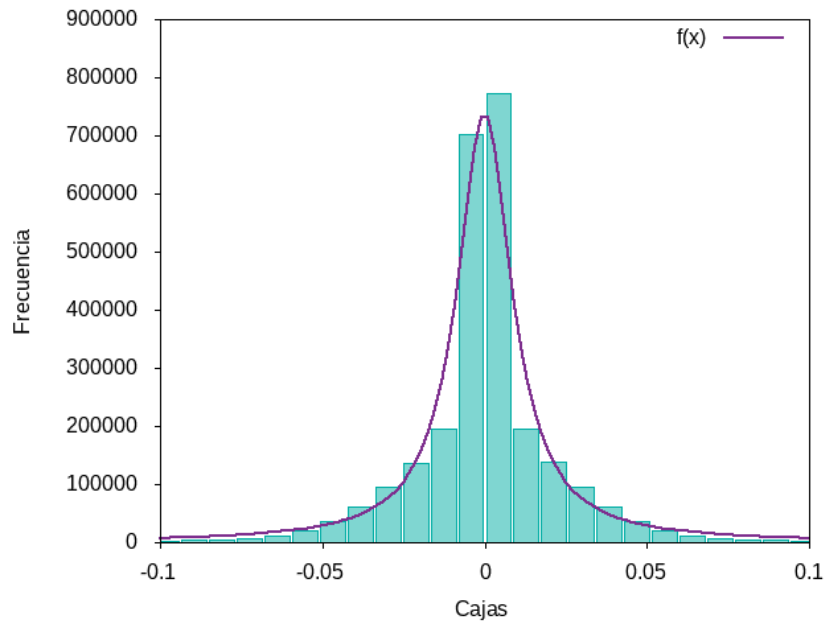


Figura 6.6: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.025$.

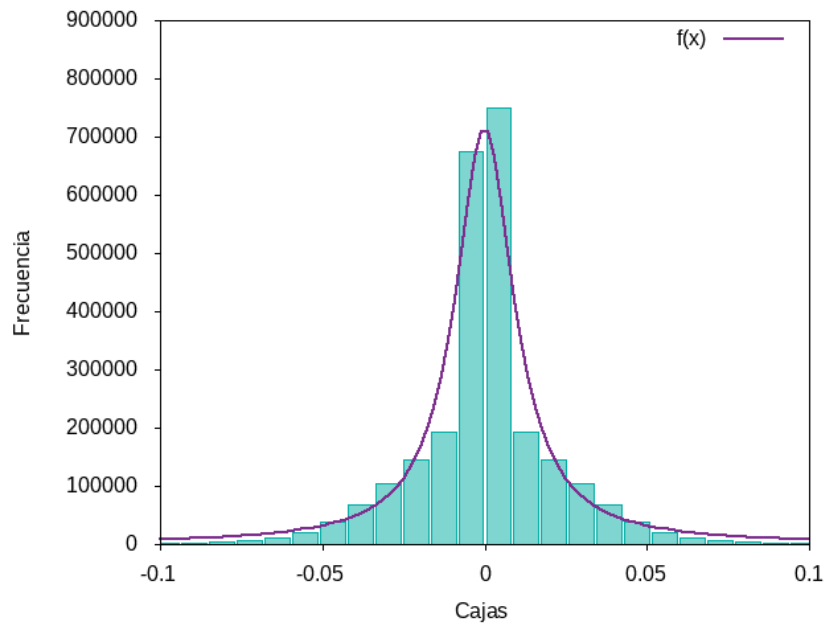


Figura 6.7: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.04$.

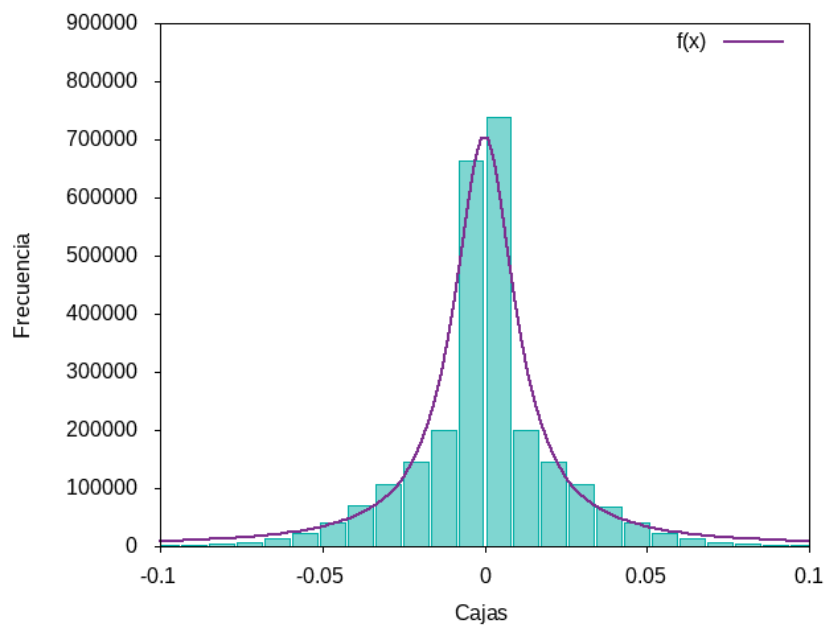


Figura 6.8: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.07$.

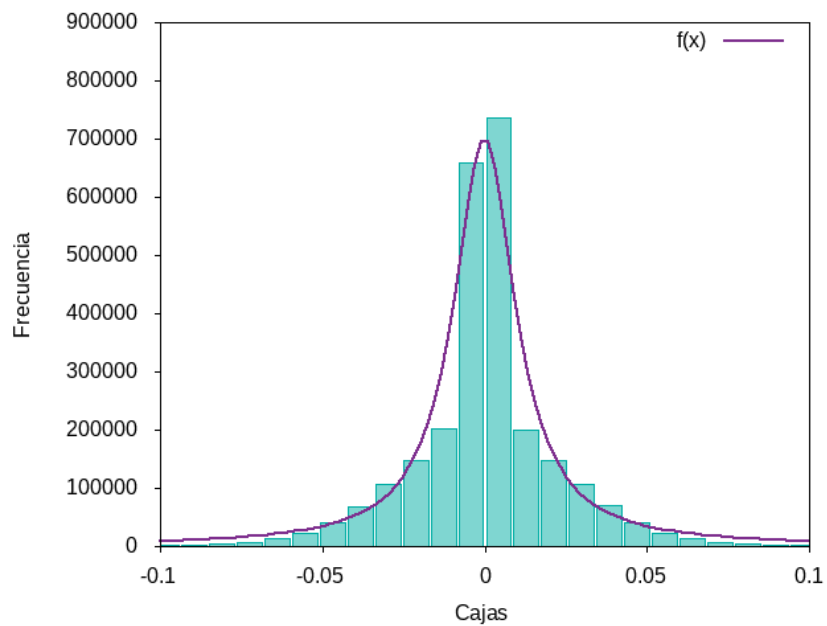


Figura 6.9: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.11$.

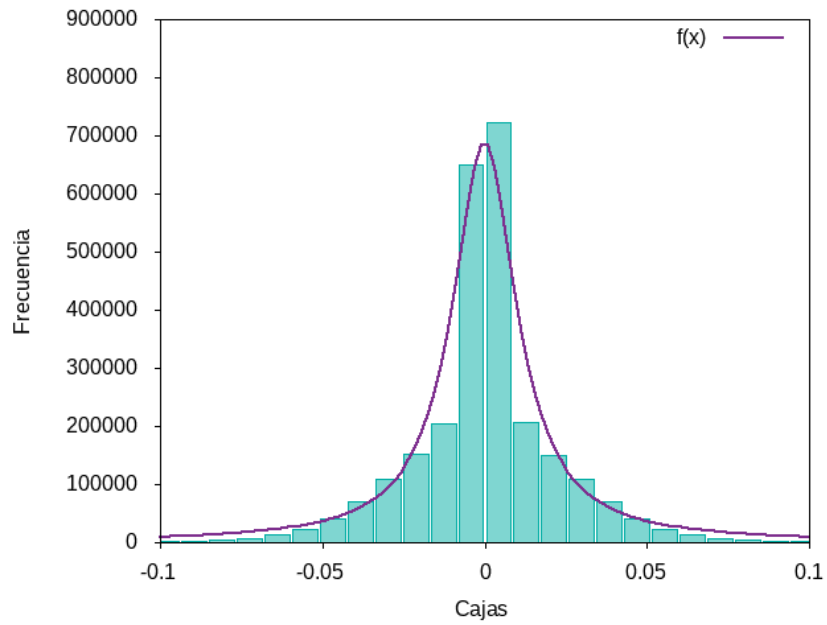


Figura 6.10: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.14$.

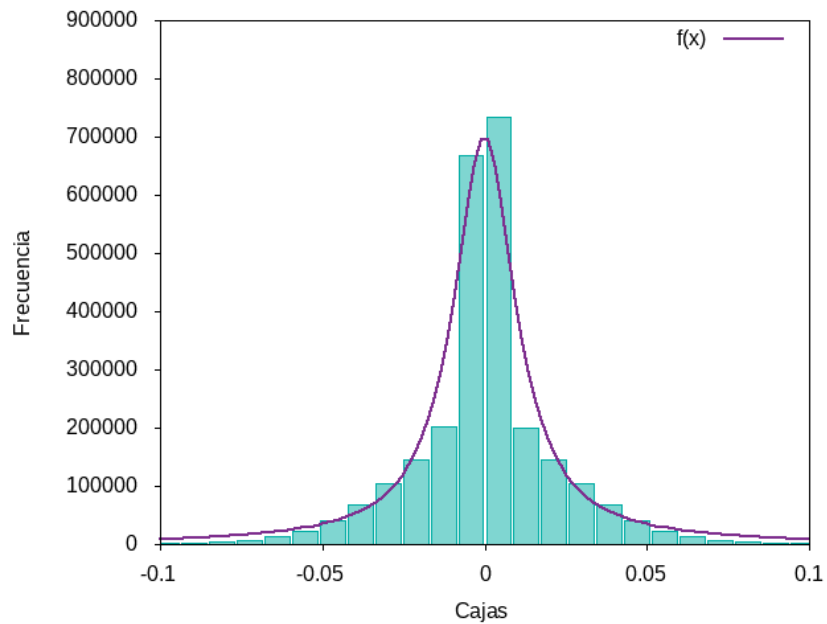


Figura 6.11: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.18$.

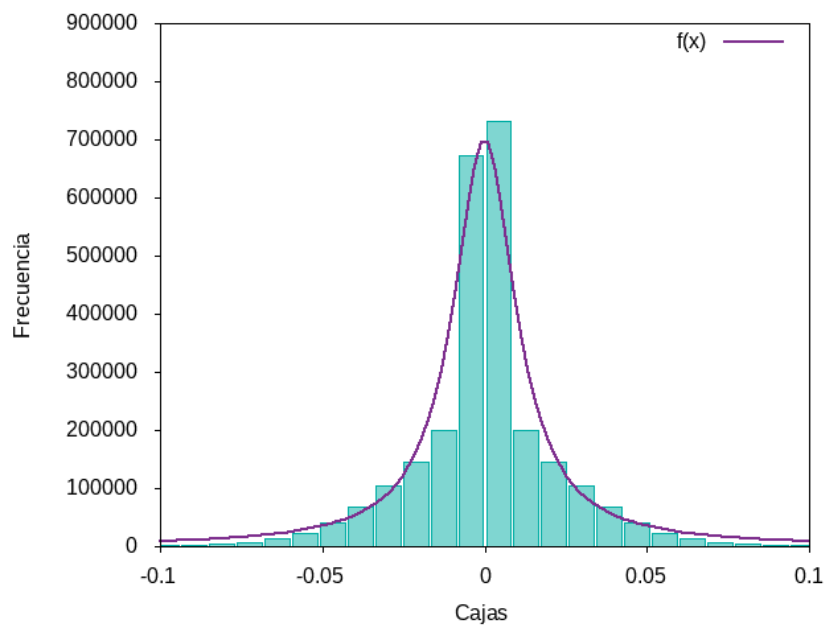


Figura 6.12: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.21$.

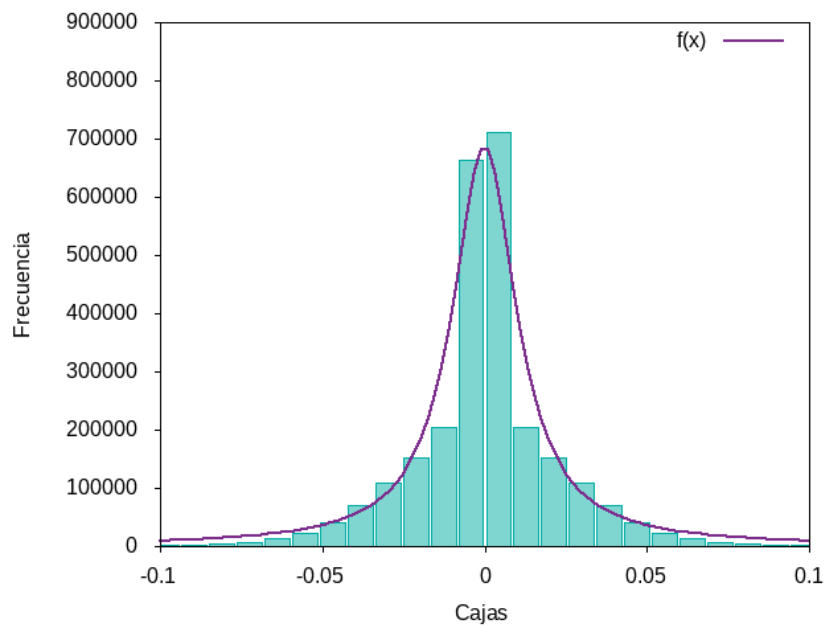


Figura 6.13: Histograma para los coeficientes de expansión de los eigenestados del núcleo ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, para $\chi = 0.25$.

Como se puede apreciar de las gráficas en donde se presentan los histogramas para cada parámetro de interacción, cuando se pasa por ejemplo de $\chi = 0.01$ a $\chi = 0.025$, la distribución se hace más baja y un poco más ancha, el mismo comportamiento se repite hasta $\chi = 0.14$, en donde se aprecia que el sistema con $\chi = 0.18$ regresa a comportarse un de manera similar a $\chi = 0.11$.

Lo anterior se ve reflejado en el ajuste de las curvas para cada histograma en la forma de la ecuación (6.1), los exponentes a y b se muestran en la siguiente tabla (6.1).

χ	a	b
0.01	2600000	15000
0.025	2325000	9750
0.04	2250000	8500
0.07	2225000	7900
0.11	2205000	7750
0.14	2162000	7100
0.18	2200000	7650
0.21	2198000	7500
0.25	2160500	7150

Tabla 6.1: Parámetros de ajuste a la curva proveniente de los histogramas ajustados a una función lorentziana, para χ .

Si se considera graficar los parámetros en función de la interacción se verá con claridad lo que ya se ha dicho antes, el hecho de que los parámetros decaen conforme la interacción crece y dada una cierta interacción el sistema regresa o se parece a una interacción anterior.

Este comportamiento tiene que ver con el hecho de que aunque la interacción aumenta, en realidad el núcleo se está deformando, y su deformación tiende a oblata.¹

¹Aquí se entiende la deformación del núcleo en términos de las transiciones eléctricas cuadrupolares BE($2^+ \rightarrow 0^+$).

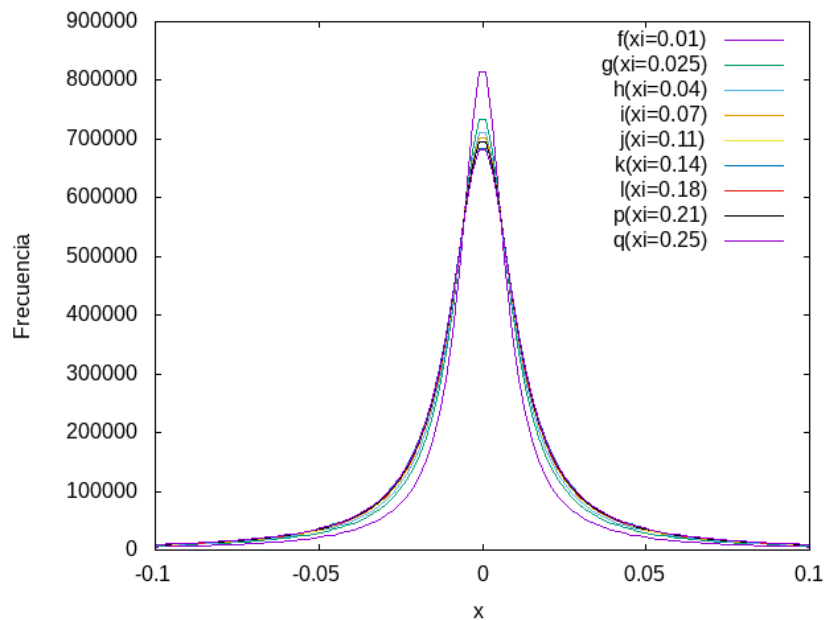


Figura 6.14: Curvas lorentzianas obtenidas del ajuste para cada interacción, puestas en orden ascendente, la correspondencia de las funciones con las interacciones.

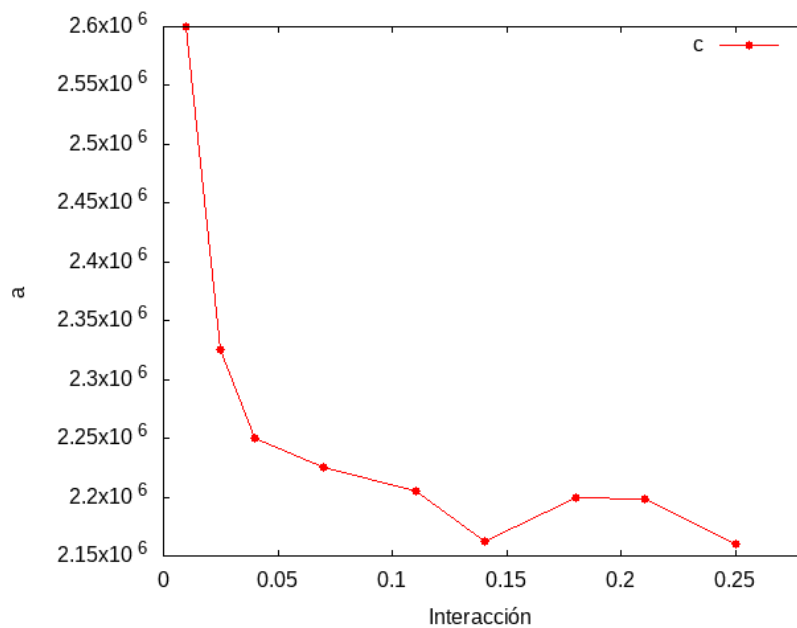


Figura 6.15: Parámetro a del ajuste lorentziano a la distribución de los coeficientes de expansión en términos de la interacción χ .

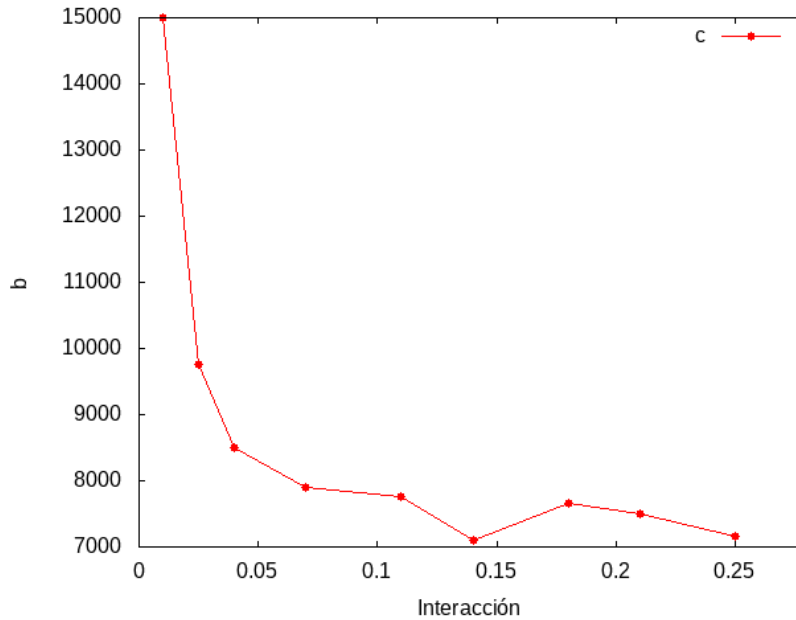


Figura 6.16: Parámetro b del ajuste lorentziano a la distribución de los coeficientes de expansión en términos de la interacción χ .

Las gráficas anteriores revelan comportamientos similares, los parámetros a y b , en ambos casos descienden conforme χ crece y en la interacción $\chi = 0.18$, estos parámetros están muy cercanos a los correspondientes a la interacción $\chi = 0.11$.

Se ha visto que la distribución de los coeficientes de expansión de los eigenvectores en la base del modelo de capas sigue un comportamiento que se puede modelar con una función lorentziana y más aún que los parámetros que definen la anchura y el alto de la distribución en general reducen cuando la interacción crece, sin embargo, en una cierta interacción el sistema regresa a estar cerca de su comportamiento a una interacción anterior.

Este hecho se puede entender al considerar que el ancho medido en las distribuciones de C_{α}^k generadas por los distintos valores de la interacción, es inversamente proporcional a la longitud de coherencia de los estados nucleares, por lo que un núcleo con baja interacción tiene una longitud de coherencia mayor debido al hecho de que la mezcla entre sus estados es poca, por otra parte, si se tiene un núcleo con mayor interacción, la mezcla de sus estados es mayor y su longitud de coherencia disminuye, esto es lo que se observa al fijarse en el ancho de las lorentzianas, el valor del coeficiente b (anchura de la curva) tiende a disminuir cuando se aumenta la interacción, siendo así que, un

sistema caótico tiene una longitud de coherencia menor que un sistema regular.

Conclusiones

El núcleo atómico es un sistema bastante complejo de describir. En el caso del núcleo de ^{48}Ca con $J^\pi = 3^+$, se tiene que es un sistema cuántico caótico. Esto se puede decir después de analizar la distribución del espaciamiento de vecinos cercanos y el ruido del tipo $1/f$ característicos de los sistemas no integrables, conforme se tiene una interacción de mayor intensidad, el núcleo pasa de tener un comportamiento cercano a integrable a ser totalmente un sistema caótico. Salvo para algunas interacciones donde el sistema regresa a comportarse como lo hizo para la interacción anterior.

Este comportamiento de “rebote” indica que la interacción en estos casos, es lo suficientemente fuerte para romper las correlaciones que en la interacción anterior se habían formado, con lo cual el núcleo pasa a comportarse muy próximo a un núcleo con la interacción anterior.

Por otra parte, fue posible obtener medidas que reflejan la caoticidad del sistema nuclear al analizar el ruido y todo lo concerniente a la entropía de la información, dando al núcleo como un sistema complejo para el cual se tiene que la anchura de la distribución gaussiana de los valores de la exponencial de la entropía de información, puestas en función de la energía, es un buen candidato para medir el grado de caoticidad del núcleo.

Además, otra medida que puede emplearse es la encontrada en el ancho y alto de la distribución de los coeficientes de expansión que se ven modificados al cambiar la interacción en el sistema.

Lo anterior, se puede relacionar con el estudio del ruido, al decir que en base al exponente de este, el sistema del núcleo con la interacción correspondiente a $\chi = 0.21$ está muy cerca de ser caótico pues el exponente del ruido es $1.05218 \sim 1$, para este sistema se encontró que el ancho de la distribución gaussiana de los valores de la exponencial de la entropía fue de 13.49074, y la anchura de la distribución de lorentz para los coeficientes de expansión 7500, debido a la tendencia, cualquier interacción que presente características cercanas a los valores de la anchura de la distribución gaussiana y lorentzianas, es un sistema caótico, fijándose en las dos medidas anteriores, se puede decir qué sistema es más caótico al comparar el tamaño de los coeficientes de ajuste.

Finalmente, la complejidad del núcleo modelado en este trabajo, depende de qué forma se distribuyen los estados nucleares en la base del modelo de capas, siendo más complejo cuando la interacción es más fuerte, esto está ligado también al hecho de que en las gráficas de la exponencial de la entropía de información puestos en función de la energía aparecen lo que antes ha sido descrito como un patrón de franjas, lo cual se entiende del hecho de que en ciertos intervalos de energía, los estados no se distribuyen totalmente en toda la base del modelo de capas, mientras que cuando el sistema es más complejo, más caótico, es decir, cuando la interacción entre sus nucleones es mayor, los estados nucleares se distribuyen sobre toda la base del modelo de capas con una mayor concentración en el centro.

Lo último del párrafo anterior también se ve reflejado en las gráficas de las energías, para las cuales la suavidad y la pendiente cambian conforme el sistema se acerca más a ser no integrable, la curva característica de s invertida corrobora también el hecho de que los estados se distribuyen mayormente en los estados centrales de la base del modelo de capas.

Bibliografía

- [1] Shell-Model Applications in Nuclear Spectroscopy. P. J. Brussaard and P. W. Glaudemans; North-Holland Publishing Company, 1977.
- [2] Modern Atomic and Nuclear Physics; F. Yang and J. H. Hamilton; Revised Edition; World Scientific, 2010.
- [3] The Nuclear Shell Model; Kris L. G. Heyde; Study Edition. Springer-Verlag, 1994.
- [4] Física Nuclear. W. E. Burcham; Versión Española; Editorial Reverté; España, 1974.
- [5] Nuclear Structure From a Simple Perspective. R. F. Casten; Oxford University Press; New York, 1990.
- [6] Quantum Mechanics Concepts and Applications. Nouredine Zettili; Second Edition; Jhon Wiley & Sons, Ltd, 2009.
- [7] Introducción a la Mecánica Cuántica. Luis de la Peña; Fondo de Cultura Económica; Tercera Edición; México UNAM 2006.
- [8] Nuclear Physic and Introduction. W. E. Burcham; Longman; Second Edition; London, 1973.
- [9] Física Nuclear y de Partículas. Antonio Ferrer Soria; Editorial PUV; Segunda Edición; Universitat de València, 2006.
- [10] Symmetries in Atomic Nuclei From Isospin to Supersymmetry. A. Frank, J. Jolie and P. Van Isacker; Springer; New York, 2009.
- [11] Lanczos Method of Tridiagonalization, Jacobi Matrices and Physics. Dehesa J.S; Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 7, no. 4, 1981, pp. 249-259.
- [12] A numerical Approach to Nuclear Shell-Model Calculations. R. R. Whitehead, Nuclear Physics **A182**, 1972, pp. 290-300.

- [13] Algebraic Eigenvalue Problem. J. H. Wilkinson; Clarendon Press, Oxford; First Publisher; New York, 1965.
- [14] Classical Chaos. Roderick V. Jensen; American Scientist, Volume 75.
- [15] Quantum Signatures of Chaos or Quantum Chaos?. V. E. Bunakov; Physics of Atomic Nuclei, 2016, Vol. 79, No. 6, pp. 995-1009.
- [16] Level Clustering in the Regular Spectrum. Berry, M. V., Tabor, M. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 356(1686), 1977, pp. 375-394.
- [17] Spectral properties of the Laplacian and random matrix theories. O. Bohigas, M.J. Giannoni, C. Schmit. Journal de Physique Lettres, 45 (21), 1984. pp.1015-1022.
- [18] Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws. O. Bohigas, M.J. Giannoni, C. Schmit. Physical Review Letters, 52 1, 1984.
- [19] Unfolding of Spectrum for Chaotic and Mixed Systems. A. A. Abul-Magd, A. Y. Abul-Magd. Elsevier. Physica A 396, 2014.
- [20] Quantum Chaos and $1/f$ Noise. A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina and J. Retamosa. Physical Review Letters, 89 24, 2002.
- [21] Theoretical Derivation of $1/f$ Noise in Quantum Chaos. E. Faleiro, J. M. G. Gómez, R. A. Molina, L. Muñoz, A. Relaño, and J. Retamosa. Physical Review Letters, 93 244110, 2004.
- [22] Perspectives on $1/f$ noise in quantum chaos. IOP Publishing. R. A. Molina, A. Relaño, J. Retamosa, L. Muñoz, E. Faleiro and J. M. G. Gómez. Journal of Physics: Conference Series 239, 012001, 2010.
- [23] The Nature of Fundamental $1/f$ Noise. P. H. Handel. American Institute of Physics Conferences Proceedings 285, 162, 1993.
- [24] $1/f^\alpha$ Noise in Spectral Fluctuations of Quantum Systems. J. M. G. Gómez, A. Relaño, J. Retamosa, E. Faleiro, L. Salasnich, M. Vranianar, and M. Robnik. Physical Review Letters, 94, 084101, 2005.
- [25] Origin of the $1/f^\alpha$ Spectral Noise in Chaotic and Regular Quantum Systems. L. A. Pachón, A. Relaño, B. Peropadre, and A. Aspuru-Guzik. Physical Review E. 98, 042213, 2018.
- [26] Environment-Independent Decoherence Rate in Classically Chaotic Systems. R. A. Jalabert and H. M. Pastawski. Physical Review Letters, 86, 12 (2001).

- [27] Lyapunov Exponent in Quantum Mechanics A Phase-Space Approach. V. I. Man'ko, R. Vilela Mendes. Elsevier Physica D, 145, 2000.
- [28] A Statistical Study of Shell-Model Eigenvectors. J. J. M. Verbaarschot and P. J. Brussaard. Physics Letters, 87B, 3, 1979.
- [29] Chaos, Spins and Symmetries in Nuclear Structure. V. G. Zelevinsky. Czechoslovak Journal of Physics, 52(S3), 2002.
- [30] Quantum Chaos and Complexity in Nuclei. V. G. Zelevinsky. Annu. Rev. Nucl.Part.Sci. 46 (1996).
- [31] The Nuclear Shell Model as a Testing Ground for Many-Body Quantum Chaos. V. G. Zelevinsky, B. A. Brown, N. Frazier, M. Horoi. Physics Reports 276, 1996.
- [32] Complexity and Chaos in Nuclear Dynamics. V. G. Zelevinsky. Nuclear Physics A570, 1994.
- [33] Nuclear Physics and Ideas of Quantum Chaos. V. G. Zelevinsky. Physics of Atomic Nuclei, 65 7, 2002.
- [34] Information Entropy, Chaos and Complexity of the Shell Model Eigenvectors. V. G. Zelevinsky, M. Horoi, B. A. Brown. Physics Letters B 350, 1995.
- [35] Nuclear Structure, Random Interactions and Mesoscopic Physics. V. G. Zelevinsky, A. Volya. Physics Reports 391, 2004.
- [36] A Farewell to Entropy: Statistical Thermodynamics Based on Information. Arieh Ben-Naim. World Scientific. Singapore, 2008.
- [37] Applications of the Maximum Entropy Principle in Nuclear Physics. F. H. Fröhner. IX Summer School on Nuclear Physics, Neutron Physics and Nuclear Energy. Varna, Bulgaria, 1989.
- [38] The Shell Model as a Unified View of Nuclear Structure. E. Caurier, G. Martínez-Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, A. P. Zuker. Reviews of Modern Physics, V. 77, 2005.
- [39] Quantum Interference vs. Quantum Chaos in the Nuclear Shell Model. G. Fernández, E. M. Hernández, M. Haufeulle, E. Landa, I. Morales, V. Velázquez, R. Foisson, C. E. Vargas and A. Frank. Journal of Physics, 578, 2015.
- [40] Misleading Signatures of Quantum Chaos. J. M. G. Gómez, R. A. Molina, A. Relaño and J. Retamosa. Physical Review E 66, 036209, 2002.

- [41] Random Matrices Theories and Chaotics Dynamics. O. Bohigas. Division the Physique Théorique, France.
- [42] Unfolding of the Spectrum for Chaotic and Mixed Systems. A. A. Abul-Magd, A. Y. Abul-Magd.
- [43] A Possible Criterion of Quantum Chaos. V. E. Bunakov, F. F. Yaliev and Yu. M Tchivilski. *Physics Letters A*, A 243, 1998.
- [44] The Measure of Chaoticity in Stationary Quantum Systems. V. E. Bunakov and I. B. Ivanov. *J. Phys. A: Math. Gen.* 35, 2002.
- [45] Theory of the Nucleus as Applied to Quantum Chaos. V. E. Bunakov. *Physics of Atomic Nuclei*, Vol. 77, No. 12, 2014, pp. 1550–1558.
- [46] Quantum Chaos. Roderick V. Jensen. Nature Publishing Group, 1994.
- [47] Criticallity and long-range correlations in time series in classical and quantum systems. E. Landa, I. O. Morales, R. Fossion, P. Stránský, V. Velázquez, J. C. López Vieyra, and A. Frank. *Physical Review E* 84, 016224, 2011.
- [48] Determination of scale invariance in random-matrix spectral fluxtuations without unfolding. G. Torres-Vargas, R. Fossion, C. Tapia-Ignacio, and J. C. López-Vieyra. *Physical Review E* 96, 012110, 2017.
- [49] Quantum Physics. Volume 2: From Time-Dependent Dynamics to Many-Body Physics and Quantum Chaos. Vladimir Zelevinsky. Wiley-VCH, 2011, pp. 505-534.
- [50] Quantum Chaos: An Introduction. Hans-Jrgen Stckmann. Cambridge University Press. 1999.
- [51] Random Matrices. Madan Lal Metha. Elsevier Academic Press, Third Edition, 2004.