Universidad Nacional Autónoma de México

Instituto de Ciencias Nucleares

Identidades de Noether, funciones β y simetrías en la teoría de campo doble

T E S I S

que para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias (Físicas)

presenta:

Rodolfo Abraham Sánchez Isidro

director de tesis:

José Antonio Rafael García Zenteno

Instituto de Ciencias Nucleares

Ciudad de México, Noviembre 2019

Identidades de Noether, funciones β y simetrías en la teoría de campo doble

por

Rodolfo Abraham Sánchez Isidro

Tesis presentada para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Físicas)

en la

Instituto de Ciencias Nucleares

Universidad Nacional Autónoma de México

2019

Para Estela y Martha que ejercieron su poder de elegir.

Agradecimientos

Cuán difícil es agradecer y no olvidar a quienes. Por eso, prefiero dejar un poema.

La posición que dicta el texto

Vi arder los campos continuos
Me revelaron que sus posibles estados
se corresponden con los de un colectivo
de palabras idénticas
Osciladores acoplados entre sí
Donde la poesía y la ciencia se unen para posicionarse

Horacio Warpola

Resumen

Este trabajo de tesis tiene como objetivo generalizar un resultado de la teoría de cuerdas cerradas, [24], a una nueva teoría llamada la teoría de campo doble, [15], [14]. La acción que describe la dinámica de una cuerda cerrada sumergida en un espacio-tiempo D-dimensional, tiene un contenido de D campos escalares $X^i(\tau,\sigma)$ que dependen de los dos parámetros, (τ,σ), necesarios para describir la superficie que barre la cuerda; adicionalmente, las simetrías entre estos campos permiten construir una acción contrayendo los índices i con tres campos (tensoriales) de fondo que dependen de $X^i(\tau,\sigma)$; un campo simétrico y sin traza, $g_{ij}(X)$, un campo antisimétrico, $b_{ij}(X)$ y un campo escalar $\Phi(X)$. La acción efectiva de la teoría de cuerdas cerradas describe la manifestación de los efectos de cuerdas cuánticas a bajas energías, esta se puede calcular perturbativamente con diagramas de Feynman; es una acción de los campos de fondo tipo gravedad sobre el espacio-tiempo D-dimensional y las simetrías entre los campos X^i definen simetrías sobre g_{ij}, b_{ij}, Φ. Para calcular esta acción efectiva es necesario pasar por un proceso de renormalización de la acción de la teoría de cuerdas, que implica el cálculo de las funciones β del grupo de renormalización, estas definen las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, además son compatibles con las simetrías y satisfacen ciertas identidades de integrabilidad, [8], [9], [24]. Gracias a que las funciones β de la teoría de cuerdas definen de forma sencilla las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, existen identidades de consistencia para las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva. Lo interesante de esto es que, las identidades de consistencia que satisfacen las funciones β de la teoría de cuerdas escritas en términos de las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, son identidades de consistencia relacionadas con las simetrías de norma de la acción efectiva y se conocen como identidades de

Noether, [13]. Esto último muestra que la consistencia de las simetrías de norma de la acción efectiva son equivalentes a las condiciones de integrabilidad de las funciones β de la teoría de cuerdas, [24]. El enunciado recíproco anterior también es válido; las identidades diferenciales, es decir, las condiciones de integrabilidad de las funciones β de la teoría de cuerdas están sujetas a la consistencia de las simetrías de norma de la acción efectiva, es decir, las identidades de Noether.

Otro aspecto importante de la teoría de cuerdas es la introducción de un nuevo número cuántico llamado número de enrollamiento que está relacionado con la capacidad que tienen las cuerdas de enrollarse en dimensiones compactas.Tener número de enrollamiento es una diferencia crucial entre cuerdas y partículas puntuales. Existe una muy relevante simetría entre los estados cuánticos etiquetados con momento p y número de enrollamiento w y se llama dualidad-T. Para comprender mejor las implicaciones de esta dualidad se quiere hacer manifiesta para los campos, X^i y para esto es necesaria la adición de nuevos grados de libertad, $\tilde{X}_i$, que jueguen el papel de variables conjugadas al número de enrollamiento, lo que implica tener un doble contenido de campos en la teoría de cuerdas y un espacio-tiempo del doble de dimensiones en la acción efectiva. Además la dualidad entre momentos y números de enrollamiento implica una dualidad entre, X^i y $\tilde{X}_i$, que a su vez implica una relación entre diferentes fondos, (g_{ij}, b_{ij}, Φ), para la teoría. La teoría doble de campo se construye bajo el supuesto de que la dualidad-T es una simetría fundamental de la teoría y se propone escribir una acción para los campos de fondo dependientes del espacio doble, $(X^i, \tilde{X}_i)$ y que sea manifiestamente invariante bajo el grupo de simetría de las dualidad-T, $O(D, D)$, [15]. Es muy interesante ver que esta construcción se puede hacer en un formalismo no geométrico pero que sin embargo, es muy similar a la geometría diferencial usual, [14].

En el contexto de DFT, se puede escoger el marco de, $O(D, D)$, en el que, $\tilde{X}^i = 0$ y se recupera la acción efectiva de la teoría de cuerdas, por lo que es natural pensar en una posible teoría de cuerdas doble que de como acción efectiva la acción de DFT. Por ser una simetría de norma y que sus transformaciones cierran en una interesante estructura algebraica, es posible calcular las identidades de Noether en DFT asociadas a las transformaciones de $O(D, D)$, [5]. En esta dirección y a partir del ansatz de que existe una equivalencia entre identidades diferenciales e identidades de Noether, es posible definir ciertas funciones β en DFT que sirven como una propuesta consistente de unas funciones β del grupo de renormalización asociadas a una posible teoría de cuerdas doble, [3] [10].

Este trabajo desarrolla esta propuesta y se dan explícitamente las funciones β en DFT, junto con una generalización de las identidades diferenciales, que se pueden interpretar como condiciones de integrabilidad para las funciones β de una posible teoría de cuerdas doble. Además se muestra la consistencia de dicha generalización con las resultados ya conocidos de una teoría de cuerdas cerradas y bosónicas. Los encantos de la construcción dada en esta tesis, es la forma sencilla en la que se definen dichas funciones β y que a pesar del carácter no geométrico de DFT es posible utilizar las técnicas algebraicas de teorías de norma y constricciones para construir las identidades de Noether generalizadas [5], [19].

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la búsqueda de entender como funciona el universo, una de las preguntas más importantes que se hace la física es, ¿de qué está constituido el mismo universo? Saber de qué está constituida la materia es un primer problema que resolver para llegar a la respuesta. El concepto griego de átomo fue formulado como una de las primeras respuestas a esta pregunta y partiendo de partículas indivisibles y puntuales se formularon teorías como la mecánica clásica e incluso la física cuántica con una interpretación probabilista, es una abstracción más del concepto de partícula puntual. Sin embargo, como enseña la relatividad general, el espacio y tiempo dónde se encuentra la materia es un sólo objeto dinámico que interactua con la materia. Entonces, es natural preguntarse, ¿de qué está hecho el espacio-tiempo? Esta pregunta llevó a los físicos modernos a formular una teoría que implementara los aspectos relativistas de la física en un régimen cuántico, conociendo esta área como teoría cuántica de campos. Desafortunadamente, los misterios del espacio-tiempo mostraron ser más complejos de entender que los constituyentes de la materia. En este esfuerzo colectivo de la física por entender mejor cómo funciona el espacio-tiempo, una de las propuesta más exitosas ha sido la teoría de cuerdas que fundamentalmente cambia la noción de partícula indivisible; de una partícula puntual a un objeto extendido en una dimensión, es decir, una cuerda.

La acción de una cuerda se construye tomando inspiración en la construcción de la acción de una partícula relativista. La acción que describe la dinámica de una cuerda cerrada sumergida en un espacio-tiempo D-dimensional, tiene un contenido de D campos escalares $X^i(\tau, \sigma)$ que dependen de los dos parámetros, (τ, σ), necesarios para describir la superficie que barre la cuerda; adicionalmente, las simetrías entre estos campos permiten construir una acción contrayendo los índices i con tres campos (tensoriales) de fondo que dependen de $X^i(\tau, \sigma)$; un campo simétrico y sin traza, $g_{ij}(X)$, un campo antisimétrico, $b_{ij}(X)$ y un campo escalar $\Phi(X)$. La trayectoria de una partícula relativista es invariante bajo reparametrizaciones del tiempo y debido a que una cuerda barre una superficie llamada hoja de mundo, se pide que la acción sea invariante bajo reparametrizaciones de esta, esto permite incluir nuevos grados de libertad de norma empaquetados en un campo auxilia, $\gamma_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ que se puede interpretar como una métrica sobre la hoja de mundo. La diferencia a relucir aquí es la simetría bajo rescalamiento locales sobre la hoja de mundo con la que cuenta esta métrica, diferencia crucial en la dinámica de una cuerda respecto a la de una partícula puntual y que es implicación directa de trabajar con un objeto extendido en una dimensión. En el siguiente paso que es cuantizar la teoría, esta simetría por ser de norma implica complicaciones que deben reflexionarse a detalle.

En la tarea de entender mejor la teoría de cuerdas es necesario investigar los efectos cuánticos que tienen a bajas energías. La acción efectiva describe la manifestación de los efectos de cuerdas cuánticas a bajas energías y se puede calcular perturbativamente con diagramas de Feynman; es una acción de los campos de fondo tipo gravedad sobre el espacio-tiempo D-dimensional y las simetrías entre los campos X^i definen simetrías sobre g_{ij}, b_{ij}, Φ. Este último resultado, implica pasar por un proceso de renormalización y calcular ciertos objetos llamados funciones β del grupo de renormalización, estas definen las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, además son compatibles con las simetrías y satisfacen ciertas identidades de integrabilidad interesantes. Más aún, la observación de que las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva son una combinación lineal de las funciones beta de la acción de cuerdas, permite obtener identidades de para las ecuaciones de movimiento que resultan ser identidades de consistencia para las simetrías de norma de la acción efectiva llamadas identidades de Noether.

Otra consecuencia de proponer partículas extendidas en una dimensión es la necesidad de incluir una etiqueta para los estados cuánticos llamado número de enrollamiento. Este número cuántico está relacionado con la capacidad que tiene una cuerda de enrollarse en dimensiones compactas, por ejemplo en fondos toroidales. Esto lleva a encontrarse con la dualidad-T, simetría entre los estados cuánticos etiquetados con momento p y número de enrollamiento w. Estados con momento grande y número de enrollamiento pequeño están relacionados con estados con momento pequeño y número de enrollamiento grande. Para comprender mejor las implicaciones de esta dualidad se quiere hacer manifiesta para los campos, X^i y para esto es necesaria la adición de nuevos grados de libertad, $\tilde{X}_i$, que jueguen el papel de variables conjugadas al número de enrollamiento, lo que implica tener un doble contenido de campos en la teoría de cuerdas y un espacio-tiempo del doble de dimensiones en la acción efectiva. Además la dualidad entre momentos y números de enrollamiento implica una dualidad entre, X^i y $\tilde{X}_i$, que a su vez implica una relación (no lineal) entre diferentes fondos, (g_{ij}, b_{ij}, Φ), para la teoría y se dice que son T-duales. Un atrayente resultado es la existencia de esta simetría incluso en fondos no compactos y con interacciones.

La teoría de campo doble [1] se construye bajo el supuesto de que la dualidad-T es una simetría fundamental de la teoría y se propone escribir una acción para los campos de fondo dependientes del espacio doble, $(X^i, \tilde{X}_i)$ y que sea manifiestamente invariante bajo el grupo de simetría de las dualidad-T, $O(D, D)$, [15]. Recientemente DFT ha sido una teoría interesante que estudiar pues no cabe en el formalismo de geometría diferencial usual debido a la no linealidad de las transformaciones de, $O(D, D)$, sobre, (g_{ij}, b_{ij}, Φ). Sin embargo, en términos de un empaquetamiento de (g_{ij}, b_{ij}, Φ), llamado métrica generalizada $\mathcal{H}_{MN}$ es posible estudiar su estructura en el formalismo de constricciones y teorías de norma debido a la estructura algebraica de las transformaciones de $O(D, D)$; diferentes estudios han investigado los aspecto no geométricos de DFT y una generalización consistente de la geometría diferencial usual en la que DFT esté bien definida en el sentido de escoger el marco de, $O(D, D)$, en el que, $\tilde{X}^i = 0$ y recuperar la acción efectiva de la teoría de cuerdas, por lo que es natural pensar en una posible teoría de cuerdas doble que de como acción efectiva la acción de DFT y que tenga funciones β que definan las ecuaciones de movimiento para DFT.

[1]DFT por sus siglas en inglés "Double Field Theory"

El desarrollo de este trabajo inicia por la construcción de la teoría de cuerdas cerradas y se muestran los resultados preliminares para entender las implicaciones que tienen las simetrías de la teoría, desde la parte clásica hasta su cuantización, [7] [18], [22], [25]. Se muestra que las funciones β de la teoría de cuerdas están relacionadas con las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva respectiva y como es que esta relación implica las identidades de Noether de la acción efectiva. Después, se continua a las 2 construcciones modernas de DFT, [14], [15], dónde se discuten los aspectos no geométricos relevantes de esta teoría. Ya que la acción de DFT contiene consistentemente a la acción efectiva de la teoría de cuerdas y tiene identidades de Noether bien definidas, tiene sentido preguntarse por la existencia de una posible acción doble de cuerdas que tenga como acción efectiva la acción de DFT y que sus funciones β sean las que se dan como resultado final en esta tesis, [3], [10], [12].

Al final, el resultado principal de esta tesis parte del ansatz de la relación entre funciones β y ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, [24], para definir unas funciones β en DFT que sean consistentes con los resultados de la teoría de cuerdas cerradas. Esto da como resultado funciones β generalizadas que satisfacen ciertas identidades que se pueden interpretar como condiciones de integrabilidad y deberían ser las funciones β de una posible teoría de cuerdas doble, [12].

Capítulo 2

Cuerda bosónica cerrada

En este capítulo se busca exponer la construcción de una teoría de cuerdas bosónicas cerradas, principalmente basado en [18, 22, 25]. No se pretende hacer un extenso resumen acerca de todos los aspectos de esta construcción. Se muestran de forma clara los puntos más importantes y necesarios para continuar con el argumento de este trabajo. Iniciando con presentar la acción clásica de la teoría hasta su cuantización y acción efectiva respectiva. También se discute la aparición de los *números de enrollamiento* o *winding numbers* y como estos introducen la dualidad-T, que serán conceptos importantes para la presentación de la *Teoría de Campo Doble* o *Double Field Theory* en el siguiente capítulo 3. Finalmente se mostrará la relación que tienen las funciones β del modelo-σ y las ecuaciones de movimiento de su acción efectiva, resultado fundamental para este trabajo y del que parte el capítulo final de esta tesis 4.

2.1. Acción clásica

La acción de una cuerda relativista que se mueve en un espacio-tiempo, también conocido como *espacio objetivo*, así como con la línea de mundo de una partícula relativista, se construye exigiendo la invarianza bajo reparametrizaciones de la hoja de mundo, que es la superficie 2-dimensional que barre la cuerda en el espacio objetivo en el que está encajada. La acción que se obtiene de esto se le conoce como acción de Nambu-Goto y en unidades naturales está dada por,

$$S_{NG} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-h}, \tag{2-1}$$

donde, h es el determinante de $h_{\alpha\beta}$ la métrica inducida por el espacio objetivo sobre la hoja de mundo, definida como,

$$h_{\alpha\beta} = g_{ij}\partial_\alpha X^i(\tau,\sigma)\partial_\beta X^j(\tau,\sigma), \tag{2-2}$$

con g_{ij} la métrica del espacio objetivo y X^i es el encaje de la cuerda. Los índices latinos van de 0 a $D-1$ la dimensión del espacio-tiempo, los índices griegos de 0 a 1 y representan las dos coordenadas τ y σ con las que se parametriza la hoja de mundo. Se utiliza la notación $d^2\sigma$ como una forma rápida y sencilla de escribir $d\tau d\sigma$. Finalmente para que la acción sea adimensional, se introduce la constante α' con unidades tales que el término $1/2\pi\alpha'$ tiene unidades de fuerza y se interpreta como la tensión de la cuerda, además a partir de ella se puede definir la longitud de la cuerda $l_c = \sqrt{\alpha'}$.

Sin embargo, como sucede con la partícula relativista, la raíz cuadrada en la acción complica la cuantización de la teoría y esta situación mejora al trabajar con una acción equivalente. La acción con la que se suele trabajar en teoría de cuerdas es la acción de Polyakov, dada por,

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma}\; \gamma^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j g_{ij}, \tag{2-3}$$

donde se ha introducido $\gamma_{\alpha\beta}$ una métrica definida sobre la hoja de mundo.

La acción de Polyakov (2-3) es invariante bajo transformaciones de Poincaré y reparametrizaciones en la hoja de mundo, simetrías que también tiene (2-1). Además, (2-3) tiene una simetría que no tiene (2-1), es invariante bajo *transformaciones de Weyl*,

$$\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow e^{2\omega(\tau,\sigma)}\gamma_{\alpha\beta}, \tag{2-4}$$

con $\omega(\tau,\sigma)$ una función arbitraria que se conoce en la literatura como *factor conforme*. Estas transformaciones son rescalamientos locales y relacionan distintas métricas sobre la hoja de mundo, es decir, existe una ambigüedad en la elección de dicha métrica. Se puede mostrar que la métrica inducida (2-2) sólo difiere de $\gamma_{\alpha\beta}$ por un factor conforme, es decir, (2-1) es el resultado de escoger una norma en (2-3).

Uno de los resultados más importantes de tener esta nueva simetría en la teoría es que al hacer la variación de la acción respecto a la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ se obtiene que la traza del tensor de energía momento es cero,

$$T_\alpha{}^\alpha \sim \gamma_{\alpha\beta}\frac{\delta S_P}{\delta\gamma_{\alpha\beta}} = 0 \tag{2-5}$$

2.1.1. Ecuaciones de movimiento y modos de oscilación

En dos dimensiones y con una topología trivial en la hoja de mundo, siempre es posible a partir de una métrica arbitraria $\gamma_{\alpha\beta}$, obtener una métrica plana a través de una transformación de Weyl. En el caso de teoría de cuerdas es la métrica de Minkowsky. A esta elección de norma se le conoce como *norma conforme* y en adición a esta, las coordenadas del cono de luz serán de utilidad, definidas de la siguiente forma,

$$\xi^+ = \tau + \sigma, \qquad \xi^- = \tau - \sigma. \tag{2-6}$$

Entonces las componentes de la métrica son,

$$\gamma_{++} = \gamma_{--} = 0, \qquad \gamma_{+-} = \gamma_{-+} = -\frac{1}{2}, \tag{2-7}$$

y con derivadas,

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}(\partial_\tau \pm \partial_\sigma). \tag{2-8}$$

En la norma conforme la acción de Polyakov es,

$$S_P = 2T\int d^2\xi \partial_+ X^i \partial_- X^j \eta_{ij}, \tag{2-9}$$

donde $T = 1/2\pi\alpha'$ es la tensión de la cuerda. Las ecuaciones de movimiento de (2-9) son,

$$\partial_+\partial_- X^i = 0. \tag{2-10}$$

Después de fijar la norma, la ecuación de movimiento de la métrica impone que,

$$T_{\alpha\beta} = 0, \tag{2-11}$$

equivalentemente,

$$T_{10} = T_{01} = \frac{1}{2}\dot{X} \cdot X' = 0, \qquad T_{00} = T_{11} = \frac{1}{4}(\dot{X}^2 + X'^2) = 0, \tag{2-12}$$

y se pueden reducir la expresión,

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \tag{2-13}$$

Estas identidades se conocen como las *Constricciones de Virasoro*. Además, en términos de las coordenadas del cono de luz las componentes del tensor de energía-momento son,

$$T_{++} = \frac{1}{2}\partial_+ X \cdot \partial_+ X = 0, \qquad T_{--} = \frac{1}{2}\partial_- X \cdot \partial_- X = 0 \qquad T_{+-} = T_{-+} = 0, \tag{2-14}$$

estas últimas expresiones son compatibles con (2-5) y trivialmente satisfacen la conservación de $T_{\alpha\beta}$, es decir,

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \tag{2-15}$$

Para la cuerda cerrada hay que imponer la condición de periodicidad,

$$X^i(\tau, \sigma + 2\pi) = X^i(\tau, \sigma), \tag{2-16}$$

y la solución periódica más general para (2-10) se puede escribir como,

$$X^i(\tau, \sigma) = X^i_I(\tau + \sigma) + X^i_D(\tau - \sigma) \tag{2-17}$$

donde X^i_I y X^i_D se conocen como componentes izquierda y derecha respectivamente y en modos de Fourier son,

$$X_I^i(\xi^+) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}\alpha' p^i \xi^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^i e^{-in\xi^+}, \tag{2-18}$$

$$X_D^i(\xi^-) = \frac{1}{2}x^i + \frac{1}{2}\alpha' \bar{p}^i \xi^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^i e^{-in\xi^-}. \tag{2-19}$$

donde x^i y p^i son la posición y momento del centro de masa de la cuerda y α_n^i y $\bar{\alpha}_n^i$ son coeficientes de Fourier arbitrarios.

Cabe mencionar que es posible mostrar que p^i es de hecho, la cantidad conservada asociada a la invarianza bajo traslaciones $X^i \to X^i + a^i$. Además, ya que X^i debe ser real, entonces se tiene que, p^i, $\bar{p}^i$ deben ser reales también y se obtiene unas condiciones de realidad para los coeficientes de Fourier,

$$(\alpha_n^i)^* = \alpha_{-n}^i, \qquad\qquad (\bar{\alpha}_n^i)^* = \bar{\alpha}_{-n}^i. \tag{2-20}$$

2.2. Cuantización

Para cuantizar la teoría es necesario escribir el hamiltoniano. Haciendo la transformada de Legandre usual se obtiene,

$$H = \frac{T}{2}\int d\sigma(\dot{X}^2 + X'^2), \tag{2-21}$$

que en términos de coeficientes de Fourier, se ve como,

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n \epsilon \mathbb{N}} (\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n}\cdot\bar{\alpha}_n). \tag{2-22}$$

Los *operadores de Virasoro* se definen en términos de las componentes del tensor de energía momento en las coordenadas del cono de luz,

$$L_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{--} e^{im\xi^-}, \qquad\qquad \bar{L}_m = 2T\int_0^{2\pi} d\sigma T_{++} e^{im\xi^+}, \tag{2-23}$$

e igualmente en términos de los coeficientes de Fourier son,

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\epsilon\mathbb{N}} \alpha_{m-n}\cdot\alpha_n, \qquad \bar{L}_m = \frac{1}{2}\sum_{n\epsilon\mathbb{N}} \bar{\alpha}_{m-n}\cdot\bar{\alpha}_n, \tag{2-24}$$

y satisfacen,

$$L_m^* = L_{-m}, \qquad \bar{L}_m^* = \bar{L}_{-m}. \tag{2-25}$$

Por lo tanto,

$$H = L_0 + \bar{L}_0, \tag{2-26}$$

por las contricciones de Virasoro (2-14) se obtiene $H = 0$ una constricción clásica [13]. Así como el hamiltoniano genera la evolución temporal, la otra constricción $L_0 - \bar{L}_0 = 0$ genera las traslaciones en la dirección σ y su significado físico es que la cuerda no tiene ningún punto privilegiado. Esta última constricción será importante más adelante para la construcción de DFT y a nivel cuántico se conoce como *condición de emparejamiento de niveles.*

Finalmente se puede calcular la masa de la cuerda usando la relación relativista y las expresiones en modos (2-18,2-19),

$$M^2 = -p^i p_i = \frac{2}{\alpha'}\sum_{n=1} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \bar{\alpha}_{-n}\cdot\bar{\alpha}_n. \tag{2-27}$$

2.2.1. Cuantización del cono de luz

Como es usual, para cuantizar la teoría se propone que le paréntesis de Poisson entre X y P sean un conmutador entre operadores,

$$[X^i(\tau,\sigma), P^j(\tau,\sigma')] = i\delta(\sigma-\sigma')\eta^{ij}, \tag{2-28}$$

y $[X,X] = [\dot{X},\dot{X}] = 0$. Usando la expansión en modos se puede deducir que,

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = [\bar{\alpha}_m^i, \bar{\alpha}_n^j] = m\delta_{m+n,0}\eta^{ij}, \tag{2-29}$$

con $[\alpha^i_m, \bar{\alpha}^j_n] = 0$ y $[x^i, p^j] = i\eta^{ij}$. Es fácil ver que el álgebra de los modos es la misma que la de los operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico. Con esta interpretación, α^i_{-n} juega el papel de un operador de creación y se define al estado base como el que es aniquilado por α^i_n.

Sin embargo, debido a la signatura de la métrica existen estados de norma negativa. Para desacoplar estos estados fantasmas de la teoría es necesario imponer las constricciones de Virasoro, pidiendo que los estados físicos $|\phi\rangle$ sean aniquilados por los operadores de Virasoro,

$$L_m|\phi\rangle = 0, \qquad m \geq 0. \tag{2-30}$$

Ya que L_m se puede escribir en modos (2-24), a nivel cuántico se necesita además implementar el ordenamiento normal,

$$L_m = \frac{1}{2}\sum_{n\epsilon\mathbb{N}} : \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n :, \tag{2-31}$$

con una expresión similar pero barrada para $\bar{L}$. Sin embargo, por (2-29) se tiene una ambigüedad en el ordenamiento normal de L_0 y $\bar{L}_0$. Por esta razón, se redefinen así,

$$L_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - a, \tag{2-32}$$

es decir, $L_0 \to L_0 - a$, con $\alpha^i_0 = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^i$ y una expresión similar pero barrada para $\bar{L}_0$.

Se puede calcular el álgebra de Virasoro a través de la definición de L_m,

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m+n,0}, \tag{2-33}$$

y se puede ver que (2-30) es consistente con (2-33).

La c que aparece en el álgebra de Virasoro (2-33) se llama *carga central* y en la teoría de cuerdas bosónica es igual a la dimensión del espacio objetivo o el número de campos escalares en (2-3).

Si se toma la diferencia entre L_0 y $\bar{L}_0$, es decir la condición de emparejamiento de niveles, las constantes que aparecen por el ordenamiento normal desaparecen y se tiene,

$$(L_0 - \bar{L}_0)|\phi\rangle = 0 \tag{2-34}$$

que como se mencionó antes juega un rol crucial en la construcción de DFT.

En términos de los operadores de número,

$$N = \sum_{n=1} : \alpha_{-n} \cdot \alpha_n :, \tag{2-35}$$

y una expresión similar pero barrada para $\bar{N}$; la relación de dispersión (2-27) se vuelve, debido a la constante que aparece por el orden normal,

$$\alpha' M^2 = 2(N + \bar{N} - 2a). \tag{2-36}$$

Con un análisis detallado se puede mostrar que los fantasmas desaparecen de la teoría con los valores $D = c = 26$ y $a = 1$. Este resultado se conoce como *teorema de no fantasmas* y si se trabaja con estos valores se dice que se está en la dimensión crítica.

2.2.2. Espectro no masivo

En la dimensión crítica si se toma $N = \bar{N} = 1$, se tiene el estado no masivo $\alpha^i_{-1}\bar{\alpha}^j_{-1}|0\rangle$ y en $SO(D-2)$ se puede descomponer en un singulete, un tensor simétrico sin traza y un tensor antisimétrico. Estos se conocen por el nombre de dilatón, gravitón y tensor de Kalb-Ramond respectivamente y es el sector no masivo de la teoría de cuerdas bosónica y coincide con el sector no masivo de supergravedad que llaman *sector Neveu-Schwarz*.

La manifestación del sector NS es la dinámica que atrapa la acción efectiva a bajas energías del modelo-σ que se verá más adelante y que es solamente agregar a la teoría, consistentemente con las simetrías, al dilatón y al tensor de Kalb-Ramond, además se permitir tener una métrica arbitraria en el espacio objetivo. Esta acción efectiva coincide con la acción de supergravedad.

2.3. Compactificaciones y dualidad-T

Como se menciona en la sección anterior, la dimensión en la que está bien definida la teoría de cuerdas es la dimensión crítica $D = 26$. En el caso de supercuerdas es $D = 10$. Sin embargo, sólo son detectables cuatro dimensiones, tres espaciales y una temporal. Esto lleva al problema de cómo se pueden recuperarse sólo cuatro dimensiones a partir de las veintiséis de la teoría de cuerdas.

Un camino para resolver este problema es pensar que las dimensiones extras están enrolladas en círculos muy pequeños o muy grandes tales que, a bajas energías son indetectables. A esto se le conoce como *compatificación toroidal* o *compactificación de Kaluza-Klein*. Para entender las consecuencias de compactificar las dimensiones extras en toros, basta compactificar una ya que los resultados para compactificar más de una son análogos.

2.3.1. Cuantización del momento, número de enrollamiento y modos de oscilación

Sabiendo que el momento es el generador de traslaciones y que el operador de traslación se puede escribir así,

$$T = e^{-iap}, \tag{2-37}$$

tal que, traslada a un estado en una dirección una longitud a con momento p. Si un estado se traslada en una dirección compactificada una distancia $a = 2\pi R$, debería ser el mismo estado, es decir,

$$e^{-i2\pi Rp}|x\rangle = |x\rangle, \tag{2-38}$$

de donde se obtiene la cuantiación del momento,

$$p = \frac{n}{R}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2-39}$$

donde a n se le llama *excitación de Kaluza-Klein*

En la teoría de cuerdas, a diferencia de una teoría de partículas puntuales, si se tienen dimensiones compactificadas, una cuerda cerrada podría estar enrrollada en esta dimensión un número de veces w, propiedad que no pueden tener las partículas puntuales. Debido a la condición de periodicidad, si tiene una cuerda enrrollada w-veces en la dimensión compactificada, se debe satisfacer que,

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma) + w(2\pi R), \qquad w \in \mathbb{N}. \tag{2-40}$$

y se conoce a w como *número de enrollamiento*

Supongase ahora que la dimensión compactificada es la X^{25}, en este caso la expansión en modos para las demás direcciones no compactificadas es como en (2-18) y (2-19). Debido a (2-40), la expansión en modos de la dirección 25 será,

$$X^{25}(\tau, \sigma) = x^{25} + 2\alpha' p^{25}\tau + 2Rw\sigma + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{25}e^{-in(\tau+\sigma)} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^{25}e^{-in(\tau-\sigma)}. \tag{2-41}$$

y ya que se puede descomponer en modos derechos e izquierdos, se puede mostrar que,

$$\sqrt{2}\alpha_0^{25} = \frac{\sqrt{\alpha'}n}{R} + \frac{wR}{\sqrt{\alpha'}}, \qquad \sqrt{2}\bar{\alpha}_0^{25} = \frac{\sqrt{\alpha'}n}{R} - \frac{wR}{\sqrt{\alpha'}} \tag{2-42}$$

que claramente cuando $w = 0$ coinciden. La relación de dispersión (2-27) se convierte en,

$$\alpha' M^2 = \alpha'\left[\left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{wR}{\alpha'}\right)^2\right] + 2N + 2\bar{N} - 4. \tag{2-43}$$

De (2-43) se deduce que la condición de emparejamiento de niveles debe cambiar. Además, si la excitación de Kaluza-Klein es cero, el estado aún así podría tener energía debida al número de enrollamiento, esto es la energía que toma enrollar la cuerda en la dimensión compactificada. Por otro lado, se pueden estudiar los límites $R \to 0$ y $R \to \infty$. En el primero se observa como los modos de momento tienden al límite continuo y los modos de vueltas se vuelven infinitamente pesados, en el segundo se tiene un comportamiento intercambiado. Esta última observación permite dar una reinterpretación de la teoría; se puede pensar en una cuerda enrollada w-veces con momento p en una dirección compactificada con radio R, pero también se puede pensar en una cuerda enrollada n-veces con momento proporcional a w en una dirección compactificada con un radio,

$$R \leftrightarrow \bar{R} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad\qquad n \leftrightarrow w, \tag{2-44}$$

esta propiedad de la teoría es lo que se conoce como *dualidad-T* y relaciona dos teorías, una en la que el radio de compactificación es pequeño y otra donde es grande. Esta simetría es clara de (2-43), sin embargo es posible probar que es una simetría de toda la teoría incluso con interacciones.

Debido a la presencia de la dualidad-T en la teoría, vale la pena agregar el operador dual,

$$\tilde{X}^{25}(\tau,\sigma) = \tilde{x}^{25} + 2\alpha' p^{25}\sigma + 2Rw\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{25}e^{-in(\tau+\sigma)} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\bar{\alpha}_n^{25}e^{-in(\tau-\sigma)}, \tag{2-45}$$

donde $\tilde{x}^{25}$ juega un papel similar a x^{25} en (2-41). Sin embargo, la nueva intepretación es que $\tilde{x}^{25}$ tiene como momento conjugado wR/α' y número de enrollamiento $\alpha' n/R^2$ en una dimensión compactificada con radio $\bar{R} = \alpha'/R$.

2.3.2. Condición de emparejamiento de niveles

Ahora se muestra como la condición de emparejamiento de niveles (2-34) es modificada por el número de enrollamiento y la inclusión de los campos tilde en la teoría. Como (2-3) es invariante bajo reparametrizaciones y transformaciones de Weyl; es natural pensar que la acción más general es la que contiene todos los términos que son invariantes bajo estas simetrías. Ya que la métrica del espacio objetivo contrae los índices espacio-temporales simétricamente, él primer término que podría intentarse implementar es la contracción antisimétrica de los índices espacio-temporales con una 2-forma b_{ij}. A este nuevo campo de fondo se le conoce como *Campo de Kalb-Ramond* y efectivamente es compatible con las simetrías de la teoría. En la última sección de este capítulo se discutirá con más precisión la acción que incluye a todos los términos compatibles con las simetrías, sin embargo, por el momento basta considerar al campo de Kalb-Ramond.

Se considera un espacio-tiempo con dimensión crítica, con n dimensiones compactificadas en un toro y d sin compactificar, es decir, $D = d + n = 26$. Entonces, la acción es

$$S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma(\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j g_{ij} + \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^i\partial_\beta X^j b_{ij}), \tag{2-46}$$

por simplicidad se está tomando $\alpha' = 1$ y

$$\epsilon^{\tau\sigma} = -1 \qquad g_{ij} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & g_{ab} \end{pmatrix}, \qquad b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{ab} \end{pmatrix}, \tag{2-47}$$

dónde g_{ab} es la métrica en el toro y b_{ab} es constante. Los índices griegos denotan las direcciones no compatificadas mientras que los índices latinos a y b representan las direcciones compactificadas.

Imponiendo las condiciones (2-16) y (2-40) se pueden calcular los modos cero de oscilación en términos del momento y el número de enrollamiento,

$$\alpha_0^i = \frac{1}{\sqrt{2}}g^{ij}(p_j - \mathcal{E}_{kj}w^k), \qquad \bar{\alpha}_0^i = \frac{1}{\sqrt{2}}g^{ij}(p_j + \mathcal{E}_{jk}w^k), \tag{2-48}$$

dónde $\mathcal{E}_{ij} = g_{ij} + b_{ij}$. Como es usual en mecánica cuántica el operador de momento se puede escribir como $p_i = -i\partial_i$; es natural definir entonces,

$$w^i = -i\tilde{\partial}^i, \tag{2-49}$$

la derivada tilde es la derivada respecto a $\tilde{X}$. Como el momento conjugado de los campos tilde es w se pueden definir,

$$\alpha_{i0} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_j - \mathcal{E}_{kj}\tilde{\partial}^k) = -\frac{i}{\sqrt{2}}D_j, \qquad \bar{\alpha}_{i0} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_j + \mathcal{E}_{kj}\tilde{\partial}^k) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\tilde{D}_j, \tag{2-50}$$

donde el índice de las derivadas mayúsculas se suben y bajan con la métrica g_{ij}.

Con esto se puede calcular la modificación de la condición de emparejamiento de niveles

(2-34),

$$0 = L_0 - \bar{L}_0 = N - \bar{N} + \partial_i \tilde{\partial}^i. \tag{2-51}$$

Si se considera el sector no masivo, es decir $N = \bar{N} = 1$ con su respectivo gravitón, campo de Kalb-Ramond y dilatón, la condición que se debe cumplir es,

$$\partial_i \tilde{\partial}^i = 0. \tag{2-52}$$

Cuando esta condición se impone para los campos se le llama *constricción débil*, mientras que si se impone para cualquier producto de campos se le llama *constricción fuerte*.

2.3.3. $O(n, n, \mathbb{Z})$: Grupo de transformaciones de T-dualidad

La condición de emparejamiento de niveles en términos de p y w es, $N - \bar{N} = p_i w^i$. Definiedo el nuevo vector de dimensión 2D,

$$v = \begin{pmatrix} w^i \\ p_i \end{pmatrix} \tag{2-53}$$

la condición de emparejamiento de niveles es,

$$N - \bar{N} = v^T \eta v, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2-54}$$

El hamiltoniando toma la forma

$$H = \frac{1}{2} v^T \mathcal{H}(\mathcal{E}) v + N + \bar{N} + ... \tag{2-55}$$

los puntos suspensivos denotan términos que no son relevantes para este discusión. La matriz $\mathcal{H}(\mathcal{E})$ está dada por,

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} g - bg^{-}1b & bg^{-}1 \\ -g^{-}1b & g^{-}1 \end{pmatrix} \tag{2-56}$$

que en el lenguaje de DFT se le conoce como *métrica generalizada*.

Ya que se requiere que la física en distintos marcos de referencia no cambien, es necesario que la teoría sea invariante bajo transformaciones,

$$v = O^T v' \tag{2-57}$$

con O una matriz invertible y con entradas enteras, lo que implica,

$$v^T \eta v = v'^T O \eta O^T v' \Rightarrow \eta = O \eta O^T. \tag{2-58}$$

Con esto se puede concluir que el grupo que generan las transformaciones O es $O(n, n, \mathbb{Z})$. Claramente, si todas las dimensiones son compactificadas, el grupo que se tiene es $O(D, D, \mathbb{Z})$. Además, también es necesario la invarianza del hamiltoniano (2-55), lo que implica,

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}') = O \mathcal{H}(\mathcal{E}') O^T \tag{2-59}$$

es decir,

$$\mathcal{E}' = (a\mathcal{E} + b)(c\mathcal{E} + d)^{-1} \tag{2-60}$$

con a, b, c, d matrices $D \times D$ tales que,

$$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(D, D, \mathbb{Z}). \tag{2-61}$$

Dada la forma en la que transforman los campos de fondo, con un análisis más detallado se puede escribir explícitamente las transformaciones de los campos, que no son triviales debido a su no linealidad, [7].

2.4. Modelo-σ, funciones β y la acción efectiva

Como se mencionó en la sección anterior, el sector no masivo de la teoría de cuerdas se puede descomponer en un tensor simétrico y sin traza, un tensor antisimétrico y un campo escalar.

Considerando que la teoría más general debe tener un lagrangiano con todos los términos compatibles con las simetrías de la teoría; la acción más general que se puede escribir es,

$$\begin{aligned} S = &- \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{-\gamma}\ \gamma^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j g_{ij} - \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi\ \sqrt{-\gamma}\ b_{ij}(X) \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j \epsilon^{\alpha\beta} \\ &- \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{-\gamma} R^{(2)} \Phi(X) \end{aligned} \tag{2-62}$$

dónde identificamos al gravitón, al campo de Kalb-Ramond y al dilatón, como la métrica del espacio objetivo, una 2-forma y un campo escalar respectivamente. El escalar $R^{(2)}$ es el escalar de curvatura de la hoja de mundo que puede ser curva pero no dinámica ya que está definida hasta una transformación de norma. A esta acción se le conoce como *modelo-σ no lineal*.

Notese que el último término de (2-62) no es invariante bajo transformaciones de Weyl, esto es debido a que existe una anomalía que involucra esta simetría y la técnica usada para repararla es usar al dilatón para absorberla. Esta anomalía tiene como nombre *anomalía de Weyl* y viene de que la ecuación (2-5) ya no se satisface e nivel cuántico, [22], [24]. Por otro lado, también es claro que el orden en α' del dilatón es diferente al del gravitón y el campo del Kalb-Ramond. Esto quiere decir que en una serie perturbativa en α' el dilatón contribuirá a diferentes órdenes.

Además el campo de Kalb-Ramond tiene una ambigüedad más, ya que es una 2-forma, así como en en electromagnetismo el campo físico relevante será su derivada exterior,

$$b_{ij} \longrightarrow b'_{ij} = b_{ij} + \partial_i c_j - \partial_j c_i \tag{2-63}$$

$\Rightarrow$

$$H_{ijk} = \partial_{[i} b_{jk]} = H'_{ijk}. \tag{2-64}$$

y efectivamente será el campo que aparece en las ecuaciones de movimiento y en las funciones beta, de las cuales se discutirá a continuación.

2.4.1. Funciones β

Las funiones beta del grupo de renormalización en teoría de campos son funciones que describen el cambio en las constantes de acoplamiento respecto a la escala de energía. Estas están definidas así,

$$\beta^{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial (ln(\mu))} \tag{2-65}$$

dónde λ es una constante de acoplamiento y μ la escala energética.

Ya que el modelo-σ no lineal es una teoría de campo sobre la hoja de mundo, se puede pensar que el gravitón, el campo de Kalb-Ramond y el dilatón como campos de fondo dados, son constantes de acoplamiento de la teoría en $1+1$. Con esta idea tiene sentido entonces calcular las funciones β de la teoría.

Por otro lado, la anomalía que hay que arreglar viene de (2-5), ya que a nivel cuántico se tiene que,

$$\langle T^{\alpha}_{\alpha} \rangle = \frac{c}{12} R^{(2)} \tag{2-66}$$

y debido a que si se hace $c = 0$ representa una teoría vacía, es decir sin campos y no dinámica y $R^{(2)} = 0$ es una hoja de mundo sin curvatura. La forma en la que se arreglará debe ser más genérica aún. A través del método de Faddeev-Popov se puede mostrar que los fantasmas de la teoría contribuyen a la carga central con $c_{fan} = -26$ que claramente con dimensión crítica, es decir 26 campos escalares en 1+1 se obtiene $c = 0$ lo cual resuelve el problema de la anomalía.

Además, como el modelo-σ no lineal es invariante conforme, la teoría debe ser la misma a todas las escalas energéticas. Este argumento concluye que,

$$\beta^{g}_{ij} = \beta^{b}_{ij} = \beta^{\Phi} = 0 \tag{2-67}$$

y se puede mostrar qué, los coeficientes de la traza del tensor de energía-momento a nivel cuántico son estas funciones beta, [8], [9].

La técnica para calcular estas funciones β es calcular entonces el valor de expectación del vacío del tensor de energía-momento. Esto se hace a través del método de expansión en campos de fondo [1], [20], que básicamente es una expansión al rededor de una solución clásica de las ecuaciones de movimiento, lo que permite calcular con diagramas de Feynman y propagadores de espacio plano el valor de expectación necesario, [24]. Finalmente se obtiene qué,

$$\beta^g_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}H_{ikl}H_j{}^{kl} + 2\nabla_i\nabla_j\Phi \tag{2-68}$$

$$\beta^b_{ij} = -\frac{1}{2}\nabla^k H_{kij} + \nabla^k\Phi H_{kij} \tag{2-69}$$

$$\beta^\Phi = (\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{2}\nabla^2\Phi - \frac{1}{24}H^2 \tag{2-70}$$

que usando las identidades de Bianchi respectivas se puede mostrar que satisfacen las *identidades diferenciales*,

$$\nabla^i\beta^b_{ij} - 2\nabla^i\Phi\beta^b_{ij} = 0 \tag{2-71}$$

$$-2\nabla^i\beta^g_{ij} + \nabla_j\beta^g{}_i{}^i + 4\nabla^i\Phi\beta^g_{ij} + H_j{}^{kl}\beta^b_{kl} - 4\nabla_j\beta^\Phi = 0. \tag{2-72}$$

2.4.2. Acción efectiva

La acción efectiva que se obtiene de integrar los modos pesados de la teoría [8], es,

$$S = \int d^{26}X\sqrt{-g}e^{-2\Phi}\left(R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12}H^2\right), \tag{2-73}$$

con ecuaciones de movimiento,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R = \frac{1}{4}\left[H^2_{\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2\right] + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - 2G_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2 - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi, \tag{2-74}$$

$$\frac{1}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} = \nabla^\lambda\Phi H_{\lambda\mu\nu}, \tag{2-75}$$

$$\frac{1}{12}H^2 = R + 4\nabla^2\Phi - 4(\nabla\Phi)^2, \tag{2-76}$$

dónde claramente la primera ecuación son las ecuaciones de Einstein. Esto muestra que la gravedad es emergente como acción efectiva de la teoría de cuerdas.

Además hay que notar que estas ecuaciones de movimiento fuera de la capa de masa están relacionadas con las funciones β de la siguiente forma,

$$\frac{\delta S}{\delta g_{ij}} = -\sqrt{-g}e^{-2\Phi}(\beta^{g\ ij} + 2G^{\mu\nu}(\beta^{\Phi} - \frac{1}{4}\beta^{g}{}_{i}{}^{i})), \tag{2-77}$$

$$\frac{\delta S}{\delta b_{ij}} = -\sqrt{-g}e^{-2\Phi}\beta^{b\ ij}, \tag{2-78}$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi} = -\sqrt{-g}e^{-2\Phi}(\beta^{\Phi} - \frac{1}{4}\beta^{g}{}_{i}{}^{i}). \tag{2-79}$$

Esta acción efectiva viene de una teoría de cuerdas bosónicas, sin embargo es posible generalizarlo a una teoría de supercuerdas y el espectro no masivo sigue coincidiendo con lo anterior de este trabajo.

Otro aspecto a considerar acerca de esta acción son las simetrías que tiene, ya que las dos simetrías de norma que tiene el modelo sigma-σ no lineal, reparametrizaciones y transformaciones de Weyl son sólo transformaciones de los campos X^i y de la métrica sobre la hoja de mundo; en la acción efectiva donde ya no aparece la métrica sobre la hoja de mundo y los campos encaje ahora son las coordenadas, las transformaciones de norma del modelo-σ no lineal se absorben en la acción efectiva como difeomorfismos locales. Entonces la acción efectiva tiene dos simetrías de norma, difeomorfismos locales y las transformaciones de norma del campo de Kalb-Ramond (2-63).

2.4.3. Identidades de Nother

En una teoría de norma genérica se puede escribir la transformación de norma de los campos como,

$$\delta\phi^i(x) = R^i{}_{\alpha}\epsilon^{\alpha}(x), \tag{2-80}$$

donde, $R^i{}_\alpha$ son operadores diferenciales actuando sobre los parámetros infinitesimales y locales ϵ^α. Entonces la condición de mínima acción se ve como,

$$\delta S = \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta \phi^i} \delta \phi^i = \int d^2\sigma \frac{\delta S}{\delta \phi^i} R^i{}_\alpha \epsilon^\alpha(x), \tag{2-81}$$

después de una integración por partes y haciendo cero los términos de borde, implica,

$$R^i_\alpha \frac{\delta S}{\delta \phi^i} = 0, \tag{2-82}$$

es decir, que cierta combinación diferencial de las ecuaciones de movimiento es idénticamente cero, incluso fuera de la capa de masa. A estas identidades se les llama *identidades de Noether* [13].

2.4.4. Identidades diferenciales e identidades de Noether

Para finalizar este capítulo se muestra el resultado principal de este trabajo y que se pretende generalizar para DFT en el último capítulo. Debido a que existe una relación entre las ecuaciones de movimiento fuera de la capa de masa y las funciones β, (2-77), (2-78), (2-79), es válido preguntarse que pasará con las identidades diferenciales (2-71), (2-72), cuando se insertan dichas relaciones.

Las identidades para las ecuaciones de movimiento que se obtienen son,

$$\nabla_i \frac{\delta S}{\delta b_{ij}} = 0, \tag{2-83}$$

$$2\nabla_i \frac{\delta S}{\delta g_{ij}} + H_{jik} \frac{\delta S}{\delta b_{ik}} + \nabla^j \Phi \frac{\delta S}{\delta \Phi} = 0. \tag{2-84}$$

qué coinciden en ser las identidades de Noether, ya que al multiplicar cada ecuación por un vector arbitrario ζ^i, ξ^i, respectivamente, se pueden identificar las simetrías de norma de la teoría así como en (2-82),

$$\delta b_{ij} = \nabla_{[i}\zeta_{j]}, \tag{2-85}$$

$$\delta g_{ij} = \nabla_{(i}\xi_{j)}, \qquad \delta b_{ij} = \xi^k H_{kij}, \qquad \delta\Phi = \xi^k \nabla_k \Phi, \tag{2-86}$$

que son la simetría (2-63) y las derivadas de Lie de los tres campos de fondo respectivamente.

Por último, analizando el contenido de las identidades diferenciales o equivalentemente las identidades de Noether se puede observar en (2-71) o (2-83) que es necesario que se satisfaga,

$$\nabla^i \nabla^j H_{ijk} = 0, \tag{2-87}$$

lo que efectivamente sucede debido a la identidad de Bianchi del tensor de Riemann, $R_{i[jkl]} = 0$. Mientras que de la identidad (2-72) o (2-84) muestra que deben satisfacerse,

$$\nabla^i R_{ij} - \nabla_j R = 0, \tag{2-88}$$

$$H^{ijk} \nabla_k H_{lij} - \frac{1}{6} \nabla_l H^2 = 0 \tag{2-89}$$

que efectivamente sucede pues son las identidades de Bianchi respectivamente para los dos tensores.

Esto muestra que efectivamente las identidades diferenciales del modelo-σ no lineal y las identidades de Noether de la acción efectiva son equivalentes y son parte de la consistencia de la teoría. Resultado que sólo es valido debido a que existe la relación entre las funciones β del modelo-σ no lineal y las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva. Sin embargo, en el último capítulo de este trabajo se generaliza este último resultado en DFT, lo que parcialmente demuestra que DFT es una teoría consistente y que podría ser la teoría efectiva de un modelo-σ doble.

Capítulo 3

Teoría de campo doble

En esta sección se exponen los resultados preliminares de la construcción dada en [14] y [15]. El desarrollo de DFT se centra en la idea de construir una acción de los campos de fondo sobre el espacio-tiempo doble manifiestamente invariante bajo el grupo de T-dualidad. Incluso en el caso dónde no existe alguna compactificación, es decir, el momento y el número de enrollamiento no están cuantizados y son etiquetas de un continuo. El grupo continuo que contiene las simetrías de T-dualidad en la teoría es $O(D, D)$, el cual si se compactifican d direcciones se rompe en $O(n, n) \times O(d, d; \mathbb{Z})$ y consistentemente, si se considera la contricción $\partial_i \tilde{\partial}^i = 0$ que significa que los campos no depende de los dos tipos de coordenadas $(x^i, \tilde{x}_i)$, el grupo $O(n, n)$ se rompe en el grupo de Lorentz $SO(n-1, 1)$, [11].

3.1. Formalismo $\mathcal{E}$

La acción de DFT en términos del campos $\mathcal{E}_{ij} = g_{ij} + b_{ij}$ y $e^{-2d} = \sqrt{-g}e^{-2\Phi}$ es,

$$\begin{aligned} S = \int dx d\tilde{x}\; e^{-2d} \Bigg[& -\frac{1}{4} g^{ik} g^{jl} \mathcal{D}^p \mathcal{E}_{kl} \mathcal{D}_p \mathcal{E}_{ij} + \frac{1}{4} g^{kl} (\mathcal{D}^j \mathcal{E}_{ik} \mathcal{D}^i \mathcal{E}_{jl} + \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ki} \bar{\mathcal{D}}^i \mathcal{E}_{lj}) \\ & + (\mathcal{D}^i d\; \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ij} + \bar{\mathcal{D}}^i d\; \mathcal{D}^j \mathcal{E}_{ji}) + 4 \mathcal{D}^i d\; \mathcal{D}_i d \Bigg], \end{aligned} \tag{3-1}$$

con las derivadas definidas como en (2-50). Esta acción se puede separar en tres términos $S = S^{(0)} + S^{(2)} + S^{(2)}$, dónde los índices entre paréntesis denotan el número de derivadas tilde que tienen. Ya que $S^{(0)}$ no depende de ninguna derivada tilde, se puede mostrar que coincide con (2-73), conluyendo así que es una buena extensión de la teoría de cuerdas bosónicas del capítulo anterior.

Como se muestra en [14], las transformaciones,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{E}_{ij} &= \mathcal{D}_i\tilde{\xi}_j - \bar{\mathcal{D}}_j\tilde{\xi}_i + (\xi^k\partial_k + \tilde{\xi}_k\tilde{\partial}^k)\mathcal{E}_{ij} + \mathcal{D}_i\xi^k\mathcal{E}_{kj} + \bar{\mathcal{D}}_j\xi^k\mathcal{E}_{ik} \\ \delta d &= -\frac{1}{2}\partial_i\xi^i + \xi^i\partial_i d - \frac{1}{2}\tilde{\partial}^i\tilde{\xi}_i + \tilde{\xi}_i\tilde{\partial}^i d, \end{aligned} \tag{3-2}$$

dejan invariante a (3-1). Estas transformaciones se pueden escribir como,

$$\begin{aligned} \delta g_{ij} &= \mathcal{L}_\xi g_{ij} + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} g_{ij} + (\tilde{\partial}^k\xi^l - \tilde{\partial}^l\xi^k)(g_{ki}b_{jl} + g_{kj}b_{il}), \\ \delta b_{ij} &= \mathcal{L}_\xi b_{ij} + \mathcal{L}_{\tilde{\xi}} b_{ij} + \partial_i\tilde{\xi}_j - \partial_j\tilde{\xi}_i + g_{ik}(\tilde{\partial}^l\xi^k - \tilde{\partial}^k\xi^l)g_{lj} + b_{ik}(\tilde{\partial}^k\xi^l - \tilde{\partial}^l\xi^k)b_{lj}, \end{aligned} \tag{3-3}$$

dónde se pueden identificar con las derivadas de Lie usuales en cada espacio, es decir, espacio y espacio tilde, además de términos no lineales entre g y b. Estas simetrías cierra en un paréntesis llamado *paréntesis-C* y se les llama *derivadas de Lie generalizadas.*

3.1.1. Paréntesis-C

El paréntesis-C se define como,

$$[\hat{\mathcal{L}}_{\xi_1}, \hat{\mathcal{L}}_{\xi_2}] = -\hat{\mathcal{L}}_{[\xi_1,\xi_2]_C} \tag{3-4}$$

dónde $\hat{\mathcal{L}}$ es la derivada de Lie generalizada,

$$\hat{\mathcal{L}}_\xi A_M = \xi^P\partial_P A_M + A_P\partial_M\xi^P - A_P\partial^P\xi_M, \tag{3-5}$$

con,

$$[\xi_1, \xi_2]_C^M = 2\xi^N_{[1}\partial_N\xi^M_{2]} - \xi_{N[1}\partial^M\xi^N_{2]}. \tag{3-6}$$

Ahora los índices mayúscula corren hasta $2D$ y representan las entradas de tensores que transforman bajo $O(D,D)$. Se utiliza el nombre generalizado debido a que las derivadas (3-5) tiene la forma usual de una derivada de Lie, sin embargo, esta definición implementa las transformaciones (3-3) que claramente no son las definiciones clásicas para las derivadas de Lie.

La matriz invariante y con la que se suben y bajan los índices mayúsculas es,

$$\eta_{MN} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{3-7}$$

y los vectores y derivadas están definidas como,

$$X^M = \begin{pmatrix} \tilde{x}_i \\ x^i \end{pmatrix}, \qquad \partial_M = \begin{pmatrix} \tilde{\partial}^i \\ \partial_i \end{pmatrix}, \qquad \xi^M = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_i \\ \xi^i \end{pmatrix} \tag{3-8}$$

3.1.2. Ecuaciones de movimiento

Usando la notación que se introdujo anteriormente, se propone la acción de DFT a ser de la forma,

$$S = \int dx d\tilde{x} e^{-2d} \mathcal{R} \tag{3-9}$$

dónde $\mathcal{R}$ juega el papel de un escalar de Ricci generalizado, definido así,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathcal{E}, d) =& 2\left(\nabla^i \mathcal{D}_i d + \bar{\nabla}^i \bar{\mathcal{D}}_i d\right) + \frac{1}{2}\left(\nabla^i \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ij} + \bar{\nabla}^j \mathcal{D}^i \mathcal{E}_{ij}\right) \\ &+ \frac{1}{4} g^{ij}\left(\mathcal{D}^k \mathcal{E}_{lj}\, \mathcal{D}^l \mathcal{E}_{ki} + \bar{\mathcal{D}}^k \mathcal{E}_{jl}\, \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{ik}\right) - \frac{1}{4} g^{ij}\left(\mathcal{D}^l \mathcal{E}_{lj}\, \mathcal{D}^k \mathcal{E}_{ki} + \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{jl}\, \bar{\mathcal{D}}^k \mathcal{E}_{ik}\right) \\ &- \frac{1}{4} g^{ik} g^{jl} \mathcal{D}^k \mathcal{E}_{ij}\, \mathcal{D}_k \mathcal{E}_{kl} - \left(\mathcal{D}^i \mathcal{E}_{ij}\, \bar{\mathcal{D}}^j d + \bar{\mathcal{D}}^j \mathcal{E}_{ij}\, \mathcal{D}^i d\right) - 4 \mathcal{D}^i d\, \mathcal{D}_i d. \end{aligned}$$

este nuevo término de curvatura sólo difiere en una derivada total respecto a (3-1). En [14] se muestra que en $O(D,D)$, los escalares que difieren por derivadas totales, lo hacen en cualquier marco de $O(D,D)$. Esto implica que es posible escoger el marco $\tilde{\partial} = 0$, es decir, en el que la acción de DFT coincide con la acción efectiva (2-73) y ver que (3-1) difiere de (3-10) por una derivada total.

A través de variar la acción, se pueden calcular las ecuaciones de movimiento,

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}, d) = 0, \tag{3-10}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{ij} =& \frac{1}{4}(\nabla^k \mathcal{D}_k \mathcal{E}_{ij} + \bar{\nabla}^k \bar{\mathcal{D}}_k \mathcal{E}_{ij} - 2\nabla^k \mathcal{D}_i \mathcal{E}_{kj} - 2\bar{\nabla}^k \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{E}_{ik}) - (\bar{\nabla}_j \mathcal{D}_i d + \nabla_i \bar{\mathcal{D}}_j d) \\
&+ \frac{1}{4} g^{nk} (\bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{E}_{in} \mathcal{D}^m \mathcal{E}_{mk} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{E}_{lk} \mathcal{D}^l \mathcal{E}_{in} + \mathcal{D}_i \mathcal{E}_{nj} \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{kl} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \mathcal{E}_{kl} \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{nj}) \\
&- \frac{1}{4} (\bar{\mathcal{D}}^k \mathcal{E}_{lj} \mathcal{D}^l \mathcal{E}_{ik} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{kl} \mathcal{D}^k \mathcal{E}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{ij} \mathcal{D}^k \mathcal{E}_{kl}) - \frac{1}{4} g^{nk} g^{ml} \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{E}_{nm} \mathcal{D}_i \mathcal{E}_{kl} = 0.
\end{aligned} \tag{3-11}$$

La notación ∇ representa las derivadas covariantes en $O(D, D)$, definidas así,

$$\nabla_i(\Gamma) \bar{A}_j \equiv \mathcal{D}_i \bar{A}_j - \Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} \bar{A}_k \qquad \bar{\nabla}_j(\Gamma) A_i \equiv \bar{\mathcal{D}}_j A_i - \Gamma_{\bar{j}i}^{k} A_k \tag{3-12}$$

con

$$\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\mathcal{D}_i \mathcal{E}_{lj} + \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{E}_{il} - \bar{\mathcal{D}}_l \mathcal{E}_{ij} \Big), \quad \Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\bar{\mathcal{D}}_i \mathcal{E}_{jl} + \mathcal{D}_j \mathcal{E}_{li} - \mathcal{D}_l \mathcal{E}_{ji} \Big). \tag{3-13}$$

En el contexto del formalismo $\mathcal{E}$ es en el que se generaliza el resultado del capítulo anterior. Sin embargo, existe una generalización más moderna para la construcción anterior. A este otro formalismo se le llamará *formalismo-*$\mathcal{H}$ y por completes de este trabajo se considera adecuado tomar el espacio de discutir estas ideas a continuación.

3.2. Formalismo $\mathcal{H}$

Con base en la idea de los índices mayúscula, se puede construir un campo que transforme naturalmente y linealmente bajo $O(D, D)$. Este campo debe tener los grados mismos grados de libertad que $\mathcal{E}$ y si tuviera más, habría que tener constricciones de norma para que existan ambigüedades que recuperen el número original de grados de libertad. Como se mencionó antes, este campo será la métrica generalizada (2-56),

$$\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -g^{ik}b_{kj} \\ b_{ik}g^{kj} & g_{ij} - b_{ik}g^{kl}b_{kj} \end{pmatrix}. \tag{3-14}$$

La acción para la métrica generalizada y el dilatón d es,

$$\begin{aligned} S = \int dx d\tilde{x} e^{-2d} \big(\frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M \mathcal{H}^{KL}\partial_N \mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M \mathcal{H}^{KL}\partial_K \mathcal{H}_{NL} \\ - 2\partial_M d \partial_N \mathcal{H}^{MN} + 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d \partial_N d \big), \end{aligned} \tag{3-15}$$

que se puede probar que contiene a (3-1). Además, también se pueden escribir las transformaciones de simetría de la forma,

$$\hat{\mathcal{L}}_\xi \mathcal{H}^{MN} = \delta_\xi \mathcal{H}^{MN} = \xi^P \partial_P \mathcal{H}^{MN} + \big(\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^M\big)\mathcal{H}^{PN} + \big(\partial^M \xi_P - \partial_P \xi^N\big)\mathcal{H}^{MP}, \tag{3-16}$$

que también contienen consistentemente a las transformaciones (3-3) y es muy interesante notar que en esta forma la no linealidad quedó empaquetada en $\mathcal{H}$ y estas transformaciones tienen una forma lineal.

Por otro lado, la métrica generalizada satisface una relación junto con η, el tensor invariante de $O(D, D)$,

$$\mathcal{H}^{MN} = \eta^{MK}\mathcal{H}_{KL}\eta^{LN}, \tag{3-17}$$

lo que implica que las variaciones de $\mathcal{H}$ no son independientes, mostrando la existencia de constricciones en la acción y por esa es la razón, calcular las ecuaciones de movimiento de la métrica generalizada a partir de la variación de la acción no dará directamente las ecuaciones correctas.

3.2.1. Paréntesis-D

Así mismo, el paréntesis-C también tiene una natural generalización en este nuevo formlalismo. Si se define el paréntesis-D,

$$[A, B]_D \equiv \hat{\mathcal{L}}_A B \tag{3-18}$$

se puede probar que satisface las relaciones,

$$[A, B]_D^M = [A, B]_C^M + \frac{1}{2}\partial^M (B^N A_N), \tag{3-19}$$

$$[A, B]_D - [B, A]_D = 2[A, B]_C \tag{3-20}$$

y también tiene identidad de Jacobi,

$$[A, [B, C]_D]_D + [C, [A, B]_D]_D + [B, [C, A]]_D = 0. \tag{3-21}$$

3.2.2. Ecuaciones de movimiento

Dadas las definiciones anteriores, se pueden calcular las ecuaciones de movimiento. Al igual que en el formalismo $\mathcal{E}$, se puede definir un escalar de Ricci, que contiene consistentemente a la definición en el formalismo $\mathcal{E}$ y al escalar de curvatura usual.

El escalar de curvatura generalizado es,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \equiv & 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M\partial_N d - \partial_M\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_M d\partial_N d + 4\partial_M\mathcal{H}^{MN}\partial_N d \\ & + \frac{1}{8}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{2}\mathcal{H}^{MN}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_K\mathcal{H}_{NL} \end{aligned} \tag{3-22}$$

y se puede ver que sólo difiere por una derivada total del lagrangiano (3-15),

$$\mathcal{L}_{DFT} = e^{-2d}\mathcal{R} + \partial_M(e^{-2d}[\partial_N\mathcal{H}^{MN} - 4\mathcal{H}^{MN}\partial_N d]). \tag{3-23}$$

es claro que $\mathcal{R}$ es un escalar en $O(D, D)$ y difiere de (3-15) por una derivada total en $O(D, D)$, entonces difieren por una derivada total en cualquier marco de $O(D, D)$.

La ecuación de movimiento asociada a d, al igual que en el caso del formalismo $\mathcal{E}$ es,

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}, d) = 0. \tag{3-24}$$

Por otro lado, al tener que las variaciones de $\mathcal{H}$ no son independientes,

$$\delta\mathcal{H}\eta + \eta\delta\mathcal{H} = 0 \tag{3-25}$$

es necesario proyectar las ecuaciones de movimiento con ambigüedades una vez que se ha hecho la variación de la acción,

$$\delta S = \int dx d\tilde{x} e^{-2d} \mathcal{K}_{MN} \delta\mathcal{H}^{MN} \tag{3-26}$$

Las soluciones más generales para (3-25), son de la forma,

$$\delta\mathcal{H}^{MN} = \frac{1}{4}(\delta^M{}_K + \mathcal{H}^M{}_K)\mathcal{M}^{KL}(\delta^N{}_L - \mathcal{H}^N{}_L) + \frac{1}{4}(\delta^M{}_K - \mathcal{H}^M{}_K)\mathcal{M}^{KL}(\delta^N{}_L + \mathcal{H}^N{}_L) \tag{3-27}$$

con $\mathcal{M}$ una matriz $2D \times 2D$ simétrica arbitraria. Entonces las ecuaciones de movimiento para $\mathcal{H}_{MN}$ son,

$$\mathcal{R}^{MN} \equiv \frac{1}{4}(\delta^M{}_K + \mathcal{H}^M{}_K)\mathcal{K}^{KL}(\delta^N{}_L - \mathcal{H}^N{}_L) + \frac{1}{4}(\delta^M{}_K - \mathcal{H}^M{}_K)\mathcal{K}^{KL}(\delta^N{}_L + \mathcal{H}^N{}_L) = 0 \tag{3-28}$$

dónde $\mathcal{R}^{MN}$ es el tensor de Ricci generalizado y

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{MN} \equiv& \frac{1}{8}\partial_M\mathcal{H}^{KL}\partial_N\mathcal{H}_{KL} - \frac{1}{4}(\partial_L - 2(\partial_L d))(\mathcal{H}^{LK}\partial_K\mathcal{H}_{MN}) + 2\partial_M\partial_N d \\ &- \frac{1}{2}\partial_{(M}\mathcal{H}^{KL}\partial_L\mathcal{H}_{N)K} + \frac{1}{2}(\partial_L - 2(\partial_L d))(\mathcal{H}^{LK}\partial_{(M}\mathcal{H}_{N)K} + \mathcal{H}^K{}_{(M}\partial_K\mathcal{H}_{N)}{}^K).\end{aligned} \tag{3-29}$$

Nótese que en este nuevo formalismo, el tensor de Ricci generalizado y el escalar de curvatura generalizado no están relacionados cómo en relatividad general, es decir, a través de trazar el tensor de Ricci.

Finalmente, el problema que hace falta estudiar es la derivada covariante compatible. Esta es la derivada que, como en el caso de relatividad general hace $\nabla\sqrt{-g} = 0$, en este caso será necesario $\nabla e^{-2d} = 0$. Este es el problema que se presenta en la siguiente sección.

3.3. Derivada covariante

Para finalizar este capítulo se discute el concepto de derivada covariante. Como se ha mostrado antes, se pueden definir distintos tipos de derivadas en DFT. Sin embargo, como es bien conocido, en geometría riemanniana existe una única derivada compatible con la métrica y esta satisface que la derivada de la métrica es cero. Esto implica que es posible integrar por partes a pesar de tener la medida $\sqrt{-g}$, o bien en el caso de DFT $\sqrt{-g}e^{-2\Phi} = e^{-2d}$ y las identidades de Bianchi están estrechamente relacionadas con esta propiedad.

Como se mostró en el final del capítulo 2, el principal resultado que pretende generalizar este trabajo tiene como uno de sus pilares, debido a la necesidad de calcular identidades de Noether; la propiedad que tiene la derivada covariante usual de poder integrar por partes. Es por esta razón que, para poder generalizar dicho resultado es necesario tener una derivada covariante consistente que permita integrar por partes.

Las construcción adecuada para lograr esto se hace con precisión en [16] y [23]. Estás ideas están basadas en el formalismo de marcos de relatividad general.

En $O(D,D)$, la matriz invariante η_{MN} induce una métrica local,

$$\mathcal{G}_{AB} \;=\; e_A{}^M\, e_B{}^N\, \eta_{MN}, \tag{3-30}$$

dónde se han introducido los marcos $e_A{}^M$ y los índices planos A y B corresponden a $GL(D) \times GL(D)$,

$$e_A{}^M \;=\; \begin{pmatrix} e_{ai} & e_a{}^i \\ e_{\bar{a}i} & e_{\bar{a}}{}^i \end{pmatrix}, \tag{3-31}$$

los índices $M = ({}_i, {}^i)$ están en $O(D,D)$, mientras que los índices $A = (a, \bar{a})$ están en $GL(D) \times GL(D)$.

Ahora se pueden definir las derivadas,

$$e_A \equiv e_A{}^M \partial_M, \tag{3-32}$$

y la derivada covariante,

$$\nabla_A V_B = e_A V_B + \omega_{AC}{}^C V_C, \qquad \nabla_A V^B = e_A V^B - \omega_{AC}{}^B V^C \tag{3-33}$$

dónde se a introducido la conección ω_{AB} y se considera que la derivada covariante es libre de torsión.

Teniendo esto, ahora es necesario que la derivada covariante sea compatible con la métrica y esto por definición es,

$$\nabla_A \mathcal{G}_{BC} = 0 \tag{3-34}$$

además se requiere que sea posible integrar por partes, es decir,

$$\int e^{-2d}\, V \nabla_A V^A \;=\; -\int e^{-2d}\, V^A \nabla_A V \;=\; -\int e^{-2d}\, V^A e_A V \tag{3-35}$$

dónde claramente no se están considerando los términos de frontera. Estas últimas condiciones implican que,

$$\omega_{BA}{}^B \;=\; -e^{2d} \partial_M \big(e_A{}^M e^{-2d}\big) \;=\; -\partial_M e_A{}^M + 2 e_A d. \tag{3-36}$$

Como se mencionó la sección anterior, el contexto en que se muestra el resultado de esta tesis es en el formalismo $\mathcal{E}$. Sin embargo, la deducción de derivada covariante anterior está en el formalismo $\mathcal{H}$. Ahora es necesario escribir la conección (3-36) en el formalismo $\mathcal{E}$.

El formalismo $\mathcal{H}$ al tener más grados de libertad que el formalismo $\mathcal{E}$, es una teoría con constricciones tales que recuperan los grados de libertad originales. Es decir que, si se quiere escribir resultados del formalismo $\mathcal{H}$, en términos del campo $\mathcal{E}$, se necesita fijar la norma.

Una forma de fijar la norma es hacer la elección,

$$e_A{}^M = \begin{pmatrix} e_{ai} & e_a{}^i \\ e_{\bar{a}i} & e_{\bar{a}}{}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{E}_{ai} & \delta_a{}^i \\ \mathcal{E}_{i\bar{a}} & \delta_{\bar{a}}{}^i \end{pmatrix}, \tag{3-37}$$

esto es identificar los índices espacio temporales i con los índices en $GL(D) \times GL(D)$, es decir, $e_a{}^i = \delta_a{}^i$, que es equivalente a $e_{\bar{a}}{}^i = \delta_{\bar{a}}{}^i$.

Una vez fijada la norma es posible ver que las derivadas (2-50) coinciden con (3-32),

$$\mathcal{D}_a = e_a = e_a{}^M \partial_M = \partial_a - \mathcal{E}_{ai}\tilde{\partial}^i , \qquad \bar{\mathcal{D}}_{\bar{a}} = e_{\bar{a}} = e_{\bar{a}}{}^M \partial_M = \partial_{\bar{a}} + \mathcal{E}_{i\bar{a}}\tilde{\partial}^i, \tag{3-38}$$

y sabiendo que $\mathcal{E}_{(ij)} = g_{ij}$, se puede escribir ahora,

$$\mathcal{G}_{AB} = \begin{pmatrix} -2g_{ab} & 0 \\ 0 & 2g_{\bar{a}\bar{b}} \end{pmatrix}. \tag{3-39}$$

Usando una redefinición de los parámetros de norma ξ y $\tilde{\xi}$,

$$\eta_i = -\tilde{\xi}_i + \mathcal{E}_{ij}\xi^j , \qquad \bar{\eta}_i = \tilde{\xi}_i + \xi^j \mathcal{E}_{ji}, \tag{3-40}$$

se pueden reescribir las transformaciones de norma de $\mathcal{E}$ y d.

La variación de $\mathcal{E}$ dada en (3-2), se puede escribir así,

$$\delta \mathcal{E}_{ij} = \nabla_i(\Gamma)\bar{\eta}_j + \bar{\nabla}_j(\Gamma)\eta_i, \tag{3-41}$$

dónde las derivadas $\nabla(\Gamma)$ son las definidas en (3-12). Usando los nuevos parámetros se obtiene que,

$$\delta \mathcal{E}_{a\bar{b}} = \nabla_a \bar{\eta}_{\bar{b}} + \nabla_{\bar{b}} \eta_a, \tag{3-42}$$

dónde ∇ es la derivada covariante (3-33). Esta última expresión es más familiar ya que tiene la forma de las variaciones (2-85) y (2-86). Dado que,

$$\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = \frac{1}{2}g^{kl}\Big(\mathcal{D}_i\mathcal{E}_{lj} + \bar{\mathcal{D}}_j\mathcal{E}_{il} - \bar{\mathcal{D}}_l\mathcal{E}_{ij}\Big), \quad \Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2}g^{kl}\Big(\bar{\mathcal{D}}_i\mathcal{E}_{jl} + \mathcal{D}_j\mathcal{E}_{li} - \mathcal{D}_l\mathcal{E}_{ji}\Big), \tag{3-43}$$

y

$$\Gamma_{ji}^{j} = \frac{1}{2}\mathcal{D}^j\mathcal{E}_{ij}, \quad \Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{j}} = \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}^j\mathcal{E}_{ji}, \tag{3-44}$$

la conección queda definida como,

$$\begin{aligned}
\omega_{i\bar{j}}{}^{\bar{k}} &= -\,\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}}\,,\\
\omega_{\bar{i}j}{}^{k} &= -\,\Gamma_{\bar{i}j}^{k},\\
\omega_{ji}{}^{j} &= -\,\Gamma_{ji}^{j} + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}^j\mathcal{E}_{ij} + 2\mathcal{D}_i d\,,\\
\omega_{\bar{j}\bar{i}}{}^{\bar{j}} &= -\,\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{j}} + \frac{1}{2}\mathcal{D}^j\mathcal{E}_{ji} + 2\bar{\mathcal{D}}_i d
\end{aligned} \tag{3-45}$$

obteniendo finalmente que,

$$\delta d \;=\; -\frac{1}{4}\nabla_i\eta^i - \frac{1}{4}\bar{\nabla}_i\bar{\eta}^i, \tag{3-46}$$

con

$$\nabla_i = \nabla_i(\Gamma) - \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}^k\mathcal{E}_{ik} + 4\mathcal{D}_i d). \tag{3-47}$$

Los resultados (3-41) y (3-47) serán fundamentales para el siguiente capítulo. Como se hizo en el capítulo anterior, es necesario calcular las identidades de Noether, para eso será de gran ayuda conocer la derivada compatible con la métrica y las variaciones de $\mathcal{E}$ y d.

Capítulo 4

Identidades de Bianchi e indentidades diferenciales generalizadas

Para finalizar este trabajo, como se prometió, se generaliza el resultado que se muestra al final del capítulo 2 usando las herramientas que se desarrollaron en el capítulo anterior, [12]. Debido a la cantidad de ideas en la mesa se considera conveniente hacer un breve sumario de las ideas preliminares para continuar a dicho resultado.

La historia de esta tesis inició con la acción de Polyakov (2-3) que, debido a las simetrías que tiene, difeomorfismos y transformaciones de Weyl, se puede extender al modelo-σ no lineal (2-62). El modelo-σ tiene una anomalía ya que el valor de expectación del tensor de energía-momento en el vacío no es nulo. Además, gracias a la simetría conforme, las funciones β deben ser cero y son los coeficientes en cada término de la traza del tensor de energía momento; además de satisfacer las identidades diferenciales (2-71) y (2-72). Por otro lado, las funciones β definen las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva del sector no masivo de la teoría, debido a (2-77), (2-78) y (2-79). Al utilizar estas últimas relaciones en las identidades diferenciales se pueden encontrar las identidades de Noether asociadas a la acción efectiva (2-83) y (2-84), que recuperan las simetrías de norma de la acción efectiva y contienen a las identidades de Bianchi.

Además, en la cuantización del cono de luz, es posible calcular el espectro de la teoría y se prueba que es modificado debido a la capacidad de las cuerdas cerradas de tener número de enrollamiento no nulo en fondos toroidales (2-43). Entonces una teoría de cuerdas suficientemente general debe contener esta información. Por eso se agregan los campos $\tilde{X}$ y se piden que sean variables conjugadas al número de enrollamiento y se puede ver la existencia de la dualidad-T con grupo de transformaciones $O(D, D)$. Con el propósito de hacer manifiesta en la acción esta dualidad, [14] y [15] dan una construcción no geométrica tal que, cuando se apagan las coordenadas tilde se recupera la acción efectiva del modelo-σ no lineal.

Debido a que las funciones β del modelo-σ y las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva son equivalentes. Las identidades diferenciales y las identidades de Noether también lo son, es decir, a partir de unas se puede llegar a las otras. Por eso, también es valido iniciar con las identidades de Noether y a través de la relación entre ecuaciones de movimiento(de la acción efectiva) y las funciones β (del modelo-σ) obtener las identidades diferenciales. El método a seguir será este, ya que lo que se tiene en manos es la acción de DFT y sus transformaciones simetrías bajo $O(D, D)$. Esto resultará en unas identidades diferenciales generalizadas que se puede interpretar como una condición de integrabilidad de las funciones β de un posible modelo-σ doble [3], [4], [10].

Las relaciones (2-77), (2-78) y (2-79) no son realmente complicadas, sin embargo existe una forma de escribirlas en una forma mucho más sencilla que será conveniente para los próximos cáculos. Es ahí donde entra en juego la definición del nuevo dilatón $e^{-2d} = \sqrt{-g}e^{-2\Phi}$.

4.1. Nuevo dilatón

La definición del nuevo dilatón es bien conocida en la literatura y como una redefinición de campos, tienen sentido definir d a pesar de no estar en DFT, es decir, que sólo depende de las coordenadas sin tilde. Lo que se pretende mostrar ahora es que esta definición modifica las relaciones (2-77), (2-78) y (2-79) dejandolas en una forma muy sencilla y esto será muy útil para aplicarlo a DFT.

Si se tiene la definición,

$$e^{-2d} = \sqrt{-g}e^{-2\Phi}, \tag{4-1}$$

se puede mostrar que,

$$\partial_i \Phi = \partial_i d + \frac{1}{2}\Gamma_i = \nabla_i d \qquad\qquad \Gamma_i = \Gamma^j_{ij} = \frac{1}{2} g^{jk}\partial_i g_{jk}, \tag{4-2}$$

usando esto en la acción efectiva se obtiene que,

$$S_d = \int dx e^{-2d}\Big[R + 4(\nabla d)^2 - \frac{1}{12}H^2\Big]. \tag{4-3}$$

y tomando la variación de S_d,

$$\delta S_d = -\int dx e^{-2d}\Big(\delta g_{ij}\beta^{g_{ij}} + \delta b_{ij}\beta^{b_{ij}} + \delta d\beta^d\Big), \tag{4-4}$$

con,

$$\beta^g_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{4}H^2_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j d, \tag{4-5}$$

$$\beta^b_{ij} = -\frac{1}{2}\nabla^k H_{kij} + H_{kij}\nabla^k d\,, \tag{4-6}$$

$$\beta^d = -\frac{1}{4}(R - 4(\nabla d)^2 - \frac{1}{12}H^2 + 4\nabla^2 d). \tag{4-7}$$

Notese que estas funciones β, a excepción de β^d, son iguales a las mostradas previamente en el texto y β^d a cambiado a,

$$\beta^d = \beta^\Phi - \frac{1}{4}\beta^g. \tag{4-8}$$

sin embargo, esta redifinición de la función β del dilatón es consistente con la redefinición de campos (4-1).

Entonces, las identidades diferenciales toman la forma

$$\nabla^i\beta^b_{ij} - 2\nabla_i d\ \beta^b_{ij} = 0, \tag{4-9}$$

$$-2\nabla^i\beta^g_{ij}+4\beta^g_{ij}\nabla^i d+H_{jik}\beta^{bik}-4\nabla_j\beta^d=0, \tag{4-10}$$

y en consecuencia a esto las funciones beta del modelo-σ y las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva satisfacen,

$$e^{-2d}\beta^g_{ij}=\frac{\delta S_d}{\delta g^{ij}}, \tag{4-11}$$

$$e^{-2d}\beta^b_{ij}=-\frac{\delta S_d}{\delta b^{ij}}, \tag{4-12}$$

$$e^{-2d}\beta^d=\frac{1}{8}\frac{\delta S_d}{\delta d}. \tag{4-13}$$

expresiones mucho más simple que las originales. Más aún, si se sustituyen en las nuevas identidades diferenciales se obtiene,

$$\nabla^i\frac{\delta S_d}{\delta b^{ij}}=0, \tag{4-14}$$

$$2\nabla^i\frac{\delta S_d}{\delta g^{ij}}+H_{jik}\frac{\delta S}{\delta b_{ik}}+(\partial_j d+\frac{1}{2}\partial_j)\frac{\delta S_d}{\delta d}=0, \tag{4-15}$$

de dónde se identifican nuevamente las simetrías de norma correctas de la acción efectiva,

$$\delta g_{ij}=\nabla_{(i}\xi_{j)}, \tag{4-16}$$

$$\delta b_{ij}=\xi^k H_{kij}, \qquad \delta_g b_{ij}=\nabla_{[i}\zeta_{j]}, \tag{4-17}$$

$$\delta d=-\frac{1}{2}\partial_i\xi^i+\xi^i\partial_i d, \tag{4-18}$$

tal y como se esperaba.

Ahora, conociendo las consecuencias que tiene esta redefinición en la teoría, será más sencillo generalizar este resultado y dar unas identidades diferenciales dobles.

4.2. Identidades de Bianchi generalizadas

El cálculo de las identidades de Noether de DFT y su consistencia se puede encontrar en [5] y [19]. En el contexto del formalismo de marcos, se puede definir la variación en el espacio plano,

$$\Delta_{AB} = e_B{}^M \delta e_{AM}. \tag{4-19}$$

Además la constricción que recupera los grados de libertad físicos, en los marcos es,

$$\mathcal{G}_{a\bar{b}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad e_a{}^i e_{\bar{b}}{}^i + e_{\bar{b}}{}^i e_a{}^i = 0, \tag{4-20}$$

entonces la variación de la acción es,

$$\delta S \;=\; \int dx d\tilde{x}\, e^{-2d} \left(-2\delta d\, \mathcal{R} + \Delta e_{a\bar{b}} \mathcal{R}^{a\bar{b}}\right) \tag{4-21}$$

con ecuaciones de movimiento,

$$\mathcal{R} \;=\; 0\,, \qquad \mathcal{R}_{a\bar{b}} \;=\; 0. \tag{4-22}$$

Las simetrías de la acción en términos de los marcos son,

$$\delta_\xi e_A{}^M \;=\; -e_B{}^M \left(\nabla_A \xi^B - \nabla^B \xi_A\right), \tag{4-23}$$

entonces, las simetrías de los marcos son,

$$\Delta_{AB} = \nabla_B \xi_A + \nabla_A \xi_B, \tag{4-24}$$

dónde las derivadas son la derivada covariante compatible con la métrica. Como hay que fijar la norma con la prescripción (3-37), las únicas componentes relevantes son,

$$\Delta_{a\bar{b}} = \nabla_{\bar{b}} \xi_a + \nabla_a \xi_{\bar{b}}. \tag{4-25}$$

Tomando la variación de la acción,

$$\begin{aligned} \delta_\xi S &= \int dx d\tilde{x}\, e^{-2d} \left(\left(\nabla_a \xi^a + \nabla_{\bar{a}} \xi^{\bar{a}} \right) \mathcal{R} + \left(\nabla_{\bar{b}} \xi_a - \nabla_a \xi_{\bar{b}} \right) \mathcal{R}^{a\bar{b}} \right) \\ &= -\int dx d\tilde{x}\, e^{-2d} \left(\xi^a \left(\nabla_a \mathcal{R} + \nabla^{\bar{b}} \mathcal{R}_{a\bar{b}} \right) + \xi^{\bar{a}} \left(\nabla_{\bar{a}} \mathcal{R} - \nabla^b \mathcal{R}_{b\bar{a}} \right) \right) \ , \end{aligned} \tag{4-26}$$

lo que implica que,

$$\nabla_a \mathcal{R} + \nabla^{\bar{b}} \mathcal{R}_{a\bar{b}} \ = 0, \qquad \nabla_{\bar{a}} \mathcal{R} - \nabla^b \mathcal{R}_{b\bar{a}} \ = 0. \tag{4-27}$$

Estas son las *identidades de Bianchi generalizadas* en DFT y también son las identidades de Noether asociadas a la acción. Notese que, si se considera sólo el gravitón en el modelo-σ no lineal, la identidad de Noether coincide con ser la de Bianchi para el tensor de curvatura. Por esta razón, (4-27) tienen esta forma familiar en el formalismo de marcos.

Después de fijar la norma, las identidades de Noether son,

$$\nabla^i \mathcal{R}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{R}(\mathcal{E}, d) \ = 0, \qquad \bar{\nabla}^j \mathcal{R}_{ij} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \mathcal{R}(\mathcal{E}, d) \ = 0 \tag{4-28}$$

que se pueden escribir como,

$$\left[\nabla^i (\Gamma) - \frac{1}{2} g^{ik} (\bar{\mathcal{D}}^l \mathcal{E}_{kl} + 4 \mathcal{D}_k d) \right] \mathcal{K}_{ij} + \frac{1}{2} \bar{\mathcal{D}}_j \mathcal{R} = 0, \tag{4-29}$$

$$\left[\bar{\nabla}^j (\Gamma) - \frac{1}{2} g^{jk} (\mathcal{D}^l \mathcal{E}_{lk} + 4 \bar{\mathcal{D}}_k d) \right] \mathcal{K}_{ij} + \frac{1}{2} \mathcal{D}_i \mathcal{R} = 0. \tag{4-30}$$

Siguiendo la contrucción dada previamente, se proponen como ansatz que las funciones β sean,

$$\mathcal{K}_{ij} = a \beta_{ij}, \qquad \mathcal{R} = b \beta^d, \tag{4-31}$$

dónde las constantes a y b se pueden fijar al imponer que, cuando $\tilde{\partial} = 0$ las identidades (4-29) y (4-30) coincidan con las identidades de Noether del formalismo estándar. De esto se obtiene $a = -1$ y $b = -4$, y entonces las *identidades diferenciales generalizadas* son,

$$\nabla^i \beta_{ij} + 2 \bar{\mathcal{D}}_j \beta^d = 0 \, , \quad \bar{\nabla}^j \beta_{ij} + 2 \mathcal{D}_i \beta^d = 0 \tag{4-32}$$

Estas ecuaciones una vez que se impone $\tilde{\partial} = 0$, coinciden con las identidades diferenciales estándar y las ecuaciones de movimiento $\mathcal{K}_{ij} = 0$ y $\mathcal{R} = 0$, también contienen a las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva del modelo-σ no lineal.

4.2.1. Apagando la dependencia en $\tilde{x}$

Finalmente, al apagar la dependencia en $\tilde{x}$ es posible probar que las ecuaciones de movimiento, las identidades diferenciales y las identidades de Noether coinciden consistentemente con los resultados para el modelo-σ y su acción efectiva. Esta también es la forma de fijar los coeficientes a y b que aparecen anteriormente en (4-31).

Notese primero que las derivadas (2-50), cuando se impone $\tilde{\partial} = 0$, se reducen a,

$$D_i = \bar{D}_i = \partial_i, \tag{4-33}$$

entonces, de (4-29),

$$\left[\nabla^i(\Gamma) - \frac{1}{2}g^{il}(\bar{\mathcal{D}}^k\mathcal{E}_{lk} + 4\mathcal{D}_l d)\right]\mathcal{K}_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{D}_j\mathcal{R} = 0, \tag{4-34}$$

el mismo tratamiento puede ser aplicado a (4-30) para obtener los mismos resultados.

Usando las definiciones de los símbolos de Christoffel generalizados, se obtiene,

$$g^{in}\left[\mathcal{D}_n\mathcal{K}_{ij} - \frac{1}{2}g^{lk}\mathcal{D}_n\mathcal{E}_{ik}\mathcal{K}_{lj} - \frac{1}{2}(\mathcal{D}_n\mathcal{E}_{kj} + \bar{\mathcal{D}}_j\mathcal{E}_{nk} - \bar{\mathcal{D}}_k\mathcal{E}_{nj})\mathcal{K}_{il} - \frac{1}{2}(\bar{\mathcal{D}}^r\mathcal{E}_{nr} + 4\mathcal{D}_n d)\mathcal{K}_{ij}\right] + \frac{1}{2}\bar{\mathcal{D}}_j\mathcal{R} = 0. \tag{4-35}$$

y finalmente apagando la dependencia den $\tilde{x}$ y usando que, $\mathcal{E}_{ij} = g_{ij} + b_{ij}$ y el ansatz (4-31), resulta,

$$a\nabla^i\beta^g_{ij} - a2\nabla^i d\beta^g_{ij} - \frac{a}{2}H_{jli}\beta^{b\ li} + \frac{b}{2}\partial_j\beta^d + a\nabla^i\beta^b_{ij} - a2\nabla^i d\beta^b_{ij} = 0, \tag{4-36}$$

dónde β^g y β^b son las partes simétricas y antisimétricas de β_{ij} respectivamente y para recuperar los identidades diferenciales del modelo-σ es necesario fijar $a = -1$ y $b = -4$.

Con esta solución para los coeficientes de (4-31), los resultados coinciden con [15],

$$\mathcal{R}\Big|_{\tilde{\partial}=0} = R + 4(\nabla^i \nabla_i d - (\nabla d)^2) - \frac{1}{12}H^2, \tag{4-37}$$

entonces la ecuación de movimiento para el dilatón d se reduce a,

$$\beta^d = -4(R + 4(\nabla^i \nabla_i d - (\nabla d)^2) - \frac{1}{12}H^2), \tag{4-38}$$

que es consistente con los resultados obtenidos en las secciones anteriores.

Por otro lado, la ecuación de movimiento $\mathcal{K}_{ij}$ coinciden con los resultados de [19],

$$\mathcal{K}_{ij}\Big|_{\tilde{\partial}=0} = -\Bigg[R_{ij} - \frac{1}{4}H_i{}^{kl}H_{jkl} + 2\nabla_i\nabla_j d\Bigg] - \Bigg[-\frac{1}{2}\nabla^k H_{kij} + H_{kij}\nabla^k d\Bigg], \tag{4-39}$$

de donde se pueden identificar,

$$\mathcal{K}_{ij}\Big|_{\tilde{\partial}=0} = -\beta^G_{ij} - \beta^B_{ij}. \tag{4-40}$$

Por último, las identidades de Bianchi generalizadas también se reducen a,

$$\frac{1}{2}\Bigg[\nabla^i\nabla^n H_{nij} + \Big(\frac{1}{2}H_i{}^{ln}\nabla^i H_{jln} - \frac{1}{12}\nabla_j H^2\Big)\Bigg] + \Bigg(-\nabla^i R_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_j R\Bigg) = 0, \tag{4-41}$$

$$\frac{1}{2}\Bigg[\nabla^j\nabla^n H_{nij} + \Big(\frac{1}{2}H_j{}^{ln}\nabla^j H_{iln} - \frac{1}{12}\nabla_i H^2\Big)\Bigg] + \Bigg(-\nabla^j R_{ij} + \frac{1}{2}\nabla_i R\Bigg) = 0, \tag{4-42}$$

de dónde es posible reconocer las identidades del tensor de curvatura y del tensor antisimétrico, respectivamente (2-88), (2-89).

Conclusiones

Esta tesis se enfrentó al problema de la generalización de un resultado de la teoría de cuerdas cerradas, en el contexto de DFT, [12]. La acción de la teoría de cuerdas es una generalización de la acción de una partícula relativista. Sin embargo, la teoría de cuerdas cuenta un una simetría bajo rescalamientos locales, una simetría de norma que se rompe a nivel cuántico y es necesario curar la anomalía. Para esta tarea hay que pasar por un proceso de renormalización y calcular perturbativamente objetos llamados funciones β del grupo de renormalización. Las funciones β del grupo de renormalización asociadas al fondo en el que se sumerge la cuerda satisfacen ciertas identidades diferenciales,(4-9), (4-10) y definen las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva. Al destacar la relación que tienen las funciones β del modelo-σ no lineal con las ecuaciones de movimiento de la acción efectiva, (2-74), (2-75), (2-76); se muestra que las identidades diferenciales coinciden ser las identidades de Noether de las ecuaciones de movimiento asociadas a las simetrías de norma que tiene la acción efectiva del modelo-σ no lineal, (4-14), (4-15). Este resultado expone la relación intrínseca y de consistencia que tiene la gravedad con la teoría de cuerdas.

Es posible generalizar este resultado a DFT, que es una extensión teórica consistente a la acción efectiva del modelo-σ que hace manifiesta la dualidad-T. Esta generalización no es nada trivial debido al carácter no geométrico de DFT, ya que no es obvio que las técnicas de teorías de norma y constricciones sean aplicables en este caso, sin embargo, debido a que la estructura algebraica de las simetrías de la teoría es tal que las derivadas de Lie generalizadas cierran en parentesis-C y D respectivamente sobre la constricción fuerte, es posible aplicar técnicas de [13] en DFT. Además, se muestra que cuando se restringe DFT a $\tilde{\partial} = 0$ se recuperan consistentemente los resultados de una teoría de cuerdas cerradas así como aspectos cinemáticos como las identidades de Bianchi, [5], [19].

Finalmente se dan expresiones explicitas de las identidades diferenciales generalizadas que deberían satisfacer las funciones β de un posible modelo-σ no lineal doble, (4-32). Estas identidades diferenciales tienen una forma que se ve familiar y puede relacionarse con ciertas condiciones de integrabilidad para las funciones β, que podrían ser comparadas con las condiciones de integrabilidad dadas en [3], [10]. Expresiones nuevas y completamente determinadas que este trabajo considera como una aportación al desarrollo de DFT.

Como a trabajo futuro, es interesante pensar en como la forma de fijar la norma en DFT que se da en el texto es consistente con el método de constricciones de Dirac. Existen trabajos en esta dirección estudiando la formulación ADM de DFT, [21]. Por otro lado, también se puede pensar en la cosmología que surge a partir de la dualidad-T y como esto afecta a la formulación de una particula puntual en fondos T-duales, [6]. También el estudio de la construcción no geométrica de DFT para generalizar la geometría de distintas teorías como Exceptional Field Theory y el formalismo de Double Space es un camino muy interesante que estudiar, [2], [17].

Bibliografía

[1] Alvarez-Gaume, L., Freedman, D. Z., and Mukhi, S. The background field method and the ultraviolet structure of the supersymmetric nonlinear σ-model. *Annals of Physics 134*, 1 (1981), 85–109.

[2] Berman, D. S. A kaluza-klein approach to double and exceptional field theory. *arXiv preprint arXiv:1903.02860* (2019).

[3] Berman, D. S., Copland, N. B., and Thompson, D. C. Background field equations for the duality symmetric string. *Nuclear physics B 791*, 1-2 (2008), 175–191.

[4] Berman, D. S., and Thompson, D. C. Duality symmetric strings, dilatons and o (d, d) effective actions. *Physics Letters B 662*, 3 (2008), 279–284.

[5] Blair, C. D. Conserved currents of double field theory. *Journal of High Energy Physics 2016*, 4 (2016), 180.

[6] Brandenberger, R., Costa, R., Franzmann, G., and Weltman, A. Point particle motion in double field theory and a singularity-free cosmological solution. *Physical Review D 97*, 6 (2018), 063530.

[7] Buscher, T. H. A symmetry of the string background field equations. *Physics Letters B 194*, 1 (1987), 59–62.

[8] Callan, C., and Thorlacius, L. Sigma models and string theory. In *Particles, strings and supernovae*. 1988.

[9] Callan, C. G., Klebanov, I. R., and Perry, M. String theory effective actions. *Nuclear Physics B 278*, 1 (1986), 78–90.

[10] Copland, N. B. A double sigma model for double field theory. *Journal of High Energy Physics 2012*, 4 (2012), 44.

[11] Duff, M. J. Duality rotations in string theory. *Nuclear Physics B 335*, 3 (1990), 610–620.

[12] García, J. A., and Sánchez-Isidro, R. A. Noether identities, β-functions and symmetries in dft. *arXiv preprint arXiv:1905.09313* (2019).

[13] Henneaux, M., and Teitelboim, C. *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1994.

[14] Hohm, O., Hull, C., and Zwiebach, B. Background independent action for double field theory. *Journal of High Energy Physics 2010*, 7 (2010), 16.

[15] Hohm, O., Hull, C., and Zwiebach, B. Generalized metric formulation of double field theory. *Journal of High Energy Physics 2010*, 8 (2010), 8.

[16] Hohm, O., and Kwak, S. K. Double field theory formulation of heterotic strings. *Journal of High Energy Physics 2011*, 6 (2011), 96.

[17] Hohm, O., and Samtleben, H. Higher gauge structures in double and exceptional field theory. *arXiv preprint arXiv:1903.02821* (2019).

[18] Kiritsis, E. *String theory in a nutshell*, vol. 21. Princeton University Press, 2019.

[19] Kwak, S. K. Invariances and equations of motion in double field theory. *Journal of High Energy Physics 2010*, 10 (2010), 47.

[20] Mukhi, S. The geometric background-field method, renormalization and the wess-zumino term in non-linear σ-models. *Nuclear Physics B 264* (1986), 640–652.

[21] Naseer, U. Canonical formulation and conserved charges of double field theory. *Journal of High Energy Physics 2015*, 10 (2015), 158.

[22] Polchinski, J. *String theory: Volume 1, an introduction to the bosonic string.* Cambridge university press, 1998.

[23] Siegel, W. Superspace duality in low-energy superstrings. *Physical Review D 48*, 6 (1993), 2826.

[24] Sánchez-Isidro, R. A. Introducción a la acción efectiva del modelo sigma asociado a la cuerda bosónica a un lazo. http://132.248.9.195/ptd2017/junio/0760950/Index.html, 2017.

[25] Zwiebach, B. *A first course in string theory.* Cambridge university press, 2004.