



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERÍA CIVIL – HIDRÁULICA**

**HIDROGRAMA DE DESCARGA DE UNA PRESA CALCULADO CON UNA**  
**DISTRIBUCIÓN DE**  
**PROBABILIDAD CONJUNTA DE GASTO MÁXIMO Y VOLUMEN**

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
**Eduardo Omar Copca Maya**

TUTOR  
DR. ÓSCAR ARTURO FUENTES MARILES, INSTITUTO DE INGENIERÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, NOVIEMBRE 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: Dr. Gracia Sánchez Jesús  
Secretario: Dr. Domínguez Mora Ramón  
1 er. Vocal: Dr. Fuentes Mariles Óscar Arturo  
2 do. Vocal: M.I. Franco Víctor  
3 er. Vocal: Dra. Arganis Juárez Maritza Liliana

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería UNAM, Ciudad de México

**TUTOR DE TESIS:**

Dr. Óscar Arturo Fuentes Mariles



---

**FIRMA**

# Contenido

## Capítulo 1

<b>Introducción</b> .....	14
1.1 Objetivo .....	15
1.2 Descripción de la metodología .....	15
1.3 Caso de estudio .....	16

## Capítulo 2

<b>Selección de Hidrogramas Registrados</b> .....	20
2.1 Gasto Prioridad.....	21
2.2 Volumen prioridad .....	23
2.3 Hidrogramas registrados caso de estudio Angostura .....	25
2.3.1 Selección de la Duración o Tiempo de Base del Hidrograma .....	25
2.3.2 Selección de datos por el criterio de Gasto Prioridad .....	27
2.3.3 Selección de datos por el criterio de Volumen Prioridad.....	30
2.3.4 Hidrogramas registrado para 10 días de duración .....	35

## Capítulo 3

<b>Funciones de distribución de probabilidad univariadas</b> .....	38
3.1 Estimación de Parámetros.....	39
3.1.1 Método de los momentos .....	39
3.1.2 Método de la máxima verosimilitud .....	40
3.2 Funciones de Probabilidad de una Población .....	42
3.2.1 Función de distribución Normal .....	42
3.2.2 Función de distribución LogNormal de dos parámetros .....	43
3.2.3 Función de distribución LogNormal de tres parámetros.....	44
3.2.4 Función de distribución Exponencial.....	44
3.2.5 Función de distribución Gamma .....	45
3.2.6 Función de distribución Weibull.....	46
3.2.7 Función de distribución Gumbel .....	47
3.3 Funciones de Distribución de Probabilidad Mixtas .....	48
3.3.1 Función de distribución Gumbel Mixta .....	48
3.3.2 Función de Distribución Weibull Mixta .....	50

3.3.3	Función de Distribución Gamma Mixta .....	51
3.4	Pruebas de bondad de ajuste .....	54
3.4.1	Error estándar de ajuste .....	54
3.4.2	Error Estándar de Ajuste Adimensional .....	56
3.4.3	Prueba de Kolmogórov-Smirnov .....	56
3.4.4	Prueba de Anderson-Darling .....	58
3.4.5	Criterio de la información de Akaike (CIA) .....	60
3.5	Ajustes a funciones de distribución caso La Angostura. ....	60
3.5.1	Ajustes a funciones de distribución de 1 población .....	62
3.5.2	Ajustes a funciones de distribución mixtas .....	80
<b>Capítulo 4</b>		
<b>Funciones de distribución de probabilidad Bivariadas.</b> .....		97
4.1	Funciones de probabilidad multivariadas “Cópulas” .....	98
4.1.1	Cópula Gumbel-Hougaard .....	99
4.1.2	Método semiparamétrico de cálculo del parámetro bivariado $\theta$ .....	100
4.2	Extrapolación a periodos de retorno bivariados .....	101
4.3	Pruebas de bondad de estimación bivariada .....	104
4.4	Ejemplo de aplicación caso presa La Angostura.....	105
4.4.2	Extrapolación bivariada a diferentes periodos de retorno .....	118
4.4.3	Pruebas de bondad de estimación bivariada .....	142
<b>Capítulo 5</b>		
<b>Forma del hidrograma</b> .....		154
5.1	Aplicación de forma al caso de la presa La Angostura .....	159
5.1.1	Duración de 35 días .....	159
5.1.2	Duración de 10 días .....	174
<b>Capítulo 6</b>		
<b>Tránsitos de avenidas en vasos de almacenamiento</b> .....		182
6.1	Aplicación al caso de estudio Presa Gral. Lázaro Cárdenas.....	184
6.1.1	Duración 35 días .....	185
6.1.2	Duración 10 días .....	193
<b>Capítulo 7</b>		
<b>Análisis de Resultados</b> .....		198
<b>Capítulo 8</b>		
<b>Conclusiones</b> .....		208

## Índice de Tablas

Tabla 1.1 Características principales presa La Angostura, (Conagua, 2019).....	18
Tabla 2.1 Gastos medios diarios y volúmenes para una estación aleatoria para el año de 1959 .....	22
Tabla 2.2 Gastos medios diarios y acumulados en 35 días para fechas de 1972.....	29
Tabla 2.3 Parejas de Gasto y Volumen obtenidas mediante el criterio de Gasto Prioridad .....	30
Tabla 2.4 Gastos medios diarios y acumulados de 35 días para fechas de 1972.....	32
Tabla 2.5 Parejas de Gasto y Volumen obtenidos mediante el criterio de Volumen Prioridad.....	33
Tabla 2.6 Estadísticos de la serie de datos obtenidos para los criterios de gasto y volumen prioridad.....	35
Tabla 2.7 Parejas de Gasto y Volumen para 10 días de duración obtenidos por el criterio de Gasto Prioridad .....	36
Tabla 2.8 Parejas de Gasto y Volumen para 10 días de duración obtenidos por el criterio de Volumen Prioridad .....	37
Tabla 3.1 Funciones de Probabilidad .....	53
Tabla 3.2 Ejemplo de gastos observados contra estimados .....	55
Tabla 3.3 Ejemplo de probabilidad observada $P(x)$ contra estimada $F(x)$ .....	57
Tabla 3.4 Ejemplo de valores para aplicar la prueba Anderson-Darling .....	59
Tabla 3.5 Cálculo del valor $k$ para la prueba Anderson-Darling .....	59
Tabla 3.6 Valores de Gasto-QP calculados mediante diferentes funciones de probabilidad .....	62
Tabla 3.7 Parámetros de ajuste obtenidos para la variable Gasto-GP para las funciones seleccionadas ..	64
Tabla 3.8 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas variable, Gasto-GP .....	64
Tabla 3.9 Extrapolaciones marginales de Gasto-GP a diferentes $T_r$ para las funciones utilizadas, $[m^3/s]$ .	64
Tabla 3.10 Valores de Volumen-GP calculados para las funciones seleccionadas.....	65
Tabla 3.11 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP ....	66
Tabla 3.12 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP .....	67
Tabla 3.13 Extrapolación a diferentes $T_r$ , variable Volumen-GP $[m^3/s \text{ día}]$ .....	67
Tabla 3.14 Valores de Gasto-VP calculados para las funciones seleccionadas .....	68
Tabla 3.15 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP .....	70
Tabla 3.16 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP.....	70
Tabla 3.17 Extrapolaciones a diferentes $T_r$ para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP $[m^3/s]$ ..	70
Tabla 3.18 Valores de Volumen-VP calculados para las funciones seleccionadas.....	71
Tabla 3.19 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP.....	72
Tabla 3.20 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP.....	73
Tabla 3.21 Extrapolaciones a diferentes $T_r$ para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP $[m^3/s \text{ día}]$ .....	73
Tabla 3.22 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, duración 10 días. ....	75
Tabla 3.23 Resultados de pruebas de bondad de ajuste Q-QP, duración 10 días .....	75
Tabla 3.24 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, Q-QP 10 días.....	76

Tabla 3.25 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, V-QP duración 10 días. ....	76
Tabla 3.26 Resultados de pruebas de bondad de ajuste V-QP, duración 10 días.....	77
Tabla 3.27 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, V-QP 10 días. ....	77
Tabla 3.28 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, Q-VP duración 10 días .....	78
Tabla 3.29 Resultados de pruebas de bondad de ajuste Q-VP, duración 10 días.....	78
Tabla 3.30 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, Q-VP 10 días. ....	78
Tabla 3.31 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, V-VP duración 10 días .....	79
Tabla 3.32 Resultados de pruebas de bondad de ajuste V-VP, duración 10 días .....	79
Tabla 3.33 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, V-VP 10 días.....	80
Tabla 3.34 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Gasto-GP .....	81
Tabla 3.35 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-GP .....	82
Tabla 3.36 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Gasto-GP .....	82
Tabla 3.37 Extrapolaciones a diferentes Tr para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-GP [m <sup>3</sup> /s].....	83
Tabla 3.38 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP.....	84
Tabla 3.39 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Volumen-GP .....	85
Tabla 3.40 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Volumen-GP .....	85
Tabla 3.41 Extrapolaciones a diferentes Tr para las 3 funciones mixtas, variable Volumen-GP [m <sup>3</sup> /s día] 85	85
Tabla 3.42 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP .....	86
Tabla 3.43 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Gasto-VP .....	87
Tabla 3.44 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Gasto-VP.....	87
Tabla 3.45 Extrapolaciones a diferentes Tr para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-VP [m <sup>3</sup> /s].....	88
Tabla 3.46 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP .....	89
Tabla 3.47 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Volumen-VP.....	90
Tabla 3.48 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Volumen-VP.....	90
Tabla 3.49 Extrapolaciones a diferentes Tr para las 3 funciones mixtas, variable Volumen-VP [m <sup>3</sup> /s día] 90	90
Tabla 3.50 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, Q-QP 10 días. ....	92
Tabla 3.51 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, Q-QP 10 días.....	93
Tabla 3.52 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas Q-QP 10 días.....	93
Tabla 3.53 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, V-QP 10 días. ....	93
Tabla 3.54 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, V-QP 10 días. ....	94
Tabla 3.55 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas V-QP 10 días. ....	94
Tabla 3.56 c.....	94
Tabla 3.57 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, Q-VP 10 días. ....	95
Tabla 3.58 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas Q-VP 10 días. ....	95
Tabla 3.59 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, V-VP 10 días .....	95

Tabla 3.60 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, V-VP 10 días.....	96
Tabla 3.61 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas V-VP 10 días. ....	96
Tabla 4.1 Expresiones Matemáticas de Cópulas Arquimedianas y ecuaciones de dependencia para su parámetro.....	99
Tabla 4.2 Parámetros de ajuste obtenidos para cada criterio para las funciones Gumbel, Gamma y Weibull Mixtas.....	106
Tabla 4.3 Cálculo de la probabilidad F (Q) y F (V) con la función Gumbel Mixta para las parejas de Gasto prioridad, 35 días de duración .....	107
Tabla 4.4 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ GP-GM mediante el método de máxima verosimilitud .....	109
Tabla 4.5 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ VP-GM mediante el método de máxima verosimilitud .....	111
Tabla 4.6 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ GP-WM mediante el método de máxima verosimilitud .....	112
Tabla 4.7 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ VP-WM mediante el método de máxima verosimilitud .....	113
Tabla 4.8 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ GP-GamM mediante el método de máxima verosimilitud .....	115
Tabla 4.9 Cálculo del parámetro bivariado $\theta$ VP-GamM mediante el método de máxima verosimilitud .....	116
Tabla 4.10 Valores de $\theta$ encontrados y sus correspondientes valores de la función de verosimilitud. ...	117
Tabla 4.11 Resultados del cálculo de $\theta$ y la verosimilitud alcanzada asociada a este. Duración 10 días..	118
Tabla 4.12 Valores extrapolados a diferentes Tr para ajustes marginales de Q y V con la función Gumbel Mixta.....	121
Tabla 4.13 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso GP-GM.....	121
Tabla 4.14 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso GP-GM.....	123
Tabla 4.15 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso GP-GM.....	124
Tabla 4.16 Valores extrapolados a Tr marginalmente mediante la función Gumbel Mixta para las series de datos Volumen Prioridad.....	125
Tabla 4.17 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso VP-GM .....	125
Tabla 4.18 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso VP-GM .....	126
Tabla 4.19 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso VP-GM .....	127
Tabla 4.20 Valores extrapolados a Tr marginalmente mediante la función Weibull Mixta para las series de datos Gasto Prioridad.....	128
Tabla 4.21 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso GP-WM.....	129
Tabla 4.22 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso GP-WM.....	129
Tabla 4.23 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso GP-WM.....	131
Tabla 4.24 Valores extrapolados a Tr marginalmente mediante la función Weibull Mixta para las series de datos Volumen Prioridad.....	132
Tabla 4.25 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso VP-WM .....	132
Tabla 4.26 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso VP-WM .....	133
Tabla 4.27 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso VP-WM .....	134
Tabla 4.28 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso GP-GamM.....	135
Tabla 4.29 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso GP-GamM.....	136
Tabla 4.30 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso GP-GamM.....	136
Tabla 4.31 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso VP-GamM .....	137
Tabla 4.32 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso VP-GamM .....	138
Tabla 4.33 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso VP-GamM.....	138
Tabla 4.34 Parejas Q-V extrapoladas al periodo de retorno de 10,000 años de manera bivariada para los casos GM y WM ambas de Gasto Prioridad .....	140
Tabla 4.35 Parejas Q-V extrapoladas al periodo de retorno de 10,000 años de manera bivariada para los casos GM y WM ambas de Volumen Prioridad.....	141
Tabla 4.36 Frecuencia acumulada observada calculada para los criterios de GP y VP para 35 días de duración.....	143

Tabla 4.37 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Gasto Prioridad, para los 3 ajustes bivariados elegidos .....	144
Tabla 4.38 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Volumen Prioridad, para los 3 ajustes bivariados elegidos .....	145
Tabla 4.39 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas .....	146
Tabla 4.40 Frecuencia acumulada observada calculada para los criterios de GP y VP para 10 días de duración.....	149
Tabla 4.41 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Gasto Prioridad, para los 2 ajustes bivariados elegidos .....	150
Tabla 4.42 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Volumen Prioridad, para los 2 ajustes bivariados elegidos .....	151
Tabla 4.43 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas, duración 10 días .....	152
Tabla 5.1 máximas 5 avenidas registradas para el criterio de Gasto Prioridad, duración 35 días.....	160
Tabla 5.2 máximas 5 avenidas registradas para el criterio de Volumen Prioridad, duración 35 días.....	160
Tabla 5.3 Gastos medios diarios que forman el hidrograma registrado para el año de 1949 por ambos criterios.....	163
Tabla 5.4 Pareja Gasto y Volumen GM QP extrapolados a un periodo de retorno conjunto de 10,000 años .....	164
Tabla 5.5 Cálculo del factor $f_i$ para el hidrograma registrado seleccionado .....	164
Tabla 5.6 Cálculo de $f_i \cdot Q_i$ para el hidrograma registrado seleccionado.....	165
Tabla 5.7 Cálculo del hidrograma de diseño final .....	167
Tabla 5.8 Parejas de Q-V extrapoladas a un $T_r=10000$ años elegidas para crear hidrogramas para cada caso .....	169
Tabla 5.9 Cinco más grandes avenidas según Gasto Prioridad y Volumen Prioridad para 10 días de duración .....	175
Tabla 5.10 Hidrograma registrado de 1949.....	175
Tabla 5.11 Cálculo del factor $f_i$ y $f_i Q_i$ forma 1949 10 días.....	176
Tabla 5.12 Valores extrapolados elegidos para crear el hidrograma de diseño final Weibull Mixta.....	177
Tabla 5.13 Hidrograma medido y calculado para $Q=2380 \text{ m}^3/\text{s}$ y $V= 7245.2 \text{ m}^3/\text{s día}$ .....	178
Tabla 6.1 Parejas de Q-V elegidas para transitar por el vaso de la presa La Angostura para los dos criterios de selección de datos. ....	188
Tabla 6.2 Elevación máxima alcanzada en el vaso de la presa La Angostura para cada hidrograma de diseño creado para cada pareja Q-V.....	189
Tabla 6.3 Hidrogramas bivariados elegidos a transitar por el vaso de la presa La Angostura para el criterio de Gasto Prioridad y Volumen Prioridad, duración 10 días. ....	194
Tabla 6.4 Elevación máxima alcanzada en el vaso de la presa La Angostura para cada hidrograma de diseño creado para cada pareja Q-V, duración 10 días. ....	194
Tabla 7.1 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas .....	203
Tabla 7.2 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas, duración 10 días .....	203

## Índice de Figuras

Figura 1.1 Ubicación de la presa Gral. Lázaro Cárdenas .....	17
--	----

Figura 1.2 Cortina de la presa La Angostura .....	19
Figura 2.1 Espectro de densidad de potencia para 8,1925 días.....	26
Figura 2.2 Espectro de densidad de potencia para 13,149 días.....	26
Figura 2.3 Espectro de densidad de potencia para 21,915 .....	27
Figura 2.4 Hidrograma registrado de 1972 por el criterio de Gasto Prioridad .....	34
Figura 2.5 Hidrograma registrado de 1972 por el criterio de Volumen Prioridad .....	35
Figura 3.1 Función de distribución Normal .....	43
Figura 3.2 Función de distribución Lognormal.....	44
Figura 3.3 Función de distribución Gamma .....	45
Figura 3.4 Función de distribución Weibull.....	46
Figura 3.5 Función de distribución Gumbel .....	47
Figura 3.6 Función de distribución Gumbel Mixta .....	49
Figura 3.7 Función de densidad de probabilidad Gumbel Mixta .....	50
Figura 3.8 Función de distribución Weibull Mixta.....	51
Figura 3.9 Función de densidad Weibull Mixta .....	51
Figura 3.10 Función de distribución Gamma Mixta .....	52
Figura 4.1 Isolínea de periodo de retorno a 100 años .....	104
Figura 4.2 Curva de periodo de retorno 100 años bivariada, caso GP-GM duración 35 días .....	122
Figura 4.3 Curva de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso GP-GM, duración 35 días .....	123
Figura 4.4 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso GP-GM.....	124
Figura 4.5 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso VP-GM.....	126
Figura 4.6 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso VP-GM.....	127
Figura 4.7 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso VP-GM.....	128
Figura 4.8 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso GP-WM.....	129
Figura 4.9 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso GP-WM.....	130
Figura 4.10 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso GP-WM.....	131
Figura 4.11 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso VP-WM.....	133
Figura 4.12 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso VP-WM.....	134
Figura 4.13 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso VP-WM.....	135
Figura 4.14 Curvas Q-V de periodo de retorno 100, 1000 y 10,000 años, caso GP-GamM .....	137
Figura 4.15 Curvas Q-V de periodo de retorno 100, 1000 y 10,000 años, caso VP-GamM .....	139
Figura 4.16 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso GP-GM para la duración de 10 días ...	140
Figura 4.17 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso GP-WM para la duración de 10 días ..	140
Figura 4.18 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso VP-GM para la duración de 10 días ...	141
Figura 4.19 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso VP-WM para la duración de 10 días ..	141
Figura 4.20 Frecuencia Observada contra probabilidad bivariada estimada por los 3 casos, Gasto Prioridad .....	147
Figura 4.21 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 3 casos, Volumen Prioridad.....	148
Figura 4.22 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 2 casos, Gasto Prioridad.....	152
Figura 4.23 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 2 casos, Volumen Prioridad.....	153
Figura 5.1 Hidrograma supuesto expresado en barras .....	155
Figura 5.2 Expresión gráfica de la ecuación ## .....	156
Figura 5.3 Formación del hidrograma siendo afectado por los factores a y b.....	157
Figura 5.4 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1995 .....	161
Figura 5.5 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1949 .....	161

Figura 5.6 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1967 .....	161
Figura 5.7 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1960 .....	161
Figura 5.8 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 2005 .....	161
Figura 5.9 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1967.....	162
Figura 5.10 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1949.....	162
Figura 5.11 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1984.....	162
Figura 5.12 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1979.....	162
Figura 5.13 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1968.....	162
Figura 5.14 Hidrograma registrado año 1949 .....	167
Figura 5.15 Hidrograma calculado para la pareja Q-V obtenidos con el método bivariado para el caso GM-QP con la forma del año 1949 .....	168
Figura 5.16 Parejas Q-V seleccionadas de la isólinea $T_r=10000$ para GM-QP .....	169
Figura 5.17 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2900 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,374 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 1949	170
Figura 5.18 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,146 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 1949 .....	170
Figura 5.19 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,100 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 1949 .....	170
Figura 5.20 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2300 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9941 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 1949	170
Figura 5.21 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2360 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9913 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 1949	170
Figura 5.22 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9903 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 1949	170
Figura 5.23 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,195 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1949	171
Figura 5.24 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,826 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1949	171
Figura 5.25 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,004 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1949	171
Figura 5.26 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10,004 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1949	171
Figura 5.27 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2500 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11,866 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1949 .....	171
Figura 5.28 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2560 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11,712 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1949 .....	171
Figura 5.29 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11,617 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1949 .....	172
Figura 5.30 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3300 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11,596 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1949 .....	172
Figura 5.31 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3300 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11595.60 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1995 .....	172
Figura 5.32 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10100.32 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 1995 .....	172
Figura 5.33 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9903.38 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 1995 .....	172
Figura 5.34 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3600 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9988.02 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1995	172
Figura 5.35 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10145.93 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 2005 .....	173
Figura 5.36 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2360 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9912.94 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 2005 .....	173
Figura 5.37 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10004.3 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 2005 .....	173
Figura 5.38 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11617.4 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 2005 .....	173

Figura 5.39 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10004.3 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP forma 1967	173
Figura 5.40 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2300 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9941.18 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP forma 1967	173
Figura 5.41 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10195.87 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP forma 1967	174
Figura 5.42 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2560 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=11711.92 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP forma 1967	174
Figura 5.43 Hidrograma registrado de 1949, duración 10 días	176
Figura 5.44 Hidrograma calculado para la primera pareja de Gasto Prioridad con la forma de 1949	178
Figura 5.45 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2450 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7124.4 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP, duración 10 días forma 1949	179
Figura 5.46 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7104.5 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP, duración 10 días forma 1949	179
Figura 5.47 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2600 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=8132.5 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1949	179
Figura 5.48 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2650 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7795 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1949	179
Figura 5.49 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3000 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7698.4 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1949	179
Figura 5.50 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7104.45 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP, duración 10 días forma 1995	179
Figura 5.51 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3000 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7698 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1995	180
Figura 5.52 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9870.08 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1995	180
Figura 5.53 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2400 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=10289.54 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1995	180
Figura 5.54 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2450 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7124.42 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP, duración 10 días forma 2005	180
Figura 5.55 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2650 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7794.98 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 2005	180
Figura 5.56 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3600 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9834.69 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-QP, duración 10 días forma 2005	180
Figura 5.57 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9949.95 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP, duración 10 días forma 2005	181
Figura 5.58 Hidrograma calculado para la pareja $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=9949.95 \text{ m}^3/\text{s día}$ GM-VP, duración 10 días forma 1967	181
Figura 5.59 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2380 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=7245.22 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-QP, duración 10 días forma 1967	181
Figura 5.60 Hidrograma calculado para la pareja $Q=2600 \text{ m}^3/\text{s}$ $V=8132.73 \text{ m}^3/\text{s día}$ WM-VP, duración 10 días forma 1967	181
Figura 6.1 Hidrograma de entrada y de salida en un tránsito de avenidas	184
Figura 6.2 Curva Elevaciones capacidades del vaso de la presa La Angostura	186
Figura 6.3 Curva elevaciones-descargas por la obra de excedencias de la presa La Angostura	187
Figura 6.4 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #1 forma 1995	190

Figura 6.5 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #2 forma 1995 .....	190
Figura 6.6 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #3 forma 1949 .....	190
Figura 6.7 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #4 forma 1995 .....	190
Figura 6.8 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #1 forma 1995 .....	190
Figura 6.9 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #2 forma 1995 .....	190
Figura 6.10 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #3 forma 1995 .....	191
Figura 6.11 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #4 forma 1995 .....	191
Figura 6.12 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #1 forma 1995 .....	191
Figura 6.13 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #2 forma 1995 .....	191
Figura 6.14 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #3 forma 1995 .....	191
Figura 6.15 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #1 forma 1995 .....	191
Figura 6.16 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #2 forma 1995 .....	192
Figura 6.17 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #4 forma 1995 .....	192
Figura 6.18 Elevaciones máximas alcanzadas para cada caso de cálculo .....	192
Figura 6.19 Volumen máximo almacenado durante el tránsito de avenida para cada caso, 35 días de duración.....	193
Figura 6.20 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #1 forma 1995, 10 días. ....	195
Figura 6.21 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #2 forma 1995, 10 días. ....	195
Figura 6.22 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #3 forma 1995, 10 días. ....	195
Figura 6.23 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #1 forma 1995, 10 días.....	195
Figura 6.24 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #2 forma 1995, 10 días.....	195
Figura 6.25 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #3 forma 1995, 10 días.....	195
Figura 6.26 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #1 forma 1995, 10 días. ....	196
Figura 6.27 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #2 forma 2005, 10 días. ....	196
Figura 6.28 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #3 forma 1995, 10 días. ....	196

Figura 6.29 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #1 forma 1995, 10 días.....	196
Figura 6.30 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #2 forma 1995, 10 días.....	196
Figura 6.31 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #3 forma 1995, 10 días.....	196
Figura 6.32 Elevaciones máximas alcanzadas en el vaso de la presa La Angostura, 10 días .....	197
Figura 7.1 Isolíneas Q-V Tr=100 años calculadas para la duración de 35 días .....	199
Figura 7.2 Isolíneas Q-V Tr=1000 años calculadas para la duración de 35 días .....	200
Figura 7.3 3 Isolíneas Q-V Tr=10,000 años calculadas para la duración de 10 y 35 días. ....	201
Figura 7.4 Elevaciones máximas alcanzadas para todos los tránsitos de avenida .....	205

# Capítulo 1

## Introducción

El análisis de frecuencia de las avenidas es necesario para el diseño de puentes, alcantarillas, canales; diques, vertedores y otras estructuras de control, así como para la planificación, operación o gestión de los recursos (ASCE 1996). Las avenidas se caracterizan principalmente por el gasto máximo (gasto de pico), volumen y duración (tiempo base).

En los estudios de gestión de riesgo por inundaciones pluviales, es fundamental contar con hidrogramas asociados a diferentes periodos de retorno para revisar la capacidad de conducción de los ríos y obtener los posibles gastos de desbordamiento que provoquen el anegamiento de zonas con viviendas, campos agrícolas, interrupción del paso por carreteras, entre otros.

Para revisar o determinar la capacidad del vertedor de excedencias de una presa grande, es fundamental contar con las avenidas de ingreso a su embalse para un periodo de retorno del orden de 10,000 años. Por esta razón para revisar la capacidad de descarga del vertedor de excedencias o para obtener la elevación más alta posible que se presente en el vaso de una presa grande, se requiere llevar a cabo varios cálculos de tránsito de avenidas por el vaso para cada uno de los hidrogramas del periodo de retorno requerido. Por lo que, para cada pareja gasto pico y volumen, habrá un gasto máximo en el hidrograma de descarga.

Se propone un método de obtención de hidrogramas de diseño útiles en el análisis de estos casos (tanto de diseño o revisión) cuyo objetivo principal es estimar con la mayor semejanza a lo que sucede en la naturaleza posible. El método parte de información de hidrogramas registrados formados por un gasto de pico y un volumen asociado a cierta duración (tiempo de base) para realizar el análisis de frecuencias con dos variables. Estos hidrogramas se denominan bivariados y se encuentran asociados a determinados periodos de retorno.

Para ejemplificar el método se obtienen hidrogramas de diseño mediante este para analizar la seguridad de la presa La Angostura, Sonora México, los cuales serán transitados a través del vaso de la presa. Finalmente, como resultado de los tránsitos de avenida se tendrá hidrogramas de egreso del vaso que tiene el gasto máximo de descarga y que originó la máxima elevación del agua en la presa. En lo anterior, se ha supuesto que la duración es constante y suficientemente grande. Por lo tanto, solo se analizará al gasto de pico y al volumen.

La longitud de los registros de caudales que va aumentando año con año permite rehacer los análisis hidrológicos de una manera más confiable sobre todo para las obras hidráulicas más grandes; además de las modificaciones en la cuenca, que generalmente inducen cambios en los caudales que no se habían previsto.

La revisión periódica de las avenidas que sirvieron para el diseño de obras hidráulicas es fundamental para estimar la probabilidad de riesgo de daño mayor a las previstas.

### ***Objetivo principal***

Desarrollar un método de obtención de hidrogramas de diseño basados en distribuciones de probabilidad bivariada que se apeguen a la naturaleza y emplearlos para la revisión de la obra de excedencias de una presa. Además, se analizan sus requerimientos, bondades, y resultados.

## **1.1 Descripción de la metodología**

La metodología a seguir para obtener hidrogramas de diseño bivariados de gasto máximo y volumen se fundamenta en el siguiente proceso:

**1. Selección de la duración de N días que tendrá el hidrograma de diseño.**

Se deberá elegir aquella duración que represente de manera adecuada al escurrimiento natural y esta misma será el tiempo base que tendrá el hidrograma de diseño final.

**2. Selección de Hidrogramas Registrados para los criterios de Gasto prioridad o Volumen prioridad.**

Los registros hidrométricos diarios con los que se cuente serán utilizados para elegir hidrogramas en la duración N días elegida formados por un gasto y un volumen.

**3. Distribuciones de probabilidad univariadas de una población y mixtas**

Los valores de gasto y volumen correspondientes a los hidrogramas seleccionados serán ajustados a diferentes funciones de probabilidad, buscando aquel que se aproxime más al comportamiento real.

**4. Ajuste probabilístico de los parámetros de las distribuciones bivariadas usando cópulas**

Se realizará la estimación bivariada utilizando los resultados de los ajustes del paso 3, buscando encontrar valores de gasto y volumen correspondientes a un determinado periodo de retorno conjunto.

**5. Selección de la forma del hidrograma**

A los valores de gasto y volumen encontrados en el paso 4, se les asignará una forma para contar con el hidrograma de diseño final.

**6. Tránsito de Avenidas en el vaso**

Con el hidrograma de diseño generado se realiza el tránsito de avenidas a través del río o vaso correspondiente, o se aplicará el hidrograma para el objetivo para el que fue creado.

## **1.2 Caso de estudio**

Para ejemplificar la metodología, así como sus requerimientos, bondades, características y resultados, se llevará a cabo un análisis de tránsito de avenidas en el vaso de la Presa Gral. Lázaro Cárdenas ubicada en el estado de Sonora, México también conocida como La Angostura con los hidrogramas calculados con el método propuesto. A partir de ello, se

obtiene la máxima elevación en el embalse y se revisa con respecto al nivel máximo establecido de la cortina.

La presa La Angostura se ubica en el municipio de Nacozari de García, al norte del estado de Sonora, México. En el cauce del río Bavispe, en la cuenca de mismo nombre y perteneciente a la región hidrológica número nueve “Sonora Sur”.

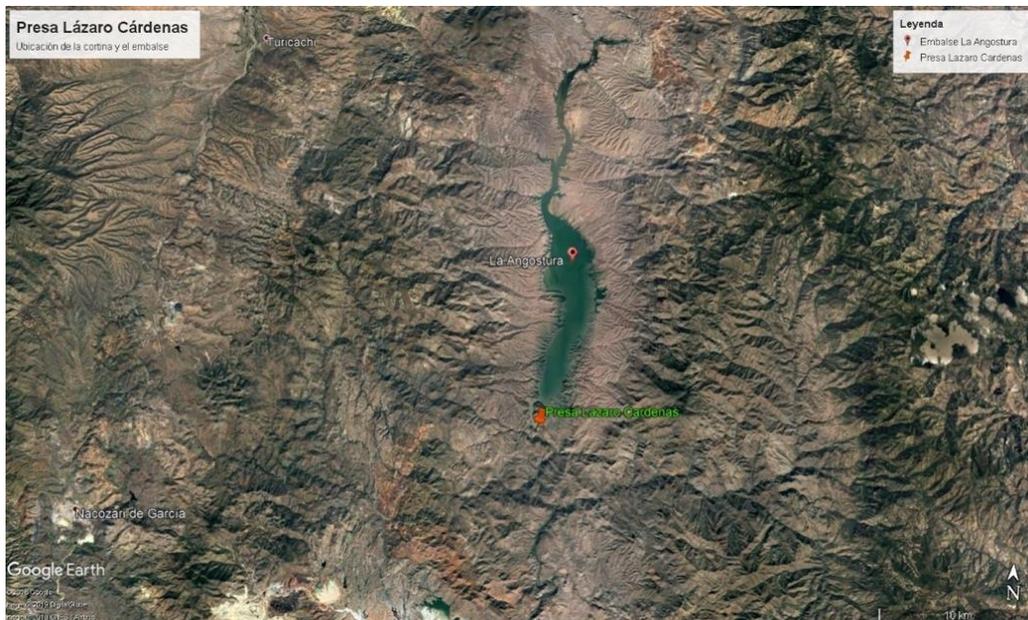


Figura 1.1 Ubicación de la presa Gral. Lázaro Cárdenas

La presa Gral. Lázaro Cárdenas concluyó su construcción en el año de 1942, su cortina es del tipo arco gravedad de concreto con una altura de 91.75 m; cuenta con las características mostradas en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Características principales presa La Angostura, (Conagua, 2019)

<b>Cortina</b>	
Tipo	Arco Gravedad
Material	Concreto
Altura	91.75 m
<b>Niveles</b>	
NAME	840 msnm
NAMO	830.7 msnm
NAMinO	788.7 msnm
Elevación de la Corona	843.75 msnm
Volumen al NAME	1116.5 hm <sup>3</sup>
Volumen al NAMO	703.36 hm <sup>3</sup>
<b>Vertedor</b>	
Tipo	Cimacio
Longitud de la cresta	30.48 m
Control	Libre
Capacidad	1900 m <sup>3</sup> /s
Avenida de diseño	3000 m <sup>3</sup> /s

Los principales usos de la presa son el riego y generación de energía eléctrica. El vertedor de excedencias se ubica en la margen izquierda del río y su estructura está ligada a la cortina, y es de descarga libre con canal curvo y terminado en un umbral deflector. La obra de toma cuenta con 4 tuberías de acero que atraviesan la cortina en la parte central del cauce, provistas aguas arriba de rejillas y aguas debajo de válvulas para emergencia y de servicio, que se operan desde una casa de máquinas construida al pie de la cortina. Las dos tuberías centrales permiten hacer las extracciones para riego y las de los extremos alimentaran las turbinas de la planta hidroeléctrica que se instale al pie de la cortina (Domínguez, 2011)



*Figura 1.2 Cortina de la presa La Angostura, Sonora, México*

En esta tesis se obtuvieron hidrogramas de periodo de retorno de 10,000 años, de acuerdo con lo recomendado por la literatura técnica para el análisis de seguridad de grandes presas, así como para el diseño y revisión de vertedores. Estos hidrogramas consideran la información de registros hidrométricos y se generan empleando distribuciones de probabilidad bivariadas. Posteriormente, se transitarán por el vaso de la presa para conocer la elevación más alta que alcanza el agua de su embalse.

## Capítulo 2

# Selección de Hidrogramas Registrados

Para la adecuada estimación de eventos de diseño de carácter hidrológico, la información con la que se cuenta es de suma importancia. En el caso de estimación de hidrogramas a partir de mediciones hidrométricas, entre más extensa sea la muestra, los análisis estadísticos serán más confiables.

Usualmente la generación de hidrogramas a partir de datos de estaciones hidrométricas se realiza con los denominados gastos máximos anuales, los cuales son aquellos que se presentan en determinado día con el gasto más grande en un río durante un año calendario. Sin embargo, para el diseño de hidrogramas que consideren al gasto de pico y al volumen máximo, conocer solamente el gasto máximo no es suficiente

Se entenderá por *hidrograma registrado* a un conjunto  $N$  de gastos medios diarios consecutivos.  $N$  corresponde al tiempo base del hidrograma que se busca obtener. Es decir, es una serie de registros en  $N$  número de días en cual tendrá un gasto de pico y un cierto volumen.

Se tienen dos criterios de selección de *hidrogramas registrados* para ser usados en la estimación de los hidrogramas asociados a distintos periodos de retorno; uno se formó

dándole más importancia al gasto más grande de N días consecutivos (**Gasto Prioridad**), y la otra al volumen más grande, también de N días consecutivos (**Volumen Prioridad**).

En varias ocasiones los resultados de cada uno son iguales, lo anterior se debe a que ambos se seleccionan a partir de las avenidas máximas anuales, y en muchas de ellas el gasto pico anual también aportó a formar el máximo volumen anual.

## 2.1 Gasto Prioridad

Este criterio, para seleccionar la información hidrométrica, consiste en identificar al máximo gasto medio diario en el año (gasto de pico máximo anual), posteriormente se eligen N gastos medios diarios de días consecutivos cuya suma sea la más grande del año en cuestión (volumen máximo anual) y donde uno de los gastos escogidos es el máximo gasto medio diario del año escogido.

El criterio de gasto prioridad arroja como resultado el gasto máximo anual y el volumen máximo asociado a este, en los N días seleccionados. Así se obtienen las parejas  $(Q_p, V)$  para el tiempo base igual a N días en cada año del registro de gastos medios diarios.

Por ejemplo, en la tabla 2.1 se muestra una pequeña serie de datos de gastos medios diarios, en un año determinado, para ellos se obtendrá la pareja de  $(Q_p, V)$ , cabe señalar que este procedimiento se debe hacer en la medición con los datos de todo el año en cuestión.

Tabla 2.1 Gastos medios diarios y volúmenes para una estación aleatoria para el año de 1959

Fecha	Qmd [m <sup>3</sup> /s]	Volumen N=3 [m <sup>3</sup> /s día]	Volumen N=5 [m <sup>3</sup> /s día]
21/08/1959	95.916	298.828	699.717
22/08/1959	96.094	391.56	864.045
23/08/1959	106.818	507.707	983.318
24/08/1959	188.648	661.133	1060.713
25/08/1959	212.241	687.852	1153.035
26/08/1959	260.244	659.824	1138.803
27/08/1959	215.367	680.55	996.472
28/08/1959	184.213	663.192	850.083
29/08/1959	280.97	596.892	730.884
30/08/1959	198.009	384.9	498.437
31/08/1959	117.913	251.905	346.04
01/09/1959	68.978	182.515	228.127
02/09/1959	65.014	159.149	159.149
03/09/1959	48.523	94.135	94.135
04/09/1959	45.612	45.612	45.612

Analizando la tabla se encuentra que el gasto máximo registrado resultó en el día 29/08/1959 con un valor de 280.97 m<sup>3</sup>/s. Analizando dos duraciones N=3 y 5 días se obtiene la pareja (Qp, V) del año 1959 para cada criterio. Es importante señalar que el volumen en la tabla se expresa en gastos acumulados lo que resulta en unidades de m<sup>3</sup>/s día por lo que basta con multiplicar por el tiempo (86,400 segundos) para obtener el volumen en m<sup>3</sup>/s.

Para N= 3 días

Se selecciona como valor de Qp al gasto máximo (280.97 m<sup>3</sup>/s) y el volumen será el valor acumulado de gastos de 3 días continuos a este que nos den el valor más grande, por lo tanto, el volumen será seleccionado de los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 215.367 + 184.213 + \mathbf{280.97} = \mathbf{680.55} \\
 V_2 &= 184.213 + \mathbf{280.97} + 198.009 = 663.192 \\
 V_3 &= \mathbf{280.97} + 198.009 + 117.913 = 596.892
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la pareja de (Qp, V) para una duración de N=3 días por Gasto Prioridad será:

$$(Qp, V)_{1959} = \left( 280.97 \frac{m^3}{s}, 680.55 \frac{m^3}{s} \text{ día} \right)$$

Para N= 5 días

Se selecciona como valor de  $Q_p$  al gasto máximo ( $280.97 \text{ m}^3/\text{s}$ ) será igual que en el caso de  $N=3$  y el volumen será el valor acumulado de gastos de 5 días continuos a este que den el valor más grande, por lo tanto, el volumen será:

$$V = 212.241 + 260.244 + 215.367 + 184.23 + 280.97 = \mathbf{1153.035} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ día}$$

Así, la pareja de  $(Q_p, V)$  para una duración de  $N=5$  días por gasto prioridad será:

$$(Q_p, V)_{1959} = (280.97 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, 1153.035 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ día})$$

## 2.2 Volumen prioridad

En este criterio, se escogen  $N$  gastos medios diarios consecutivos cuya suma sea la más grande posible del año (volumen máximo anual de duración  $N$  días), posteriormente, entre los  $N$  gastos medios seleccionados, se identifica el gasto medio diario más grande, el cual corresponde al gasto de pico máximo anual.

El criterio de volumen prioridad nos arroja como resultado el volumen máximo anual en  $N$  días, y el gasto máximo presentado para formar este volumen. Así se obtiene la pareja  $(Q_p, V)$  para el tiempo base  $N$  en cada año de registro.

De igual forma que con el gasto prioridad se ejemplifica el uso de este criterio para los datos mostrados en la tabla 2.1.

Primero se obtiene los gastos acumulados para 3 días y se elige el que arroje el valor más grande, el cual resulta ser:

$$V = 212.241 + 260.244 + 215.367 = \mathbf{687.852} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \text{ día}$$

Ahora de los valores de gasto que formaron el máximo volumen se elige aquel que sea el más grande; el cual se presentó en la fecha de 26/08/1959 con un valor de  $Q=260.244 \text{ m}^3/\text{s}$

Por lo tanto, la pareja de  $(Q_p, V)$  para una duración de  $N=3$  días por Volumen Prioridad será:

$$(Qp, V)_{1959} = (260.244 \frac{m^3}{s}, 687.852 \frac{m^3}{s} \text{ día})$$

De igual forma que para N=3 se obtienen los acumulados para 5 días y se elige el de valor más grande, en este caso:

$$V = 212.241 + 260.244 + 215.367 + 184.213 + 280.97 = \mathbf{1153.035} \frac{m^3}{s} \text{ día}$$

Ahora de los valores de gasto que formaron el máximo volumen se elige aquel que sea el más grande; el cual se presentó en la fecha de 26/08/1959 con un valor de Q=280.97 m<sup>3</sup>/s.

Así, la pareja de (Qp, V) para una duración de N=3 días por Volumen Prioridad será:

$$(Qp, V)_{1959} = (280.97 \frac{m^3}{s}, 1153.035 \frac{m^3}{s} \text{ día})$$

Como se puede apreciar para N=5 días ambos criterios arrojan los mismos valores para la pareja (Qp, V), esto es correcto y sucede en bastantes ocasiones, lo que significa es que la avenida que genero el máximo gasto y el máximo volumen en esa duración es la misma.

El uso del hidrograma registrado nos proporciona diversas bondades para la estimación hidrológica, para cualquiera de los criterios mencionados. Como lo son:

- Los gastos y los volúmenes máximos anuales seleccionados con estos criterios coinciden con eventos naturales; es decir, están correlacionados, al contrario de elegirlos individualmente. Esto significa que la información a procesar para generar hidrogramas posee un comportamiento real.
- Si se desea estimar un hidrograma para el caso en el que el gasto es más importante que el volumen o viceversa, se elige el criterio mejor, garantizando así información puntual a las necesidades.
- El gasto máximo anual obtenido por el criterio de gasto prioridad será mayor o igual al obtenido por el criterio de volumen prioridad.

$$Q_{QP} \geq Q_{VP} \tag{2.1}$$

- El volumen máximo anual obtenido por el criterio de volumen prioridad siempre será mayor o igual al obtenido por el criterio de gasto prioridad.

$$V_{VP} \geq V_{QP} \quad (2.2)$$

## 2.3 Hidrogramas registrados caso de estudio la presa Angostura, Sonora.

Para la presa La Angostura, Sonora se cuentan con registros hidrométricos medios diarios de entrada al vaso que van del año de 1942 al 2006 exceptuando los años de 1987 a 1993, para tener un total de registros de 58 años. Estos datos hidrométricos son resultado de un análisis de funcionamiento de vaso y son proporcionados por la Comisión Federal de Electricidad (CFE).

Con esta información se seleccionan los valores de gasto y volumen que formen el hidrograma registrado para cada año conforme a lo establecido en los criterios de gasto y volumen prioridad. Para con ellos realizar el proceso y obtener un hidrograma de diseño bivariado (Q-V).

### 2.3.1 Selección de la duración o tiempo de base del hidrograma

Uno de los aspectos importantes para la determinación de hidrogramas que consideren al volumen como una de sus características principales, es la estimación del tiempo de base o duración del hidrograma.

Como una manera no aleatoria de definir este tiempo, se obtienen espectros de densidad de potencia a partir de un conjunto de gastos medios diarios consecutivos. Los espectros consideran funciones senoidales de distintas características y se obtienen por medio de la transformada rápida de Fourier. El espectro es una gráfica donde las ordenadas corresponden a la energía desplegada y las abscisas a periodos de tiempo.

Del espectro se obtienen los periodos que corresponden a los “picos” más grandes y se seleccionará aquel que resulte en un periodo que se presente en más de un espectro. Este periodo de tiempo representará la duración “N” que tendrá el hidrograma.

Para el caso de la presa La Angostura se han obtenido espectros de densidad de potencia calculados con los gastos medios diarios de los 58 años con los que se cuenta. En total se crearon 3 espectros de densidad de potencia, para 8,192, 11,558 y 21,915 días; los cuales se muestran en las figuras 2.1, 2.2 y 2.3.

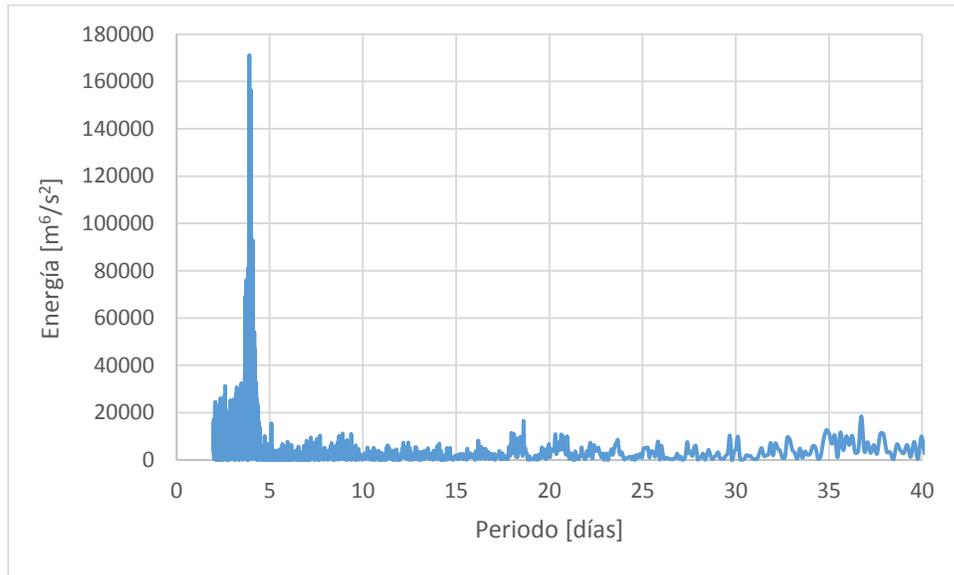


Figura 2.1 Espectro de densidad de potencia para 8,192 días

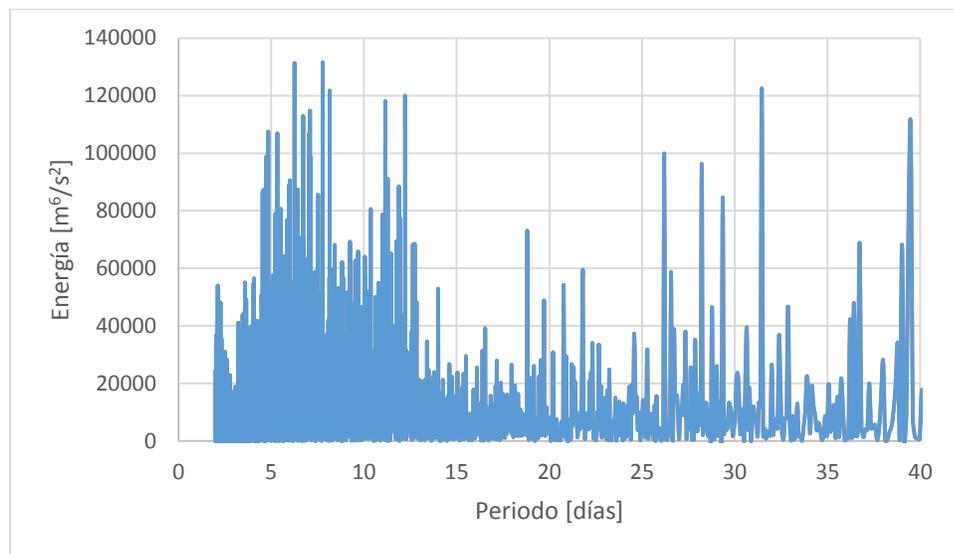


Figura 2.2 Espectro de densidad de potencia para 13,149 días

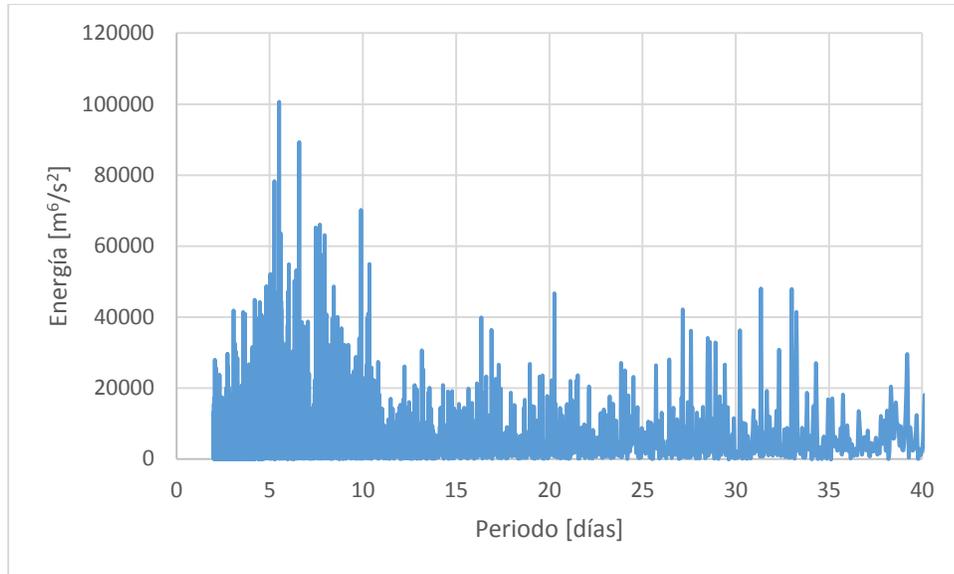


Figura 2.3 Espectro de densidad de potencia para 21,915

Los espectrogramas mostrados han sido recortados a 40 días de periodo, pues es en este rango donde se puede apreciar mejor los picos en periodos comunes, se verificó todo el espectro antes de realizar el corte.

Con estos tres espectros se deben identificar los “picos” que se presenten de manera repetitiva, con esto, es fácil observar que cerca de 5, 10 y entre 30 y 40 días se presentan los picos más grandes, por lo cual decidiendo entre estos y con ayuda del espectro de 21,195 días se han elegido las duraciones de 10 días y 35 días como el tiempo de base para los hidrogramas de diseño que se crearan con la metodología propuesta.

### 2.3.2 Selección de datos por el criterio de Gasto Prioridad

El criterio establece que el máximo gasto que se presenta en un año se tomará como base para establecer el volumen máximo de escurrimiento de ese mismo año, coincide con la clásica forma de encontrar los gastos máximos anuales y le añade la selección del volumen.

De la muestra de gastos medios diarios para cada año de registro se identifica aquel gasto que sea el más grande, el cual se denominará gasto máximo anual, con lo cual se tendrán 58 gastos máximos anuales, uno por cada año registrado.

Hasta este punto la duración elegida que tendrá el hidrograma generado no influye, puesto que el gasto máximo anual siempre será el mismo.

Ahora ya considerando la duración  $N$  igual a 10 y 35 días elegidas se obtiene el valor del volumen, como ya se explicó se obtendrá en forma de gastos acumulados, es decir se forman sumando los gastos que incluyan al máximo anual y cumplan con la duración  $N$ , y se tomará aquel que resulte ser el máximo. Con ello se tendrán al igual que con los gastos, 58 valores de volumen, uno por cada año de registro.

Como una de las duraciones  $N$  se definió de 35 días, se acumulan los gastos medios diarios del registro cada 35 días, incluyendo al valor del gasto máximo anual ya identificado. Es decir, se toman 34 días antes del máximo y 34 después, para que al incluir al máximo sean 35 días. Ahora de todos esos valores acumulados (volumen) se elige el más grande.

En la tabla 2.2 se muestra el registro de gastos medios diarios para algunos días de 1972 en los que se incluye el 1ero de noviembre de 1972, en el cual se presentó el gasto máximo de ese año con un valor de  $279.318 \text{ m}^3/\text{s}$ ; también se muestran los acumulados cada 35 días iniciando el 28 de septiembre y terminando el 4 de diciembre de 1972, es decir 34 días antes y 34 después del 1ero de noviembre. De los acumulados que contienen al máximo anual se elige aquel que sea más grande, el cual resulta ser de  $1441.507 \text{ m}^3/\text{s día}$ , formado al sumar los valores del  $Q_{md}$  del 19 de octubre al 22 de noviembre. Estos dos valores resultan formar la pareja de gasto y volumen máximo de 1972.

$$(Qp, V)_{1972} = (279.318 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}, 1441.507 \frac{\text{m}^3}{\text{s día}})$$

Tabla 2.2 Gastos medios diarios y acumulados en 35 días para fechas de 1972

Día	Qmd [m³/s]	Acumulados 35 días [m³/s día]	Día	Qmd [m³/s]	Acumulados 35 días [m³/s día]	Día	Qmd [m³/s]	Acumulados 35 días [m³/s día]
28/09/72	17.289	1090.609	21/10/72	99.005	1375.001	13/11/72	21.64	301.495
29/09/72	15.178	1127.175	22/10/72	215.633	1269.966	14/11/72	-5.658	299.012
30/09/72	5.805	1168.906	23/10/72	60.191	1065.108	15/11/72	12.97	303.089
01/10/72	5.817	1208.523	24/10/72	54.58	1029.687	16/11/72	18.621	304.449
02/10/72	5.807	1236.279	25/10/72	15.656	965.136	17/11/72	17.678	291.994
03/10/72	4.874	1254.093	26/10/72	21.236	958.055	18/11/72	9.166	282.587
04/10/72	1.784	1268.98	27/10/72	15.064	945.825	19/11/72	18.127	295.876
05/10/72	2.502	1267.723	28/10/72	32.408	927.184	20/11/72	12.829	294.042
06/10/72	2.867	1280.169	29/10/72	18.4	895.657	21/11/72	29.929	300.399
07/10/72	2.811	1292.024	30/10/72	19.207	885.054	22/11/72	12.595	266.281
08/10/72	5.125	1300.273	31/10/72	83.404	887.817	23/11/72	6.41	266.865
09/10/72	0.753	1309.471	01/11/72	279.318	793.305	24/11/72	17.871	270.12
10/10/72	0.553	1330.358	02/11/72	53.855	518.323	25/11/72	-6.03	267.027
11/10/72	0.543	1324.147	03/11/72	56.909	466.241	26/11/72	10.775	289.038
12/10/72	0.369	1336.574	04/11/72	45.422	422.152	27/11/72	24.77	288.135
13/10/72	0.483	1354.826	05/11/72	33.573	381.107	28/11/72	-9.971	287.057
14/10/72	0.673	1372.021	06/11/72	23.621	360.387	29/11/72	8.575	287.353
15/10/72	0.614	1380.514	07/11/72	19.761	342.581	30/11/72	9.006	297.29
16/10/72	0.32	1398.027	08/11/72	0.527	315.597	01/12/72	-3.577	372.881
17/10/72	0.128	1410.536	09/11/72	14.948	316.895	02/12/72	0.881	452.149
18/10/72	11.425	1440.337	10/11/72	14.722	308.102	03/12/72	7.797	756.493
19/10/72	62.691	1441.507	11/11/72	11.06	305.269	04/12/72	21.97	795.644

De igual forma que se calculó la pareja Qp, V para el año de 1972 se obtiene para todos los años registrados, 58 parejas en total resultan, se pueden apreciar en la tabla 2.3, en ella se aprecian la fecha en la cual se presentó el gasto máximo, el valor del gasto máximo, el volumen en m³/s día y en hm³.

El Volumen como ya se dijo se obtiene en valores de gastos acumulados, sus unidades son m³/s día, para obtenerlo en m³ basta con multiplicarlo por 86400 s.

$$V \left[ \frac{m^3}{s} \text{ día} \right] = V \left[ \frac{m^3}{s} 86400 \text{ s} \right] = V 86400 [m^3] \tag{2.3}$$

Por ejemplo, para el volumen de 1972

$$V_{1972} [m^3] = 1441.507(86400) = 124'546,204.8 m^3$$

Por facilidad de cálculo, para los siguientes pasos de la metodología se continuará trabajando con los volúmenes en m<sup>3</sup>/s día.

Tabla 2.3 Parejas de Gasto y Volumen obtenidas mediante el criterio de Gasto Prioridad

Gasto Prioridad											
Duración 35 días											
Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Vol. Máx. [m <sup>3</sup> /s día]	Vol. Máx. [hm <sup>3</sup> ]	Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Vol. Máx. [m <sup>3</sup> /s día]	Vol. Máx. [hm <sup>3</sup> ]
1942	DIC	7	472.317	1594.148	137.734	1971	OCT	27	147.371	888.439	76.761
1943	SEP	18	347.857	2537.182	219.213	1972	NOV	1	279.318	1441.507	124.546
1944	FEB	27	254.921	1754.886	151.622	1973	FEB	24	653.278	3642.047	314.673
1945	AGO	16	227.306	1762.472	152.278	1974	NOV	11	154.917	612.344	52.907
1946	SEP	6	186.75	1273.017	109.989	1975	FEB	5	169.135	815.245	70.437
1947	AGO	31	63.491	865.383	74.769	1976	JUL	27	157.064	2030.912	175.471
1948	FEB	6	564.343	1872.487	161.783	1977	OCT	9	520.494	1513.091	130.731
1949	ENE	14	1312.088	7203.824	622.410	1978	DIC	21	967.417	5872.248	507.362
1950	ENE	13	444.503	1277.227	110.352	1979	ENE	26	665.607	6103.747	527.364
1951	OCT	20	540.874	1435.028	123.986	1980	AGO	15	100.506	780.747	67.457
1952	MAR	3	431.345	1493.525	129.041	1981	MAR	5	282.278	1511.765	130.616
1953	MAR	2	836.904	1915.336	165.485	1982	DIC	13	713.799	1925.566	166.369
1954	AGO	3	360.966	2148.866	185.662	1983	FEB	5	566.386	4382.063	378.610
1955	DIC	17	407.346	419.132	36.213	1984	DIC	29	748.648	6546.401	565.609
1956	JUL	31	93.605	577.291	49.878	1985	ENE	27	461.083	2657.257	229.587
1957	JUL	26	361.642	2007.266	173.428	1986	JUL	16	278.988	2663.36	230.114
1958	SEP	13	668.225	3413.256	294.905	1994	DIC	7	359.71	2620.025	226.370
1959	AGO	29	310.041	4096.385	353.928	1995	FEB	16	1764.687	4090.196	353.393
1960	ENE	12	1106.095	3544.957	306.284	1996	JUL	24	94.812	860.384	74.337
1961	DIC	17	149.599	825.956	71.363	1997	DIC	27	375.344	1615.117	139.546
1962	ENE	25	702.466	2393.432	206.793	1998	FEB	20	203.141	1765.202	152.513
1963	AGO	24	130.562	2403.627	207.673	1999	AGO	6	489.632	2594.782	224.189
1964	AGO	5	349.554	2543.052	219.720	2000	NOV	8	239.769	1844.92	159.401
1965	DIC	23	889.874	3493.088	301.803	2001	FEB	16	213.763	1017.487	87.911
1966	AGO	20	369.291	3826.654	330.623	2002	FEB	7	157.641	823.389	71.141
1967	DIC	16	1284.023	7374.602	637.166	2003	ABR	27	54.369	133.518	11.536
1968	MAR	10	582.353	4715.42	407.412	2004	OCT	14	635.686	748.875	64.703
1969	JUL	28	261.518	1215.074	104.982	2005	ENE	5	1072.12	3438.051	297.048
1970	AGO	3	250.308	1723.558	148.915	2006	SEP	5	190.775	2491.987	215.308

### 2.3.3 Selección de datos por el criterio de Volumen Prioridad

Como ya se mencionó, con este criterio lo que se prioriza en encontrar es el volumen máximo de escurrimiento que se presentó en cada año registrado, para ello de los gastos acumulados en N días se identifica aquel que sea máximo, ese valor será el volumen. De los

valores que forman este volumen se identifica el gasto más grande, este será el gasto máximo en determinado año; y con estos dos valores se forma la pareja  $Q_p, V$ .

Es importante aclarar que el gasto elegido por este criterio no necesariamente será el gasto máximo anual, esto se debe a que la avenida que forma el máximo volumen de escurrimiento no es siempre la que forma el máximo gasto de escurrimiento anual, aunque si lo será en muchos casos.

En la tabla 2.4 se muestran los registros de gastos medios diarios de entrada al vaso del 10 de julio al 16 de septiembre de 1972, de los acumulados cada 35 días calculados para todo el año, el máximo resulta ser de 2214.492 m<sup>3</sup>/s día este será el volumen máximo anual de 1972, para localizar el gasto que complete la pareja  $Q_p, V$ , de los gastos  $Q_{md}$  que forman el acumulado máximo, se identifica el más grande, en este caso del 13 de agosto al 13 de septiembre de 1972 se forma el acumulado de 2214. 492 m<sup>3</sup>/s día, y el  $Q_{md}$  más grande dentro de este periodo se presentan el 27 de agosto, con un valor de 140.305.

Por lo tanto, la pareja  $Q_p, V$  por el criterio de volumen prioridad para 1972 será:

$$(Q_p, V)_{1972} = (140.305 \frac{m^3}{s}, 2214.492 \frac{m^3}{s} \text{ día})$$

Tabla 2.4 Gastos medios diarios y acumulados de 35 días para fechas de 1972

Día	Qmd [m <sup>3</sup> /s]	Acumulados 35 días [m <sup>3</sup> /s día]	Día	Qmd [m <sup>3</sup> /s]	Acumulados 35 días [m <sup>3</sup> /s día]	Día	Qmd [m <sup>3</sup> /s]	Acumulados 35 días [m <sup>3</sup> /s día]
10/07/72	1.414	590.203	02/08/72	5.055	1786.615	25/08/72	22.226	1706.927
11/07/72	-0.222	594.329	03/08/72	6.189	1825.098	26/08/72	126.507	1699.879
12/07/72	1.336	687.617	04/08/72	26.704	1838.831	27/08/72	140.305	1579.177
13/07/72	1.301	708.039	05/08/72	-2.693	1874.264	28/08/72	83.209	1444.689
14/07/72	0.109	760.632	06/08/72	0.233	1947.338	29/08/72	59.281	1367.287
15/07/72	-0.042	879.41	07/08/72	4.803	2007.917	30/08/72	87.583	1312.88
16/07/72	1.068	940.063	08/08/72	10.053	2045.522	31/08/72	87.526	1227.081
17/07/72	101.171	994.787	09/08/72	11.008	2063.889	01/09/72	71.397	1142.057
18/07/72	43.115	948.162	10/08/72	19.038	2099.795	02/09/72	79.9	1073.527
19/07/72	17.407	955.747	11/08/72	12.835	2122.869	03/09/72	108.008	996.438
20/07/72	20.709	972.666	12/08/72	12.628	2163.828	04/09/72	80.392	893.555
21/07/72	21.066	982.272	13/08/72	111.3	2214.492	05/09/72	43.693	813.916
22/07/72	22.351	983.432	14/08/72	5.54	2131.719	06/09/72	43.538	770.776
23/07/72	19.142	1087.588	15/08/72	93.066	2140.916	07/09/72	19.922	727.781
24/07/72	16.033	1208.751	16/08/72	21.758	2055.612	08/09/72	62.137	708.228
25/07/72	26.021	1275.927	17/08/72	53.894	2050.862	09/09/72	70.381	646.574
26/07/72	19.766	1309.187	18/08/72	118.887	2014.462	10/09/72	60.812	576.866
27/07/72	16.401	1377.004	19/08/72	60.611	1912.95	11/09/72	42.408	516.668
28/07/72	12.998	1448.129	20/08/72	55.792	1858.187	12/09/72	28.42	474.58
29/07/72	7.211	1506.528	21/08/72	54.546	1813.03	13/09/72	46.914	446.288
30/07/72	7.109	1579.217	22/08/72	50.7	1773.152	14/09/72	42.112	410.799
31/07/72	7.202	1680.116	23/08/72	34.326	1732.558	15/09/72	53.794	431.378
01/08/72	10.384	1753.306	24/08/72	30.315	1719.953	16/09/72	63.292	405.68

En la tabla 2.5 se presentan los valores de la pareja de Qp, V con el criterio de Volumen prioridad para los 58 años registrados, la fecha que se aprecia es aquella donde comienza la suma de 35 días para obtener los acumulados.

Tabla 2.5 Parejas de Gasto y Volumen obtenidos mediante el criterio de Volumen Prioridad

Volumen Prioridad											
Duración 35 días											
Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Vol. Máx. [m <sup>3</sup> /s día]	Vol. Máx. [hm <sup>3</sup> ]	Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Vol. Máx. [m <sup>3</sup> /s día]	Vol. Máx. [hm <sup>3</sup> ]
1942	DIC	4	472.317	1594.148	137.734	1971	JUL	22	102.005	1482.422	128.081
1943	AGO	6	226.907	3073.43	265.544	1972	AGO	13	140.305	2214.492	191.332
1944	FEB	26	254.921	1754.886	151.622	1973	FEB	9	653.278	3642.047	314.673
1945	JUL	30	227.306	1762.472	152.278	1974	JUL	18	133.791	1199.077	103.600
1946	AGO	9	186.75	1273.017	109.989	1975	JUL	12	146.571	1343.833	116.107
1947	AGO	9	63.491	865.383	74.769	1976	JUL	15	157.064	2030.912	175.471
1948	DIC	25	564.343	1872.487	161.783	1977	JUL	20	147.02	2197.229	189.841
1949	ENE	4	1312.088	7203.824	622.410	1978	DIC	31	665.607	6120.803	528.837
1950	JUL	15	306.794	2353.668	203.357	1979	ENE	1	665.607	6103.747	527.364
1951	OCT	2	540.874	1435.028	123.986	1980	AGO	14	100.506	780.747	67.457
1952	JUL	22	203.788	1610.085	139.111	1981	JUL	17	123.37	2369.271	204.705
1953	FEB	22	836.904	1915.336	165.485	1982	DIC	3	713.799	1925.566	166.369
1954	JUL	19	360.966	2148.866	185.662	1983	FEB	5	566.386	4382.063	378.610
1955	JUL	26	385.888	4476.654	386.783	1984	DIC	7	748.648	6546.401	565.609
1956	JUL	26	93.605	577.291	49.878	1985	ENE	23	461.083	2657.257	229.587
1957	AGO	5	165.867	2151.834	185.918	1986	JUL	16	278.988	2663.36	230.114
1958	AGO	18	668.225	3413.256	294.905	1994	DIC	5	359.71	2620.025	226.370
1959	AGO	4	310.041	4096.385	353.928	1995	FEB	10	1764.687	4090.196	353.393
1960	ENE	4	1106.095	3544.957	306.284	1996	AGO	18	83.01	953.198	82.356
1961	DIC	31	124.175	1185.785	102.452	1997	DIC	8	375.344	1615.117	139.546
1962	MAR	7	477.3	2447.454	211.460	1998	FEB	20	203.141	1765.202	152.513
1963	JUL	28	130.562	2403.627	207.673	1999	JUL	30	489.632	2594.782	224.189
1964	AGO	13	329.784	2721.897	235.172	2000	OCT	22	239.769	1844.92	159.401
1965	DIC	15	889.874	3493.088	301.803	2001	JUL	24	121.906	1802.669	155.751
1966	JUL	27	369.291	3826.654	330.623	2002	JUL	30	133.348	1265.218	109.315
1967	DIC	14	1284.023	7374.602	637.166	2003	FEB	5	34.49	399.451	34.513
1968	FEB	13	582.353	4715.42	407.412	2004	DIC	31	205.65	1244.911	107.560
1969	JUL	24	261.518	1215.074	104.982	2005	ENE	25	659.828	3545.815	306.358
1970	JUL	28	250.308	1723.558	148.915	2006	AGO	4	190.775	2491.987	215.308

Al obtener los valores del hidrograma registrado (pareja Qp, V) para cada año del registro por los criterios de gasto y volumen prioridad se puede apreciar las diferencias entre ambos.

Se puede apreciar fácilmente que el gasto es mayor en el criterio de gasto prioridad, de igual forma el volumen en el de volumen prioridad. Es muy común que tanto el gasto y/o el volumen en ambos casos sea el mismo esto debido a como ya se mencionó la avenida que arroje el máximo gasto, arroja el máximo volumen, pero no siempre es así. Lo que resulta

imposible es que el gasto sea mayor en el criterio de volumen prioridad o que el volumen sea mayor en el criterio de gasto prioridad.

Para la duración de 35 días, de los 58 años de registro, un total de 21 años difirieron en valores de gasto y volumen entre ambos criterios, por lo tanto 37 años resultaron en que la misma avenida generó el gasto máximo anual y el volumen máximo anual. Aquí es donde se aprecia la principal diferencia entre ambos criterios de selección del hidrograma registrado, o cual a la postre en los siguientes pasos de la metodología generará diferencias más significativas.

En la figura 2.4 se muestra el hidrograma registrado para 1972 por el criterio de gasto prioridad, y en la figura 2.5 el hidrograma registrado para el mismo año, pero por el criterio de volumen prioridad, como se aprecia corresponden a periodos del año totalmente distintos, el primero además es tiene un pico más alto, y el segundo posee un área bajo la curva mayor. Es por ello que cada criterio debe ser utilizado con la certera confianza que es el mejor para las necesidades.

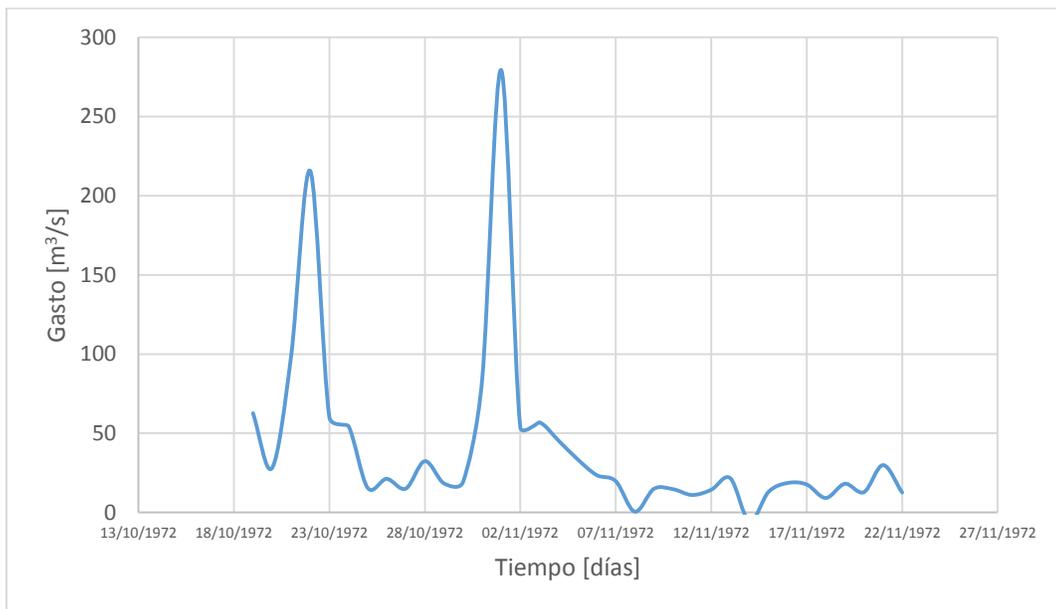


Figura 2.4 Hidrograma registrado de 1972 por el criterio de Gasto Prioridad

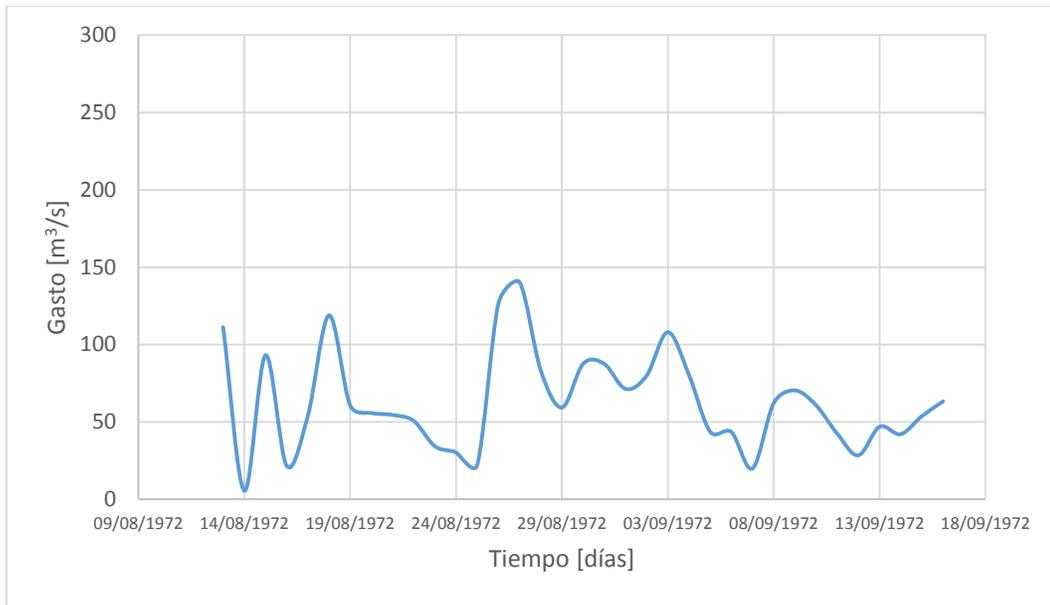


Figura 2.5 Hidrograma registrado de 1972 por el criterio de Volumen Prioridad

De las series de datos mostrados en las tablas 2.3 y 2.5 se obtienen sus valores estadísticos mostrados a continuación.

Tabla 2.6 Estadísticos de la serie de datos obtenidos para los criterios de gasto y volumen prioridad.

Estadístico	QP		VP	
	Gasto	Volumen	Gasto	Volumen
Media	459.96	2398.91	407.79	2622.81
Desv. Estándar	349.67	1696.88	347.03	1617.12
Varianza	122271.00	2879401.90	120429.71	2615085.36
Coef. Asimetría	1.54	1.35	1.78	1.36
Curtosis	2.76	1.48	3.78	1.53

### 2.3.4 Hidrogramas registrados para 10 días de duración

Para la duración de 10 días se obtuvieron los siguientes resultados de parejas Qp, V, por ambos criterios; obtenidos de la misma forma:

Por el criterio de gasto prioridad

Tabla 2.7 Parejas de Gasto y Volumen para 10 días de duración obtenidos por el criterio de Gasto Prioridad

Gasto Prioridad											
Duración 10 días											
Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Volumen [hm <sup>3</sup> ]	Año	Mes	Día	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Volumen [hm <sup>3</sup> ]
1942	DIC	7	472.317	1367.598	118.160	1971	OCT	27	147.371	566.041	48.906
1943	SEP	18	347.857	346.496	29.937	1972	NOV	1	279.318	646.117	55.825
1944	FEB	27	254.921	1105.592	95.523	1973	FEB	24	653.278	1736.73	150.053
1945	AGO	16	227.306	905.877	78.268	1974	NOV	11	154.917	460.646	39.800
1946	SEP	6	186.75	480.925	41.552	1975	FEB	5	169.135	619.089	53.489
1947	AGO	31	63.491	409.889	35.414	1976	JUL	27	157.064	1055.489	91.194
1948	FEB	6	564.343	1376.05	118.891	1977	OCT	9	520.494	1273.59	110.038
1949	ENE	14	1312.088	5119.19	442.298	1978	DIC	21	967.417	1743.082	150.602
1950	ENE	13	444.503	961.381	83.063	1979	ENE	26	665.607	3052.969	263.777
1951	OCT	20	540.874	958.143	82.784	1980	AGO	15	100.506	283.431	24.488
1952	MAR	3	431.345	1079.119	93.236	1981	MAR	5	282.278	1098.319	94.895
1953	MAR	2	836.904	1591.825	137.534	1982	DIC	13	713.799	1509.88	130.454
1954	AGO	3	360.966	1020.133	88.139	1983	FEB	5	566.386	1863.987	161.048
1955	DIC	17	407.346	411.36	35.542	1984	DIC	29	748.648	3288.172	284.098
1956	JUL	31	93.605	196.6	16.986	1985	ENE	27	461.083	1574.363	136.025
1957	JUL	26	361.642	629.017	54.347	1986	JUL	16	278.988	1474.076	127.360
1958	SEP	13	668.225	1392.574	120.318	1994	DIC	7	359.71	1543.556	133.363
1959	AGO	29	310.041	1827.464	157.893	1995	FEB	16	1764.687	3449.852	298.067
1960	ENE	12	1106.095	2626.832	226.958	1996	JUL	24	94.812	360.215	31.123
1961	DIC	17	149.599	485.522	41.949	1997	DIC	27	375.344	827.21	71.471
1962	ENE	25	702.466	1963.274	169.627	1998	FEB	20	203.141	968.697	83.695
1963	AGO	24	130.562	933.792	80.680	1999	AGO	6	489.632	1450.353	125.310
1964	AGO	5	349.554	1354.161	117.000	2000	NOV	8	239.769	942.234	81.409
1965	DIC	23	889.874	2424.158	209.447	2001	FEB	16	213.763	670.032	57.891
1966	AGO	20	369.291	1593.213	137.654	2002	FEB	7	157.641	585.839	50.616
1967	DIC	16	1284.023	5395.377	466.161	2003	ABR	27	54.369	56.53	4.884
1968	MAR	10	582.353	2353.299	203.325	2004	OCT	14	635.686	635.782	54.932
1969	JUL	28	261.518	770.581	66.578	2005	ENE	5	1072.12	2100.671	181.498
1970	AGO	3	250.308	930.26	80.374	2006	SEP	5	190.775	1016.967	87.866

Para el criterio de Volumen Prioridad

Tabla 2.8 Parejas de Gasto y Volumen para 10 días de duración obtenidos por el criterio de Volumen Prioridad

Volumen Prioridad											
Duración 10 días											
Año	Mes	Día	Q máx. [m³/s]	Volumen [m³/s día]	Volumen [hm³]	Año	Mes	Día	Q máx. [m³/s]	Volumen [m³/s día]	Volumen [hm³]
1942	DIC	6	472.317	1367.598	118.160	1971	AGO	11	102.005	656.041	56.682
1943	AGO	8	226.907	1303.143	112.592	1972	AGO	26	140.305	924.108	79.843
1944	FEB	26	254.921	1105.592	95.523	1973	FEB	22	653.278	1736.73	150.053
1945	AGO	14	227.306	905.877	78.268	1974	NOV	10	154.917	460.646	39.800
1946	SEP	6	186.75	480.925	41.552	1975	JUL	18	146.571	797.755	68.926
1947	AGO	23	63.491	409.889	35.414	1976	JUL	19	157.064	1055.489	91.194
1948	DIC	31	564.343	1477.682	127.672	1977	OCT	8	520.494	1273.59	110.038
1949	ENE	9	1312.088	5119.19	442.298	1978	MAR	1	724.503	3196.859	276.209
1950	JUL	28	279.961	1106.656	95.615	1979	ENE	18	665.607	3052.969	263.777
1951	OCT	20	540.874	958.143	82.784	1980	FEB	15	94.856	310.014	26.785
1952	MAR	2	431.345	1079.119	93.236	1981	MAR	4	282.278	1098.319	94.895
1953	MAR	2	836.904	1591.825	137.534	1982	DIC	4	713.799	1509.88	130.454
1954	AGO	2	360.966	1020.133	88.139	1983	MAR	4	459.103	2275.006	196.561
1955	AGO	20	385.888	2086.479	180.272	1984	DIC	13	663.514	3644.914	314.921
1956	AGO	11	33.661	268.295	23.181	1985	ENE	25	461.083	1574.363	136.025
1957	AGO	31	165.867	762.053	65.841	1986	JUL	16	278.988	1474.076	127.360
1958	MAR	7	242.945	1440.588	124.467	1994	DIC	5	359.71	1543.556	133.363
1959	AGO	22	310.041	1827.464	157.893	1995	FEB	12	1764.69	3449.852	298.067
1960	ENE	11	1106.095	2626.832	226.958	1996	AGO	29	83.01	393.181	33.971
1961	JUL	21	124.175	501.006	43.287	1997	DIC	27	375.344	827.21	71.471
1962	ENE	24	702.466	1963.274	169.627	1998	FEB	20	203.141	968.697	83.695
1963	AGO	21	130.562	933.792	80.680	1999	AGO	6	489.632	1450.353	125.310
1964	AGO	5	349.554	1354.161	117.000	2000	NOV	4	239.769	942.234	81.409
1965	DIC	18	889.874	2424.158	209.447	2001	JUL	25	105.712	704.571	60.875
1966	AGO	20	369.291	1593.213	137.654	2002	AGO	4	133.348	743.278	64.219
1967	DIC	15	1284.023	5395.377	466.161	2003	FEB	24	34.49	195.852	16.922
1968	MAR	8	582.353	2353.299	203.325	2004	DIC	31	205.65	738.296	63.789
1969	JUL	24	261.518	770.581	66.578	2005	ENE	3	1072.12	2100.671	181.498
1970	AGO	2	250.308	930.26	80.374	2006	SEP	4	190.775	1016.967	87.866

Tras obtener los hidrogramas registrados para esta duración de 10 días por ambos criterios, se puede notar que, en 19 de los 58 años, existió diferencia.

Con la información de los hidrogramas registrados para 10 y 35 días por ambos criterios, continuara la aplicación de la metodología realizando ajustes de probabilidad a diferentes funciones univariadas.

## Capítulo 3

# Funciones de distribución de probabilidad univariadas.

La estimación de eventos a partir de información relativamente corta es uno de los principales problemas en la ingeniería hidrológica. Estos datos en la mayoría de las ocasiones poseen un patrón generalmente aparente, la pregunta es cómo usar este patrón para extender la información disponible y estimar el evento de diseño.

La planeación y el diseño de obras hidráulicas están relacionados con eventos hidrológicos futuros, cuyo tiempo de ocurrencia o magnitud no pueden predecirse, ya que siguen leyes de azar. Es por ello por lo que la probabilidad y estadística juegan un papel muy importante para pronosticar eventos hidrológicos (Palacios C., 2010).

En Hidrología para pronosticar la magnitud de eventos hidrológicos futuros se emplean diversas funciones de distribución de probabilidad, para ello se realiza un llamado ajuste, el cual consiste en con determinada población estimar los parámetros que la 'ajusten' a la función seleccionada, para con ellos estimar un valor a determinada probabilidad, seleccionando aquella que se ajuste de mejor forma a la distribución de los datos registrados.

La aplicación de las funciones de distribución para ajustes se puede realizar en una o más variables, en el caso de la primera se denomina ajuste univariado (el cual no es muy común de mencionar), para dos variables se denomina bivariada y así sucesivamente.

El proceso para ajustar una población se describe como:

1. Elegir la distribución de probabilidad a la cual se ajustará la variable.
2. Calcular los parámetros para dicha distribución de probabilidad.
3. Encontrar los valores estimados de la variable con dichos parámetros.
4. Elegir el mejor ajuste con ayuda de las pruebas de bondad de ajuste.
5. Extrapolar valores a determinado periodo de retorno utilizando los parámetros encontrados.

En el desarrollo de hidrogramas usualmente se utiliza como variable principal a la población de gastos, pero además de estos se pueden considerar más, como ya se mencionó en el capítulo 2 el volumen de escurrimiento es otra variable importante, y lo pueden ser también el tiempo de pico, el tiempo de base, etc.

Para poder aplicar funciones de probabilidad bivariadas es necesario contar con la información de ajustes univariados. Entre más funciones de probabilidad sean elegidas para realizar el ajuste es mejor, puesto que así se cuentan con más posibilidades de encontrar un menor error.

### **3.1 Estimación de Parámetros**

Para realizar un ajuste de datos a una función de probabilidad la estimación de parámetros es un paso primordial, absolutamente necesario. Existen diversos métodos para obtenerlos, lo más conocidos se denominan por momentos y por máxima verosimilitud.

#### **3.1.1 Método de los momentos**

El método de los momentos es un procedimiento muy sencillo para encontrar un estimador de uno o más parámetros poblacionales. Consiste en plantear un sistema de ecuaciones cuyo tamaño depende del número de parámetros a estimar. Esto se hace al igualar los momentos poblacionales con los muestrales.

Los momentos poblacionales pueden obtenerse con respecto a la media o con respecto al origen. Los momentos muestrales se pueden obtener a partir de:

- Media

- Varianza sesgada
- Varianza no sesgada
- Coeficiente de asimetría sesgado
- Coeficiente de asimetría no sesgado
- Desviación estándar
- Coeficiente de variación

### 3.1.2 Método de la máxima verosimilitud

El principio de máxima verosimilitud establece que para una distribución con una función de densidad del tipo  $p(x; \alpha, \beta, \dots)$  donde  $\alpha, \beta, \dots$  son los parámetros a ser estimados, entonces la probabilidad de obtener un valor dado de  $x$ ,  $x_i$ , es proporcional a  $p(x; \alpha, \beta, \dots)$  y la probabilidad conjunta,  $L$ , de obtener una muestra de  $n$  valores  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es proporcional al producto (Kite, 1998).

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i; \alpha, \beta, \dots) \quad (3.1)$$

Esta es llamada la **verosimilitud**. El método de la máxima verosimilitud se encarga de estimar  $\alpha, \beta, \dots$  tal que  $L$  sea máxima. Esto se logra gracias a la derivada parcial  $L$  con respecto a cada uno de los parámetros e igualando a cero. Frecuentemente  $\ln(L)$  es usado en lugar de  $L$  para simplificar los cálculos.

Como un ejemplo de la aplicación de la técnica de máxima verosimilitud se considera a continuación la distribución normal con parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ .

$$p(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} \quad (3.2)$$

Entonces

$$L = \left\{ \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} \right\}^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2}{2\beta^2}} \quad (3.3)$$

Usando logaritmos

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\beta^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2}{2\beta^2} \quad (3.4)$$

Derivando con respecto a los parámetros  $\alpha$  y  $\beta^2$  e igualando a cero.

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)}{\beta^2} = 0 \quad (3.5)$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \alpha = 0 \quad (3.6)$$

Pero

$$\sum_{i=1}^n \alpha = n\alpha \quad (3.7)$$

Por lo tanto

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.8)$$

Además

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta^2} = -\frac{2}{2\beta^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2}{2\beta^4} = 0 \quad (3.9)$$

Entonces

$$\beta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2}{n} \quad (3.10)$$

En este caso los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  resultan ser la media y la desviación estándar de la distribución respectivamente.

Este método teóricamente es el más correcto para ajustar distribuciones de probabilidad a información, ya que produce los estimativos de parámetros más eficientes, aquellos que estiman los parámetros de la población con los menores errores promedio, sin embargo para algunas distribuciones de probabilidad, no existe una solución matemática y al maximizar la función logaritmo de verosimilitud resulta bastante complicado, es por ello que en general el método de los momentos es más fácil de aplicar que el método de la máxima verosimilitud y resulta ser el más apropiado para los análisis prácticos en hidrología.

En la estimación bivariada es recomendable utilizar los parámetros encontrados por el método de los momentos como punto de partida para estimarlos por el método de máxima verosimilitud, esto debido a que a pesar de usar valores no sesgados los resultados no serán necesariamente del mismo tipo (Bowman-Shenton, 1998), además con máxima verosimilitud los estimadores tienen probabilidad más alta de ser cercanos a las cantidades que se estiman y son menos sesgadas; de la misma forma como se explicara más adelante, el valor de la verosimilitud es útil en la elección del mejor ajuste marginal; es decir, sirve como prueba de bondad.

## 3.2 Funciones de probabilidad de una población

En la literatura técnica se han descrito diversas funciones de probabilidad útiles en el análisis de frecuencias, cada una con características particulares. A continuación, se presentan algunas de las más utilizadas en el análisis de los flujos de agua en los ríos para realizar ajustes, se destacan las siguientes:

### 3.2.1 Función de distribución Normal

También conocida como función de Gauss, su ecuación de probabilidad esta descrita como:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (3.11)$$

Y su función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}; -\infty < x < \infty \quad (3.12)$$

Donde

x Variable aleatoria

$\mu$  Media de la muestra siendo el parámetro de ubicación también denominado  $\alpha$

$\sigma$  Desviación estándar de la muestra siendo el parámetro de escala  $\beta$

Expresada de forma gráfica la función normal es una curva con forma de campana, con un eje de simetría ubicado en el valor de la media ( $\mu$ ). La distancia que la curva presenta del eje de simetría al punto de inflexión de la curva es el valor igual a la desviación estándar ( $\sigma$ ) de la población.

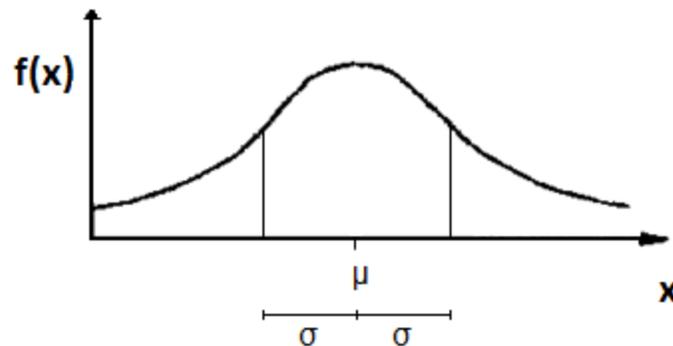


Figura 3.1 Función de distribución Normal

### 3.2.2 Función de distribución Lognormal de dos parámetros

Si el logaritmo de  $x$ , de una variable  $x$  posee distribución normal, entonces se dice que la variable  $x$  tiene una distribución normal-logarítmica, mejor conocida como distribución Lognormal; cuya ecuación de densidad se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)-\mu_y}{\sigma_y}\right]^2} \quad (3.13)$$

Donde:

$\mu_y$  Es el parámetro de ubicación  $\alpha$ , así como la media de los logaritmos de  $x$ .

$\sigma_y$  Es el parámetro de escala  $\beta$ , así como la desviación estándar de los logaritmos de  $x$ .

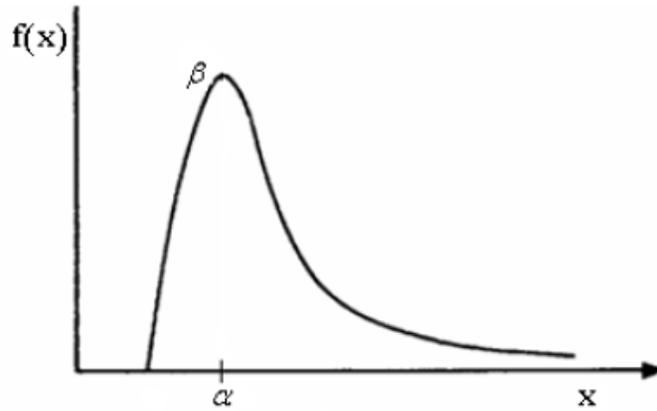


Figura 3.2 Función de distribución Lognormal

### 3.2.3 Función de distribución Lognormal de tres parámetros

La distribución de dos parámetros representa los logaritmos de la variable  $x$ , en el caso de la distribución Lognormal de 3 parámetros representa los logaritmos de la variable reducida  $x - x_0$ , donde  $x_0$  es un límite inferior. La función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x - x_0 \sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln(x-x_0) - \mu_y}{\sigma_y} \right]^2} \quad (3.14)$$

Donde

$\mu_y$  Es el parámetro de ubicación  $\alpha$ , así como la media de los logaritmos de  $x$

$\sigma_y$  Es el parámetro de escala  $\beta$ , así como la desviación estándar de los logaritmos de  $x$

$x_0$  Límite inferior de la población  $x$

### 3.2.4 Función de distribución Exponencial

Se dice que una variable tiene una distribución exponencial si su función de densidad es del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)} \quad (3.15)$$

Y su función de distribución de probabilidad es:

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-x_0}{\beta}\right)} \quad (3.16)$$

Donde

$x_0$  Es el parámetro de ubicación

$\beta$  parámetro de escala

### 3.2.5 Función de distribución Gamma

La función de probabilidad Gamma provee un modelo para variables que presentan cierto tipo de asimetría. Su función de distribución se define por (Forbes, 2011):

$$F(x) = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx \quad (3.17)$$

Y su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha \Gamma(\beta)} \left\{\frac{x}{\alpha}\right\}^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)} \quad (3.18)$$

Donde

$\alpha, \beta, \delta$  Son los parámetros de la función y

$\Gamma(\beta)$  Es la función Gamma.

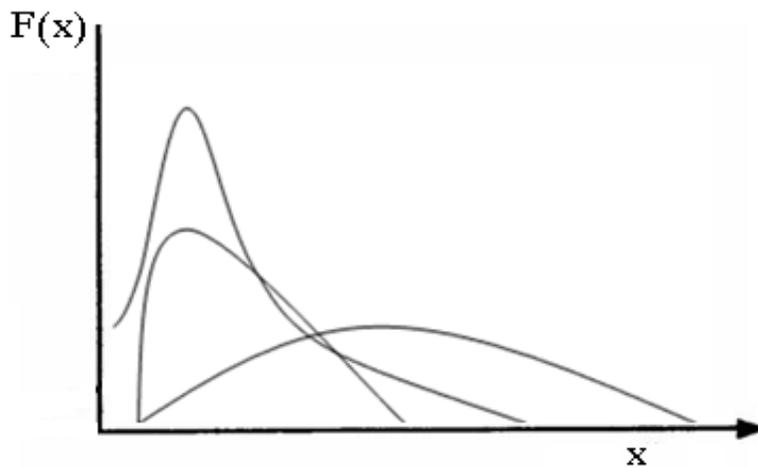


Figura 3.3 Función de distribución Gamma

### 3.2.6 Función de distribución Weibull

La función Weibull es comúnmente usada en aplicaciones de confiabilidad. La distribución de dos parámetros puede representar decrementos, constantes o incrementos en rangos de falla (Forbes, 2011).

Una variable aleatoria continua tendrá una distribución Weibull si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\beta(x)^{\beta-1}}{\alpha^\beta} e^{-(x/\alpha)^\beta} \quad (3.19)$$

Con  $x \geq 0$ , siendo  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$  los parámetros que se denominan de escala y forma respectivamente.

Su función de distribución es:

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \quad (3.20)$$

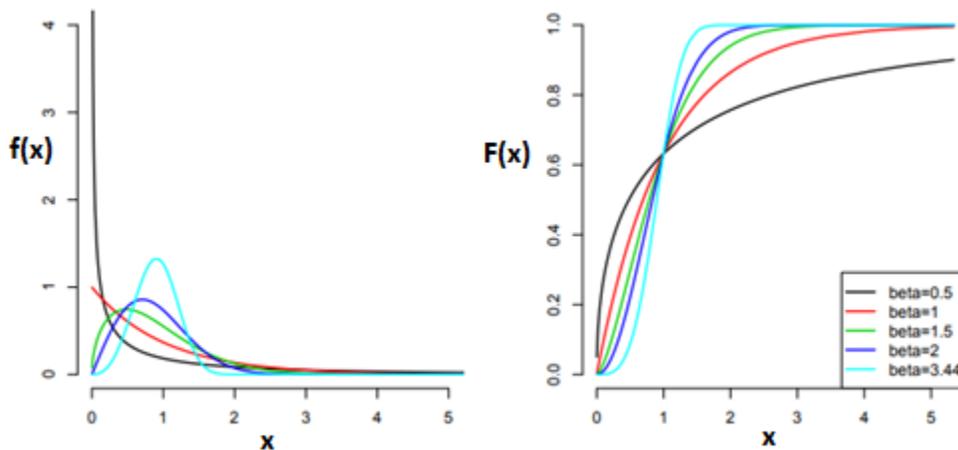


Figura 3.4 Función de distribución Weibull

### 3.2.7 Función de distribución Gumbel

Esta función también conocida como de valores extremos tipo I, es utilizada en Hidrología para determinar la probabilidad de que se presenten valores grandes de la variable aleatoria  $x$  (como sería el gasto máximo de una avenida) (Copca, 2017).

La función de distribución de probabilidad se describe a continuación:

$$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}} \quad (3.21)$$

Y la función de densidad:

$$f(x) = \alpha e^{[-\alpha(x-\beta)-e^{-\alpha(x-\beta)}]} \quad (3.22)$$

Donde

- $x$  variable aleatoria
- $\alpha$  Parámetro de ubicación
- $\beta$  Parámetro de escala

Los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  se estiman en función de la desviación estándar ( $s$ ) que se calcula:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (3.23)$$

Donde  $\bar{x}$  es la media de la muestra

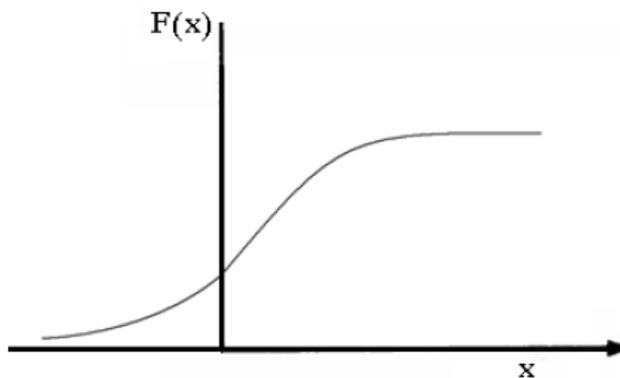


Figura 3.5 Función de distribución Gumbel

### 3.3 Funciones de distribución de probabilidad mixtas

Se han descrito las funciones de probabilidad de una población, pero existen otro tipo de distribuciones que en la práctica técnica han resultado ser bastante útiles. La característica principal de las funciones de distribución de probabilidad mixtas es que buscan ajustar de mejor manera separando los valores pequeños de los más grandes, creando dos poblaciones, esto debido a las condiciones que la naturaleza puede presentar.

En México, existen diversos lugares donde los gastos máximos anuales se agrupan en dos poblaciones diferentes. Estas variaciones también se ven reflejadas en zonas donde se tiene datos de gastos producidos por las precipitaciones monzónicas y otros gastos provenientes de las lluvias de ciclones tropicales y/o deshielos. En estas situaciones se dice que se tienen dos poblaciones para una misma zona de estudio. (Palacios C, 2010).

Al utilizar este tipo de distribuciones en ajustes probabilísticos es bastante común obtener un ajuste más bondadoso que en uno de una población, pero no necesariamente sucede así en todos los casos; es recomendable realizar el ajuste a la mayor cantidad de funciones de ambos tipos y con ayuda de las pruebas de bondad de ajuste seleccionar aquella que se aproxime mejor a la muestra.

Algunas de las funciones de distribución de probabilidad mixtas más comúnmente utilizadas se describen a continuación.

#### 3.3.1 Función de distribución Gumbel Mixta

Esta función se define por dividir la muestra en dos poblaciones como ya se explicó y a cada una de ellas aplicarle la función Gumbel, está dada por:

$$F(x) = p \left( e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}} \right) + (1 - p) \left( e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}} \right) \quad (3.24)$$

Donde  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  son los parámetros correspondientes a la población no ciclónica y  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  corresponden a la ciclónica,  $p$  es la probabilidad de que en un año cualquiera el gasto máximo no sea producido por una tormenta ciclónica. Los valores  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  se obtienen ajustando por

momentos una función Gumbel a los datos de la primera población y los valores de  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  ajustando otra función de Gumbel a los datos de la segunda población.

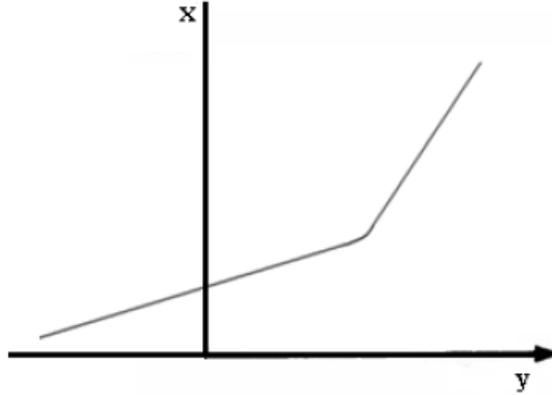


Figura 3.6 Función de distribución Gumbel Mixta

Para poder utilizar esta función es necesario estimar  $p$ , lo cual se puede realizar de diferentes maneras, puede ser al consultar los boletines meteorológicos, preguntar a los habitantes de la zona o examinando los gastos máximos anuales.

El valor de  $p$  será entonces:

$$p = \frac{N_n}{N_T} \quad (3.25)$$

Siendo  $N_n$  el número de años de registro en que el gasto máximo no se produjo por una tormenta ciclónica y  $N_T$  el número total de años de registro.

La función de densidad Gumbel Mixta está dada por:

$$f(x) = p \left( \alpha_1 e^{\{-\alpha_1(x-\beta_1)-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}\}} \right) + (1-p) \left( \alpha_1 e^{\{-\alpha_1(x-\beta_1)-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}\}} \right) \quad (3.26)$$

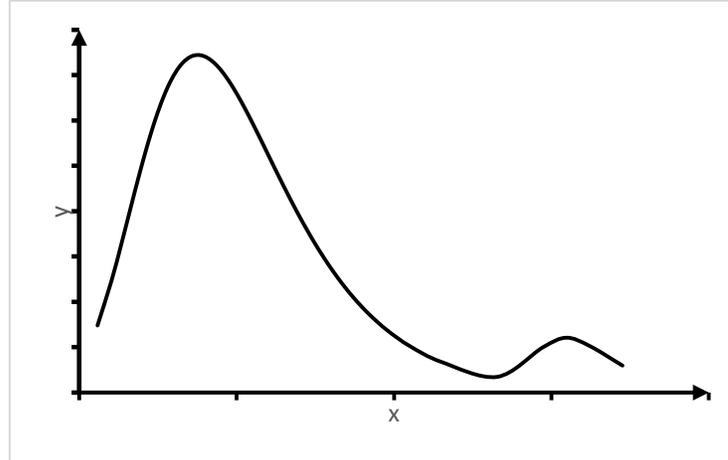


Figura 3.7 Función de densidad de probabilidad Gumbel Mixta

### 3.3.2 Función de distribución Weibull Mixta

Al igual que la distribución Gumbel mixta, esta distribución separa la muestra en dos poblaciones y calcula parámetros para cada una de ellas. La ecuación de distribución se muestra a continuación.

$$F(x) = p \left( 1 - e^{-[x/\alpha_1]^{\beta_1}} \right) + (1 - p) \left( 1 - e^{-[x/\alpha_2]^{\beta_2}} \right) \quad (3.27)$$

Y la función de densidad está dada por:

$$f(x) = p \left[ \left( \frac{\beta_1 x^{\beta_1 - 1}}{\alpha_1} \right) e^{-(x/\alpha_1)^{\beta_1}} \right] + (1 - p) \left[ \left( \frac{\beta_2 x^{\beta_2 - 1}}{\alpha_2} \right) e^{-(x/\alpha_2)^{\beta_2}} \right] \quad (3.28)$$

Donde

$\alpha_1$  Es el parámetro de escala de la población uno.

$\beta_1$  Es el parámetro de forma de la población uno.

$\alpha_2$  Es el parámetro de escala de la población dos.

$\beta_2$  Es el parámetro de forma de la población dos.

$p$  Es el factor de proporción de la muestra.

La distribución Weibull mixta se conforma de cinco parámetros, dos por cada población, más uno del factor de proporción.

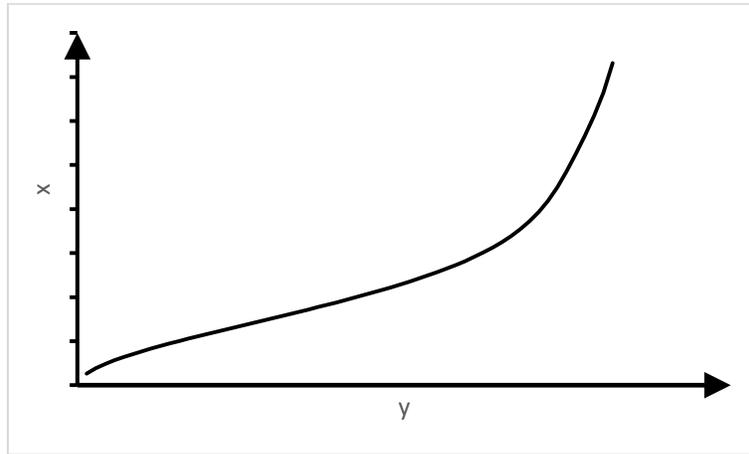


Figura 3.8 Función de distribución Weibull Mixta

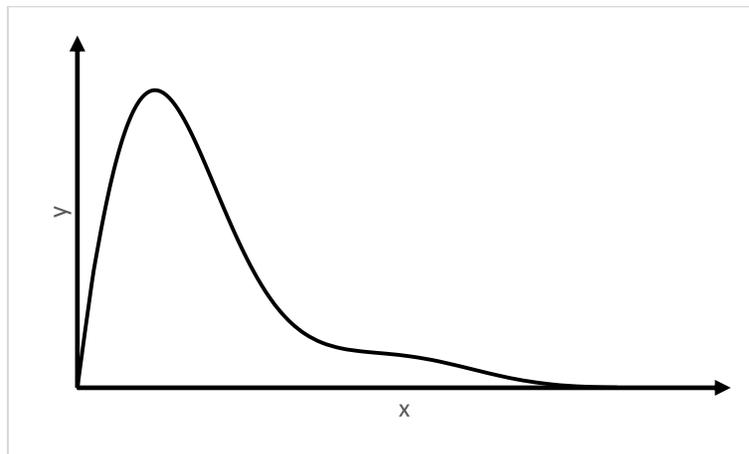


Figura 3.9 Función de densidad Weibull Mixta

### 3.3.3 Función de distribución Gamma Mixta

La función de probabilidad Gamma Mixta está dada por:

$$F(x) = p \left( \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \int_0^x e^{-\frac{x}{\alpha_1}} \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} dx \right) + (1-p) \left( \frac{1}{\alpha_2 \Gamma(\beta_2)} \int_0^x e^{-\frac{x}{\alpha_2}} \left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} dx \right) \quad (3.29)$$

Como se aprecia, esta función cuenta con 5 parámetros al igual que las dos anteriores.

Y su función de densidad es del tipo:

$$f(x) = p \left( \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{ \frac{x}{\alpha_1} \right\}^{\beta_1 - 1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)} \right) + (1 - p) \left( \frac{1}{\alpha_2 \Gamma(\beta_2)} \left\{ \frac{x}{\alpha_2} \right\}^{\beta_2 - 1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)} \right) \quad (3.30)$$

Donde

$\alpha_1$  Es el parámetro de escala de la población uno.

$\beta_1$  Es el parámetro de forma de la población uno.

$\alpha_2$  Es el parámetro de escala de la población dos.

$\beta_2$  Es el parámetro de forma de la población dos.

$p$  Es el factor de proporción de la muestra.

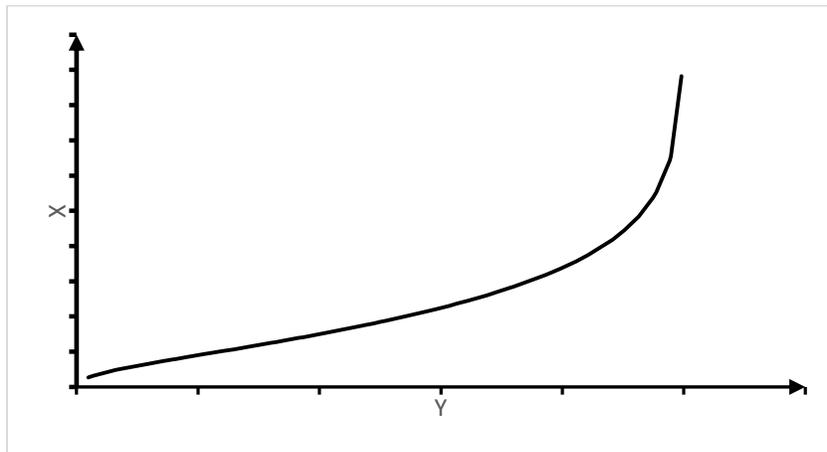


Figura 3.10 Función de distribución Gamma Mixta

En la tabla 3.1 se resumen las funciones de probabilidad descritas.

Tabla 3.1 Funciones de Probabilidad

Función de Probabilidad	Ec. de Probabilidad y Densidad	Momentos
Normal	$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2} dx$ $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}; -\infty < x < \infty$	$\mu = \alpha = \bar{x}$ $\sigma^2 = \beta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ $\gamma = 0$ $k = 3$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)-\alpha}{\beta}\right]^2} \quad x > 0$	$\mu = \exp\left(\alpha + \frac{\beta^2}{2}\right)$ $\sigma^2 = (e^{\beta^2} - 1)e^{2\alpha + \beta^2}$ $\gamma = (e^{\beta^2} + 2)\sqrt{e^{\beta^2} - 1}$ $k = (e^{\beta^2})^4 + 2(e^{\beta^2})^3 + 3(e^{\beta^2})^2 - 3$
Exponencial	$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$ $f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$	$\mu = \beta$ $\sigma^2 = \beta^2$ $\gamma = 2$ $k = 9$
Weibull	$F(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta}$ $f(x) = \frac{\beta(x)^{\beta-1}}{\alpha^\beta} e^{-(x/\alpha)^\beta}$	$\mu = \alpha\Gamma\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]$ $\sigma^2 = \alpha^2\left(\Gamma\left[\frac{\beta+2}{\beta}\right] - \left\{\Gamma\left[\frac{\beta+1}{\beta}\right]\right\}^2\right)$ $\gamma = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right)\alpha^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3}$ $\kappa = \frac{\alpha^4\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right) - 4\gamma\sigma^3\mu - 6\mu^2\sigma^2 - \mu^4}{\sigma^4}$
Gumbel	$F(x) = e^{-e^{-\alpha(x-\beta)}}$ $f(x) = \alpha e^{[-\alpha(x-\beta) - e^{-\alpha(x-\beta)}]}$	$\mu = \beta - \frac{\Gamma'(1)}{\alpha}; \Gamma'(1) = -0.57722$ $\sigma^2 = \frac{\pi^2}{\alpha^2}/6$ $\gamma = 1.139547$ $k = 5.4$
Gamma	$F(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \int_0^x e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} dx$ $f(x) = \frac{1}{\alpha\Gamma(\beta)} \left\{\frac{x}{\alpha}\right\}^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\alpha}}$	$\sigma = \alpha\sqrt{\beta}$ $\mu = \frac{2}{\sqrt{\beta}} + \sigma\sqrt{\beta}$ $\gamma = \frac{2}{\sqrt{\beta}}$

Función Mixta	Ec. de Probabilidad y Densidad
Gumbel Mixta	$F(x) = p \left( e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}} \right) + (1-p) \left( e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}} \right)$ $f(x) = p \left( \alpha_1 e^{\{-\alpha_1(x-\beta_1)-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}\}} \right) + (1-p) \left( \alpha_2 e^{\{-\alpha_2(x-\beta_2)-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}\}} \right)$
Weibull Mixta	$F(x) = p \left( 1 - e^{-[x/\alpha_1]^{\beta_1}} \right) + (1-p) \left( 1 - e^{-[x/\alpha_2]^{\beta_2}} \right)$ $f(x) = p \left[ \left( \frac{\beta_1 x^{\beta_1-1}}{\alpha_1} \right) e^{-(x/\alpha_1)^{\beta_1}} \right] + (1-p) \left[ \left( \frac{\beta_2 x^{\beta_2-1}}{\alpha_2} \right) e^{-(x/\alpha_2)^{\beta_2}} \right]$
Gamma Mixta	$F(x) = p \left( \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)} \left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1-1} dx \right) + (1-p) \left( \frac{1}{\alpha_2 \Gamma(\beta_2)} \int_0^x e^{-\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)} \left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^{\beta_2-1} dx \right)$ $f(x) = p \left( \frac{1}{\alpha_1 \Gamma(\beta_1)} \left\{ \frac{x}{\alpha_1} \right\}^{\beta_1-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)} \right) + (1-p) \left( \frac{1}{\alpha_2 \Gamma(\beta_2)} \left\{ \frac{x}{\alpha_2} \right\}^{\beta_2-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)} \right)$

### 3.4 Pruebas de bondad de ajuste

A continuación, se muestran las pruebas de bondad de ajuste recomendadas para ser aplicadas tras un ajuste de datos a una función de probabilidad; con ellas es posible analizar qué tan bueno o malo resulto el ajuste para con ello continuar con la metodología.

#### 3.4.1 Error estándar de ajuste

Existen diversas técnicas para conocer la efectividad o bondad de un ajuste, la más utilizada en la estimación de eventos hidrológicos es la técnica conocida como error estándar de ajuste, la cual fue propuesta por Kite (1988). El error estándar de ajuste permite seleccionar la mejor opción entre diferentes modelos en competencia y está dado por:

$$EE = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (\bar{Q}_E^j - Q_O^j)^2}{n_j - mp} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

Donde

$Q_O^j$  Son los valores observados con un periodo de retorno asignado

$\bar{Q}_E^j$  Son los valores estimados con la determinada función de distribución de probabilidad para cada periodo de retorno asignado.

$n_j$  Longitud en años del registro analizado

$mp$  Número de parámetros de la distribución ajustada.

La distribución con mejor ajuste será aquella que proporcione el mínimo valor de estadístico EE. Si una o más distribuciones tienen valores similares del EE, entonces, se deberá optar por aquella distribución que tenga el menor número de parámetros.

Por ejemplo, para el ajuste siguiente desarrollado con una función de distribución exponencial, se aprecian los valores observados y los valores estimados para cada uno de ellos con el ajuste, ambos de gastos en un río. Con ellos se puede calcular el valor del error estándar de ajuste con la ecuación dada.

*Tabla 3.2 Ejemplo de gastos observados contra estimados*

año	Gasto Observado m <sup>3</sup> /s	Gasto Estimado m <sup>3</sup> /s
1	5395.38	4766.53
2	5119.19	4028.99
3	3644.91	3597.56
4	3449.85	3291.45
5	3196.86	3054.02
6	3052.97	2860.02
7	2626.83	2695.99
8	2424.16	2553.91
9	2353.30	2428.58
10	2275.01	2316.48
11	2100.67	2215.06
12	2086.48	2122.48
13	1995.88	2037.31
14	1963.27	1958.45
15	1827.46	1885.04
suma=	43512.22	41811.86

Para este caso se consideran 15 valores, y al ser un ajuste a la distribución exponencial por el método de momentos, el número de parámetros  $mp$  resulta ser de 2. Por lo tanto, el error estándar de ajuste para este caso resulta.

$$EE = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (\bar{Q}_E^j - Q_O^j)^2}{n_j - mp} \right]^{1/2} = \left[ \frac{(41811.86 - 43512.22)^2}{15 - 2} \right]^{1/2} = 471.59$$

Con este valor de error estándar de ajuste, se comparará con los errores obtenidos al aplicar ajustes a otras funciones de probabilidad, la función que ajuste con el menor error de ajuste será la más bondadosa.

### 3.4.2 Error Estándar de Ajuste Adimensional

El error estándar de ajuste descrito en el apartado anterior es quizá la prueba más utilizada en hidrología, pero cuenta con un pequeño inconveniente, posee las mismas unidades de la variable analizada, lo que en muchas ocasiones puede generar confusión en la comparación y un desconocimiento de cual efectivo es el ajuste. Por ello se ha propuesto convertir al error estándar de ajuste en un resultado sin dimensiones. El error estándar de ajuste adimensional estará dado por:

$$EEAd = \frac{EE}{\mu_0} \quad (3.28)$$

Donde EE es el error estándar de ajuste y  $\mu_0$  es la media de los valores estimados.

Para el ejemplo del apartado interior será:

$$EEAd = \frac{471.59}{2787.45} = 0.169$$

Este valor nos indica que cada valor estimado difiere hasta un 16.9% del valor observado. Y el ajuste que arroje el EEAd más bajo será el mejor.

### 3.4.3 Prueba de Kolmogórov-Smirnov

A diferencia del método del error estándar de ajuste, la prueba de Kolmogórov-Smirnov evalúa valores de probabilidad, en lugar de valores de gasto o volumen para así determinar la bondad de un ajuste probabilístico.

El estadístico de Kolmogórov-Smirnov (KS) es representado por la máxima diferencia “D” entre la distribución empírica  $P(x)$  y la hipotética distribución de probabilidad real  $F(x)$ , dada por (Zhang, 2007):

$$KS = \max|F(x) - P(x)| \tag{3.29}$$

La bondad del ajuste puede ser evaluada como:

$$P\{\max|F(x) - P(x)| \geq \Delta_0\} = \alpha \tag{3.30}$$

Donde

$\Delta_0$  Es el valor crítico para el tamaño  $\alpha$

Si  $KS \leq \Delta_0$  se acepta que el ajuste es adecuado.

El menor valor de KS será aquel que resulte en un mejor ajuste.

Un ejemplo de cómo calcular el estadístico KS se muestra a continuación:

Se supone la siguiente probabilidad empírica y la probabilidad obtenida con el ajuste a una función en cuestión. Se obtiene el valor absoluto de la diferencia entre ellos.

*Tabla 3.3 Ejemplo de probabilidad observada  $P(x)$  contra estimada  $F(x)$ .*

$P(x)$	$F(x)$	$ F(x)-P(x) $
0.983050847	0.971961362	0.01108949
0.966101695	0.945955496	0.0201462
0.949152542	0.943445671	0.00570687
0.932203390	0.923375141	0.00882825
0.915254237	0.918521607	0.00326737
0.898305085	0.900773200	0.00246812
0.881355932	0.884224399	0.00286847
0.864406780	0.870782334	0.00637555
0.847457627	0.843446755	0.00401087
0.830508475	0.830564441	5.5967E-05
0.813559322	0.826076401	0.01251708
0.796610169	0.811532510	0.01492234
0.779661017	0.810355883	0.03069487
0.762711864	0.804683466	0.0419716
0.745762712	0.796198537	0.05043583

De esa diferencia se encuentra el máximo valor, en este caso será de 0.0504 y este valor será el del estadístico KS, el mejor ajuste será aquel que presente el menor valor de KS.

### 3.4.4 Prueba de Anderson-Darling

La prueba Anderson-Darling (1952) enfatiza discrepancias en ambas colas de la distribución y es una de las que usualmente tiene una importancia primordial en el análisis de frecuencias de carácter hidrológico. El proceso puede ser descrito como sigue. (Coronel-Brizio, Hernández-Montoya, 2010).

1. Se acomoda la muestra en orden ascendente.
2. Se asigna un nuevo orden siendo el valor de 1 al valor menor y n el mayor.
3. Se calcula el estadístico  $A^2$  de la prueba de Anderson-Darling

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{(2i - 1)(\ln F_0[x(i)] + \ln\{1 - F_0[x_{(n-i+1)}]\})}{n} \quad (3.31)$$

Donde

$x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$  son los valores observados ordenados de menor a mayor.

$F_0[x(i)]$  Es la probabilidad estimada con la función de distribución elegida para el valor de i.

$F_0[x_{(n-i+1)}]$  Es la probabilidad estimada para el valor de n-i+1.

n Es el número de datos de la serie.

Debido a que las probabilidades se encuentran en el rango de 0 a 1, sus logaritmos son negativos y de ahí la sumatoria en el lado derecho de la ecuación es negativo. El valor absoluto de la suma también es mayor que n, lo que resulta en un valor positivo de  $A^2$ .

Para valores grandes del estadístico  $A^2$ , la hipótesis de que  $F_n(x)$  y  $F_0(x)$  tienen la misma distribución es rechazada.

Como ejemplo de cálculo se muestran a continuación los siguientes valores observados de una variable  $x$  ordenados de menor a mayor, y su correspondiente probabilidad  $F(x)$  calculada con la distribución y parámetros elegidos para el ajuste.

*Tabla 3.4 Ejemplo de valores para aplicar la prueba Anderson-Darling*

n	x	F(x)
1	54.369	0.00916407
2	63.491	0.01685779
3	93.605	0.05944609
4	94.812	0.06161026
5	100.506	0.0721878
6	130.562	0.1353307
7	147.371	0.173568
8	149.599	0.17869541
9	154.917	0.19095445
10	157.064	0.19590697

Para calcular el primer valor de la sumatoria del lado derecho de la ecuación

$$F_0[x_{(10-1+1)}] = F_0[x_{(10)}]$$

$$k = \frac{(2i - 1)(\ln F_0[x(i)] + \ln\{1 - F_0[x_{(n-i+1)}]\})}{n}$$

$$\frac{(2(1) - 1)(\ln(0.009164) + \ln(1 - 0.1959))}{10} = -.4910$$

Entonces el valor de  $k$  resulta en:

*Tabla 3.5 Cálculo del valor  $k$  para la prueba Anderson-Darling*

n	x	F(x)	k
1	54.369	0.0092	-0.4911
2	63.491	0.0169	-1.2885
3	93.605	0.0594	-1.5098
4	94.812	0.0616	-2.0843
5	100.506	0.0722	-2.4965
6	130.562	0.1353	-2.2825
7	147.371	0.1736	-2.3592
8	149.599	0.1787	-2.6750
9	154.917	0.1910	-2.8436
10	157.064	0.1959	-3.1147
		suma=	-21.1451

Por lo tanto,  $A^2$  será:

$$A^2 = -10 - (-21.1451) = 11.1451$$

### 3.4.5 Criterio de la información de Akaike (CIA)

El criterio de información de Akaike es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico, para una determinada muestra de datos se define como (Akaike, 1974):

$$CIA = -2Ln(l) + 2k \quad (3.32)$$

Donde  $k$  es el número de parámetros en el modelo estadístico y  $l$  es el máximo valor de la función de verosimilitud para el modelo estimado.

Dado un conjunto de ajustes candidatos para los datos, el ajuste preferido es el que tiene el valor más cercano a cero de CIA, debido a que se interpreta como la cantidad de la información que se perdió en el proceso.

El criterio de Akaike no proporciona una prueba de un ajuste en el sentido de probar una hipótesis nula, es decir, no puede decir nada acerca de la calidad del ajuste en un sentido absoluto. Si todos los ajustes candidatos encajan mal, el criterio de información de Akaike no dará ningún aviso de ello.

## 3.5 Ajustes a funciones de distribución caso La Angostura.

En la estimación de un hidrograma de diseño el ajuste probabilístico a funciones de distribución es de lo más común, puesto que permite estimar los valores de una variable a determinado periodo de retorno. Usualmente se realiza a los gastos máximos anuales, se obtienen los parámetros a la función o funciones deseadas y se extrapolan valores del gasto a los periodos de retorno deseados, y así se encontrará el valor del  $Q_p$ . Pero para hidrogramas con características bivariadas esto no es suficiente; para estos casos al ser dos variables el proceso es muy parecido, se debe realizar el ajuste para ambas series de datos, y obtener los

parámetros de estas para cada función de distribución, para con ello obtener la probabilidad bivariada como se verá en el capítulo siguiente.

Para el caso de estudio de la presa Gral. Lázaro Cárdenas, La Angostura se cuenta con cuatro variables para cada duración, ocho en total. Esto debido a los dos criterios de selección de datos. Se tiene la variable de gasto y la de volumen para gasto prioridad, y las mismas dos, pero para volumen prioridad.

Para cada una de ellas se debe realizar el ajuste a las funciones de probabilidad, y con ayuda de las pruebas de bondad de ajuste seleccionar aquella que se apegue más a los datos.

Como ya se mencionó, entre más funciones de distribución sean utilizadas para realizar los ajustes, se tendrá mayor oportunidad de encontrar la que mejor se aproxime. Las funciones de probabilidad a usar serán de dos tipos, de una población y mixtas; las segundas como ya se mencionó poseen una cierta ventaja sobre las primeras, debido que como su nombre lo indica dividen la muestra en dos poblaciones de acuerdo con los rangos de valores de la muestra para con ello aproximarse más a ella.

Las funciones de distribución utilizadas en el análisis de La Angostura serán Weibull, Gumbel, Gamma, Lognormal, Loggamma todas de una población y de 2 parámetros para elegir aquellas que se realiza de forma mixta.

La razón de solamente utilizar distribuciones que cuenten con el mismo número de parámetros (2) es debido a que se desea analizar el efecto de los ajustes en los resultados finales, dándoles el mismo nivel de incertidumbre para que la comparación sea justa. Utilizar funciones que tengan 2, 3, 5 o 6 parámetros es lo que usualmente se hace y es correcto pues se busca aquella que tenga mejor aproximación a los datos reales, pero entre más parámetros tenga una función posee más grados de libertad para poder aproximarse y por lo tanto más incertidumbre genera. Se utilizan dos parámetros precisamente para que la comparación sea justa. Como se elegirán las mejores funciones de una población para hacerlas mixtas, están resultaran de 5 parámetros y de igual forma, son comparables entre ellas.

Las pruebas de bondad de ajuste utilizadas son el error estándar de ajuste, la prueba de Kolmogórov-Smirnov, la prueba de Anderson-Darling y como se mencionó anteriormente el criterio de información de Akaike.

Para realizar los ajustes es posible desarrollarlos a mano o con ayuda de software, para ello, de las funciones elegidas se generó código de programación en lenguaje C++, para facilitar el cálculo debido a que se realizaron numerosos ajustes.

### 3.5.1 Ajustes a funciones de distribución de 1 población

#### 3.5.1.1 Duración 35 días

##### Gasto-Gasto Prioridad

La primera muestra de datos es la recopilada de Gastos de los hidrogramas registrados para el criterio de Gasto Prioridad, 58 datos en total, mostrados en la tabla 2.3 los cuales se ajustan a las funciones de probabilidad ya mencionadas. Se utiliza el método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros y se aplican las pruebas de bondad de ajuste.

Los valores calculados con el ajuste resultaron en los siguientes:

Tabla 3.6 Valores de Gasto-QP calculados mediante diferentes funciones de probabilidad

Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s día]					
		Funciones de una población					
Gasto-Qp		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
1764.69	59	1253.70	1380.46	1194.46	1778.76	1430.28	2178.02
1312.09	29.5	1091.47	1175.82	1092.27	1417.03	1235.52	1624.36
1284.02	19.667	995.71	1053.45	1026.56	1225.81	1119.43	1350.41
1106.10	14.75	927.15	965.24	976.56	1096.60	1035.83	1175.79
1072.12	11.8	873.47	895.91	935.48	1002.19	970.17	1050.71
967.42	9.833	829.20	838.61	900.18	925.74	915.87	954.81
889.87	8.429	791.41	789.68	868.94	864.31	869.48	877.91
836.90	7.375	758.35	746.89	840.71	811.90	828.87	814.25
748.65	6.556	728.89	708.81	814.81	767.33	792.70	760.28
713.80	5.9	702.27	674.48	790.76	727.42	760.03	713.66
702.47	5.364	677.93	643.17	768.21	691.70	730.21	672.79
668.23	4.917	655.47	614.37	746.89	659.74	702.72	636.52
665.61	4.538	634.58	587.69	726.61	630.22	677.20	604.00
653.28	4.214	615.02	562.81	707.21	603.87	653.37	574.60
635.69	3.933	596.60	539.48	688.55	579.49	630.97	547.82
582.35	3.688	579.16	517.51	670.54	556.95	609.83	523.26
566.39	3.471	562.57	496.74	653.08	536.11	589.79	500.61

Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s día]					
		Funciones de una población					
Gasto-Qp		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
564.34	3.278	546.74	477.03	636.10	516.04	570.72	479.62
540.87	3.105	531.56	458.26	619.53	497.48	552.52	460.08
520.49	2.95	516.97	440.34	603.32	479.60	535.09	441.81
489.63	2.81	502.91	423.18	587.43	463.06	518.35	424.66
472.32	2.682	489.30	406.72	571.79	447.77	502.23	408.52
461.08	2.565	476.11	390.89	556.38	432.33	486.69	393.28
444.50	2.458	463.29	375.63	541.16	418.06	471.65	378.84
431.35	2.36	450.80	360.90	526.10	404.26	457.09	365.13
407.35	2.269	438.61	346.66	511.16	391.51	442.94	352.07
375.34	2.185	426.68	332.87	496.32	378.58	429.19	339.62
369.29	2.107	414.99	319.49	481.54	366.64	415.79	327.70
361.64	2.034	403.50	306.49	466.81	354.54	402.72	316.28
360.97	1.967	392.19	293.85	452.08	343.36	389.94	305.31
359.71	1.903	381.04	281.54	437.35	332.02	377.44	294.75
349.55	1.844	370.03	269.54	422.57	321.55	365.18	284.58
347.86	1.788	359.13	257.82	407.73	310.94	353.15	274.75
310.04	1.735	348.32	246.37	392.79	301.13	341.33	265.24
282.28	1.686	337.59	235.17	377.73	291.19	329.68	256.02
279.32	1.639	326.90	224.21	362.51	281.58	318.21	247.07
278.99	1.595	316.24	213.46	347.10	271.87	306.88	238.36
261.52	1.553	305.59	202.91	331.46	262.89	295.68	229.88
254.92	1.513	294.92	192.55	315.57	253.83	284.59	221.60
250.31	1.475	284.21	182.36	299.36	244.70	273.60	213.50
239.77	1.439	273.44	172.34	282.79	235.90	262.68	205.57
227.31	1.405	262.57	162.47	265.81	227.07	251.81	197.78
213.76	1.372	251.57	152.73	248.35	218.57	240.99	190.11
203.14	1.341	240.41	143.13	230.34	210.07	230.18	182.55
190.78	1.311	229.05	133.63	211.68	201.59	219.36	175.08
186.75	1.283	217.44	124.24	192.28	193.16	208.51	167.67
169.14	1.255	205.52	114.94	172.00	184.52	197.60	160.31
157.64	1.229	193.22	105.71	150.68	175.99	186.59	152.96
157.06	1.204	180.46	96.55	128.13	167.35	175.46	145.60
154.92	1.18	167.13	87.43	104.08	158.89	164.14	138.18
149.60	1.157	153.09	78.35	78.18	149.94	152.58	130.68
147.37	1.135	138.14	69.27	49.96	140.85	140.71	123.02
130.56	1.113	122.00	60.17	18.71	131.50	128.42	115.14
100.51	1.093	104.26	51.02	0	121.47	115.55	106.92
94.81	1.073	84.25	41.78	0	111.01	101.90	98.18
93.61	1.054	60.77	32.36	0	99.31	87.06	88.63
63.49	1.035	31.27	22.65	0	85.91	70.31	77.67
54.37	1.017	-11.80	12.38	0	68.44	49.72	63.58

Los cuales se obtuvieron con los siguientes parámetros estimados con el método de máxima verosimilitud:

Tabla 3.7 Parámetros de ajuste obtenidos para la variable Gasto-GP para las funciones seleccionadas

Parámetros	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
$\alpha$	0.004326	524.3174	459.4449	5.8548	240.1431	0.1204
$\beta$	313.0995	1.598	346.4987	0.7677	1.946167	47.998672

Y al aplicar las pruebas de bondad de ajuste se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 3.8 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas variable, Gasto-GP

Prueba	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
EE	98.781	90.979	117.469	29.0927	59.0666	83.18222
EEAd	0.224	0.239	0.250	0.065	0.127	0.188
Max. Log. de Verosimilitud	-410.550	-405.595	-421.500	-67.075	-405.595	-67.980
Anderson-Darling	0.634	0.3897	2.1007	0.1678	0.3205	0.7906
Kolmogórov-Smirnov	0.088	0.060	0.138	0.058	0.071	0.113
Akaike	-825.10	-815.19	-847.00	-138.15	-815.19	-135.96

La función Lognormal es la que arroja mejores resultados según las pruebas de bondad de ajuste, seguido de las funciones Weibull, Gamma y Gumbel.

Y la extrapolación para cada una de estas funciones resulto en:

Tabla 3.9 Extrapolaciones marginales de Gasto-GP a diferentes Tr para las funciones utilizadas, [m<sup>3</sup>/s].

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2	397.824	576.955	459.445	349.17	396.296	310.740047
5	659.831	1137.243	751.066	665.812	708.049	643.446763
10	833.302	1517.576	903.502	932.833	920.902	963.424244
50	1215.085	2325.828	1171.066	1688.833	1384.14	2035.21306
100	1376.485	2652.446	1265.522	2081.489	1576.087	2682.52683
200	1537.297	2969.604	1351.967	2518.89	1765.131	3473.36763
500	1749.46	3376.79	1456.732	3181.261	2011.625	4784.99156
1000	1909.806	3677.034	1530.216	3739.758	2196.018	6019.35774
2000	2070.08	3971.466	1599.629	4362.89	2378.989	7503.54211
5000	2281.969	4352.818	1686.179	5287.763	2619.077	9923.98373
10000	2442.142	4635.991	1748.142	6066.152	2800.619	12168.2582

En el siguiente gráfico se muestra los ajustes a funciones de una distribución contra sus valores medidos.

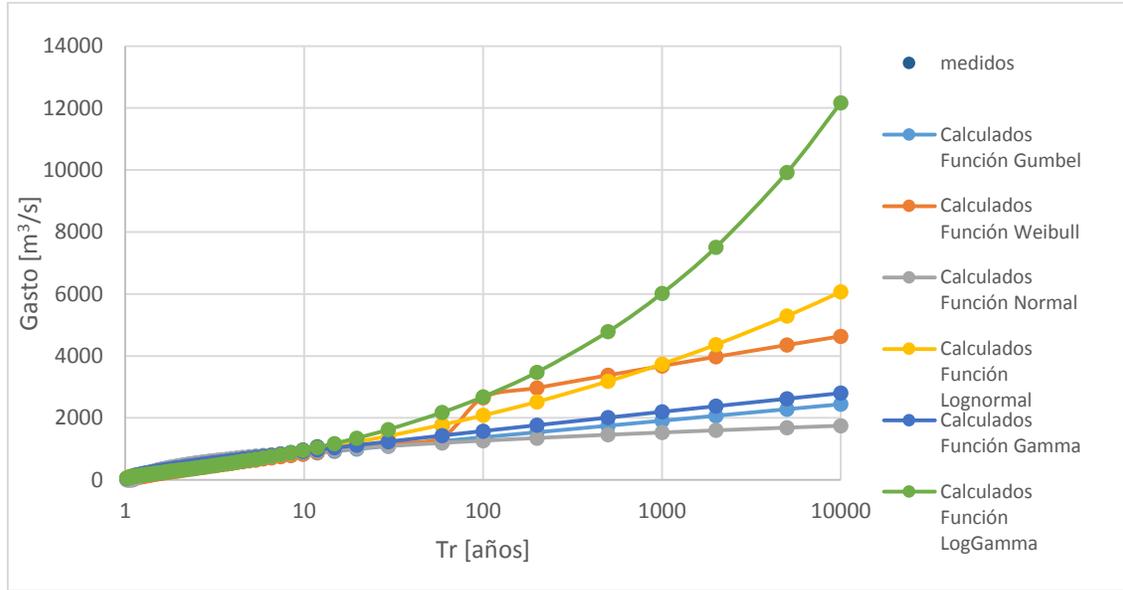


Figura 3.11 Ajustes a funciones de distribución de una población Gasto-GP 35 días

### Volumen-Gasto Prioridad

Ahora se realizan los ajustes de la misma forma, pero para los datos correspondientes a la variable volumen obtenidos por el criterio Volumen Prioridad que se pueden apreciar en la tabla 2.3.

Tabla 3.10 Valores de Volumen-GP calculados para las funciones seleccionadas

Datos	Tr	Calculados [m³/s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
7374.602	59	6352.588	6722.841	5971.292	9130.861	6873.064	11590.952
7203.824	29.5	5546.018	5949.088	5475.081	7329.692	5951.208	8784.280
6546.401	19.667	5069.926	5471.171	5155.977	6369.701	5400.209	7370.882
6103.747	14.75	4729.051	5118.411	4913.221	5715.691	5002.603	6459.708
5872.248	11.8	4462.191	4835.778	4713.746	5231.585	4689.668	5801.537
4715.42	9.833	4242.086	4598.269	4542.320	4847.292	4430.567	5293.469
4382.063	8.429	4054.191	4392.329	4390.631	4532.536	4208.788	4883.720
4096.385	7.375	3889.820	4209.761	4253.577	4270.677	4014.425	4542.822
4090.196	6.556	3743.370	4045.213	4127.824	4036.245	3841.069	4252.524
3826.654	5.9	3611.012	3894.992	4011.040	3832.184	3684.255	4000.796
3642.047	5.364	3490.012	3756.438	3901.536	3649.561	3540.897	3779.326
3544.957	4.917	3378.350	3627.569	3798.040	3486.263	3408.652	3582.145
3493.088	4.538	3274.490	3506.866	3699.573	3340.451	3285.736	3404.837
3438.051	4.214	3177.236	3393.141	3605.361	3205.625	3170.756	3244.048
3413.256	3.933	3085.636	3285.440	3514.776	3076.241	3062.609	3097.177
2663.36	3.688	2998.922	3182.991	3427.314	2961.102	2960.401	2962.167
2657.257	3.471	2916.464	3085.157	3342.539	2850.272	2863.406	2837.369
2620.025	3.278	2837.736	2991.405	3260.088	2747.780	2771.009	2721.439
2594.782	3.105	2762.296	2901.284	3179.644	2653.019	2682.690	2613.270

Datos Volumen- Qp	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2543.052	2.95	2689.768	2814.409	3100.939	2561.525	2598.022	2511.938
2537.182	2.81	2619.826	2730.451	3023.734	2476.964	2516.628	2416.668
2491.987	2.682	2552.191	2649.120	2947.818	2395.194	2438.177	2326.799
2403.627	2.565	2486.614	2570.163	2873.001	2316.123	2362.390	2241.766
2393.432	2.458	2422.878	2493.358	2799.102	2243.083	2289.014	2161.082
2148.866	2.36	2360.788	2418.507	2725.958	2169.034	2217.829	2084.324
2030.912	2.269	2300.167	2345.430	2653.423	2100.633	2148.635	2011.121
2007.266	2.185	2240.858	2273.967	2581.351	2034.388	2081.261	1941.147
1925.566	2.107	2182.713	2203.973	2509.604	1973.241	2015.538	1874.114
1915.336	2.034	2125.599	2135.313	2438.059	1911.014	1951.333	1809.764
1872.487	1.967	2069.388	2067.864	2366.575	1850.749	1888.488	1747.868
1844.92	1.903	2013.963	2001.512	2295.032	1792.385	1826.896	1688.218
1765.202	1.844	1959.211	1936.151	2223.277	1735.861	1766.439	1630.627
1762.472	1.788	1905.021	1871.678	2151.206	1681.120	1707.006	1574.923
1754.886	1.735	1851.289	1807.998	2078.670	1628.105	1648.496	1520.949
1723.558	1.686	1797.910	1745.020	2005.531	1576.762	1590.807	1468.560
1615.117	1.639	1744.778	1682.653	1931.631	1527.038	1533.847	1417.623
1594.148	1.595	1691.788	1620.811	1856.808	1476.627	1477.521	1368.011
1513.091	1.553	1638.831	1559.408	1780.895	1427.881	1421.739	1319.605
1511.765	1.513	1585.792	1498.356	1703.693	1380.743	1366.411	1272.291
1493.525	1.475	1532.552	1437.570	1625.022	1333.126	1311.442	1225.961
1441.507	1.439	1478.981	1376.958	1544.546	1285.189	1256.741	1180.507
1435.028	1.405	1424.937	1316.428	1462.091	1238.975	1202.205	1135.824
1277.227	1.372	1370.265	1255.881	1377.316	1194.423	1147.731	1091.806
1273.017	1.341	1314.786	1195.212	1289.849	1149.718	1093.206	1048.343
1215.074	1.311	1258.298	1134.303	1199.271	1103.313	1038.507	1005.323
1017.487	1.283	1200.564	1073.029	1105.059	1058.782	983.497	962.624
888.439	1.255	1141.301	1011.242	1006.594	1012.952	928.016	920.114
865.383	1.229	1080.166	948.778	903.096	967.628	871.880	877.643
860.384	1.204	1016.734	885.438	793.590	921.515	814.869	835.039
825.956	1.18	950.461	820.984	676.802	876.262	756.714	792.094
823.389	1.157	880.635	755.122	551.050	828.161	697.076	748.552
815.245	1.135	806.287	687.472	414.000	779.126	635.507	704.080
780.747	1.113	726.043	617.532	262.311	728.534	571.405	658.224
748.875	1.093	637.845	544.598	90.890	676.049	503.902	610.333
612.344	1.073	538.370	467.626	0.000	618.789	431.671	559.390
577.291	1.054	421.649	384.916	0.000	555.255	352.479	503.643
419.132	1.035	274.988	293.292	0.000	482.532	261.987	439.516
133.518	1.017	60.854	185.046	0.000	387.347	149.158	357.074

Los parámetros resultantes fueron:

Tabla 3.11 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP

Parámetros	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
$\alpha$	0.00087	2683.2456	2402.3149	7.5392	1105.1365	0.0897
$\beta$	1676.1615	1.5419	1682.4569	0.7451	2.170698	83.76162

Y al aplicar las pruebas de bondad de ajuste los resultados son los siguientes:

*Tabla 3.12 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP*

Prueba	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
EE	457.169	355.138	563.1617	283.0813	349.9215	644.276798
EEAd	0.198	0.149	0.231	0.118	0.156	0.261
Max. Log. de Verosimilitud	-503.190	-502.235	-513.114	-65.574	-501.252	-67.510
Anderson-Darling	0.666	0.5899	2.341	0.335	0.5678913	0.76086612
Kolmogórov-Smirnov	0.080	0.099	0.167	0.070	0.072	0.108
Akaike	-1010.38	-1008.47	-1030.23	-135.15	-1006.50	-139.02

De nueva cuenta, y a pesar de que son valores de volumen y no de gasto, la función que mejor se ajusta es la Lognormal, es mejor en el EE, EEAd, Anderson-Darling y Kolmogórov-Smirnov y el valor de la verosimilitud de igual forma es el más cercano a cero. Las siguientes son la función Gamma, Weibull y Gumbel, que varían un poco la posición respecto a cada prueba, pero son parecidas entre sí.

Y la extrapolación marginal con cada función se muestra en la siguiente tabla.

*Tabla 3.13 Extrapolación a diferentes Tr, variable Volumen-GP [m<sup>3</sup>/s día]*

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2	2097.388	2101.444	2402.316	1879.206	1919.742	1778.52306
5	3400.015	3652.646	3818.308	3518.327	3434.305	3619.86815
10	4262.466	4620.429	4558.468	4884.416	4454.59	5339.22536
50	6160.588	6542.482	5857.655	8682.47	6654.889	10872.7087
100	6963.028	7281.727	6316.293	10636.036	7561.464	14100.9536
200	7762.54	7983.534	6736.04	12812.293	8451.984	17962.8433
500	8817.359	8864.57	7245.695	16058.45	9610.748	24214.7714
1000	9614.555	9501.561	7601.547	18791.426	10476.146	29962.615
2000	10411.395	10116.913	7938.578	21822.398	11333.22	36736.4882
5000	11464.849	10901.531	8358.792	26287.514	12457.443	47529.5635
10000	12261.185	11475.894	8660.001	30019.451	13301.632	57313.0865

Gráficamente los ajustes se pueden apreciar en la figura 3.12

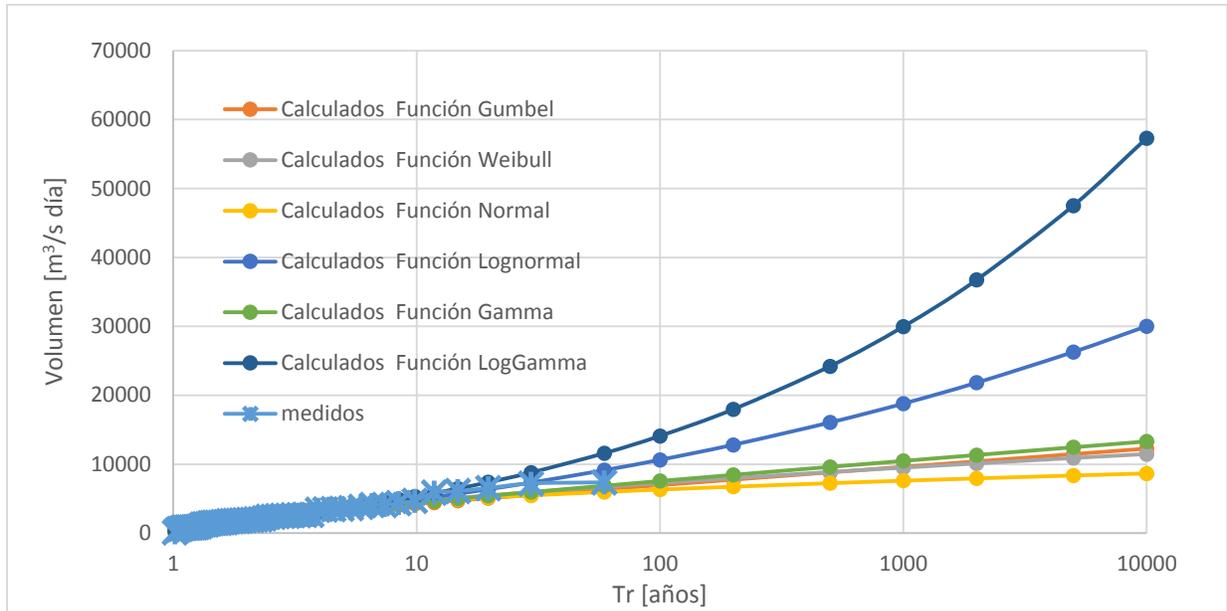


Figura 3.12 Ajustes a distribuciones de una población Volumen-QP 35 días

### Gasto-Volumen Prioridad

Se ajustan los valores de gasto, pero ahora para los obtenidos para el criterio de Volumen Prioridad, se espera que exista variación en los resultados del ajuste con respecto a los de gasto prioridad.

Tabla 3.14 Valores de Gasto-VP calculados para las funciones seleccionadas

Datos	Tr	Calculados [m³/s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
1764.687	59	1144.597	1490.642	1137.957	1709.575	1310.661	2073.863
1312.088	29.5	993.115	1282.860	1036.405	1339.243	1125.956	1551.008
1284.023	19.667	903.701	1157.518	971.095	1146.214	1016.237	1291.686
1106.095	14.75	839.681	1066.576	921.413	1017.599	937.448	1126.122
889.874	11.8	789.563	994.732	880.586	922.922	875.691	1007.389
836.904	9.833	748.225	935.090	845.503	848.629	824.749	916.264
748.648	8.429	712.936	883.940	814.458	787.492	781.292	843.129
713.799	7.375	682.066	839.049	786.410	736.357	743.328	782.537
668.225	6.556	654.561	798.966	760.673	691.701	709.569	731.128
665.607	5.9	629.703	762.696	736.772	653.731	679.127	686.697
665.607	5.364	606.978	729.523	714.360	619.734	651.376	647.723
659.828	4.917	586.007	698.919	693.177	589.301	625.847	613.119
653.278	4.538	566.501	670.477	673.024	561.218	602.183	582.081
582.353	4.214	548.236	643.882	653.744	536.106	580.107	554.000
566.386	3.933	531.033	618.883	635.204	512.118	559.401	528.407
564.343	3.688	514.747	595.275	617.303	490.699	539.884	504.929
540.874	3.471	499.261	572.891	599.953	470.894	521.411	483.270

Datos Gasto-VP	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
489.632	3.278	484.475	551.592	583.078	452.578	503.860	463.187
477.3	3.105	470.307	531.262	566.614	434.974	487.131	444.481
472.317	2.95	456.685	511.799	550.508	418.055	471.135	426.987
461.083	2.81	443.549	493.119	534.706	403.023	455.799	410.566
385.888	2.682	430.847	475.147	519.169	387.938	441.059	395.100
375.344	2.565	418.531	457.820	503.857	373.988	426.858	380.488
369.291	2.458	406.561	441.082	488.733	360.540	413.148	366.643
360.966	2.36	394.900	424.881	473.766	348.107	399.886	353.490
359.71	2.269	383.515	409.174	458.934	336.102	387.033	340.963
329.784	2.185	372.376	393.922	444.167	324.511	374.553	329.004
310.041	2.107	361.456	379.089	429.484	312.842	362.417	317.562
306.794	2.034	350.729	364.642	414.840	302.053	350.596	306.591
278.988	1.967	340.172	350.552	400.210	291.636	339.065	296.051
261.518	1.903	329.763	336.794	385.566	281.579	327.799	285.905
254.921	1.844	319.480	323.342	370.883	271.868	316.777	276.121
250.308	1.788	309.302	310.173	356.132	262.492	305.981	266.667
239.769	1.735	299.211	297.268	341.287	253.440	295.388	257.517
227.306	1.686	289.186	284.606	326.318	244.326	284.983	248.645
226.907	1.639	279.207	272.170	311.193	235.900	274.748	240.028
205.65	1.595	269.255	259.941	295.881	227.418	264.668	231.643
203.788	1.553	259.309	247.904	280.343	218.906	254.726	223.471
203.141	1.513	249.348	236.042	264.543	210.712	244.906	215.490
190.775	1.475	239.349	224.340	248.435	202.826	235.195	207.683
186.75	1.439	229.288	212.784	231.971	194.937	225.577	200.031
165.867	1.405	219.138	201.359	215.097	187.354	216.035	192.515
157.064	1.372	208.870	190.049	197.746	179.792	206.554	185.118
147.02	1.341	198.451	178.840	179.845	172.010	197.118	177.821
146.571	1.311	187.842	167.717	161.308	164.564	187.708	170.604
140.305	1.283	176.999	156.663	142.025	157.201	178.304	163.448
133.791	1.255	165.869	145.662	121.873	149.710	168.886	156.329
133.348	1.229	154.387	134.695	100.692	142.358	159.427	149.223
130.562	1.204	142.474	123.741	78.280	134.955	149.899	142.100
124.175	1.18	130.027	112.776	54.377	127.352	140.267	134.927
123.37	1.157	116.913	101.772	28.640	119.811	130.487	127.659
121.906	1.135	102.950	90.695	0.591	112.032	120.505	120.241
102.005	1.113	87.879	79.502	0.000	103.961	110.244	112.599
100.506	1.093	71.315	68.134	0.000	95.592	99.597	104.622
93.605	1.073	52.633	56.509	0.000	86.698	88.402	96.143
83.01	1.054	30.711	44.498	0.000	76.970	76.380	86.869
63.491	1.035	3.167	31.871	0.000	65.876	63.000	76.203
34.49	1.017	-37.049	18.106	0.000	51.606	47.461	62.487

Con los parámetros estimados con el método de máxima verosimilitud.

Tabla 3.15 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP

Parámetros	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
$\alpha$	0.004633	396.4135	407.525	5.6938	235.3649	0.1189
$\beta$	266.3204	1.3965	344.3356	0.825	1.70613	48.339691

Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.16 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP

Prueba	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
EE	121.571	131.479	131.4026	38.1404	85.373	63.3630333
EEAd	0.315	0.300	0.311	0.096	0.207	0.149
Max. Log. de Verosimilitud	-407.710	-373.298	-421.060	-70.882	-373.298	-71.610
Anderson-Darling	1.29	1.06	2.8348	0.2692	0.93781525	0.37585495
Kolmogórov-Smirnov	0.115	0.100	0.153	0.059	0.107	0.073
Akaike	817.42	748.60	844.12	143.76	748.60	145.22

Los resultados no fueron diferentes, las pruebas arrojan a la función Lognormal como aquella que realiza un mejor ajuste, seguida de la Loggamma, Gamma y Gumbel.

Las extrapolaciones marginales resultaron como se muestra a continuación.

Tabla 3.17 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP [ $m^3/s$ ]

$T_r$	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2	345.431	357.554	407.525	297.025	344.796	301.269
5	590.076	704.855	697.326	594.721	630.794	619.732
10	752.052	940.626	848.808	855.128	829.464	924.451
50	1108.537	1441.696	1114.703	1615.731	1266.838	1939.140
100	1259.243	1644.189	1208.569	2025.097	1449.375	2549.141
200	1409.399	1840.821	1294.476	2488.328	1629.771	3292.438
500	1607.503	2093.274	1398.587	3190.984	1865.385	4521.635
1000	1757.224	2279.426	1471.612	3803.058	2042.118	5675.308
2000	1906.878	2461.978	1540.647	4484.381	2217.845	7059.346
5000	2104.727	2698.424	1626.560	5510.162	2448.801	9310.737
10000	2254.286	2873.999	1688.157	6389.170	2623.459	11393.233

Y gráficamente:

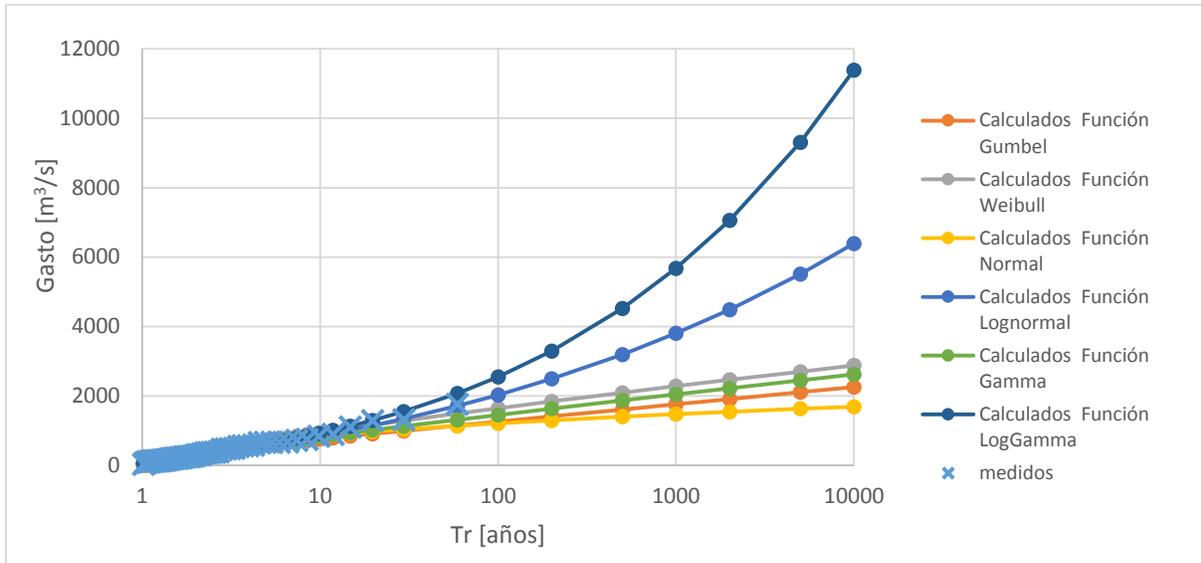


Figura 3.13 Ajustes a distribuciones de una población Gasto-VP 35 días

### Volumen-Volumen Prioridad

La segunda variable de volumen también se ajustó a las funciones de probabilidad, en la tabla siguiente se muestran los resultados.

Tabla 3.18 Valores de Volumen-VP calculados para las funciones seleccionadas

Datos	Tr	Calculados [m³/s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
7374.602	59	6409.151	6508.254	6027.428	8020.175	6965.14	7590.00471
7203.824	29.5	5637.441	5859.562	5554.076	6708.883	6177.119	6232.34889
6546.401	19.667	5181.926	5452.98	5249.653	5983.415	5702.205	5498.84431
6120.803	14.75	4855.783	5149.66	5018.069	5484.996	5357.378	5003.19795
6103.747	11.8	4600.457	4904.507	4827.772	5105.407	5084.54	4631.91613
4715.42	9.833	4389.865	4696.926	4664.245	4803.117	4857.586	4336.55412
4476.654	8.429	4210.091	4515.709	4519.528	4546.389	4662.498	4092.09495
4382.063	7.375	4052.824	4354.053	4388.79	4329.73	4490.829	3883.99414
4096.385	6.556	3912.704	4207.501	4268.827	4135.999	4337.115	3703.07641
4090.196	5.9	3786.066	4072.974	4157.414	3963.012	4197.605	3543.19614
3826.654	5.364	3670.296	3948.243	4052.943	3814.682	4069.603	3400.04334
3642.047	4.917	3563.46	3831.646	3954.214	3671.904	3951.114	3270.48308
3545.815	4.538	3464.088	3721.907	3860.282	3545.273	3840.616	3152.16652
3544.957	4.214	3371.038	3618.021	3770.405	3428.236	3736.91	3043.2899
3493.088	3.933	3283.397	3519.185	3683.989	3320.125	3639.052	2942.43891
3413.256	3.688	3200.431	3424.743	3600.552	3215.423	3546.272	2848.48463
3073.43	3.471	3121.537	3334.153	3519.679	3118.778	3457.939	2760.51188
2721.897	3.278	3046.211	3246.961	3441.021	3029.657	3373.528	2677.76857
2663.36	3.105	2974.032	3162.781	3364.275	2943.084	3292.59	2599.6291
2657.257	2.95	2904.638	3081.284	3289.194	2858.984	3214.75	2525.56743
2620.025	2.81	2837.72	3002.184	3215.548	2781.528	3139.671	2455.13684
2594.782	2.682	2773.007	2925.23	3143.129	2706.17	3067.084	2387.95455

Datos Volumen-VP	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s día]					
		Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2491.987	2.565	2710.265	2850.204	3071.752	2632.855	2996.729	2323.68985
2447.454	2.458	2649.284	2776.909	3001.251	2565.437	2928.392	2262.05473
2403.627	2.36	2589.877	2705.17	2931.476	2499.745	2861.876	2202.79656
2369.271	2.269	2531.876	2634.829	2862.276	2435.736	2797.003	2145.69217
2353.668	2.185	2475.13	2565.742	2793.525	2373.365	2733.618	2090.54305
2214.492	2.107	2419.499	2497.776	2725.082	2312.592	2671.577	2037.17146
2197.229	2.034	2364.852	2430.809	2656.821	2253.375	2610.745	1985.41717
2151.834	1.967	2311.071	2364.727	2588.626	2195.674	2551.002	1935.13476
2148.866	1.903	2258.042	2299.421	2520.371	2139.451	2492.224	1886.19133
2030.912	1.844	2205.656	2234.79	2451.932	2084.667	2434.317	1838.46456
1925.566	1.788	2153.808	2170.735	2383.174	2031.286	2377.165	1791.84094
1915.336	1.735	2102.399	2107.162	2313.978	1979.272	2320.676	1746.21435
1872.487	1.686	2051.326	2043.976	2244.203	1928.59	2264.752	1701.48465
1844.92	1.639	2000.491	1981.086	2173.7	1879.206	2209.299	1657.55642
1802.669	1.595	1949.791	1918.399	2102.323	1828.295	2154.223	1614.33781
1765.202	1.553	1899.123	1855.821	2029.905	1778.762	2099.431	1571.73937
1762.472	1.513	1848.376	1793.255	1956.253	1730.572	2044.821	1529.67285
1754.886	1.475	1797.437	1730.603	1881.172	1681.12	1990.301	1488.05
1723.558	1.439	1746.182	1667.756	1804.435	1633.081	1935.763	1446.78121
1615.117	1.405	1694.474	1604.603	1725.776	1586.415	1881.094	1405.77398
1610.085	1.372	1642.164	1541.02	1644.898	1538.733	1826.172	1364.93115
1594.148	1.341	1589.083	1476.872	1561.46	1490.208	1770.868	1324.14864
1482.422	1.311	1535.036	1412.007	1475.049	1443.214	1715.026	1283.31277
1435.028	1.283	1479.797	1346.253	1385.174	1395.57	1658.478	1242.29661
1343.833	1.255	1423.096	1279.41	1291.241	1347.442	1601.022	1200.95515
1273.017	1.229	1364.604	1211.244	1192.507	1297.009	1542.42	1159.11869
1265.218	1.204	1303.913	1141.471	1088.041	1248.464	1482.388	1116.58325
1244.911	1.18	1240.505	1069.743	976.628	1196.247	1420.558	1073.09652
1215.074	1.157	1173.696	995.619	856.664	1142.722	1356.471	1028.33611
1199.077	1.135	1102.562	918.525	725.92	1088.265	1289.509	981.874359
1185.785	1.113	1025.786	837.681	581.21	1030.097	1218.824	933.118158
953.198	1.093	941.4	751.983	417.678	969.105	1143.169	881.197628
865.383	1.073	846.224	659.752	227.38	902.038	1060.602	824.739591
780.747	1.054	734.548	558.202	0	826.898	967.766	761.337999
577.291	1.035	594.225	441.986	0	737.481	857.865	686.023324
399.451	1.017	389.346	297.612	0	616.904	712.321	584.723752

Los parámetros obtenidos por el método de máxima verosimilitud se muestran a continuación.

Tabla 3.19 Parámetros de ajustes obtenidos para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP

Parámetros	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
$\alpha$	0.000909	2972.2124	2622.7258	7.7072	862.6623	0.0481
$\beta$	1934.84	1.7632	1605.0245	0.6047	3.039763	157.93718

Y tras aplicar las pruebas de bondad de ajuste elegidas, se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 3.20 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP

Prueba	Funciones de una población					
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
EE	434.724	379.667	559.7723	231.1699	407.8146	409.954457
EEAd	0.171	0.146	0.212	0.089	0.144	0.175
Max. Log. de Verosimilitud	-500.440	-501.923	-510.322	-52.621	-499.731	-53.850
Anderson-Darling	0.625	0.9525	2.3955	0.2531	2.064785	1.24968338
Kolmogórov-Smirnov	0.082	0.115	0.170	0.064	0.156	0.111
Akaike	-1004.88	-1007.85	-1024.64	-109.24	-1003.46	-111.70

De la misma manera en estos ajustes el mejor fue el de la función Lognormal, incluso en la verosimilitud obtuvo el valor muy cercano a cero, después de ella las mejores fueron Weibull y Gumbel.

Los valores extrapolados a diferentes periodos de retorno resultan en:

Tabla 3.21 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP [ $m^3/s$  día]

$T_r$	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma	Loggamma
2	2337.861	2397.664	2622.723	2222.641	2580.743	1960.100
5	3584.188	3854.381	3973.551	3700.025	3974.134	3295.429
10	4409.365	4716.357	4679.653	4825.154	4878.679	4363.493
50	6225.449	6358.035	5919.037	7696.468	6779.343	7253.254
100	6993.208	6970.207	6356.574	9075.3	7549.385	8719.623
200	7758.165	7543.28	6757.001	10555.199	8300.195	10342.557
500	8767.394	8252.758	7242.277	12676.171	9270.773	12754.996
1000	9530.136	8759.477	7582.726	14409.645	9991.563	14802.974
2000	10292.537	9244.438	7904.197	16255.677	10703.184	17062.188
5000	11300.46	9856.812	8304.96	18906.471	11634.146	20404.3011
10000	12062.378	10301.126	8592.13	21069.819	12326.418	23226.9331

Gráficamente los ajustes se aprecian en la figura siguiente.

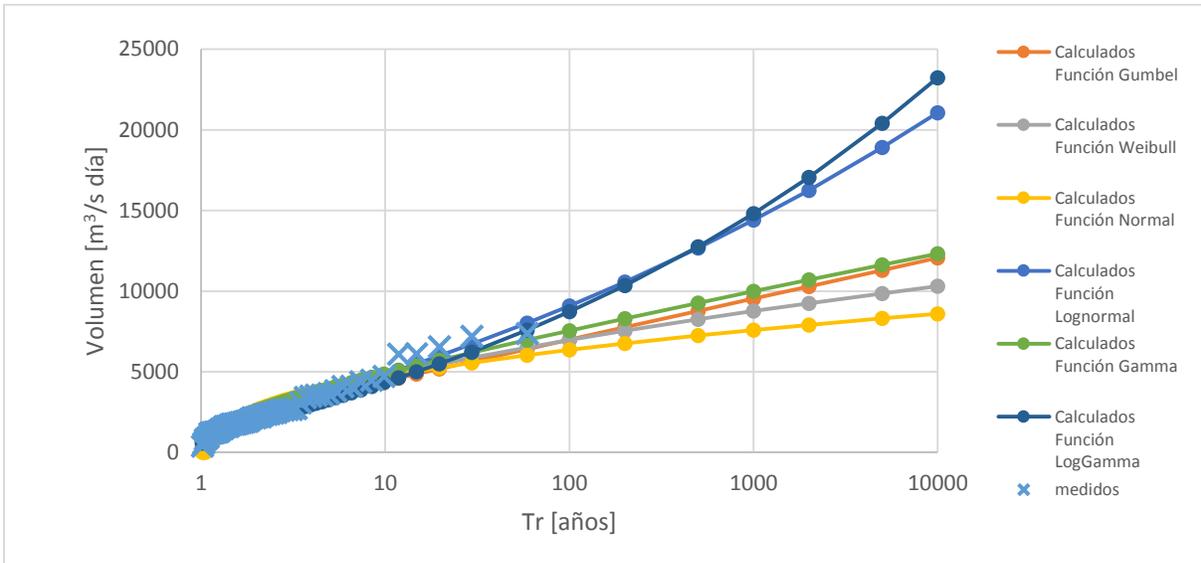


Figura 3.14 Ajustes a distribuciones de una población Volumen-VP 35 días

Al haber realizado los ajustes de una población para las cuatro variables es posible analizar las funciones que se aproximan más a la información medida, es evidente que el comportamiento de las 4 es muy parecido, en cada una el ajuste para la función Lognormal fue el mejor según las pruebas de bondad de ajuste, seguido de las funciones Weibull, Gumbel y Gamma que dependiendo la variable y la prueba pasaron del segundo al cuarto lugar. Lo normal sería que se eligiera a la función Lognormal como aquella para estimar el hidrograma de diseño final; pero no se decidió así, más bien lo contrario, se descartó a la función; la razón es sencilla, al observar los valores extrapolados se aprecia que para periodos de retorno bajos la estimación es sumamente adecuada, pero para periodos de retorno grandes, la estimación tanto de la función Lognormal y Loggamma arroja valores realmente altos, casi el doble de la media en el periodo de retorno de 10,000 años en los 4 casos. Esto resulta debido a que esas dos funciones trabajan con logaritmos, estos hacen crecer los valores más grandes, se puede verificar observando la curva de densidad de la función, en la zona de la cola, el área bajo la curva es más grande que el de las otras funciones, es decir se vuelve asintótica de forma lenta y por lo tanto el valor resulta mayor.

Como el objetivo es estimar un hidrograma de 10,000 años de periodo de retorno para analizar la seguridad de la presa La Angostura, la estimación mediante la función Lognormal no nos es útil, usarla nos generaría seguramente un hidrograma con características sobradas

lo que repercutiría en un análisis sobreestimado. Si fuera el caso de que se necesitaría un hidrograma correspondiente a un periodo de retorno pequeño, 50 o 100 años, por ejemplo, la función con logaritmos sería la más adecuada sin dudar, lamentablemente no es el caso, por lo tanto, el análisis continuará utilizando las funciones Weibull, Gumbel y Gamma para la duración de 35 días; las cuales se hacen mixtas para revisar si generan un mejor ajuste para usarse en la estimación bivariada.

### 3.5.1.2 Duración 10 días

Para la duración de 10 días para generar el hidrograma de diseño, los ajustes se llevan a cabo para las mismas funciones de dos parámetros elegidas en la duración de 35 días, el único cambio se refleja en los valores de las parejas de gasto y volumen obtenidas para los criterios de gasto y volumen prioridad, pues se utilizan las de la tabla 2.6 y 2.7 correspondientes a 10 días de duración del hidrograma registrado.

Los resultados de los ajustes se muestran a continuación para cada variable.

#### Gasto-Gasto Prioridad

Los parámetros de ajustes obtenidos mediante el método de máxima verisimilitud son:

Tabla 3.22 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, duración 10 días.

Parámetros	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
alfa	0.004326	540.6431	460.4469	5.8537	237.966
beta	313.045	1.1534	347.0625	0.7656	1.910246

Y tras aplicar las pruebas de bondad de ajuste a los resultados se obtienen los siguientes valores.

Tabla 3.23 Resultados de pruebas de bondad de ajuste Q-QP, duración 10 días

Prueba	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
EE	98.801	82.714	117.4886	29.4921	62.8366
EEAd	0.224	0.165	0.249	0.066	0.139
Max. Log. de Verosimilitud	-410.550	-405.595	-421.500	-67.077	-405.595
Anderson-Darling	0.66	1.0779	2.1193	0.1726	0.1978
Kolmogórov-Smirnov	0.077	0.083	0.139	0.058	0.056
Akaike	-415.83	-409.59	-431.50	-77.08	-411.59

Según la mayoría de las pruebas, el mejor ajuste es con la función Lognormal, seguido de la función gamma y Weibull.

Y al extrapolar la variable a los siguientes periodos de retorno se obtienen los siguientes gastos.

Tabla 3.24 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, Q-QP 10 días.

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
2	397.766	393.464	460.447	348.638	384.273
5	659.761	816.768	752.542	663.783	690.339
10	833.225	1114.176	905.226	929.991	899.805
20	999.616	1439.1445	1031.313	1227.684	1128.103
50	1214.992	1764.113	1173.226	1678.557	1356.401
100	1376.386	2032.117	1267.834	2068.823	1545.787
200	1537.191	2294.789	1354.435	2503.562	1732.385
500	1749.345	2635.149	1459.359	3157.082	1975.815
1000	1909.684	2888.158	1532.994	3711.334	2158.018
2000	2069.952	3137.807	1602.482	4329.73	2338.706
5000	2281.831	3463.247	1689.255	5239.573	2575.937
10000	2441.997	3706.326	1751.218	6010.868	2754.135

Al analizar los valores extrapolados a 10,000 años de periodo de retorno es evidente que en el caso de la función Lognormal el valor de 6010.868 es muy alto con respecto a los de las demás funciones (casi el doble de la media de los valores extrapolados a 10,000 años con las demás funciones), por lo que se considera a la función Lognormal poco útil en periodos de retorno altos pues sobreestimaría el hidrograma final, por las razones explicadas en la duración de 35 días. Por lo que se considera a las funciones Gamma, Weibull y Gumbel como aquellas a considerar para realizar la estimación bivariada.

### Volumen-Gasto Prioridad

Los parámetros obtenidos para los ajustes correspondientes se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.25 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, V-QP duración 10 días.

Parámetros	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
alfa	0.001515	1498.5826	1360.5673	6.9472	680.3394
beta	937.9432	1.4034	1048.0551	0.7863	1.998583

Y las pruebas de bondad de ajuste arrojan los siguientes resultados.

Tabla 3.26 Resultados de pruebas de bondad de ajuste V-QP, duración 10 días

Prueba	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
EE	384.325	299.958	438.3415	148.7081	408.6454
EEAd	0.295	0.223	0.314	0.109	0.248
Max. Log. de Verosimilitud	-471.640	-471.058	-485.624	-68.356	-469.760
Anderson-Darling	1.032	0.669	2.7628	0.4373	9.41223812
Kolmogórov-Smirnov	0.091	0.082	0.158	0.091	0.216
Akaike	-477.97	-475.06	-495.62	-78.36	-475.76

Tras analizar estos valores, se percibe que de nueva cuenta la función Lognormal es la que mejor se ajusta a la muestra, pero en el caso de la prueba de Kolmogórov-Smirnov la función Weibull es mejor.

Y las extrapolaciones a diferentes periodos de retorno.

Tabla 3.27 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, V-QP 10 días.

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
2	1179.916	1154.137	1360.566	1039.571	1450.661
5	1928.209	2103.541	2242.635	2015.848	2345.644
10	2423.644	2715.098	2703.701	2850.272	2954.667
20	2898.877	3338.0695	3084.464	3791.47	3615.891
50	3514.018	3961.041	3513.006	5231.585	4277.115
100	3974.979	4449.293	3798.72	6477.517	4824.312
200	4434.258	4916.784	4060.249	7886.683	5362.921
500	5040.198	5508.649	4377.068	10006.278	6064.809
1000	5498.146	5939.758	4599.36	11816.933	6589.771
2000	5955.89	6358.586	4809.272	13828.049	7110.377
5000	6561.046	6895.789	5070.96	16836.303	7793.286
10000	7018.501	7291.159	5258.637	19373.735	8309.766

Del mismo modo que para el gasto, la función Lognormal que resulta en un mejor ajuste según las pruebas de bondad, estima un valor muy alto en el periodo de retorno 10,000 años, el cual no es factible utilizar.

### Gasto-Volumen Prioridad

Mediante el método de máxima verosimilitud los parámetros de ajuste obtenidos son los siguientes.

Tabla 3.28 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, Q-VP duración 10 días

Parámetros	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
alfa	0.004472	501.9652	420.8721	5.7153	257.4355
beta	275.8736	1.1816	350.3289	0.8536	1.614419

Las pruebas de bondad de ajuste arrojan los siguientes resultados

Tabla 3.29 Resultados de pruebas de bondad de ajuste Q-VP, duración 10 días

Prueba	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
EE	115.764	68.089	128.2518	32.7595	71.9891
EEAd	0.290	0.147	0.294	0.079	0.176
Max. Log. de Verosimilitud	-409.440	-387.417	-422.116	-73.205	-387.417
Anderson-Darling	1.039	0.9049	2.6617	0.1551	0.24379072
Kolmogórov-Smirnov	0.097	0.094	0.150	0.042	0.072
Akaike	-415.40	-391.42	-432.12	-83.20	-393.42

La función que se ajusta de mejor forma a los gastos de nueva cuenta resulta ser la función Lognormal, posteriormente las funciones Weibull y Gamma dan resultados parecidos entre sí en las pruebas de K-S y A-D.

Y las extrapolaciones marginales de gasto a diferentes periodos de retorno son

Tabla 3.30 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, Q-VP 10 días.

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
2	357.84	368.095	420.871	303.439	336.862
5	611.317	750.91	715.716	622.578	641.021
10	779.141	1016.78	869.838	906.177	853.926
20	940.122	1304.567	997.112	1235.2	1089.456
50	1148.495	1592.354	1140.36	1751.827	1324.986
100	1304.641	1828.088	1235.859	2209.116	1522.185
200	1460.218	2058.411	1323.262	2735.23	1717.214
500	1665.474	2355.928	1429.18	3539.867	1972.936
1000	1820.6	2576.488	1503.486	4244.69	2164.537
2000	1975.657	2793.667	1573.68	5035.774	2354.502
5000	2180.648	3076.166	1661.13	6244.594	2604.991
10000	2335.606	3286.755	1723.826	7262.893	2793.638

Se repite el comportamiento que para el caso de gasto prioridad, la función Lognormal estima un valor muy alto para el Tr de 10,000 años, por lo que las funciones a considerar serán Gamma, Weibull y Gumbel, con resultados de bondad parecidos entre ellas.

### Volumen-Volumen Prioridad

Los parámetros de ajuste obtenidos son los siguientes.

*Tabla 3.31 Parámetros de ajuste obtenidos para las funciones de probabilidad mostrados, V-VP duración 10 días*

Parámetros	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
alfa	0.00149	1648.1879	1469.9144	7.0784	615.335
beta	1039.6729	1.5237	1058.5483	0.6815	2.389272

Y las pruebas de bondad de ajuste dan los siguientes resultados

*Tabla 3.32 Resultados de pruebas de bondad de ajuste V-VP, duración 10 días*

Prueba	Funciones de una población				
	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
EE	371.865	299.43	431.7292	162.8928	429.42
EEAd	0.264	0.204	0.288	0.112	0.241
Max. Log. de Verosimilitud	-472.710	-473.223	-486.173	-59.963	-471.074
Anderson-Darling	1.089	0.9301	2.8655	0.297	10.1876335
Kolmogórov-Smirnov	0.113	0.116	0.182	0.061	0.257
Akaike	-478.87	-477.22	-496.17	-69.96	-477.07

Según las pruebas de bondad de ajuste, no ha pasado nada diferente, la función Lognormal es aquella que se ajusta mejor a la muestra de datos medidos, después de ella las funciones Gumbel y Weibull.

Y al extrapolar a diferentes periodos de retorno se obtienen los siguientes valores.

*Tabla 3.33 Valores extrapolados a las diferentes funciones de distribución, V-VP 10 días.*

Tr	Gumbel	Weibull	Normal	Lognormal	Gamma
2	1285.664	1295.799	1469.917	1185.345	1604.449
5	2046.382	2252.427	2360.813	2103.841	2488.503
10	2550.043	2849.282	2826.502	2841.587	3077.415
20	3033.167	3441.987	3211.069	3638.44	3707.5435
50	3658.523	4034.692	3643.907	4810.451	4337.672
100	4127.138	4490.625	3932.464	5785.89	4854.283
200	4594.044	4923.473	4196.626	6864.208	5360.839
500	5210.045	5466.866	4516.682	8434.364	6018.871
1000	5675.598	5859.745	4741.122	9750.054	6508.979
2000	6140.943	6239.279	4953.168	11168.262	7007.31
5000	6756.147	6723.216	5217.438	13310.485	7629.917
10000	7221.197	7077.473	5407.001	14947.124	8106.821

Tras analizar los ajustes a las cuatro variables en las cuales según las pruebas de bondad de ajuste la función Lognormal es la que se ajusta de mejor manera a las 4 series de datos, se determina que no se puede utilizar esta función en la estimación bivariada debido a que sus extrapolaciones al periodo de retorno de 10,000 años son muy altas, esto debido a la forma de la distribución, si el objetivo fuese estimar un hidrograma a un periodo de retorno bajo, sería muy útil esta distribución, pero no es el caso.

Es por ello que se continuará el análisis con las funciones Gumbel, Weibull y Gamma.

### 3.5.2 Ajustes a funciones de distribución mixtas

Como ya se explicó las funciones conocidas como mixtas en muchas ocasiones logran estimar de mejor manera que las de una población. Para el caso de estudio de la presa La Angostura Sonora se realizan los ajustes probabilísticos correspondientes a las funciones Gumbel Mixta, Weibull Mixta y Gamma Mixta, de la misma forma que para las funciones de una población, para las cuatro variables, el método de máxima verosimilitud será el elegido para la estimación de los parámetros, y se aplicarán las mismas pruebas de bondad de ajuste.

### 3.5.2.1 Duración 35 días

#### Gasto-Gasto Prioridad

Para estos ajustes lo único que cambia es la función de probabilidad usada, estas cuentan con cinco parámetros de ajuste; a continuación, se muestran los valores calculados:

Tabla 3.34 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Gasto-GP

orden	Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s]			orden	Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s]		
	Gasto-Qp		Funciones Mixtas				Gasto-Qp		Funciones Mixtas		
			Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta				Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1	1764.69	59	1484.601	1496.499	1367.667	30	360.97	1.967	350.117	366.805	362.637
2	1312.09	29.5	1288.397	1318.976	1183.316	31	359.71	1.903	339.898	355.722	350.424
3	1284.02	19.667	1168.781	1189.474	1072.87	32	349.55	1.844	329.981	344.839	338.486
4	1106.10	14.75	1080.189	1082.46	992.996	33	347.86	1.788	320.326	334.131	326.822
5	1072.12	11.8	1008.354	991.798	930.045	34	310.04	1.735	310.901	323.576	315.414
6	967.42	9.833	946.942	915.788	877.856	35	282.28	1.686	301.672	313.154	304.227
7	889.87	8.429	892.619	852.778	833.081	36	279.32	1.639	292.611	302.844	293.243
8	836.90	7.375	843.463	800.435	793.784	37	278.99	1.595	283.691	292.628	282.477
9	748.65	6.556	798.327	756.386	758.707	38	261.52	1.553	274.884	282.487	271.881
10	713.80	5.9	756.545	718.666	726.92	39	254.92	1.513	266.165	272.401	261.469
11	702.47	5.364	717.758	685.794	697.821	40	250.31	1.475	257.509	262.354	251.202
12	668.23	4.917	681.797	656.688	670.978	41	239.77	1.439	248.889	252.325	241.071
13	665.61	4.538	648.584	630.556	646.002	42	227.31	1.405	240.28	242.295	231.061
14	653.28	4.214	618.047	606.813	622.601	43	213.76	1.372	231.652	232.242	221.149
15	635.69	3.933	590.075	585.022	600.555	44	203.14	1.341	222.978	222.145	211.334
16	582.35	3.688	564.502	564.848	579.752	45	190.78	1.311	214.222	211.979	201.569
17	566.39	3.471	541.116	546.031	559.976	46	186.75	1.283	205.349	201.717	191.849
18	564.34	3.278	519.688	528.364	541.147	47	169.14	1.255	196.315	191.327	182.138
19	540.87	3.105	499.987	511.684	523.172	48	157.64	1.229	187.069	180.774	172.409
20	520.49	2.95	481.794	495.855	505.93	49	157.06	1.204	177.549	170.015	162.631
21	489.63	2.81	464.914	480.767	489.343	50	154.92	1.18	167.678	158.997	152.75
22	472.32	2.682	449.175	466.329	473.401	51	149.60	1.157	157.355	147.657	142.709
23	461.08	2.565	434.426	452.462	457.996	52	147.37	1.135	146.444	135.908	132.443
24	444.50	2.458	420.54	439.1	443.127	53	130.56	1.113	134.753	123.637	121.841
25	431.35	2.36	407.405	426.187	428.723	54	100.51	1.093	121.998	110.683	110.751
26	407.35	2.269	394.928	413.672	414.758	55	94.81	1.073	107.721	96.804	100.003
27	375.34	2.185	383.026	401.513	401.184	56	93.61	1.054	91.101	81.597	100.003
28	369.29	2.107	371.63	389.671	387.997	57	63.49	1.035	70.396	64.291	100.003
29	361.64	2.034	360.678	378.112	375.143	58	54.37	1.017	40.472	42.954	100.003

Cuyos parámetros de cálculo resultaron ser:

Tabla 3.35 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-GP

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.0066	407.2818	218.0333
$\beta_1$	245.4209	1.7432	2.23888
$\alpha_2$	0.003723	1184.1337	59.9432
$\beta_2$	845.108	3.148	3.22873
$\rho$	0.811	0.863	0.863

Al aplicar las pruebas de bondad de ajuste los resultados se pueden apreciar en la tabla siguiente, la función con mejor estimación según 4 de las 6 comparaciones es la función Gamma Mixta y en segundo lugar la Weibull Mixta.

Tabla 3.36 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Gasto-GP

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	48.126	44.61	72.2
EEAd	0.1069	0.0991	0.1636
Max. Log. de Verosimilitud	-407.742	-406.935	-405.595
Anderson-Darling	0.6604	0.168	0.1441
Kolmogórov-Smirnov	0.0774	0.0512	0.0342
Akaike	-825.484	-823.87	-821.19

De igual modo se estimaron los valores extrapolados para analizar lo que sucede, recuerda que estos valores no serán utilizados para generar el hidrograma de diseño final pues son univariados, pero si nos serán de ayuda para aplicar la función bivariada. Se muestran en la tabla 3.37.

Tabla 3.37 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-GP [ $m^3/s$ ]

$T_r$	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	355.352	372.428	368.845
5	688.768	662.249	676.178
10	952.724	922.77	882.69
20	1173.845	1195.324	1077.509
50	1438.397	1458.016	1324.106
100	1630.18	1607.114	1505.106
200	1818.989	1731.579	1682.568
500	2066.57	1871.386	1913.199
1000	2253.194	1963.92	2085.291
2000	2439.576	2047.932	2255.621
5000	2685.8	2148.774	2478.687
10000	2872.012	2218.759	2646.124

En la figura se pueden apreciar los ajustes respecto a los valores medidos de la muestra

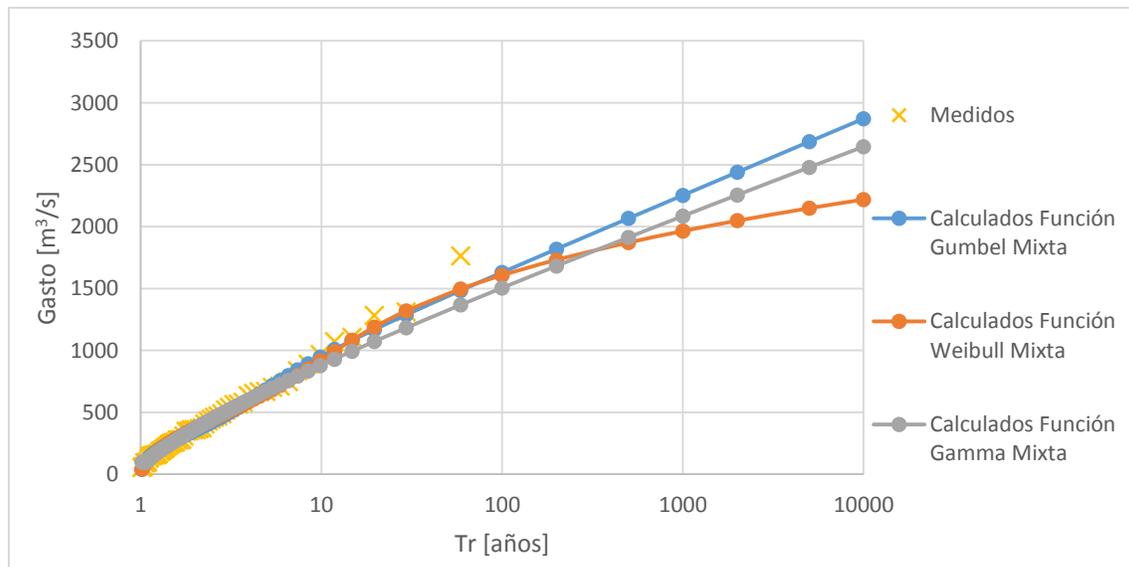


Figura 3.15 Ajustes a distribuciones mixtas Gasto-QP 35 días

### Volumen-Gasto Prioridad

La variable de volumen sigue siendo la misma que para el caso de una población, ajustada a las tres funciones mixtas elegidas los resultados se muestran en las siguientes tablas.

Tabla 3.38 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Volumen-GP

orden	Datos		Calculados [m <sup>3</sup> /s día]			orden	Datos		Calculados [m <sup>3</sup> /s día]		
	Volumen- Qp	Tr	Funciones Mixtas				Volumen- Qp	Tr	Funciones Mixtas		
			Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta				Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1	7374.602	59	6903.051	7318.115	7076.715	30	1872.487	1.967	1921.326	1931.544	1981.735
2	7203.824	29.5	6484.357	6641.972	6113.437	31	1844.92	1.903	1872.09	1876.989	1923.984
3	6546.401	19.667	6187.769	6126.507	5537.058	32	1765.202	1.844	1823.703	1823.36	1867.535
4	6103.747	14.75	5890.987	5671.036	5121.402	33	1762.472	1.788	1776.046	1770.534	1812.164
5	5872.248	11.8	5308.972	5245.822	4794.693	34	1754.886	1.735	1729.006	1718.397	1757.822
6	4715.42	9.833	4599.89	4848.6	4524.606	35	1723.558	1.686	1682.477	1666.841	1704.385
7	4382.063	8.429	4196.512	4492.15	4294.232	36	1615.117	1.639	1636.351	1615.76	1651.709
8	4096.385	7.375	3912.471	4187.463	4092.798	37	1594.148	1.595	1590.526	1565.056	1599.771
9	4090.196	6.556	3691.992	3933.369	3913.95	38	1513.091	1.553	1544.896	1514.63	1548.41
10	3826.654	5.9	3511.051	3721.024	3752.688	39	1511.765	1.513	1499.356	1464.382	1497.565
11	3642.047	5.364	3357.075	3540.775	3606.067	40	1493.525	1.475	1453.795	1414.213	1447.064
12	3544.957	4.917	3222.651	3384.834	3471.259	41	1441.507	1.439	1408.096	1364.021	1396.786
13	3493.088	4.538	3103.042	3247.474	3346.524	42	1435.028	1.405	1362.135	1313.699	1346.799
14	3438.051	4.214	2995.027	3124.569	3230.371	43	1277.227	1.372	1315.775	1263.133	1296.814
15	3413.256	3.933	2896.325	3013.124	3121.762	44	1273.017	1.341	1268.864	1212.198	1246.79
16	2663.36	3.688	2805.253	2910.93	3019.525	45	1215.074	1.311	1221.23	1160.76	1196.542
17	2657.257	3.471	2720.536	2816.324	2923.093	46	1017.487	1.283	1172.674	1108.664	1145.92
18	2620.025	3.278	2641.183	2728.032	2831.555	47	888.439	1.255	1122.96	1055.735	1094.781
19	2594.782	3.105	2566.409	2645.058	2744.546	48	865.383	1.229	1071.804	1001.769	1042.963
20	2543.052	2.95	2495.579	2566.609	2661.517	49	860.384	1.204	1018.856	946.518	990.085
21	2537.182	2.81	2428.173	2492.045	2582.071	50	825.956	1.18	963.669	889.68	935.977
22	2491.987	2.682	2363.758	2420.842	2505.777	51	823.389	1.157	905.662	830.874	880.249
23	2403.627	2.565	2301.968	2352.566	2432.544	52	815.245	1.135	844.044	769.603	822.29
24	2393.432	2.458	2242.494	2286.85	2361.887	53	780.747	1.113	777.697	705.19	761.526
25	2148.866	2.36	2185.066	2223.383	2293.622	54	748.875	1.093	704.948	636.673	696.942
26	2030.912	2.269	2129.451	2161.899	2227.692	55	612.344	1.073	623.1	562.584	626.923
27	2007.266	2.185	2075.443	2102.166	2163.535	56	577.291	1.054	527.313	480.471	548.685
28	1925.566	2.107	2022.86	2043.979	2101.37	57	419.132	1.035	407.295	385.58	114.188
29	1915.336	2.034	1971.537	1987.159	2040.735	58	133.518	1.017	232.655	265.752	112.894

Con los parámetros obtenidos mostrado en la tabla 3.39:

Tabla 3.39 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Volumen-GP

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.001088	2111.0532	1129.9596
$\beta_1$	1507.7028	1.8895	2.29431
$\alpha_2$	0.002108	6083.5757	436.644
$\beta_2$	6203.2539	4.0658	3.77585
$\rho$	0.93	0.859	0.791

Al aplicar las pruebas de bondad de ajuste resulta que la función con mejor estimación según la mayoría resulta ser la de Weibull Mixta.

Tabla 3.40 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Volumen-GP

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	225.589	181.43	317.45
EEAd	0.0971	0.0770	0.1354
Max. Log. de Verosimilitud	-499.366	-499.743	-500.93
Anderson-Darling	0.2914	0.224	0.4437
Kolmogórov-Smirnov	0.0743	0.0541	0.0777
Akaike	-1008.732	-1009.486	-1011.86

Y los valores extrapolados marginales a diferentes periodos de retorno se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3.41 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las 3 funciones mixtas, variable Volumen-GP [ $m^3/s$  día]

Tr	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	1946.302	1959.21	2011.072
5	3248.227	3414.379	3497.198
10	4651.424	4886.745	4549.6
20	6201.779	6150.445	5561.228
50	6807.81	7173.545	6848.743
100	7198.061	7728.898	7794.595
200	7579.779	8183.788	8721.676
500	8095.995	8686.604	9924.771
1000	8507.289	9015.043	10821.887
2000	8945.318	9310.408	11709.664
5000	9576.736	9661.564	12871.484
10000	10098.525	9903.191	13742.721

Gráficamente:

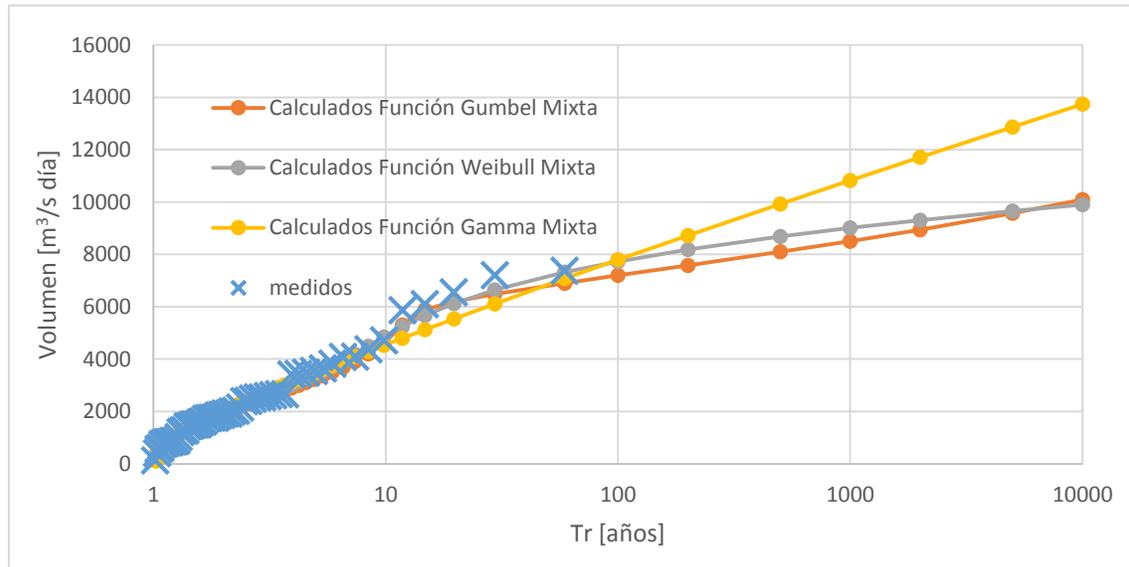


Figura 3.16 Ajustes a distribuciones mixtas Volumen-QP 35 días

### Gasto-Volumen Prioridad

Los tres ajustes correspondientes a la variable de gasto obtenida mediante el criterio de volumen prioridad generan los siguientes resultados.

Tabla 3.42 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Gasto-VP

orden	Datos	Tr	Calculados [m³/s]			orden	Datos	Tr	Calculados [m³/s]		
			Funciones Mixtas						Funciones Mixtas		
			Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta				Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1	1764.687	59	1358.589	1371.993	1433.392	30	278.988	1.967	286.4	279.623	335.941
2	1312.088	29.5	1174.795	1196.592	1233.533	31	261.518	1.903	276.401	265.111	323.141
3	1284.023	19.667	1064.611	1087.819	1113.425	32	254.921	1.844	266.962	252.278	310.709
4	1106.095	14.75	984.427	1007.242	1026.361	33	250.308	1.788	258.011	240.982	298.615
5	889.874	11.8	920.566	942.461	957.51	34	239.769	1.735	249.487	230.965	286.871
6	836.904	9.833	866.93	887.835	900.327	35	227.306	1.686	241.336	221.964	275.433
7	748.648	8.429	820.256	840.308	851.196	36	226.907	1.639	233.508	213.76	264.288
8	713.799	7.375	778.594	798.028	808.032	37	205.65	1.595	225.96	206.176	253.412
9	668.225	6.556	740.681	759.785	769.388	38	203.788	1.553	218.655	199.076	242.792
10	665.607	5.9	705.654	724.743	734.354	39	203.141	1.513	211.556	192.351	232.416
11	665.607	5.364	672.899	692.3	702.267	40	190.775	1.475	204.631	185.916	222.26
12	659.828	4.917	641.969	662.005	672.626	41	186.75	1.439	197.85	179.701	212.299
13	653.278	4.538	612.536	633.512	645.013	42	165.867	1.405	191.183	173.647	202.521
14	582.353	4.214	584.365	606.55	619.159	43	157.064	1.372	184.603	167.703	192.905
15	566.386	3.933	557.297	580.9	594.827	44	147.02	1.341	178.08	161.824	183.426
16	564.343	3.688	531.242	556.384	571.817	45	146.571	1.311	171.586	155.965	174.075
17	540.874	3.471	506.173	532.853	550.027	46	140.305	1.283	165.091	150.084	164.816
18	489.632	3.278	482.118	510.183	529.245	47	133.791	1.255	158.561	144.137	155.624
19	477.3	3.105	459.146	488.267	509.439	48	133.348	1.229	151.958	138.077	146.481

orden	Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s]			orden	Datos	Tr	Calculados [m <sup>3</sup> /s]		
	Gasto-Vp		Funciones Mixtas				Gasto-Vp		Funciones Mixtas		
			Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta				Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
20	472.317	2.95	437.351	467.011	490.515	49	130.562	1.204	145.239	131.85	137.344
21	461.083	2.81	416.819	446.335	472.351	50	124.175	1.18	138.351	125.394	128.171
22	385.888	2.682	397.611	426.165	454.919	51	123.37	1.157	131.227	118.628	118.906
23	375.344	2.565	379.743	406.438	438.147	52	121.906	1.135	123.779	111.453	109.482
24	369.291	2.458	363.187	387.092	421.985	53	102.005	1.113	115.885	103.729	100.003
25	360.966	2.36	347.874	368.077	406.409	54	100.506	1.093	107.364	95.254	100.003
26	359.71	2.269	333.71	349.357	391.367	55	93.605	1.073	97.929	85.719	100.003
27	329.784	2.185	320.589	330.943	376.828	56	83.01	1.054	87.069	74.591	100.003
28	310.041	2.107	308.4	312.957	362.766	57	63.491	1.035	73.701	60.831	100.003
29	306.794	2.034	297.036	295.7	349.142	58	34.49	1.017	54.643	41.829	100.003

Los parámetros obtenidos mediante el método de máxima verosimilitud se muestran en la tabla siguiente.

Tabla 3.43 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Gasto-VP

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.011242	569.1115	232.0909
$\beta_1$	168.7769	1.4988	2.32283
$\alpha_2$	0.003897	175.7151	79.4723
$\beta_2$	563.0058	3.2125	2.35859
$\rho$	0.62	0.713	0.709

Al aplicar las pruebas de bondad de ajuste se obtienen los siguientes valores de comparación, en los que la función Weibull Mixta es aquella que se ajusta de mejor forma a los datos.

Tabla 3.44 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Gasto-VP

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	72.893	67.64	69.97
EEd	0.1821	0.1678	0.1626
Max. Log. de Verosimilitud	-400.594	-400.288	-373.298
Anderson-Darling	1.3134	0.21	0.8007
Kolmogórov-Smirnov	0.1041	0.0473	0.089
Akaike	811.188	810.576	756.596

Los valores extrapolados marginales serán útiles al aplicar la función bivariada.

Tabla 3.45 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las 3 funciones mixtas, variable Gasto-VP [ $m^3/s$ ]

$T_r$	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	291.633	287.485	342.496
5	648.026	667.909	678.375
10	871.939	892.94	905.655
20	1069.236	1092.433	1118.46
50	1315.065	1331.171	1386.234
100	1496.354	1498.302	1581.918
200	1675.902	1656.593	1773.489
500	1912.025	1854.963	2021.936
1000	2090.218	1998.221	2206.879
2000	2268.243	2136.514	2389.963
5000	2503.459	2312.813	2629.462
10000	2681.351	2441.75	2808.826

Gráficamente el ajuste se aprecia en la figura siguiente

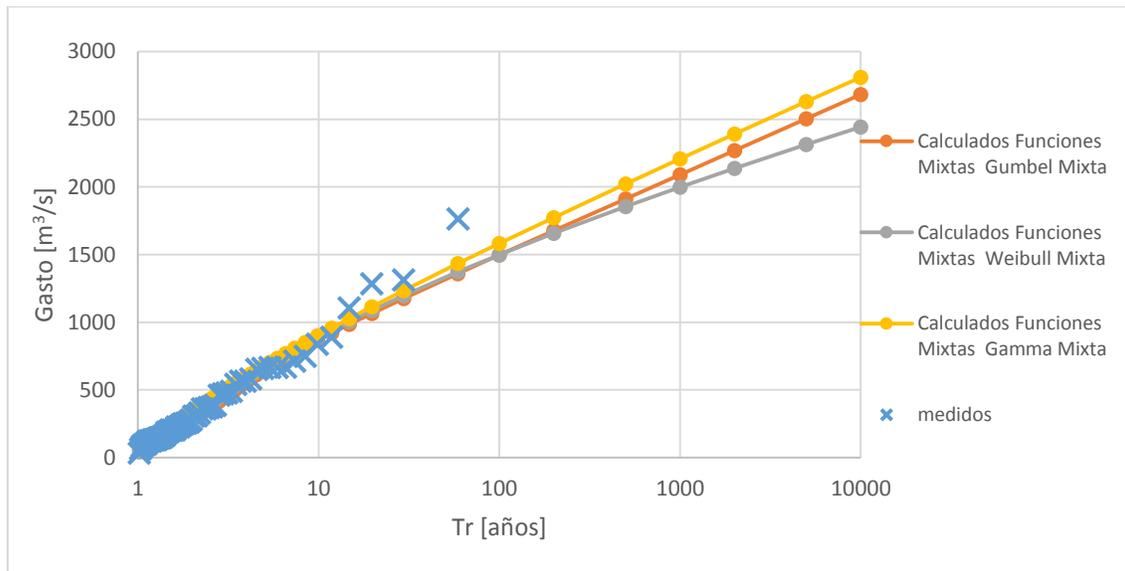


Figura 3.17 Ajustes a distribuciones mixtas Gasto-VP 35 días

### Volumen-Volumen Prioridad

El procedimiento es el mismo, se ajusta para las tres funciones y se obtienen los siguientes valores calculados.

Tabla 3.46 Valores calculados para las funciones seleccionadas, variable Volumen-VP

orden	Datos		Calculados [m <sup>3</sup> /s día]			orden	Datos		Calculados [m <sup>3</sup> /s día]		
	Volumen- Vp	Tr	Funciones Mixtas				Volumen- Vp	Tr	Funciones Mixtas		
			Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta				Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1	7374.602	59	6938.852	7243.592	7321.359	30	2151.834	1.967	2157.69	2119.837	2359.5
2	7203.824	29.5	6564.466	6450.285	6441.602	31	2148.866	1.903	2109.202	2077.239	2299.261
3	6546.401	19.667	6311.034	5940.428	5907.272	32	2030.912	1.844	2061.596	2035.716	2240.314
4	6120.803	14.75	6083.587	5552.127	5516.916	33	1925.566	1.788	2014.75	1995.061	2182.632
5	6103.747	11.8	5804.777	5232.355	5206.531	34	1915.336	1.735	1968.549	1955.09	2126.108
6	4715.42	9.833	5105.531	4956.735	4947.513	35	1872.487	1.686	1922.885	1915.636	2070.52
7	4476.654	8.429	4563.689	4711.914	4724.124	36	1844.92	1.639	1877.651	1876.549	2015.955
8	4382.063	7.375	4224.142	4489.721	4527.078	37	1802.669	1.595	1832.742	1837.683	1962.137
9	4096.385	6.556	3974.839	4284.765	4350.528	38	1765.202	1.553	1788.055	1798.902	1908.908
10	4090.196	5.9	3776.855	4093.271	4190.115	39	1762.472	1.513	1743.483	1760.069	1856.329
11	3826.654	5.364	3612.002	3912.494	4042.993	40	1754.886	1.475	1698.917	1721.048	1804.144
12	3642.047	4.917	3470.296	3740.412	3906.809	41	1723.558	1.439	1654.241	1681.7	1752.219
13	3545.815	4.538	3345.66	3575.686	3780.24	42	1615.117	1.405	1609.333	1641.876	1700.65
14	3544.957	4.214	3234.117	3417.853	3661.438	43	1610.085	1.372	1564.059	1601.419	1649.072
15	3493.088	3.933	3132.924	3267.67	3549.905	44	1594.148	1.341	1518.269	1560.152	1597.391
16	3413.256	3.688	3040.103	3127.163	3444.489	45	1482.422	1.311	1471.796	1517.88	1545.48
17	3073.43	3.471	2954.182	2998.768	3344.51	46	1435.028	1.283	1424.444	1474.376	1493.207
18	2721.897	3.278	2874.037	2883.92	3249.316	47	1343.833	1.255	1375.985	1429.374	1440.314
19	2663.36	3.105	2798.787	2782.362	3158.658	48	1273.017	1.229	1326.143	1382.552	1386.551
20	2657.257	2.95	2727.726	2692.592	3071.893	49	1265.218	1.204	1274.575	1333.517	1331.564
21	2620.025	2.81	2660.284	2612.677	2988.76	50	1244.911	1.18	1220.85	1281.768	1275.061
22	2594.782	2.682	2595.99	2540.773	2908.933	51	1215.074	1.157	1164.402	1226.655	1216.541
23	2491.987	2.565	2534.448	2475.323	2832.068	52	1199.077	1.135	1104.464	1167.301	1155.386
24	2447.454	2.458	2475.325	2415.076	2757.895	53	1185.785	1.113	1039.953	1102.473	1090.631
25	2403.627	2.36	2418.335	2359.045	2686.273	54	953.198	1.093	969.246	1030.344	1020.929
26	2369.271	2.269	2363.232	2306.457	2617.084	55	865.383	1.073	889.728	948.017	944.052
27	2353.668	2.185	2309.797	2256.692	2549.875	56	780.747	1.054	796.708	850.404	855.933
28	2214.492	2.107	2257.84	2209.258	2484.692	57	577.291	1.035	680.214	727.089	747.556
29	2197.229	2.034	2207.188	2163.75	2421.265	58	399.451	1.017	510.797	549.476	587.473

Con los parámetros siguientes:

Tabla 3.47 Parámetros de ajuste obtenidos para las 3 funciones mixtas seleccionadas, variable Volumen-VP

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.001125	3834.6628	907.7616
$\beta_1$	1741.0216	1.9414	3.49721
$\alpha_2$	0.002302	1955.0522	328.3861
$\beta_2$	6226.6001	3.5872	5.37638
$\rho$	0.92	0.527	0.71

Al aplicar las pruebas de bondad de ajuste se percibe que el ajuste mediante la distribución Gumbel Mixta y el Weibull Mixta son aquellos que mejor se ajustan a los datos.

Tabla 3.48 Resultados de pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas elegidas, variable Volumen-VP

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	178.513	213.47	293.42
EEAd	0.069427348	0.082381163	0.107570921
Max. Log. de Verosimilitud	-496.501	-497.561	-499.051
Anderson-Darling	0.1784	0.146	0.6504
Kolmogórov-Smirnov	0.0603	0.0399	0.1102
Akaike	-1003.002	-1005.122	-1008.102

Los valores extrapolados a diferentes periodos de retorno son.

Tabla 3.49 Extrapolaciones a diferentes  $T_r$  para las 3 funciones mixtas, variable Volumen-VP [ $m^3/s$  día]

$T_r$	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	2182.304	2141.613	2390.244
5	3497.115	3774.208	3933.23
10	5182.6	4982.743	4971.438
20	6322.602	5962.376	5929.599
50	6852.733	7061.801	7114.847
100	7207.826	7796.442	7969.382
200	7559.591	8471.012	8797.611
500	8041.265	9291.902	9862.615
1000	8430.611	9870.094	10649.859
2000	8851.504	10417.975	11425.201
5000	9468.963	11103.293	12433.777
10000	9985.443	11596.037	13186.807

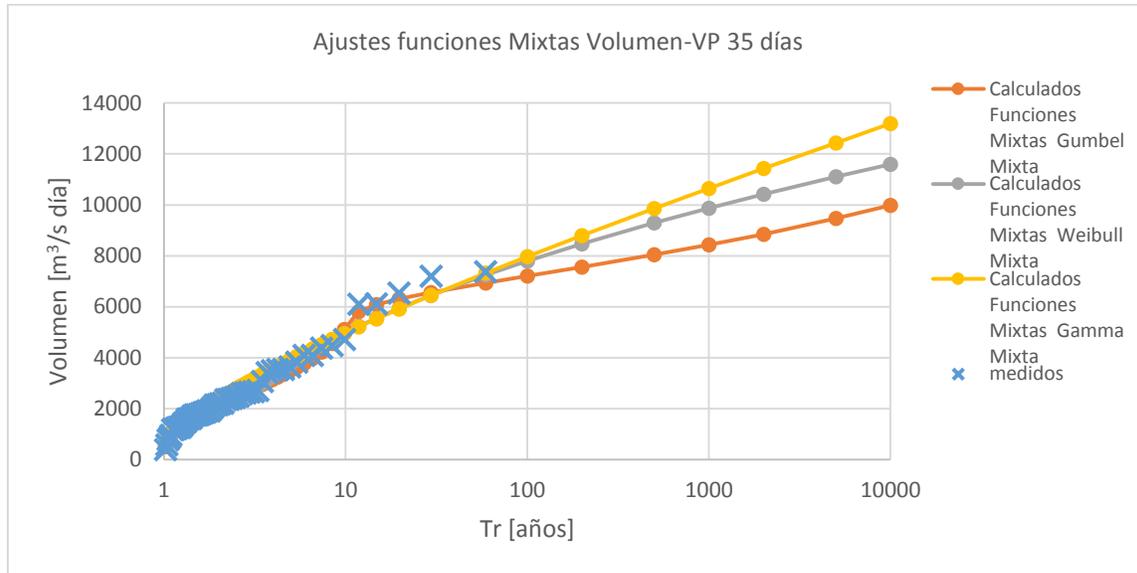


Figura 3.18 Ajustes a distribuciones mixtas volumen-VP 35 días

Al finalizar con los ajustes a funciones de probabilidad mixtas y contando además con los ajustes de una población se puede elegir aquella función que mejor se ajuste a las cuatro muestras de datos. Como el objetivo del documento es además de proponer la metodología, analizar los efectos de las funciones de probabilidad en los datos, se selecciona la misma función para las variables.

Se elige la función de los ajustes Normal, Gumbel, Weibull, Gamma, Gumbel Mixta, Gamma Mixta y Weibull Mixta, las funciones con logaritmos como Lognormal y Loggamma son descartadas por las razones explicadas anteriormente. Para ello se analizan los resultados de las pruebas de bondad de ajuste.

Como era muy posible que sucediera, los ajustes con funciones mixtas resultan en mejores estimaciones que los que no son mixtos, para el caso de la muestra de Gasto-GP la función Gama Mixta genera mejores resultados según el valor de la verosimilitud, las pruebas Anderson-Darling y Kolmogórov-Smirnov, así como el criterio de Akaike, mientras que la función Weibull Mixta es mejor según el error estándar de ajuste.

Para la variable Volumen-GP la función Weibull Mixta resultó ser la mejor según el error estándar de ajuste, las pruebas de Anderson-Darling y Kolmogórov-Smirnov y la función Gumbel Mixta en el valor de la verosimilitud y por consiguiente en el criterio de Akaike.

Para el Gasto de volumen prioridad la función Weibull logra ser la que mejor estima valores, gana en todas las pruebas exceptuando en Akaike y el valor de la verosimilitud.

La última muestra Volumen VP se ajusta mejor a la función Gumbel Mixta, en todas las pruebas exceptuando Anderson-Darling y Kolmogórov-Smirnov que lo hacen en la función Weibull Mixta.

Tras el análisis realizado se puede concluir que para cada muestra hay una función diferente que se ajusta de mejor forma, pero no existen una diferencia significativa entre ellas, es por ello que se ha tomado la decisión de aplicar la función bivariada con la información de los ajustes Weibull Mixta, Gumbel Mixta y Gamma Mixta, que son aquellas que proporcionaron mejores resultados y de acuerdo a la estimación bivariada elegir el caso con el cual se creará el hidrograma de diseño final de 35 días, lo cual se analizará en el capítulo siguiente.

### 3.5.2.2 Duración 10 días

Se realizaron los ajustes a funciones de probabilidad mixtas para las cuatro series de datos, se eligieron las funciones Weibull Mixta, Gumbel Mixta y Gamma Mixta puesto su contraparte de una población fueron aquellas que mejor se ajustaron.

Los resultados de los ajustes a funciones mixtas se muestran a continuación.

#### Gasto-Gasto Prioridad

Los 5 parámetros obtenidos por el método de la verosimilitud máxima se muestran en la siguiente tabla.

*Tabla 3.50 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, Q-QP 10 días.*

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.005628	380.1513	223.6476
$\beta_1$	285.7606	1.7887	2.47356
$\alpha_2$	0.00362	1022.9327	82.4085
$\beta_2$	978.4006	2.4301	3.38018
$\rho$	0.888	0.782	0.709

Las pruebas de bondad de ajuste arrojaron los siguientes resultados:

Tabla 3.51 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, Q-QP 10 días.

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	50.929	41.65	60.01
EEAd	0.10994994	0.091815652	0.128972244
Max. Log. de Verosimilitud	-408.369	-406.87	-405.595
Anderson-Darling	0.5296	0.155	0.2004
Kolmogórov-Smirnov	0.0865	0.05	0.0436
Akaike	-418.3693	-416.87	-411.3924

La función Weibull mixta es aquella que arroja un mejor ajuste en las pruebas de EEA y A-D, mientras que la función Gamma lo hace en el valor de la verosimilitud, Akaike y K-S.

Tabla 3.52 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas Q-QP 10 días.

Tr	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	384.223	371.167	387.979
5	675.481	673.447	700.131
10	934.45	945.686	920.432
20	1170.67	1201.033	1128.934
50	1447.387	1463.477	1391.47
100	1645.065	1625.214	1583.109
200	1838.726	1766.764	1770.48
500	2092.277	1932.098	2013.025
1000	2283.439	2044.867	2193.527
2000	2474.483	2149.369	2371.854
5000	2727.075	2277.291	2605.182
10000	2918.237	2367.574	2779.813

## Volumen- Gasto Prioridad

Los parámetros obtenidos del ajuste son:

Tabla 3.53 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, V-QP 10 días.

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.001913	1318.8414	791.3938
$\beta_1$	849.1056	1.7513	1.94717
$\alpha_2$	0.001048	4781.4824	270.6629
$\beta_2$	3556.0444	4.6998	3.46356
$\rho$	0.928	0.938	0.782

Las pruebas de bondad de ajuste arrojan los siguientes resultados:

*Tabla 3.54 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, V-QP 10 días.*

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	176.815	140.93	248.74
EEAd	0.132901933	0.104806721	0.180210429
Max. Log. de Verosimilitud	-468.71	-467.987	-469.251
Anderson-Darling	0.2032	0.175	0.6513
Kolmogórov-Smirnov	0.0613	0.0546	0.0737
Akaike	-478.7097	-477.987	-474.3205

La función Weibull Mixta es en prácticamente todas las pruebas aquella que da el mejor ajuste.

*Tabla 3.55 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas V-QP 10 días.*

Tr	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	1100.39	1129.005	1144.376
5	1845.824	1909.679	2088.831
10	2591.051	2532.633	2780.637
20	3576.458	3628.26	3453.412
50	4664.342	4914.928	4315.622
100	5386.983	5437.425	4951.999
200	6076.918	5821.894	5578.348
500	6967.579	6218.623	6393.655
1000	7634.271	6466.391	7003.229
2000	8298.314	6683.306	7607.922
5000	9174.295	6935.237	8400.793
10000	9836.332	7105.414	8995.926

### Gasto Volumen Prioridad

Los parámetros obtenidos se muestran a continuación:

*Tabla 3.56 c*

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.00793	565.62	247.9066
$\beta_1$	201.1739	1.4318	1.88969
$\alpha_2$	0.004731	218.0129	105.3114
$\beta_2$	713.1826	2.4057	2.47592
$\rho$	0.758	0.707	0.758

Y las pruebas de bondad de ajuste dan los siguientes valores:

*Tabla 3.57 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, Q-VP 10 días.*

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	89.04	58.39	78.62
EEAd	0.221118336	0.142075392	0.190989705
Max. Log. de Verosimilitud	-405.463	-403.911	-387.417
Anderson-Darling	0.2603	0.108	0.2103
Kolmogórov-Smirnov	0.0539	0.0345	0.0535
Akaike	-415.4627	-413.9113	-409.0326

En la mayoría de las pruebas la función Weibull Mixta es aquella que arroja un mejor ajuste, excepto en las pruebas de Akaike y verosimilitud.

*Tabla 3.58 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas Q-VP 10 días.*

Tr	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	311.591	304.385	334.732
5	650.838	665.898	629.23
10	857.911	903.833	842.896
20	1027.741	1117.074	1050.836
50	1233.514	1374.591	1318.393
100	1383.678	1556.159	1516.275
200	1531.887	1728.988	1711.13
500	1726.491	1946.649	1965.152
1000	1873.27	2104.516	2155.203
2000	2019.893	2257.409	2343.637
5000	2213.619	2452.985	2591.074
10000	2360.137	2596.464	2776.846

## Volumen-Volumen Prioridad

Los parámetros obtenidos se muestran a continuación:

*Tabla 3.59 Parámetros de ajuste obtenidos para las tres funciones de probabilidad mixtas, V-VP 10 días*

Parámetros	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
$\alpha_1$	0.002053	1231.2125	649.936
$\beta_1$	901.6741	2.2401	2.38033
$\alpha_2$	0.001022	3324.8013	265.2026
$\beta_2$	3071.637	2.4167	3.8154
$\rho$	0.887	0.799	0.743

Al aplicar las pruebas de bondad de ajuste se obtienen los siguientes valores.

Tabla 3.60 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las funciones mixtas, V-VP 10 días.

Prueba	Funciones Mixtas		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
EE	171.131	155.35	308.46
EEAd	0.120	0.108	0.222988809
Max. Log. de Verosimilitud	-469.523	-469.139	-470.347
Anderson-Darling	0.187	0.176	0.7513
Kolmogórov-Smirnov	0.0484	0.0593	0.0902
Akaike	-479.5228	-479.139	-475.8809

Es notorio que de nueva cuenta la función Weibull Mixta es aquella que resulta en un mejor ajuste, exceptuando las pruebas de Kolmogórov-Smirnov y Akaike, que establecen que es la Gumbel Mixta.

Tabla 3.61 Valores extrapolados para las 3 funciones mixtas V-VP 10 días.

Tr	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
2	1172.641	1191.916	1190.231
5	1977.838	1954.753	2041.223
10	2809.233	2880.13	2648.029
20	3678.457	3810.456	3234.668
50	4692.721	4698.435	3982.98
100	5408.057	5238.108	4532.571
200	6104.274	5708.659	5071.161
500	7011.326	6257.006	5769.559
1000	7692.896	6630.459	6289.594
2000	8372.674	6976.234	6803.918
5000	9270.004	7399.197	7476.739
10000	9948.354	7697.544	7980.954

Como en las cuatro series de datos, el ajuste mediante la función Weibull Mixta fue el que mejores resultados arrojó en general, la estimación bivariada por lo tanto se realizará utilizando los parámetros y consecuentes probabilidades obtenidas con la función Weibull Mixta, para generar el hidrograma de diseño final para 10 días de duración.

Los valores extrapolados marginalmente serán utilizados en la extrapolación de datos bivariada, que se verá en el capítulo siguiente.

## **Capítulo 4**

# **Funciones de distribución de probabilidad Bivariadas.**

Comúnmente los análisis de frecuencias de las avenidas contienen una sola variable (gasto de pico o volumen). Sin embargo, resultan insuficientes y limitados. Los estudios hidrológicos modernos deben considerar distribuciones de probabilidad de las avenidas con dos o más variables aleatorias (gasto de pico, volumen y duración, etc.) con cierta correlación entre ellas. Para saber que tanto tienden a estar asociados valores grandes de una de las variables aleatorias con los valores grandes de la otra, y que tanto también lo hacen los valores pequeños de una con valores pequeños de la otra se utilizan las medidas de correlación y concordancia (Escarela-Hernández, 2009).

Es posible aplicar modelos que contemplen dos o más variables para estimar así hidrogramas mucho más completos que los comúnmente utilizados, estos hidrogramas se denominarán bivariados o trivariados, según sea el caso.

Un análisis hidrológico de carácter multivariado resulta ser mucho más apegado a lo que sucede en la naturaleza, puesto que como ya se mencionó se forma por más de una variable aleatoria, lo cual significa que toma más información del comportamiento real del río que un análisis univariado, para así generar resultados mucho más confiables, con menor incertidumbre.

## 4.1 Funciones de probabilidad multivariadas “Cópulas”

Una herramienta sencilla y útil para la construcción de distribuciones multivariadas dependientes a partir de funciones de probabilidad de una variable también llamadas marginales son las denominadas cópulas (Sklar, 1959). Con las cópulas se obtienen distribuciones de probabilidad multivariadas a partir de sus funciones univariadas (Nelsen, 1999) con cierta medida de la relación entre ellas. Por ejemplo, a cada par de variables aleatorias reales se asocia a cada una ellas una función de probabilidad de una variable y a partir de estas funciones, se obtiene la función multivariada.

Una familia de cópulas que permite este modelado a través de una sola función univariada es la Arquimediana (Genest & Rivest, 1993).

A partir de una medida de la dependencia entre dos variables es posible estimar el parámetro de algunas clases de cópulas. La medida de dependencia más utilizada es el coeficiente de correlación de Pearson que considera la dependencia lineal y no se modifica para transformaciones crecientes de las variables. Otras medidas de esta clase son los coeficientes de correlación conocidos, como el tau de Kendall y la rho de Spearman, que se basan en los conceptos de concordancia y discordancia.

En la tabla 4.1 se incluyen varias familias de cópulas y ecuaciones de dependencia para su parámetro.

Tabla 4.1 Expresiones Matemáticas de Cópulas Arquimedianas y ecuaciones de dependencia para su parámetro (Fuentes, 2018).

<p><b>Cópula Clayton</b></p> $C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$ $\tau = \theta / (\theta + 2)$
<p><b>Cópula Frank</b></p> $C(u, v) = \frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right]$ $\tau = -\frac{4}{\theta} [D(-\theta) - 1]$
<p><b>Cópula Gumbel – Hougaard</b></p> $C(u, v) = \exp[-\{(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\}]^{\frac{1}{\theta}}$ $ \tau  = 1 - \theta^{-1}$
<p><b>Función Gumbel bivariada</b></p> $F(u, v) = \exp[-\{(-\ln F(u))^\theta + (-\ln F(v))^\theta\}]^{\frac{1}{\theta}}$ $\theta = -1/\sqrt{1 - \rho}$
<p><i>Donde <math>\theta</math> es el parámetro de la cópula, <math>D</math> es la función de primer orden de Debye, <math>\tau</math> es el coeficiente de concordancia de Kendall y <math>\rho</math> es el coeficiente de correlación de Pearson</i></p>

Para análisis hidrológicos se recomienda el uso de la familia de cópula Gumbel-Hougaard, puesto que su versatilidad permite que se utilice con muchas de las funciones de probabilidad tradicionales, y sus resultados son confiables.

#### 4.1.1 Cópula Gumbel-Hougaard

La cópula bidimensional de Gumbel-Hougaard es expresada como (Zhang, 2007):

$$C = \exp[-\{(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\}]^{\frac{1}{\theta}} \quad (4.1)$$

La función de densidad de la cópula está dada como:

$$c = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v} \quad (4.2)$$

De modo que si

$$C = \exp\left(-w^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (4.3)$$

La función de densidad es:

$$c = \frac{(\ln u \ln v)^{\theta-1}}{u v} \exp\left(-w^{\frac{1}{\theta}}\right) [w^{\frac{2}{\theta}-2} + (\theta - 1)w^{\frac{1}{\theta}-2}] \quad (4.4)$$

Con

$$w = (-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta} \quad (4.5)$$

En donde  $\theta$  es el parámetro de la cópula y es una incógnita.

#### 4.1.2 Método semiparamétrico de cálculo del parámetro bivariado $\theta$

Genest et al. (1995) proponen estimar el parámetro  $\theta$  con un método semiparamétrico que consiste en estos pasos:

a) Sea la muestra aleatoria  $u, v$  que tiene la distribución multivariada

$$F(u, v) = C(F_u(u), F_v(v)) \quad (4.6)$$

Donde  $F_u(u)$  y  $F_v(v)$  son las distribuciones de probabilidad marginales de las variables aleatorias  $u, v$  respectivamente.

b) La función de verosimilitud  $V(\theta)$  de la función cópula  $C$  se expresa como

$$V(\theta) = \prod_{k=1}^{k=n} c(F_u(u_k), F_v(v_k)) \quad (4.7)$$

Siendo  $c$  la función de densidad de la cópula  $C$ ;  $u_k, v_k$  son las  $k$ -ésimas variables aleatorias  $u, v$ . Las funciones marginales suelen multiplicarse por  $n/(n + 1)$  para evitar que de tiendan cero (Genest et al. 1995).

c) Se obtiene el parámetro  $\theta$  de la cópula que hace máxima a la función de verosimilitud  $V(\theta)$ .

Cabe señalar que para la cópula no importa que las distribuciones marginales tengan el mismo número de parámetros.

En el caso de la estimación hidrológica bivariada las funciones marginales corresponderán tanto a la variable de gasto como a la de volumen, obtenidos como se explica en el capítulo dos.

Con el parámetro  $\theta$  obtenido es posible obtener la probabilidad bivariada mediante la cópula Gumbel-Hougaard ecuación 4.1.

## 4.2 Extrapolación a periodos de retorno bivariados

La avenida de un periodo de retorno específico tiene asociados varios valores de gasto de pico, volumen y duración. Para revisar o determinar la capacidad del vertedor de excedencias de una presa grande, es fundamental contar con las avenidas de ingreso a su embalse para un periodo de retorno del orden de 10,000 años.

Utilizando la cópula Gumbel-Hougaard es posible encontrar parejas de las variables analizadas (gasto y volumen) que cumplan con la probabilidad correspondiente a determinados periodos de retorno. Es decir, es posible realizar una extrapolación de ambas variables, para obtener un periodo de retorno conjunto.

En varias referencias recientes Salvadori et al (2011), Serinaldi (2014) y Nikoletta (2018) proponen tres definiciones del periodo de retorno conjunto. La primera de ellas se refiere al periodo de retorno  $Tr_{OR}$  en el cual “OR” es equivalente al símbolo  $\cup$  usado para describir la unión de dos conjuntos (la letra “o” en español), en ella la variable  $u$  o la variable  $v$  son excedidas ( $U > u$  o  $V > v$ ). El segundo, es el periodo de retorno  $Tr_{AND}$  en el cual “AND” es equivalente al símbolo  $\cap$  usado para describir la intersección de dos conjuntos (la letra “y” en español) en el cual ambas variables  $u$  y  $v$  son excedidas ( $U > u$  y  $V > v$ ). El tercero se basa en la función de Kendall  $K_C(t)$  utilizada en la teoría de las cópulas (Salvadori et al, 2007).

El periodo de retorno está dado por:

$$Tr_{OR} = \frac{1}{1 - C(u, v)} \quad (4.8)$$

$$Tr_{AND} = \frac{1}{1 - F(u) - F(v) + C(u, v)} \quad (4.9)$$

$$Tr_{KEN} = \frac{1}{1 - K_c(t)}; K_c(t) = P(C(u, v) \leq t) \quad (4.10)$$

Los periodos de retorno se muestran expresados en función de los valores de distribución marginales y la cópula. Lo cual significa que la evaluación se facilita usando cópulas. Además, se cumple que:

$$T_{OR} \leq T_{KEN} \leq T_{AND}$$

En la ilustración 4.1 se muestran en tonos de color gris las regiones críticas consideradas para cada probabilidad de excedencia o periodo de retorno de funciones de probabilidad bivariadas. Donde las probabilidades de excedencia son  $p_{AND} = 1 - 1/T_{AND}$ ,  $p_{KEN} = 1 - \frac{1}{T_{KEN}}$  y  $p_{OR} = 1 - 1/T_{OR}$ .

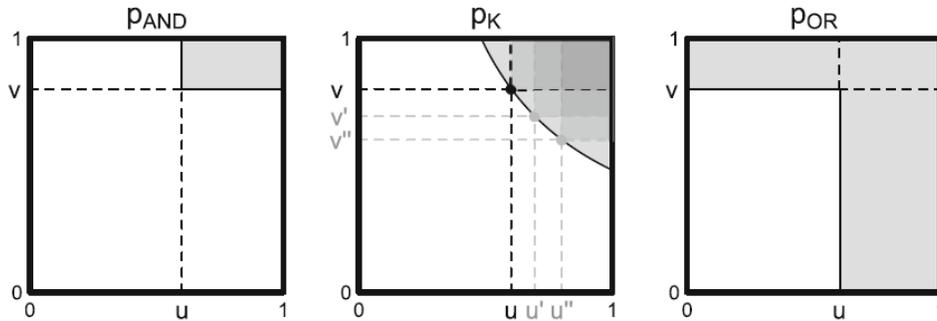


Ilustración 4.1 Dominios y regiones críticas correspondientes a diferentes tipos de probabilidades. Las líneas negras definen los dominios donde la probabilidad es calculada, mientras que las áreas grises denotan las regiones críticas que cumplen la condición de cada  $t$  tipo de probabilidad (Serinaldi, 2014).

Shiau, Wang y Tsai (2006) señalan textualmente “En análisis de frecuencia univariados existe una relación uno a uno entre la función de distribución y el periodo de retorno (un valor específico de la función de distribución únicamente determina un valor de periodo de retorno y viceversa). Sin embargo, contar con dos periodos de retorno univariados no revela una dependencia significativa entre variables aleatorias correlacionadas. Un análisis de frecuencias bivariado puede ser definido por el periodo de retorno conjunto”.

Refiriéndose a los casos OR y AND y al pico y volumen de inundación, Shiau (2006) y Serinaldi (2014) y Nikoletta (2018) señalan que el uso de  $T_{OR}$  o  $T_{AND}$  depende las condiciones de uso. Cuando el caudal de pico o el volumen de la avenida que excedan ciertas magnitudes causan daño, entonces se usa  $T_{OR}$  para evaluar el promedio intervalo de recurrencia. Si ambas variables deben exceder valores específicos para lograr condiciones críticas, entonces  $T_{AND}$  debe ser adoptado.  $T_{KEN}$  se debe usar cuando todos los eventos inducen condiciones críticas.

Para extrapolar con carácter bivariado es necesario contar con el parámetro  $\theta$  de la cópula Gumbel-Hougaard y los parámetros de las distribuciones marginales utilizadas, el proceso es sencillo puesto a que es del tipo iterativo, se propone un valor para cada variable (Q y V) y se calcula su probabilidad marginal con ayuda de las distribuciones seleccionadas y sus parámetros, posteriormente se calcula el valor de la probabilidad conjunta con la cópula Gumbel-Hougaard y el valor de  $\theta$ , con ella se obtiene el periodo de retorno conjunto.

Es posible, con ayuda de herramientas de software, proponer un valor de una sola variable y que el software encuentre la pareja que haga que cumpla un periodo de retorno ya elegido previamente; una de estas herramientas puede ser la función “solver”, o buscar objetivo, ambas de Microsoft Excel.

Es importante mencionar que existirá más de una pareja Q, V que cumplan con el periodo de retorno buscado debido a que ambas variables tendrán rangos para sus valores, esto sucede por el hecho que, al ser probabilidades acumuladas, la probabilidad de las variables marginales debe formar la probabilidad conjunta.

Con los valores de las parejas Q, V encontradas que cumplan con determinado periodo de retorno es posible crear curvas como la que se muestra a continuación.

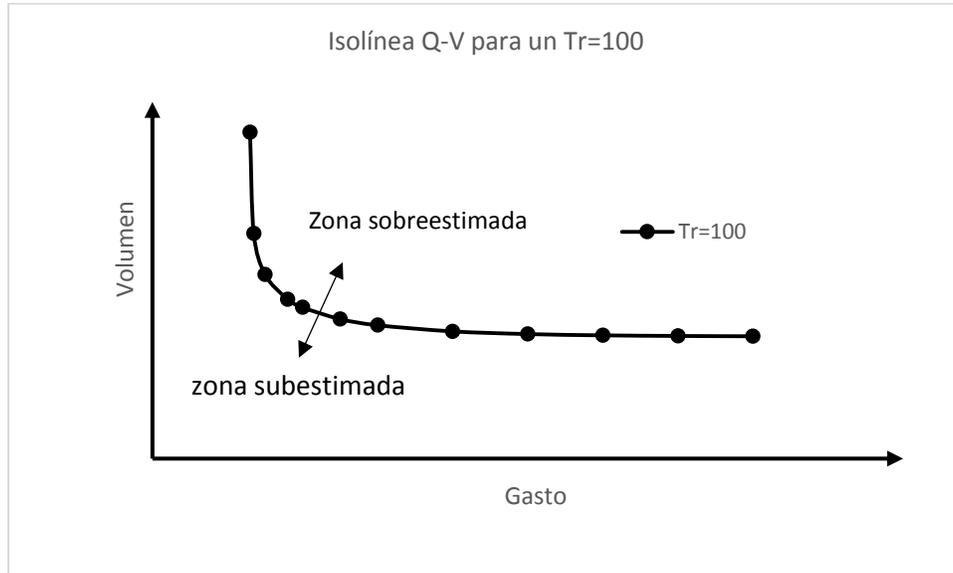


Figura 4.1 Isolinia de periodo de retorno a 100 años

La curva es una isolinia de periodo de retorno; los puntos en el gráfico representan cada combinación  $Q, V$  que cumplen con un  $Tr=100$  años obtenidas mediante el proceso anterior con la cópula Gumbel-Hougaard, en total se muestran 12 combinaciones diferentes, todas ellas pueden ser seleccionadas para la creación del hidrograma de diseño final, el gasto de la pareja elegida será el gasto pico del hidrograma final, el volumen de la pareja elegida será el volumen que corresponda al hidrograma. Además de esta pareja  $Q, V$  dependerá la forma final del hidrograma de diseño, lo cual se abordará en el siguiente capítulo. Como se aprecia, la curva tiende a ser asintótica tanto en el eje de las abscisas, como en el eje de las ordenadas, este comportamiento es normal en análisis de carácter bivariado.

Si en el caso de la revisión de una estructura u otro tipo de análisis cuyo gasto y volumen sea previamente conocido, esta pareja  $Q-V$  se encuentra arriba de la isolinia significa que con base en la probabilidad estimada con la cópula esos valores están sobreestimados y si se encuentra por debajo significa que la estructura se encuentra en riesgo.

### 4.3 Pruebas de bondad de estimación bivariada

Al igual que en la estimación hidrológica tradicional la selección de datos extrapolados para la creación de un hidrograma de diseño resulta en una tarea sumamente importante en

la estimación bivariada. Usualmente se elige el valor extrapolado con aquella función de probabilidad que tras el ajuste de datos genere el menor valor del error estándar de ajuste. En la estimación bivariada se recomienda utilizar la prueba de bondad de Kolmogórov-Smirnov.

Para conocer la calidad de la estimación bivariada calculada mediante la metodología propuesta; es necesario analizar los valores de probabilidad obtenidos con la cópula de Gumbel-Hougaard. Para ello se hará uso de la frecuencia acumulada observada que se estima con la fórmula de Gringorten (1963).

$$P_k = \frac{k - 0.44}{n + 0.12} \quad (4.11)$$

Donde  $P_k$  es la frecuencia acumulada, la probabilidad de que un valor dado sea menor que el  $k$ ésimo menor valor observado en el conjunto de  $n$  datos.

Con la frecuencia observada es posible calcular las diferencias con la probabilidad conjunta obtenida con la cópula y así aplicar la prueba de Kolmogórov-Smirnov y con ella comparar entre diversas estimaciones bivariadas para seleccionar aquella que sea la mejor opción para generar el hidrograma de diseño final.

Como el método semiparamétrico para el cálculo de  $\theta$  estima la verosimilitud máxima, es posible además aplicar el criterio de información de Akaike para conocer la bondad de la estimación bivariada.

#### **4.4 Ejemplo de aplicación caso presa La Angostura, Sonora**

Para el caso de estudio de la Presa Gral. Lázaro Cárdenas La Angostura se realizará el cálculo a una función bivariada utilizando la cópula Gumbel-Hougaard., y los datos de gastos y volúmenes máximos anuales obtenidos por los criterios de Gasto y Volumen prioridad, así como los parámetros obtenidos en los ajustes probabilísticos marginales a diferentes funciones de probabilidad.

#### 4.4.1.1 Duración 35 días

Como ya se explicó en el apartado anterior, tras analizar los ajustes marginales, las mejores funciones para ambas variables en ambos criterios resultaron ser la función Gumbel Mixta también conocida como Doble Gumbel, Gamma Mixta y la Weibull Mixta. Con los parámetros estimados con estas funciones se desarrollará el ajuste bivariado. Sin mezclar ajustes, es decir cada análisis bivariado se formará por ajustes a la misma función para el gasto y para el volumen.

Para la estimación bivariada es posible mezclar ajustes con funciones diferentes, incluso con número de parámetros diferentes, solo que para este trabajo no se realizará de ese modo para analizar como ya se mencionó los efectos de las funciones en los resultados finales.

Para la duración de 35 días, con ajustes marginales con las funciones elegidas se obtuvieron los parámetros que se muestran en la tabla 4.2.

Tabla 4.2 Parámetros de ajuste obtenidos para cada criterio para las funciones Gumbel, Gamma y Weibull Mixtas.

Ajustes Marginales 35 días								
Parámetro	Gumbel Mixta				Weibull Mixta			
	Gasto Prioridad		Volumen Prioridad		Gasto Prioridad		Volumen Prioridad	
	Gasto	Volumen	Gasto	Volumen	Gasto	Volumen	Gasto	Volumen
$\alpha_1$	0.0066	0.001088	0.011242	0.001125	407.2818	2111.0532	569.1115	3834.6628
$\alpha_2$	245.4209	1507.7028	168.7769	1741.0216	1.7432	1.8895	1.4988	1.9414
$\beta_1$	0.003723	0.002108	0.003897	0.002302	1184.1337	6083.5757	175.7151	1955.0522
$\beta_2$	845.108	6203.2539	563.0058	6226.6001	3.148	4.0658	3.2125	3.5872
$\rho$	0.811	0.93	0.615	0.919	0.863	0.859	0.713	0.527
Parámetro	Gamma Mixta							
	Gasto Prioridad		Volumen Prioridad					
	Gasto	Volumen	Gasto	Volumen				
$\alpha_1$	218.0333	1129.9596	232.0909	907.7616				
$\alpha_2$	2.23888	2.29431	2.32283	3.49721				
$\beta_1$	59.9432	436.644	79.4723	328.3861				
$\beta_2$	3.22873	3.77585	2.35859	5.37638				
$\rho$	0.863	0.791	0.709	0.71				

Conocidos estos parámetros, el siguiente paso es obtener el valor de  $\theta$ , mediante el método semiparamétrico propuesto.

Para el caso de los valores de gasto y volumen del criterio Gasto Prioridad ajustados con la función Gumbel Mixta, se obtiene la probabilidad para cada variable, utilizando los parámetros del ajuste correspondiente mostrados en la tabla 4.2.

Tabla 4.3 Cálculo de la probabilidad  $F(Q)$  y  $F(V)$  con la función Gumbel Mixta para las parejas de Gasto prioridad, 35 días de duración

Año	Gasto	Volumen	u	v	Año	Gasto	Volumen	u	v
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)		m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)
1942	472.317	1594.148	0.65189	0.37426	1971	147.371	888.439	0.12009	0.13079
1943	347.857	2537.182	0.48800	0.67111	1972	279.318	1441.507	0.36463	0.31751
1944	254.921	1754.886	0.31707	0.43311	1973	653.278	3642.047	0.78238	0.84313
1945	227.306	1762.472	0.26278	0.43584	1974	154.917	612.344	0.13176	0.06578
1946	186.75	1273.017	0.18593	0.25577	1975	169.135	815.245	0.15506	0.11116
1947	63.491	865.383	0.02924	0.12443	1976	157.064	2030.912	0.13518	0.52807
1948	564.343	1872.487	0.72895	0.47474	1977	520.494	1513.091	0.69582	0.34413
1949	1312.088	7203.824	0.96882	0.99011	1978	967.417	5872.248	0.90435	0.93136
1950	444.503	1277.227	0.62209	0.25729	1979	665.607	6103.747	0.78876	0.94415
1951	540.874	1435.028	0.71193	0.31510	1980	100.506	780.747	0.06009	0.10249
1952	431.345	1493.525	0.60672	0.33685	1981	282.278	1511.765	0.37031	0.34364
1953	836.904	1915.336	0.86222	0.48951	1982	713.799	1925.566	0.81198	0.49300
1954	360.966	2148.866	0.50912	0.56532	1983	566.386	4382.063	0.73036	0.89011
1955	407.346	419.132	0.57641	0.03540	1984	748.648	6546.401	0.82738	0.96923
1956	93.605	577.291	0.05323	0.05934	1985	461.083	2657.257	0.64028	0.69846
1957	361.642	2007.266	0.51018	0.52034	1986	278.988	2663.36	0.36399	0.69979
1958	668.225	3413.256	0.79009	0.82008	1994	359.71	2620.025	0.50713	0.69025
1959	310.041	4096.385	0.42232	0.87600	1995	1764.687	4090.196	0.99390	0.87565
1960	1106.095	3544.957	0.93769	0.83397	1996	94.812	860.384	0.05439	0.12307
1961	149.599	825.956	0.12348	0.11393	1997	375.344	1615.117	0.53122	0.38202
1962	702.466	2393.432	0.80674	0.63504	1998	203.141	1765.202	0.21625	0.43682
1963	130.562	2403.627	0.09598	0.63772	1999	489.632	2594.782	0.66872	0.68454
1964	349.554	2543.052	0.49079	0.67250	2000	239.769	1844.92	0.28724	0.46512
1965	889.874	3493.088	0.88062	0.82871	2001	213.763	1017.487	0.23649	0.16911
1966	369.291	3826.654	0.52205	0.85831	2002	157.641	823.389	0.13610	0.11326
1967	1284.023	7374.602	0.96564	0.99275	2003	54.369	133.518	0.02380	0.01075
1968	582.353	4715.42	0.74105	0.90206	2004	635.686	748.875	0.77292	0.09481
1969	261.518	1215.074	0.33002	0.23516	2005	1072.12	3438.051	0.93055	0.82283
1970	250.308	1723.558	0.30799	0.42178	2006	190.775	2491.987	0.19325	0.66016

Utilizando los valores correspondientes al año de 1942 ( $Q=472.317$  y  $V=1594.148$ ) se ejemplifica el cálculo de la probabilidad utilizando la función Gumbel Mixta.

$$F(x) = \rho e^{-e^{-\alpha_1(x-\beta_1)}} + (1 - \rho)e^{-e^{-\alpha_2(x-\beta_2)}}$$

$$F(Q) = \rho e^{-e^{-\alpha_1(Q-\beta_1)}} + (1 - \rho)e^{-e^{-\alpha_2(Q-\beta_2)}}$$

Sustituyendo valores

$$F(Q) = 0.811e^{-e^{-0.0066(472.317-245.4209)}} + (1 - 0.811)e^{-e^{-0.003723(472.317-845.108)}}$$

$$F(Q) = 0.6484 + 0.003439 = 0.6518$$

Ahora para el volumen

$$F(V) = \rho e^{-e^{-\alpha_1(V-\beta_1)}} + (1 - \rho)e^{-e^{-\alpha_2(V-\beta_2)}}$$

$$F(V) = 0.93e^{-e^{-0.001088(1594.148-1507.7)}} + (1 - 0.93)e^{-e^{-0.002108(1594.148-6203.2539)}}$$

$$F(V) = 0.3742 + 0 = 0.3742$$

Ahora utilizando el valor de  $w$ , la función de densidad de la cópula Gumbel-Hougaard y la ecuación de máxima verosimilitud se estima el valor de  $\theta$ , de forma iterativa hasta que la función de máxima verosimilitud nos arroje un valor máximo. Para ello se propone un valor  $\theta$  inicial, con el cual se calcula  $w$ , posteriormente se aplica la función de densidad  $c$  y al final se calcula la verosimilitud. Para poder facilitar este proceso, es posible utilizar herramientas de software que iteren valores para encontrar el máximo buscado, uno muy útil y sencillo de utilizar para resolver este caso es la función Solver complemento de Microsoft Excel.

Para el mismo año de 1942 con la ecuación 4.5 y proponiendo un  $\theta$  igual a 1.1.

$$w = (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta$$

Sustituyendo

$$w = (-\ln (0.6518))^{1.1} + (-\ln (0.3742))^{1.1}$$

$$w = 1.374$$

Posteriormente se debe calcular el valor de  $c$

$$c = \frac{(\ln u \ln v)^{\theta-1}}{u v} \exp\left(-w^{\frac{1}{\theta}}\right) \left[w^{\frac{2}{\theta}-2} + (\theta - 1)w^{\frac{1}{\theta}-2}\right]$$

Sustituyendo

$$c = \frac{(\ln(0.6518) \ln(0.3742))^{1.1-1}}{(0.6518)(0.3742)} \exp\left(-1.374 \frac{1}{1.1}\right) \left[1.374 \frac{2}{1.1} + (1.1 - 1)w \frac{1}{1.1} - 2\right]$$

$$c = 1.003$$

Con c se puede aplicar ahora la función de verosimilitud, cuyo valor inicial será el valor de c para el primer año de registro, posteriormente, se ira multiplicando la c del segundo año con la anterior, tal como lo expresa la ecuación 4.7.

Este procedimiento se debe realizar iterando valores de  $\theta$  hasta que la verosimilitud sea máxima. Utilizando la función Solver de Excel se realiza este procedimiento con mayor velocidad, la tabla de cálculo se muestra en la tabla 4.4.

### Caso Gasto Prioridad con ajustes Gumbel Mixta

Tabla 4.4 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  GP-GM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Gumbel Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.65189	0.37426	1.17595	1.00899	1.00899	0.33573
1943	347.857	2537.182	0.48800	0.67111	0.72281	1.23392	1.24501	0.43204
1944	254.921	1754.886	0.31707	0.43311	2.01148	1.36386	1.69803	0.23261
1945	227.306	1762.472	0.26278	0.43584	2.42006	1.29116	2.19242	0.19959
1946	186.75	1273.017	0.18593	0.25577	4.39668	1.63323	3.58072	0.10813
1947	63.491	865.383	0.02924	0.12443	14.24908	2.36421	8.46559	0.01504
1948	564.343	1872.487	0.72895	0.47474	0.69817	1.04724	8.86547	0.43882
1949	1312.088	7203.824	0.96882	0.99011	0.00187	8.93492	79.21224	0.96694
1950	444.503	1277.227	0.62209	0.25729	2.01312	0.83102	65.82665	0.23247
1951	540.874	1435.028	0.71193	0.31510	1.44102	0.72150	47.49379	0.29581
1952	431.345	1493.525	0.60672	0.33685	1.44597	1.03931	49.36071	0.29514
1953	836.904	1915.336	0.86222	0.48951	0.56546	0.61178	30.19770	0.47948
1954	360.966	2148.866	0.50912	0.56532	0.83644	1.41943	42.86346	0.40330
1955	407.346	419.132	0.57641	0.03540	9.67191	0.42430	18.18705	0.03322
1956	93.605	577.291	0.05323	0.05934	14.18099	3.06017	55.65549	0.01521
1957	361.642	2007.266	0.51018	0.52034	0.93470	1.42931	79.54904	0.38129
1958	668.225	3413.256	0.79009	0.82008	0.11870	2.16944	172.57658	0.72873
1959	310.041	4096.385	0.42232	0.87600	0.78315	0.43713	75.43812	0.41629
1960	1106.095	3544.957	0.93769	0.83397	0.04863	2.05367	154.92507	0.82246
1961	149.599	825.956	0.12348	0.11393	8.13008	2.15609	334.03258	0.04505
1962	702.466	2393.432	0.80674	0.63504	0.28958	1.34061	447.80631	0.59920
1963	130.562	2403.627	0.09598	0.63772	5.07067	0.47034	210.62124	0.09049
1964	349.554	2543.052	0.49079	0.67250	0.71314	1.23779	260.70584	0.43467
1965	889.874	3493.088	0.88062	0.82871	0.06712	2.52302	657.76637	0.79247
1966	369.291	3826.654	0.52205	0.85831	0.48108	0.70604	464.41115	0.50985
1967	1284.023	7374.602	0.96564	0.99275	0.00212	6.20898	2883.52127	0.96466

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Gumbel Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1968	582.353	4715.42	0.74105	0.90206	0.12218	1.41552	4081.69494	0.72512
1969	261.518	1215.074	0.33002	0.23516	3.19414	1.48237	6050.59814	0.15382
1970	250.308	1723.558	0.30799	0.42178	2.11540	1.37328	8309.18962	0.22345
1971	147.371	888.439	0.12009	0.13079	7.74590	2.10380	17480.90788	0.04880
1972	279.318	1441.507	0.36463	0.31751	2.30625	1.45536	25440.93948	0.20802
1973	653.278	3642.047	0.78238	0.84313	0.11194	2.11725	53864.94960	0.73596
1974	154.917	612.344	0.13176	0.06578	10.08813	2.25323	121370.35972	0.03071
1975	169.135	815.245	0.15506	0.11116	7.46473	2.02374	245622.56502	0.05180
1976	157.064	2030.912	0.13518	0.52807	4.05006	0.79477	195213.55345	0.11908
1977	520.494	1513.091	0.69582	0.34413	1.27988	0.82508	161067.21677	0.31902
1978	967.417	5872.248	0.90435	0.93136	0.02167	4.08824	658480.64590	0.88133
1979	665.607	6103.747	0.78876	0.94415	0.07469	1.31057	862982.93445	0.78160
1980	100.506	780.747	0.06009	0.10249	11.38111	2.51870	2173594.85541	0.02430
1981	282.278	1511.765	0.37031	0.34364	2.11772	1.45093	3153732.71793	0.22325
1982	713.799	1925.566	0.81198	0.49300	0.58118	0.81759	2578458.81412	0.47425
1983	566.386	4382.063	0.73036	0.89011	0.13578	1.43687	3704915.50684	0.71159
1984	748.648	6546.401	0.82738	0.96923	0.04755	1.16007	4297946.76143	0.82440
1985	461.083	2657.257	0.64028	0.69846	0.37384	1.57848	6784203.40144	0.55550
1986	278.988	2663.36	0.36399	0.69979	1.16817	0.85799	5820800.40157	0.33704
1994	359.71	2620.025	0.50713	0.69025	0.64730	1.23974	7216284.62185	0.45352
1995	1764.687	4090.196	0.99390	0.87565	0.02384	0.53908	3890149.49753	0.87544
1996	94.812	860.384	0.05439	0.12307	11.17299	2.34987	9141329.29411	0.02521
1997	375.344	1615.117	0.53122	0.38202	1.35943	1.28714	11766215.64254	0.30718
1998	203.141	1765.202	0.21625	0.43682	2.90721	1.21194	14259916.91711	0.16877
1999	489.632	2594.782	0.66872	0.68454	0.35103	1.63245	23278557.51766	0.56652
2000	239.769	1844.92	0.28724	0.46512	2.11562	1.26558	29460977.31284	0.22343
2001	213.763	1017.487	0.23649	0.16911	4.87057	1.68631	49680466.16636	0.09529
2002	157.641	823.389	0.13610	0.11326	7.81990	2.10301	104478433.70022	0.04805
2003	54.369	133.518	0.02380	0.01075	27.93032	5.55392	580264515.66949	0.00239
2004	635.686	748.875	0.77292	0.09481	4.97080	0.25708	149176583.23053	0.09284
2005	1072.12	3438.051	0.93055	0.82283	0.05606	1.99098	297007400.22512	0.80973
2006	190.775	2491.987	0.19325	0.66016	2.70695	0.61219	181825233.05808	0.18051

Con este procedimiento se logró una máxima verosimilitud de 181'825,233.06 formado con un valor de  $\theta$  igual a 1.85219.

Ahora se calculará también el valor de  $\theta$  para los datos correspondientes al criterio de gasto prioridad con ajuste marginal Weibull Mixta y al criterio de volumen prioridad con ajustes marginales con Gumbel Mixta y Weibull Mixta. Esto como ya se explicó, con el fin de analizar las diferencias entre utilizar cada caso.

### Caso Volumen Prioridad con ajustes Gumbel Mixta

De la tabla 4.2 se toman los parámetros de ajuste correspondientes a VP-GM y se realiza el mismo procedimiento semiparamétrico para calcular  $\theta$ .

Tabla 4.5 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  VP-GM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Gumbel Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.6878	0.2825	1.7282	0.6765	0.6765	0.2665
1943	226.907	3073.43	0.3750	0.7350	1.0624	0.7469	0.5053	0.3565
1944	254.921	1754.886	0.4346	0.3434	1.8394	1.4355	0.7253	0.2553
1945	227.306	1762.472	0.3759	0.3462	2.0802	1.5066	1.0928	0.2337
1946	186.75	1273.017	0.2767	0.1691	4.7153	1.6275	1.7785	0.1098
1947	63.491	865.383	0.0238	0.0631	20.5069	3.6149	6.4292	0.0093
1948	564.343	1872.487	0.7502	0.3879	0.9860	0.7296	4.6910	0.3705
1949	1312.088	7203.824	0.9798	0.9899	0.0006	17.6310	82.7073	0.9773
1950	306.794	2353.668	0.5231	0.5563	0.7797	1.5022	124.2395	0.4145
1951	540.874	1435.028	0.7351	0.2242	2.2975	0.4506	55.9876	0.2166
1952	203.788	1610.085	0.3199	0.2885	2.8227	1.5664	87.7009	0.1828
1953	836.904	1915.336	0.8876	0.4040	0.8406	0.3219	28.2303	0.4005
1954	360.966	2148.866	0.5908	0.4885	0.8054	1.4227	40.1644	0.4085
1955	385.888	4476.654	0.6161	0.8776	0.2606	0.8610	34.5797	0.6047
1956	93.605	577.291	0.0607	0.0226	21.0598	3.6996	127.9309	0.0087
1957	165.867	2151.834	0.2223	0.4895	2.7391	1.0829	138.5401	0.1876
1958	668.225	3413.256	0.8110	0.7891	0.1066	2.2935	317.7459	0.7272
1959	310.041	4096.385	0.5277	0.8563	0.4425	0.6820	216.7143	0.5172
1960	1106.095	3544.957	0.9563	0.8058	0.0521	1.1764	254.9387	0.8018
1961	124.175	1185.785	0.1195	0.1420	8.0719	2.1658	552.1476	0.0546
1962	477.3	2447.454	0.6914	0.5850	0.4374	1.5041	830.4951	0.5192
1963	130.562	2403.627	0.1340	0.5718	4.2399	0.6388	530.5503	0.1234
1964	329.784	2721.897	0.5544	0.6596	0.5359	1.4700	779.8902	0.4833
1965	889.874	3493.088	0.9059	0.7995	0.0642	2.0192	1574.7687	0.7820
1966	369.291	3826.654	0.5996	0.8351	0.3042	1.0448	1645.3905	0.5802
1967	1284.023	7374.602	0.9775	0.9928	0.0007	12.4367	20463.1663	0.9763
1968	582.353	4715.42	0.7614	0.8872	0.0942	1.7549	35909.7915	0.7415
1969	261.518	1215.074	0.4474	0.1508	4.1343	1.0252	36813.1765	0.1268
1970	250.308	1723.558	0.4254	0.3314	1.9499	1.4378	52930.7437	0.2450
1971	102.005	1482.422	0.0749	0.2412	8.4418	1.6179	85638.6539	0.0511
1972	140.305	2214.492	0.1573	0.5109	3.7909	0.8561	73316.6734	0.1387
1973	653.278	3642.047	0.8029	0.8169	0.0953	2.3886	175125.9669	0.7402
1974	133.791	1199.077	0.1416	0.1460	7.3130	2.0843	365011.4607	0.0630
1975	146.571	1343.833	0.1728	0.1925	5.6662	1.8777	685364.5668	0.0884
1976	157.064	2030.912	0.1995	0.4466	3.2014	1.1532	790338.4160	0.1633
1977	147.02	2197.229	0.1739	0.5051	3.4609	0.9163	724202.4058	0.1517
1978	665.607	6120.803	0.8096	0.9350	0.0528	1.6988	1230304.8692	0.8006
1979	665.607	6103.747	0.8096	0.9337	0.0530	1.7238	2120749.0913	0.8003
1980	100.506	780.747	0.0722	0.0483	15.3809	3.1334	6645188.4268	0.0176
1981	123.37	2369.271	0.1177	0.5612	4.7716	0.6234	4142370.6573	0.1084
1982	713.799	1925.566	0.8345	0.4078	0.8436	0.4975	2060803.2992	0.3998
1983	566.386	4382.063	0.7515	0.8731	0.1062	1.7771	3662349.8300	0.7276
1984	748.648	6546.401	0.8511	0.9651	0.0296	1.5686	5744824.9656	0.8475
1985	461.083	2657.257	0.6794	0.6433	0.3573	1.6713	9601230.7020	0.5538
1986	278.988	2663.36	0.4790	0.6448	0.7483	1.2981	12463179.4318	0.4222
1994	359.71	2620.025	0.5895	0.6335	0.5026	1.5717	19588659.9055	0.4948
1995	1764.687	4090.196	0.9965	0.8559	0.0262	0.1924	3769092.9107	0.8558
1996	83.01	953.198	0.0452	0.0812	15.1895	3.0237	11396709.1167	0.0180
1997	375.344	1615.117	0.6058	0.2904	1.7742	0.9212	10498085.3140	0.2617
1998	203.141	1765.202	0.3183	0.3473	2.4187	1.5327	16090435.0849	0.2080
1999	489.632	2594.782	0.7003	0.6268	0.3582	1.6191	26052290.7708	0.5533

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Gumbel Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
2000	239.769	1844.92	0.4034	0.3775	1.7776	1.4895	38804571.9735	0.2614
2001	121.906	1802.669	0.1145	0.3615	5.5774	1.2075	46855396.2237	0.0901
2002	133.348	1265.218	0.1406	0.1666	6.8734	2.0150	94414011.5740	0.0687
2003	34.49	399.451	0.0068	0.0100	43.1157	9.0605	855433984.3780	0.0011
2004	205.65	1244.911	0.3245	0.1601	4.5297	1.4542	1244006515.9393	0.1149
2005	659.828	3545.815	0.8065	0.8059	0.0991	2.3661	2943480755.5117	0.7357
2006	190.775	2491.987	0.287	0.598	1.8148	0.9348	2751559464	0.2577

Para este caso se logró una máxima verosimilitud de 2,751,559,464 con una  $\theta$  igual a 1.957

### Caso Gasto Prioridad con ajustes Weibull Mixta

De igual forma que para los dos casos anteriores, se itera hasta que los valores de  $\theta$  hasta que la verosimilitud sea máxima.

Tabla 4.6 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  GP-WM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Weibull Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.6339	0.3826	1.1508	1.0725	1.0725	0.3407
1943	347.857	2537.182	0.4621	0.6544	0.8063	1.2181	1.3065	0.4094
1944	254.921	1754.886	0.3093	0.4356	2.0589	1.3718	1.7922	0.2319
1945	227.306	1762.472	0.2627	0.4380	2.4311	1.2990	2.3281	0.2030
1946	186.75	1273.017	0.1959	0.2745	4.1656	1.6185	3.7679	0.1205
1947	63.491	865.383	0.0332	0.1454	13.7963	2.1777	8.2055	0.0189
1948	564.343	1872.487	0.7280	0.4731	0.6885	1.0419	8.5489	0.4396
1949	1312.088	7203.824	0.9652	0.9807	0.0023	10.4556	89.3839	0.9598
1950	444.503	1277.227	0.5999	0.2759	1.8971	0.9150	81.7868	0.2466
1951	540.874	1435.028	0.7067	0.3290	1.3565	0.7454	60.9614	0.3092
1952	431.345	1493.525	0.5828	0.3488	1.4132	1.1243	68.5360	0.3014
1953	836.904	1915.336	0.8762	0.4865	0.5571	0.5217	35.7572	0.4793
1954	360.966	2148.866	0.4824	0.5556	0.9115	1.4240	50.9175	0.3858
1955	407.346	419.132	0.5503	0.0395	9.6921	0.4536	23.0966	0.0370
1956	93.605	577.291	0.0640	0.0710	13.2164	2.8916	66.7869	0.0206
1957	361.642	2007.266	0.4834	0.5145	1.0043	1.4482	96.7223	0.3670
1958	668.225	3413.256	0.8032	0.7998	0.1133	2.2492	217.5431	0.7273
1959	310.041	4096.385	0.4015	0.8586	0.8681	0.4354	94.7095	0.3952
1960	1106.095	3544.957	0.9360	0.8139	0.0551	1.7552	166.2341	0.8041
1961	149.599	825.956	0.1384	0.1342	7.4333	2.0816	346.0338	0.0568
1962	702.466	2393.432	0.8221	0.6204	0.2898	1.2117	419.2735	0.5935
1963	130.562	2403.627	0.1111	0.6229	4.7156	0.5026	210.7138	0.1045
1964	349.554	2543.052	0.4648	0.6557	0.7960	1.2217	257.4369	0.4119
1965	889.874	3493.088	0.8914	0.8086	0.0687	2.2610	582.0580	0.7828
1966	369.291	3826.654	0.4950	0.8393	0.5478	0.6944	404.1732	0.4824
1967	1284.023	7374.602	0.9618	0.9841	0.0025	8.5685	3463.1725	0.9583
1968	582.353	4715.42	0.7433	0.8922	0.1151	1.5251	5281.7456	0.7254
1969	261.518	1215.074	0.3205	0.2552	3.0892	1.5344	8104.2581	0.1639
1970	250.308	1723.558	0.3015	0.4254	2.1542	1.3813	11194.2750	0.2239

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Weibull Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1971	147.371	888.439	0.1351	0.1522	7.0819	2.0303	22727.3937	0.0610
1972	279.318	1441.507	0.3504	0.3312	2.3037	1.4967	34016.0473	0.2122
1973	653.278	3642.047	0.7942	0.8234	0.1055	2.2709	77248.4862	0.7358
1974	154.917	612.344	0.1463	0.0790	9.3566	2.1774	168204.5570	0.0393
1975	169.135	815.245	0.1680	0.1312	6.8609	1.9799	333023.7721	0.0639
1976	157.064	2030.912	0.1495	0.5215	3.8355	0.8266	275289.6003	0.1318
1977	520.494	1513.091	0.6867	0.3554	1.2221	0.8612	237084.1612	0.3292
1978	967.417	5872.248	0.9099	0.9398	0.0162	4.4487	1054704.6404	0.8916
1979	665.607	6103.747	0.8017	0.9483	0.0603	1.3435	1416994.9990	0.7956
1980	100.506	780.747	0.0721	0.1217	10.4252	2.3726	3361955.1115	0.0325
1981	282.278	1511.765	0.3554	0.3549	2.1360	1.4865	4997408.5943	0.2254
1982	713.799	1925.566	0.8278	0.4896	0.5687	0.7272	3633897.6919	0.4755
1983	566.386	4382.063	0.7298	0.8755	0.1324	1.5522	5640448.5261	0.7078
1984	748.648	6546.401	0.8438	0.9632	0.0361	1.5468	8724747.1278	0.8397
1985	461.083	2657.257	0.6205	0.6805	0.4072	1.5782	13769305.5091	0.5360
1986	278.988	2663.36	0.3499	0.6817	1.2587	0.8624	11874497.7414	0.3235
1994	359.71	2620.025	0.4805	0.6726	0.7256	1.2216	14505341.1857	0.4296
1995	1764.687	4090.196	0.9959	0.8582	0.0280	0.2636	3824069.2196	0.8582
1996	94.812	860.384	0.0654	0.1440	10.2709	2.2099	8450968.6657	0.0334
1997	375.344	1615.117	0.5041	0.3896	1.3804	1.3618	11508208.0670	0.3059
1998	203.141	1765.202	0.2226	0.4389	2.8615	1.2235	14080247.0872	0.1760
1999	489.632	2594.782	0.6538	0.6672	0.3749	1.6401	23093490.8795	0.5503
2000	239.769	1844.92	0.2837	0.4644	2.1554	1.2734	29407054.8000	0.2238
2001	213.763	1017.487	0.2401	0.1913	4.5718	1.7022	50057111.3984	0.1084
2002	157.641	823.389	0.1504	0.1335	7.1646	2.0408	102157277.2936	0.0600
2003	54.369	133.518	0.0254	0.0046	36.4170	6.3059	644191637.0860	0.0013
2004	635.686	748.875	0.7828	0.1131	4.4753	0.2422	156006071.1168	0.1111
2005	1072.12	3438.051	0.9302	0.8026	0.0627	1.6986	264985419.3673	0.7918
2006	190.775	2491.987	0.2024	0.6440	2.6489	0.6434	170491854.3746	0.1886

Se obtuvo una máxima verosimilitud de 170{491,854.37 con un valor de  $\theta$  igual a 1.9033

### Caso Volumen Prioridad con ajustes Weibull Mixta

De nueva cuenta se presenta la tabla de cálculo de  $\theta$  con el método semiparamétrico y el uso de la función solver de Excel.

Tabla 4.7 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  VP-WM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Weibull Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.6653	0.2683	1.8836	0.7061	0.7061	0.2510
1943	226.907	3073.43	0.4163	0.7221	0.8837	0.8931	0.6306	0.3911
1944	254.921	1754.886	0.4613	0.3368	1.7851	1.3816	0.8713	0.2606
1945	227.306	1762.472	0.4170	0.3401	1.9285	1.4579	1.2703	0.2469
1946	186.75	1273.017	0.3243	0.1498	4.7667	1.4348	1.8227	0.1084
1947	63.491	865.383	0.0368	0.0532	18.5543	3.6505	6.6536	0.0117

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Weibull Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1948	564.343	1872.487	0.7344	0.3882	0.9979	0.7810	5.1962	0.3683
1949	1312.088	7203.824	0.9784	0.9824	0.0009	17.4949	90.9072	0.9721
1950	306.794	2353.668	0.5195	0.5748	0.7516	1.4901	135.4648	0.4214
1951	540.874	1435.028	0.7177	0.2055	2.5691	0.4579	62.0229	0.1979
1952	203.788	1610.085	0.3673	0.2749	2.6525	1.4874	92.2514	0.1927
1953	836.904	1915.336	0.8801	0.4068	0.8306	0.3494	32.2317	0.4027
1954	360.966	2148.866	0.5699	0.5030	0.8043	1.4705	47.3969	0.4087
1955	385.888	4476.654	0.5922	0.8635	0.3058	0.8544	40.4958	0.5794
1956	93.605	577.291	0.0817	0.0191	20.7908	3.1895	129.1606	0.0090
1957	165.867	2151.834	0.2659	0.5041	2.2102	1.1440	147.7637	0.2232
1958	668.225	3413.256	0.8002	0.7624	0.1310	2.1256	314.0809	0.7020
1959	310.041	4096.385	0.5226	0.8309	0.4660	0.7853	246.6604	0.5082
1960	1106.095	3544.957	0.9524	0.7766	0.0706	0.9799	241.7042	0.7726
1961	124.175	1185.785	0.1494	0.1238	7.7409	2.1205	512.5307	0.0581
1962	477.3	2447.454	0.6693	0.6027	0.4319	1.5810	810.2891	0.5215
1963	130.562	2403.627	0.1661	0.5900	3.4287	0.6709	543.6365	0.1530
1964	329.784	2721.897	0.5413	0.6670	0.5554	1.4209	772.4343	0.4769
1965	889.874	3493.088	0.8990	0.7710	0.0842	1.7371	1341.7877	0.7541
1966	369.291	3826.654	0.5774	0.8053	0.3598	1.1008	1477.0571	0.5526
1967	1284.023	7374.602	0.9759	0.9850	0.0010	15.7541	23269.6386	0.9715
1968	582.353	4715.42	0.7467	0.8817	0.1073	1.6584	38589.3631	0.7265
1969	261.518	1215.074	0.4700	0.1322	4.5476	0.9042	34893.3559	0.1143
1970	250.308	1723.558	0.4548	0.3232	1.8960	1.3742	47948.8532	0.2499
1971	102.005	1482.422	0.0981	0.2235	7.4024	1.7662	84685.6214	0.0619
1972	140.305	2214.492	0.1926	0.5275	3.0715	0.9010	76299.7867	0.1696
1973	653.278	3642.047	0.7915	0.7867	0.1195	2.2297	170127.1447	0.7135
1974	133.791	1199.077	0.1747	0.1276	7.0795	2.0043	340983.9718	0.0659
1975	146.571	1343.833	0.2103	0.1730	5.3880	1.8292	623736.4611	0.0939
1976	157.064	2030.912	0.2405	0.4558	2.6239	1.2197	760798.7715	0.1945
1977	147.02	2197.229	0.2116	0.5212	2.7992	0.9662	735054.4886	0.1841
1978	665.607	6120.803	0.7987	0.9558	0.0563	1.1116	817120.6694	0.7948
1979	665.607	6103.747	0.7987	0.9552	0.0563	1.1251	919342.6843	0.7947
1980	100.506	780.747	0.0950	0.0407	15.0810	2.8452	2615724.1051	0.0183
1981	123.37	2369.271	0.1474	0.5796	3.8694	0.6524	1706476.4471	0.1358
1982	713.799	1925.566	0.8249	0.4112	0.8336	0.5361	914830.1967	0.4021
1983	566.386	4382.063	0.7358	0.8558	0.1254	1.7569	1607300.5294	0.7075
1984	748.648	6546.401	0.8422	0.9687	0.0330	1.2791	2055956.8500	0.8395
1985	461.083	2657.257	0.6562	0.6540	0.3715	1.6749	3443524.2566	0.5473
1986	278.988	2663.36	0.4908	0.6552	0.6996	1.3053	4494906.6383	0.4347
1994	359.71	2620.025	0.5687	0.6459	0.5246	1.5224	6843207.6661	0.4872
1995	1764.687	4090.196	0.9969	0.8303	0.0372	0.1212	829454.4634	0.8303
1996	83.01	953.198	0.0634	0.0688	14.1444	3.0171	2502511.7537	0.0208
1997	375.344	1615.117	0.5828	0.2770	1.9299	0.9531	2385059.9565	0.2467
1998	203.141	1765.202	0.3658	0.3413	2.1631	1.5145	3612116.8852	0.2269
1999	489.632	2594.782	0.6790	0.6402	0.3621	1.6642	6011176.9026	0.5515
2000	239.769	1844.92	0.4387	0.3762	1.6414	1.4583	8766171.0712	0.2758
2001	121.906	1802.669	0.1437	0.3577	4.7126	1.3021	11414795.1878	0.1099
2002	133.348	1265.218	0.1735	0.1474	6.5583	1.9770	22567041.4409	0.0732
2003	34.49	399.451	0.0121	0.0081	39.9416	8.1789	184574208.3467	0.0014
2004	205.65	1244.911	0.3717	0.1411	4.7043	1.2466	230094384.5840	0.1101
2005	659.828	3545.815	0.7953	0.7767	0.1237	2.1954	505139872.3588	0.7092
2006	190.775	2491.987	0.3349	0.6148	1.4362	1.0047	507520798.3514	0.3002

Con un valor de  $\theta$  igual a 1.9565 se estimó una verosimilitud de 507,520,798.3514

**Caso Gasto Prioridad con ajustes Gamma Mixta**

Tabla 4.8 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  GP-GamM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Gamma Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.6261	0.3711	1.230	1.0665	1.0665	0.3267
1943	347.857	2537.182	0.4711	0.6342	0.825	1.2690	1.3533	0.4060
1944	254.921	1754.886	0.3284	0.4228	1.978	1.3873	1.8775	0.2354
1945	227.306	1762.472	0.2820	0.4252	2.295	1.3373	2.5107	0.2085
1946	186.75	1273.017	0.2117	0.2632	3.959	1.6077	4.0363	0.1217
1947	63.491	865.383	0.0270	0.1314	14.418	2.2779	9.1942	0.0144
1948	564.343	1872.487	0.7158	0.4591	0.762	1.0440	9.5988	0.4219
1949	1312.088	7203.824	0.9791	0.9846	0.001	16.7182	160.4753	0.9734
1950	444.503	1277.227	0.5950	0.2646	1.990	0.9154	146.9005	0.2342
1951	540.874	1435.028	0.6948	0.3180	1.440	0.7741	113.7225	0.2957
1952	431.345	1493.525	0.5795	0.3377	1.490	1.1058	125.7522	0.2891
1953	836.904	1915.336	0.8829	0.4720	0.610	0.4965	62.4401	0.4652
1954	360.966	2148.866	0.4894	0.5384	0.950	1.4105	88.0712	0.3781
1955	407.346	419.132	0.5503	0.0286	10.808	0.4454	39.2278	0.0266
1956	93.605	577.291	0.0613	0.0574	13.627	2.9745	116.6822	0.0164
1957	361.642	2007.266	0.4903	0.4989	1.046	1.4192	165.5919	0.3590
1958	668.225	3413.256	0.7949	0.7889	0.136	2.1007	347.8555	0.7121
1959	310.041	4096.385	0.4158	0.8647	0.814	0.4669	162.4304	0.4088
1960	1106.095	3544.957	0.9550	0.8061	0.062	1.2859	208.8631	0.8007
1961	149.599	825.956	0.1476	0.1200	7.325	2.0315	424.3072	0.0530
1962	702.466	2393.432	0.8164	0.6009	0.340	1.1553	490.2064	0.5725
1963	130.562	2403.627	0.1161	0.6033	4.408	0.5821	285.3269	0.1073
1964	349.554	2543.052	0.4735	0.6355	0.816	1.2717	362.8562	0.4083
1965	889.874	3493.088	0.9025	0.7995	0.078	2.0043	727.2906	0.7780
1966	369.291	3826.654	0.5008	0.8385	0.546	0.7366	535.7015	0.4863
1967	1284.023	7374.602	0.9767	0.9864	0.001	15.0327	8053.0581	0.9725
1968	582.353	4715.42	0.7311	0.9106	0.130	1.2572	10124.5114	0.7182
1969	261.518	1215.074	0.3393	0.2436	3.047	1.4666	14848.3867	0.1608
1970	250.308	1723.558	0.3208	0.4129	2.065	1.3953	20718.3936	0.2275
1971	147.371	888.439	0.1438	0.1383	6.926	1.9960	41353.0165	0.0578
1972	279.318	1441.507	0.3680	0.3202	2.270	1.4496	59944.9155	0.2104
1973	653.278	3642.047	0.7848	0.8179	0.124	2.1295	127652.3707	0.7234
1974	154.917	612.344	0.1566	0.0650	9.536	2.0694	264160.3419	0.0337
1975	169.135	815.245	0.1811	0.1169	6.791	1.8991	501676.2315	0.0596
1976	157.064	2030.912	0.1603	0.5057	3.549	0.9128	457947.5692	0.1374
1977	520.494	1513.091	0.6755	0.3442	1.304	0.8807	403336.1044	0.3153
1978	967.417	5872.248	0.9258	0.9598	0.012	4.9295	1988235.9515	0.9145
1979	665.607	6103.747	0.7931	0.9659	0.069	0.9240	1837138.1006	0.7902
1980	100.506	780.747	0.0707	0.1073	10.461	2.4224	4450217.1635	0.0283
1981	282.278	1511.765	0.3728	0.3438	2.105	1.4465	6437322.5444	0.2240
1982	713.799	1925.566	0.8231	0.4751	0.628	0.7320	4712363.8178	0.4596
1983	566.386	4382.063	0.7175	0.8881	0.150	1.3598	6407759.4253	0.6991
1984	748.648	6546.401	0.8423	0.9751	0.040	1.1493	7364609.2640	0.8401
1985	461.083	2657.257	0.6137	0.6601	0.463	1.5293	11262911.5077	0.5173
1986	278.988	2663.36	0.3675	0.6614	1.197	0.9696	10920693.3372	0.3321
1994	359.71	2620.025	0.4877	0.6523	0.750	1.2713	13883365.5889	0.4249

Criterio de Gasto Prioridad Ajustes marginales con la función Gamma Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1995	1764.687	4090.196	0.9964	0.8642	0.029	0.2972	4125470.1414	0.8641
1996	94.812	860.384	0.0629	0.1300	10.288	2.2682	9357538.5230	0.0293
1997	375.344	1615.117	0.5089	0.3779	1.435	1.3156	12310888.2801	0.2964
1998	203.141	1765.202	0.2403	0.4261	2.672	1.2780	15733881.9725	0.1823
1999	489.632	2594.782	0.6445	0.6468	0.434	1.5664	24645494.4671	0.5291
2000	239.769	1844.92	0.3031	0.4508	2.044	1.3153	32416665.4228	0.2293
2001	213.763	1017.487	0.2587	0.1784	4.481	1.6236	52630511.9043	0.1052
2002	157.641	823.389	0.1613	0.1193	7.068	1.9775	104074977.0012	0.0560
2003	54.369	133.518	0.0192	0.0021	41.314	7.4067	770855043.1948	0.0006
2004	635.686	748.875	0.7724	0.0987	4.802	0.2647	204024823.6461	0.0965
2005	1072.12	3438.051	0.9490	0.7922	0.072	1.2597	257016126.1354	0.7860
2006	190.775	2491.987	0.2187	0.6240	2.417	0.7483	192322292.1677	0.1995

La máxima verosimilitud se alcanzó en el valor de 192'322,292.17 con un valor del parámetro  $\theta$  igual a 1.8476.

### Caso Volumen Prioridad con ajustes Gamma Mixta

Tabla 4.9 Cálculo del parámetro bivariado  $\theta$  VP-GamM mediante el método de máxima verosimilitud

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Gamma Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1942	472.317	1594.148	0.6439	0.2531	1.957	0.8292	0.8292	0.2251
1943	347.857	2537.182	0.5067	0.5391	0.968	1.3230	1.0970	0.3750
1944	254.921	1754.886	0.3751	0.3059	2.296	1.3505	1.4815	0.1940
1945	227.306	1762.472	0.3304	0.3084	2.501	1.3889	2.0577	0.1781
1946	186.75	1273.017	0.2603	0.1518	4.550	1.5194	3.1264	0.0851
1947	63.491	865.383	0.0453	0.0518	12.866	2.8793	9.0017	0.0103
1948	564.343	1872.487	0.7230	0.3442	1.265	0.8128	7.3164	0.3166
1949	1312.088	7203.824	0.9741	0.9814	0.003	11.6372	85.1425	0.9663
1950	444.503	1277.227	0.6165	0.1531	3.176	0.7146	60.8441	0.1368
1951	540.874	1435.028	0.7044	0.2016	2.378	0.6211	37.7920	0.1874
1952	431.345	1493.525	0.6029	0.2204	2.322	0.8589	32.4581	0.1919
1953	836.904	1915.336	0.8759	0.3580	1.080	0.4468	14.5035	0.3511
1954	360.966	2148.866	0.5230	0.4306	1.232	1.2815	18.5865	0.3223
1955	407.346	419.132	0.5771	0.0045	17.411	0.3772	7.0117	0.0042
1956	93.605	577.291	0.0917	0.0138	15.841	2.6227	18.3896	0.0057
1957	361.642	2007.266	0.5239	0.3871	1.396	1.2416	22.8317	0.2953
1958	668.225	3413.256	0.7939	0.7236	0.235	1.6449	37.5549	0.6553
1959	310.041	4096.385	0.4565	0.8199	0.731	0.7716	28.9786	0.4362
1960	1106.095	3544.957	0.9479	0.7450	0.135	1.0133	29.3638	0.7377
1961	149.599	825.956	0.1925	0.0449	9.022	1.7277	50.7308	0.0247
1962	702.466	2393.432	0.8136	0.5009	0.608	0.8875	45.0212	0.4752
1963	130.562	2403.627	0.1574	0.5037	3.340	0.9579	43.1265	0.1288
1964	349.554	2543.052	0.5088	0.5406	0.959	1.3238	57.0909	0.3770
1965	889.874	3493.088	0.8948	0.7367	0.161	1.4313	81.7167	0.7135
1966	369.291	3826.654	0.5332	0.7860	0.550	1.0483	85.6655	0.4962
1967	1284.023	7374.602	0.9715	0.9838	0.004	10.7410	920.1326	0.9655
1968	582.353	4715.42	0.7366	0.8806	0.168	1.5087	1388.1933	0.7078

Criterio de Volumen Prioridad Ajustes marginales con la función Gamma Mixta								
Año	Gasto	Volumen	u	v	w	c	Max. Ver.	C
	m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)				F(Q, V)
1969	261.518	1215.074	0.3854	0.1350	4.135	1.1920	1654.7137	0.0976
1970	250.308	1723.558	0.3678	0.2956	2.394	1.3565	2244.6110	0.1862
1971	147.371	888.439	0.1884	0.0562	8.281	1.7582	3946.4242	0.0297
1972	279.318	1441.507	0.4124	0.2037	2.998	1.2241	4830.8907	0.1463
1973	653.278	3642.047	0.7848	0.7598	0.206	1.7653	8528.0879	0.6764
1974	154.917	612.344	0.2023	0.0169	12.822	1.5896	13556.4674	0.0104
1975	169.135	815.245	0.2284	0.0431	8.781	1.5438	20928.8526	0.0262
1976	157.064	2030.912	0.2063	0.3945	3.039	1.2628	26428.8991	0.1441
1977	520.494	1513.091	0.6874	0.2267	2.134	0.6951	18370.6626	0.2081
1978	967.417	5872.248	0.9179	0.9478	0.023	4.0746	74853.2626	0.8984
1979	665.607	6103.747	0.7923	0.9561	0.092	1.2292	92007.7979	0.7855
1980	100.506	780.747	0.1035	0.0376	11.325	2.3633	217441.3887	0.0144
1981	282.278	1511.765	0.4168	0.2263	2.745	1.2405	269746.2666	0.1614
1982	713.799	1925.566	0.8197	0.3612	1.097	0.6037	162846.9241	0.3476
1983	566.386	4382.063	0.7245	0.8506	0.196	1.5569	253540.5473	0.6845
1984	748.648	6546.401	0.8375	0.9687	0.058	1.4376	364500.2036	0.8327
1985	461.083	2657.257	0.6330	0.5692	0.650	1.3556	494107.2094	0.4613
1986	278.988	2663.36	0.4119	0.5707	1.196	1.2129	599291.2641	0.3288
1994	359.71	2620.025	0.5215	0.5600	0.886	1.3282	795986.0805	0.3943
1995	1764.687	4090.196	0.9948	0.8191	0.067	0.3684	293222.3606	0.8189
1996	94.812	860.384	0.0937	0.0509	10.512	2.3848	699277.8659	0.0173
1997	375.344	1615.117	0.5404	0.2600	2.092	1.0504	734490.9069	0.2119
1998	203.141	1765.202	0.2892	0.3093	2.745	1.4123	1037324.4796	0.1614
1999	489.632	2594.782	0.6601	0.5537	0.642	1.3186	1367849.5994	0.4639
2000	239.769	1844.92	0.3509	0.3353	2.241	1.3675	1870536.5872	0.1986
2001	213.763	1017.487	0.3076	0.0836	5.926	1.3225	2473853.4170	0.0560
2002	157.641	823.389	0.2073	0.0445	8.885	1.6495	4080563.1719	0.0255
2003	54.369	133.518	0.0336	0.0001	51.842	5.2314	21347261.9841	0.0000
2004	635.686	748.875	0.7736	0.0329	7.974	0.2566	5476846.9226	0.0321
2005	1072.12	3438.051	0.9416	0.7277	0.155	0.9885	5414006.0738	0.7195
2006	190.775	2491.987	0.2674	0.5273	2.065	1.0866	5882898.8335	0.2145

Con un valor de  $\theta$  igual a **1.6806** se logró la máxima verosimilitud, y se consigue el valor de la cópula tal como se muestra en la tabla.

Tras haber estimado el valor de  $\theta$  y el valor de la cópula Gumbel-Hougaard para los 6 casos de estudio, los resultados se resumen en la tabla 4.10.

Tabla 4.10 Valores de  $\theta$  encontrados y sus correspondientes valores de la función de verosimilitud.

Criterio	Ajuste Marginal	Máx. Ver.	$\theta$
Gasto Prioridad	Gumbel Mixta	181825233.06	1.8522
	Weibull Mixta	170491854.4	1.9033
	Gamma Mixta	192322292.2	1.8476
Volumen Prioridad	Gumbel Mixta	2751559464	1.957
	Weibull Mixta	507520798.4	1.9565
	Gamma Mixta	5882898.834	1.6806

Es evidente que la verosimilitud alcanzada en los casos del criterio de Volumen Prioridad es mayor, de igual forma que el valor de  $\theta$  lo es. Con estos valores de  $\theta$  encontrados se podrá realizar la extrapolación a periodos de retorno bivariados y con los valores  $F(Q,V)$  encontrados mediante la cópula Gumbel-Hougaard se aplicarán las pruebas de bondad de ajuste bivariado para conocer aquel que se considere el más adecuado para la creación del hidrograma de diseño.

#### 4.4.1.2 Duración de 10 días

Como se explicó en el capítulo 3, los ajustes marginales a la función Weibull Mixta se utilizarán para aplicar la cópula Gumbel-Hougaard, pero además se utilizaran los resultados de los ajustes con la función Gumbel Mixta. El proceso es el mismo que para la duración de 35 días, se calcula la probabilidad para los valores de gasto y volumen elegidos para cada criterio, y se aplica la ecuación de máxima verosimilitud para obtener el parámetro  $\theta$ .

Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.11.

*Tabla 4.11 Resultados del cálculo de  $\theta$  y la verosimilitud alcanzada asociada a este. Duración 10 días*

Criterio	Ajuste Marginal	Máx. Ver.	$\theta$
Gasto Prioridad	Gumbel Mixta	61796057676685.60	2.39136287
	Weibull Mixta	64751834558484.20	2.48426711
Volumen Prioridad	Gumbel Mixta	26349071887403200.00	2.67029048
	Weibull Mixta	4.08426E+16	2.7904875

#### 4.4.2 Extrapolación bivariada a diferentes periodos de retorno

Conocido el valor de  $\theta$  es posible encontrar parejas de gasto y volumen que cumplan con un determinado periodo de retorno de carácter bivariado. Para ello se debe realizar un proceso bastante parecido al anterior, pero en este caso el valor de  $\theta$  es conocido, entonces se iteran valores de gasto y volumen.

El proceso es el siguiente:

- a) Con un gasto y volumen propuestos se procede a calcular  $F(Q)$  y  $F(V)$  con la correspondiente función de probabilidad y parámetros obtenidos en los ajustes marginales.
- b) Con la cópula Gumbel-Hougaard se calcula la probabilidad bivariada  $F(Q,V)$ .
- c) Se calcula el periodo de retorno conjunto  $Tr_{(Q,V)}$
- d) Se verifica que el  $Tr$  calculado sea igual al buscado, en caso contrario se propone un nuevo gasto y nuevo volumen y se repite el procedimiento.

Como es muy complicado encontrar aleatoriamente una pareja de variables  $(Q, V)$  que formen el periodo de retorno requerido, es posible aproximarse a los valores buscados con ayuda de las extrapolaciones marginales; es decir se toma el valor del gasto extrapolado marginalmente al periodo de retorno que se busca, y con ayuda de la función objetivo de Microsoft Excel o una herramienta de iteración cualquiera, se busca un valor de volumen que haga que cumplan el periodo de retorno conjunto. También puede elegirse el volumen marginal y buscar el correspondiente gasto que cumpla el  $Tr$ .

Es importante recalcar que existirá más de una pareja  $Q, V$  que generen el periodo de retorno buscado. **Además, el valor de gasto y volumen extrapolado de forma bivariada no podrán ser menores a los valores extrapolados marginales.**

Para el caso de estudio de la presa La Angostura se ha decidido generar el hidrograma de 10,000 años de periodo de retorno para analizar la seguridad de la presa como ya se ha mencionado, pero además se crearán hidrogramas a 100 y 1000 años de periodo de retorno, esto para analizar la extrapolación bivariada en las funciones de probabilidad seleccionadas.

En este trabajo se utilizó el periodo de retorno  $Tr_{OR}$  ecuación 4.8, debido a que considera que ya sea el gasto o volumen puedan ser excedidos; en el análisis de presas, el superar un valor de umbral de cualquiera de las dos variables, podría causar daños.

De Luca y Biondi (2007) presentan la ilustración 4.2 donde se muestran las isolíneas calculadas a determinados periodos de retorno  $Tr_{OR}$  contra extrapolaciones univariadas que resultan considerablemente menores.

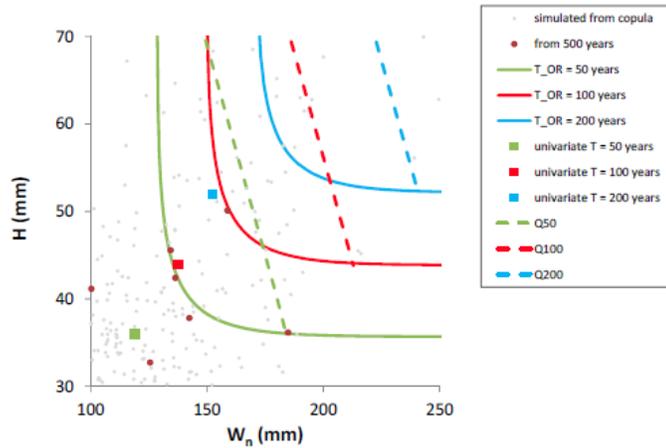


Figure 9. Comparison between univariate (square boxes) and bivariate analysis (solid lines) for the definition of the design hyetograph. The dotted lines correspond to all the pairs  $(w_n, h)$  providing quantiles  $Q_{50}$ ,  $Q_{100}$ , and  $Q_{200}$  of discharge when fed into the adopted rainfall-runoff (RR) model.

*Ilustración 4.2 Comparación entre extrapolaciones bivariada con el  $TR_{OR}$  y univariadas (De Luca, 2007)*

De los ajustes bivariados de cada caso de estudio, se extrapola para cada uno de ellos como se presenta a continuación.

#### 4.4.2.1 Duración de 35 días

##### Caso Gasto Prioridad con ajuste Gumbel Mixta

Para poder extrapolar de forma bivariada se necesitan los parámetros de ajuste de ambas variables mostradas en la tabla 4.2 y el valor de  $\theta$  correspondiente al ajuste bivariado mostrado en la tabla 4.10. Además, serán de mucha ayuda los valores extrapolados marginales obtenidos en el capítulo 3. Con estos se sigue el procedimiento descrito.

Los valores extrapolados de ajustes marginales se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 4.12 Valores extrapolados a diferentes Tr para ajustes marginales de Q y V con la función Gumbel Mixta

Gasto Prioridad Gumbel Mixta		
Tr	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
2	355.352	1946.302
5	688.768	3248.227
10	952.724	4651.424
20	1173.845	6201.779
50	1438.397	6807.81
100	1630.18	7198.061
200	1818.989	7579.779
500	2066.57	8095.995
1000	2253.194	8507.289
2000	2439.576	8945.318
5000	2685.8	9576.736
10000	2872.012	10098.525

Se elige el valor de gasto igual a 1630.18 y con ayuda de una tabla de cálculo y se iteran valores del volumen para cumplir con el periodo de retorno 100 años. Posteriormente se buscan más parejas que cumplan, aumentando el valor del gasto e iterando de nueva cuenta, el volumen ira bajando esto para cumplir con la probabilidad conjunta, se muestra a continuación la tabla de cálculo. La iteración se realizó con la función buscar objetivo buscando el valor 100 en la columna Tr cambiando el valor del Volumen.

Tabla 4.13 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso GP-GM

theta= 1.85219664

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
1630	9203.23021	0.99001015	0.99965973	0.98999999	99.9999
1635	8208.13398	0.99019084	0.99835067	0.99	100.0000
1650	7807.85781	0.99071389	0.99668227	0.99000003	100.0003
1680	7564.74957	0.99167928	0.99486472	0.99000004	100.0004
1700	7483.97725	0.99226738	0.99405508	0.98999999	99.9999
1750	7369.60924	0.99356454	0.99268196	0.99000004	100.0004
1800	7308.82177	0.99464653	0.99182695	0.99	100.0000
1900	7248.51302	0.99629929	0.99088089	0.99	100.0000
2000	7222.1623	0.99744443	0.99043445	0.99	100.0000
2100	7209.71706	0.99823644	0.99021623	0.98999993	99.9993
2200	7203.65234	0.99878356	0.99010814	0.98999999	99.9999
2300	7200.64846	0.9991612	0.99005418	0.98999999	99.9999
2400	7199.15121	0.99942173	0.99002717	0.99	100.0000

En total fueron 13 parejas que cumplen con el  $Tr=100$  años y que representando gráficamente se crea bien definida la curva que posee el mismo periodo de retorno en toda su longitud.

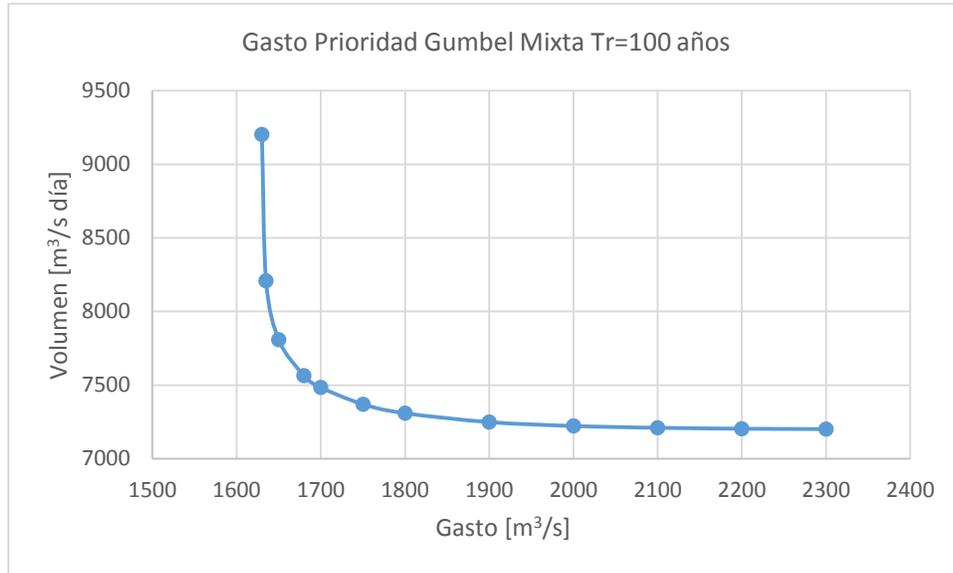


Figura 4.2 Curva de periodo de retorno 100 años bivariada, caso GP-GM duración 35 días

Se aprecia que la curva se vuelve asintótica hacia ambas direcciones  $x$  y  $y$ , esto es debido a que matemáticamente la probabilidad bivariada se forma por valores mayores a los extrapolados marginalmente, es decir los valores de las parejas que forman un  $Tr$  bivariado no pueden ser menores a los valores marginales; aquí se crea un rango bien definido. Cuando se nota que la curva comienza a tener muy pocas variaciones es recomendable detener el cálculo. Todos estos puntos poseen el mismo periodo de retorno y son seleccionables para el hidrograma de diseño final.

Ahora para el periodo de retorno de 1000 años se parte de un gasto 2300  $m^3/s$  un poco mayor al marginal.

Tabla 4.14 Extrapolación bivariada a  $Tr=1000$  años, caso GP-GM

theta= 1.85219664

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2300	8944.22091	0.9991612	0.99949886	0.999	999.999995
2320	8843.09956	0.99922132	0.99941445	0.999	999.999918
2340	8774.81618	0.99927714	0.99934859	0.999	999.999989
2360	8725.12309	0.99932896	0.99929554	0.999	1000
2380	8687.28566	0.99937706	0.99925195	0.999	1000
2400	8657.59436	0.99942173	0.99921566	0.999	1000
2450	8606.04452	0.99951988	0.99914799	0.999	999.999999
2500	8573.98996	0.99960139	0.9991027	0.999	999.99996
2600	8539.08232	0.99972526	0.99905036	0.999	999.999833
2700	8522.91678	0.99981064	0.99902499	0.999	1000
2800	8515.10624	0.9998695	0.99901247	0.999	1000.00003
2900	8511.25861	0.99991006	0.99900624	0.999	1000.00012
3000	8509.34533	0.99993802	0.99900313	0.999	1000
3100	8508.38966	0.99995728	0.99900157	0.999	1000
3200	8507.9112	0.99997056	0.99900079	0.999	1000
3300	8507.67137	0.99997971	0.99900039	0.999	999.999965
3400	8507.55111	0.99998602	0.9990002	0.999	999.999984

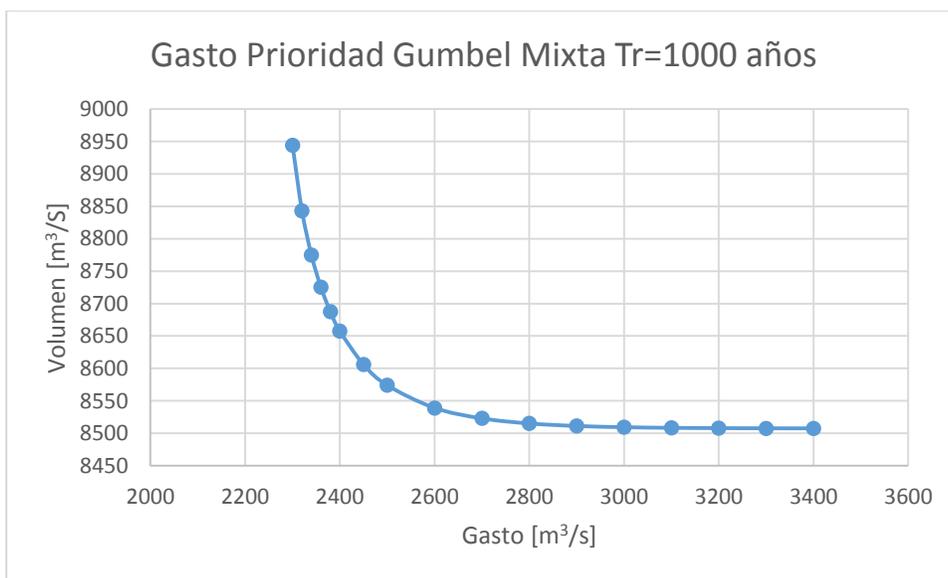


Figura 4.3 Curva de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso GP-GM, duración 35 días

El comportamiento de la curva es el adecuado, de igual forma, para el hidrograma de diseño final se puede seleccionar cualquier pareja de esta curva.

Para el periodo de retorno de 10,000 años

Tabla 4.15 Extrapolación bivariada a  $Tr=1000$  años, caso GP-GM

		theta= 1.85219664			
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2900	10856.28092	0.99991006	0.99996058	0.9999	9999.99998
2930	10577.15691	0.99991957	0.99994487	0.9999	10000
2960	10436.37218	0.99992807	0.9999345	0.9999	10000
2980	10374.15888	0.99993323	0.99992926	0.9999	10000
3000	10326.64105	0.99993802	0.99992495	0.9999	10000
3100	10197.87444	0.99995728	0.99991176	0.9999	9999.99988
3200	10145.93689	0.99997056	0.99990575	0.9999	9999.99988
3300	10122.19533	0.99997971	0.99990285	0.9999	10000
3400	10110.79061	0.99998602	0.99990142	0.9999	10000
3500	10105.18781	0.99999037	0.99990071	0.9999	10000.0002
3600	10102.40567	0.99999336	0.99990036	0.9999	10000.0006
3700	10101.01689	0.99999542	0.99990018	0.9999	10000.0009
3800	10100.32174	0.99999685	0.99990009	0.9999	10000

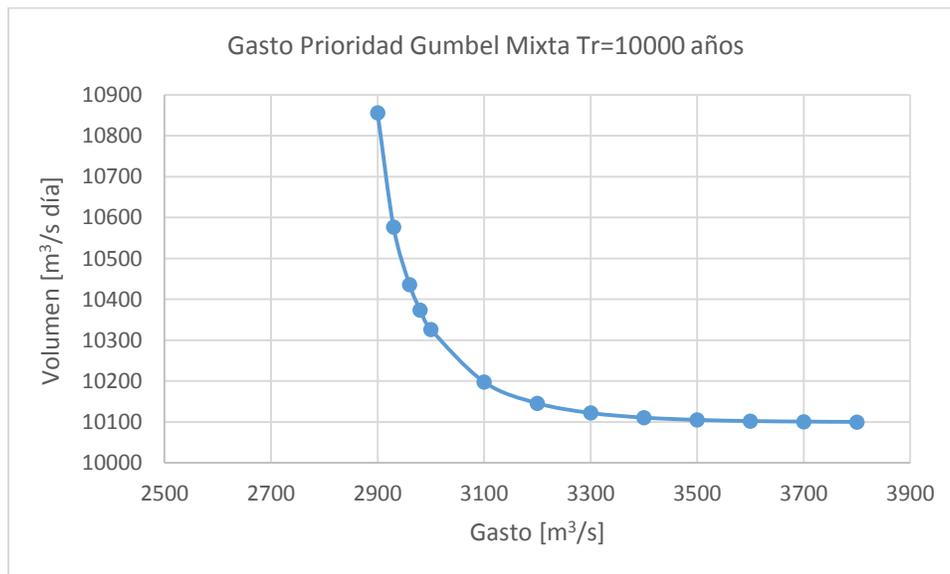


Figura 4.4 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso GP-GM

La pareja seleccionada de esta curva será aquella que será utilizada para crear el hidrograma que será transitado para analizar la seguridad de la presa La Angostura por ser el de 10,000 años, se puede observar que el comportamiento en toda su longitud mantiene una proporción parecida a las dos anteriores. Se resaltan en la tabla 4.15 las 4 parejas

elegidas a lo largo de toda la longitud que serán tomadas para el tránsito de avenidas si las pruebas de bondad de ajuste indican que este es el mejor ajuste, esta selección no es completamente aleatoria, puesto que se eligen tomando en cuenta el inicio, parte media y final de la curva. Ahora las extrapolaciones se realizarán para los demás casos y se elegirán parejas de la misma forma.

### Caso Volumen Prioridad con ajuste Gumbel Mixta

De la misma forma con ayuda de los valores extrapolados de manera marginal se parte para calcular la extrapolación bivariada para los tres periodos de retorno seleccionados para el análisis.

Tabla 4.16 Valores extrapolados a  $Tr$  marginalmente mediante la función Gumbel Mixta para las series de datos Volumen Prioridad

Gasto Prioridad Gumbel Mixta		
Tr	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s]
100	1496.354	7207.826
1000	2090.218	8430.611
10000	2681.351	9985.443

$Tr=100$  años

Tabla 4.17 Extrapolación bivariada a  $Tr=100$  años, caso VP-GM

theta= 1.95709258					
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
1500	8172.34053	0.99013643	0.99842423	0.99	99.9999835
1520	7677.58406	0.99086718	0.99602541	0.98999999	99.999921
1540	7535.4226	0.9915444	0.99476016	0.99	100.00001
1560	7455.56226	0.99217193	0.99387174	0.98999998	99.9997681
1580	7402.53821	0.99275333	0.99319743	0.99000006	100.000554
1600	7364.36912	0.99329193	0.99266547	0.99	99.9999952
1700	7269.31271	0.99544404	0.99114995	0.99000001	100.000055
1800	7234.57175	0.99690852	0.99052071	0.99	100.000003
1900	7219.80257	0.99790354	0.99023989	0.99	99.9999985
2000	7213.18019	0.9985789	0.9901113	0.99	99.999989
2100	7210.14465	0.99903697	0.9900518	0.99	100.000002
2200	7208.73795	0.99934752	0.99002411	0.98999997	99.9996698
2300	7208.08647	0.99955798	0.99001125	0.99	99.999992
2400	7207.78228	0.99970058	0.99000525	0.99	99.9999924
2500	7207.63769	0.99979719	0.99000239	0.98999994	99.9994398

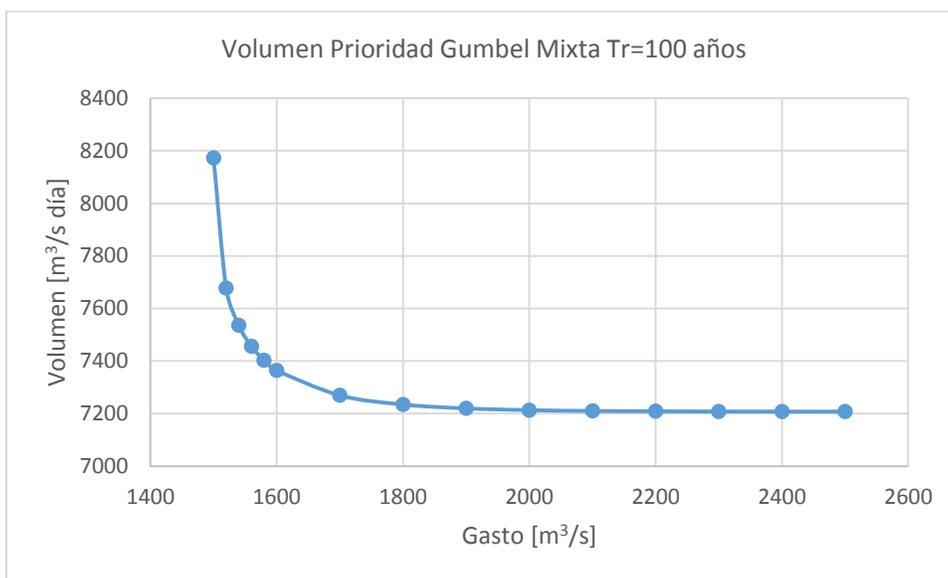


Figura 4.5 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso VP-GM

Tr= 1000 años

Tabla 4.18 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso VP-GM

theta= 1.95709258

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2100	9288.12285	0.99903697	0.99974085	0.999	999.999992
2120	8930.87228	0.9991091	0.99955776	0.999	1000
2140	8787.10823	0.99917583	0.99944551	0.999	999.999999
2160	8702.15416	0.99923756	0.99936421	0.999	1000.00005
2180	8644.7085	0.99929468	0.99930162	0.999	1000.00013
2200	8603.04072	0.99934752	0.99925189	0.999	1000.00006
2250	8536.60111	0.99946295	0.99916416	0.999	999.999992
2300	8498.70292	0.99955798	0.99910899	0.999	999.999996
2400	8460.58028	0.99970058	0.99904935	0.999	999.999985
2500	8444.41009	0.99979719	0.99902272	0.999	999.999166
2600	8437.1731	0.99986263	0.99901054	0.999	1000
2700	8433.85955	0.99990696	0.9990049	0.999	1000
2800	8432.32715	0.99993699	0.99900228	0.999	999.999985
2900	8431.61518	0.99995732	0.99900106	0.999	999.999916
3000	8431.28376	0.9999711	0.9990005	0.999	999.999962
3100	8431.12931	0.99998042	0.99900023	0.999	999.999989
3200	8431.0573	0.99998674	0.99900011	0.999	999.999997

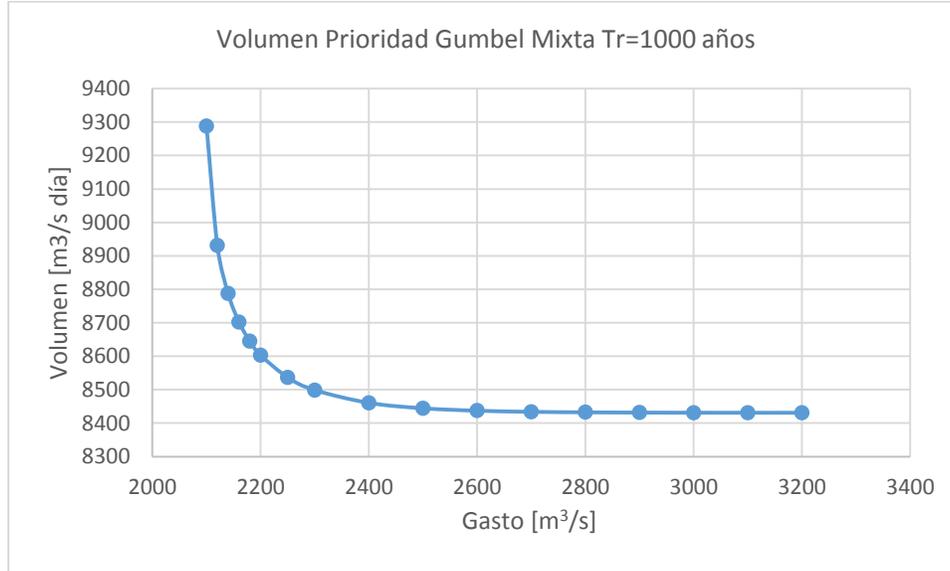


Figura 4.6 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso VP-GM

Tr=10,000 años

Tabla 4.19 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso VP-GM

theta= 1.95709258

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2700	10826.2363	0.99990696	0.9999645	0.9999	9999.99973
2720	10546.6906	0.99991394	0.9999503	0.9999	9999.99996
2740	10402.0581	0.99992039	0.99994067	0.9999	10000.0002
2760	10309.4671	0.99992636	0.99993346	0.9999	10000
2780	10244.2936	0.99993188	0.99992782	0.9999	10000
2800	10195.8739	0.99993699	0.9999233	0.9999	10000.0003
2850	10116.9046	0.99994814	0.99991525	0.9999	10000
2900	10070.9993	0.99995732	0.99991015	0.9999	9999.99981
3000	10024.2709	0.9999711	0.9999046	0.9999	9999.99933
3100	10004.3	0.99998042	0.99990212	0.9999	10000
3200	9995.33427	0.99998674	0.99990098	0.9999	10000.0001
3300	9991.22426	0.99999102	0.99990046	0.9999	10000.0002
3400	9989.32251	0.99999392	0.99990021	0.9999	10000.0003
3500	9988.43877	0.99999588	0.9999001	0.9999	10000.0004
3600	9988.02728	0.99999721	0.99990005	0.9999	10000.0004

Se resaltan en la tabla 4.19 aquellas parejas que serán tomadas para el tránsito de avenidas si las pruebas de bondad de ajuste bivariado así lo indican.

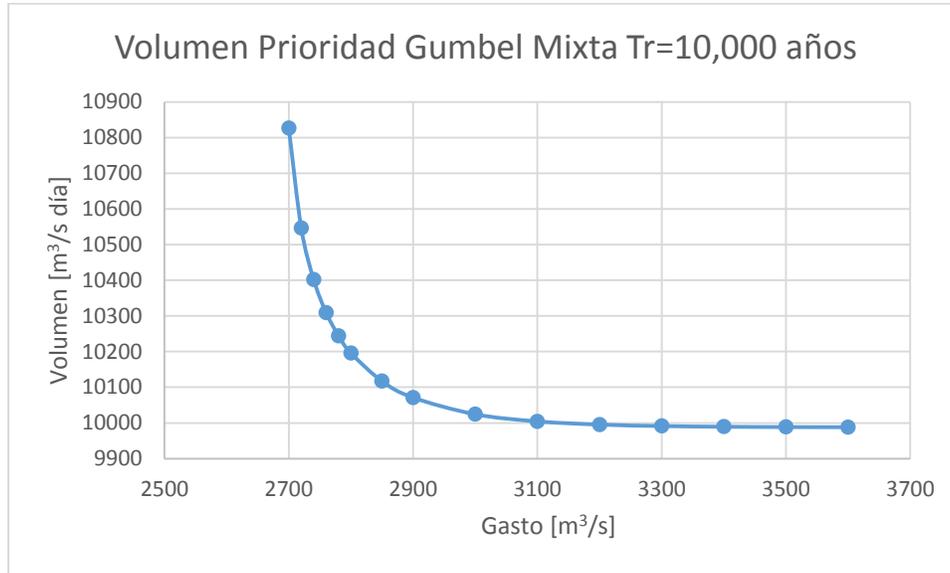


Figura 4.7 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso VP-GM

Las tres curvas obtenidas para este caso varían en sus valores respecto a las anteriores, pero mantienen un comportamiento adecuado, para el caso de la curva de 10,000 años, sus valores serán los que deben ser transitados para analizar la presa La Angostura.

#### Caso Gasto Prioridad con ajuste Weibull Mixta

Para este caso el método de extrapolación bivariada es el mismo, el único cambio es que al usar la función Weibull mixta, se debe cambiar la forma de calcular las probabilidades  $F(Q)$  y  $F(V)$  a la ecuación de probabilidad y parámetros correspondientes. De la misma forma se hará el cálculo para los tres periodos de retorno elegidos. Y los resultados se muestran a continuación.

La extrapolación marginal calculada resulto en los siguientes valores:

Tabla 4.20 Valores extrapolados a  $Tr$  marginalmente mediante la función Weibull Mixta para las series de datos Gasto Prioridad

Gasto Prioridad Weibull Mixta		
Tr	Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s]
100	1607.114	7728.898
1000	1963.92	9015.043
10000	2218.759	9903.191

Para el  $Tr= 100$  años

Partiendo de un valor superior al 1607.11 se comienza la iteración de valores de volumen que de los valores de periodo de retorno conjunto buscados, utilizando el valor previamente calculado.

Tabla 4.21 Extrapolación bivariada a  $Tr=100$  años, caso GP-WM

		theta= 1.9033997			
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
1620	8438.8217	0.99061423	0.99679088	0.98999996	99.9996267
1640	8171.93276	0.99155655	0.9948987	0.99	100.000005
1660	8042.26848	0.99242536	0.99371238	0.99000009	100.000851
1680	7960.51107	0.99322393	0.99286348	0.99	100.000035
1700	7903.79295	0.99395565	0.99222606	0.99	100.000002
1750	7818.99511	0.99551548	0.99119579	0.99	99.9999955
1800	7775.89721	0.99673477	0.99063554	0.99	99.9999971
1900	7741.1768	0.99836813	0.99016579	0.99	99.999994
2000	7731.90721	0.99924931	0.99003756	0.99	99.9999981
2100	7729.7273	0.99968375	0.99000723	0.99	99.9999961
2200	7729.29193	0.99987861	0.99000117	0.99	99.9999978
2300	7729.2194	0.99995776	0.99000016	0.99	100.000009

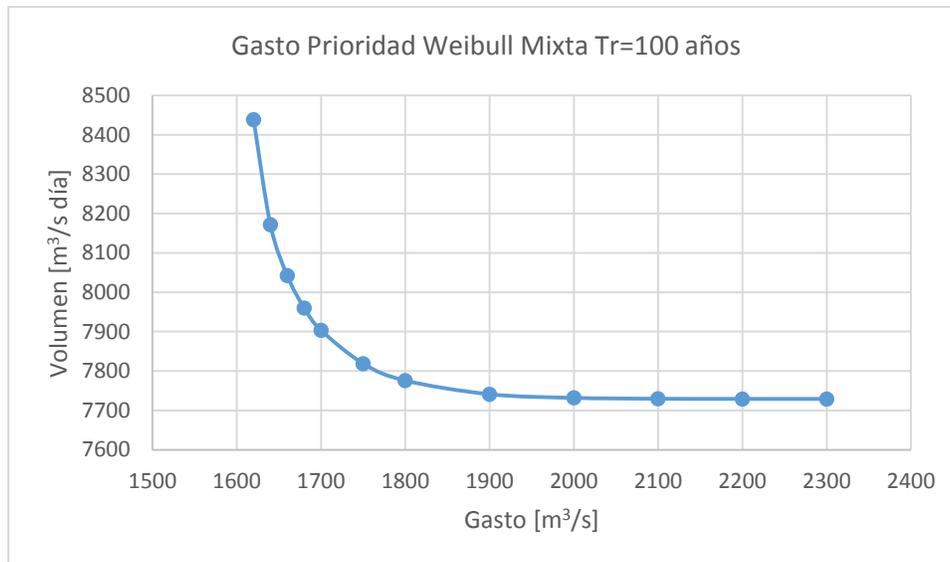


Figura 4.8 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso GP-WM

Tr=1000 años

Tabla 4.22 Extrapolación bivariada a  $Tr=1000$  años, caso GP-WM

theta= 1.9033997

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2000	9212.19807	0.99924931	0.9993653	0.999	999.999002
2020	9141.65638	0.99936394	0.99925049	0.999	1000
2040	9099.97122	0.99946298	0.99917462	0.999	1000.00054
2060	9073.18468	0.99954822	0.99912248	0.999	999.999827
2080	9055.24367	0.99962132	0.99908601	0.999	999.999993
2100	9042.9574	0.99968375	0.9990603	0.999	999.999216
2150	9026.26392	0.99980172	0.99902439	0.999	1000
2200	9019.50415	0.99987861	0.99900952	0.999	1000
2300	9015.79254	0.99995776	0.99900127	0.999	1000.00077
2400	9015.28536	0.99998675	0.99900014	0.999	1000.00068
2500	9015.22798	0.99999627	0.99900001	0.999	1000

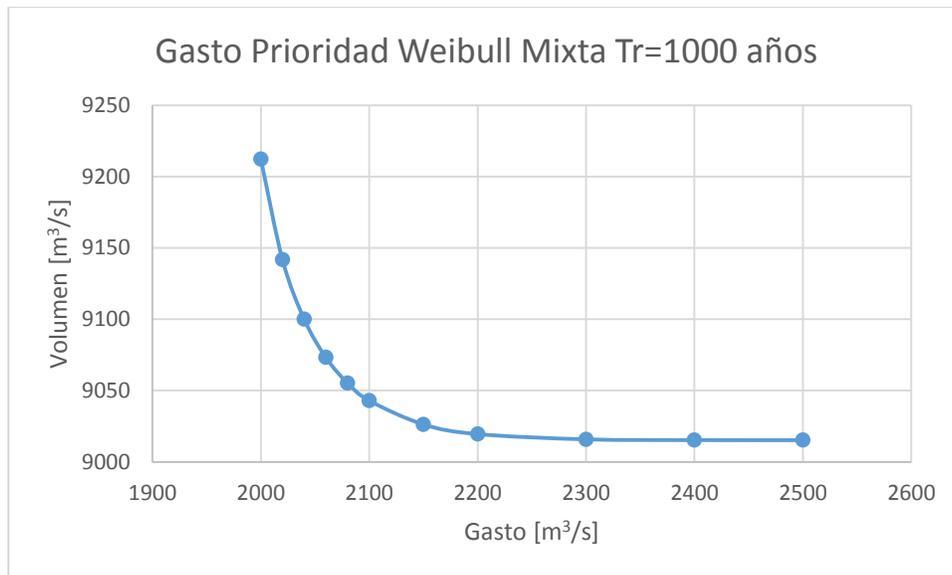


Figura 4.9 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso GP-WM

Tr=10,000 años

Tabla 4.23 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso GP-WM

		theta= 1.9033997			
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2320	9927.20213	0.99996622	0.99990687	0.9999	10000.0001
2340	9918.47593	0.99997309	0.9999044	0.9999	10000.0005
2360	9912.94973	0.99997866	0.99990281	0.9999	10000.0007
2380	9909.42959	0.99998315	0.99990179	0.9999	10000.0006
2400	9907.18608	0.99998675	0.99990113	0.9999	10000.0005
2450	9904.54168	0.99999287	0.99990035	0.9999	10000.0002
2500	9903.71816	0.99999627	0.9999001	0.9999	10000.0001
2600	9903.40478	0.99999906	0.99990001	0.9999	10000.0001
2700	9903.38183	0.99999979	0.9999	0.9999	10000.0001
2800	9903.3805	0.99999996	0.9999	0.9999	10000.0001

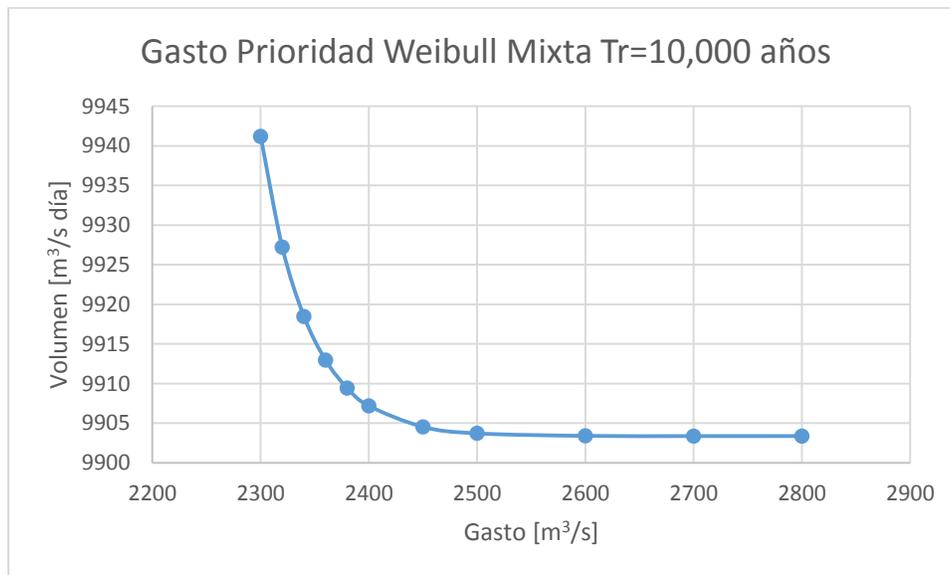


Figura 4.10 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso GP-WM

Las tres curvas resultantes mantienen una forma similar a las anteriores, para elegir una pareja de valores a uno de los 3 periodos de retorno basta con entrar a las curvas elegidas.

Se resaltan en la tabla 4.23 aquellas parejas elegidas para el tránsito de avenidas si las pruebas de bondad de ajuste bivariado así lo indican, se podría elegir una sola, pero se analiza el comportamiento de la posición de las parejas Q-V en la curva.

### Caso Volumen Prioridad con ajuste Weibull Mixta

Los valores extrapolados marginales se muestran en la tabla siguiente

Tabla 4.24 Valores extrapolados a  $T_r$  marginalmente mediante la función Weibull Mixta para las series de datos Volumen Prioridad

Gasto Prioridad Weibull Mixta		
$T_r$	Gasto [ $m^3/s$ ]	Volumen [ $m^3/s$ ]
100	1498.302	7796.442
1000	1998.221	9870.094
10000	2441.75	11596.037

$T_r=100$  años

Tabla 4.25 Extrapolación bivariada a  $T_r=100$  años, caso VP-WM

theta= 1.95651172					
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	$T_r$
$m^3/s$	$m^3/s$ día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
1520	8673.4382	0.99088635	0.99598452	0.99	99.9999939
1540	8400.33832	0.99163953	0.99461368	0.99000006	100.000636
1560	8246.95367	0.99233477	0.99367228	0.99000001	100.000078
1580	8145.16136	0.99297611	0.99296925	0.99	99.9999652
1600	8072.15017	0.99356735	0.99242313	0.99	100.000029
1650	7957.55232	0.99484915	0.99149004	0.99	99.999972
1700	7893.99737	0.99588947	0.99093001	0.99	99.9999994
1750	7856.37876	0.9967306	0.99058344	0.99	99.9999982
1800	7833.41115	0.99740814	0.99036617	0.99	99.9999589
1900	7810.29823	0.99838677	0.99014309	0.98999999	99.9999273
2000	7801.29158	0.99900848	0.99005494	0.99	99.9999687
2100	7797.80517	0.99939804	0.99002063	0.98999998	99.9997806
2200	7796.48191	0.99963891	0.99000758	0.98999999	99.9998954
2300	7795.9902	0.99978592	0.99000273	0.99	99.9999989

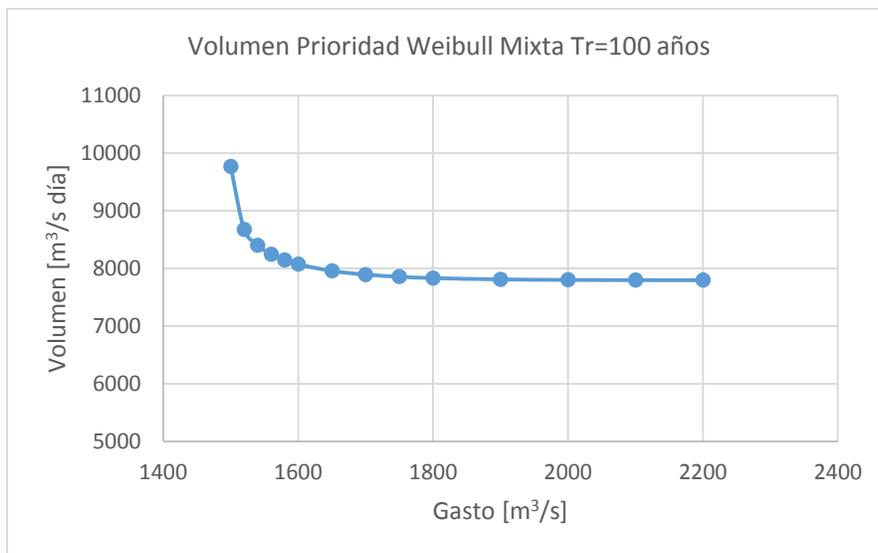


Figura 4.11 Curva Q-V de periodo de retorno 100 años bivariada, caso VP-WM

Tr=1000 años

Tabla 4.26 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso VP-WM

theta= 1.95651172

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2000	11450.8287	0.99900848	0.99987707	0.999	999.999083
2020	10537.5244	0.99910179	0.9995725	0.999	1000
2040	10316.0173	0.99918672	0.99943006	0.999	1000
2060	10194.3024	0.99926398	0.99933413	0.999	999.999983
2080	10115.1169	0.99933422	0.9992639	0.999	1000
2100	10059.4085	0.99939804	0.99921044	0.999	1000
2150	9974.68651	0.99953309	0.99912223	0.999	1000
2200	9929.96624	0.99963891	0.99907207	0.999	999.999893
2300	9890.2502	0.99978592	0.99902532	0.999	1000
2400	9876.65827	0.99987452	0.99900883	0.999	1000
2500	9871.92504	0.99992728	0.99900303	0.999	1000
2600	9870.29099	0.99995831	0.99900102	0.999	1000

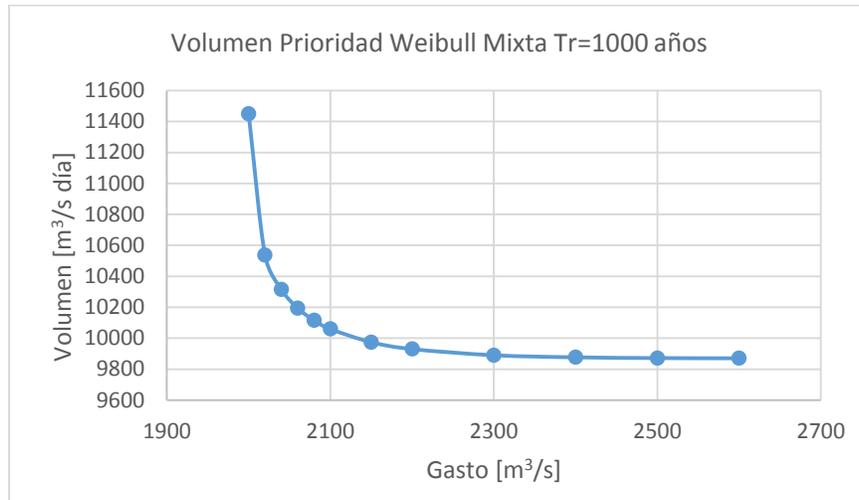


Figura 4.12 Curva Q-V de periodo de retorno 1000 años bivariada, caso VP-WM

Tr=10,000 años

Tabla 4.27 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso VP-WM

theta= 1.95651172

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2500	11866.3136	0.99992728	0.99993248	0.9999	10000
2520	11795.4759	0.99993488	0.99992511	0.9999	10000
2540	11746.9022	0.99994171	0.99991962	0.9999	10000
2560	11711.9266	0.99994785	0.99991544	0.9999	10000
2580	11685.9645	0.99995336	0.9999122	0.9999	9999.99987
2600	11666.2984	0.99995831	0.99990967	0.9999	10000
2650	11634.6062	0.99996856	0.99990545	0.9999	10000
2700	11617.4192	0.99997636	0.99990309	0.9999	10000.0002
2800	11602.4946	0.99998673	0.99990099	0.9999	9999.99996
2900	11597.7582	0.99999263	0.99990031	0.9999	10000
3000	11596.2588	0.99999595	0.9999001	0.9999	10000.0002
3100	11595.7911	0.9999978	0.99990003	0.9999	10000.0007
3200	11595.6477	0.99999881	0.99990001	0.9999	10000
3300	11595.6046	0.99999937	0.9999	0.9999	10000

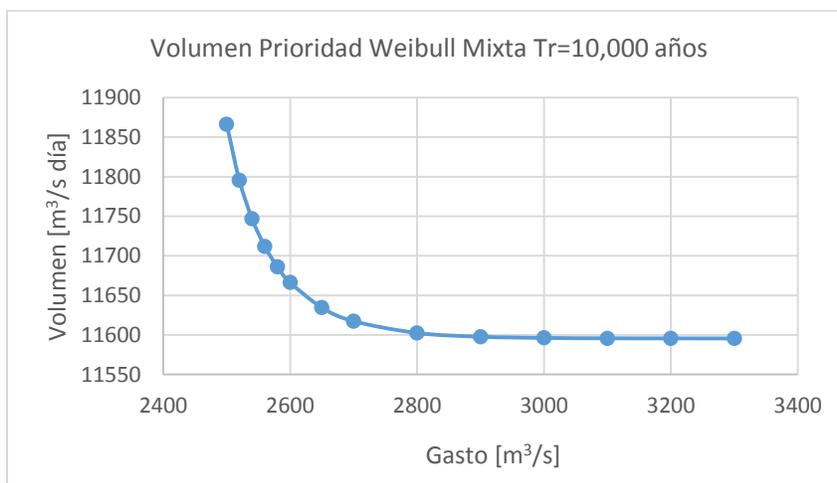


Figura 4.13 Curva Q-V de periodo de retorno 10000 años bivariada, caso VP-WM

Se resaltan en la tabla 4.27 aquellas parejas que serán elegidas para el tránsito de avenidas en el caso que esta función sea la seleccionada según las pruebas de bondad de ajuste.

#### Caso Gasto Prioridad con ajuste Gamma Mixta

La extrapolación de valores para las estimaciones mediante la función Gamma Mixta, se lleva a cabo de la misma forma que para las dos anteriores, Se proponen valores, se calcula la probabilidad bivariada o conjunta y se estima el periodo de retorno.

Para el Tr de 100 años

Tabla 4.28 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso GP-GamM

		theta= 1.84757842			
Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q, V)	
2166.17442	7800	0.99928009	0.99004149	0.99000009	100.000909
1964.62123	7820	0.99837325	0.99018802	0.98999999	99.9999112
1862.71419	7850	0.99755296	0.9904039	0.99	99.9999949
1806.91003	7880	0.99694363	0.99061516	0.99	99.9999545
1780.15979	7900	0.99660099	0.99075348	0.99	99.999998
1731.79264	7950	0.99588333	0.99109066	0.99	99.9999951
1698.13843	8000	0.99529846	0.99141587	0.99	99.9999757
1652.5608	8100	0.99437516	0.99203202	0.99	99.9999907
1622.23262	8200	0.99366491	0.99260502	0.99	99.9999984
1600.28789	8300	0.99309713	0.99313781	0.99	99.999996
1583.61921	8400	0.99263297	0.99363312	0.99	99.9999906
1580.7569	8420	0.99255026	0.99372791	0.99	100.00001
1560.08304	8600	0.99192539	0.99452132	0.99	99.9999997

Para el Tr de 1000 años

Tabla 4.29 Extrapolación bivariada a Tr=1000 años, caso GP-GamM

theta= 1.84757842

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q, V)	
2090	13124.4064	0.99901922	0.9998364	0.999	999.999922
2100	12379.2215	0.99905817	0.99970484	0.999	999.999831
2120	11840.9721	0.99913154	0.99954905	0.999	1000
2150	11484.1583	0.99923115	0.99940348	0.999	999.999979
2200	11202.9369	0.99937271	0.99925687	0.999	1000
2250	11059.4858	0.99948848	0.99916893	0.999	999.999994
2400	10889.5692	0.99972345	0.99905142	0.999	1000
2500	10852.5413	0.99981688	0.99902372	0.999	1000
2800	10824.6795	0.99994735	0.99900235	0.999	1000
3200	10821.7876	0.99999019	0.99900011	0.999	1000
3300	10821.7139	0.99999357	0.99900005	0.999	999.999794
3400	10821.6805	0.9999958	0.99900002	0.999	999.999997

Y finalmente para el Tr de 10,000 años

Tabla 4.30 Extrapolación bivariada a Tr=10000 años, caso GP-GamM

theta= 1.84757842

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q, V)	
2650	16099.3714	0.99990164	0.99998498	0.9999	9999.99999
2680	14736.5765	0.99991317	0.99995489	0.9999	9999.99991
2700	14473.268	0.99992011	0.99994427	0.9999	9999.99999
2750	14146.8056	0.99993513	0.99992761	0.9999	10000.0008
2800	13989.8043	0.99994735	0.99991792	0.9999	9999.99999
2850	13900.464	0.99995728	0.99991184	0.9999	10000
2900	13845.7449	0.99996535	0.9999079	0.9999	9999.99998
3000	13788.1839	0.99997722	0.99990357	0.9999	9999.99948
3100	13763.1774	0.99998504	0.99990163	0.9999	10000
3300	13746.8764	0.99999357	0.99990034	0.9999	10000
3500	13743.4965	0.99999725	0.99990007	0.9999	9999.99999
4000	13742.6266	0.99999968	0.9999	0.9999	10000

Y gráficamente, se pueden apreciar los valores extrapolados en forma de curva, cada curva Q-V corresponde a un periodo de retorno en específico.

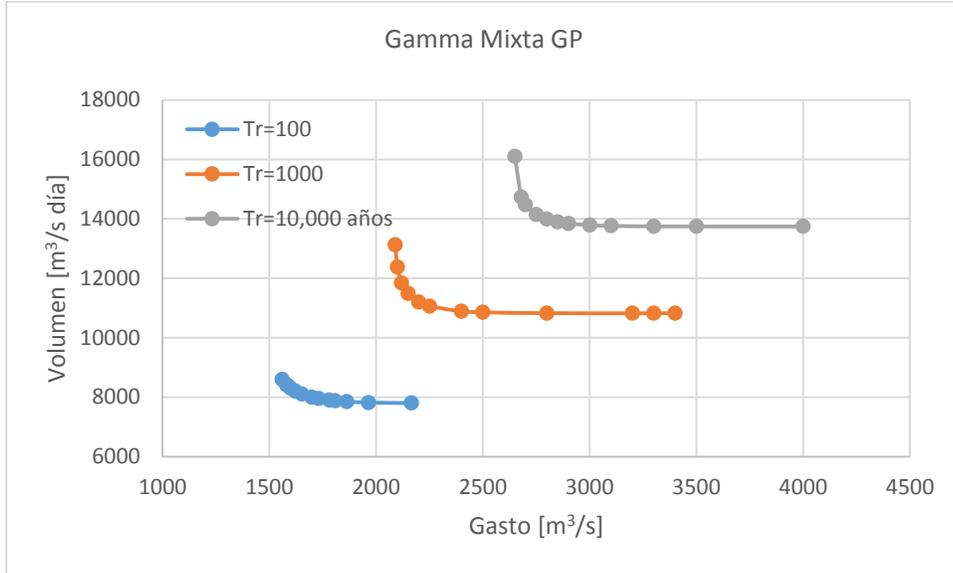


Figura 4.14 Curvas Q-V de periodo de retorno 100, 1000 y 10,000 años, caso GP-GamM

**Caso Volumen Prioridad con ajuste Gamma Mixta**

Para estimar las parejas Q-V que corresponden a los tres periodos de retorno seleccionados, el proceso es el mismo.

Para el Tr de 100 años la iteración resultante es la siguiente

Tabla 4.31 Extrapolación bivariada a Tr=100 años, caso VP-GamM

theta= 1.84757842

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m³/s	m³/s día	F(Q)	G(V)	F(Q, V)	
1600	9563.77194	0.99062246	0.99740676	0.99000009	100.000877
1620	9086.26936	0.99127286	0.996089	0.99000004	100.000408
1650	8738.78683	0.99216709	0.99474397	0.99	100.000004
1680	8539.52992	0.99297202	0.99378177	0.99	100.000002
1700	8446.1177	0.99346332	0.99327433	0.98999999	99.9998962
1750	8287.06313	0.99454981	0.99231743	0.99	99.9999983
1800	8188.56366	0.99545949	0.99166072	0.99000005	100.000478
1900	8079.15655	0.99685605	0.99086827	0.98999998	99.9997648
2000	8026.12596	0.99782932	0.99045869	0.99	99.9999904
2100	7999.07017	0.99850524	0.99024302	0.98999999	99.9999004
2500	7971.54276	0.99967131	0.99001881	0.98999991	99.9991142

Para el Tr de 1000 años

Tabla 4.32 Extrapolación bivariada a  $Tr=1000$  años, caso VP-GamM

theta= 1.84757842

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2250	11601.7595	0.99914965	0.99957361	0.999	999.999998
2280	11310.7899	0.99924082	0.99944575	0.999	1000.00051
2300	11188.445	0.99929618	0.99938139	0.999	1000
2350	10994.4411	0.99941775	0.99926405	0.999	1000.00014
2400	10881.6209	0.99951856	0.99918606	0.999	999.999999
2450	10809.9311	0.99960211	0.99913237	0.999	1000.00086
2500	10762.1807	0.99967131	0.9990947	0.999	1000
2600	10706.6833	0.99977599	0.99904891	0.999	1000.00025
2700	10679.1909	0.99984758	0.9990254	0.999	999.999999
3000	10654.2389	0.99995241	0.99900356	0.999	999.999997
3200	10651.2943	0.99997824	0.99900096	0.999	999.999984

Y para el Tr de 10,000 años que será el transitable en caso de ser aceptado con las pruebas de bondad de ajuste bivariadas.

Tabla 4.33 Extrapolación bivariada a  $Tr=10000$  años, caso VP-GamM

theta= 1.84757842

Gasto	Volumen	u	v	Copula G-H	Tr
m <sup>3</sup> /s	m <sup>3</sup> /s día	F(Q)	G(V)	F(Q,V)	
2810	16371.5135	0.99990038	0.99999503	0.9999	9999.99991
2840	14271.4636	0.99991132	0.99996361	0.9999	9999.99934
2880	13822.2687	0.99992407	0.99994461	0.9999	10000
2900	13701.6758	0.99992975	0.99993801	0.9999	10000
2950	13512.5775	0.99994217	0.99992609	0.9999	10000
3000	13403.9025	0.99995241	0.99991824	0.9999	9999.99981
3050	13335.4644	0.99996084	0.99991288	0.9999	9999.99997
3100	13290.239	0.9999678	0.99990915	0.9999	10000
3300	13212.7787	0.99998531	0.99990239	0.9999	10000.0001
3500	13193.4928	0.99999332	0.99990063	0.9999	10000.0006

Y gráficamente estos valores correspondientes a un periodo de retorno se pueden observar en la siguiente figura en forma de curvas.

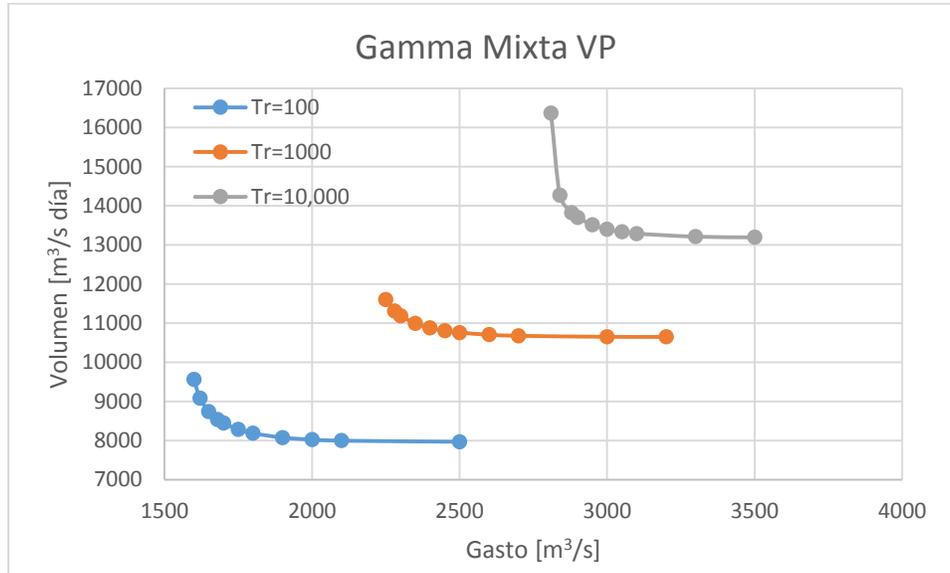


Figura 4.15 Curvas Q-V de periodo de retorno 100, 1000 y 10,000 años, caso VP-GamM

#### 4.4.2.2 Duración 10 días

Para el caso de la duración de 10 días se realizó la extrapolación al periodo de retorno de 10,000 años, solamente, pues se busca un hidrograma de diseño con estas características.

El proceso es el mismo; de forma iterativa se encuentran parejas de gasto y volumen que al calcular su probabilidad conjunta con la cópula nos arrojen aquella que cumpla con el periodo de retorno solicitado.

Los resultados se muestran a continuación:

#### Gasto Prioridad

Se crearon dos curvas que corresponden cada una de ellas al periodo de retorno de 10,000 años y corresponden a ajustes marginales mediante la función Gumbel Mixta y Weibull Mixta. Cada pareja mostrada en la tabla 4.34 corresponden a un periodo de retorno conjunto de 10,000 años, cualquiera de estas parejas (Q, V) puede ser seleccionada para crear el hidrograma de diseño final.

Tabla 4.34 Parejas Q-V extrapoladas al periodo de retorno de 10,000 años de manera bivariada para los casos GM y WM ambas de Gasto Prioridad

Gasto Prioridad			
Gumbel Mixta		Weibull Mixta	
Q	V	Q	V
[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]
2950	10407.2099	2380	7245.22321
2970	10242.5429	2390	7200.01543
2990	10142.6944	2400	7174.2684
3000	10105.7143	2410	7157.27655
3030	10025.1149	2430	7136.35288
3050	9987.80049	2450	7124.42298
3100	9926.56105	2480	7114.62657
3200	9870.08113	2500	7110.9843
3300	9848.53349	2550	7106.58801
3400	9839.81021	2600	7105.10748
3500	9836.1983	2700	7104.45454
3600	9834.68917	2800	7104.38862

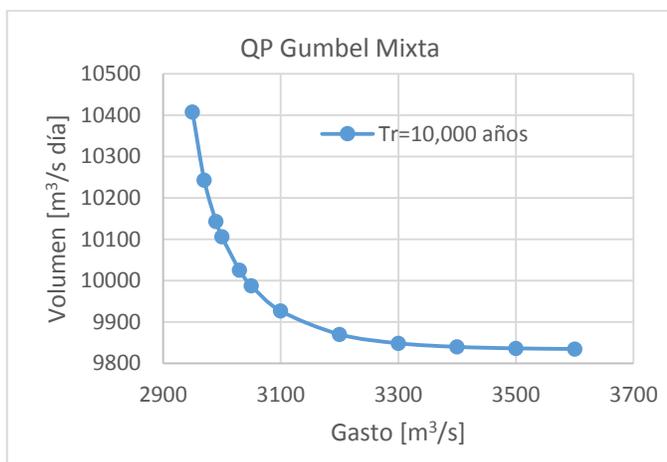


Figura 4.16 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso GP-GM para la duración de 10 días

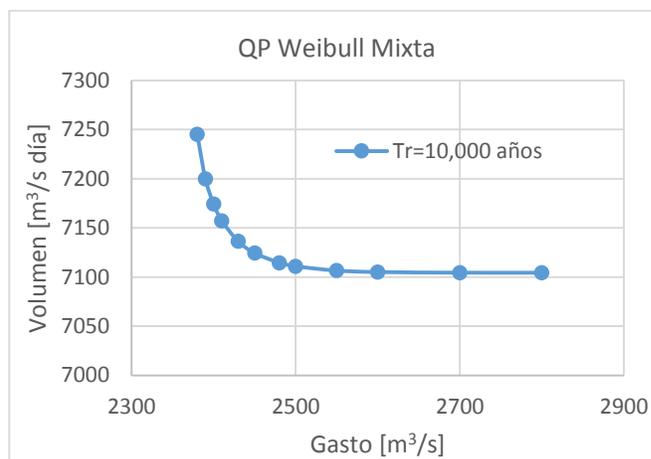


Figura 4.17 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso GP-WM para la duración de 10 días

Las parejas calculadas para el caso con función Gumbel mixta son valores más grandes que los de caso Weibull mixta.

### Volumen Prioridad

Se crearon de igual forma dos curvas cada una correspondiente a cada función de probabilidad elegida, las parejas de Q, V correspondientes al periodo de retorno de 10,000 años se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4.35 Parejas Q-V extrapoladas al periodo de retorno de 10,000 años de manera bivariada para los casos GM y WM ambas de Volumen Prioridad

Volumen Prioridad			
Gumbel Mixta		Weibull Mixta	
Q	V	Q	V
[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]
2400	10289.5494	2600	8132.73523
2430	10145.5196	2610	7957.20035
2450	10091.9292	2620	7887.50058
2480	10040.9335	2650	7794.98012
2500	10018.564	2700	7738.99906
2550	9984.81405	2750	7717.03587
2600	9968.05927	2800	7707.10872
2700	9954.95843	2850	7702.39127
2800	9951.3381	2900	7700.10606
2900	9950.32105	2950	7698.9922
3000	9950.03405	3000	7698.44916
3100	9949.95294	3100	7698.05721

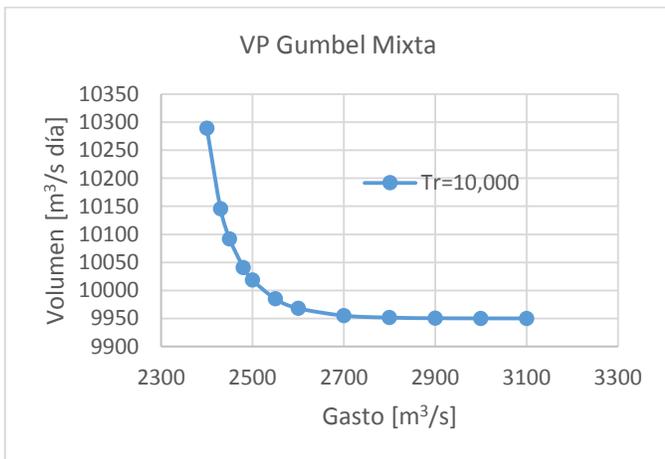


Figura 4.18 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso VP-GM para la duración de 10 días

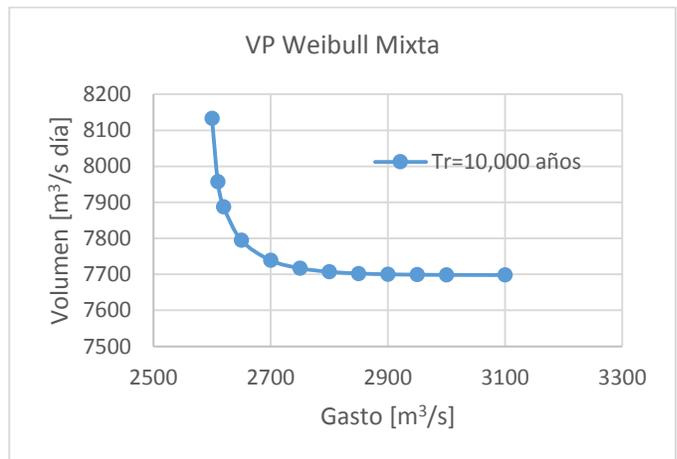


Figura 4.19 Curva Q-V de periodo de retorno 10,000 años, caso VP-WM para la duración de 10 días

El comportamiento de las curvas es muy parecido a las obtenidas para el criterio de gasto prioridad respecto a la función de ajuste. El caso Gumbel Mixta arroja de nueva cuenta valores de Q, V más grandes al Weibull Mixta.

Cualquiera de estas parejas puede ser seleccionada para crear el hidrograma de diseño final para una duración de 10 días y un  $Tr=10,000$  años.

Para saber que caso elegir entre los dos que se tienen, se debe recurrir a las pruebas de bondad de ajuste, lo cual se explica en el apartado siguiente.

### **4.4.3 Pruebas de bondad de estimación bivariada**

#### **4.4.3.1 Duración de 35 días**

Como se explicó anteriormente es importante conocer que estimación bivariada es mejor para crear el hidrograma de diseño, para ello se calcula la frecuencia acumulada observada (Klugman-Parsa, 1999) con la fórmula de Gringorten (1963) para cada una de los casos de selección de datos (gasto prioridad y volumen prioridad). Posteriormente se aplica la prueba de Kolmogórov-Smirnov para todas las estimaciones bivariadas realizadas; 6 en total.

Es importante mencionar que este trabajo analiza los alcances y variaciones que resultan de una estimación bivariada cambiando tanto el criterio de selección de datos, como funciones de probabilidad, es por ello que crean hidrogramas de diseño para cada caso y no solo para aquel que arroje la mejor estimación bajo el criterio de K-S y de Akaike.

La frecuencia acumulada observada resultante para los criterios de gasto y volumen prioridad se muestra a continuación.

Tabla 4.36 Frecuencia acumulada observada calculada para los criterios de GP y VP para 35 días de duración

Frecuencia acumulada observada					
Año	Gasto Prioridad	Volumen Prioridad	Año	Gasto Prioridad	Volumen Prioridad
1942	0.31934	0.23331	1971	0.09566	0.09566
1943	0.40537	0.38816	1972	0.23331	0.18169
1944	0.23331	0.25052	1973	0.69787	0.69787
1945	0.21610	0.23331	1974	0.04405	0.11287
1946	0.18169	0.14728	1975	0.07846	0.14728
1947	0.02684	0.02684	1976	0.14728	0.19890
1948	0.47419	0.40537	1977	0.31934	0.19890
1949	0.95595	0.95595	1978	0.86992	0.83551
1950	0.25052	0.42257	1979	0.78390	0.81831
1951	0.26772	0.21610	1980	0.04405	0.04405
1952	0.26772	0.19890	1981	0.25052	0.13008
1953	0.50860	0.42257	1982	0.50860	0.42257
1954	0.37096	0.37096	1983	0.71507	0.73228
1955	0.02684	0.62904	1984	0.85272	0.88713
1956	0.02684	0.02684	1985	0.56022	0.54301
1957	0.35375	0.21610	1986	0.37096	0.47419
1958	0.69787	0.69787	1994	0.43978	0.49140
1959	0.42257	0.52581	1995	0.85272	0.83551
1960	0.80110	0.76669	1996	0.04405	0.04405
1961	0.06125	0.09566	1997	0.26772	0.25052
1962	0.56022	0.52581	1998	0.19890	0.19890
1963	0.09566	0.16449	1999	0.56022	0.56022
1964	0.42257	0.50860	2000	0.25052	0.28493
1965	0.76669	0.74948	2001	0.18169	0.11287
1966	0.50860	0.57743	2002	0.07846	0.11287
1967	0.95595	0.95595	2003	0.00964	0.00964
1968	0.73228	0.76669	2004	0.07846	0.13008
1969	0.19890	0.13008	2005	0.76669	0.69787
1970	0.21610	0.23331	2006	0.23331	0.31934

Ahora con los valores de probabilidad conjunta obtenidos con la cópula Gumbel-Hougaard es posible aplicar la prueba de Kolmogórov-Smirnov tal como se explicó en los ajustes marginales.

Para el caso de los datos seleccionados mediante el criterio de Gasto Prioridad se observa en la tabla 4.37 el cálculo de las diferencias entre la frecuencia observada y la probabilidad bivariada.

Tabla 4.37 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Gasto Prioridad, para los 3 ajustes bivariados elegidos

Gasto Prioridad							
Año	Frecuencia acumulada observada	F(Q,V)			Kolmogórov-Smirnov		
		Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1942	0.3193	0.3357	0.3407	0.3267	0.0164	0.0214	0.0074
1943	0.4054	0.4320	0.4094	0.4060	0.0267	0.0040	0.0007
1944	0.2333	0.2326	0.2319	0.2354	0.0007	0.0014	0.0021
1945	0.2161	0.1996	0.2030	0.2085	0.0165	0.0131	0.0076
1946	0.1817	0.1081	0.1205	0.1217	0.0736	0.0612	0.0600
1947	0.0268	0.0150	0.0189	0.0144	0.0118	0.0080	0.0124
1948	0.4742	0.4388	0.4396	0.4219	0.0354	0.0346	0.0523
1949	0.9560	0.9669	0.9598	0.9734	0.0110	0.0038	0.0174
1950	0.2505	0.2325	0.2466	0.2342	0.0181	0.0039	0.0163
1951	0.2677	0.2958	0.3092	0.2957	0.0281	0.0415	0.0280
1952	0.2677	0.2951	0.3014	0.2891	0.0274	0.0337	0.0214
1953	0.5086	0.4795	0.4793	0.4652	0.0291	0.0293	0.0434
1954	0.3710	0.4033	0.3858	0.3781	0.0323	0.0148	0.0072
1955	0.0268	0.0332	0.0370	0.0266	0.0064	0.0101	0.0002
1956	0.0268	0.0152	0.0206	0.0164	0.0116	0.0062	0.0105
1957	0.3538	0.3813	0.3670	0.3590	0.0275	0.0133	0.0052
1958	0.6979	0.7287	0.7273	0.7121	0.0309	0.0294	0.0142
1959	0.4226	0.4163	0.3952	0.4088	0.0063	0.0274	0.0138
1960	0.8011	0.8225	0.8041	0.8007	0.0214	0.0030	0.0004
1961	0.0613	0.0450	0.0568	0.0530	0.0162	0.0045	0.0083
1962	0.5602	0.5992	0.5935	0.5725	0.0390	0.0333	0.0123
1963	0.0957	0.0905	0.1045	0.1073	0.0052	0.0088	0.0116
1964	0.4226	0.4347	0.4119	0.4083	0.0121	0.0107	0.0143
1965	0.7667	0.7925	0.7828	0.7780	0.0258	0.0161	0.0113
1966	0.5086	0.5098	0.4824	0.4863	0.0012	0.0262	0.0223
1967	0.9560	0.9647	0.9583	0.9725	0.0087	0.0024	0.0165
1968	0.7323	0.7251	0.7254	0.7182	0.0072	0.0069	0.0141
1969	0.1989	0.1538	0.1639	0.1608	0.0451	0.0350	0.0381
1970	0.2161	0.2234	0.2239	0.2275	0.0073	0.0078	0.0114
1971	0.0957	0.0488	0.0610	0.0578	0.0469	0.0347	0.0378
1972	0.2333	0.2080	0.2122	0.2104	0.0253	0.0211	0.0229
1973	0.6979	0.7360	0.7358	0.7234	0.0381	0.0380	0.0255
1974	0.0440	0.0307	0.0393	0.0337	0.0133	0.0048	0.0103
1975	0.0785	0.0518	0.0639	0.0596	0.0267	0.0146	0.0189
1976	0.1473	0.1191	0.1318	0.1374	0.0282	0.0155	0.0099
1977	0.3193	0.3190	0.3292	0.3153	0.0003	0.0099	0.0041
1978	0.8699	0.8813	0.8916	0.9145	0.0114	0.0216	0.0446
1979	0.7839	0.7816	0.7956	0.7902	0.0023	0.0117	0.0063
1980	0.0440	0.0243	0.0325	0.0283	0.0197	0.0116	0.0157
1981	0.2505	0.2232	0.2254	0.2240	0.0273	0.0251	0.0265
1982	0.5086	0.4743	0.4755	0.4596	0.0344	0.0331	0.0490
1983	0.7151	0.7116	0.7078	0.6991	0.0035	0.0073	0.0159
1984	0.8527	0.8244	0.8397	0.8401	0.0283	0.0131	0.0126
1985	0.5602	0.5555	0.5360	0.5173	0.0047	0.0243	0.0429
1986	0.3710	0.3370	0.3235	0.3321	0.0339	0.0474	0.0389
1994	0.4398	0.4535	0.4296	0.4249	0.0137	0.0102	0.0149
1995	0.8527	0.8754	0.8582	0.8641	0.0227	0.0054	0.0114
1996	0.0440	0.0252	0.0334	0.0293	0.0188	0.0107	0.0148
1997	0.2677	0.3072	0.3059	0.2964	0.0395	0.0382	0.0287
1998	0.1989	0.1688	0.1760	0.1823	0.0301	0.0229	0.0166

1999	0.5602	0.5665	0.5503	0.5291	0.0063	0.0099	0.0311
2000	0.2505	0.2234	0.2238	0.2293	0.0271	0.0267	0.0212
2001	0.1817	0.0953	0.1084	0.1052	0.0864	0.0733	0.0765
2002	0.0785	0.0480	0.0600	0.0560	0.0304	0.0185	0.0224
2003	0.0096	0.0024	0.0013	0.0006	0.0072	0.0083	0.0091
2004	0.0785	0.0928	0.1111	0.0965	0.0144	0.0326	0.0181
2005	0.7667	0.8097	0.7918	0.7860	0.0430	0.0251	0.0193
2006	0.2333	0.1805	0.1886	0.1995	0.0528	0.0447	0.0339
				Máxima Dif=	0.0864	0.0733	0.0765

De la misma forma se muestran a continuación la aplicación de la prueba, pero ahora para los valores correspondientes al criterio de volumen prioridad.

Tabla 4.38 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Volumen Prioridad, para los 3 ajustes bivariados elegidos

Año	Frecuencia acumulada observada	Volumen Prioridad					
		F(Q,V)			Kolmogórov-Smirnov		
		Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
1942	0.2333	0.2665	0.2510	0.2251	0.0332	0.0177	0.0082
1943	0.3882	0.3565	0.3911	0.3750	0.0317	0.0029	0.0132
1944	0.2505	0.2553	0.2606	0.1940	0.0048	0.0101	0.0565
1945	0.2333	0.2337	0.2469	0.1781	0.0003	0.0136	0.0552
1946	0.1473	0.1098	0.1084	0.0851	0.0374	0.0388	0.0621
1947	0.0268	0.0093	0.0117	0.0103	0.0176	0.0152	0.0165
1948	0.4054	0.3705	0.3683	0.3166	0.0348	0.0371	0.0888
1949	0.9560	0.9773	0.9721	0.9663	0.0214	0.0161	0.0103
1950	0.4226	0.4145	0.4214	0.1368	0.0080	0.0012	0.2857
1951	0.2161	0.2166	0.1979	0.1874	0.0005	0.0182	0.0287
1952	0.1989	0.1828	0.1927	0.1919	0.0161	0.0062	0.0070
1953	0.4226	0.4005	0.4027	0.3511	0.0221	0.0199	0.0715
1954	0.3710	0.4085	0.4087	0.3223	0.0375	0.0378	0.0487
1955	0.6290	0.6047	0.5794	0.0042	0.0243	0.0497	0.6248
1956	0.0268	0.0087	0.0090	0.0057	0.0181	0.0179	0.0212
1957	0.2161	0.1876	0.2232	0.2953	0.0285	0.0071	0.0792
1958	0.6979	0.7272	0.7020	0.6553	0.0293	0.0041	0.0425
1959	0.5258	0.5172	0.5082	0.4362	0.0086	0.0176	0.0896
1960	0.7667	0.8018	0.7726	0.7377	0.0351	0.0059	0.0290
1961	0.0957	0.0546	0.0581	0.0247	0.0410	0.0376	0.0710
1962	0.5258	0.5192	0.5215	0.4752	0.0066	0.0043	0.0506
1963	0.1645	0.1234	0.1530	0.1288	0.0410	0.0115	0.0357
1964	0.5086	0.4833	0.4769	0.3770	0.0253	0.0317	0.1316
1965	0.7495	0.7820	0.7541	0.7135	0.0326	0.0046	0.0360
1966	0.5774	0.5802	0.5526	0.4962	0.0028	0.0248	0.0812
1967	0.9560	0.9763	0.9715	0.9655	0.0204	0.0155	0.0095
1968	0.7667	0.7415	0.7265	0.7078	0.0252	0.0402	0.0589
1969	0.1301	0.1268	0.1143	0.0976	0.0033	0.0157	0.0325
1970	0.2333	0.2450	0.2499	0.1862	0.0117	0.0166	0.0472
1971	0.0957	0.0511	0.0619	0.0297	0.0446	0.0337	0.0660
1972	0.1817	0.1387	0.1696	0.1463	0.0430	0.0121	0.0354
1973	0.6979	0.7402	0.7135	0.6764	0.0424	0.0156	0.0215

1974	0.1129	0.0630	0.0659	0.0104	0.0498	0.0469	0.1024
1975	0.1473	0.0884	0.0939	0.0262	0.0589	0.0533	0.1211
1976	0.1989	0.1633	0.1945	0.1441	0.0356	0.0044	0.0548
1977	0.1989	0.1517	0.1841	0.2081	0.0472	0.0148	0.0092
1978	0.8355	0.8006	0.7948	0.8984	0.0349	0.0408	0.0629
1979	0.8183	0.8003	0.7947	0.7855	0.0181	0.0237	0.0328
1980	0.0440	0.0176	0.0183	0.0144	0.0265	0.0258	0.0296
1981	0.1301	0.1084	0.1358	0.1614	0.0217	0.0057	0.0314
1982	0.4226	0.3998	0.4021	0.3476	0.0228	0.0205	0.0749
1983	0.7323	0.7276	0.7075	0.6845	0.0046	0.0248	0.0478
1984	0.8871	0.8475	0.8395	0.8327	0.0396	0.0476	0.0544
1985	0.5430	0.5538	0.5473	0.4613	0.0108	0.0042	0.0817
1986	0.4742	0.4222	0.4347	0.3288	0.0520	0.0395	0.1454
1994	0.4914	0.4948	0.4872	0.3943	0.0034	0.0042	0.0971
1995	0.8355	0.8558	0.8303	0.8189	0.0203	0.0052	0.0166
1996	0.0440	0.0180	0.0208	0.0173	0.0260	0.0233	0.0267
1997	0.2505	0.2617	0.2467	0.2119	0.0112	0.0038	0.0386
1998	0.1989	0.2080	0.2269	0.1614	0.0091	0.0280	0.0375
1999	0.5602	0.5533	0.5515	0.4639	0.0069	0.0087	0.0963
2000	0.2849	0.2614	0.2758	0.1986	0.0235	0.0092	0.0863
2001	0.1129	0.0901	0.1099	0.0560	0.0227	0.0030	0.0569
2002	0.1129	0.0687	0.0732	0.0255	0.0441	0.0397	0.0873
2003	0.0096	0.0011	0.0014	0.0000	0.0086	0.0083	0.0096
2004	0.1301	0.1149	0.1101	0.0321	0.0152	0.0200	0.0980
2005	0.6979	0.7357	0.7092	0.7195	0.0378	0.0113	0.0216
2006	0.3193	0.2577	0.3002	0.2145	0.0616	0.0191	0.1048
				Máxima Dif=	0.0616	0.0533	0.6248

Ya aplicada la prueba de Kolmogórov-Smirnov para cada caso de análisis, es posible compararlos y elegir aquel que nos arroje una mejor aproximación, lo que significaría menor incertidumbre, para desarrollar el hidrograma de diseño final con determinado caso. Del mismo modo con el valor de la verosimilitud obtenido en el cálculo del parámetro  $\theta$  y mostrada en la tabla 4.10 se puede aplicar la prueba del criterio de información de Akaike.

Tabla 4.39 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas

	Gasto Prioridad			Volumen Prioridad		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
K-S	0.08640	0.07333	0.07650	0.06164	0.05334	0.62485
CIA	-28.03711	-27.90840	-28.14937	-33.47087	-30.09010	-21.17512

Es evidente que en los tres criterios el valor de la menor máxima diferencia corresponde a los casos con ajustes marginales Weibull Mixta, y de ellos el menor valor corresponde al caso con criterio de Volumen Prioridad. Esto significa que los valores extrapolados bivariadamente correspondientes al caso Volumen Prioridad Weibull Mixta serían los que se utilizaran para el hidrograma de diseño final.

El criterio de información de Akaike nos dice que la mejor estimación es la más cercana a cero, con base en ello, el cálculo bivariado mediante el caso Gamma Mixta Volumen Prioridad sería aquel que nos arrojarase una mejor estimación, seguido del criterio Gumbel Mixta Gasto Prioridad.

De forma gráfica también se puede apreciar que la estimación bivariada mediante la cópula Gumbel-Hougaard resulta bastante eficiente, la proximidad de datos calculados contra datos medidos es realmente buena como ya se apreció con la prueba de Kolmogórov-Smirnov, a continuación, se muestra la gráfica que compara los valores.

Para el caso de gasto prioridad se aprecia que ambas estimaciones bivariadas mantienen un comportamiento muy parecido, pero la línea que recorre con mayor cercanía a la frecuencia acumulada observada es la Weibull Mixta.

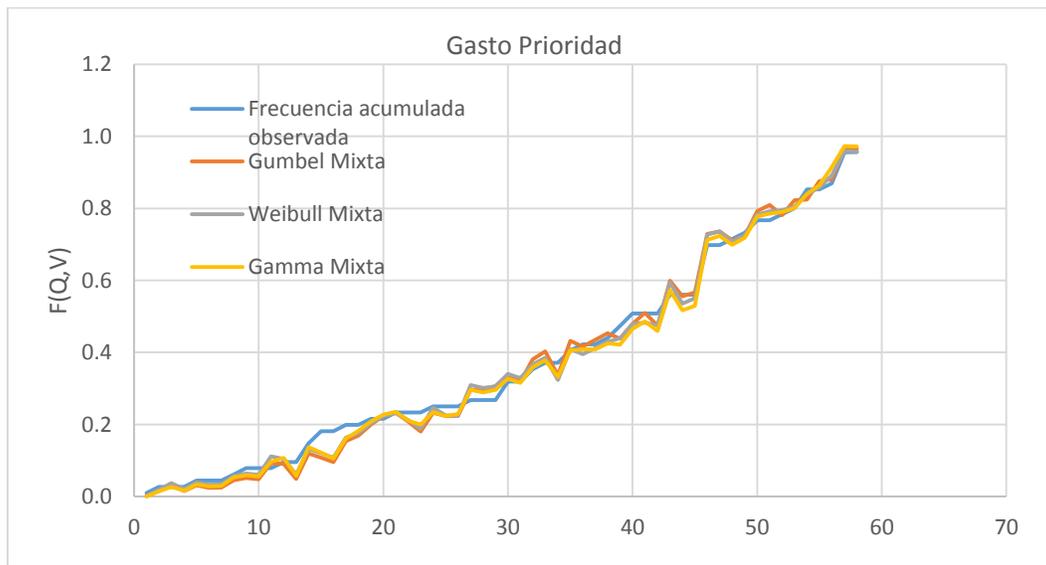


Figura 4.20 Frecuencia Observada contra probabilidad bivariada estimada por los 3 casos, Gasto Prioridad

Y para el caso de volumen prioridad el comportamiento se mantiene, la Weibull Mixta se junta más a la línea de la frecuencia observada; lo cual se considera como un mejor ajuste bivariado.

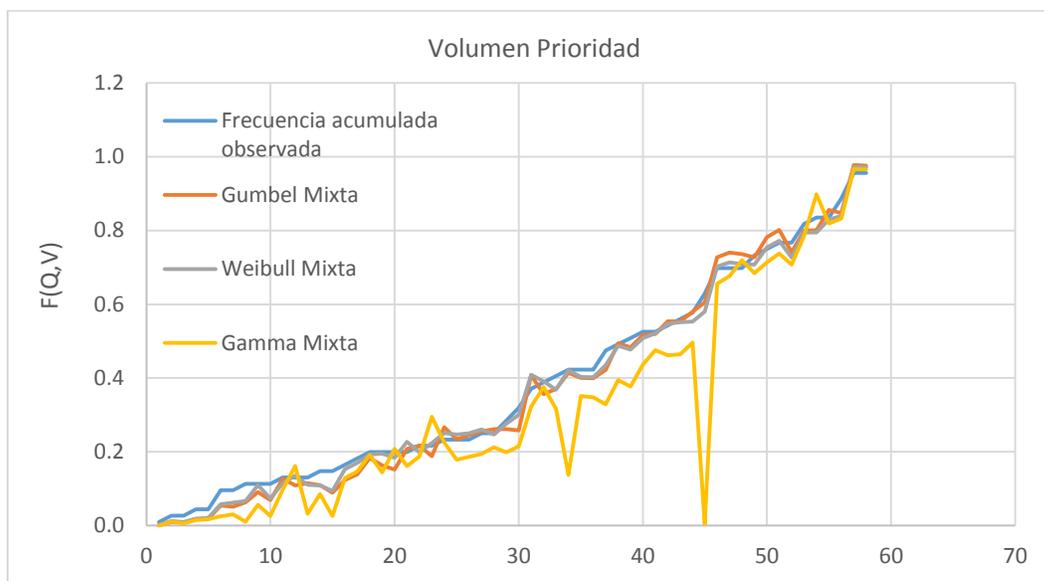


Figura 4.21 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 3 casos, Volumen Prioridad

También es notorio una diferencia en la línea de la Gamma Mixta, es donde se encuentra la máxima diferencia según el valor de K-S de 0.62, bastante grande comparado a los demás casos.

Como resultado de la aplicación bivariada se ha obtenido parejas de valores a los periodos de retorno 100, 1000 y 10,000 para cada ajuste marginal y criterio de selección de datos. Ahora se debe elegir con cual se generarán los hidrogramas a transitar.

Como en la prueba de Kolmogórov-Smirnov el peor valor corresponde a la estimación mediante la función Gamma Mixta Volumen prioridad, se descarta usarla, a pesar de haber ganado en el criterio de Akaike.

De las restantes los casos con ajustes Weibull Mixta es la que arroja mejor estimación, pero no por mucho, y como un objetivo del trabajo es analizar la injerencia de las funciones de distribución en los resultados se ha tomado la decisión de transitar por el vaso de la presa La Angostura hidrogramas a periodo de retorno conjunto de 10,000 años correspondientes a los casos Gumbel Mixta y Weibull Mixta ambos para los dos criterios gasto y volumen

prioridad, para analizar el máximo nivel de agua que se alcanza en el vaso. Es decir, para conocer qué caso arroja las condiciones más desfavorables.

En el estricto caso que se necesite el hidrograma de diseño de 10,000 años con menor incertidumbre, ese sería para la presa La Angostura uno obtenido mediante el caso Weibull Mixta Volumen Prioridad.

#### 4.4.3.2 Duración de 10 días

Para la duración de diez días se decidió trabajar con dos tipos de ajustes marginales para la aplicación de la cópula Gumbel-Hougaard, Gumbel Mixta y Weibull Mixta. En este caso solamente necesitan hidrogramas de diseño a 10,000 años de periodo de retorno, los cuales se crearán con los valores calculados en el apartado anterior, pero se debe seleccionar que caso arroja la mejor estimación.

Se debe calcular para ello la frecuencia acumulada observada para los hidrogramas registrados de 10 días para ambos criterios de selección. Con ella se podrá aplicar la prueba de Kolmogórov-Smirnov.

La frecuencia acumulada observada se muestra en la tabla 4.40.

Tabla 4.40 Frecuencia acumulada observada calculada para los criterios de GP y VP para 10 días de duración

Frecuencia Acumulada Observada, Duración 10 días					
Año	Gasto Prioridad	Volumen Prioridad	Año	Gasto Prioridad	Volumen Prioridad
1942	0.54301	0.54301	1971	0.09566	0.09566
1943	0.06125	0.33655	1972	0.19890	0.16449
1944	0.33655	0.38816	1973	0.71507	0.71507
1945	0.21610	0.25052	1974	0.09566	0.09566
1946	0.11287	0.11287	1975	0.16449	0.16449
1947	0.02684	0.04405	1976	0.16449	0.23331
1948	0.59463	0.64625	1977	0.52581	0.50860
1949	0.95595	0.95595	1978	0.78390	0.85272
1950	0.38816	0.42257	1979	0.78390	0.80110
1951	0.38816	0.37096	1980	0.04405	0.04405
1952	0.45699	0.43978	1981	0.37096	0.40537
1953	0.73228	0.71507	1982	0.68066	0.66345
1954	0.37096	0.38816	1983	0.71507	0.64625
1955	0.11287	0.61184	1984	0.85272	0.80110
1956	0.02684	0.00964	1985	0.57743	0.59463
1957	0.21610	0.18169	1986	0.37096	0.45699
1958	0.62904	0.38816	1994	0.45699	0.52581
1959	0.42257	0.50860	1995	0.95595	0.93875
1960	0.90434	0.88713	1996	0.04405	0.04405

1961	0.09566	0.09566	1997	0.28493	0.26772
1962	0.78390	0.74948	1998	0.21610	0.26772
1963	0.09566	0.14728	1999	0.56022	0.57743
1964	0.42257	0.47419	2000	0.25052	0.30213
1965	0.85272	0.85272	2001	0.19890	0.11287
1966	0.50860	0.56022	2002	0.14728	0.14728
1967	0.95595	0.95595	2003	0.00964	0.00964
1968	0.73228	0.76669	2004	0.25052	0.18169
1969	0.21610	0.23331	2005	0.85272	0.81831
1970	0.23331	0.28493	2006	0.21610	0.26772

Ahora se procede a aplicar la prueba de Kolmogórov-Smirnov utilizando los valores de  $F(Q, V)$  obtenidos con la cópula Gumbel-Hougaard en el cálculo del valor de  $\theta$ .

Tabla 4.41 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Gasto Prioridad, para los 2 ajustes bivariados elegidos

Gasto prioridad											
Año	Frecuencia Acumulada Observada	F(Q,V)		K-S		Año	Frecuencia Acumulada Observada	F(Q,V)		K-S	
		Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta			Gumbel Mixta	Weibull Mixta		
1942	0.54301	0.54285	0.53632	0.00016	0.00669	1971	0.09566	0.06316	0.08673	0.03250	0.00893
1943	0.06125	0.06357	0.08153	0.00232	0.02028	1972	0.19890	0.15985	0.18569	0.03905	0.01321
1944	0.33655	0.24197	0.27245	0.09458	0.06409	1973	0.71507	0.71710	0.70679	0.00203	0.00828
1945	0.21610	0.18091	0.21166	0.03519	0.00445	1974	0.09566	0.05343	0.07498	0.04223	0.02069
1946	0.11287	0.07042	0.09463	0.04245	0.01824	1975	0.16449	0.08402	0.11083	0.08047	0.05366
1947	0.02684	0.01617	0.02100	0.01067	0.00584	1976	0.16449	0.10527	0.13652	0.05921	0.02797
1948	0.59463	0.59509	0.57985	0.00046	0.01478	1977	0.52581	0.54187	0.52945	0.01606	0.00364
1949	0.95595	0.96686	0.96323	0.01091	0.00728	1978	0.78390	0.76689	0.74839	0.01701	0.03550
1950	0.38816	0.37472	0.37723	0.01344	0.01094	1979	0.78390	0.78913	0.79163	0.00523	0.00774
1951	0.38816	0.39580	0.39465	0.00763	0.00649	1980	0.04405	0.01838	0.02722	0.02567	0.01683
1952	0.45699	0.42185	0.42091	0.03513	0.03607	1981	0.37096	0.27978	0.30528	0.09117	0.06568
1953	0.73228	0.71600	0.69489	0.01628	0.03739	1982	0.68066	0.67600	0.65609	0.00466	0.02457
1954	0.37096	0.35041	0.36031	0.02055	0.01065	1983	0.71507	0.69019	0.68802	0.02489	0.02705
1955	0.11287	0.08849	0.11044	0.02438	0.00243	1984	0.85272	0.83090	0.83237	0.02182	0.02035
1956	0.02684	0.01175	0.01612	0.01510	0.01072	1985	0.57743	0.57090	0.57102	0.00653	0.00641
1957	0.21610	0.18090	0.20419	0.03520	0.01191	1986	0.37096	0.30418	0.33685	0.06678	0.03410
1958	0.62904	0.62762	0.60757	0.00142	0.02147	1994	0.45699	0.43980	0.45733	0.01718	0.00035
1959	0.42257	0.36665	0.39731	0.05592	0.02526	1995	0.95595	0.94503	0.94568	0.01092	0.01027
1960	0.90434	0.89158	0.89509	0.01276	0.00925	1996	0.04405	0.02230	0.03285	0.02175	0.01120
1961	0.09566	0.05446	0.07630	0.04120	0.01936	1997	0.28493	0.28140	0.29564	0.00353	0.01071
1962	0.78390	0.76615	0.76182	0.01775	0.02207	1998	0.21610	0.15796	0.19106	0.05814	0.02504
1963	0.09566	0.07370	0.09861	0.02197	0.00294	1999	0.56022	0.57483	0.56789	0.01461	0.00767
1964	0.42257	0.40815	0.42392	0.01442	0.00134	2000	0.25052	0.20125	0.23121	0.04927	0.01930
1965	0.85272	0.85151	0.85349	0.00121	0.00077	2001	0.19890	0.12555	0.15430	0.07334	0.04460
1966	0.50860	0.45734	0.47384	0.05126	0.03476	2002	0.14728	0.07191	0.09705	0.07538	0.05023
1967	0.95595	0.96456	0.96093	0.00861	0.00498	2003	0.00964	0.00346	0.00178	0.00618	0.00786
1968	0.73228	0.72579	0.72930	0.00649	0.00298	2004	0.25052	0.20454	0.22645	0.04597	0.02407
1969	0.21610	0.18794	0.21432	0.02816	0.00178	2005	0.85272	0.84057	0.83427	0.01215	0.01845
1970	0.23331	0.21211	0.24060	0.02120	0.00729	2006	0.21610	0.14549	0.17931	0.07062	0.03679

La máxima diferencia para la prueba de K-S es de 0.0945 para Gumbel Mixta y es de 0.0656 para Weibull Mixta.

Tabla 4.42 Cálculo de la prueba de K-S para el criterio de Volumen Prioridad, para los 2 ajustes bivariados elegidos

Volumen prioridad											
Año	Frecuencia Acumulada Observada	F(Q,V)		K-S		Año	Frecuencia Acumulada Observada	F(Q,V)		K-S	
		Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta			Gumbel Mixta	Weibull Mixta		
1942	0.54301	0.55941	0.55153	0.01639	0.00852	1971	0.09566	0.05994	0.07301	0.03572	0.02265
1943	0.33655	0.31435	0.33834	0.02219	0.00179	1972	0.16449	0.12955	0.15009	0.03494	0.01439
1944	0.38816	0.32818	0.34138	0.05998	0.04679	1973	0.71507	0.71046	0.71054	0.00461	0.00453
1945	0.25052	0.24006	0.25325	0.01046	0.00274	1974	0.09566	0.05565	0.06751	0.04001	0.02816
1946	0.11287	0.06860	0.08079	0.04427	0.03208	1975	0.16449	0.12309	0.14149	0.04139	0.02299
1947	0.04405	0.01866	0.02370	0.02539	0.02035	1976	0.23331	0.16673	0.19028	0.06658	0.04303
1948	0.64625	0.62065	0.61567	0.02560	0.03058	1977	0.50860	0.53286	0.52359	0.02426	0.01499
1949	0.95595	0.98239	0.97384	0.02644	0.01788	1978	0.85272	0.83399	0.82414	0.01872	0.02858
1950	0.42257	0.35698	0.36486	0.06560	0.05771	1979	0.80110	0.80269	0.79444	0.00159	0.00666
1951	0.37096	0.35834	0.35182	0.01262	0.01913	1980	0.04405	0.01802	0.02345	0.02603	0.02060
1952	0.43978	0.42023	0.41145	0.01955	0.02833	1981	0.40537	0.35674	0.36392	0.04863	0.04144
1953	0.71507	0.69290	0.69006	0.02217	0.02501	1982	0.66345	0.65534	0.65089	0.00812	0.01257
1954	0.38816	0.37168	0.36700	0.01648	0.02116	1983	0.64625	0.66524	0.65544	0.01899	0.00919
1955	0.61184	0.59459	0.59085	0.01724	0.02099	1984	0.80110	0.80565	0.79725	0.00455	0.00385
1956	0.00964	0.00617	0.00662	0.00347	0.00302	1985	0.59463	0.61056	0.60496	0.01593	0.01033
1957	0.18169	0.13777	0.15504	0.04393	0.02666	1986	0.45699	0.41979	0.43692	0.03719	0.02006
1958	0.38816	0.35410	0.37786	0.03406	0.01030	1994	0.52581	0.53272	0.53391	0.00691	0.00810
1959	0.50860	0.48796	0.49997	0.02064	0.00863	1995	0.93875	0.93955	0.93260	0.00080	0.00615
1960	0.88713	0.88351	0.87891	0.00362	0.00822	1996	0.04405	0.02341	0.03046	0.02063	0.01359
1961	0.09566	0.05309	0.06544	0.04257	0.03023	1997	0.26772	0.26500	0.26542	0.00273	0.00230
1962	0.74948	0.76275	0.76321	0.01326	0.01373	1998	0.26772	0.22817	0.24667	0.03955	0.02105
1963	0.14728	0.11602	0.13596	0.03126	0.01132	1999	0.57743	0.59175	0.58521	0.01432	0.00778
1964	0.47419	0.48962	0.48990	0.01543	0.01571	2000	0.30213	0.26418	0.27600	0.03796	0.02614
1965	0.85272	0.85225	0.84721	0.00047	0.00551	2001	0.11287	0.06772	0.08182	0.04515	0.03105
1966	0.56022	0.54839	0.54842	0.01183	0.01180	2002	0.14728	0.10021	0.11729	0.04707	0.02999
1967	0.95595	0.98252	0.97186	0.02657	0.01591	2003	0.00964	0.00427	0.00441	0.00537	0.00522
1968	0.76669	0.74424	0.73828	0.02245	0.02841	2004	0.18169	0.16460	0.17847	0.01710	0.00322
1969	0.23331	0.20786	0.21634	0.02545	0.01697	2005	0.81831	0.82110	0.82406	0.00279	0.00576
1970	0.28493	0.26964	0.27943	0.01529	0.00549	2006	0.26772	0.21860	0.23996	0.04912	0.02776

Se encuentra que la máxima diferencia según la prueba de Kolmogórov-Smirnov es de 0.0665844 para Gumbel Mixta y de 0.0577 para Weibull Mixta.

Con los valores de la máxima verosimilitud obtenidos en el cálculo de  $\theta$ , mostrados en la tabla 4.11, se aplica el criterio de información de Akaike ecuación 3.34. Los resultados de aplicar las dos pruebas se muestran en la tabla 4.43.

Tabla 4.43 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas, duración 10 días

	Gasto Prioridad		Volumen Prioridad	
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta
K-S	0.0946	0.0657	0.0666	0.0577
CIA	-53.5097	-53.6032	-65.6204	-66.4970

Tras analizar los resultados de las pruebas de bondad de ajuste bivariado para la duración de 10 días; es más que evidente que la estimación bivariada mediante la función Weibull Mixta resulta para ambos criterios como la mejor opción para crear los hidrogramas de diseño. Por lo tanto, se utilizarán los valores extrapolados para esta función, mostrados en la tabla 4.35 para el siguiente paso de la metodología, que es darle forma al hidrograma.

De forma gráfica la comparación de la frecuencia acumulada observada contra las probabilidades bivariadas estimadas con la cópula Gumbel-Hougaard se pueden apreciar en las figuras 4.22 y 4.23.

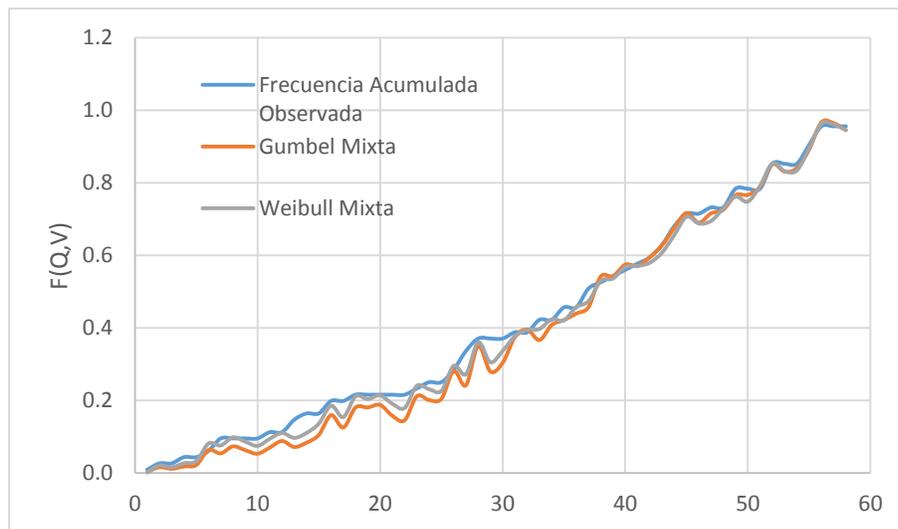


Figura 4.22 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 2 casos, Gasto Prioridad

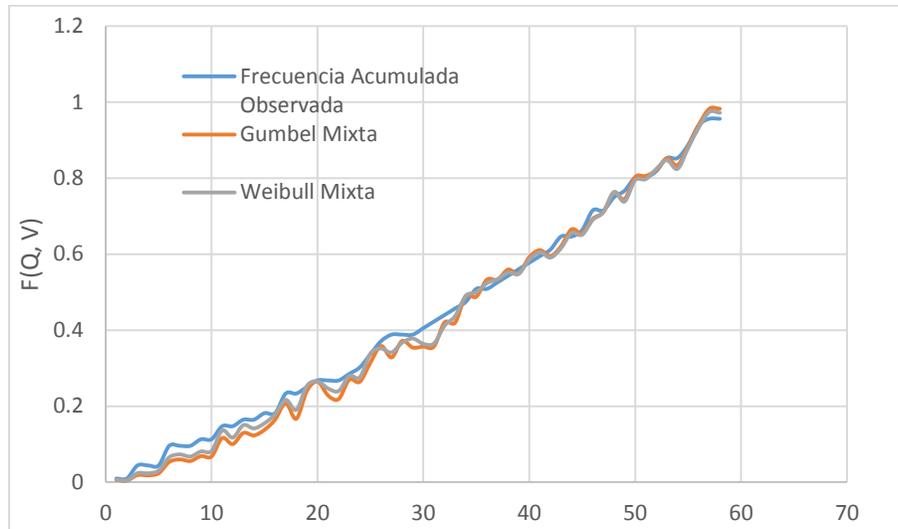


Figura 4.23 Frecuencia Observada contra la probabilidad bivariada estimada por los 2 casos, Volumen Prioridad

Se observa que la línea correspondiente a la estimación mediante la función Weibull Mixta en ambas figuras se junta más en determinadas zonas a la frecuencia observada, esto nos indica que efectivamente, el ajuste bivariado mediante la función Weibull Mixta es la que mejor se apega al comportamiento de los datos en ambos criterios.

## Capítulo 5

# Forma del hidrograma

En la estimación hidrológica de avenidas, la forma que tendrá el hidrograma resultante es de suma importancia durante un análisis de funcionamiento de vaso, de ella dependerá mucho la variación en el tiempo de los niveles del vaso. Existen diversas formas de asignar una forma a un hidrograma de diseño conocidas sus características principales, gasto, volumen y duración; muchas de ellas son de carácter sintético, es decir, son formas propuestas por diversos autores que cumplen de forma numérica con todas las características antes mencionadas, pero que no necesariamente representan el comportamiento de la naturaleza. Algunas de estas formas son conocidas como de bloques alternos, triparamétrico hermitiano, función beta o función gamma. El uso de este tipo de formas es muy común.

Para este trabajo en concordancia a todo el desarrollo se ha decidido no utilizar una forma sintética, si no que utilizar formas que representen lo que sucede realmente en el escurrimiento. Para ello es necesario analizar diversos Hidrogramas Registrados cuya obtención se explica en el capítulo 2, se recomienda revisar aquellos hidrogramas en donde el gasto sea máximo, y en donde el volumen sea máximo, puesto que hay uno por cada año registrado por cada criterio (gasto prioridad, volumen prioridad). De todos los hidrogramas registrados se elige uno que represente bien el escurrimiento del río, la forma de este hidrograma registrado será la forma que tendrá el hidrograma de diseño. Como el hidrograma registrado ya fue identificado considerando la duración que tendría el hidrograma de diseño, esta variable ya está resuelta.

El problema de seguir esta metodología resulta en que en muchas ocasiones el gasto y los volúmenes estimados no cumplen directamente aplicando la forma seleccionada. Para poder hacerlo se ha propuesto un sistema de ecuaciones que mantiene la forma principal del hidrograma, pero ajusta un poco para poder mantener el gasto de pico y el volumen solicitados. Su obtención se muestra a continuación.

Se tiene un hidrograma registrado representado por barras como se muestra a continuación.

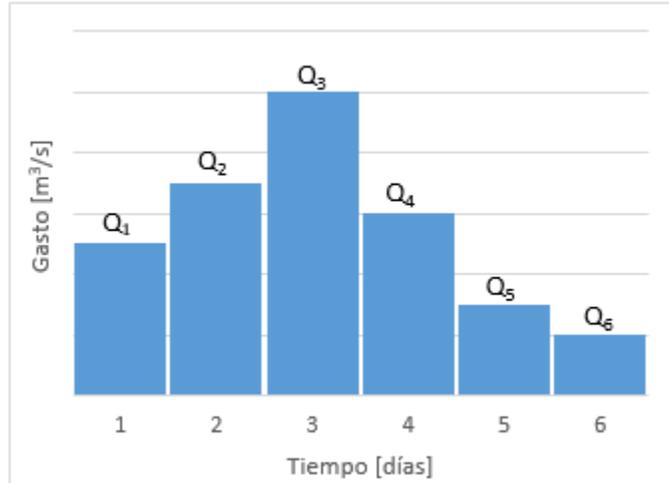


Figura 5.1 Hidrograma supuesto expresado en barras

Donde el gasto máximo del hidrograma registrado se presenta en la barra #3

$$Q_p = Q_3$$

Y el volumen de escurrimiento representado por cada barra será:

$$v_i = Q_i \times \Delta t \tag{5.1}$$

El delta t representa el tiempo en el cual el gasto se presenta, en este caso al ser gastos medios diarios, el tiempo es de 1 día o 86400 segundos.

Para poder mantener la forma del hidrograma se calcula un factor el cual mantiene la proporción de cada barra con respecto a la barra pico.

$$f_i = \frac{Q_i}{Q_p} \tag{5.2}$$

Entonces para cada barra que forma el hidrograma se tendrá un factor de forma.

$$f_1 = \frac{Q_1}{Q_p} \quad f_2 = \frac{Q_2}{Q_p} \quad f_3 = \frac{Q_3}{Q_p} \quad f_4 = \frac{Q_4}{Q_p} \quad f_5 = \frac{Q_5}{Q_p} \quad f_6 = \frac{Q_6}{Q_p}$$

Se busca hacer que cada barra crezca a un volumen extrapolado a determinado periodo de retorno, para ello haremos uso de los factores a y b, que determinaran el crecimiento de cada barra. Se aplicarán en la fórmula 5.3.

$$fia + fibv_i = V_i^T \tag{5.3}$$

Cuya obtención se justifica de forma gráfica para cada barra:

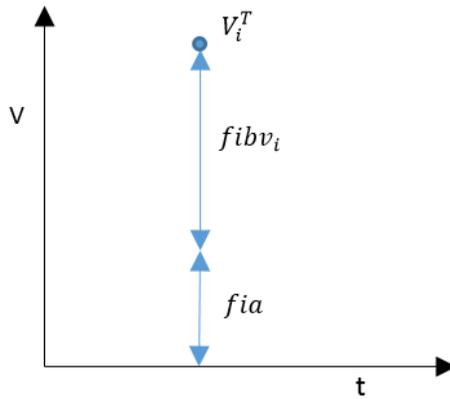


Figura 5.2 Expresión gráfica de la ecuación ##

Y en todo el hidrograma:

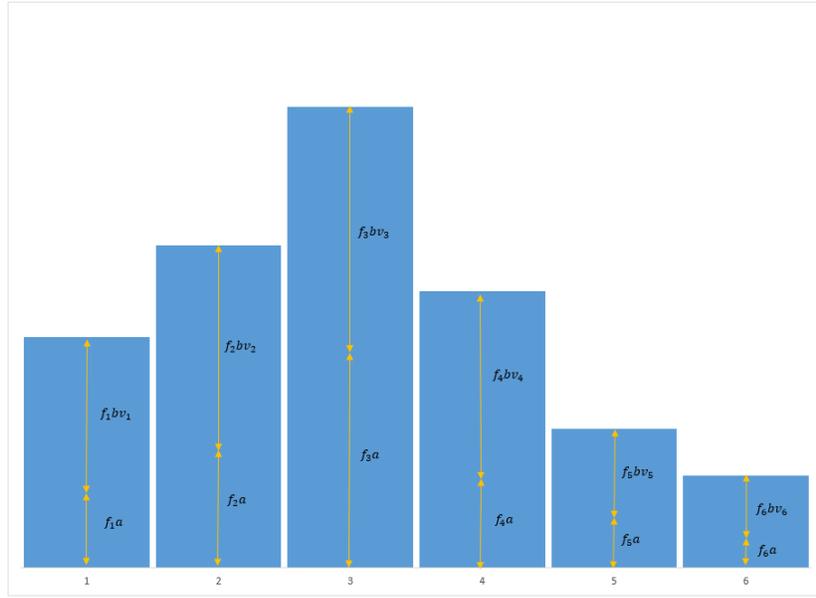


Figura 5.3 Formación del hidrograma siendo afectado por los factores a y b

Donde  $V_i^T$  corresponde al volumen que tendrá cada barra calculada del hidrograma final.

Entonces se tiene que:

$$f_1a + f_1bv_1 = V_1^T$$

$$f_2a + f_2bv_2 = V_2^T$$

$$f_3a + f_3bv_3 = V_3^T$$

$$f_4a + f_4bv_4 = V_4^T$$

$$f_5a + f_5bv_5 = V_5^T$$

$$f_6a + f_6bv_6 = V_6^T$$

La suma de todos los  $V_i^T$  corresponderá al volumen extrapolado que se busca tenga el hidrograma final. Entonces al sumar barra por barra resulta en:

$$\sum f_i a + \sum f_i b v_i = \sum V_i^T \tag{5.4}$$

$$a \sum f_i + b \sum f_i v_i = V_{total}^T \tag{5.5}$$

Se tienen 2 incógnitas a y b y solo una ecuación, se necesita otra ecuación, para ello se toma la otra variable que necesitamos tenga el hidrograma final, el Gasto extrapolado, la barra que representa el pico del hidrograma debe cumplir con este gasto, por lo tanto.

$$f_3 = \frac{Q_3}{Q_p} = f_p = \frac{Q_p}{Q_p} = 1 \quad (5.6)$$

Y

$$V_3^T = V_p^T \quad (5.7)$$

$$\frac{V_p^T}{t} = Q_p \quad (5.8)$$

Sustituyendo

$$f_3 a + f_3 b v_3 = V_3^T \quad (5.9)$$

$$f_p a + f_p b v_p = V_p^T \quad (5.10)$$

$$a + b v_p = V_p^T \quad (5.11)$$

Ya se cuenta con 2 ecuaciones para obtener las incógnitas a y b

$$a \sum f_i + b \sum f_i v_i = V_{total}^T \quad (5.12)$$

$$a + b v_p = V_p^T \quad (5.13)$$

**Sí  $a=0$  se cumple con el gasto de pico, pero el volumen del hidrograma no se cumple en la mayoría de las ocasiones.**

De nueva cuenta considerando que

$$v_i = Q_i \times \Delta t \quad (5.14)$$

$$a \sum f_i + b \sum f_i Q_i \Delta t = V_{total}^T \quad (5.15)$$

$$a + b Q_p \Delta t = Q_p \Delta t \quad (5.16)$$

Si el  $\Delta t$  es igual 1 día

$$a \sum f_i + b \sum f_i Q_i = V \quad (5.17)$$

$$a + b Q_p = Q \quad (5.18)$$

Considerando que el volumen  $V$  estará en unidades de  $m^3/s$  día

Donde:

$a$  y  $b$  son las incógnitas a resolver del sistema de ecuaciones

$f_i$  Es el factor de forma

$Q_i$  son los gastos que forman el hidrograma registrado

$Q_p$  es el gasto máximo de los  $Q_i$

$Q$  Es el gasto extrapolado a determinado  $T_r$  que se busca sea el gasto de pico del hidrograma.

$V$  Es el volumen extrapolado a determinado  $T_r$  que se busca sea el que forme el hidrograma

## 5.1 Aplicación de forma al caso de la presa La Angostura

Para el caso de estudio de la Presa Gral. Lázaro Cárdenas (La Angostura) se eligieron duraciones de 10 y 35 días como ya se ha explicado. Y se calcularon además el gasto y el volumen a un periodo de retorno de 10,000 años de forma bivariada. Ahora el paso siguiente en la metodología es crear el hidrograma a transitar por el vaso de la presa con estas características conocidas. Como ya se explicó se deberá elegir primero la forma que se desea asignar, esta se elige tras analizar los hidrogramas registrados anuales.

### 5.1.1 Duración de 35 días

Para la duración de 35 días se analizaron los 5 hidrogramas registrados con gasto más grande (gasto prioridad) y los 5 con volumen más grande (volumen prioridad), los cuales se muestran en la tabla 5.1 y 5.2.

Tabla 5.1 máximas 5 avenidas registradas para el criterio de Gasto Prioridad, duración 35 días

Gasto Prioridad		
Duración 35 días, 5 avenidas máximas		
Año	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
<b>1995</b>	1764.687	4090.196
1949	1312.088	7203.824
1967	1284.023	7374.602
1960	1106.095	3544.957
<b>2005</b>	1072.12	3438.051

Tabla 5.2 máximas 5 avenidas registradas para el criterio de Volumen Prioridad, duración 35 días

Volumen Prioridad		
Duración 35 días, 5 avenidas máximas		
Año	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
<b>1967</b>	1284.023	7374.602
<b>1949</b>	1312.088	7203.824
1984	748.648	6546.401
1979	665.607	6103.747
1968	582.353	4715.42

Se identifica que los años de 1949 y 1967 se presentan en la selección de ambos criterios, como se había definido anteriormente, esto significa que, en estos dos años, la avenida máxima generó el gasto y el volumen más grandes. A continuación, se muestran estos hidrogramas registrados.

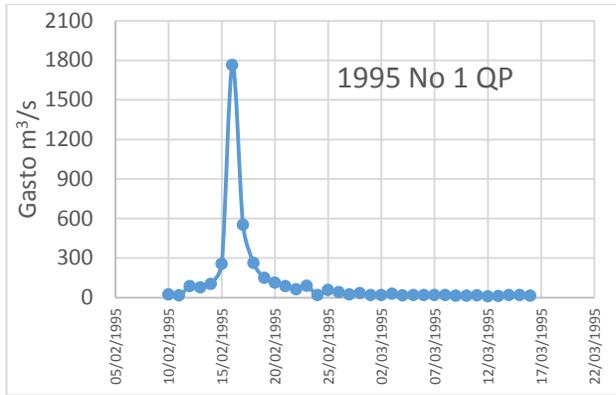


Figura 5.4 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1995

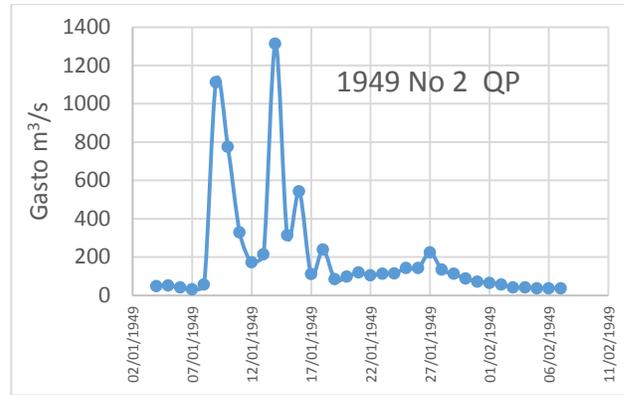


Figura 5.5 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1949

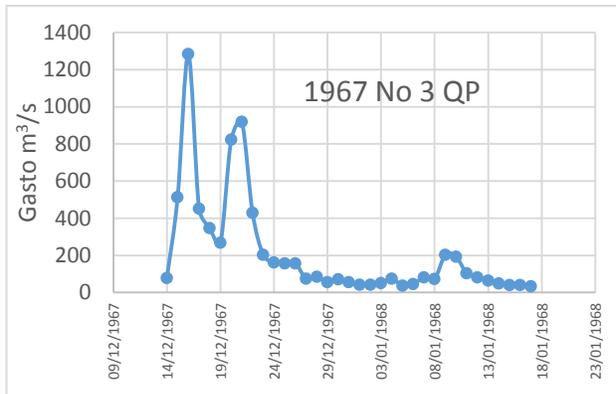


Figura 5.6 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1967

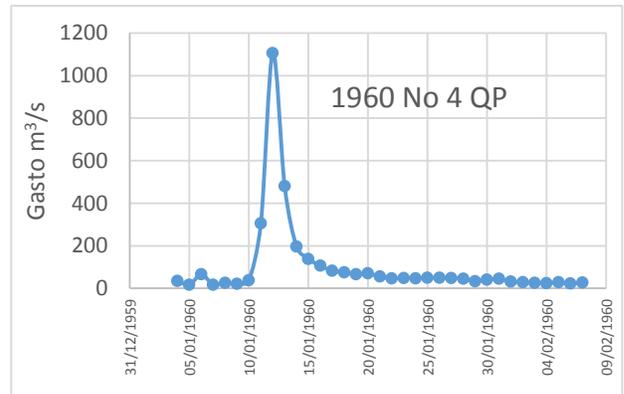


Figura 5.7 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 1960

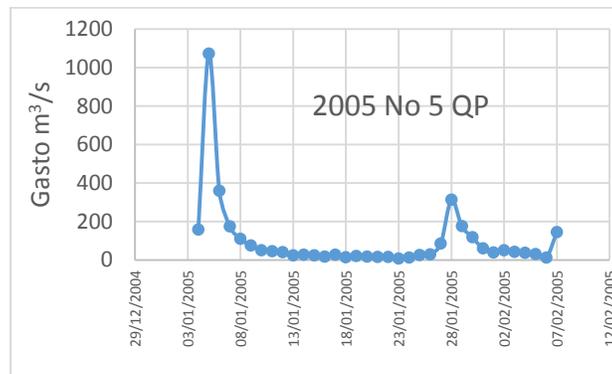


Figura 5.8 Hidrograma registrado QP 35 días de duración, año 2005

Y para el criterio de Volumen Prioridad los cinco hidrogramas siguientes son los elegidos:

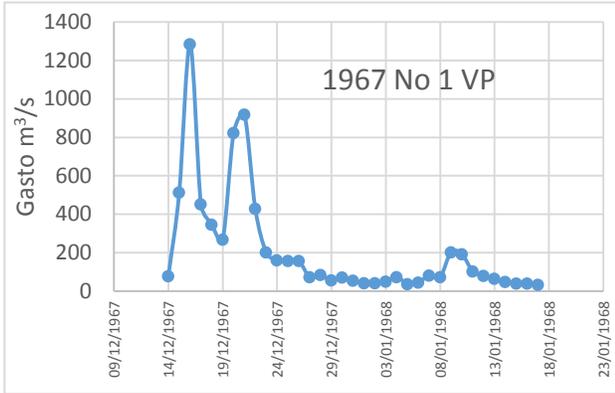


Figura 5.9 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1967

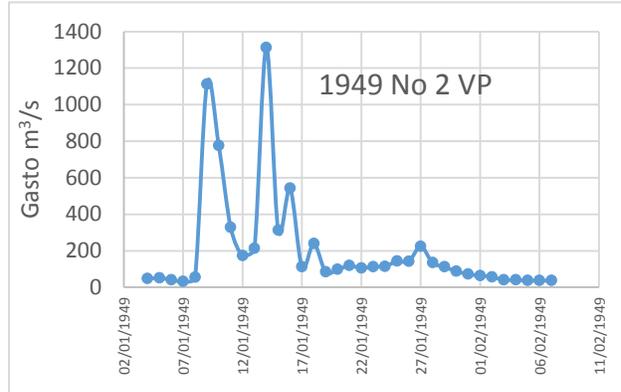


Figura 5.10 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1949

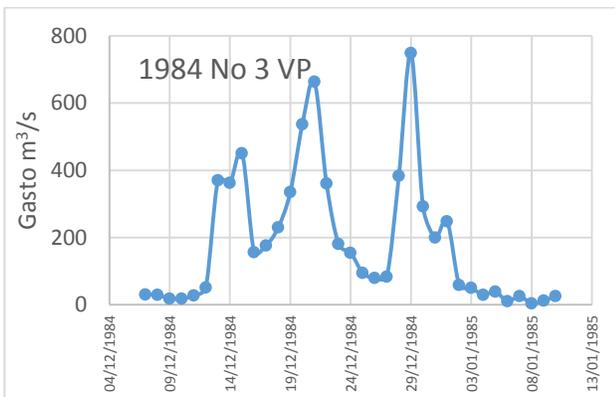


Figura 5.11 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1984

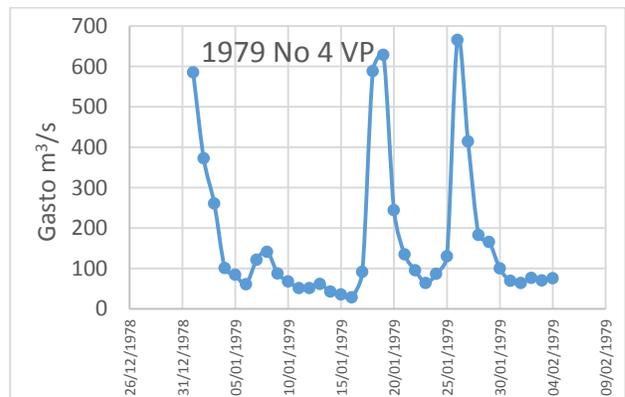


Figura 5.12 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1979

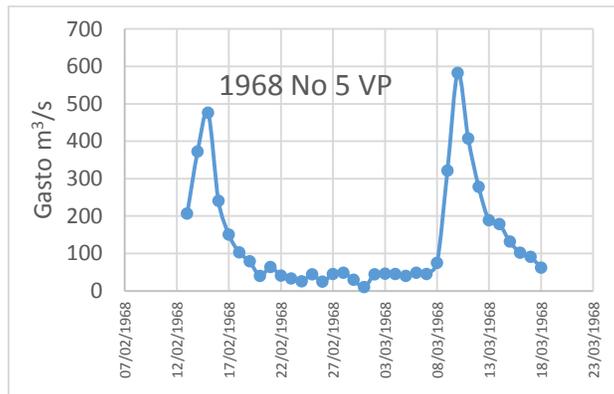


Figura 5.13 Hidrograma registrado VP 35 días de duración, año 1968

Analizando el comportamiento del escurrimiento mostrado en estos hidrogramas es posible notar que no difieren mucho, dos picos en el hidrograma es lo más común en el criterio de volumen prioridad, y un solo pico en el de gasto prioridad.

Con esta observación se selecciona la forma del hidrograma, como esta forma influirá directamente en el tránsito de avenidas que se analizará en el capítulo siguiente se seleccionará más de una forma. Las cuáles serán los años de 1995 y 2005 elegidas con el criterio de gasto prioridad y las de 1949 y 1967 por el de volumen prioridad.

Se ejemplificará la asignación de forma, para la elegida del año de 1949, que además que se presenta en ambos criterios de selección de datos.

Conocida la forma elegida, de los registros se toman los valores de gastos medios diarios que forman este hidrograma registrado, los cuales se muestran en la tabla 5.3.

Tabla 5.3 Gastos medios diarios que forman el hidrograma registrado para el año de 1949 por ambos criterios

1949			
día	Qmd [m³/s]	día	Qmd [m³/s]
04/01/1949	47.386	22/01/1949	104.48
05/01/1949	51.073	23/01/1949	112.992
06/01/1949	41.115	24/01/1949	114.422
07/01/1949	31.432	25/01/1949	142.814
08/01/1949	55.545	26/01/1949	141.936
09/01/1949	1112.285	27/01/1949	223.389
10/01/1949	775.733	28/01/1949	134.56
11/01/1949	327.741	29/01/1949	112.247
12/01/1949	172.612	30/01/1949	87.201
13/01/1949	213.899	31/01/1949	71.762
14/01/1949	1312.088	01/02/1949	64.171
15/01/1949	312.989	02/02/1949	56.598
16/01/1949	541.99	03/02/1949	40.506
17/01/1949	111.424	04/02/1949	40.647
18/01/1949	238.429	05/02/1949	36.736
19/01/1949	83.878	06/02/1949	36.441
20/01/1949	97.759	07/02/1949	37.014
21/01/1949	118.53		

Se identifican además los valores de gasto y volumen extrapolados a 10,000 años de periodo de retorno conjunto seleccionados para formar el hidrograma de diseño, para el ejemplo de cálculo se seleccionan los valores ajustados bivariadamente con la función Gumbel Mixta por el criterio de Gasto Prioridad.

Tabla 5.4 Pareja Gasto y Volumen GM QP extrapolados a un periodo de retorno conjunto de 10,000 años

	Gasto Prioridad	
	Gumbel Mixta	
	Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s día]
Tr=10000	2900	10856.2809

Con esta información conocida se puede aplicar el sistema de ecuaciones para crear un hidrograma con las características requeridas, para ello se debe obtener los valores para el factor  $f_i$ . Para ello se divide cada valor de Qmd de la tabla 5.3 entre el Qmd máximo, que en este caso es de 1312.088 m³/s, los valores de  $f_i$  se muestran en la tabla 5.5.

Tabla 5.5 Cálculo del factor  $f_i$  para el hidrograma registrado seleccionado

1949					
día	Qmd [m³/s]	$f_i$	día	Qmd [m³/s]	$f_i$
04/01/1949	47.386	0.036114956	22/01/1949	104.48	0.07962881
05/01/1949	51.073	0.038924981	23/01/1949	112.992	0.08611618
06/01/1949	41.115	0.031335551	24/01/1949	114.422	0.08720604
07/01/1949	31.432	0.02395571	25/01/1949	142.814	0.10884483
08/01/1949	55.545	0.042333289	26/01/1949	141.936	0.10817567
09/01/1949	1112.285	0.847721342	27/01/1949	223.389	0.17025459
10/01/1949	775.733	0.591220254	28/01/1949	134.56	0.1025541
11/01/1949	327.741	0.249785838	29/01/1949	112.247	0.08554838
12/01/1949	172.612	0.131555201	30/01/1949	87.201	0.06645972
13/01/1949	213.899	0.16302184	31/01/1949	71.762	0.05469298
14/01/1949	1312.088	1	01/02/1949	64.171	0.04890754
15/01/1949	312.989	0.238542689	02/02/1949	56.598	0.04313583
16/01/1949	541.99	0.413074428	03/02/1949	40.506	0.0308714
17/01/1949	111.424	0.084921133	04/02/1949	40.647	0.03097887
18/01/1949	238.429	0.181717232	05/02/1949	36.736	0.02799812
19/01/1949	83.878	0.063927115	06/02/1949	36.441	0.02777329
20/01/1949	97.759	0.074506436	07/02/1949	37.014	0.02821
21/01/1949	118.53	0.090336929			

Por ejemplo, para calcular el  $f_i$  correspondiente al 4 de enero de 1949, será:

$$f_i = \frac{Q_i}{Q_{\text{máx}}} = \frac{47.386}{1312.088} = 0.03611$$

Posteriormente se multiplica el valor de  $f_i$  por los valores de  $Q_{md}$  del hidrograma registrado. Para el mismo caso de ejemplo se calcula el  $f_i Q_i$  y todos los valores calculados se muestran en la tabla 5.6.

$$f_i Q_i = \frac{Q_i}{Q_{m\acute{a}x}} Q_i = 0.03611 * 47.386 = 1.7113$$

Tabla 5.6 Cálculo de  $f_i * Q_i$  para el hidrograma registrado seleccionado

1949							
día	Qmd [m³/s]	f <sub>i</sub>	f <sub>i</sub> *Q <sub>i</sub>	día	Qmd [m³/s]	f <sub>i</sub>	f <sub>i</sub> *Q <sub>i</sub>
04/01/1949	47.386	0.036114956	1.711343291	22/01/1949	104.48	0.07962881	8.31961759
05/01/1949	51.073	0.038924981	1.988015536	23/01/1949	112.992	0.08611618	9.73043886
06/01/1949	41.115	0.031335551	1.288361166	24/01/1949	114.422	0.08720604	9.97828963
07/01/1949	31.432	0.02395571	0.752975886	25/01/1949	142.814	0.10884483	15.5445661
08/01/1949	55.545	0.042333289	2.351402516	26/01/1949	141.936	0.10817567	15.3540221
09/01/1949	1112.285	0.847721342	942.9077327	27/01/1949	223.389	0.17025459	38.0330018
10/01/1949	775.733	0.591220254	458.6290609	28/01/1949	134.56	0.1025541	13.7996793
11/01/1949	327.741	0.249785838	81.86506018	29/01/1949	112.247	0.08554838	9.60254877
12/01/1949	172.612	0.131555201	22.70800628	30/01/1949	87.201	0.06645972	5.79535397
13/01/1949	213.899	0.16302184	34.87020855	31/01/1949	71.762	0.05469298	3.92487748
14/01/1949	1312.088	1	1312.088	01/02/1949	64.171	0.04890754	3.13844593
15/01/1949	312.989	0.238542689	74.66123775	02/02/1949	56.598	0.04313583	2.44140149
16/01/1949	541.99	0.413074428	223.8822092	03/02/1949	40.506	0.0308714	1.25047713
17/01/1949	111.424	0.084921133	9.462252361	04/02/1949	40.647	0.03097887	1.25919802
18/01/1949	238.429	0.181717232	43.326658	05/02/1949	36.736	0.02799812	1.02853901
19/01/1949	83.878	0.063927115	5.362078522	06/02/1949	36.441	0.02777329	1.01208645
20/01/1949	97.759	0.074506436	7.283674632	07/02/1949	37.014	0.02821	1.04416487
21/01/1949	118.53	0.090336929	10.70763615				

Ahora son necesarias la suma de los 35  $f_i$  y  $f_i Q_i$

$$\sum f_i = 5.49$$

$$\sum f_i Q_i = 3377$$

Con esto se puede resolver ahora el sistema de ecuaciones

$$a \sum f_i + b \sum f_i Q_i = V$$

$$a + b Q_{m\acute{a}x} = Q$$

Sustituyendo en 5.17 y 5.18

$$(5.49)a + (3377)b = 10856.2809$$

$$a + (1312.088)b = 2900$$

Resolviendo con el método de Cramer

$$A = \begin{bmatrix} 5.49 & 3377 \\ 1 & 1312.088 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3826.7$$

$$M = \begin{bmatrix} 10856.2809 & 3377 \\ 2900 & 1312.088 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 5.49 & 10856.2809 \\ 1 & 2900 \end{bmatrix}$$

$$|M| = 4450798 \quad |N| = 5065.7$$

Se encuentran a y b

$$a = \frac{|M|}{|A|} = \frac{4450798}{3826.7} = 1163.1$$

$$b = \frac{|N|}{|A|} = \frac{5065.7}{3826.7} = 1.3238$$

Ahora conocidos a y b, se sustituyen en la ec. 5.3 elemento por elemento del hidrograma registrado para obtener el gasto para cada día de los 35 con los cuales se forma el hidrograma de diseño final.

$$fi(a + bQi) = Q$$

Ejemplificando

$$0.036(1163.1 + 1.3238(47.386)) = 44.27 \text{ m}^3/\text{s}$$

Tabla 5.7 Cálculo del hidrograma de diseño final

1949					
Qmd [m³/s]	fi	Q	Qmd [m³/s]	fi	Q
47.386	0.036114956	44.27016853	104.48	0.079628805	103.628332
51.073	0.038924981	47.90471673	112.992	0.086116175	113.041305
41.115	0.031335551	38.15138378	114.422	0.087206041	114.637011
31.432	0.02395571	28.85927729	142.814	0.108844834	147.17327
55.545	0.042333289	52.34990959	141.936	0.108175671	146.142739
1112.285	0.847721342	2234.17363	223.389	0.170254587	248.367714
775.733	0.591220254	1294.762841	134.56	0.102554097	137.546768
327.741	0.249785838	398.8932452	112.247	0.085548378	112.211611
172.612	0.131555201	183.0701533	87.201	0.066459719	84.9700089
213.899	0.16302184	235.7685791	71.762	0.054692978	68.808201
1312.088	1	2900	64.171	0.048907543	61.0381917
312.989	0.238542689	376.2802425	56.598	0.043135826	53.4024671
541.99	0.413074428	776.8110682	40.506	0.030871405	37.5613932
111.424	0.084921133	111.2963511	40.647	0.030978867	37.6979254
238.429	0.181717232	268.7073702	36.736	0.027998122	33.9257267
83.878	0.063927115	81.4508157	36.441	0.02777329	33.642448
97.759	0.074506436	96.29922507	37.014	0.028209998	34.1928415
118.53	0.090336929	119.2439901			

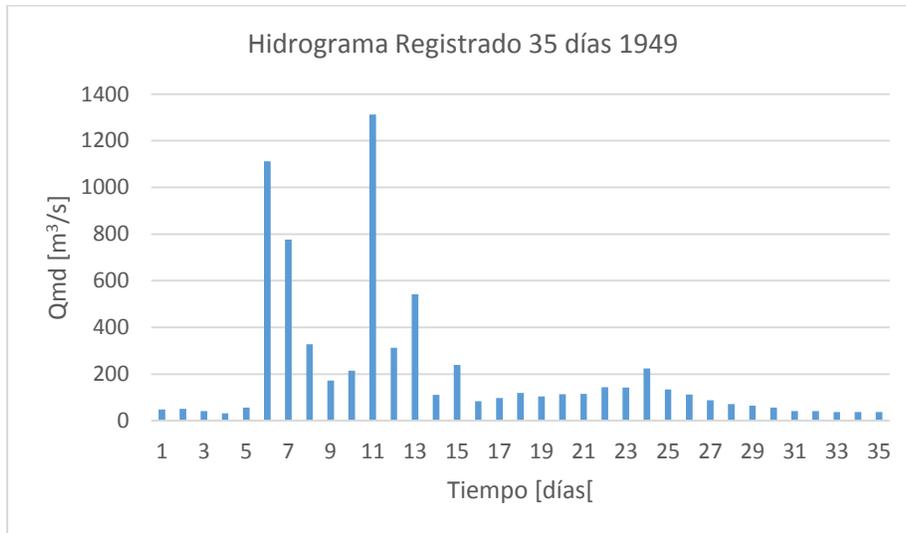


Figura 5.14 Hidrograma registrado año 1949

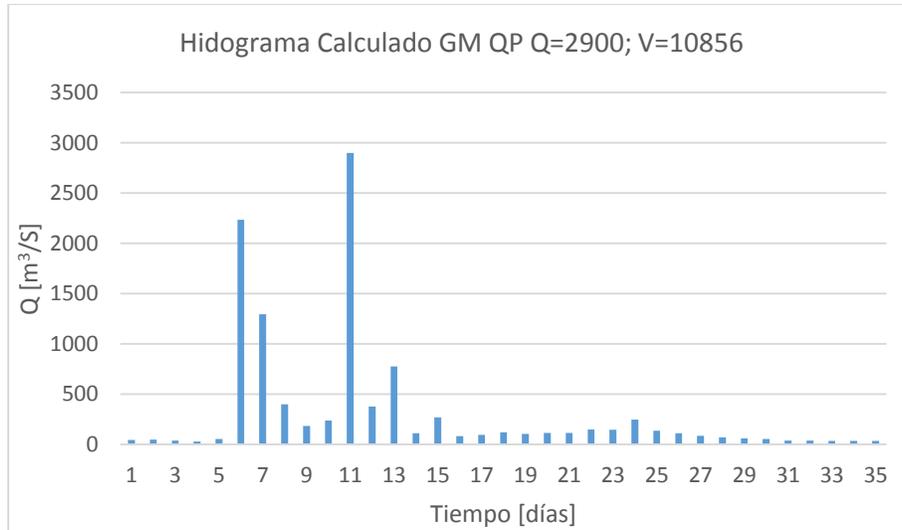


Figura 5.15 Hidrograma calculado para la pareja Q-V obtenidos con el método bivariado para el caso GM-QP con la forma del año 1949

Como se puede apreciar en las figuras 5.14 y 5.15 el hidrograma calculado mantiene la forma del hidrograma registrado, claramente la proporción no es idéntica, es debido a que la función busca asemejar la forma y además cumplir con el volumen y el gasto.

Este hidrograma de diseño final será el que se debe transitar a través del vaso de almacenamiento de la presa la Angostura. Para un análisis más completo se transitarán hidrogramas de diseño correspondientes al análisis bivariado con las funciones Gumbel Mixta y Weibull Mixta ambas por los criterios de Gasto y Volumen Prioridad obtenidos en el capítulo anterior. Para cada una de estas características se le asociara cada una de las formas elegidas (1949, 1967, 1995 y 2005) para contemplar la variación de la forma en el cálculo del tránsito de avenidas, buscando aquella que resulte más desfavorable.

De los valores de Q y V extrapolados a un  $Tr=10,000$  años de las curvas generadas en el capítulo 4 se eligen parejas que nos representen el cambio de gasto y volumen para cada criterio, es decir se eligen parejas a lo largo de toda la longitud de las curvas, se seleccionaron las parejas mostradas en las tablas 5.8.

Estas parejas se tomaron de las isóneas calculadas para los casos de estudio en el capítulo 4, se considera tomar una pareja al inicio de la curva, dos de la parte media y una de la parte final, para conocer qué efectos tiene tomar los valores de la pareja de cada parte de la curva. Se muestra un ejemplo de la selección en la figura siguiente.

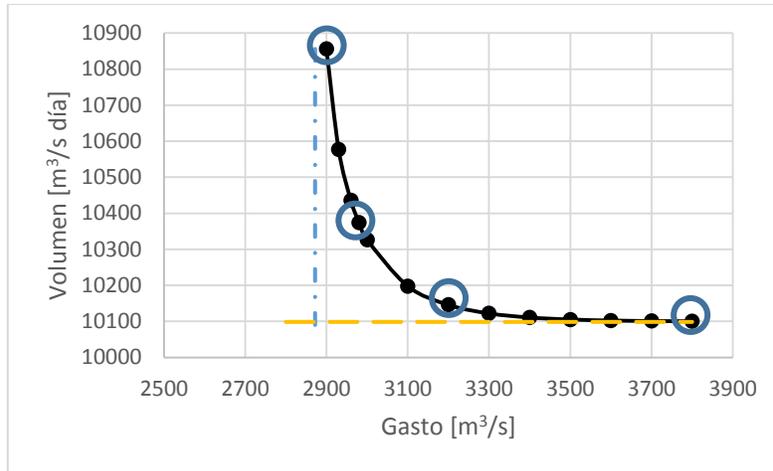


Figura 5.16 Parejas Q-V seleccionadas de la isolinia  $Tr=10000$  para GM-QP

La línea amarilla corresponde al valor de volumen extrapolado marginal, y la línea azul al valor del gasto extrapolado marginal.

Tabla 5.8 Parejas de Q-V extrapoladas a un  $Tr=10000$  años elegidas para crear hidrogramas para cada caso

Tr=10,000 años			
Gasto Prioridad			
Gumbel Mixta		Weibull Mixta	
Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s día]	Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s día]
2900	10856.2809	2300	9941.186037
2980	10374.15888	2360	9912.949725
3200	10145.93689	2800	9903.380496
3800	10100.32174		
Volumen Prioridad			
Gumbel Mixta		Weibull Mixta	
Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s día]	Gasto [m³/s]	Volumen [m³/s día]
2700	10826.23629	2500	11866.31356
2800	10195.87389	2560	11711.92663
3100	10004.30002	2700	11617.41922
3600	9988.027283	3300	11595.60461

A cada una de estas parejas se le asigna la forma de 1949 1967, 1995 y 2005, de la misma manera en la que se detalló anteriormente. Se muestran a continuación algunos de los hidrogramas de diseño resultantes, no se muestran todos debido a que cada pareja forma 4 hidrogramas diferentes, algunos de ellos son los siguientes:

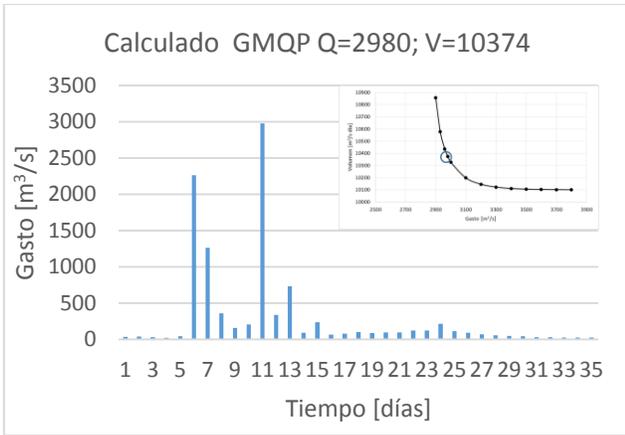


Figura 5.17 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2900 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,374 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 1949

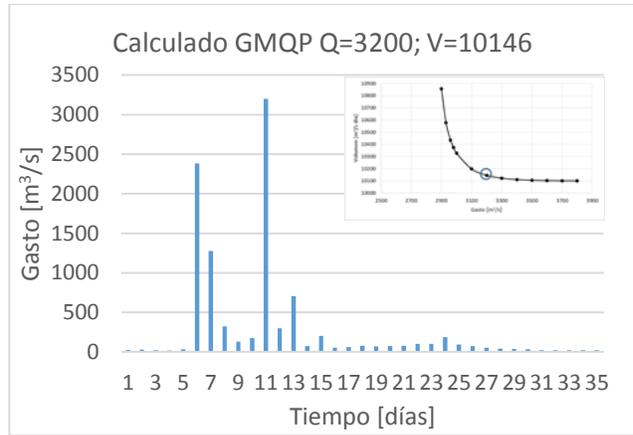


Figura 5.18 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,146 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 1949

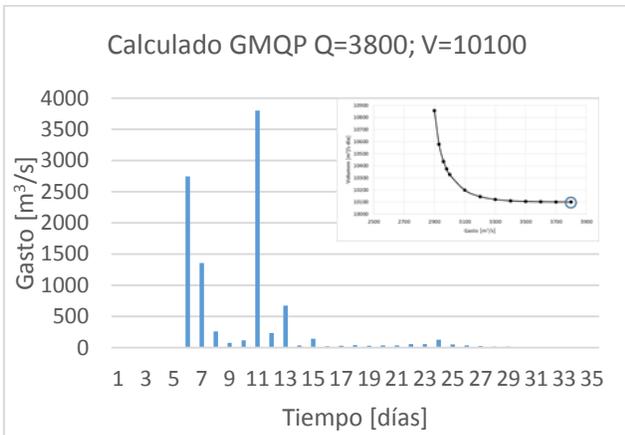


Figura 5.19 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,100 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 1949

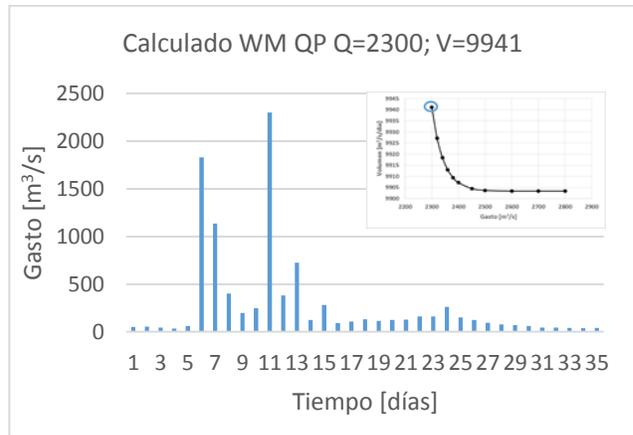


Figura 5.20 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2300 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9941 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 1949

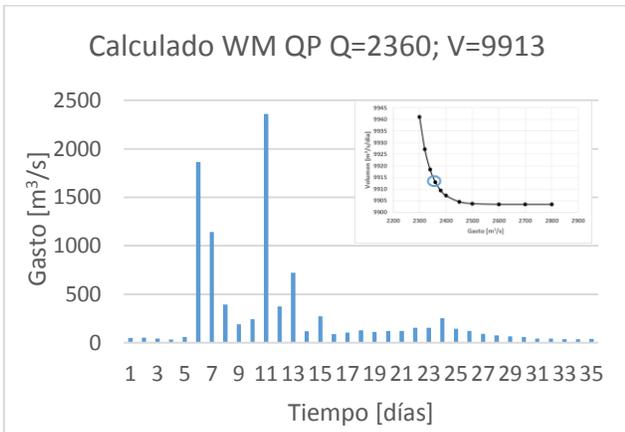


Figura 5.21 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2360 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9913 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 1949

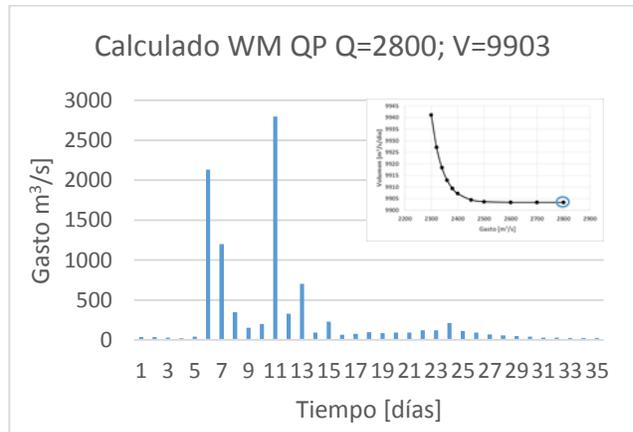


Figura 5.22 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9903 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 1949

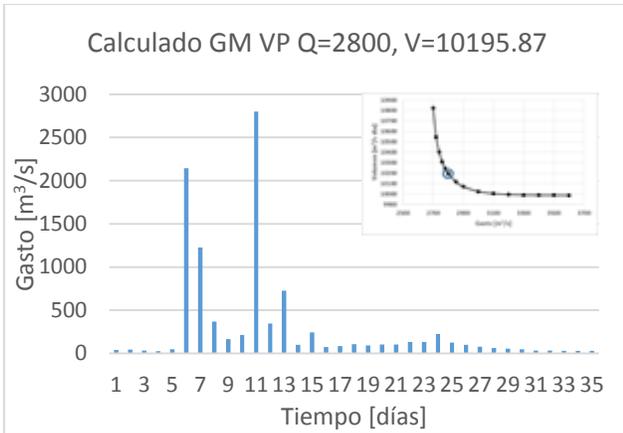


Figura 5.23 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,195 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 1949

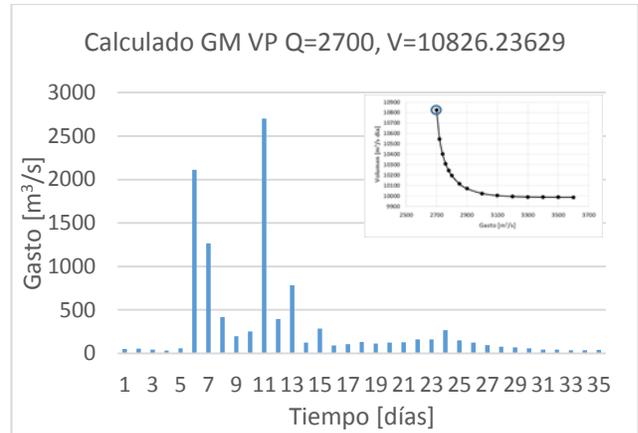


Figura 5.24 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,826 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 1949

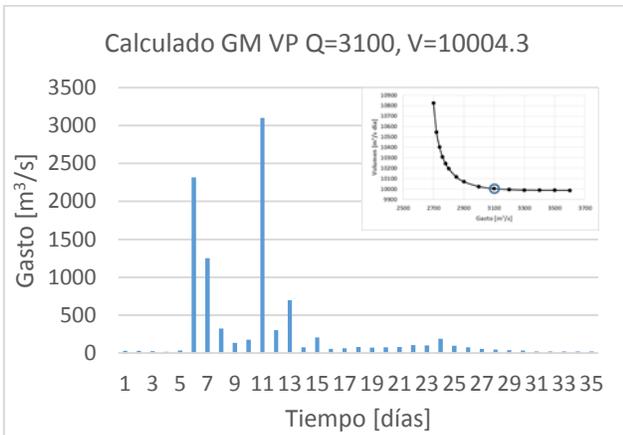


Figura 5.25 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,004 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 1949

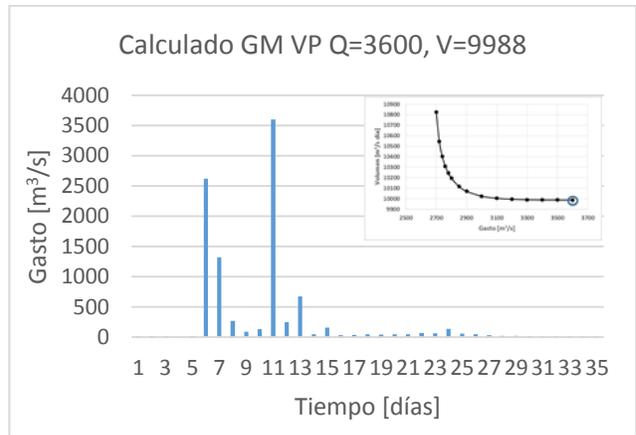


Figura 5.26 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10,004 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 1949

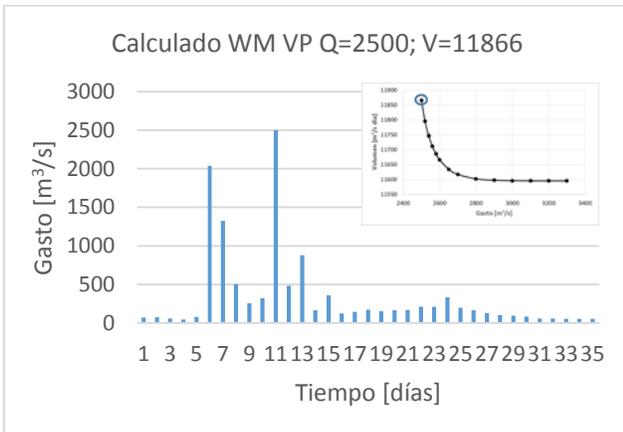


Figura 5.27 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2500 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11,866 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 1949

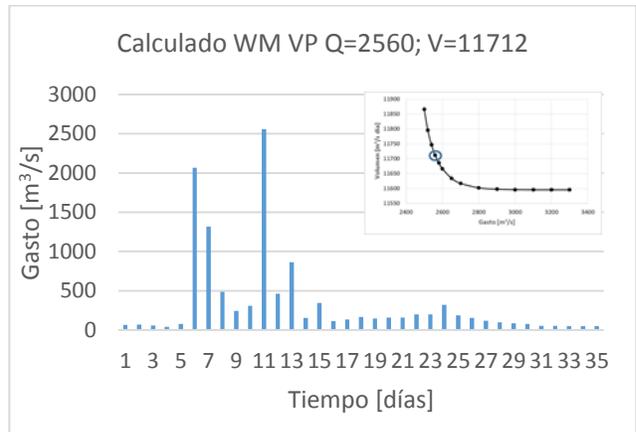


Figura 5.28 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2560 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11,712 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 1949

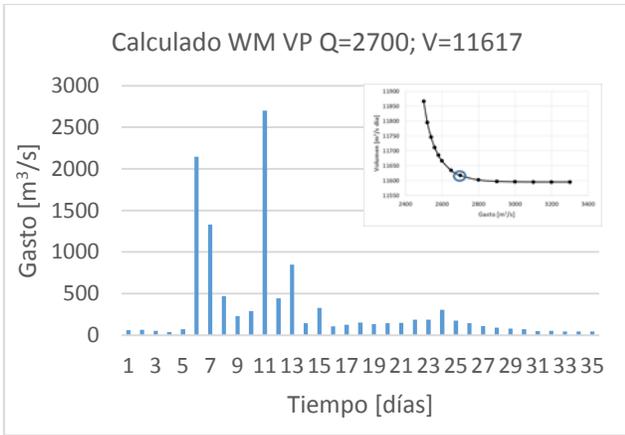


Figura 5.29 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11,617 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 1949

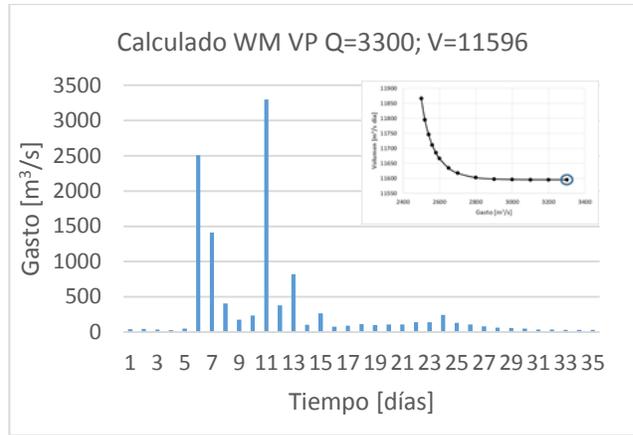


Figura 5.30 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3300 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11,596 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 1949

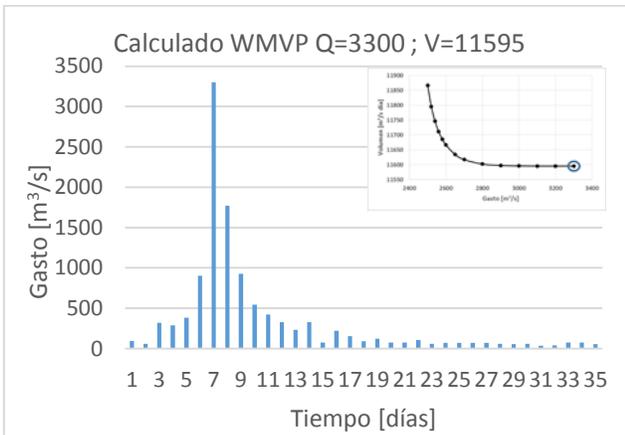


Figura 5.31 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3300 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11595.60 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 1995

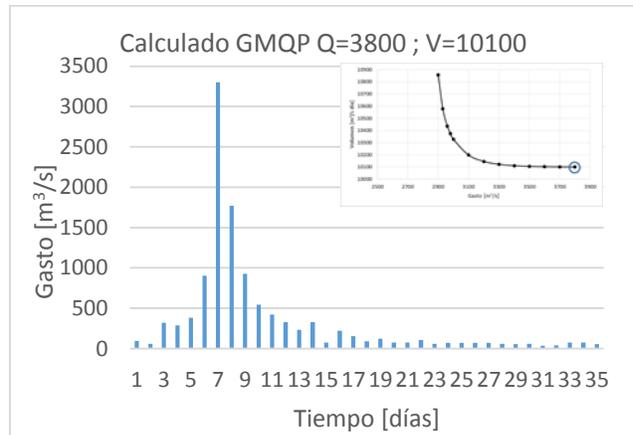


Figura 5.32 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10100.32 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 1995

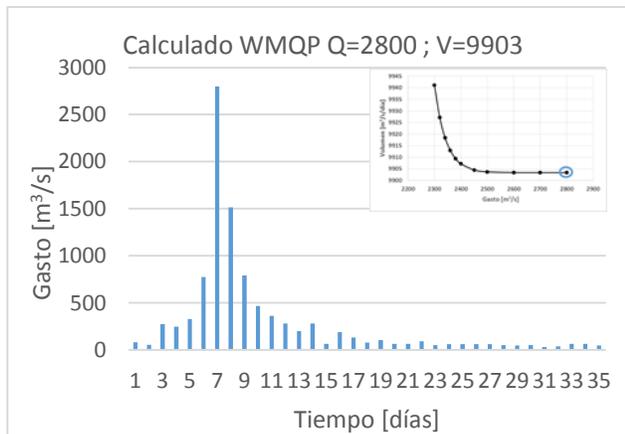


Figura 5.33 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9903.38 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 1995

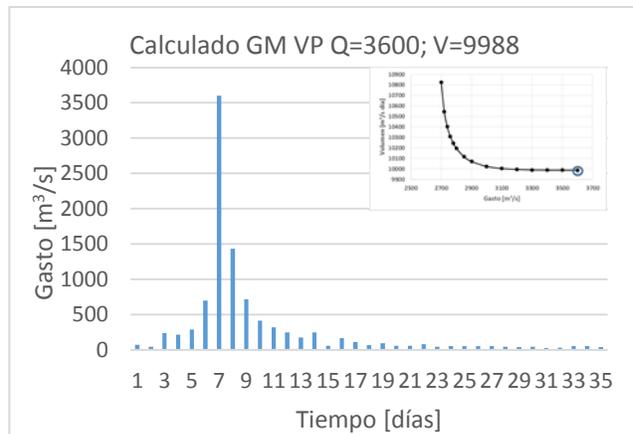


Figura 5.34 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3600 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9988.02 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 1995

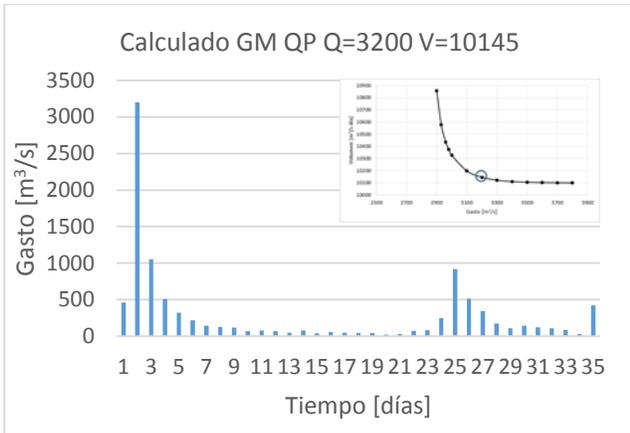


Figura 5.35 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10145.93 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 2005

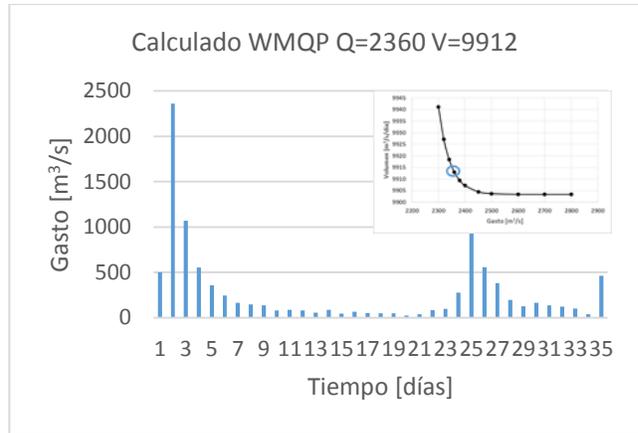


Figura 5.36 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2360 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9912.94 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 2005

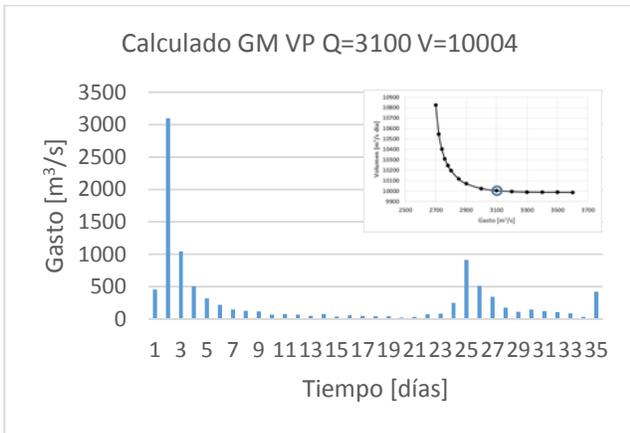


Figura 5.37 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10004.3 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-VP forma 2005

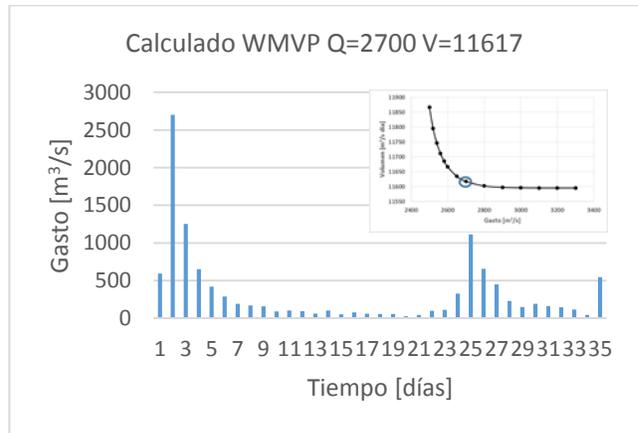


Figura 5.38 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11617.4 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP forma 2005

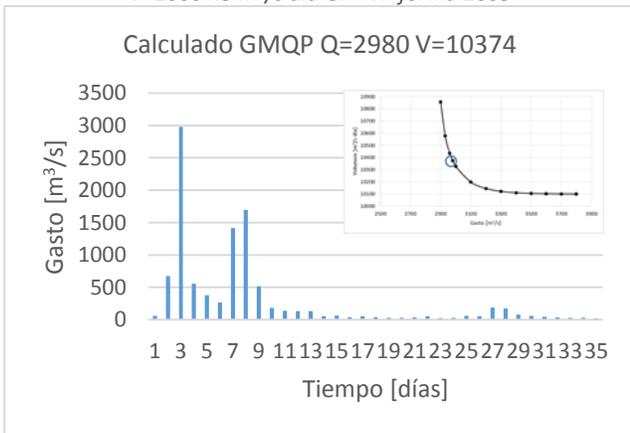


Figura 5.39 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10004.3 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP forma 1967

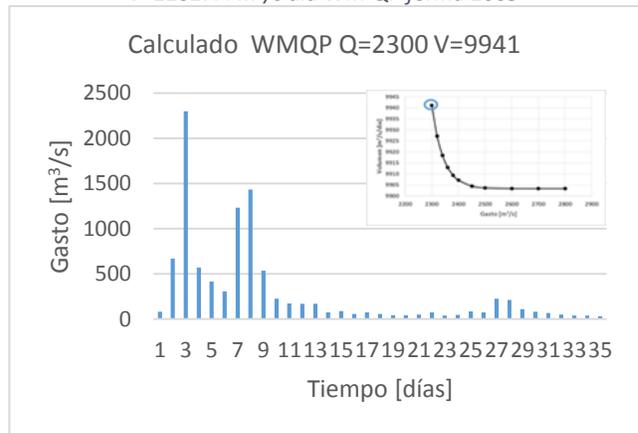


Figura 5.40 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2300 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9941.18 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP forma 1967

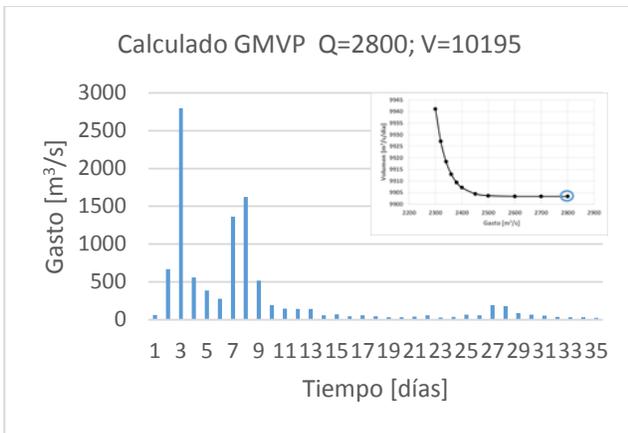


Figura 5.41 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2800 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=10195.87 \text{ m}^3/\text{s día GM-VP}$  forma 1967

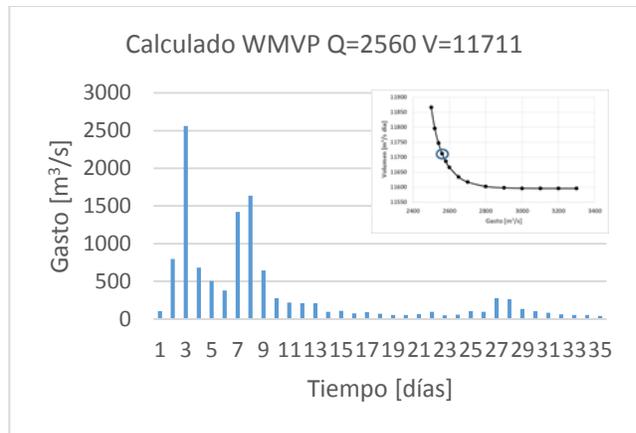


Figura 5.42 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2560 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=11711.92 \text{ m}^3/\text{s día WM-VP}$  forma 1967

Todos los hidrogramas obtenidos corresponden a un periodo de retorno bivariado de 10,000 años, poseen las mismas formas y duración, pero sus volúmenes y gastos de pico son diferentes. Esto representará variaciones en los tránsitos de avenida, esto nos servirá para analizar el comportamiento además de las funciones bivariadas, para lo cual para cada hidrograma obtenido se realizará un tránsito de avenida para comparar sus resultados posteriormente.

### 5.1.2 Duración de 10 días

Para la duración de 10 días el proceso es el mismo, el único cambio será en identificar una forma que corresponda adecuadamente a esta duración. Tomando como referencia los hidrogramas registrados para 10 días. Las 5 avenidas más grandes según ambos criterios de selección de datos para 10 días de duración se muestran a continuación.

Tabla 5.9 Cinco más grandes avenidas según Gasto Prioridad y Volumen Prioridad para 10 días de duración

Gasto Prioridad			Volumen Prioridad		
Duración 10 días, 5 avenidas máximas			Duración 10 días, 5 avenidas máximas		
Año	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Año	Q máx. [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
1995	1764.69	3449.852	1967	1284.023	5395.377
1949	1312.09	5119.19	1949	1312.088	5119.19
1967	1284.02	5395.377	1984	663.514	3644.914
1960	1106.1	2626.832	1995	1764.687	3449.852
2005	1072.12	2100.671	1978	724.503	3196.859

Como la forma de 1949 a una duración de 10 días mantiene una representación adecuada del escurrimiento natural del río, se continúa usando esta forma, al igual que las de 1967, 1995 y 2005.

Tabla 5.10 Hidrograma registrado de 1949

Hidrograma Registrado 1949, 10 días	
día	Qmd [m <sup>3</sup> /s]
09/01/1949	1112.285
10/01/1949	775.733
11/01/1949	327.741
12/01/1949	172.612
13/01/1949	213.899
14/01/1949	1312.088
15/01/1949	312.989
16/01/1949	541.99
17/01/1949	111.424
18/01/1949	238.429

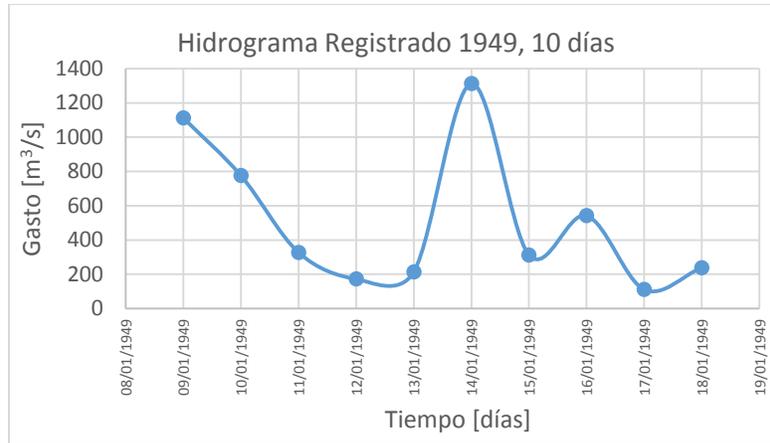


Figura 5.43 Hidrograma registrado de 1949, duración 10 días

Con la forma de 1949, siguiendo el mismo proceso que para 35 días, se calcula el factor  $f_i$  y  $f_i Q_i$ , para poder aplicar el sistema de ecuaciones a los valores extrapolados seleccionados.

Tabla 5.11 Cálculo del factor  $f_i$  y  $f_i Q_i$  forma 1949 10 días

1949, 10 días			
día	Qmd [ $m^3/s$ ]	$f_i$	$f_i * Q_i$
09/01/1949	1112.285	0.8477	942.91
10/01/1949	775.733	0.5912	458.63
11/01/1949	327.741	0.2498	81.865
12/01/1949	172.612	0.1316	22.708
13/01/1949	213.899	0.163	34.87
14/01/1949	1312.088	1	1312.1
15/01/1949	312.989	0.2385	74.661
16/01/1949	541.99	0.4131	223.88
17/01/1949	111.424	0.0849	9.4623
18/01/1949	238.429	0.1817	43.327
suma=		3.9016	3204.4

Los valores extrapolados elegidos como se mencionó corresponden al ajuste bivariado con ajustes marginales Weibull Mixta pues resultaron ser los mejores según las pruebas de bondad de ajuste de Kolmogórov-Smirnov y Akaike, tal como se explica en el capítulo anterior, son los siguientes:

Tabla 5.12 Valores extrapolados elegidos para crear el hidrograma de diseño final Weibull Mixta

10 días								
Tr=10,000 años, 10 días								
WEIBULL MIXTA					GUMBEL MIXTA			
Gasto Prioridad		Volumen Prioridad		Gasto Prioridad		Volumen Prioridad		
hidrograma	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
1	2380	7245.2232	2600	8132.735	2950	10407.21	2400	10289.549
2	2450	7124.423	2650	7794.98	3200	9870.081	2550	9984.8141
3	2700	7104.4545	3000	7698.449	3600	9834.689	3100	9949.9529

Ahora se resuelve el sistema de ecuaciones, un sistema por cada pareja de datos extrapolados elegida.

$$a \sum fi + b \sum fiQi = V$$

$$a + bQ_p = Q$$

Como ejemplo, se usa la pareja de Gasto Prioridad correspondiente al Gasto de 2380 m<sup>3</sup>/s y Volumen de 7245.2 m<sup>3</sup>/s día, entonces:

$$3.91a + 3204.4b = 7245.2$$

$$a + 1312.08b = 2380$$

Resolviendo

$$a = 981.77 \quad b = 1.065$$

Ahora se calculan los gastos que nos darán el hidrograma final.

$$fia + fibQi = Q$$

$$0.8477(981.77) + 0.8477(1.065)(1112.285) = 1837.08 \text{ m}^3/\text{s}$$

Como resultado el hidrograma obtenido se muestra en la tabla 5.13 y figura 5.32:

Tabla 5.13 Hidrograma medido y calculado para  $Q=2380 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $V= 7245.2 \text{ m}^3/\text{s día}$

Tiempo [días]	Qmd [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]	Q [ $\text{m}^3/\text{s}$ ]
1	1112.285	1837.08044
2	775.733	1069.18339
3	327.741	332.473371
4	172.612	153.356658
5	213.899	197.210511
6	1312.088	2380
7	312.989	313.75837
8	541.99	644.126571
9	111.424	93.4570816
10	238.429	224.576816

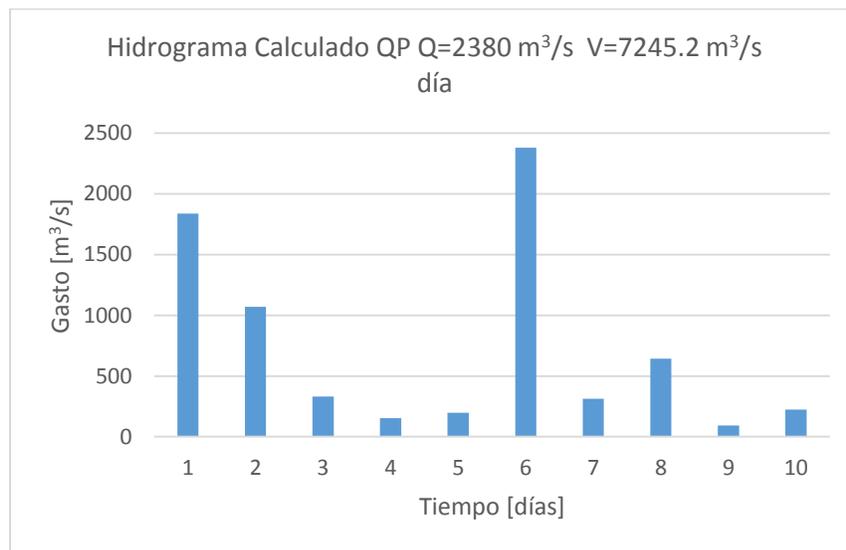


Figura 5.44 Hidrograma calculado para la primera pareja de Gasto Prioridad con la forma de 1949

De la misma manera para comparar los diversos resultados obtenidos con la cópula bivariada de Gumbel Hougaard se aplican las mismas formas del hidrograma para todas las parejas seleccionadas para cada criterio. A continuación, se muestran algunos de los hidrogramas de diseño calculados para todas ellas.

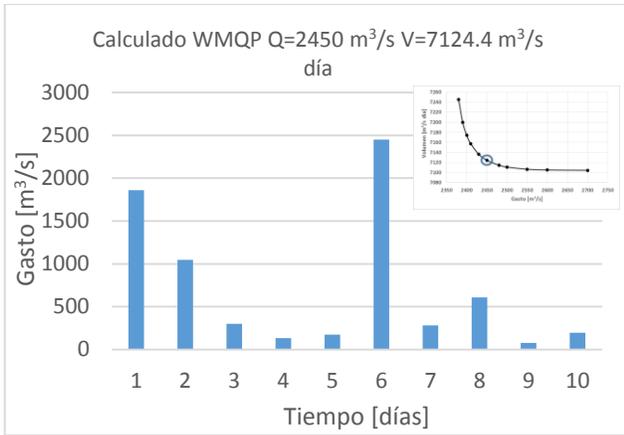


Figura 5.45 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2450 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7124.4 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-QP, duración 10 días forma 1949

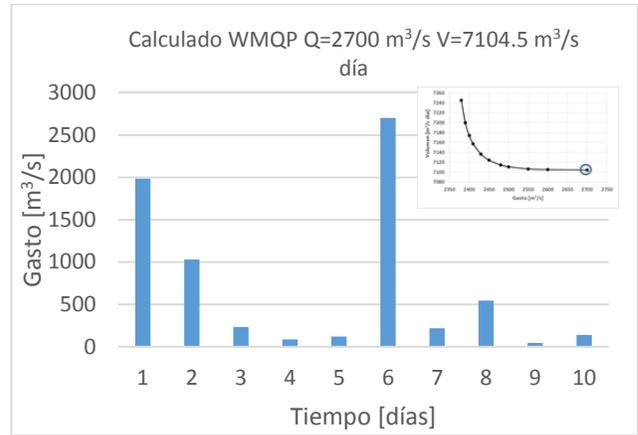


Figura 5.46 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7104.5 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-QP, duración 10 días forma 1949

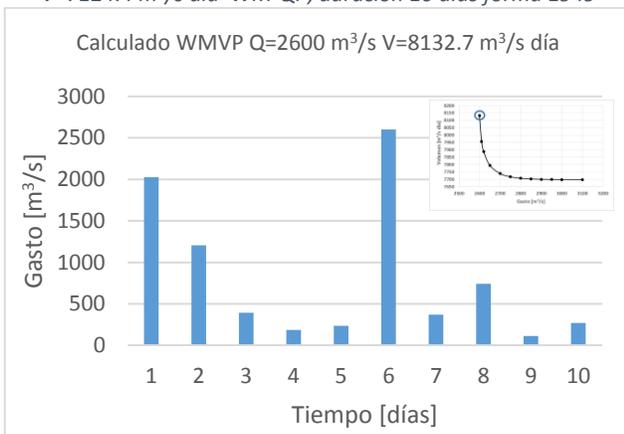


Figura 5.47 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2600 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=8132.5 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-VP, duración 10 días forma 1949

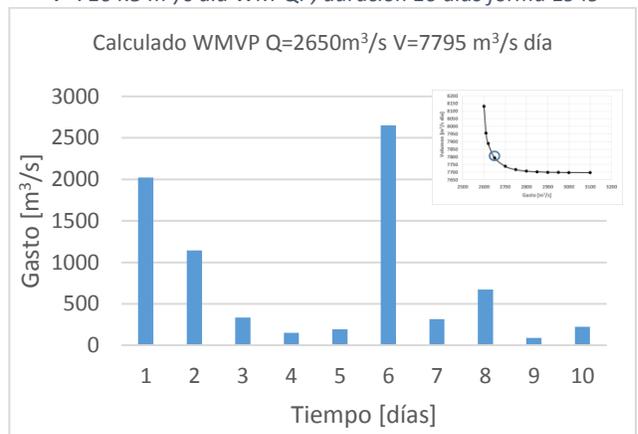


Figura 5.48 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2650 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7795 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-VP, duración 10 días forma 1949

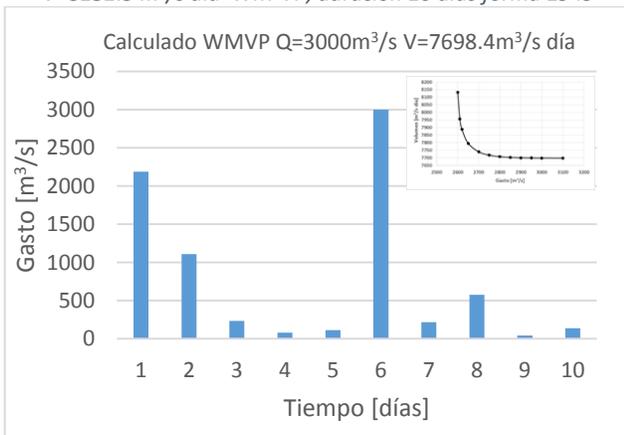


Figura 5.49 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3000 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7698.4 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-VP, duración 10 días forma 1949

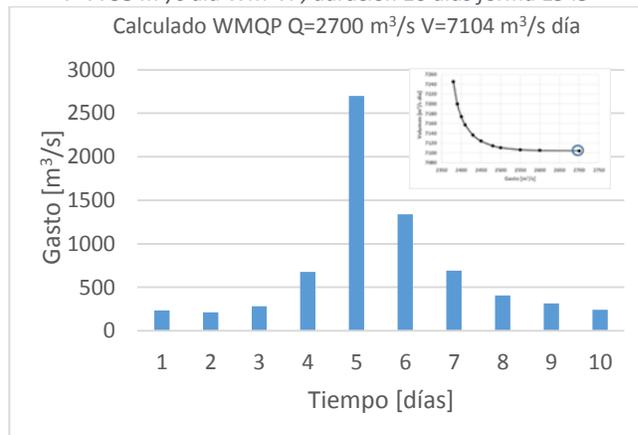


Figura 5.50 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2700 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7104.45 \text{ m}^3/\text{s}$  día WM-QP, duración 10 días forma 1995

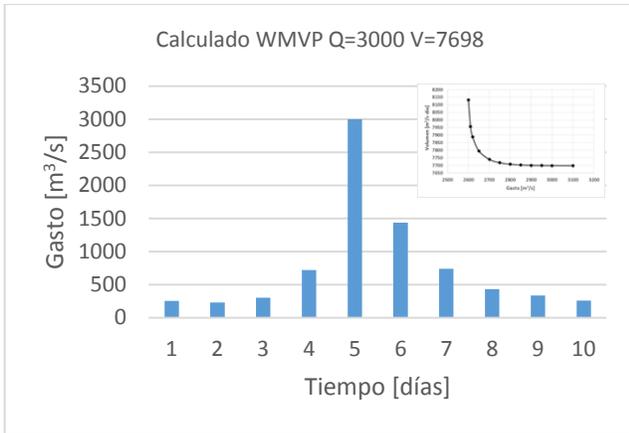


Figura 5.51 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3000 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=7698 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP, duración 10 días forma 1995

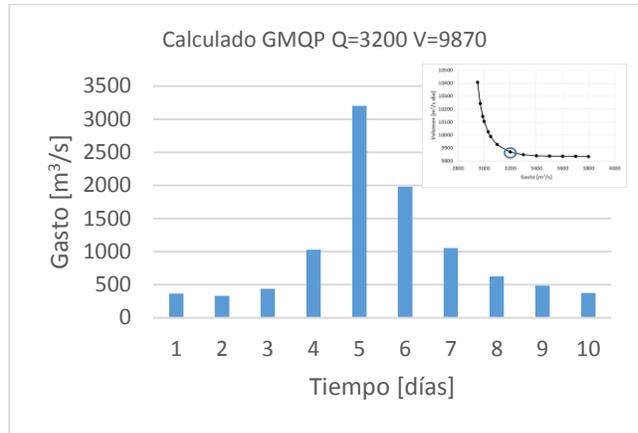


Figura 5.52 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3200 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=9870.08 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP, duración 10 días forma 1995

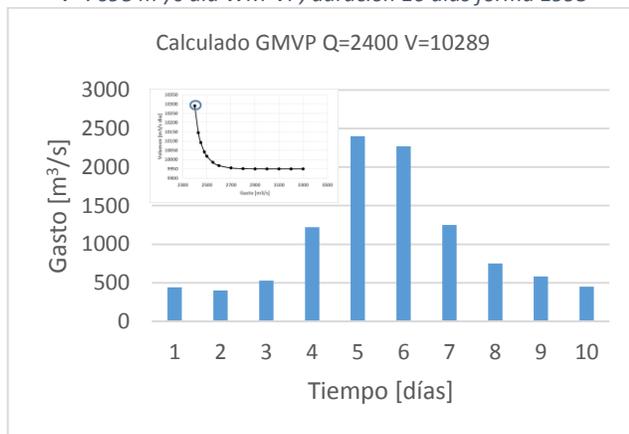


Figura 5.53 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2400 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=10289.54 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP, duración 10 días forma 1995

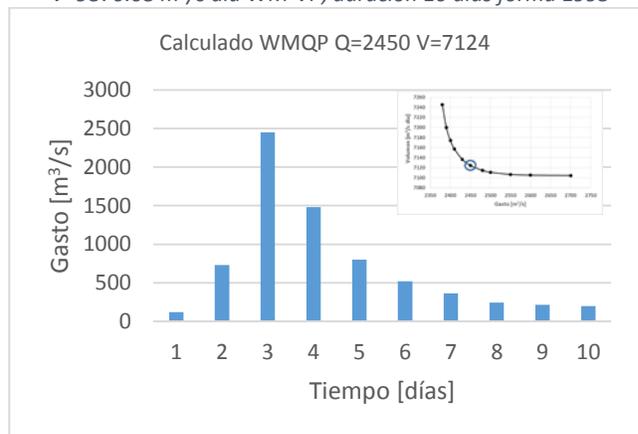


Figura 5.54 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2450 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=7124.42 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-QP, duración 10 días forma 2005

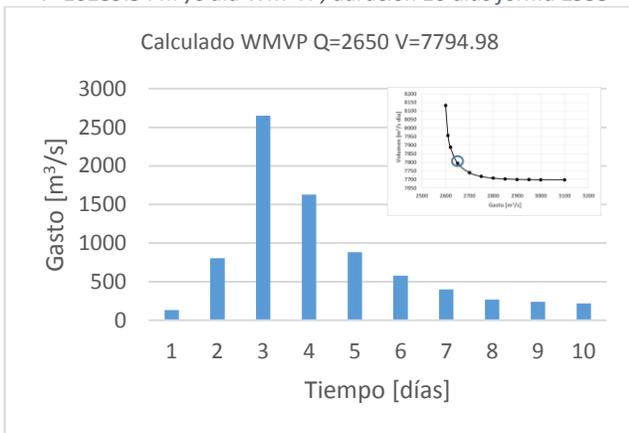


Figura 5.55 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2650 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=7794.98 \text{ m}^3/\text{s día}$  WM-VP, duración 10 días forma 2005

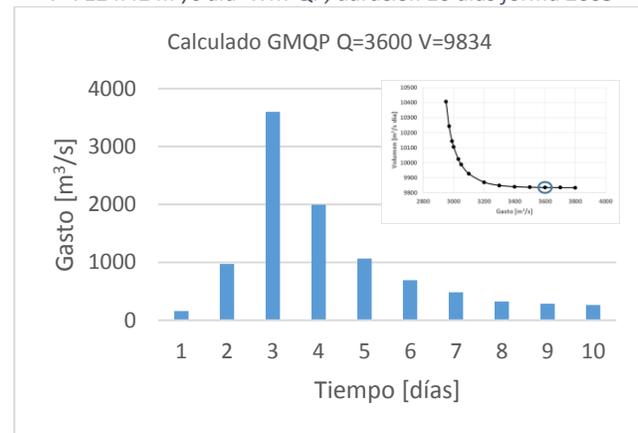


Figura 5.56 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3600 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $V=9834.69 \text{ m}^3/\text{s día}$  GM-QP, duración 10 días forma 2005

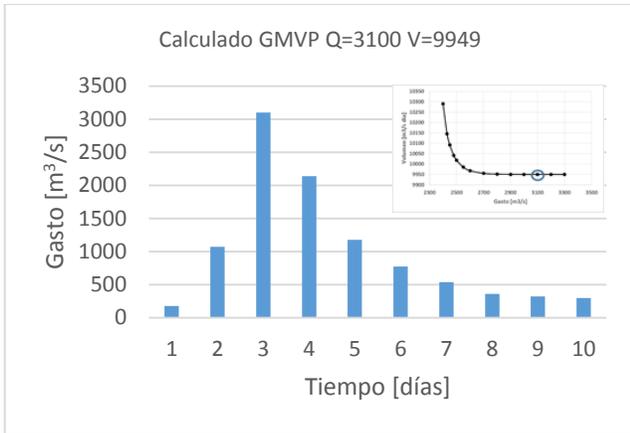


Figura 5.57 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9949.95 \text{ m}^3/\text{s día GM-VP}$ , duración 10 días forma 2005

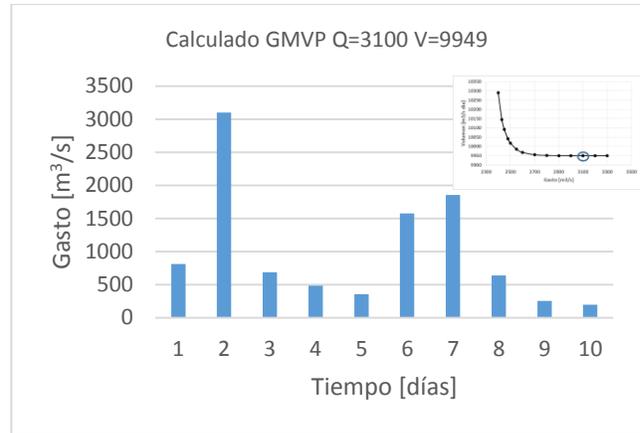


Figura 5.58 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=3100 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=9949.95 \text{ m}^3/\text{s día GM-VP}$ , duración 10 días forma 1967

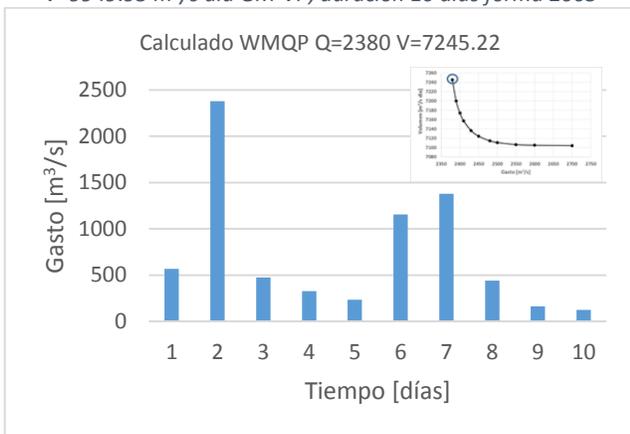


Figura 5.59 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2380 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=7245.22 \text{ m}^3/\text{s día WM-QP}$ , duración 10 días forma 1967

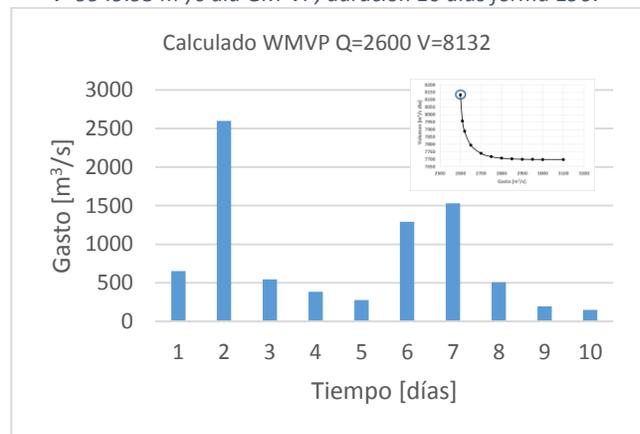


Figura 5.60 Hidrograma calculado para la pareja  $Q=2600 \text{ m}^3/\text{s}$   $V=8132.73 \text{ m}^3/\text{s día WM-VP}$ , duración 10 días forma 1967

Cada uno de estos hidrogramas es de diseño y será transitado a través del vaso de la presa La Angostura para analizar los cambios que las combinaciones de gasto y volumen de  $Tr=10,000$  años pueden presentar, los cambios con diversas formas y la elevación máxima en el embalse.

## Capítulo 6

# Tránsitos de avenidas en vasos de almacenamiento

El tránsito de avenidas en vasos es un procedimiento que sirve para determinar el hidrograma de salida de una presa dado un hidrograma de entrada. Algunas de sus principales aplicaciones son (Aparicio, 2009):

- Conocer la evolución de los niveles en el vaso y de los gastos de la salida por la obra de excedencias, para conocer si la política de operación de las compuertas del vertedor es adecuada y así, al presentarse una avenida no se ponga en peligro la presa, bienes materiales o vidas humanas.
- Dimensionar la obra de excedencias.
- Fijar el NAME y las dimensiones de las obras de desvío y ataguías.
- Revisar la seguridad de la presa, analizando la elevación del NAME que se pueda presentar, utilizando un hidrograma de entrada obtenido con información disponible en la actualidad y aplicando metodología moderna.

Un tránsito de avenidas suponiendo un vertedor de descarga libre en donde el NAMO es igual a la elevación de la cresta del vertedor, y conocido un hidrograma de entrada con determinada duración  $t$ , representa la entrada de volumen de agua al embalse en periodos de tiempo  $\Delta t$  hasta completar  $t$ , creciendo la elevación del agua en el embalse, superando el NAMO y por ende descargando a través del vertedero y obteniendo un hidrograma de salida. La elevación máxima obtenida será el NAME.

En el tránsito de avenidas en vasos se usa, como en la simulación del funcionamiento de vasos, la ecuación de continuidad:

$$I - O = \frac{dV}{dt} \quad (6.1)$$

Donde:

$I$  Gasto de entrada al vaso

$O$  Gasto de salida del vaso

$\frac{dV}{dt}$  Variación del volumen almacenado en el tiempo

O bien en diferencias finitas

$$\frac{I_i + I_{i+1}}{2} - \frac{O_i + O_{i+1}}{2} = \frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta t} \quad (6.2)$$

Donde

$V_{i+1} - V_i$  Variación de los volúmenes almacenados en el embalse entre los instantes  $i$  e  $i + 1$

$I_i + I_{i+1}$  Gastos de entrada al vaso en el instante  $i$  e  $i + 1$

$\frac{O_i + O_{i+1}}{2}$  Gastos de salida del vaso en el instante  $i$  e  $i + 1$ , tanto por la obra de excedencias como por obra de toma.

$\Delta t$  Intervalo de tiempo entre los instantes  $i$  e  $i + 1$

De la misma forma la expresión anterior puede ser:

$$I_i + I_{i+1} + \left( \frac{2V_i}{\Delta t} - O_i \right) = \left( \frac{2V_{i+1}}{\Delta t} + O_{i+1} \right) \quad (6.3)$$

En donde los términos  $I_{i+1}$  y  $O_{i+1}$  no son conocidos y deben ser resueltos.

Para realizar un tránsito de avenida por un vaso de almacenamiento de una presa es necesario contar con determinada información, la cual es:

- Hidrograma de entrada al vaso.
- Curva elevaciones-capacidades de almacenamiento del vaso.
- Curva elevaciones-descargas de la obra de excedencias.

- Curva elevaciones-salida de la obra de toma, si es el caso.
- Elevación inicial a partir de la cual se considera hacer el tránsito.

Es recomendable que el valor de  $\Delta t$  que se use sea menor o igual a una décima parte del tiempo de pico del hidrograma de entrada:

$$\Delta t \leq 0.1 t_p \quad (6.4)$$

Durante el tránsito de avenida la forma de los hidrogramas de entrada y salida se muestra en la figura 6.1. Antes del tiempo  $t_0$  las condiciones están establecidas la entrada es igual a la salida. En el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$  la entrada es mayor a la salida y de acuerdo a la ecuación de continuidad, aumenta el volumen almacenado en el vaso y por ende, su nivel. En el tiempo  $t_1$  se alcanza el máximo almacenamiento y también el máximo nivel en el vaso, el cual será el NAME necesario para esa avenida. Cuando  $t > t_1$  las salidas del vaso son menores a las entradas y por ende el nivel disminuye.

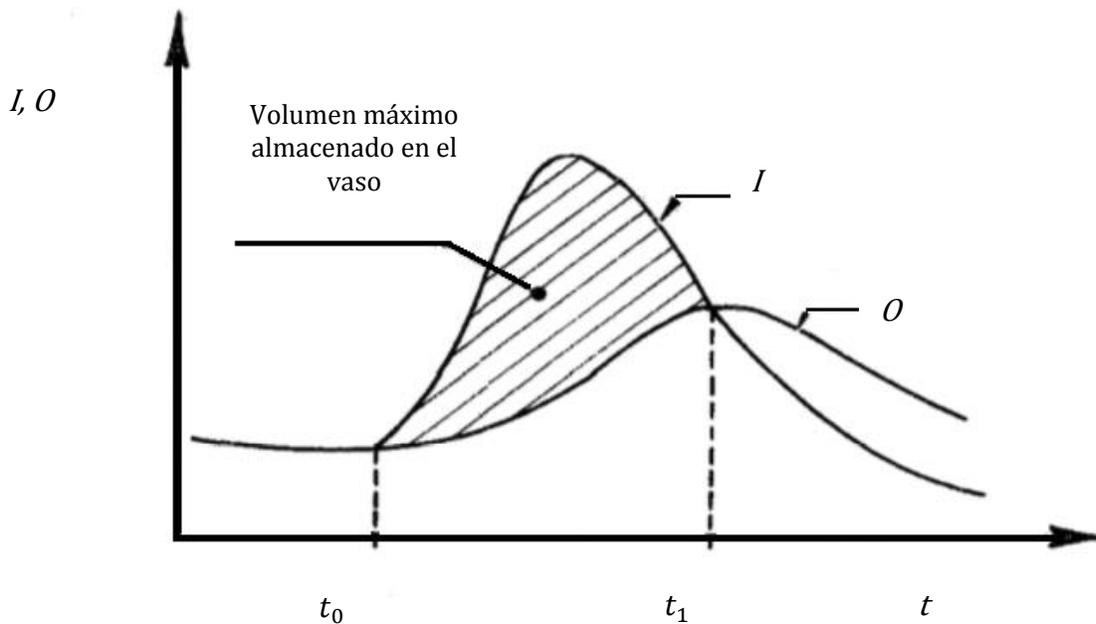


Figura 6.1 Hidrograma de entrada y de salida en un tránsito de avenidas

## 6.1 Aplicación al caso de estudio Presa La Angostura, Sonora

El objetivo de la aplicación de la metodología propuesta en este trabajo es analizar la seguridad de la presa La Angostura, utilizando los hidrogramas de diseño calculados mediante la función bivariada Gumbel-Hougaard para cada uno de los criterios de selección de datos y ajustes marginales y conocer las diferencias entre ellas.

El tránsito de avenidas es la técnica que nos permitirá saber si la presa es segura, tras utilizar información más reciente y procesamiento con mayor capacidad de reducir la incertidumbre se analizan las condiciones que es probable se lleguen a presentar en la presa y dar veredicto si la presa es segura en la actualidad.

Comúnmente el hidrograma que se transita es aquel que corresponde al periodo de retorno de 10,000 años y que provenga de aquel ajuste que conforme a las técnicas de bondad sea el que tiene menor incertidumbre. Para este caso se transita cada uno de los hidrogramas obtenidos al periodo de retorno mencionado, para, como se ha venido haciendo, analizar las diferencias y alcances de modificar la selección de datos y ajustar con diferentes funciones para extrapolar con una función bivariada, así como analizar la injerencia de la forma del hidrograma en el tránsito.

### **6.1.1 Duración 35 días**

Como se explicó en la aplicación de forma; se contará con 27 hidrogramas para cada una de las cuatro formas elegidas, generados con alguno de los criterios establecidos, las parejas gasto-volumen de estos se muestran en la tabla 5.8 y algunos de los hidrogramas de diseño finales en las figuras 5.17 a la 5.42. Cada uno de ellos corresponde al periodo de retorno conjunto de 10,000 años, el cual es el recomendado para diseñar o revisar las obras de excedencia de una presa.

También se cuenta con la curva elevaciones-capacidades del vaso de almacenamiento de la presa, necesaria para conocer los niveles en el embalse dado determinado volumen de agua. La curva se muestra en la figura 6.2.

Elevaciones	Capacidades del vaso
msnm	hm <sup>3</sup>
830.7	703.39
831.1	718.7
831.6	738.15
832.1	757.72
832.6	777.78
833.1	797.96
833.6	818.65
834.1	839.46
834.6	860.76
835.1	882.17
835.6	904.03
836.1	926.02
836.6	948.49
837.1	971.08
837.6	994.19
838.1	1017.42
838.6	1041.19
839.1	1065.08
839.6	1089.49
840.1	1113.98
840.15	1116.46
840.6	1139.05
841.1	1164.27
841.6	1189.92
842.1	1215.7
842.6	1241.94
843.1	1268.29
843.6	1295.08
843.75	1303.06
848	1530.75

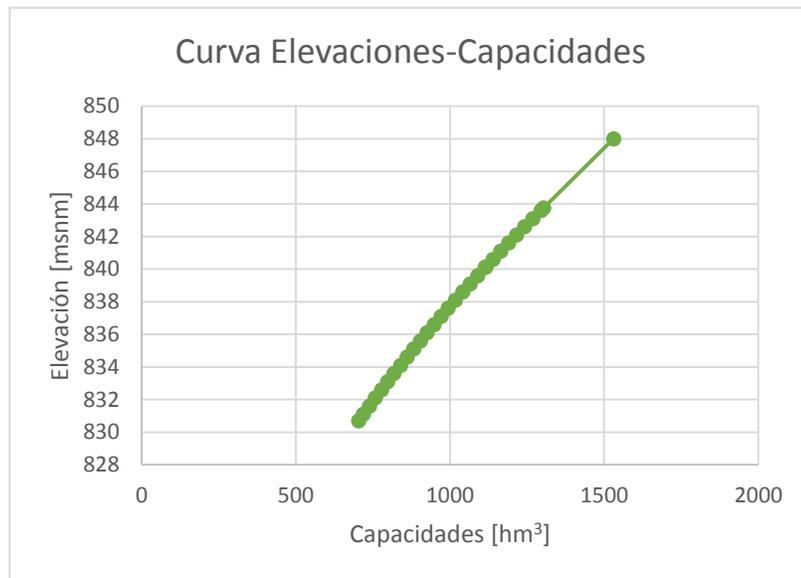


Figura 6.2 Curva Elevaciones capacidades del vaso de la presa La Angostura

De la misma forma es necesaria la curva elevaciones-descargas del vertedor de excedencias de la presa, para al conocer la elevación en el embalse, obtener el gasto de salida por el vertedero. Esta es calculada gracias a la ecuación de descarga de obra de excedencias.

$$O = Clh^{3/2} \quad (6.5)$$

En donde

C Es el coeficiente de descarga

l Longitud de la cresta del vertedor

h Corresponde a la carga hidráulica en la entrada del vertedor, se obtiene como la resta de la elevación en el embalse menos el nivel de cresta del vertedor, usualmente, el NAMO.

La curva se muestra en la figura 6.3.

Elevaciones	Descargas
msnm	m <sup>3</sup> /s
830.7	0
831.1	16.55
831.6	55.84
832.1	108.34
832.6	171.29
833.1	243.18
833.6	323
834.1	410.04
834.6	503.74
835.1	603.65
835.6	709.41
836.1	820.72
836.6	937.31
837.1	1058.95
837.6	1185.44
838.1	1316.6
838.6	1452.27
839.1	1592.3
839.6	1736.56
840.1	1884.94
840.15	1900
840.6	2037.32
841.1	2193.59
841.6	2353.67
842.1	2517.46
842.6	2684.89
843.1	2855.87
843.6	3030.33
843.75	3083.34
848	4706.25

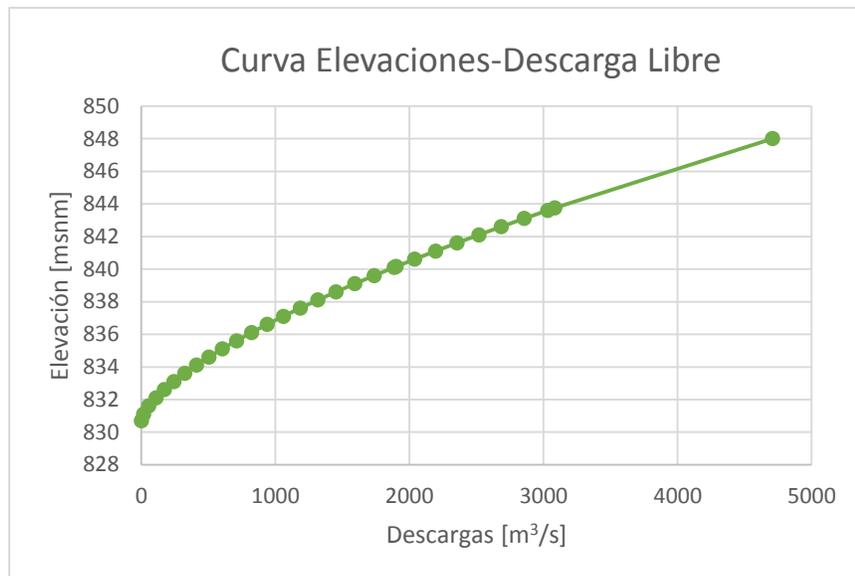


Figura 6.3 Curva elevaciones-descargas por la obra de excedencias de la presa La Angostura

El tránsito de avenida se realizó con ayuda de un código de programación desarrollado en lenguaje C++, los requerimientos del software son los mismos que han sido explicados antes, más el nivel inicial en el embalse, el cual se supuso como el NAMO de la presa. El programa arroja como resultado el hidrograma de salida de la presa, por ende, el nivel máximo y volumen máximo de almacenamiento.

De los 4 criterios con los que se ha desarrollado la metodología se eligieron 4 parejas de gasto-volumen para cada uno las cuales se muestran en la tabla 6.1. La máxima elevación alcanzada en el vaso de la presa La Angostura por cada pareja para cada forma de hidrograma de diseño calculado se muestra en la tabla 6.2.

Tabla 6.1 Parejas de Q-V elegidas para transitar por el vaso de la presa La Angostura para los dos criterios de selección de datos.

		Gumbel Mixta					
		Gasto Prioridad			Volumen Prioridad		
Hidrograma	Q	V	V	Q	V	V	
	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[hm <sup>3</sup> ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[hm <sup>3</sup> ]	
1	2900	10856.281	937.983	2800	10195.874	880.924	
2	2980	10374.159	896.327	2700	10826.236	935.387	
3	3200	10145.937	876.609	3100	10004.3	864.372	
4	3800	10100.322	872.668	3600	9988.027	862.966	

		Weibull Mixta					
		Gasto Prioridad			Volumen Prioridad		
Hidrograma	Q	V	V	Q	V	V	
	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[hm <sup>3</sup> ]	[m <sup>3</sup> /s]	[m <sup>3</sup> /s día]	[hm <sup>3</sup> ]	
1	2300	9941.186	858.918	2500	11866.314	1025.249	
2	2360	9912.95	856.479	2560	11711.927	1011.91	
3	2800	9903.381	855.652	2700	11617.419	1003.745	
4				3300	11595.605	1001.86	

Tabla 6.2 Elevación máxima alcanzada en el vaso de la presa La Angostura para cada hidrograma de diseño creado para cada pareja Q-V

Hidrograma	Elevación por Forma [msnm]				Máxima Forma
	1949	1967	1995	2005	
GMQP 1	837.603	837.286	838.350	836.120	1995
GMQP 2	837.625	837.216	838.237	836.002	1995
GMQP 3	837.851	837.306	838.325	836.018	1995
GMQP 4	838.542	837.693	838.828	836.255	1995
WMQP 1	836.730	836.632	837.618	835.612	1995
WM QP 2	836.799	836.666	837.645	835.625	1995
WM QP 3	837.336	836.970	837.940	835.786	1995
GMVP 1	837.381	837.144	838.206	836.036	1995
GMVP 2	837.359	837.047	838.046	835.877	1995
GMVP 3	837.710	837.202	838.200	835.934	1995
GMVP 4	838.295	837.533	838.615	836.137	1995
WMVP 1	837.279	837.276	838.464	836.280	1995
WM VP 2	837.327	837.276	838.443	836.255	1995
WM VP 3	837.480	837.346	838.493	836.277	1995
WM VP 4	838.186	837.739	838.884	836.492	1995

Los hidrogramas con la forma correspondiente al hidrograma registrado de 1995 resultaron ser aquellos que alcanza las elevaciones más desfavorables posibles.

Y gráficamente se muestran los hidrogramas de entrada y salida resultado del tránsito de avenidas para los hidrogramas de diseño de cada caso con forma de 1995.

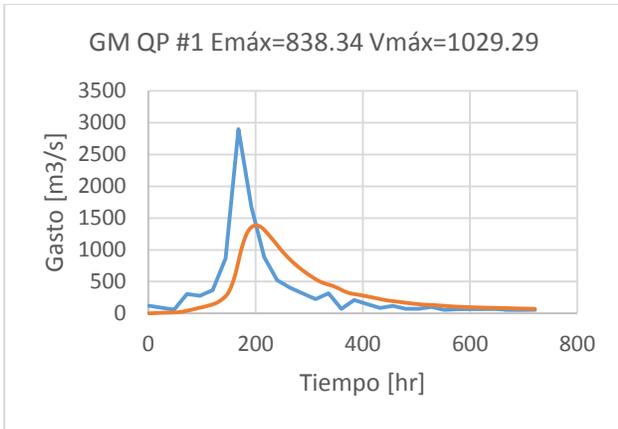


Figura 6.4 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #1 forma 1995

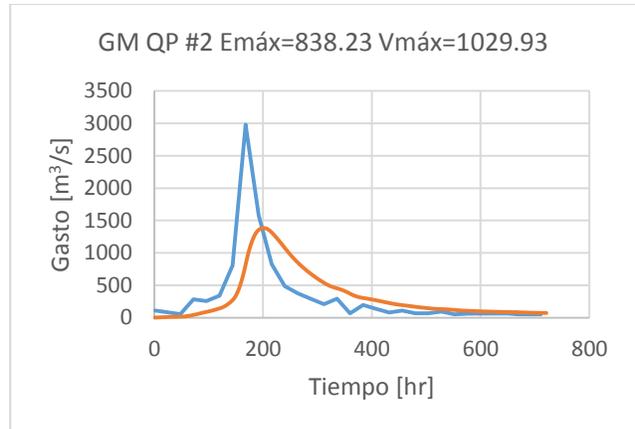


Figura 6.5 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #2 forma 1995

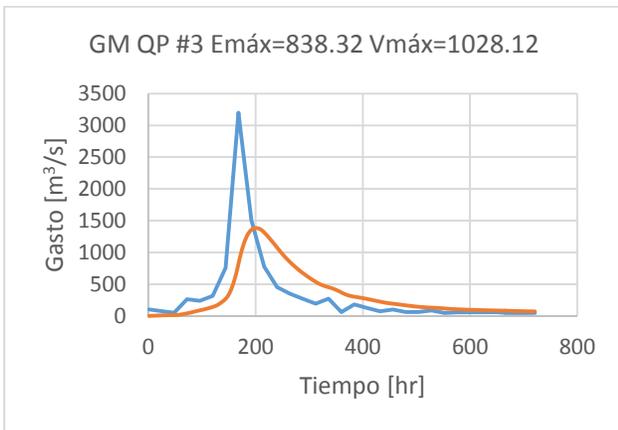


Figura 6.6 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #3 forma 1949

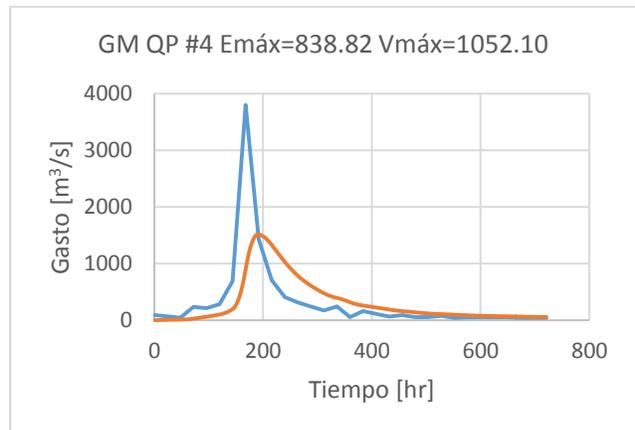


Figura 6.7 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #4 forma 1995

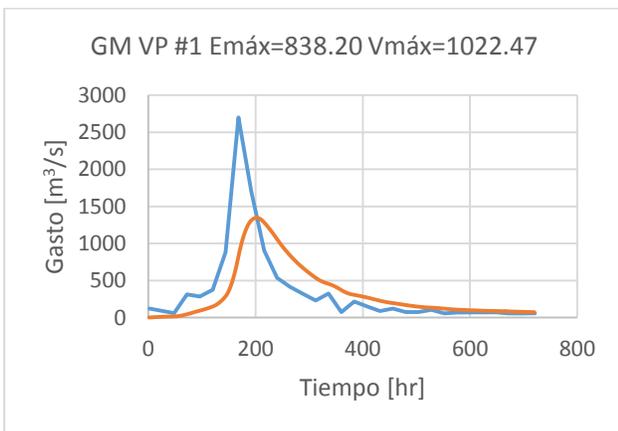


Figura 6.8 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #1 forma 1995

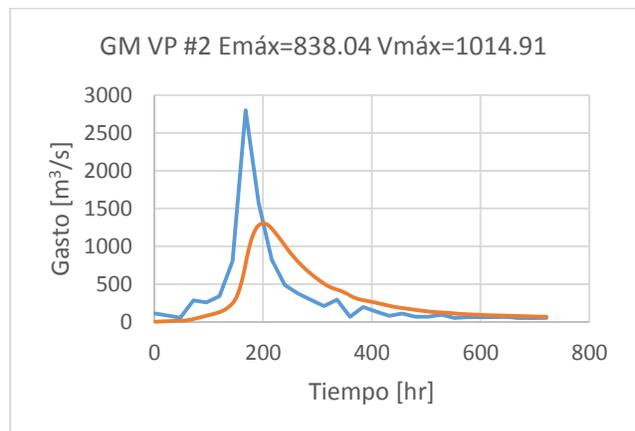


Figura 6.9 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #2 forma 1995

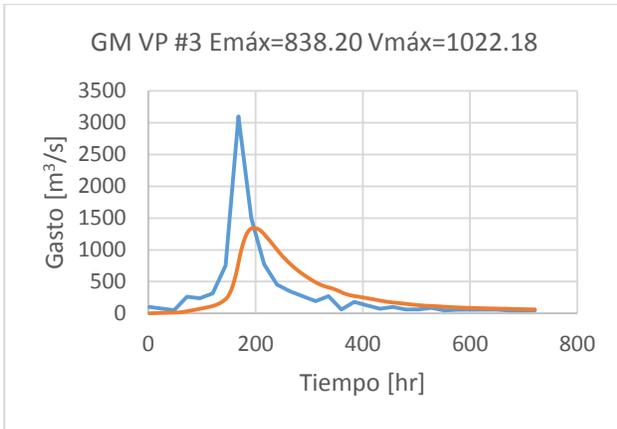


Figura 6.10 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #3 forma 1995

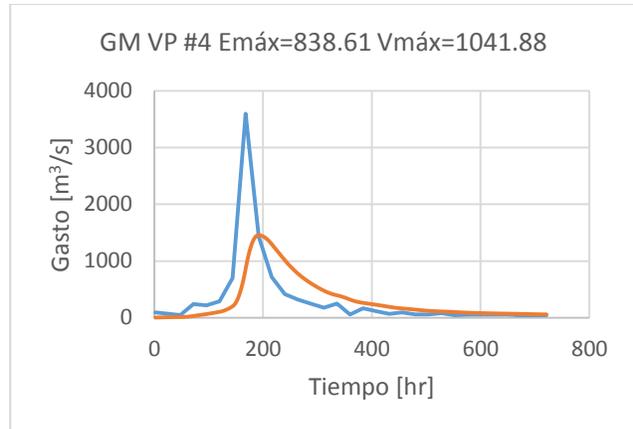


Figura 6.11 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #4 forma 1995

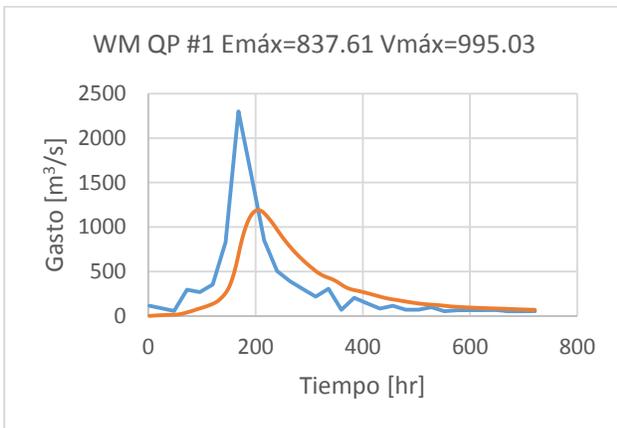


Figura 6.12 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #1 forma 1995

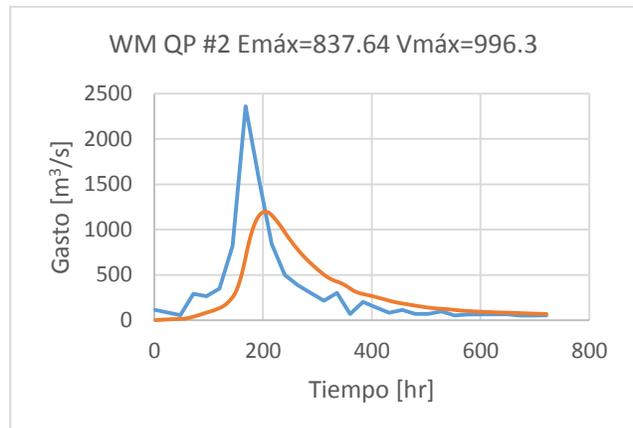


Figura 6.13 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #2 forma 1995

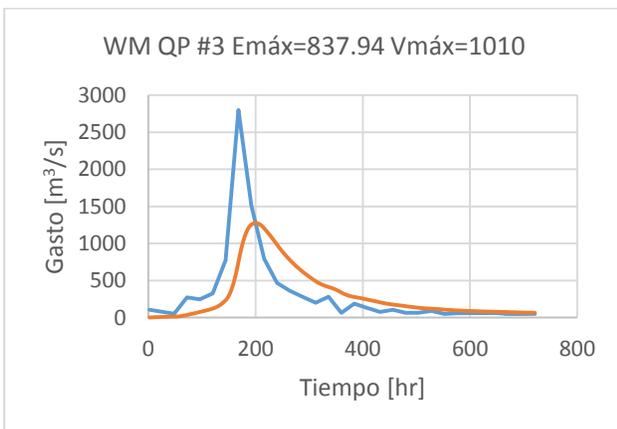


Figura 6.14 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #3 forma 1995

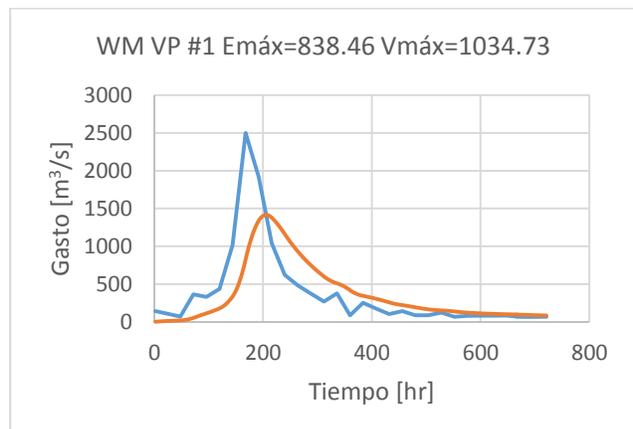


Figura 6.15 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #1 forma 1995

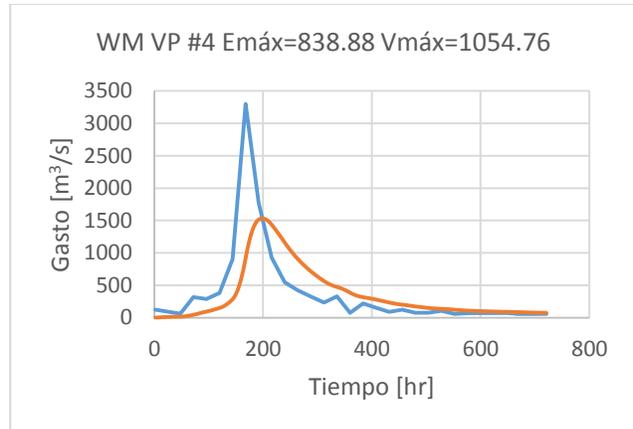
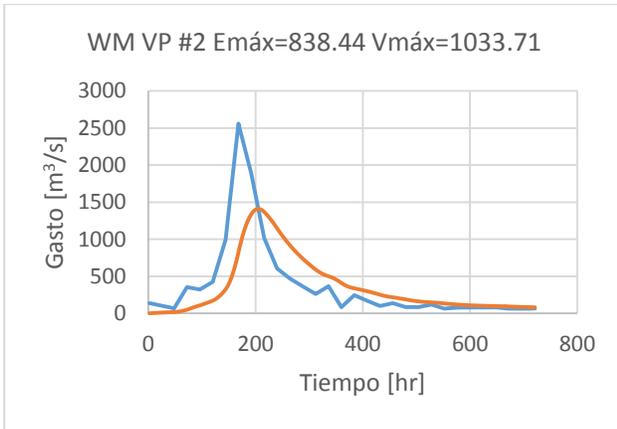


Figura 6.16 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #2 forma 1995

Figura 6.17 Hidrograma de salida resultado de tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #4 forma 1995

Se entiende que el hidrograma bivariado de duración de 35 días a periodo de retorno conjunto de 10,000 años correspondiente al caso de volumen prioridad Weibull mixta es aquel que tras el tránsito de avenidas alcanza la elevación máxima en el embalse y por consecuencia el máximo volumen de almacenamiento. Es más evidente en las figuras siguientes:

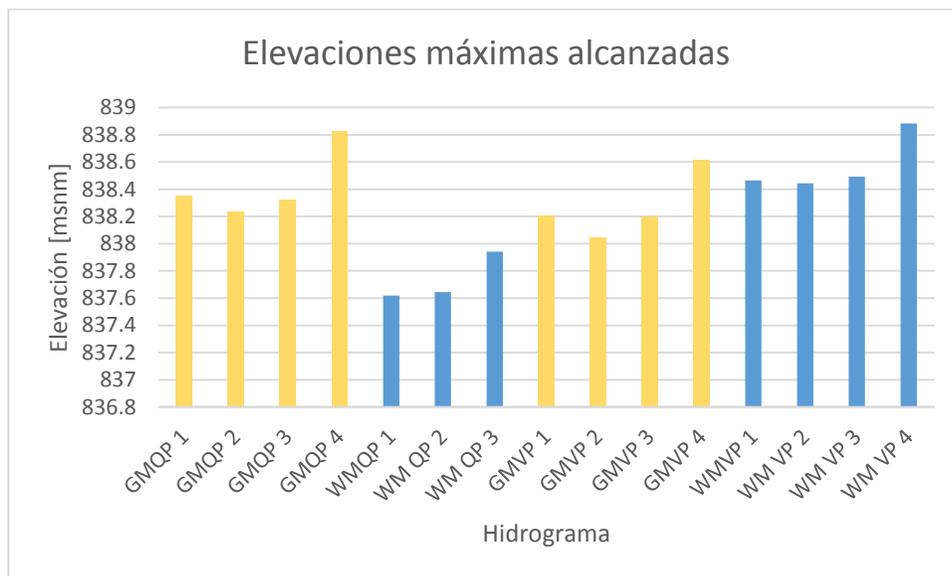


Figura 6.18 Elevaciones máximas alcanzadas para cada caso de cálculo

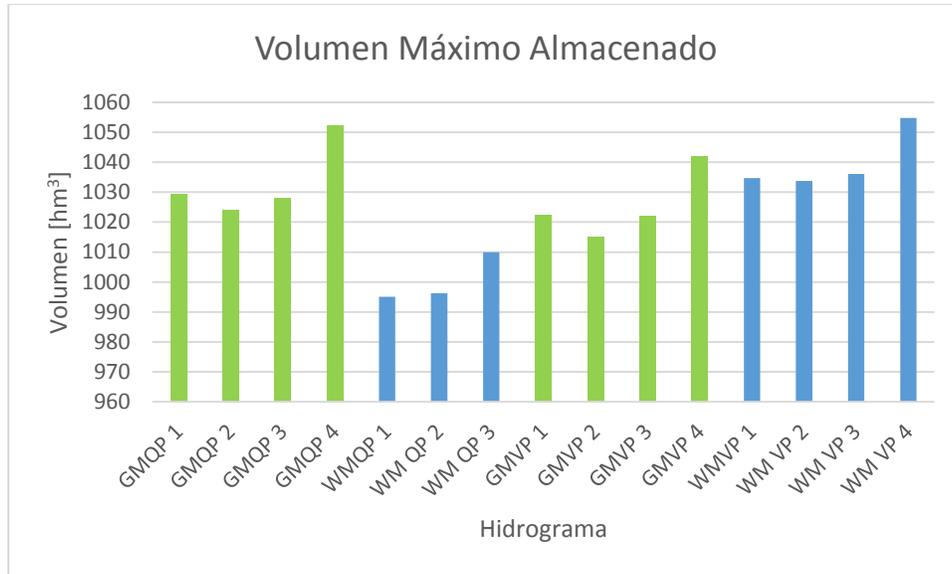


Figura 6.19 Volumen máximo almacenado durante el tránsito de avenida para cada caso, 35 días de duración

### 6.1.2 Duración 10 días

De la misma forma que se realizó el tránsito de avenidas para los hidrogramas correspondientes a la duración de 35 días se hará para los seis hidrogramas generados para la duración de 10 días. La curva elevaciones-capacidades y la elevaciones-descargas son las mismas, el nivel inicial al NAMO se mantiene; por lo tanto, el único cambio es el hidrograma de entrada.

El proceso se realiza de nueva cuenta en el software desarrollado en lenguaje C++ las parejas Q-V correspondientes a los hidrogramas de diseño generados en el capítulo 5 se muestran en la tabla 6.3.

Tabla 6.3 Hidrogramas bivariados elegidos a transitar por el vaso de la presa La Angostura para el criterio de Gasto Prioridad y Volumen Prioridad, duración 10 días.

10 días								
Tr=10,000 años, 10 días								
hidrograma	WEIBULL MIXTA				GUMBEL MIXTA			
	Gasto Prioridad		Volumen Prioridad		Gasto Prioridad		Volumen Prioridad	
	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]	Gasto [m <sup>3</sup> /s]	Volumen [m <sup>3</sup> /s día]
1	2380	7245.2232	2600	8132.735	2950	10407.21	2400	10289.549
2	2450	7124.423	2650	7794.98	3200	9870.081	2550	9984.8141
3	2700	7104.4545	3000	7698.449	3600	9834.689	3100	9949.9529

Se transitaron los 4 hidrogramas correspondientes a cada forma para cada pareja y se encontraron las elevaciones máximas alcanzadas en el vaso de la presa La Angostura, las cuales se muestran a continuación.

Tabla 6.4 Elevación máxima alcanzada en el vaso de la presa La Angostura para cada hidrograma de diseño creado para cada pareja Q-V, duración 10 días.

Hidrograma	Elevación por Forma [msnm]				
	1949	1967	1995	2005	Máximo
WMQP 1	836.848	836.264	837.4068	837.0177	1995
WM QP 2	836.879	836.205	837.3746	836.9838	1995
WM QP 3	837.114	836.214	837.4993	837.0982	1995
WMVP 1	837.321	836.75	837.9951	837.5845	1995
WM VP 2	837.27	836.579	837.8378	837.4288	1995
WM VP 3	837.57	836.556	837.9821	837.5543	1995
GMQP 1	838.27369	837.898	839.3268	838.8886	1995
GMQP 2	838.35718	837.668	837.8458	838.7174	2005
GMQP 3	838.7063	837.688	839.3555	838.8824	1995
GMVP 1	837.7356	837.783	839.0663	838.649	1995
GMVP 2	837.79254	837.657	838.9575	838.5366	1995
GMVP 3	838.28827	837.697	839.1618	838.7151	1995

Al igual que en la duración de 35 días, los hidrogramas con la forma correspondiente al año de 1995 resultan aquellos que resultan más desfavorables, a excepción del caso GM-QP 2 que resulto con la forma de 2005.

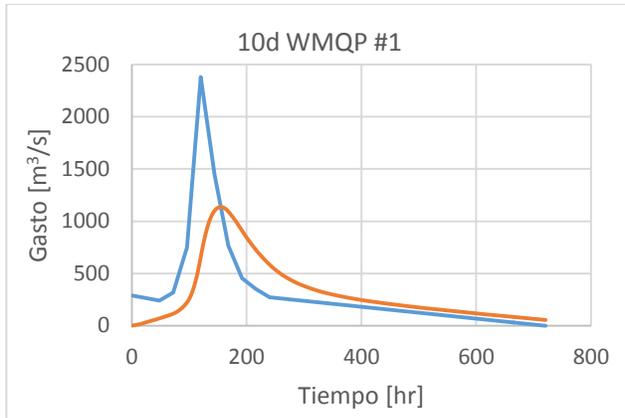


Figura 6.20 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #1 forma 1995, 10 días.

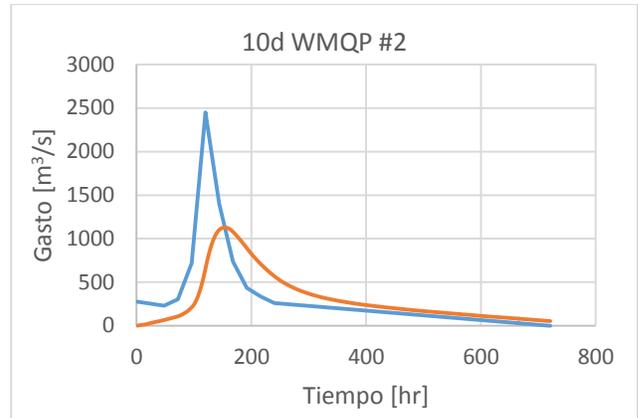


Figura 6.21 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #2 forma 1995, 10 días.

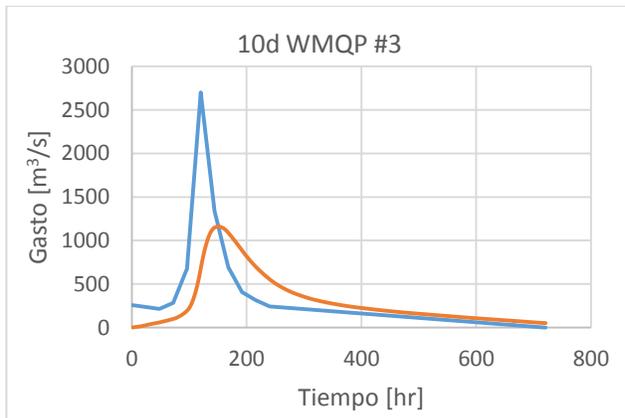


Figura 6.22 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-QP #3 forma 1995, 10 días.

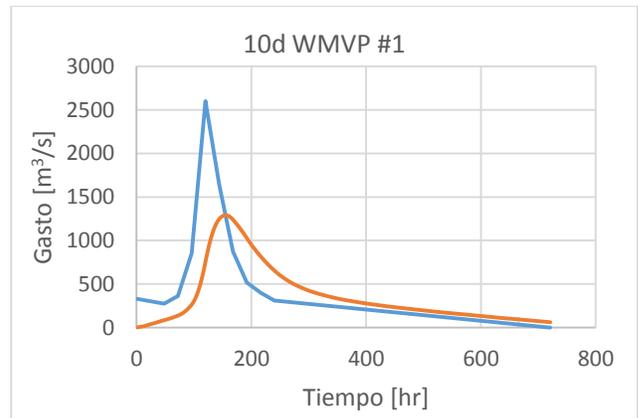


Figura 6.23 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #1 forma 1995, 10 días.

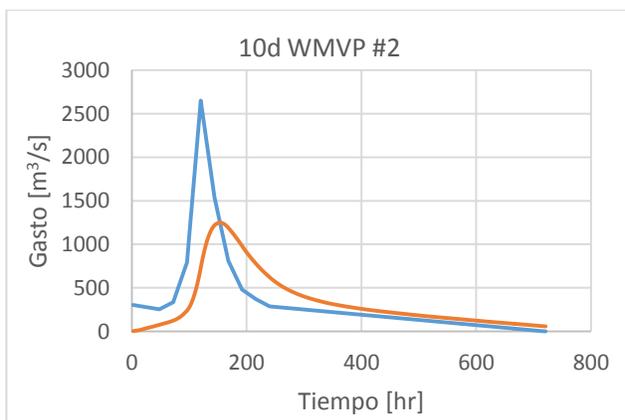


Figura 6.24 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #2 forma 1995, 10 días.

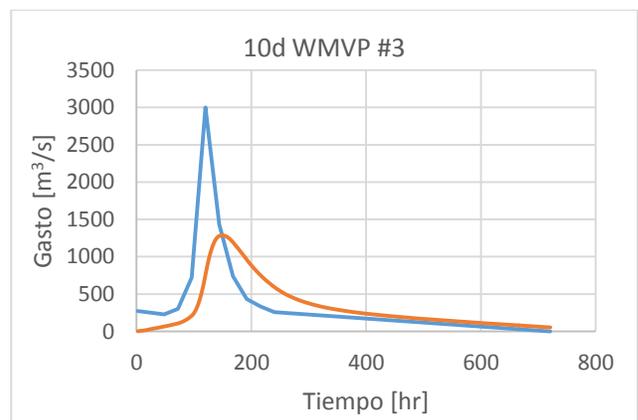


Figura 6.25 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada WM-VP #3 forma 1995, 10 días.

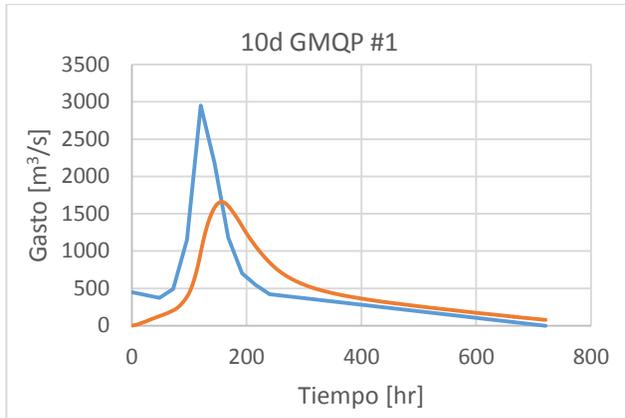


Figura 6.26 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #1 forma 1995, 10 días.

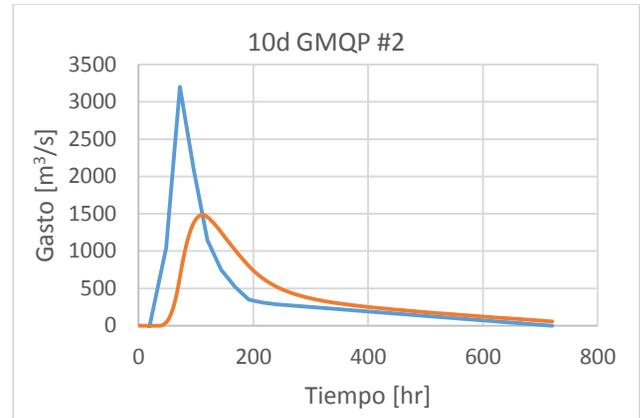


Figura 6.27 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #2 forma 2005, 10 días.

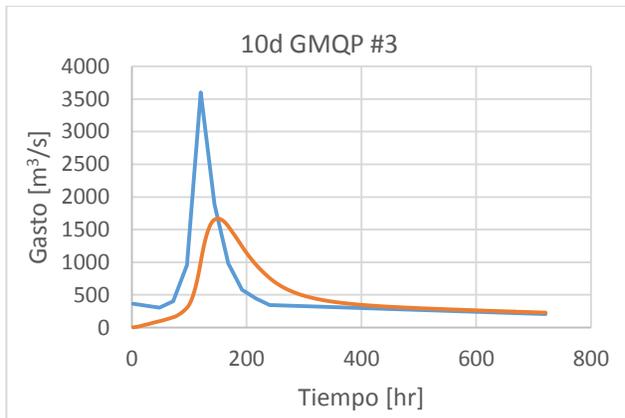


Figura 6.28 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-QP #3 forma 1995, 10 días.

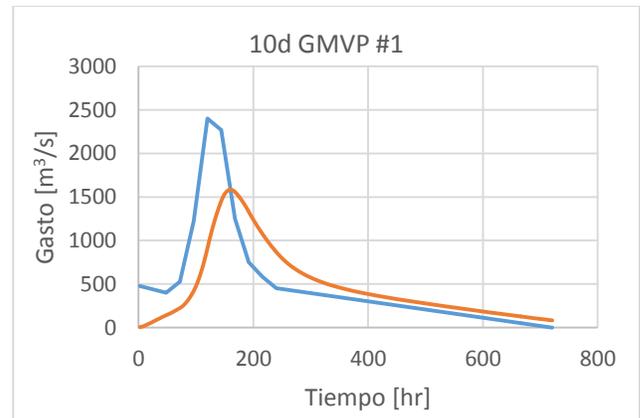


Figura 6.29 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #1 forma 1995, 10 días.

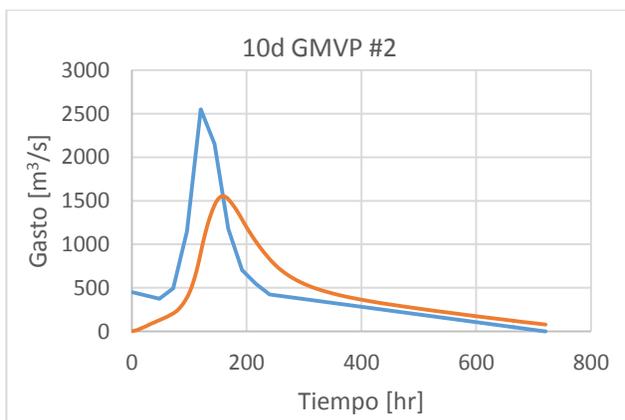


Figura 6.30 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #2 forma 1995, 10 días

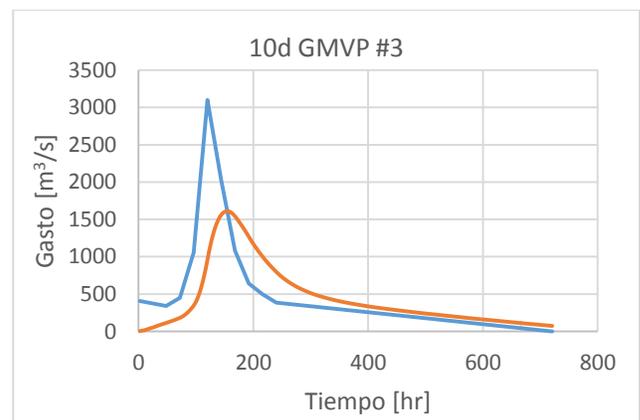


Figura 6.31 Hidrograma de salida que resulta del tránsito de avenidas para el hidrograma de entrada GM-VP #3 forma 1995, 10 días

Para esta duración, la máxima elevación en el embalse alcanzada es de 839.35 msnm resultante de transitar el hidrograma correspondiente al caso de gasto prioridad mediante la función gumbel mixta para la pareja con gasto de 3600 m<sup>3</sup>/s y volumen de 9834.689 m<sup>3</sup>/s día.

Graficamente las elevaciones máximas alcanzadas por caso de analisis se muestra en la figura 6.32.



Figura 6.32 Elevaciones máximas alcanzadas en el vaso de la presa La Angostura, 10 días

## Capítulo 7

# Análisis de Resultados

Se ha aplicado la metodología descrita buscando obtener hidrogramas de diseño correspondientes a dos duraciones, 10 y 35 días respectivamente, seleccionado dos variables (gasto y volumen) de la información de los registros de manera diferente, utilizando el criterio de gasto prioridad y el de volumen prioridad y posteriormente ajustándolos a funciones de distribución de probabilidad y de forma conjunta con la cópula bivariada Gumbel-Hougaard. Al variar esta información los resultados obtenidos para un hidrograma de diseño correspondiente a un periodo de retorno de 10,000 años son diferentes entre sí a pesar de que son hidrogramas generados para el mismo sitio de estudio. A continuación, se realizará un análisis a los resultados obtenidos.

Es evidente que cambiar la duración que tendrá el hidrograma de diseño final generará resultados totalmente diferentes, en aquel que la duración sea mayor, el volumen correspondiente también lo será.

### **Análisis de la extrapolación bivariada a periodos de retorno conjuntos.**

Para seleccionar las parejas de gasto y volumen con las cuales se formaron los hidrogramas de diseño a transitar por el vaso de la presa La Angostura, se crearon isolíneas de parejas Q-V correspondientes al mismo periodo de retorno, se explica su obtención en el capítulo 4.

En total se cuentan con las curvas para GM-QP, GM-VP, WM-GP, WM-VP, GamM-QP y GamM-VP para los periodos de retorno de 100, 1000 y 10,000 años, para tiempo base de 35 días y con las isólineas GMQP, WMQP, GMVP, WMVP al periodo de retorno de 10,000 años para 10 días de tiempo base; todas mostradas en el capítulo 4.

A continuación, se mostrará una comparación entre las curvas calculadas para cada Tr y tiempo de base

Para los tres periodos de retorno elegidos, 100, 1000 y 10,000 años se muestran las curvas obtenidas a continuación:

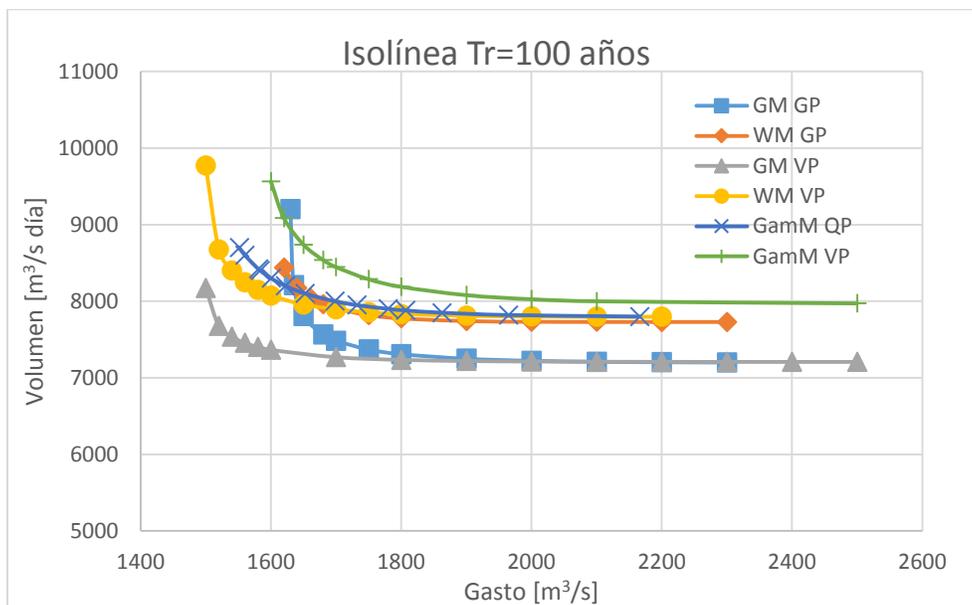


Figura 7.1 Isólineas Q-V Tr=100 años calculadas para la duración de 35 días

En esta curva correspondiente al periodo de retorno conjunto de 100 años se observa que la variación entre los valores de volumen correspondientes al gasto tiene diferencias entre sí, pero se mantienen del mismo orden y con el mismo comportamiento, se puede decir que la prueba de bondad de ajuste elegida debe ser suficiente para elegir los valores correspondientes para el hidrograma final. La función que estima valores más grandes es la Gamma Mixta por Volumen Prioridad y la que estima los valores menores es sin duda el caso Gumbel Mixta Volumen Prioridad.

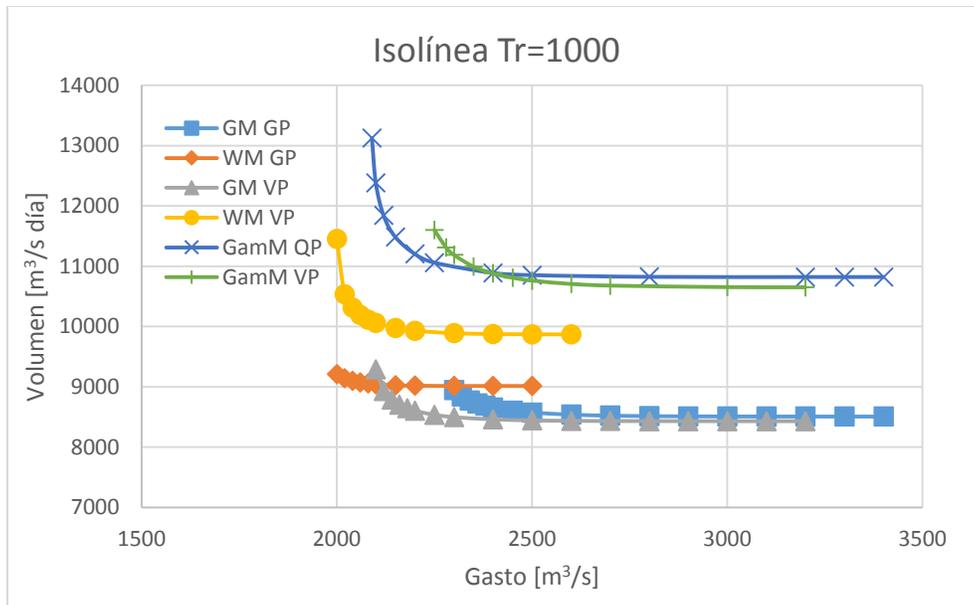


Figura 7.2 Isoléneas Q-V Tr=1000 años calculadas para la duración de 35 días

Para el periodo de retorno de 1000 años las diferencias en las curvas se vuelven un poco más notorias, existen espacios más grandes entre ellas, siendo las isolíneas de Gamma mixta por los dos criterios aquellos que estiman valores más grandes. La Weibull mixta VP (curva amarilla) tiene un comportamiento sumamente aceptable, pues se forma muy bien la curva y varía entre gasto y volumen en medio de las demás curvas. Las 3 isolíneas restantes se recortan muy rápido en dirección de los gastos pequeños y se vuelven asintóticas de forma lenta hacia los gastos positivos.

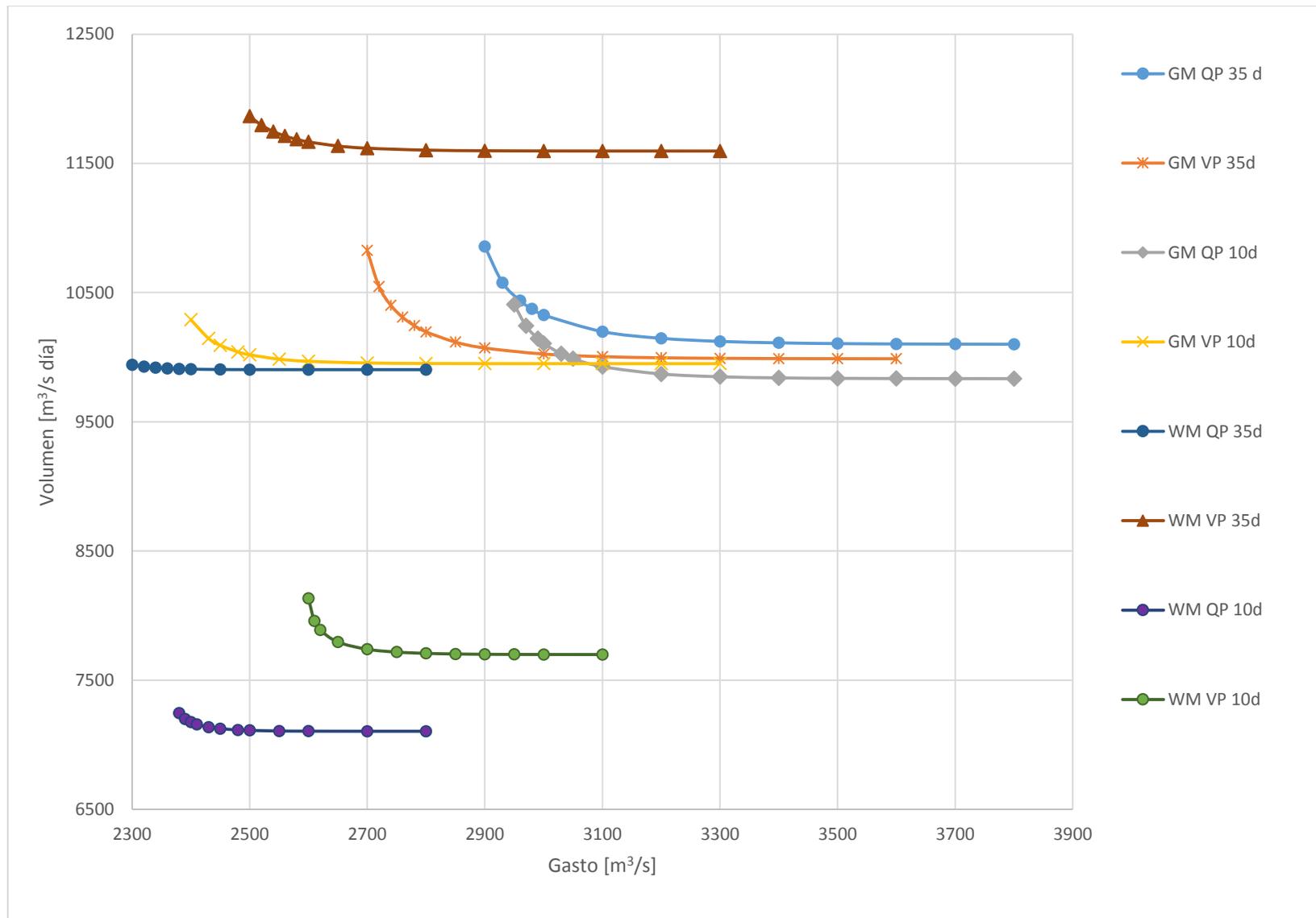


Figura 7.3. Isolíneas Q-V  $Tr=10,000$  años calculadas para la duración de 10 y 35 días.

Para las isolíneas correspondientes a las parejas gasto-volumen del periodo de retorno de 10,000 años, se nota una mayor diferencia en el comportamiento que tienen las curvas correspondientes, a los ajustes Gumbel mixta de los Weibull mixta, para el caso de esta última para el criterio de volumen prioridad da valores de volumen más grandes que los otros tres casos, y es la curva que genera el mejor ajuste según la prueba de Kolmogórov-Smirnov como se explica en el capítulo 5. Las curvas Gamma Mixta se separaron aún más de las demás con valores más grande por cerca de 2000 m<sup>3</sup>/s día.

Comparando las curvas correspondientes a 35 y 10 días es posible verificar que una duración mayor repercute en un volumen de diseño mayor, los valores de gasto son muy parecidos entre sí.

Se aprecia que entre más crezca el periodo de retorno para la extrapolación, las curvas tienden a diferenciarse más entre sí esto es debido a la forma que tienen las funciones de probabilidad en sus colas, se debe tener cuidado en seleccionar aquella que estime de forma adecuada. Es notorio que en los casos de gasto prioridad se extrapolan valores de gasto más grandes, es decir se recorren a la derecha las curvas, y en los de volumen prioridad se recorren en la dirección del eje de las ordenadas, es decir el volumen extrapolado es mayor. Es importante resaltar esta diferencia pues elegir uno u otro criterio si influirá en los resultados finales para la creación del hidrograma de diseño, y es obligación del ingeniero decidir adecuadamente el criterio de acuerdo al objetivo del hidrograma.

Tras analizar las isolíneas mostradas se puede decir que las funciones de probabilidad utilizadas para realizar los ajustes marginales influyen directamente en los resultados de la estimación bivariada, esto a su vez también es afectado por la selección de datos, con esto, el método propuesto provee las mejores herramientas para poder realizar la estimación más adecuada de acuerdo a las necesidades.

Se recomienda tras haber realizado la estimación bivariada, utilizar para la creación del hidrograma de diseño final, basarse en las pruebas de bondad bivariadas (Kolmogórov-Smirnov y Akaike) para con ellas decidir el caso con mejor estimación.

### Análisis de las pruebas de bondad de ajuste

Como ya se revisó en el capítulo 4, se han aplicado las pruebas de Kolmogórov-Smirnov y el criterio de información de Akaike para las estimaciones bivariadas, con ellas es posible tomar una decisión de cual caso de estudio es mejor, los resultados se muestran en las tablas 4.39 y 4.43.

Tabla 7.1 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas

	Gasto Prioridad			Volumen Prioridad		
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gamma Mixta
K-S	0.08640	0.07333	0.07650	0.06164	0.05334	0.62485
CIA	-28.03711	-27.90840	-28.14937	-33.47087	-30.09010	-21.17512

Tabla 7.2 Resultados de las pruebas de bondad de ajuste para las estimaciones bivariadas, duración 10 días

	Gasto Prioridad		Volumen Prioridad	
	Gumbel Mixta	Weibull Mixta	Gumbel Mixta	Weibull Mixta
K-S	0.0946	0.0657	0.0666	0.0577
CIA	-53.5097	-53.6032	-65.6204	-66.4970

En ellas se aprecia que para la duración de 35 días la mejor estimación resulto para el caso WM-VP y para 10 días fue de la misma forma WM-VP, este resultado es peculiar, pero lo que indica es que esta selección de datos y ajustes marginales es la que probabilísticamente resulta más adecuada de utilizar y nos genera la menor incertidumbre posible y el único cambio está en el valor del volumen, es mayor para la duración de 35 días.

Para el caso de gasto prioridad si se deseará utilizar debido a que la importancia de la estructura está en el gasto, la mejor opción sigue siendo con la función Weibull mixta, indicándonos que esta función es la que mejor se asemeja al escurrimiento natural del río.

### Análisis de los tránsitos de avenida

Para la duración de 35 días se han obtenido 60 hidrogramas de diseño correspondientes a los criterios de selección de datos, ajustes marginales y formas de hidrograma, los 60 se han transitado a través del vaso de almacenamiento de la presa Gral. Lázaro Cárdenas “La

Angostura". Y para la duración de 10 días de la misma forma se han transitado 36 hidrogramas calculados.

Con ellos se han obtenido las máximas elevaciones posibles en el embalse la mayoría resultado con la forma del año de 1995; las cuales se muestran en las tablas 6.2 y 6.4. La mayor se presentó al transitar el hidrograma de diseño correspondiente al caso WM-VP#4 para 35 días, ahora si se revisa en la isolínea correspondiente en la figura 7.3, es la que estima mayor volumen, y de los caudales más grandes, al ser además el #4 (que es tomado de la cola de las isolíneas en el eje de las abscisas) es más grande el gasto que el resto de los valores de la curva, entonces esto nos indica que el vaso es más sensible al gasto.

Se supondría que el tránsito de avenidas correspondiente a 10 días alcanza elevaciones menores a los de 35 días, debido a que corresponden a un menor volumen de agua, pero no resultado así para todos los casos, mientras que para los hidrogramas de 10d caso Weibull mixta si resultaron menores, no fue así para los Gumbel mixta, que alcanzaron elevaciones mayores en el embalse, esto se debe a que a pesar de que es menor volumen, una gran cantidad se concentra en los 10 días de duración lo que hace que el embalse reaccione a ello y se eleve el nivel del agua. En la figura 7.4 se muestra la comparación de dos hidrogramas uno de 35 días (GMQP #4) y el otro de 10 (GMQP #4), ahí se aprecia que el segundo escurre más agua en determinado tiempo.

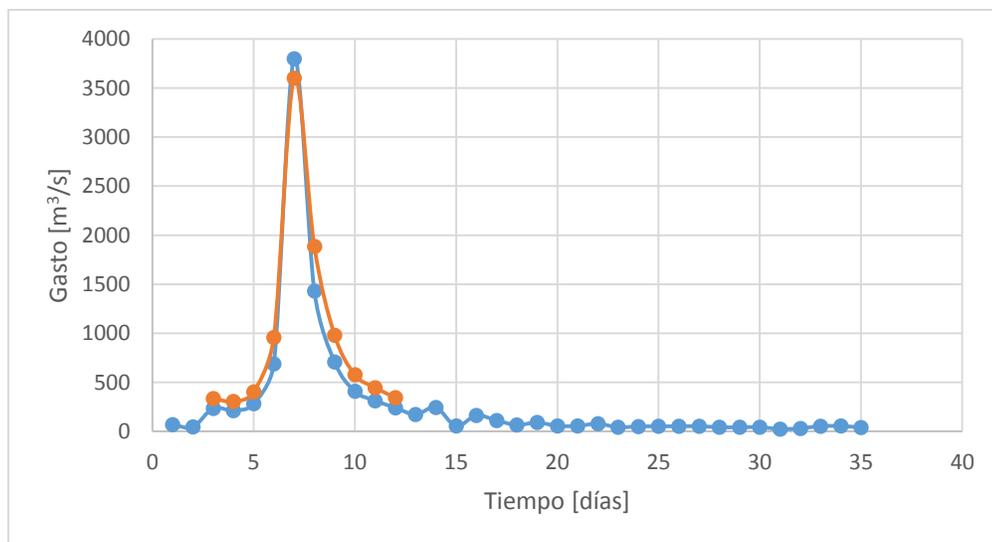


Figura 7.4 Hidrogramas GMQP#4 35d vs GMQP#4 10d

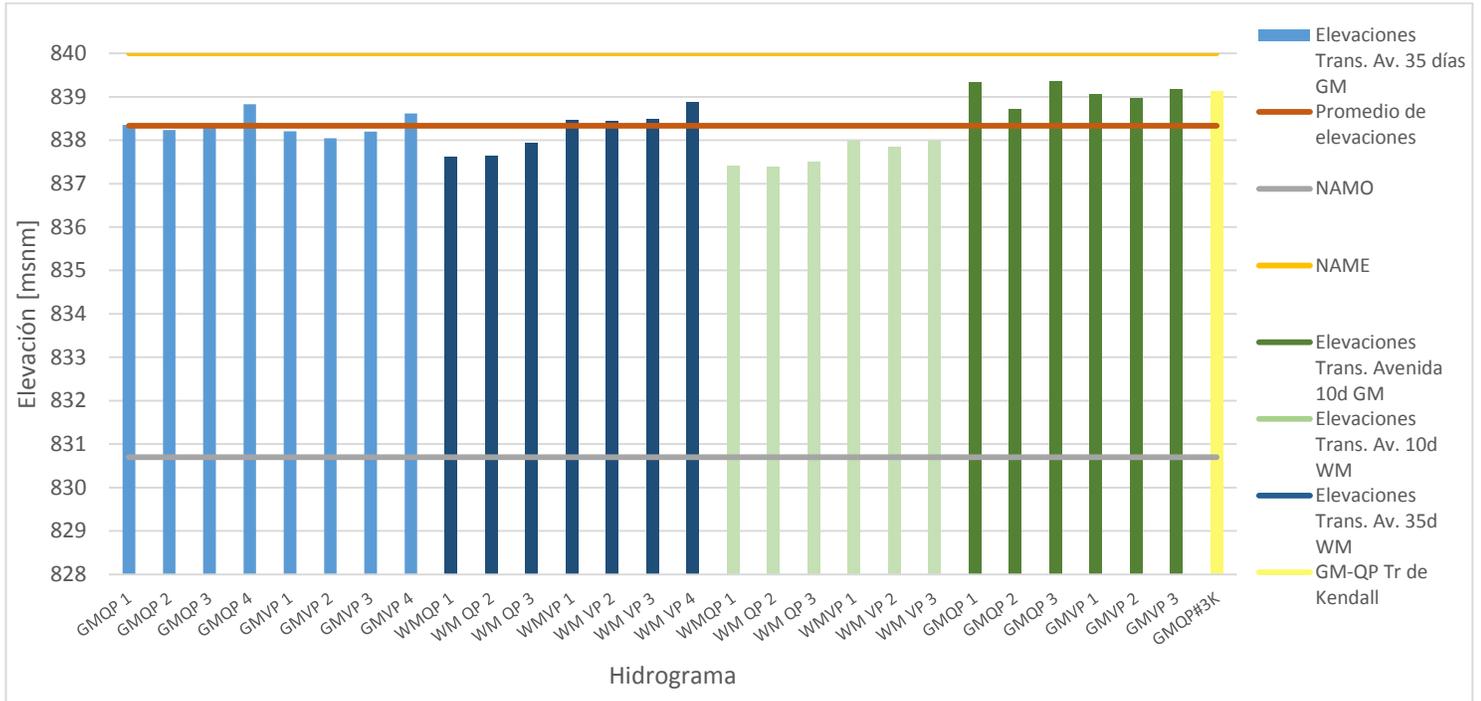


Figura 7.5 Elevaciones máximas alcanzadas para todos los tránsitos de avenida

Entre todos los hidrogramas calculados se cuenta con unos mejor estimados que otros según las pruebas de bondad, otros con gastos y volúmenes más grandes, pero en la figura 7.5 se verifica que en ningún caso se alcanzó o sobrepasó la elevación 840.00 msnm correspondiente al NAME de la presa, con lo cual se asume que la presa es segura.

Considerando además que los hidrogramas correspondientes a ambas duraciones del caso WM-VP resultaron aquellos que se aproximan mejor al comportamiento real según las pruebas de bondad de ajuste, la presa se considera segura.

Adicionalmente, se realizó la estimación de un hidrograma de diseño que generó la mayor elevación en el embalse tras el tránsito de avenidas (caso Gumbel Mixta Gasto Prioridad para la duración de 10 días) considerando el periodo de retorno Kendall ya que en varios artículos técnicos consideran que con él se hace una mejor estimación que con la conseguida con el periodo de retorno usado ( $Tr_{OR}$ , Capítulo 4) en esta tesis (Serinaldi,2014).

Para utilizar  $Tr_{KEN}$  se obtuvo el valor de la función de Kendall  $K_C(t)$  a partir del parámetro  $\theta$  de la cópula calculado.

La estimación de  $Tr_{KEN}$  se basó en la probabilidad de no excedencia asociada  $t = 0.9999$ . El valor de  $\theta$  obtenido en el ajuste bivariado para el caso GM-Qp fue de 2.3913.

La función Kendall está dada como

$$K(t) = K_c(t) - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}$$

Donde  $\phi(t) = [-Ln(K_c(t))]^\theta$  ;  $\phi'(t) = -\theta[-Ln(K_c(t))]^{\theta-1} \frac{1}{K_c(t)}$

Se encontró que para  $t = 0.9999$  la función Kendall toma el valor 0.99978268 por lo que el periodo de retorno  $T_{KEN} = \frac{1}{1 - K_c(t)} = \frac{1}{1 - 0.999828} = 5818.64$

Para el periodo de retorno igual a 5818.64 se siguió el mismo procedimiento como si hubiese sido 10000 obteniendo la figura 7.6

De la curva de la figura x se tomó la pareja  $Q=3600 \text{ m}^3/\text{s}$  y  $V=9316.87 \text{ m}^3/\text{s día}$  y se se calculó el hidrograma de diseño con la forma del hidrograma histórico escogido para el año 1995 que se muestra en la 7.7.

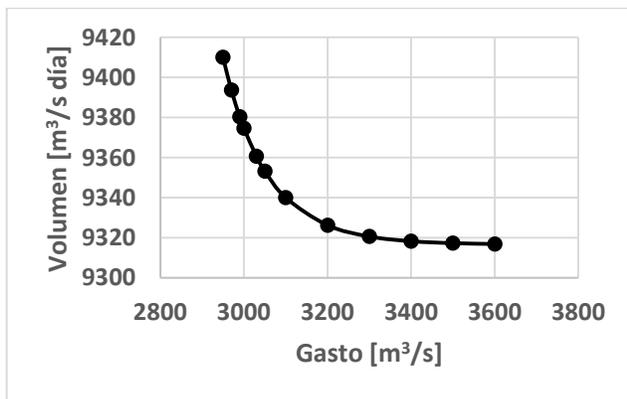


Figura 7.6 Isolinia Q-V GM-QP con el periodo de retorno de Kendall  $Tr_{KEN}=5818$  años ( $Tr=10,000$  años)

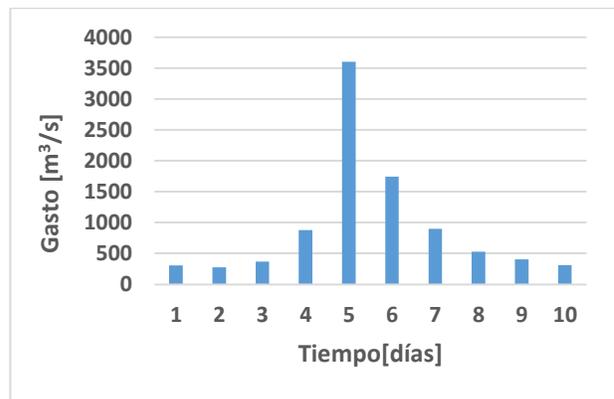


Figura 7.7 Hidrograma de diseño GM-QP 10 d

El hidrograma de la figura 7.7 se transitó por el vaso de la presa La Angostura y se encontró el hidrograma de salida mostrado en la figura 7.8

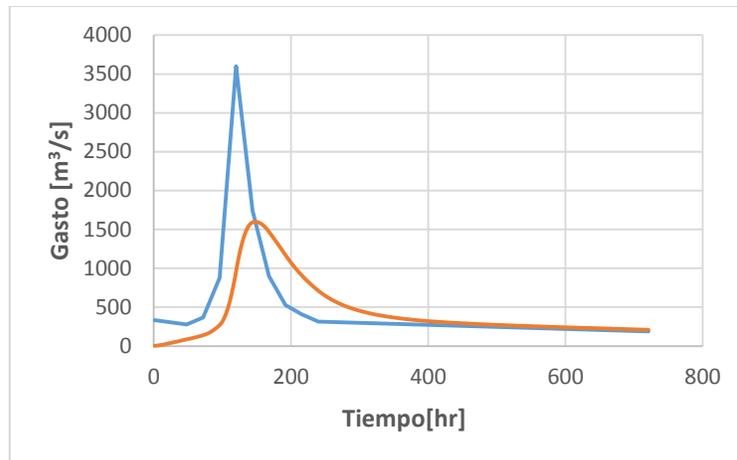


Figura 7.8 Hidrograma de entrada y salida GM-QP 10d con el Tr de Kendall

La elevación máxima alcanzada en el embalse para este caso, resultó ser la 839.11 msnm (en lugar de la elevación 839.35 msnm) pero sigue correspondiendo a la elevación más alta en el embalse.

## Capítulo 8

# Conclusiones

La metodología propuesta permitió estimar hidrogramas de diseño a partir de información hidrométrica tratando de considerar varios aspectos importantes de los hidrogramas registrados.

Los criterios de selección de datos propuestos denominados Gasto Prioridad y Volumen Prioridad resultaron adecuados, puesto que con base en el uso que se le dará al hidrograma de diseño buscado, se podrá elegir el criterio que mejor se adapte a las necesidades. Además, ambos criterios ayudan a procesar la información registrada manteniendo varias características observadas en el escurrimiento histórico.

La duración del hidrograma es una variable importante que es elegida a partir de los espectros de densidad de potencia de un conjunto de más de 100 gastos medios diarios consecutivos registrados.

Se recomienda el uso del método de los momentos en la estimación de los parámetros para disponer de valores iniciales de las variables desconocidas cuando se usa el método de máxima verosimilitud.

A pesar de que en los ajustes de la funciones de probabilidad marginales para los datos del ejemplo de aplicación, la mejor estimación según las pruebas de bondad de ajuste resultó ser con la función Lognormal, fue descartada, debido a que para el estudio de los niveles de agua máximos en la presa La Angostura, Sonora se necesitan hidrogramas de periodo de retorno

de 10,000 años, y las extrapolaciones marginales a dicho periodo con esta distribución resultaron ser mucho más grandes que las obtenidas con otras distribuciones de probabilidad. Por lo que se debe considerar a las pruebas de bondad de ajuste como una herramienta de selección y no como una ley.

El valor del logaritmo de la función verosimilitud máximo puede ser usado como una prueba de bondad de ajuste; como es negativo, el que sea más cercano a cero correspondería al mejor ajuste; de hecho, esta idea se considera en el criterio de Akaike.

Las pruebas de Kolmogórov-Smirnov y Anderson-Darling analizan los valores estimados de acuerdo a su probabilidad de ocurrencia, por lo que se recomienda su uso en la estimación hidrológica.

Los resultados de las pruebas del valor de la máxima verosimilitud y el criterio de información de Akaike obtenidos para los ajustes con funciones que utilizan logaritmos como lo son la Lognormal y Loggamma no son comparables con las funciones que no usan logaritmos, esto debido a que se transforman al tomar los logaritmos de los datos de entrada para esta distribución y en las demás no.

Al aplicar la cópula Gumbel-Hougaard es posible utilizar diferentes funciones para calcular la probabilidad  $F(x)$  y  $F(v)$  sin importar el número de parámetros de tales funciones.

La cópula además se puede decir que cuenta con un solo parámetro,  $\theta$  cuya obtención es mediante el método semiparamétrico.

Los periodos de retorno conjunto  $Tr_{OR}$ ,  $Tr_{AND}$  y  $Tr_{KEN}$  expresan las posibles condiciones de falla en caso de tener dos variables que se consideran importantes para fines de diseño. La elección del periodo de retorno conjunto más apropiado depende de qué evento es crítico para el sistema investigado (todas las variables deben superar una cierta magnitud ( $Tr_{AND}$ ), al menos una variable debe ser mayor que un umbral ( $Tr_{OR}$ )).

En caso de que la condición de falla se cumple cuando una o ambas variables de descarga pico  $Q$  y volumen de inundación  $V$  superan su umbral, los  $Tr_{OR}$  deben tenerse en cuenta.

Los enfoques basados en Kendall tienen la ventaja de usar una forma matemáticamente consistente de definir la probabilidad de eventos extremos o peligrosos que dependen de la distribución de probabilidad como en el enfoque univariado.

En la revisión del diseño de obras hidráulicas, es posible calcular isolíneas del gasto y volumen para el mismo periodo de retorno, como las creadas en el capítulo 4. Si la pareja de valores de gasto de pico y volumen de diseño queda por debajo de la isolínea que representa a la función significa que la obra estaría en riesgo de daño, si dichos valores se localiza en la curva citada o por encima de ella, se considerará que la obra es segura.

La forma del hidrograma propuesta resulta en una manera útil en crear un hidrograma bivariado con características similares a las observadas en los hidrogramas registrados que cumple tanto el gasto como con el volumen estimado.

La máxima elevación del nivel del agua en la presa alcanzada en los tránsitos de avenidas resultado para el hidrograma de tiempo base 10 días, fue para el hidrograma con gasto de pico  $3600 \text{ m}^3/\text{s}$  y volumen de  $9,834.69 \text{ m}^3 \text{ día}/\text{s}$  obtenido con la distribución bivariada Gumbel mixta con el criterio de gasto prioridad.

La presa La Angostura tras transitar por su vaso todos los hidrogramas de diseño calculados no se ve rebasado el NAME por lo cual la presa se considera segura.

Las máximas elevaciones alcanzadas en el embalse corresponden a las parejas Q-V tomadas del final de la isolínea de  $T_r=10,000$  años para cada caso, las cuales poseen el mayor gasto y el mínimo volumen, lo que indica que el vaso de la presa La Angostura es más sensible al gasto, esto no necesariamente sucede en todas las presas, es un resultado particular.

Las funciones de probabilidad elegidas para los ajustes marginales tienen influencia directa en los resultados de Q-V obtenidos con la cópula Gumbel-Hougaard.

Con una serie de registros amplios, una buena elección del tiempo de base, buenos ajustes marginales seleccionados y una aplicación de la cópula precisa, el método arroja resultados sumamente adecuados para el uso de hidrogramas de diseño en cualquier necesidad. El método debe ser considerado para su uso en todos los casos.

# Bibliografía

**Zhang L. Singh V.** (2007). Trivariate Flood Frequency Analysis Using the Gumbel–Hougaard Copula. *Journal of Hydrologic Engineering* © ASCE, july/august, 431-439. 02/15/18, de ascelibrary.org Base de datos.

**Aparicio, J.** (2008). *Fundamentos de Hidrología de Superficie*. México: Limusa.

**Kite G.W.** (1998) *Frequency and Risk Analyses in Hydrology*, Water Resources Publications, U.S.A.

**Forbes C. Evans M. Hastings N. & Peacock B.** (2011) *Statistical Distributions* 4th edition, U.S.A. Wiley.

**Sklar A.** (1973) Random Variables, Joint Distribution Functions, and Copulas\*, *Kybernetika* Vol 9 Number 6, 449-460.

**Anderson T. W. & Darling D. A.** (1952, June). Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes. *The Annals of Mathematical Statistics*, 23, 193-212. 2007, Aug 29, The JSTOR Archive.

**Copca, E.** (2017) Comparación de Dos Métodos para Obtención de Hidrogramas de Diseño que Relacionan al Volumen con el Caudal Máximo, México. F.I. UNAM.

**Nathabandu T.K. & Renzo R.** (2008). *Applied Statistics for Civil and Environmental Engineers*. UK: McGraw.Hill.

**Fuentes O., Domínguez R., Arganis M., Herrera J., Carrizoza E. & Sánchez J.** (2015, June 21). Estimate of Design Hydrographs for the Angostura Dam, Sonora, Using Statistical and Spectral Methods. *Springer Science+Business Media Dordrecht*, 2015, 4021-4043. 2018, Sep 19, De Water Resources Management.

**Domínguez R., Arganis M., Carrizoza E., Mendoza R., Reyes H., Carabela J. & Gúzman H.** (2011). *Actualización de Avenidas de Diseño y Determinación de Políticas de Operación de las Presas del río Yaqui*. México: F.I. UNAM.

**Gómez, G. F.** (2015). *Actualización de las Avenidas de Diseño para la Operación de los Vertedores de la Presa Infiernillo*. México: F.I. UNAM.

**Palacios S.** (2010). *Tormentas de Diseño en el Río Grijalva*. México: F.I. UNAM.

- Domínguez R. & Arganis M.** (2012, march 28). Validation of Methods to Estimate Design Discharge Flow Rates For Dam Spillways With Large Regulating Capacity. *Hydrological Sciences Journal*, 57, 460-478. 2012, marzo 02, De Taylor Francis Base de datos.
- Fuentes M. O., Arganis M. & Copca E.** (2018) Hidrograma de descarga de una presa calculado con una distribución de probabilidad conjunta de gasto máximo y volumen, XXVIII Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Buenos Aires, Argentina.
- Gringorten I.** (1963) A Plotting Rule for Extreme Probability Paper, *Journal of Geophysical Research*, Vol 68, 813-814.
- Akaike H.** (1974) A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol Ac-19 No 6, 716-723.
- Bowman K. O. & Shenton** (1998) Estimator: Method of Moments, *Encyclopedia of statistical sciences*, Wiley, pp 2092-2098.
- Vázquez, C.M.T.** (1995) Procedimiento sistemático para el cálculo de la avenida de diseño en presas con gran capacidad de regulación. Tesis de Maestría, DEPMI, UNAM.
- ASCE.** (1996). *Hydrology hand-book*, 2nd Ed.
- Coronel Brizio H. & Hernandez Montoya A.** (2010) The Anderson-Darling test of fit for the power law distribution from left censored samples, *Physica A*, Volume 389, Issue 17, 3508-3515.
- Genest, C. & MacKay, R. J.** (1986a), “Copules Archimédiennes et Familles de Lois Bidimensionnelles dont les Marges sont Donnés”, *The Canadian Journal of Statistics* 14, 145–159.
- Genest, C., Ghoudi, K. & Rivest, L..** (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika*, 82, 543-542.
- Genest, C. & Rivest, L.** (1993), Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas, *Journal of the American Statistical Association* 88, 1034–1043.
- Klugman, S. & Parsa, R.** (1999), Fitting Bivariate loss Distributions with Copulas, *Insurance: Mathematics and Economics* 24, 139–148.
- Escarela G. & Hernández A.** (2009) Modelado de parejas aleatorias usando cópulas, *Revista Colombiana de Estadística* 32 33–58.
- Nelsen, R.** (1991), *Advances in Probability Distributions with Given Marginals: Beyond the Copulas*, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, chapter Copulas and Association, pp. 51–74.
- Nelsen, R. B.** (1999), *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, United States.
- Schweizer, B. & Wolff, E. F.** (1981), On Nonparametric Measures of Dependence for Random Variables, *The Annals of Statistics* 9, 879–885.
- Leite R. F.** (2011), Portugal: convencional and bivariate analyses, Instituto superior técnico, Universidade Técnica de Lisboa October 2011.
- Shiau, J., Wang, H. & Tsai, C.** (2006) Bivariate frequency analysis of floods using copulas, *J. Am. Water Resour. As.*, 42, 1549–1564.

**Serinaldi F.** (2014) Dismissing return periods! Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, Volume, 29 Issue 4, 1179-1189.

**Nikoletta S.; Vasiliades, L.; Loukas, A.** (2018) Bivariate Flood Frequency Analysis Using Copulas. *Proceedings*, 2(11), 635.

**Salvadori, G., De Michele, C., and Durante, F.** (2011) On the return period and design in a multivariate framework, *Hydrol. Earth Syst. Sci.*,15, 3293–3305.

**Salvadori, G., De Michele, C., Kottegoda, N., and Rosso, R.** (2007) *Extremes in Nature, An Approach using Copulas*, Springer.

**De Luca D. & Biondi D.** (2007) Bivariate Return Period for Design Hyetograph and Relationship with T-Year Design –flood Peak. *Water* 09 0067.