Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El Toro de Terceras como Sistema Generalizado de Intervalos

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemática

P R E S E N T A :

Almazán Calzada Ruby Lizbeth

TUTOR

Dr. Emilio Esteban Lluis Puebla

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

"¿Acaso no puede describirse la Música como la Matemática de lo sensible y la Matemática como la Música del entendimiento? El alma de cada una, la misma."

-James Joseph Sylvester

Índice general

Agradecimientos

Este trabajo, así como mis estudios se realizaron gracias al apoyo de mis padres, Joel Almazán y Juana Calzada. Muchas gracias por su infinito amor, cariño y paciencia. A mi mamá por motivarme siempre en cualquier situación y a mi papá, por encaminarme en la matemática y creer en mí. A mis hermanas, Pame y Katy, por ser mis primeras mejores amigas. Las noches de desvelo siempre son mejores con ustedes.

De mi familia, también no puedo dejar de mencionar a mis abuelos y abuelas y a mis tíos por siempre estar pendientes de mí y mis hermanas.

A todos los profesores que a lo largo de mi desarrollo escolar que no solo dejaron una huella en mí, sino que se permitieron ayudarme y aconsejarme cuando lo necesitaba. En especial quisiera agradecer profundamente al Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía, al Dr. Alejandro Garciadiego Dantan y al Dr. Emilio Lluis Puebla.
A mis amigos, pero en especial a Mariana Paulín, Mariana Pérez, Alejandro Mendoza, Gibran Aguilar, Roger López, Ana Lissette Díaz, Itzel, Ollin y por supuesto a Andrés Jiménez Lizárraga.

Además, quisiera agradecer a los profesores que aceptaron revisar y dar sugerencias a este trabajo y finalmente darle gracias a mi asesor, el Dr. Emilio E. Lluis Puebla por su guía y apoyo en mi desarrollo escolar, académico y en el proceso de titulación.

Prefacio

La relación entre la Matemática y la Música no es algo nuevo. A Pitágoras se le adjudica el descubrimiento de la relación aritmética de la escala musical. En la Edad Media se enseñaba Música junto con la Geometría y la Astronomía dentro del Cuadrivio. La *Academia Venetiana della Famma* consideraba a la Música como parte de la Matemática. En el primer tratado formal de Descartes, el *Compendium Musicae*, se muestran las propiedades aritméticas de la música. Pasando por el Juego de Dados de Mozart hasta las composiciones desarrolladas usando software , esta relación milenaria sigue desarrollándose con la Teoría Matemática de la Música.

Según Thomas Fiore[1] la Teoría Matemática de la Música usa estructuras y técnicas matemáticas para analizar obras musicales, para estudiar, caracterizar y reconstruir objetos musicales, y finalmente como fuente de inspiración para la composición musical. La presente tesis pretende ofrecer al lector, sea que tenga una formación matemática, musical, ambas o ninguna, un vistazo a una pequeña parte de la relación entre la Matemática y la Música.

David Lewin (2 de julio de 1933- 5 de mayo de 2003) estudió matemática en Harvard y teoría musical y composición en la Universidad de Princeton obteniendo una maestría en Artes en 1958. Dentro de sus escritos desarrolló la *Teoría Transformacional* que expone en el artículo *Generalized Musical Intervals and Transformations*[2]. Lewin moldea las transformaciones musicales como elementos de un grupo matemático y puede utilizarse para analizar la música tonal y atonal. En el segundo capítulo de

[1]Fiore T. What is Mathematical Music Theory?An introduction via Perspectives on Consonant Triads.Presentación del coloquio celebrado en Stony Brook University, 14 de Abril de 2011.

[2]Lewin D. Generalized Musical Intervals and Transformations . Journal of Music Theory. Vol 31. No 2. (1987)

este trabajo se pretende dar una interpretación con un lenguaje matemático formal y actual a la teoría presentada por Lewin, así como algunos ejemplos presentados en el artículo mencionado anteriormente.

Guerino Mazzola (2 de febrero de 1947) desarrolló la Teoría Matemática de la Música junto con los softwares: Presto y Rubato. El Toro de Terceras aparece por primera vez en *The Topos of Music*[3] y se desarrolla con más detalle en *Cool Math for Hot Music*[4]. El tercer capítulo de la tesis desarrolla la construcción del Toro de Terceras partiendo de $\mathbb{Z}_{12}$, junto con una métrica entre los elementos de la escala cromática y el conjunto de simetrías y transformaciones del Toro.

El objetivo principal es mostrar mediante el Toro de Terceras de Mazzola y la Generalización de Intervalos de Lewin ejemplos de sistemas que no tengan que sacrificar la intuición musical por la congruencia matemática y viceversa.

Los resultados principales que se presentan en este trabajo son la definición y demostración de una métrica para los elementos del Toro de Terceras, así como la prueba de que las transformaciones del grupo $T\mathbb{Z}_{12}^*$ son isometrías. Mientras que en el capítulo 4 se probará que $\mathbb{Z}_{12}$ junto con el grupo $(T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ)$ forman un Sistema Generalizado de Intervalos que se encuentra en el punto medio entre la congruencia matemática y la aplicación musical. Cabe mencionar que las pruebas de los Teoremas 2.1 y 3.1, los Lemas 3.1 y 3.2, así como la de la Proposición 4.1 fueron desarrolladas por la autora.

El primer capítulo es una introducción a la Teoría de Grupos donde se incluyen los conceptos necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores. Dentro de la introducción se presentan ejemplos matemáticos y aplicaciones de la Teoría de Grupos a la música. También, se agregó en la parte final un glosario de términos musicales mencionados a lo largo de la tesis.

[3]Mazzola. G. The topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance . Springer. (2002)

[4]Mazzola, Mannone, Pang. Cool Math for Hot Music: A first introduction to Mathematics for Music Theorists . Springer. (2016)

Capítulo 1

Introducción a la Teoría de Grupos

En las páginas siguientes se dará una breve introducción a la Teoría de Grupos, así como ejemplos de aplicaciones a la música y las herramientas necesarias para los capítulos subsecuentes. Este capítulo está basado en los capítulos 17 al 20 del libro Cool Math for Hot Music [1] y en el libro de texto del curso impartido por el Dr. Emilio Lluis Puebla[2].

1.1. Grupos y subgrupos

Definición 1.1. Un **grupo** es una pareja $(G, *)$ donde G es un conjunto y $* : G \times G \to G$ una operación binaria tal que

1. $*$ es asociativa
2. Existe un elemento $e \in G$ tal que $e * g = g * e = g$ para cualquier elemento g de G.
3. Todo elemento de G es invertible, es decir, $\forall g \in G$ existe un elemento al que denotaremos g^{-1} tal que $g * g^{-1} = g^{-1} = e$

[1]Mazzola, Mannone, Pang (2016). Cool Math for Hot Music, A first Introduction to Mathematics for Music Theorist .
Springer International Publishing. Switzerland.

[2]Emilio Lluis Puebla (2014. Teoría de Grupos un primer curso. Publicaciones electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana. Serie: Textos vol. 6.

Si además tenemos que para cualquier par de elementos $g, h \in G$ se cumple que $g * h = h * g$ diremos que es un **grupo conmutativo** o **abeliano**[3].

Diremos que un grupo $(G, *)$ es **finito** si el conjunto G es finito. Si la cardinalidad de G es n diremos que el grupo es de **orden** n y denotaremos $ord(G) = n$.

Definición 1.2. Para dos grupos $(G, *)$ y $(H, *')$ un **homomorfismo de grupos** es una función $f : G \to H$ tal que para cualquier par de elementos g_1 y g_2 en G se tiene que $f(g_1 * g_2) = f(g_1) *' f(g_2)$.

Al conjunto de todos los homomorfismos entre G y H se denota con $Grp(G, H)$. Cuando se tiene que $G = H$ y que los homomorfismos entre ellos son isomorfismos, es decir que todos los homomorfismos son inyectivos y suprayectivos, entonces conjunto de todos los homomorfismos entre G y H resultará ser un grupo con la composición usual de funciones.

Consideremos dos grupos $(G, *)$ y $(H, *')$ con sus respectivos elementos identidad, e_G y e_H, y un homomorfismo $f : G \to H$ entre ellos. Notemos que $f(e_G) = e_H$ ya que si tomamos un elemento $x \in G$ obtendremos que

$$e_H *' f(x) = f(x) = f(e_G * x) = f(e_G)f(x).$$

Si multiplicamos ambos lados por el inverso de f(x) obtendremos

$$e_H *' f(x)f(x)^{-1} = f(e_G) *' f(x) *' f(x)^{-1},$$

de donde

$$e_H = f(e_G).$$

Observemos que para un elemento $x \in G$ junto con su inverso $x^{-1} \in G$ tenemos que

$$f(e_G) = f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1}).$$

[3]Llamado así en honor del matemático noruego Niels H. Abel (5 de agosto de 1802-6 de abril de 1829). Abel probó que no existía ninguna fórmula general para hallar los ceros de los polinomios generales de grado mayor a 5 en términos de sus coeficientes

Además

$$f(x) *' (f(x))^{-1} = f(e_H).$$

Usando lo anterior tendríamos que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Definición 1.3. Se dice que un subconjunto no vacío $H \subset G$ es un **subgrupo** del grupo G si H es cerrada bajo la operación de G y si para cada elemento $h \in H$ sucede que h^{-1} está en H.

Observemos que la definición que acabamos de presentar implica que el elemento identidad del grupo debe de encontrarse también en cada uno de sus subgrupos.

Proposición 1.1. Sea $f : (G, *) \to (H, *')$ un homomorfismo de grupos. Si G' es un subgrupo de G entonces $f(G')$ es un subgrupo de H.

Demostración. Sean $v, w \in f(G')$. Entonces existen x y y elementos de G tales que $f(x) = v$ y $f(y) = w$. Como G' es un subgrupo de G entonces tendremos que $x*y \in G'$, así obtendremos que

$$v *' w = f(x) *' f(y) = f(x * y) \in f(G').$$

También, como f es un homomorfismo tendremos que $f(e_G) = e_H \in f(G')$.

Luego, si x es un elemento de G' subgrupo de G tendremos que $x^{-1} \in G'$. Pero también sabemos que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1} \in f(G')$. Así hemos probado que $f(G')$ es cumple con la propiedad de cerradura bajo la operación definida en H y con que los elementos neutro e inversos estén en $f(G')$. $\square$

Definición 1.4. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Llamaremos al subconjunto

$$ker(f) = \{g \in G | f(g) = e_k\} \subset G$$

el **núcleo de f**. Por otro lado, el subconjunto

$$im(f) = \{f(g) \in K | g \in G\} \subset H$$

se llamará la **imagen de f.**

Proposición 1.2. Sea $f : (G, *) \to (H, *')$ un homomorfismo de grupos. Entonces $im(f)$ es un subgrupo de H y $ker(f)$ es un subgrupo de G.

Demostración. Para ver que $ker(f)$ e $im(f)$ son subgrupos respectivos de G y H debemos de probar que son cerrados bajo las operaciones correspondientes y que los inversos de los elementos se encuentran también.

Primero probemos que $ker(f)$ es un subgrupo de G. Sean $x_1.x_2 \in ker(f)$ tales que $f(x_i) = e_H$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$f(x_1 * x_2) = f(x_1) *' f(x_2) = e_H *' e_H = e_H.$$

De modo que $x_1 * x_2 \in ker(f)$ cumpliendo así la cerradura.

Por otro lado sabemos que $f(e_G) = e_H$ de manera que e_G es un elemento de $ker(f)$. Por último, si suponemos que $x \in ker(f)$ tendremos que

$$e_H = f(e_G) = f(x * x^{-1}) = f(x) *' f(x^{-1}) = e_H *' f(x^{-1}) = f(x^{-1}).$$

De modo que $x^{-1} \in ker(f)$.

Para la prueba de que $im(f)$ es un subgrupo de H utilizaremos el hecho que G es subgrupo de sí mismo y la proposición anterior. De modo que

$$f(G) = im(f) \subset H.$$

□

Dada una familia de subgrupos de G, $\{H_i\}_{i \in I}$, la intersección $\bigcap_{i \in I} H_i$ es un subgrupo de G. Esto por que si h es un elemento de $\cap_{i \in I} H_i$ tendremos que $h \in H_i$ que es un subgrupo de G. Así, para cualquier otro elemento $g \in \bigcap H_i$ tendremos que $g * h$ pertenece a cada H_i implicando que $g * h \in \cap_{i \in I} H_i$. También h^{-1} será elemento de cada H_i para cada $i \in I$, además que el elemento identidad e pertenece a cada H_i de modo que $e \in \bigcap H_i$. Así $\cap_{i \in I} H_i$ es un subgrupo de G.

Definición 1.5. Sea $(G, *)$ un grupo y S un subconjunto de G. La intersección

$$\langle S \rangle = \bigcap H_i,$$

donde $\{H_i\}_{i \in I}$ es la familia de subgrupos de G tales que $S \subseteq H_i$ $\forall i \in I$, es el menor subgrupo de G que contiene a S. Llamaremos a $\langle S \rangle$ el **subgrupo generado por S**.

Ejemplo musical 1

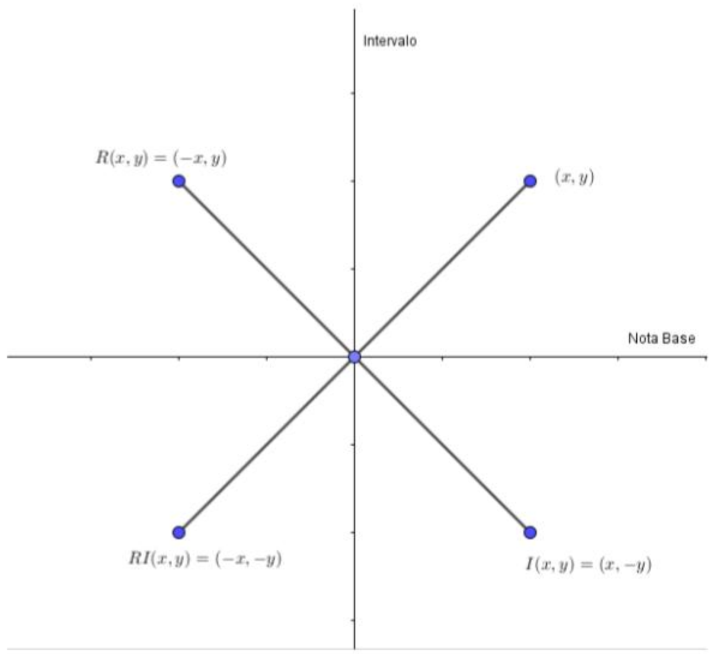
En la Teoría Musical existen al menos 3 acciones para modificar una melodía. La **inversión** revierte el orden de las notas del motivo o el acorde dejando la primera fija. El movimiento **retrógrado** revierte las notas del motivo dejando la primer nota como última y viceversa. La **inversión retrógrada** que es el resultado de aplicar un movimiento retrógrado seguido de una inversión que resulta en la inversión de la melodía en orden inverso desde el último tono hasta el primero.

Denotemos con I la acción de invertir una melodía, por R al movimiento retrógrado y a RI al retrógrado inverso. Tomemos a P como la escala cromática para poder ejemplificar en la siguiente imagen los movimientos descritos en el párrafo anterior.

Traduciremos lo anterior a un lenguaje matemático considerando el producto cartesiano entre las notas base, a las cuales denotaremos con B, y a la altura o tonalidad que denotaremos con T. Observemos que, dado un acorde $(x, y) \in B \times T$ podemos describir las acciones musicales descritas como funciones

$$I, R, RI : B \times T \to B \times T$$

dadas por $I(x, y) = (x, -y)$, $R(x, y) = (-x, y)$ y $RI(x, y) = (-x, -y)$. La siguiente imagen muestra de una manera gráfica los movimientos musicales en el plano determinado por $B \times T$.



Es claro que el conjunto $G = \{Id, I, R, RI\}$ junto con la composición de funciones forman un grupo conmutativo. Esto tomando Id como la identidad, observando que $I \circ R = R \circ I = RI$ y sabiendo que los inversos de I, R y RI son ellos mismos, es decir,

$$I \circ I(x, y) = I(x, -y) = (x, -(-y)) = (x, y)$$

$$R \circ R(x, y) = R(-x, y) = (-(-x), y) = (x, y)$$

y del mismo modo

$$RI \circ RI(x, y) = RI(-x, -y) = (-(-x), -(-y)) = (x, y)$$

Así, podemos ver el conjunto de acciones musicales G similarmente al grupo de 4 Klein.

Con este ejemplo podemos definir el **conjunto de simetrías de un conjunto**

X como el conjunto de todas las permutaciones [4] de un conjunto X que es un grupo bajo composición. Este grupo se denotará $Sym(X)$.

1.1.1. Acciones de grupo y clases laterales.

Definición 1.6. Una **acción de grupo** es una función $\cdot : G \times X \to X$ dada por $\cdot(g, x) = g \cdot x$ tal que:

1. $e \cdot x = x \ \forall x \in X$
2. $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall x \in X$ y $\forall g, h \in G$.

Equivalentemente, un homomorfismo de grupo $f : G \to Sym(X)$ se llama una **acción** de G en X.

Dada una acción de grupo definimos una relación en X donde $x \sim y$ si existe un elemento g en G tal que $g \cdot x = y$. Más aún, dicha relación será de equivalencia y las clases resultantes se llamarán **órbitas** y las denotaremos por $[x]$ o $G \cdot x$.

Se dice que una acción es **transitiva** si $X = G \cdot x$, es decir, que sólo existe una órbita. Por otro lado se dice que es **simple transitiva** si la aplicación $G \to X$ es tal que envía $g \to g \cdot x$ es transitiva y además es una biyección. El Sistema Generalizado de Intervalos que se presentará en el capítulo siguiente es un ejemplo de una acción transitiva simple de grupos. Se dirá que una acción es **libre** si $g \cdot x = h \cdot x$ implica $g = h$, es decir, que es inyectiva.

Ejemplo musical 2

Consideremos $G = (\mathbb{Z}, +)$ y $S = \mathbb{Z}$ el conjunto de las notas. Entonces G actúa en S por transposición de manera simple transitiva:

$$g * s = T^g(s) = g + s$$

Podemos interpretar los acordes tomando el subconjunto $Fin(\mathbb{Z}) \subset 2^{\mathbb{Z}}$ de conjuntos

[4] Una permutación es una función biyectiva de un conjunto en sí mismo.

finitos de $\mathbb{Z}$ y la acción

$$\mathbb{Z} \times Fin(\mathbb{Z}) \to Fin(\mathbb{Z})$$

donde

$$(g, C) \to g * C = \{T^g(x) | x \in C\}$$

Esta acción es libre pero no es simple ni simple transitiva.

La órbita de los acordes bajo esta acción se llama **transposición de clases de acordes**. Los acordes en la órbita $D = [\{0, 3, 6\}]$ se llaman **acordes disminuidos** mientras los acordes en la órbita $M = [\{0, 4, 7\}]$ son llamados las **tríadas mayores**. Consideramos el grupo TI que actúa en el conjunto de tonos $\mathbb{Z}$ y consiste de las transposiciones T_+^t y las inversiones T_-^t de $\mathbb{Z}$. Este grupo actúa en $Fin(\mathbb{Z})$ de la misma manera que $(\mathbb{Z}, +)$ actúa por transposiciones.

Para un acorde dado c el subgrupo $Fix(c)$ de transposiciones e inversiones g tales que $g * c = c$ es llamado el **grupo del punto fijo de c**. Esto describe las simetrías internas del acorde c. La triada disminuida D tiene $Fix(c) = \langle T_-^6 \rangle$ mientras que para la triada mayor M el grupo del punto fijo es el trivial.

Habiendo definido y ejemplificado las acciones de grupo, es natural hablar de las **acciones de subgrupos** $H \subset G$ y sus clases laterales. Estas son definidas por multiplicaciones por la derecha dado el grupo G. Entonces tendremos

$$G \times H \to G$$

$$(g, h) \to gh.$$

Las órbitas de dicha acción se llaman **clases laterales izquierdas**[5] de H y son conjuntos de la forma $\{gh | h \in H\}$ y a la que denotaremos como G/H.
Podemos definir la manera en que dos clases laterales se relacionan dentro de G/H de la siguiente manera. Si tomamos las clases aH y bH tomaremos

$$(aH)(bH) = a(bH)H = (ab)H.$$

[5]Se puede hacer una analogía entre las clases laterales izquierdas y derechas.

Es claro que $eH = H$, donde e es el elemento identidad de G, es el elemento neutro en ésta operación de clases laterales.
Dos clases laterales izquierdas gH y $g'H$ son iguales si $g^{-1}g' \in H$. El conjunto de las clases laterales izquierdas se denota G/H.Si escogemos una g representativa para cada clase lateral izquierda gH tendremos que G es la unión ajena de sus clases laterales, i.e

$$G = \bigcup gH.$$

Más aún, las funciones $H \to gH : h \to gh$ son biyecciones. De manera que tendremos que $G \cong (G/H) \times H$.

Podemos dar una correspondencia entre las clases laterales izquierdas y derechas mediante la biyección

$$\alpha : G \to G$$

$$gH \to Hg^{-1}.$$

Es fácil comprobar que efectivamente α es una biyección. La parte inyectiva surge de que

$$eH = H = He$$

y de que $e = e^{-1}$. Ya que cualquier otro elemento $g \in G$ tal que $gH = H$ será tal que $g = e$. Por ultimo sabemos que G es un grupo, de manera que para cualquier elemento $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$ así que para cualquier clase lateral derecha Hg existirá una clase lateral izquierda $g^{-1}H$ tal que

$$\alpha(g^{-1}H) = Hg.$$

Así podemos hacer referencia a las clases laterales izquierdas o derechas indistintamente.

La cardinalidad compartida de las clases laterales derechas e izquierdas, G/H y H/G se llama el **índice** de H en G y se denota con $(G : H)$. Además

$$ord(G) = (G : H) \times ord(H)$$

Definición 1.7. Sea G un grupo y x un elemento de G. Sea r el número natural más pequeño tal que $x^r = e$, entonces decimos que x es de **orden** r. Si no existe dicho número natural diremos que x es de **orden infinito.**

Si x es un elemento del grupo G, su **orden** es, por definición, el orden del grupo que genera. Es decir $ord(x) = ord(\langle x \rangle)$. Observemos que si G es un grupo finito entonces el orden de un elemento debe dividir el orden del grupo, i.e, $ord(x)|ord(G)$.

Ejemplo musical 3

Tomemos el grupo de números reales no nulos junto con la multiplicación usual, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ y consideremos el subgrupo cíclico infinito generado por el elemento

$$x = \sqrt[12]{2}.$$

El número x es, por definición, el cociente de las frecuencias entre un tono y otro que está un semitono de distancia. Los números x^k corresponden a una frecuencia en hercios de los tonos que se utiliza en la afinación equitemperada.

1.2. Subgrupos normales y grupo cociente.

Definición 1.8. Un subgrupo $H \subset G$ es llamado **normal** si $\forall g \in G$

$$gH = Hg.$$

Es decir, si los conjuntos de sus clases laterales derechas e izquierdas coinciden. También podemos decir que un grupo es normal si

$$g * H * g^{-1} \subset H, \forall g \in G.$$

Si H es un subgrupo normal de G se denotará $H \lhd G$.

No es difícil ver que estas dos definiciones de un subgrupo normal son equivalentes. Ya que si multiplicamos $gH = Hg$ por g^{-1} tendremos que

$$gHg^{-1} = Hgg^{-1} = He_G \subseteq H.$$

Por otro lado si $gHg^{-1} \subset H, \forall g \in G$ también tendremos que $g^{-1}Hg \subseteq G$ de manera que $H \subseteq gHg^{-1}$. De aquí que $H = gHg^{-1}$ y $Hg = gH$.

Proposición 1.3. Todo subgrupo N de un grupo conmutativo $(G, *)$ es normal.

Demostración. Para probar que N es un subgrupo normal de G hay que probar que para cualquier elemento $g \in G$ se cumple $g * N * g^{-1} \subset N$. Consideremos elementos $g \in G$ y $n \in N$, entonces

$$g * n * g^{-1} = g * g^{-1} * n$$

ya que G conmuta bajo $*$. Luego

$$g * g^{-1} * n = e_G * n = n \in N.$$

Entonces $g * n * g^{-1} \in N$ para cualquier $g \in G$ y $n \in N$. □

Escribimos $H \lhd G$ para indicar que H es un subgrupo normal de G. Consideremos $H \lhd G$, hagamos $G/N = \{gN | g \in G\}$ y definamos la multiplicación $gH \cdot kH := gkH$. Observemos que la multiplicación está bien definida. Si tomamos $gH = g'H$ y $kH = k'H$ otros representantes de las respectivas clases de equivalencia obtendremos que

$$gkH = gHk = g'Hk = g'kH = g'k'H.$$

Además la multiplicación de clases laterales resulta ser asociativa y se tiene que $g^{-1}H$ es el inverso de gH para cada gH con $g \in G$ pues eH es el neutro para la operación.

Proposición 1.4. Sea H un subgrupo de G. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1. Hay un homomorfismo de grupos $f : G \to G/H$ tal que $H = ker(f)$.

2. H es normal.

El homomorfismo de grupos asociado con el subgrupo normal H es el morfismo canónico

$$G \twoheadrightarrow G/H$$

$$g \mapsto gH.$$

Demostración. Primero supondremos la propiedad 1. Para probar que H es un subgrupo normal. Entonces, supongamos que hay un homomorfismo $f : G \to H$ tal que

$$H = ker(f)$$

. Sean $g, g^{-1} \in G$ y consideremos $h \in H$. Si H es normal entonces $g * h * g^{-1}$ debe de ser elemento de H. Observemos que

$$f(g * h * g^{-1}) = f(g) * f(h) * f(g^{-1})$$

pero $f(h) = e_G$, $f(g) * f(g^{-1}) = f(g * g^{-1})$ y $f(e_G) = e_G$. Entonces

$$f(g) * f(h) * f(g^{-1}) = f(g) * e_G * f(g^{-1})$$

$$= f(g) * f(g^{-1}) = f(g * g^{-1}) = f(e_G) = e_G.$$

Pero, por hipótesis $ker(f) = H$. De manera que, como $f(g * h * g^{-1}) = e_G$ entonces $g * h * g^{-1} \in H$. Concluyendo así que H es normal.
Para la implicación recíproca supondremos ahora que $H \lhd G$. Así podemos tomar el homomorfismo canónico $f : H \to G/H$ cuyo núcleo es H. $\square$

Ejemplo

Tomando cada $n \in \mathbb{N}$, los subgrupos $\langle n \rangle = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ son normales. El grupo cociente $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se llama el **grupo cíclico de orden n.** Si a y b son dos enteros cuyas clases laterales son iguales en $\mathbb{Z}_n$ entonces diremos que a y b son congruentes módulo n, denotamos esto como $a \equiv b\ (mod\ n)$.

Todos los grupos cíclicos se pueden tomar como subgrupos del grupo multiplicativo $(U, \cdot)$, donde $U = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$, el grupo unitario de números complejos de norma uno. Aquí, la suma de clases corresponde a la adición de ángulos del círculo unitario.

Ejemplo musical 4

El caso $n = 12$ es central para la Teoría Matemática de la Música. Esto por la relación entre las clases de equivalencia d el grupo cociente $\mathbb{Z}_{12}$ y los intervalos de la escala cromática de 12 semitonos. Por ejemplo, la clase lateral 4 representa a los intervalos compuestos por 4 semitonos, es decir, las terceras mayores,mientras que la de 7 representa a todas las quintas justas que están conformadas por 7 semitonos.

Sea G un grupo conmutativo y H un subgrupo de G. Para un elemento x en G denotamos con $x + H$ al conjunto $\{x + y|y \in H\}$ el cual se denomina la clase lateral de H en G/H. Observemos que $0 \in H$ y $x = x + 0 \in x + H$, de manera que todo elemento x de G está en una clase lateral. Además es claro que dichas clases de equivalencia son ajenas o son iguales, de manera que G/H es el conjunto de todas las clases laterales de H en G. Definamos la suma de clases laterales como sigue:

$$+ : G/H \times G/H \mapsto G/H$$

$$+((x + H), (y + H)) \mapsto (x + y) + H.$$

Por comodidad, haciendo abuso de notación , denotaremos $(x+h)+(y+H)$ en lugar de $+((x+H),(y+H))$. El grupo abeliano $(G/H,+)$ se llama **grupo cociente de G módulo H.** Con la definición de grupo cociente podemos definir un homomorfismo

$$p : G \mapsto G/H$$

dado por $p(g) = g + H$ para g elemento de G. Se afirma que p es un homomorfismo de grupos puesto que

$$p(g + g') = (g + g') + H = (g + H) + (g' + H) = p(g) + p(g').$$

A este homomorfismo lo llamaremos **proyección canónica.**

1.3. Teoremas de isomorfismo.

Teorema 1.1. Primer teorema de isomorfismo.

Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Entonces existe un isomorfismo $\overline{f} : G/ker(f) \to im(f)$ tal que

$$G/ker(f) \cong im(f).$$

Demostración. Como $f : G \to H$ es un homomorfismo entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & H \\
G/kerf \arrow[r, "\overline{f}"'] & im(f) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Se tiene que $p : G \to G/H$ es la proyección canónica mientras que $i : im(f) \to H$ es la inclusión de la imagen de f en H. Por otro lado, $\overline{f}$ es un homomorfismo que manda la clase lateral $gker(f)$ a $f(g)$.

Notemos que $\overline{f}$ esta bien definida ya que si $gker(f) = g'ker(f)$ entonces $g^{-1}g' \in ker(f)$ y $f(g) = f(g')$. Mientras que a cualquier elemento $f(g) \in imf$ lo podremos escribir como $f(g)f(ker(f)) = f(gker(f))$ donde $gker(f) \in G/ker(f)$.

□

Definición 1.9. Sean H y N subgrupos de un grupo G. El **producto** de H y N se define como

$$HN = \{xy | x \in H, y \in N\}.$$

Podemos definir una **clase lateral izquierda** $xH = \{x\}H$ donde x es un elemento de G. Observemos que cuando G no es un grupo abeliano no podemos garantizar que HN sea un subgrupo de G.

Con la definición 1.9 podemos enunciar el siguiente teorema de isomorfismo.

Teorema 1.2. Segundo Teorema de Isomorfismo.

Sea H un subgrupo de G y N un subgrupo normal de G grupo abeliano entonces:

$$(HN)/N \cong H/(H \cap N).$$

Demostración. Observemos que como $N \triangleleft G$ entonces $(H \cap N) \triangleleft H$. Vamos a definir

$$\gamma : HN \to H/(H \cap N)$$

tal que para cada elemento xy de HN tendremos $\gamma(xy) = x(H \cap N)$.

Para ver que γ está bien definido supongamos que $x_1y_1 = xy$ de donde se sigue que $x^{-1}x_1 = yy_1^{-1}$. De manera que x_1^{-1} es elemento tanto de H como de G por cómo se describen los elementos en la definición 1.9 lo que nos permite afirmar que $x^{-1}x_1$ es un elemento de $H \cap N$. De donde podemos decir que $x^{-1}x_1 \in H/(H \cap N)$ y así $x(H \cap N) = x_1(H \cap N)$ que no es más que la aplicación de γ a xy y x_1y_1. Concluyendo que si $xy = x_1y_1$ entonces $\gamma(xy) = \gamma(x_1y_1)$.

Para probar que γ es un homomorfismo consideremos x_1y_1 y x_2y_2. Entonces

$$\gamma((x_1y_1)(x_2y_2)) = \gamma(x_1x_2y_1y_2).$$

Observemos que podemos agrupar así por la conmutatividad de G. También, al ser x_1 y x_2 elementos de H entonces x_1x_2 permanece en H, de igual manera sucede con la pertenencia de y_1y_2 en N. Así

$$\gamma(x_1x_2y_1y_2) = x_1x_2(H \cap N) = x_1(H \cap N)x_2(H \cap N) = \gamma(x_1y_1)\gamma(x_2y_2).$$

Por último, observemos que

$$ker\gamma = \{xy \in HN | x \in H \cap N\} = H \cap N = N$$

y $h(xe) = x(H \cap N) \forall x \in H$. Por el primer teorema de isomorfismo obtenemos que $HN/N \cong H/(H \cap N)$. $\square$

Teorema 1.3. Tercer Teorema de Isomorfismo. Sean $H \triangleleft G$ y $N \triangleleft G$ con $N < H$. Entonces

$$G/H \cong (G/H)/(H/N).$$

Demostración. Definamos $\varphi : G \to (G/H)/(H/N)$ mediante $\varphi(g) = (gN)(H/N)$. Observemos que

$$\varphi(xy) = ((xy)N)(H/N) = ((xN)(yN)(H/N))$$

$$[(xN)(H/N)][(yN)(H/N)] = \varphi(x)\varphi(y).$$

Además podemos notar que los elementos de $ker\varphi = \{k \in G | \varphi(k) = H/N\}$ resultan a su vez ser elementos de H. Utilizando los teoremas anteriores de isomorfismo tenemos que $G/H \cong (G/H)/(H/N)$. $\square$

1.4. Productos

Definición 1.10. Dados dos grupos $(G, *_G)$ y $(H, *_H)$ su **producto cartesiano** $G \times H$ consiste del producto cartesiano de sus conjuntos subyacentes G, H de la operación multiplicación definida como sigue:

$$* : (G \times H) \times (G \times H) \to G \times H$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2).$$

Es preciso hacer notar que $G \times H$ junto con la operación definida tienen una estructura de grupo. El elemento neutro (e_G, e_H) está dado por los neutros de grupos $(G, *_G)$ y $(H, *_H)$ mientras que el inverso de un elemento (g, h) es el formado por el inverso de g en G y el de h en H, es decir, (g^{-1}, h^{-1}).

Podemos generalizar la definición anterior tomando una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$. Así el **producto directo externo** de esa familia es

$$\prod_{i\in I} G_i = \{f : I \mapsto \cup_{i\in I}\{G_i\} | f(i) \in G_i\},$$

el cual tiene una estructura de grupo dada por:

$$(f * g)(i) = (f(i))(g(i)) \in G_i.$$

El producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ de una familia de conjuntos $\{X_i\}_{i\in I}$ es el conjunto de funciones

$$h : I \to \cup_{i\in I} X_i$$

tales que $h(i) = h_i \in X_i$ para cada una de las i en el conjunto de índices I.

Para el producto de dos grupos $G \times H$ podemos dar dos homomorfismos de inclusión y un par de proyectivos. Los morfismos de inclusión serán

$$G \rightarrowtail G \times H : g \to (g, e_H)$$

y

$$H \rightarrowtail G \times H : h \to (e_G, h).$$

Mientras que las proyecciones serán

$$P_G : G \times H \twoheadrightarrow G : (g, h) \mapsto g$$

y

$$P_H : G \times H \twoheadrightarrow H : (g, h) \mapsto h.$$

Estas proyecciones son tales que $ker(P_G) = H$ y $ker(P_H) = G$.

Ejemplo musical 5.

En teoría musical, el producto cartesiano de grupos se manifiesta en el producto de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ junto con sus dos proyecciones sobre $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_4$. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ es la estructura matemática necesaria para entender la estructura de intervalos y las propiedades del contrapunto.En el capítulo *El Toro de Terceras* se desarrollará ejemplos la relación entre esta estructura y la Teoría Musical.

Teorema 1.4. ***Propiedad Universal del Producto Directo***
Sea G un grupo. Consideremos una familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y una familia de homomorfismos $\{\varphi_i : G \to G_i\}_{i\in I}$. Entonces existe un homomorfismo único $\varphi : G \to \prod_{i\in I} G_i$ tal que $P_i \circ \varphi = \varphi_i$ para toda $i \in I$.

Demostración. Consideremos el producto $P = \prod_{i\in I} G_i$ con sus respectivas proyecciones $P_i : \prod_{i\in I} G_i \to G_i$ y las inclusiones para cada G_i, $\varphi_i : G \to G_i$. definamos

$$\varphi : \prod_{i\in I} G_i \to G_i$$

tal que

$$g \to h_g : I \to \cup_{i\in I} G_i$$

$$i \to h_g(i) = \varphi_i(g) \in G_i.$$

Afirmamos que φ es un homomorfismo de grupos tal que $\varphi(g)(i) = \varphi_i(g)$y cada φ_i es un homomorfismo como se muestra a continuación:

$$\varphi_i(gg^{'}) = \varphi_i(g)\varphi_i(g^{'}) = h_g(i)h_{g'}(i) = \varphi(g)\varphi(g^{'}).$$

Por definición es claro que $P_i \circ \varphi = \varphi_i$ para cualquier $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[d, "\varphi"] \\
G_i & \prod_{i\in I} G_i \arrow[l, "P_i"]
\end{tikzcd}$$

Supongamos que existe un homomorfismo $\varphi' : G \to \prod_{i\in I} G_i$ tal que $P_i \circ \varphi' = \varphi_i$ para toda $i \in I$, pero

$$(\varphi'(g))(i) = P_i \circ \varphi'(g) = \varphi_i(g) = h_g(i) = (\varphi(g))(i)$$

de manera que $\varphi = \varphi'$. □

Ejemplo musical 6

Bajo la propiedad del producto cartesiano podemos asegurar la existencia de un isomorfismo de grupos $f : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. Musicalmente, este isomorfismo se traduce en poder escribir cada una de las tonalidades de la octava como combinación de terceras mayores y menores. Esto se desarrollará en el capítulo del Toro de Terceras.

1.5. Grupos de permutaciones.

Definición 1.11. Una **permutación** de un conjunto X es una función biyectiva de dicho conjunto en sí mismo.

Hay distintas maneras de representar una permutación. Una es escribiendo la tabla completa de pares ordenados $(i, p(i) = p_i)$ con $i = 1, 2, ..., n$ que se representa con una matriz de tamaño $2 \times n$.

Otra manera más sencilla de representarla es usando ciclos. Un **ciclo** es una k-tupla ordenada $C = (C_1, C_2, ..., C_k)$ de números diferentes con $1 \leq C_i \leq n$. Esto representa la permutación que manda C_i a C_{i+1}para $i = 1, 2, ..., k-1$ y C_k en C_1. El número k es la **longitud** $l(C)$ de C. El conjunto de k-elementos $C_1, C_2, ..., C_k$ de C es denotada por $|C| = card(C) = l(C)$. Los ciclos de longitud 2 se llaman **transposiciones.** Es preciso hacer notar que toda permutación puede ser expresada en producto de ciclos y que ésta es única salvo por el orden en que se representen. Para términos prácticos de éste trabajo, la representación de un producto de ciclos se leerá de derecha a izquierda.

Definición 1.12. Sea un conjunto finito X. Definimos el **grupo simétrico de X**, denotado $S_n(X)$, como el grupo formado por el conjunto de todas las funciones biyectivas de X en sí mismo, junto con la composición de funciones.

Para grupos finitos las permutaciones y las funciones biyectivas se refieren a la misma operación. El grupo simétrico de grado n es el grupo simétrico del conjunto $X = \{a_1, a_1, ..., a_n\}$. Los ciclos son generadores del grupo $S_n(X)$.

Teorema 1.5. El grupo de permutaciones S_n está generado por las $n - 1$ transposiciones $(1, n), (2, n), ..., (k, n), ..., (n - 1, n)$.

Demostración. Por inducción sobre n.
El paso base, cuando n=1 es claro.
Supongamos que el teorema es válido para n. Si p es un elemento de S_{n+1} que fija 1, por inducción es un producto de transposiciones

$$(2, n + 1), (3, n + 1), ..., (n, n + 1).$$

Si $p(1) = k > 1$ tomemos $q = (1, n + 1)(k, n + 1)p$. Entonces q es el producto de transposiciones

$$(2, n + 1), ..., (n, n + 1).$$

Además, obtenemos la representación buscada $p = (k, n + 1)(1, n + 1)q$. □

Podemos afirmar que toda permutación se puede escribir como producto de ciclos ajenos y que además los factores serán únicos salvo por el orden en que aparece la composición de ciclos ajenos. Además, como todo ciclo de la forma $(i_1, i_2, ..., i_r)$ se puede expresar como producto de transposiciones $(i_1, i_r)(i_1, i_{r-1})...(i_1, i_2)$ podemos asegurar que toda permutación se puede escribir como producto de transposiciones. Pero no necesariamente ajenas.

El grupo simétrico S_n contiene un subgrupo al que llamaremos **alternante**, denotado A_n, que consiste de todas las permutaciones que pueden ser escritas como el producto de un número par de transposiciones (i, j). A_n junto con el conjunto B_n de todas las permutaciones que pueden ser escritas por un número impar de transposiciones. Dicha biyección puede ser definida por una multiplicación

$$A_n \to B_n : p \mapsto (1,2)p.$$

Observemos que $A_n \cap B_n = \emptyset$. Como las transposiciones generan S_n, tenemos que

$$S_n = A_n \coprod B_n$$

.Es decir, que A_n cubre la mitad de las $n!$ permutaciones, i.e, $ord(A_n) = \frac{n!}{2}$. Podemos concluir que A_n es un subgrupo normal de S_n y como sólo puede existir otra clase lateral correspondiente, B_n, podemos asegurar que las clases laterales coinciden.

Capítulo 2

El Sistema de Intervalos de Lewin

En el siguiente capítulo se propone hacer una traducción de las ideas propuestas por David Lewin en el artículo *Generalized Musical Intervals and Transformation*[1] a un lenguaje matemático formal y actual.

En su trabajo *A Label-free development for 12-pitch class systems*[2] previo, Lewin introduce la siguiente definición de grupo:

Definición 2.1. Por grupo entendemos a un conjunto G junto con una regla de combinación que se denotará con el símbolo $*$. Esta regla asigna a cada par ordenado (i, j) de elementos de G otro miembro de G al que se denotará $i * j$. Para que $(G, *)$ sea un grupo, se deben de satisfacer ciertas propiedades.Primero, la combinación debe de ser asociativa. Segundo, debe de existir un elemento identidad e en G. Tercero, que para cualquier elemento i en G existe un elemento i' en G tal que al combinarse forman la identidad. Dos elementos i, j de G se dice que conmutan si $i * j = j * i$. Así, un grupo G se llamará *conmutativo* o *no conmutativo* dependiendo de si sucede o no que cada elemento i en G conmute con cualquier elemento j en G.

En realidad, se puede tomar en cuenta la siguiente definición que emplea un lenguaje más simple.[3].

[1] Journal of Music Theory. Vol 21 No.2 (1987)
[2] Journal of Music Theory. Vol 21 No. 1 (1977)
[3] Emilio Lluis-Puebla (2014) Teoría de Grupos un primer curso. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana.

Definición 2.2. Un **grupo** es una pareja $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacio y

$$+ : G \times G \to G$$

una operación binaria tal que

$$(u, v) \to +(u, v)$$

donde, por conveniencia o abuso de notación se escribe

$$+(u, v) = u + v$$

tal que:

1. $+(+(u, v), w) = +(u, +(v, w))$, es decir, $(u + v) + w = u + (v + w)$
2. Existe $0 \in G$ llamado **elemento identidad** tal que $+(v, 0) = v + 0 = v$
3. Para cada $v \in G$ existe un elemento, llamado **inverso de** v, denotado por $-v$ tal que $+(v, -v) = v + (-v) = 0$

Diremos que el grupo es **conmutativo** si además satisface

4. $+(u, v) = +(v, u)$, es decir, $u + v = v + u$

En el otoño de 1987 David Lewin publica *On generalized Intervals and Transformations*, donde basándose en la definición 1 propone que, dado un conjunto S a cada par ordenado (s, t) de elementos de S, se les puede asociar un elemento de un grupo G al que se le llamará **intervalo** de s a t. En lo que sigue se trabajará con el sistema propuesto en ese artículo y con la definición de grupo dada anteriormente además de una interpretación al lenguaje matemático actual.

2.1. El Sistema Generalizado de Intervalos

Definición 2.3. Sea un grupo conmutativo $(G, *)$ que sirva como un grupo de **intervalos** y S el conjunto que contiene los objetos $s, t, ...$ Supongamos que a cada par ordenado (s, t) donde $s, t \in S$ les podemos asociar un valor de G al que llamaremos intervalo de s a t, es decir que $i = int(s, t) \in G$. Más aún supongamos que las siguientes condiciones se cumplen:

1. Para cualquier tercia de elementos de S s, t y u, al combinar los intervalos dados de s a t y de t a u obtendremos el intervalo de s a u.

2. Para cualesquiera objetos s y t el intervalo de s a t es el inverso del intervalo de t a s.

3. Dado cualquier objeto s y cualquier intervalo i en G, existe un único objeto t tal que pertenece al intervalo i del elemento s dado. El elemento t es tal que satisface la ecuación $int(s, t) = i$

Entonces, un Sistema Generalizado de intervalos, pensando la definición de Lewin con lenguaje matemático actual será la pareja $(S, (G, *))$ donde S es un conjunto no vacío y $(G, *)$ un grupo conmutativo. La pareja debe de cumplir que para cualesquiera elementos $s, t, u \in S$ se deben de cumplir:

- $int(s, t) * int(t, u) = int(s, u)$

- $(int(s, t))^-1 = int(t, s)$

- Dado un elemento $s \in S$ y el intervalo $i \in G$, el elemento $t \in S$ tal que $int(s, t) = i$ está dado.

Lewin toma las propiedades que definen un Sistema Generalizado de Intervalos para desarrollar los siguientes resultados, los cuales, en realidad deberían de considerarse como definiciones. En lo siguiente los enunciados originales dados por Lewin aparecerán marcados con ■, seguidos con una redactado en un lenguaje actual que a su vez estarán marcados con □.

- Para cada intervalo i en G, la operación T_i la **transposición por i** se puede definir en S. Dado un elemento s, su **i-transpuesta** es el objeto único $t = T_i(s)$ tal que se encuentra en el intervalo de i dado por s.

□Entonces podemos decir que la operación transposición dada por $T(i,s) = T_i(s)$ determina de manera única un elemento en S tal que:

$$int(s, T_i(s)) = i.$$

- Dados dos objetos u y v podemos definir la operación I^{uv} de **inversión tomando u a v**. Dado un objeto s de S, la imagen inversa I^{uv} de s es el objeto único cuyo intervalo de u es el mismo que el intervalo de s a v.

□Así tendríamos que, dados u, v y s en S determinan un único elemento $I^{uv}(s)$ tal que

$$int(u, I^{uv}(s)) = int(s, v).$$

También, considerando la definición de transposición tendríamos que:

$$I^{uv}(s) = T_{int(s,v)}(u)$$

- Consideremos las transformaciones $X, Y, ...$ que permutan los objetos de S. Diremos que X **preserva intervalos** si $int(X(s), X(t)) = int(s,t)$ para cualquiera par de elementos elegidos s y t de S. Diremos que Y **invierte intervalos** si $int(Y(S), Y(t)) = int(t,s)$ para cualquier par de elementos s y t de S. Entonces los teoremas siguientes pueden ser probados: (a) X preserva intervalos si, y solo sí X es un operador de transposición. (b) Y invierte intervalos si, y solo si Y es una operación de inversión.

□La primera parte del resultado anterior se debe de considerar como una definición que deriva, como lo menciona Lewin, en el siguiente teorema con su respectiva prueba.

Teorema 2.1. X preserva intervalos si, y sólo si, X es una operación de transposición. Análogamente Y es un invertidor de intervalos si, y sólo si, Y es una operación de inversión.

Demostración. Primero probaremos que X preserva intervalos si, y sólo si, $int(X(s), X(t)) = int(s,t)$.

Por el primer elemento de la definición del Sistema Generalizado de Intervalos tendremos que

$$int(s,t) = int(s, X(t) * int(X(t), t)$$

$$= int(s, X(t)) * int(X(t), X(s)) * int(X(s), t)$$

Observemos que si $int(s,t) = int(X(s), X(t))$ entonces podemos operar en ambos lados de la igualdad anterior de la forma que más nos convenga. Así, junto con el hecho que G es un grupo conmutativo obtendremos que:

$$int(s,t) * int(t,s) = int(s, X(t)) * int(X(s), X(t)) * int(X(t), X(s)) * int(X(s), X(t))$$

entonces

$$e = int(s, X(t)) * int(X(s), t) * e$$

de donde se sigue que

$$int(t, X(s)) = int(s, X(t)).$$

Esto es equivalente a que dado un intervalo i junto con $s \in S$ existe un único elemento $t \in T$ tal que

$$int(t, X(s)) * int(s, X(t)) = i$$

concluyendo que X es una transposición. La implicación inversa de la prueba es análogo.

Para probar la segunda parte del teorema recordemos que una inversión de u a v es el único elemento $I^{uv}(s) \in S$ tal que $int(u, I^{uv}(s) = int(s, v)$. Entonces

$$int(u, I^{uv}(s)) = int(u, s) * int(s, I^{uv}(s))$$

$$= int(u, s) * int(s, v) * int(v, I^{uv}(s)).$$

Observemos que también se da la igualdad $int(I^{uv}(s), u) = int(v, s)$, así que podemos multiplicar ambos lados de la igualdad anterior como mejor convenga. Así,

$$int(u, I^{uv}(s)) * int(I^{uv}(s), u) = int(u, s) * int(s, v) * int(v, s) * int(v, I^{uv}(s))$$

Así se tiene que

$$e = int(u, s) * int(v, I^{uv}(s))$$

entonces

$$int(u, s) = int(I^{uv}(s), v).$$

Pero $int(I^{uv}(s), v) = int(v, I^{uv}(s))^{-1}$ es decir que I^{uv} invierte intervalos. □

- Las transposiciones T_i y las inversiones I^{uv} se combinan entre sí de acuerdo a las leyes de combinación

  - $Ti?Tj = Tk$ donde $k = i * j$
  - $T_i \circ I^{uv} = I^{uw}$ donde $w = T_j(v)$
  - $I^{uv} \circ T_i = T_j * I^{uv}$ donde $j = i^{-1}$
  - $I^{uv} \circ I^{wx} = T_j$ donde $j = int(w, v) * int(x, u)$

□ La notación anterior es clara así que no es necesario ningún comentario pero es preciso hacer notar la importancia de la conmutatividad del grupo $(G, *)$ ya que,si no fuera, las operaciones I^{uv} y I^{vu} serían distintas.

2.2. Ejemplos del Sistema Generalizado

Los ejemplos presentados aquí son seleccionados del artículo *Generalized Musical Intervals and Transformation* pero redactados en un lenguaje matemático actual.

Ejemplo 1

Consideremos S la familia de todas las duraciones. Podemos imaginar las cantidades $s, t, ...$ como números reales positivos que nos dicen que tan largas son las duraciones como múltiplos de una unidad de tiempo. De manera que consideramos los intervalos de s a t como el cociente $\frac{t}{s}$, es decir, $int(s,t) = \frac{t}{s}$ será un número real positivo. Esta familia de números forman un grupo conmutativo bajo la multiplicación.

Observemos que:

$$int(s,t) * int(t,u) = \frac{t}{s}\frac{u}{t} = \frac{u}{s} = int(s,u)$$

$$int(t,s) = \frac{s}{t} = (\frac{t}{s})^{-1} = (int(s,t))^{-1}$$

Finalmente, dada una duración s y un intervalo i sabemos que existe un número real tal que $\frac{t}{s} = i$. Así, junto con el 1 como elemento neutro podemos asegurar que esta terna propuesta es un sistema generalizado de intervalos al cumplir con los primeros 4 incisos de la definición.

Observemos que el inciso 5 se cumple gracias a que la transposición de s por i es equivalente a multiplicar s por i, es decir $T_i(s) = is$, ya que así $int(s, T_i(s)) = \frac{is}{s} = i$. También, dados u y v tendremos que I^{uv} posee una duración $s \in S$ a la que llamaremos **duración invertida** $I(s)$ definida como $\frac{I(s)}{u} = \frac{v}{s}$, i.e. $int(u, I(s)) = int(s, v)$. Se puede ver que $I(s)$ es j veces tan largo o tan corto que u, donde v es j veces tan largo o tan corto que el elemento s y además $I = \frac{uv}{s}$.

Mientras el sistema se comporta bien en el sentido matemático formal es problemático como un modelo de ritmo musical. Esto dejando a un lado el hecho que S contiene duraciones infinitamente largas y cortas, y si también se ignora el hecho que S contiene una infinidad de duraciones aplicables a la práctica musical. Hay que tener en cuenta que nuestras percepciones de relaciones entre las duraciones musicales son tanto aditivas como multiplicativas, en particular en el primer plano de las texturas rítmicas. Es decir, que dadas las duraciones s y t se percibe con más facilidad a t como más grande que s por una cierta diferencia $t - s$ que por un factor $\frac{t}{s}$.

Ejemplo 2

Para este ejemplo se va a intentar construir un modelo al sistema usando la misma familia S del ejemplo anterior, es decir, consideremos a S como la familia de las duraciones. Pero esta vez consideremos $int(s,t)$ como la diferencia $t - s$ de las duraciones de t y s. Por ejemplo, si tomamos que $int(s,t) = 3, -2$ o 0 si t es respectivamente 3 unidades más largo que s, si es 2 unidades más corto o si es de la misma longitud que s. Nuestro grupo G consistirá de todos los números reales operados con la adición usual $(\mathbb{R}, +)$.

Observemos que

$$int(s,t) * int(t,u) = (t - s) + (u - t) = u - s = int(s,u),$$

y además

$$int(t,s) = -(t - s) = int(s,t)^{-1}$$

cumpliendo los primeros dos incisos de la definición. El problema llega cuando se toma una duración s y un intervalo i, ya que no siempre podemos encontrar una duración t que satisfaga $t - s = i$. Obsérvese que si suponemos $s = 2$ e $i = -5$ algebraicamente lo que buscamos es $t - 2 = 5$ entonces $t = 3$. Pero nuestro presente modelo no permite éste tipo de casos al considerar a S la familia de duraciones representadas por los reales positivos.

Ejemplo 3

Una manera más compleja y menos familiar para ejemplificar el sistema generalizado de intervalos es mediante los **lapsos**[4]. Por lapso Lewin se refiere a un par ordenado $s = (s_0, s_1)$ de números reales, positivos, negativos o cero, tales que $s_0 < s_1$. Al menor número s_0 se le llamará el principio del lapso y lo denotaremos como $BGN(s) = s_0$. Mientras que s_1 será el final y se denotará $END(s) = s_1$. También se considerará el punto medio de s, $MID(S)$, y la longitud de s que será denotada por $LEN(s)$ que se define como la diferencia entre el final y el inicio del lapso:

$$LEN(s) = END(s) - BGN(s).$$

Algunos lapsos numéricos pueden modelar varios fenómenos musicales: s_0 y s_1 pueden ser puntos de tiempo que articulan el principio y el final de un segmento de tiempo. O tomando a s_0 y s_1 como frecuencias se pueden considerar los extremos altos y bajos de cierto evento de frecuencia con banda limitada.[5] También los podemos considerar como los puntos altos y bajos de algún sonido o filtración característica. O bien, teóricamente, como tonalidades que pueden representar las notas altas y bajas de algún acorde. también pueden representar las notas extremos de un registro activo de alguna pieza en un tiempo determinado.

Ejemplo 4

Para este ejemplo tomaremos el intervalo entre los lapsos s y t al par de números (x, a) donde x es el cociente de las longitudes de los spans y a es la distancia directa

[4]Lewin utiliza la palabra "span", esta se traduce como lapso, duración o espacio. Por el contexto, el término lapso me pareció el más adecuado

[5]La **frecuencia** es una magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier fenómeno o suceso periódico. Para calcular la frecuencia de un suceso, se contabiliza un número de ocurrencias de éste, teniendo en cuenta un intervalo temporal, y luego estas repeticiones se dividen por el tiempo transcurrido.

Si una vez calculado el espectro de una señal se aprecia que dicho espectro se extiende desde una frecuencia f_1 hasta otra f_2, donde $f_2 > f_1$, se dice que f_1 es la frecuencia inferior de corte mientras que f_2 es la frecuencia superior de corte. Así se puede definir $B = f_2 - f_1$ como la anchura de la banda de la señal. Sólo puede hablarse de anchura de banda de una señal si las dos frecuencias de corte están bien definidas en cuyo caso se dice que la señal es de banda limitada.

entre sus puntos medios. Es decir,

$$x = LEN(t) \setminus LEN(s)$$

y

$$a = MID(t) - MID(s).$$

Notemos que, al ser las longitudes de los lapsos cantidades positivas, entonces tendremos que x es un número real positivo mientras que a será un número real.

Definimos la operación del grupo

$$(x, a) * (y, b) = (xy, a + b)$$

que resulta ser asociativa y conmutativa, además de que el elemento $(1, 0)$ es el elemento identidad y que $(\frac{1}{x}, -a)$ es el inverso de (x, a). Así, el grupo G compuesto de los pares ordenados (x, a) donde ambos son reales y x es positivo, junto con la operación definida anteriormente es un grupo conmutativo.

Para transponer el lapso s por el intervalo $i = (x, a)$ primero se expande o contrae s en su punto medio por un factor de x y después se desplaza el lapso resultante rígidamente por a unidades. O de manera equivalente podemos desplazar s por a unidades y después expandir o contraer el lapso resultante respecto a su punto medio por un factor de x.

Dados los lapsos u y v y escribiendo I para I^{uv} la fórmula dada en la definición nos dice como trabajar el lapso $I(s)$ dado s. Primero calculamos $int(s, v)$ que es el par (x, a) tal que

$$x = LEN(v) \setminus LEN(s)$$

y

$$a = MID(v) - MID(s).$$

La definición también nos dice que si $(x, a) = int(u, I(s))$ entonces

$$x = LEN(I(s)) \setminus LEN(u)$$

y además

$$a = MID(I(S)) - MID(u).$$

Trabajando las equivalencias obtendremos que

$$LEN(I(s)) = LEN(u)LEN(v) \setminus LEN(S)$$

$$MID(I(s)) = MID(u) + MID(v) - MID(s).$$

Así podremos calcular la longitud y el punto medio del lapso $I(s)$ en términos de los lapsos dados u y v .

El modelo de este último ejemplo es un medio para conceptualizar y manipular los intervalos y transformaciones que incluyan los lapsos y que pueden tener ciertos aspectos problemáticos. Entre ellos es la importancia que le da al punto medio de un lapso ya articulado. Esto a pesar que hay algunas situaciones musicales en las cuales se le asigna un significado primordial al punto medio, como las tonalidades y los puntos de tiempo. Se pueden desarrollar otros sistemas de intervalos a base de lapso sin que se le dé demasiado peso a los puntos medios y que correspondan a una manera mucho más musical de usarlos. Sin embargo, dichos sistemas sacrifican la parte algebraica que contiene las ventajas expuestas en este ejemplo.

Capítulo 3

El Toro de Terceras

Los grupos cíclicos finitos $\mathbb{Z}_n$ están compuestos por objetos llamados clases de equivalencia $x_n = x + n\mathbb{Z}$ y una operación definida como: $(x+y)_n = x_n + y_n$. También sabemos que si n es un divisor de m, es decir que $n \mid m$, se pueden definir los monomorfismos canónicos

$$\mathbb{Z}_m \hookrightarrow \mathbb{Z}_n : x_m \mapsto m/n \cdot x_n$$

y los epimorfismos canónicos, es decir, las proyecciones

$$\mathbb{Z}_m \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_n : x_m \mapsto x_n$$

Es decir que podemos mandar cada clase lateral definida por m a la clase lateral correspondiente en $\mathbb{Z}_n$ o bien, las clases determinadas por n son enviadas a aquella determinada de dividir por m.

Para establecer el toro de terceras, que es la representación geométrica de $\mathbb{Z}_{12}$ asociada a su descomposición de Sylow, se debe hacer la construcción del grupo abeliano finito $T_{3\times 4} = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

Mientras tanto consideremos el conjunto de las notas de la escala cromática . Observemos que se puede dar una función $f : notas \to \mathbb{Z}_{12}$ tal que a la tonalidad x de la escala sea enviada al número de tonos entre esa tonalidad y la de base. Por ejemplo: si estamos en la tonalidad de Do mayor entonces $f(Do) = 0_{12}$, mientras que la tonalidad de la quinta justa que en este caso es Sol tendríamos que $f(Sol) = 7_{12}$.

Es fácil ver que si $f(x) = f(y)$ estaríamos hablando de dos notas que se encuentran al mismo número de tonalidades que la de base, pero, al estar dentro de la escala cromática estaríamos hablando de la misma. Así resultaría la igualdad de x y y y la inyectividad de f. Por otro lado, tenemos que para cada elemento x_{12} de $\mathbb{Z}_{12}$ existe una tonalidad dentro de la escala cromática tal que se encuentre a x_{12} tonalidades de la nota base. Así podemos asegurar la suprayectividad y biyectividad de f y que podemos representar a las notas de la escala mediante los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.

3.1. Construcción del Toro de Terceras

Considérese las proyecciones canónicas[1]:

$$P_3 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$$

$$P_4 : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_4$$

Por la propiedad universal del producto cartesiano[2] podemos combinar ambas proyecciones y dar un homomorfismo de grupos

$$(P_3, P_4) : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

que envía a cada elemento x_{12} de $\mathbb{Z}_{12}$ al par ordenado cuya primera coordenada es la proyección canónica $P_3(x_{12})$ y la segunda será la correspondiente a la proyección canónica $P_4(x_{12})$. Ejemplificando en el siguiente diagrama:

[1]Observemos que $ker(P_3) = \langle 3_{12} \rangle$ y $ker(P_4) = \langle 4_{12} \rangle$,de donde se sigue que $Z_3 \cong Z_{12}/\langle 3_{12} \rangle$ y $Z_4 \cong Z_{12}/\langle 4_{12} \rangle$. Esto tomando en cuenta que $\langle 3_{12} \rangle = \{0_{12}, 3_{12}, 6_{12}, 9_{12}\}$ y que $\langle 4_{12} \rangle = \{0_{12}, 4_{12}, 8_{12}\}$.

[2]Agustín-Aquino, du Plessis, Lluis-Puebla, Montiel *Una introducción a la Teoría de Grupos con aplicaciones a la Teoría Matemática de la Música* Publicaciones electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana.Vol 10. (2009).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_{12} \arrow[rr, "(P_3, P_4)"] \arrow[d, "proj"'] \arrow[drr] & & \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \\
\mathbb{Z}_{12}/ker(P_3, P_4) \arrow[rr, "\overline{(P_3,\ P_4)}"'] & & im\ (P_3,\ P_4) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

Observemos que si $x \in \mathbb{Z}_{12}$ es tal que $x \in ker(P_3, P_4)$ entonces por definición del núcleo de un homomorfismo tendremos que $(P_3, P_4)(x) = (0_3, 0_4)$ y que $x \in ker(P_3) \cap ker(P_4)$. Por otro lado, si tenemos un elemento $x \in ker(P_3) \cap ker(P_4)$ entonces es tal que bajo ambas proyecciones es enviado al cero de ambos $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_4$. Así, podemos decir que $(P_3, P_4)(x) = (0_3, 0_4)$. Luego

$$ker(P_3, P_4) = ker(P_3) \cap ker(P_4) = 0.$$

Como consecuencia de lo anterior, nuestro homomorfismo (P_3, P_4) resultará ser un monomorfismo. De manera similar, considerando que cada una de las coordenadas de (P_3, P_4) es una proyección podemos afirmar que también es un epimorfismo. Se sigue que (P_3, P_4) es un isomorfismo de grupos[3].

Además de este procedimiento podemos considerar el automorfismo

$$Id_3 \times (-1) : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$$

tal que cada par (x, y) es enviado a $(x, -y)$[4]. Juntando ambos isomorfismos podemos

[3]Por el Teorema Chino del Residuo

[4]Es claro ver que si $Id_3 \times (-1)(x, y) = (0_3, 0_4)$ entonces $x = 0_3$ y $y = 0_4$ además que $im(Id_3 \times (-1)) = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

dar el siguiente isomorfismo de grupos:

$$\psi := (Id_3 \times (-1)) \circ (P_3, P_4) : \mathbb{Z}_{12} \to T_{3\times 4}$$

de manera que cada elemento x_{12} es enviado al par ordenado $(P_3(x_{12}), -P_4(x_{12}))$. Como ψ es una composición de isomorfismos entonces es un isomorfismo, así que es natural hablar de la inversa

$$\psi^{-1} : T_{3\times 4} \to Z_{12}$$

tal que

$$\psi^{-1}((P_3(x_{12}), -P_4(x_{12})) = 4P_3(x_{12}) + 3P_4(x_{12}).$$

Musicalmente hablando, son las terceras menores y mayores los intervalos con 3 y 4 semitonos. Así podemos observar que ψ representa el número de terceras mayores y menores que se necesitan para ir de la tonalidad base (aquella que podemos definir con el elemento $(0_3, 0_4)$) a la nota con el número de semitonos a la cual se esté aplicando el isomorfismo ψ.

Por ejemplo, trabajemos en la escala cromática de Do mayor. La quinta justa que va de do a sol está conformada por una tercera mayor (de do a mi) y una tercera menor (de mi a sol), o bien, por una tercera menor (do a re♯) y una tercera mayor (de re♯ a sol). Cabe mencionar que la quinta justa está conformada por 7 semitonos, que lo podemos representar por medio de $\psi(7_{12}) = (1_3, 1_4)$. Observemos que $P_3(7_{12}) = 1$ mientras que $P_4(7_{12}) = 3_4$. Pero como $3 \equiv -1\ (mod 4)$ entonces podemos decir que $P_4(7_{12}) = -1$, de donde se sigue la evaluación de ψ en 7_{12}. Otro ejemplo es el conformado por 5 semitonos, la cuarta justa. De las proyecciones obtenemos que $P_3(5_{12}) = 2 \equiv -1\ (mod 3)$ y que $P_4(5_{12}) = 1$, de manera que $\psi(5_{12}) = (-1_3, -1_4)$. Así podemos considerar la siguiente tabla, tomando en cuenta las equivalencias módulo 3 y módulo 4 dentro de las proyecciones canónicas correspondientes:

$\mathbb{Z}_{12}$	$\psi(x_{12})$	Tonalidad	Ejemplo
0	$(0_3, 0_4)$	unísono u octava	do
1	$(-1_3, 1_4)$	segunda menor	do-do$\sharp$
2	$(-1_3, 2_4)$	segunda mayor	do-re
3	$(0_3, 1_4)$	tercera menor	do-re$\sharp$
4	$(1_3, 0_4)$	tercera mayor	do-mi
5	$(-1_3, -1_4)$	cuarta justa	do-fa
6	$(0_3, 2_4)$	tritono	do-fa$\sharp$
7	$(1_3, 1_4)$	quinta justa	do-sol
8	$(-1_3, 0_4)$	sexta menor	do-la$\flat$
9	$(0_3, 1_4)$	sexta mayor	do-la
10	$(1_3, 2_4)$	septima menor	do-si$\flat$
11	$(1_3, -1_4)$	septima mayor	do-si

3.2. Representación del Toro de Terceras

Observemos que, considerando la imagen de las proyecciones P_4 y P_3 podemos agrupar a los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ en cuatro o tres clases de equivalencia respectivamente. ParaP_4 tenemos $\{0, 4, 8\}$, $\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 10\}$ y $\{3, 7, 11\}$, mientras que para P_3 podremos agrupar los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ en los siguientes tres subconjuntos dependiendo de su imagen bajo la proyección $\{0, 3, 6, 9\}$, $\{1, 4, 7, 10\}$, $\{2, 5, 8, 11\}$. Sea T un toro[5], podemos posicionar cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ sobre T dependiendo de su imagen bajo las proyecciones dadas.

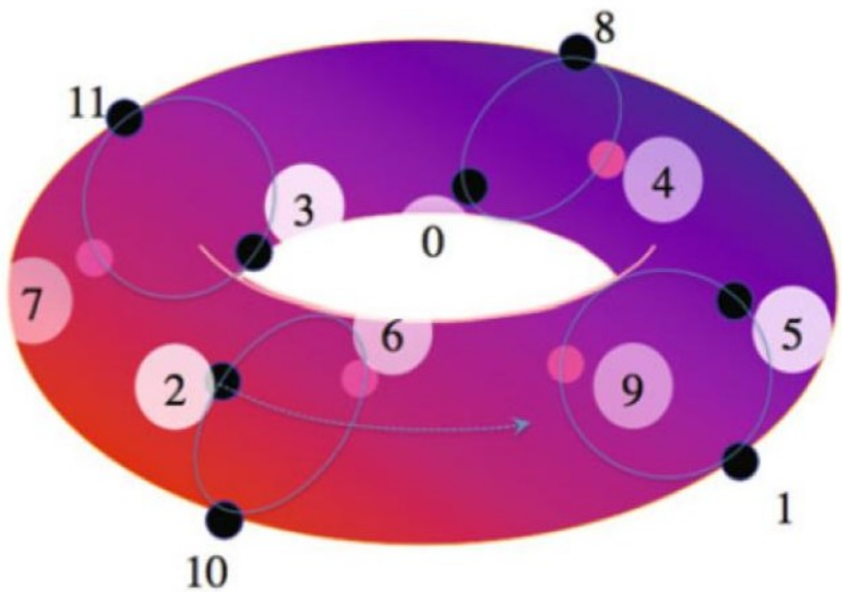
Las clases de P_3 y P_4 se agruparán de la siguiente manera. Las determinadas por P_3 estarán posicionadas de manera horizontal: las de 0_3 en la parte media interna, la de 1_3 en la parte media externa, mientras que en la parte horizontal superior la parte restante. Por otro, se deben de considerar cuatro cortes verticales que dividan al toro en cuatro partes iguales,de manera que, siguiendo las manecillas del reloj podemos

[5] Toro. Superficie de revolución generado por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior que se encuentra en su plano y que no la corta, es decir, de una recta coplanar.

situar cada clase de equivalencia de P_4 en cada uno. Esto, partiendo de tomar alguno de esos cortes como la clase de equivalencia del 0 y procediendo en sentido horario con los siguientes en cada uno de los cortes.

Haciendo coincidir cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ con su posición correspondiente a la clase determinada por las proyecciones P_3 y P_4 tendremos que podemos representar a todos los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ como puntos en un toro. Así, en realidad, el Toro de Terceras será un toro discreto. La figura 3.1[6] muestra visualmente la descripción anterior.

Figura 3.1: Posiciones de los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ en el Toro de Terceras



[6]Este diagrama se puede encontrar en:
G. Mazzola.Cool Math for Hot Music, Computational Music Science. Springer International Publishing Switzerland.(2016).

3.3. Distancias en el Toro de Terceras.

En lo que se sigue nos referiremos al Toro de Terceras con la notación $T_{3\times 4}$.

Como cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ queda representado en $T_{3\times 4}$ gracias a ψ podemos observar que la suma en $\mathbb{Z}_3$ y en $\mathbb{Z}_4$ son en realidad adiciones o substracciones de $(1_3, 0_4)$ y $(0_3, 1_4)$. Entonces podemos definir en $T_{3\times 4}$ una función de distancia métrica *d(x,y)* dada por el mínimo número de terceras mayores o menores que se necesitan sumar o restar para ir de una tonalidad determinada por x a la que representa y. Por ejemplo, si buscamos saber la distancia de una tonalidad base a su cuarta y quinta correspondiente podemos traducirlo matemáticamente de la siguiente manera:

$$d(0_{12}, 7_{12}) = 2$$

esto ya que

$$(0_3, 0_4) + 1(1_3, 0_4) + 1(0_3, 1_4) = (1_3, 1_4).$$

Por otro lado, si buscamos la distancia a la cuarta justa tendremos que

$$d(0_{12}, 5_{12}) = 3$$

ya que

$$5_{12} = 0_{12} + 2(4_{12}) - 1(3_{12}).$$

Es necesario mencionar mencionar las diferencias entre las maneras de expresar la función distancia mostradas en el ejemplo anterior. Tomando en cuenta la tabla de la sección anterior se observa que $\psi(5_{12} = (-1_3, -1_4)$, es decir que la distancia de 0_{12} a 5_{12} es sustraer tanto una tercera mayor como una tercera menor, pero recordemos que la proyección $P_3(5_{12}) = 2 \equiv -1\ (mod 3)$. De manera que si tomáramos la distancia de nuestra tonalidad cero a la de su cuarta justa siguiendo el procedimiento que seguimos para la quinta nos encontraríamos con el problema de saber si se hizo o no la congruencia en el módulo correspondiente.

Como vimos anteriormente la inversa de ψ está dada por $\psi^{-1}(x_3, x_4) = 4x_3 +$

$3x_4 = x_{12}$ que en realidad es la distancia tonal entre la tonalidad base y la que se encuentre a x_{12} semitononos. Así podemos implementar la siguiente función métrica para los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$:

$$d(x,y) = min\{|m| \ + |n||m,n \in \mathbb{Z}, |x-y| = 3n+4m\}$$

donde :

$$d(x,y) : \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Lema 3.1. La función distancia dada por

$$d(x,y) = min\{|m| \ + |n||m,n \in \mathbb{Z}, |x-y| = 3n+4m\}$$

es una métrica.

Demostración. Recordemos que para que cumpla la definición de métrica debe cumplir que sea definido positivamente y en caso de ser cero ambos elementos deben de ser el mismo, que valga la conmutabilidad y la desigualdad del triángulo.

Observemos que por la definición de valor absoluto tendremos que $|m| \geq 0$ y $|n| \geq 0$, de manera que la suma de ambos será mayor o igual a cero y así $d(x,y) \geq 0$.

Dentro de las propiedades de valor absoluto se encuentra que $|a| = |-a|$, de modo que podemos asegurar que

$$|y-x| = |-(x-y)| = |x-y| = 3n+4m$$

y así

$$d(x,y) = d(y,x)$$

cumpliendo la conmutabilidad.

Por otro lado, de la definición tenemos que $d(x,y) = |m| + |n|$ para algún par de elementos $m,n \in \mathbb{Z}$. También podemos escribir $m = a+b$ y $n = c+d$ donde

$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Así

$$|m| + |n| = |a + b| + |c + d| \leq |a| + |b| + |c| + |d| = (|a| + |b|) + (|c| + |d|)$$

de modo que podemos afirmar que

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

para algún z que cumpla que $|a| + |b| \leq d(x, z)$ y que $|c| + |d| \leq d(z, y)$. De manera que la función distancia es una métrica. □

3.4. Las simetrías del Toro de Terceras

En $\mathbb{Z}$ las acciones de grupo TI son las funciones $T^t_{\pm 1}(z) = t \pm z$. Donde se consideran los elementos invertibles ± 1 de $\mathbb{Z}^*$. Para aplicar esta acción de grupo al toro de terceras primero hay que tomar en cuenta la multiplicación de elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.

Observemos que la aritmética de $\mathbb{Z}_n$ es heredada de $\mathbb{Z}$, de modo que se puede operar a los elementos de $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{Z}$ y luego retornar a las clases de equivalencia. Así la multiplicación en $\mathbb{Z}_n$ está definida por

$$x_n \cdot y_n = (x \cdot y)_n.$$

Es claro que tomando distintos representantes de las clases $x' = x + nz$ y $y' = y + nw$ obtenemos que:

$$x' \cdot y' = (x + nz) \cdot (y + nw) = xy + n(xw + zy + wz) \equiv xy \quad (modn).$$

Esta estructura multiplicativa define cuatro elementos en $\mathbb{Z}_{12}$ que son auto invertibles y que agruparemos en el subconjunto $\mathbb{Z}^*_{12} = \{1_{12}, 5_{12}, 7_{12}, 11_{12}\}$ ya que$1^2_{12} = 5^2_{12} = 7^2_{12} = 11^2_{12} = 1_{12}$. Además, los elementos de $\mathbb{Z}^*_{12}$ no son divisores del elemento 0_{12}, propiedad que si cumplen los elementos $2_{12}, 3_{12}, 4_{12}$ y 6_{12} ya que $2_{12} \cdot 6_{12} = 3_{12} \cdot 4_{12} = 0_{12}$.

No es difícil probar que el conjunto $T\mathbb{Z}_{12}^*$ junto con la multiplicación heredada de $\mathbb{Z}_{12}$ es un grupo. El elemento neutro 1_{12} se encuentra en $\mathbb{Z}_{12}^*$, por lo anterior cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}^*$ es su propia inversa y además cumple con la propiedad de cerradura:

$$5_{12} \cdot 7_{12} = 35 \equiv 11_{12},$$

$$5_{12} \cdot 11_{12} = 55 \equiv 7_{12}$$

y

$$7_{12} \cdot 11_{12} = 77 \equiv 5_{12}.$$

De modo que generalizamos la construcción de TI para $\mathbb{Z}_{12}$. Así, en lugar de escribir TI consideraremos el conjunto $T\mathbb{Z}_{12}^*$ cuyos elementos serán permutaciones de $\mathbb{Z}_{12}$ definidas por elementos de la forma

$$T_s^t(z) = t + sz$$

donde t y z están en $\mathbb{Z}_{12}$ mientras que s es un elemento de $\mathbb{Z}_{12}^*$.

Lema 3.2. $(T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ)$ es un grupo [7].

Demostración. Para probar que $(T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ)$ es un grupo basta hacer notar que cumpla la propiedad de cerradura, que los inversos estén en $T\mathbb{Z}_{12}^*$ y que haya un elemento que cumpla con la condición de ser neutro.

Tendremos que dado T_s^t y T_v^u

$$T_s^t \circ T_v^u(z) = T_s^t(u + vz) = t + s(u + vz) = t + su + svz = T_{sv}^{t+su} \in T\mathbb{Z}_{12}^*$$

donde $t + su$ es un elemento de $\mathbb{Z}$ y sv de $\mathbb{Z}_{12}^*$.

[7] $\circ$ denota la composición usual de funciones

La transformación T_1^0 es el neutro ya que se cumple que:

$$T_s^t \circ T_1^0 = T_{1s}^{t+0s} = T_s^t$$

y notemos que $(T_s^t)^{-1} = T_s^{-ts}$ ya que

$$T_s^{-ts} \circ T_s^t = T_{ss}^{(-ts)+st} = T_1^0$$

tomando en cuenta que $s \in \mathbb{Z}_{12}^*$. Así $T\mathbb{Z}_{12}^*$ es un grupo bajo la composición de funciones. $\square$

Las simetrías en $\mathbb{Z}_{12}$ se definen como las permutaciones del grupo $T\mathbb{Z}_{12}^*$. Todas las permutaciones son geométricamente observables si se transportan al toro de terceras usando el isomorfismo ψ. Por ejemplo, observemos que sucede con las permutaciones T_1^3, T_{11}^0 y T_7^0

$\mathbb{Z}_{12}$	T_1^3	T_{11}^0	T_7^0
0	3	0	0
1	4	11	7
2	5	10	2
3	6	3	9
4	7	4	4
5	8	7	11
6	9	6	6
7	10	5	1
8	11	4	8
9	0	3	3
10	1	2	10
11	2	1	5

Observemos que T_1^3 traslada cada elemento de $T_{3\times 4}$ mediante una rotación de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje medio vertical del toro. Por otro lado T_{11}^0 es una rotación de π

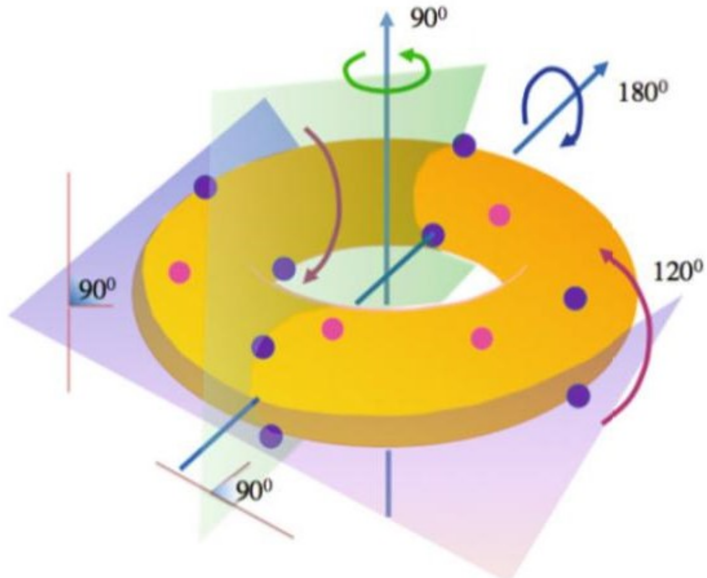


Figura 3.2: Ejes y planos de simetrías del Toro de Terceras.

alrededor del eje horizontal que pasa a través de los elementos 0_{12} y 6_{12}. Mientras tanto, la permutación dada por T_7^0 es una reflexión del toro en el plano vertical que pasa a través de los puntos que representan al 0_{12} y a 6_{12}. Dichas simetrías se pueden observar en la figura 3.2

[8].

Es importante mencionar que las permutaciones de $\mathbb{Z}_{12}$ a su vez son simetrías dentro de $\mathbb{Z}_{12}$ y de $T_{3\times4}$ y resultan ser combinaciones de simetrías clásicas. Más aún, resulta que las simetrías en $T_{3\times4}$ son isometrías con la métrica definida en la sección anterior.

Teorema 3.1. El grupo de simetrías $T\mathbb{Z}_{12}^*$ definida en el toro $T_{3\times4}$ conserva las distancias métricas, i.e todas las simetrías son isometrías en el toro de terceras.

[8]Este diagrama se puede encontrar en:
G. Mazzola (2016) Cool Math for Hot Music, Computational Music Science. Springer International Publishing Switzerland.

Demostración. Consideremos que

$$d(x,y) = \{|m| + |n| | m,n \in \mathbb{Z} \wedge |x-y| = 3m+4n\}$$

Además en $T_s^t(z) = t+sz$ los valores t y z están en $\mathbb{Z}_{12}$, mientras que s es un elemento de $\mathbb{Z}_{12}^* = \{1_{12}, 5_{12}, 7_{12}, 11_{12}\}$. Con esto podemos asegurar que

$$3m+4n = |x-y| \leqslant |s||x-y| = |sx-sy| = |(t+sx)-(t+sy)| = |T_s^t(x) - T_s^t(y)|$$

de donde tenemos que

$$|x-y| \leqslant |T_s^t(x) - T_s^t(y)|$$

Por otro lado

$$|T_s^t(x) - T_s^t(y)| = |(t+sx)-(t+sy)| = |sx-sy| = |T_s^0(x-y)|$$

pero también

$$|sx-sy| = |T_s^0(x) - T_s^0(y)|$$

entonces tendremos que

$$|x-y| = |ss(x-y)| = |s(sx-sy)| = |s||T_s^0(x)-T_s^0(y)| = |s||T_s^t(x)-T_s^t(y)| \geq |T_s^t(x)-T_s^t(y)|$$

de donde se sigue la desigualdad

$$|x-y| \geq |T_s^t(x) - T_s^t(y)|$$

entonces

$$|x-y| = |T_s^t(x) - T_s^t(y)|$$

concluyendo entonces que

$$d(x,y) = d(T_s^t(x), T_s^t(y)).$$

□

3.5. Teoría musical en el Toro de Terceras

3.5.1. Armaduras

Musicalmente la *armadura de tonalidad*, *armadura de clave* o simplemente *armadura* es el conjunto de alteraciones, bemoles ($\flat$) o sostenidos($\sharp$), que son escritas al principio de una partitura en el pentagrama. Su función es determinar que notas deben ser alteradas en un semitono por encima (sostenido) o por debajo (bemoles).

Si tomamos la escala mayor

$$Do = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\} \subset \mathbb{Z}_{12}$$

y movemos cada nota a su cuarta correspondiente obtendremos la escala mayor de Fa. Aquí estamos utilizando la transformación

$$T^5_{do}(Do) = Fa = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\flat\}.$$

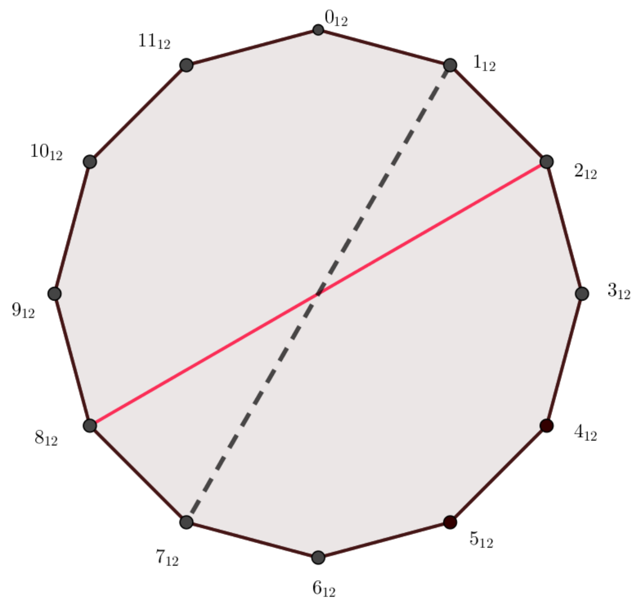
Observemos que en la armadura de esta tonalidad hemos ganado un bemol. Si continuamos a la cuarta siguiente entonces aplicamos la transformación

$$T^5_{Fa} = \{do, re, mi\flat, fa, sol, la, si\flat\}$$

donde ahora tendremos dos notas con alteraciones. Siguiendo el proceso, cada vez que movamos una escala X mediante una transformación T^5_X se altera una nota de la escala X por un bemol.

El problema surge cuando aplicamos el paso a la escala de $Do\flat$ mayor con la escala $\{do\flat, re\flat, mi\flat, fa, sol\flat, la\flat, si\flat\}$donde tenemos 6 bemoles en la armadura. La explicación viene de una representación distinta de la escala mayor de Do.

Así usando la simetría $T^0_{,5}$ en $\mathbb{Z}_{12}$ observemos que la escala Do se mapea en $5Do = \{7_{12}, 8_{12}, 9_{12}, 10_{12}, 11_{12}, 0_{12}, 1_{12}\}$. La siguiente imagen muestra una secuencia ininterrumpida de cuartas.



La imagen es la escala de Do después de multiplicar por 5 sus elementos, de mover una tonalidad por una cuarta justa,o de aplicar la transformación $T^0_{,5}$ en $\mathbb{Z}_{12}$. Así $T^{,5}_{Do} = Fa$ es la rotación de $5Do$ por una unidad en el sentido de las manecillas del reloj. En ésta representación también vemos que las notas fa y *si* marcan la frontera de las secuencias de cuartas de la escala ya que son las notas sensibles de las escalas de Do y $Do\flat$ mayor. Las 5- simetrías explican en fenomeno de las armaduras para las escalas mayores.

3.5.2. Contrapunto

El contrapunto se inicia con la construcción de una composición mediante dos voces: *cantus firmus* (CF) y *discantus* (D). Las reglas que se debían de seguir para componer se comenzaron a desarrollar en Europa en el siglo IX, se estabilizó en el siglo XVI gracias a Palestrina[9] y se formalizaron gracias a los escritos de Johann Joseph Fux [10].

[9]**Giovanni Pierlugi da Palestrina** (1525-1594) Compositor renacentista italiano de música sacra. Es el representante más conocido de la Escuela Romana de Composición Musical. Tuvo una influencia duradera en el desarrollo de la música religiosa y su trabajo es considerado como la culminación de la polifonía del renacimiento *Jerome Roche (19719, Palestrina. Oxford Studies of Composers. Oxford University Press*

[10]**Johann Joseph Fux**(1660-1741) Compositor austriaco, teórico de la música y pedagogo de la éra del barroco tardío. Autor de *Gradus ad Parnassum*, un tratado sobre el contrapunto palestrino

Se comienza con el contrapunto de primera especie que es la base del resto. La primera especie está definida por la melodía del cantus firmus a la cual, siguiendo las reglas establecidas por Fux, se le agrega una segunda voz (el discantus). Cada una de sus notas debe coincidir a una del CF de tal manera que ambas tengan la misma duración y ocurran al mismo tiempo. Estas dos voces definen intervalos que deben ser consonantes.

Las consonancias deben de ser de seis tipos: prime u octava, tercera menor, tercera mayor, quinta justa, sexta menor y sexta mayor. Notemos que si traducimos estos intervalos a $\mathbb{Z}_{12}$ tendremos que el conjunto respectivo de las consonancias son los intervalos dados por $0_{12}, 3_{12}, 4_{12}, 7_{12}, 8_{12}$ y 9_{12}. El resto de los intervalos entran en el conjunto de las disonancias. La elección de cuales intervalos son consonantes y cuales disonantes no está justificada por argumentos acústicos, así que la definición de que es consonancia es un detalle del contrapunto. Un ejemplo de esto es si podemos considerar a la cuarta (5_{12}) como un intervalo consonante o no. Hay que recalcar que en la afinación pitagórica la razón frecuental de la quinta ($\frac{3}{2}$) era consonante, pero también la razón de la cuarta ($\frac{4}{3}$). Como la base de la teoría musical es el sistema de entonación de las quintas justas esto constituye un problema que ha sido reconocido por maestros como Carl Dahlhaus. [11] El argumento de la disonación de la cuarta se debe justificar por una regla no descubierta de la textura polifónica.

Una de las cuestiones es como la distribución de intervalos en las mitades consonantes $K = \{0_{12}, 3_{12}, 4_{12}, 7_{12}, 8_{12}, 9_{12}\}$ y $D = \{1_{12}, 2_{12}, 5_{12}, 6_{12}, 10_{12}, 11_{12}\}$ se puede construir sin una referencia no válida a un transfondo acústico. Una solución es resultado de observar que hay una única simetría $AC = T_5^2$ que transforma K en D:

de la polifonía renacentista.

Sadie, Stanley (1980), Joham Josheph Fux, The New Grove Dictionary of Music and Musicians. London: Macmilan .

[11] **Carl Dahlhaus**(Hannover, 10 de junio de 1928- Berlín,13 de marzo de 1989). Musicólogo aleman. Como historiador, analista y editor fue la figura principal de la musicología en la segunda mitad del siglo XX.

J. Bradford Robinson, Dahlhaus Carl. The New Grove Dictionary of Music and Musicians. London: Macmilan.

$\mathbb{Z}_{12}$	T_5^2
0	2
3	5
4	10
7	1
8	6
9	11

Observemos que de manera inversa $AC(D) = T_5^2(D) = K$ ya que

$$AC^2(z) = T_5^2 \circ T_5^2(z) = T_5^2(2+5z) = 2+5(2+5z) = 12+25z = z$$

esto por que $12 \equiv 0 \ (mod 12)$ y $25 \equiv 1 \ (mod 12)$.

A las funciones que cumplen con características parecidas a las de AC se les llama *autocomplementarias*. Hay 5 dicotomías[12] de intervalos (X,Y) que tienen funciones autocomplementarias únicas llamadas dicotomías fuertes. Éstas son mencionadas en el apéndice L de *The Topos of Music*[13] En dicho apéndice se clasifican los isomorfismos dentro de las simetrías de $\mathbb{Z}_{12}$

Las siguientes tablas son el desglose de cada una, junto con su función auto complementaria correspondiente, los números que los anteceden hacen referencia a la posición que ocupan dentro de la clasificación dada por Mazzola.

- #64

$A = \{2,4,5,7,9,11\}$ y $A' = \{0,1,3,6,8,10\}$ con la transformación $AC = T_{11}^5$

$\mathbb{Z}_{12}$	2	4	5	7	9	11
T_{11}^5	3	1	0	10	8	6

Esta dicotomía tiene su primera mitad en el conjunto de intervalos de una escala mayor cuando contamos desde su tónica, por eso lleva el nombre de dicotomía mayor.

[12]Una *dicotomía* es una división de un conjunto en dos partes que generalmente se oponen entre si.

[13]Guerino Mazzola, The Topos of Music (2018). Springer International Publishing.

- #68

  $B = \{0,1,2,3,5,8\}$ y $B' = \{4,6,7,9,10,11\}$ con la transformación $AC = T_5^6$

$\mathbb{Z}_{12}$	0	1	2	3	5	8
T_5^6	6	11	4	9	7	10

- #71

  $C = \{0,1,2,3,6,7\}$ y $C' = \{4,5,8,9,10,11\}$con T_{11}^{11}

$\mathbb{Z}_{12}$	0	1	2	3	6	7
T_{11}^{11}	11	10	9	8	5	4

- #75

  $D = \{0,1,2,4,5,8\}$ y $D' = \{3,6,7,9,10,11\}$ con la transformación T_{11}^{11}

$\mathbb{Z}_{12}$	0	1	2	4	5	8
T_{11}^{11}	11	10	9	7	6	3

- #78

  $E = \{0,1,2,4,6,10\}$ y $E' = \{3,5,7,8,9,11\}$ con la transformación T_{11}^{9}

$\mathbb{Z}_{12}$	0	1	2	4	6	10
T_{11}^{9}	9	8	7	5	3	11

Finalmente, la dicotomía presentada anteriormente, la conformada por K, D y la transformación T_5^2, le corresponde la posición#82 en la clasificación de The Topos of Music. Esta es la que considera las consonancias y disonancias usadas en el contrapunto Fuxiano.

Si consideramos estas dicotomías dentro del toro de terceras podemos establecer una propiedad que distinga la dicotomía consonante-disonante del resto[14]. Para conocer la distribución de estos valores en el toro definimos el diámetro y el rango de una dicotomía.

[14] la dicotomía #82

Definición 3.1. Para una dicotomía fuerte (X, Y) con ρ una función auto complementaria definimos el diámetro como

$$\delta(X) = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in X} d(u, v)$$

donde $d(u, v)$ es la distancia dada en el toro de terceras.

Definición 3.2. Se define como el rango de (X, Y) como:

$$\sigma(X) = \sum u \in X d(u, \rho(u))$$

Por la invariancia de la distancia en el toro, que se probó anteriormente, se sigue que el diámetro y el rango son invariantes en la clase de dicotomías que son generadas por las simetrías de $T\mathbb{Z}_{12}^*$. En la siguiente tabla se puede ver la relación entre los distintos rangos y diámetros de las dicotomías con sus respectivas trasformaciones presentadas en las tablas anteriores.

Dicotomía	#64	#68	#71	#75	#78	#82
Rango	12	22	14	14	11	36
Diámetro	18.5	17	16	17	17.5	15

Observemos que la dicotomía de Fux (la dada por K, D y la transformación AC), la número #82, tiene el diámetro más pequeño y el rango más largo. Es decir, los elementos consonantes están separados de los disonantes de manera óptima. Mientras tanto, se puede ver que la dicotomía mayor (#64) juega un rol polar al tener el diámetro más largo.

Este grupo de dicotomías se puede usar para crear mundos contrapuntísticos distintos.[15] Es decir, que el contrapunto clásico es una de seis posibilidades de definir una teoría contrapuntística. Es posible definir un modelo de contrapunto para cada dicotomía fuerte donde las reglas clásicas del contrapunto se definan basadas en la

[15] Agustín Aquino O. A., J Junod, G Mazzola(2015). Computational Counterpoint Worlds. Springer, Heidelberg.

geometría de dichas dicotomías. En particular, la regla de las quintas paralelas prohibidas, i.e, la sucesión de dos intervalos de tamaño 7 en el contrapunto Fluxiano se puede deducir por la geometría de #82.

Capítulo 4

Toro de Terceras como Sistema de Intervalos

En el capítulo *El Sistema de Intervalos de Lewin* se mencionó que una de las dificultades del sistema es encontrar un modelo que sea un punto intermedio entre la intuición musical y matemática. La conclusión de esta Tesis es mostrar que las simetrías del Toro de Terceras, que como se probó anteriormente resultan ser las transformaciones $T\mathbb{Z}_{12}^*$, cumple con ser un Sistema Generalizado de Intervalos y es tal que no sacrifica la congruencia matemática o la intuición musical.

Siguiendo la definición dada por Lewin necesitamos un par $(S, (G, *))$ donde S es un conjunto cualquiera y $(G, *)$ es un grupo conmutativo. El grupo abeliano $\mathbb{Z}_{12}$, que resulta ser isomorfo al Toro de Terceras[1], tomará el papel del conjunto S. Mientras que consideraremos a $T\mathbb{Z}_{12}^*$ y la composición de funciones como el grupo abeliano[2] $(G, *)$. En este caso diremos que el intervalo de dos elementos $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ será una transformación $T_{(x,y)} \in T\mathbb{Z}_{12}^*$ tal que

$$T_{(x,y)}(x) = y$$

[1]Se construyó y probó en el capítulo 3 que $\mathbb{Z}_{12}$ y $T_{3\times4}$ son isomorfos.

[2]Se probó en el capítulo 3 que el conjunto $T\mathbb{Z}_{12}^*$ es un grupo abeliano bajo la composición.

y

$$T_{(x,y)}(y) = x,$$

pero para cualquier elemento $a \neq x$, $a \neq y$ se tenga que $T_{(x,y)}(a) = a$,

Proposición 4.1. El par $(\mathbb{Z}_{12}, (T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ))$ es un Sistema Generalizado de Intervalos bajo la regla de correspondencia de intervalos definida.

Demostración. Para que $\mathbb{Z}_{12}$ junto con $(T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ)$ sean un Sistema Generalizado de Intervalos, deben cumplir los tres puntos dados en la definición propuesta por Lewin.[3]

El primer punto que debemos probar es que para cualquier tercia de elementos x, y y z de $\mathbb{Z}_{12}$, la composición de los intervalos o, en este caso transformaciones, de x a y y de y a z deben de dar como resultado el intervalo de x a z. Tenemos que $T_{(x,y)}(x) = y$ y $T_{(y,z)}(y) = z$, pero también sabemos que $T_{(x,y)}(z) = z$ y $T_{(y,z)}(x) = x$. Luego

$$T_{(y,z)} \circ T_{(x,y)}(x) = T_{(y,z)}(y) = z.$$

Usando la cerradura de $T\mathbb{Z}_{12}^*$ tendremos que $T_{(y,z)} \circ T_{(x,y)} = T_{(x,z)}$ que es el intervalo buscado. Pero también tenemos que $T_{(x,y)}(y) = x$ y $T_{(y,z)}(z) = y$, de manera que

$$T_{(x,y)} \circ T_{(y,z)}(z) = T_{(x,y)}(y) = x.$$

Cumpliendo así el primer punto de la definición dada.

El segundo punto que se debe de satisfacer es que cualquiera dos elementos $x, y \in \mathbb{Z}_{12}$ el intervalo de x a y es el inverso de y a x. Por definición tenemos que $T_{(x,y)}$ es el intervalo de x a y donde $T_{(x,y)}(x) = y$ y $T_{(x,y)}(y) = x$. También podemos definir $T_{(y,x)}$ el intervalo de y a x tal que $T_{(y,x)}(y) = x$ y $T_{(y,x)}(x) = y$. De manera que

$$T_{(x,y)} \circ T_{(y,x)}(y) = T_{(x,y)}(x) = y,$$

$$T_{(y,x)} \circ T_{(x,y)}(y) = T_{(y,x)}(x) = y,$$

$$T_{(x,y)} \circ T_{(y,x)}(x) = T_{(x,y)}(y) = x$$

[3]Esta definición esta enunciada en el capítulo 2: El Sistema de Intervalos de Lewin

y

$$T_{(y,x)} \circ T_{(x,y)}(x) = T_{(y,x)}(y) = x.$$

Pero además, para cualquier elemento $z \in \mathbb{Z}_{12}$, distinto a x o y tendremos que

$$T_{(x,y)} \circ T_{(y,x)}(z) = z = T_{(x,y)}(z).$$

De modo que $(T_{(x,y)})^{-1} = T_{(y,x)}$ y $(T_{(y,x)})^{-1} = T_{(x,y)}$ que muestra que se satisface el segundo punto de la definición.

La tercera propiedad que se debe de satisfacer para cumplir con la definición dada por Lewin es que dado un elemento $x \in \mathbb{Z}_{12}$ y un intervalo determinado $T_x \in T\mathbb{Z}_{12}^*$ existe un único elemento $y \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que

$$T_x(x) = y$$

y

$$T_x(y) = x.$$

Pero recordemos que cada elemento de $T\mathbb{Z}_{12}^*$ resulta ser una permutación de los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ entonces T_x sólo envía x a un elemento $y \in \mathbb{Z}_{12}$. Además si existe otro elemento y' de $\mathbb{Z}_{12}$ tal que $T_x(y') = x$ entonces tendremos que

$$T_x \circ T_x(y') = T_x(x) = y$$

y

$$T_x \circ T_x(y) = T_x(x) = y'.$$

Observemos que para cualquier otro elemento $z \neq x$ y $z \neq x$ tendremos que $T_x(z) = z$ y que $(T_x)^{-1} = T_x$ de modo que y y y' son el mismo elemento.

Así la pareja $(\mathbb{Z}_{12}, (T\mathbb{Z}_{12}^*, \circ))$ es un Sistema Generalizado de Intervalos.

$\square$

Matemáticamente hablando, si consideramos el toro de terceras $T_{3\times 4}$, el intervalo determinado por cada par x y y de $\mathbb{Z}_{12}$ será una permutación $T_{(x,y)}$ tal que los intercambia entre sí y deja al resto de los elementos de $\mathbb{Z}_{12}$ fijos. Musicalmente lo que hace este sistema es tomar dos notas de la escala cromática e intercambiarlas entre sí sin alterar el resto.

En el capítulo 2 se presentó los resultados desarrollados por Lewin a partir de la definición del Sistema Generalizado de Intervalos pero reescritos a un lenguaje matemático actual. En lo que sigue se desarrollarán dichos resultados aplicados al sistema de intervalos que acabamos de presentar.

Definiremos la operación transposición en este sistema como sigue. Consideremos un intervalo $i \in T\mathbb{Z}_{12}^*$. Diremos que la **transposición por** i, denotada T_i, de un elemento s de $\mathbb{Z}_{12}$ determina un único elemento $T_i(s) \in \mathbb{Z}_{12}$ tal que

$$T_{(s,T_i(s))} = i.$$

Observemos que tenemos once transformaciones o intervalos, sin contar la identidad, de $T\mathbb{Z}_{12}^*$ determinadas por el elemento s de $\mathbb{Z}_{12}$. Entonces, al tomar una de las once posibilidades o la identidad, la operación de transposición de un intervalo define un único elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ que cumple con la transformación escogida. Utilizando el punto 3 de la definición se puede garantizar la existencia y unicidad de este elemento.

Tomemos dos objetos u y v de $\mathbb{Z}_{12}$. Definiremos una **inversión de u a v**, denotado I^{uv}, como la transformación de $T\mathbb{Z}_{12}^*$ tal que dado un elemento $s \in \mathbb{Z}_{12}$ la imagen invertida de s es el único objeto $I^{uv}(s)$ que

$$T_{(u,I^{uv}(s))} = T_{(s,I^{uv}(s))} \circ T_{(u,v)} = T_{(s,v)}.$$

Observemos que ésta definición se sigue del primer punto de la definición. En realidad, la inversión nos asegura la existencia y unicidad de un cuarto elemento dados un intervalo entre dos notas y una tercera tales que cumplan la composición de intervalos.

Finalmente consideremos transformaciones $X, Y, ..$ de $T\mathbb{Z}_{12}^*$, no necesariamente intervalos. Diremos que una transformación X **preserva intervalos** si para $T_{(x,y)}$ se cumple que

$$T_{(x,y)} = T_{(X(x),X(y))}.$$

Análogamente diremos que una transformación Y **invierte intervalos** si para $T_{(x,y)}$ no se cumple que

$$T_{(x,y)} = T_{(Y(x),Y(y))}.$$

El uso de la teoría de grupos hace más sencillo generalizar este sistema más allá de las notas y las transformaciones como la inversión y transposición. Sin embargo, la aplicación a la música del Sistema Generalizado es bastante limitada, como se observo en el capítulo 2.

Capítulo 5

Glosario

El siguiente glosario compila entradas del *Diccionario Harvard de Música* y del *Diccionario Enciclopédico de la Música* de Oxford[1]. El primero es la reimpresión del 2001 de la versión española de Luis Carlos Gago, editado por Michael Randel y publicado por Alianza Editorial. El segundo es la reimpresión del 2014 de la primera versión española del 2009 publicada por el Fondo de Cultura Económica, con la traducción coordinada por Alejandro Perez Saenz, Federico Bañuelos, Yael Bitrán, Juan Arturo Brennan y revisada por Clara Stern Rodriguez.

Los conceptos descritos en el Diccionario Harvard se destacarán con el símbolo ▷ mientras que ► denotará los del Diccionario Enciclopédico.

▷ **Acorde**

Tres o más notas que suenan simultáneamente o que funcionan como si sonaran simultáneamente; dos de estas notas reciben normalmente el nombre de intervalo. Los acordes más básicos en el sistema de la tonalidad tónica-dominante o triádica son las triadas mayor y menor y sus inversiones en el acorde de sexta (seis-tres) o el acorde seis-cuatro. Otros acordes que juegan un papel importante aunque subordinado son el acorde de séptima, sexta aumentada, novena y la triada disminuida.

En el análisis de la música tonal todos los acordes pueden considerarse como la suma o derivación de dos o más terceras (ya sean mayores o menores) dispuestas una

[1]En el Diccionario Enciclopedico de la Música especifica que colaborador es responsable de cada artículo, cosa que no se menciona en el Diccionario Harvard.

encima de la otra. Cuando un acorde se forma de este modo extraordinariamente conciso mediante la superposición de sólo terceras, la nota más grave es la fundamental. La superposición de terceras puede extenderse hasta incluir acordes de novena, de undécima y de decimotercera.

▷ **Afinación**

1. El acto de ajustar la frecuencia o frecuencias sonoras fundamentales de un instrumento, generalmente con la intención de ponerla o ponerlas de acuerdo con alguna altura predeterminada. El hecho de que dos fuentes sonoras estén afinadas entre sí depende tanto de la identidad acústica de sus fundamentales como de los armónicos superiores importantes que tengan en común.

2. Cualquier colección interválica ordenada de donde todos sus miembros puedan expresarse con precisión por medio de números racionales. Las colecciones interválicas que no poseen esta propiedad son temperamentos.

De las afinaciones griegas, helénicas y romanas que se conservan, la que se revistió de una mayor popularidad fue la Pitagórica que dominó desde tiempos de Platón hasta casi 1550. Esta afinación permite la existencia de octavas y quintas sin batidos en una escala diatónica. Muchos músicos del siglo XVIII prefirieron una de las diversas formas de entonación justa.

▷ **Armonía**

(del Gr., Lat. *harmonia*; Al. Fr *Harmonie*; Ing *Harmony*; It. *armonia*) La relación entre las notas consideradas cuando suenan simultáneamente, y el modo en que estas relaciones se organizan en el tiempo; también cualquiera colección concreta de notas que suenan simultáneamente, que recibe el nombre de acorde.

Es el estudio de la técnica para enlazar acordes, es el equilibrio de las proporciones entre las distintas partes de un todo, y su resultado siempre connota belleza. El estudio de la armonía implica los acordes y su construcción, así como las progresiones de acordes y los principios de conexión que los rigen.

▶ Consonancia y Disonancia[2]

La consonancia (o concordancia) es la cualidad inherente en un intervalo o acorde que, en un contexto tonal o modal tradicional, parece satisfactoriamente completo y estable en sí mismo. En teoría contrapuntística y armónica tradicional, los intervalos consonantes comprenden todos los intervalos perfectos (incluyendo a la octava) y todas las terceras y sextas mayores y menores, pero lo que constituye una sonoridad consonante no está estrictamente definido y ha variado con el tiempo.

Lo opuesto a la consonancia es la disonancia (o discordancia): la cualidad de tensión inherente en un intervalo o acorde que, en un contexto tonal o modal tradicional, involucra un choque entre notas adyacentes de la escala y crea la expectativa de una resolución hacia la consonancia.

▶ Contrapunto[3]

El contrapunto es la combinación coherente de distintas líneas melódicas en música, y la cualidad que mejor cumple el principio estético de la unidad en la diversidad. Antes del siglo XX, la coherencia y la unidad se lograban en la música contrapuntística con el apego a las reglas de conducción de voces predicadas sobre la distinción entre la consonancia y disonancia, y la necesidad de que la disonancia se resolviera en una consonancia.

▶Escala[4]

Una escala no es una pieza musical, sino un elemento constructivo teórico o analítico. La escala se forma sea con una selección o con todas las notas características de la música en un periodo, cultura o repertorio determinados; la distribución de las notas sigue un orden ascendente o descendente de alturas sucesivas. Algunas, como las gamut medievales, son escalas completas en sí mismas; otras, como la escala cromática del piano, están definidas dentro del intervalo de octava, formando un patrón de notas

[2] Esta entrada del Diccionario Enciclopedico de la Música es colaboración de Arnorld Whittall.
[3] Esta entrada del Diccionario Enciclopedico de la Música es colaboración de Arnorld Whittall.
[4] Esta entrada del Diccionario Enciclopedico de la Música es colaboración de Percy Scholes, Judith Nagley y Nicholas Temperley

que se puede repetir ilimitadamente en otras octavas superiores o inferiores mediante la transposición. La función básica de las escalas es definir y regular las alturas que conforman una interpretación o una composición.

- Escalas Diatónicas.

  La escala diatónica está formada por siete alturas interválicas de tamaño irregular, cuya suma es una octava, y que se repite indefinidamente en otras octavas superiores o inferiores. Una forma de la escala diatónica está representada por las telas blancas del teclado del piano.

- Escalas Cromáticas.

  La escala cromática está formada por las 12 notas que conforman la octava en el teclado del piano. La escala cromática evolucionó a la par del advenimiento de la tonalidad.

▷ **Intervalo**

Distancia entre las alturas de dos notas, se define el intervalo como la distancia entre una nota superior y una inferior.En Grecia Antigua se define el intervalo como la razón entre una nota superior y una inferior.

La medida exacta de los intervalos se expresa acústicamente en términos de proporciones de las frecuencias, pero para efectos comunes, se toma la escala diatónica como referencia. Así, para los efectos de la música tonal occidental, los intervalos se denominan según: (1) El número de grados de la escala diatónica y (2) el número de semitonos entre las dos notas. El primero se expresa por medio de un número determinado por un recuento de las notas comenzando con una nota inferior e incluyendo la superior. Obteniendo así el unísono, la segunda, la tercera, cuarta, quinta,sexta, séptima y la octava.

Por ejemplo, considerando la escala diatónica de Do obtendremos:

segunda	do-re
tercera	do-mi
cuarta	do-fa
quinta	do-sol
sexta	do-la
septima	do-si
octava	do-do

El número de semitonos entre dos notas se indica entre dos notas se indica por medio de los adjetivos: justa, mayor, menor, disminuida y aumentada. Si se reduce en un semitono a un intervalo justo se convertirá en un intervalo disminuido y si se reduce un semitono a un intervalo mayor éste se volverá un intervalo menor. Los intervalos aumentados y disminuidos pueden devenir doblemente aumentados o doblemente disminuidos mediante la adición o sustracción de otro semitono más. Los tipos de intervalos que contienen el mismo número de semitonos pero tienen diferentes nombres, por ejemplo la tercera disminuida y la segunda mayor, son enarmónicamente equivalentes.

▷ **Inversión**

Un intervalo es la inversión o complemento de otro si la suma de los dos intervalos forma un tercer intervalo fijo con respecto al cual tiene lugar la inversión. A menos que se especifique algo en contrario, la inversión se calcula generalmente con respecto a la octava. En este caso, un intervalo se invierte colocando la nota inferior sobre la superior, esto es, subiendo la nota inferior una octava. Como la octava contiene 12 semitonos, la suma de dos intervalos relacionados por inversión es 12. Con respecto a la octava, por tanto, la inversión de cualquier intervalo de n semitonos es el complemento de n con respecto a (con módulo de) 12 o 12-n.

Los intervalos justos producirán intervalos justos, los intervalos mayores producirán intervalos menores mientras que los menores serán mayores. Así, la inversión de una quinta justa será una cuarta justa; de una tercera mayor una sexta menor; de una tercera menor, una sexta mayor; de una segunda mayor una séptima menor; de una segunda menor una séptima mayor.

La inversión de una melodía es una melodía cuyo perfil es la imagen en espejo de la melodía original. Así, donde la melodía original asciende, la inversión desciende y viceversa.

▷ **Melodía**

En el sentido más general, una sucesión coherente de notas. Aquí nota significa un periodo de sonido cuya frecuencia es lo suficientemente clara y estable como para oírse como algo diferente al ruido; sucesión significa que aparecen varias notas; y coherente significa que la sucesión de notas se acepta como una afinidad conjunta.

En un sentido más restringido, la melodía denota una entidad musical específica y su significado se encuentra cerca de los de figura, motivo, sujeto y tema. Tema o sujeto denota una entidad melódica fija que se utiliza como la base de una sección musical más amplia. Los términos motivo y figura sugieren fragmentos melódicos: un motivo es una configuración es una configuración que forma parte de un sujeto, tema o melodía pero que es claramente reconocible por derecho propio si reaparece en otro contexto; una figura es una configuración proteica utilizada para prolongar una melodía iniciada de manera más memorable.

▶ **Nota**

Signo escrito que representa la altura o duración, o ambas, de un sonido musical. En la terminología inglesa la palabra "note"tiene dos significados adicionales:

1. la tecla de un instrumento de teclado;

2. el propio sonido producido.

▷ **Semitono**

El intervalo más pequeño utilizado en la tradición musical occidental. Existen doce intervalos de este tipo en la octava, i.e., entre dos notas del mismo nombre.

▷ **Tonalidad**

En la música tonal, las relaciones de altura que establece una sola nota como centro tonal o tónica, con respecto a la cual las notas restantes tienen funciones subordinadas. Existen dos tipos o modos de tonalidad, mayor y menor, y cualquiera de las doce notas puede servir de tónica. Así, existen en principio 24 tonalidades diferentes. La tonalidad de una composición o pasaje se escribe en términos de su tónica y de su modo, y se dice que una obra o pasaje está «en» determinada tonalidad.

▷ **Tono**

1. Calidad del sonido musical; por ejemplo, de un violinista puede decirse que tiene un tono potente o con cuerpo y de un cantante que tiene un tono puro.

2. En el uso estadounidense, la palabra "tone"(tono) es sinónimo de "note"(nota) en inglés británico.

3. Sonido o tono en sentido general, pero más específicamente el tono entero, intervalo conformado por dos semitonos, es decir, una segunda mayor, se conoce también con el nombre de tono entero o tono completo.

▷ **Transposición**

La reescritura o interpretación de música a una altura diferente de la original. Esto comporta subir o bajar cada nota de la música original exactamente el mismo intervalo. En la música tonal, el resultado es el cambio de la tonalidad original. Las obras suelen transportarse para acomodarse a las tesituras de los cantantes.

▷ **Tríada**

Un acorde integrado por tres notas, en el que las notas adyacentes están separadas por una tercera y que puede por tanto escribirse en tres líneas adyacentes o tres espacios adyacentes del pentagrama. Existen cuatro tipos:

1. La tríada mayor, en la que el intervalo entre las dos notas inferiores es una tercera mayor y el intervalo entre las dos superiores es una tercera menor, mientras

que el intervalo entre la más grave y la más aguda es una quinta justa.

2. La tríada menor, en la que el intervalo inferior es una tercera menor y el superior una tercera mayor, mientras que el intervalo global es una quinta justa.

3. La tríada disminuída, en la que ambos intervalos internos son terceras menores y el intervalo externo es una quinta disminuída.

4. La tríada aumentada, en la que ambos intervalos internos son terceras mayores y el intervalo externo es una quinta aumentada.

Las tríadas mayor y menor incluyen intervalos consonantes y son, por lo tanto, acordes consonantes. Las tríadas disminuídas y aumentadas incluyen ambas un intervalo disonante y son, por lo tanto acordes disonantes.

Bibliografía

[1] Agustín-Aquino O., du Plessis J., Lluis Puebla E., Montiel M. *Una Introducción a la Teoría de Grupos con Aplicaciones en la Teoría Matemática de la Música.* Publicaciones electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie: textos Vol 10. 2009.

[2] Lluis Puebla Emilio *Teoría de Grupos, un primer curso.* Publicaciones electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie: textos vol 6. 2014.

[3] Lewin David *A label-free development for 12-pitch class systems.* Journal of Music Theory Vol 21 No 1.1977

[4] Lewin David. *On Generalized Intervals and Transformations.* Journal of Music Theory, Vol 24 No. 2.1987.

[5] Mazzola Guerino. *The Topos of Music. Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance.*Birkhäuser. 2002.

[6] Mazzola G., Mannone M., Pang Y. *Cool Math for Hot Music. A first introduction to Mathematics for Music Theorists.*. Springer. 2016.

[7] Latham Alison. *Diccionario Enciclopédico de la Música.* Coordinador de la traducción: Pérez-Sáez Alejandra. Fondo de Cultura Económica.2009.

[8] Randel Don Michael. *Diccionario Harvard de Música.* Coordinador de la traducción: Gago Luis Carlos. Alianza Editorial.1997.