



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO**  
**MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**CORRESPONDENCIA ADS/CFT, ENTRELAZAMIENTO DE PURIFICACIÓN Y  
SISTEMAS DE ESPÍN**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**  
**ANTONIO VÁZQUEZ RAMOS**

**TUTOR PRINCIPAL:**  
**DR. ALBERTO GÜIJOSA HIDALGO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:**  
**DR. MARIANO CHERNICOFF MINSBERG**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DR. JOSÉ ANTONIO RAFAEL GARCÍA ZENTENO**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES**

**CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, DICIEMBRE 2019**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*Dedicado a  
mi familia*



# Agradecimientos

Agradezco a mi padre, a mi madre y a mis hermanos por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida.

Agradezco al Dr. Alberto Güijosa Hidalgo por su constante apoyo, y por las largas pláticas que, no solamente dieron lugar a este trabajo, sino que también fueron determinantes en mi formación como físico.

Finalmente, agradezco a mis sinodales por su tiempo dedicado a revisar este trabajo, y cuyas observaciones ayudaron a mejorarlo.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Breve introducción a la correspondencia AdS/CFT</b>	<b>3</b>
1.1. Teorías Cuánticas de Campos Conformes . . . . .	3
1.1.1. Correladores en CFT's . . . . .	6
1.2. Anti-de Sitter . . . . .	7
1.3. La deducción de Maldacena y el diccionario . . . . .	10
1.3.1. Prescripción GKPW . . . . .	12
1.4. Correspondencia AdS/CFT más general . . . . .	16
<b>2. Entropía de entrelazamiento</b>	<b>19</b>
2.1. Entropía de entrelazamiento en QFT . . . . .	19
2.1.1. Entropía de Von Neumann . . . . .	19
2.1.2. Propiedades de la entropía de entrelazamiento . . . . .	21
2.1.3. Ejemplo: Entropía de entrelazamiento para un sistema de 2 espines . . . . .	22
2.1.4. Entropías de Rényi y el truco de réplica . . . . .	23
2.2. Entropía de entrelazamiento holográfica . . . . .	25
2.2.1. Motivación . . . . .	26
2.2.2. Fórmula RT . . . . .	26
2.2.3. Evidencia a favor de RT . . . . .	28
2.2.4. Implicaciones de la fórmula de Ryu-Takayanagi . . . . .	29
2.2.5. Cuña causal y cuña de entrelazamiento . . . . .	30
<b>3. Entrelazamiento de purificación</b>	<b>33</b>
3.1. Entrelazamiento de purificación en QFT . . . . .	33
3.1.1. Purificaciones . . . . .	33
3.1.2. Definición del entrelazamiento de purificación . . . . .	34
3.1.3. Propiedades del entrelazamiento de purificación . . . . .	34
3.2. Dual holográfico del entrelazamiento de purificación . . . . .	35

<b>4. Entrelazamiento de purificación en sistemas de espines</b>	<b>39</b>
4.1. Entrelazamiento de purificación en el modelo de Ising . . . . .	39
4.2. Estados aleatorios y Purificación canónica . . . . .	40
4.3. Optimizando la purificación canónica . . . . .	43
<b>Conclusiones</b>	<b>49</b>

# Introducción

En 1997, Juan Maldacena descubrió lo que se conoce hoy como la dualidad AdS/CFT o correspondencia holográfica. Este resultado es uno de los más impresionantes de la física teórica, debido a que relaciona dos ideas que no parecen estar conectadas de manera alguna. Por un lado, se tiene una teoría cuántica de campos (QFT) sin gravedad, en  $d$  dimensiones. Por el otro, se tiene una teoría de gravedad cuántica en un espaciotiempo de al menos  $D = d + 1$  dimensiones. Lo que Maldacena descubrió [29] fue que ambas teorías describen el mismo sistema físico. En las últimas décadas este resultado ha causado una revolución dentro de la física teórica, porque ha permitido estudiar mejor tanto las QFTs en el régimen de acoplamiento fuerte como teorías de gravedad cuántica.

Una de las entradas del diccionario holográfico más importantes que se han descubierto tiene que ver con la entropía de entrelazamiento, cantidad que es útil de calcular en las teorías cuánticas de campos. En 2006, Ryu y Takayanagi argumentaron [36] que, a tiempo fijo, la entropía de entrelazamiento de un subsistema en la teoría de campos está dada por el área de una superficie mínima de codimensión 2 en la descripción gravitacional. Este resultado produjo una avalancha de trabajos para intentar comprender la naturaleza e implicaciones de la fórmula de Ryu-Takayanagi (RT). Entre estos trabajos destacan las generalizaciones al caso covariante [24], las demostraciones de esta conjetura [12, 26] y la propuesta de que el patrón de entrelazamiento correcto es fundamental para la emergencia de un espaciotiempo suave y conectado [42]; sin embargo, la historia no termina ahí. La propuesta RT nos ha enseñado tanto, que se han continuado buscando entradas del diccionario para otras cantidades de información cuántica, y recientemente se ha propuesto el dual gravitacional para el entrelazamiento de purificación.

El entrelazamiento de purificación surge de la necesidad de tener una medida de las correlaciones para estados mezcla, y resulta estar emparentada con la entropía de entrelazamiento. Debido a esto último, no es de sorprender que su dual holográfico también esté íntimamente relacionado a superficies mínimas en la teoría gravitacional. Desafortunadamente, calcular el entrelazamiento de purificación en una teoría de campos no resulta ser una tarea sencilla, y hasta ahora solo se ha podido probar que esta cantidad satisface un cierto conjunto de desigualdades [41]. Motivados por ésto, nos proponemos estudiar de manera numérica el entrelazamiento de purificación para sistemas de dimensión finita,

con el objetivo de encontrar nuevas cotas superiores para éste, y algún candidato plausible.

Esta tesis está estructurada como sigue. En el Capítulo 1, comenzamos haciendo un breve repaso de teorías cuánticas de campos conformes y del espaciotiempo conocido como Anti-de Sitter. Posteriormente, discutimos el argumento de Maldacena mediante el cual concluyó que la teoría de cuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$  con  $N$  unidades de flujo RR a través de la 5-esfera es dual a MSYM con grupo de norma  $SU(N)$  en Minkowski  $3 + 1$ . Luego, revisamos la receta GKPW, la cual constituye una de las más importantes entradas del diccionario holográfico. Finalmente, discutimos el enunciado de la correspondencia holográfica en un contexto más general que en el ejemplo que dio origen a esta dualidad.

En el Capítulo 2, hacemos una revisión de las propiedades fundamentales de la entropía de entrelazamiento (EE). Comenzamos discutiendo su definición y algunas de las desigualdades más importantes que satisface. Luego, discutimos el cálculo de esta cantidad para un sistema de 2 espines con el objetivo de esclarecer el significado físico de la entropía de entrelazamiento. Posteriormente, explicamos el truco de réplica, el cual es utilizado para calcular la entropía de entrelazamiento en teorías cuánticas de campos. En la parte final de este capítulo, explicamos la propuesta hecha por Ryu y Takayanagi para encontrar la entropía de entrelazamiento holográfica (EEH), mediante el cálculo de superficies extremales de co-dimensión 2. Para finalizar, explicamos una de las implicaciones más relevantes de la fórmula RT, relacionada con la emergencia del espaciotiempo a partir del patrón de entrelazamiento [42].

En el Capítulo 3, discutimos el entrelazamiento de purificación. Al comienzo de este capítulo lo definimos y enunciamos algunas de las propiedades que satisface. Posteriormente, explicamos una reciente propuesta holográfica [31, 40] para calcular esta cantidad, la cual consiste en hallar la sección transversal o “cintura” de la cuña de entrelazamiento.

En el Capítulo 4 presentamos los resultados numéricos obtenidos para el entrelazamiento de purificación en sistemas de dimensión finita. Comenzamos estudiando el comportamiento de la entropía de entrelazamiento para el modelo de Ising, y posteriormente analizamos una propuesta para el entrelazamiento de purificación que ponemos a prueba para un gran número de estados generados de manera aleatoria. Luego, nos percatamos que la purificación propuesta no siempre nos permite hallar una cantidad que satisfaga las propiedades del entrelazamiento de purificación. Debido a la evidencia numérica previamente obtenida, no la descartamos; en lugar de esto, llevamos a cabo dos análisis numéricos más. El segundo de estos, nos da resultados que concuerdan con una nueva propuesta holográfica [13] para calcular el entrelazamiento de purificación.

# Capítulo 1

## Breve introducción a la correspondencia AdS/CFT

### 1.1. Teorías Cuánticas de Campos Conformes

En esta sección discutiremos algunas las propiedades principales de las teorías cuánticas de campos conformes, o CFT's por sus siglas en inglés, que nos servirán más adelante para entender el enunciado de la correspondencia norma/gravedad.

Al estudiar teorías cuánticas de campos, o QFT's por sus siglas en inglés, requerimos que éstas tengan como grupo de simetría al grupo de *Poincaré*. Ésto último significa que nuestras teorías deben ser invariantes respecto a traslaciones espaciales y temporales, a rotaciones y a empujones (boosts). Sabemos además que los generadores de traslaciones  $P_\mu$  y los generadores de rotaciones y empujones  $J_{\mu\nu}$  satisfacen el álgebra

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (1.1)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu), \quad (1.2)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho}), \quad (1.3)$$

lo que nos permite encontrar distintas representaciones.

Si además de considerar las simetrías antes mencionadas pedimos que la teoría sea invariante de escala, es decir, que sea invariante respecto a la transformación  $x^\mu \rightarrow sx^\mu$ , donde  $s > 0$ , encontramos un nuevo generador,  $D$ , conocido como el generador de dilataciones que satisface

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad (1.4)$$

$$[D, J_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.5)$$

Más aún, la teoría resulta ser además invariante [30] respecto a la transformación

$$x^\mu \rightarrow \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b^\nu x^\nu + b^2 x^2}, \quad (1.6)$$

podemos encontrar a los generadores  $K_\mu$  de estas transformaciones conformes especiales, los cuales satisfacen que

$$[K_\mu, K_\nu] = 0, \quad (1.7)$$

$$[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = -i(\eta_{\mu\lambda}K_\nu - \eta_{\nu\lambda}K_\mu), \quad (1.8)$$

$$[P_\mu, K_\nu] = 2iJ_{\mu\nu} - 2i\eta_{\mu\nu}D, \quad (1.9)$$

$$[D, K_\mu] = iK_\mu. \quad (1.10)$$

Podemos notar que todas las relaciones de conmutación anteriores no son otra cosa que lo que se conoce como el álgebra conforme [1], y por lo tanto concluimos que nuestra teoría es invariante respecto al grupo conforme.

Entre otras cosas, las CFT's son de particular importancia porque son estas teorías las que gobiernan el comportamiento de las QFT's que están bien definidas en el UV. Un ejemplo trivial de una CFT es un campo escalar libre no masivo; sin embargo, existen ejemplos mucho más interesantes y complejos, como Yang-Mills máximamente supersimétrica (MSYM) que además de ser invariante de escala a nivel clásico, lo es también a nivel cuántico.

Para comprender mejor la densidad lagrangiana que define a MSYM, lo mejor es desglosar a cada uno de los campos que la constituyen. En primer lugar, tenemos un campo de norma  $A_{cc'}^\mu(x)$  con grupo de norma  $SU(N_c)$ . Este campo, en términos de los generadores  $t_{cc'}^I$  de  $SU(N_c)$ , toma la forma

$$A_{cc'}^\mu(x) = A_I^\mu(x) t_{cc'}^I \quad c, c' = 1, \dots, N_c; \quad I = 1, \dots, N_c^2 - 1. \quad (1.11)$$

En segundo lugar, tenemos algunos campos de materia inusuales. Los primeros de éstos son 6 campos escalares no masivos que se encuentran en la representación adjunta de  $SU(N_c)$

$$[\Phi^e(x)]_{cc'} = \Phi_I^e(x) t_{cc'}^I \quad e = 1, 2, \dots, 6; \quad I = 1, \dots, N_c^2 - 1, \quad (1.12)$$

y los segundos son 4 espinores de Weyl izquierdos también en la representación adjunta de  $SU(N_c)$

$$[\psi^f(x)]_{cc'} = \psi_I^f(x) t_{cc'}^I \quad f = 1, \dots, 4. \quad (1.13)$$

Debido a que todos los campos escalares,  $\Phi^e(x)$ , tienen las mismas propiedades pedimos que nuestra teoría sea invariante respecto al grupo  $SO(6)$ . De manera análoga, imponemos invariancia bajo el grupo  $SU(4)$  porque tenemos 4 espinores de Weyl izquierdos. Pero notando que  $SO(6) \simeq SU(4)$  podemos pedir que nuestra teoría tenga como simetría interna global a una sola copia ya sea de  $SO(6)$  ó de  $SU(4)$ . Con ésto podremos tener acoplamientos de Yukawa entre  $\Phi^e$  y  $\psi^f$ .

Una vez revisados los campos básicos que se encuentran en MSYM estamos en condiciones de escribir la densidad lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSYM} = Tr \left\{ -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \Sigma D_\mu \Phi^e D^\mu \Phi^e - i \Sigma \bar{\psi}^f \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi^f \right. \\ \left. + \Sigma g_{YM} C_{ff'}^e \psi^f [\Phi^e, \psi^{f'}] + \Sigma g_{YM} \tilde{C}_{ff'}^e \bar{\psi}^f [\Phi^e, \bar{\psi}^{f'}] + \frac{g_{YM}^2}{2} \Sigma [\Phi^e, \Phi^{e'}]^2 \right\}, \quad (1.14) \end{aligned}$$

donde  $\Theta_{YM}$  es conocido como el ángulo theta y multiplica a una derivada total que es importante tomar en cuenta cuando estudiamos topologías no triviales. El último término es la energía potencial en MSYM.<sup>1</sup> Los  $C_{ff'}^e$  en los términos de Yukawa son simplemente coeficientes de Clebsch-Gordan de  $SU(4) \simeq SO(6)$ .

Esta teoría, además de ser una teoría conforme, tiene otra simetría conocida como supersimetría. Ésto significa que es invariante ante transformaciones que mezclan a los campos bosónicos y fermiónicos. De manera más precisa, MSYM es invariante bajo

$$\begin{aligned} \delta \Phi^e(x) &= \bar{\epsilon}^f C_{ff'}^e \psi^{f'}(x) \equiv \bar{\epsilon}^f [Q^f, \Phi^e(x)], \\ \delta \psi^f(x) &= \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}(x) + \tilde{F}_{\mu\nu}(x)) \sigma^{\mu\nu} \epsilon^f + i [\Phi^e(x), \Phi^{e'}(x)] \sigma^2 C_{ff'}^{ee'} \epsilon^{f'} \equiv \{Q^f, \psi^f\} \epsilon^{f'}, \\ \delta \bar{\psi}^f(x) &= \bar{\epsilon}^{f'} C_{f'f}^e \bar{\sigma}^\mu D_\mu \Phi^e(x) \equiv \bar{\epsilon}^{f'} \{Q^{f'}, \bar{\psi}^f\}, \\ \delta A_\mu(x) &= \epsilon^f \sigma_\mu \bar{\psi}^f(x) \equiv \epsilon^f [Q^f, A_\mu(x)], \end{aligned}$$

donde las  $Q^f$  son los operadores espinoriales que generan estas transformaciones, y se conocen como súper cargas. Podemos notar que tenemos 4 súper cargas (ya que tenemos 4 espinores de Weyl), de modo que el nombre MSYM or SYM  $\mathcal{N} = 4$  viene de este hecho. La supersimetría  $\mathcal{N} = 4$  determina por completo la forma de la acción (1.14).

Finalizamos esta breve revisión de MSYM verificando que dicha teoría es en verdad invariante de escala a nivel cuántico. Para ésto, escribimos la función beta a un lazo [38]

<sup>1</sup>MSYM tiene más de un vacío. El vacío que satisface  $\langle \Phi^e \rangle = 0$  es conocido como el vacío superconforme, y preserva todas las simetrías.

$$\beta(g_{YM}) \equiv \mu \frac{\partial g_{YM}}{\partial \mu} = -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2} \left( \frac{11}{12} N_c - \frac{1}{6} n_f N_c - \frac{1}{24} n_e N_c \right) \quad (1.15)$$

$$= -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2} N_c \left( \frac{11}{12} - \frac{8}{12} - \frac{3}{12} \right) = 0. \quad (1.16)$$

Por lo tanto, concluimos que, al menos a este orden, en MSYM la constante de acoplamiento no cambia bajo reescalamientos, es decir, no corre con la energía. Más aún, esta última resulta ser una propiedad exacta de la teoría [39].

### 1.1.1. Correladores en CFT's

Cuando uno estudia QFT's aprende que uno de los principales objetivos es extraer la información de la teoría en cuestión ya sea calculando las funciones de Green ó bien las amplitudes de dispersión. Usualmente, para llevar a cabo esta tarea se analiza la teoría de manera perturbativa; sin embargo, este método solamente puede ser utilizado cuando la constante de acoplamiento es pequeña. Más aún, uno debe estar consciente de que ni siquiera en esta situación la serie perturbativa converge, lo que nos impide conocer la teoría en su totalidad. En el caso de las CFT's ocurren dos escenarios muy particulares. Primeramente, no podemos calcular amplitudes de dispersión debido a que no tenemos una escala contra la cual comparar, y por lo tanto no podemos definir estados asintóticos en el sentido tradicional. Sin embargo, para cualquier CFT podemos fijar la forma de algunas funciones de Green, como mostramos a continuación, gracias a la simetría conforme.

Si centramos nuestra atención en operadores escalares con dimensión  $\Delta_j$ , sabemos que bajo una transformación  $x^\mu \rightarrow sx^\mu$  nuestro operador cambia como

$$O_j(x) \rightarrow |det \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)|^{\Delta_j/d} O_j(sx) = s^{\Delta_j} O_j(sx), \quad (1.17)$$

donde  $d$  es la dimensión del espaciotiempo. Si ahora calculamos las funciones de Green en el vacío, obtenemos para

- $n = 1$ :

$$\langle O_j(x) \rangle \rightarrow s^{\Delta_j} \langle O_j(sx) \rangle = \langle O_j(x) \rangle, \quad (1.18)$$

porque debe ser invariante bajo traslaciones. Por lo tanto, tenemos que  $\Delta_j = 0$  ó  $\langle O_j(x) \rangle = 0$ .

- $n = 2$ :

Ya que la función de Green debe ser invariante bajo *Poincaré* tenemos que

$$\langle O_1(x_1) O_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|), \quad (1.19)$$

y como también debe ser invariante de escala

$$f(|x_1 - x_2|) = \langle O_1(x_1) O_2(x_2) \rangle = s^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle O_1(sx_1) O_2(sx_2) \rangle = s^{\Delta_1 + \Delta_2} f(s|x_1 - x_2|), \quad (1.20)$$

de modo que

$$f(|x_1 - x_2|) = \frac{c_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}. \quad (1.21)$$

Finalmente, por invariancia bajo las transformaciones conformes especiales

$$\frac{c_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{c_{12} (1 + 2bx_1 + b^2x_1^2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} (1 + 2bx_2 + b^2x_2^2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{|1 + 2bx_1 + b^2x_1^2|^{\Delta_1} |1 + 2bx_2 + b^2x_2^2|^{\Delta_2} |x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}, \quad (1.22)$$

de modo que  $\Delta_1 = \Delta_2$  si  $c_{12} \neq 0$ . Por lo tanto, la función de Green de dos puntos es

$$\langle O_1(x_1) O_2(x_2) \rangle = \delta_{\Delta_1, \Delta_2} \frac{c_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}. \quad (1.23)$$

■  $n = 3$ :

Similarmente, se puede mostrar que

$$\langle O_1(x_1) O_2(x_2) O_3(x_3) \rangle = \frac{c_{123}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_1 - x_3|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}. \quad (1.24)$$

Sin embargo, las funciones de Green para  $n \geq 4$  no pueden ser determinadas por completo porque las variables  $x_j^\mu$  forman combinaciones invariantes conocidas como cocientes cruzados.

Hasta ahora hemos revisado solamente algunos de los resultados conocidos de las CFT's que son relevantes para entender el enunciado de la correspondencia holográfica, pero muchas otros se conocen, principalmente cuando se trata del caso en  $1 + 1$  dimensiones. En la siguiente sección discutiremos las propiedades más relevantes, para nuestro estudio de la dualidad norma/gravedad, del espacio conocido como Anti-de-Sitter.

## 1.2. Anti-de Sitter

El espacio Anti-de Sitter (AdS) es el espacio tiempo máximamente simétrico de curvatura constante negativa [16]. Podemos obtener AdS en  $d + 1$  dimensiones de una subvariedad del espacio Minkowski en  $d + 2$  dimensiones. Éste último tiene métrica

$$ds^2 = -dT_1^2 - dT_2^2 + dX_1^2 + \dots + dX_d^2, \quad (1.25)$$

y dicha subvariedad está dada por

$$T_1^2 + T_2^2 - \vec{X}^2 = L^2. \quad (1.26)$$

Escogiendo un conjunto de coordenadas, conocidas como *coordenadas globales*, definidas por

$$T_1 = \sqrt{L^2 + \rho^2} \cos(t/L), \quad (1.27)$$

$$T_2 = \sqrt{L^2 + \rho^2} \sin(t/L), \quad (1.28)$$

$$\vec{X}^2 = \rho^2, \quad (1.29)$$

y sustituyendo en la métrica encontramos que

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{\rho^2}{L^2}\right) dt^2 + \frac{d\rho^2}{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} + \rho^2 d\Omega_{d-1}^2, \quad (1.30)$$

donde  $\rho \in [0, \infty]$  y  $t \in (-\infty, \infty)$ . Al estipular este rango para  $t$ , en realidad estamos pasando al espacio cubriente de la subvariedad (1.26), para evitar tener curvas cerradas tipo tiempo. Esta última métrica es lo que se conoce como  $AdS_{d+1}$  global.

$AdS_{d+1}$  tiene varias propiedades importantes, pero para nuestros propósitos destacan tres. En primer lugar, es una solución a las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica negativa

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{d(d-1)}{2L^2} g_{\mu\nu}. \quad (1.31)$$

En segundo lugar, su grupo de isometrías es  $SO(d, 2)$ . Ésto último lo podemos notar porque tanto la métrica (1.25) como la ecuación del hiperboloide (1.26) son invariantes respecto a este grupo y por lo tanto dicha propiedad es heredada a la métrica (1.30). Más aún, como consecuencia de tener este grupo de isometrías,  $AdS_{d+1}$  es homogéneo e isotrópico.

Y en tercer lugar, su estructura causal es distinta a la de Minkowski. Para hacer evidente ésto, conviene redefinir a la coordenada radial  $\rho$  como

$$\rho = \tan(\alpha), \quad \alpha \in (0, \pi/2).$$

Con ésto en mente la métrica toma la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} (-dt^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_{d-1}^2), \quad (1.32)$$

y como las geodésicas nulas son las mismas para dos métricas que difieren por un factor de Weyl [44], entonces concluimos que  $AdS_{d+1}$  tiene la misma estructura causal que un cilindro sólido con métrica

$$ds^2 = -dt^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_{d-1}^2. \quad (1.33)$$

De este resultado podemos notar dos cosas. Primero, la frontera asintótica de  $AdS_{d+1}$  en  $\rho = \infty$  ó  $\alpha = \pi/2$  tiene topología  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ . Segundo, un rayo de luz alcanza la frontera en un tiempo finito, lo que sugiere que  $AdS_{d+1}$  sea visto como una caja finita. Ésta última propiedad tiene consecuencias muy importantes al momento de resolver las ecuaciones de movimiento ya que se deben imponer condiciones de frontera apropiadas, además de condiciones iniciales, para determinar la evolución por completo.

Para finalizar esta sección, discutiremos otra parametrización de AdS que resulta particularmente útil cuando se estudia AdS/CFT. Definimos un conjunto de coordenadas, llamadas *coordenadas de Poincaré*, a través de

$$T_1 = \frac{r}{L}t, \quad (1.34)$$

$$T_2 = \frac{L^2}{2r} \left[ 1 + \frac{r^2}{L^4} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right], \quad (1.35)$$

$$\vec{X} = \frac{r}{L} \vec{x}, \quad (1.36)$$

$$X_d = \frac{L^2}{2r} \left[ 1 + \frac{r^2}{L^4} (-L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right], \quad (1.37)$$

donde  $0 \leq r < \infty$  y  $-\infty < t, x_1, \dots, x_{d-1} < \infty$ . La métrica en estas coordenadas toma la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2, \quad (1.38)$$

ó

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2), \quad (1.39)$$

cuando usamos la coordenada  $z \equiv L^2/r$ . A pesar de que estas coordenadas emergen de manera natural en la deducción de la correspondencia, debemos ser precavidos porque solamente cubren una fracción de AdS, conocida como la *cuña de Poincaré*.

En la siguiente sección discutiremos el argumento de Maldacena que lo llevó a enunciar la correspondencia AdS/CFT, y también discutiremos una de las entradas más importantes del diccionario conocida como la prescripción GKPW.

### 1.3. La deducción de Maldacena y el diccionario

En esta sección discutiremos brevemente la deducción de la correspondencia norma/gravedad hecha por Maldacena [1, 29]. Para ello, asumiremos cierta familiaridad con conceptos relacionados a la teoría de cuerdas, de modo que solamente nos concentraremos en los puntos necesarios que nos permitan explicar el argumento principal de Maldacena. Antes de hacer la conexión entre la teoría de cuerdas tipo IIB y MSYM conviene revisar algunas propiedades de p-branas negras y Dp-branas.

En 1991 Horowitz y Strominger descubrieron las p-branas negras RR [23], las cuales generalizan la solución usual de agujero negro. Estas soluciones tienen solamente 3 campos excitados: la métrica, el dilatón, y el campo de norma RR. En el caso  $p = 3$  tenemos que el dilatón es constante; de modo que  $e^\phi = g_c$ , donde  $g_c$  es la constante de acoplamiento de cuerdas. Si además consideramos el caso extremal, la métrica toma la forma

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + H(r)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.40)$$

y el campo de norma Ramond-Ramond (RR)  $C_{0123}$  la forma

$$C_{0123} = g_s^{-1} (1 - H(r)^{-1}), \quad (1.41)$$

donde  $H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}$ . De lo anterior, podemos calcular que la carga  $q = N$  satisface la relación

$$L^4 = 4\pi N g_c l_c^4, \quad (1.42)$$

donde  $l_c$  es la longitud de la cuerda. Esta solución es manejable para  $g_c N \gg 1$  (curvatura pequeña) y  $g_c \ll 1$  (cuerdas débilmente acopladas).

Ahora revisemos algunas propiedades importantes de las Dp-branas<sup>2</sup> [11, 15, 21]. Comencemos definiendo estos objetos. Una Dp-brana es un objeto que se extiende en p dimensiones y cuyas excitaciones son descritas por cuerdas abiertas, cuyos extremos satisfacen condiciones de frontera de Dirichlet. Lo anterior significa que sus extremos son libres de moverse a lo largo de las direcciones paralelas a la Dp-brana, pero están adheridas a ésta en las direcciones perpendiculares.

A bajas energías,  $E \ll l_s^{-1}$ , podemos describir las interacciones, de campos no masivos, mediante una acción efectiva llamada la acción de Dirac-Born-Infeld

$$S_{DBI} = -T_{Dp} \int d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\partial_\alpha X^M \partial_\beta X^N \eta_{MN} + 2\pi l_s^2 F_{\alpha\beta})}, \quad (1.43)$$

donde  $T_{Dp}$  es la tensión de la Dp-brana.  $X^\alpha \equiv \sigma^\alpha$  y  $X^i \equiv 2\pi l_s^2 \Phi^i$ , donde  $\Phi^i$  son campos escalares que viven sobre la Dp-brana y describen la posición de la brana en las direcciones

<sup>2</sup>Estos objetos extendidos fueron descubiertos por Dai, Leigh, Polchinski y Horava.

perpendiculares  $i = p + 1, \dots, 9$ .  $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ , donde  $A_\alpha$  es un campo de norma  $U(1)$  sobre la Dp-brana.

Hasta ahora hemos descrito a una sola Dp-brana; sin embargo, también existe la posibilidad de apilar  $N$  Dp-branas, y al hacer ésto las interacciones se extienden a través de todas ellas. Lo anterior significa que además de las cuerdas que empiezan y terminan en la misma Dp-brana ahora existen cuerdas cuyos extremos están atados a distintas branas. Como consecuencia de ésto, los campos que describen las interacciones son ahora matrices  $N \times N$ . Más aún, ahora que el campo de norma es una matriz, el grupo de norma es no abeliano. De manera análoga al caso de una sola Dp-brana, podemos escribir una acción efectiva para este sistema; y más aún, si consideramos intensidades de campo  $F_{\alpha\beta}$  y  $D_\alpha \Phi^i$  pequeñas (en unidades de  $1/2\pi l_c^2$ ), la acción tiene la forma

$$S_{DBINA} \simeq NT_{Dp} V_p + \frac{1}{2g_{YM}^2} \int d^{p+1} x Tr \{F^2 + (D\Phi)^2 + [\Phi, \Phi]^2 + \dots\}. \quad (1.44)$$

Notamos de la ecuación anterior que esta acción no es otra sino la de súper Yang-Mills  $\mathcal{N} = 2^{7-p/2}$  en  $p + 1$  dimensiones con grupo de norma  $U(N)$  y  $g_{YM}^2 = (4\pi)^{p-2} g_c l_c^{p-3}$ . En el caso  $p = 3$  recuperamos la acción de MSYM.

Dados los elementos anteriores podemos proceder a explicar la deducción de Maldacena. El primer paso importante es notar que

$$T_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} \quad (1.45)$$

para una Dp-brana [34], y que

$$M = \frac{NV_p}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} \quad (1.46)$$

para una p-brana negra extremal con carga  $q = N$ , donde  $M$  es la masa. Polchinski et al. [3] encontraron que una pila de  $N$  Dp-branas no excitadas tiene exactamente la misma masa y la misma carga  $q = N$  que la p-brana negra extremal. Este resultado en conjunto con otros relacionados a amplitudes de dispersión [18] sugirieron que la p-brana negra extremal no es otra cosa que los campos de supergravedad generados por la pila de  $N$  Dp-branas. Para ser más precisos, debemos enfatizar que estos modelos parecen ser dos descripciones alternativas del mismo sistema, las cuales son válidas en diferentes regímenes; la p-brana negra extremal está bajo control cuando  $g_c N \gg 1$  y  $g_c \ll 1$ , mientras que la pila de Dp-branas está bajo control cuando  $g_c N \ll 1$  y  $g_c \ll 1$ .

Asumiendo esta dualidad entre la p-brana negra extremal y la pila de  $N$  Dp-branas fue que Maldacena derivó su correspondencia. El primer paso en la deducción es fijar nuestra atención en el caso  $p = 3$  y en el límite de ultra-bajas energías  $E \ll 1/l_s, 1/L$ . En este límite la 3-brana negra extremal no absorbe modos con longitudes de onda del orden  $1/E \gg L$ ,

por lo que los modos de supergravedad en el exterior de la garganta ( $r > L$ ) se propagan esencialmente a través de un fondo plano. Ésto significa que las 2 regiones (dentro y fuera de la garganta) están incomunicadas. Ahora, debido al corrimiento al rojo en la 3-brana negra extremal, notamos que la condición de ultra-bajas energías debe ser impuesta sobre un observador en  $r \rightarrow \infty$ , porque es ahí donde la noción de tiempo coincide<sup>3</sup> con la noción de tiempo que tenemos para las D3-branas. Lo anterior implica que

$$E_\infty = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_{\text{propia}} \ll \frac{1}{l_s}, \frac{1}{L}. \quad (1.47)$$

Para  $r \geq L$  pedimos que  $E_{\text{propia}} \ll \frac{1}{l_s}, \frac{1}{L}$ , por lo que obtenemos SUGRA libre; mientras que para  $r \ll L$  podemos tener  $E_{\text{propia}}$  arbitraria. En esta región la ecuación (1.40) se reduce a

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2), \quad (1.48)$$

$$= \left( \frac{r^2}{L^2} dx_\mu dx^\mu + \frac{L^2}{r^2} dr^2 \right) + L^2 d\Omega_5^2. \quad (1.49)$$

La primera parte es precisamente  $AdS_{4+1}$  Poincaré, mientras que la segunda parte es un 5-esfera de radio  $L$ .

Tomando ahora este mismo límite de ultra-bajas energías para las  $N$  D3-branas, encontramos que las cuerdas cerradas también se desacoplan de las branas, y se reducen a los modos de SUGRA libres. Adicionalmente, las cuerdas abiertas se reducen a los modos no masivos descritos por MSYM.

Por lo tanto, al empatar ambas descripciones podemos concluir que la teoría de cuerdas tipo IIB en  $AdS_5 \times S^5$  con  $N$  unidades de flujo RR a través de la 5-esfera es dual a MSYM con grupo de norma  $SU(N)$  en Minkowski 3+1. Éste es el extraordinario resultado que encontró Maldacena.

En la siguiente sección discutiremos una de las entradas más importantes del diccionario holográfico, conocida como la receta ó prescripción GKPW.

### 1.3.1. Prescripción GKPW

A pesar de que existen abundantes entradas del diccionario holográfico, nos vamos a concentrar a lo largo de esta sección únicamente en la receta GKPW [14, 45]. Como veremos a continuación, esta entrada del diccionario nos permitirá calcular las funciones de

<sup>3</sup>Ésto puede ser visto de la ecuación (1.40) cuando tomamos el límite  $r \rightarrow \infty$ .

Green utilizando el formalismo de la integral de camino.

Como es bien conocido, en una QFT podemos calcular el correlador de 2 puntos (o mejor aún de  $n$  puntos) tomando derivadas funcionales respecto a las fuentes de la función de partición y posteriormente apagando dichas fuentes, como se muestra a continuación:

$$\langle O_{j_1}(x_1) O_{j_2}(x_2) \rangle = \frac{1}{Z_{CFT}[0]} \frac{\delta}{i\delta J_{j_1}(x_1)} \frac{\delta}{i\delta J_{j_2}(x_2)} Z_{CFT}[J_j] |_{J_j=0}. \quad (1.50)$$

En nuestro caso particular, la CFT será MSYM, así que la función de partición está dada por

$$Z_{CFT}[J_j] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f \exp \left[ iS_{MSYM} + i\Sigma \int d^4x O_j(x) J_j(x) \right]. \quad (1.51)$$

Gubser, Klebanov, Polyakov and Witten (GKPW) se dieron cuenta que el enunciado de la correspondencia podía ser reescrito en términos de las funciones de partición, haciendo la identificación

$$Z_{CFT}[J_j] = Z_{AdS} [J_j = \phi_j^0]. \quad (1.52)$$

El lado derecho de la ecuación representa la función de partición de la teoría de cuerdas tipo IIB, con todos sus campos satisfaciendo condiciones de frontera apropiadas. Vale la pena aclarar que, como veremos en la sección 1.4, el enunciado de la correspondencia es incluso más fuerte, en el entendido de que del lado izquierdo podemos elegir una  $CFT_{d+1}$  más genérica y en el lado derecho se tendrá otra teoría de gravedad en un fondo asintóticamente  $AdS_{d+2} \times M^p$ , donde  $M^p$  es alguna variedad compacta asociada a las simetrías internas globales de la CFT. Sin embargo, dejaremos esta discusión para más adelante y nos concentraremos por ahora en la receta GKPW.

Para entender cuáles son las condiciones de frontera apropiadas que se deben imponer, es conveniente estudiar el caso del campo escalar. Supongamos que tenemos un modo de Kaluza Klein (sobre la  $S^5$ ) de un campo escalar, con masa  $m$ . Su acción libre está dada por

$$\int d^5x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (1.53)$$

de modo que la ecuación de movimiento es la ecuación de Klein Gordon

$$(\square - m^2) \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m (\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n \phi) - m^2 \phi = 0. \quad (1.54)$$

Simplificando, encontramos que

$$z^5 \partial_z \left( \frac{\partial_z \phi}{z^3} \right) + z^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 L^2 \phi = 0. \quad (1.55)$$

Ya que por el momento solamente estamos interesados en las condiciones de frontera apropiadas, es suficiente con estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones cerca de la frontera  $z = 0$ . Entonces, encontramos que

$$\phi \rightarrow z^\Delta \phi^0(x^\mu) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0. \quad (1.56)$$

Sustituyendo en la ecuación de movimiento y removiendo términos subdominantes encontramos que

$$\Delta(\Delta - 4) = m^2 L^2. \quad (1.57)$$

Resolviendo esta ecuación, hallamos que

$$\Delta_\pm = 2 \pm \sqrt{4 + m^2 L^2}. \quad (1.58)$$

Al analizar estas ecuaciones encontramos que el campo escalar  $\phi$  tiene dos comportamientos muy distintos cerca de la frontera. Usando el producto interno de Klein-Gordon

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int d^3 \vec{x} dz \sqrt{-g} g^{tt} (\phi_1^* \partial_t \phi_2 - \phi_2^* \partial_t \phi_1), \quad (1.59)$$

se puede probar que si elegimos  $\Delta = \Delta_+$ , el campo escalar siempre es normalizable. Sin embargo, si elegimos  $\Delta = \Delta_-$ , el campo escalar es no normalizable cuando  $m^2 L^2 > -3$ . Por estas razones, decimos que  $\phi \rightarrow z^{\Delta_+}$  es el modo normalizable y que  $\phi \rightarrow z^{\Delta_-} = z^{4-\Delta_+}$  es el modo no normalizable. Lo anterior es relevante porque solamente los modos normalizables pueden ser cuantizados, y por lo tanto están asociados a operadores de creación y aniquilación. Aunque los modos no normalizables no pueden ser cuantizados, éstos son fundamentales para entender la correspondencia AdS/CFT porque definen un fondo fijo donde todas las fluctuaciones dinámicas ocurren. En resumen, los modos normalizables definen el estado en el que se encuentra la teoría, mientras que los modos no normalizables definen a la teoría misma.

Ya que hemos entendido qué condiciones de frontera pueden satisfacer los campos de la teoría gravitacional en AdS, podemos terminar de discutir la receta GKPW.

A pesar de que la ecuación (1.52) es correcta, está incompleta porque no hemos explicado aún el significado de  $\phi_j^0$ . Procedamos a entender por qué  $\phi_j(x^\mu, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} z^{\Delta_-} \phi_j^0(x^\mu)$  es la elección correcta.

Como ya hemos mencionado, los modos no normalizables definen la teoría en la cual estamos trabajando. El punto sutil es notar que cuando calculamos la función de Green estamos deformando la teoría original, porque agregamos términos de fuentes  $\Sigma \int d^4 x O_j(x) J_j(x)$ . Justamente para poder hacer esto, tenemos que “encender” los modos no normalizables, y eso significa pedir que  $\phi_j(x^\mu, z) \rightarrow z^{\Delta_-} \phi_j^0(x^\mu)$ , y por tanto que  $J_j(x^\mu) = \phi_j^0$  sea la fuente

del operador dual  $O_\phi$ . En lo sucesivo denotaremos  $\Delta \equiv \Delta_+$ , y como consecuencia de ello,  $\Delta_- = 4 - \Delta$ .

### Ejemplo: Campo Escalar

En esta parte de la sección revisaremos de manera explícita cómo se implementa la receta GKPW para calcular la función de 2 puntos del operador  $O_\phi$ . Ya que, en general, no sabemos cómo calcular  $Z_{AdS}$ , nos restringimos al caso cuando  $\lambda \gg 1$ ,  $N_c \gg 1$ . Ésto significa que en el lado gravitacional de la dualidad estamos trabajando en el límite semi-clásico. También, como consecuencia de que  $N_c \gg 1$ , podemos usar la aproximación de fase estacionaria para simplificar la función de partición de  $AdS$

$$Z_{AdS}[\phi_j^0] \simeq \exp \left\{ i S_{SII B}[\phi_j^{cl}] \right\} \Big|_{z \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} \phi_j^{cl}(x^\mu, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^0(x^\mu), \quad (1.60)$$

donde  $\phi_j^{cl}$  es la solución a las ecuaciones de movimiento de SUGRA con la condición de frontera dada.

Resolviendo la versión euclidiana<sup>4</sup> de la ecuación de movimiento (1.55) mediante una expansión en modos de Fourier, encontramos que se reduce a

$$\zeta^5 \partial_\zeta \left( \frac{\partial_\zeta \tilde{\phi}}{\zeta^3} \right) - \zeta^2 \tilde{\phi} - m^2 L^2 \tilde{\phi} = 0, \quad (1.61)$$

donde  $\zeta = pz$ . Usando el ansatz  $\tilde{\phi}(\zeta) = \zeta^2 B(\zeta)$ , encontramos que  $B(\zeta)$  es una función modificada de Bessel. En general

$$\tilde{\phi}(\zeta) = A \zeta^2 K_\nu(\zeta) + B \zeta^2 I_\nu(\zeta), \quad (1.62)$$

donde  $\nu = \Delta - 2$ . Debido a que no queremos que  $\tilde{\phi} \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , imponemos  $B = 0$ . Adicionalmente, debemos imponer la condición de frontera que discutimos previamente; sin embargo, debemos de hacerlo de manera cuidadosa porque hay una divergencia en  $z = 0$ , así que para evitarla ponemos un corte  $\epsilon$ . Con esto en mente, la condición de frontera tiene la forma

$$\tilde{\phi}(p, z) \rightarrow \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p) \quad \text{cuando } z \rightarrow \epsilon. \quad (1.63)$$

Y por lo tanto, la solución toma la forma

$$\tilde{\phi}(p, z) = \tilde{\mathcal{P}}_\Delta(p; z, \epsilon) \tilde{J}(p) = \frac{z^2 K_\nu(pz)}{\epsilon^2 K_\nu(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p), \quad (1.64)$$

donde  $\tilde{\mathcal{P}}_\Delta(p; z, \epsilon)$  es conocido como el *propagador bulto-frontera*.

<sup>4</sup>Cuando cambiamos de signatura Lorentziana a signatura Euclidiana la única modificación en la ecuación viene de cambiar  $\eta^{\mu\nu} \rightarrow \delta^{\mu\nu}$ .

El siguiente paso es sustituir esta solución en la acción (1.53). Simplificando y tomando las derivadas funcionales de la función de partición obtenemos

$$\langle \tilde{O}_\Delta(k) \tilde{O}_\Delta(k') \rangle = c \delta^4(k+k') \frac{e^{3-2\Delta}}{K_{\Delta-2}(k'\epsilon)} \partial_z [z^2 K_{\Delta-2}(k'z)]_{z=\epsilon}, \quad (1.65)$$

donde  $c$  es una constante. La última ecuación puede no ser útil en su forma actual, pero si utilizamos la expansión asintótica de  $K_{\Delta-2}$  y removemos las divergencias mediante el método de renormalización holográfica [37], obtenemos que

$$\langle \tilde{O}_\Delta(k) \tilde{O}_\Delta(-k) \rangle = c' \frac{(-1)^{\Delta-1}}{2^{2\Delta-6} (\Delta-3)!^2} k^{2\Delta-4} \ln k, \quad (1.66)$$

ó lo que es lo mismo en espacio de coordenadas,

$$\langle O_\Delta(x_1) O_\Delta(x_2) \rangle = \frac{c''}{|x_1 - x_2|^{2\Delta}}. \quad (1.67)$$

Éste es exactamente el resultado esperado en una CFT para una función de Green de dos puntos en el vacío. El resultado anterior es un chequeo no trivial de que la correspondencia AdS/CFT es consistente.

En la siguiente sección discutimos el enunciado de la correspondencia desde un punto de vista más general. Argumentamos que la correspondencia holográfica engloba situaciones más generales, y que ésta puede ser vista como una implementación geométrica del grupo de renormalización.

## 1.4. Correspondencia AdS/CFT más general

Previamente hemos discutido el argumento mediante el cual Maldacena encontró lo que hoy se conoce como la dualidad AdS/CFT; sin embargo, este resultado se puede extender más allá de aquel ejemplo particular, e inclusive se puede conjeturar que cualquier teoría cuántica de campos bien definida en  $d$  dimensiones es equivalente a una teoría de gravedad cuántica en un espaciotiempo asintóticamente  $\text{AdS}_{d+1}$ . Para motivar esto, en esta sección presentaremos a la correspondencia AdS/CFT como una implementación geométrica del grupo de renormalización.

Cuando estudiamos una teoría cuántica de campos nos interesa, entre otras cosas, saber cómo se comporta ésta a distintas escalas de energía ( $\mu$ ). Usualmente se distinguen dos regímenes: el infrarrojo ( $\mu \rightarrow 0$ ) y el ultravioleta ( $\mu \rightarrow \infty$ ). En general, cuando se analiza una QFT, uno observa que los acoplamientos se ven modificados al cambiar la escala energética, dando lugar a lo que se conoce como un flujo de renormalización. Es precisamente cuando analizamos este problema que las CFTs juegan un papel fundamental en

el entendimiento de las teorías cuánticas de campos, porque todas las QFTs bien definidas deben comportarse como CFTs en el UV. Lo anterior es comprensible porque, como mencionamos antes, las CFTs son invariantes de escala, y al analizar una QFT a energía arbitrariamente alta cualquier escala intrínseca de la teoría puede despreciarse.

Para visualizar la geometrización del grupo de renormalización, consideremos ahora una teoría cuántica de campos en  $d$  dimensiones y desglosemos su información a distintas escalas de energía, de modo que tengamos una copia para cada valor de  $\mu$ . Si “apilamos” cada una de estas copias del espaciotiempo podemos construir una foliación de un espaciotiempo de  $D = d + 1$  dimensiones. Más aún, notamos que la altura de esta pila está relacionada con la escala de energía a la cuál se analiza la teoría de campos, mientras que las coordenadas sobre cada rebanada coinciden con las coordenadas espaciotemporales originales.

Ahora, para ser más precisos, consideremos el vacío de una CFT definida sobre Minkowski  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ . Sabemos que este estado es invariante bajo Poincaré al igual que bajo dilataciones, por lo que si buscamos una geometría dual, ésta debe tener las mismas simetrías. Afortunadamente, esta condición es suficiente para fijar la métrica de la geometría dual, encontrando que

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dx^\mu dx_\mu + dz^2), \quad (1.68)$$

donde  $L$  es el radio de curvatura y  $z$  es la coordenada radial. De la ecuación anterior notamos que la geometría es precisamente  $AdS_{d+1}$  Poincaré. A pesar de que este es un avance muy importante, para tener realmente una dualidad debemos poder ser capaces de describir el resto de estados de la CFT; sin embargo, los estados excitados no son invariantes de escala, y por lo tanto no pueden ser descritos por AdS puro. Afortunadamente, esta aparente dificultad puede ser resuelta al considerar excitaciones por encima de AdS puro. Esto último se implementa al colocar campos  $\phi(x, z)$ , los cuales son duales a los operadores  $O(x)$  de la teoría de campos, que a su vez están emparentados con los estados de la CFT mediante el mapeo estado-operador. La correspondencia anterior nos permite determinar qué configuraciones son válidas, porque, como ya mencionamos, en una CFT todos los estados deben parecerse al vacío cuando se analizan a altas energías. Por lo tanto, concluimos que la geometría dual debe ser asintóticamente AdS.

Finalmente, si analizamos el tensor de energía momento de la teoría de campos conforme, resultará ser que su campo dual es el gravitón, por lo que podemos concluir que la  $CFT_d$  es dual a una teoría de gravedad cuántica en un espaciotiempo aAdS. Más aún, ya que en cualquier QFT se encuentra presente el tensor de energía-momento, se puede conjeturar que ésta deberá ser también dual a una teoría de gravedad cuántica. El análisis para una teoría no conforme es similar, porque como hemos dicho, si está bien definida a energías arbitrariamente altas entonces debe reducirse a una CFT.

En el siguiente capítulo, discutiremos otra importante entrada del diccionario conocida como entropía de entrelazamiento. Veremos que esta cantidad nos permite vislumbrar una asombrosa conexión entre el patrón de entrelazamiento de la CFT y el espaciotiempo del dual gravitacional.

# Capítulo 2

## Entropía de entrelazamiento

### 2.1. Entropía de entrelazamiento en QFT

El fenómeno de entrelazamiento es la cualidad esencial que diferencia a los sistemas clásicos de los sistemas cuánticos. A pesar de parecer una característica exótica, el entrelazamiento está presente casi de manera universal en los sistemas cuánticos, es decir, dado un espacio de Hilbert uno encuentra que de hecho son muy pocos los estados factorizables. Más aún, en años recientes se ha encontrado que, al menos en el contexto de la correspondencia holográfica, el entrelazamiento juega un papel fundamental en la emergencia del espaciotiempo, tanto que se ha llegado a conjeturar que el entrelazamiento adecuado es lo que permite que el espaciotiempo sea una variedad suave.

Para comenzar nuestro estudio sobre las consecuencias del entrelazamiento en la correspondencia AdS/CFT, en esta primera sección discutiremos el concepto de entropía de entrelazamiento en una teoría cuántica de campos. Comenzaremos definiendo esta cantidad y otras relacionadas, como lo son las entropías de Rényi, y revisaremos ejemplos tanto en mecánica cuántica como en QFT.

#### 2.1.1. Entropía de Von Neumann

Como sabemos, la información de un sistema cuántico está codificada en lo que llamamos matriz de densidad. Éste es un operador  $\rho$  que satisface que

$$\rho = \rho^\dagger, \quad \rho \geq 0, \quad \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.1)$$

Los valores de expectación de los operadores  $\mathcal{O}$  se calculan usando simplemente

$$\langle \mathcal{O} \rangle_\rho = \text{Tr} (\mathcal{O} \rho). \quad (2.2)$$

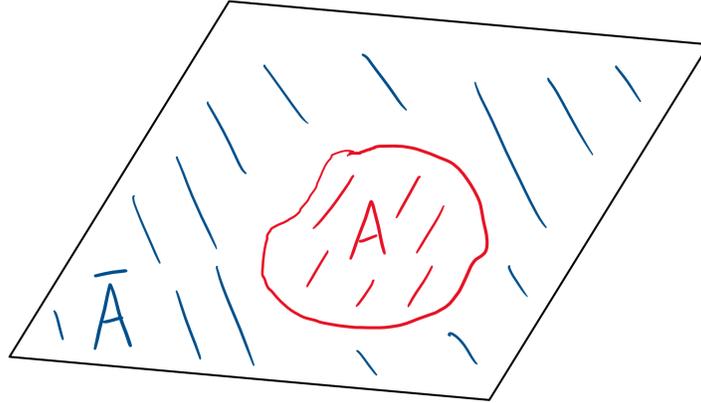


Figura 2.1: Subsistema  $A$  en rojo y su complemento  $\bar{A}$  en azul.

Los estados en un sistema pueden ser puros o mezcla. Los primeros se caracterizan por ser proyectores, es decir, tienen la forma

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.3)$$

y satisfacen que  $\rho^2 = \rho$ . Los estados mezcla por su parte tienen la forma

$$\rho = \sum_a p_a |a\rangle\langle a|, \quad (2.4)$$

donde las  $p_a$ 's forman una distribución de probabilidad, es decir,  $p_a \geq 0$  y  $\sum_a p_a = 1$ .

Con esto en mente, podemos definir la entropía de entrelazamiento

$$S(\rho) \equiv -\text{Tr} \rho \log \rho, \quad (2.5)$$

que no es otra cosa que la entropía de von Neumann. De esta ecuación podemos notar que  $S(\rho)$  nos permite saber si el estado  $\rho$  es puro o mezcla. Lo anterior se sigue de que  $S(\rho) \geq 0$  y de que  $S(\rho) = 0$  sí y solo si  $\rho$  es puro [19]. Otra propiedad importante que se sigue de la definición es que la entropía de entrelazamiento es invariante bajo transformaciones unitarias, es decir, se cumple que

$$S(U\rho U^{-1}) = S(\rho). \quad (2.6)$$

Cuando consideramos un sistema compuesto, ó bien hacemos una división de algún sistema, también podemos definir la entropía de entrelazamiento para sus constituyentes. Para ésto, tenemos que considerar que el espacio de Hilbert del sistema completo es el producto tensorial de los espacios de Hilbert de cada uno de los subsistemas que lo conforman. Por ejemplo, si consideramos un subsistema  $A$  y su complemento  $\bar{A}$ , como se muestra en la figura 2.1, entonces podemos escribir [43]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}. \quad (2.7)$$

Con lo anterior en mente, si consideramos un estado puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  y por lo tanto su matriz de densidad asociada

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|, \quad (2.8)$$

podemos definir de manera natural la matriz reducida  $\rho_A$  tomando la traza parcial sobre los grados de libertad  $\bar{A}$ ,

$$\rho_A = \text{Tr}_{\bar{A}} \rho. \quad (2.9)$$

Y análogamente, podemos definir la entropía  $S(A)$  como

$$S_A \equiv -\text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = -\sum_i \eta_i \log \eta_i, \quad (2.10)$$

donde los  $\eta_i$ 's son los eigenvalores de  $\rho_A$ . Vale la pena enfatizar que  $\rho_A$  es el estado en  $A$  que reproduce los valores de expectación de los observables  $\mathcal{O}_A \otimes I_B$ . Otro punto importante es que, en un sentido estricto,  $S_A$  cuantifica entrelazamiento solo si el estado total  $\rho$  es puro. Veremos ésto en la sección 2.1.3.

### 2.1.2. Propiedades de la entropía de entrelazamiento

La entropía de entrelazamiento satisface varias propiedades importantes que conviene mencionar.

- Subaditividad.

Dado un estado  $\rho_{A\bar{A}}$ , tenemos que  $0 \leq S(A) + S(\bar{A}) - S(A\bar{A})$ , y la desigualdad se satura sí y solo si  $\rho_{A\bar{A}} = \rho_A \otimes \rho_{\bar{A}}$ . De este resultado encontramos otra propiedad interesante: la entropía de entrelazamiento no es extensiva. Lo anterior lo podemos ver porque si el sistema está en un estado puro entonces  $S(A) = S(\bar{A})$ .

- Subaditividad fuerte (SSA).

Si ahora el sistema está dividido en 3 partes  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se satisface la desigualdad [27]

$$S(AB) + S(BC) \geq S(B) + S(ABC). \quad (2.11)$$

Este resultado se puede reescribir en términos de la información mutua

$$I(A : B) \equiv S(A) + S(B) - S(AB), \quad (2.12)$$

como

$$I(A : BC) \geq I(A : B). \quad (2.13)$$

Como su nombre lo sugiere, la información mutua detecta correlaciones, y además de la desigualdad anterior, el siguiente resultado [46] también apoya dicha interpretación:

$$\left( \frac{\langle \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_B \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_A \langle \mathcal{O} \rangle_B}{\|\mathcal{O}_A\| \|\mathcal{O}_B\|} \right)^2 \leq 2I(A : B). \quad (2.14)$$

- Desigualdad de Araki-Lieb.

Otra importante desigualdad que satisface la entropía de entrelazamiento es

$$S(AB) \geq |S(A) - S(B)|. \quad (2.15)$$

### 2.1.3. Ejemplo: Entropía de entrelazamiento para un sistema de 2 espines

Una vez revisadas la definición y algunas de las propiedades de la entropía de entrelazamiento, es conveniente ilustrar cómo se calcula dicha cantidad. Para ejemplificar ésto, tomaremos uno de los casos más simples: un sistema de 2 espines.

Primeramente consideremos un sistema que se encuentra en el estado:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_{\bar{A}} - |\downarrow\rangle_{\bar{A}}). \quad (2.16)$$

Al calcular la entropía de entrelazamiento entre  $A$  y  $\bar{A}$  encontramos que  $S(A) = S(\bar{A}) = 0$ . Sin embargo, si ahora calculamos  $S(AB)$  para un sistema que se encuentra en el estado

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle), \quad (2.17)$$

encontramos que  $S_A = \log 2$ .

Éstos resultados sugieren que, al menos para sistemas puros, la entropía de entrelazamiento efectivamente cuantifica el entrelazamiento, pues el primer ejemplo fue un estado factorizable y obtuvimos un valor nulo para  $S(A)$ ; mientras que para el segundo ejemplo

usamos un estado no factorizable y obtuvimos  $S(A) \neq 0$ . Este argumento se puede extender de la siguiente manera a estados arbitrarios.

Consideremos cualquier estado puro factorizable

$$|\psi\rangle_{AB} = |\psi'\rangle_A \otimes |\psi''\rangle_B. \quad (2.18)$$

Los subsistemas

$$\rho_A = |\psi'\rangle_A \langle \psi'|_A, \quad \rho_B = |\psi''\rangle_B \langle \psi''|_B \quad (2.19)$$

son también estados puros. Recordando que  $S(\rho) = 0$  sí y solo si  $\rho$  es puro concluimos que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) = 0$  siempre. Consideremos ahora un estado arbitrario

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ab} \sqrt{p_a} |a\rangle_A \otimes |a\rangle_B, \quad (2.20)$$

donde  $\{|a\rangle_A\}$  y  $\{|a\rangle_B\}$  son bases ortonormales de  $\mathcal{H}_A$  y  $\mathcal{H}_B$ , respectivamente. Los subsistemas son ahora

$$\rho_A = \sum_a p_a |a\rangle_A \langle a|_A, \quad \rho_B = \sum_a p_a |a\rangle_B \langle a|_B. \quad (2.21)$$

Notamos que para este estado las siguientes condiciones son equivalentes:

- $\rho_A$  es puro.
- $\rho_B$  es puro.
- $|\psi\rangle_{AB}$  es factorizable.

De este resultado concluimos que  $S(\rho_A) = S(\rho_B) \neq 0$  sí y solo si  $|\psi\rangle_{AB}$  es puro y no factorizable. Lamentablemente, estos resultados no pueden ser generalizados a estados mixtos. Ésto es fácil de ver al considerar el estado

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B, \quad (2.22)$$

con  $\rho_A$  mixta. En esta situación  $S(\rho_A) \neq 0$  aún cuando el estado  $\rho_{AB}$  es separable.

#### 2.1.4. Entropías de Rényi y el truco de réplica

En la sección previa calculamos la entropía de entrelazamiento para un sistema de 2 espines, pero lamentablemente calcular esta cantidad en una QFT resulta ser mucho más

complicado<sup>1</sup> [6], puesto que ahora tenemos que lidiar con un número infinito de grados de libertad. El método estándar utilizado para calcular esta cantidad se conoce como el *truco de réplica* [6, 7, 33], pero antes de discutirlo es conveniente introducir a las entropías de Rényi.

Las entropías de Rényi  $S_\alpha$  para  $\alpha \in [0, \infty]$  se definen como

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \rho^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \log \left( \sum_a p_a^\alpha \right) \quad (\alpha \neq 0, 1, \infty), \quad (2.23)$$

$$S_0 \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 0} S_\alpha = \log(\text{rango } \rho), \quad (2.24)$$

$$S_1 \equiv \lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha = S, \quad (2.25)$$

$$S_\infty \equiv \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha = -\log \|\rho\|, \quad (2.26)$$

donde  $S_1$  es precisamente la entropía de von Neumann.

Al igual que la entropía de entrelazamiento, las entropías de Rényi son invariantes bajo transformaciones unitarias, son no negativas, y son cero sí y solo si el estado  $\rho$  es puro. Sin embargo, no todas las propiedades de la entropía de entrelazamiento se encuentran en las entropías de Rényi. Por ejemplo,  $S_\alpha$  únicamente es subaditiva para  $\alpha = 0, 1$  [19] y sólomente obedece subaditividad fuerte para  $\alpha = 1$ .

La razón por la cual hemos discutido estas nuevas cantidades se debe a que, como ya vimos, las entropías de Rényi pueden reproducir la entropía de entrelazamiento. Más aún, el cálculo a través de éstas resulta ser mucho más sencillo en una QFT. Ésto se debe a que diagonalizar el operador  $\log \rho$  que aparece en la entropía de von Neumann es sumamente complicado, mientras que calcular  $\text{Tr} \rho^\alpha$  es más sencillo. A continuación ilustraremos cómo se lleva a cabo este cálculo para una QFT en el vacío.

El primer paso es recordar que

$$\langle \phi_1(t_1) | e^{-itH} | \phi_0(t_0) \rangle = N \int_{\phi(t_0)=\phi_0}^{\phi(t_1)=\phi_1} \mathcal{D}\phi e^{iS(\phi(t))}, \quad (2.27)$$

donde  $N$  es una constante de normalización. Tomando  $t = -i\beta$  obtenemos que

$$\langle \phi_1 | e^{-\beta H} | \phi_0 \rangle = N \int_{\phi(0)=\phi_0}^{\phi(\beta)=\phi_1} \mathcal{D}\phi e^{-S_{Euc}(\phi(\tau))}, \quad (2.28)$$

donde  $S_{Euc}$  es la acción analíticamente continuada al espacio Euclideo. Podemos notar que la expresión anterior no es otra que los elementos de matriz para el ensamble canó-

<sup>1</sup>En general, la entropía de entrelazamiento solo puede ser calculada de manera exacta para casos muy especiales como CFT's en 1 + 1 dimensiones, etc.

nico. También podemos encontrar de esta ecuación la función de partición  $Z_\beta$  al hacer  $\phi_0 = \phi_1$  e integrar sobre  $\phi_0$

$$Z_\beta = \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \right) = N \int_{\phi_0 = \phi(\beta)} \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{Euc}}(\phi(\tau))}. \quad (2.29)$$

Para obtener el vacío de estas expresiones, debemos tomar el límite  $\beta \rightarrow \infty$ , es decir, el límite donde la temperatura va a cero. Lo anterior es más claro si reescribimos algún estado  $|\Psi\rangle$  en la base de los eigenestados de energía

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} e^{-\beta H} |\Psi\rangle = \text{cte} |\text{vac}\rangle. \quad (2.30)$$

Lo anterior se debe a que todos los estados con energía mayor a la del vacío son subdominantes en este límite. En términos de la integral de camino podemos escribir que

$$\langle \phi_0 | \text{vac} \rangle = N \int_{t_E = -\infty}^{\phi(t_E=0) = \phi_0} \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{Euc}}(\phi(\tau))}. \quad (2.31)$$

Si ahora queremos calcular la matriz reducida  $\rho_A$ , lo único que tenemos que hacer es tomar la traza parcial en la integral de trayectoria. Para implementar esto, lo que hacemos es igualar los campos en  $\bar{A}$  e integrar sobre éstos, de modo que

$$\langle \phi_1^A | \rho_A^{\text{vac}} | \phi_0^A \rangle = \frac{1}{Z} \int_{\phi^A(0^+) = \phi_0^A, \phi^{\bar{A}}(0^-) = \phi^{\bar{A}}(0^+)}^{\phi^A(0^-) = \phi_1^A} \mathcal{D}\phi e^{-S_{\text{Euc}}(\phi(\tau))}. \quad (2.32)$$

Finalmente, el truco de réplica consiste en tomar  $\alpha$  copias (réplicas) de esta matriz de densidad reducida y sacar la traza para poder escribir  $S_\alpha$ , es decir,

$$\text{Tr} \left( (\rho_A^{\text{vac}})^\alpha \right) = \int \mathcal{D}\phi_i^A \langle \phi_0^A | \rho_A^{\text{vac}} | \phi_\alpha^A \rangle \dots \langle \phi_2^A | \rho_A^{\text{vac}} | \phi_1^A \rangle \langle \phi_1^A | \rho_A^{\text{vac}} | \phi_0^A \rangle \quad (2.33)$$

$$= \frac{1}{Z_1^\alpha} \int_{(t_E, \vec{x}) \in \mathbb{R}_{(\alpha)}^d} \mathcal{D}\phi e^{-S(\phi)} \equiv \frac{Z_\alpha}{Z_1^\alpha}, \quad (2.34)$$

y

$$S(\rho_A^{\text{vac}}) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{1}{1-\alpha} \log \text{Tr} \left( (\rho_A^{\text{vac}})^\alpha \right). \quad (2.35)$$

## 2.2. Entropía de entrelazamiento holográfica

Como vimos en la sección anterior, el cálculo de la entropía de entrelazamiento no resulta ser trivial en una QFT. A continuación discutiremos una propuesta hecha por Ryu y Takayanagi (RT) [36], y posteriormente generalizada por Hubeny, Rangamani y Takayanagi (HRT) [24], en el contexto de AdS/CFT, que resultará ser una de las entradas más importantes del diccionario holográfico. En primer lugar, esta propuesta resultará ser muy

útil porque permite realizar los cálculos de la entropía de manera mucho más intuitiva. En segundo lugar, las implicaciones derivadas de esta fórmula sobre la estructura del espaciotiempo han cambiado por completo la forma en que se entiende este último. Recientemente se ha llegado a proponer que el entrelazamiento funciona precisamente como el pegamento del espacio tiempo [42].

### 2.2.1. Motivación

Consideremos el caso de un agujero negro estático y asintóticamente AdS. Sabemos que la entropía de éste está dada, a orden  $G_N$  ( $1/N$ ), por la fórmula de Bekenstein-Hawking

$$S_{BH} = \frac{1}{4G_N} A_{Hor} + O(G_N^0), \quad (2.36)$$

donde  $A_{Hor}$  es el área del horizonte. Por la discusión en las secciones previas, sabemos que la entropía de entrelazamiento en un estado mixto no necesariamente cuantifica el entrelazamiento; sin embargo, siempre podemos purificar el sistema, es decir, agregar grados de libertad de modo que el estado total sea puro. Para este ejemplo, la purificación natural es el termodoble de campo  $|TDF\rangle$ . Maldacena ha argumentado [28] que este estado tiene un dual holográfico, y no es otra cosa que un agujero negro estático con dos regiones exteriores. En esta nueva geometría hay superficies de Cauchy  $\Sigma$  que son invariantes bajo reflexiones temporales y que además atraviesan el horizonte bifurcado. Si calculamos la superficie de área mínima que está sobre  $\Sigma$  hallamos que es justamente  $A_{Hor}$ . Basados en este resultado propondremos la fórmula de Ryu-Takayanagi.

### 2.2.2. Fórmula RT

En el contexto de AdS/CFT, podemos proponer un resultado que generaliza la fórmula de Bekenstein, proveyendo así de una interpretación geométrica a la entropía de entrelazamiento. Consideremos una  $CFT_{d+1}$  holográfica definida sobre un espaciotiempo  $\mathcal{B}$ . Supongamos que la CFT está en un estado  $|\Psi\rangle$  asociado a una geometría clásica  $M_\Psi$ . Consideremos una región espacial arbitraria  $A$  de la CFT, es decir, dada una superficie de Cauchy  $\Sigma_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ , tenemos que  $A \subset \Sigma_{\mathcal{B}}$ . Por la correspondencia AdS/CFT, sabemos que  $\partial M_\Psi$  es  $\mathcal{B}$ , por lo que podemos definir a las regiones  $A$  y  $\bar{A}$  correspondientes en  $\partial M_\Psi$ . La propuesta RT nos dice entonces que dada la región  $A$  podemos conocer su entropía de entrelazamiento  $S_A$  mediante la fórmula

$$S_A = \min_{A_b \sim A} \frac{\hat{\text{Área}}(A_b)}{4G_N}, \quad (2.37)$$

donde  $A_b$  es una superficie de codimensión 2 que satisface las siguientes propiedades:

- $A_b$  tiene la misma frontera que  $A$ . Esto es,  $\partial A_b = \partial A$ .

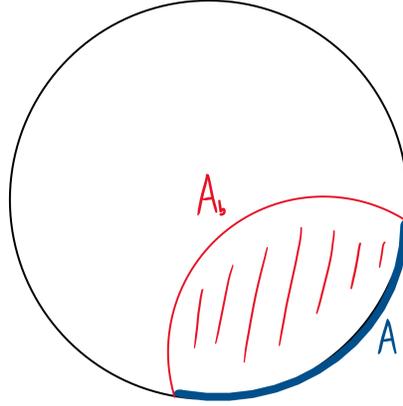


Figura 2.2: Se muestra, a tiempo fijo igual a cero, la superficie de Ryu-Takayanagi  $A_b$  asociada a la región  $A$  en la frontera.

- $A_b$  es continuamente deformable a  $A$ , es decir,  $A$  y  $A_b$  constituyen la frontera de una región tipo espacio en  $M_\Psi$ , ver figura 2.2. Esta condición, junto con la primera, son equivalentes a decir que  $A_b$  divide a una rebanada espacial de  $M_\Psi$  en dos regiones. Ambas condiciones quedan resumidas como  $A_b \sim A$ .

La condición de tomar el mínimo significa que  $A_b$  extremiza el funcional de área, y de haber más de una superficie, siempre se toma la de área mínima. A primera vista esta propuesta ya resulta ser muy interesante porque relaciona 2 cantidades universales: la entropía de entrelazamiento, que puede ser calculada en cualquier CFT, y las superficies extremales, que se pueden obtener en una teoría gravitacional arbitraria.

Uno de los problemas que presenta la fórmula de Ryu-Takayanagi es que ambos lados de la ecuación son divergentes. El lado izquierdo diverge porque en una QFT, y en particular en una CFT, hay un número infinito de grados de libertad. La divergencia en el lado derecho se debe a que la distancia propia hasta la frontera de AdS es infinita. Afortunadamente, estas divergencias no representan el final de la propuesta RT porque, como es usual, uno puede establecer un corte UV. En el lado gravitacional esto significa que únicamente nos quedamos con la parte de la geometría para la cual  $z > \epsilon$ , donde  $\epsilon$  es el corte. De manera alternativa, podemos enfocarnos únicamente en cantidades que son finitas. Por ejemplo, la entropía relativa a la entropía del vacío:  $S_A(\Psi) - S_A(\text{vac})$ .

### Ejemplo: AdS puro Poincaré

Antes de continuar discutiendo otras propiedades e implicaciones de la fórmula de Ryu-Takayanagi, es conveniente ilustrar con un ejemplo sencillo cómo se calcula esta cantidad. Consideremos una CFT en el vacío en  $\mathbb{R}^{1,1}$ , y a la región  $A$  un intervalo de longitud

2L. En este ejemplo el dual gravitacional está dado por AdS Poincaré puro. La métrica está dada por

$$G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{l^2}{z^2} (-dt^2 + dx^2 + dz^2). \quad (2.38)$$

Primeramente, necesitamos calcular el funcional de área para las superficies de co-dimensión 2 en esta geometría. En general, para hacer ésto, debemos parametrizar las superficies como  $X^\mu(\sigma)$  y hallar la métrica inducida  $g_{ab}$

$$g_{ab} = G_{\mu\nu}(X(\sigma)) \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b}. \quad (2.39)$$

Sin embargo, como estamos en  $AdS_{2+1}$ , el problema se simplifica a encontrar las geodésicas de este espacio, es decir, a extremizar el funcional

$$\int dx \left( \frac{l}{z} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dx} \right)^2}. \quad (2.40)$$

Al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, se encuentra que las geodésicas son circunferencias

$$(x - x_0)^2 + z^2 = r^2, \quad (2.41)$$

donde  $x_0$  y  $r$  quedan determinadas al imponer las condiciones de frontera  $x = \pm L$  en  $z = \epsilon$ . Con esto en mente encontramos que

$$x^2 + z^2 = L^2 + \epsilon^2. \quad (2.42)$$

Finalmente, para hallar la entropía de entrelazamiento basta con sustituir en el funcional de área y calcular la integral. Tomando en cuenta el corte  $\epsilon$  y despreciando los términos de orden superior en  $\epsilon$  encontramos que

$$S_A = \frac{1}{4G_N} 2l \log \left( \frac{2L}{\epsilon} \right) = \frac{c}{3} \log \frac{2L}{\epsilon}, \quad (2.43)$$

donde  $c$  es la carga central y en la última igualdad se ha utilizado la relación  $c = 3l/2G_N$  [5].

Éste resultado es precisamente el que se obtiene utilizando el truco de réplica [6] para un intervalo en una  $CFT_{1+1}$ , lo cual provee evidencia a favor de la propuesta RT.

### 2.2.3. Evidencia a favor de RT

Previamente hemos visto que la fórmula de Ryu-Takayanagi reproduce correctamente la entropía de entrelazamiento para un intervalo en una  $CFT_{1+1}$  en el vacío, pero la evidencia a favor de esta propuesta no termina ahí. Otros cálculos de entropía de entrelazamiento [33, 35], como son el cálculo para el estado térmico o para CFT's en bandas o

discos, también son reproducidos por la fórmula de Ryu-Takayanagi. Lamentablemente, este tipo de chequeos son limitados por nuestra capacidad para hacer cálculos en CFT's fuertemente acopladas.

A pesar de no poder evidenciar la validez de la fórmula RT mediante un gran número de ejemplos explícitos, mucha evidencia fuerte se ha encontrado en los años posteriores [8, 12, 17, 24]. Inclusive Lewkowycz y Maldacena han dado una prueba para el caso estático [26], y recientemente se ha extendido el argumento al caso covariante [12]. A continuación mencionamos algunas de las propiedades que se ha probado satisface la fórmula de Ryu-Takayanagi.

- Para cualquier estado puro la fórmula de Ryu-Takayanagi satisface que  $S_A = S_{\bar{A}}$ .
- Subaditividad: si  $A = A_1 \cup A_2$ , entonces  $S_{A_1} + S_{A_2} \geq S_A$ . Esta propiedad es la misma que encontramos para la entropía de entrelazamiento en una CFT.
- Subaditividad fuerte [20]: si  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  y los  $A_i$ 's son disjuntos, entonces se satisface  $S_{A_1} + S_{A_2} \leq S_{A_1 \cup A_2} + S_{A_2 \cup A_3}$  y  $S_{A_1} + S_{A_3} \leq S_{A_1 \cup A_2} + S_{A_2 \cup A_3}$ .

#### 2.2.4. Implicaciones de la fórmula de Ryu-Takayanagi

Hasta el momento hemos discutido la fórmula de Ryu-Takayanagi de manera operacional; sin embargo, su validez tiene implicaciones muy profundas respecto al entendimiento de la emergencia del espaciotiempo. A continuación discutiremos el argumento dado por Mark Van Raamsdonk [9, 42, 43], con el cual encuentra que la emergencia de espaciotiempos clásicos conectados está íntimamente relacionada al patrón de entrelazamiento de los grados de libertad.

Consideremos el caso de una CFT holográfica en el vacío definida sobre una esfera  $\mathbb{S}^d$ . Por el enunciado de la correspondencia, sabemos que esta teoría es dual a AdS puro global. Ahora, dividamos la esfera en dos hemisferios y consideremos una familia de estados de la CFT, siendo el vacío el estado inicial, para los cuales el entrelazamiento disminuye. Usando la fórmula de Ryu-Takayanagi podemos observar que disminuir el entrelazamiento entre ambos hemisferios significa que el área de la superficie RT también disminuye. Más aún, si consideramos dos regiones  $C$  y  $D$  que estén contenidas en distintos hemisferios, se puede calcular su información mutua  $I(C : D)$ , y como el entrelazamiento está decreciendo a cero, también lo hace  $I(C : D)$ . Este punto es relevante porque, como vimos previamente, la información mutua satisface la desigualdad [46]

$$\left( \frac{\langle \mathcal{O}_C \mathcal{O}_D \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle_C \langle \mathcal{O} \rangle_D}{\|\mathcal{O}_C\| \|\mathcal{O}_D\|} \right)^2 \leq 2I(C : D), \quad (2.44)$$

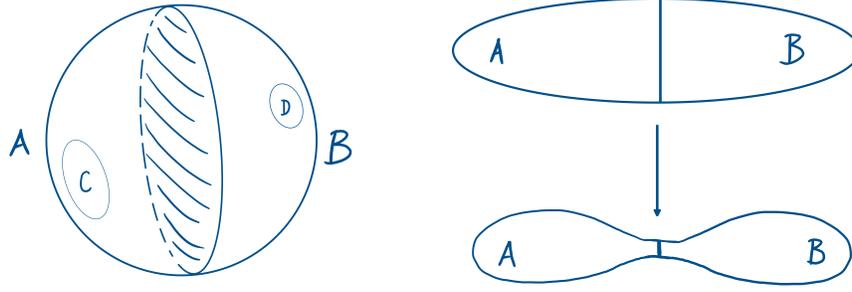


Figura 2.3: En la figura de la izquierda se muestra una esfera dividida en dos hemisferios. La parte sombreada representa la superficie RT. En la figura de la derecha se muestra, de manera caricaturesca, como dos regiones del espacio se van desconectando al disminuir el entrelazamiento entre sus grados de libertad. La línea vertical ilustra como el área de la superficie RT disminuye en este proceso.

y, más aún, en el contexto de la correspondencia se sabe que para operadores locales, duales a partículas muy masivas, la función de dos puntos toma la forma

$$\langle \mathcal{O}_C(x_C) \mathcal{O}_D(x_D) \rangle \sim e^{-mL}, \quad (2.45)$$

donde  $m$  es la masa y  $L$  es la longitud de la geodésica más corta que conecta  $x_C$  y  $x_D$ . Combinando estos resultados podemos concluir que los dos hemisferios se separan conforme el entrelazamiento disminuye, hasta que finalmente se desconectan, ver figura 2.3. Es en este sentido que se ha argumentado que el papel del entrelazamiento es fundamental para la emergencia de espaciotiempos clásicos, tanto que se llega a decir que es el "pegamento" del espaciotiempo.

### 2.2.5. Cuña causal y cuña de entrelazamiento

En esta última sección del capítulo definiremos tanto la cuña causal como la cuña de entrelazamiento, y veremos como están relacionadas con ciertas cantidades en la frontera. Comenzaremos discutiendo los dominios de dependencia en una QFT.

#### Dominios de dependencia

Consideremos una teoría cuántica de campos definida sobre un espaciotiempo  $\mathcal{B}$ . Podemos escoger un subsistema tipo espacio  $A \subset \Sigma_{\mathcal{B}}$ , donde  $\Sigma_{\mathcal{B}}$  es una superficie de Cauchy. Asociada a  $A$  existe una región  $D_A$  conocida como el dominio de dependencia de  $A$ . Esta región se define como la colección de todos los puntos tales que todas las curvas causales que pasan por ellos también pasan por  $A$ , es decir,  $D_A$  es el diamante causal asociado con  $A$ . El dominio de dependencia  $D_A$  es también el dominio de dependencia de un número infinito de regiones espaciales cuya frontera coincide con la frontera de  $A$ . Lo último im-

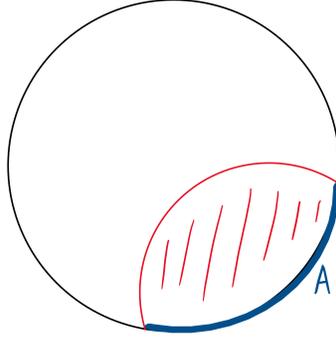


Figura 2.4: Se muestra la cuña causal asociada a la región  $A$  para  $t = 0$ .

plica que la matriz de densidad reducida asociada a cualquiera de estas regiones contiene la misma información que  $\rho_A$ .

### Cuña causal

Consideremos ahora la dualidad AdS/CFT. Se sabe que si en la teoría de campos se hacen mediciones, esto se puede interpretar en el bulto como perturbaciones en la frontera de AdS que se propagan de manera causal hacia el interior del mismo. Si estas mediciones se restringen a puntos contenidos en  $D_A$ , entonces podemos identificar al conjunto de puntos en el bulto que son alcanzados por dichas perturbaciones. Resulta ser que este conjunto de puntos es la unión del futuro causal de  $D_A$  con el pasado causal de  $D_A$ . Ahora, si consideramos a la región del bulto para la cual un observador restringido a  $D_A$  puede mandar y recibir señales de vuelta encontramos que dicho conjunto es la intersección del futuro causal de  $D_A$  con el pasado causal de  $D_A$ . Esta región del bulto se conoce como *cuña causal*, ver figura 2.4.

### Cuña de entrelazamiento

Para motivar el concepto de cuña de entrelazamiento nos debemos preguntar qué región del bulto es dual a la matriz de densidad reducida  $\rho_A$ . Esta pregunta es natural, ya que como sabemos el estado vacío resulta ser dual a AdS puro, el termodoble de campo dual a una geometría de agujero negro estático con dos regiones exteriores, etc. Para delimitar la región del bulto dual a  $\rho_A$ , es conveniente considerar una perturbación al estado  $|\Psi\rangle$  en el cual se encuentra la teoría, por ejemplo  $\mathbb{1}_A \otimes U_{\bar{A}} |\Psi\rangle$ , donde  $U_{\bar{A}}$  es una matriz unitaria. Sabemos que bajo esta transformación la matriz  $\rho_A$  no cambia mientras que  $\rho_{\bar{A}}$  sí lo hace. Si ahora consideramos perturbaciones contenidas en  $D_{\bar{A}}$ , sabemos que, por la discusión anterior se propagan causalmente dentro del bulto. Más aún, sabemos que la región del bulto que se ve afectada es únicamente la unión del futuro causal de  $D_{\bar{A}}$  con el pasado causal de  $D_{\bar{A}}$ . Debido a esto concluimos que la geometría dual a  $\rho_A$  debe estar contenida en el complemento de la unión del futuro causal de  $D_{\bar{A}}$  con el pasado causal de  $D_{\bar{A}}$ .

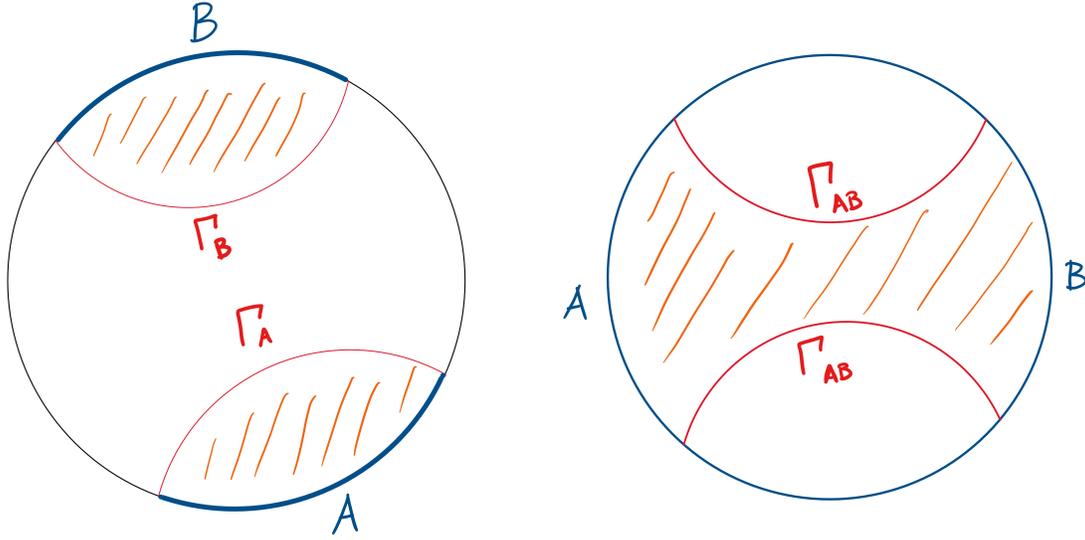


Figura 2.5: En la figura de la izquierda se muestra la cuña de entrelazamiento para la región  $A \cup B$  tal que  $I(A : B) = 0$ . En la figura de la derecha se ilustra la cuña de entrelazamiento para esta misma región, pero ahora  $I(A : B) > 0$ .

Consideremos ahora el conjunto de todas las entropías de entrelazamiento asociadas a regiones tipo espacio contenidas en  $D_A$ . Por la fórmula RT sabemos que estas entropías están asociadas a superficies de área mínima en el bulto, más aún, sabemos que para un espaciotiempo aAdS genérico las superficies RT no siempre se encuentran contenidas en la cuña causal. Debido a esto y a que  $S_A$  se calcula, en la teoría de campos, mediante la matriz de densidad reducida, concluimos que la región dual a  $\rho_A$  debe ser distinta a la cuña causal.

Debido a la discusión anterior, se ha propuesto [10] que la región dual a  $\rho_A$ , conocida como *cuña de entrelazamiento*, se defina como el dominio de dependencia de cualquier región tipo espacio en el bulto que tenga como frontera a  $\Gamma_A$  (la superficie RT asociada a  $A$ ) y a alguna superficie de Cauchy en  $D_A$ , ver figura 2.5.

En el siguiente capítulo discutiremos otro concepto importante conocido como entrelazamiento de purificación. Este concepto surge en teorías cuánticas de campos de la necesidad de cuantificar las correlaciones para estados mezcla, y recientemente su dual holográfico ha sido propuesto.

# Capítulo 3

## Entrelazamiento de purificación

A lo largo de este capítulo revisaremos el concepto de entrelazamiento de purificación. Comenzaremos discutiendo su definición y sus propiedades en una teoría cuántica de campos, y posteriormente nos enfocaremos en describir la propuesta que se ha hecho recientemente para su dual holográfico. Finalmente, daremos evidencia a favor de esta propuesta a través de un ejemplo sencillo.

### 3.1. Entrelazamiento de purificación en QFT

#### 3.1.1. Purificaciones

Supongamos que tenemos un sistema  $A$ , y que éste se encuentra en un estado mixto  $\rho_A$ . Sin importar cuál es el estado del que proviene  $\rho_A$ , siempre se pueden elegir grados de libertad auxiliares  $B$  para construir un sistema más grande  $AB$  que se encuentre en un estado puro  $|\Psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , y del cual se pueda obtener nuevamente  $\rho_A$  al tomar la traza sobre  $B$ ,  $\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Nótese que de aquí en adelante usamos una notación abreviada para las uniones,  $AB = A \cup B$ . Esto se puede lograr [32], por ejemplo, utilizando la purificación

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle_A \otimes |\phi_i\rangle_B, \quad (3.1)$$

donde los  $\{p_i, |\psi_i\rangle_A\}$  son los eigenvalores y los eigenvectores de  $\rho_A$ , respectivamente. Los  $\{|\phi_i\rangle_B\}$  son una base ortonormal de  $\mathcal{H}_B$  y se debe satisfacer que  $\dim \mathcal{H}_B \geq \text{Rango } \rho_A$ . De la ecuación anterior se recupera correctamente que

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle_A \langle\psi_i|_A. \quad (3.2)$$

Es importante enfatizar que la elección de purificación no es única. Existe por una parte la libertad de agregar a  $B$  grados de libertad no entrelazados con  $A$ , y por otra, la libertad de actuar sobre  $B$  con cualquier operador unitario.

### 3.1.2. Definición del entrelazamiento de purificación

Para un sistema en un estado puro, la entropía de entrelazamiento es la medida que caracteriza el entrelazamiento cuántico entre dos subsistemas. Sin embargo, para estados mixtos hay diversas cantidades que cuantifican tanto correlaciones clásicas como cuánticas [22]. Una de estas cantidades es lo que se conoce como *entrelazamiento de purificación* [41]. Para definir esta cantidad, consideremos un sistema bipartita  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  que se encuentra en un estado  $\rho_{AB}$ . Sea  $|\Psi\rangle_{ABA'B'}$  una purificación del sistema, es decir, un estado  $|\Psi\rangle_{ABA'B'} \in \mathcal{H}_{AA'} \otimes \mathcal{H}_{BB'}$  tal que

$$\rho_{AB} = \text{Tr}_{A'B'} |\Psi\rangle_{ABA'B'} \langle\Psi|_{ABA'B'}. \quad (3.3)$$

Definimos el entrelazamiento de purificación  $E_p$ , entre  $A$  y  $B$ , como

$$E_p(A : B) = \min_{|\Psi\rangle, A'} S_{AA'}, \quad (3.4)$$

donde  $S_{AA'}$  es la entropía de entrelazamiento de  $AA'$ , y donde el mínimo se toma sobre todas las purificaciones y todas las posibles particiones de los grados de libertad primados. Como podemos notar, el cálculo de esta cantidad no es trivial. En primer lugar, como hemos discutido en el capítulo anterior, calcular la entropía de entrelazamiento de manera analítica en una QFT es, en general, muy complicado. En segundo lugar, la minimización resulta ser también muy complicada de llevarse a cabo, porque no hay un procedimiento general que nos permita agotar la infinidad de posibilidades en las cuales se puede escoger la purificación. Afortunadamente, para sistemas de dimensión finita se puede probar [25] que el mínimo de  $S_{AA'}$  se encuentra para  $|A'|, |B'| \leq \text{rango } \rho_{AB}$ , donde  $|A'|$  y  $|B'|$  son las dimensiones de los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_{A'}$  y  $\mathcal{H}_{B'}$ , respectivamente.

A pesar de que calcular  $E_p$  para un sistema arbitrario es complicado, podemos considerar los siguientes casos triviales, con el objetivo de ganar un poco de intuición sobre esta nueva cantidad:

- $\rho_{AB}$  es puro.  
Si  $\rho_{AB} = |\Psi\rangle \langle\Psi|$  entonces no se necesita realizar alguna purificación, y por lo tanto  $E_p = S_A = S_B$ .
- $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ .  
En esta situación existe una purificación de la forma  $|\psi_1\rangle_{AA'} \otimes |\psi_2\rangle_{BB'}$ , de modo que al tomar la traza sobre los grados de libertad  $BB'$  y calcular  $S_{AA'}$  encontramos que  $E_p = 0$ .

### 3.1.3. Propiedades del entrelazamiento de purificación

A pesar de que operativamente es muy complicado calcular  $E_p$ , se puede probar que éste satisface una serie de desigualdades [2] que eventualmente darán evidencia muy fuer-

te a favor del dual holográfico que discutiremos en la siguiente sección. Entre estas propiedades se encuentran las siguientes:

- El entrelazamiento de purificación está acotado superiormente:

$$E_p(A : B) \leq \min(S_A, S_B). \quad (3.5)$$

- El entrelazamiento de purificación es monótono:

$$E_p(A : BC) \geq E_p(A : B). \quad (3.6)$$

- El entrelazamiento de purificación está acotado inferiormente:

$$E_p(A : B) \geq \frac{I(A : B)}{2}, \quad (3.7)$$

$$E_p(A : BC) \geq \frac{I(A : B)}{2} + \frac{I(A : C)}{2}. \quad (3.8)$$

- En un sistema bipartita que sature la desigualdad de Araki-Lieb, se satisface que

$$E_p(A : B) = \min(S_A, S_B). \quad (3.9)$$

- En un sistema tripartita  $ABC$ , el  $E_p$  satisface:

$$E_p(A : B) + E_p(A : C) \geq E_p(A : BC). \quad (3.10)$$

## 3.2. Dual holográfico del entrelazamiento de purificación

En esta sección discutiremos, primeramente, el dual holográfico del entrelazamiento de purificación [31, 40]. Posteriormente, ejemplificaremos el cálculo de esta cantidad y daremos evidencia a favor de dicha propuesta.

Consideremos una CFT holográfica que está en un estado puro  $|\Psi\rangle$ . Por el enunciado de la correspondencia AdS/CFT sabemos que, al menos en ciertos casos, hay una geometría dual  $M_\Psi$  que es asintóticamente AdS. Ahora, tomemos dos subsistemas  $A$  y  $B$  en la frontera de  $M_\Psi$  ( $\partial M_\Psi$ ), y calculemos la superficie de Ryu-Takayanagi,  $\Gamma_{AB}$ , asociada a  $AB = A \cup B$ . Como discutimos previamente, la región espacial acotada por  $A$ ,  $B$  y  $\Gamma_{AB}$  se conoce como la cuña de entrelazamiento,  $M_{AB}$ . Consideremos ahora que la cuña de entrelazamiento es toda la geometría que tenemos, es decir, “borremos” el resto de la geometría que quedó fuera de ésta. Si elegimos una partición de  $\Gamma_{AB}$  como

$$\Gamma_{AB} = \Gamma_{AB}^{(A)} \cup \Gamma_{AB}^{(B)}, \quad (3.11)$$

entonces podemos reescribir la frontera de esta nueva geometría como

$$\partial M_{AB} = A \cup B \cup \Gamma_{AB} = \left( A \cup \Gamma_{AB}^{(A)} \right) \cup \left( B \cup \Gamma_{AB}^{(B)} \right). \quad (3.12)$$

Dada esta partición de la frontera, es natural buscar superficies que separen la región  $A$  de la región  $B$ , y también a  $\Gamma_{AB}^{(A)}$  de  $\Gamma_{AB}^{(B)}$ . Si además ajustamos la partición de  $\Gamma_{AB}$  buscando que la superficie mencionada tenga área mínima,  $\Sigma_{\min}$ , entonces podemos calcular la entropía de entrelazamiento mediante la fórmula de Ryu-Takayanagi. En particular, encontramos que

$$S\left(\rho_{A \cup \Gamma_{AB}^{(A)}}\right) = S\left(\rho_{B \cup \Gamma_{AB}^{(B)}}\right) = \frac{\text{Área}(\Sigma_{\min})}{4G_N}. \quad (3.13)$$

La ecuación anterior nos sugiere que esta nueva geometría es dual a un estado puro distinto de  $|\Psi\rangle$ .

El procedimiento previo presenta grandes similitudes con aquél descrito para encontrar el entrelazamiento de purificación en una QFT. En primer lugar, mientras que en una teoría cuántica de campos agregamos nuevos grados de libertad para purificar, en el lado de gravedad recortamos la geometría y redefinimos la frontera para incluir a  $\Gamma_{AB}$ . En segundo lugar, mientras que en una QFT optimizamos para hallar el mínimo valor de la entropía de entrelazamiento  $S_{AA'}$ , en el lado gravitacional optimizamos para hallar la superficie RT. Estas semejanzas dieron lugar [31, 40] a proponer que

$$E_p(A : B) = \frac{\text{Área}(\Sigma_{\min})}{4G_N}, \quad (3.14)$$

es decir, el entrelazamiento de purificación holográfico es la sección transversal de la cuña de entrelazamiento, ver figura 3.1.

### Ejemplo: $AdS_3$ puro

Una vez más, la correspondencia holográfica provee una prescripción intuitiva para hacer cálculos que en una teoría cuántica de campos resultan ser muy complicados, e inclusive, imposibles en situaciones generales. Para ilustrar esta propuesta consideraremos en caso de  $AdS_3$  Poincaré puro.

En primer lugar, consideremos la situación en la cual tenemos dos intervalos,  $A$  y  $B$ , en la frontera y la cuña de entrelazamiento es una región conectada, es decir, el caso en el cual  $I(A : B) > 0$ . Con base en la prescripción previamente discutida, tenemos que hallar la curva más corta que acabe en la superficie RT y que separe a  $A$  de  $B$ . Si consideramos que  $A = [a_1, a_2]$  y que  $B = [b_1, b_2]$ , con la restricción  $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ , obtenemos [40] que

$$E_p(A : B) = \frac{1}{4G_N} \log\left(1 + 2z + 2\sqrt{z(z+1)}\right), \quad (3.15)$$

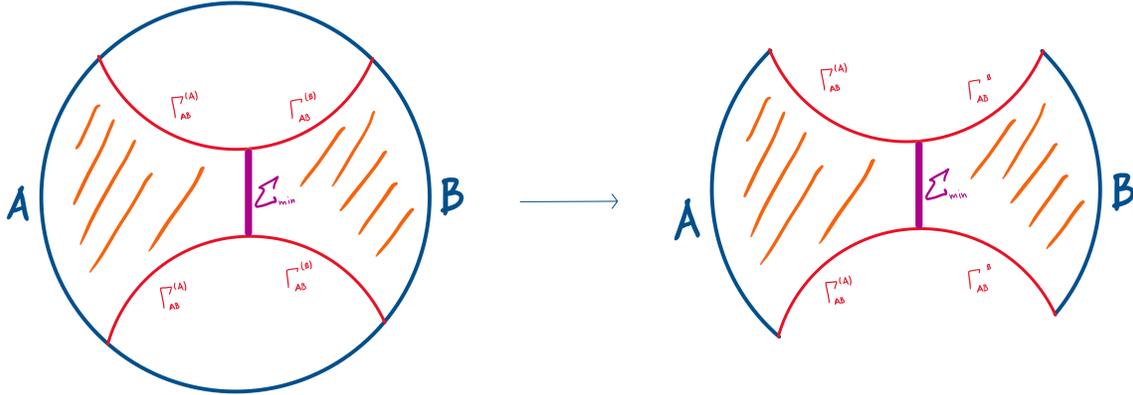


Figura 3.1: En la figura de la izquierda se muestran: la cuña de entrelazamiento (sombreada en naranja) y la superficie RT (en rojo) asociadas a la región  $A \cup B$ . Además se muestra la superficie  $\Sigma_{min}$ , la cual es la sección transversal de la cuña de entrelazamiento. A la derecha se muestra la misma figura después de remover el espaciotiempo que se encuentra fuera de la cuña de entrelazamiento.

donde

$$z = \frac{(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)}{(b_1 - a_2)(b_2 - a_1)}. \quad (3.16)$$

En segundo lugar, consideremos el caso en el cual la cuña de entrelazamiento está desconectada. En este escenario encontramos  $E_p = 0$ , lo cual está en completo acuerdo con el resultado esperado en una QFT, pues esta situación es precisamente cuando  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ . Esta es la primera prueba de consistencia para esta entrada del diccionario holográfico; sin embargo, mucha más evidencia ha sido encontrada a su favor. En particular, se ha probado [31, 40] que ésta satisface todas las desigualdades discutidas en la sección 3.1.3.

En el siguiente capítulo, estudiamos el entrelazamiento de purificación para sistemas de dimensión finita desde un punto de vista numérico. Encontramos una purificación, a la que llamamos canónica, y damos evidencia numérica de que está íntimamente relacionada con la purificación óptima que da lugar al entrelazamiento de purificación.



## Capítulo 4

# Entrelazamiento de purificación en sistemas de espines

En este capítulo discutimos algunos resultados numéricos que fueron hallados para el entrelazamiento de purificación en sistemas de dimensión finita. Comenzamos mostrando el comportamiento que tiene la entropía de entrelazamiento en el modelo de Ising, y posteriormente estudiamos algunas propiedades del entrelazamiento de purificación  $E_p$  para estados genéricos. Luego, damos evidencia numérica que sugiere que hemos encontrado una purificación óptima. En la última sección, encontramos mediante un análisis numérico que esta purificación es un mínimo local para ciertos estados; y también damos evidencia, a través de otro análisis, de que el entrelazamiento de purificación es proporcional a la entropía de entrelazamiento calculada con lo que llamamos purificación canónica. Éste último resultado concuerda con una propuesta reciente [13], en la cual se argumenta que el entrelazamiento de purificación holográfico es proporcional a lo que en ese trabajo se define como entropía reflejada. Dicha propuesta apareció cuando nuestro análisis ya estaba avanzado.

### 4.1. Entrelazamiento de purificación en el modelo de Ising

Para comenzar a estudiar de manera numérica el entrelazamiento de purificación, es conveniente elegir, en primer lugar, el tipo de sistemas al cual se restringe nuestro análisis. Para ello, hemos decidido realizar nuestros cálculos utilizando sistemas de dimensión finita, y en particular, trabajaremos con sistemas de espines. En esta primera sección mostramos algunos resultados obtenidos al estudiar el modelo de Ising, únicamente con el objetivo de ilustrar el comportamiento de la entropía de entrelazamiento para estados provenientes de un hamiltoniano conocido.

Recordemos que para el modelo de Ising en una dimensión el hamiltoniano está dado por

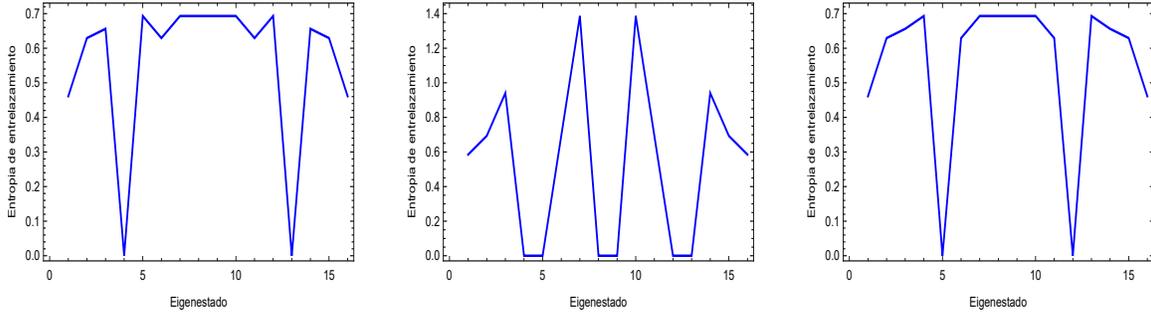


Figura 4.1: Entropía de entrelazamiento,  $S_A$ , para un sistema de  $N = 4$  espines. De izquierda a derecha, se tiene que la dimensión del subsistema  $A$  es  $|A| = 2, 4$  y  $8$ .

$$H = - \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i^z \otimes \sigma_j^z - h \sum_{i=1}^N \sigma_i^x, \quad (4.1)$$

donde  $\langle i, j \rangle$  denota la suma sobre vecinos cercanos con condición de frontera periódica, y  $h$  es la intensidad del campo magnético externo. Como primer ejemplo mostramos el comportamiento que tiene la entropía de entrelazamiento en función de los eigenestados de energía. Para este cálculo consideramos un sistema con  $N = 4$  espines, y hallamos  $S_A$ , donde la dimensión del subsistema  $A$ ,  $|A|$ , toma valores  $|A| = 2, 4$  y  $8$ . El resultado se muestra en la figura 4.1. Podemos notar que las entropías de entrelazamiento resultan ser simétricas, y no monótonas en función del eigenestado.

Habiendo realizado estos cálculos, estamos en posición de estudiar candidatos para el entrelazamiento de purificación en estados genéricos. En la siguiente sección discutiremos un gran número de purificaciones para un gran número de estados, y encontramos que una de éstas resulta ser un excelente candidato para el  $E_p$ .

## 4.2. Estados aleatorios y Purificación canónica

Comenzaremos esta sección estudiando sistemas que se encuentran en estados mezcla  $\rho_{AB}$ . Como purificación inicial utilizamos

$$|\psi\rangle_{ABA'B'} = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_{AB} |i\rangle_{A'B'}, \quad (4.2)$$

donde hemos diagonalizado  $\rho_{AB}$  de modo que  $\rho_{AB} = \sum_i p_i |i\rangle_{AB} \langle i|_{AB}$  y  $\sum_i p_i = 1$ ,  $p_i \geq 0$ . Además, para esta purificación en particular, los grados de libertad primados son una copia de los originales. De la purificación anterior podemos generar cualquier otra purificación de igual dimensión actuando con un operador unitario  $U_{A'B'}$  de la siguiente manera

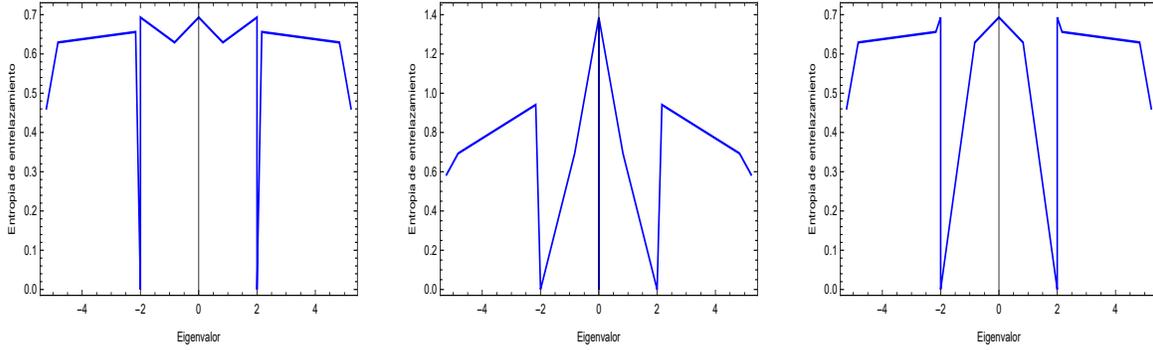


Figura 4.2: Entropía de entrelazamiento,  $S_A$ , para un sistema de  $N = 4$  espines. De izquierda a derecha, se tiene que la dimensión del subsistema  $A$  es  $|A| = 2, 4$  y  $8$ .

$$|\tilde{\Psi}\rangle_{ABA'B'} = I_{AB} \otimes U_{A'B'} |\psi\rangle_{ABA'B'}, \quad (4.3)$$

de modo que no hemos perdido generalidad en la búsqueda de la purificación óptima. Dicho esto, podemos proceder a buscar el  $E_p(A : B)$ . Por motivos prácticos, restringimos nuestros cálculos numéricos a sistemas tales que  $\text{rango } \rho_{AB} \leq 4$ . En nuestro primer cálculo numérico estudiamos la purificación dada por la ecuación (4.2), a la cual de ahora en adelante nos referiremos como purificación canónica. Lo primero que hacemos es generar 100 estados  $\rho_{AB}$  de manera aleatoria<sup>1</sup>, y purificarlos todos de manera canónica. Posteriormente calculamos  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $I(A : B) / 2$  y  $S_{AA'}$  para todos. El resultado se muestra en la figura 4.3. De estas gráficas podemos notar que  $S_{AA'}$  satisface las desigualdades (3.5) y (3.7), lo cual sugiere que es un buen candidato para ser el  $E_p$ . Más aún, cuando nos fijamos en otras purificaciones, dadas por (4.3), encontramos casos en los cuales no se satisfacen las cotas antes mencionadas. Ver figura 4.4. Podemos observar dos cosas importantes en esta figura. La primera, es que  $S_{AA'}$  calculada mediante la purificación canónica (línea azul) siempre es menor que  $S_{AA'}$  calculada con alguna otra purificación (línea negra). La segunda, es que en muchos casos  $S_{AA'}$  (línea negra) ni siquiera satisface la desigualdad (3.5), por lo cual queda automáticamente descartada, en esos casos, como candidato a entrelazamiento de purificación.

La evidencia numérica presentada hasta ahora sugiere fuertemente que el entrelazamiento de purificación está íntimamente relacionado a la entropía de entrelazamiento calculada para la purificación canónica; sin embargo, no podemos concluir que sean idénticos, ya que a pesar de haber probado con un número enorme de estados y purificaciones, no hemos agotado la infinidad de posibilidades.

<sup>1</sup>En nuestro código revisamos una cantidad de estados que excede a los mostrados por muchos órdenes de magnitud; sin embargo, por cuestiones prácticas solo mostramos 100 de estos.

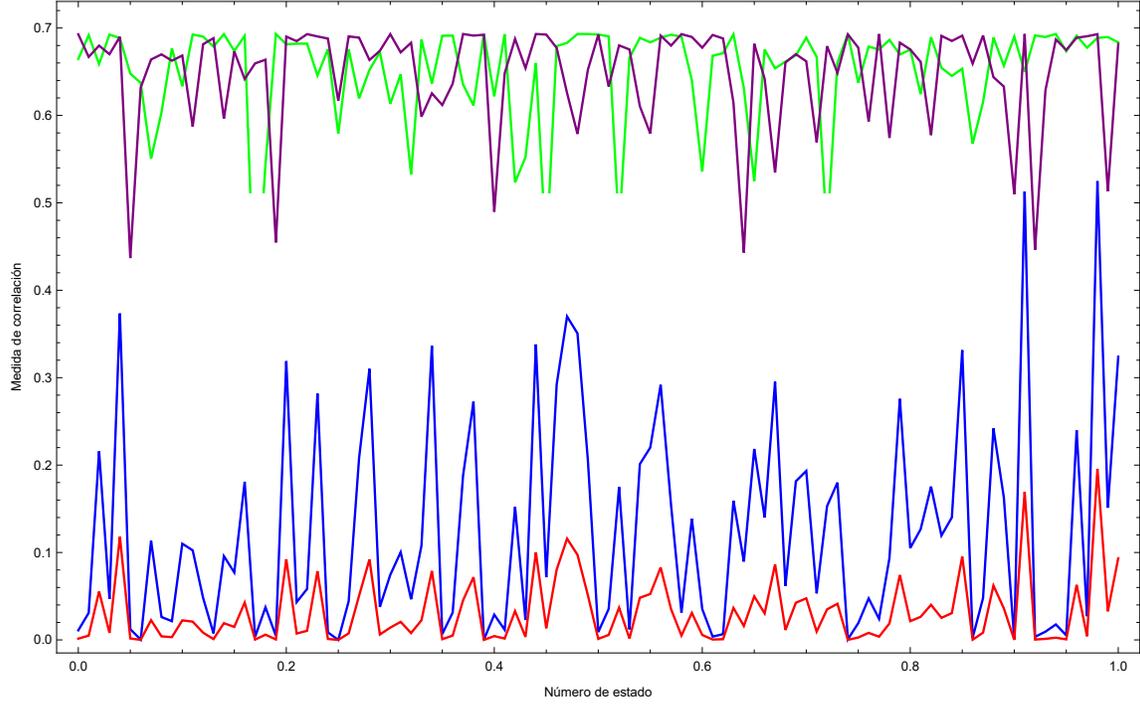


Figura 4.3: Medidas de correlación para 100 estados  $\rho_{AB}$  dados de manera aleatoria y purificados de manera canónica. La línea azul muestra  $S_{AA'}$ , la línea roja  $I(A:B)/2$ , la línea verde  $S_A$  y la línea morada  $S_B$ .

A continuación mostramos que de hecho  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  no siempre funciona, pero que podemos encontrar un nuevo candidato para el  $E_p$ . Consideremos un estado  $\rho_{AB}$  dado por

$$\rho_{AB} = p|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + (1-p)\rho_2, \quad (4.4)$$

donde  $p \in [0, 1]$  es un parámetro,  $|\psi_1\rangle$  es un estado normalizado que daremos de manera aleatoria y  $\rho_2$  es una matriz de densidad también dada de manera aleatoria. Para esta clase de estados, que se caracterizan por ser puros cuando  $p = 1$ , calculamos nuevamente las medidas de correlación que hemos discutido anteriormente. Los resultados los podemos observar en la figura 4.5. De manera inmediata notamos que aún cuando  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  (línea azul) sigue siendo menor que  $S_{AA'}(\rho_{\text{no can}})$  (línea negra), la primera ya no puede ser el entrelazamiento de purificación porque resulta ser que  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}}) > \min(S_A, S_B)$  cuando  $p \rightarrow 1$ . A pesar de esto, en la siguiente sección llevamos a cabo un análisis numérico que nos indica que esta purificación no debe ser descartada aún.

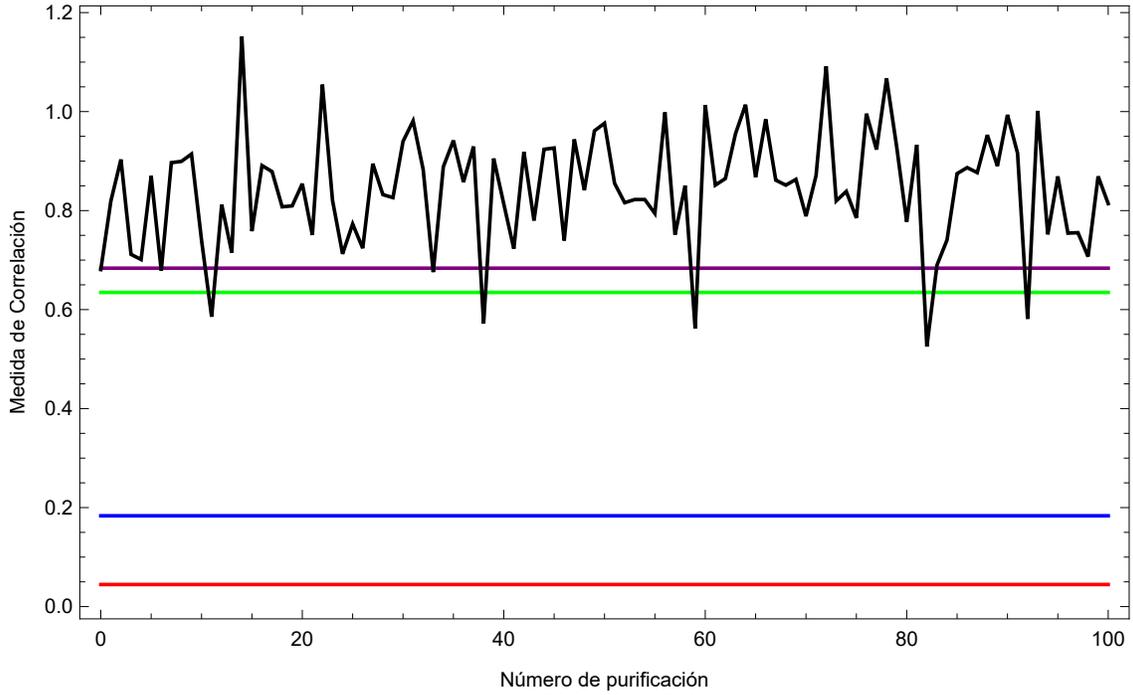


Figura 4.4: Medidas de correlación para un estado  $\rho_{AB}$  usando las purificaciones (4.2) y (4.3). La línea azul muestra  $S_{AA'}$  calculada con la purificación canónica. La línea negra muestra  $S_{AA'}$  calculada usando la purificación (4.3), donde la matriz unitaria  $U_{A'B'}$  ha sido dada de manera aleatoria. La línea verde muestra  $S_A$  y la línea morada  $S_B$ . La línea roja muestra  $I(A : B) / 2$ .

### 4.3. Optimizando la purificación canónica

La evidencia numérica hallada en las secciones anteriores nos sugiere que, para un gran número de estados, el entrelazamiento de purificación puede ser hallado utilizando la purificación canónica; sin embargo, también nos hemos encontrado situaciones en las cuales esto no funciona por sí mismo. Aunque la opción obvia, en este momento, sería descartar la purificación canónica como purificación óptima, no lo haremos. En lugar de esto, estudiaremos con más detalle la entropía de entrelazamiento,  $S_{AA'}$ , obtenida a partir de la purificación canónica.

Ya que no descartamos  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$ , surgen dos vertientes naturales a lo largo de las cuales continuar. La primera, es hacer perturbaciones alrededor de esta purificación, y verificar que, de hecho,  $S_{AA'}$  sea al menos un mínimo local. La segunda, consiste en explorar, al menos numéricamente, si acaso existe un factor universal  $k$ , tal que  $k S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  satisfaga siempre las propiedades del entrelazamiento de purificación.

Para estudiar la primera propuesta, debemos fijarnos en una matriz unitaria  $U_{A'B'}$  que

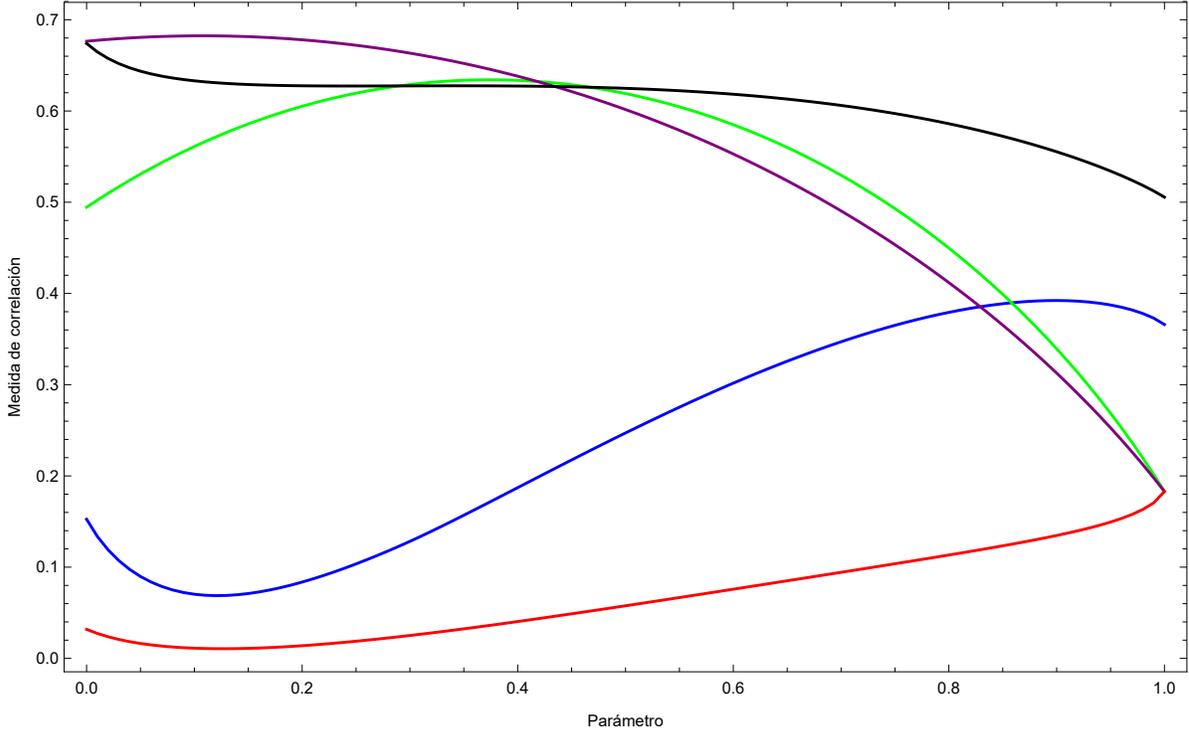


Figura 4.5: Medidas de correlación para un estado  $\rho_{AB}$  dado por (4.4). La línea azul muestra  $S_{AA'}$  calculada con la purificación canónica. La línea negra muestra  $S_{AA'}$  calculada usando la purificación (4.3), donde la matriz unitaria  $U_{A'B'}$  ha sido dada de manera aleatoria. La línea verde muestra  $S_A$  y la línea morada  $S_B$ . La línea roja muestra  $I(A : B) / 2$ .

se encuentre cerca de la identidad, es decir,

$$U_{A'B'} = \mathbb{1} + \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (4.5)$$

donde  $\epsilon = -\epsilon^\dagger$ . Con esto en mente procedemos a calcular  $S_{AA'}$ . En general, la expresión para  $S_{AA'}$  es muy complicada, por lo cual no vale la pena escribirla; sin embargo, si podemos estudiar numéricamente su comportamiento. En la figura 4.6, se muestra la forma que tiene  $S_{AA'}(\epsilon_1)$  cuando la purificación difiere infinitesimalmente de (4.2) para un estado  $\rho_{AB}$  con rango  $\rho_{AB} = 4$ . Este mismo comportamiento se encuentra al analizar el valor numérico de  $S_{AA'}$  en función de todas las variables independientes de  $\epsilon$ , es decir, encontramos que la purificación canónica es, al menos, un mínimo local para este estado.

A pesar de que el ejemplo anterior nos dio resultados alentadores, podemos encontrar también estados para los cuales  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  no es un mínimo local<sup>2</sup>. Por ejemplo, en la figura 4.7 observamos que  $S_{AA'}(\epsilon_2)$  disminuye al alejarnos de  $\epsilon_2 = 0$ .

<sup>2</sup>En esta situación podría ser útil, para trabajo futuro, utilizar el método de descenso de máxima pendiente.

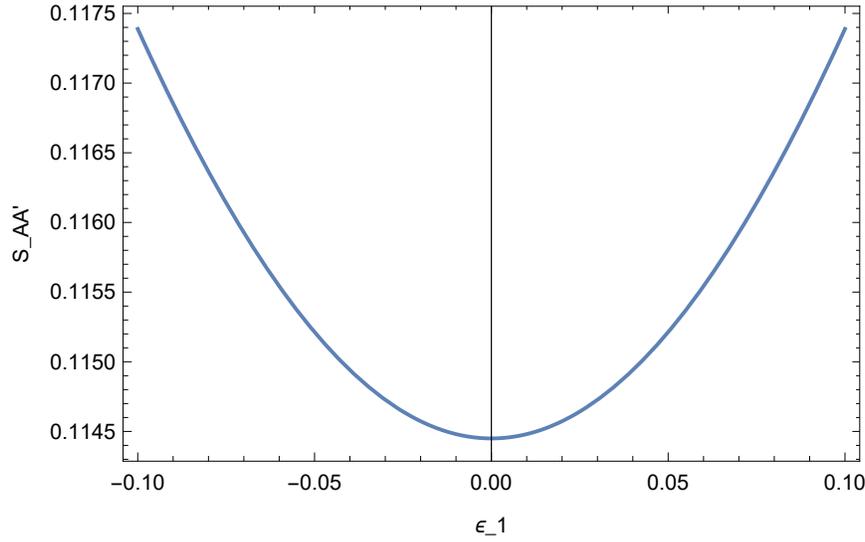


Figura 4.6: Se muestra el comportamiento de  $S_{AA'}$  para una purificación que difiere infinitesimalmente de la canónica. Podemos observar que  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  es un mínimo local para este estado.

El análisis anterior ha resultado ser provechoso, porque confirma que (4.2) es un mínimo local para ciertos estados, pero ciertamente no nos permite encontrar el entrelazamiento de purificación. Para avanzar en esta tarea, procedemos a buscar el factor universal  $k$  que discutimos al comienzo de esta sección. Podemos acotar el valor de  $k$  de manera significativa si tomamos en cuenta dos cosas: la primera, que el entrelazamiento de purificación es no negativo, y por lo tanto  $k \geq 0$ ; la segunda, que  $E_p \leq S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$ , por lo que  $k \leq 1$ .

Tomando en cuenta lo anterior, podemos buscar numéricamente el valor de  $k$ . Para ello, definimos dos cantidades:  $S_{AA'}^{\min} \equiv k_{\min} S_{AA'}$  y  $S_{AA'}^{\max} \equiv k_{\max} S_{AA'}$ , donde  $0 \leq k_{\min} \leq k \leq k_{\max} \leq 1$ . El siguiente paso consiste en buscar el valor máximo (mínimo) de  $k_{\min}$  ( $k_{\max}$ ) tal que  $S_{AA'}^{\min}$  ( $S_{AA'}^{\max}$ ) satisfaga las mismas propiedades que  $E_p$ . Lo anterior lo realizamos con estados de la forma (4.4), pues para estos la purificación canónica por sí sola no nos dio un candidato para  $E_p$ . Increíblemente, encontramos, como se muestra en la figura 4.8, que  $k_{\min} = k_{\max} = k = 1/2$ . Lo anterior ha sido verificado numéricamente para un gran número de estados y siempre se encuentra que  $k = 1/2$ . Esto parece no ser una coincidencia, y de hecho se encuentra en acuerdo con una propuesta hecha recientemente [13], en la cual se argumenta que el entrelazamiento de purificación holográfico satisface que

$$2E_p = S_{\text{reflejada}}, \quad (4.6)$$

donde  $S_{\text{reflejada}}$  es precisamente  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$ .

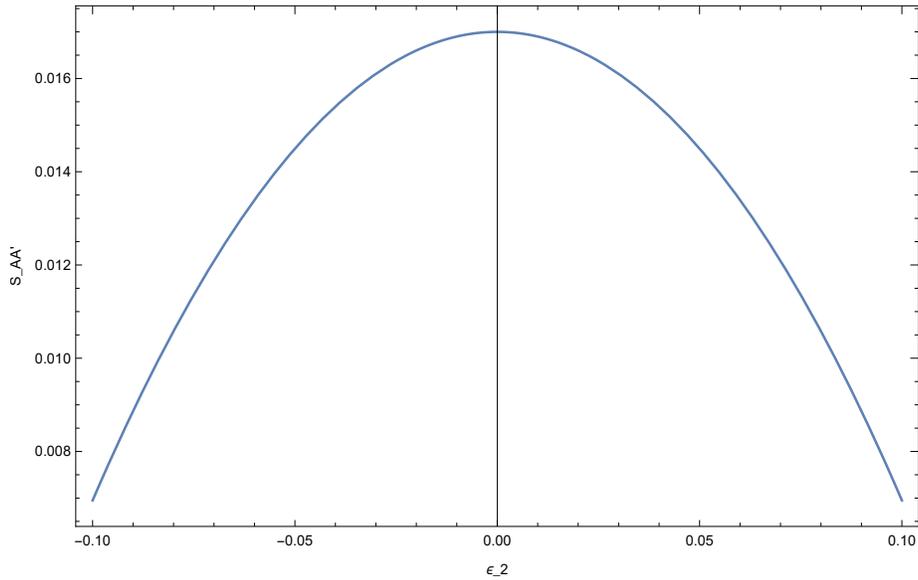


Figura 4.7: Se muestra el comportamiento de  $S_{AA'}$  para una purificación que difiere infinitesimalmente de la canónica. Podemos observar que existe al menos una dirección en la cual  $S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  disminuye, y por lo tanto no es un mínimo local para este estado.

Para finalizar este capítulo, analizamos, utilizando la metodología previamente descrita, el estado de Werner, cuyo entrelazamiento de purificación ha sido estudiado en el pasado [4, 41]. Este estado está dado por

$$\rho_{AB} = \frac{p}{3} \mathbb{1} + \left(1 - \frac{4p}{3}\right) |\text{Bell}\rangle \langle \text{Bell}|, \quad (4.7)$$

donde  $p \in [0, 1]$  y  $|\text{Bell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ . Encontramos, como se muestra en la figura 4.9, que nuevamente  $k = 1/2$ . Interesantemente, un entrelazamiento de purificación que ha sido calculado anteriormente, también de manera numérica, es mayor que  $\frac{1}{2}S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$ . Es por lo anterior, que podemos argumentar que  $\frac{1}{2}S_{AA'}(\rho_{\text{can}})$  es una mejor cota superior para  $E_p$ .

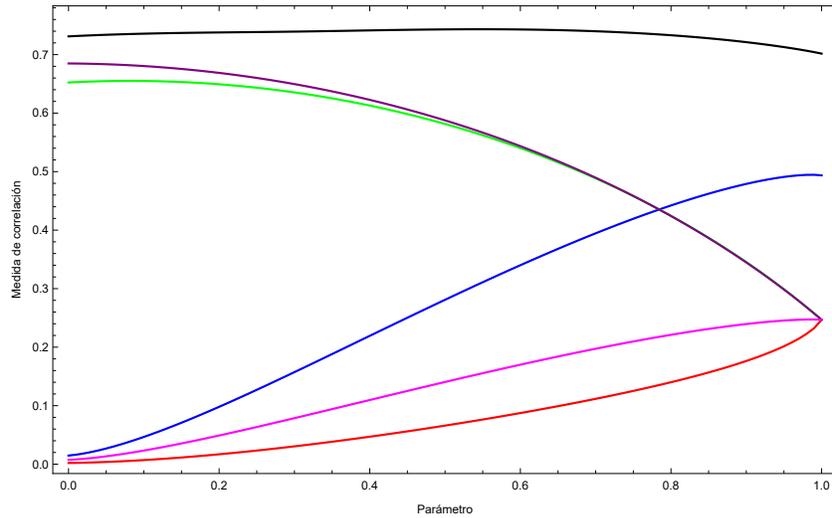


Figura 4.8: Medidas de correlación para un estado  $\rho_{AB}$  dado por (4.4). La línea azul muestra  $S_{AA'}$  calculada con la purificación canónica. La línea verde muestra  $S_A$  y la línea morada  $S_B$ . La línea roja muestra  $I(A : B) / 2$  y la línea magenta  $S_{AA'} / 2$  calculada con la purificación canónica.

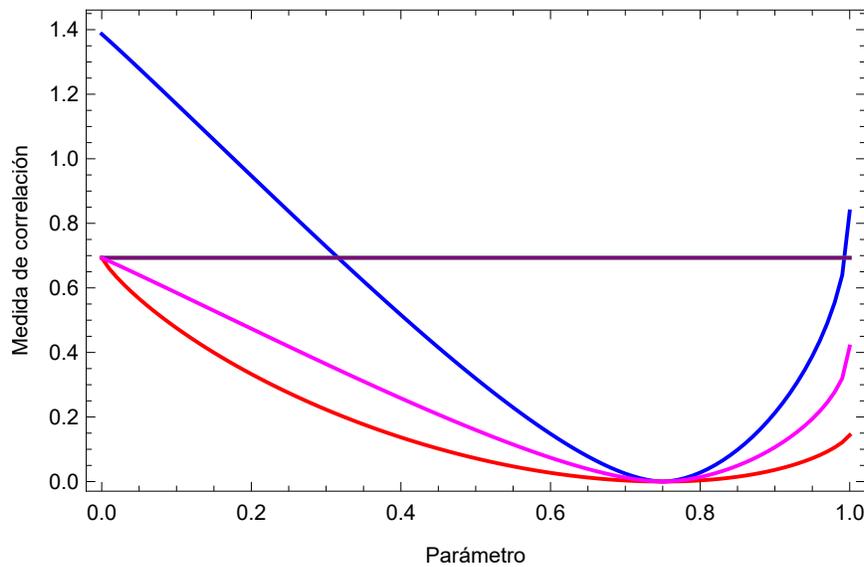


Figura 4.9: Medidas de correlación para el estado de Werner. La línea azul muestra  $S_{AA'}$  calculada con la purificación canónica. En esta situación tenemos que  $S_A = S_B$ , por lo que las líneas morada y verde se traslapan dando lugar a única línea horizontal. La línea roja muestra  $I(A : B) / 2$  y la línea magenta  $S_{AA'} / 2$  calculada con la purificación canónica.



# Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado la dualidad AdS/CFT, enfocándonos principalmente en dos entradas del diccionario holográfico: la entropía de entrelazamiento y el entrelazamiento de purificación. Para ambas hemos estudiado algunas de las propiedades más importantes que satisfacen en cualquier teoría cuántica de campos, hemos mostrado explícitamente, en ejemplos sencillos, cómo se calculan dichas cantidades, y hemos discutido el dual gravitacional de éstas. En lo que respecta a la entropía de entrelazamiento, hemos explicado el experimento pensado de Mark Van Raamsdonk, mediante el cual argumenta, haciendo uso de la fórmula de Ryu-Takayanagi, que en sistemas holográficos el patrón de entrelazamiento es fundamental para obtener espaciotiempos suaves y conectados.

En la parte final de esta tesis nos hemos concentrado en estudiar el entrelazamiento de purificación para sistemas de dimensión finita, pues es uno de los escenarios en los cuales es más conveniente analizar esta cantidad, porque permite realizar cálculos numéricos sin la necesidad de recurrir a métodos computacionales avanzados. Al estudiar el comportamiento de esta cantidad para estados dados de manera aleatoria, pudimos encontrar una purificación que resulta ser un buen candidato para entrelazamiento de purificación. Llevando a cabo un análisis más detallado, pudimos encontrar que dicha purificación, a la que llamamos canónica, resulta ser, para ciertos estados, un mínimo local; sin embargo, también encontramos situaciones en las cuales esta purificación no funciona por sí misma. En lugar de descartar la purificación canónica por completo, realizamos un último análisis numérico, a través del cual encontramos que un medio de la entropía calculada con dicha purificación es un buen candidato para  $E_p$  en estados que tienen la forma (4.4), y por lo tanto también resulta ser un candidato para el resto de estados que analizamos. Este resultado parece no ser una coincidencia, pues recientemente [13] se ha argumentado que para estados holográficos esto es precisamente lo que se debe satisfacer. Es importante recalcar dos cosas: los estados que hemos estudiado no son holográficos, y no pretendemos haber encontrado la prescripción general para calcular el entrelazamiento de purificación. En particular, debe notarse que el valor que conjeturamos para  $E_p$  no ha sido deducido explícitamente a partir de una purificación particular. Finalmente, estudiamos el estado de Werner y hallamos que este candidato a  $E_p$  mejora la cota que se ha propuesto en trabajos anteriores.



# Bibliografía

- [1] Ofer Aharony y col. “Large N field theories, string theory and gravity”. En: *Physics Reports* 323.3-4 (2000), págs. 183-386.
- [2] Shrobona Bagchi y Arun Kumar Pati. “Monogamy, polygamy, and other properties of entanglement of purification”. En: *Physical Review A* 91.4 (2015), pág. 042323.
- [3] Jonathan Bagger y Neil Lambert. “Comments on multiple M2-branes”. En: *Journal of High Energy Physics* 2008.02 (2008), pág. 105.
- [4] Arpan Bhattacharyya y col. “Entanglement of Purification in Many Body Systems and Symmetry Breaking”. En: *arXiv preprint arXiv:1902.02369* (2019).
- [5] J David Brown y Marc Henneaux. “Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity”. En: *Communications in Mathematical Physics* 104.2 (1986), págs. 207-226.
- [6] Pasquale Calabrese y John Cardy. “Entanglement entropy and quantum field theory”. En: *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2004.06 (2004), P06002.
- [7] Curtin Callan y Frank Wilczek. “On geometric entropy”. En: *arXiv preprint hep-th/9401072* (1994).
- [8] Horacio Casini, Marina Huerta y Robert C Myers. “Towards a derivation of holographic entanglement entropy”. En: *Journal of High Energy Physics* 2011.5 (2011), pág. 36.
- [9] Bartłomiej Czech y col. “Rindler quantum gravity”. En: *Classical and Quantum Gravity* 29.23 (2012), pág. 235025.
- [10] Bartłomiej Czech y col. “The gravity dual of a density matrix”. En: *Classical and Quantum Gravity* 29.15 (2012), pág. 155009.
- [11] Jin Dai, RG Leigh y Joseph Polchinski. “New connections between string theories”. En: *Modern Physics Letters A* 4.21 (1989), págs. 2073-2083.
- [12] Xi Dong, Aitor Lewkowycz y Mukund Rangamani. “Deriving covariant holographic entanglement”. En: *Journal of High Energy Physics* 2016.11 (2016), pág. 28.
- [13] Souvik Dutta y Thomas Faulkner. “A canonical purification for the entanglement wedge cross-section”. En: *arXiv preprint arXiv:1905.00577* (2019).

- [14] Steven S Gubser, Igor R Klebanov y Alexander M Polyakov. "Gauge theory correlators from non-critical string theory". En: *Physics Letters B* 428.1-2 (1998), págs. 105-114.
- [15] A. Guijosa. "'Gauge-Gravity Correspondence", graduate course in physics, UNAM". En: ().
- [16] Daniel Harlow. "TASI Lectures on the Emergence of Bulk Physics in AdS/CFT". En: ().
- [17] Thomas Hartman. "Entanglement entropy at large central charge". En: *arXiv preprint arXiv:1303.6955* (2013).
- [18] Akikazu Hashimoto e Igor R Klebanov. "Scattering of strings from D-branes". En: *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements* 55.2 (1997), págs. 118-133.
- [19] Matthew Headrick. "TASI lectures on entanglement in field theory and holography". En: ().
- [20] Matthew Headrick y Tadashi Takayanagi. "Holographic proof of the strong subadditivity of entanglement entropy". En: *Physical Review D* 76.10 (2007), pág. 106013.
- [21] Petr Hořava. "Background duality of open-string models". En: *Physics Letters B* 231.3 (1989), págs. 251-257.
- [22] Ryszard Horodecki y col. "Quantum entanglement". En: *Reviews of modern physics* 81.2 (2009), pág. 865.
- [23] Gary T Horowitz y Andrew Strominger. "Black strings and P-branes". En: *Nuclear Physics B* 360.1 (1991), págs. 197-209.
- [24] Veronika E Hubeny, Mukund Rangamani y Tadashi Takayanagi. "A covariant holographic entanglement entropy proposal". En: *Journal of High Energy Physics* 2007.07 (2007), pág. 062.
- [25] Ben Ibinson, Noah Linden y Andreas Winter. "Robustness of quantum Markov chains". En: *Communications in Mathematical Physics* 277.2 (2008), págs. 289-304.
- [26] Aitor Lewkowycz y Juan Maldacena. "Generalized gravitational entropy". En: *Journal of High Energy Physics* 2013.8 (2013), pág. 90.
- [27] Elliott H Lieb y Mary Beth Ruskai. "Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy". En: *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25* 19 (1973), págs. 36-55.
- [28] Juan Maldacena. "Eternal black holes in anti-de Sitter". En: *Journal of High Energy Physics* 2003.04 (2003), pág. 021.
- [29] Juan Maldacena. "The large-N limit of superconformal field theories and supergravity". En: *International journal of theoretical physics* 38.4 (1999), págs. 1113-1133.
- [30] Yu Nakayama. "A lecture note on scale invariance vs conformal invariance". En: *arXiv preprint arXiv:1302.0884* (2013).

- [31] Phuc Nguyen y col. “Entanglement of purification: from spin chains to holography”. En: *Journal of High Energy Physics* 2018.1 (2018), pág. 98.
- [32] Michael A Nielsen e Isaac Chuang. *Quantum computation and quantum information*. 2002.
- [33] Tatsuma Nishioka, Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. “Holographic entanglement entropy: an overview”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42.50 (2009), pág. 504008.
- [34] Joseph Polchinski. “Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges”. En: *Physical Review Letters* 75.26 (1995), pág. 4724.
- [35] Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. “Aspects of holographic entanglement entropy”. En: *Journal of High Energy Physics* 2006.08 (2006), pág. 045.
- [36] Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi. “Holographic derivation of entanglement entropy from the anti-de sitter space/conformal field theory correspondence”. En: *Physical review letters* 96.18 (2006), pág. 181602.
- [37] Kostas Skenderis. “Lecture notes on holographic renormalization”. En: *Classical and Quantum Gravity* 19.22 (2002), pág. 5849.
- [38] Martin F Sohnius. “Introducing supersymmetry”. En: *Physics reports* 128.2-3 (1985), págs. 39-204.
- [39] Matthew J Strassler. “The duality cascade”. En: *Progress In String Theory*. World Scientific, 2005, págs. 419-510.
- [40] Tadashi Takayanagi y Koji Umemoto. “Holographic entanglement of purification”. En: *arXiv preprint arXiv:1708.09393* (2017).
- [41] Barbara M Terhal y col. “The entanglement of purification”. En: *Journal of Mathematical Physics* 43.9 (2002), págs. 4286-4298.
- [42] Mark Van Raamsdonk. “Building up spacetime with quantum entanglement”. En: *General Relativity and Gravitation* 42.10 (2010), págs. 2323-2329.
- [43] Mark Van Raamsdonk. “Lectures on gravity and entanglement”. En: *New Frontiers in Fields and Strings: TASI 2015 Proceedings of the 2015 Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics*. World Scientific, 2017, págs. 297-351.
- [44] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago Press (Chicago, 1984), 2007.
- [45] Edward Witten. “Anti de Sitter space and holography”. En: *arXiv preprint hep-th/9802150* (1998).
- [46] Michael M Wolf y col. “Area laws in quantum systems: mutual information and correlations”. En: *Physical review letters* 100.7 (2008), pág. 070502.