



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA
INSTITUTO DE GEOLOGÍA

ASIMILACIÓN DE DATOS Y MODELACIÓN ESTOCÁSTICA NO LINEAL
UNIDIMENSIONAL DE LA SUBSIDENCIA EN ACUITARDOS HETEROGÉNEOS
ALTAMENTE COMPRESIBLES

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE
DOCTORA EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:
BERENICE ZAPATA NORBERTO

TUTOR:
Dr. ERIC MORALES CASIQUE
INSTITUTO DE GEOLOGÍA

COMITÉ TUTOR:
Dra. GRACIELA HERRERA ZAMARRÓN
INSTITUTO DE GEOFÍSICA
Dr. ÓSCAR ESCOLERO FUENTES
INSTITUTO DE GEOLOGÍA

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MX., NOVIEMBRE DE 2019.



Universidad Nacional
Autónoma de México



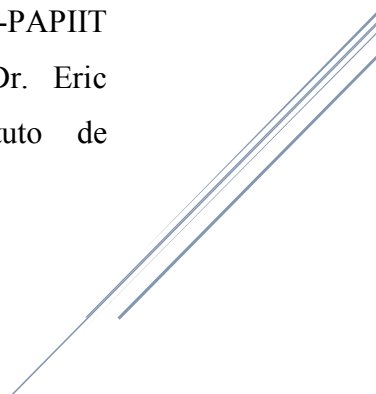
UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Este trabajo forma parte del proyecto
IN113717 de UNAM-DGAPA-PAPIIT
bajo dirección técnica del Dr. Eric
Morales Casique del Instituto de
Geología, UNAM.



AGRADECIMIENTOS

Al Instituto de Geología, al programa de becarios CONACYT y al programa de proyectos PAPIIT por el apoyo recibido para la elaboración y conclusión de este trabajo.

A mi asesor Eric Morales Casique, por todo su tiempo e interés en el desarrollo de este trabajo, pero sobre todo por su paciencia, comprensión y apoyo incondicional.

Al comité tutor conformado por Graciela Herrera Zamarrón y Óscar Escolero Fuentes, por sus buenos consejos y objetividad.

Al comité evaluador integrado por Leticia Flores Márquez, Martín Hernández Marín y José Antonio Hernández Espriú, cuyos consejos mejoraron significativamente este escrito de tesis.

A mi compañero de cubículo y gran amigo, Ricardo Flores Vargas, por todo su tiempo, tolerancia y sus buenos consejos.

CONTENIDO

	Página
Resumen.....	<i>i</i>
Abstract.....	<i>iii</i>
Capítulo 1. Antecedentes, objetivos y alcances.....	1
Capítulo 2. Marco teórico.....	12
Capítulo 3. Metodología.....	39
Capítulo 4. Consolidación no lineal en acuitardos heterogéneos altamente compresibles.....	52
Capítulo 5. Efecto de correlación cruzada de $Y-C_c$ en la consolidación no lineal de acuitardos heterogéneos altamente compresibles.....	70
Capítulo 6. Asimilación de datos con el filtro de Kalman ensamblado EnKF en acuitardos heterogéneos altamente compresibles.....	85
Capítulo 7. Estrategias para mejorar la asimilación de datos con el EnKF en acuitardos heterogéneos altamente compresibles.....	111
Conclusiones Generales.....	121
Limitaciones y modificaciones posteriores.....	124
Referencias.....	126
Anexo: Asimilación de datos con el filtro de Kalman ensamblado EnKF en acuitardos heterogéneos altamente compresibles.....	136

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página
<i>Figura 1.</i> Consecuencias de subsidencia en el mundo.....	3
<i>Figura 2.</i> Contenido de humedad w a saturación en el sondeo Pc 28 en la Ciudad de México (Marsal y Mazari, 1975).....	5
<i>Figura 3.</i> Estructura del programa realizado en Fortran 95.....	40
<i>Figura 4.</i> Relación típica entre esfuerzo efectivo y relación de vacíos (Rudolph y Frind, 1991).....	43
<i>Figura 5.</i> Relación entre $\log K$ y e (Lambe y Whitman, 1969).....	43
<i>Figura 6.</i> Discretización vertical del espesor del acuitardo.....	44
<i>Figura 7.</i> Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).....	54
<i>Figura 8.</i> Resultados de la simulación Monte Carlo con Y aleatoria.....	58
<i>Figura 9.</i> Resultados de la simulación Monte Carlo con C_c aleatoria.....	60
<i>Figura 10.</i> Resultados de la simulación Monte Carlo con m aleatoria.....	61
<i>Figura 11.</i> Resultados de la simulación Monte Carlo con e aleatoria.....	63
<i>Figura 12.</i> Simulación del asentamiento con Y aleatoria (a), C_c aleatoria (b), m aleatoria (c) y e aleatoria (d).....	65
<i>Figura 13.</i> Flujo en fronteras simulado con Y aleatoria (a), C_c aleatoria (b), m aleatoria (c) y e aleatoria (d).....	67
<i>Figura 14.</i> Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).....	72
<i>Figura 15.</i> Resultados de 275 años de simulación con correlación negativa $Y-C_c$ (Caso A).....	75

	Página
<i>Figura 16.</i> Resultados de 275 años de simulación con correlación nula $Y-C_c$ (Caso B).....	77
<i>Figura 17.</i> Resultados de 275 años de simulación con correlación positiva $Y-C_c$ (Caso C).....	78
<i>Figura 18.</i> Simulación del asentamiento con (a) correlación $Y-C_c$ negativa, (b) sin correlación $Y-C_c$ y (c) correlación $Y-C_c$ positiva.....	79
<i>Figura 19.</i> Flujo en fronteras con (a) correlación $Y-C_c$ negativa, (b) sin correlación $Y-C_c$ y (c) correlación $Y-C_c$ positiva.....	81
<i>Figura 20.</i> Predicciones del asentamiento total (275 años) realizadas con una variable aleatoria (Zapata-Norberto <i>et al.</i> , 2018) y dos variables aleatorias.....	83
<i>Figura 21.</i> Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).....	87
<i>Figura 22.</i> Evaluación de la relación $V_Y/RMSE_Y$ en cada paso de asimilación con la referencia 1 y con diferentes tamaños del ensamble.....	90
<i>Figura 23.</i> Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 1.....	93
<i>Figura 24.</i> Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 1.....	94
<i>Figura 25.</i> Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 1.....	96
<i>Figura 26.</i> Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 1.....	97
<i>Figura 27.</i> Resultados de asimilación de carga hidráulica y conductividad hidráulica con la referencia 1.....	99

<i>Figura 28.</i> Resultados de asimilación de carga hidráulica y conductividad hidráulica con la referencia 1.....	100
<i>Figura 29.</i> Asentamiento total corregido con (a, d, g, j) asimilación de h , (b, e, h, k) asimilación de Y y (c, f, i, l) asimilación de h y Y	104
<i>Figura 30.</i> Asentamiento total corregido con sólo 5 pasos de (a, d, g, j) asimilación de h , (b, e, h, k) asimilación de Y y (c, f, i, l) asimilación de h y Y	106
<i>Figura 31.</i> Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).....	112
<i>Figura 32.</i> Asentamiento total corregido con (a) 12 medidas de $h-Y$, (b) 8 medidas de $h-Y$, (c) 6 medidas de $h-Y$, (d) 5 medidas de $h-Y$ y (e) 4 medidas de $h-Y$	115
<i>Figura 33.</i> Asentamiento total corregido con 6 medidas de $h-Y$ y un ensamble de (a) 100 realizaciones, (b) 1,000 realizaciones, (c) 2,000 realizaciones y (d) 10,000 realizaciones.....	118

ÍNDICE DE TABLAS

	Página
<i>Tabla 1.</i> Datos estadísticos seleccionados para el caso de estudio.....	56
<i>Tabla 2.</i> Ensamble promedio y varianza (σ^2) de asentamiento total, flujo en fronteras a 275 años y tiempo para que la diferencia entre el flujo en la frontera superior e inferior sea de 1%.....	68
<i>Tabla 3.</i> Datos estadísticos seleccionados para el caso de estudio.....	73
<i>Tabla 4.</i> Estadísticos de asentamiento al final de las simulaciones con diferentes tipos de correlación $Y-C_c$	80
<i>Tabla 5.</i> Evaluación de errores en h y Y en cada caso de asimilación.....	101
<i>Tabla 6.</i> Evaluación de errores en asentamiento en cada caso de asimilación.....	103
<i>Tabla 7.</i> Evaluación de errores en asentamiento en cada caso de asimilación.....	107
<i>Tabla 8.</i> Evaluación de errores al final de la simulación en cada caso de asimilación.....	116
<i>Tabla 9.</i> Evaluación de errores en el último paso de asimilación con diferente tamaño del ensamble.....	119

Notación

b	Espesor del acuitardo, m
C_c	Índice de compresión
C_{rc}	Índice de recompresión
de	Diferencial de e
dh	Abatimiento, m
dK	Diferencial de conductividad hidráulica K, m/s ²
dL_e	Diferencial de longitud del elemento L_e , m
$d\sigma_e$	Diferencial de esfuerzo efectivo σ_e , kN/m ²
Δz	Espesor inicial del elemento en la malla, m
e	Relación de vacíos
γ	Peso específico del agua, kN/m ³
g	Constante de gravedad, m/s ²
γ_{sat}	Peso específico del suelo saturado, kN/m ³
h	Carga hidráulica, m
h_1	Carga hidráulica en el acuífero inferior, m
h_2	Carga hidráulica en el acuífero superior, m
K	Conductividad hidráulica, m/s
L_e	Longitud del elemento en la malla, m
m	Pendiente del gráfico log K vs. e
ρ	Densidad del agua, kg/m ³
σ^2	Varianza, unidades ²
σ_e	Esfuerzo efectivo, kN/m ²
σ_{pc}	Esfuerzo de preconsolidación, kN/m ²
S_s	Coefficiente de almacenamiento específico, 1/m
t	Tiempo, s
w	Contenido de humedad, %
Y	Logaritmo natural de conductividad hidráulica, m
z	Posición en la coordenada vertical, m

A	Matriz del ensamble, $n \times N$
\bar{A}	Matriz promedio del ensamble, $n \times N$
A'	Matriz de perturbación del ensamble, $n \times N$
A^a	Matriz de análisis del ensamble, $n \times N$
D	Matriz de medidas perturbadas, $m \times N$
d_j	Vectores perturbados, $m \times N$
ϵ_j	Vector de errores de medición, $m \times N$
γ	Matriz de perturbaciones del ensamble, $m \times N$
H	Matriz del operador de medidas, $m \times N$
P_e	Matriz de covarianza del ensamble, $n \times n$
R_e	Matriz de covarianza de errores del ensamble, $m \times m$
ψ	Vector estado, $n \times 1$
()	Matriz traspuesta
() ⁻¹	Matriz inversa

RESUMEN

En este trabajo se investiga el efecto de heterogeneidad vertical en un acuitardo altamente compresible sujeto a un proceso de consolidación inducido por extracción de agua subterránea. Con este propósito se construyó un modelo sintético que simula el asentamiento unidimensional del medio poroso, en el que las propiedades geomecánicas y las condiciones hidrogeológicas reflejan las condiciones típicas que se encuentran en el acuitardo lacustre de la Ciudad de México.

Para simular el asentamiento unidimensional se utilizó el algoritmo de subsidencia no lineal de Neuman *et al.* (1982) modificado por Rudolph y Frind (1991). Este algoritmo considera que los parámetros hidrogeológicos (porosidad, conductividad hidráulica y almacenamiento específico) dependen del esfuerzo efectivo, lo que le imprime el carácter no lineal al modelo. En una primera etapa se utilizó un enfoque estocástico basado en simulaciones Monte Carlo con el propósito de establecer la incertidumbre asociada al asentamiento y determinar qué factores influyen mayormente en su simulación. En este ensayo, primero se consideró el efecto de una variable aleatoria (ya sea conductividad hidráulica K , el índice de compresión C_c , la pendiente m que relaciona el logaritmo de esfuerzo efectivo y la relación de vacíos, o la relación de vacíos e) conservando deterministas los parámetros restantes. En este ejercicio, se encontró que la K es el parámetro con mayor influencia en la magnitud de la incertidumbre del asentamiento. Adicionalmente, se determinó que el caso determinista de Rudolph y Frind (1991) subestima la respuesta del asentamiento, sobretodo en la simulación con tiempos largos. Después, se simuló el efecto de correlación entre dos variables aleatorias, en este caso $Y(\ln K)$ y C_c , con diferente tipo de correlación. Los resultados mostraron que el tipo de

correlación $Y-C_c$ influye en la magnitud del asentamiento promedio y su incertidumbre asociada.

Adicionalmente, se propone una metodología de simulación del asentamiento con base en el modelo de subsidencia no lineal acoplado a un algoritmo de asimilación de datos basado en el filtro de Kalman ensamblado EnKF. Esta metodología permite calibrar la simulación del asentamiento incorporando observaciones de h , Y y sus combinaciones. En este ejercicio solamente se consideró como variable aleatoria a la K . La implementación del EnKF para medios altamente compresibles resultó satisfactoria debido a que presenta errores bajos en la calibración del asentamiento.

ABSTRACT

The vertical heterogeneity effect on settlement prediction of highly compressible aquitards associated to consolidation process due to groundwater extraction is investigated in this research. A synthetic model to simulate the total settlement 1D of porous media was performed to this aim. In the synthetic model the geomechanical properties and hydrogeological conditions are based on aquitard Mexico City's typical properties found in literature.

The nonlinear subsidence algorithm 1D of Neuman *et al.* (1982) and modified by Rudolph and Frind (1991) was used to simulate the one-dimensional settlement. A stochastic point of view was adapted by Monte Carlo method to establish the uncertainty associated to settlement and identify the most important factors that influencing its prediction. First, the effect of one random variable was considered (hydraulic conductivity K , compression index C_c , the slope m of the graphic effective stress versus void ratio, and void ratio e) with the remained parameters deterministic. This exercise showed that K has the major influence on settlement magnitude and its uncertainty. Also, was determine that the deterministic case of Rudolph and Frind (1991) underestimates the settlement response, especially in later times. After, the effect of two random correlated variables, Y ($\ln K$) and C_c , with different correlation type were simulated. The results showed that the Y - C_c correlation type has influence on settlement average and its uncertainty.

Additionally, was proposed a methodology to the simulation of settlement based on nonlinear subsidence algorithm 1D coupled to a data assimilation algorithm based on ensemble Kalman filter. This method allows to calibrate the settlement modelling through incorporating measurements sets of h , Y and their combinations. The hydraulic conductivity K was the only

random variable considered in this method. The EnKF implementation to highly compressible media resulted satisfactory because produced low errors on settlement calibration.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

La subsidencia se define como “el hundimiento vertical del subsuelo debido al peso de los sedimentos”, puede deberse a varios procesos geológicos de origen estructural, morfoestructónicos y sedimentación, disolución de minerales, diapirismo y descenso en el nivel estático del agua subterránea en estiaje. Específicamente, la magnitud de subsidencia en sedimentos granulares depende del arreglo de los granos, composición mineral (sedimentos compresibles y altamente compresibles), grado de cementación, permeabilidad y porosidad, y por supuesto, a la compactación previa. La subsidencia es actualmente consecuencia de un proceso de consolidación acelerado que se debe a la combinación de la naturaleza del subsuelo junto con actividades antropogénicas, como la extracción de fluidos (agua, petróleo, gas), explotación de minerales, construcción de obras subterráneas, etc.

Estudios previos demuestran que la extracción intensiva de agua subterránea en sistemas acuíferos semiconfinados, con acuíferos desarrollados en arenas y/o gravas de alta porosidad y baja compresibilidad, intercalados con acuitardos arcillosos (constituidos principalmente por Montmorillonita) de baja conductividad hidráulica vertical y alta compresibilidad, generan grandes magnitudes de subsidencia. Ejemplos de estos sistemas multiacuíferos se tienen en la parte suroeste de los Estados Unidos (Meade, 1967), Arizona (Poland, 1968), Texas (Corlis y Meade, 1964) y en la Ciudad de México (Marsal y Mazari, 1959), donde la subsidencia máxima acumulada es 13.5 m en el periodo 1962-2004 (Auvinet 2009).

Recientemente se ha determinado que la velocidad de subsidencia debida a la extracción de agua subterránea alcanzó 70 mm/año en Tucson, Arizona durante el periodo 1987-2005 (Carruth *et al.*, 2007), hasta 15 mm/año en Houston, Texas durante el periodo 1995-2000

(Casu *et al.*, 2005), y hasta 300 mm/año en la Ciudad de México durante el periodo 2007-2011 (Chaussard *et al.*, 2014).

Las manifestaciones superficiales de subsidencia pueden generar fisuras y/o reactivación de fallas, que a su vez suelen causar daños a estructuras civiles como edificios, avenidas, túneles, drenaje, etc., que conllevan a un amplio impacto socio-económico. En Gambolati y Teatini (2015) se ilustran las consecuencias de subsidencia alrededor del mundo (Figura 1). En la Figura 1a se observa que el área afectada por la subsidencia, Riva degli Schiavoni, suele inundarse cuando se presenta marea alta en Venecia. En Figura 1b se muestra que los 8 m de subsidencia han dejado expuesta la estructura de un pozo de extracción de agua subterránea en la Ciudad de México. En Figura 1c se muestra la fisura Rodgers de 13 m de profundidad que se formó en el condado de Maricopa, Arizona. Finalmente, en Figura 1d se muestra el daño que genera una grieta al atravesar una calle y edificios en Xian, China.

Particularmente, en la Ciudad de México las consecuencias de la subsidencia han generado desde inundaciones en épocas de lluvias hasta inversión de la pendiente que conduce el sistema de drenaje, deformación de las principales vías de transporte, y en algunos lugares, han dejado cimentaciones y otras estructuras subterráneas descubiertas (Auvinet, 2009).

Con subsidencia acumulada de 13.5 m (Ortega-Guerrero *et al.*, 1999; Auvinet 2009), una tasa de subsidencia de 300 mm/año (Chaussard *et al.*, 2014) y estructuras subterráneas descubiertas (Auvinet, 2009; Hernández-Espriú *et al.*, 2014), la Ciudad de México se ha colocado como uno de los casos más relevantes con subsidencia por extracción de agua subterránea que ha despertado el interés en la investigación del mecanismo de consolidación a nivel mundial.



Figura 1. Consecuencias de subsidencia en el mundo. Tomada de Gambolati y Teatini, 2015. (a) Riva degli Schiavoni en Venice inundada durante marea alta registrada el 12 de February de 2013. (b) Protuberancia de un pozo localizado en la parte oeste de la Ciudad de México donde la subsidencia acumulada es de 8 m entre 1936 y 2013. WP: pozo de bombeo y WC: Cubierta del pozo (Hernández-Espriú *et al.*, 2014). (c) La fisura Rodgers de 13 m de profundidad ocurrió en Septiembre de 1997 en el Condado Maricopa, Arizona (Cortesía de Arizona Geological Survey, fotografía de Joe Cook tomada en Noviembre de 2008). (d) Grieta en calle y daños estructurales a edificios de Xian, China, alrededor de 2014 (cortesía de Shujun Ye, Nanjing University, China).

En el subsuelo de la Ciudad de México se tiene un sistema acuífero compuesto por cuatro unidades hidrogeológicas (Herrera- Revilla y Cortés-Silva, 1989; Vázquez-Sánchez, 1995): 1) Acuitardo Superior constituido por materiales lacustres del Cuaternario, 2) Acuífero Superior en rocas volcánicas y materiales piroclásticos Cuaternarios y Plio-Cuaternarios, que se encuentra en explotación desde 1960, 3) Acuitardo Inferior en depósitos vulcanosedimentarios del Plioceno Inferior, rocas andesíticas del Mioceno y rocas basálticas y riolíticas del Oligoceno, y 4) Acuífero profundo en rocas carbonatadas Cretácicas. El Acuitardo Superior se constituye principalmente de materiales arcillosos altamente compresibles, recientemente descritos como alófanos (Carreón-Freyre *et al.*, 2010; Jaime-P y Méndez-Sánchez, 2010) intercalados con materiales menos compresivos como cenizas volcánicas. En la literatura geotécnica, el acuitardo arcilloso del valle de México se subdivide en cuatro unidades (Santoyo-Villa *et al.*, 2005): 1) una costra superficial de espesor variable y constituida por un relleno artificial heterogéneo, 2) formación arcillosa superior de espesor variable entre 15 y 50 m, que contiene pequeños lentes duros de arena basáltica o pómez, 3) capa dura constituida de limos arenosos, arcilla y algunas gravas cuyo espesor máximo es 5 m, y 4) formación arcillosa inferior con espesor máximo de 15 m al centro del antiguo Lago de Texcoco, se constituye por estratos de arcilla separados por lentes duros de arena basáltica o pómez. Adicionalmente, en los sondeos geotécnicos, por ejemplo el Pc 28 de la Figura 2a, se observa que propiedades como contenido de humedad w , cuya variabilidad implica una relación de vacíos e entre 1 y 10, son altamente variables aún dentro de las subcapas del acuitardo, y por tanto también existe una variación en las propiedades hidráulicas, como en la conductividad hidráulica K que tiene un rango de variación de algunos órdenes de magnitud (Vargas y Ortega-Guerrero, 2004; Figura 2b).

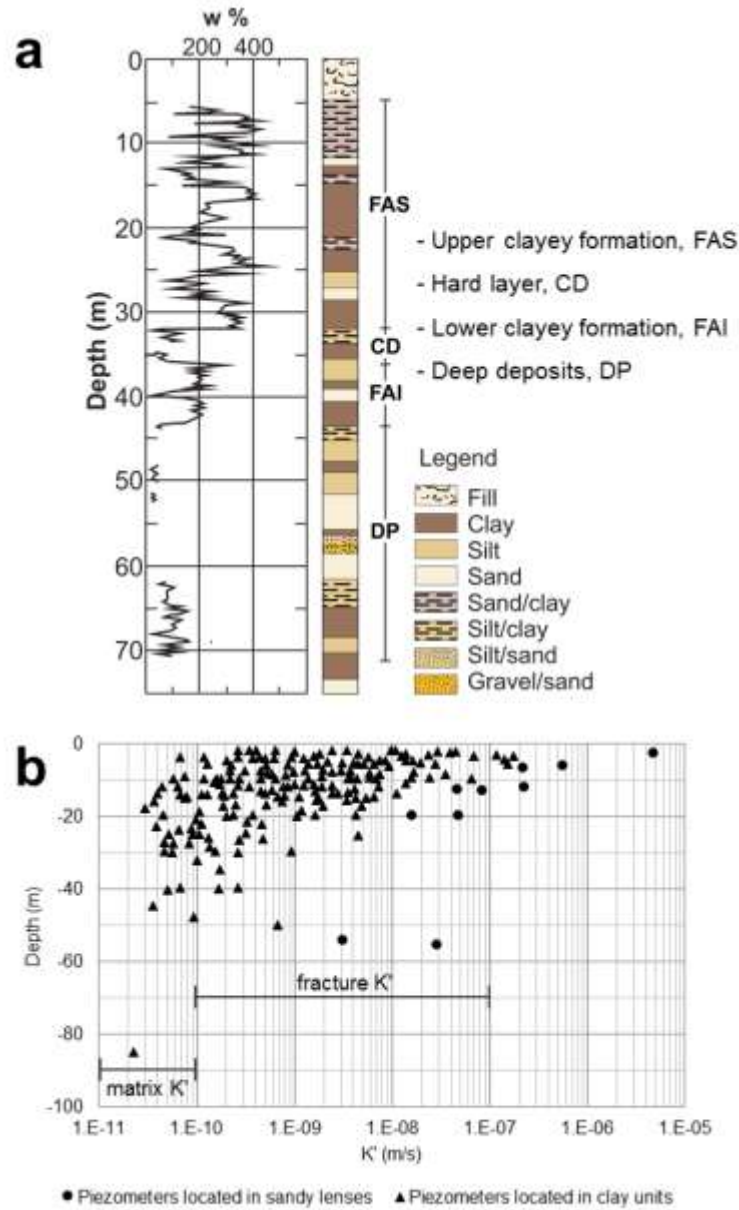


Figura 2. a) Contenido de humedad w a saturación en el sondeo Pc 28 en la Ciudad de México (Marsal y Mazari, 1975). b) Conductividad hidráulica medida en numerosos piezómetros instalados en el acuitardo de la Ciudad de México (Vargas y Ortega-Guerrero, 2004).

Por otro lado, el proceso de flujo y consolidación provoca que las propiedades geomecánicas e hidráulicas como K y S_s disminuyan paulatinamente provocando que la ecuación de flujo

de agua subterránea sea no lineal. Esta característica ha sido implementada en algunos de los modelos de flujo y consolidación, por ejemplo, en Helm (1976) se creó una teoría de flujo y consolidación 1D que considera la dependencia al esfuerzo efectivo de K y S_s . Neuman *et al.* (1982) presentó un modelo matemático y numérico cuasi 3D donde se considera la dependencia al esfuerzo efectivo de K y S_s en el acuitardo. En Rivera *et al.* (1991) se desarrolló un modelo regional cuasi 3D del sistema hidrogeológico de la Ciudad de México con parámetros dependientes del esfuerzo efectivo en el acuitardo, donde se utiliza la subdivisión geotécnica para asignarle propiedades uniformes teniendo en cuenta cierto grado de heterogeneidad. Paralelamente, Rudolph y Frind (1991) desarrollaron un algoritmo de flujo y consolidación 1D enfocado en simular el comportamiento de un acuitardo altamente compresible. Utilizaron como caso de estudio al acuitardo de la Ciudad de México y lo caracterizaron mediante propiedades típicas conocidas. Mostraron que en cada paso de tiempo la difusividad hidráulica (K/S_s) se reduce debido a la consolidación, entonces el flujo subterráneo también se reduce llevando a un comportamiento transitorio más largo y, en consecuencia, a disminuir el asentamiento total en comparación con el predicho por un modelo lineal (con parámetros independientes del esfuerzo efectivo). Posteriormente, el algoritmo de Rudolph y Frind (1991) fue aplicado para simular el asentamiento en el valle de Chalco (Ortega-Guerrero *et al.*, 1999; Ortiz-Zamora y Ortega-Guerrero, 2010).

En los modelos no lineales aplicados al acuitardo de la Ciudad de México citados anteriormente se utilizaron perfiles con distribución constante o distribución suavemente variable de parámetros iniciales (Rudolph y Frind, 1991; Ortega-Guerrero *et al.*, 1999; Ortiz-Zamora y Ortega-Guerrero, 2010) o distribución inicial por capas (Rivera *et al.*, 1991) a pesar de que, como se mencionó anteriormente, los datos de campo indican que parámetros como porosidad y K son altamente variables en dirección vertical (Figura 2).

Recientemente, han aparecido trabajos enfocados en la representación adecuada o realista de parámetros heterogéneos en modelos de flujo de agua subterránea y consolidación. En Frías *et al.* (2004) se investiga el efecto de K aleatoria en yacimientos poroelásticos altamente heterogéneos. Ferronato *et al.* (2006) emplea simulación Monte Carlo para modelar subsidencia regional considerando a la compresibilidad vertical uniaxial de la roca como variable aleatoria. En Wang y Hsu, 2009 y 2013, se desarrollaron modelos poroelásticos estocásticos. Badaoui *et al.* (2007) utilizaron simulación Monte Carlo para modelar consolidación unidimensional con K y módulo elástico aleatorios e independientes. En Huang *et al.* (2009) se utiliza simulación Monte Carlo junto con la teoría de Biot con K y volumen de compresibilidad como parámetros aleatorios y dependientes, para investigar el grado de consolidación del subsuelo en 1D y 2D, pero para ambos parámetros utilizan el mismo coeficiente de variación. En Chong (2017) se realizó una simulación estocástica con K aleatoria en un modelo de consolidación basado en la teoría de Terzaghi. En estos modelos no se toma en cuenta la variación temporal de los parámetros a medida que se realiza la consolidación del subsuelo, es decir, que solamente actualizan los parámetros en posición y no en tiempo. En el caso de los sedimentos altamente compresibles, es importante considerar que la reducción de la relación de vacíos, y por ende de la K y S_s , se realiza de manera progresiva.

Además, la importancia de los modelos de simulación de subsidencia como herramientas de planeación y/o gestión resalta la necesidad de incluir técnicas de calibración incorporando datos de campo disponibles. El método de prueba y error es ampliamente utilizado para calibrar los modelos de subsidencia (Gambolati *et al.*, 1974; Helm, 1976; Larson *et al.*, 2001; Ye *et al.*, 2016) así como los métodos inversos basados en el gradiente de la función objetivo (Hoffman *et al.*, 2003a; Liu y Helm, 2008a, 2008b; Zhang *et al.*, 2014; Zhang y Burbey,

2016; Zhuang *et al.*, 2017). Recientemente, métodos basados en técnicas de asimilación de datos han sido implementados para calibrar modelos de subsidencia (Chang *et al.*, 2009; Baù *et al.*, 2014; Zoccarato *et al.*, 2015; Li *et al.*, 2017; Li y Zhang, 2018). Entre los métodos de asimilación, aquellos que se basan en el filtro de Kalman ensamblado EnKF (Evensen, 1994, 2003) han mostrado resultados satisfactorios cuando se acoplan con modelos de subsidencia. Chang *et al.* (2009) utilizó el EnKF acoplado con MODFLOW-SUB (Hoffman *et al.*, 2003b) para calibrar el coeficiente de almacenamiento específico inelástico (tomado como variable aleatoria espacialmente correlacionada) por medio de subsidencias simuladas con datos InSAR en un ejemplo sintético. También, en un ejemplo sintético Li y Zhang (2018) utilizaron el EnKF para calibrar transmisividad y coeficientes de almacenamiento específico elástico e inelástico, basados en datos de abatimientos y subsidencia.

El EnKF (Evensen, 1994) es un método de asimilación de datos secuencial creado para combinar un modelo no lineal con un conjunto de observaciones disponibles. Para su implementación se requiere primero desarrollar el método Monte Carlo y posteriormente aplicar el algoritmo de EnKF publicado por Evensen en 2003. El EnKF es computacionalmente simple y eficiente, permite condicionar datos en tiempo real y proporciona una estimación rigurosa de la incertidumbre (p. ej. Chen y Zhang, 2006; Hendricks-Franssen y Kinzelbach, 2008; Panzeri *et al.*, 2015).

De lo anterior, se resalta que la simplificación por capas de un acuitardo altamente compresible podría enmascarar el efecto de materiales con diferente compresibilidad, lo que influye en la simulación de la magnitud de asentamiento. Resulta más conveniente abordar la heterogeneidad a escala vertical menor con la mínima simplificación posible, es decir, a una escala de centímetros a metros. Por lo que en este trabajo se analizará el efecto de

heterogeneidad vertical del acuitardo (a escala de centímetros a metros) en la simulación de la magnitud del asentamiento.

En la simulación del asentamiento en acuitardos altamente compresibles, se modelará la no linealidad de los parámetros y su evolución en el tiempo. Éste último aspecto ha sido mencionado y abordado únicamente en el análisis de Rudolph y Frind (1991) para una porción del acuitardo de la Ciudad de México, cuyo caso de estudio será tomado como base y modificado para la actual simulación.

Por otro lado, es preciso señalar que en un modelo se tienen parámetros con incertidumbre en sus magnitudes, generada por el proceso de medición, por el método de interpolación y principalmente por la incertidumbre generada por el desconocimiento acerca de la variabilidad inherente del medio poroso. En otras palabras, por el conocimiento incompleto de la variabilidad natural de las formaciones debido a que típicamente se dispone de muy pocos puntos de muestreo y mediciones. Este conocimiento parcial de la variabilidad de las formaciones conlleva a que las predicciones de los modelos de simulación sean inciertas, y que sea necesario evaluar rigurosamente esa incertidumbre. Es por ello que en esta tesis se adopta un enfoque estocástico que nos permita evaluar rigurosamente la incertidumbre tanto de la simulación del asentamiento como la incertidumbre en la distribución espacial de los parámetros estimados. En un ambiente estocástico, se adoptará el EnKF como método de calibración, el cual no ha sido adaptado aún con fenómenos altamente no lineales.

En resumen, en esta investigación se busca desarrollar una metodología basada en el EnKF como método de calibración de parámetros hidráulicos y geomecánicos a escala de centímetros a metros, así como de la simulación del asentamiento y su incertidumbre asociada, en acuitardos heterogéneos altamente compresibles.

OBJETIVOS Y ALCANCES

Esta investigación tiene como objetivo principal analizar el efecto de heterogeneidad vertical de un acuitardo altamente compresible en la simulación del asentamiento.

Para tal efecto se deberá:

1. Elaborar un modelo sintético que considerará la variabilidad vertical de las principales propiedades geomecánicas e hidráulicas de un medio altamente compresible, de manera que se representen significativamente las condiciones reales. El modelo sintético se basará en las propiedades del acuitardo de la Ciudad de México, por considerarse uno de los ejemplos más significativos de subsidencia en sedimentos altamente compresibles debido a extracción intensiva de agua subterránea.
2. Utilizar el modelo de flujo y consolidación 1D de Neuman *et al.* (1982) modificado por Rudolph y Frind (1991) para la simulación del asentamiento. Esta metodología deberá escribirse en un lenguaje de programación (en este caso Fortran) que resulte eficiente con respecto al tiempo computacional, teniendo en cuenta que será parte de un desarrollo estocástico.
3. Adoptar un punto de vista estocástico por medio de la aplicación del método Monte Carlo, es decir, utilizando n veces el modelo de flujo y consolidación 1D para obtener el asentamiento promedio, los parámetros promedio y su incertidumbre. En este ejercicio, se utilizarán variables aleatorias para representar la heterogeneidad vertical de los parámetros.
4. Implementar una metodología de asimilación de datos, el filtro de Kalman ensamblado EnKF (Evensen, 2003; 2009), que auxiliará en la incorporación de

información previa, en este caso “observaciones de referencia” en el modelo de flujo y consolidación 1D para la calibración de parámetros y de la simulación del asentamiento.

Para definir los alcances de esta investigación se consideran las siguientes restricciones:

1. El asentamiento es provocado únicamente por la despresurización del medio poroso como consecuencia de la extracción intensiva del agua subterránea.
2. Solamente se simula el asentamiento debido a consolidación primaria, es decir, al provocado por la rápida despresurización del medio poroso. No se toma en cuenta el proceso de consolidación secundaria, donde el asentamiento es consecuencia de la reorientación de los granos que constituyen el medio poroso.
3. Se utilizan campos aleatorios gaussianos para la representación de los parámetros debido a que el EnKF (Evensen, 2003; 2009) es una metodología que los considera como base en su desarrollo. Utilizar otra distribución probabilística implica realizar las modificaciones pertinentes en el filtro de Kalman ensamblado, y este aspecto queda fuera de los alcances de esta investigación.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Introducción

En este trabajo se adoptará un punto de vista estocástico con el objetivo de determinar la incertidumbre (varianza) que se presenta en la simulación de subsidencia no lineal 1D de acuitardos altamente compresibles, es decir, tanto en el asentamiento simulado como en los parámetros que intervienen en el proceso. Para tal efecto, se considerará que los parámetros hidráulicos y geomecánicos son variables aleatorias derivadas de un campo aleatorio gaussiano unidimensional.

Posteriormente, se desarrollará un método de asimilación de datos: el filtro de Kalman ensamblado. Este método ha sido adoptado previamente como método de calibración de modelos de subsidencia (Chang *et al.*, 2009; Baù *et al.*, 2014; Zoccarato *et al.*, 2015; Li *et al.*, 2017; Li y Zhang, 2018) que simulan medios de relativamente baja compresibilidad, en este caso, el medio altamente compresible se simulará a escala de centímetros a metros en la dirección vertical.

En este capítulo se abordan los conceptos básicos para el desarrollo de esta investigación. La primera sección resume los conceptos básicos de estadística univariada y bivariada, en la segunda sección se presenta el concepto de campo aleatorio, las metodologías empleadas en esta investigación para su modelación y el método Monte Carlo, y en la tercera sección se abordan los conceptos de asimilación de datos y filtro de Kalman.

CONCEPTOS ESTADÍSTICOS

Para entender los métodos de asimilación de datos, se necesita una revisión de los conceptos básicos de estadística univariada y bivariada. Esta sección se basó principalmente en la revisión presentada por Evensen (2009) y Zhang (2002).

Estadística univariada

En Zhang (2002) se menciona que una variable aleatoria denotada como Z , se define por un conjunto Ω de valores posibles (espacio muestral) y una distribución de probabilidad P sobre ese conjunto. La distribución de probabilidad P se define en una colección de subconjuntos de Ω , denotados por S . De esta manera, el espacio probabilístico se denota como (Ω, S, P) .

Una variable aleatoria continua Z , se asocia con una función de distribución $F(z)$, que describe la probabilidad de que una realización de Z tome un valor menor o igual a z :

$$F(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z') dz' \quad (1)$$

Donde $f(z)$ es la derivada de la función de distribución:

$$f(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z} \quad (2)$$

La función de densidad de probabilidad proporciona la posibilidad de que una variable aleatoria Z tome un valor particular z . Si una distribución de probabilidad tiene densidad $f(z)$, entonces el intervalo infinitesimal $(z, z + dz)$ tiene probabilidad $f(z)dz$.

La función de densidad de probabilidad debe cumplir:

- a) $f(z) \geq 0$, para toda z

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 1$, que es la probabilidad de encontrar Z en el espacio de los números reales \mathbb{R}^1 , es igual a uno.

c) Si se tiene $f(z)$, la probabilidad de que z tome un valor en el intervalo $[z_a, z_b]$ es:

$$\Pr(Z \in [z_a, z_b]) = \int_{z_a}^{z_b} f(z) dz \quad (3)$$

La distribución más utilizada es la gaussiana o normal, que se define por su media y varianza.

La distribución normal tiene forma de campana y representa una familia de distribuciones de la misma forma. La distribución normal estándar es aquella con media cero y varianza uno.

La distribución normal tiene la función de densidad de probabilidad:

$$f(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4)$$

La función de densidad de probabilidad conjunta describe la posibilidad de que ocurran dos eventos juntos. Para las dos variables aleatorias X y Y podemos definir la pdf conjunta $f(x, y)$.

La función de densidad de probabilidad condicional describe la probabilidad de algún evento x , asumiendo el evento y . Se denota por $f(x|y)$ la cual es leída como la función de densidad de probabilidad para X dado Y .

La función de densidad de probabilidad marginal se define como la función de densidad de probabilidad de un evento, ignorando la información de otro evento. Se obtiene integrando la función de densidad de probabilidad conjunta con respecto al evento ignorado. Por ejemplo, la función de probabilidad marginal para X es:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) dy \quad (5)$$

También se tiene que:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \quad (6a)$$

O su equivalente:

$$f(x|y) = f(x|y)f(y) = f(y|x)f(x) \quad (6b)$$

Las variables X y Y son independientes si $f(x|y) = f(x)f(y)$.

Momentos estadísticos

Valor esperado

El **valor esperado** de una variable aleatoria Z con distribución $f(z)$ se define como:

$$\mu = E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dz \quad (7)$$

Representa un promedio esperado si un número infinito de muestras se extraen de la distribución.

Propiedades del valor esperado. De acuerdo a Álvarez-Cáceres (2007) las propiedades del valor esperado, son válidas para variables discretas y continuas.

- 1) El valor esperado de una constante es la misma constante.

$$E(C) = C \quad (8)$$

- 2) Si X y Y son variables aleatorias, el valor esperado de la suma de dos variables aleatorias es igual a la suma de sus valores esperados.

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (9)$$

- 3) El valor esperado del producto de una constante por una variable aleatoria, es igual al producto de la constante por el valor esperado de la variable aleatoria.

$$E(C * X) = C * E(X) \quad (10)$$

- 4) Si X y Y son variables aleatorias independientes, el valor esperado del producto de las variables es igual al producto de los valores esperados.

$$E(X * Y) = E(X) * E(Y) \quad (11)$$

Adicionalmente, se establece que dos variables aleatorias son independientes si los valores de una no están correlacionados con los valores de la otra.

Varianza

Si Z es una variable aleatoria, su **varianza** está definida como:

$$\sigma^2 = E[(Z - E[Z])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (Z - E[Z])^2 f(z) dz = E[Z^2] - E[Z]^2 \quad (12)$$

El valor esperado de la desviación estándar de Z proviene de su media. La varianza es el promedio del cuadrado de la distancia de cada punto con respecto a la media. La raíz cuadrada de la varianza se denomina desviación estándar, y se denota como σ .

Covarianza

Si se tienen dos variables aleatorias X y Y y sus respectivas funciones de densidad de probabilidad $f(x)$ y $f(y)$, de las cuales podemos definir su probabilidad conjunta $f(x, y) = f(x|y) f(y) = f(y|x) f(x)$, su covarianza se define como:

$$E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y]) f(x, y) dx dy$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} x y f(x, y) dx dy - E[X]E[Y] \quad (13)$$

Si X y Y son variables aleatorias independientes, $f(x, y) = f(x) f(y)$ y la covarianza es cero.

En general, la covarianza nos indica cómo se correlacionan las dos variables aleatorias X y Y . En este sentido, un valor de covarianza positivo indica que Y tiende a incrementarse como X se incrementa, mientras que un valor negativo indica que Y tiende a decrecer como X decrece.

Las propiedades de la covarianza de dos variables aleatorias (Zhang, 2002) son:

- 1) La covarianza de la misma variable aleatoria es igual a la varianza de la variable aleatoria.

$$Cov(X, X) = \sigma_x^2 \quad (14)$$

- 2) La covarianza de X y Y es igual a la covarianza de Y y X .

$$Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \quad (15)$$

- 3) La covarianza de una constante que multiplica a una variable aleatoria es igual a la constante por la covarianza de la variable aleatoria. La covarianza de una variable aleatoria más una constante es igual a la covarianza de la variable aleatoria.

$$\text{Cov}(aX, bY + c) = ab \text{Cov}(Y, X) \quad (16)$$

- 4) La covarianza de una variable aleatoria y la suma de dos variables aleatorias, es igual a la suma de las covarianzas de la variable aleatoria con cada una de las variables aleatorias.

$$\text{Cov}(X, Y + Z) = \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Z) \quad (17)$$

Donde a , b y c son constantes.

Estadística bivariada

Distribución conjunta

Según Zhang (2002) la **función de distribución conjunta acumulada** para cualquier par de variables aleatorias X y Y , está dada por:

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (18)$$

Donde $P(X \leq x, Y \leq y)$ representa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor menor que x y que la variable aleatoria Y tome un valor menor que y . La función de distribución conjunta acumulada también es positiva y toma un valor entre 0 y 1.

La función de densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ se define como:

$$p_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (19)$$

Y consecuentemente:

$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{XY}(x', y') dx' dy' \quad (20)$$

Las definiciones anteriores pueden generalizarse para funciones multivariadas.

Distribuciones marginales

En Zhang (2002), se expresa que a través de la función de distribución acumulada $F_X(x)$ de X se puede obtener la función de distribución conjunta $F_{XY}(x, y)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x, Y \leq \infty) = F_{XY}(x, \infty) \quad (21)$$

$F_X(x)$ se denomina la función de distribución conjunta marginal de X .

Y su función de densidad de probabilidad marginal es:

$$p_X(x) = \frac{\partial F_{XY}(x, \infty)}{\partial x} \quad (22)$$

Momentos estadísticos

Valor esperado

En Zhang (2002), se expresa que en general, el **valor esperado** de una función $V = g(X, Y)$ se puede expresar por medio de la función $g(X, Y)$ y la función de densidad de probabilidad conjunta $p_{XY}(x, y)$ de X y Y :

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{XY}(x, y) dx dy \quad (23)$$

De acuerdo con Zhang (2002), las propiedades del valor esperado de dos variables aleatorias, son similares a los definidos en estadística univariada. De esta forma, se tiene:

- 1) El valor esperado de la suma de dos variables aleatorias es igual a la suma de sus valores esperados.

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] \quad (24)$$

- 2) El valor esperado del producto de una variable aleatoria por una constante es igual a la constante por el valor esperado de la variable aleatoria. El valor esperado de una constante es la misma constante.

$$E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c \quad (25)$$

Donde a, b y c son constantes.

Covarianza

La covarianza en el caso bivariado se obtiene de igual manera que en el caso univariado.

Coefficiente de correlación

En Zhang (2002) se define al coeficiente de correlación de dos variables aleatorias como:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (26)$$

El coeficiente de correlación puede tomar valores entre [-1,1]. De esta forma, si el valor es 1, se dice que las variables están perfectamente correlacionadas positivamente; si el valor es

cero, están no correlacionadas; y si el valor es -1, las variables están perfectamente correlacionadas negativamente.

Sin embargo es preciso recordar que la correlación que se mide con la expresión anterior es de carácter lineal. Es decir, que las funciones aleatorias pueden presentar una correlación no lineal o su correlación puede describirse con una función no lineal, por ejemplo una función polinomial de orden mayor a dos, seno, logaritmo, etc.

CAMPOS ALEATORIOS

En Zhang (2002) se define a una función aleatoria como una colección indexada o conjunto indexado de variables aleatorias. Precisa que una función aleatoria puede estar indexada con respecto a las coordenadas espaciales o al tiempo. En el primer caso, la variable aleatoria se denomina *función aleatoria espacial*, y en el segundo caso, cuando el índice es el tiempo, se denomina *proceso estocástico*. Un proceso estocástico se refiere a una variable aleatoria indexada en espacio, en tiempo o espacio-tiempo, asimismo, cuando se considera un espacio multidimensional se refiere a un *campo aleatorio*. En esta investigación se considera que un proceso estocástico es equivalente a un campo aleatorio.

Zhang (2002) menciona que es posible obtener realizaciones de un campo aleatorio a partir de propiedades estadísticas conocidas como media, varianza y covarianza. Algunas de las técnicas disponibles para generar campos aleatorios son: el método de bandas rotantes, métodos espectrales, descomposición matricial y simulación secuencial gaussiana. Adicionalmente, se utiliza el método de cópulas en la construcción de campos aleatorios multivariados.

Simulación Secuencial Gaussiana

Simulación Secuencial Gaussiana es uno de los métodos más utilizados para la generación de campos aleatorios, ya sean continuos o categóricos, actualmente se encuentra disponible en programas especializados en geoestadística como GSLIB (Deutsch y Journel, 1998) y en los paquetes RandomFields (Schlather *et al.*, 2016) y gstat (Pebesma, 2004) desarrollados en R (R Core Team, 2015), utilizados en esta investigación.

En Zhang (2002) se describe la técnica de Simulación Secuencial Gaussiana, se parte de la definición de función de densidad condicional (ecuación 6), donde se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} p_U(u_1, \dots, u_n) &= p_U(u_1, \dots, u_{n-1})p_u(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) \\ &= p_U(u_1)p_U(u_2|u_1) \dots p_U(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) \end{aligned} \quad (27)$$

De lo anterior se deduce que, la función de densidad de probabilidad n-variada $p_U(u_1, \dots, u_n)$ puede expresarse como el producto de $n - 1$ funciones de densidad condicional univariada y la función de densidad no condicionada de u_1 .

Cuando se desea obtener realizaciones condicionadas a partir de observaciones $\{u^m\}$, la expresión anterior se modifica como:

$$p_U(u_1, \dots, u_n|u^m) = p_U(u_1|\{u^m\})p_U(u_2|u_1; \{u^m\}) \dots p_U(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}; \{u^m\}) \quad (28)$$

En caso de que u_i dependa de la posición x_i en el espacio continuo, $u(x)$ se convierte en un campo aleatorio.

La expresión (27) proporciona un camino sencillo para generar un campo aleatorio de alguna distribución, usualmente las funciones de densidad condicional son difíciles de obtener excepto para algunas distribuciones especiales, como la gaussiana.

Para producir una realización se sigue el procedimiento:

- 1) Generar un valor en la posición x_1 , de acuerdo a la función no condicional $p_U(u_1)$ o condicional $p_U(u_1|\{u^m\})$.
- 2) En el siguiente punto x_2 , encontrar la densidad condicionada dados los puntos de datos ya generados y, para una realización condicionada, las medidas.
- 3) Extraer un valor de la distribución condicional.
- 4) Repetir los pasos 2 y 3 hasta generar el campo completo.

El procedimiento anterior se aplica para generar otras realizaciones.

Cóputas

El término cópula se le atribuye a Sklar (1959), se utiliza para referirse a una función que relaciona a una función de distribución multivariada a su marginal univariada con distribución uniforme. Durante y Sempi (2010) precisan la definición formal como:

Para cada $d \geq 2$, una cópula d -dimensional (d -cópula) es una función de distribución d -variada en I^d , cuyas marginales univariadas están uniformemente distribuidas en I .

Cada cópula puede estar asociada con una variable aleatoria $U = (u_1, u_2, \dots, u_d)$ tal que $U_i \sim \mathcal{U}(I)$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ y $U \sim C$. De manera inversa, alguna variable aleatoria cuyos componentes están uniformemente distribuidos en I , es distribuida de acuerdo a alguna cópula.

Por otro lado, una función $C: I^d \rightarrow I$ es una cópula si, y sólo si, mantiene las siguientes propiedades:

1. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $C(u) = u_j$ cuando todos los componentes de u son iguales a 1, a excepción del j -ésimo uno que es igual a $u_j \in I$;
2. C es isotónica, por ejemplo $C(u) \leq C(v)$ para todo $u, v \in I^d, u \leq v$;
3. C es d -creciente.

A través de cópulas se puede especificar dependencia entre variables aleatorias uniformes y transformarlas a una distribución marginal (Díaz-Viera y Casar-González, 2005; Durante y Sempi, 2010).

Existen diferentes familias de cópulas agrupadas de acuerdo a su interpretabilidad, flexibilidad y amplio rango de dependencia, y facilidad para manejarla. La interpretabilidad se refiere a que una familia debe tener cierta interpretación probabilística, sugiriendo situaciones naturales donde puede ser considerada. Con flexibilidad y amplio rango de dependencia, indica que los miembros de una familia deben describir diferentes tipos de dependencia; incluyendo una variedad de dependencias de cola y asimetrías. La facilidad de manejo, se refiere a que una familia debe ser expresada en forma cerrada, o al menos, debe ser fácilmente simulada por medio de un algoritmo conocido. Entre las familias más conocidas se encuentran la elíptica, que incluye a las cópulas gaussianas y t-student, arquimedeanas y EFGM (Eyraud-Farlie-Gumbel-Morgenstern).

En esta investigación, se aborda la simulación de un campo aleatorio con cópulas gaussianas.

La forma general de la cópula gaussiana es:

$$C_{\theta}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(\frac{s^2 - 2\theta st + t^2}{2(1-\theta^2)} \right) ds dt \quad (29)$$

Donde $\theta \in [-1, 1]$ y ϕ^{-1} denota la inversa de la distribución gaussiana univariada.

Actualmente, se pueden simular campos aleatorios multivariados aplicando cópulas a través de programas especializados como los paquetes Copula (Hofert *et al.*, 2014) y VineCopula (Schepsmeier *et al.*, 2016) desarrollados en R (R Core Team, 2018).

Método Monte Carlo

Para el desarrollo del Método Monte Carlo primero es necesario generar múltiples realizaciones de un campo aleatorio con distribución de probabilidad conocida. Una realización es determinista y se considera una representación completa de las propiedades de la formación, pero es seleccionada por medio de un procedimiento probabilístico y es solo una posible representación de la formación desconocida. Con cada realización se resuelve la ecuación gobernante determinista utilizando un método numérico. Finalmente se promedian las soluciones de múltiples realizaciones para obtener los momentos estadísticos o distribuciones de variables dependientes (Zhang, 2002).

ASIMILACIÓN DE DATOS Y FILTRO DE KALMAN

El término ***asimilación de datos*** se refiere a una técnica que combina las observaciones en un modelo que obedece consistentemente a las leyes físicas y su evolución en el tiempo (Bouttier y Courtier, 1999).

Según Bouttier y Courtier (1999), existen dos tipos de asimilación, ***secuencial*** que considera las observaciones realizadas en el pasado hasta el periodo de análisis (sistemas de asimilación reales en el tiempo); y asimilación ***no secuencial*** o retrospectiva, en la que pueden usarse observaciones futuras, para un instante en un ejercicio de reanálisis. Considerando el tiempo,

el proceso de asimilación puede ser intermitente o continuo. En un *método intermitente*, las observaciones pueden ser procesadas en pequeños conjuntos, mientras que en un *método continuo*, se consideran conjuntos de observaciones en un periodo largo y la corrección para el estado analizado es suave en el tiempo.

El *filtro de Kalman* (1960) es un conjunto de ecuaciones que dan una solución recursiva óptima a un problema lineal mediante el método de mínimos cuadrados. Se considera un estimador lineal, insesgado y óptimo del estado de un sistema lineal dinámico. Este sistema dinámico se puede describir por medio de un modelo estocástico lineal, en el que toda la información tiene distribución normal o gaussiana con media cero y varianza uno (Solera-Ramírez, 2003).

Para entender la dinámica del filtro de Kalman (1960) es conveniente desglosar las ideas anteriores. El filtro de Kalman (1960) es un estimador lineal insesgado y óptimo debido a que el conjunto de ecuaciones que lo constituyen son una combinación lineal de una variable aleatoria con su error de estimación y una medida de la variable aleatoria con su error de estimación, donde la distribución de los errores se define con media cero y varianza conocida. Además, el filtro de Kalman (1960) obedece una formulación bayesiana debido a que utiliza la probabilidad condicional para establecer la existencia de medidas de una variable aleatoria siempre que ésta ocurra. Es importante señalar que tanto la variable aleatoria en cuestión como su error deben poseer distribución gaussiana, ya que de este modo se garantiza la condición de varianza mínima.

El filtro de Kalman (1960) realiza una estimación en el tiempo t_{k-1} que se calcula de acuerdo a la información disponible en un tiempo previo t_k , y actualiza los datos con la información adicional disponible en el tiempo t_{k-1} . En este proceso, combina todas las observaciones

disponibles y la información del comportamiento previo del sistema dinámico para generar la estimación del estado, por lo que el error se minimiza estadísticamente. Se considera recursivo porque recalcula la solución cada vez que se incorpora una nueva observación o medida (Solera-Ramírez, 2003).

Filtro de Kalman

Para la formulación del filtro de Kalman (1960), se considera una malla de n elementos ψ que pertenecen a un campo aleatorio Ψ con distribución gaussiana, para los que puede determinarse una predicción de ψ que será igual a un elemento ψ más su error de predicción q . Esta predicción, puede lograrse a partir de la asimilación de un conjunto de m medidas d que corresponden a un elemento ψ más su error de medición ϵ , y puede expresarse matemáticamente como:

$$\psi^f(t_k) = \psi^t(t_{k-1}) + q^f(t_{k-1}) \quad (30)$$

$$d(t_k) = \psi^t(t_k) + \epsilon(t_k) \quad (31)$$

Donde:

$\psi^f(t_k)$ es el vector predicción del estado de tamaño $[nx1]$

$\psi^t(t_{k-1})$ es el vector que contiene al estado verdadero en el tiempo $k-1$, de tamaño $[nx1]$

$q^f(t_{k-1})$ es el vector del error de predicción del estado en el tiempo $k-1$, de tamaño $[nx1]$

$d(t_k)$ es el vector de observaciones o medidas en el tiempo k , de tamaño $[mx1]$

$\psi^t(t_k)$ es el vector de observación del estado verdadero en el tiempo k , de tamaño $[mx1]$

$\epsilon(t_k)$ es el vector del error asociado a las medidas en el tiempo k , de tamaño $[1 \times m]$

Como consecuencia de la distribución gaussiana del campo aleatorio Ψ , debe considerarse que los valores esperados de los errores son nulos ya que de esta manera se garantiza la condición de predictor lineal insesgado. Por otro lado, también se considera que la correlación entre los errores de predicción y medida (correlación cruzada) es nula, o bien que son eventos independientes. Asimismo, se establece que las covarianzas de los errores son conocidas o pueden determinarse. Es decir:

$$\overline{q^f} = 0 \quad (32)$$

$$\bar{\epsilon} = 0 \quad (33)$$

$$\overline{q^f \epsilon^T} = 0 \quad (34)$$

$$\overline{q^f (q^f)^T} = C_{\psi\psi}^f(t_{k-1}) \quad (35)$$

$$\overline{\epsilon (\epsilon)^T} = C_{\epsilon\epsilon}(t_{k-1}) \quad (36)$$

Donde:

$\overline{q^f}$ es el vector del valor esperado del error asociado a la predicción del estado, de tamaño $[n \times 1]$

$\bar{\epsilon}$ es el vector del valor esperado del error asociado a medidas, de tamaño $[m \times 1]$

$\overline{q^f \epsilon^T}$ es la matriz del valor esperado de la covarianza cruzada entre los errores del modelo y medidas, de tamaño $[n \times m]$

$C_{\psi\psi}^f(t_{k-1})$ es la matriz de covarianza del error de predicción del estado, de tamaño [nxn]

$C_{\epsilon\epsilon}(t_{k-1})$ es la matriz de covarianza del error de medición, de tamaño [mxm]

A partir del modelo definido y del conjunto de ecuaciones (32-33) que representan las condiciones iniciales se determina la ganancia de Kalman, que es una expresión que garantiza que la varianza del error de la nueva estimación sea mínima y que surge como un procedimiento estadístico o de minimización de una función variacional (Evensen, 2009). Posteriormente se determina el estado analizado ya que resulta de una combinación lineal de su primer aproximación ψ^f más las funciones de influencia $K(d-M\psi^f)$ para cada una de las medidas (Evensen, 2009). Finalmente, se obtiene la covarianza del estado analizado.

$$K(t_k) = C_{\psi\psi}^f(t_{k-1})M^T \left(MC_{\psi\psi}^f(t_{k-1})M^T + C_{\epsilon\epsilon}(t_{k-1}) \right)^{-1} \quad (37)$$

$$\psi_k^a(t_k) = \psi_a^f(t_{k-1}) + K(t_k)(d - M\psi_a^f(t_{k-1})) \quad (38)$$

$$C_{\psi\psi}^a(t_k) = (I - K(t_k)M)C_{\psi\psi}^f(t_{k-1}) \quad (39)$$

Donde M es una matriz que contiene las posiciones de las medidas con respecto a la malla definida y cuyo tamaño es [nxn].

La secuencia de ecuaciones (30, 31 y 36-39) es conocida como Filtro de Kalman (1960) y puede ser utilizada en la predicción de un fenómeno de comportamiento lineal con distribución de probabilidad gaussiana.

Filtro de Kalman extendido EKF

Para el caso no lineal se propuso el *Filtro de Kalman Extendido EFK* (Evensen, 1992), el cual utiliza una función que transforma la trayectoria no lineal a lineal. Según Grewal y Andrews (2001), se utiliza una trayectoria nominal, es decir, una trayectoria definida a partir del valor esperado de las variables aleatorias. Por ejemplo, en la secuencia $\psi(t_k)^{nom}$ obtenida como una solución de la ecuación:

$$\psi_k^{nom} = f(\psi^{nom}(t_{k-1}), k - 1) \quad (40)$$

Con un proceso de ruido cero y con media $\psi(t_0)^{nom}$ como condición inicial que sería una trayectoria nominal para un sistema discreto en el tiempo.

Si la variable f es continua, el vector estado $\psi(t_k)$ en algún instante de la trayectoria puede variar suavemente con pequeñas perturbaciones del vector estado $\psi(t_{k-1})$ en un instante previo. Estas perturbaciones son consecuencia de valores nominales (p. ej. la media) de las variables aleatorias implicadas. Si para linealizar se utiliza la derivada de la trayectoria y estas perturbaciones son suficientemente pequeñas en relación a los coeficientes de alto orden en la expansión, entonces se puede obtener una buena aproximación ignorando estos términos.

Si las perturbaciones de la trayectoria nominal se denotan con la letra δ , se tiene:

$$\delta\psi(t_k) = \psi(t_k) - \psi^{nom}(t_k) \quad (41)$$

$$\delta d(t_k) = d(t_k) - h(\psi^{nom}(t_k), k) \quad (42)$$

Llevando las ecuaciones anteriores a una serie de Taylor, se obtiene:

$$\psi(t_k) = f(\psi(t_{k-1}), k - 1) \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \psi(t_k) &= f(\psi^{nom}(t_k), k - 1) + \left. \frac{\partial(\psi, k-1)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\psi^{nom}(t_{k-1})} \delta\psi(t_{k-1}) + \\ &+ \text{términos de alto orden} \end{aligned} \quad (44)$$

O bien:

$$\delta\psi(t_k) = \psi(t_k) - \psi^{nom}(t_k) \quad (45)$$

$$\delta\psi(t_k) = \left. \frac{\partial(\psi, k-1)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\psi^{nom}(t_{k-1})} \delta\psi(t_{k-1}) + \text{términos de alto orden} \quad (46)$$

Si los términos de alto orden en δ se desprecian, entonces la ecuación (41) se escribe:

$$\delta\psi(t_k) = F_{k-1} \delta\psi_{k-1} + q(t_{k-1}) \quad (47)$$

Donde los términos de los coeficientes de aproximación de primer orden son dados por la matriz F de orden $n \times n$:

$$F(t_k) = \left. \frac{\partial(\psi, k-1)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\psi^{nom}(t_{k-1})} \quad (48)$$

Una vez que se linealiza la trayectoria, se define el algoritmo del Filtro de Kalman Extendido (Evensen, 1992) para una malla de n elementos donde existen m medidas:

$$\psi_k(t_k) = f(\psi^f(t_{k-1})) + q(t_{k-1}) \quad (49)$$

$$d(t_k) = \psi^t(t_k) + \epsilon(t_k) \quad (50)$$

Donde:

ψ es el vector estado de tamaño $[n \times 1]$

f es un operador no lineal

q es el vector de errores del modelo de tamaño $[n \times 1]$

d es el vector de medidas del estado ψ , de tamaño $[m \times 1]$

ε es el vector de errores de medida de tamaño $[m \times 1]$

t_k representa el paso de tiempo k

Al igual que en el filtro de Kalman (1960), se considera que la correlación entre errores del modelo y de medida es nula, que el valor esperado de los errores mencionados es nulo y se definen las condiciones iniciales:

$$C_{qq}(t_{k-1}) = \overline{q(t_{k-1})q(t_{k-1})^T} \quad (51)$$

$$C_{\psi\psi}^f(t_k) = F(t_{k-1})C_{\psi\psi}^f(t_{k-1})F^T(t_{k-1}) + C_{qq}(t_{k-1}) \quad (52)$$

Donde:

C_{qq} es la matriz inicial de covarianza de errores del modelo de tamaño $[n \times 1]$

F es la ecuación de aproximación lineal y se define como:

$$F(t_{k-1}) \approx \left. \frac{\partial f(\psi)}{\partial \psi} \right|_{\psi=\psi(t_k)} \quad (53)$$

Las cuales se utilizan en la determinación de la ganancia de Kalman:

$$K(t_k) = C_{\psi\psi}^f(t_{k-1})M^T \left(MC_{\psi\psi}^f(t_{k-1})M^T - C_{\varepsilon\varepsilon}(t_{k-1}) \right)^{-1} \quad (54)$$

Con la que se determina el estado analizado por medio de la ecuación:

$$\psi^a(t_k) = \psi^f(t_{k-1}) + K(t_k) \left(d(t_k) - M\psi^f(t_{k-1}) \right) \quad (55)$$

Para el cual, su covarianza actualizada se define como:

$$C_{\psi\psi}^a(t_k) = (I - K(t_k)M)C_{\psi\psi}^f(t_{k-1}) \quad (56)$$

Donde M es una matriz que contiene las posiciones de las medidas cuyo tamaño es $[n \times n]$.

El conjunto de ecuaciones (51-56) constituyen el filtro de Kalman Extendido. La ventaja del filtro de Kalman Extendido es que incluye las perturbaciones de los errores de estimación del estado, el cual es generalmente más pequeño que las perturbaciones de alguna trayectoria nominal predefinida y por lo tanto está mejor condicionada para la aproximación lineal. La mayor desventaja del filtro de Kalman Extendido es que añade tiempo computacional como consecuencia de la linealización de una trayectoria impredecible, para la cual la ganancia de Kalman no puede ser calculada.

Filtro de Kalman ensamblado EnKF

El *filtro de Kalman ensamblado* (Evensen, 1994) surge como una alternativa que soluciona la problemática derivada de trabajar el filtro de Kalman Extendido (Evensen, 1992) en una dinámica de asimilación no lineal. En el filtro de Kalman Extendido (Evensen, 1992), al linealizar la ecuación y cortar la serie de Taylor generada, se discriminan los términos de orden superior desconociendo su relevancia, además, al procesar los cálculos e integrar la covarianza del error se necesita una gran capacidad de almacenamiento computacional.

Evensen (1994) propone que se utilice el método Monte Carlo para resolver la ecuación de evolución en el tiempo de la función de densidad de probabilidad del estado, en lugar de utilizar la matriz de covarianza del error. Para ello parte de la estadística del error, ya que las

matrices de covarianza para el estado predicho y analizado se estiman a partir del estado verdadero, además de que el ensamble promedio converge al valor esperado del ensamble siempre y cuando el tamaño del ensamble sea infinito. Entonces, si el estado verdadero es desconocido, las matrices de covarianza se definen a partir del ensamble promedio y, por tanto, existirá un número finito de ensambles con una covarianza del error igual a $C_{\psi\psi}^a$. Además, la media del ensamble es la mejor estimación y la precisión del ensamble alrededor de la media, es una definición natural del error en la media del ensamble.

Evensen (1994) plantea que en vez de expresar una matriz de covarianza completa, se puede representar la misma estadística del error utilizando un ensamble apropiado del estado. Es decir, que un tamaño del ensamble infinito puede proporcionar una aproximación para la covarianza del error. De esta forma, cuando el tamaño del ensamble tiende a N , los errores en el muestreo Monte Carlo decrecen proporcionalmente a $1/\sqrt{N}$.

Si se considera que se tienen N estados en el ensamble cada uno de dimensión n , estos estados pueden representarse como un solo punto en un espacio de n dimensiones. Entonces, todos los miembros del ensamble constituyen una nube de puntos en el espacio, y cada nube de puntos, cuando N tiende a infinito, puede describirse como una función de densidad de probabilidad:

$$f(\psi) = \frac{dN}{N} \tag{57}$$

Donde dN es el número de puntos en un pequeño volumen y N es el número total de puntos.

La ecuación de estado para un fenómeno con dinámica no lineal es:

$$d\psi = G(\psi)dt + h(\psi)dq \tag{58}$$

Donde, el término $h(\psi)dq$ representa los errores del modelo, el término dq representa un vector de movimiento Browniano con covarianza $C_{qq}dt$ y G es el operador no lineal del modelo.

En cuanto a la derivación de las ecuaciones, Burges *et al.* (1998) y Houtekamer y Mitchel (1998) consideran esencial que las observaciones se traten como variables aleatorias y tengan una distribución con media igual a las primeras observaciones supuestas y covarianza $C_{\epsilon\epsilon}$. De esta forma, se define un ensamble de observaciones:

$$d_j = d + \epsilon_j \quad (59)$$

Donde j es un contador desde 1 hasta el número de miembros del ensamble n . Posteriormente, se define el ensamble de la matriz de covarianza de errores de medida:

$$C_{\epsilon\epsilon}^e = \overline{\epsilon\epsilon^T} \quad (60)$$

La que en el límite de un tamaño del ensamble infinito converge hacia la matriz de covarianza del error $C_{\epsilon\epsilon}$ utilizada en el filtro de Kalman estándar.

El análisis en el filtro de Kalman ensamblado consiste en actualizar cada estado de los miembros del ensamble mediante:

$$\psi_j^a = \psi_j^f + (C_{\psi\psi}^e)^f M^T \left(M(C_{\psi\psi}^e)^f M^T + C_{\epsilon\epsilon}^e \right)^{-1} (d_j - M\psi_j^f) \quad (61)$$

La ecuación anterior implica:

$$\overline{\psi^a} = \overline{\psi^f} + (C_{\psi\psi}^e)^f M^T \left(M(C_{\psi\psi}^e)^f M^T + C_{\epsilon\epsilon}^e \right)^{-1} (\bar{d} - M\overline{\psi^f}) \quad (62)$$

Donde $d = \bar{d}$ es el primer vector de medidas. Además, la relación entre la media del ensamble predicho y analizado es idéntica a la relación entre el estado predicho y analizado

en el filtro de Kalman estándar. Además, si se considera a la media $\overline{\psi^a}$ como el mejor estimador, entonces es arbitrario elegir actualizar la media utilizando las primeras observaciones supuestas d , o actualizar cada miembro del ensamble utilizando las observaciones perturbadas d_j . Lo anterior, muestra que al actualizar cada miembro del ensamble utilizando las observaciones perturbadas se crea un nuevo ensamble con la estadística del error correcta para el análisis. El ensamble actualizado puede integrarse en la predicción hasta la siguiente observación en el tiempo.

Para derivar la covarianza del error de estimación analizado se recurre al filtro de Kalman estándar.

$$\psi_j^a - \overline{\psi^a} = (I - K_e M) (\psi_j^f - \overline{\psi^f}) + K_e (d_j - \overline{d}) \quad (63)$$

Y utilizando la definición de la ganancia de Kalman:

$$K_e = (C_{\psi\psi}^e)^f M^T (M (C_{\psi\psi}^e)^f M^T + C_{\epsilon\epsilon}^e)^{-1} \quad (64)$$

Y utilizando las definiciones anteriores, se tiene:

$$\begin{aligned} (C_{\psi\psi}^e)^a &= \overline{(\psi^a - \overline{\psi^a})(\psi^a - \overline{\psi^a})^T} \\ (C_{\psi\psi}^e)^a &= \overline{\left((I - K_e M) (\psi_j^f - \overline{\psi^f}) + K_e (d_j - \overline{d}) \right) \left((I - K_e M) (\psi_j^f - \overline{\psi^f}) + K_e (d_j - \overline{d}) \right)^T} \\ &= (I - K_e M) \overline{(\psi^f - \overline{\psi^f})(\psi^f - \overline{\psi^f})^T} (I - K_e M)^T + K_e \overline{(d - \overline{d})(d - \overline{d})^T} K_e^T \\ &= (I - K_e M) (C_{\psi\psi}^e)^f \end{aligned} \quad (65)$$

Lo anterior implica que al límite de un tamaño del ensamble infinito se tendrá exactamente la misma solución en los cálculos del análisis para el filtro de Kalman estándar y el filtro de Kalman ensamblado. Esta derivación muestra que las observaciones d pueden tratarse como variables aleatorias para tener la medida de la matriz de covarianza del error $C_{\epsilon\epsilon}^e$ en la expresión.

Por último, se precisa que el EnFK no resuelve la ecuación de actualización bayesiana para funciones de densidad de probabilidad no gaussianas. Tampoco es un remuestreo puro de una distribución gaussiana posterior. Solamente la actualización es lineal y es adicionada al ensamble previo no gaussiano.

De esta forma, en el filtro de Kalman ensamblado la matriz de covarianza de errores del ensamble se obtiene por:

$$C_{qq}^e = \overline{dq(t_k)dq(t_k)^T} \quad (66)$$

La media del ensamble se calcula como:

$$\overline{\psi(t_{k+1})} = \overline{G(\psi(t_k))} + n.1 \quad (67)$$

Donde $n.1$ representa los términos que pueden surgir si G es no lineal.

Una de las ventajas del filtro de Kalman ensamblado es que modela la ecuación exacta para la media y no se usan suposiciones cerradas ya que cada miembro del ensamble se integra por el modelo no lineal. La única aproximación se limita al tamaño del ensamble.

Además, la covarianza del ensamble se determina de acuerdo con la expresión:

$$C_{\psi\psi}^e(t_{k+1}) = G'(C_{\psi\psi}^e(t_k))G'^T + C_{qq}^e + n.1 \quad (68)$$

Donde G' es el operador lineal tangente evaluado en ψ en el tiempo correspondiente, y el término $n. 1$ puede aparecer si G es no lineal.

Evensen (1991) reitera que para un modelo con dinámica lineal la $C_{\psi\psi}^e$ converge a $C_{\psi\psi}$ para un tamaño del ensamble infinito, e independientemente del modelo, $C_{\epsilon\epsilon}^e$ converge a $C_{\epsilon\epsilon}$ y C_{qq}^e converge a C_{qq} . Así, en este límite el FK y EnFK son equivalentes.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

Introducción

Para la simulación del flujo y consolidación 1D se realizó un programa en Fortran 95 que básicamente cuenta con nueve subrutinas:

- 1) Lectura de datos
- 2) Asigna condiciones iniciales y de frontera
- 3) Define el paso de tiempo Δt
- 4) Resuelve el flujo 1D en el acuitardo
- 5) Resuelve los parámetros dependientes del esfuerzo efectivo
- 6) Actualiza el espesor del acuitardo y deforma la malla vertical
- 7) Actualiza parámetros
- 8) Exporta los resultados

Posteriormente, este programa fue modificado para aplicar el método Monte Carlo mediante un ciclo “for”. En este caso la simulación Monte Carlo consiste en resolver n veces las ecuaciones del algoritmo de flujo y consolidación con perfiles heterogéneos de los parámetros, con la finalidad de obtener la respuesta promedio de los parámetros y el asentamiento, así como la incertidumbre (representada por la varianza) asociada a cada uno. Para simular la heterogeneidad de los parámetros se construyeron varias distribuciones verticales diferentes, denominadas realizaciones, a partir de un campo aleatorio gaussiano de media cero y varianza uno, que fueron reescaladas al valor medio de los parámetros

reportados en la literatura. Estas simulaciones sirvieron como datos iniciales en la simulación Monte Carlo.

Nuevamente, se modificó el programa en Fortran 95 para incorporar la subrutina que simula el algoritmo del filtro de Kalman ensamblado (Evensen, 2003). Esta subrutina es aplicable solamente cuando aparece un nuevo conjunto de medidas u observaciones, es decir, que se implementó mediante un ciclo “if”.

La estructura final del programa que simula el flujo y consolidación 1D en un entorno estocástico, y que calibra el asentamiento por medio del EnKF se muestra en la Figura 3.

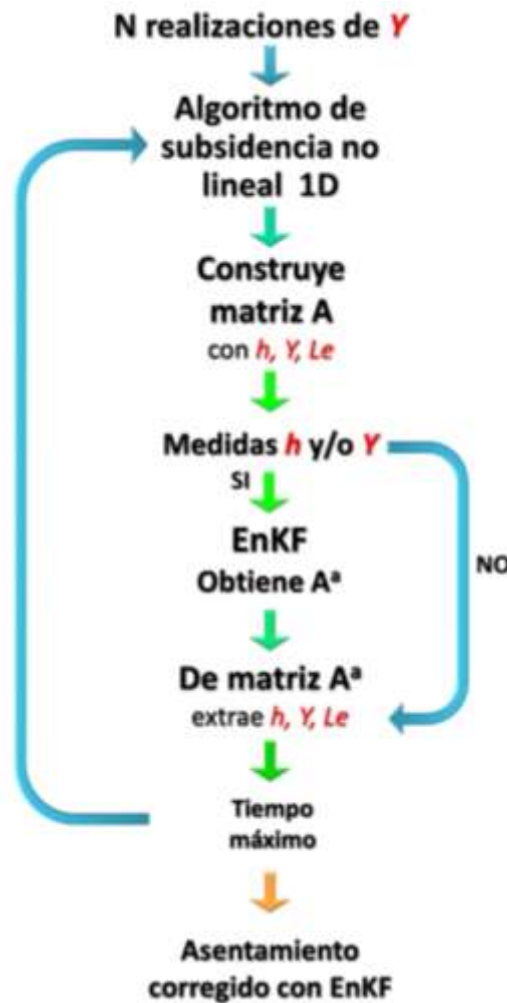


Figura 3. Estructura del programa realizado en Fortran 95.

Algoritmo de subsidencia no lineal

Para simular el flujo subterráneo y la subsidencia no lineal unidimensional se utilizó el algoritmo de Neuman *et al.* (1982), modificado por Rudolph y Frind (1991). En este algoritmo se conceptualiza un sistema hidrogeológico acuífero-acuitardo-acuífero, donde solamente se considera la consolidación del acuitardo. Por simplicidad, el sistema es desacoplado por lo que el efecto de los acuíferos es modelado como fronteras tipo Dirichlet, imponiendo valores de carga hidráulica. En el algoritmo, la ecuación de flujo 1D en el acuitardo está dada por:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(K(e) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s(e, \sigma_e) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (69)$$

sujeta a las condiciones de frontera:

$$h(z, 0) = h_0 \quad (70)$$

$$h(0, t) = h_1(t) \quad (71)$$

$$h(b, t) = h_2(t) \quad (72)$$

donde h es carga hidráulica (m), K es conductividad hidráulica (m/s), S_s es almacenamiento específico (1/m), b es espesor (m) y $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son carga hidráulica en el acuífero inferior y superior, respectivamente (ver el apartado Notación). Se considera que la extensión lateral del acuitardo es lo suficientemente grande para que la representación 1D sea válida.

En la ecuación (69) se observa que los parámetros K y S_s son funciones de la relación de vacíos e y el esfuerzo efectivo σ_e . Además, en un acuitardo heterogéneo se considera que K y S_s son funciones de la coordenada z . El algoritmo adopta la teoría de consolidación unidimensional de Terzaghi (Terzaghi, 1925). Asumiendo que el esfuerzo total es constante

y despreciando los cambios en z durante el proceso de consolidación, se obtiene la siguiente relación:

$$\gamma dh = - d\sigma_e \quad (73)$$

donde γ es el peso específico del agua (kN/m^3). Los cambios en el esfuerzo efectivo σ_e pueden llevar a cambios en la relación de vacíos e . La relación entre un incremento en el esfuerzo efectivo $d\sigma_e$ y el cambio resultante en la relación de vacíos $de(\sigma_e)$ en el rango de esfuerzos altamente compresibles (el esfuerzo efectivo es mayor al esfuerzo de preconsolidación) se expresa como (Rudolph y Frind, 1991):

$$de(\sigma_e) = C_c \log\left(\frac{\sigma_{e0} + d\sigma_e}{\sigma_{e0}}\right) \quad (74)$$

donde C_c es el índice de compresión (la pendiente negativa de la curva e versus $\log \sigma_e$) y σ_{e0} es el esfuerzo efectivo inicial (kN/m^2 , Figura 4).

El algoritmo emplea una expresión empírica que relaciona la conductividad hidráulica $dK(e)$ a los cambios en la relación de vacíos e (Rudolph y Frind, 1991):

$$dK(e) = K_0(e)(10^{de/m} - 1) \quad (75)$$

donde $K_0(e)$ es la conductividad hidráulica al comienzo del incremento de carga y m es la pendiente de la relación lineal empírica entre e y $\log K$ (Lambe y Whitman, 1969; Figura 5).

El almacenamiento específico S_s como función de esfuerzo efectivo y relación de vacíos se calcula por:

$$S_s(e, \sigma_e) = \frac{\rho g C_c \log\left(\frac{\sigma_{e0} + d\sigma_e}{\sigma_{e0}}\right)}{d\sigma_e(1.0 + e_0)} \quad (76)$$

Donde ρ es densidad del agua (kg/m^3) y g es aceleración de la gravedad (m/s^2).

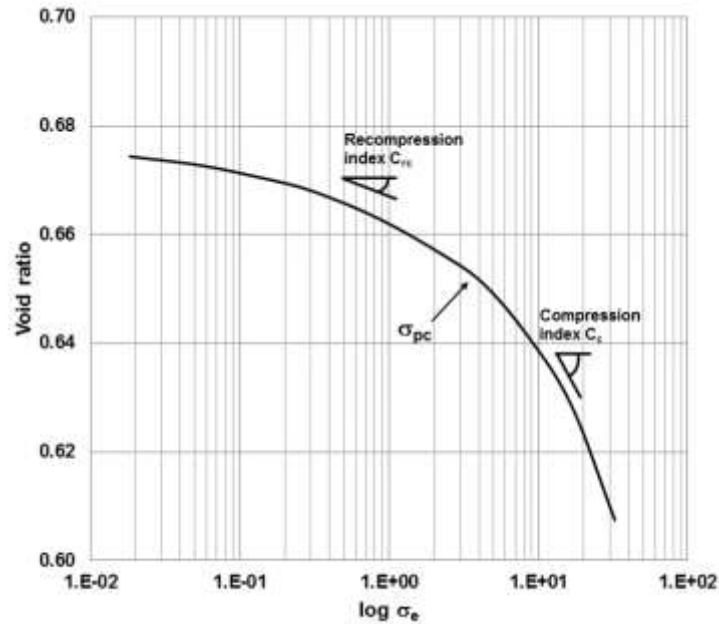


Figura 4. Relación típica entre esfuerzo efectivo y relación de vacíos (Rudolph y Frind, 1991). σ_{pc} es esfuerzo de preconsolidación, que se define como el máximo esfuerzo experimentado por el subsuelo, C_{re} es índice de recompresión y C_c es índice de compresión.

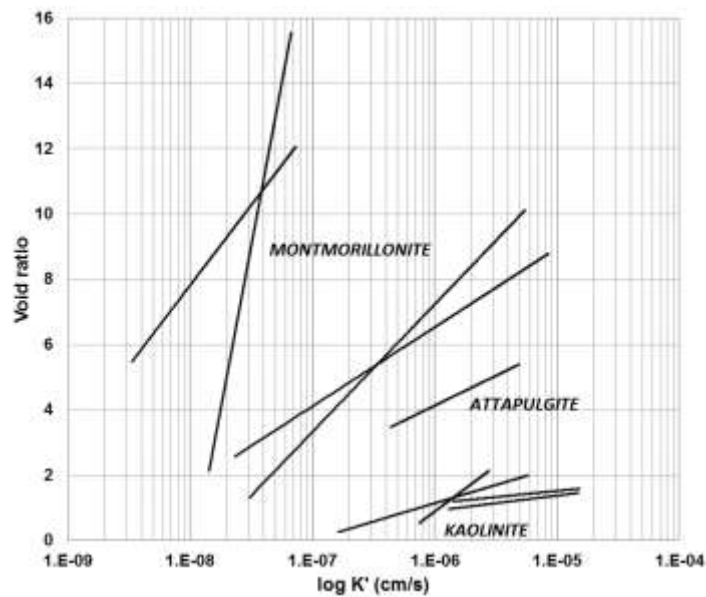


Figura 5. Relación entre $\log K$ y e (Lambe y Whitman, 1969).

Finalmente, la deformación se calcula como:

$$dL_e = L_e \left(\frac{de}{1+e_0} \right) \quad (77)$$

donde dL_e es la diferencia de longitud (m) y L_e es longitud de un elemento en una malla numérica (m).

Solución numérica

Para representar un acuitardo heterogéneo altamente compresible sujeto a consolidación y/o deformación vertical, se requiere una malla deformable donde la distancia entre cada nodo sea variable (Figura 6).

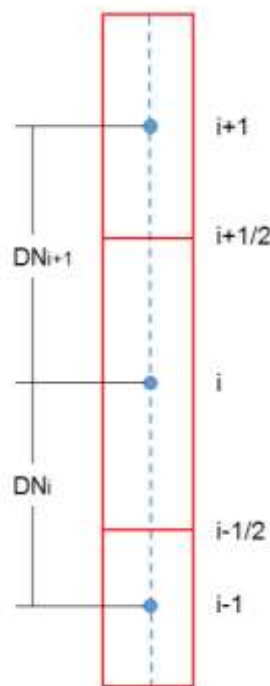


Figura 6. Discretización vertical del espesor del acuitardo.

Con base en la discretización vertical anterior y la Ley de Darcy, se resolvió la ecuación de flujo 1D en el acuitardo (Ecuación 69) utilizando diferenciación numérica (Ecuación 78).

$$h_i^{j+1} = \left[\frac{\Delta t \left(K_{i-\frac{1}{2}}^j \right) (DN_{i+1}^j)}{\frac{1}{2} S_i^j (DN_i^j + DN_{i+1}^j) (DN_i^j * DN_{i+1}^j)} \right] h_{i-1}^j + \left[1 - \frac{\Delta t \left(K_{i-\frac{1}{2}}^j DN_{i+1}^j + K_{i+\frac{1}{2}}^j DN_i^j \right)}{\frac{1}{2} S_i^j (DN_i^j + DN_{i+1}^j) (DN_i^j * DN_{i+1}^j)} \right] h_i^j + \left[\frac{\Delta t \left(K_{i+\frac{1}{2}}^j \right) (DN_i^j)}{\frac{1}{2} S_i^j (DN_i^j + DN_{i+1}^j) (DN_i^j * DN_{i+1}^j)} \right] h_{i+1}^j \quad (78)$$

Donde:

Δt es el diferencial de tiempo.

$K_{i\pm 1/2}^j$ es la conductividad hidráulica promedio de los nodos i e $i\pm 1$ para el tiempo j .

S_i^j es el coeficiente de almacenamiento específico en el nodo i para el tiempo j .

$DN_{i\pm 1}^j$ es distancia entre el nodo i y el nodo $i\pm 1$ para el tiempo j .

$h_i^j, h_{i+1}^j, h_{i-1}^j$ son las cargas hidráulicas en los nodos $i, i+1$ e $i-1$ en el tiempo j .

h_i^{j+1} es la carga hidráulica en el nodo i para el tiempo $j+1$.

En este esquema numérico se produce una matriz tridiagonal, cuya ecuación algebraica fue resuelta con el método de Thomas, posteriormente se aplicó el método Predictor-Corrector a la mitad del paso de tiempo, como medida para tratar la no linealidad de la ecuación de subsidencia no lineal 1D.

Después de resolver la carga hidráulica, se resuelve el conjunto de ecuaciones (73)-(77) que determinan los parámetros dependientes del esfuerzo efectivo y , finalmente, el asentamiento.

Heterogeneidad aleatoria

Para simular las distribuciones verticales de los parámetros se consideraron variables aleatorias univariadas y bivariadas.

En el caso de variables aleatorias univariadas se utilizó el método Simulación Secuencial Gaussiana, incluido en el paquete RandomFields (Schlather *et al.*, 2016) implementado en R (R Core Team, 2015). En este paquete se indicó el número de realizaciones a obtener, la estructura de correlación, la varianza del campo aleatorio gaussiano y el rango (a partir de la escala integral) de acuerdo a los datos estadísticos de literatura para cada parámetro (Y , C_e , m , e). Estos perfiles fueron exportados para utilizarse como condiciones iniciales en el algoritmo de subsidencia no lineal 1D.

En el caso de variables aleatorias bivariadas, que representa un par de variables correlacionadas, se utilizó una adaptación del método cópulas normales bivariadas descrito por Díaz-Viera y Casar-González (2005) para el caso no condicionado de cópulas bivariadas. En este caso primero se obtuvieron n realizaciones de la primer variable aleatoria por medio de Simulación Secuencial Gaussiana, método implementado en el paquete gstat (Pebesma, 2004) en R (R Core Team, 2018). Posteriormente se utilizan copulas normales bivariadas para obtener la segunda variable aleatoria, con el método implementado en los paquetes Copula (Hofter *et al.*, 2014) y VineCopula (Schepsmeier *et al.*, 2016) en R (R Core Team, 2018). En este caso se optó por utilizar el coeficiente de Spearman ρ para indicar el grado (0 a 1) y tipo de correlación (+, -). En la cópula de parámetros se indicó media cero, la estructura de covarianza, la varianza y la escala integral. El par de parámetros fue reescalado para tomar los valores medios de literatura y exportados como condiciones iniciales para el algoritmo de subsidencia no lineal 1D.

Filtro de Kalman ensamblado EnKF

Para el desarrollo del filtro de Kalman ensamblado EnKF se utilizó el algoritmo descrito en Evensen (2003).

En este algoritmo, se construye una matriz \mathbf{A} de tamaño $n \times N$, la cual es un conjunto de N vectores ψ_i de tamaño $n \times 1$, en cada vector ψ_i se incluyen los valores de todas las variables estado en orden ascendente en posición z y cada vector ψ_i corresponde con una realización i .

$$\mathbf{A} = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \dots \quad \psi_N] \quad (79)$$

A partir de la matriz \mathbf{A} se define el ensamble medio $\bar{\mathbf{A}}$, también de dimensiones $n \times N$:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{1}_N \quad (80)$$

Donde los miembros del ensamble de la matriz $\mathbf{1}_N$ son equivalentes a $1/N$.

Se establece un ensamble de perturbaciones \mathbf{A}' , de dimensión $n \times N$ definido como:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{1}_N) \quad (81)$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad.

Puede definirse la matriz de covarianzas del ensamble \mathbf{P}_e de tamaño $n \times n$, con la expresión:

$$\mathbf{P}_e = \frac{1}{N-1} \mathbf{A}' \mathbf{A}'^T \quad (82)$$

Se construye un vector \mathbf{d} con m número de medidas, a partir del cual pueden obtenerse N vectores perturbados \mathbf{d}_j de tamaño $m \times 1$ solamente añadiendo un vector de error de medición ϵ_j :

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{d} + \epsilon_j \quad j = 1, \dots, N \quad (83)$$

Los vectores \mathbf{d}_j se almacenan en la matriz de medidas perturbadas \mathbf{D} de tamaño $m \times N$:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_N) \quad (84)$$

Y los vectores de errores asociados $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ se guardan en la matriz de perturbaciones del ensamble $\boldsymbol{\gamma}$ de tamaño $m \times N$:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_N) \quad (85)$$

Por tanto, la matriz de covarianza de errores del ensamble \mathbf{R}_e de tamaño $m \times m$, se define como:

$$\mathbf{R}_e = \frac{1}{N-1} \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T \quad (86)$$

Se define la matriz de innovación del ensamble como:

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} - \mathbf{H}\mathbf{A} \quad (87)$$

Donde \mathbf{H} es el operador de medidas que relaciona $\boldsymbol{\psi}$ a las observaciones \mathbf{d} y errores de medida $\boldsymbol{\varepsilon}$, mediante:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (88)$$

Finalmente, se puede calcular la matriz de análisis \mathbf{A}^a en función de la matriz de covarianza del ensamble mediante la expresión:

$$\mathbf{A}^a = \mathbf{A} + \mathbf{A}'\mathbf{A}'^T \mathbf{H}^T (\mathbf{H}\mathbf{A}'\mathbf{A}'^T \mathbf{H}^T + \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^T)^{-1} (\mathbf{D} - \mathbf{H}\mathbf{A}) \quad (89)$$

La ventaja del EnKF es que las matrices de covarianzas se abordan de manera conceptual e indirecta en cada paso de asimilación, lo que ahorra tiempo y esfuerzo computacional.

Estrategia de implementación

Para calibrar el modelo de flujo y consolidación no lineal 1D mediante el EnKF, se construyó un vector estado Ψ (de tamaño $n \times 1$) que incluye los vectores de carga hidráulica h , logaritmo de conductividad hidráulica Y ($\ln K$) y la longitud del elemento Le en la malla. Los vectores h , Y y Le tienen tamaño $l \times 1$, con $l = n/3$.

$$\Psi = \begin{bmatrix} h \\ Y \\ Le \end{bmatrix} \quad (90)$$

Este conjunto de vectores Ψ será tratado en la matriz \mathbf{A} .

La matriz \mathbf{A} se forma con los resultados del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, es decir, que se forma un conjunto de vectores $\Psi_j = \{h_j, Y_j, Le_j\}$. Cuando se dispone de un conjunto de medidas \mathbf{d}_j , éste se asimila mediante el EnKF (conjunto de ecuaciones 79-89), y se tendrán los vectores corregidos Ψ_j (h_j, Y_j y Le_j) en \mathbf{A}^a que serán los valores iniciales para el algoritmo de subsidencia no lineal unidimensional en el siguiente paso de tiempo. El proceso anterior se repite hasta finalizar el periodo de simulación.

Los vectores de medidas \mathbf{d} serán formados por mediciones de carga hidráulica h y mediciones del logaritmo de conductividad hidráulica Y . Los errores asociados ϵ_j a estas medidas se derivan de una desviación estándar de 0.05 m para carga hidráulica y 0.5 m/s para conductividad hidráulica.

Evaluación de errores

La evaluación de errores en la corrección de los perfiles verticales de h y Y se determinan en torno al ensamble medio y su realización de referencia, por medio del error cuadrático medio RMSE y se calcula para cada paso de asimilación al terminar la simulación.

El error cuadrático medio RMSE, se determinó mediante la expresión:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_1^n (z_{ij} - z_{ref})^2}{n}} \quad j = (1, 2, 3, \dots, N) \quad (91)$$

Donde z_{ij} es el valor corregido, de h o Y , por el EnKF en la posición i y en el paso de asimilación j , z_{ref} es el perfil de referencia en el paso j , n es el número total de nodos en la columna del acuitardo y N es el tamaño del ensamble.

Además, se evalúa la subestimación de la covarianza de Y (filter inbreeding) mediante la relación $V_y/RMSE_y$. En la expresión anterior, V_y es la varianza de Y calculada a partir del promedio de la varianza en los miembros diagonales de la matriz de covarianza.

V_y se determinó con la expresión:

$$V_y = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma^2_{Y_{ij}}}{n} \quad j = (1, 2, 3, \dots, N) \quad (92)$$

Donde $\sigma^2_{Y_{ij}}$ es la covarianza de Y en la posición (diagonal) ii en el tiempo de asimilación j y n es el número de nodos en la columna del acuitardo.

También se evalúa el error RMSE con la expresión (91) en la corrección del asentamiento total en cada paso de asimilación. En este caso, z_{ij} es el valor corregido del asentamiento total por el EnKF para la referencia i en el paso de asimilación j , z_{ref} es el asentamiento total de

referencia en el paso de asimilación j , n es el tamaño del ensamble y N son los pasos de asimilación.

Además, se determina una diferencia D_s entre el ensamble promedio del asentamiento s_{ref} y la realización de referencia s_j en el paso de asimilación j :

$$D_s = s_{ref} - s_j \quad j = (1, 2, 3, \dots, N) \quad (93)$$

También se estima un error porcentual e_s entre el ensamble promedio del asentamiento s_j y el asentamiento de referencia s_{ref} en el paso de asimilación j :

$$e_s = \left(\frac{s_{ref} - s_j}{s_{ref}} \right) * 100 \quad j = (1, 2, 3, \dots, N) \quad (94)$$

Finalmente, se estima una varianza del asentamiento V_s en cada paso de asimilación j :

$$V_s = \frac{\sum_{i=1}^N (s_{ij} - \bar{s}_j)^2}{N-1} \quad j = (1, 2, 3, \dots, N) \quad (95)$$

Donde s_{ij} es el asentamiento total en cada realización i para cada paso de asimilación j , \bar{s}_j es el ensamble promedio en el paso de asimilación j y N es el tamaño del ensamble.

CAPÍTULO 4

CONSOLIDACIÓN NO LINEAL EN ACUITARDOS HETEROGÉNEOS ALTAMENTE COMPRESIBLES

Basado en: Zapata-Norberto B., Morales-Casique E., Herrera G.S., 2018, Nonlinear consolidation in randomly highly compressible aquitards, Hydrogeology Journal 26(3):755-769. <https://doi.org/10.1007/s10040-017-1698-6>

Introducción

En esta sección se utiliza la simulación Monte Carlo para analizar el efecto de heterogeneidad vertical de los parámetros en un modelo de flujo subterráneo y consolidación no lineal unidimensional, cuyo objetivo principal es predecir el asentamiento en el acuitardo. En el modelo, las fronteras superior e inferior se tratan como carga hidráulica conocida (Dirichlet), es decir, se asume que el flujo desde y al interior del acuitardo no altera la carga hidráulica de los acuíferos superior e inferior. En la frontera inferior se representa un descenso instantáneo en la carga hidráulica debido al bombeo de agua subterránea. Con base en la revisión de la literatura del acuitardo altamente compresible de la ciudad de México, se generaron realizaciones realistas de distribuciones verticales de parámetros. Las pruebas numéricas consideran un parámetro aleatorio a la vez tratando a los parámetros restantes como deterministas. Con un punto de vista estocástico, es posible identificar qué parámetro(s) tiene(n) mayor efecto en la simulación del asentamiento y la mayor incertidumbre asociada a aquella simulación en los medios altamente compresibles.

Métodos

Algoritmo de subsidencia no lineal

El algoritmo de subsidencia no lineal utilizado se describió en el Capítulo 3.

Solución numérica

La resolución numérica se llevó a cabo con la metodología descrita en el Capítulo 3, donde la ecuación de flujo 1D en el acuitardo (Ecuación 69) se resolvió por medio de diferenciación numérica con malla deformable (Ecuación 78) en un esquema implícito. Este esquema numérico genera una matriz tridiagonal cuya ecuación algebraica se resolvió por medio del método de Thomas. Posteriormente, se resolvieron las ecuaciones (73-77) que definen a los parámetros dependientes del esfuerzo efectivo, y finalmente, el asentamiento.

En esta simulación, se construyó una malla con 118 nodos de 0.127 m de distancia nodal (DN). El tiempo total de simulación fue 275 años. Por otro lado, la no linealidad de la ecuación fue abordada por un método predictor-corrector y el paso de tiempo fue restringido a 1 día aproximadamente para evitar grandes cambios en los parámetros.

Caso de estudio sintético: heterogeneidad aleatoria

El efecto de heterogeneidad vertical en la subsidencia no lineal se investiga a través de un modelo conceptual hidrogeológico sintético similar al empleado por Rudolph y Frind (1991). En este modelo sintético, el acuitardo tiene 15 m de espesor, se considera que el esfuerzo efectivo incrementa linealmente con la profundidad, y en su historial de esfuerzos se tiene

registrado un esfuerzo máximo de preconsolidación de 15 (kN/m²). En la frontera inferior, el acuitardo se estresa debido a una disminución instantánea de la presión de poro que simula el efecto de bombeo en el acuífero inferior. En la Figura 7 se muestra la geometría del caso de estudio con sus respectivas condiciones de frontera y condiciones iniciales de σ_e , e , K y S_s . Las distribuciones iniciales de los parámetros de Rudolph y Frind (1991) sirvieron como ensamble medio, a partir del cual fueron simuladas las realizaciones.

Los datos estadísticos para diseñar el estudio numérico se obtuvieron de una revisión de literatura acerca de la variabilidad espacial de los parámetros envueltos en el algoritmo de subsidencia no lineal 1D (K , e , C_c y m) en el acuitardo lacustre altamente compresible en la cuenca de México. El acuitado arcilloso de, valle de México se constituye por montmorillonita, ilita, caolinita, halloysita y esmectita intercalados con materiales volcánicos (Marsal y Mazari, 1959; Peralta y Fabi, 1989; Warren y Rudolph, 1997; Díaz-Rodríguez *et al.*, 1998); alcanza su máximo espesor en la planicie de Chalco con 300 m (Ortega-Guerrero *et al.*, 1999).

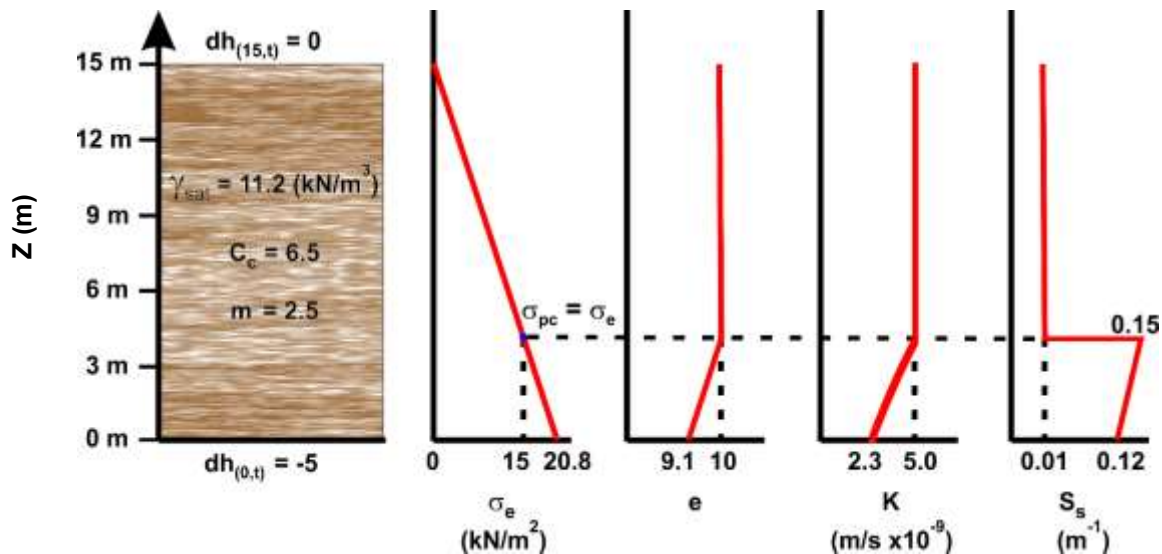


Figura 7. Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).

Vargas y Ortega-Guerrero (2004) realizaron 225 pruebas de permeabilidad en el acuitardo por medio de piezómetros de 2 a 85 m de profundidad, encontraron que los valores de K varían de 1×10^{-11} a 1×10^{-7} m/s y que la distribución de los valores puede ajustarse a un modelo log-gaussiano. La relación de vacíos e ha sido determinada por medio de perforaciones en estudios geotécnicos en el acuitardo donde se obtuvieron valores de 2 a 12 (Marsal y Mazari, 1959) y mayores a 15 (Juárez-Badillo y Rico-Rodríguez, 2012). Los valores del índice de compresión C_c suelen ser característicos de la litología, en la Ciudad de México se han reportado rangos de 0.4 a 3.5 (Hernández-Marín *et al.*, 2005; Carreón-Freyre *et al.*, 2006), y de 0.1 a 3.5 para el oriente de la Ciudad de México (Carreón-Freyre *et al.*, 2015). Sin embargo, en otros estudios geotécnicos realizados en la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México, el rango de valores de C_c suele variar entre 1.4 a 12.1 (Covarrubias-Fernández, 1994). Los valores para m (pendiente que relaciona el log K y e) varían en un rango de 0.6 a 4, de acuerdo a pruebas de compresión triaxial realizadas por Covarrubias-Fernández (1994). En recientes estudios geoestadísticos del acuitardo del valle de México, donde se utilizaron datos de sondeos geotécnicos para analizar el contenido de humedad w y posteriormente ajustarlo a un modelo con estructura de correlación exponencial y escala integral de 2.1 m (Juárez-Camarena, 2015).

Con base en los datos anteriores se construyó la Tabla 1, que presenta la estructura de correlación, escala integral y varianza utilizada para simular cada parámetro como variable aleatoria. Utilizando los datos de la Tabla 1, se simularon 2,000 realizaciones de cada parámetro por medio del método Simulación Secuencial Gaussiana, incluido en el paquete RandomFields (Schlather *et al.*, 2016) implementado en R (R Core Team, 2015). En este caso, se simularon parámetros independientes con media cero, la cual, posteriormente sería reescalada de acuerdo a los valores medios de la Figura 7.

Parámetro	Estructura de correlación	Varianza (unidades) ²	Escala integral (m)	Referencia
$Y (\ln K)$	Exponencial	4.01	2.1	Vargas y Ortega, 2004; Juárez-Camarena, 2015
C_c	Exponencial	5.73	2.1	Covarrubias-Fernández, 1994; Juárez-Camarena, 2015
m	Exponencial	0.88	2.1	Covarrubias-Fernández, 1994; Juárez-Camarena, 2015
e	Exponencial	3.22	2.1	Marsal y Mazari, 1959; Covarrubias-Fernández, 1994; Juárez-Camarena, 2015

Tabla 1. Datos estadísticos seleccionados para el caso de estudio.

Resultados y discusión

En la Figura 8 se presentan los resultados de la simulación después de 275 años, considerando solamente a Y como variable aleatoria. En la Figura 8, las líneas grises representan los resultados de cada realización, la línea azul es la media del ensamble y la línea roja es el resultado determinista presentado por Rudolph y Frid (1991). La Figura 8a representa a las realizaciones de Y aleatoria, donde se observa que la media del ensamble coincide perfectamente con la distribución determinista. En la Figura 8b se presenta el abatimiento simulado al final de 275 años, donde se observa que como efecto de la condición de frontera inferior, que representa el abatimiento en el acuífero inferior, se impuso un gradiente hidráulico vertical debido a la diferencia de carga hidráulica, generando un flujo vertical que es mayor en la base del acuitardo y que disminuye hacia la frontera superior. En la simulación con Y aleatoria, se determinó que la media del ensamble de abatimientos (línea azul) es mayor

que el abatimiento calculado para el caso determinista (línea roja), es decir, que el caso determinista subestima los cambios en la presión de poro al interior del acuitardo. Con la reducción de la presión de poro en la base del acuitardo, se provocó un incremento en el esfuerzo efectivo para compensar el esfuerzo total en el subsuelo, y éste incremento en el esfuerzo efectivo se propagó hacia la cima del acuitardo. Al final de la simulación (Figura 8c), se tiene un promedio del ensamble de esfuerzos efectivos (línea azul) mayor a la respuesta determinista (línea roja). Del aumento en el esfuerzo efectivo se produjo una reducción de la relación de vacíos que también se distribuye de la base hacia la cima del acuitardo, en este caso, el promedio del ensamble es menor que el caso determinista (Figura 8d). La reducción de la relación de vacíos tuvo consecuencias en la Y aleatoria reduciendo su magnitud; y al final de la simulación, también se presentó una diferencia entre el promedio del ensamble de Y y el caso determinista, donde éste último es ligeramente mayor (Figura 8e). La reducción de la relación de vacíos también impactó al coeficiente de almacenamiento S_s , el cual muestra al final de la simulación, diferencias notables entre la media del ensamble y el resultado determinista, debido a que la serie de respuestas generadas por las realizaciones tiene un desplazamiento vertical que afecta al promedio vertical (Figura 8f).

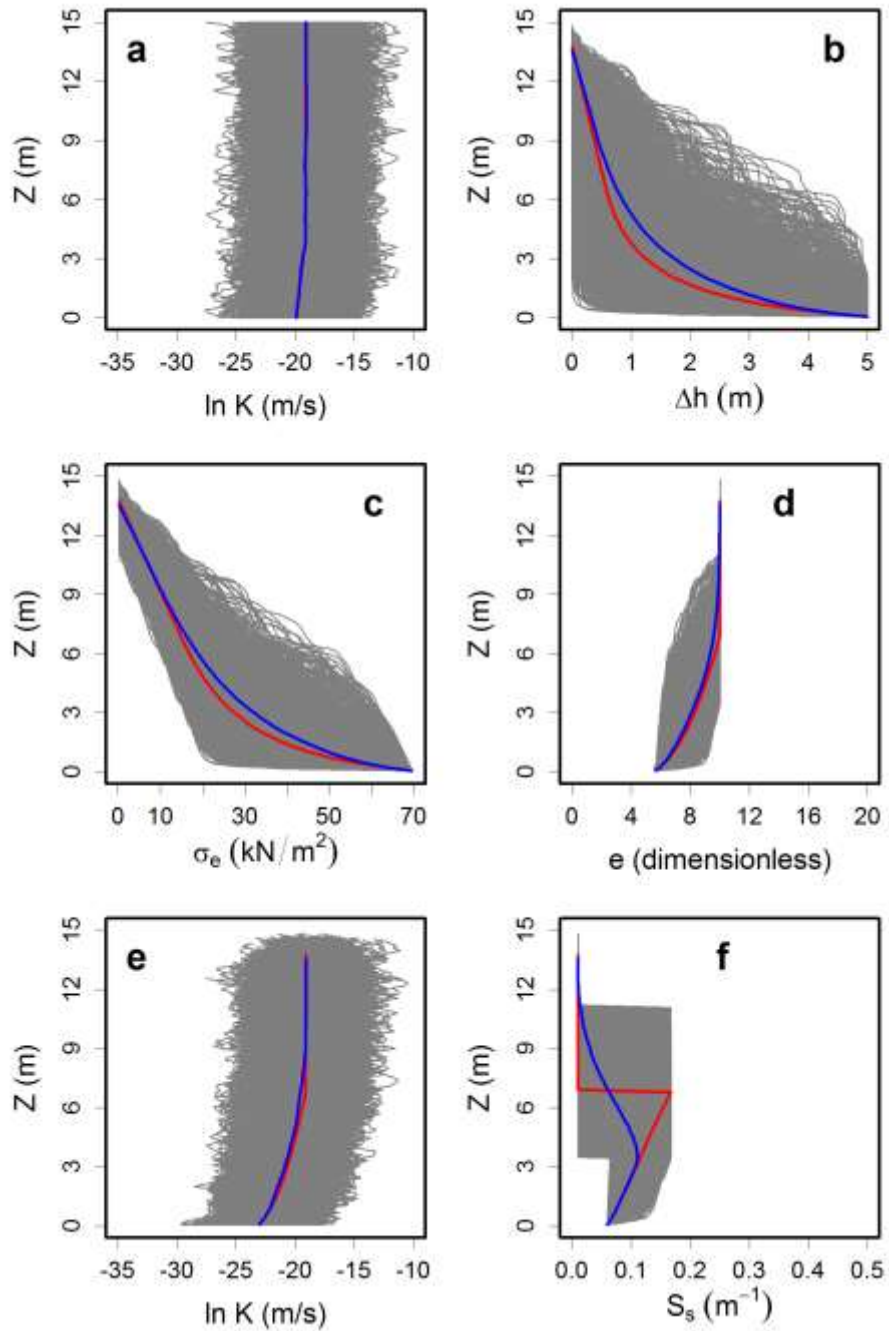


Figura 8. Resultados de la simulación Monte Carlo con Y aleatoria. El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

En la Figura 9 se muestran los resultados de la simulación con C_c como variable aleatoria. En la Figura 9a se muestran las realizaciones del índice de compresión, donde se observa que los valores más altos alcanzan 16 unidades. En la Figura 9b, se observa que el ensamble medio (línea azul) coincide con el resultado determinista (línea roja) y que a comparación del caso con Y aleatoria, la variación de respuestas no es tan amplia. Como consecuencia, en el esfuerzo efectivo el ensamble medio también coincide con el caso determinista (Figura 8c). La relación de vacíos muestra algunos cambios en la base del acuitardo, también coincide el ensamble medio con la respuesta determinista (Figura 8d). Para la Y aleatoria los cambios se muestran mínimos en la base del acuitardo, el ensamble medio coincide con la distribución determinista (Figura 9e). En el caso del coeficiente de almacenamiento S_s , los resultados tienen un rango más amplio de valores, el ensamble medio se encuentra más cercano a la respuesta determinista (Figura 9f).

En la Figura 10 se observan los resultados de la simulación con m (pendiente que relaciona el gráfico de $\log K$ y e) como variable aleatoria. Las realizaciones iniciales de m se muestran en la Figura 10a, donde se observa que m toma valores mayores a 0 y menores a 6. En el abatimiento, se observa que la media del ensamble (línea azul) coincide parcialmente con el caso determinista (línea roja) pero es menor en posiciones de 6 a 9 m (Figura 10b). En consecuencia, en el esfuerzo efectivo también se observa que el ensamble medio es menor al caso determinista entre 6 y 9 m (Figura 10c). En este caso, los cambios en la relación de vacíos se presentan solamente en la base del acuitardo, donde el ensamble medio es ligeramente mayor que los resultados del caso determinista (Figura 10d). En la conductividad hidráulica se observan valores menores que en los casos previos y la media del ensamble coincide con el caso determinista (Figura 10e). El coeficiente de almacenamiento varía

mayormente en la vertical y la diferencia entre el ensamble medio y el caso determinista es marcada entre 5 y 8 m (Figura 10f).

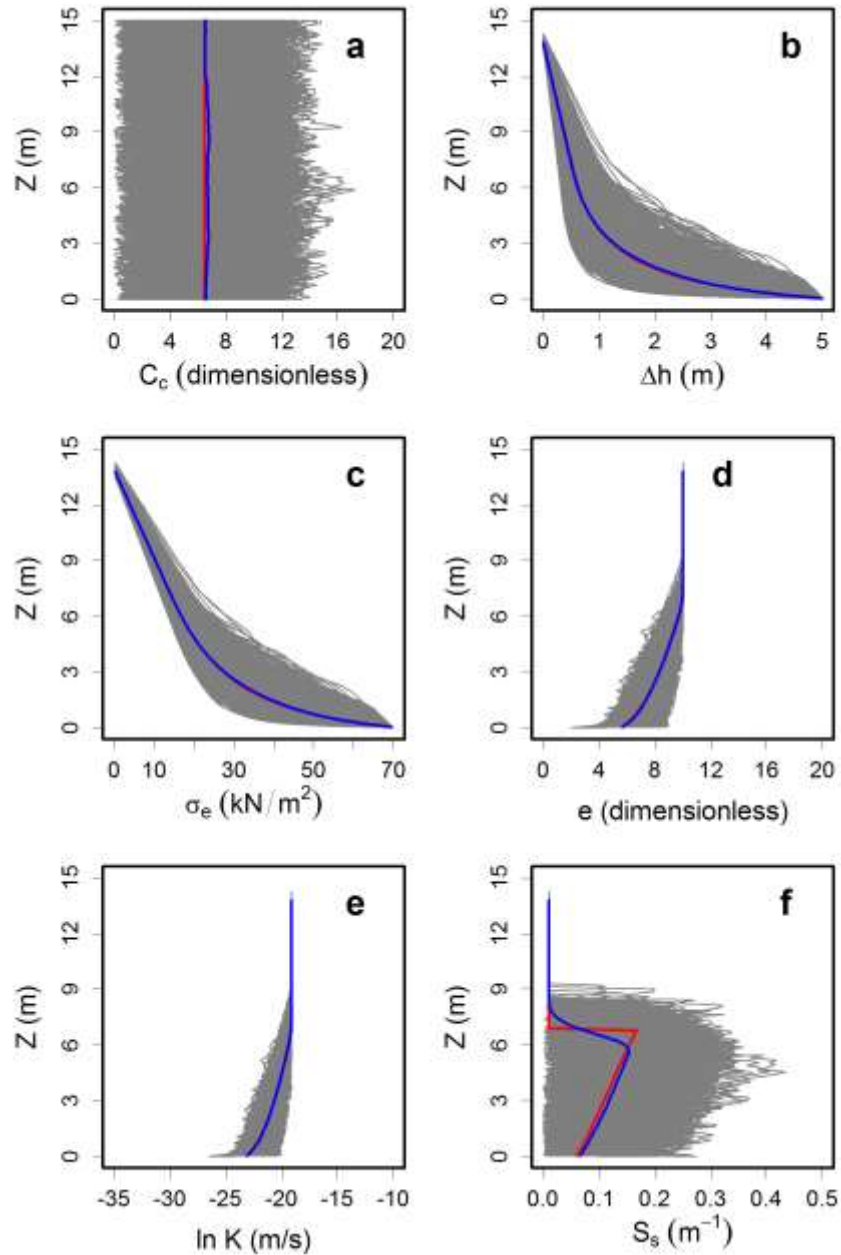


Figura 9. Resultados de la simulación Monte Carlo con C_c aleatoria. El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

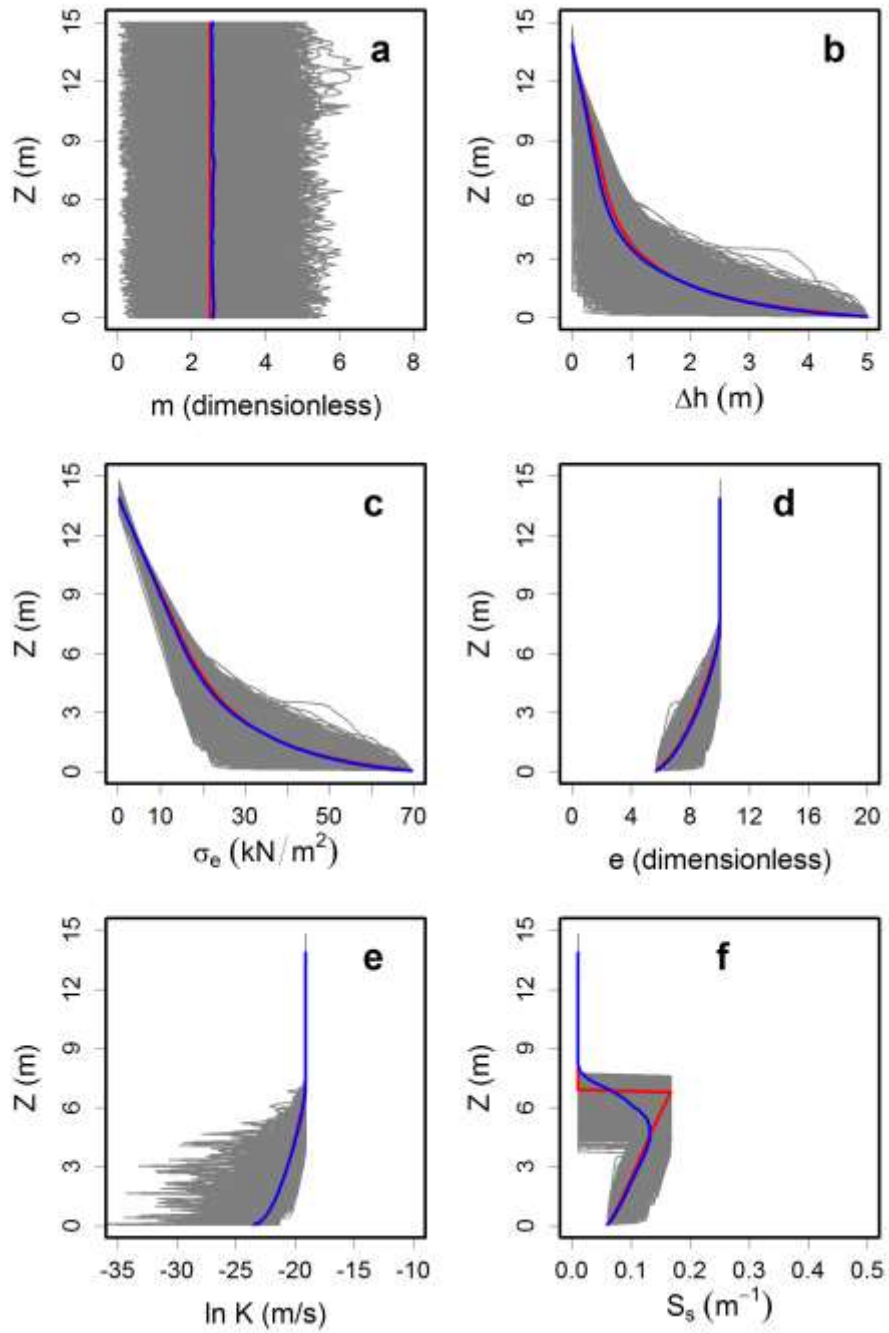


Figura 10. Resultados de la simulación Monte Carlo con m aleatoria. El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

Los resultados de la simulación con la relación de vacíos e como variable aleatoria se muestran en la Figura 11. Las realizaciones de e se muestran en la Figura 11a, donde se observan los valores en el rango de 3 a 16 unidades. En este caso, las respuestas del abatimiento se muestran muy cerradas debido a que los parámetros Y y S_s son tratados como deterministas así que tanto los miembros del ensamble como la media del ensamble coinciden con el resultado determinista (Figura 10b). Debido a que el esfuerzo efectivo se encuentra en función de los cambios en la carga hidráulica, tampoco se muestra variación entre el ensamble medio y la respuesta determinista (Figura 11c). Como los valores iniciales de e para algunas realizaciones son pequeños, al final de la simulación se tienen valores muy cercanos a cero y se observa que el ensamble medio coincide con el caso determinista (Figura 11d). En cuanto a Y , la variación entre las respuestas de los miembros del ensamble y el caso determinista son nulas (Figura 11e). En el coeficiente de almacenamiento S_s , se observa un amplio rango de valores debido a que está ligado directamente con e , pero no se observa variación en la vertical por lo que la media del ensamble coincide con el resultado del caso determinista (Figura 11f).

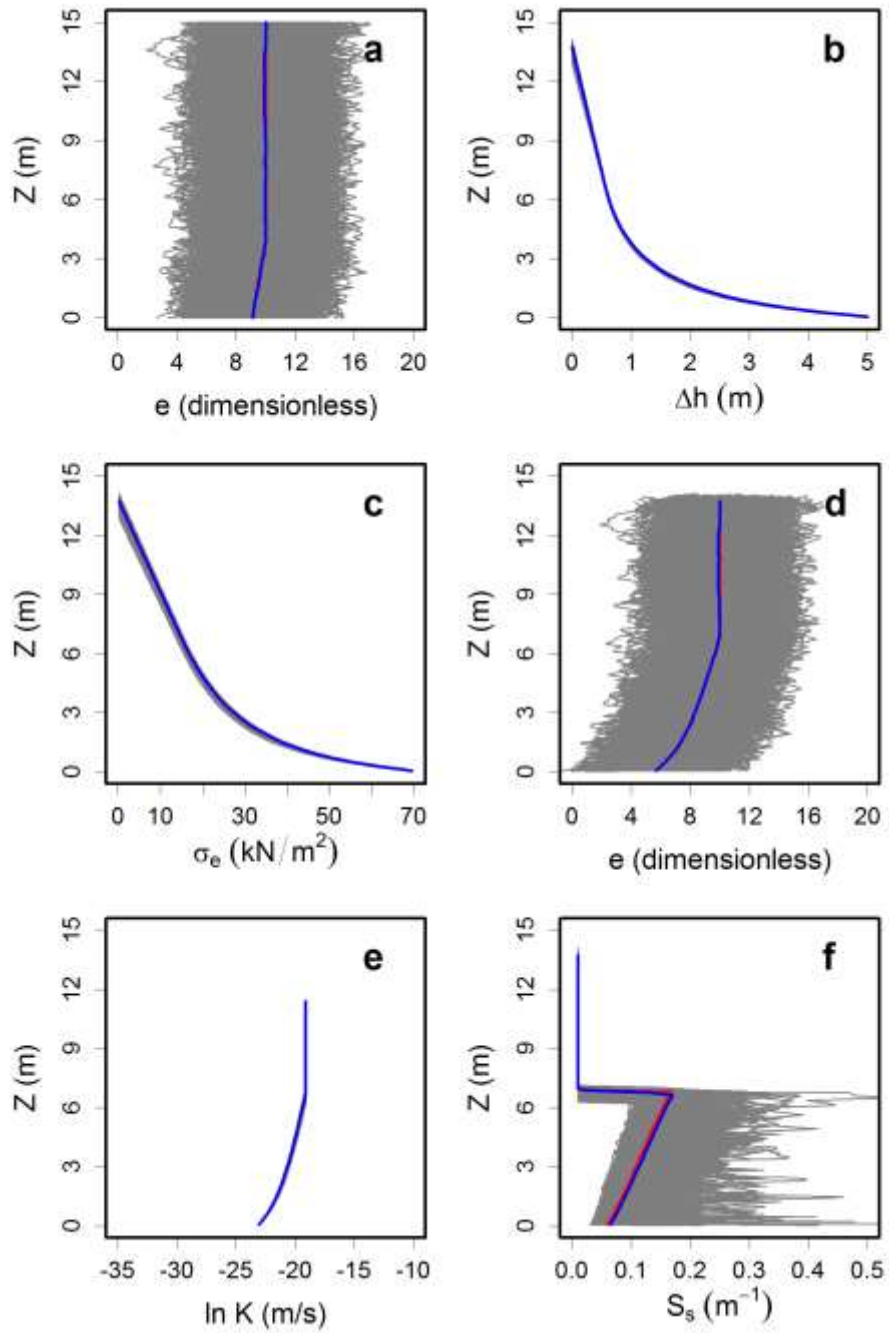


Figura 11. Resultados de la simulación Monte Carlo con e aleatoria. El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

Efecto de heterogeneidad en el asentamiento

Los resultados de la simulación del asentamiento se muestran en la Figura 12. En la Figura 12a se observa que en el caso con Y aleatoria se tienen asentamientos desde centímetros hasta poco más de 4 m con varianza de 0.51 m^2 , además, el ensamble medio muestra mayor asentamiento en comparación con el caso determinista. Por otro lado, de acuerdo al ensamble medio el proceso de asentamiento continúa, es decir, aun se no alcanza estado estacionario como en el caso determinista donde podemos ver un asentamiento prácticamente constante desde 168 años.

En la Figura 12b se tiene el asentamiento simulado con C_c como variable aleatoria, en este caso el asentamiento medio es ligeramente menor al asentamiento determinista y el rango de valores se encuentra muy cercano a 1 m, con varianza de 0.02 m^2 . De acuerdo al asentamiento medio, este caso alcanza el estado estacionario a los 169.4 años.

En la Figura 12c se presenta el asentamiento predicho con m como variable aleatoria, donde se observa que el rango de valores es de algunos centímetros hasta casi 2 m con varianza de 0.10 m^2 , además, la media del ensamble es menor al caso determinista y alcanza su estado estacionario a los 159.8 años.

Finalmente en la Figura 12d se presentan los resultados de la simulación del asentamiento con e como variable aleatoria, donde se observa que el ensamble toma valores entre poco menos de 1 m y casi 2 m con varianza de 0.03 m^2 . En este caso, el ensamble medio es ligeramente mayor al caso determinista y alcanza el estado estacionario a los 170.4 años.

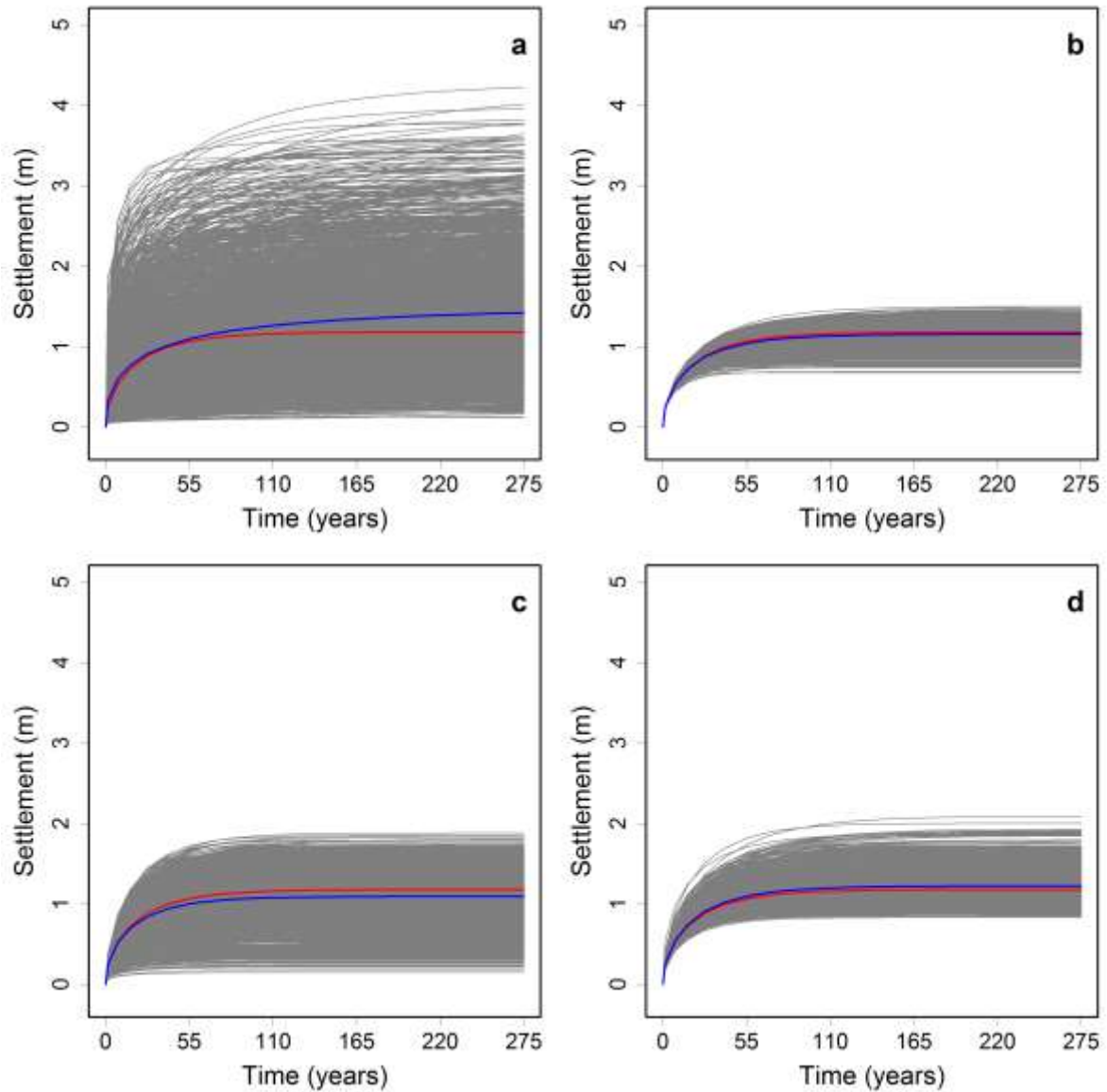


Figura 12. Simulación del asentamiento con Y aleatoria (a), C_c aleatoria (b), m aleatoria (c) y e aleatoria (d). El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

De acuerdo a los resultados mostrados en la Figura 12, el parámetro que tiene mayor influencia en la simulación del asentamiento es Y , lo anterior se debe a que este parámetro

tiene la mayor varianza ($\sim 4 \text{ m}^2$) representativa de sedimentos altamente compresibles. Estrictamente le sigue en orden de influencia, el parámetro m que está ampliamente relacionado a la Y ; posteriormente la relación de vacíos e y el índice de compresión C_c . Éste último es considerado como uno de los factores que mayor influencia tienen en la simulación del asentamiento y ha sido enormemente utilizado en muchos modelos de flujo y consolidación como variable aleatoria principal.

Flujo en fronteras

En la Figura 13 se muestran las simulaciones del flujo en fronteras superior e inferior. El flujo en la frontera inferior alcanza un valor máximo en tanto que en la frontera superior el flujo es mínimo. A lo largo de la simulación el flujo en la frontera inferior disminuye y en la frontera superior incrementa hasta que ambos alcancen un valor constante. En este caso, consideramos una diferencia del 1% en el flujo en la frontera superior e inferior para alcanzar el estado estacionario. En el caso determinista, el flujo en las fronteras superior e inferior es 0.034 mm/d, ambos con diferencia de 1% en aproximadamente 168 años. Al considerar a Y aleatoria (Figura 13a), se observa que el ensamble promedio (línea azul) es alrededor de 0.02 mm/d, la varianza del ensamble es $1 \times 10^{-3} \text{ mm}^2/\text{d}^2$ a los 275 años de simulación, pero la diferencia entre los flujos es mayor al 1%. Cuando se considera a C_c como variable aleatoria (Figura 13b), se tiene ensamble promedio de 0.033 mm/d en ambas fronteras, con varianza de $5.8 \times 10^{-5} \text{ mm}^2/\text{d}^2$ al final de la simulación y con diferencia del 1% a los 169.4 años. En el caso de m aleatoria (Figura 13c), se tiene en ambas fronteras un promedio del ensamble de 0.029 mm/d con varianza de $1.16 \times 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{d}^2$ en un tiempo de 275 años. En este caso se alcanza estado estacionario a los 159.8 años. Al considerar e como variable aleatoria se tiene

un promedio del ensamble en ambas fronteras de 0.034 mm/d con varianza de $5.36 \times 10^{-7} \text{ mm}^2/\text{d}^2$ al final de la simulación y se alcanza estado estacionario a los 170.4 años.

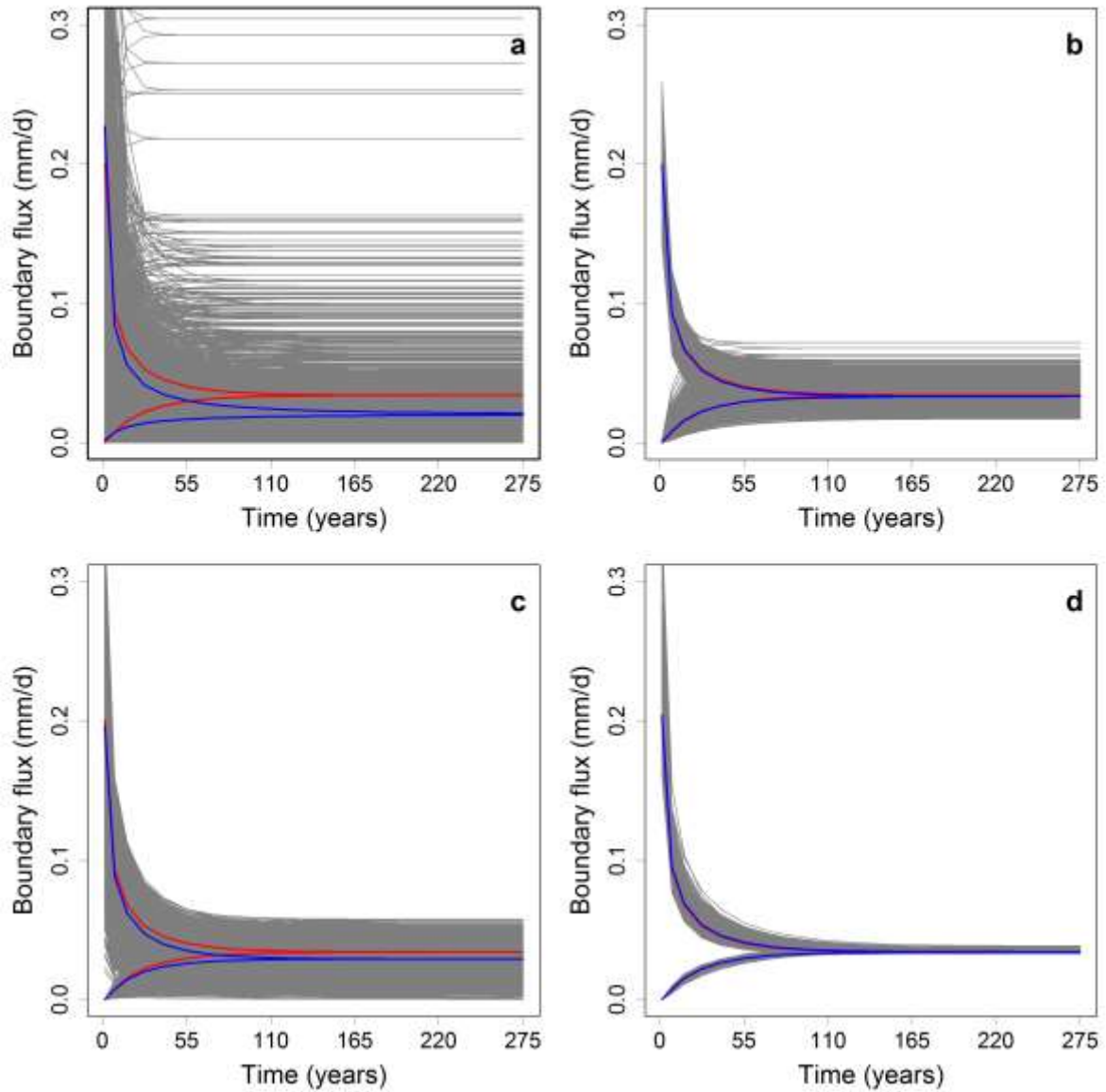


Figura 13. Flujo en fronteras simulado con Y aleatoria (a), C_c aleatoria (b), m aleatoria (c) y e aleatoria (d). El resultado de cada realización se muestra en líneas grises, la media del ensamble es la línea azul y el resultado determinista es la línea roja.

En la Tabla 2 se presenta el ensamble promedio y varianza de asentamiento, flujo en fronteras y tiempo para alcanzar el estado estacionario en cada caso de simulación.

Tabla 2. Ensamble promedio y varianza (σ^2) de asentamiento total, flujo en fronteras a 275 años y tiempo para que la diferencia entre el flujo en la frontera superior e inferior sea de 1%.

	Asentamiento total		Flujo en fronteras		Tiempo para alcanzar el estado estacionario	
	Promedio (m)	σ^2 (m) ²	Promedio (mm/d)	σ^2 (mm/d) ²	Promedio (años)	σ^2 (años) ²
Determinista	1.18		0.034		168.00	
<i>K</i> aleatoria	1.42	0.51	~0.02	~1x10 ⁻³	> 275	
<i>C_c</i> aleatorio	1.15	0.02	0.033	5.8x10 ⁻⁵	169.40	1503.36
<i>m</i> aleatoria	1.09	0.10	0.029	1.159x10 ⁻⁴	159.80	550.80
<i>e</i> aleatoria	1.22	0.03	0.034	5.36x10 ⁻⁷	170.40	396.03

Conclusiones

Por medio de simulación Monte Carlo se exploró el efecto de heterogeneidad en la simulación no lineal 1D de flujo de agua subterránea y consolidación en acuitardos altamente compresibles. Para ello se tomó un parámetro como aleatorio y los restantes se simularon como deterministas. De los cuatro parámetros tratados como variable aleatoria, se encontró que la *Y* influye mayormente en la simulación de asentamiento. Al comparar el caso donde se simula *Y* como variable aleatoria con el caso determinista, presentado por Rudolph y Frind (1991), al final de la simulación (275 años) se encontró que el asentamiento es mayor en 20% y el flujo en fronteras es menor en 40% con respecto al caso de referencia. En cuanto al tiempo para alcanzar el estado estacionario, se tiene que el caso determinista lo logra después de 168 años, mientras que el ensamble promedio del asentamiento logra esta condición en un periodo mayor al simulado. Además, el caso con *Y* aleatoria proporciona la mayor varianza

de todas las variables incluyendo carga hidráulica, esfuerzo efectivo, asentamiento total y flujo en fronteras. En comparación con los otros parámetros tomados como aleatorios, la varianza del asentamiento derivada de Y aleatoria es de 5 a 25 veces más grande que la varianza determinada con m , C_c y e .

Lo anterior es indicativo que la heterogeneidad en Y ($\ln K$) proporciona la mayor incertidumbre en la simulación del asentamiento en acuitardos altamente compresibles. Una caracterización inadecuada del sistema acuífero a nivel de los acuitardos, sus propiedades hidromecánicas y su heterogeneidad puede llevar a errores significantes en el modelo predictivo de un sitio específico. Por lo que la variabilidad espacial de Y , además de la variabilidad de otros parámetros, debe considerarse en la simulación de los sistemas altamente compresibles.

CAPÍTULO 5

EFFECTO DE CORRELACIÓN CRUZADA DE γ - C_c EN LA CONSOLIDACIÓN NO LINEAL DE ACUITARDOS HETEROGÉNEOS ALTAMENTE COMPRESIBLES

Basado en: Zapata-Norberto B, Morales-Casique E., Le V.L., Díaz-Viera M., Effect of cross-correlated hydraulic conductivity and compression index on nonlinear consolidation in randomly heterogeneous highly compressible aquitards (En preparación).

Introducción

En este capítulo se presenta el efecto de correlación cruzada entre parámetros en la simulación del asentamiento en acuitardos altamente compresibles. En el capítulo anterior se observó que los parámetros que producen mayor incertidumbre en el asentamiento son K y C_c , por lo que se simularán como variables aleatorias con correlación cruzada. Para simular la correlación entre parámetros y generar las realizaciones aplicamos el método de cópulas normales bivariadas. Posteriormente se crearon simulaciones que consideran un par de parámetros aleatorios a la vez y los restantes deterministas. En el modelo, las fronteras superior e inferior se tratan como carga hidráulica conocida (Dirichlet), es decir, se asume que el flujo desde y al interior del acuitardo no altera la carga hidráulica de los acuíferos superior e inferior. En la frontera inferior se representa un descenso instantáneo en la carga hidráulica debido al bombeo de agua subterránea.

Métodos

El algoritmo de subsidencia no lineal 1D y su resolución numérica se describieron en el Capítulo 3.

En este caso, la malla consiste de 150 elementos con espesor inicial (DN) de 0.1 m. El tiempo total de simulación fue 275 años. Para abordar la no linealidad de los parámetros se utilizó un método predictor-corrector y para limitar grandes cambios en los parámetros se restringió el paso de tiempo a 1 día.

Caso sintético de estudio: heterogeneidad simulada con correlación cruzada de K y C_c

Para estudiar el efecto de heterogeneidad en la subsidencia no lineal se utilizó un modelo sintético similar al empleado por Rudolph y Frind (1991) y modificado por Zapata-Norberto *et al.* (2018), que consta de un acuitardo de espesor de 15 m, donde el esfuerzo efectivo incrementa linealmente con la profundidad y su esfuerzo máximo de preconsolidación es 15 kN/m². Este acuitardo se estresa en su frontera inferior debido a la reducción instantánea de presión de poro que representa el efecto de bombeo en el acuífero inferior. La geometría, distribución inicial de parámetros y fronteras del caso de estudio se presentan en la Figura 14. En este caso, las distribuciones iniciales de σ_e , e y S_s se asignaron como parámetros deterministas con base en la Figura 5, mientras que K y C_c se consideran variables aleatorias cuya media del ensamble se adopta de la distribución determinista (Figura 14).

En el Capítulo 1 se explicó que el acuitardo de la Ciudad de México consiste de sedimentos lacustres (entre los que destacan montmorillonita, ilita, caolinita, haloysita y esmectita) intercalados con material volcánico (Marsal y Mazari, 1959; Peralta y Fabi, 1989; Warren y Rudolph, 1997; Díaz-Rodríguez *et al.*, 1998). Se estableció que la K del acuitardo es ampliamente variable y se ajusta a un modelo de regresión log-gaussiano (Vargas y Ortega-

Guerrero, 2004). Se mencionó que el índice de compresión presenta valores variables que se han ajustado con escala integral de hasta 8.5 m (Delgado-Muñiz, 2018).

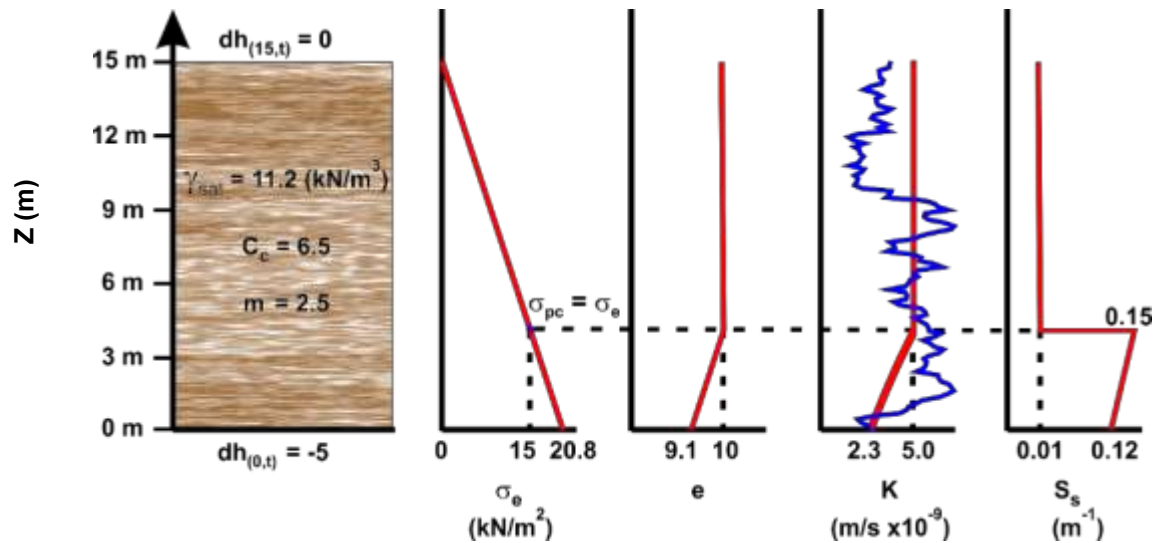


Figura 14. Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991).

Con la revisión previa de la literatura se determinaron los datos estadísticos de la Tabla 3 donde se presenta el tipo de correlación, estructura de correlación, varianza y escala integral de cada parámetro. Con base en la Tabla 3 se construyeron 2,000 realizaciones de Y ($\ln K$) por medio del método Simulación Secuencial Gaussiana implementado en el paquete gstat (Pebesma, 2004) implementado en R (R Core Team, 2018). Para simular la correlación entre Y y C_c se adaptó el método descrito por Díaz-Viera y Casar-González (2005) para el caso no condicionado de cópulas bivariadas. Se consideró que la correlación entre Y y C_c puede ser negativa, nula y positiva, asignando el coeficiente de Spearman ρ con valores de -0.75, 0 y 0.75, respectivamente en la cópula normal bivariada. La cópula de parámetros (Y y C_c) se simuló con media cero, estructura de covarianza conocida, con varianza y escala integral de

acuerdo a la Tabla 1. Posteriormente, la media del ensamble fue reescalada para tomar los valores medios de la Figura 14. Los parámetros σ_e , e y S_s se consideraron deterministas.

Tabla 3. Datos estadísticos seleccionados para el caso de estudio. En la Tabla: a) Vargas y Ortega-Guerrero, 2004; b) Covarrubias-Fernández, 1994; c) Juárez-Camarena, 2015.

Caso	Tipo de correlación	Parámetro	Estructura de correlación	Varianza	Escala integral (m)
A	Negativa	$\frac{\ln K}{C_c}$	Esférica	$\frac{4.01^a}{2.00}$	2.1^c
B	Sin correlación	$\frac{\ln K}{C_c}$	Esférica	$\frac{4.01^a}{2.00}$	2.1^c
C	Positiva	$\frac{\ln K}{C_c}$	Esférica	$\frac{4.01^a}{2.00}$	2.1^c
D	Sin correlación	$\frac{\ln K}{C_c}$	Esférica	$\frac{4.01^a}{5.37^b}$	2.1^c
E	Positiva	$\frac{\ln K}{C_c}$	Esférica	$\frac{4.01^a}{5.37^b}$	2.1^c

Resultados y discusión

Efecto del coeficiente de correlación de Spearman

Para explorar el efecto que tiene el tipo de correlación (negativa, nula o positiva, asignada por medio del coeficiente de correlación de Spearman) entre los parámetros $Y-C_c$ en la simulación del asentamiento utilizamos la misma estructura de correlación, escala integral y varianza inicial en los parámetros (Tabla 3, Casos A, B y C).

En la Figura 15 se presentan los resultados de la simulación con correlación negativa entre Y y C_c (Caso A), donde se representan los resultados de cada realización con líneas grises, el

promedio del ensamble en línea azul, el resultado determinista en línea roja y el doble de la desviación estándar con respecto a la media en línea discontinua naranja. En la Figura 15a se observan las realizaciones iniciales de Y y en la Figura 15b se tienen las realizaciones iniciales de C_c , donde se observa que como resultado de la correlación negativa existen muchos valores cercanos a cero pero que se mantiene el valor medio de 6.5. En la Figura 15c se presentan los resultados del abatimiento, donde se observa que el efecto de heterogeneidad genera un ensamble medio mayor que el resultado determinista. De acuerdo al algoritmo de subsidencia no lineal, con mayor abatimiento se produce mayor esfuerzo efectivo, lo anterior puede constatarse en la Figura 15d donde se observa que la media del ensamble es mayor que el resultado determinista. Con mayor esfuerzo efectivo se reduce el tamaño de poro y por ende la relación de vacíos, tal como se aprecia en la Figura 15e donde el ensamble medio es ligeramente menor que el resultado determinista. El ligero cambio en la relación de vacíos provocó que en la conductividad hidráulica la media del ensamble mostrara mínima variación con respecto al resultado determinista (Figura 15f). Con respecto al coeficiente de almacenamiento específico, se aprecia que el ensamble medio se suaviza por efecto de la variación vertical del S_s en cada realización por lo que solo coincide con el resultado determinista en la parte inferior y superior del acuitardo (Figura 15g).

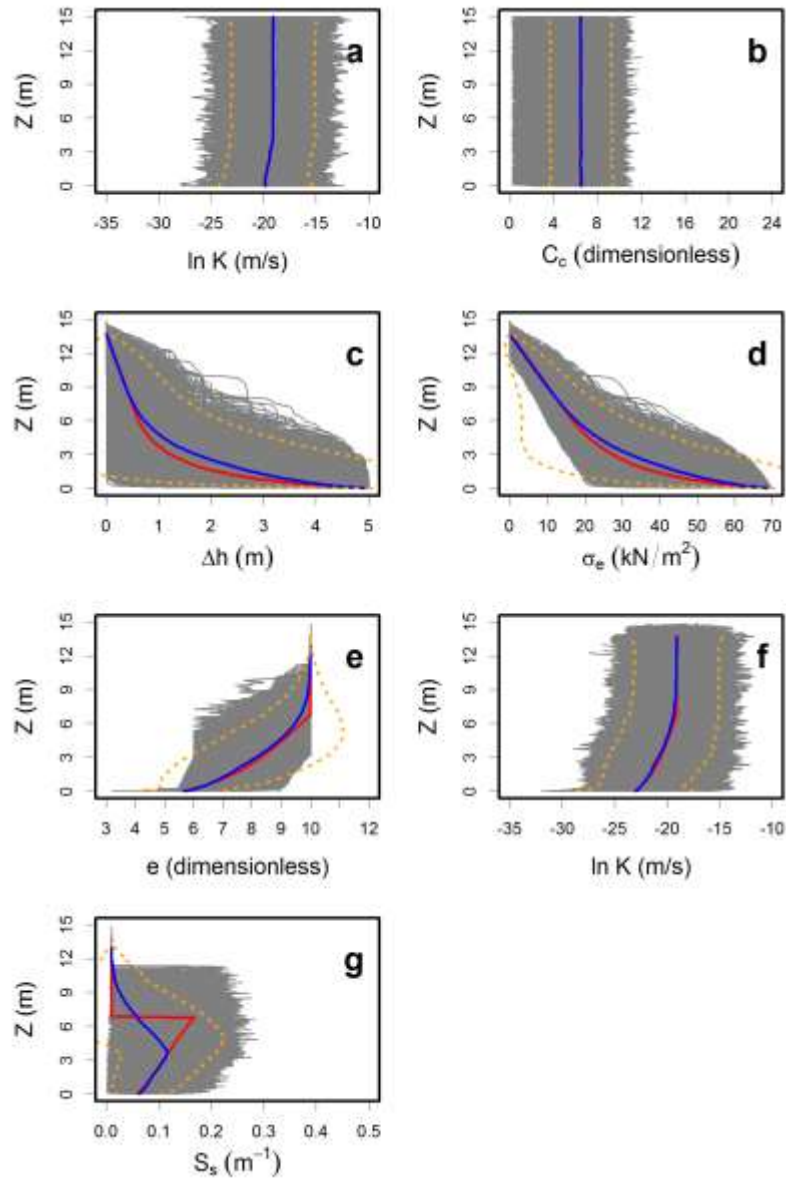


Figura 15. Resultados de 275 años de simulación con correlación negativa $Y-C_c$ (Caso A).

a) Realizaciones iniciales de $Y(\ln K)$; b) Realizaciones iniciales de C_c ; c); d) Esfuerzo efectivo; e) Relación de vacíos; f) Conductividad hidráulica; g) Almacenamiento específico. Las líneas grises son el resultado de cada realización, la línea azul es el promedio del ensamble, la línea roja es el resultado determinista y la línea discontinua naranja es el doble de la desviación estándar con respecto a la media del ensamble.

En la Figura 16 se presentan los resultados de la simulación con $Y-C_c$ no correlacionados (Caso B) y en la Figura 17 los resultados de la simulación con correlación positiva entre Y y C_c (Caso C). La diferencia más notable entre las Figuras 15, 16 y 17 se encuentra en las realizaciones iniciales de C_c ya que con correlación negativa $Y-C_c$ los valores mínimos se desplazan hacia la izquierda tomando valores cercanos a cero (Figura 15b); mientras que en el caso no correlacionado de $Y-C_c$ se encuentran entre 2 y 12 unidades (Figura 16b); y en el caso de correlación positiva $Y-C_c$ los valores máximos se desplazan hacia la derecha llegando hasta casi 16 unidades (Figura 17b). En los parámetros resultantes de las simulaciones en las Figuras 15, 16 y 17 se observa prácticamente el mismo comportamiento de la media del ensamble con respecto al caso determinista: el abatimiento y esfuerzo efectivo son mayores, la relación de vacíos y conductividad hidráulica son ligeramente menores, y el coeficiente de almacenamiento coincide en la parte inferior y superior del acuitardo.

En la Figura 18 se observa la simulación del asentamiento con los tres tipos de correlación $Y-C_c$. En los tres casos se muestra que en tiempos tempranos el caso determinista sobreestima el asentamiento mientras que en tiempos tardíos lo subestima. Al final de la simulación, el caso con correlación negativa $Y-C_c$ estima un asentamiento medio de 1.33 m con varianza de 0.34 m^2 (Figura 18a y Tabla 4). El caso no correlacionado de $Y-C_c$ estima un asentamiento promedio de 1.41 m con varianza de 0.38 m^2 al final de 275 años (Figura 18b y Tabla 4). Y el caso con correlación positiva $Y-C_c$ indica que el asentamiento promedio al final de la simulación es 1.49 m con varianza de 0.42 m^2 (Figura 18c y Tabla 4).

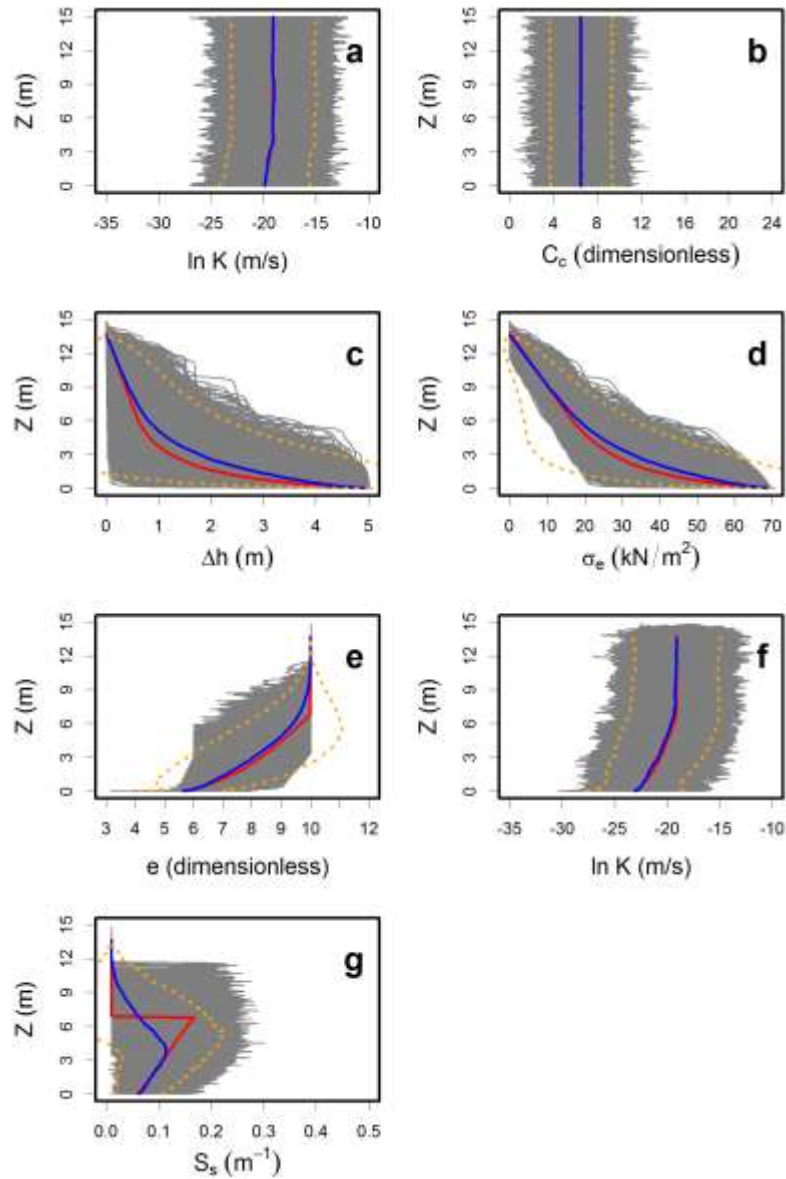


Figura 16. Resultados de 275 años de simulación con correlación nula $Y-C_c$ (Caso B). a)

Realizaciones iniciales de Y ($\ln K$); b) Realizaciones iniciales de C_c ; c); d) Esfuerzo efectivo; e) Relación de vacíos; f) Conductividad hidráulica; g) Almacenamiento específico. Las líneas grises son el resultado de cada realización, la línea azul es el promedio del ensamble, la línea roja es el resultado determinista y la línea discontinua naranja es el doble de la desviación estándar con respecto a la media del ensamble.

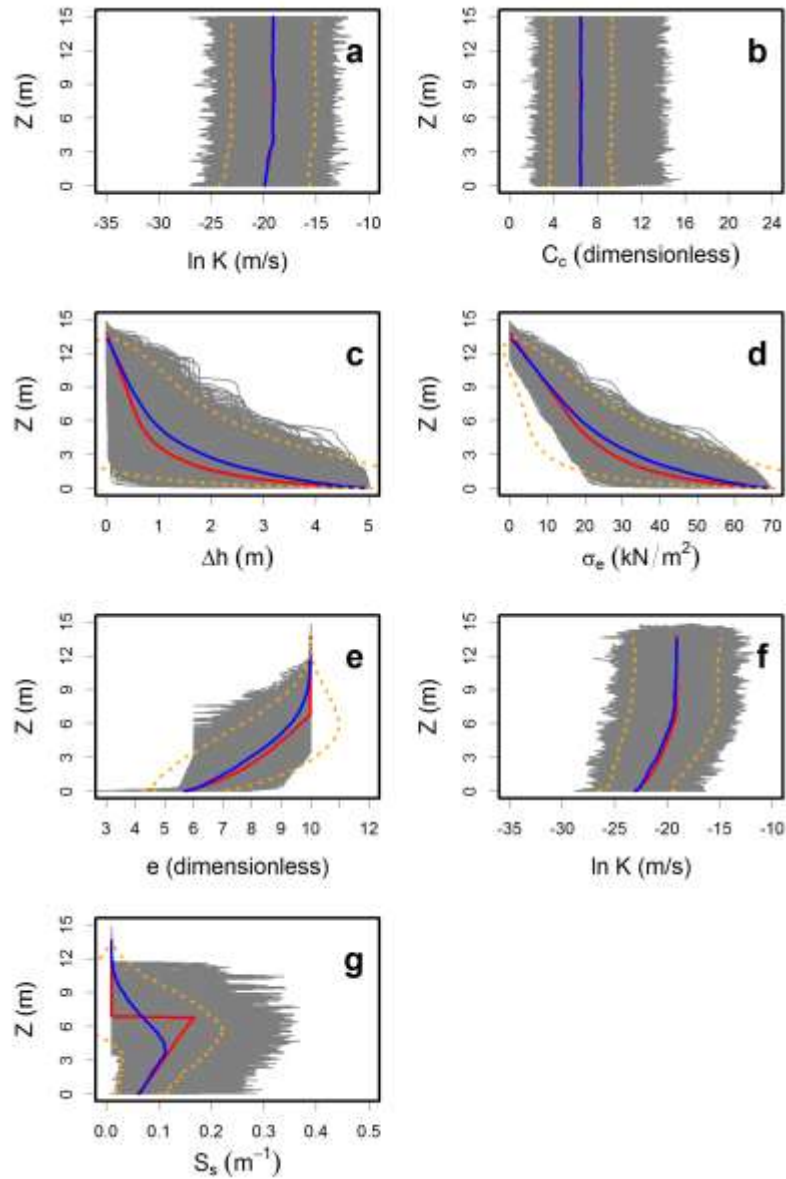


Figura 17. Resultados de 275 años de simulación con correlación positiva $Y-C_c$ (Caso C).

a) Realizaciones iniciales de $Y(\ln K)$; b) Realizaciones iniciales de C_c ; c); d) Esfuerzo efectivo; e) Relación de vacíos; f) Conductividad hidráulica; g) Almacenamiento específico. Las líneas grises son el resultado de cada realización, la línea azul es el promedio del ensamble, la línea roja es el resultado determinista y la línea discontinua naranja es el doble de la desviación estándar con respecto a la media del ensamble.

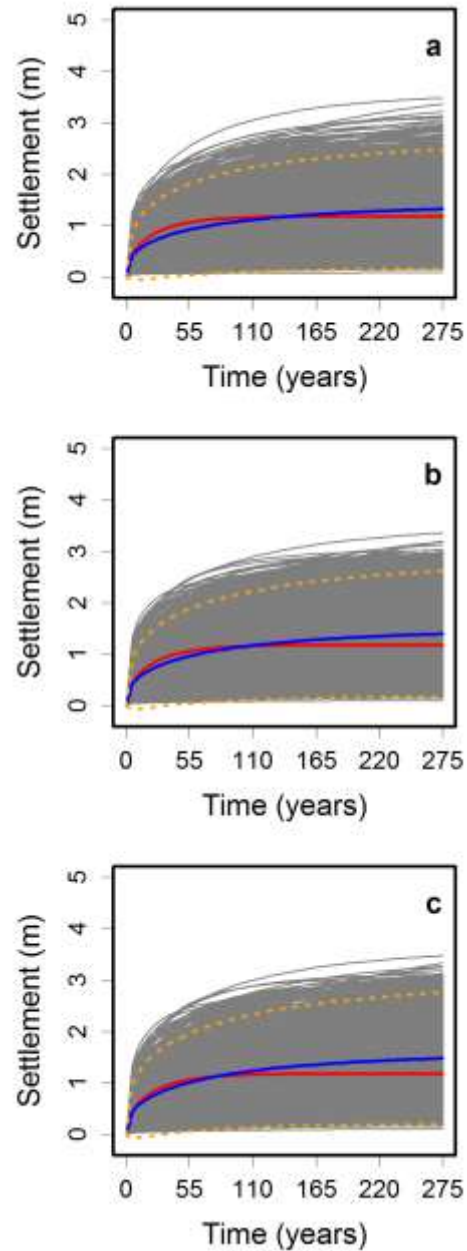


Figura 18. Simulación del asentamiento con (a) correlación $Y-C_c$ negativa, (b) sin correlación $Y-C_c$ y (c) correlación $Y-C_c$ positiva. Las líneas grises son el resultado de cada realización, la línea azul es el promedio del ensamble, la línea roja es el resultado determinista y la línea discontinua naranja es el doble de la desviación estándar con respecto a la media del ensamble.

Tabla 4. Estadísticos de asentamiento al final de las simulaciones con diferentes tipos de correlación $Y-C_c$.

Caso	Asentamiento total	
	Promedio (m)	σ^2 (m) ²
Determinista	1.18	-
Correlación negativa	1.33	0.34
No correlacionado	1.41	0.38
Correlación positiva	1.49	0.42

En la Figura 19 se presentan los resultados de 275 años de simulación para el flujo en fronteras. La Figura 19a representa el flujo en fronteras con correlación negativa $Y-C_c$, la Figura 19b corresponde al flujo en fronteras sin correlación entre $Y-C_c$ y la Figura 19c muestra el flujo en fronteras con correlación positiva $Y-C_c$. En los tres casos de correlación $Y-C_c$, el ensamble medio (línea azul) es menor que el caso determinista (línea roja) y la respuesta de los miembros del ensamble es muy parecida. Por otro lado, al final de la simulación con los tres casos de correlación se tiene una diferencia mayor al 1% entre ambas fronteras por lo que el estado estacionario no se logra.

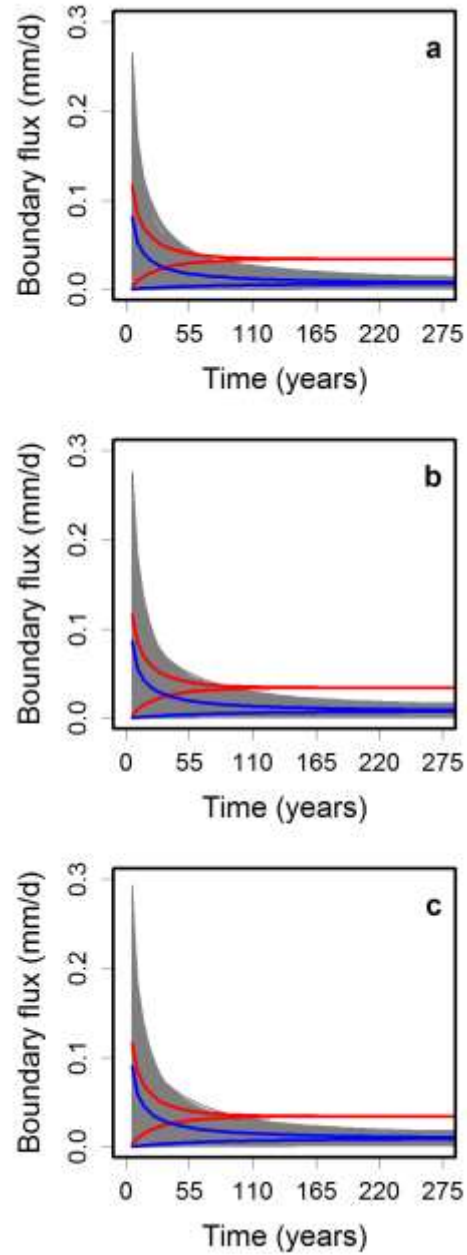


Figura 19. Flujo en fronteras con (a) correlación $Y-C_c$ negativa, (b) sin correlación $Y-C_c$ y (c) correlación $Y-C_c$ positiva. Las líneas grises son el resultado de cada realización, la línea azul es el promedio del ensamble y la línea roja es el resultado.

Diferencias con simulaciones que consideran una variable aleatoria

En esta sección se investiga la diferencia entre simulaciones que utilizan una variable aleatoria (Zapata-Norberto *et al.*, 2018) y simulaciones con dos variables aleatorias, cuyo objetivo es predecir el asentamiento de medios altamente compresibles y su incertidumbre. Para tal efecto, se realizaron simulaciones con las mismas características que utiliza Zapata-Norberto *et al.* (2018): varianza de C_c de 5.37, varianza de Y de $2.00 \text{ m}^2/\text{s}^2$, estructura de correlación esférica y escala integral de 2.1 m. Debido a que el método de cópulas presenta valores negativos en cada realización para C_c al utilizar una varianza grande (5.37 unidades), y los valores negativos para C_c se desconocen en la literatura, en esta sección sólo utilizamos los casos sin correlación $Y-C_c$ y correlación positiva $Y-C_c$.

En la Figura 20 se muestra un gráfico que resume las predicciones del asentamiento simuladas con una variable aleatoria (Zapata-Norberto *et al.*, 2018) y dos variables aleatorias. En el gráfico se muestra la media del ensamble en barra verde y la varianza del ensamble en barra azul. Con respecto al ensamble promedio, se observa que cuando consideramos correlación nula entre $Y-C_c$ se obtiene un valor muy similar al simulado con Y como variable aleatoria. Al utilizar una correlación positiva $Y-C_c$ se obtiene el máximo valor para el ensamble promedio mientras que al considerar solo a C_c como variable aleatoria se simula el mínimo valor para el ensamble promedio. Con respecto a la varianza del ensamble, los casos con correlación positiva $Y-C_c$, sin correlación $Y-C_c$ y con sólo Y como variable aleatoria presentan un valor muy similar, mientras que el valor mínimo de incertidumbre lo proporciona el caso con C_c aleatoria.

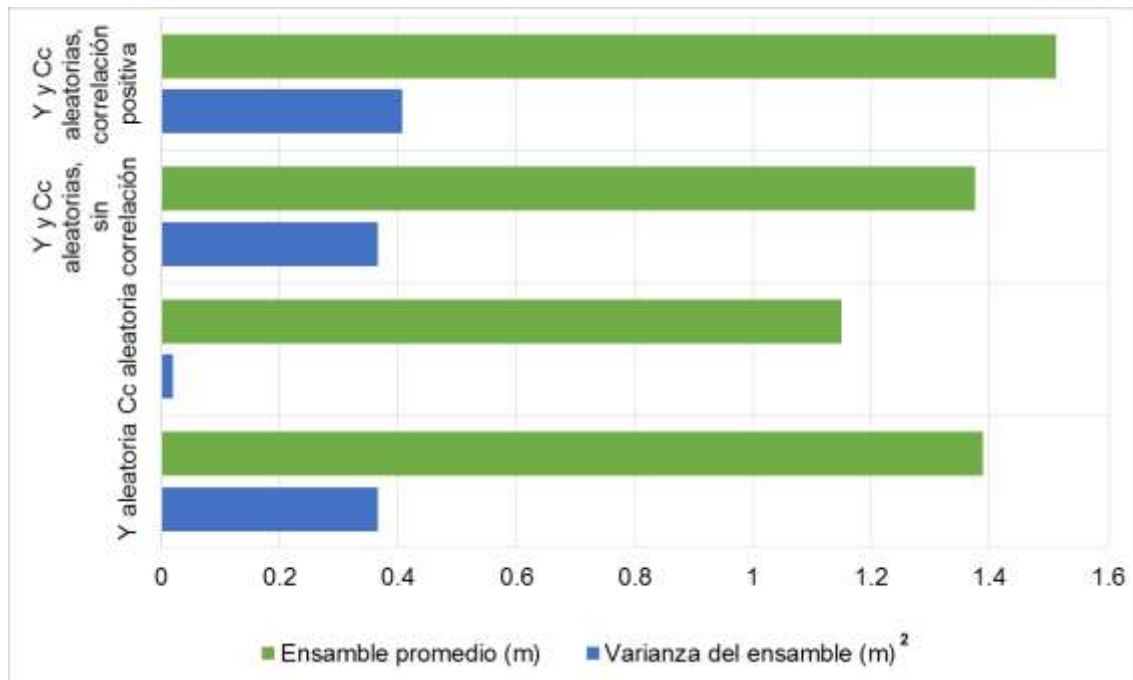


Figura 20. Predicciones del asentamiento total (275 años) realizadas con una variable aleatoria (Zapata-Norberto *et al.*, 2018) y dos variables aleatorias. En el gráfico, la barra gris representa el ensamble promedio y la barra azul es la varianza del ensamble.

Conclusiones

En este capítulo se mostraron tres tipos de correlación entre $Y-C_c$ que pueden utilizarse en la simulación del flujo y consolidación no lineal 1D para predecir el asentamiento de un acuitardo altamente compresible. En este caso se asignó el tipo de correlación por medio del coeficiente de Spearman, en el método de cópulas normales bivariadas, con valores de -0.75 para correlación negativa, 0 para el caso no correlacionado y 0.75 para correlación positiva. A diferencia de Huang *et al.* (2009) donde no solo utilizan un método diferente para obtener las realizaciones sino que asignan un coeficiente de correlación de -1 y 1 para indicar correlación negativa y positiva, respectivamente. Determinamos que la correlación negativa

$Y-C_c$ proporciona el menor asentamiento promedio y la menor incertidumbre asociada mientras que la correlación positiva simula el mayor promedio del ensamble y la mayor incertidumbre. En el caso de sedimentos altamente compresibles es adecuado considerar una correlación negativa entre Y y C_c porque de acuerdo a las propiedades de las arcillas (Lambe y Whitman, 1969), en una montmorillonita se tiene la menor Y y el mayor C_c , mientras que para una caolinita se tiene una relativamente alta Y y menor C_c .

Para comparar los casos que utilizan una variable aleatoria con los casos con dos variables aleatorias correlacionadas, utilizamos varianzas diferentes para Y y C_c que se derivaron de datos de literatura, a diferencia de Huang *et al.* (2009) que utilizan la misma varianza para sus parámetros. Encontramos que una simulación que utiliza a Y y C_c no correlacionados proporciona un promedio del ensamble e incertidumbre para el asentamiento muy similares a los derivados de la simulación con solo Y como variable aleatoria. Esto se debe a que, en el caso no correlacionado $Y-C_c$, los valores extremos de C_c no influyen en la simulación del asentamiento y su incertidumbre asociada, como en los casos con correlación negativa y positiva, donde el promedio del ensamble es menor y mayor, respectivamente.

Finalmente, las simulaciones presentadas en esta sección destacan la necesidad de obtener más datos que permitan establecer y/o esclarecer las relaciones entre parámetros hidráulicos y geotécnicos en sedimentos altamente compresibles. Por otro lado, también resaltan la necesidad de incorporar estas medidas de campo en la calibración de los modelos de simulación de asentamiento.

CAPÍTULO 6

ASIMILACIÓN DE DATOS CON EL FILTRO DE KALMAN ENSAMBLADO EnKF EN ACUITARDOS HETEROGÉNEOS ALTAMENTE COMPRESIBLES

Basado en: Zapata-Norberto B., Morales-Casique E., Herrera G.S., One-dimensional simulation of land subsidence in vertically-heterogenous highly compressible aquitards coupled with data assimilation with Ensemble Kalman filter (En preparación).

Introducción

En este capítulo se adopta el filtro de Kalman ensamblado EnKF como método de calibración para un modelo de flujo y consolidación 1D que predice el asentamiento de acuitardos altamente compresibles. El EnKF no solo se utiliza para corregir la simulación del asentamiento sino que también se utiliza para corregir los parámetros hidráulicos y geomecánicos del acuitardo. De acuerdo a la teoría de consolidación, los parámetros son funciones del esfuerzo efectivo y están cambiando continuamente en el tiempo, así que en la simulación se avanza en el tiempo después de cada paso de asimilación, reiniciando parámetros y estados, y se continúa la simulación hasta que estén disponibles nuevas medidas. Se asimilan medidas de estado (carga hidráulica), parámetros (conductividad hidráulica) y sus combinaciones para investigar el efecto que tienen en la simulación del asentamiento. Además, se utiliza un número considerable de realizaciones para evitar el efecto de subestimación de la covarianza denominado *filter inbreeding effect* (Houtekamer y Mitchel, 1998) que aparece cuando se asimilan medidas de estados y parámetros en conjunto.

Métodos

El algoritmo de subsidencia no lineal 1D, el método numérico para su resolución, el algoritmo del filtro de Kalman ensamblado y su estrategia de implementación para esta investigación, fueron descritos en el Capítulo 3.

Para esta simulación, se construyó una malla con 118 nodos de 0.127 m de distancia nodal (DN). El tiempo total de simulación fue 300 años. Por otro lado, la no linealidad de la ecuación fue abordada por un método predictor-corrector y el paso de tiempo fue restringido a 1 día aproximadamente para evitar grandes cambios en los parámetros.

Caso sintético de estudio

El caso de estudio sintético se basa en el ejemplo de Rudolph y Frind (1991). Se considera un acuitardo de 15 m de espesor, donde el esfuerzo efectivo incrementa con la profundidad y su esfuerzo máximo de preconsolidación es 15 kN/m^2 . Inicialmente se tienen condiciones hidrostáticas en la presión de poro y las fronteras superior e inferior son conocidas (Dirichlet). En la frontera inferior se experimenta un cambio súbito en la presión de poro, que representa el abatimiento en el acuífero inferior. En la Figura 21 se muestra la distribución de parámetros dependientes del esfuerzo efectivo, todos los parámetros se consideran deterministas a excepción de la conductividad hidráulica que se considera variable aleatoria.

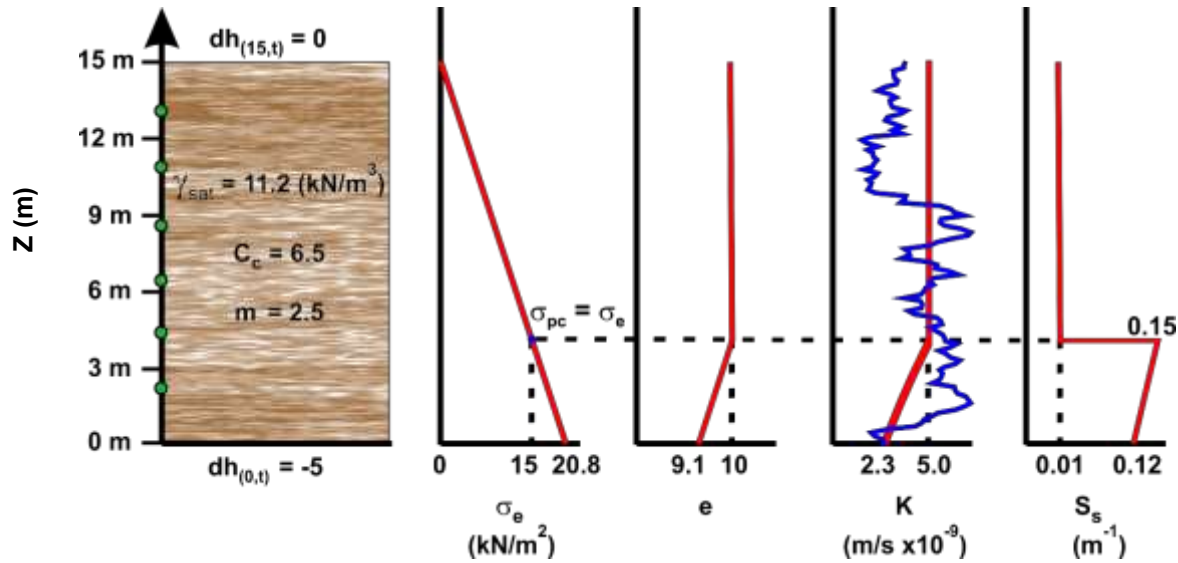


Figura 21. Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991). Los puntos verdes son los puntos de medida.

Heterogeneidad aleatoria en K

Para generar las realizaciones de Y ($\ln K$) se utilizó covarianza exponencial, escala integral de 2.1 m, media cero y varianza de $4.01 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Se determinaron 2,000 realizaciones de Y por medio de Simulación Secuencial Gaussiana implementado en el paquete RandomFields (Schlater *et al.*, 2016) en R(R Core Team, 2018). La media de las realizaciones de Y fue reescalada para tomar la media del caso determinista (Figura 21, línea roja) y consideradas como Y inicial en el algoritmo no lineal de subsidencia 1D.

Simulaciones de referencia

Con el procedimiento anterior, se generaron cuatro realizaciones de Y que fueron tomadas como referencia, es decir, distribuciones iniciales “reales” de Y . Estas cuatro realizaciones de referencia ingresaron como perfiles iniciales de Y en el algoritmo de flujo y consolidación no

lineal 1D y con ellas se generaron cuatro soluciones “reales”. De estos cuatro casos de referencia se extrajeron observaciones de h y Y cada 5 años en 6 puntos fijos (Figura 21) a lo largo de la columna del acuitardo. Las observaciones de h fueron perturbadas con errores gaussianos con desviación estándar de 0.05 m y las observaciones de Y con errores gaussianos con desviación estándar de 0.5 m/s. Los puntos de medida se localizan cada 2.1 m.

Considerando que en la Ciudad de México es posible obtener medidas de carga hidráulica anualmente pero las medidas de conductividad hidráulica se obtienen o actualizan en periodos irregulares, se construyeron tres diferentes casos para la asimilación de medidas. En un primer caso, se asimilan medidas de h o Y cada 5 años. En un segundo caso, se asimilan medidas de h cada cinco años junto con medidas de Y cada diez años en tres diferentes posiciones en cada paso de asimilación. En ambos casos, se consideraron 60 pasos de asimilación.

Resultados y discusión

En este apartado se ilustran los resultados con la Referencia 1, mientras que los gráficos de las referencias 2, 3 y 4 se pueden consultar en el apartado anexo.

Efecto de subestimación de la covarianza

De acuerdo con Houtekamer y Mitchell (1998), cuando se presentan errores derivados de un tamaño del ensamble pequeño puede generarse un error de subestimación de la matriz de covarianza (*filter inbreeding*). En la simulación con el EnKF, podemos determinar si existe subestimación de la matriz de covarianza a través del cociente $V_Y/RMSE_Y$ (Panzeri *et al.*, 2014), donde V_Y es la varianza de conductividad hidráulica y $RMSE_Y$ es el error cuadrático

medio de conductividad hidráulica. En un caso ideal, donde no existe subestimación de la matriz de covarianza, el cociente $V_Y/RMSE_Y$ alcanza un valor unitario.

En esta sección el efecto de subestimación de covarianza se ilustra mediante asimilación de observaciones de h derivadas de la referencia 1, y perturbadas con errores gaussianos con desviación estándar de 0.05 m, utilizando un tamaño del ensamble de 100, 1000, 2000 y 10,000 realizaciones.

En la Figura 22 se presenta el comportamiento del cociente $V_Y/RMSE_Y$ en cada paso de asimilación utilizando 100 realizaciones (línea continua gris), 1000 realizaciones (línea discontinua azul), 2000 realizaciones (línea continua negra) y 10 mil realizaciones (línea punteada roja). Los casos con tamaños del ensamble de 100 realizaciones muestran una relación $V_Y/RMSE_Y$ muy baja al final de 60 pasos de asimilación, mientras que al relación $V_Y/RMSE_Y$ de los ensambles mayores a 1000 realizaciones ronda la unidad.

La desventaja de utilizar un ensamble muy grande es el gran esfuerzo computacional que se requiere para la simulación, en este caso, se aprecia que un ensamble de 2000 realizaciones puede determinar resultados satisfactorios en torno a la matriz de covarianza del ensamble.

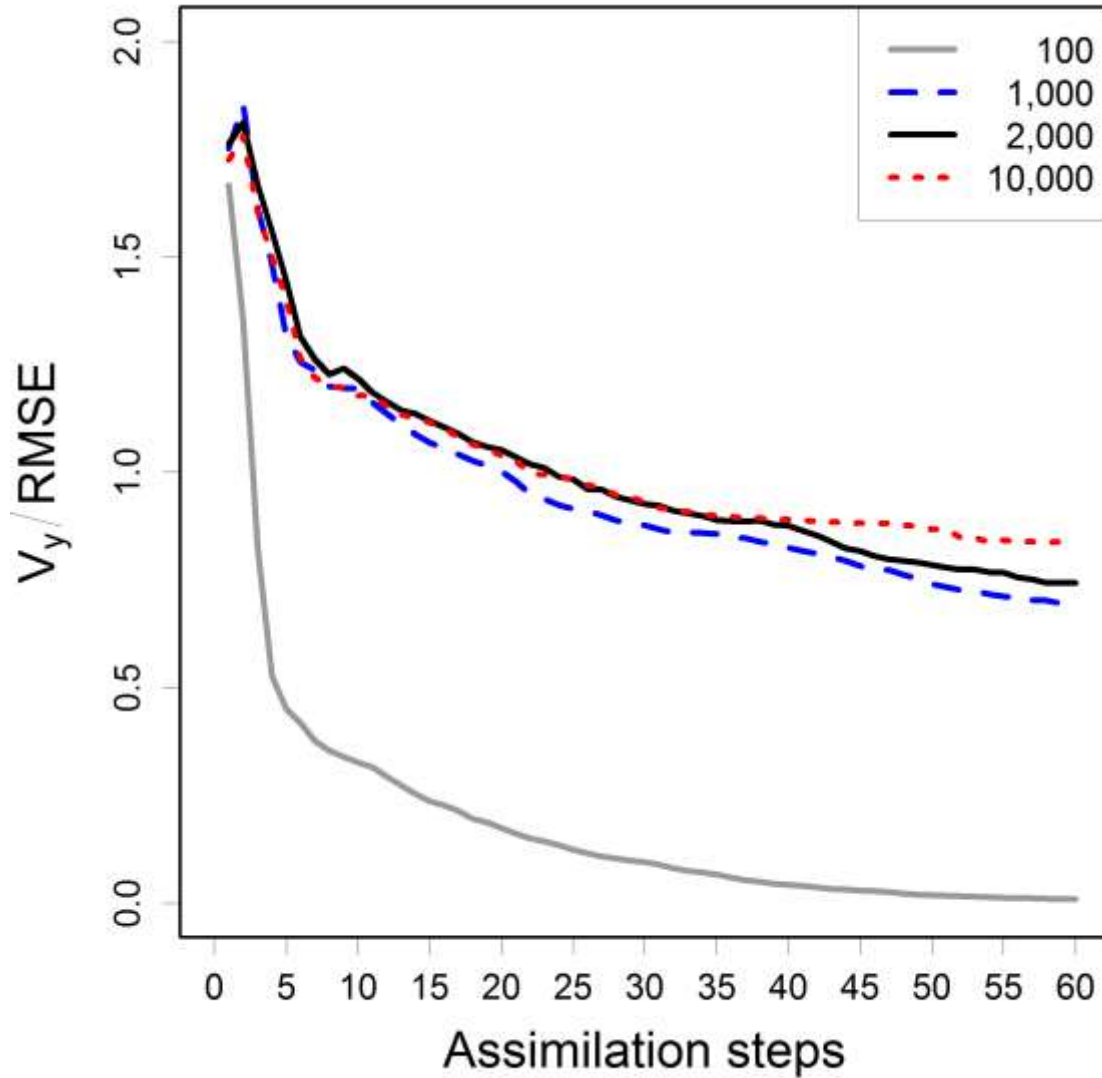


Figura 22. Evaluación de la relación $V_y/RMSE_y$ en cada paso de asimilación con la referencia 1 y con diferentes tamaños del ensamble. Los resultados de un tamaño del ensamble de 100 realizaciones se muestran en línea continua gris, de 1000 realizaciones en línea discontinua azul, de 2000 realizaciones en línea continua negra y de 10 mil realizaciones en línea punteada roja.

Asimilación de carga hidráulica h

Las Figuras 23 y 24 contienen los perfiles de carga hidráulica (izquierda), conductividad hidráulica (en medio) y longitud del elemento (derecha) en los tres primeros pasos de asimilación de h y en los pasos 10, 30 y 60 de asimilación de h con la referencia 1. En las figuras se presentan los resultados promedio del algoritmo 1D en línea negra, el promedio del ensamble asimilado en línea roja, la realización de referencia en línea azul, el doble de la desviación estándar en línea punteada naranja y los puntos verdes representan las posiciones de las observaciones.

En la Figura 23 se observa que a medida que se avanza en el tiempo la respuesta del algoritmo 1D (línea negra) es más parecida al promedio del ensamble asimilado (línea roja). En el primer paso de asimilación (Figura 23a) el ensamble promedio asimilado adopta las seis medidas de h pero presenta notables diferencias en la base del acuitardo con la referencia 1 (línea azul) y la respuesta del algoritmo 1D (línea negra); en este periodo, el ensamble promedio de Y comienza a mostrar diferencias con el algoritmo 1D y a adoptar la forma de la referencia 1, sobretodo en la parte inferior del acuitardo (Figura 23b). En la parte inferior del acuitardo la longitud de los elementos es menor con el algoritmo 1D y el ajuste del promedio del ensamble asimilado con la referencia 1 es inmediato (Figura 23c). En el segundo paso de asimilación, el ensamble promedio tanto de h como de Y y de Le , está más próximo a la referencia 1, incluso en la parte media del acuitardo (Figura 23d, 23e y 23f). En el tercer paso de asimilación, el ensamble promedio de h y Le , y la respuesta promedio del algoritmo 1D coinciden con la referencia 1 en la mayor parte de la columna del acuitardo a excepción de algunos nodos en la base (Figura 23g y 23i); en cambio para Y aún se

encuentran diferencias entre el ensamble promedio, la respuesta promedio del algoritmo 1D y la referencia 1 (Figura 23h).

En los siguientes pasos de asimilación (Figura 24), se observa que el ensamble promedio de h y Le coincide perfectamente con la respuesta del algoritmo 1D y ambos presentan mínimas diferencias con la referencia 1 (Figura 24a, 24d, 24g, 24c, 24f y 24i); en cuanto al ensamble promedio de Y y la respuesta del algoritmo 1D, se tiene que prácticamente se comportan como la media de la referencia 1 (Figura 24b, 24e y 24h). De esta forma, en el último paso de asimilación de h con la referencia 1, se tiene un error cuadrático medio para la carga hidráulica $RMSE_h$ de 0.13 m y un error cuadrático medio para conductividad hidráulica $RMSE_Y$ de 1.14 m/s. En general, la banda de confianza disminuye su distancia con respecto a la media del ensamble, sobretodo en la base del acuitardo y en la posición de las observaciones, con cada paso de asimilación.

Al observar la asimilación de h con las otras tres referencias, se encuentra el mismo comportamiento donde hay un ajuste rápido del ensamble medio de la carga hidráulica en los primeros pasos de asimilación y en el último paso de asimilación, el ensamble medio de la conductividad hidráulica es prácticamente la media móvil de la referencia. En éste último paso de asimilación, para la referencia 2 se tiene $RMSE_h$ de 0.14 m y $RMSE_Y$ de 1.05 m/s; para la referencia 3 el valor de $RMSE_h$ es 0.17 m y $RMSE_Y$ de 1.17 m/s; en la referencia 4 se tiene un $RMSE_h$ de 0.16 m y $RMSE_Y$ de 0.84 m/s.

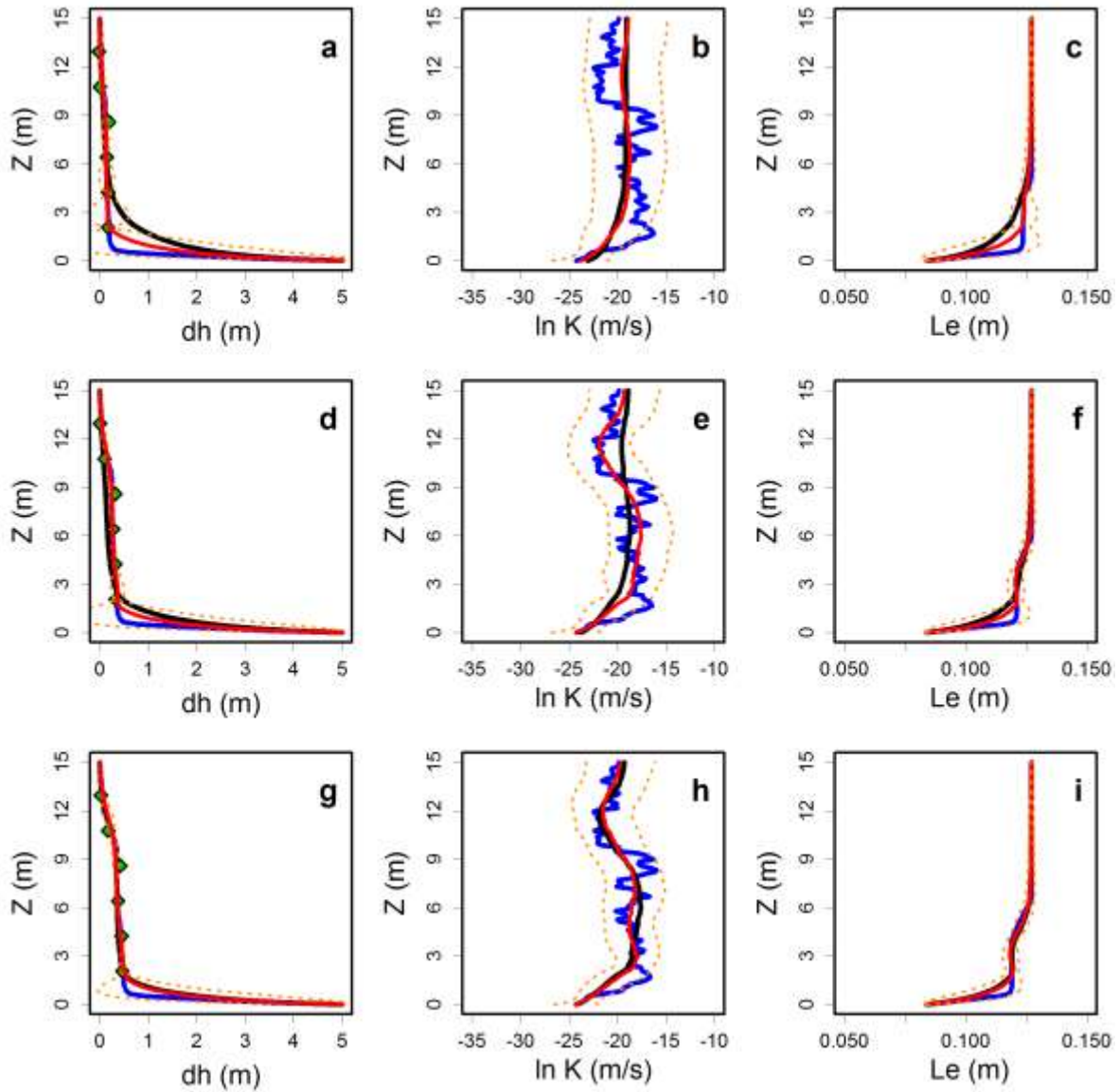


Figura 23. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

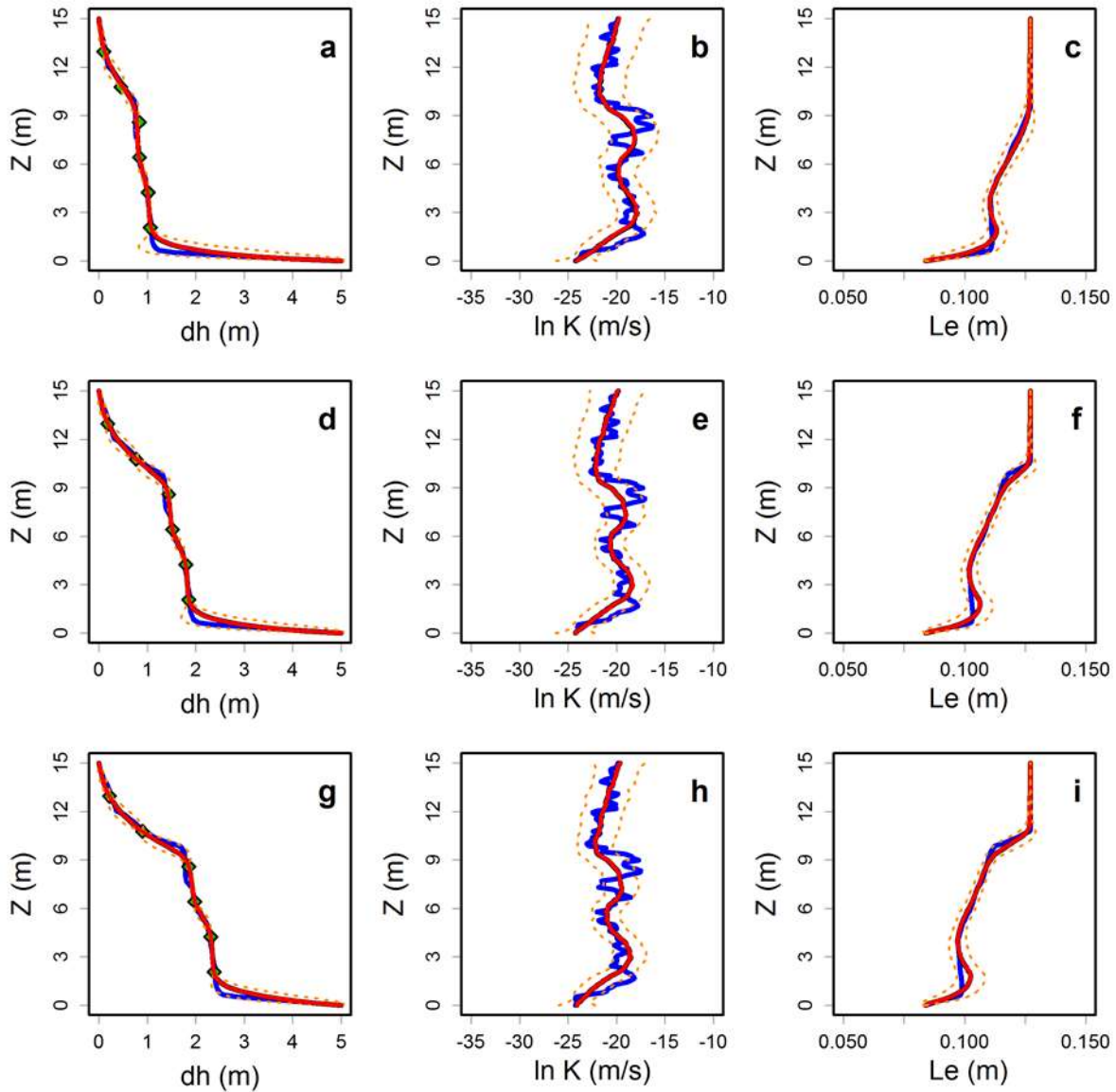


Figura 24. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Asimilación de conductividad hidráulica Y

En las Figuras 25 y 26 se tienen los perfiles de carga hidráulica (izquierda), conductividad hidráulica (en medio) y longitud del elemento (derecha) en los tres primeros pasos de asimilación de Y y en los pasos 10, 30 y 60 de asimilación de Y con la referencia 1.

En la Figura 25a se muestra que al asimilar Y , en el primer paso de asimilación se tiene una diferencia notable entre el ensamble medio asimilado de h y Le , la respuesta promedio del algoritmo 1D y la referencia 1 (Figura 25a y 25c). Mientras que en la conductividad hidráulica, el promedio del ensamble asimilado y la referencia 1 coinciden rápidamente (Figura 25b). En el segundo periodo de asimilación de Y , el algoritmo de subsidencia no lineal 1D predice mayor abatimiento y menor longitud de elemento que la referencia 1, por lo que el ensamble medio asimilado se mantiene cercano a la referencia 1 (Figura 25d y 25f); en cuanto al promedio del ensamble asimilado de Y , presenta diferencias mínimas con la referencia 1 y el algoritmo 1D en la base del acuitardo (Figura 25e). En el tercer paso de asimilación, la carga hidráulica y deformación promedio del algoritmo 1D es ligeramente mayor que el ensamble promedio asimilado y la referencia 1 (Figura 25g y 25f); mientras que en la conductividad hidráulica, el ensamble promedio asimilado coincide perfectamente con la respuesta promedio del algoritmo 1D, ambos se consideran una aproximación a la media de la referencia 1 (Figura 25h).

En las Figuras 26a, 26d, 26g, 26c, 26f y 26i, tanto para h como para Le , se observa que el promedio del algoritmo 1D y el promedio del ensamble asimilado coinciden, ambos se acercan al comportamiento de la referencia 1 pero sus diferencias aún son notables. En las Figuras 26b, 26e y 26h, se observa que la respuesta promedio del algoritmo 1D se ajusta perfectamente al promedio del ensamble asimilado, y ambos son aproximadamente la media

de la referencia 1. En el último paso de asimilación de Y , se tiene un $RMSE_h$ de 0.29 m y un $RMSE_Y$ de 1.04 m/s.

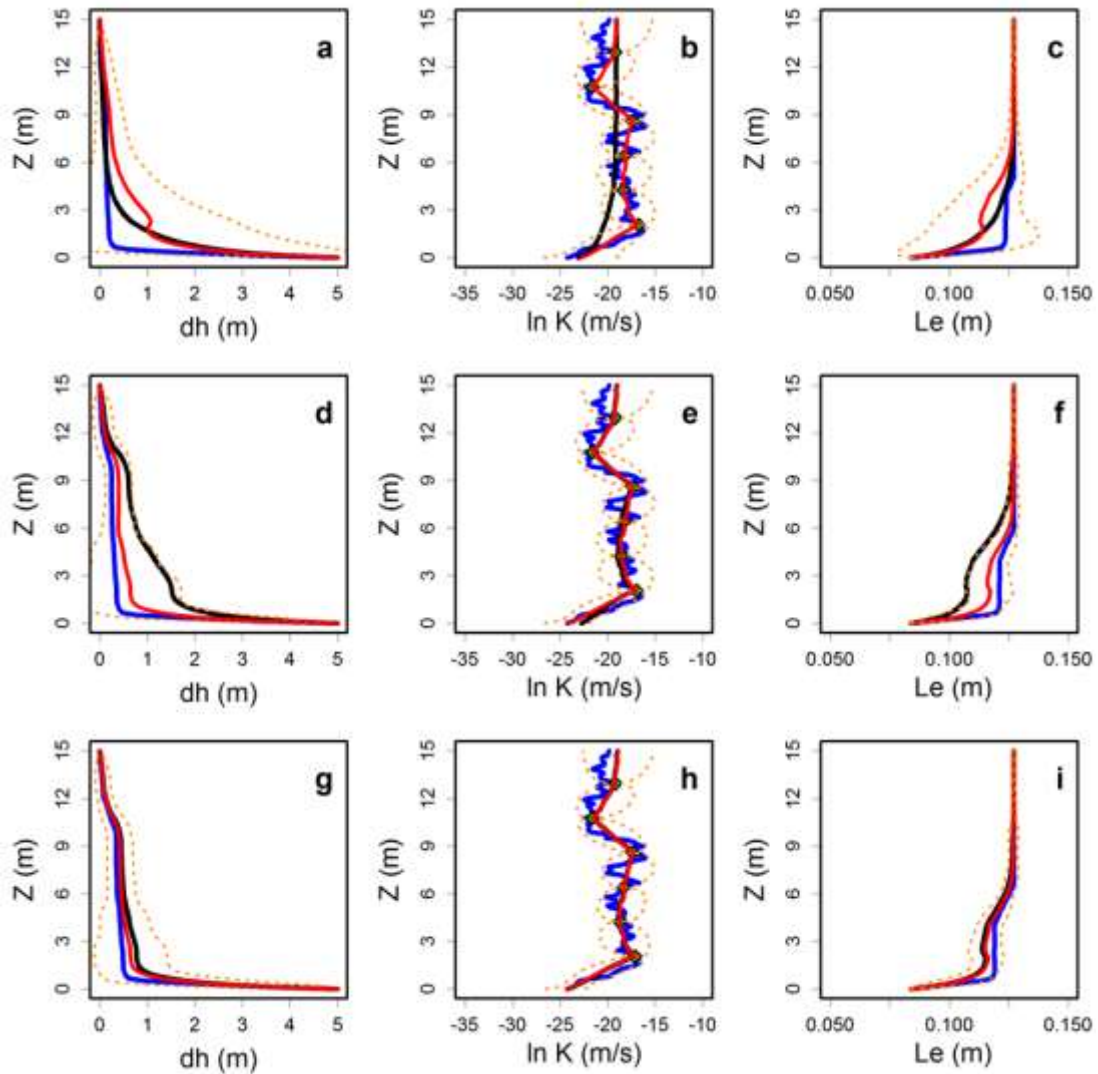


Figura 25. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

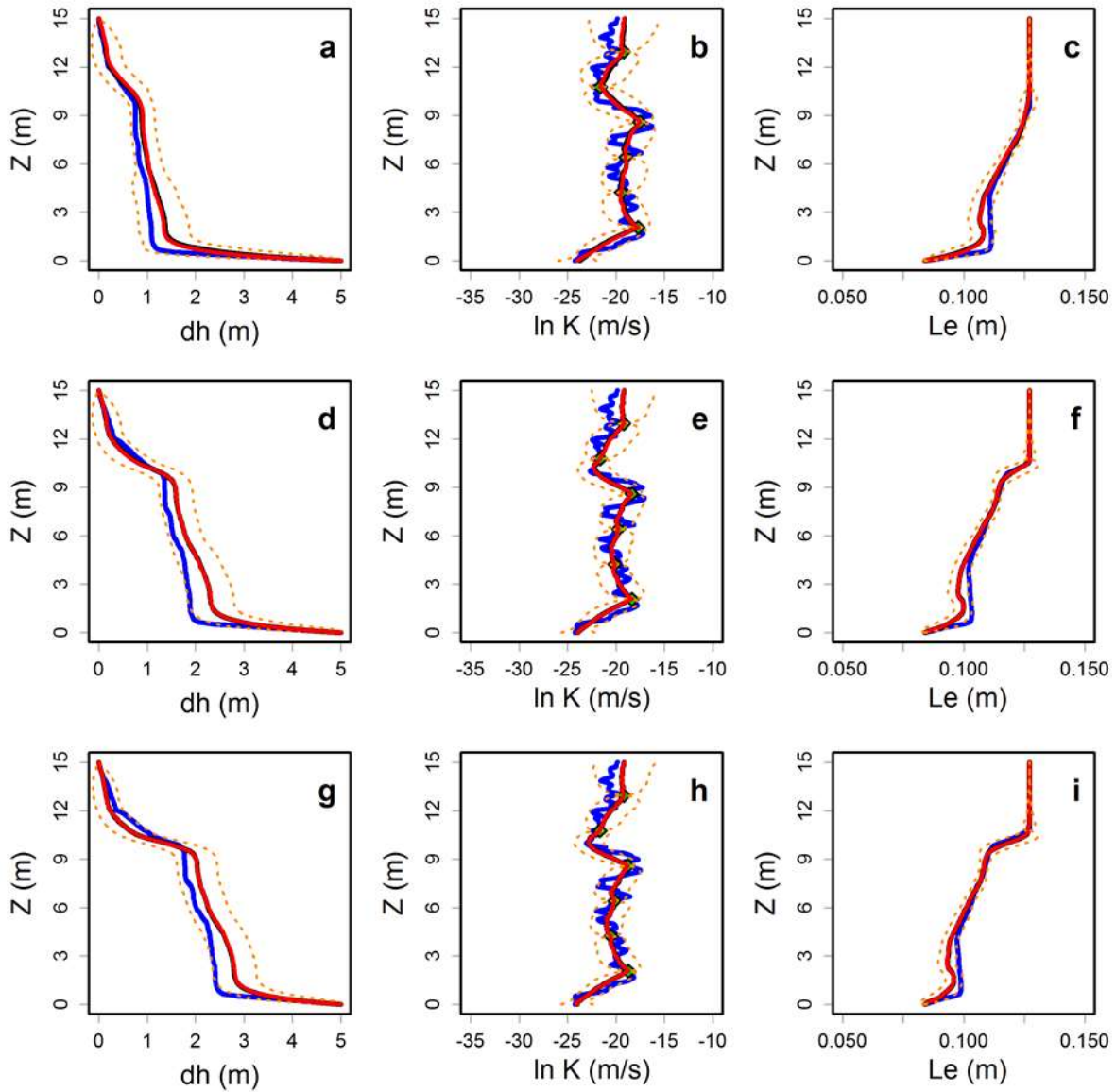


Figura 26. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Al observar la asimilación de Y con las otras tres referencias, se encontró que hay una buena aproximación entre la realización de referencia y el promedio del ensamble asimilado de Y . En el último paso de asimilación, para la referencia 2 se tiene un $RMSE_h$ de 0.19 m y un $RMSE_Y$ de 0.99 m/s; para la referencia 3, el $RMSE_h$ es 0.17 m y el $RMSE_Y$ es 1.43 m/s; finalmente, para la referencia 4 se tiene $RMSE_h$ de 0.23 m y $RMSE_Y$ de 0.97 m/s.

Asimilación de carga hidráulica h y conductividad hidráulica Y

En las Figuras 27 y 28 se presentan los perfiles de carga hidráulica (izquierda), conductividad hidráulica (en medio) y longitud del elemento (derecha) en los tres primeros pasos de asimilación de h - Y y en los pasos 10, 30 y 60 de asimilación de h - Y con la referencia 1.

En la Figura 27 se observa que en los primeros pasos de asimilación, el ensamble promedio asimilado de h y Le se ajusta rápidamente a la referencia 1, manteniendo como distribución intermedia a la respuesta promedio del algoritmo 1D. En tanto que el ajuste del ensamble promedio asimilado de Y con la referencia 1 es relativamente más lento.

En la Figura 28 se observa que para h , Le y Y , la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D coincide perfectamente con el promedio del ensamble asimilado y en ambos casos, esta distribución se acerca al promedio de la referencia 1. En el último paso de asimilación, el $RMSE_h$ es 0.19 m y el $RMSE_Y$ es 1.22 m/s.

Al evaluar la asimilación conjunta de h e Y con otras tres referencias, encontramos que el promedio del ensamble asimilado se ajusta rápidamente con la realización de referencia. En este caso, para la referencia 2 se presentó en el último paso de asimilación un $RMSE_h$ de 0.19 m y un $RMSE_Y$ de 1.12 m/s; para la referencia 3 un $RMSE_h$ de 0.25 y $RMSE_Y$ de 1.61 m/s; y para la referencia 4, un $RMSE_h$ de 0.14 m y $RMSE_Y$ de 0.88 m/s.

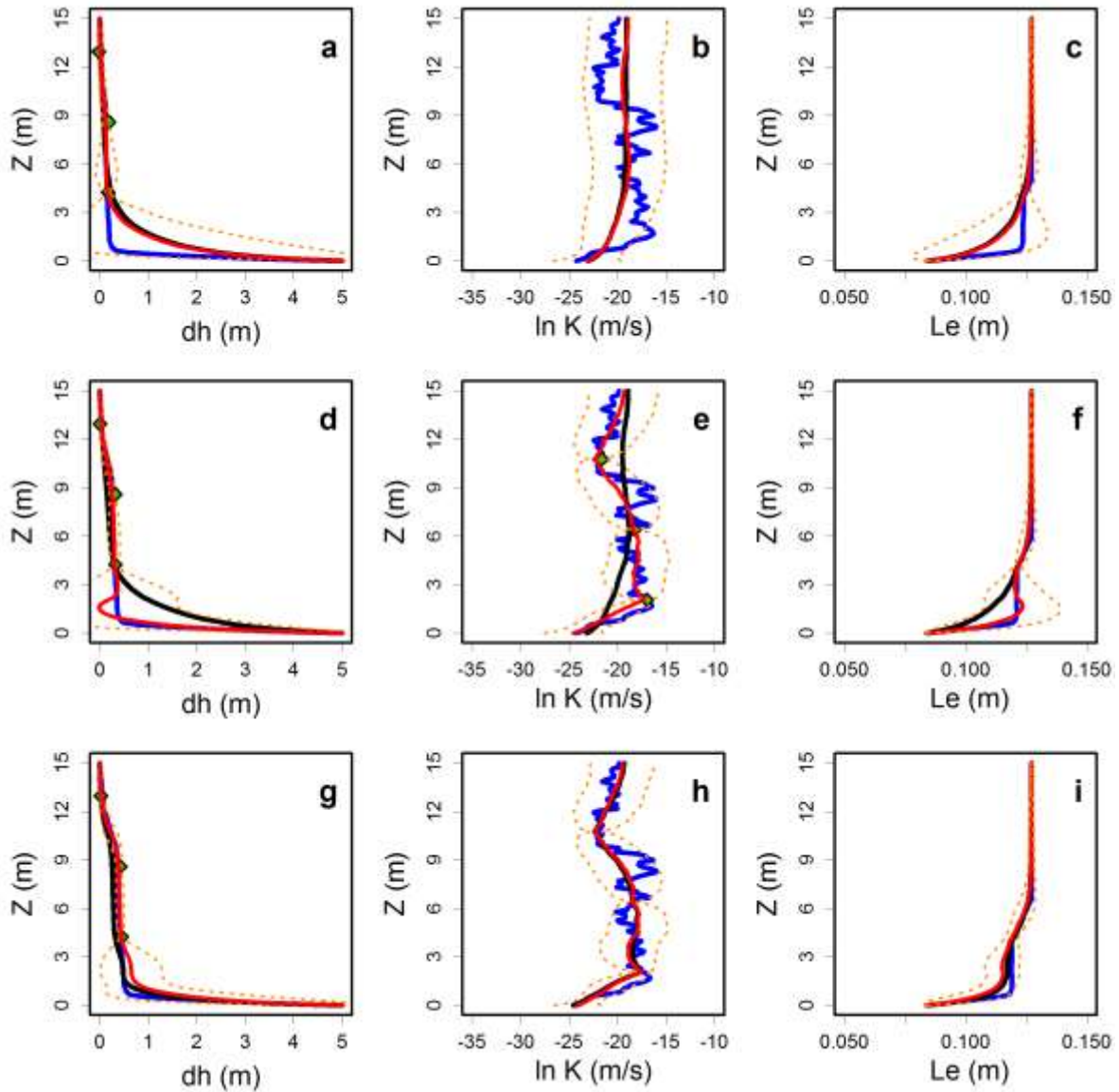


Figura 27. Resultados de asimilación de carga hidráulica y conductividad hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

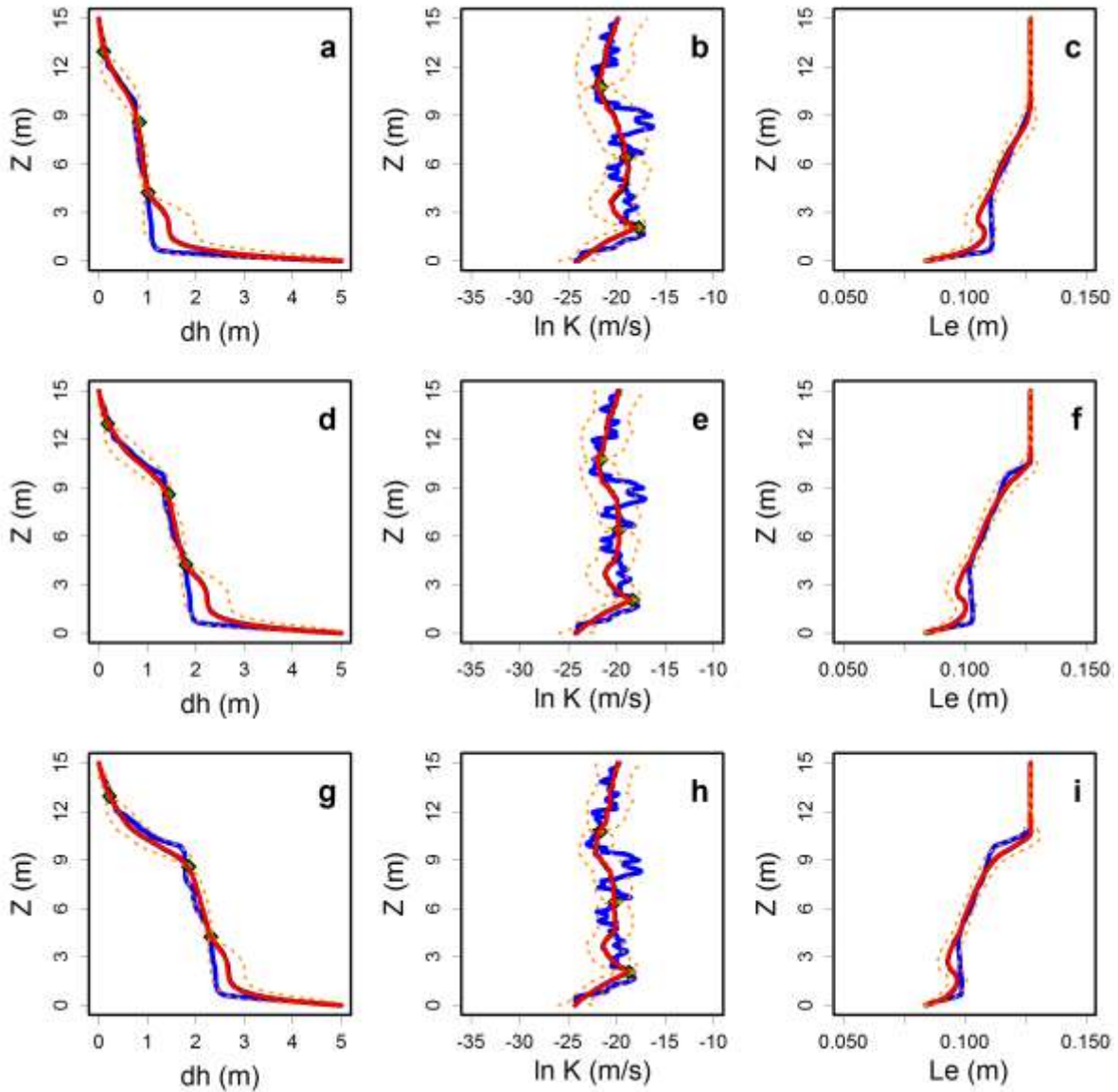


Figura 28. Resultados de asimilación de carga hidráulica y conductividad hidráulica con la referencia 1. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

En la Tabla 5 se tiene un resumen de la evaluación de los errores en los tres casos de asimilación. En la Tabla 5 se observa que la relación $V_Y/RMSE_Y$ se encuentra en un rango de 0.43 a 0.79, lo que indica una subestimación de la matriz de covarianza del ensamble.

Tabla 5. Evaluación de errores en h y Y en cada caso de asimilación. R es referencia, $RMSE_Y$ es el error cuadrático medio de Y , V_Y es la varianza de Y , $RMSE_h$ es el error cuadrático medio de h , V_h es la varianza de h .

R	Caso de asimilación	$RMSE_Y$ (m/s)	V_Y (m/s) ²	$V_Y/RMSE_Y$	$RMSE_h$ (m)	V_h (m) ²
1	h 5 años	1.14	0.85	0.74	0.13	1.04E-02
	Y 5 años	1.04	0.76	0.73	0.29	3.91E-02
	h 5 años / Y 10 años	1.22	0.75	0.62	0.19	1.71E-02
2	h 5 años	1.05	0.63	0.60	0.14	6.48E-03
	Y 5 años	0.99	0.78	0.79	0.19	4.53E-02
	h 5 años / Y 10 años	1.12	0.73	0.66	0.19	1.43E-02
3	h 5 años	1.17	0.84	0.72	0.17	1.05E-02
	Y 5 años	1.43	0.91	0.64	0.17	2.26E-02
	h 5 años / Y 10 años	1.61	0.69	0.43	0.25	1.76E-02
4	h 5 años	0.84	0.81	0.96	0.16	5.44E-02
	Y 5 años	0.97	0.94	0.97	0.23	2.60E-02
	h 5 años / Y 10 años	0.88	0.87	0.99	0.14	4.15E-02

Calibración del asentamiento

Con los tres casos de asimilación anteriores se obtiene también la corrección de la simulación del asentamiento total en el acuitardo heterogéneo altamente compresible. En la Figura 29 se presenta la simulación del asentamiento corregida con (a, d, g, j) asimilación de carga hidráulica h , (b, e, h, k) asimilación de conductividad hidráulica Y y (c, f, i, l) asimilación de carga hidráulica h y conductividad hidráulica Y . A simple vista se observa que el mejor ajuste

para la referencia 1 se obtiene asimilando medidas conjuntas de h y Y (Figura 29c), en este caso, la diferencia entre el asentamiento de la referencia 1 y el promedio del ensamble asimilado en el último paso de asimilación es -0.04 m, es decir, que el asentamiento se sobreestima en 1.79%, el $RMSE_s$ del ensamble es 0.09 m y la varianza del ensamble es 6.46×10^{-3} m². El caso intermedio para el ajuste del asentamiento con la referencia 1 se presenta al asimilar medidas de h (Figura 29c), con respecto a la referencia 1 se logra una diferencia de 0.05 m que equivale a subestimar el asentamiento en 2.3%, el $RMSE_s$ del ensamble es 0.09 m y la varianza del ensamble es 6.59×10^{-3} m². Finalmente, el caso donde se obtiene el menor ajuste del asentamiento con la referencia 1, se logra al asimilar medidas de Y (Figura 29b), donde la diferencia entre el asentamiento simulado con la referencia 1 y el promedio del ensamble asimilado es -0.14 m, por lo cual se sobreestima el asentamiento en 6.7%, el $RMSE_s$ del ensamble es 0.16 m y la varianza del ensamble es 7.97×10^{-3} m².

Con respecto a la referencia 2, se obtuvo mejor calibración del asentamiento al asimilar medidas de Y (Figura 29e) y el caso con mayor error se obtuvo asimilando medidas de h y Y (Figura 29f). Cuando se asimilan medidas de Y , la diferencia entre la referencia 2 y el promedio del ensamble asimilado es casi nula; cuando asimilamos medidas de h , la diferencia entre los asentamientos es -0.02 m; y al asimilar medidas de h y Y , la diferencia de asentamientos es 0.11 m. La mayor varianza del ensamble se obtiene asimilando medidas de h y la menor varianza asimilando observaciones de $h-Y$ (Tabla 6).

En la referencia 3, se logró una mejor calibración con asimilación de medidas de h y Y (Figura 29i), y una calibración pobre al asimilar medidas de h (Figura 29g). En este caso, las diferencias entre el asentamiento de la referencia 3 y el promedio del ensamble asimilado son 0.05 m para la asimilación de h y Y , -0.11 m al asimilar Y , y -0.14 m al asimilar h . Para esta

referencia, la mayor varianza del ensamble se obtiene asimilando medidas de Y y la menor varianza asimilando medidas de h (Tabla 6).

Para la referencia 4, se observó un caso similar a la referencia 3, donde el mejor ajuste del asentamiento se obtiene con asimilación de h y Y (Figura 29i), y el menor ajuste con asimilación de h (Figura 29j). Con asimilación de h y Y se obtiene una diferencia entre el asentamiento determinado con la referencia 4 y el promedio del ensamble asimilado de -0.07 m; con asimilación de Y la diferencia entre asentamientos es -0.10 m; y con asimilación de h la diferencia entre asentamientos es -0.14 m. En la referencia 4, la mayor varianza del ensamble se obtuvo asimilando observaciones de Y y la menor varianza del ensamble asimilando medidas conjuntas de h - Y (Tabla 6).

Tabla 6. Evaluación de errores en asentamiento en cada caso de asimilación. R es referencia, D_s es la diferencia entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble, e_s es error porcentual entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio, V_s es varianza del ensamble de asentamientos y $RMSE_s$ es el error cuadrático medio del asentamiento con respecto a la referencia.

R	Caso de asimilación	D_s (m)	e_s [%]	V_s (m) ²	$RMSE_s$ (m)
1	h 5 años	0.05	2.30	6.59E-03	0.09
	Y 5 años	-0.14	-6.66	7.97E-03	0.16
	h 5 años / Y 10 años	-0.04	-1.79	6.46E-03	0.09
2	h 5 años	-0.02	-0.49	1.05E-02	0.10
	Y 5 años	0.00	0.05	7.60E-03	0.09
	h 5 años / Y 10 años	0.11	3.54	6.75E-03	0.14
3	h 5 años	-0.14	-8.77	5.58E-03	0.16
	Y 5 años	-0.11	-7.07	1.21E-02	0.16
	h 5 años / Y 10 años	0.05	3.34	8.74E-03	0.11
4	h 5 años	-0.14	-12.35	7.28E-03	0.16
	Y 5 años	-0.10	-9.22	9.08E-03	0.14
	h 5 años / Y 10 años	-0.07	-6.68	6.28E-03	0.11

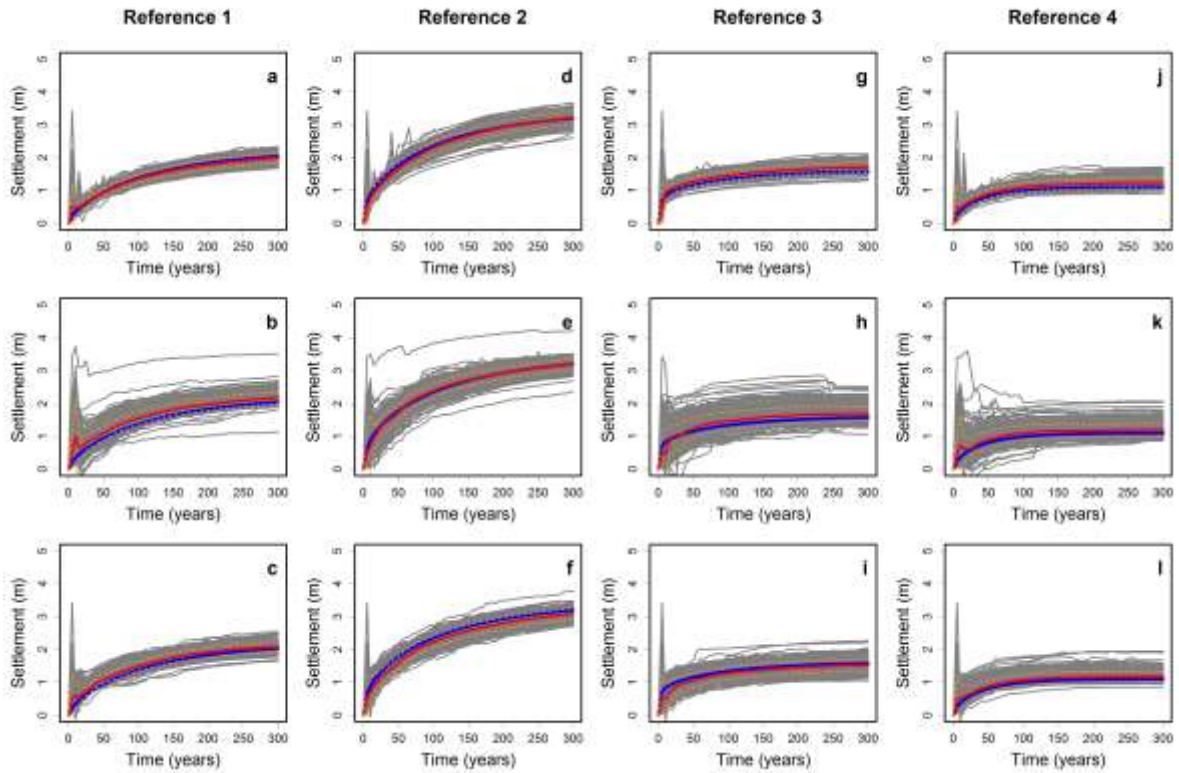


Figura 29. Asentamiento total corregido con (a, d, g, j) asimilación de h , (b, e, h, k) asimilación de Y y (c, f, i, l) asimilación de h y Y . Cada columna presenta los resultados de una realización de referencia. Las líneas grises representan la respuesta de los miembros del ensamble, la línea azul el asentamiento generado con la realización de referencia, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y la línea roja es el promedio del ensamble asimilado.

Al comparar los resultados de las cuatro realizaciones de referencia, se encontró que los mayores errores en el ajuste del asentamiento de referencia y el ensamble promedio se presentan en las referencias 3 y 4. En el caso de la referencia 3, con varianza inicial de $Y=3.89 \text{ m}^2/\text{s}^2$, existen ciertos patrones de heterogeneidad en Y que no se alcanzan a incorporar en el proceso de asimilación debido a que la posición de las medidas no coinciden con ellos,

sobretudo en la parte superior del acuitardo. En el caso de la referencia 4, con varianza inicial de $Y=0.94 \text{ m}^2/\text{s}^2$, ocurre un caso similar a la referencia 3, donde las posiciones de las medidas no coinciden exactamente con los cambios marcados de Y , y este contraste está presente en la mayor parte de la columna del acuitardo.

Impacto del número de pasos de asimilación en la simulación del asentamiento

En las simulaciones anteriores, se asimilaron medidas durante todo el periodo de interés de simulación del asentamiento, es decir, durante 300 años mediante 60 pasos de asimilación. En esta sección se analiza el impacto que tendría en la simulación del asentamiento, el utilizar sólo los primeros cinco pasos de asimilación y dejar que la simulación con el algoritmo de subsidencia no lineal 1D continúe hasta completar 300 años.

En la Figura 30 se tiene la simulación del asentamiento con solamente cinco pasos de asimilación de (a, d, g, j) carga hidráulica h , (b, e, h, k) conductividad hidráulica Y y (c, f, i, l) carga hidráulica h y conductividad hidráulica Y . En la primera columna se tienen los resultados para la realización de referencia 1 (Figura 30a, 30b y 30c). En la Figura 30 se muestra que en todos los casos, la varianza del ensamble aumenta hasta finalizar la simulación. En la primera columna de la Figura 30 (a, b, c) se observa que durante los primeros tiempos hay un ajuste del promedio del ensamble asimilado que en el caso (30c) lo lleva a coincidir perfectamente con la referencia 1, pero en los casos (30a) y (30b) se mantiene menor que la referencia 1. En la segunda columna de la Figura 30 (d, e, f), se muestra que el ajuste entre la referencia 2 y el ensamble promedio se logra en tiempos tempranos pero en tiempos largos el ensamble promedio es menor a la referencia 2. El mejor ajuste para la referencia 2 se obtiene asimilando medidas combinadas h - Y por medio de cinco pasos de asimilación (Figura 30f). En la tercer columna de la Figura 30 (g, h, i), se muestra

que el ensemble promedio se ajusta mejor a la referencia 3 asimilando medidas de h , mientras que en los otros casos, este ajuste se logra solamente en tiempos tempranos. En la cuarta columna de la Figura 30 (j, k, l), se observa que el mejor ajuste del promedio del ensemble y la referencia 4 se logra asimilando medidas combinadas h - Y y, al igual que en las otras referencias, las asimilación de h y la asimilación de Y producen mejores resultados en tiempos tempranos.

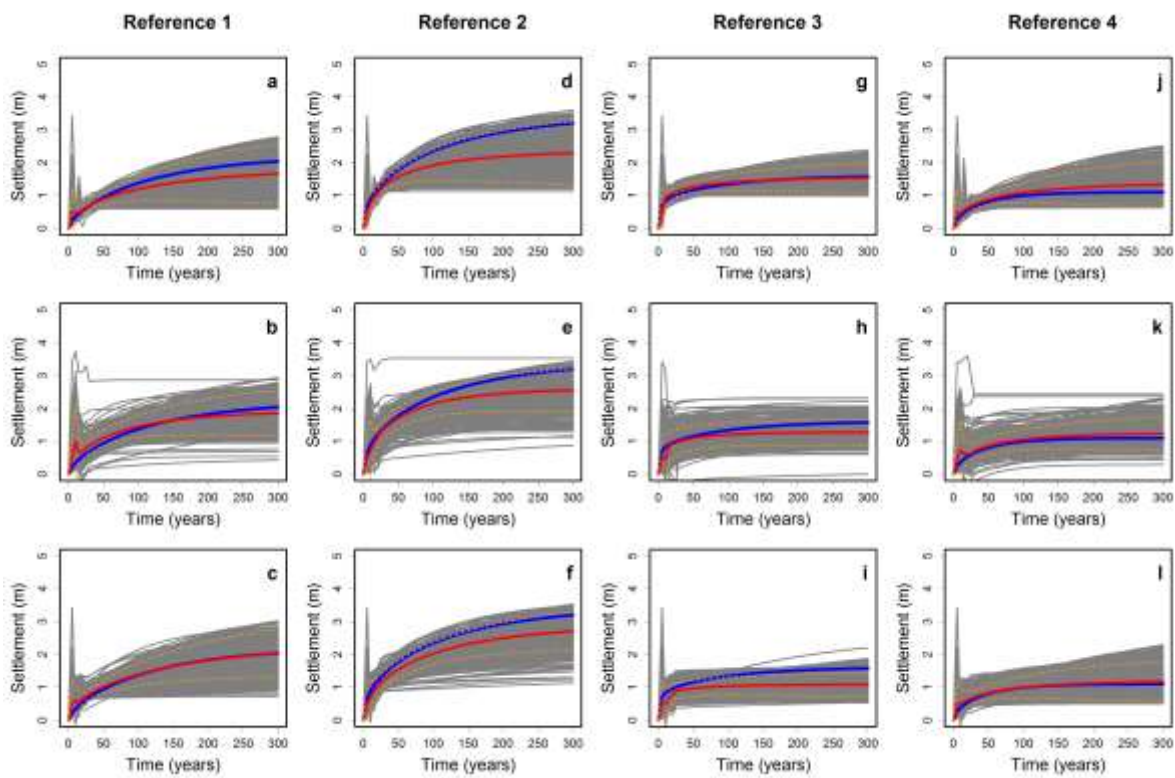


Figura 30. Asentamiento total corregido con sólo 5 pasos de (a, d, g, j) asimilación de h , (b, e, h, k) asimilación de Y y (c, f, i, l) asimilación de h y Y . Cada columna presenta los resultados de una realización de referencia. La línea azul representa el asentamiento generado con la realización de referencia, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y la línea roja es el promedio del ensemble asimilado.

En la Tabla 7 se resumen los errores en el proceso de calibración del asentamiento utilizando el EnKF con sólo cinco pasos de asimilación.

Tabla 7. Evaluación de errores en asentamiento en cada caso de asimilación. R es referencia, D_s es la diferencia entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble, e_s error porcentual entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio, V_s es varianza del ensamble de asentamientos y $RMSE_s$ es el error cuadrático medio del asentamiento con respecto a la referencia.

R	Caso de asimilación	D_s (m)	e_s [%]	V_s (m) ²	$RMSE_s$ (m)
1	<i>h</i> 5 años	0.38	18.56	0.21	0.59
	<i>Y</i> 5 años	0.18	9.03	0.12	0.39
	<i>h</i> 5 años / <i>Y</i> 10 años	2.97E-03	0.15	0.13	0.36
2	<i>h</i> 5 años	0.92	28.56	0.23	1.03
	<i>Y</i> 5 años	0.64	20.10	0.11	0.72
	<i>h</i> 5 años / <i>Y</i> 10 años	0.49	15.35	0.08	0.57
3	<i>h</i> 5 años	0.04	2.69	0.05	0.23
	<i>Y</i> 5 años	0.30	19.19	0.04	0.36
	<i>h</i> 5 años / <i>Y</i> 10 años	0.49	31.29	0.03	0.53
4	<i>h</i> 5 años	-0.24	-21.55	0.12	0.42
	<i>Y</i> 5 años	-0.13	-12.27	0.06	0.29
	<i>h</i> 5 años / <i>Y</i> 10 años	-0.07	-6.66	0.10	0.32

En la Tabla 7 se observa que al asimilar medidas de *h* y dejar correr el algoritmo de subsidencia no lineal hasta 300 años, se tiene una diferencia entre el asentamiento simulado con la referencia 1 y el promedio del ensamble asimilado de 0.38 m con varianza del ensamble de 0.21 m². Con la referencia 2, la diferencia entre en promedio del ensamble y el asentamiento de referencia es 0.92 m y la varianza del ensamble es 0.23 m². En la referencia 3, el promedio del ensamble difiere del asentamiento de referencia en 0.04 m y la varianza

del ensamble es 0.05 m^2 . En la referencia 4, se obtuvo una diferencia con el promedio del ensamble de -0.24 m y una varianza del ensamble de 0.12 m^2 .

Si se asimilan medidas de Y en tiempos tempranos y se continúa la simulación, al final de 300 años se tiene una diferencia de asentamiento con respecto a la referencia 1, de 0.18 m con varianza del ensamble de 0.12 m^2 . Con la referencia 2, se obtiene una diferencia entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble de 0.64 m con varianza del ensamble de 0.11 m^2 . La referencia 3 se difiere del promedio del ensamble en 0.30 m , y en este caso, la varianza del ensamble es 0.04 m^2 . Para la referencia 4, el ensamble promedio difiere del asentamiento de referencia en -0.13 m y la varianza del ensamble fue 0.06 m^2 .

En el caso de asimilación de h y Y en sólo 5 pasos, al final de una simulación de 300 años se tiene una diferencia entre el asentamiento de la referencia 1 y el promedio del ensamble de $2.97 \times 10^{-3} \text{ m}$ con varianza de 0.13 m^2 . Con la referencia 2 se obtuvo una diferencia con el ensamble promedio de 0.49 m con varianza de 0.08 m^2 . En la referencia 3, la diferencia entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio fue 0.49 m con varianza del ensamble de 0.03 m^2 . Con la referencia 4, se obtuvo una diferencia entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio de 0.07 m y una varianza del ensamble de 0.10 m^2 .

Si se comparan los resultados de las cuatro realizaciones de referencia, se observa que el mayor error entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio se presenta en la referencia 2, asimilando medidas de h (Figura 30d), con error máximo de hasta 0.92 m que representa una subestimación del asentamiento de 28%. La referencia 2, posee la mayor varianza inicial de Y , con $4.35 \text{ m}^2/\text{s}^2$, por lo que se concluye que la capacidad predictiva se ve afectada por una varianza inicial en la realización de referencia mayor a la asignada al ensamble inicial de Y ($4.01 \text{ m}^2/\text{s}^2$).

Por otro lado, los errores más bajos en la simulación y calibración del asentamiento se obtienen al asimilar medidas combinadas de h - Y con las referencias 1, 2 y 4, mientras que para el caso de la referencia 3 se obtienen errores menores en la simulación y calibración del asentamiento al asimilar medias de h .

Conclusiones

Para enfrentar la alta no linealidad de la ecuación de flujo y consolidación 1D durante la implementación del EnKF, se propuso actualizar estados (carga hidráulica h y longitud del elemento Le) y parámetros (Y) en cada paso de asimilación. A diferencia de Chang *et al.* (2009) donde en cada asimilación actualizan parámetros, utilizan un método iterativo para corregir estados (manteniendo consistente la física del fenómeno), reinician el tiempo de simulación para avanzar al siguiente paso de tiempo y nuevamente corregir parámetros.

En el caso sintético elaborado se carece de observaciones de asentamiento (o longitud vertical en cada elemento de la malla Le) por lo que para corregir la simulación de asentamiento solamente se utilizó (indirectamente) la matriz de covarianza del ensamble (h , Y y Le). Esta opción generó buenos resultados de acuerdo a los valores de $RMSE_s$, en torno al ensamble medio asimilado y su referencia, que se presentaron en un rango de 0.09 a 0.16 m.

Con la implementación del EnKF propuesta se encontró una buena aproximación al asentamiento de referencia asimilando solamente medidas de h durante episodios que cubren todo el periodo de interés, en este caso 300 años. En cambio, si durante el periodo de interés se asimilan medidas solamente en los primeros 5 pasos de asimilación, la mejor alternativa para corregir el asentamiento se presenta asimilando medidas de h - Y . En este caso, si la

referencia utilizada tiene mayor varianza inicial de Y que el ensamble inicial de Y , se producen errores grandes en la calibración del asentamiento promedio.

Con respecto a la evaluación de errores en el proceso de asimilación, se encontró que los tres casos de asimilación presentan cierto grado de subestimación de la matriz de covarianza del ensamble, ya que la relación V_Y/RMSE_Y determinó valores entre 0.43 y 1.0. Lo anterior se debe a un valor alto en el RMSE_Y que indica que no hay buena aproximación a la referencia. Por ejemplo en la referencia 1, al asimilar medidas conjuntas de $h-Y$, en el último paso de asimilación (Figura 28h) se aprecia que en posiciones z entre 8 y 9 m, el ensamble promedio de Y no coincide con la referencia debido a la ausencia de medidas en esas posiciones.

En conclusión, la desventaja de la aplicación del EnKF para la calibración del asentamiento en acuitardos heterogéneos altamente compresibles puede ser en el número y posición vertical de las observaciones. La ventaja es que proporciona una simulación sistemática que concluye con un valor medio o esperado para el asentamiento así como una medida de incertidumbre, ambos corregidos a partir de los parámetros de referencia, en un ejemplo real a partir de datos de campo.

Capítulo 7

Estrategias para mejorar la asimilación de datos con el EnKF en acuitardos heterogéneos altamente compresibles

Introducción

En este capítulo se investiga el efecto del número de observaciones y tamaño del ensamble en la calibración del asentamiento mediante el EnKF. La simulación del asentamiento se realiza mediante un modelo de flujo y consolidación 1D en acuitardos heterogéneos altamente compresibles. Se utiliza un modelo sintético del acuitardo de la Ciudad de México, donde las fronteras son cargas hidráulicas conocidas, y los estadísticos de los parámetros se asignaron con ayuda de una revisión previa de la literatura. De acuerdo a Zapata-Norberto *et al.* (2018) el parámetro que tiene mayor influencia en la simulación del asentamiento es K , por esa razón en esta investigación se trata como variable aleatoria. Se utiliza el EnKF como método de calibración del modelo de subsidencia no lineal 1D. En el EnKF se asimilan medidas de h e Y cada 5 y 10 años, respectivamente por medio de 60 pasos de asimilación. Las simulaciones fueron evaluadas mediante el cociente $V_Y/RMSE_Y$ que indica si existe un error de subestimación de la matriz de covarianza del ensamble.

Métodos

El algoritmo de subsidencia no lineal 1D, el método numérico para su resolución, el algoritmo del filtro de Kalman ensamblado y su estrategia de implementación para esta investigación, fueron descritos en el Capítulo 3.

Para esta simulación, se construyó una malla con 118 nodos de 0.127 m de distancia nodal (DN). El tiempo total de simulación fue 300 años. Por otro lado, la no linealidad de la ecuación fue abordada por un método predictor-corrector y el paso de tiempo fue restringido a 1 día aproximadamente para evitar grandes cambios en los parámetros.

Caso de estudio

Se utiliza el caso sintético de estudio desarrollado en el Capítulo 6, el cual se basa en el ejemplo de Rudolph y Frind (1991) de un acuitardo de 15 m de espesor. En este caso, tratamos la conductividad hidráulica como variable aleatoria y los parámetros restantes como deterministas y cuya distribución a profundidad se proporciona en la Figura 31.

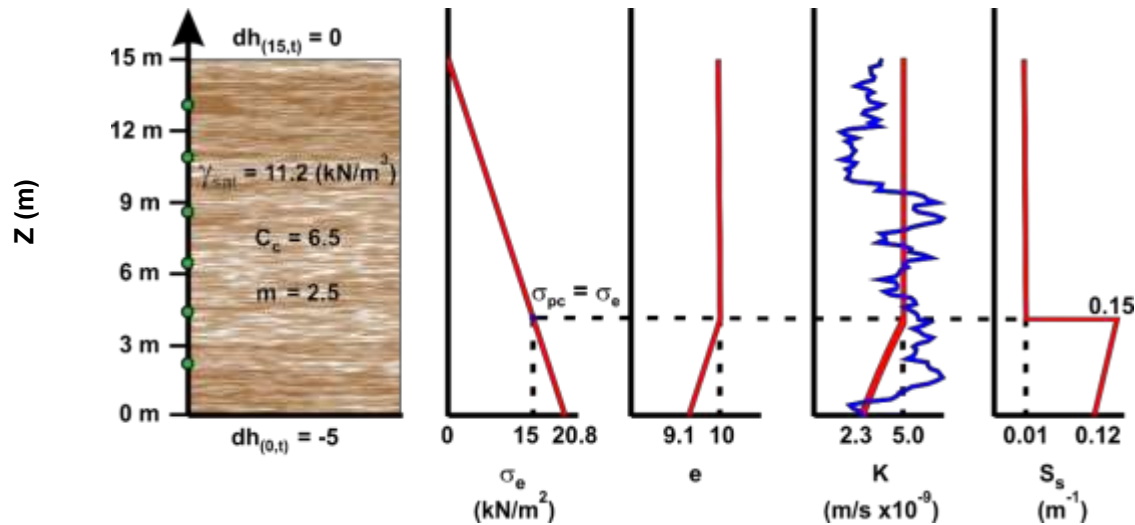


Figura 31. Caso de estudio (adaptado de Rudolph y Frind, 1991). Los puntos verdes simbolizan la posición de las observaciones, en este Capítulo el número de observaciones son variables.

Heterogeneidad en K

Se aplicó el método de Simulación Secuencial Gaussiana implementado en el paquete RandomFields (Schlater *et al.*, 2016) en R (R Core Team, 2018) para generar 100, 1000, 2000 y 10,000 realizaciones de Y ($\ln K$). En este método se indicó covarianza exponencial, escala integral de 2.1 m, media cero y varianza de $4.01 \text{ m}^2/\text{s}^2$. La media de las realizaciones de Y fue reescalada para tomar la media del caso determinista (Figura 31, línea roja) y consideradas como Y inicial en el algoritmo no lineal de subsidencia 1D.

Observaciones para EnKF

Con el método anteriormente descrito se generó una realización de Y ($\ln K$) con los mismos atributos estadísticos de las realizaciones. Esta realización sirvió como perfil inicial de K en el algoritmo de subsidencia no lineal 1D, el cual generó la simulación de referencia. De esta simulación de referencia se extrajeron medidas de h y Y cada 5 años. Las observaciones de h y Y se perturbaron mediante errores gaussianos con desviación estándar de 0.05 m y 0.5 m/s, respectivamente.

El número de observaciones fue elegido, variando la distancia de separación entre posiciones para asimilar medidas. De esta manera, al utilizar una distancia de 1.0 m se dispone de 12 posiciones, si utilizamos 1.5 m de distancia de separación se producen 8 posiciones, al elegir 2.1 m de distancia de separación entre medidas se establecen 6 posiciones y con 2.5 m de separación entre medidas se generan 5 posiciones; todas ellas distribuidas uniformemente en la coordenada vertical. En todos los casos, utilizamos observaciones de h cada 5 años y observaciones de Y cada 10 años, además, los conjuntos de medidas, disponen posiciones intercaladas de h y Y .

Finalmente, para descartar que el tamaño del ensamble sea la causa principal de errores en el proceso de asimilación, utilizamos un incremento en el número de miembros del ensamble de 100, 1000, 2000 y 10,000 miembros. Para el desarrollo de este caso, se utilizó un conjunto de observaciones de 6 elementos intercalados de h y Y .

Resultados y discusión

Efecto del número de observaciones

En la Figura 32 se presenta el asentamiento corregido asimilando un número diferente de medidas. En la Figura 32, se presenta el número de medidas utilizadas para la corrección del asentamiento en orden descendente: a) asimilación de 12 medidas conjuntas de h y Y , b) asimilación de 8 medidas de h y Y , c) asimilación de 6 medidas de h y Y , d) asimilación de 5 medidas de h y Y , y asimilación de 4 medidas de h y Y . En la figura, las líneas grises representan los resultados de cada miembro del ensamble, la línea roja es el promedio del ensamble, la línea azul es la simulación de referencia y la línea discontinua naranja es el doble de la desviación estándar con respecto al promedio del ensamble. En la Tabla 8 se presenta la evaluación de errores en el proceso de asimilación para el último paso de asimilación.

En general para el asentamiento, se observa que al utilizar un número de medidas más grande, se obtiene menor error entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble, menor varianza del ensamble (Tabla 8) y un rápido ajuste entre el asentamiento de referencia y la media del ensamble desde tiempos tempranos y a lo largo de la simulación (Figura 32). En cuanto a carga hidráulica h y conductividad hidráulica Y , también se observa que a medida que disminuye el número de medidas, aumenta el RMSE y la varianza del ensamble (Tabla

8). En el caso de Y , se observa que conforme disminuye el número de medidas, aumenta la relación $V_Y/RMSE_Y$, es decir, disminuye el error de subestimación de la matriz de covarianza del ensamble.

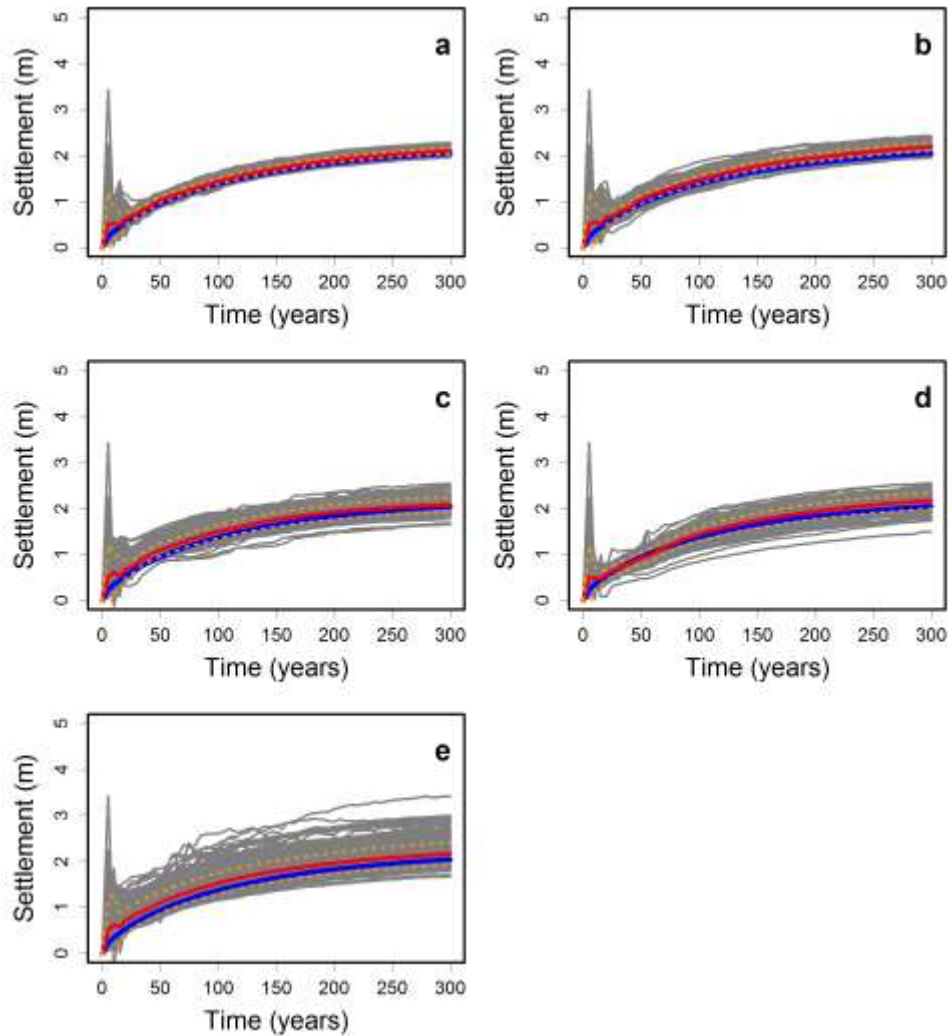


Figura 32. Asentamiento total corregido con (a) 12 medidas de $h-Y$, (b) 8 medidas de $h-Y$, (c) 6 medidas de $h-Y$, (d) 5 medidas de $h-Y$ y (e) 4 medidas de $h-Y$. La línea azul representa el asentamiento generado con la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y la línea roja es el promedio del ensamble asimilado.

Tabla 8. Evaluación de errores al final de la simulación en cada caso de asimilación.

RMSE_Y es el error cuadrático medio de la conductividad hidráulica, V_Y es varianza del ensamble de conductividad hidráulica, V_Y/RMSE_Y es el cociente que evalúa la subestimación de la covarianza de Y, RMSE_h es el error cuadrático medio de la carga hidráulica, V_h es varianza del ensamble de carga hidráulica, D_s es la diferencia entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble, e_s error porcentual entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio, V_s es varianza del ensamble de asentamientos y RMSE_s es el error cuadrático medio del asentamiento con respecto a la referencia.

Número de medidas	12	8	6	5	4
RMSE _Y (m/s)	0.96	0.89	1.22	1.17	1.11
V _Y (m/s) ²	0.31	0.54	0.75	1.00	1.23
V _Y /RMSE _Y	0.33	0.61	0.62	0.86	1.11
RMSE _h (m)	0.12	0.11	0.19	0.10	0.18
V _h (m) ²	3.82x10 ⁻³	7.13x10 ⁻³	1.71x10 ⁻²	1.28x10 ⁻²	3.26x10 ⁻²
D _s (m)	-0.06	-0.14	-0.04	-0.13	-0.13
e _s [%]	-2.88	-6.96	-1.79	-6.23	-6.26
V _s (m) ²	9.53x10 ⁻⁴	1.92x10 ⁻³	6.46x10 ⁻³	7.77x10 ⁻³	1.46x10 ⁻²
RMSE _s (m)	0.07	0.15	0.09	0.15	0.18

Efecto de tamaño del ensamble

La Figura 33 muestra la corrección del asentamiento con asimilación de 6 medidas de h - Y y tamaño del ensamble de (a) 100 realizaciones, (b) 1,000 realizaciones, (c) 2,000 realizaciones y (d) 10,000 realizaciones. En la Tabla 9 se presenta la evaluación de errores en el último paso de asimilación.

En la Figura 33 se observa que hay un incremento de la incertidumbre alrededor del ensamble medio con el incremento del tamaño del ensamble; así, para un ensamble de 100 realizaciones hay una varianza del asentamiento de $8.27 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, y para un ensamble de 10,000 realizaciones hay una varianza de $7.12 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. También hay buena correspondencia entre el promedio del ensamble y la referencia, con una ligera sobreestimación del asentamiento. De acuerdo a la Tabla 9, la diferencia entre el ensamble de referencia y el promedio del ensamble disminuye al aumentar el tamaño del ensamble, y genera errores porcentuales en un rango de -1.34% (para 10,000 realizaciones) hasta -2.01% (para 100 realizaciones), que corresponden con un RMSE_s de 0.09 m y 0.05 m, respectivamente.

En la Tabla 9 también se muestra que el RMSE disminuye y la varianza de Y aumenta con el tamaño del ensamble, por consiguiente, la relación V_Y/RMSE_Y también aumenta, y esto indica que se disminuye el efecto de subestimación de la matriz de covarianza del ensamble. En el caso de h , el valor del RMSE y la varianza aumentan con el tamaño del ensamble.

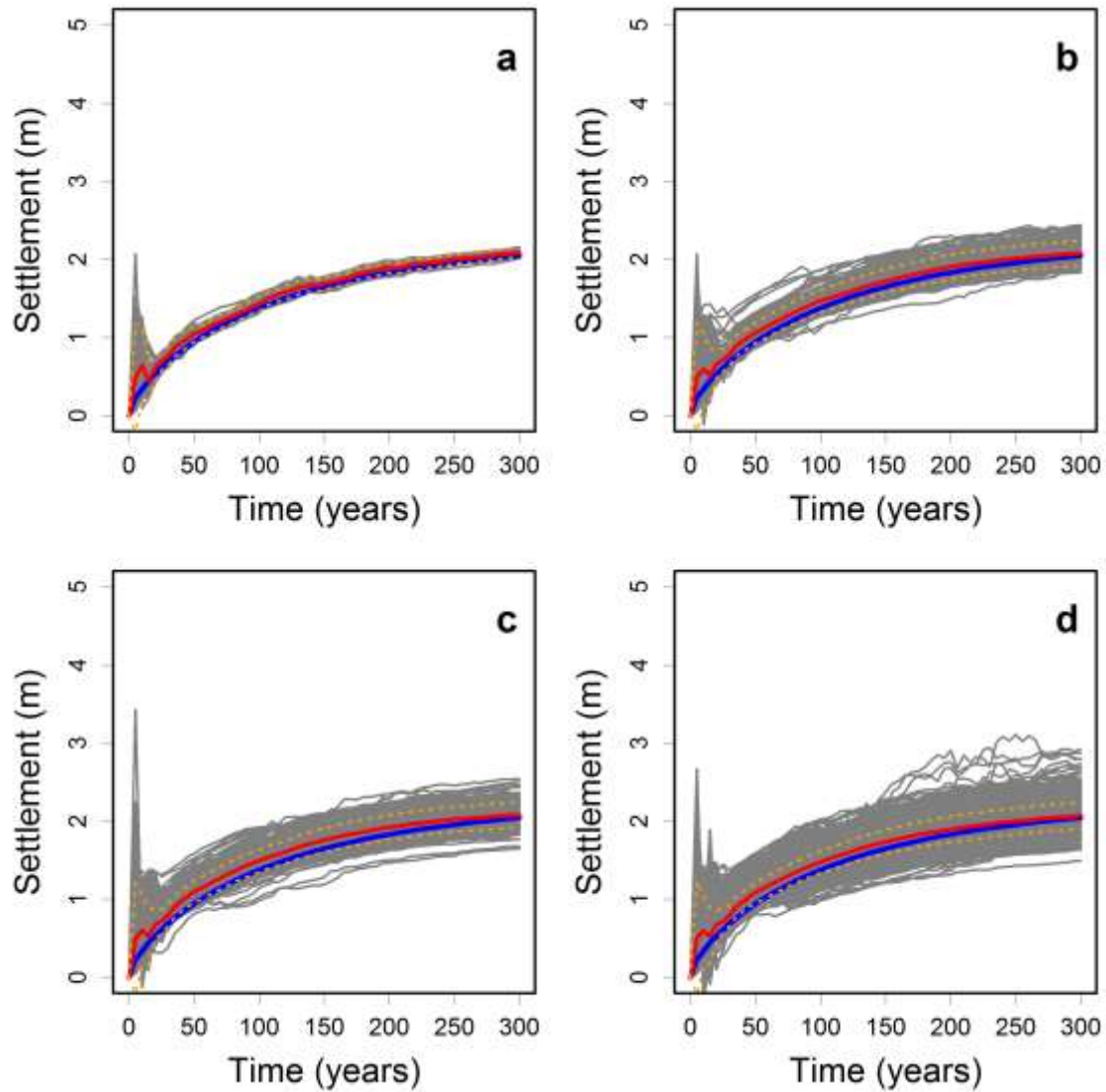


Figura 33. Asentamiento total corregido con 6 medidas de h - Y y un ensemble de (a) 100 realizaciones, (b) 1,000 realizaciones, (c) 2,000 realizaciones y (d) 10,000 realizaciones. La línea azul representa el asentamiento generado con la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y la línea roja es el promedio del ensemble asimilado.

Tabla 9. Evaluación de errores en el último paso de asimilación con diferente tamaño del ensamble. $RMSE_Y$ es el error cuadrático medio de la conductividad hidráulica, V_Y es varianza del ensamble de conductividad hidráulica, $V_Y/RMSE_Y$ es el cociente que evalúa la subestimación de la covarianza de Y , $RMSE_h$ es el error cuadrático medio de la carga hidráulica, V_h es varianza del ensamble de carga hidráulica, D_s es la diferencia entre el asentamiento de referencia y el promedio del ensamble, e_s error porcentual entre el asentamiento de referencia y el ensamble promedio, V_s es varianza del ensamble de asentamientos y $RMSE_s$ es el error cuadrático medio del asentamiento con respecto a la referencia.

Tamaño del ensamble	100 realizaciones	1,000 realizaciones	2,000 realizaciones	10,000 realizaciones
$RMSE_Y$ (m/s)	1.55	1.17	1.22	1.18
V_Y (m/s) ²	0.08	0.69	0.75	0.94
$V_Y/RMSE_Y$	0.05	0.59	0.62	0.80
$RMSE_h$ (m)	0.17	0.14	0.19	0.16
V_h (m) ²	6.89×10^{-4}	1.12×10^{-2}	1.71×10^{-2}	1.97×10^{-2}
D_s (m)	-0.04	-0.04	-0.04	-0.03
e_s [%]	-2.01	-1.85	-1.79	-1.34
V_s (m) ²	8.27×10^{-4}	6.23×10^{-3}	6.46×10^{-3}	7.12×10^{-3}
$RMSE_s$ (m)	0.05	0.09	0.09	0.09

Conclusiones

En esta sección se experimentó con el número de medidas a asimilar por medio del EnKF, se encontró que a medida que se disminuye el número de observaciones de h - Y aumentan el RMSE y la varianza de h y Y debido a que la ausencia de medidas provoca una pobre estimación en determinadas posiciones verticales. Lo anterior, conlleva a un error en la

calibración del asentamiento a través de la matriz de covarianza del ensamble, por lo que también se observa disminución del RMSE y la varianza del ensamble.

En la investigación del efecto del tamaño del ensamble con 6 observaciones de h - Y se encontró que el RMSE tanto de h y como de Y aumenta de manera casi imperceptible pero la varianza de ambos si presenta un aumento notable. Lo anterior genera un aumento de la relación V_Y/RMSE_Y , que indica una disminución del efecto de subestimación de la matriz de covarianza del ensamble. Con una mejor representación de la matriz de covarianza del ensamble se mejora la estimación del asentamiento, por tanto, al aumentar el tamaño del ensamble también se disminuye el error porcentual entre el asentamiento de referencia y la media del ensamble, por otro lado, se aumenta la varianza del asentamiento. Además, se observa que las diferencias entre la referencia y los resultados del último paso de asimilación con un ensamble de 2 mil realizaciones y un ensamble de 10 mil realizaciones son casi imperceptibles.

Finalmente, para optimizar los resultados de la calibración del asentamiento y su incertidumbre asociada mediante asimilación de datos con el EnKF, se puede utilizar un ensamble de 2,000 realizaciones y un conjunto de 6 medidas de h - Y .

CONCLUSIONES GENERALES

La aplicación del algoritmo de subsidencia no lineal 1D permitió simular el flujo y consolidación en el acuitardo a escala de algunos centímetros hasta metros; además proporciona un análisis de la evolución de los parámetros hidráulicos y geomecánicos a dicha escala y durante un periodo de simulación largo (hasta 300 años). La posible desventaja del algoritmo radica en que es un modelo desacoplado del acuífero, sin embargo, acoplarlo a un modelo 2D o 3D de un acuífero subyacente es completamente factible y puede ser un tópico a explorar en un trabajo futuro.

En la simulación del asentamiento de acuitardos altamente compresibles y su incertidumbre, se encontró que la conductividad hidráulica es el parámetro que más contribuye a la varianza (y por ende a la incertidumbre) en la simulación del asentamiento, ya que tiene la varianza más notable, cuya magnitud alcanza órdenes en escala logarítmica. Adicionalmente, se encontró que el caso determinista de Rudolph y Frind (1991) subestima la simulación del asentamiento, sobretodo en tiempos largos de simulación.

Se encontró que al utilizar dos variables aleatorias correlacionadas en la simulación del asentamiento y su incertidumbre, el promedio del ensamble y su incertidumbre asociada aumentan con el coeficiente de Spearman utilizado para determinar la correlación de los parámetros en cópulas normales bivariadas. De esta forma, una correlación negativa $Y-C_c$ presenta menor asentamiento e incertidumbre, mientras que una correlación positiva $Y-C_c$ tiene mayor asentamiento e incertidumbre asociada.

Al comparar los casos que consideran simulaciones con una variable aleatoria y dos variables aleatorias, se encuentra que el caso con correlación nula $Y-C_c$ presenta resultados similares

al caso con sólo Y aleatoria. Lo anterior se debe a que la varianza inicial de Y es predominante en ambos casos.

Por otro lado, se encontró que en la simulación del asentamiento con dos variables aleatorias se presenta un aumento de la incertidumbre al aumentar la escala integral.

La ventaja de utilizar cópulas normales bivariadas es que simulan la correlación entre parámetros, en este caso utilizamos conductividad hidráulica Y y el índice de compresión C_c , mientras que en otros casos de simulación de asentamiento, se utilizan que el coeficiente de consolidación c_v (Xiaoyong y Liaoqi, 2010), el volumen de compresibilidad m_v (Huang *et al.*, 2010; Chenari y Noori, 2006) o el módulo elástico (Badaoui *et al.*, 2007) junto con la permeabilidad como variables aleatorias independientes y no correlacionadas.

En la aplicación del filtro de Kalman ensamblado EnKF, se propuso un vector estado compuesto por carga hidráulica, logaritmo de conductividad hidráulica y longitud del elemento en la malla $\{h, Y, Le\}$. Se encontró que al actualizar estados y parámetros en cada paso de asimilación, se obtiene un análisis consistente con el asentamiento. Por otro lado, para la corrección del asentamiento solamente se utilizó la matriz de covarianzas del ensamble en ausencia de observaciones de desplazamientos verticales.

En este caso, no fue necesario realizar una serie de iteraciones adicionales al modelo de subsidencia no lineal 1D para ajustar y corregir los parámetros restantes como se menciona en Chong *et al.* (2009). En la simulación, utilizamos la carga hidráulica corregida, en el siguiente paso de tiempo, para determinar nuevamente el abatimiento con su correspondiente esfuerzo efectivo y corregimos la relación de vacíos, el diferencial de conductividad hidráulica y el coeficiente de almacenamiento específico.

Con respecto al conjunto de medidas, se propuso utilizar observaciones de estados (carga hidráulica h), parámetros (logaritmo de conductividad hidráulica Y) y medidas combinadas de los anteriores. Se encontró que cuando se asimilan medidas mediante 60 pasos de asimilación cada 5 años, se obtienen mejores resultados al asimilar observaciones de h . Pero si solo utilizamos los primeros 5 pasos de asimilación (un paso cada 5 años) y dejamos que la simulación continúe hasta completar 300 años (es decir, 55 pasos sin incorporar medidas), se obtienen mejores resultados del asentamiento asimilando medidas combinadas de h y Y .

En un esfuerzo por mejorar la calibración del asentamiento incorporando observaciones por medio del algoritmo del EnKF, se utilizaron diferentes distancias en las posiciones de las observaciones. De esta manera, se simularon casos de asimilación que utilizaron 12, 8, 6, 5 y 4 observaciones combinadas de h y Y . Con estas simulaciones se determinó que la distancia entre las observaciones de h y Y utilizadas en conjunto debe ser aproximada a la escala integral (caso de 6 medidas) para evitar errores de subestimación en la matriz de covarianza y un error porcentual pequeño entre el asentamiento medio y su referencia. Por otro lado, en ensayos de asimilación con diferentes tamaños del ensamble, se determinó que un ensamble de 2,000 realizaciones es suficiente para proporcionar resultados óptimos.

LIMITACIONES Y MODIFICACIONES POSTERIORES

En cuanto al algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la principal limitación es que las fronteras están desacopladas, es decir que no simulan la interacción del flujo en el acuitardo y los acuíferos. Esto se implementó así en este trabajo por simplicidad computacional. Ya Neuman et al. (1982) demostraron que acoplar este algoritmo en un modelo cuasi 3D es completamente factible. En este ejercicio deben considerarse los ciclos de descompresión (disminución del esfuerzo efectivo) donde debe usarse el coeficiente de recompresión C_{rc} , de manera que se simule la respuesta elástica del medio poroso. Esta modificación servirá para analizar el efecto de fluctuaciones cíclicas por efectos ambientales (recarga variable, por ejemplo) así como estrategias de inyección de agua para disminuir el efecto de la subsidencia.

Con respecto al EnKF, sería conveniente considerar dos variables aleatorias para darle seguimiento al caso con variables correlacionadas. En este caso deberá modificarse el vector estado y/o el algoritmo de subsidencia no lineal 1D para poder obtener la evolución de C_c en el tiempo.

Con respecto al modelo conceptual del acuitardo del valle de México en que se basa este trabajo, debe tenerse en cuenta que se presentó una simplificación de la unidad arcillosa superior, en una columna de 15 m, y que corresponde a un modelo determinista presentado por Rudolph y Frind (1991). Los sedimentos lacustres en el valle de México alcanzan 300 m de espesor en algunas zonas (Ortega-Guerrero *et al.*, 2015; Ortega-Guerrero *et al.*, 2017) donde las propiedades geomecánicas cambian a profundidad y donde se encuentran sedimentos menos compresibles. Para poder simular los 13.5 m de asentamiento acumulado se necesita una representación más completa de las diferentes porciones del acuitardo representando adecuadamente el espesor y la estratigrafía. Los resultados de esta tesis

demuestran que es posible aproximar los cambios temporales (dependientes del cambio en el esfuerzo efectivo) y la variabilidad vertical de los parámetros hidrogeológicos. En trabajo futuro se prevé investigar la capacidad del algoritmo en medios estratificados. Adicionalmente, ésta representación debe incluir un esfuerzo para reproducir asentamientos observados en campo deberá contener medidas a profundidad y en diferentes tiempos del esfuerzo efectivo, relación de vacíos o porosidad, índices de compresión y recompresión, permeabilidad, presión hidrostática, asentamientos, historial de extracción del acuífero y/o profundidad, etc. Además, debe tenerse en cuenta que la extracción del agua subterránea se lleva a cabo desde hace más de 100 años y durante ese tiempo el acuitardo ha sufrido estrés, así que las condiciones iniciales y de frontera son complejas.

Por otro lado, para probar la metodología completa con el EnKF, se requieren medidas de campo ya sean de carga hidráulica h y/o conductividad hidráulica Y . Para el caso con datos de campo, deberá realizarse una modificación que incluya medidas de asentamiento. Debido a que la escala es de centímetros a metros, deberán utilizarse observaciones de asentamientos derivadas de bancos de nivel profundos y éstas pueden complementarse con las magnitudes de asentamientos determinados de técnicas de percepción remota (InSAR).

REFERENCIAS

Auvinet G (2009) Land subsidence in Mexico City. In: Auvinet GY, Juárez M (eds) Geotechnical engineering in urban areas affected by land subsidence. Volume prepared by ISSMGE Technical Committee 36 for XVII ISSMGE Conference, Alexandria, Egypt, 2009. Mexican Society of Soil Mechanics, Mexico City, pp 3–11.

Abidin HZ, Andreas H, Gumilar I, Fukuda Y, Pohan YE, Deguchi T (2011) Land subsidence of Jakarta (Indonesia) and its relation with urban development, *Natural Hazards* 59:1753, DOI: 10.1007/s11069-011-9866-9.

Abidin HZ, Andreas H, Gumilar I, Sidiq TP, Fukuda Y (2012) Land subsidence in coastal city of Semarang (Indonesia): characteristics, impacts and causes, *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 4(3):226-240, DOI: 10.1080/19475705.2012.692336

Álvarez-Cáceres R (2007) *Estadística aplicada a Ciencias de la Salud*. Primera edición, Ed. Díaz de Santos, España.

Badaoui M, Nour A, Slimani A, Berrah MK (2007) Consolidation statistics investigation via thin layer method analysis, *Transp Porous Med*, 67: 69, doi.org/10.1007/s11242-006-0021-0.

Baù D, Ferronato M, Gambolati G, Teatini P (2014) Ensemble smoothing of land subsidence measurements for reservoir geomechanical characterization. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, published on line, doi: 10.1002/nag.2309.

Bouttier F, Courtier P (1999) Data assimilation concepts and methods. *Meteorological Training Course Lecture Series*, ECMWF.

Burbey TJ (2005) Use of vertical and horizontal deformation data with inverse models to quantify parameters during aquifer testing. *Proceedings of the 7th International Symposium on Land Subsidence* 2:560–569.

Burbey TJ, Helm DC (1999) Modeling three-dimensional deformation in response to pumping of unconsolidated aquifers, *Env Eng Geosci* 5:199-212.

Burgers G, Jan van Leeuwen P, Evensen G (1998) Analysis scheme in the ensemble Kalman filter, *Monthly weather review*, 126(6), 1719-1724, [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1998\)126%3C1719:ASITEK%3E2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1998)126%3C1719:ASITEK%3E2.0.CO;2).

Cabral-Cano E, Dixon TH, Miralles-Wilhelm F, Díaz-Molina O, Sánchez-Zamora O, Carande RE (2008) Space geodetic imaging of rapid ground subsidence in Mexico City. *GSA Bull* 120(11–12):1556–1566

Carreón-Freyre D, González-Hernández M, Martínez-Alfaro D, Solís-Valdéz S, Cerca M, Millán-Malo B, Centeno-Salas F (2015) Analysis of the variation of the compressibility

index (Cc) of volcanic clays and its application to estimate subsidence in lacustrine áreas, Proceedings of the International Association of Hydrological Sciences, 372:273-279, doi:10.5194/piahs-372-273-2015.

Carreón-Freyre DC, Hidalgo-Moreno CM, Hernández-Marín M (2006) Mecanismos de fracturamiento de depósitos arcillosos en zonas urbanas. Caso de deformación diferencial en Chalco, Estado de México (Fracturing mechanisms of clay deposits in urban areas. Case of differential deformation in Chalco, State of Mexico). Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana, Número Especial de Geología Urbana 57(2):237-250.

Carreón-Freyre D, Cerca M, Galloway DL, Silva-Corona JJ (eds) (2010) Land subsidence, associated hazards and the role of natural resources development. IAHS Publ. 339, IAHS, Wallingford, UK.

Carruth R, Flynn P, Donald R, Anderson CE (2007) Land Subsidence and Aquifer-System Compaction in the Tucson Active Management Area, South-Central Arizona, 1987-2005(No. 2007-5190). Geological Survey (US).

Casu F, Buckley SM, Manzo M, Pepe A, Lanari R (2005) Large scale InSAR deformation time series: Phoenix and Houston case studies. In Proceedings. 2005 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2005. IGARSS'05. (Vol. 7, pp. 5240-5243). IEEE.

Chang H, Chen Y, Zhang D (2009) Data assimilation of coupled fluid flow and geomechanics via Ensemble Kalman Filter. In: SPE Reservoir Simulation Symposium. Society of Petroleum Engineers, doi: 10.2118/118963-MS.

Chaussard E, Wdowinski S, Cabral-Cano E, Amelung F (2014) Land subsidence in central Mexico detected by ALOS InSAR time-series. Remote Sensing of Environment, (140), 94-106, doi: 10.1016/j.rse.2013.08.038.

Chen Y, Zhang D (2006) Data assimilation for transient flow in geologic formations via ensemble Kalman filter. Advances in Water Resources, 29(8), 1107-1122.

Chenari RJ, Noori NS (2017) Uncoupled consolidation analysis of clay deposits with linearly varying characteristics with depth. Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering, 41(1), 49-53.

Chong SH (2017) Stochastic Investigation of Consolidation Process in Spatially Correlated Heterogeneous Soils. Appl. Sci., 7(9), 949, doi:10.3390/app7090949.

Corliss JB, Meade RH (1964) Clay minerals from an area of land subsidence in the Houston-Galveston Bay area, Texas, in Geological Survey Research. U.S. Geological Survey Professional Paper 501-C, p. C79-C81.

Covarrubias-Fernández S (1994) Characterization of the engineering properties of Mexico City clay, SM thesis, Dept. of Civil Engineering, MIT, Cambridge, Mass.

Cruickshank-Villanueva C (1984) Numerical simulation of subsidence due to pumping with hysteresis effect included. Proceedings of the 3rd International Symposium on Land Subsidence, 151:79-88.

Delgado-Muñiz, ME (2018) Análisis geoestadístico multivariable de las propiedades geotécnicas del subsuelo lacustre del Valle de México, MT Posgrado en Ingeniería UNAM.

Deutsch CV, Journel AG (1998) GSLIB Geostatistical Software Library and User's Guide, Oxford University Press, New York, second edition, 369 pp.

Díaz-Rodríguez JA, Lozano-Santa Cruz R, Dávila-Alcocer VM, Vallejo E, Girón P (1998) Physical, chemical, and mineralogical properties of Mexico City sediments: a geotechnical perspective, Can Geotech J 35(4):600-610.

Díaz-Viera M, Casar-González R (2005) Stochastic simulation of complex dependency patterns of petrophysical properties using t-copulas. In Proc. IAMG (Vol. 5, pp. 749-755).

Douglass M (2005) Globalization, Mega-projects and the Environment: Urban Form and Water in Jakarta. International Dialogic Conference on Global Cities: Water, Infrastructure and Environment, The UCLA Globalization Research Center – Africa May 16-19.

Durante F, Sempi C (2010) Copula Theory: An introduction, in Copula theory and its applications, Springer, Berlin, Heidelberg, 3-31.

Evensen G (1992) Using the extended Kalman filter with a multilayer quasigeostrophic ocean model, J Geophys Res Oceans, 97(C11), 17905-17924, <https://doi.org/10.1029/92JC01972>.

Evensen G (1994) Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. J Geophys Res Oceans, (99), 143-10,162, doi: 10.1029/94JC00572.

Evensen G (2003) The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation. Ocean Dynamics, (53), 343–367, doi: 10.1007/s10236-003-0036-9

Ferronato M, Gambolati G, Teatini P, Baù D (2006) Stochastic poromechanical modeling of anthropogenic land subsidence, Int J Solids Struct 43: 3324–3336,doi: 10.1016/j.ijsolstr.2005.06.090.

Frias DG, Murad MA, Pereira F (2004) Stochastic computational modelling of highly heterogeneous poroelastic media with log-range correlations, Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 28:1–32,doi: 10.1002/nag.323.

Galloway DL, Burbey TJ (2011) Review: Regional land subsidence accompanying groundwater extraction, Hydrogeol J, 19(8):1459-1486, doi: 10.1007/s10040-011-0775-5.

Gambolati G, Freeze RA (1973) Mathematical simulation of the subsidence of Venice, 1: theory, *Water Resour Res* 9(3):721-733, doi:10.1029/91WR01567.

Gambolati G, Teatini P (2015) Geomechanics of subsurface water withdrawal and injection, *Water Resour. Res.*, 51, 3922–3955, doi:10.1002/2014WR016841.

Gambolati G, Gatto P, Freeze RA (1974) Predictive simulation of the subsidence of Venice. *Science*, 183(4127), 849-851.

Grewal MS, Andrews AP (2001) Kalman filtering: theory and practice using MATLAB, Segunda edición, Ed. John Wiley and Sons, New York. 401 pp.

Heidari L, Gervais V, Le Ravalec M, Wackernagel H (2013) History matching of petroleum reservoir models by the Ensemble Kalman Filter and parameterization methods. *Comput Geosci*, (55), 84-95, doi: 10.1016/j.cageo.2012.06.006.

Helm DC (1972) Simulation of aquitard compaction due to changes in stress, *Trans Am Geophys Union* 53(11):979, abstracts.

Helm DC (1975) One-dimensional simulation of aquifer system compaction near Pixley, California: 1. Constant parameters, *Water Resour Res*, 11(3):465-478, doi: 10.1029/WR011i003p00465.

Helm DC (1976) One-dimensional simulation of aquifer system compaction near Pixley, California: 2. Stress-Dependent Parameters, *Water Resour Res*, 12(3):375-391, doi:10.1029/WR012i003p00375.

Hendricks Franssen HJ, Kinzelbach W (2008) Real-time groundwater flow modeling with the Ensemble Kalman Filter: Joint estimation of states and parameters and the filter inbreeding problem, *Water Resour. Res*, 44, W09408, doi: 10.1029/2007WR006505.

Hernández-Espriú A, Reyna-Gutiérrez J A, Sánchez-León E, Cabral-Cano E, Carrera-Hernández J, Martínez-Santos P, Macías-Medrano S, Farloni G, Colombo D (2014) The DRASTIC-Sg model: an extension to the DRASTIC approach for mapping groundwater vulnerability in aquifers subject to differential land subsidence, with application to Mexico City. *Hydrogeology Journal*, 22(6), 1469-1485.

Hernandez-Marin M, Carreón-Freyre DC, Cerca M (2005) Mechanical and physical properties of the montmorillonitic and allophanic clays in the near-surface sediments of Chalco Valley, Mexico: analysis of contributing factors to land subsidence. *Shanghai Sci. and Tech.*, Shanghai.

Herrera I (1970) Theory of multiple leaky aquifers, *Water Resour Res* 6(1):185-193, doi:10.1029/WR006i001p00185.

Herrera I, Figueroa VGE (1969) A Correspondence Principle for the Theory of Leaky Aquifers, *Water Resour Res* 5(4):900-904, doi:10.1029/WR005i004p00900.

Herrera I, Rodarte L (1973) Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications: 1. The nature of approximate theories, *Water Resour Res* 9(4):995-1005, doi:10.1029/WR009i004p00995.

Herrera I, Yates R (1977) Integrodifferential equations for systems of leaky aquifers and applications 3. A numerical method of unlimited applicability, *Water Resour Res* 13:725-732, doi:10.1029/WR013i004p00725.

Herrera Revilla I, Cortés Silva A (1989) Sistema acuífero de la cuenca de México. *Ingeniería hidráulica en México: publicación técnica de la Secretaría de Recursos Hidráulicos*, 4(2), 60-6.

Hoffmann J, Galloway DL, Zebker HA (2003a) Inverse modeling of interbed storage parameters using land subsidence observations, Antelope Valley, California. *Water Resources Research*, 39(2): 1031, doi:10.1029/2001WR001252

Hoffmann J, Leake S A, Galloway DL, Wilson AM (2003b) MODFLOW-2000 ground-water model-User guide to the subsidence and aquifer-system compaction (SUB) package, U.S. Geol. Surv. Open File Rep., 03-233, 46 pp.

Hofert M, Kojadinovic I, Maechler M, Yan J (2014) Copula: Multivariate dependence with copulas. R package version 0.999-9, URL <http://CRAN.R-project.org/package=copula>, C225.

Houtekamer PL, Zhang F (2016) Review of the Ensemble Kalman Filter for atmospheric data assimilation. *Mon Weather Rev*, (144), 4489-4532, doi: 10.1175/MWR-D-15-0440.1.

Houtekamer PL, Mitchel HL (1998) Data assimilation using an Ensemble Kalman Filter technique. *Mon Weather Rev*, (126), 796-811, doi: 10.1175/1520-0493(1998)126<0796:DAUAEK>2.0.CO;2.

Hsieh PA (1996) Deformation-induced changes in hydraulic head during ground-water withdrawal. *Ground Water*, (36), 1082–1089.

Huang J, Griffiths DV, Fenton GA (2009) Probabilistic analysis of coupled soil consolidation. *J Geotech Geoenviron*, 136(3), 417-430, doi: 10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000238.

Huber M (2016) Reducing forecast uncertainty by using observations in geotechnical engineering. *Probabilist Eng Mec*, (45), 212-219, doi:10.1016/j.probengmech.2016.02.002.

Jaime-PA, Méndez-Sánchez E (2010) Evolution of Mexico City clay properties affected by land subsidence. In: Carreón-Freyre D, Cerca M, Galloway DL, Silva-Corona JJ (eds) *Land subsidence, associated hazards and the role of natural resources development*. IAHS Publ. 339, p 232–234.

Jaworski P, Durante F, Hardle WK, Rychlik T (2010) Copula theory and its applications New York: Springer, (198).

Juárez-Badillo E, Rico-Rodríguez A (2012) Mecánica de suelos tomo 1: Fundamentos de la Mecánica de Suelos (Soil Mechanics Volume 1: Fundamentals of Soil Mechanics), Limusa.

Juárez-Camarena M (2015) Análisis geoestadístico del subsuelo de la zona lacustre del Valle de México (Geostatistical analysis of the subsoil in the lacustrine areas of the Valley of Mexico), DT Posgrado en Ingeniería UNAM.

Kalman RE (1960) A new approach to linear filtering and prediction problems, J. Basic Eng., 82(1), 35-45.

Kim S, Lee C, Lee K, Choe J (2016) Aquifer characterization of gas reservoirs using Ensemble Kalman filter and covariance localization. J Pet Sci Eng, 146, 446-456. doi: 10.1016/j.petrol.2016.05.043.

Lambe TW, Whitman RV (1969) Soil mechanics, series in soil engineering, John Wiley & Sons.

Larson KJ, Başağaoğlu H, Marino MA (2001) Prediction of optimal safe ground water yield and land subsidence in the Los Banos-Kettleman City area, California, using a calibrated numerical simulation model. Journal of hydrology, 242(1-2), 79-102.

Li L, Zhang M (2018) Inverse modeling of interbed parameters and transmissivity using land subsidence and drawdown data. Stochastic environmental research and risk assessment, 32(4), 921-930.

Li L, Zhang M, Katzenstein K (2017) Calibration of a land subsidence model using InSAR data via the ensemble Kalman filter. Groundwater, 55(6), 871-878.

Liu Y, Helm DC (2008a) Inverse procedure for calibrating parameters that control land subsidence caused by subsurface fluid withdrawal: 1. Methods. Water Resources Research, 44(7).

Liu Y, Helm DC (2008b) Inverse procedure for calibrating parameters that control land subsidence caused by subsurface fluid withdrawal: 2. Field application. Water Resources Research, 44(7).

Marsal RJ, Mazari M (1959) El subsuelo de la Ciudad de México (The subsoil of Mexico City). Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

Marsal RJ, Mazari M (1975) The lacustrine clays of the Valley of Mexico, Universidad Nacional Autónoma de México.

Meade RH (1967) Petrology of sediments underlying areas of land subsidence in central California, US Government Printing Office.

Narasimhan TN, Witherspoon PA (1977) Numerical model for land subsidence in shallow groundwater systems. Proceedings of the Second International Symposium on Land Subsidence, Anaheim, CA, December 1976, IAHS Publ. 121, pp 133–144.

Neuman SP, Preller C, Narasimhan TN (1982) Adaptive explicit-implicit quasi three-dimensional finite element model of flow and subsidence in multiaquifer systems, *Water Resour Res* 18(5):1551-1561, doi:10.1029/WR018i005p01551.

Neuman SP, Witherspoon PA (1969) Transient Flow of Ground Water to Wells in Multiple-Aquifer Systems, Geotechnical Engineering Report, University of California, Berkeley.

Ortega-Guerrero A, Rudolph DL, Cherry JA (1999) Analysis of long-term land subsidence near Mexico City: Field investigations and predictive modeling, *Water Resour Res* 35(11):3327-3341, doi:10.1029/1999WR900148.

Ortega Guerrero B, Lozano García M, Caballero M, Herrera Hernández DA (2015) Historia de la evolución deposicional del lago de Chalco, México, desde el MIS 3. *Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana*, 67(2), 185-201.

Ortega-Guerrero B, Lozano-García S, Herrera-Hernández D, Caballero M, Beramendi-Orosco L, Bernal JP, Avendaño-Villeda D (2017) Lithostratigraphy and physical properties of lacustrine sediments of the last ca. 150 kyr from Chalco basin, central México. *Journal of South American Earth Sciences*, 79, 507-524, [https://doi.org/10.1016/S0034-6667\(97\)00046-8](https://doi.org/10.1016/S0034-6667(97)00046-8).

Ortíz-Zamora D, Ortega-Guerrero A (2010) Evolution of long-term land subsidence near Mexico City: Review, field investigations, and predictive simulations, *Water Resour Res* 46(1), doi:10.1029/2008WR007398.

Osmanoglu B, Dixon TH, Wdowinski S, Cabral-Cano E, Jianga Y (2010) Mexico City subsidence observed with persistent scatterer InSAR. *Int J Appl Earth Obs Geoinf*, (13), 1–12.

Panzeri M, Riva M, Guadagnini A, Neuman SP (2014) Comparison of Ensemble Kalman Filter groundwater-data assimilation methods based on stochastic moment equations and Monte Carlo simulation. *Advances in Water Resources*, 66, 8-18.

Panzeri M, Riva M, Guadagnini A, Neuman SP (2015) EnKF coupled with groundwater flow moment equations applied to Lauswiesen aquifer, Germany. *Journal of hydrology*, 521, 205-216.

Pebesma EJ (2004) Multivariable geostatistics in S: the gstat package. *Computers & Geosciences*, 30(7), 683-691.

Peralta y Fabi R (1989) Sobre el origen de algunas propiedades mecánicas de la formación arcillosa superior del Valle de México (On the origin of some mechanical properties of the

upper clay formation in the Valley of Mexico), Simposio sobre Tópicos Geológicos de la Cuenca del Valle de México (Symposium on geological topics of the Basin of Mexico).

Poland JF, Davis GH (1969) Land subsidence due to withdrawal of fluids. *Rev Eng Geol* 2:187–269

Poland JF (1968) Compressibility and clay minerals of sediments in subsiding ground-water basins, southwestern United States. *Geological Society of America 81st Ann. Mtg. Prog.*, Mexico City, Geological Society of America Special Paper 121, p. 241.

R Core Team (2015) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.r-project.org/>. April, 2015.

R Core Team (2018) R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.r-project.org/>. March, 2018.

Rivera A, Ledoux E, De Marsily G (1991) Nonlinear modeling of groundwater flow and total subsidence of the Mexico City aquifer-aquitard system. *Proceedings of the fourth international symposium on land subsidence* 200:4558.

Rudolph DL, Frind EO (1991) Hydraulic response of highly compressible aquitards during consolidation, *Water Resources Research* 27(1):17-30, doi:10.1029/90WR01700.

Sandhu RS (1979) Modeling land subsidence, *American Soc. of Civil Eng.*

Santoyo-Villa E, Ovando E, Mooser F, León-Plata E (2005) Síntesis geotécnica de la Cuenca del Valle de México. TGC Ingeniería.

Schlather M, Malinowski A, Oesting M, Boecker D, Strokorb K, Engelke S, Martini J, Ballani F, Moreva O, Auel J, Menck PJ, Gross S, Ober U, Christoph Berreth, Burmeister K, Manitz J, Ribeiro P, Singleton R, Pfaff B and R Core Team (2016). *RandomFields: Simulation and Analysis of Random Fields*. R package version 3.1.8.

Schepsmeier U, Stoeber J, Brechmann EC, Graeler B, Nagler T, Erhardt T (2016) *VineCopula: statistical inference of vine copulas*, 2013. URL <http://CRAN.R-project.org/package=VineCopula>. R package version, 1.

Sklar, M (1959) Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8, 229-231.

Solera-Ramírez A (2003) El Filtro de Kalman, Banco Central de Costa Rica, División Económica, Departamento de Investigaciones Económicas, DIE-02-2003-NT. Nota técnica.

Terzaghi K (1925) Principles of soil mechanics, IV—Settlement and consolidation of clay, *Engineering News-Record* 95(3):874-878.

Vargas C, Ortega-Guerrero A (2004) Fracture hydraulic conductivity in the Mexico City clayey aquitard: Field piezometer rising-head tests, *Hydrogeology J* 12(3):336-344, doi: 10.1007/s10040-003-0302-4.

Vázquez-Sánchez E (1995) Modelo conceptual hidrogeológico y características hidráulicas del acuífero en explotación en la parte meridional de la Cuenca de México (Hydrogeological conceptual model and hydraulic parameters in the meridional portion of the aquifer of the Basin of Mexico), MT Posgrado en Geofísica UNAM.

Verruijt A (1969) Elastic storage of aquifers, *Flow through porous media*, 331-376.

Wang SJ, Hsu KC (2009) Dynamics of deformation and water flow in heterogeneous porous media and its impact on soil properties, *Hydrol. Process.* 23: 3569–3582, doi: 10.1002/hyp.7458.

Wang SJ, Hsu KC (2013) Dynamic interactions of groundwater flow and soil deformation in randomly heterogeneous porous media. *Journal of hydrology*, 499, 50-60.

Warren CJ, Rudolph DL (1997) Clay minerals in basin of Mexico lacustrine sediments and their influence on ion mobility in groundwater, *J Contam Hydrol*, 27(3-4):177-198.

Witherspoon PA, Freeze RA (1972) The role of aquitards in multiple-aquifer systems, *Eos Transactions American Geophysical Union* 53(7):743-746, doi:10.1029/EO053i007p00743.

Xu T, Gómez-Hernández JJ, Zhou H, Li L (2013) The power of transient piezometric head data in inverse modeling: An application of the localized normal-score EnKF with covariance inflation in a heterogenous bimodal hydraulic conductivity field. *Adv Water Resour*, (54), 100-118, doi: 10.1016/j.advwatres.2013.01.006.

Xue Y, Zhang Y, Ye S, Wu J, Li Q (2005) Land subsidence in China, *Environmental Geology*, 48(6), 713–720.

Ye S, Luo Y, Wu J, Yan X, Wang H, Jiao X, Teatini P (2016) Three-dimensional numerical modeling of land subsidence in Shanghai, China. *Hydrogeology Journal*, 24(3), 695-709.

Zapata-Norberto B, Morales-Casique E, Herrera GS (2018) Nonlinear consolidation in randomly heterogeneous highly compressible aquitards. *Hydrogeol J* 26:755. <https://doi.org/10.1007/s10040-017-1698-6>

Zektser S, Loáiciga HA, Wolf JT (2004) Environmental impacts of groundwater overdraft: selected case studies in the southwestern United States. *Environ Geol*, (47), 396–404.

Zhang D (2002) *Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties*. Elsevier.

Zhang M, Burbey TJ (2016) Inverse modelling using PS-InSAR data for improved land subsidence simulation in Las Vegas Valley, Nevada. *Hydrological processes*, 30(24), 4494-4516.

Zhang Y, Gong H, Gu Z, Wang R, Li X, Zhao W (2014) Characterization of land subsidence induced by groundwater withdrawals in the plain of Beijing city, China. *Hydrogeology Journal*, 22(2), 397-409.

Zhuang C, Zhou Z, LI ZF, GUOQN (2017) A method for determining hydraulic parameters of an overconsolidated aquitard. *Rock and Soil Mechanics*, 38(1), 61-66.

Zoccarato C, Baù D, Bottazzi F, Ferronato M, Gambolati G, Mantica S, Teatini P (2015) Estimate of a spatially variable reservoir compressibility by assimilation of ground surface displacement data. *Proc. IAHR*, (372), 351-356, doi: 10.5194/piahs-372-351-2015.

Zovi F, Camporese M, Hendricks Franssen HJ, Huisman JA (2017) Identification of high-permeability subsurface structures with multiple point geostatistics and normal score ensemble Kalman filter. *Journal of Hydrology*, 548():208-224, doi: 10.1016/j.jhydrol.2017.02.056.

ANEXO

ASIMILACIÓN DE DATOS CON EL FILTRO DE KALMAN ENSAMBLADO EnKF EN ACUITARDOS HETEROGÉNEOS ALTAMENTE COMPRESIBLES

Asimilación de h

Referencia 2

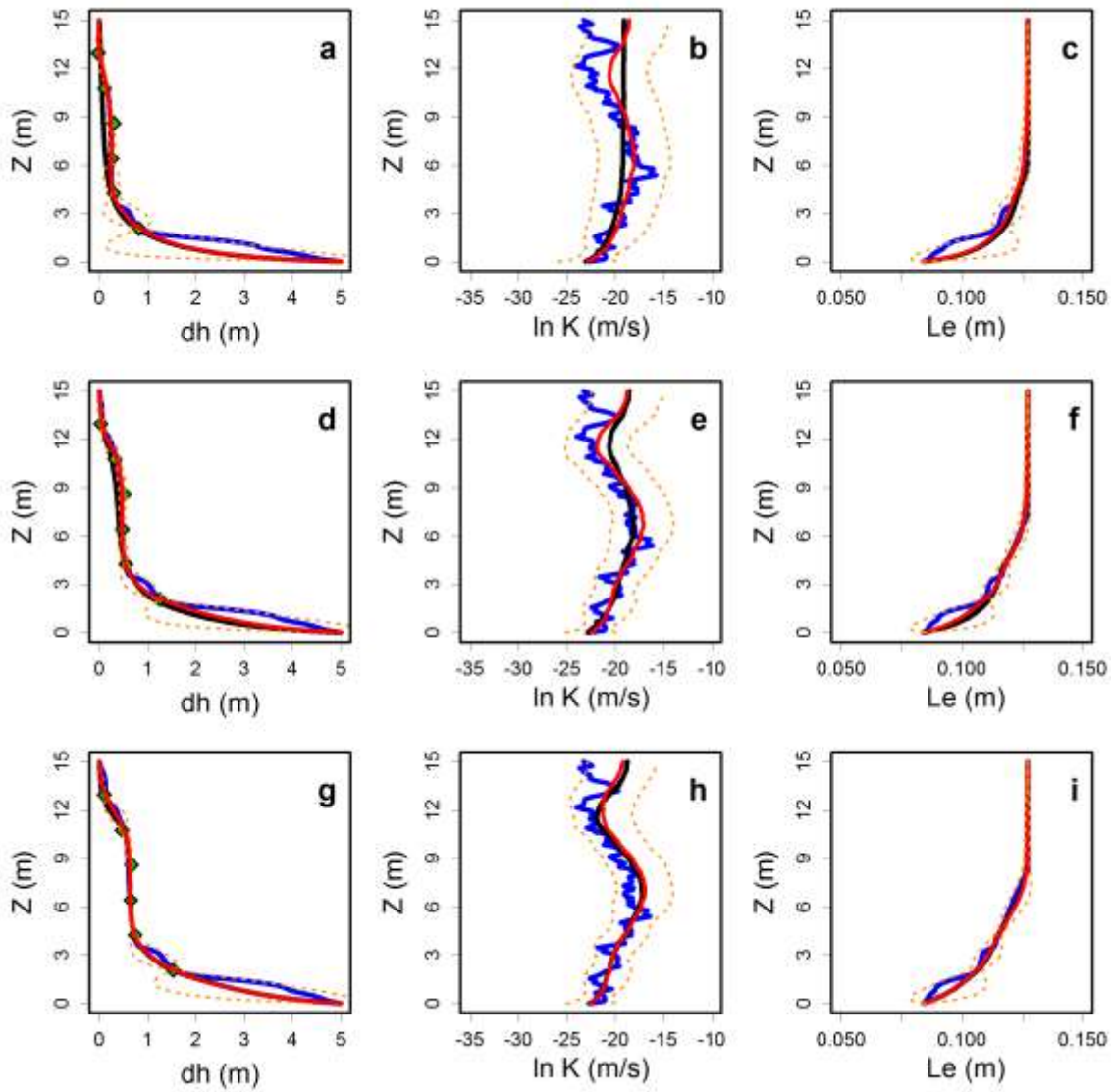


Figura 23.2. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

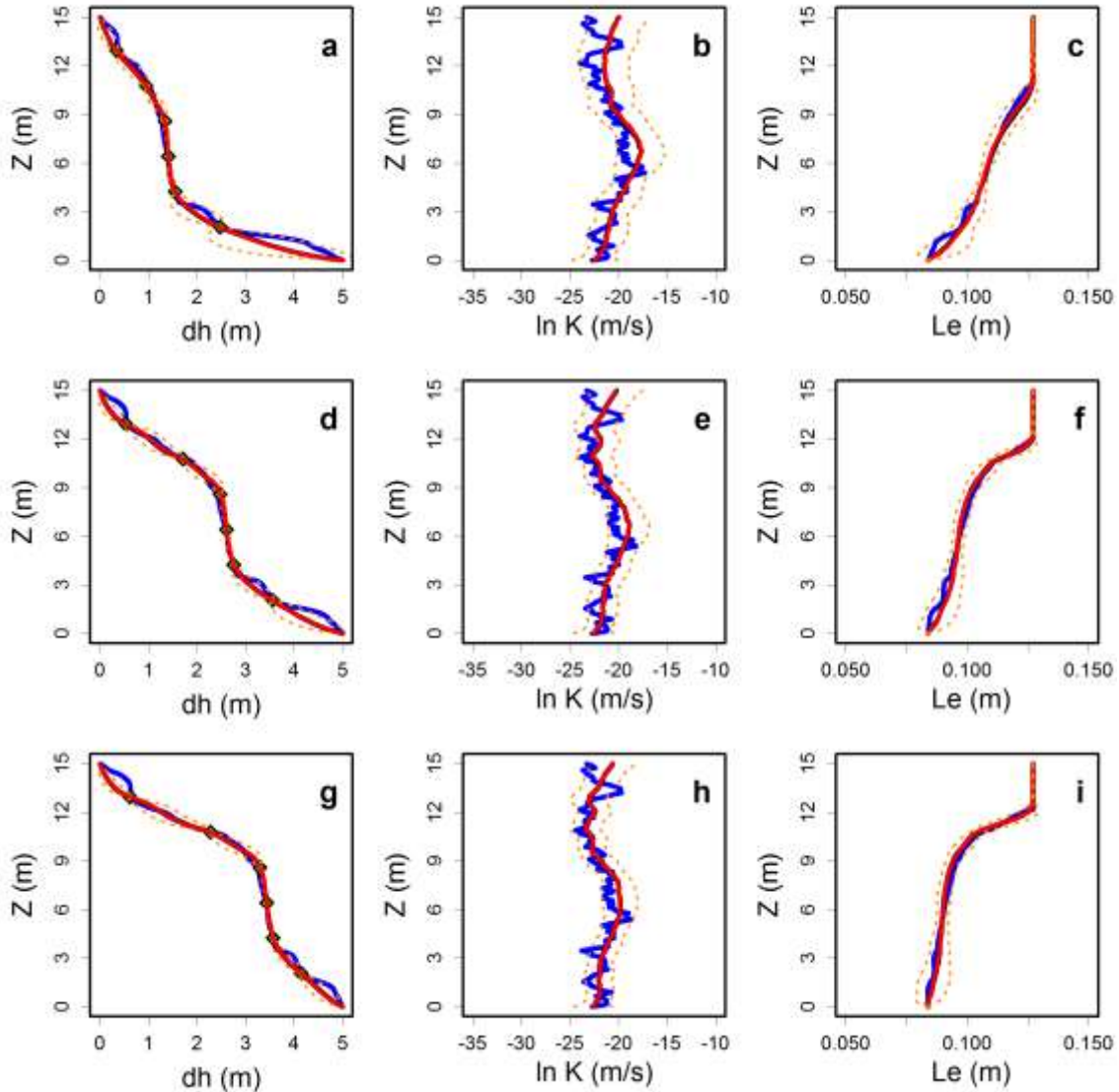


Figura 24.2. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 3

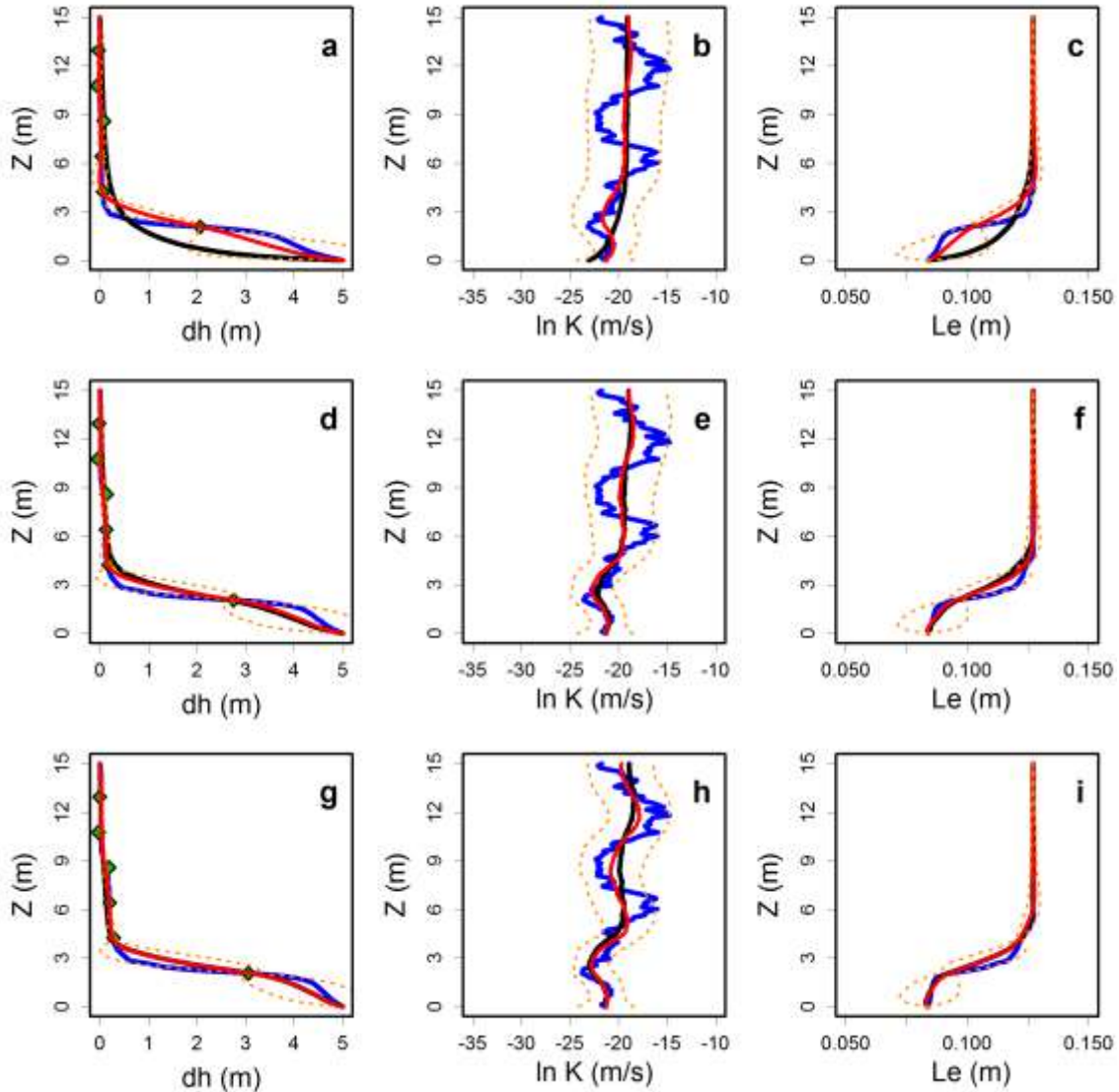


Figura 23.3. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

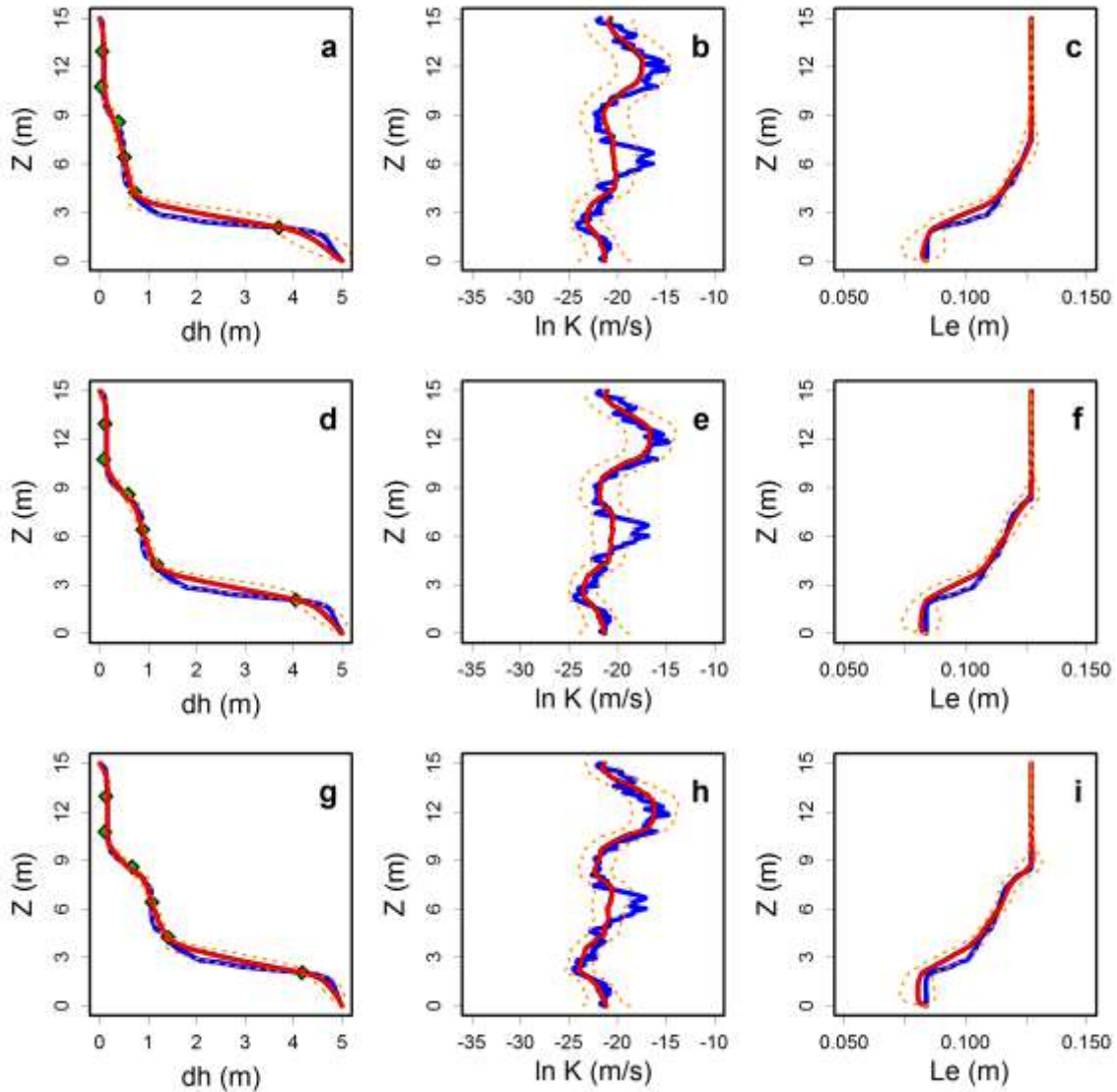


Figura 24.3. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 4

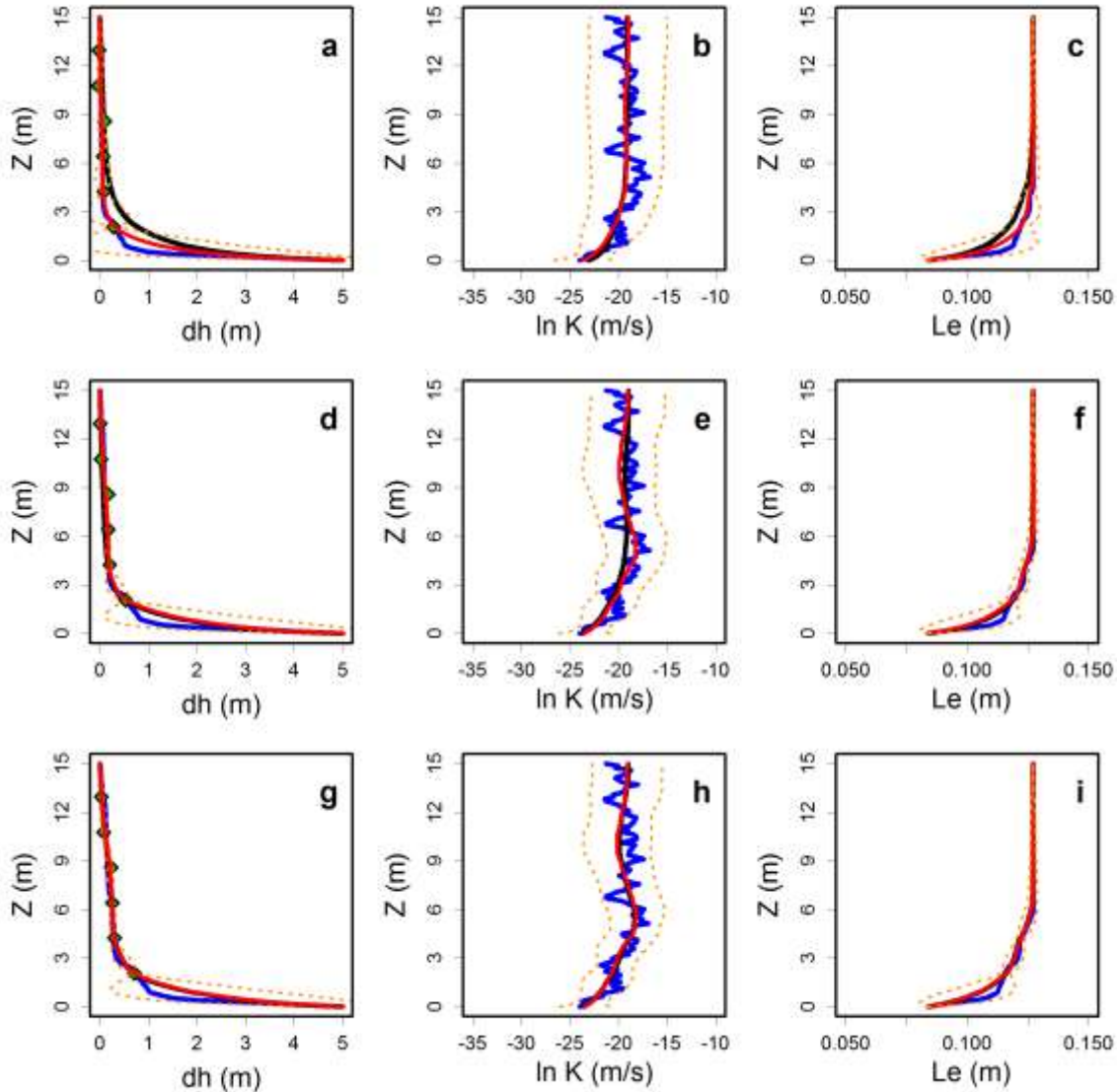


Figura 23.4. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

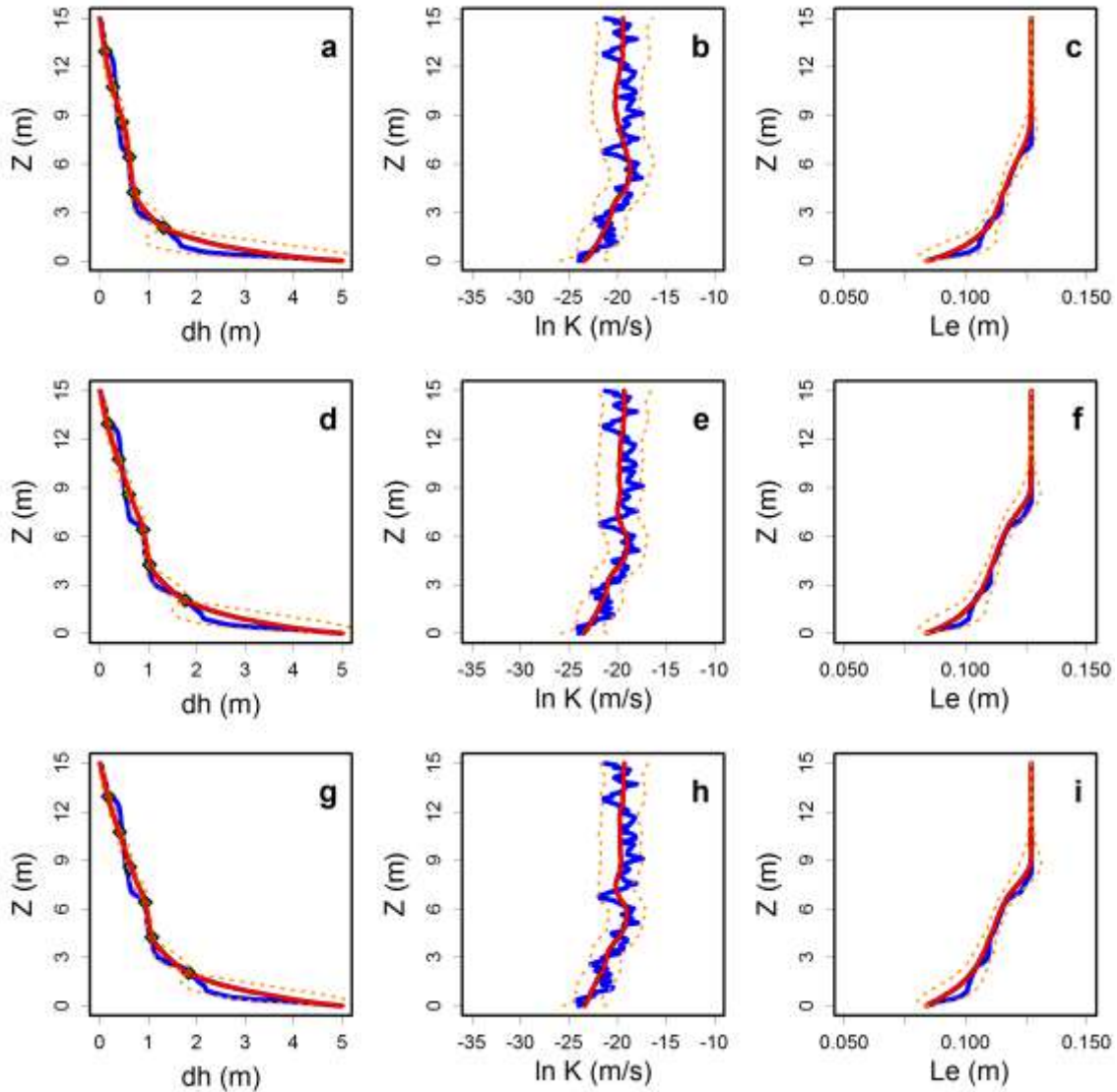


Figura 24.4. Resultados de asimilación de carga hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Asimilación de Y

Referencia 2

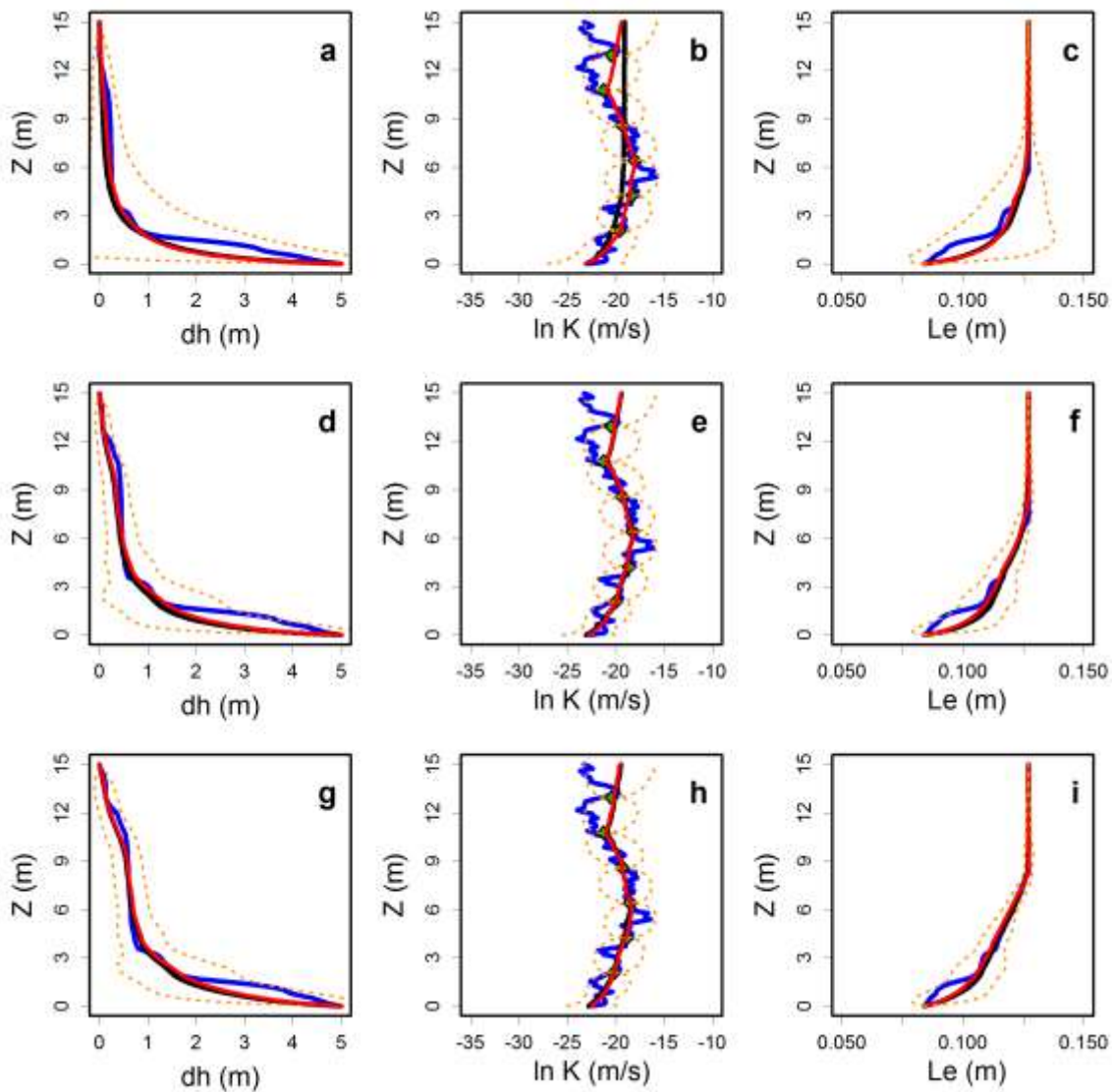


Figura 25.2. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

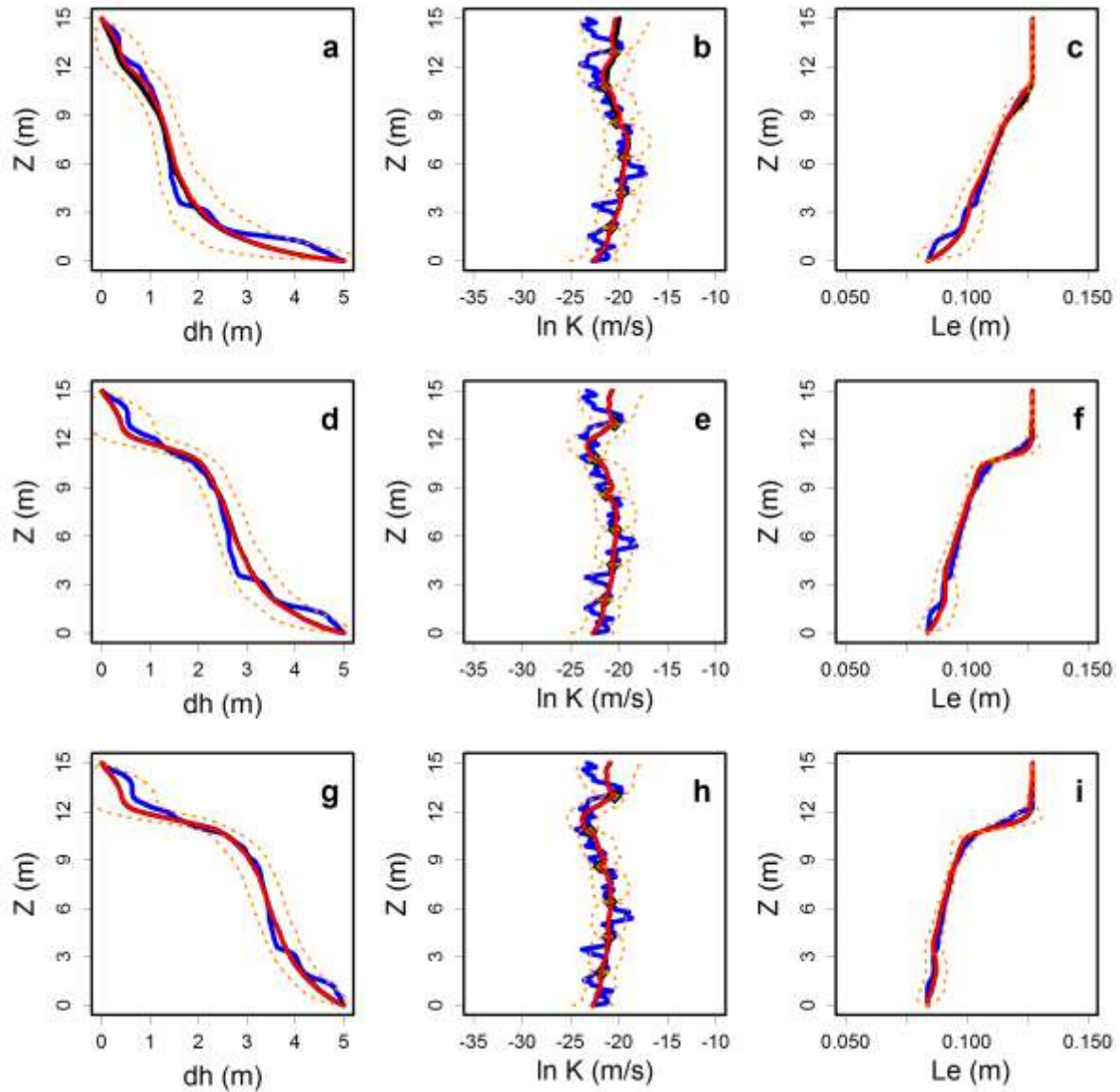


Figura 26.2. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranjas son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 3

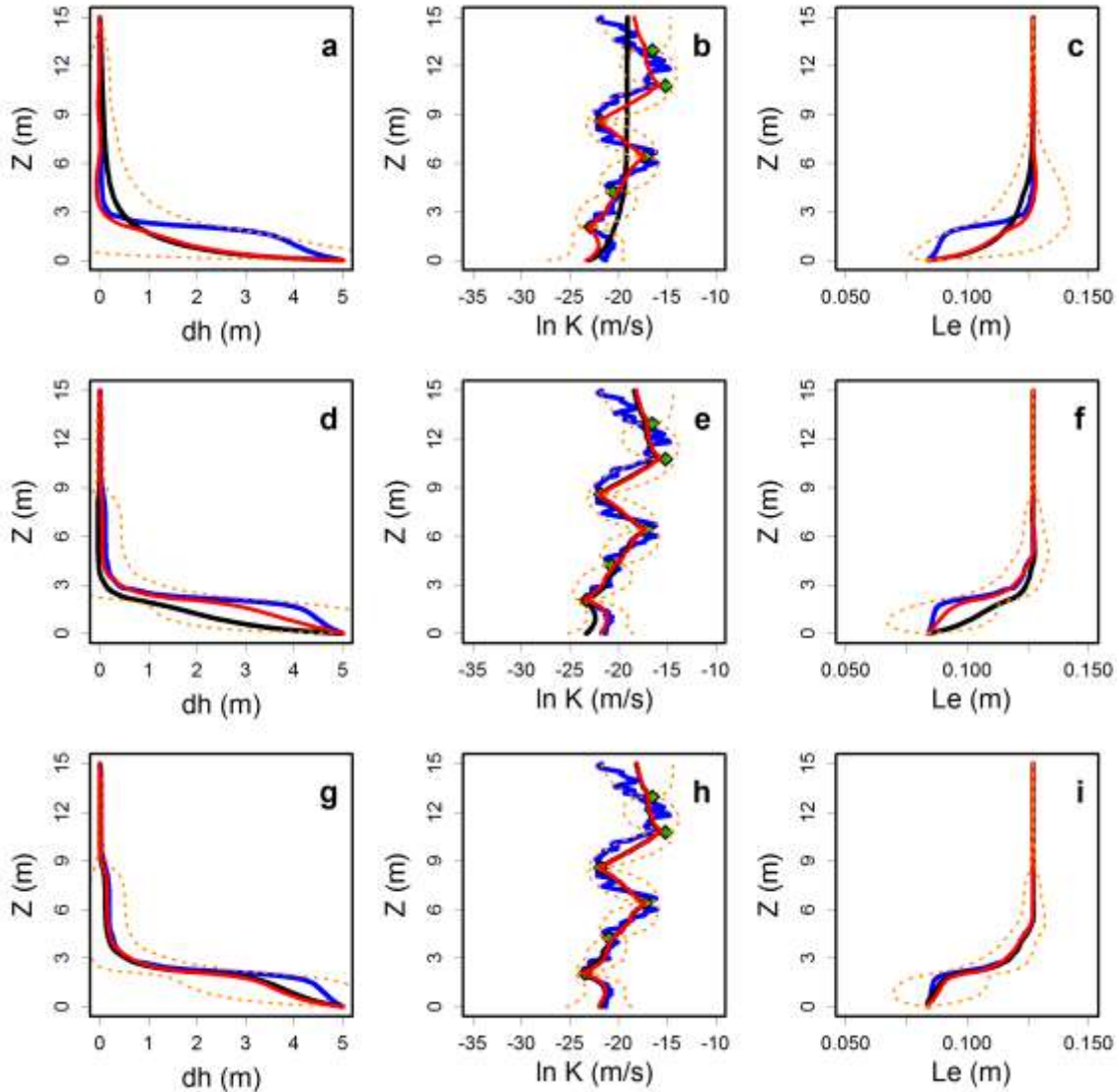


Figura 25.3. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

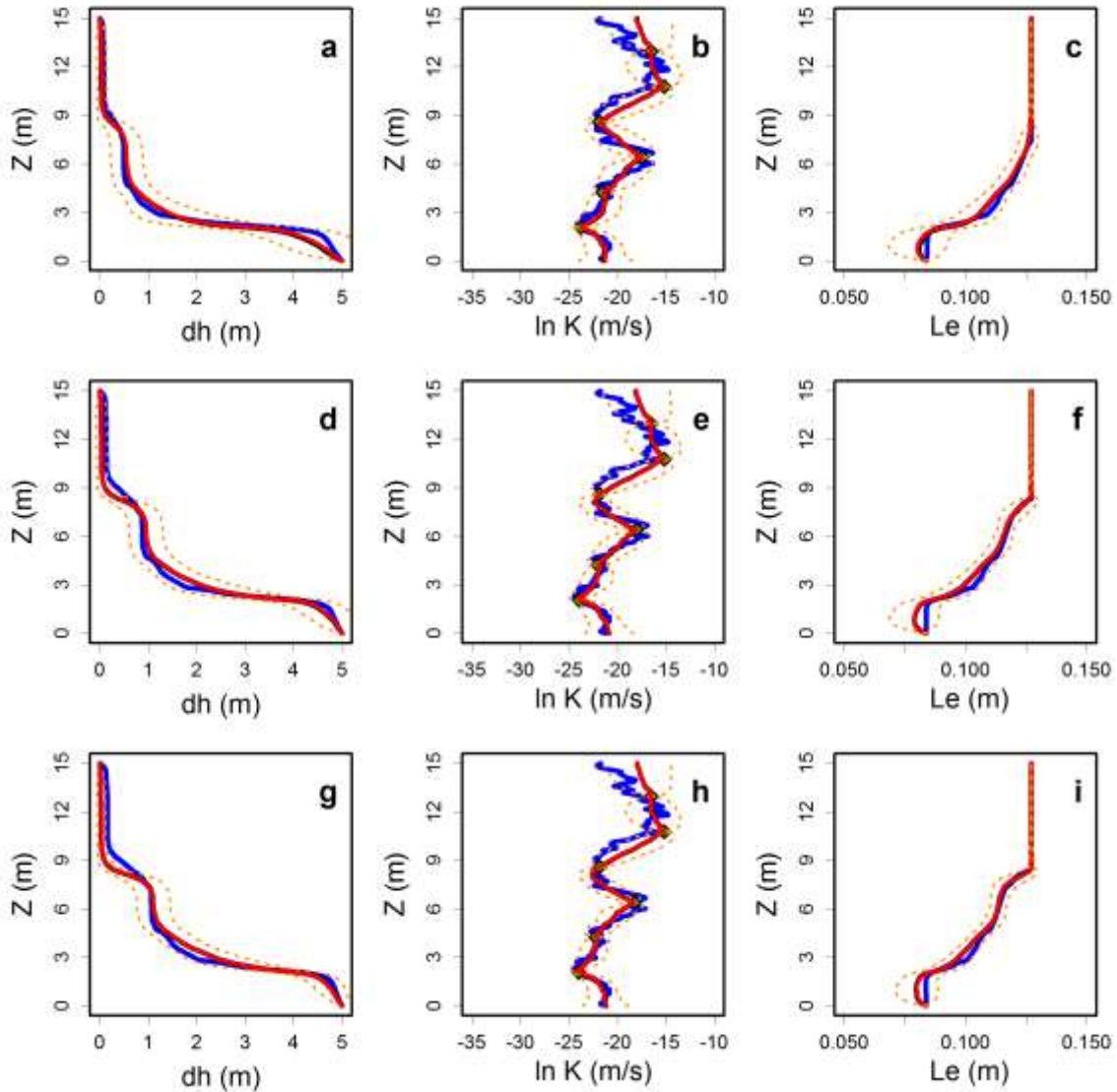


Figura 26.3. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranjas son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 4

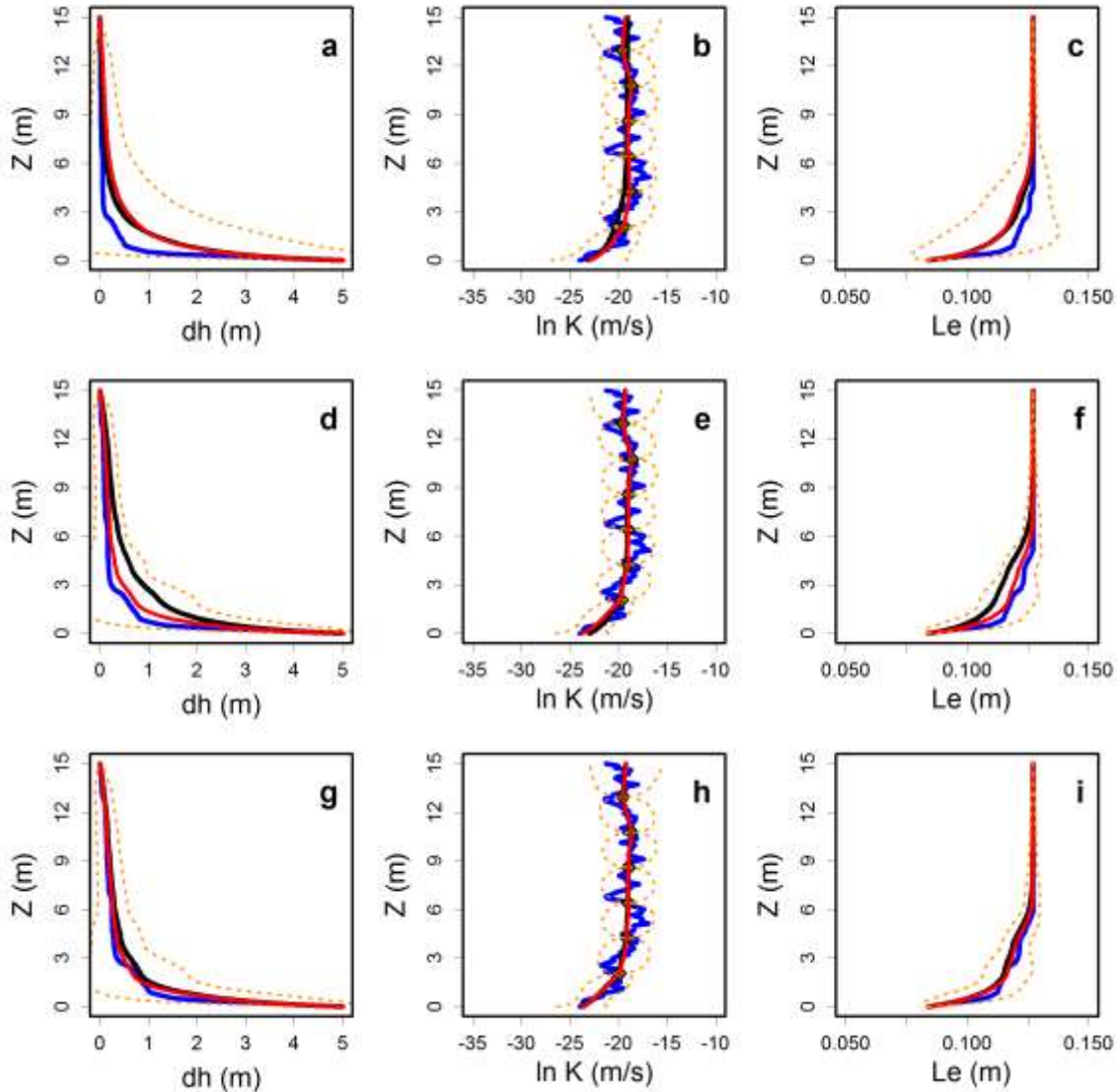


Figura 25.4. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 4. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

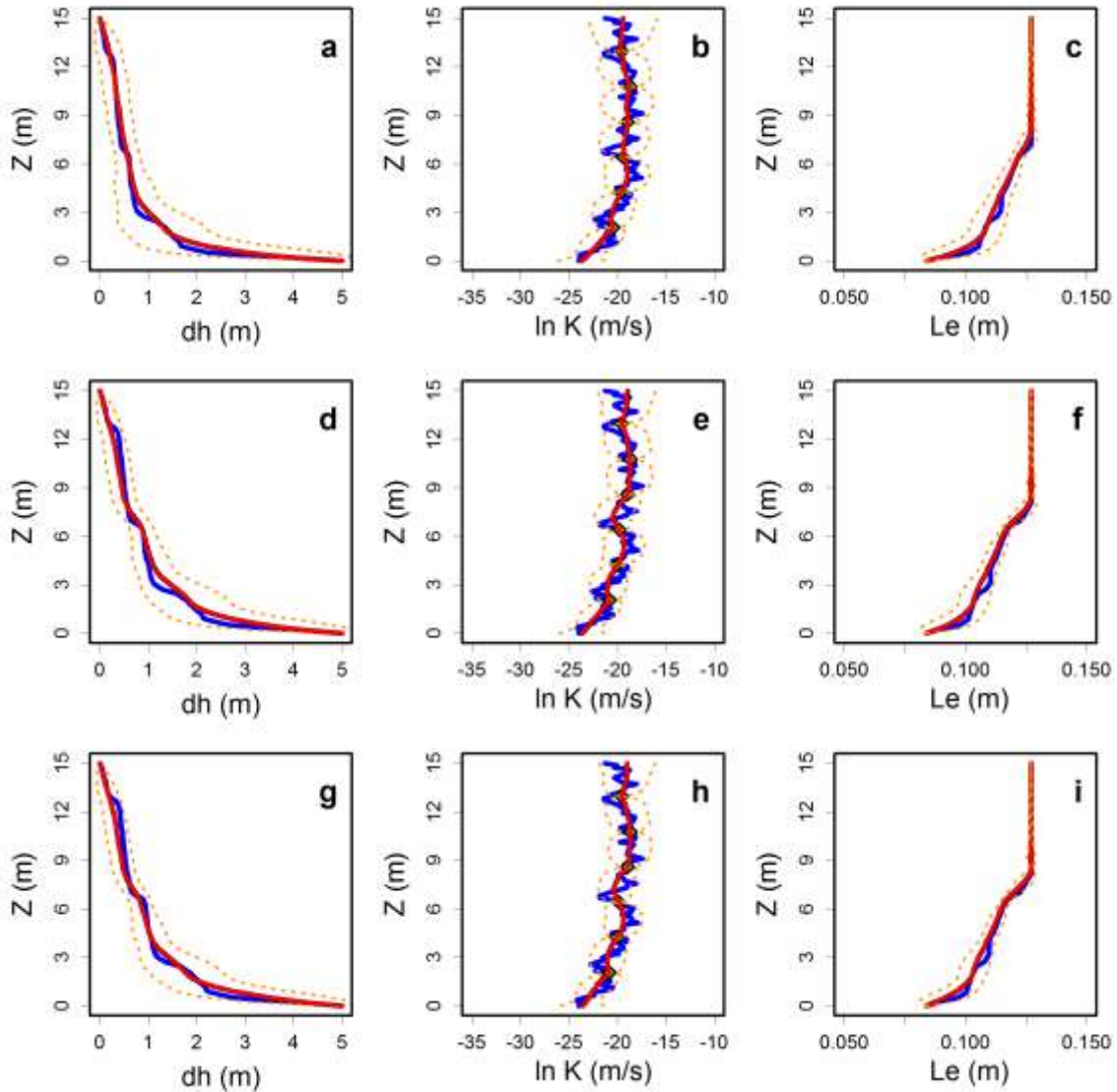


Figura 26.4. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Asimilación de h - Y

Referencia 2

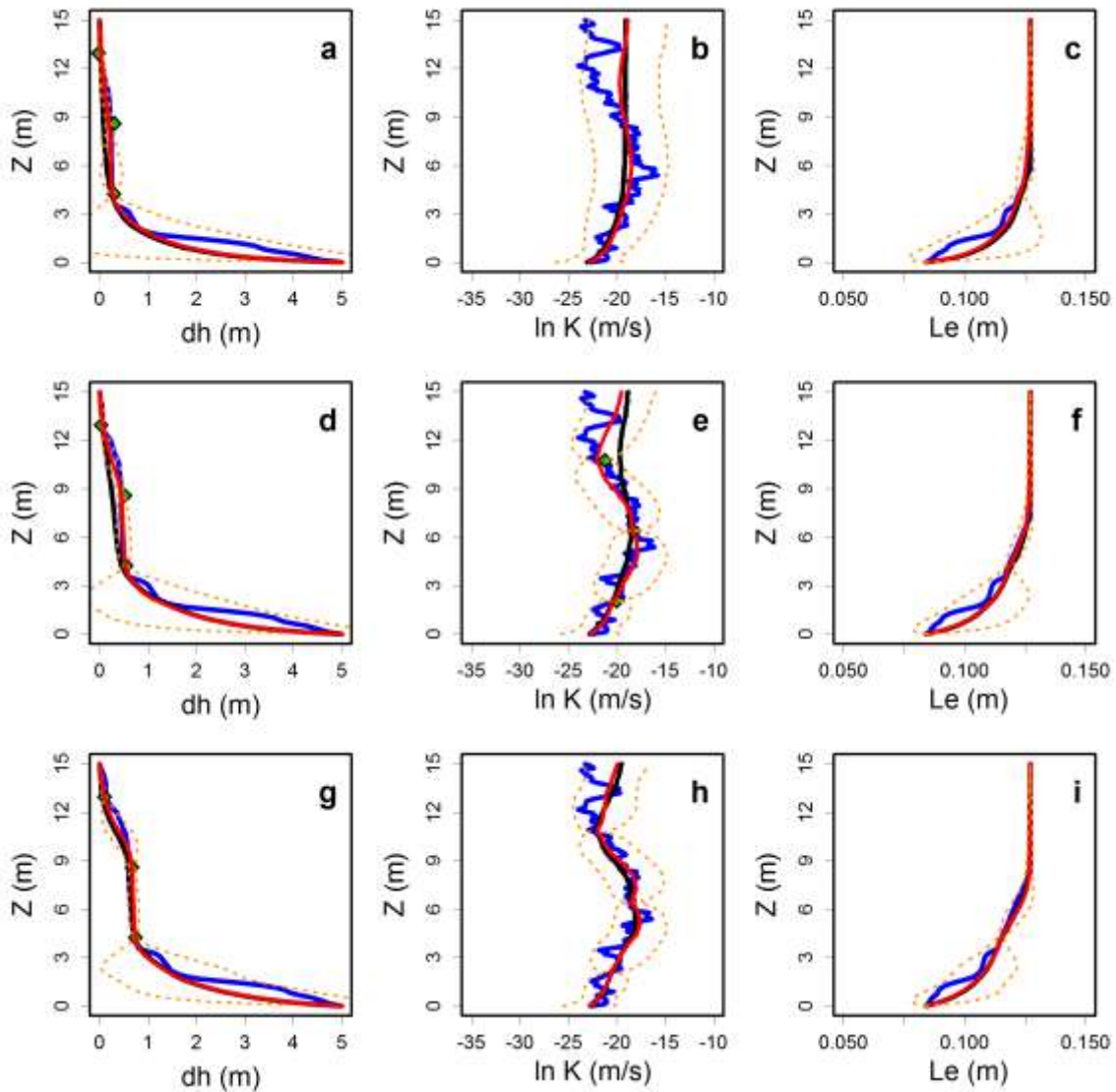


Figura 27.2. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

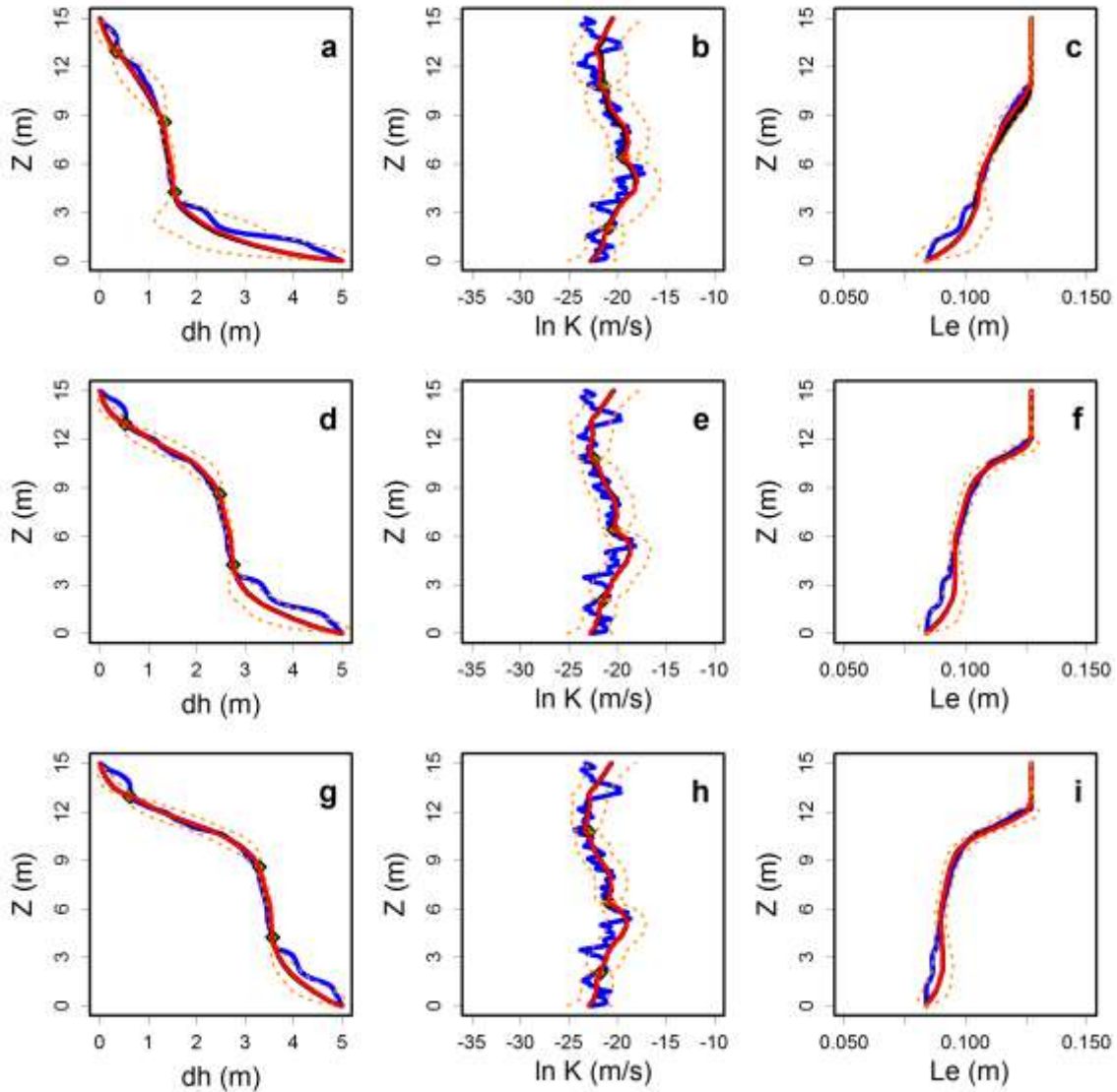


Figura 28.2. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 2. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 3

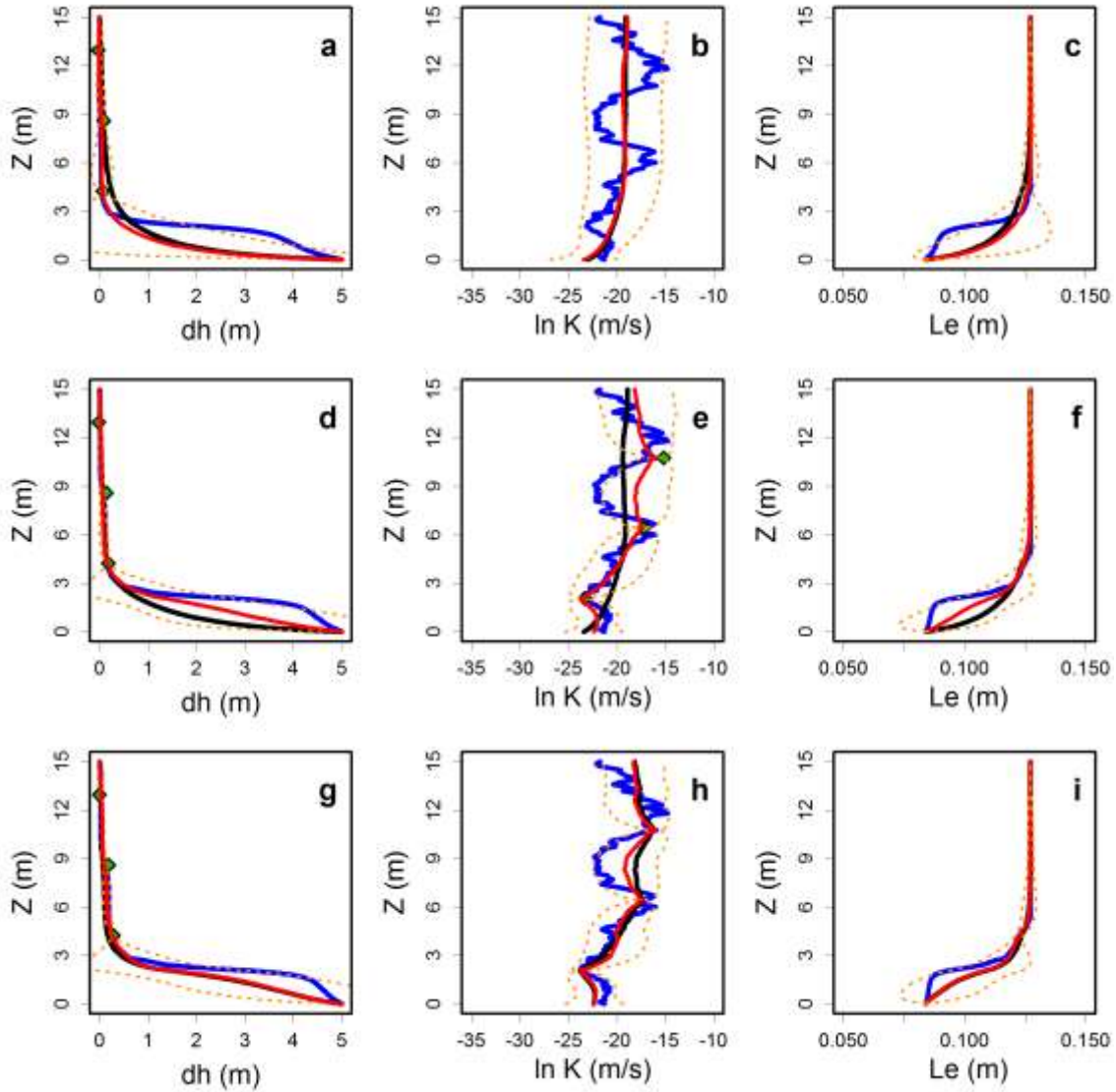


Figura 27.3. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

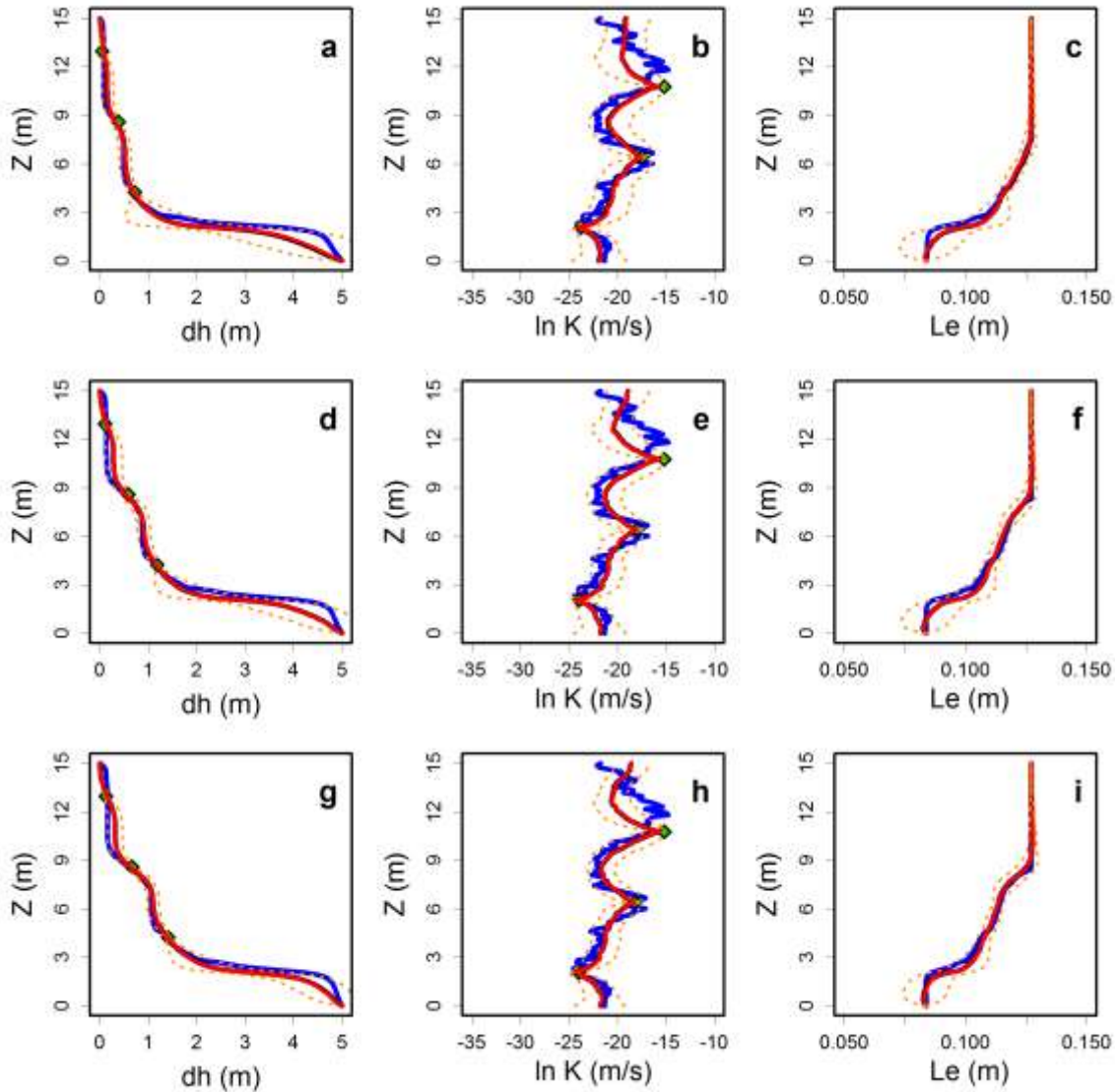


Figura 28.3. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 3. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

Referencia 4

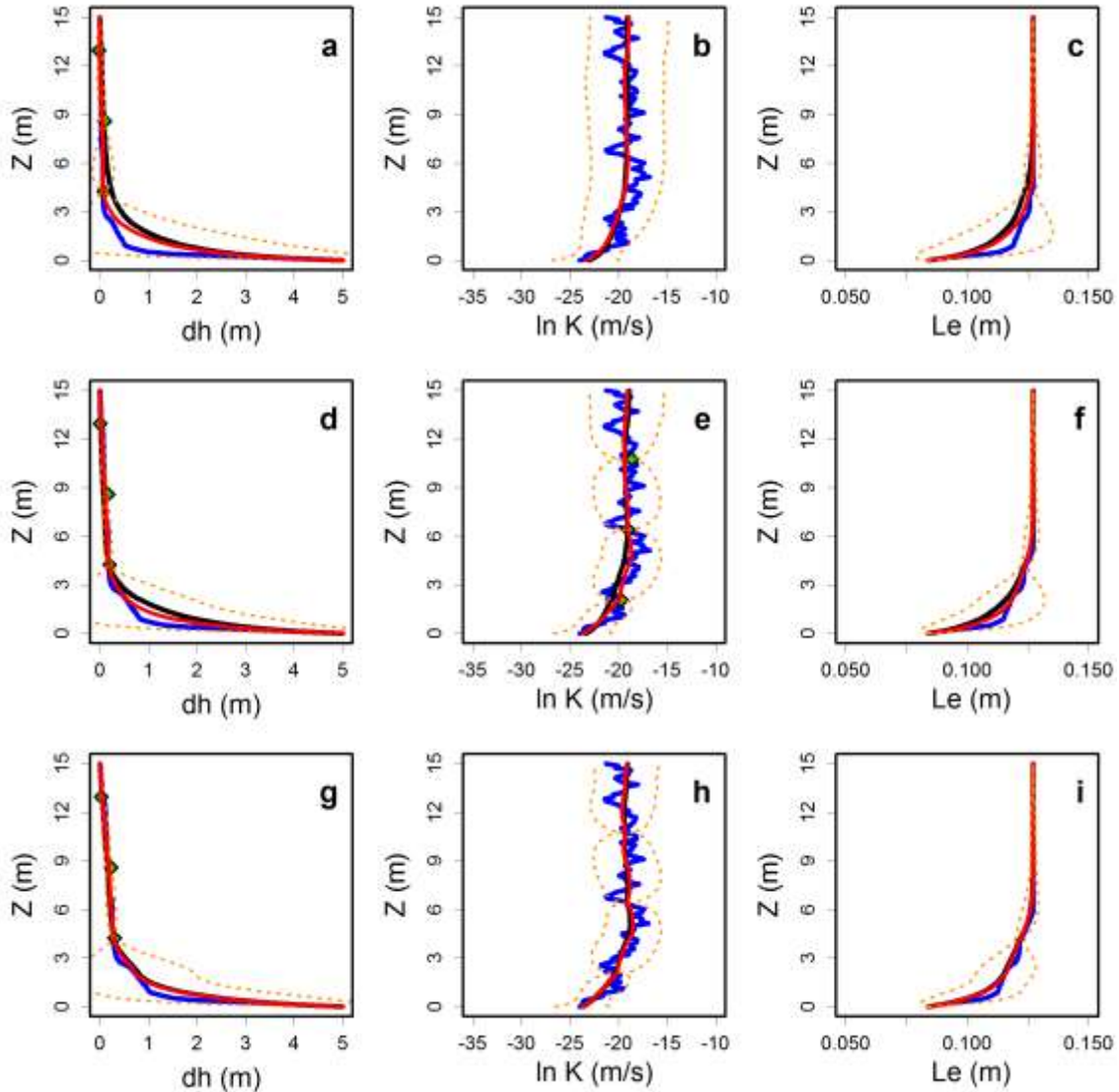


Figura 27.4. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 4. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 1, 2 y 3, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.

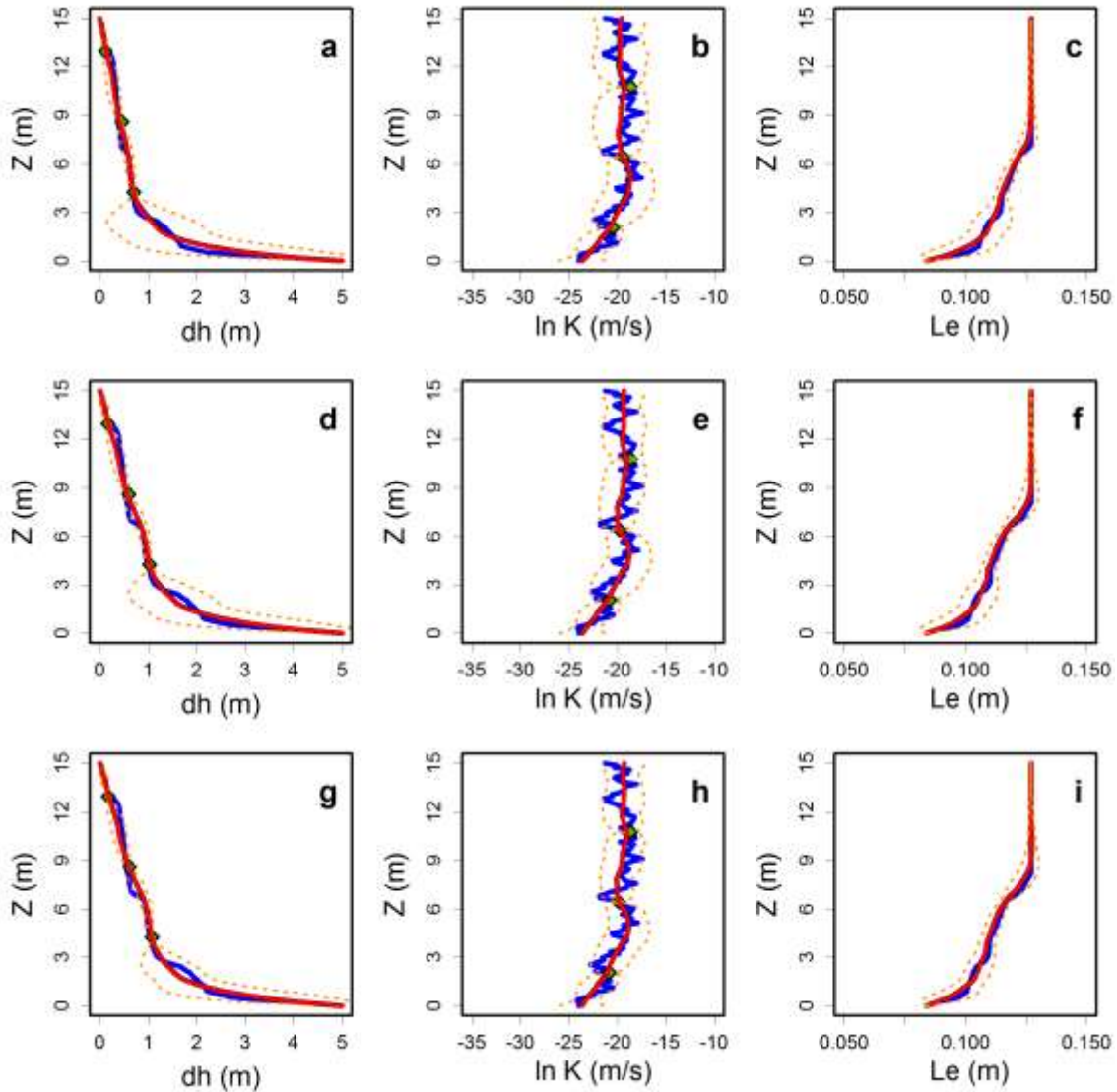


Figura 28.4. Resultados de asimilación de conductividad hidráulica con la referencia 4. Las figuras a-b-c, d-e-f y g-h-i representan los perfiles h - Y - Le en los pasos de asimilación 10, 30 y 60, respectivamente. La línea negra es la respuesta promedio del algoritmo de subsidencia no lineal 1D, la línea roja es el ensamble promedio asimilado, la línea azul es la referencia 1, las líneas punteadas naranja son el doble de la desviación estándar con respecto a la media y los puntos verdes son las posiciones de las medidas.