Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Espacios semiestratificables

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Matemático

PRESENTA:

Elmer Enrique Tovar Acosta

TUTOR

Dr. Alejandro Darío Rojas Sánchez

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2019

Datos del alumno
Tovar
Acosta
Elmer Enrique
8445037445
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
416085439

Datos del tutor
Dr
Alejandro Darío
Rojas
Sánchez

Datos del sinodal 1
Dr
Alejandro
Dorantes
Aldama

Datos del sinodal 2
Dr
Ángel
Tamariz
Mascarúa

Datos del sinodal 3
Dra
Elsa
Puente
Vázquez

Datos del sinodal 4
M en C
Luis Eduardo
García
Hernández

Datos del trabajo escrito
Espacios semiestratificables
100p
2019

Índice general

Introducción iii

1. Generalizaciones del concepto de metrizabilidad 1

2. Espacios semiestratificables 17

3. Espacios semimetrizables 51

4. Espacios de Moore 63

5. g-funciones 85

Bibliografía 91

Introducción

Desde que el concepto de espacio métrico fue introducido por Fréchet en 1906 este captó la atención de una gran cantidad de matemáticos por la facilidad con la que conceptos del cálculo real podían extenderse a una clase más general de espacios. Por esto no es de sorprender que una vez que se comenzó el estudio sistemático de la Topología como rama de las matemáticas se pusiera un énfasis especial en responder la pregunta: ¿cuándo es un espacio topológico metrizable? Uno de los primeros matemáticos en dar una respuesta a esta pregunta fue Urysohn con el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, dicho resultado no es del todo satisfactorio pues sólo proporciona condiciones suficientes más no necesarias para que un espacio topológico sea metrizable.

Buscar un teorema que especificara condiciones topológicas necesarias y suficientes para que un espacio sea metrizable, del cual además el teorema de Urysohn se desprendiera como corolario fue el siguiente objetivo de muchos topólogos. Al final fueron Nagata y Smirnov quienes lograron dicho objetivo con el teorema que lleva su nombre (teorema que fue probado de manera independiente por ambos). Es este teorema el que motiva de manera indirecta este trabajo. Al debilitar sus condiciones llegamos a los espacios estratificables, a partir de los cuales a su vez podemos definir los espacios semiestratificables, espacios protagonistas de este trabajo.

El objetivo de este trabajo es estudiar con gran detalle a los espacios semiestratificables. La elección de los espacios semiestratificables se debe a lo siguiente: para empezar su definición está escrita en términos que no requieren más que definiciones básicas de Topología, por lo cual es bastante simple de entender. Además de esto los espacios semiestratificables preservan una cantidad considerable de propiedades topológicas que ya tenían los espacios métricos volviéndolos muy interesantes desde nuestro punto de estudio.

Si bien mencionamos antes que la definición de espacios semiestratificables no requiere más que definiciones básicas de topología, lo mismo no se puede decir de una cantidad considerable de resultados de este trabajo; el lector interesado en leer este trabajo deberá tener como mínimo conocimientos de los temas que abarca un curso de Topología I y Teoría de los Conjuntos I y II que se imparten en la Facultad de Ciencias de la UNAM, además de un entendimiento razonable acerca de las propiedades tipo compacidad y sus distintas equivalencias, conocer lo básico de la teoría de compactaciones y, para dos puntos muy particulares del trabajo, saber acerca de los distintos axiomas independientes de ZFC y de cateogría de Baire, respectivamente.

Como mencionamos antes, esta tesis se enfocará en estudiar las propiedades de los espacios semiestratificables. Esto lo haremos a lo largo de cinco capítulos, cada uno seriamente ligado con los anteriores por lo que es recomendable leerlo en el orden en el que está escrito. Dicho esto, el Capítulo 1 comienza enunciando el teorema de metrización de Smirnov-Nagata que mencionamos antes para motivar la definición de los espacios estratificables a partir de dicho teorema. A su vez, de la definición de espacio estratificable motivaremos la definición de espacios semiestratificables y k-semiestratificables, para luego estudiar la relación entre estas clases de espacios.

En el Capítulo 2 se comienza con el estudio de las propiedades de los espacios semiestratifcables, abarcando desde el comportamiento de esta clase de espacios con las operaciones topológicas, hasta su comportamiento con las propiedades tipo compacidad, funciones continuas y axiomas de separación.

En el Capítulo 3 se introduce el concepto de espacio semimétrico, se estudian algunas de sus propiedades básicas, con un énfasis en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio semiestratificable sea semimetrizable.

En el Capítulo 4 se definen los espacios de Moore. Aquí nos lanzaremos directo a encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio semiestratificable sea de Moore. También se abordará de manera superficial el problema de la metrización de los espacios de Moore normales, problema clásico del estudio de los espacios de Moore. Tanto en este capítulo como en el anterior la motivación para atacar el problema de determinar cuando un espacio semiestratificable es semimétrico o de Moore, según sea el caso, es que estas clases de espacios están «más cerca» de aquella de los métricos, y por tanto obtenemos nuevas propiedades de los espacios semiestratificables.

Finalmente en el Capítulo 5 se estudia el concepto de g-funciones, un tipo de funciones que permite establecer relaciones entre las principales clases de espacios que fueron estudiadas durante el trabajo. Este capítulo es más una reinterpretación de ciertos teoremas que se vieron a lo largo del trabajo que un capítulo donde obtengamos nuevos resultados (habrá exactamente dos nuevos resultados).

Capítulo 1

Generalizaciones del concepto de metrizabilidad

En este capítulo veremos la definición de los espacios que tendrán nuestra atención a lo largo del trabajo, para motivar las definiciones seguiremos las ideas originales de Ceder, el primero en definir los espacios estratificables. Comencemos enunciando el Teorema de metrización de Smirnov-Nagata, lamentablemente la prueba de este teorema escapa a los intereses del trabajo, por lo cual será omitida. Si el lector está interesado puede encontrar una prueba de Nagata mismo en [12].

Teorema 1.1 (Teorema de Metrización de Smirnov-Nagata)**.** *Sea X un espacio topológico. X es metrizable si y solo si tiene una base σ-localmente finita.*

Para entender este teorema es necesario recordar la siguiente definición.

Definición 1.2. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. $\mathscr{A}$ es σ-localmente finita si es unión numerable de familias localmente finitas.*

Es un hecho bien conocido que una familia localmente finita preserva cerraduras, es decir, la cerradura de la unión de alguna subfamilia no es más que la unión de las cerraduras de los elementos de dicha subfamilia. Sin embargo, ser localmente finita solo es una condición suficiente para preservar cerraduras, más no necesaria como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3. *Existe una familia que preserva cerraduras pero no es localmente finita.*

Sea $\mathbb{R}$ con la topología discreta y definamos $\mathscr{U} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \in A\}$. Entonces toda vecindad del 0 interseca a todos los miembros de $\mathscr{U}$. Como $\mathscr{U}$ no es finita esto implica que $\mathscr{U}$ no es localmente finita. Por otra parte para cualquier $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ tenemos que

$$\bigcup_{A\in\mathscr{U}'} cl_X(A) = \bigcup_{A\in\mathscr{U}'} A = cl_X\left(\bigcup_{A\in\mathscr{U}'} A\right).$$

Si ahora revisamos de nuevo el Teorema 1.1, una pregunta que surge naturalmente es pensar qué sucede si solamente exigimos que la base sea unión numerable de familias que preservan cerraduras. Resulta que este es el punto de partida de Ceder, en [2], para definir lo que él llama espacios M_i que, como indica el título, son generalizaciones de los espacios métricos (de ahí la letra M en su nombre). La primera definición que da en dicho artículo es la de espacios M_1 que no es más que la respuesta a la pregunta que planteamos al comienzo del párrafo: un espacio es M_1 si es regular y tiene una base que es unión numerable de familias que preservan cerraduras. Pero Ceder no se detuvo solo en eso, una vez debilitada la condición sobre las familias que forman la base, se cuestiona acerca de qué sucede al debilitar la condición de ser base. Con esto en mente define entonces un espacio M_2 como un espacio regular que tiene una quasi base que es unión numerable de familias que preservan cerraduras. Por último define los espacios M_3. Estos últimos no son más que los espacios estratificables, antes de definirlos necesitamos unos cuantos conceptos nuevos que abarcan las siguientes definiciones.

Definición 1.4. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ una familia tal que para cada $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ se cumple $P_1 \subseteq P_2$. Decimos que $\mathscr{P}$ es una base-par si se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- *Para cada $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$, P_1 es abierto.*
- *Para todo $x \in X$ y U vecindad de x existe $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ tal que $x \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq U$.*

Definición 1.5. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ una familia tal que para cada $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ se cumple $P_1 \subseteq P_2$. Decimos que $\mathscr{P}$ es entretelada si para toda $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}$ tenemos*

$$cl_X\left(\bigcup\{P_1 \mid (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}\right) \subseteq \bigcup\{P_2 \mid (P_1, P_2) \in \mathscr{P}'\}.$$

Definición 1.6. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{P} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ una familia tal que para cada $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ se cumple $P_1 \subseteq P_2$. Decimos que $\mathscr{P}$ es σ-entretelada si es unión numerable de familias entreteladas.*

Ahora estamos en condiciones de definir formalmente a un espacio M_3

Definición 1.7. *Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es un espacio M_3 si tiene una base-par σ-entretelada.*

La clase de los espacios M_i definidos por Ceder resulta tener una gran cantidad de propiedades que se comparten con los espacios métricos, entre ellas se encuentran:

- El producto numerable de espacios M_i es M_i.
- Si X es M_i, las siguientes afirmaciones son equivalentes:
    1. X es Lindelöf.
    2. X es separable.
    3. Cualquier colección de abiertos de X ajenos dos a dos es a lo más numerable (X tiene la ccc).
- Un espacio localmente M_i y paracompacto es M_i.

Estas propiedades por sí mismas ya hacen interesante el estudio de los espacios M_i. Sin embargo, Borges en [1] muestra que la clase de los espacios M_3 destaca lo suficiente como para ganarse un nombre distintivo: espacios estratificables. En dicho artículo Borges trabaja con una equivalencia de la Definición 1.7, la cuál justifica la elección de nombre y la enunciamos a continuación.

Definición 1.8. *Sean X un espacio topológico y U abierto. Una familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_X$ es una estratificación de U si cumple lo siguiente:*

- $cl_X(U_n) \subseteq U$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$.
- $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Definición 1.9. *Sea X un espacio topológico T_1. Decimos que X es estratificable si a cada abierto podemos asignarle una estratificación de tal forma que se cumpla la siguiente condición de monotonía:*

- *Si U y V son abiertos con estratificaciones $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, y $U \subseteq V$ entonces $U_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

A la asignación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también le llamaremos una estratificación de X.

No es inmediata la relación entre la definición 1.7 y la definición 1.9. Mientras que la primera parece exigir condiciones demasiado extravagantes y específicas, la segunda está dada en términos realmente básicos de Topología I.

Como los espacios M_3 surgen de debilitaciones del Teorema 1.1, es natural esperar que todo espacio metrizable es M_3. De esto trata, aunque indirectamente, la primera proposición de este trabajo.

Proposición 1.10. *Todo espacio metrizable es estratificable.*

Demostración. Sean X metrizable con métrica d y U abierto en X.
Definamos $f_U : X \to \mathbb{R}^+$ como $f_U(x) = d(x, X \setminus U)$. Entonces f_U es continua y como $X \setminus U$ es cerrado tenemos que

$$X \setminus U = f_U^{-1}[\{0\}].$$

Es decir,

$$U = f_U^{-1}[(0,\infty)].$$

Pero como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\frac{1}{n},\infty) = (0,\infty)$, y la imagen inversa respeta uniones, podemos escribir la igualdad anterior como

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_U^{-1}\left[\left(\frac{1}{n},\infty\right)\right]. \qquad (*)$$

Ahora definamos $U_n = f_U^{-1}[(\frac{1}{n},\infty)]$. Notemos que la continuidad de f_U implica que cada U_n es abierto. Además notemos que $(\frac{1}{n},\infty) \subseteq [\frac{1}{n},\infty) \subseteq (0,\infty)$ por lo que al aplicar imagen inversa obtenemos

$$U_n \subseteq f_U^{-1}\left[\left[\frac{1}{n},\infty\right)\right] \subseteq f_U^{-1}[(0,\infty)] = U.$$

Observemos que $f_U^{-1}[[\frac{1}{n},\infty)]$ es cerrado por la continuidad de f_U, así que si cerramos cada miembro de la cadena de contenciones anterior podemos concluir que

$$\mathrm{cl}_X(U_n) \subseteq f_U^{-1}\left[\left[\frac{1}{n},\infty\right)\right] \subseteq U. \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ concluimos que la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple el segundo y primer punto de la Definición 1.8, respectivamente. Concluimos que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación de U.
Ahora tomemos V abierto tal que $U \subseteq V$ y veamos que se cumple la condición de monotonía de la Definición 1.9.
Como $U \subseteq V$ entonces $X \setminus V \subseteq X \setminus U$ y entonces

$$d(x, X \setminus V) \geq d(x, X \setminus U).$$

Esto debido a que estamos tomando ínfimo sobre un conjunto más grande. De esta desigualdad deducimos que $d(x, X\setminus U) > \frac{1}{n}$ implica que $d(x, X\setminus V) > \frac{1}{n}$ o lo que es lo mismo

$$f_U^{-1}\left[\left(\frac{1}{n}, \infty\right)\right] \subseteq f_V^{-1}\left[\left(\frac{1}{n}, \infty\right)\right].$$

Pero esto último no es más que $U_n \subseteq V_n$, justo lo que buscábamos. Por tanto X es estratificable. ■

Corolario 1.11. *Todo espacio regular y segundo numerable es estratificable.*

Demostración. El teorema de metrización de Urysohn nos dice que un espacio regular y segundo numerable necesariamente es metrizable por lo que basta aplicar la Proposición 1.10 para concluir que todo espacio regular y segundo numerable es estratificable. ■

El hecho de que todo espacio metrizable es estratificable era algo deseable y esperado. Por otra parte, sería una lástima que todo espacio estratificable fuera metrizable. El siguiente ejemplo muestra que no es así y por tanto la clase de los espacios estratificables es más amplia que aquella de los métricos.

Ejemplo 1.12. *Existe un espacio estratificable que no es metrizable.*

Antes de comenzar con el ejemplo, recordemos algunas propiedades de ultrafiltros libres en $\mathbb{N}$. *Sea* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro libre en* $\mathbb{N}$. *Es decir* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *es un filtro maximal con intersección vacía. Entonces* $\mathscr{U}$ *satisface lo siguiente:*

1) $\mathscr{U}$ *contiene a todos los conjuntos cofinitos.*

2) *Si* $A \subseteq \mathbb{N}$ *entonces* $A \in \mathscr{U}$ *ó* $\mathbb{N} \setminus A \in \mathscr{U}$.

3) *Si* $A \cap U \neq \emptyset$ *para todo* $U \in \mathscr{U}$ *entonces* $A \in \mathscr{U}$.

Ahora ya estamos en condiciones de definir nuestro espacio. Sean $X = \mathbb{N} \cup \{\mathscr{U}\}$ *con la siguiente topología: Los puntos de* $\mathbb{N}$ *son aislados y las vecindades de* $\mathscr{U}$ *son los conjuntos de la forma* $U \cup \{\mathscr{U}\}$ *con* $U \in \mathscr{U}$.

Comencemos observando el comportamiento de la topología. Dado $n \in \mathbb{N}$, *1) implica que* $\mathbb{N} \setminus \{n\} \in \mathscr{U}$ *por lo que* $X \setminus \{n\} = (\mathbb{N} \setminus \{n\}) \cup \{\mathscr{U}\}$ *es abierto en* X *y, entonces,* $\{n\}$ *es cerrado. Por otra parte es inmediato que* $\{\mathscr{U}\}$ *es cerrado pues el resto del espacio es abierto. Con esto demostramos que* X *es* T_1.

Otra propiedad importante de X *es que todo conjunto que contiene a* $\mathscr{U}$ *es cerrado. Para ver esto tomemos* $A \subseteq X$ *con* $\mathscr{U} \in A$ *y* $x \notin A$. *Como supusimos* $\mathscr{U} \in A$, *tenemos que* $x \in \mathbb{N}$ *y por tanto* $\{x\}$ *es una vecindad de* x *cuya intersección con* A *es vacía, es decir* $x \notin cl_X(A)$. *Esto demuestra que* $cl_X(A) \subseteq A$ *y por tanto* A *es cerrado en* X.

Ahora pasemos a demostrar que X *es* M_3. *Primero definamos*

$$B_1 = \{(U \cup \{\mathscr{U}\}, U \cup \{\mathscr{U}\}) \mid U \in \mathscr{U}\},$$

y para cada $n \geq 2$ *sea* $B_n = \{(\{n-1\}, \{n-1\})\}$. *Es fácil ver que para todo* $n \geq 2$ *la familia* B_n *es entretelada, puesto que sus únicas subfamilias son ella misma y el vacío, que cumplen la condición de la Definición 1.5 por ser los puntos cerrados en* X *y vacuidad, respectivamente. Ahora veamos que* B_1 *también es entretelada. Primero notemos que tomar una subfamilia de* B_1 *es equivalente a tomar una subfamilia de* $\mathscr{U}$, *por lo que directamente tomamos* $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{U}$ *(*$\mathscr{A} \neq \emptyset$ *para evitar trivialidades). Trivialmente tenemos que* $\mathscr{U} \in \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U \cup \{\mathscr{U}\}$ *así que este último conjunto es cerrado según los comentarios del párrafo anterior. Esto nos dice que*

$$cl_X\left(\bigcup_{U \in \mathscr{U}} U \cup \{\mathscr{U}\}\right) = \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U \cup \{\mathscr{U}\} \subseteq \bigcup_{U \in \mathscr{A}} U \cup \{\mathscr{U}\},$$

por tanto B_1 *es entretelada (Pareciera que no hacemos nada solo porque las primeras y segundas coordenadas de* B_1 *son iguales).*

Ahora definamos $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ *y veamos que es una base par* σ*-entretelada para* X. *Sólo nos falta probar que* B *es base par. Por definición todas sus primeras coordenadas son abiertas cumpliendo el primer punto de la Definición 1.4. Para ver que cumple el segundo, tomemos* $x \in X$ *y* U *abierto* *tal que $x \in U$. Si $x \in \mathbb{N}$ entonces basta tomar $(\{x\},\{x\}) \in B$ para que se cumpla $x \in \{x\} \subseteq \{x\} \subseteq U$, mientras que si $x = \mathscr{U}$ entonces existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $\mathscr{U} \in V \cup \{\mathscr{U}\} \subseteq V \cup \{\mathscr{U}\} \subseteq U$ y además $(V \cup \{U\}, V \cup \{\mathscr{U}\}) \in B$. Concluimos que B es una base par σ-entretelada y por tanto X es M_3.*

Ahora para ver que X no es metrizable, probaremos que $\mathscr{U}$ no tiene una base local numerable. Supongamos que sí, y sea $\{U_n \cup \{\mathscr{U}\}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dicha base. De la definición de las vecindades de $\mathscr{U}$ se sigue que la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de filtro para $\mathscr{U}$. Primero notemos que 1) y el hecho de que $\mathscr{U}$ sea filtro implican que cada $U \in \mathscr{U}$ es infinito y que para cualquier $F \subseteq \mathbb{N}$ finito y $U \in \mathscr{U}$, tenemos $U \setminus F = (U \cap \mathbb{N} \setminus F) \in \mathscr{U}$. Como U_1 es infinito podemos tomar $x_1, y_1 \in U_1$ de tal forma que sean distintos, luego $U_2 \setminus \{x_1, y_1\} \in \mathscr{U}$ y sigue siendo infinito por lo que podemos tomar $x_2, y_2 \in \mathscr{U}_2 \setminus \{x_1, y_1\}$ distintos. Siguiendo el proceso recursivamente, obtenemos elementos

$$x_n, y_n \in U_n \setminus \{x_1, \dots x_{n-1}, y_1, \dots y_{n-1}\}$$

con $x_n \neq y_n$. Definamos $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $B = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $A \cap B = \emptyset$ por construcción y veamos que ambos están en $\mathscr{U}$ para obtener una contradicción. Según 3), basta tomarnos un $U \in \mathscr{U}$ y ver que $U \cap A \neq \emptyset$. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de $\mathscr{U}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subseteq U$ y por tanto $x_n \in U$, es decir, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \in \mathscr{U}$. De forma análoga concluimos que $B \in \mathscr{U}$ lo cual es una contradicción pues $A \cap B = \emptyset$. Por tanto $\mathscr{U}$ no tiene una base local numerable en X y, en consecuencia, X no es metrizable pero sí estratificable.

Sin más preámbulo veamos la equivalencia entre la Definición 1.7 y la Definición 1.9.

Proposición 1.13. *Sea X un espacio topológico T_1. X es estratificable si y solo si es M_3.*

Demostración. Sea X un espacio T_1.
Supongamos primero que X es M_3 y sea $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ una base-par σ-entretelada. Es decir para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ es una familia entretelada. Sea U abierto, definamos $\mathscr{Q}_n^U = \{(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n \mid P_2 \subseteq U\} \subseteq \mathscr{P}_n$ y sea

$$U_n = \bigcup \{P_1 \mid \exists P_2 \subseteq X,\ (P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U\}.$$

Como $\mathscr{P}$ es base-par, cada P_1 es abierto por lo que U_n es abierto al ser unión de abiertos. Además, como $\mathscr{P}_n$ es entretelada, tenemos que

$$\begin{aligned} U_n &\subseteq \mathrm{cl}_X(U_n) \\ &= \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{P_1 \mid \exists P_2 \subseteq X \ (P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U\}\right) \\ &\subseteq \bigcup\{P_2 \mid (P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U\} \\ &\subseteq U. \end{aligned}$$

Donde la segunda contención se sigue de que $\mathscr{P}_n$ es entretelada y la tercera contención se debe a que si $(P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U$, entonces $P_2 \subseteq U$ por la definición de $\mathscr{Q}_n^U$. Con esto concluimos que se satisface la primera condición de la Definición 1.8. Veamos ahora que se cumple la segunda. Sea $x \in U$. Como $\mathscr{P}$ es base-par existe $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}$ tal que $x \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq U$. Pero $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ y como además $P_2 \subseteq U$ entonces $(P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U$ y concluimos que $x \in P_1 \subseteq U_n$, entonces

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Mientras que de la serie anterior de contenciones se sigue la otra contención. Por tanto

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Por lo que se cumple la segunda condición de la Definición 1.8 y la familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ así definida es una estratificación de U.

Ahora tomemos V abierto tal que $U \subseteq V$ y veamos que $U_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pero esto es sencillo, puesto que si $(P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U$, por definición $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ y $P_2 \subseteq U$, luego como $U \subseteq V$ entonces $(P_1, P_2) \in \mathscr{P}_n$ y $P_2 \subseteq V$, es decir, $(P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^V$. En resumen, si $U \subseteq V$ entonces $\mathscr{Q}_n^U \subseteq \mathscr{Q}_n^V$ y por tanto

$$U_n = \bigcup\{P_1 \mid (P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^U\} \subseteq \bigcup\{P_1 \mid (P_1, P_2) \in \mathscr{Q}_n^V\} = V_n.$$

Justo lo buscado. Concluimos que la asignación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación para X.

Ahora supongamos que X es estratificable con estratificación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\mathscr{P}_n = \{(U_n, \mathrm{cl}_X(U_n)) \mid U \in \tau_X\}.$$

Entonces $\mathscr{P}_n$ es entretelada. Sea $\mathscr{P}' \subseteq \mathscr{P}_n$, para cada U abierto tenemos $U \subseteq \mathrm{cl}_X(U)$ y por tanto

$$\bigcup\{U \mid (U, \mathrm{cl}_X(U)) \in \mathscr{P}'\} \subseteq \bigcup\{\mathrm{cl}_X(U) \mid (U, \mathrm{cl}_X(U)) \in \mathscr{P}'\}.$$

Así que $\mathscr{P}_n$ efectivamente es entretelada. Por último definamos $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ y veamos que es una base-par σ-entretelada . Como ya tenemos que cada $\mathscr{P}_n$ es entretelada solo queda verificar que $\mathscr{P}$ es base-par. Trivialmente se satisface la primera condición de la definición 1.4 por lo que sólo hay que revisar la segunda. Para esto, sean $x \in X$ y U abierto que tiene a x. Como $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación de U existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_n$. Si ahora usamos la primera condición de la definición 1.8 deducimos que $x \in U_n \subseteq \mathrm{cl}_X(U_n) \subseteq U$ y por tanto se satisface lo buscado. Así X es M_3. ■

Ahora que tenemos esta equivalencia vale la pena aclarar que al igual que Borges trabajaremos usando la Definición 1.9.

Una vez definidos los espacios estratificables pasemos a nuestra siguiente clase de espacios, los semiestratificables. Estos espacios fueron definidos por E. A. Michael pero fue Creede quien los analizó a detalle, llegando a que la relación entre los espacios métricos y los estratificables se mantiene entre los espacios semimétricos y los semiestratificables. Es decir, gran parte de las propiedades de los espacios semimétricos se mantienen en los espacios semiestratificables (Según Creede en [3], pareciera que todas las que no dependen en primero numerabilidad lo hacen).

Definición 1.14. *Sean X un espacio topológico y U abierto. Una familia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cerrados es una semiestratificación de U si cumple que*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U.$$

Definición 1.15. *Sea X un espacio topológico T_1. X es semiestratificable si a cada abierto podemos asignarle una semiestratificación de tal forma que se cumpla la siguiente condición de monotonia:*

- *Si U y V son abiertos con semiestratificaciones $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, y $U \subseteq V$, entonces $U_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

A la asignación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ le llamaremos una semiestratificación de X.

Como podemos notar la definición de espacios semiestratificables literalmente se obtiene de cambiar la familia de abiertos por una de cerrados, lo que hace redundante la primera condición de la Definición 1.8. El prefijo semi sugiere que todo espacio estratificable es semiestratificable, y así es, como lo indica la siguiente proposición.

Proposición 1.16. *Todo espacio estratificable es semiestratificable.*

Demostración. Sean X un espacio estratificable y $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una estratificación para X. Ahora tomemos U abierto y definamos $U_n' = \mathrm{cl}_X(U_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que la asignación $U \to \{U_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación para X. Primero notemos que, al ser $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estratificación de U tenemos lo siguiente

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X(U_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n' \subseteq U.$$

Y por tanto

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n' = U.$$

Así que $\{U_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación para U. Por último tomemos $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$ y veamos que se satisface la Definición 1.14. Como X es estratificable para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $U_n \subseteq V_n$. Cerramos y concluimos que $U_n' \subseteq V_n'$. Por tanto $U \to \{U_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una semiestratificación para X. ■

Una vez que tenemos que la clase de los espacios estratificables está contenida en la clase de los semiestratificables es natural preguntarnos bajo qué condiciones se vale el recíproco, es decir, ¿cuándo un espacio semiestratificable es estratificable?. Detengámonos un poco a revisar nuestras definiciones. Comencemos con una semiestratificación $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para un abierto U. ¿Cómo construimos una familia de abiertos que cumpla con la Definición 1.8? Un intento razonable sería tomar los interiores de cada elemento de la semiestratificación es decir la familia $\{\mathrm{int}_X(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con esto al menos tenemos una colección numerable de abiertos que cumplen el primer punto de la Definición 1.8 (pues la cerradura de cada uno se queda contenida en el U_n original), pero nada nos garantiza que se cumpla la segunda por lo que jugamos sucio y forzamos a que así sea. El procedimiento antes descrito nos da una estratificación para U y a pesar de que no nos hemos preocupado por la condición de monotonía de la Definición 1.9, resulta que no es necesario y, de cualquier modo, se cumple. Formalizamos estas ideas en la siguiente proposición.

Proposición 1.17. *Sea X un espacio topológico y supongamos que X tiene una semiestratificación $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con la siguiente propiedad:*

- *Para cada U abierto y $x \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in int_X(U_n)$.*

Entonces X es estratificable.

Demostración. Sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una semiestratificación de X que cumple las hipótesis. Sea U abierto y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $U'_n = \mathrm{int}_X(U_n)$. Veamos que $U \to \{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación para X. Primero veamos que $\{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estratificación de U. Notemos que

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{int}_X(U_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X(U'_n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U.$$

La primera contención se sigue de nuestra hipótesis, la segunda es trivial , la tercera de que U_n es un cerrado que contiene a $\mathrm{int}_X(U_n)$ y la última igualdad se da porque $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es semiestratificación de U. Esto muestra que $\{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica la Definición 1.8 y por tanto es una estratificación de U. Por último tomemos V abierto tal que $U \subseteq V$. Como $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es semiestratificación de X tenemos que $U_n \subseteq V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar interiores para concluir que $U'_n \subseteq V'_n$ y por tanto $U \to \{U'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación de X. ■

Lamentablemente no siempre se cumplen las hipótesis de la Proposición 1.17 y no siempre un espacio semiestratificable es estratificable. Nuestro siguiente ejemplo ataca ambas cuestiones.

Ejemplo 1.18. *Un espacio semiestratificable que no es estratificable y tampoco cumple las hipótesis de la Proposición 1.17.*

Consideremos a $\mathbb{N} = X$ con la topología cofinita. Sabemos que X es T_1. Tomemos U abierto y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $U_n = U \cap [0, n]$. Como U_n es finito es cerrado en X y

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U \cap [0, n] = U \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0, n] = U \cap \mathbb{N} = U.$$

Así que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una semiestratificación para* U. *Ahora tomemos* V *abierto tal que* $U \subseteq V$ *y por tanto* $U_n = U \cap [0,n] \subseteq V \cap [0,n] = V_n$, *así que* $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una semiestratificación para* X.

Por otra parte es imposible que X *sea estratificable, pues si* U *es un abierto no trivial, es decir,* $\emptyset \subsetneq U \subsetneq X$ *entonces para todo abierto* W *tal que* $W \subseteq U$ *se tiene que*

$$cl_X(W) = X \nsubseteq U$$

pues en la topología cofinita todo abierto no vacío es denso. Esto hace imposible que se cumpla el primer punto de la Definición 1.9 y por tanto X *es semiestratificable pero no estratificable.*

Por último sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una semiestratificación arbitraria de* X, *entonces cada* U_n *es cerrado y por tanto finito, pero los conjuntos finitos tienen interior vacío en* X *por tener la topología cofinita así que es imposible que* $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *cumpla la condición de la Proposición 1.17.*

Estudiando la misma pregunta que planteamos antes de la Proposición 1.17, Lutzer introduce los espacios k-semiestratificables en [10], espacios intermedios entre los estratificables y los semiestratificables, pero que en condiciones de primero numerabilidad se vuelven estratificables. Veamos quienes son estos espacios.

Definición 1.19. *Sea* X *un espacio topológico* T_1. *Decimos que* X *es* k*-semiestratificable si* X *tiene una semiestratificación* $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *con la siguiente propiedad:*

- *Para cada* U *abierto y* K *compacto contenido en* U *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $K \subseteq U_n$.

Las siguientes proposiciones no son más que la prueba de los comentarios hechos antes de la Definición 1.19.

Proposición 1.20. *Sea* X *un espacio topológico. Se cunple lo siguiente:*

1. *Si* X *es estratificable entonces* X *es* k*-semiestratificable.*

2. *Si* X *es* k*-semiestratificable entonces es semiestratificable.*

Demostración.

1. Supongamos X estratificable y sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una estratificación para X. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $U_n \subseteq U_m$ si $m > n$, pues si la estratificación normal no tiene esta propiedad entonces basta tomar $U_n^* = \bigcup_{m\leq n} U_n$ y $U \to \{U_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una estratificación de X que cumple lo buscado. Con esto en mente, sean U abierto y $K \subseteq U$ compacto, como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$ entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una cubierta abierta de K y por tanto existe una subcubierta finita, digamos $\{U_{m_1}, \dots U_{m_r}\}$ pero como la estratificación es creciente tenemos que

$$K \subseteq \bigcup_{i\leq r} U_{m_i} = U_n \subseteq \mathrm{cl}_X(U_n),$$

   donde $n = \text{máx}\{m_i \mid i \leq r\}$. Si ahora hacemos $U_n' = \mathrm{cl}_X(U_n)$ la Proposición 1.16 nos dice que es una semiestratificación para X y la última ecuación muestra que cumple la condición de la Definición 1.19, por tanto X es k-semiestratificable.

2. Es inmediato de la Definición 1.19.

■

Una vez que tenemos esta proposición nuevamente es natural preguntarnos ¿son válidos los recíprocos de la Proposición 1.20? Igual que en el caso de los espacios semiestratificables y estratificables la respuesta es negativa. En [10] podemos encontrar ejemplos de espacios k-semiestratificables no estratificables, pero dado que hacen referencia a teoría que escapa del enfoque del de este trabajo no los incluiremos. El ejemplo de un espacio semiestratificable y no k-semiestratificable si está al alcance y lo veremos a continuación.

Ejemplo 1.21. *Existe un espacio semiestratificable no k-semiestratificable.*

Sea X como en el Ejemplo 1.18. Basta ver que X no es k-semiestratificable. Supongamos que sí y sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una k-semiestratificación para X. Como $X \setminus \{1\}$ es abierto y compacto (recordemos que estamos trabajando en la topología cofinita), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(X \setminus \{1\}) \subseteq (X \setminus \{1\})_n$. Además $(X \setminus \{1\}_n) \subseteq (X \setminus \{1\})$ por ser semiestratificación. Por tanto $X \setminus \{1\} = (X \setminus \{1\})_n$ y concluimos que $X \setminus \{1\}$ es un cerrado no finito y distinto a X, lo cual es una contradicción. Así X no es k-semiestratificable.

Ahora veamos que bajo la condición de ser primero numerable todo espacio k-semiestratificable se vuelve estratificable.

Proposición 1.22. *Sea X un espacio topológico. Si X es k-semiestratificable y primero numerable entonces X es estratificable.*

Demostración. Sea $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una k-semiestratificación de X. Ahora tomemos U abierto y $x \in U$. Sea $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable y decreciente para x. Como es base local entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $W_{n_0} \subseteq U$, y como es decreciente

$$\ldots W_{n_0+1} \subseteq W_{n_0} \subseteq U$$

y entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $n_0 = 1$. Entonces

$$\ldots W_3 \subseteq W_2 \subseteq W_1 \subseteq U.$$

Supongamos que para todo $m \in \mathbb{N}$ tenemos $W_m \nsubseteq U_m$ y tomemos un elemento $y_m \in W_m \setminus U_m$. Veamos que la sucesión $\{y_n\}$ converge a x. Para esto tomemos V abierto tal que $x \in V$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in W_N \subseteq V$. Como la base es decreciente entonces para todo $n \geq N$ tenemos que $W_n \subseteq V$ y por tanto para todo $n \geq N$ tenemos que $y_n \in W_n \subseteq V$. Así que efectivamente $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Esto nos dice que $K = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$ es compacto (resultado conocido de Topología I). Como $U \to \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una k-semiestratificación existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq U_{n_0}$, pero entonces $y_{n_0} \in (W_{n_0} \setminus U_{n_0}) \cap U_{n_0}$, lo cual es imposible. Concluimos que existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $W_m \subseteq U_m$ es decir $x \in \mathrm{int}_X(U_m)$. Como esto vale para cada punto $x \in U$ concluimos que se satisfacen las condiciones de la Proposición 1.17 lo cual implica que X es estratificable. ■

La Proposición 1.22 podría levantar la pregunta de si todo espacio semiestratificable y primero numerable es k-semiestratificable. La respuesta es negativa y la obtuvimos en el Ejemplo 1.21, el espacio X de dicho ejemplo es un espacio semiestratificable y primero numerable pero no k-semiestratificable.

En lo que sigue de este trabajo nos enfocaremos sobre todo en el estudio de los espacios semiestratificables, a final de cuentas son una clase más amplia de espacios en comparación con la de los espacios estratificables y k-semiestratificables, por lo que todo lo que demostremos para espacios semiestratificables también será válido para estas dos clases de espacios. Dicho esto, la principal razón por la cual agregamos las definiciones de espacios estratificables y k-semiestratificables es que sirven como motivación para la definición de los espacios semiestratificables y surgen de manera natural al buscar condiciones para que un espacio semiestratificable sea estratificable.

Capítulo 2

Espacios semiestratificables

Antes de comenzar, una pequeña aclaración: a partir de este momento por espacio entenderemos un espacio T_1.

Comenzamos el estudio de los espacios semiestratificables con una propiedad que se desprende directamente de su definición. Esta es, todo subconjunto abierto de X es un F_σ y por tanto todo cerrado es un G_δ, propiedad que comparten con los espacios métricos. Esta propiedad nos proporciona un método que resulta ser bastante eficiente para determinar cuando un espacio dado no es semiestratificable, basta encontrar un cerrado que no sea G_δ.

Por la utilidad de esta propiedad a la hora de mostrar que algo no es semiestratificable conviene tenerla muy presente, así que la enunciaremos como proposición para citarla cada vez que la usemos.

Proposición 2.1. *Sea X un espacio semiestratificable. Todo abierto de X es F_σ y por tanto todo cerrado de X es G_δ.*

Detengámonos un momento para trabajar en la notación. La notación con la que definimos a los espacios estratificables, semiestratificables y k-semiestratificables en el Capítulo 1 es la que fue planteada originalmente por Borges, Creede y Lutzer, respectivamente. Sin embargo, dicha notación es poco eficiente al trabajar con múltiples espacios, más si dichos espacios no son ajenos, pues entonces la expresión U_n podría tener múltiples significados. Con el fin de evitar ambigüedades reinterpretemos las Definiciones 1.15 y 1.9 como sigue.

Sea $\mathscr{F}_X$ la familia de cerrados de un espacio X. Decimos que una función $s : \mathbb{N} \times \tau_X \to \mathscr{F}_X$ es una semiestratificación para X si cumple

1. Para todo $U \in \tau_X$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n, U) = U$.
2. Para todos $U, V \in \tau_X$ tales que $U \subseteq V$ se cumple $s(n, U) \subseteq s(n, V)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Con esta notación solo diremos que la función s es una semiestratificación para X. Al pensar las semiestratificaciones de esta forma resolvemos el problema de ambigüedad al trabajar con varios espacios, basta usar un subíndice para distinguir de que espacio es la semiestratificación. Dicho esto la ausencia de un subíndice indicará por defecto que la semiestratificación es del espacio X (que usaremos como espacio por defecto en todas las proposiciones).

Una interpretación análoga de una estratificación nos permite pensarla como una función $S : \mathbb{N} \times \tau_X \to \tau_X$ que cumple

1. Para todo $U \in \tau_X$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n, U) = U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\,(S(n, U))$.
2. Para todos $U, V \in \tau_X$ tales que $U \subseteq V$ se tiene $S(n, U) \subseteq S(n, V)$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Agregamos esto último de estratificaciones solo porque lo usaremos en algunas pruebas más adelante.

Ahora sí, comencemos a estudiar las propiedades de los espacios semiestratificables.

En la Proposición 1.20 esbozamos que todo espacio estratificable tiene una estratificación creciente. Los espacios semiestratificables también tienen esta propiedad, esta vez lo probamos a detalle.

Proposición 2.2. *Sea X un espacio semiestratificable. Entonces X tiene una semiestratificación s tal que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$s(n, U) \subseteq s(n + 1, U).$$

Demostración. Sea s' una semiestratificación para X.
Definamos $s : \mathbb{N} \times \tau_X \to \mathscr{F}$ como

$$s(n, U) = \bigcup_{m\leq n} s'(m, U).$$

Vemos que esta función cumple lo buscado. Primero notemos que $s(n,U) \subseteq U$ y es cerrado por ser unión finita de cerrados. Además:

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s'(n,U) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n,U) \subseteq U$$

donde la primera igualdad se sigue de que s' es semiestratificación de U. Así

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n,U) = U.$$

Por último sea $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $s'(n,U) \subseteq s'(n,V)$ pues s' es semiestratificación de X. Esto nos dice que

$$s(n,U) = \bigcup_{m\leq n} s'(m,U) \subseteq \bigcup_{m\leq n} s'(m,V) = s(n,V).$$

Y por tanto s es semiestratificación de X. Además cumple

$$s(n,U) = \bigcup_{m\leq n} s'(m,U) \subseteq \bigcup_{m\leq n+1} s'(m,U) = s(n+1,U).$$

Por lo que cumple lo buscado. ■

Según la Proposición 2.2 no perdemos generalidad al suponer que las semi estratificaciones son crecientes, por tanto de aquí en adelante esto también se volverá una suposición implícita (como ser T_1) cada que hablemos de semiestratificaciones.

Una de las primeras preguntas que planteó Borges al definir a los espacios estratificables fue: ¿Es todo espacio regular y numerable estratificable?. La respuesta fue negativa y Heath fue el encargado de dar el contraejemplo (Que también resuelve el problema de un k-semiestratificable no estratificable). El caso de los espacios semiestratificables es diferente, ni siquiera hace falta pedir regularidad para que todo espacio numerable sea semiestratificable.

Proposición 2.3. *Sea X un espacio numerable. Entonces X es semiestratificable.*

Demostración. Supongamos $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definamos $s : \mathbb{N} \times \tau_X \to \mathscr{F}_X$ como

$$s(n,U) = \{x_n\} \cap U.$$

$s(n, U)$ es cerrado pues X es T_1 ($s(n, U)$ es un punto o el vacío) y es claro que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} s(n, U) = U.$$

Además si $U \subseteq V$ y $V \in \tau_X$ entonces $\{x_n\} \cap U \subseteq \{x_n\} \cap V$, es decir, $s(n, U) \subseteq s(n, V)$ y esto para toda $n \in \mathbb{N}$ así que s es una semiestratificación para X. ■

Antes de continuar veamos algunos ejemplos de espacios semiestratificables usando los resultados que ya hemos visto.

Ejemplo 2.4.

i) *Todo espacio metrizable es semiestratificable. En particular todo espacio discreto es semiestratificable.* $\mathbb{R}^n$ *es semiestratificable. Sea* X *un espacio metrizable. Por la Proposición 1.10 tenemos que* X *es estratificable y por tanto semiestratificable por la Proposición 1.20.*

ii) *Toda topología que definamos en* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *da lugar a un espacio que es semiestratificable. Esto es inmediato de la Proposición 2.3.*

Si bien de momento nuestra lista de ejemplos es limitada, a medida que descubramos nuevas propiedades acerca de los espacios semiestratificables obtendremos nuevos ejemplos y no ejemplos de dichos espacios. De momento continuemos con el estudio de esta clase de espacios.

Cuando tenemos un espacio topológico con alguna propiedad lo primero que hacemos es preguntarnos si esa propiedad se preserva bajo construcciones topológicas como lo son los subespacios, producto, suma y cociente topológicos. En el caso de los subespacios topológicos es general hablar de que cierta propiedad se hereda a subsespacios o que el espacio es hereditariamente *Inserte nombre de la propiedad*, como ejemplo de una propiedad que se hereda tenemos la metrizabilidad mientras que las propiedades tipo compacidad nos dan un ejemplo de propiedades que no necesariamente se heredan. En el caso que nos concierne, es decir, el ser semiestratificable, sí se hereda sin pedir condiciones sobre el subespacio, como veremos a continuación.

Proposición 2.5. *Sea* X *un espacio semiestratificable. Entonces todo subespacio* A *de* X *es semiestratificable.*

Demostración. Sea s una semiestratificación de X.
Tomemos $U \subseteq A$ abierto en A entonces existe $\hat{U}$ abierto en X tal que $U = \hat{U} \cap A$. Esto nos permite definir

$$A(U) = \bigcup \{W \in \tau_X \mid W \cap A = U\}.$$

Entonces $A(U) \in \tau_X$ en X y $A(U) \cap A = U$. Definamos $s_A : \mathbb{N} \times \tau_A \to \mathscr{F}_A$

$$s_A(n, U) = s(n, A(U)) \cap A.$$

De esta forma $s_A(n, U)$ es cerrado en A y s_A está bien definida al especificar a $A(U)$. Veamos que s_A es una semiestratificación para A. Primero como s es semiestratificación de X tenemos que

$$A(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s(n, A(U)).$$

Si ahora intersectamos con A obtenemos

$$U = A(U) \cap A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} s(n, A(U)) \right) \cap A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (s(n, A(U)) \cap A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_A(n, U).$$

Por último tomemos V abierto en A tal que $U \subseteq V$ y veamos que $A(U) \subseteq A(V)$. Esto pasa pues $A(U) \cup A(V)$ es un abierto de X tal que $(A(U) \cup A(V)) \cap A = V$ así que $A(U) \cup A(V) \subseteq A(V)$. Luego como s es semiestratificación de X

$$s(n, A(U)) \subseteq s(n, A(V)).$$

Intersectamos con A para obtener

$$s_A(n, U) = s(n, A(U)) \cap A \subseteq s(n, A(V)) \cap A = s_A(n, V).$$

Y por tanto s_A es una semiestratificación para A. ■

Resulta que si en vez de considerar un subespacio arbitrario tomamos un subespacio cerrado de un espacio semiestratificable dicho subespacio además de ser semiestratificable todas sus semiestratificaciones tienen una forma particular. De esto trata la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *Sean X un espacio semiestratificable y $A \subseteq X$ cerrado. Si s_A es una semiestratificación de A entonces existe una semiestratificación $s$de X tal que*

$$s_A(n, U \cap A) = s(n, U) \cap A$$

para todo $U \in \tau_X$.

Demostración. Sea s_X una semiestratificación de X.
Definamos $s : \mathbb{N} \times \tau_X \to \mathscr{F}_X$ como

$$s(n, U) = s_A(n, U \cap A) \cup s_X(n, U \setminus A).$$

Veamos que s es una semiestratificación de X. Para esto notemos que $s(n, U)$ es cerrado por ser unión de cerrados (el conjunto de la izquierda es cerrado de un cerrado). Además

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n, U) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} ((s_A(n, U) \cup s_X(n, U \setminus A)) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s_A(n, U) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s_X(n, U \setminus A) \\
&= (U \cap A) \cup (U \setminus A) \\
&= U
\end{aligned}$$

pues s_A y s_X son semiestratificaciones de A y X, respectivamente. Ahora sea $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$, como s_X es semiestratificación de X y $U \setminus A \subseteq V \setminus A$

$$s(n, U \setminus A) \subseteq s(n, V \setminus A).$$

Además $U \cap A \subseteq V \cap A$ y s_A es una semiestratificación de A por lo que

$$s_A(n, U \cap A) \subseteq s_A(n, V \cap V).$$

Concluimos que

$$s(n, U) = s_A(n, U) \cup s(n, U \setminus A) \subseteq s_A(n, V \cap A) \cup s(n, U \setminus A) = s(n, V).$$

Y por tanto s es una semiestratificación de X. Además

$$s(n, U) \cap A = (s_A(n, U) \cup s(n, U \setminus A)) \cap A = s_A(n, U).$$

Por lo que es la semiestratificación buscada. ■

La Proposición 2.5 nos da herramientas para descartar una clase de espacios de nuestro estudio, los espacios de ordinales. Resulta que la gran mayoría de ellos no son semiestratificables, en lo que podríamos interpretar como que dicha clase de espacios está muy lejos de aquella de los espacios metrizables. Todo esto se sigue del siguiente resultado.

Proposición 2.7. *El espacio de ordinales* $[0, \omega_1]$ *no es semiestratificable.*

Demostración. Veamos que $[0, \omega_1]$ tiene un cerrado que no es G_δ para concluir que no es semiestratificable.
Consideremos $\{\omega_1\}$ y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de abiertos que tienen a ω_1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un abierto básico que tiene a ω_1, es decir, existe α_n tal que

$$(\alpha_n, \omega_1] \subseteq U_n$$

Pero cada α_n es numerable, por tanto su supremo, digamos α, sigue siendo numerable. En particular $\alpha \neq \omega_1$. Por tanto $\alpha + 1 \neq \omega_1$ y entonces

$$\alpha + 1 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\alpha_n, \omega_1] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

y concluimos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \neq \{\omega_1\}.$$

Así que $\{\omega_1\}$ es un cerrado que no es G_δ y $[0, \omega_1]$ no es semiestratificable por la Proposición 2.1. ■

Corolario 2.8. *Si* α *es un ordinal tal que* $\omega_1 < \alpha$ *entonces* $[0, \alpha]$ *y* $[0, \alpha)$ *no son semiestratificables.*

Demostración. Si $[0, \alpha]$ o $[0, \alpha)$ fueran semiestratificables entonces $[0, \omega_1]$ también lo sería, por la Proposición 2.5 (Su topología como subespacio de $[0, \alpha]$ o $[0, \alpha)$ coincide con su topología usual). ■

Como nota final respecto a los espacios de ordinales, si $\alpha < \omega_1$ entonces $[0, \alpha]$ es numerable y por tanto semiestratificable por la Proposición 2.3. Ahora solo nos queda la pregunta de qué sucede con $[0, \omega_1)$, pero para resolver este caso necesitaremos un poco más de herramienta acerca de las propiedades de los espacios semiestratificables, por lo que volveremos a él más adelante.

Regresemos al estudio de los espacios semiestratificables y las operaciones topológicas. La suma topológica es posiblemente la construcción topológica más simple por lo que la estudiaremos antes de pasar al caso de los cocientes y productos. Al igual que en el caso de espacios métricos la suma de espacios semiestratificables es nuevamente semiestratificable sin pedir alguna condición adicional, este resultado lo veremos como corolario de la siguiente proposición más general.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio tal que $X = \bigcup_{\alpha \leq \beta} X_\alpha$ donde la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}$ es localmente finita y para todo $\alpha \leq \beta$ tenemos que X_α es cerrado y semiestratificable con semiestratificación s_α. Entonces X es semiestratificable.*

Demostración. Definamos $s : \mathbb{N} \times \tau_X \mapsto \mathcal{F}_X$ como

$$s(n, U) = \bigcup_{\alpha \leq \beta} s_\alpha(n, U \cap X_\alpha).$$

No es inmediato que $s(n, U)$ sea un cerrado, pero eso se sigue de que la familia $\{s_\alpha(n, U \cap X_\alpha)\}_{\alpha \leq \beta}$ es localmente finita pues cada elemento de esta familia está contenido en uno de la familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \leq \beta}$ y esta última es localmente finita por hipótesis. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{cl}_X\,(s(n, U)) &= \mathrm{cl}_X \left(\bigcup_{\alpha \leq \beta} s_\alpha(n, U \cap X_\alpha) \right) \\
&= \bigcup_{\alpha \leq \beta} \mathrm{cl}_X\,(s_\alpha(n, U \cap X_\alpha)) \\
&= \bigcup_{\alpha \leq \beta} s_\alpha(n, U \cap X_\alpha) \\
&= s(n, U).
\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad es por la finitud local y la tercera porque para todo $\alpha \leq \beta$ tenemos que $s_\alpha(n, U \cap X_\alpha)$ es cerrado de un subespacio cerrado y por tanto cerrado en X. Así, $s(n, U)$ es cerrado en X.

Para ver que s es semiestratificación de X notemos que

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n,U) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{\alpha\leq\beta} s_\alpha(n, U\cap X_\alpha) \right) \\
&= \bigcup_{\alpha\leq\beta} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s_\alpha(n, U\cap X_\alpha) \right) \\
&= \bigcup_{\alpha\leq\beta} U\cap X_\alpha \\
&= U\cap \left(\bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha \right) \\
&= U\cap X \\
&= U.
\end{aligned}$$

La tercera igualdad es porque s_α es semiestratificación de X_α y la quinta porque $X = \bigcup_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ por hipótesis. Por último tomemos $V \in \tau_x$ tal que $U \subseteq V$. Entonces para todo $\alpha \leq \beta$ tenemos $U\cap X_\alpha \subseteq V\cap X_\alpha$ y como s_α es semiestratificación de X_α entonces para todos $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha\leq\beta$

$$s_\alpha(n, U\cap X_\alpha) \subseteq s_\alpha(n, V\cap X_\alpha).$$

Y por tanto

$$s(n,U) = \bigcup_{\alpha\leq\beta} s_\alpha(n, U\cap X_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\leq\beta} s_\alpha(n, V\cap X_\alpha) = s(n,V).$$

Así que s es semiestratificación para X.

$\blacksquare$

Corolario 2.10. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\leq\beta}$ una familia de espacios semiestratificables con $s_\alpha : \mathbb{N}\times\tau_{X_\alpha} \to \mathcal{F}_{X_\alpha}$ sus respectivas semi estratificaciones. Entonces $X = \oplus_{\alpha\leq\beta} X_\alpha$ es semiestratificable.*

Demostración. Por la construcción de la suma topológica tenemos que cada espacio X_α es cerrado en X y la familia $\{X_\alpha\}$ es localmente finita al estar formada por conjuntos ajenos, así que X es semiestratificable por la Proposición 2.9. $\blacksquare$

Hasta ahora la clase de los espacios semiestratificables se ha comportado de buena manera con las operaciones topológicas, tanto para subespacios como para sumas no hay que pedir ninguna condición para que se preserve la semiestratificabilidad. Lamentablemente el caso del cociente ya no es tan simple, empezando porque el cociente de un espacio T_1 no necesariamente es T_1, es un resultado bien conocido que el cociente de un espacio T_1 es T_1 si y solo si cada clase de equivalencia es cerrada en el espacio orignal, una forma de garantizar esto consiste en tomar el cociente de un espacio sobre un subespacio cerrado. Resulta que al hacer esto último no solo mantenemos lo T_1, sino que también el ser semiestratificable.

Proposición 2.11. *Sean X un espacio semiestratificable y $A \subseteq X$ un cerrado. Entonces $Y = X/A$ es semiestratificable.*

Demostración. Por los comentarios anteriores a la proposición Y es T_1. Sea q la función cociente.

Definamos $s_Y : \mathbb{N} \times \tau_Y \to \mathscr{F}_Y$ como

$$s_Y(n, U) = q\Big[s(n, q^{-1}[U])\Big].$$

De la definición de q tenemos lo siguiente

$$q^{-1}[q[D]] = \begin{cases} D \text{ si } A \cap D = \emptyset \\ D \cup A \text{ si } A \cap D \neq \emptyset. \end{cases}$$

Que en el caso que nos interesa se transforma en

$$q^{-1}[s_Y(n, U)] = \begin{cases} s(n, q^{-1}[U]) \text{ si } A \cap s(n, q^{-1}[U]) = \emptyset \\ s(n, q^{-1}[U]) \cup A \text{ si } A \cap s(n, q^{-1}[U]) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Que en ambos casos es un cerrado de X y por tanto $s_Y(n, U)$ es cerrado en Y. Por otra parte $s(n, q^{-1}[U]) \subseteq q^{-1}[U]$ así que

$$s_Y(n, U) = q[s(n, q^{-1}[U])] \subseteq q[q^{-1}[U]] \subseteq U.$$

Y entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_Y(n, U) \subseteq U.$$

Para ver la otra contención tomemos $[x] \in U$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in s(n, q^{-1}[U])$ pues s es semiestratificación de X. Así

$$[x] \in q[s(n, q^{-1}[U])] = s_Y(n, U).$$

Y por tanto

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_Y(n, U) = U.$$

Por último tomemos $V \in \tau_Y$ tal que $U \subseteq V$. Bajo estas condiciones $q^{-1}[U] \subseteq q^{-1}[V]$ y como s es semiestratificación de X esto implica que

$$s(n, q^{-1}[U]) \subseteq s(n, q^{-1}[V]).$$

Aplicando q a esta contención se sigue que

$$s_Y(n, U) = q[s(n, q^{-1}[U])] \subseteq q[s(n, q^{-1}[V])] = s_Y(n, V).$$

Y por tanto s_Y es semiestratificación para Y. ■

La Proposición 2.11 nos da una condición suficiente para que el cociente de un espacio semiestratificable sea nuevamente semiestratificable, sin embargo, no es una condición necesaria como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.12. *Existen un espacio semiestratificable X y una relación de equivalencia $\sim$ que no consiste en identificar los puntos de un cerrado pero $X/\sim$ sigue siendo semiestratificable.*

Sea $X = \mathbb{R}^2$ con su topología usual. Como X es métrico el Ejemplo 2.4 nos dice que es semiestratificable. Definamos una relación de equivalencia como sigue

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Es decir identificamos todas las líneas verticales a un solo punto (No identificamos un cerrado, sino muchísimos cerrados). Entonces $\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{R}$ que es semiestratificable por el mismo argumento usado para $\mathbb{R}^2$.

En cuanto a operaciones topológicas solo queda pendiente revisar el caso del producto topológico. Para poder atacar este problema es conveniente detenernos un poco para dar una caracterización de los espacios semiestraticables en términos de una g-función. Esta caracterización fue planteada por Creede en [3], aunque se nota una influencia de las ideas que Heath plantea en [7], donde este último da una caracterización bastante parecida pero para espacios semimétricos y desarrollables (ambas las veremos más adelante).

Teorema 2.13. *Sea X un espacio. X es semiestratificable si y sólo si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \mapsto \tau_X$ con las siguientes propiedades:*

1) Para todo $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) = \{x\}$.

2) Para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$.

3) Para todos $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sucesión, si $x \in g(n,x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $x_n \to x$.

Demostración. Supongamos primero que X es semiestratificable.
Definamos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$

$$g(n,x) = X \setminus s(n, X \setminus \{x\}).$$

Nuestra función está bien definida pues $X \setminus \{x\}$ es un abierto al estar en un espacio T_1, entonces $s(n, X \setminus \{x\})$ tiene sentido y es un cerrado.

Veamos primero que g cumple la condición *1)*. Para cada $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus s(n, X \setminus \{x\}) \\ &= X \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n, X \setminus \{x\})\right) \\ &= X \setminus (X \setminus \{x\}) \\ &= \{x\}.\end{aligned}$$

Y por tanto g cumple *1)* (en la tercera igualdad usamos que s es semiestratificación).

Ahora veamos que g cumple *2)*. Como la semiestratificación es creciente, para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos $s(n+1, X \setminus \{x\}) \subseteq s(n, X \setminus \{x\})$ y por tanto

$$g(n+1,x) = X \setminus s(n+1, X \setminus \{x\}) \subseteq X \setminus s(n, X \setminus \{x\}) = g(n,x).$$

Es decir, g cumple *2)*.

Por último veamos que g cumple *3)*. Para esto sean $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $y \in X$ tales que $x \in g(n,x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora tomemos $U \in \tau_X$ tal que

$x \in U$. Para todo $z \in X \setminus U$ tenemos que $U \subseteq X \setminus \{z\}$ y como s es semiestratificación de X, entonces

$$s(n, U) \subseteq s(n, X \setminus \{z\})$$

y esta última ecuación es válida para todos $n \in \mathbb{N}$ y $z \in X \setminus U$. Además, como $x \in U$ y s es semiestratificación existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in s(n_0, U)$. Entonces para todo $n \geq n_0$ debemos tener $x_n \in U$, de lo contrario

$$x \in s(n_0, U) \subseteq s(n, U) \subseteq s(n, X \setminus \{x\}),$$

lo cual implicaría

$$x \notin X \setminus s(n, X \setminus \{x\}) = g(n, x_n).$$

Lo cual es una contradicción con la elección de x, así que para toda $n \geq n_0$ tenemos $x_n \in U$ y $x_n \to x$. Concluimos que g también cumple *3)* y terminamos la prueba de esta implicación.

Ahora supongamos que tenemos una $g : \mathbb{N} \times X \mapsto \tau_X$ que cumple *i), ii), iii)*. Dado $U \in \tau_X$ sea

$$s(n, U) = X \setminus \left(\bigcup_{y \in X \setminus U} g(n, y) \right).$$

Es fácil notar que $X \setminus U \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus U} g(n, y)$ y por tanto

$$X \setminus U \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{y \in X \setminus U} g(n, y) \right).$$

Veamos que se da la otra contención. Dado x en el lado derecho tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X \setminus U$ tal que $x \in g(n, x_n)$ y como g cumple *iii)* entonces $x_n \to x$. Como $X \setminus U$ es cerrado esto implica que $x \in X \setminus U$, así

$$X \setminus U = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{y \in X \setminus U} g(n, y) \right).$$

Y entonces

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} s(n, U) = X \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{y \in X \setminus U} g(n, y) \right) \right) = X \setminus (X \setminus U) = U.$$

Por último sea $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $X \setminus V \subseteq X \setminus U$ por lo que

$$\bigcup_{x \in X \setminus V} g(n,x) \subseteq \bigcup_{x \in X \setminus U} g(n,x).$$

Tomando complementos concluimos que

$$s(n,U) \subseteq s(n,V).$$

Y por tanto s es una semiestratificación para X. ■

Como dijimos antes de enunciar la Proposición 2.13, esta proposición nos permite tratar el estudio del producto de espacios semiestratificables.

Proposición 2.14. *Sea* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia de espacios semiestratificables. Entonces* $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *es semiestratificable.*

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea $g_m : \mathbb{N} \times X_m \mapsto \tau_{X_m}$ una función que cumple las hipótesis del Teorema 2.13.

Definamos $g : \mathbb{N} \times X \mapsto \tau_X$ como

$$g(n,x) = \prod_{m \leq n} g_m(n, x_m) \times \prod_{m > n} X_m$$

donde $x_m = \pi_m(x)$. Notemos que $g(n,x)$ es un abierto básico canónico. Veamos que g cumple las hipótesis de la Proposición 2.13 para concluir que X es semiestratificable.

Comencemos probando *1)*. Tomemos $y \in X$ tal que $y \neq x$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \neq y_N$, esto nos dice que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_N \notin g_N(n, x_N)$ para $n \geq N_0$, esto pues g_m sí satisface las condiciones del Teorema 2.13. Ahora basta tomar $n \geq N, N_0$ para que $y_N \notin g_N(n, x_N)$ y este último factor aparezca en la expresión que define a $g(n,x)$. Por tanto, si $n \geq N, N_0$ entonces $y \notin g(n,x)$ lo que nos permite concluir

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) \subseteq \{x\}.$$

Como la otra contención es trivial concluimos que g satisface *1)*.

Veamos ahora que se cumple *2)*. Notemos que $g_{n+1}(n+1, x_{n+1}) \subseteq X_{n+1}$ y para $m \leq n$ tenemos $g_m(n+1, x_m) \subseteq g_m(n, x_m)$ pues g_m sí satisface *2)*. Entonces

$$\begin{aligned} g(n+1,x) &= \prod_{m\leq n} g_m(n+1,x_m) \times g_{n+1}(n+1,x_{n+1}) \times \prod_{m>n+1} X_m \\ &\subseteq \prod_{m\leq n} g_m(n,x_m) \times X_{n+1} \times \prod_{m>n+1} X_m \\ &= g(n,x). \end{aligned}$$

Con lo que efectivamente g satisface *2)*.

Para finalizar veamos que g cumple *3)*. Sean $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $y \in X$ tales que $y \in g(n, x^{(n)})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y $n \geq m$ tenemos

$$y_m \in g_m(n, x_m^{(n)})$$

pues

$$y \in g(n, x_n) = \prod_{m\leq n} g_m(n, x_m^{(n)}) \times \prod_{m>n+1} X_m.$$

Entonces como g_m satisface *3)* tenemos que $x_m^{(n)} \to y_m$ (Las hipótesis se cumplen para la sucesión que obtenemos de comenzar el en m-ésimo término, pero el agregar los primeros m términos no altera la convergencia) y por tanto $x^{(n)} \to y$ cumpliéndose *3)*.

Concluimos que g cumple las hipótesis de la Proposición 2.13 y por tanto X es semiestratificable. ■

Es natural preguntarnos si la Proposición 2.14 no se puede fortalecer para admitir productos de una cantidad más que numerable de espacios y la respuesta es negativa. Esto lo veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. *Existe un producto de espacios semiestratificables que no es semiestratificable.*
Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $X_\alpha = \{0,1\}$. Veamos que $X = \prod_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$ tiene un cerrado que no es G_δ para concluir que no es semiestratificable.

Sean x el punto cuyas coordenadas son todas cero y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tau_X$ una familia de abiertos que tienen a x. Sin pérdida de generalidad supongamos que U_n es *un abierto canónico para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \subseteq \omega_1$ finito tal que $\pi_\alpha[U_n] = X_\alpha$ si y solo si $\alpha \notin F_n$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\alpha_n = \sup\{F_n\} < \omega_1.$$

Y entonces α_n es numerable, luego como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable tenemos que

$$\beta = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1.$$

Entonces si definimos $y_\alpha = 0$ si $\alpha \leq \beta$ y $y_\alpha = 1$ en otro caso tenemos que

$$y = (y_\alpha) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Pero $y \neq x$, por tanto $\{x\}$ es un cerrado que no es G_δ y X no es semiestratificable por la Proposición 2.1.

Una vez terminado el estudio de las operaciones topológicas en la clase de los espacios semiestratificables, pasemos al estudio de los axiomas de separación en dichos espacios. Es un hecho conocido que todo espacio métrico es normal, además de la Definición 1.9 se sigue que todo espacio estratificable es al menos regular (En realidad también son normales), por lo que se esperaría que los espacios semiestratificables mantuvieran un alto grado de separación, sin embargo, no es así y el ejemplo lo vimos desde el capítulo 1.

Ejemplo 2.16. *Existe un espacio semiestratificable que no es siquiera T_2. Basta considerar $\mathbb{N}$ con la topología cofinita, en el Ejemplo 1.18 probamos que es semiestratificable y no tiene abiertos ajenos por lo que no es T_2.*

Pareciera que todo lo que no perdimos respecto a espacios métricos y operaciones topológicas lo perdimos en cuanto a separación. Si bien esto es un poco decepcionante también nos permite preguntarnos que sucede si agregamos ciertos axiomas de separación a los espacios semiestratificables. Entre estos axiomas de separación hay uno que destaca sobre los demás en el estudio de los espacios semiestratificables, la normalidad monótona, esta propiedad comenzó a ser trabajada por Borges en su estudio de los espacios estratificables pero el no notó la relevancia de dicha propiedad, tan así que ni siquiera la nombró. Fueron Lutzer, Heath y Zenor en [8] quienes notaron que esta propiedad se comportaba de forma interesante en distintas clases de espacios como los linealmente ordenados generalizados y los semiestratificables. Veamos la definición de esta propiedad.

Definición 2.17. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es monotonamente normal si existe una función*

$$N : \{(H, K) \mid H, K \textit{ son cerrados ajenos}\} \to \tau_X$$

que cumple

1) $H \subseteq N(H, K) \subseteq cl_X(N(H, K)) \subseteq X \setminus K$.

2) *Si $(H, K), (A, B)$ son parejas de cerrados ajenos tales que $H \subseteq A$ y $B \subseteq K$ (sí, al revés) entonces $N(H, K) \subseteq N(A, B)$.*

A la función N le diremos un operador de normalidad monótona.

Como es de esperarse con el nombre todo espacio monotonamente normal es normal, dada una paraja de cerrados ajenos (H, K) basta tomar $N(H, K)$ y $X \setminus \mathrm{cl}_X(N(H, K))$ como abiertos ajenos que los separan.

El resultado más importante respecto a espacios semiestratificables monotonamente normales está en la siguiente proposición, que además es la respuesta definitiva a un problema planteado en el primer capítulo.

Proposición 2.18. *Sea X un espacio semiestratificable. X es estratificable si y solo si es monotonamente normal.*

Demostración. Comencemos suponiendo que X es monotonamente normal con operador de normalidad monótona N.

Definamos $S : \mathbb{N} \times \tau_X \to \tau_X$ como

$$S(n, U) = \mathrm{int}_X \left(X \setminus \left(N(X \setminus U, s(n, U)) \right) \right).$$

Veamos que S es una estratificación para X. Por la condición *1)* de la Definición 2.17 tenemos que

$$X \setminus U \subseteq N(X \setminus U, s(n, U)).$$

Y por tanto

$$\mathrm{cl}_X(S(n, U)) \subseteq X \setminus \left(N(X \setminus U, s(n, U)) \right) \subseteq U.$$

Así que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n,U) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(S(n,U)\right) \subseteq U.$$
Ahora tomemos $x \in U$. Como s es semiestratificación existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in s(n,U)$ y entonces *1)* implica que
$$\begin{aligned} x \in X \setminus \mathrm{cl}_X\left(N(X\setminus U, s(n,U))\right) &\subseteq \mathrm{int}_X\Big(X \setminus \Big(N(X\setminus U, s(n,U))\Big)\Big) \\ &= S(n,U). \end{aligned}$$
La contención se sigue de que $X \setminus \mathrm{cl}_X\left(N(X\setminus U, s(n,U))\right)$ es un abierto contenido en $X \setminus N(X\setminus U, s(n,U))$. Concluimos que
$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n,U) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(s(n,U)\right).$$
Y entonces
$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} s(n,U) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(s(n,U)\right).$$
Por último tomemos $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $X \setminus V \subseteq X \setminus U$ y $s(n,U) \subseteq s(n,V)$ por lo que *2)* nos dice que
$$N(X\setminus U, s(n,U)) \subseteq N(X\setminus V, s(n,V)).$$
Tomando complementos
$$X \setminus \Big(N(X\setminus U, s(n,U))\Big) \subseteq X \setminus \Big(N(X\setminus V, s(n,V))\Big).$$
Ahora interiores
$$S(n,U) \subseteq S(n,V).$$
Por lo que S es una estratificación para X.

Ahora supongamos que X estratificable.

Definamos
$$N : \{(H,K) \mid H, K \text{ cerrados ajenos}\} \to \tau_X$$
como
$$N(H,K) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big(S(n, X\setminus K) \setminus \mathrm{cl}_X\left(S(n, X\setminus H)\right)\Big).$$

Si tomamos $x \in H$ entonces $x \in X \setminus K$ y existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in S(n, X \setminus K)$. Además es claro que $x \notin \mathrm{cl}_X(S(n, X \setminus H))$ pues este último es un subconjunto de $X \setminus H$. Entonces $x \in s(n, X \setminus K) \setminus \mathrm{cl}_X(s(n, X \setminus H))$, es decir, $x \in N(H, K)$ y concluimos que $H \subseteq N(H, K)$.

Ahora tomemos $x \in K$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in S(n, X \setminus H)$ $(x \in X \setminus H)$. Entonces $U = S(n, X \setminus H) \cap X \setminus \mathrm{cl}_X(S(n, X \setminus K))$ es una vecindad de x ajena a $N(H, K)$ $(x \notin X \setminus K$ así que $x \notin \mathrm{cl}_X(S(n, X \setminus K) \subseteq X \setminus K)$. Para ver esto supongamos $y \in N(H, K) \cap U$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y \in s(n_0, S \setminus K) \setminus \mathrm{cl}_X(s(n_0, X \setminus H))$. Revisemos las tres opciones para n_0 y veamos que ninguna es posible.

- $n = n_0$
  Entonces $y \in s(n, X \setminus H)$ pero $y \notin \mathrm{cl}_X(s(n, X \setminus H))$ lo cual es imposible.

- $n > n_0$
  Entonces $s(n_0, X \setminus K) \subseteq s(n, X \setminus K) \subseteq \mathrm{cl}_X(s(n, X \setminus K))$ y por tanto $X \setminus \mathrm{cl}_X(s(n, X \setminus K)) \subseteq X \setminus s(n_0, X \setminus K)$. Pero $y \in X \setminus \mathrm{cl}_X(s(n, X \setminus K))$ y $y \in s(n_0, X \setminus K)$ lo cual también es imposible.

- $n < n_0$
  Entonces $s(n, X \setminus H) \subseteq s(n_0, X \setminus X) \subseteq \mathrm{cl}_X(s(n_0, X \setminus H))$. Pero $y \in s(n, X \setminus H)$ y $y \notin \mathrm{cl}_X(s(n_0, X \setminus H))$. Nuevamente, esto es imposible.

Concluimos que tal n_0 no existe y $U \cap N(H, K) = \emptyset$. Si ahora recordamos que partimos de un punto $x \in K$ concluimos que $K \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X(N(H, K))$ o lo que es lo mismo $\mathrm{cl}_X(N(H, K)) \subseteq X \setminus K$, es decir la función N cumple

$$H \subseteq N(H, K) \subseteq \mathrm{cl}_X(N(H, K)) \subseteq X \setminus K$$

que no es más que la condición *1)* de la Definición 2.17.

Para ver la condición *2)* tomemos (A, B) pareja de cerrados ajenos tales que $H \subseteq A$ y $B \subseteq K$. Notemos que por ser S estratificación de X tenemos lo siguiente

$$S(n, X \setminus A) \subseteq S(n, X \setminus H)$$

$$S(n, X \setminus K) \subseteq S(n, X \setminus B).$$

Y por tanto

$$S(n, X \setminus K) \setminus \mathrm{cl}_X \left(S(N, X \setminus H)\right) \subseteq S(n, X \setminus B) \setminus \mathrm{cl}_X \left(S(n, X \setminus A)\right).$$

Si ahora unimos sobre $\mathbb{N}$, concluimos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(n, X \setminus K) \setminus \mathrm{cl}_X \left(S(N, X \setminus H)\right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(n, X \setminus B) \setminus \mathrm{cl}_X \left(S(n, X \setminus A)\right).$$

Es decir

$$N(H, K) \subseteq N(A, B),$$

justo lo buscado. Así N cumple la Definición 2.17 y X es monotonamente normal. ■

Gracias a la Proposición 2.18 tenemos que al agregar una separación considerable a un espacio semiestratificable llegamos a que dicho espacio también es estratificable, por lo cual es razonable preguntarnos si al tener un espacio con una separación considerable este sería semiestratificable. La respuesta es negativa, el espacio $[0, \omega_1]$ del Ejemplo 2.7 es compacto y normal pero no semiestratificable. La realidad es que dicho ejemplo no es más que un caso particular de un resultado más general, el cual enunciaremos a continuación y nos dará toda una clase de espacios compactos, normales y no semiestratificables.

Proposición 2.19. *Sea X un espacio Tychonoff no compacto. Entonces βX es compacto y normal pero no semiestratificable.*

Demostración. Solo nos queda probar que βX no es semiestratificable, para hacer esto seguiremos la estrategia de ejemplos anteriores probando que βX tiene un cerrado que no es G_δ.

Sea $z \in \beta X \setminus X$ que existe por suponer que X no es compacto, entonces $\{z\}$ es un cerrado que no es G_δ. Para ver que no es G_δ procedamos por contradicción, supongamos que existe $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ familia de abiertos de βX tal que

$$\{z\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Como βX es normal y para cada $n \in \mathbb{N}$ $z \notin \beta X \setminus U_n$ existe una función $f_n : \beta X \to [0,1]$ que cumple $f(z) = 0$ y $f[\beta X \setminus U] \subseteq 1$. Con esto definamos $f : \beta X \to [0,1]$ como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x)}{2^n}.$$

f es continua por la prueba M de Weierstrass y además $f^{-1}[\{0\}] = \{z\}$. Esto último pues si $f(x) = 0$ entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = 0$, es decir para toda $n \in \mathbb{N}$ $x \in U_n$ lo cual implica $x = z$ por hipótesis. Así, $f^{-1}[\{0\}] = \{z\}$.

Para continuar con la prueba veamos que $0 \in \mathrm{cl}_{[0,1]}(f[X]) \setminus f[X]$. Como $f^{-1}[\{0\}] = \{z\}$ entonces $0 \notin f[X]$, por tanto si tomamos $V \in \tau_{[0,1]}$ tal que $0 \in V$ y suponemos que $V \cap f[X] = \emptyset$ entonces $f^{-1}[V] \cap X = \emptyset$, lo cual contradice la densidad de X en βX pues $f^{-1}[V]$ es un abierto no vacío. Entonces $0 \in \mathrm{cl}_{[0,1]}(f[X])$.

Como $0 \in \mathrm{cl}_{[0,1]}(f[X])$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f[X]$ que converge a 0, partamos esta sucesión en dos sucesiones ajenas, digamos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que estas dos sucesiones sigan convergiendo a 0. Entonces los conjuntos $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ son cerrados ajenos de $f[X]$ (su cerradura solo agrega al 0 que no está en el espacio). Como $f[X]$ es normal existe $h : f[X] \to [0,1]$ continua tal que $h[A] \subseteq \{0\}$ y $h[B] \subseteq \{1\}$. Si denotamos $g = f_{|X}$ entonces $h \circ g$ es una función continua de X en un compacto por lo que se extiende a todo βX, digamos que esa extensión es ϕ. Notemos que $h \circ g[g^{-1}[A]] \subseteq \{0\}$ y $h \circ g[g^{-1}[B]] \subseteq \{1\}$ así que $\phi^{-1}[0, \frac{1}{3}]$ y $\phi^{-1}[\frac{2}{3}, 1]$ son cerrados ajenos de βX que cumplen

$$g^{-1}[A] \subseteq \phi^{-1}[0, \frac{1}{3}] \quad g^{-1}[B] \subseteq [\frac{2}{3}, 1].$$

Y por tanto

$$\mathrm{cl}_{\beta X}\left(g^{-1}[A]\right) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}\left(g^{-1}[B]\right) = \emptyset.$$

En particular $z \notin \mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A]) \cap \mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[B])$, así que, sin pérdida de generalidad, existe $U \in \tau_X$ tal que $z \in U$ y $\mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A]) \subseteq \beta X \setminus U$. Esto implica que $f(\mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A])) \subseteq f(\beta X \setminus U)$, notemos que $f(\mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A]))$ es un compacto en un Hausdorff, por tanto es cerrado y además $A \subseteq f(\mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A]))$ pues g no es más que la restricción de f a X. Así que $\mathrm{cl}_{[0,1]}(A) \subseteq f(\mathrm{cl}_{\beta X}(g^{-1}[A]))$. Juntando la información obtenida tenemos que

$$\mathrm{cl}_{[0,1]}(A) \subseteq f(\mathrm{cl}_{\beta X}\left(g^{-1}[A]\right)) \subseteq f(\beta X \setminus U)$$

Y por tanto $0 \notin \mathrm{cl}_{[0,1]}(A)$, lo cual es una contradicción.

Por tanto $\{z\}$ no es un G_δ en βX y βX no es semiestratificable por la Proposición 2.1.

■

La verdad es que no hay mucho más que decir acerca de las propiedades generales de los espacios semiestratificables en relación con los axiomas de separación, así que pasemos de una vez al estudio de los espacios semiestratificables y las propiedades tipo compacidad, aquí sí que encontraremos una variedad de resultados interesantes.

En [13] Smirnov prueba que todo espacio localmente metrizable y paracompacto es metrizable, idea que motiva a Ceder para probar que todo espacio localmente M_i y paracompacto es M_i. Exhibiendo así otra propiedad compartida por los espacios M_i y los métricos. Esto hace que sea natural preguntarnos si todo espacio localmente semiestratificable y paracompacto es semiestratificable, intentando responder esta pregunta llegamos al siguiente resultado más general: todo espacio localmente semiestratificable y metacompacto es semiestratificable.

Como el concepto de metacompacidad y las cuestiones cercanas a su definición ya no son tan elementales enunciamos las definiciones antes de lanzarnos a la prueba.

Definición 2.20. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Decimos que $\mathscr{V}$ es un refinamiento de $\mathscr{U}$ si para todo $V \in \mathscr{V}$ existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $V \subseteq U$ y $\mathscr{V}$ sigue cubriendo a X.*
Si además todos los elementos de $\mathscr{V}$ son abiertos/cerrados decimos que $\mathscr{V}$ es un refinamiento abierto/cerrado.

Definición 2.21. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es metacompacto si toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto punto finito.*

Ya estamos listos para generalizar el resultado de Ceder.

Proposición 2.22. *Sea X un espacio localmente semiestratificable (todo punto tiene una vecindad semiestratificable) y metaecompacto. Entonces X es semiestratificable.*

Demostración. Para cada $x \in X$ sea $U_x \in \tau_X$ una vecindad semiestratificable de x. La familia $\{U_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, como X es metacompacto entonces existe un refinamiento abierto punto finito $\{V_x \mid x \in X\}$. Notemos que según la Proposición 2.5, V_x es semiestratificable, así que sea g_x una función $g_x : \mathbb{N} \times \tau_{V_x} \to \tau_{V_x}$ que cumple las condiciones del Teorema 2.13 para V_x.

Para cada $x \in X$, sea $F_x = \{y \in X \mid x \in V_y\}$. Notemos que F_x es finito (por la punto finitud) y no vacío (x mismo está ahí). Definamos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ como

$$g(n,x) = V_x \cap \left(\bigcap_{y \in F_x} g_y(n,x) \right)$$

$g(n,x)$ es abierto al ser intersección finita de abiertos ($g_y(n,x)$ es abierto de un abierto) por lo que g está bien definida. Veamos que g cumple las hipótesis del Teorema 2.13.

Ver que cumple *1)* es simple pues para todo $y \in F_x$

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(n,x) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} g_y(n,x) = \{x\}.$$

Es decir

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} g(n,x) = \{x\}.$$

Y g cumple *1)*.

Ahora veamos que g cumple *2)*. Para cada $y \in F_x$ tenemos
$g_y(n+1,x) \subseteq g_y(n,x)$ pues g_y cumple *2)* del Teorema 2.13. Entonces

$$g(n+1,x) = V_x \cap \left(\bigcap_{y \in F_x} g_y(n+1,x) \right) \subseteq V_x \cap \left(\bigcap_{y \in F_x} g_y(n,x) \right) = g(n,x).$$

Y por tanto g cumple *2)* del Teorema 2.13.

Por último tomemos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X y $y \in X$ tal que $y \in g(n,x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $y \in V_{x_n}$, pero como la cubierta $\{V_x \mid x \in X\}$ es punto finita y solo puede estar en una cantidad finita de elementos de dicha cubierta, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $V_{x_n} = V_{x_N}$. Por tanto la subsucesión $\{x_n\}_{n \geq N} \subseteq V_{x_N}$. Definamos la siguiente sucesión

$$y_n = \begin{cases} y \text{ si } n < N \\ x_n \text{ si } n \geq N \end{cases}$$

Tenemos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq V_{x_N}$ y además como $y \in g(n, x_n)$ entonces $y \in g_{x_N}(n, x_n)$, pues $x_N \in F_{x_n}$ para $n \geq N$. Por otra parte para $n < N$ también tenemos $y \in g_{x_N}(n, y) = g_{x_N}(n, y_n)$. Entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y y cumplen las hipótesis de *3)* para g_{x_N} y por tanto $y_n \to y$ en V_{x_N}, por tanto también en X.

Para concluir, todo el párrafo anterior nos permite concluir que $\{x_n\}_{n\geq N}$ también converge a y y por tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y pues solo agregamos una cantidad finita de términos. Así, g cumple *3)*.

Concluimos que g cumple las hipótesis del Teorema 2.13 y por tanto X es semiestratificable. ■

Otro resultado conocido acerca de espacios métricos es que cada espacio métrico es paracompacto, incluso este hecho es clave al probar el teorema de Metrización de Smirnov-Nagata con el que comenzamos este trabajo. Ceder nuevamente generaliza este resultado probando que todos sus espacios M_i son paracompactos. Para espacios semiestratificables tenemos una versión más débil de este resultado, todo espacio semiestratificable es subparacompacto. ¿Qué es subparacompacto?, para responder esto veamos las siguientes definiciones.

Definición 2.23. *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathscr{U}$ es discreta si todo punto tiene una vecindad que intersecta a lo más a un elemento de $\mathscr{U}$.*
Si $\mathscr{U}$ es unión numerable de familias discretas entonces decimos que $\mathscr{U}$ es σ-discreta.

Definición 2.24. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es subparacompacto si toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.*

Ahora sí, veamos el resultado anunciado.

Proposición 2.25. *Sea X un espacio semiestratificable. Entonces X es subparacompacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ una cubierta abierta de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha < \delta$ definamos

$$H_{\alpha,n} = s(n, U_\alpha) \setminus \bigcup\{U_\gamma \mid \gamma < \alpha\}.$$

Ahora definamos $\mathscr{H}_n = \{H_{\alpha,n} \mid 0 < \alpha < \beta\}$ y veamos que esta familia es discreta. Sea $x \in X$. Consideremos $\alpha(x) = \bigcap\{\beta \mid x \in U_\beta\}$ que existe pues $\mathscr{U}$ es cubierta de X. Ahora definamos $A = \{\beta < \alpha(x) \mid U_{\alpha(x)} \cap s(n, U_\beta) \neq \emptyset\}$, $V = \displaystyle\bigcup_{\beta \in A} U_\beta$ y por último

$$U = U_\alpha \cap X \setminus s(n, V).$$

Veamos que esta es la vecindad buscada. $x \notin s(n, V)$ pues si esto pasara entonces $x \in U_\beta$ para algún $\beta < \alpha(x)$, contradiciendo la elección de $\alpha(x)$. Así que para empezar $x \in U$. Por la definición de $H_{\beta,n}$ tenemos que $U_\alpha \cap H_{\beta,n} = \emptyset$ siempre que $\beta > \alpha$ y entonces $U \cap H_{\beta,n} = \emptyset$ bajo las mismas condiciones, mientras que si $\beta < \alpha$ entonces $s(n, U_\beta) \subseteq s(n, V)$ pues $U_\beta \subseteq V$ y s es semiestratificación así que $U \cap s(n, U_\beta) = \emptyset$.

Entonces U intersecta a lo más a $H_{\alpha,n}$, es decir, $\mathscr{H}_n$ es discreta. Si ahora consideramos $\mathscr{H} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{H}_n$ tenemos que $\mathscr{H}$ es σ-discreta, está formada por cerrados y cada uno de sus elementos está contenido en alguno de $\mathscr{U}$ (A saber, $H_{\alpha,n} \subseteq U_\alpha$) por lo que solo resta probar que sigue siendo cubierta de X.

Dado $x \in X$ nuevamente consideremos $\alpha(x) = \bigcap\{\beta \mid x \in U_\beta\}$. Como s es semiestratificación existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in s(n, U_\alpha(x))$ y entonces $x \in H_{\alpha(x),n}$ por la minimalidad de $\alpha(x)$. Así $\mathscr{V}$ es un refinamiento cerrado σ-discreto de $\mathscr{U}$. ■

El hecho de que los espacios semiestratificables sean subparacompactos nos permite estudiar las propiedades tipo compacidad más conocidas, compacidad, Lindelöf y compacidad numerable. Comenzaremos estudiando la propiedad de ser Lindelöf, en los espacios semiestratificables el ser Lindelöf está fuertemente relacionado con el ser separable y esta última propiedad a su vez está relacionada con la cardinalidad de los subconjuntos discretos del espacio. La relación explícita la veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.26. *Sea X un espacio semiestratificable. Las siguientes son equivalentes:*

1. *X es Lindelöf.*
2. *X es hereditariamente separable.*
3. *Todo subconjunto no numerable tiene un punto de acumulación (X es $\aleph_1$-compacto).*

Demostración. Probaremos las implicaciones en el orden que están escritas.

$1 \to 2$
Supongamos que X es Lindelöf. Sea g una función que cumple las hipótesis del Teorema 2.13. Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{U}_n = \{g(n,x) \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y por tanto tiene una subcubierta numerable, es decir, existe $U_n \subseteq X$ numerable tal que $\{g(n,x) \mid x \in U_n\}$ es cubierta de X. Definamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, A es numerable al ser unión numerable de conjuntos numerables y veamos que es denso. Sean $U \subseteq X$ abierto y $x \in U$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in U_n$ tal que $x \in g(n, x_n)$ pues $\{g(n,x) \mid x \in U_n\}$ es cubierta de X. Entonces como g cumple *iii)* del Teorema 2.13 $x_n \to x$. Además$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \setminus U$ por hipótesis y $X \setminus U$ es cerrado así que $x \in X \setminus U$, lo cual es imposible. Por tanto $U \cap A \neq \emptyset$ y A es un denso numerable.

Para acabar esta implicación notemos que todo abierto de X es Lindelöf al ser F_σ, y entonces X es hereditariamente Lindelöf. Si tomamos $B \subseteq X$ entonces B es nuevamente Lindelöf y semiestratificable, repetimos la prueba hecha para X y obtenemos que B es separable. Ahora sí, X es hereditariamente separable.

$2 \to 3$
Supongamos X hereditariamente separable y sea A no numerable. Por hipótesis existe $B \subseteq A$ numerable tal que B es denso en A y podemos tomar $x \in A \setminus B$ pues B es numerable mientras que A no. x es punto de acumulación de A pues si fuera aislado contradeciría la densidad de B.

$3 \to 1$
Esta prueba será por contrapuesta. Supongamos que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta sin subcubiertas numerables. Por la Proposición 2.25, existe un $\mathscr{V} =$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ refinamiento cerrado σ-discreto, como $\mathscr{U}$ no tiene subcubiertas finitas, $\mathscr{V}$ no puede ser numerable (Si lo fuera y por cada $F \in \mathscr{V}$ tomamos $U_F \in \mathscr{U}$ tal que $F \subseteq U_F$ entonces $\{U_F \mid F \in \mathscr{V}\}$ sería una subcubierta numerable de $\mathscr{U}$) así que para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{V}_n$ no es numerable. Si tomamos $x_F \in F$ para cada $F \in \mathscr{V}_n$ entonces $A = \{x_F \mid F \in \mathscr{V}_n\}$ es un subconjunto no numerable sin puntos de acumulación, pues si tomamos $x \in X$ entonces existe una vecindad U de x tal que $|\{U \cap F \mid F \in \mathscr{V}_n\}| \leq 1$ y entonces por la definición de A tenemos $|U \cap A| \leq 1$. Como X es T_1, esta intersección tendría que ser infinita para que x fuera de acumulación. Así A es un conjunto no numerable sin puntos de acumulación y concluimos la prueba. ■

La Proposición 2.26 nos permite obtener el que posiblemente es el resultado más fuerte acerca de las propiedades tipo compacidad en los espacios semiestratificables. Veamos de que se trata.

Proposición 2.27. *Sea X un espacio semiestratificable. X es compacto si y solo si es numerablemente compacto.*

Demostración. Compacto siempre implica numerablemente compacto así que solo probaremos la otra implicación.

Supongamos X numerablemente compacto. Sea $A \subseteq X$ un conjunto no numerable, probaremos que A tiene un punto de acumulación. Supongamos que no lo tiene, entonces A es discreto y cerrado. Como A es no numerable entonces tiene $B \subseteq A$ infinito numerable y consideremos la cubierta abierta $\{A \setminus B\} \cup \{\{x\} \mid x \in B\}$, es numerable por la elección de B, como A es cerrado entonces es numerablemente compacto pero es imposible que esta cubierta tenga subcubiertas finitas llegando a una contradicción. Por tanto A tiene un punto de acumulación. Por la Proposición 2.26 entonces X es Lindelöf, como X es Lindelöf y numerablemente compacto, X es compacto. ■

La Proposición 2.27 nos permite terminar el estudio de la clase de los espacios de ordinales que comenzamos antes en el capítulo. Solo nos queda determinar si $[0, \omega_1)$ es semiestratificable o no, y esto lo resolvemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.28. $[0, \omega_1)$ *no es semiestratificable.*
Para ver esto veremos que es numerablemente compacto pero no compacto. Primero recordemos que el espacio $[0, \omega_1]$ es compacto. Entonces $[0, \omega_1)$ no es compacto pues no es un subespacio cerrado de $[0, \omega_1]$. Para ver que es

numerablemente compacto tomemos $A \subseteq [0, \omega_1)$ numerable y veamos que tiene punto de acumulación. Como A es numerable entonces $\sup A = \alpha$ *existe y $\alpha < \omega_1$ así que $A \subseteq [0, \alpha]$ pero este último conjunto es cerrado en $[0, \omega_1]$ así que es compacto. Por tanto A tiene un punto de acumulación en $[0, \alpha]$ y este mismo punto es de acumulación en $[0, \omega_1)$. Así X es numerablemente compacto pero no compacto y la Proposición 2.27 nos permite concluir que no es semiesratificable.*

Nuestro último resultado en relación a los espacios semiestratificables y las propiedades tipo compacidad será un teorema de metrización para espacios semiestratificables Hausdorff. Probaremos este resultado como corolario de un teorema de metrización más general, a saber, todo espacio Hausdorff, compacto y con diagonal G_δ es metrizable. Para la prueba de este último resultado necesitaremos conceptos nuevos que son el de sucesiones diagonales G_δ y G_δ^*. Si bien estos conceptos podrían parecer un poco fuera de lugar la realidad es que son conceptos muy cercanos a la teoría de metrización y de los espacios M_i, por tanto de los espacios estratificables. En su artículo Ceder los usa para probar que un espacio M_i y topológicamente completo (G_δ en algún espacio compacto Hausdorff) es completamente metrizable.

Comencemos con la definición de estrella de un punto respecto a una cubierta abierta y la de sucesión diagonal-G_δ.

Definición 2.29. *Sean X un espacio y $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de X. Definimos la estrella de un punto $x \in X$ respecto a $\mathscr{U}$ como*

$$st(x, U) = \bigcup \{U \in \mathscr{U} \mid x \in U\}.$$

Definición 2.30. *Sea X un espacio. Decimos que una sucesión de cubiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ abiertas es una sucesión diagonal-G_δ si para todo $x \in X$ tenemos*

$$\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} st(x, \mathscr{U}_n).$$

El siguiente lema se debe a Ceder y nos proporciona una interesante caracterización «interna» de que un espacio tenga una diagonal G_δ.

Lema 2.31. *Un espacio X tiene una diagonal G_δ si y solo si tiene una sucesión diagonal-G_δ.*

Demostración. Supongamos primero que X tiene una diagonal G_δ. Entonces existe una sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $X \times X$ tal que $\Delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\mathscr{U}_n = \{V \in \tau_X \mid V \times V \subseteq U_n\}$. Veamos que $\mathscr{U}_n$ es una cubierta abierta de X. Dado $x \in X$ tenemos que $(x,x) \in \Delta$ y por tanto $(x,x) \in U_n$ así que existe un abierto básico $U \times W$ tal que $(x,x) \in U \times W \subseteq U_n$. Hacemos $V = U \cap W$ así $x \in V$ y $V \times V \subseteq U_n$ por lo que $V \in \mathscr{U}_n$, así que efectivamente $\mathscr{U}_n$ es cubierta abierta de X.

Ahora veamos que la sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple lo deseado. Sea $x \in X$ entonces es claro que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ así que probemos la otra contención. Sea $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$, entonces para todo $V \in \mathscr{U}_n$ tal que $x \in V$ tenemos $y \in V$ y por tanto $(x,y) \in V \times V \subseteq U_n$. Como esto es válido para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$(x,y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \Delta.$$

Y por tanto $y = x$ así que

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n).$$

Y la sucesión $\{\mathscr{U}_n\}$ cumple lo buscado.

Ahora supongamos que tenemos una sucesión diagonal-G_δ $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $U_n = \bigcup\{V \times V \mid V \in \mathscr{U}_n\}$, U_n es abierto pues es unión de abiertos básicos y veamos que $\Delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Primero tomemos $(x,x) \in \Delta$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathscr{U}_n$ es cubierta abierta de X existe algún $V \in \mathscr{U}_n$ tal que $x \in V$, luego $(x,x) \in V \times V \subseteq U_n$ y concluimos que

$$\Delta \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n.$$

Ahora sea $(x,y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Esto quiere decir que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V_n \in \mathscr{U}_n$ tal que $(x,y) \in V_n \times V_n$, pero esto último nos dice que $y \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \{x\}$ entonces $y = x$ y

$$\Delta = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

que era lo buscado. ∎

Ceder considera una condición más fuerte en la definición de sucesión diagonal G_δ. En vez de considerar la intersección de las estrellas considera la intersección de las cerraduras de las estrellas para así llegar al concepto de sucesión diagonal G_δ^*, siendo este último concepto el que usa para probar que todo espacio paracompacto y completo topologicamente es completamente metrizable. Veamos la definición formalmente.

Definición 2.32. *Sea X un espacio. Decimos que una sucesión diagonal-G_δ $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión diagonal-G_δ^* si para todo $x \in X$ tenemos*

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} cl_X\left(st(x, \mathscr{U}_n)\right).$$

El siguiente lema es una modificación a un lema probado por Ceder en su artículo. El resultado original de Ceder dice que todo espacio paracompacto con una sucesión diagonal-G_δ tiene una sucesión diagonal-G_δ^*. Nosotros reforzaremos tanto las hipótesis como las conclusiones para adaptarlo a lo que necesitamos.

Lema 2.33. *Sea X un espacio compacto y con una sucesión diagonal-G_δ. Entonces X tiene una sucesión diagonal-G_δ^*, además cada cubierta de la sucesión es finita.*

Demostración. Sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión diagonal-G_δ para X. La sucesión diagonal-G_δ^* la definiremos recursivamente. Para $n = 1$, sea $\mathscr{H}_1$ una subcubierta finita de $\mathscr{U}_1$ que existe por compacidad. Ahora supongamos que tenemos definida $\mathscr{H}_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in X$ tomemos vecindades U_x y H_x en $\mathscr{U}_{n+1}$ y $\mathscr{H}_n$ tales que $x \in U_x \cap H_x$. Como X es regular al ser Hausdorff y compacto, entonces podemos encontrar una tercera vecindad V_x tal que $x \in V_x \subseteq \mathrm{cl}_X(V_x) \subseteq U_x \cap H_x$. Finalmente sea $\mathscr{H}_{n+1}$ una subcubierta finita de $\{V_x \mid x \in X\}$. Ahora veamos que $\{\mathscr{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión diagonal-G_δ^*. Comencemos probando que es una sucesión diagonal G_δ. Notemos que por la construcción de $\mathscr{H}_n$ esta última familia es un refinamiento finito de $\mathscr{U}_n$ así que $\mathrm{st}(x, \mathscr{H}_n) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si es una sucesión diagonal-G_δ entonces tenemos lo siguiente

$$\{x\} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{H}_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \{x\}.$$

Es decir, para todo $x \in X$

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathscr{H}_n).$$

Y por tanto $\{\mathscr{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión diagonal-G_δ. Para ver que es una sucesión diagonal-G_δ^* solo resta verificar $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{H}_n)\right) \subseteq \{x\}$ pues la otra se sigue de que sea una sucesión diagonal-G_δ. Sea $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{H}_n)\right)$ entonces como $\mathscr{H}_n$ es finita tenemos que

$$\mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{H}_n)\right) = \bigcup\{\mathrm{cl}_X\left(V\right) \mid x \in V \in \mathscr{H}_n\}$$

y por tanto existe $V \in \mathscr{H}_n$ tal que $y \in \mathrm{cl}_X\left(V\right)$ que está contenido en algún elemento de $\mathscr{U}_n$ por la construcción de $\mathscr{H}_n$ (Para $n = 1$ este V está en $\mathscr{U}_1$) y entonces $y \in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como la sucesión es diagonal-G_δ entonces $y = x$ y concluimos que

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{H}_n)\right).$$

Y $\{\mathscr{H}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión diagonal G_δ^*, además por construcción cada una de sus cubiertas es finita.

■

Una vez probados estos dos lemas estamos en condiciones de probar que

Proposición 2.34. *Sea X un espacio Hausdorff, compacto con una diagonal G_δ. Entonces X es metrizable.*

Demostración. Como X tiene una diagonal G_δ entonces tiene una sucesión diagonal-G_δ por el Lema 2.31. Como es compacto y tiene una sucesión diagonal-G_δ, entonces tiene una sucesión diagonal-G_δ^* por el Lema 2.33, digamos $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, además cada cubierta de esta sucesión es finita . Definamos $\mathscr{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{U}_n$ y notemos lo siguiente.

Afirmación 1) Para todos $x, y \in X$ distintos entonces existe $V \in \mathscr{H}$ tal que $x \in V$ pero $y \notin \mathrm{cl}_X\left(V\right)$.
Esto se sigue de que $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\right)$ y por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\right)$. Como $\mathscr{U}_n$ es finita entonces
$\mathrm{cl}_X\left(\mathrm{st}(x,\mathscr{H}_n)\right) = \bigcup\{\mathrm{cl}_X\left(V\right) \mid x \in V \in \mathscr{H}_n\}$ lo cual garantiza la existencia de un $V \in \mathscr{U}_n$ tal que $x \in V$ pero $y \notin \mathrm{cl}_X\left(V\right)$ probando esta afirmación.

Afirmación 2) La familia $\mathscr{B} = \{X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup \mathscr{F}\right) \mid \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \ \&\ |\mathscr{F}| < \omega\}$ es una base para X, además es una base numerable.
Notemos que $\mathscr{B}$ cubre a X y es cerrada bajo intersecciones finitas, por tanto

genera a alguna topología para X, digamos τ. Como además está formada por abiertos de X entonces $\tau \subseteq \tau_X$. Para ver que en realidad son la misma tomemos $U \in \tau_X$ y $y \in U$, entonces por la *Afirmación 1)* para todo $x \in X \setminus U$ existe $V_x \in \mathscr{H}$ tal que $x \in V_x$ pero $y \notin V_x$. Entonces la familia $\{V_x \mid x \in X \setminus U\}$ es una cubierta abierta de $X \setminus U$, que es compacto por ser cerrado en un compacto. Entonces existe $\mathscr{F} = \{V_{x_1}, \ldots, V_{x_m}\} \subseteq X \setminus U$ tal que $X \setminus U \subseteq \bigcup \mathscr{F}$ y $y \in X \setminus \mathrm{cl}_X (\bigcup \mathscr{F}) \subseteq U$. Concluimos que $U \in \tau$, por tanto $\tau_X = \tau$ y $\mathscr{B}$ es una base para X. La numerabilidad de $\mathscr{B}$ se sigue de que $\mathscr{H}$ es a lo más numerable y por tanto la cantidad de subconjuntos finitos de $\mathscr{H}$ también lo es.

De la *Afirmación 2)* se sigue que X es un espacio Hausdorff y compacto, por tanto normal, con una base numerable. Es decir, X es normal y segundo numerable, por el Teorema de Metrización de Urysohn X es metrizable. ■

Teorema 2.35. *Sea X un espacio semiestratificable, Hausdorff y numerablemente compacto. Entonces X es metrizable.*

Demostración. Como X es Hausdorff su diagonal es un cerrado en $X \times X$ y además $X \times X$ es semiestratificable por la Proposición 2.14 así que su diagonal además de ser cerrado es un G_δ y una aplicación directa de la Proposición 2.27 nos permite concluir X compacto. Así X es compacto y tiene una diagonal G_δ, aplicamos la Proposición 2.34 y concluimos que X es metrizable. ■

Con esto terminamos el estudio de los espacios semiestratificables y las propiedades tipo compacidad. Notemos que la Proposición 2.35 nos da una idea general de como se verán los espacios «puramente semiestratificables». Si son Hausdorff entonces no serán numerablemente compactos, mientras que si son numerablemente compactos entonces no serán Hausdorff, de otra forma serían metrizables.

Para terminar con este capítulo revisaremos el comportamiento de la clase de los espacios semiestratificables con las funciones continuas. Como todo espacio discreto es semiestratificable por el Ejemplo 2.4 *i)* es natural esperar que el ser semiestratificable no se preserve por funciones continuas y suprayectivas, de otra forma todos los espacios serían semiestratificables y solo habríamos perdido el tiempo. Solo por formalizar lo más posible veamos esto en un ejemplo.

Ejemplo 2.36. *Existen un espacio semiestratificable X y una función continua y suprayectiva $f : X \to Y$ tales que Y no es semiestratificable.*
Basta considerar $X = [0, \omega_1]$ con la topología discreta, $Y = [0, \omega_1]$ con su topología de orden y F la función identidad. Por el Ejemplo 2.7, Y no es semiestratificable, mientras que X sí lo es por el Ejemplo 2.4, además f es trivialmente continua por tener de dominio un espacio discreto.

Si bien la imágen continua de un espacio semiestratificable no es necesariamente semiestratificable aún nos queda preguntarnos que sucede si agregamos un poco más de fuerza a la función, como ser continua y abierta o continua y cerrada. En el primer caso nuevamente tenemos un resultado negativo pero en el segundo tenemos uno positivo, comencemos con un ejemplo donde el ser semiestratificable no se preserva con una función continua, abierta y suprayectiva.

Ejemplo 2.37. *Existen un espacio semiestratificable X y una función continua, abierta y suprayectiva $f : X \to Y$ tales que Y no es semiestratificable.*
Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $X_\alpha = [0, \alpha) \times \{\alpha\}$ y ahora sean $X = \oplus_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, $Y = [0, \omega_1)$ y $f : X \to y$ definida como $f(\beta, \alpha) = \beta$. Por las Proposiciones 2.3 y 2.10 tenemos que X es semiestratificable mientras que el Ejemplo 2.28 nos dice que Y no lo es. Por otra parte f es continua pues para todo $\alpha \leq \omega_1$ tenemos que $f \circ i_\alpha$ es continua al ser esencialmente la inclusión de $[0, \alpha)$ en $[0, \omega_1)$, también es suprayectiva pues $f(\alpha, \alpha) = \alpha$. Ahora veamos que es abierta. Dado $U \in \tau_X$, entonces para todo $\alpha < \omega_1$, $U \cap X_\alpha$ es abierto en X_α, el cual es homeomorfo a $[0, \alpha)$ así que el conjunto $U_\alpha = \{\beta \mid (\beta, \alpha) \in U \cap X_\alpha\}$ es abierto en $[0, \alpha)$ y por tanto en Y. Además

$$f(U) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} U_\alpha$$

que es un abierto en Y al ser unión de abiertos. Entonces f es una función continua, suprayectiva y abierta con dominio semiestratificable pero que su contradominio no es semiestratificable.

Ahora pasemos a ver que para funciones continuas, cerradas y suprayectivas el ser semiestratificable se preserva.

Proposición 2.38. *Sean X un espacio semiestratificable y $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y suprayectiva. Entonces Y es semiestratificable.*

Demostración. Definamos $s_Y : \mathbb{N} \times \tau_Y \to \mathscr{F}_Y$ como

$$s_Y(n, U) = f[s(n, f^{-1}[U])].$$

Primero notemos que está bien definida pues $f^{-1}[U]$ es un abierto al ser f continua y $f[s(n, f^{-1}[U])]$ es cerrado por ser f cerrada. Veamos que es semiestratificación para Y. Dado $x \in U$ entonces existe $y \in f^{-1}[U]$ tal que $f(y) = x$, esto porque f es suprayectiva. Como s es semiestratificación de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in s(n, f^{-1}[U])$ y entonces

$$x \in f[s(n, f^{-1}[U])] = s_Y(n, U).$$

Por tanto

$$U \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_Y(n, U).$$

Mientras que la otra contención se sigue de que $s(n, f^{-1}[U]) \subseteq f^{-1}[U]$ y de que aplicar f preserva contenciones. Por tanto

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} s_Y(n, U).$$

Por último tomemos $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$. Entonces $f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[U]$ y como s es semiestratificación de X tenemos que $s(n, f^{-1}[U]) \subseteq s(n, f^{-1}[V])$, aplicamos f y concluimos que

$$s_Y(n, U) \subseteq s_Y(n, V).$$

Por tanto s_Y es una semiestratificación para Y. ■

Con esto hemos abarcado prácticamente todas las propiedades básicas acerca de los espacios semiestratificables, lo que sigue es estudiar otras clases de espacios que surgen como generalizaciones de los espacios métricos, los espacios semimétricos y de Moore, ver como se relacionan con los espacios semiestratificables y de esta forma obtener nuevas propiedades acerca de esta clase de espacios.

Capítulo 3

Espacios semimetrizables

Como el título indica en esta sección trabajaremos con espacios semimétricos. Esta clase de espacios fue definida por Fréchet en 1906 en la misma tesis en la que definió los espacios métricos. Si bien fueron definidos en la parte temprana del siglo su estudio sistemático no comenzó sino hasta la mitad del siglo con el trabajo de Jones, Heath y Macauley quienes trabajaron probando que varias propiedades de espacios métricos o desarrollables (clase que veremos más adelante) seguían valiéndose para espacios semimétricos (Jones dejaba como ejercicios teoremas de Moore reemplazando la condición de ser desarrollable por la de ser semimétrico confiando en que sus alumnos, Heath y Macauley probaran que seguían siendo teoremas). Varios de dichos resultados incluso siguen siendo válidos para espacios semiestratificables y lo probamos en la sección anterior, entre ellos la equivalencia entre ser numerablemente compacto y compacto, el preservarse bajo productos numerables, bajo sumas, etc. Sin más preámbulo pasemos a ver las definiciones necesarias para entender que es un espacio semimetrizable.

Definición 3.1. *Sean X un conjunto y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$. Decimos que d es una semimétrica para X si cumple*

1. *Para todo $x \in X$ $d(x,x) = 0$.*
2. *Para todos $x, y \in X$ $d(x,y) = d(y,x)$.*

Definición 3.2. *Sea X un espacio. Decimos que X es semimetrizable si existe una semimétrica d para X que cumple*

$$x \in cl_X(A) \text{ si y solo si } 0 = d(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\}.$$

En tal caso también decimos que d induce la topología de X o que X es semimetrizable por d.

Como podemos notar, la definición de una semimétrica se obtiene de simplemente tomar aquella de métrica y borrar la desigualdad del triángulo. Este cambio, aunque sutil en apariencia, cambia de manera drástica el comportamiento de los espacios desde el punto de vista topológico. A lo largo de esta sección veremos los principales cambios así como las principales coincidencias de la clase de los espacios semimétricos respecto a la de los métricos.

Si nos remontamos a un curso de Cálculo III, en particular al tema de topología de $\mathbb{R}^n$, un ejercicio clásico es probar que las bolas abiertas son precisamente abiertas en el sentido topológico. La prueba de un resultado tan simple como este depende totalmente de la desigualdad triangular de una métrica y esto repercute fuertemente en los espacios semimétricos de la siguiente manera: las bolas abiertas $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ no necesariamente son abiertas en el sentido topológico. Esto llevó a que algunos matemáticos se plantearan la pregunta, ¿para todo espacio semimétrico existe una semimétrica que induzca la topología de X y que todas las bolas abiertas sean abiertas? La respuesta es negativa y Heath fue el encargado de dar el ejemplo, que veremos más adelante. Esto nos permite notar lo importante que es la desigualdad del triángulo para las propiedades topológicas de los espacios métricos.

Otra cosa muy importante a tener en cuenta al trabajar con semimétricas es que estas no siempre definen una topología, a diferencia del caso de las métricas. Es decir, si nosotros definimos τ como la familia de conjuntos que se ven como unión de conjuntos de la forma $B(x, \varepsilon)$ entonces τ no necesariamente es una topología. En este trabajo solo definiremos espacios por semimétricas en casos contados y no nos detendremos a probar que efectivamente la semimétrica define una topología (pero sí lo hace).

Una vez discutidas las principales patologías de los espacios semimétricos, veamos que no todo está perdido.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio semimetrizable. Para todos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que*

$$x \in int_X \left(B(x, \varepsilon)\right).$$

Demostración. Notemos que $d(x, X \setminus B(x,\varepsilon)) \geq \varepsilon$ así que $x \notin \operatorname{cl}_X(X \setminus B(x,\varepsilon))$. Entonces $x \in X \setminus \operatorname{cl}_X(X \setminus B(x,\varepsilon))$, si ahora recordamos la identidad $X \setminus \operatorname{cl}_X(A) = \operatorname{int}_X(X \setminus A)$ concluimos que $x \in \operatorname{int}_X(B(x,\varepsilon))$. ■

Con la Proposición 3.3 podemos deducir el grado mínimo de separación para los espacios semimétricos. Este resulta ser mucho más bajo de lo que esperaríamos considerando que los espacios métricos cumplen prácticamente cualquier condición de separación.

Corolario 3.4. *Sea X un espacio semimetrizable. Entonces X es T_1.*

Demostración. Dados $x, y \in X$ distintos entonces usando la Proposición 3.3 $\operatorname{int}_X\left(B\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right)\right)$ y $\operatorname{int}_X\left(B(y, \frac{d(x,y)}{2})\right)$ son abiertos que tienen a x y y , respectivamente. Además $y \notin B\left(x, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ y $x \notin B\left(y, \frac{d(x,y)}{2}\right)$ y por tanto tampoco están en los interiores respectivos. Así X es T_1. ■

Para probar que un espacio métrico es Hausdorff los abiertos elegidos por lo general son $B(x, \frac{d(x,y)}{2})$ y $B(y, \frac{d(x,y)}{2})$. Pero para probar que son ajenos nuevamente se necesita usar la desigualdad del triángulo. ¿Hay alguna forma de darle la vuelta a ese problema y probar que los espacios semimétricos son Hausdorff? La respuesta es negativa. El contraejemplo es un viejo conocido de este trabajo.

Ejemplo 3.5. *Existe un espacio semimetrizable que no es Hausdorff. Consideremos a $X = \mathbb{N}$ con la topología cofinita y definamos $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ como*

$$d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{xy} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$$

Es claro que d es una semimétrica y veamos que induce la topología cofinita. Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Primero supongamos que $d(x, A) = 0$. Tomemos $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Como U es abierto, entonces existe $m \in X$ tal que $[m, \infty) \subseteq U$. Si hacemos $\varepsilon = \frac{1}{xm}$, entonces por hipótesis existe $y \in A$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $\frac{1}{xy} < \frac{1}{xm}$, de manera que $xm < xy$, por tanto $m < y$ y $y \in U$. Como además $y \in A$ entonces $y \in U \cap A$ y por tanto $U \cap A \neq \emptyset$, probando así que $x \in cl_X(A)$.

Ahora supongamos $x \in cl_X(A)$ y tomemos $\varepsilon > 0$. Consideremos $m \in X$ tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$ y sea $U = [m, \infty) \cup \{x\}$, $U \in \tau_X$ y $x \in U$ así que $U \cap A \neq \emptyset$. Si

$x \in A$ entonces trivialmente $d(x,A) = 0$ así que supongamos $x \notin A$. Como $U \cap A \neq \emptyset$ y $x \notin A$ tenemos que $[m, \infty) \cap A \neq \emptyset$. Así que tomemos y en esta intersección y notemos que $d(x,y) = \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{m} < \varepsilon$ lo que implica $d(x,A) = 0$. Concluimos que $x \in cl_X(A)$ si y solo si $d(x,A) = 0$. Entonces X es semimetrizable con la semimétrica d definida anteriormente y ya sabemos que X no es Hausdorff.

Nuestro siguiente teorema caracteriza totalmente un espacio semimetrizable en términos de una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ de forma análoga en la que el Teorema 2.13 caracterizó a los espacios semiestratificables en términos de una función de ese estilo.

Teorema 3.6. *Sea X un espacio. X es semimetrizable si y solo si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ tal que*

1) *Para todo $x \in X$ $\{g(n,x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local para x.*

2) *Para todos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$.*

3) *Para todo $x \in X$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ sucesión, si $x \in g(n,x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces $x_n \to x$.*

Demostración. Primero supongamos que tenemos una g que cumple las hipótesis del teorema y probemos que X es semimetrizable.

Dados $x, y \in X$ distintos existen $U, V \in \tau_X$ tales que $x \in U$, $y \in V$ pero $x \notin V$, $y \notin U$. Como $\{g(n,x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local de x entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n,x) \subseteq U$ y por tanto $y \notin g(n,x)$. Esta última propiedad nos permite definir

$$m(x,y) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid y \notin g(n,x)\}.$$

Y ahora definamos

$$d(x,y) = \begin{cases} \text{mín}\{\frac{1}{m(x,y)}, \frac{1}{m(y,x)}\} \text{ si } x \neq y \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x = y \end{cases}.$$

Es claro que d es una semimétrica para X y veamos que induce la topología de X. Para esto tomemos $A \subseteq X$ y $x \in X$. Primero supongamos que $d(x,A) = 0$ y sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$. Como $\{g(n,x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es base local de

x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in g(n,x) \subseteq U$. Como $d(x,A)=0$ existe $x_n \in A$ tal que $d(x,x_n) \leq \frac{1}{n}$, es decir, $\frac{1}{m(x,x_n)} \leq \frac{1}{n}$ o lo que es lo mismo $n \leq m(x,x_n)$ y por tanto $x_n \in g(n,x)$. Entonces $x_n \in A \cap U$, lo que implica $A \cap U \neq \emptyset$ y $x \in \mathrm{cl}_X(A)$.

Ahora supongamos $x \in \mathrm{cl}_X(A)$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $g(n,x) \cap A \neq \emptyset$ así que existe $x_n \in g(n,x) \cap A$. Como $x_n \in g(n,x)$ y g cumple *2)* tenemos que $m(x,x_n) \geq n$ y por tanto $d(x,x_n) \leq \frac{1}{n}$. Dada $\varepsilon > 0$ basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ para que $d(x,x_n) < \varepsilon$ y como $x_n \in A$ concluimos que $d(x,A)=0$. Por tanto d induce la topología de X y X es semimetrizable.

Ahora supongamos que X es semimetrizable con una semimétrica d y construyamos una función g que cumpla las hipótesis del teorema.

Definamos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ como

$$g(n,x) = \mathrm{int}_X\left(B(x,\frac{1}{n})\right).$$

Sea $x \in X$. g así definida cumple *2)* porque para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $B(x,\frac{1}{n+1}) \subseteq B(x,\frac{1}{n})$ y tomar interiores preserva contenciones.

Ahora veamos que se cumple *1)*. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$, entonces $x \notin X \setminus U$ que es un cerrado, por tanto $\varepsilon = d(x, X \setminus U) > 0$. Ahora tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, entonces $B(x,\frac{1}{n}) \cap X \setminus U = \emptyset$, pues si suponemos $y \in B(x,\frac{1}{n}) \cap X \setminus U$ entonces $d(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon = d(x, X \setminus U)$, lo cual es una contradicción. Entonces $B(x,\frac{1}{n}) \cap X \setminus U = \emptyset$ y por tanto $B(x,\frac{1}{n}) \subseteq U$. Tomando interior concluimos que $g(n,x) \subseteq U$ y g cumple *1)*.

Por último sean $\{x\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $y \in X$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ $y \in g(n,x_n)$. Dado $U \in \tau_X$ tal que $y \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(y,\frac{1}{n}) \subseteq U$ (Lo probamos al probar que g cumple *1)*). Entonces para toda $m \geq n$ tenemos $x_m \in U$, de lo contrario $x_m \notin B(y,\frac{1}{n})$ y por simetría de la semimétrica, $y \notin B(x_m,\frac{1}{n})$. Por tanto $y \notin B(x_m,\frac{1}{m})$ (pues $m \geq n$), pero esto implica $y \notin g(m,x_m)$ lo que contradice nuestra hipótesis. Así que para toda $m \geq n$ tenemos que $x_m \in U$ lo que demuestra que $x_n \to y$ y g cumple lo buscado.

■

Del Teorema 2.13 se sigue una propiedad importante de los espacios semimétricos.

Corolario 3.7. *Sea X un espacio semimetrizable. Entonces X es primero numerable*

Demostración. Dados una función g que cumple las hipótesis del Teorema 3.6 y $x \in X$ entonces, $\{g(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local numerable de x pues g cumple *1)*. De hecho por la prueba que dimos podemos dar una base explícita, a saber $\{\mathrm{int}_X\left(B(x,\frac{1}{n})\right)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x. Más aún probamos que $\{B(x,\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que para todo $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(x,\frac{1}{n}) \subseteq U$, este resultado lo usaremos de nuevo más adelante y por eso lo remarcamos. ∎

La similitud entre los Teoremas 3.6 y 2.13 nos permite encontrar de forma sencilla la relación entre la clase de los espacios semimetrizables y la de los semiestratificables.

Corolario 3.8. *Sea X un espacio semimetrizable. Entonces X es semiestratificable.*

Demostración. Si tomamos una función g que cumple las hipótesis del Teorema 3.6 entonces cumple las hipótesis del Teorema 2.13, solo habría que revisar la condición *2)* del Teorema 2.13 pero esa es una versión más débil de la condición *2)* del Teorema 3.6 al estar en un espacio T_1. ∎

El Corolario 3.8 prueba de manera indirecta un montón de cosas acerca de los espacios semimétricos. Un espacio semimétrico es subparacompacto, es compacto si y solo si es numerablemente compacto, es Lindelöf si y solo si es hereditariamente separable si y solo si todo conjunto no numerable tiene un punto de acumulación, si es Hausdorff y numerablemente compacto entonces es metrizable. En fin, todo lo que probamos que era válido para espacios semiestratificables sigue siendo válido para espacios semimétricos. De entre todos estos solo enunciaremos como corolario el resultado correspondiente a la metrizabilidad.

Corolario 3.9. *Sea X un espacio semimetrizable Hausdorff y numerablemente compacto. Entonces X es metrizable.*

Demostración. Inmediato del Corolario 3.8 y la Proposición 2.35. ∎

Como hemos hecho hasta ahora lo siguiente que veremos es un ejemplo que exhiba que el recíproco del Corolario 3.8 no es cierto en general.

Ejemplo 3.10. *Existe un espacio semiestratificable no semimetrizable.*
Sea X como en el Ejemplo 1.12. Entonces X es estratificable, por tanto semiestratificable según la Proposición 1.16. Pero en el mismo Ejemplo 1.12 probamos que X no es primero numerable así que, por el Corolario 3.7, X no puede ser semimetrizable.

Con la herramienta desarrollada hasta ahora ya estamos en condiciones de enunciar el resultado más importante acerca de espacios semimetrizables y semiestratificables. Que además nos da una condición necesaria y suficiente para que sea cierto el recíproco del Corolario 3.8.

Teorema 3.11. *Un espacio X es semiestratificable y primero numerable si y solo si es semimetrizable.*

Demostración. Si X es semimetrizable el Corolario 3.8 nos dice que X es semiestratificable.
Ahora supongamos que X es semiestratificable y primero numerable. Sean h una función que cumple las hipótesis del Teorema 2.13 y para cada $x \in X$ $\{U(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable y decreciente para x. Definamos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ como

$$g(n,x) = h(n,x) \cap U(n,x)$$

y veamos que cumple las hipótesis del Teorema 3.6. Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $U(n+1,x) \subseteq U(n,x)$ y $h(n+1,x) \subseteq h(n,x)$, la primera contención porque así pedimos la base local y la segunda porque h satisface *1)* del Teorema 2.13. Entonces

$$g(n+1,x) = h(n+1,x) \cap U(n+1,x) \subseteq h(n,x) \cap U(n,x) = g(n,x)$$

y g satisface *1)* del Teorema 3.6. Como $g(n,x) \subseteq U(n,x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\{U(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x, entonces $\{g(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Por tanto g cumple *2)* del Teorema 3.6. Por último, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y supongamos que existe $y \in X$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ $y \in g(n,x_n)$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $y \in h(n,x)$, como h cumple *3)* del Teorema 2.13 concluimos que $x_n \to y$ y por tanto g cumple *3)* del Teorema 3.6. g cumple las hipótesis del Teorema 3.6 así que X es semimetrizable. ■

Algo que no habíamos estudiado acerca de los espacios semiestratificables era su comportamiento al agregar alguno de los axiomas de numerabilidad, asunto que queda totalmente resuelto por el Teorema 3.11 que nos da una caracterización total de los espacios semiestratificables y primero/segundo numerables (recordemos que segundo numerable implica primero numerable), son exactamente los espacios semimétricos. .

Para terminar con esta sección regresaremos a una de las preguntas que planteamos al comienzo de la misma: ¿Cuándo las bolas abiertas definidas por una semimétrica son abiertas en un espacio semimétrico? Ahora tenemos casi todas las herramientas necesarias para estudiar el ejemplo de Heath que mencionábamos al comienzo de la sección. Dado que este ejemplo es bastante extenso lo descompondremos en varios lemas más pequeños. Comencemos con la definición del espacio.

Tomemos $\mathbb{R}^2$ como espacio subyacente y definamos una topología por bases locales de la siguiente forma. Sea $(x, y) \in X$:

- Si $|y| > 0$ entonces una base local para (x, y) es $\{B_e((x, y), \varepsilon) \mid |y| > \varepsilon > 0\}$ donde B_e representa la bola de radio epsilon con la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

- Si $y = 0$ y $x \in \mathbb{Q}$ entonces $\{B_e((x, 0), \varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ es una base local para $(x, 0)$.

- Si $y = 0$ y $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entonces definamos

  $$C((x, 0), \varepsilon) = \{(u, w) \in X \mid d_e((x, y), (u, w)) + \alpha((x, y), (u, w)) < \varepsilon\}$$

  donde $\alpha((x, y), (u, w))$ representa el menor ángulo en radianes que se forma al trazar la recta que pasa por estos puntos y el eje horizontal. Ahora tomemos $\{C((x, 0), \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ como una base local para $(x, 0)$.

A este espacio lo llamaremos espacio de Heath y lo denotaremos por $\mathscr{H}$ en lo que resta de este capítulo.

Nuestra primera observación acerca del espacio de Heath es acerca de los dos subespacios que basicamente definen la topología, el eje horizontal, que denotaremos por $\mathcal{X}$ en el resto del capítulo, y $\mathscr{H} \setminus \mathcal{X}$.

Lema 3.12. *$\mathcal{X}$ y $\mathscr{H} \setminus \mathcal{X}$ heredan la topología euclidiana al ser considerados como subespacios de $\mathscr{H}$.*

Demostración. Para $\mathscr{H} \setminus \mathcal{X}$ esto se sigue inmediatamente de la definición, pues las bases locales para este caso también son bases locales de la topología euclidiana.

Pasemos al caso de $\mathcal{X}$. Si tomamos $x \in \mathbb{Q}$, entonces

$$B_e((x,0),\varepsilon) \cap Y = \{(y,0) \mid y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}.$$

Así que en los puntos de la forma $(x,0)$ con $x \in \mathbb{Q}$ mantenemos la topología euclidiana. Si ahora $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ también

$$C((x,0),\varepsilon) \cap \mathcal{X} = \{(y,0) \mid y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}$$

Sea $(z,0)$ en el lado izquierdo. Entonces la recta que pasa por $(x,0)$ y $(z,0)$ es $\mathcal{X}$ mismo y por tanto $\alpha((x,0),(z,0)) = 0$ así que $d_e((x,0),(z,0)) < \varepsilon$. Esto nos dice que $|x-z| < \varepsilon$ y $z \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, por tanto

$$(z,0) \in \{(y,0) \mid y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}.$$

Si ahora tomamos $(z,0) \in \{(y,0) \mid y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)\}$ nuevamente

$$\alpha((x,0),(z,0)) = 0$$

por estar ambos en $\mathcal{X}$ y $d_e((x,0),(z,0)) = |x-z| < \varepsilon$ por hipótesis, así que $(z,0)$ está en el lado izquierdo de la igualdad. Con estas dos igualdades probadas concluimos que el eje hereda la topología euclidiana al ser considerado como subespacio de X.

■

Estamos estudiando el espacio de Heath por ser un espacio semimétrico con una propiedad bastante patológica, así que es momento de ver que efectivamente es semimétrico.

Lema 3.13. *El espacio de Heath es semimetrizable.*

Demostración. Para ver que es semimetrizable usaremos el Teorema 3.6. Dados $p = (x,y) \in \mathscr{H}$ y $n \in \mathbb{N}$ definamos $A(n,p)$ como sigue

- Si $|y| > 0$ entonces $A(1,p) = B_e\left(p, \frac{1}{n_0}\right)$ donde n_0 es el primer natural para el cual $|y| > \frac{1}{n_0}$. Recursivamente $A(n,p) = B_e\left(p, \frac{1}{n_0+n}\right)$.
- Si $y = 0$ y $x \in \mathbb{Q}$, entonces $A(n,p) = B_e\left(x, \frac{1}{n}\right)$.
- Si $y = 0$ y $x \notin \mathbb{Q}$, entonces $A(n,p) = C((x,0), \frac{1}{n})$.

Notemos que la familia $\{A(n,p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para cada $p \in X$. Y ahora sea $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ definida como $g(n,p) = A(n,p)$. Veamos que cumple lo buscado. Es claro que es una base local por como definimos nuestra topología y también es claro que es decreciente por la definición de $A(n,p)$. Entonces solo revisaremos la condición *3)* del Teorema 3.6. Sean $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $p \in X$ que cumplen $p \in g(n,q_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $d_e(p,q_n) < \frac{1}{n}$ por la definición de $g(n,q_n)$ (en los tres casos $g(n,q_n)$ es subconjunto de $B_e(q_n, \frac{1}{n})$, de hecho en el segundo $g(n,q_n)$ es exactamente esta última). Sea $U \in \tau_X$ tal que $p \in U$. Nuevamente consideremos los distintos casos

- Si $p = (x,y)$ con $|y| > 0$, entonces sea $n_0 \in \mathbb{N}$ como en la definición de $A(1,n)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_e(p, \frac{1}{n+n_0}) \subseteq U$, entonces para toda $m \geq n$, $d_e(p,q_m) < \frac{1}{m+n_0} \leq \frac{1}{n_0+n}$ lo que implica $q_m \in U$ y por tanto $q_n \to p$.
- Si $p = (x,0)$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_e(p, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Como $d_e(p,q_m) < \frac{1}{m}$ entonces para toda $m \geq n$ tenemos $q_m \in B_e(p, \frac{1}{n}) \subseteq U$, por tanto $q_n \to p$.
- Si $p = (x,0)$ con $x \notin \mathbb{Q}$ sea nuevamente $n \in \mathbb{N}$ tal que $A(n,p) \subseteq U$. Notemos que por la definición de g si $q \notin Y$ entonces $g(n,q)$ es ajeno a Y, así que $p \in g(n,q_n)$ nos implica que $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$. Esto último junto al hecho de que $d_e(p,q_m) < \frac{1}{m}$ nos dice que para $m \geq n$ tenemos $q_m \in A(n,p) \subseteq U$ y por tanto $q_n \to p$.

En los tres casos se cumple lo buscado así que por el Teorema 3.6, X es semimetrizable.

■

Con esto ya tenemos casi todo lo necesario para probar que ninguna semimétrica que induce la topología del espacio de Heath hace que todas las bolas sean abiertas. Lo único que nos falta es un resultado clásico del análisis real: los irracionales no se pueden ver como unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte de $\mathbb{R}$ (son de segunda categoría en $\mathbb{R}$). En fin, pasemos a ver el resultado que tanto anticipamos.

Teorema 3.14. *Para toda semimétrica d que induce la topología de $\mathscr{H}$ existen $r \in \mathscr{H}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $B_d(r, \varepsilon)$ no es abierta.*

Demostración. Sea d cualquier semimétrica que induce la topología de $\mathscr{H}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$I_n = \{(x,0) \in \mathscr{H} \mid x \notin \mathbb{Q} \ \& \ B_d\left((x,0), \frac{1}{n}\right) \subseteq A(1,(x,0))\}.$$

Como d induce la topología de $\mathscr{H}$, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_d\left((x,0), \frac{1}{n}\right) \subseteq A(1,(x,0))$ (Corolario 3.7) de donde concluimos que

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \{0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Como $\mathcal{X}$ hereda la topología euclidiana entonces $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \{0\}$ es de segunda categoría en $\mathcal{X}$, de donde existe alguna $m \in \mathbb{N}$ para la cual I_m no es denso en ninguna parte. Es decir $\operatorname{int}_{\mathcal{X}}(\operatorname{cl}_{\mathcal{X}}(I_m)) \neq \emptyset$, por tanto existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $p = (z,0) \in \operatorname{cl}_{\mathcal{X}}(I_m) \subseteq \operatorname{cl}_{\mathscr{H}}(I_m)$. Como $\mathscr{H}$ es primero numerable por ser semimetrizable (Corolario 3.7) entonces existe una sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I_m$ tal que $q_n \to p$ en $\mathscr{H}$. Demostraremos que existe una bola que tiene a p pero solo tiene una cantidad finita de elementos de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para concluir que no es abierta en $\mathscr{H}$, pues todo abierto que tenga a p tiene casi todos los elementos de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por la convergencia de la sucesión a p.

Comencemos tomando $r = (z, y)$ tal que $r \in B_d(p, \frac{1}{2m})$ y $y \neq 0$, la existencia de este punto la veremos una vez terminemos el argumento. Por la simetría de d tenemos que $p \in B_d(r, \frac{1}{2m})$. Ahora notemos que como la sucesión $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a p en la topología de $\mathscr{H}$, entonces también converge en la métrica usual, puesto que $\{A(n,p)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de p y su diámetro con la métrica usual tiende a cero. Entonces $\alpha(q_n, r) \to \frac{\pi}{2}$, lo cual implica que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $r \notin A(1, q_n)$. Sin embargo, $B_d(q_n, \frac{1}{m}) \subseteq A(1, q_n)$ así que para $n \geq N_1$ tenemos $d(q_n, r) \geq \frac{1}{m}$. Por tanto $B_d(r, \frac{2}{m})$ solo tiene una cantidad finita de términos de $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ por lo que no es abierta en X.

Solo nos queda justificar la existencia de este r. Primero probemos que $p \in \mathrm{cl}_X(\{(z,w) \mid w \neq 0\})$, pero esto es fácil pues en este caso $A(n,p) = B_e(p, \frac{1}{n})$ y entonces

$$\left(z, \frac{1}{2n}\right) \in A(n,p) \cap \{(z,w) \mid w \neq 0\}.$$

Probando que $p \in \mathrm{cl}_X(\{(z,w) \mid w \neq 0\})$, por tanto existe una sucesión de la forma (z, y_n) con $y_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ que converge a p. Como $\mathrm{int}_X\left(B_d(p, \frac{1}{2m})\right)$ es un abierto que tiene a p existe un elemento de la sucesión, digamos (z, y_k), tal que $(z, y_k) \in \mathrm{int}_X\left(B_d(p, \frac{1}{2m})\right)$ y podemos tomar $r = (z, y_k)$. ■

Como podemos ver con el Teorema 3.14 los espacios semimétricos pueden ser bastante patológicos en contraste con los métricos, de hecho aunque no lo demostramos (ni lo haremos) el espacio del Ejemplo 3.14 es paracompacto, normal, localmente conexo y hereditariamente separable y a pesar de todo esto no preservó una de las propiedades más simples de los espacios métricos.

Para terminar de atacar la pregunta de cuando las bolas definidas por una semimétrica y de paso la sección, damos una condición necesaria para que pase todo lo contrario al Ejemplo 3.14.

Proposición 3.15. *Sea X un espacio semimetrizable con una semimétrica d que es continua. Entonces $B_d(x,\varepsilon)$ es abierto para todos $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Basta probar que $X \setminus B_d(x,\varepsilon)$ es cerrado y como X es primero numerable por la Proposición 3.7 basta ver que toda sucesión convergente contenida en $X \setminus B_d(x,\varepsilon)$ converge a algo en $X \setminus B_d(x,\varepsilon)$. Tomemos $\{y_n\}_n \in \mathbb{N} \subseteq X \setminus B_d(x,\varepsilon)$ y supongamos que converge a $y \in X$. Por continuidad (por sucesiones, que vale porque tenemos X primero numerable por el Corolario 3.7)

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) \geq \varepsilon.$$

Y por tanto $y \in X \setminus B_d(x,\varepsilon)$. Así $B_d(x,\varepsilon)$ es abierto en X. ■

Capítulo 4

Espacios de Moore

En esta sección estudiaremos los espacios de Moore, la generalización del concepto de espacio métrico más conocida que veremos en este texto. A diferencia de lo hecho con los espacios semiestratificables y semimétricos el estudio de las propiedades de los espacios de Moore no estará enfocado en sus propiedades básicas, sino en responder la siguiente pregunta: ¿Cuándo es un espacio semiestratificable, un espacio de Moore? (Y por tanto obtendremos un resultado para semimetrizables). Esta pregunta sugiere cierta relación entre estas clases de espacios, a saber, la del siguiente diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Metrizable} \arrow[d] \\
\text{Moore} \arrow[d] \\
\text{Semimetrizble} \arrow[d] \\
\text{Semiestratificable}
\end{tikzcd}
$$

Y atacaremos el problema de revertir las implicaciones. Notemos que ya resolvimos una parte de dicho problema con el Teorema 3.11 que nos da condiciones necesarias y suficientes para que un espacio semiestratificable sea semimétrico.

Para definir a los espacios de Moore comenzaremos definiendo lo que es un desarrollo para un espacio topológico. El concepto de desarrollo fue introducido por el mismo Moore . Moore originalmente estaba estudiando ecuaciones funcionales lineales al definir dicho concepto, por lo cual es un poco curioso que acabara siendo tan relevante en topología (si el lector quiere leer más al respecto vea [9]). Haciendo a un lado la divagación veamos de qué trata la definición.

Definición 4.1. *Sea X un espacio. Decimos que una sucesión $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas es un desarrollo para el espacio X si cumple lo siguiente:*

1. *Para todo $x \in X$, la familia $\{st(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de x.*
2. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_{n+1} \subseteq \mathscr{U}_n$.*

Si X tiene un desarrollo entonces diremos que X es desarrollable.

Antes de seguir haremos algunos comentarios acerca de la Definición 4.1. Muchos textos solo definen un desarrollo como una sucesión de cubiertas abiertas que solo cumple la condición *1.* o en algunos casos, en lugar de la condición *2.* piden que $\mathscr{U}_{n+1}$ refine a $\mathscr{U}_n$. La razón de enunciar la condición *2.* como lo hicimos es porque será necesaria en esta forma para una de las pruebas de la sección y que en realidad no perdemos generalidad, contrario a lo que la intuición nos dice a primera vista. Esta última afirmación la probamos en el siguiente lema.

Lema 4.2. *Sea X un espacio con una sucesión $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cumpla la condición 1. de la Definición 4.1. Entonces X es desarrollable.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\mathscr{U}_n = \{U \in \tau_X \mid \forall i \leq n \ \exists \ G_i \in \mathscr{G}_i \ U \subseteq G_i\}$$

y veamos que la sucesión $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple las condiciones de la Definición 4.1. Notemos que por construcción $\mathscr{U}_n$ refina a $\mathscr{G}_n$ por lo que $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$ para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$. Como $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base local de x esto implica que $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es, así que $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple *1.*. Además por construcción $\mathscr{U}_{n+1} \subseteq \mathscr{U}_n$. Así, $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo para X. ■

Gracias al lema 4.2 nuestra definición de espacios desarrollables coincide con la que se usa de manera estándar. Una vez resuelto este pequeño detalle pasemos a ver la definición de un espacio de Moore.

Definición 4.3. *Sea X un espacio. Decimos que X es de Moore si X es desarrollable y regular.*

Como mencionamos al comenzar la sección, todo espacio de Moore es semimetrizable y además también es semiestratificable. La meta es probar eso y el primer paso para probar estas afirmaciones será transformar la Definición 4.15 en una más adecuada. Lo que buscamos en realidad es que la Definición 4.15 quede escrita en términos de una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$, de forma análoga a lo hecho para espacios semiestratificables y semimétricos en los Teoremas 2.13 y 3.6, respectivamente. Esto, aunque ahora mismo no lo parezca, solucionará el problema y de hecho, de una forma muy eficiente.

Teorema 4.4. *Sea X un espacio regular. X es de Moore si y solo si existe una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_x$ con las siguientes propiedades:*

1) Para todos $x \in X$ y $N \in \mathbb{N}$ tenemos $g(n+1, x) \subseteq g(n, x)$.

2) Para todo $x \in X$, $\{g(n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x.

3) Para todas $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sucesiones tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\{x, x_n\} \subseteq g(n, y_n)$ tenemos $x_n \to x$. (Si bien esta condición pareciera rebuscada podemos pensarla de la siguiente forma usando espacios métricos, si la diferencia entre una sucesión y un elemento está acotada por otra sucesión que tiende a cero entonces la primer sucesión converge a dicho elemento, es decir, es un teorema del sandwich para espacios topológicos arbitrarios).

Demostración. Comencemos suponiendo que tenemos una función g que cumple las hipótesis. Definamos

$$\mathscr{G}_n = \bigcup_{x\in X} g(n, x).$$

$\mathscr{G}_n$ es cubierta abierta de X porque para todo $x \in X$ tenemos $x \in g(n, x)$ por *2)* y $g(n, x)$ es abierto por hipótesis. Por el lema 4.2 nos basta probar que la familia $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local de x para todo $x \in X$.

Sean entonces $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tales que $x \in U$. Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in X$ tal que $x \in g(n, y_n)$ pero $g(n, y_n) \nsubseteq U$, esto quiere decir que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in g(n, y_n)\backslash U$. Entonces las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen las hipótesis de la condición *3)* y por tanto $x_n \to x$. Pero como $\{x_n\} \subseteq X \setminus U$ y este último conjunto es cerrado entonces $x \in X \setminus U$, lo cual es una contradicción. Por tanto para alguna $n \in \mathbb{N}$ $\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n) \subseteq U$ y $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base local para x. Por el lema 4.2 concluimos que existe $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ desarrollo para X y como X es regular por hipótesis general entonces X es de Moore.

Ahora supongamos X de Moore y sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X. Sea $x \in X$ definiremos $g(n, x)$ de forma recursiva como sigue. Para $n = 1$ sea $U \in \mathscr{U}_1$ cualquier abierto que tiene a x. Supongamos que ya hemos definido $g(n, x) \in \mathscr{U}_n$ o $g(n, x) = \{x\}$ y aquí tenemos dos casos. Si $g(n, x) = \{x\}$ entonces definamos $g(n+1, x) = \{x\}$ mientras que si existe $y \neq x$ en $g(n, x)$ entonces $g(n, x)\setminus\{y\} \in \tau_X$ y $x \in g(n, x)\setminus\{x\}$. Como $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo para X entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subseteq g(n, x) \setminus \{y\}$ y por la condición *2.* de la Definición 4.1 podemos suponer que $m \geq n + 1$ (pues las estrellas están anidadas) entonces sea $g(n+1, x)$ cualquier elemento de $\mathscr{U}_{n+1}$ tal que $x \in g(n + 1, x)$ (esta parte es la que motivó el pedir la condición *2)* en la definición de desarrollo). En resumen, de manera recursiva para cada $x \in X$ definimos $\{g(n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

- Para toda $n \in \mathbb{N}$ $g(n + 1, x) \subseteq g(n, x)$.

- Para toda $n \in \mathbb{N}$ $g(n, x) \in \mathscr{U}_n$ o $g(n, x) = \{x\}$.

Veamos que g así definida cumple lo buscado. Cumple *1)* por construcción y de hecho cumple *2)* por este mismo argumento ya que independientemente de si $g(n, x) \in \mathscr{U}_n$ o $g(n, x) = \{x\}$ tenemos que $g(n, x) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ y la familia $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sí es una base local para cada x al ser $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X.

Por último tomemos sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un $x \in X$ que cumplan las hipótesis de *3)*. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$, como $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq U$. Si $m \geq n$ entonces tenemos dos casos: Si $g(m, y_m) = \{y_m\}$ entonces $x_m = x = y_m$ y trivialmente $x_m \in U$, mientras que si $g(m, y_m) \in \mathscr{U}_m$ entonces como $x \in g(m, y_m)$ tenemos que $g(m, y_m) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_m) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq U$ y nuevamente $x_m \in U$ pues $x_m \in g(m, y_m)$. Por tanto para toda $m \geq n$ $x_m \in U$ y $x_n \to x$. Así, g cumple

3).

Concluimos que g cumple lo buscado y se sigue el teorema. ■

Detengámonos un poco a revisar la condición *3.* del Teorema 4.4. Notemos que si hacemos $x_n = y_n$ entonces esta condición se convierte en la condición *3.* pero del Teorema 3.6. Con esto ya tenemos la conexión entre los espacios de Moore y semimetrizables establecida de forma clara.

Corolario 4.5. *Sea X un espacio de Moore. Entonces X es semimetrizable.*

Demostración. Si g es una función que cumple las hipótesis del Teorema 4.4 entonces por la pequeña observación que precede al corolario tenemos que g cumple las hipótesis del Teorema 2.13 y por tanto es semimetrizable. ■

Corolario 4.6. *Sea X un espacio de Moore. Entonces X es semiestratificable.*

Demostración. Si X es de Moore entonces es semimetrizable por el Corolario 4.5, si ahora aplicamos el Corolario 3.8 concluimos que X es semiestratificable. ■

Para no dejar huecos y para usar el Teorema 4.4 ahora probamos la única implicación que no tenemos del diagrama que colocamos al comienzo de la sección. Es decir todo espacio metrizable es de Moore.

Proposición 4.7. *Sea X un espacio metrizable. Entonces X es de Moore.*

Demostración. Sea d una métrica para X. Definamos $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ como $g(n, x) = B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ y veamos que cumple las hipótesis del Teorema 4.4.

Realmente solo vale la pena probar que g cumple *3)* pues *1)* es trivial y *2)* es una propiedad bien conocida de los espacios métricos. Sean entonces sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y un punto $x \in X$ que cumplen las hipótesis de *3)*. Dado $\varepsilon > 0$ sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{N} < \varepsilon$ y veamos que para toda $n \geq N$ tenemos $d(x_n, x) < \varepsilon$ (Como X es métrico usaremos la definición clásica de convergencia). Sea $n \geq N$ entonces como $x, x_n \in g(n, y_n) = B\left(y_n, \frac{1}{n}\right)$ entonces por la desigualdad del triángulo

$$d(x, x_n) \leq d(x, y_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < \varepsilon$$

que era lo buscado. Por tanto g cumple las hipótesis del Teorema 4.4 y X es de Moore. ■

Como hemos hecho hasta ahora al ver esta clase de resultados lo que sigue es demostrar que los recíprocos no son necesariamente ciertos. Es decir, veremos un espacio semimétrico que no es de Moore y otro que es de Moore pero no metrizable, notemos que de esta forma también mostramos que el recíproco del Corolario 4.6 no es válido pues ya sabemos que todo espacio semimétrico es semiestratificable por la Proposición 3.8 . Para poder dar el ejemplo de un espacio semimetrizable que no es de Moore necesitamos un resultado interesante aacerca de esta clase de espacios, en ellos el ser Lindelöf es equivalente a tener una base numerable, exactamente como pasaba en el caso de los espacios métricos.

Proposición 4.8. *Sea X un espacio de Moore. X es Lindelöf si y solo si es segundo numerable.*

Demostración. Todo espacio segundo numerable es Lindelöf sin necesidad de más hipótesis así que solo probaremos la otra implicación. Supongamos que X es de Moore y Lindelöf y sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X. Como X es Lindelöf para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathscr{V}_n$ subcubierta numerable de $\mathscr{U}_n$ y veamos que la familia $\mathscr{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{V}_n$ es una base numerable para X. Dado $U \in \tau_X$ no vacío tomemos $x \in U$, como $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo para X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq U$. Luego $\mathscr{V}_n$ es subcubierta de $\mathscr{U}_n$ así que $\mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subseteq U$ por lo que si tomamos cualquier $V \in \mathscr{V}_n \subseteq \mathscr{V}$ tal que $x \in V$ tenemos

$$V \subseteq \mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subseteq U.$$

Y por tanto $\mathscr{V}$ es una base para X, además es numerable pues es unión numerable de conjuntos numerable así que es la base numerable que buscábamos. ■

En realidad en la Proposición 4.8 solo necesitamos que el espacio sea desarrollable, pero al enunciarlo de esta forma obtenemos una condición para que un espacio de Moore sea metrizable.

Corolario 4.9. *Sea X de Moore. Si X es Lindelöf entonces X es metrizable.*

Demostración. Como X es de Moore y Lindelöf entonces es de Moore y segundo numerable por la Proposición 4.8, entonces es regular y segundo numerable y su metrizabilidad se sigue del Teorema de metrización de Urysohn. ■

Pasemos a ver los ejemplos. El ejemplo de un espacio semimetrizable que no es de Moore se debe a Macauley, a este espacio le daremos el mismo tratamiento que al de Heath, es decir, probaremos sus propiedades como lemas para evitar una prueba excesivamente larga.

Comencemos con la definición del espacio. Al igual que con el espacio de Heath el espacio subyacente es $\mathbb{R}^2$ y denotemos por $\mathscr{X}$ al eje horizontal. Definamos la siguiente semimétrica

$$d(p,q) = \begin{cases} d_e(p,q) \text{ si } p,q \notin \mathscr{X} \\ d_e(p,q) + \alpha(p,q) \text{ otro caso} \end{cases}$$

Donde $\alpha(p,q)$ representa el menor ángulo entre la recta que pasa por p,q y $\mathscr{X}$. Antes de definir las bases locales de nuestro espacio notemos lo siguiente, para todo $p \in \mathscr{M} \setminus \mathscr{X}$ existe $n(p) \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $B_d\left(p, \frac{1}{n(p)}\right) \cap \mathscr{X} = \emptyset$. Si $p = (x,y)$, entonces basta tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < |y|$ pues así si $(w,0) \in Y$, entonces $d_e(p,(w,0)) \geq d_e(p,(x,0)) = |y| \geq \frac{1}{n}$ y como además $d(p,(w,0)) \geq d_e(p,(w,0))$, tenemos que $d(p,(w,0)) > \frac{1}{n}$. Por tanto $B_d\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap Y = \emptyset$ y basta tomar $n(p)$ como el mínimo natural con esta propiedad. Notemos que si $m \geq n(p)$ también tenemos $B_d(p, \frac{1}{m}) \cap Y = \emptyset$ y esto también nos dice que $B_d\left(p, \frac{1}{n(p)+n}\right) = B_e\left(p, \frac{1}{n(p)+n}\right)$.

Ahora sí, definamos una topología en X por medio de bases locales. Para $p \in \mathscr{X}$ la familia $\{B\left(p, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base local mientras que para $p \notin \mathscr{X}$ la base local es $\{B\left(p, \frac{1}{n(p)+n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Por como está definida la base local de la topología es claro que X es semimetrizable por d.

A este espacio le llamaremos espacio de Macauley y lo denotaremos por $\mathscr{M}$.

Lema 4.10. *$\mathscr{X}$ y $\mathscr{M} \setminus \mathscr{X}$ heredan la topología euclidiana al ser considerados como subespacios de $\mathscr{M}$.*

Demostración. Para $\mathscr{M} \setminus \mathscr{X}$ esto es trivial pues las bases locales de estos puntos no son más que bases locales de la topología euclidiana. Por otra parte, para $p = (x,0) \in \mathscr{X}$ notemos lo siguiente

$$B_d\left(p, \frac{1}{n}\right) \cap Y = \{(w,0) \in Y \mid |x-y| < \frac{1}{n}\}.$$

Pues $\alpha(p,(w,0)) = 0$ al estar ambos sobre el eje. Con esto concluimos lo buscado. ■

Lema 4.11. *$\mathscr{M}$ es hereditariamente separable.*

Demostración. Por el Lema 4.10 tenemos que $\mathscr{M}\backslash\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}$ heredan la topología euclidiana, pero esta última sí es hereditariamente separable así que $\mathscr{M}$ es unión de dos subespacios hereditariamente separables y por tanto él mismo es hereditariamente separable. ■

Si combinamos el Lema 4.11 con la Proposición 2.26 obtenemos lo siguiente.

Lema 4.12. *$\mathscr{M}$ es Lindelöf.*

Demostración. Como $\mathscr{M}$ es semimetrizable entonces es semiestratificable. Entonces $\mathscr{M}$ es semiestratificable y hereditariamente separable por el Lema 4.11 y la Proposición 2.26 nos permite concluir que $\mathscr{M}$ es Lindelöf. ■

Lema 4.13. *$\mathscr{M}$ no es segundo numerable.*

Demostración. Veremos que dado un punto $(x,0) \in \mathcal{X}$ no hay un abierto básico que tiene a $(x,0)$ y se queda contenido en $B_d((x,0),1)$ que no sea de la base local de $(x,0)$, lo cual probaría que toda base necesita al menos un elemento de cada una de estas bases locales y por tanto no puede ser numerable. Sea entonces $(x,0) \in \mathcal{X}$, por definición $(x,0)$ no está en los abiertos básicos de puntos fuera de $\mathcal{X}$ así que solo queda revisar los abiertos básicos de los puntos en $\mathcal{X}$. Supongamos que existen $(y,0) \in \mathcal{X}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $(x,0) \in B_d\left((y,0),\frac{1}{n}\right)$. Como $(x,0) \in B_d\left((y,0),\frac{1}{n}\right)$ tenemos que $3\varepsilon = \frac{1}{n} - d((x,0),(y,0)) > 0$, consideremos un punto (x,z) de tal forma que $\alpha((y,0),(x,z)) < \varepsilon$ y $|z| < \varepsilon$, entonces

$$\begin{aligned}
d((y,0),(x,z)) &= d_e((y,0),(x,z)) + \alpha((y,0),(x,z)) \\
&\leq d_e((y,0),(x,0)) + d_e((x,0),(x,z)) + \alpha((y,0),(x,z)) \\
&= d((x,0),(y,0)) + d_e((x,0),(x,z)) + \alpha((y,0),(x,z)) \\
&< d((x,0),(y,0)) + 2\varepsilon + \varepsilon - \varepsilon \\
&= \frac{1}{n} - \varepsilon \\
&< \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Es decir $(x,z) \in B_d\left((y,0),\frac{1}{n}\right)$ pero $\alpha((x,0),(x,z)) = \frac{\pi}{2}$ así que $(x,z) \notin B_d((x,0),1)$ y por tanto $B_d\left((y,0),\frac{1}{n}\right)$ no está contenida en $B_d((x,0),1)$. Concluimos que $\mathscr{M}$ no es segundo numerable. ■

Teorema 4.14. *$\mathscr{M}$ es semimetrizable pero no de Moore.*

Demostración. $\mathscr{M}$ es un espacio Lindelöf pero no segundo numerable según los Lemas 4.12 y 4.13, respectivamente. Si ahora usamos la Proposición 4.8 concluimos que $\mathscr{M}$ no es de Moore y ya sabíamos que era semimetrizable. ■

Ahora solo nos falta el ejemplo de un espacio de Moore no metrizable, este es mucho más sencillo y es un espacio clásico de la topología general.

Ejemplo 4.15. *Existe un espacio de Moore no metrizable.*
Sean Γ el plano de Moore/Nyemitski. Es decir Γ es el semiplano superior donde una base local para los puntos $(x,0)$ (Seguiremos denotando por $\mathcal{X}$ al eje) está dada por los conjuntos $A((x,0),n) = B_e\left((x,\frac{1}{n}),\frac{1}{n}\right) \cup \{(x,0)\}$ corriendo a $n \in \mathbb{N}$. Mientras que si $p = (x,y) \notin \mathcal{X}$ sea $n(p)$ el primer natural tal que $\frac{1}{n} < y$, la base local para (x,y) es $\{B_e(p,\frac{1}{n})\}_{n \geq n(p)}$. Es un hecho bien conocido que este espacio es regular pero no normal y por tanto no es metrizable, así que solo nos queda probar que es de Moore. Como Γ es regular basta dar un desarrollo para X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathscr{U}_n = \{A(p,n) \mid p \in Y\} \cup \{B_e(p,\frac{1}{n}) \mid p \notin \mathcal{X},\ n(p) \leq n\}.$$

Entonces $\mathscr{U}_n$ es una cubierta abierta. Para ver que cubre basta notar que si $p \in \mathcal{X}$ entonces trivialmente $p \in A(p,n) \in \mathscr{U}_n$ mientras que si $p \notin \mathcal{X}$ entonces $p \in B_e(q.n) \in \mathscr{U}_n$ donde q es el punto que obtenemos de sumar $\frac{2}{n}$ a la segunda coordenada de p. Así,$\mathscr{U}_n$ es una cubierta abierta y veamos que $\{\mathscr{U}_n\}$ cumple las hipótesis del Lema 4.2 para concluir.

Comencemos tomando $p = (x,y) \notin Y$ y sea $U \in \tau_X$ tal que $p \in U$, sin pérdida de generalidad este abierto es básico, digamos $U = B_e\left(p,\frac{1}{m}\right)$ para alguna $m \geq n(p)$. Ahora tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{1}{2m}$, esto para garantizar que $p \notin A(q,k)$ para cualesquiera $q \in Y$ y $k \in \mathbb{N}$ pues de lo contrario $B_e\left(p,\frac{1}{m}\right) \cap Y \neq \emptyset$, lo cual es imposible. Esta última condición nos permite deducir que para toda $n \geq N$

$$st(x,\mathscr{U}_n) = \bigcup\{B_e\left(q,\frac{1}{n}\right) \mid d_e(p,q) < \frac{1}{n}\}.$$

Y ahora solo veamos que $st(p, \mathscr{U}_{2N}) \subseteq B_e\left(p, \frac{1}{N}\right)$. Dado $z \in st(p, \mathscr{U}_{2N})$ existe $q \in X$ tal que $d_e(z, q) < \frac{1}{2N}$ y por la desigualdad del triángulo

$$d_e(p, z) \leq d_e(p, q) + d_e(z, q) < \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} < \frac{1}{N}$$

probando lo buscado. Entonces $st(p, \mathscr{U}_{2N}) \subseteq B_e\left(p, \frac{1}{N}\right) \subseteq B_e\left(p, \frac{1}{m}\right) = U$, la última contención por la elección de N. Concluimos que $\{st(p, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local de p para este caso. Para el caso de $p \in \mathcal{X}$ es más fácil pues por construcción de $\mathscr{U}_n$ el único abierto de esta cubierta que tiene a p es $A(p, n)$ ($A(q, n) \cap \mathcal{X} = \{q\}$ y para los puntos fuera de $\mathcal{X}$ pedimos las bolas ajenas a $\mathcal{X}$) así que la familia de estrellas no es más que $\{A(p, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ que es una base local para p. Así, $\{\mathscr{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cumple las hipótesis del Lema 4.2 y por tanto Γ es desarrollable. Como además Γ es regular, entonces Γ es de Moore. Así, Γ es de Moore pero no metrizable.

Una vez que tenemos estos ejemplos es momento de preguntarnos, ¿qué hay que agregar a un espacio semiestratificable para que se vuelva de Moore?. Afortunadamente tenemos una respuesta completa a esta pregunta, ser quasi completo, más aún, todo espacio de Moore es quasi completo por lo que es una condición necesaria y suficiente para que un espacio semiestratificable sea de Moore. Comencemos viendo la definición de quasi completez.

Definición 4.16. *Sea X un espacio. Decimos que X es quasi completo si existe una sucesión de cubiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con la siguiente propiedad:*

- *Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos para la cual existe un punto $x \in X$ tal que, para toda $n \in \mathbb{N}$ hay un $U_n \in \mathscr{U}_n$ que cumple $A_n \cup \{x\} \subseteq U_n$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.*

Para poder probar que todo espacio semiestratificable y quasi completo es de Moore necesitaremos debilitar la condición *3.* del Teorema 4.4 de la manera en que indica la siguiente proposición.

Proposición 4.17. *Sea X un espacio regular. Si X tiene una función $h : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ que cumple lo siguiente:*

a) Para todo $x \in X$ la familia $\{h(n, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base local para x.

b) Para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ $h(n+1, x) \subseteq h(n, x)$.

c) Para todos $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sucesión si $x \in h(n, x_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n \to x$.

d) Para todos $x \in X$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ sucesión tales que

- *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in h(n, x_n)$.*
- *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, existe a su vez $k(n) > n$ que cumple $cl_X\left(h(k(n), x_{k(n)})\right) \subseteq h(n, x_n)$*

Si $x \in U \in \tau_X$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $h(m, x_m) \subseteq U$.

Entonces X tiene una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ que cumple las hipótesis del Teorema 4.4 y por tanto es de Moore.

Demostración. Dado que estamos trabajando en ZFC, X es bien ordenable, así que sin pérdida de generalidad supongamos directamente que X es un ordinal. Sea h una función como en las hipótesis.

Definiremos g de forma recursiva tomando solo valores convenientes de h. Los valores que tomaremos estarán determinados por una función $r : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{N}$ que también estará definida recursivamente. Una nota importante respecto a la construcción que haremos es que la recursión se hará de forma simultánea sobre los elementos de X.

Comencemos definiendo $r(1, \alpha) = 1$ y $g(1, \alpha) = h(r(1, \alpha), \alpha)$. Supongamos que hemos definido hasta $r(n-1, \alpha)$ de forma que esta sucesión sea creciente y $g(n-1, \alpha) = h(r(n-1), \alpha)$ y definamos $r(n, \alpha)$, $g(n, \alpha)$ por casos.

Caso 1 Si no existen $\beta \in X$ distinto a α y $j < n$ tales que

- $\alpha \in g(j, \beta)$
- $g(j, \beta) \cap X \setminus h(r(i-1) + 1, \alpha) \neq \emptyset$

Entonces definimos $r(n, \alpha) = r(n-1, \alpha) + 1$ y $g(n, \alpha) = h(r(n, \alpha), \alpha)$.

Caso 2 Existen al menos un $\beta \in X \setminus \{\alpha\}$ y $j < n$ tales que

- $\alpha \in g(j, \beta)$
- $g(j, \beta) \cap X \setminus h(r(i-1) + 1, \alpha) \neq \emptyset$

En este caso sea A el conjunto de naturales menores a n para los que existe algún β con estas propiedades. Ahora para cada $j \in A$ sea $x(j,\alpha)$ el mínimo elemento en X que cumple

- $x(j,\alpha) \neq \alpha$
- $\alpha \in g(j,x(j,\alpha))$
- $g(j,x(j,\alpha)) \cap X \setminus h(r(i-1)+1,\alpha) \neq \emptyset$

Ahora notemos que $\alpha \in \bigcap_{j\in A} h(j,x(j,\alpha))$ y este último conjunto es un abierto así que hay $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha \in \mathrm{cl}_X\,(h(m,\alpha)) \subseteq \bigcap_{j\in A} h(j,x(j,\alpha))$, pues la familia $\{h(n,\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base local y el espacio es regular. Por último sea $r(n,\alpha)$ el mínimo natural mayor a $r(n-1,\alpha)$ tal que $\mathrm{cl}_X\,(h(r(n-1,\alpha)) \subseteq \bigcap_{j\in A} h(j,x(j,\alpha))$ y definamos

$$g(n,\alpha) = h(r(n,\alpha),\alpha)$$

Antes de continuar con la prueba notemos algunas cosas. Para todos $\alpha \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos $r(n,\alpha) \geq n$ así que $g(n,\alpha) = h(r(n,\alpha),\alpha) \subseteq h(n,\alpha)$, esto nos permitirá concluir que las propiedades de h también las tiene g.

Que g cumpla *1)* del Teorema 4.4 se sigue de que h cumple *a)* y $g(n,\alpha) \subseteq h(n,\alpha)$.

Ver que g cumple *2)* del Teorema 4.4 es muy fácil pues $r(n+1,\alpha) > r(n,\alpha)$ por construcción, así que

$$g(n+1,\alpha) = h(r(n+1,\alpha),\alpha) \subseteq h(r(n,\alpha),\alpha) = g(n,\alpha).$$

Donde la contención es porque h cumple *b)* y $r(n+1,\alpha) \geq r(n,\alpha)$.

Antes de ver que g cumple *3)* veamos que cumple *c)* y *d)* de esta proposición. Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y supongamos que $\alpha \in X$ cumple $\alpha \in g(n,\alpha_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha \in g(n,\alpha_n) \subseteq h(n,\alpha_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\alpha_n \to \alpha$ pues h cumple *c)*. De manera análoga se prueba que g cumple *d)*.

Ahora sí, pasemos a ver que g cumple *3)*. Supongamos que no, entonces existen $\alpha \in X$, y sucesiones $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\{\alpha,\alpha_n\} \subseteq g(n,\beta_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ pero α_n no converge a α. Sin embargo, notemos que β_n si converge a α pues para toda $n \in \mathbb{N}$ $\alpha \in g(n, \beta_n)$ y recién probamos que g cumple *c)*. Como α_n no converge a α, existe un abierto U tal que $\alpha \in U$ pero para toda $i \in \mathbb{N}$ existe $n(i) \geq i$ tal que $\alpha_{n(i)} \notin U$ y por tanto $g(n(i), \beta_n)$ no está contenido en U. Entonces podemos considerar una subsucesión de $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $g(n, \gamma_n)$ no está contenido en U.

Consideremos $\delta_n = \text{mín}\{\beta \in X \mid \alpha \in g(n, \beta) \text{ y } g(n, \beta) \nsubseteq U\}$. Notemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n, \alpha) \subseteq U$ pues ya probamos que $\{g(n, \alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para α. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_n \neq \alpha$ para $n \geq N$ por la elección de δ_n.

Sea $n \geq N$. Tenemos que $\alpha \in g(n, \delta_n) \setminus \{\delta_n\}$ y este último conjunto es un abierto por lo que existe $N_1(n) > n$ tal que si $m \geq N_1(n)$, entonces $\delta_m \in g(n, \delta_n) \setminus \{\delta_n\}$, esto por la convergencia de la sucesión a α (convergencia que tenemos puesto que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\alpha \in g(n, \delta_n)$ y g cumple *c)*).

También existe $N_2(n) \in \mathbb{N}$ tal que si $m > N_2(n)$ entonces

$$g(n, \delta_n) \nsubseteq h(r(m-1, \delta_n) + 1, \delta_n),$$

pues de lo contrario todo punto de $g(n, \delta_n)$ sería limite de alguna subsucesión de $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto pues dado $\beta \in g(n, \delta_n)$ existiría una subsucesión $\{\delta_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ para la cual $\beta \in h(n_k, \delta_{n_k})$, aquí hay que recordar que

$$h(r(m-1, \delta_n) + 1, \delta_m) \subseteq h(n, \delta_m)$$

pues $r(m-1, \delta_n) \geq m-1$ y por tanto $r(m-1, \delta_n)+1 \geq m$. Pero como dicha sucesión converge a α entonces toda subsucesión también, lo cual nos implicaría $g(n, \delta_n) = \{\alpha\} \subseteq U$, contradiciendo la elección de la sucesión $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Notemos lo siguiente, si $m > \text{máx}\{N_1(n), N_2(n)\}$ entonces

- $\delta_m \in g(n, \delta_n)$
- $g(n, \delta_n) \cap X \setminus h(r(m-1, \delta_n) + 1, \delta_n) \neq \emptyset$.

Más aún no existe $\delta \in X$ tal que $\delta < \delta_n$ y $g(m, \delta_m) \subseteq g(n, \delta)$. Si esto pasara entonces $g(n, \delta) \cap X \setminus U \neq \emptyset$ y $\alpha \in g(n, \delta)$ pues $g(m, \delta_m) \cap X \setminus U \neq \emptyset$ y $\alpha \in g(m, \delta_m)$, pero esto contradice la minimalidad de δ_n. Por tanto no hay

$\delta < \delta_n$ tal que $\delta_m \in g(n,\delta)$ $g(m,\delta) \cap X \setminus h(r(m-1,\delta_m)+1),\delta_m) \neq \emptyset$. De existir se tendría $g(m,\delta_m) \subseteq g(n,\delta)$, por la construcción de $g(m,\delta_m)$ y acabamos de probar que esto no es posible.(recordemos que $m > n$).

Por último, como $\delta_m \neq \delta_i$ pues $m > N_1(n)$ y usando lo que probamos en los párrafos anteriores concluimos que $\delta_n = x(m,\delta_m)$ del Caso 2 de la definición de $g(m,\delta_m)$ y por tanto $\mathrm{cl}_X\left(g(m,\delta_n)\right) \subseteq g(n,\delta_n)$.

En resumen para toda $n \geq N$ hay un $k(n) > n$ tal que

$$\mathrm{cl}_X\left(g(k(n),\delta_{(n))}\right) \subseteq g(n,\delta_n)$$

con lo que se satisfacen las hipótesis de la condición *d)* de esta Proposición y por tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $g(m,\delta_m) \subseteq U$ contradiciendo la elección de δ_m. Como esta contradicción viene de suponer que g no satisfacía *3)* concluimos que g satisface la condición *3* del Teorema 4.4.

Concluimos que g satisface las hipótesis del Teorema 4.4, justo lo buscado. ■

Después de esta larga prueba podemos revisar el resultado que anunciamos anteriormente.

Teorema 4.18. *Sea X un espacio regular. X es de Moore si y solo si es semiestratificable y quasi completo.*

Demostración. Comencemos suponiendo que X es de Moore. Ya probamos que X es semiestratificable en el Corolario 4.6 por lo que solo queda probar que es quasi completo.

Sea $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X. Como es de esperarse esta misma sucesión probará que X es quasi completo. Sea entonces una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente de cerrados no vacíos para la cual existe $x \in X$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$ hay $U_n \in \mathscr{U}_n$ que cumple $A_n \cup \{x\} \subseteq B_n$. Probemos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $A_n \subseteq U_n$ y $x \in U_n$, concluimos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A \cap \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n) \neq \emptyset$. Veamos que $x_n \to x$. Dado $U \in \tau_X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n) \subseteq U$ por ser $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X. Entonces si $n \geq N$ tenemos $x_n \in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n) \subseteq U$ probando la convergencia.

Notemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1$ pues la sucesión de cerrados es decreciente y por tanto $x \in A_1$ pues A_1 es cerrado. Análogamente $\{x_n\}_{n\geq 2} \subseteq A_2$ y por tanto $x \in A_2$. Continuando con este razonamiento concluimos que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. En particular

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Y por tanto X es quasi completo.

Ahora supongamos que X es semiestratificable y quasi completo. Sean f una función que cumple las hipótesis del Teorema 2.13 y $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cubiertas abiertas que cumple las hipótesis de la Definición 4.16.

Definamos $h : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ como sigue. Dados $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ primero tomemos $U(n,x) \in \mathscr{U}_n$ tal que $x \in U(n,x)$. Definiremos recursivamente $h(n,x)$, para $n = 1$ sea $h(1,x) \in \tau_X$ tal que $\mathrm{cl}_X\,(h(1,x)) \subseteq U(1,x) \cap f(1,x)$ que existe porque X es regular. Supongamos definido $h(n,x) \in \tau_X$ tal que $x \in g(n,x)$ y $\mathrm{cl}_X\,(h(n,x)) \subseteq U(n,x) \cap f(n,x) \cap h(n-1,x)$ y sea $h(n+1,x)$ un abierto que tiene a x y que cumple $\mathrm{cl}_X\,(h(n+1,x)) \subseteq U(n+1,x) \cap f(n+1,x) \cap h(n,x)$, nuevamente este abierto existe por regularidad.

Por construcción $h(n,x) \subseteq f(n,x)$ así que podemos proceder de manera análoga a lo hecho en la prueba de la Proposición 4.17 para concluir que h hereda las propiedades que tenía f, a saber, las hipótesis del Teorema 2.13 (la única que no se sigue de esto es $h(n+1,x) \subseteq h(n,x)$ pero esto se sigue por construcción). Probaremos que h satisface las condiciones de la Proposición 4.17. Como h satisface las hipótesis del Teorema 2.13, entonces ya cumple las condiciones *b)* y *c)* de la Proposición 4.17 así que basta probar que cumple *a)* y *d)*.

Comencemos con la condición *a)*. Sea $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $h(n,x) \nsubseteq U$, esto nos dice que $\mathrm{cl}_X\,(h(n,x)) \setminus U$ es un cerrado no vacío. Más aún, la sucesión $\{\mathrm{cl}_X\,(h(n,x)) \setminus U\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente formada por cerrados no vacíos y para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathrm{cl}_X\,(h(n,x)) \setminus U \cup \{x\} \subseteq U(n,x) \in \mathscr{U}_n$. Por quasi completez entonces

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\,(h(n,x))\right) \setminus U \neq \emptyset.$$

Pero como $\mathrm{cl}_X\left(h(n+1,x)\right) \subseteq h(n,x)$, entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,x)\right) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(n,x) = \{x\}$$

(La igualdad se sigue de que h cumple *1)* del Teorema 2.13) Por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,x)\right) = \{x\}$ así que como

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,x)\right)\right) \setminus U \neq \emptyset$$

forzosamente

$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,x)\right)\right) \setminus U = \{x\},$$

lo cual es una contradicción. Por tanto para alguna $n \in \mathbb{N}$ tenemos $h(n,x) \subseteq U$ y $\{h(n,x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x. Así, h cumple *a)*.

Por último veamos la condición *d)*. Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $U \in \tau_X$, $x \in X$, $N \in \mathbb{N}$ y $k(n) \in \mathbb{N}$ como en las hipótesis de dicha condición. Notemos que como h satisface la condición *c)* entonces $x_n \to x$. Consideremos la subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada de la siguiente forma $y_1 = x_N$, $y_2 = x_{k(N)}$, $y_3 = x_{k(k(N))}, \ldots$, $y_n = x_{k(k(\ldots(k(N))\ldots))}$. Tenemos que $y_n \to x$ por ser subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e incluso como X es Hausdorff el límite de las sucesiones es único por lo que si $y \in h(n,y_n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es necesario que $x = y$ pues $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergería a y por la condición *c)*. Entonces

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(n,y_n) = \{x\}.$$

Además $\mathrm{cl}_X\left(h(n+1,y_{n+1})\right) \subseteq \mathrm{cl}_X\left(h(n,x)\right)$ por construcción por lo que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,y_n)\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} h(n,y_n).$$

Y por tanto

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{cl}_X\left(h(n,y_n)\right).$$

Lo cual quiere decir que la familia $\{\mathrm{cl}_X\left(h(n,y_n)\right) \setminus U\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente de cerrados y tiene intersección vacía. Notemos que para toda $n \geq 2$ tenemos

$$\mathrm{cl}_X\left(h(n,y_n)\right) \setminus U \subseteq \mathrm{cl}_X\left(h(n,x) \subseteq h(n-1,y_{n-1}) \subseteq h(1,y_1).\right.$$

Iterando esta contención y recordando nuestra construcción de h llegamos a que

$$\mathrm{cl}_X\,(h(n, y_n)) \setminus U \subseteq h(1, y_1) \subseteq U(1, y_1).$$

Además $x \in h(n, y_n)$, así que para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\mathrm{cl}_X\,(h(n, x)) \setminus U \cup \{x\} \subseteq U(1, y_1).$$

Por quasi completez concluimos que para alguna $n \in \mathbb{N}$ se debe tener

$$\mathrm{cl}_X\,(h(n, y_n)) \subseteq U.$$

Como y_n es algún elemento de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esto termina la prueba de que g cumple la condición *d)*.

Por la Proposición 4.17 concluimos que X es de Moore. ■

Ahora tenemos condiciones necesarias y suficientes para que un espacio semiestratificable, y por tanto uno semimetrizable, sea de Moore. Con esto ya tenemos totalmente caracterizadas las relaciones entre espacios semiestratificables, semimetrizables y de Moore para la clase de espacios regulares (pues de otra forma no tendría sentido hablar de espacios de Moore). Para que un espacio semiestratificable sea semimetrizable basta agregar la condición de ser primero numerable y para que sea de Moore quasi completez. De hecho, esto se da de forma hasta cierto punto natural en el siguiente sentido: si partimos de una función f que cumple las hipótesis del Teorema 2.13 entonces cumple la condición *1* del Teorema 4.4, agregamos la hipótesis de que el espacio sea primero numerable entonces obtenemos una función h que cumple las hipótesis del Teorema 3.6 y por tanto cumple las condiciones *1* y *2* del Teorema 4.4. Por último, el agregar la quasi completez nos da una función g que cumple las tres condiciones del Teorema 4.4. Es decir, cada hipótesis que agregamos nos da una nueva condición del Teorema 4.4.

A continuación haremos un análisis similar pero para espacios Tychonoff. Para esto necesitaremos el concepto de p-espacio (no confundir con P-espacio) que al igual que el de quasi completez y el de desarrollo está dado en términos de una sucesión de cubiertas para X, pero esta vez formadas por abiertos de βX (único motivo por el que necesitamos espacios Tychonoff).

Definición 4.19. *Sea X un espacio Tychonoff. Decimos que X es un p-espacio si existe una sucesión de cubiertas $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formada por abiertos de βX tal que para todo $x \in X$*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} st(x, \mathscr{U}_n) \subseteq X.$$

Como ejemplo de p-espacios tenemos a los espacios Haussdorf localmente compactos. Esto es tan simple que ni siquiera lo veremos como proposición. Basta tomar $\mathscr{U}_n = \{X\}$ pues X es abierto en toda compactación al ser localmente compacto. Lo siguiente que veremos es que todo p-espacio es quasi completo.

Proposición 4.20. *Sea X un espacio Tychonoff. Si X es un p-espacio entonces es quasi completo.*

Demostración. Sea $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que cumple las hipótesis de la Definción 4.19. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$\mathscr{U}_n = \{U \in \tau_X \mid \text{Existe } V \in \mathscr{V}_n \text{ tal que } \operatorname{cl}_{\beta X}(U) \subseteq V\}.$$

Veamos que cubren a X. Sea $x \in X$, como $\mathscr{V}_n$ cubre a X entonces existe $V \in \mathscr{V}_n$ tal que $x \in V$. Como βX es regular entonces existe $U \in \tau_{\beta X}$ tal que $x \in U \subseteq \operatorname{cl}_{\beta X}(U) \subseteq V$ y entonces $U \cap X \in \mathscr{U}_n$, además $x \in U \cap X$, probando que $\mathscr{U}_n$ cubre. Ahora sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x \in X$ y U_n como en la Definición 4.16 y veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Como la sucesión es decreciente entonces $\{\operatorname{cl}_{\beta x}(A_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados con la pif en un compacto y por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}_{\beta X}(A_n) \neq \emptyset$. Además para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $V_n \in \mathscr{V}$ tal que $\operatorname{cl}_X(U_n) \subseteq V_n$ por la construcción de $\mathscr{U}_n$. Con esto en mente y recordando que $A_n \cup \{x\} \subseteq U_n$ tenemos

$$\operatorname{cl}_{\beta X}(A_n) \subseteq \operatorname{cl}_{\beta X}(U_n) \subseteq V_n \subseteq \operatorname{st}(x, \mathscr{V}_n).$$

De donde

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}_{\beta X}(A_n) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{st}(x, \mathscr{V}_n) \subseteq X.$$

Por tanto

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}_{\beta X}(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl}_{\beta X}(A_n) \cap X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

que era lo buscado. Por tanto X es quasi completo. ∎

Con la Proposición 4.20 estamos listos para dar una caracterización análoga al del Teorema 4.18 para espacios Tychonoff.

Teorema 4.21. *Sea X un espacio Tychonoff. X es de Moore si y solo si es semiestratificable y un p-espacio.*

Demostración. Por la Proposición 4.20 y el Teorema 4.18 si X es semiestratificable y un p-espacio entonces es de Moore.

Ahora supongamos que X es de Moore y sea $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un desarrollo para X. Notemos que solo falta probar que X es un p-espacio pues el Corolario 4.6 nos dice que X es semiestratificable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathscr{U}_n = \{\operatorname{int}_{\beta X}(V \cup \beta X \setminus X) \mid V \in \mathscr{V}_n\}$$

Notemos que para cada $V \in \mathscr{V}$ tenemos $V \subseteq \operatorname{int}_{\beta X}(V \cup \beta X \setminus X)$, ya que $V = \operatorname{int}_X(V) = \operatorname{int}_{\beta X}(V \cup \beta X \setminus X) \cap X$ y por tanto $\mathscr{U}_n$ cubre a X. Ahora sean $x \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$. Como βX es Hausdorff existen $U, V \in \tau_X$ ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Como $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un desarrollo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{st}(x, \mathscr{V}) \subseteq U \cap X$ y veamos que $y \notin \operatorname{st}(x, \mathscr{U}_n)$. Dado $W \in \mathscr{V}$ tal que $x \in \mathscr{V}$ tenemos que $V \cap W = \emptyset$ por la elección de n, U y V. De esto se sigue que para todo W_2 abierto que tiene a Y tenemos $V \cap W_2 \nsubseteq W \cup \beta X \setminus X$ pues $V \cap W_2$ es ajeno al primer conjunto y un abierto no vacío no se puede quedar contenido en $\beta X \setminus X$. Esto prueba que $y \notin \operatorname{int}_{\beta X}(W \cup \beta X \setminus X)$ para todo $W \in \mathscr{V}_n$, es decir, $y \notin \operatorname{st}(x, \mathscr{U}_n)$. Concluimos que X es un p-espacio. ■

Como mencionamos antes todo espacio Hausdorff localmente compacto es un p-espacio así que del Teorema 4.21 se sigue de manera inmediata lo siguiente.

Corolario 4.22. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y semiestratificable. Entonces X es de Moore.*

En el Corolario 2.35 obtuvimos un resultado bastante interesante acerca de espacios semiestratificables y las propiedades compacto, numerablemente compacto. Todo espacio semiestratificable Hausdorff con alguna de las dos es metrizable. El Corolario 4.22 nos permite obtener otras condiciones para que un espacio semiestratificable Hausdorff sea metrizable, esta vez en términos de las propiedades Lindelöf y localmente compacto. Con lo cual habremos completado el estudio de los espacios semiestratificables y las propiedades tipo compacidad más básicas para espacios Hausdorff (que a final de cuentas son los que importan al trabajar estas propiedades). Veamos dicho resultado.

Corolario 4.23. *Sea X un espacio semiestratificable, Hausdorff, localmente compacto y Lindelöf. Entonces X es metrizable.*

Demostración. Por el Corolario 4.22 X es de Moore. Entonces X es de Moore y Lindelöf, por el Corolario 4.9 X es metrizable. ■

Para terminar con esta sección atacaremos levemente uno de los problemas más clásicos respecto a espacios de Moore. ¿Es todo espacio de Moore y normal metrizable? Dar una respuesta a esta pregunta resulta ser un problema más de teoría de los conjuntos que de topología, pues para dar una respuesta concreta es necesario asumir axiomas adicionales a los de ZFC, como lo son el axioma de Martin y la hipótesis del continuo. Si suponemos la negación de la hipótesis del continuo junto al axioma de Martin se puede construir un espacio de Moore, normal y hasta separable que no es metrizable. Por otra parte si asumimos hipótesis del continuo todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable. Este último resultado es conocido como Teorema de Jones y será nuestro último resultado de la sección, pero antes veremos un lema que simplificará la prueba.

Lema 4.24. *Supongamos hipótesis del continuo. Es decir, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.Entonces todo espacio de Moore, normal y separable es $\aleph_1$ compacto, es decir, todo subconjunto no numerable tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Supongamos que existe $A \subseteq X$ no numerable sin punto de acumulación y sea D un denso numerable. Como estamos suponiendo hipótesis del continuo podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $|A| = \mathfrak{c}$. Para cada $Z \in \mathcal{P}(A)$ tenemos que Z y $A \setminus Z$ son cerrados ajenos (cerrados porque no tienen puntos de acumulación). Así que por normalidad existe $U(Z) \in \tau_X$ tal que $Z \subseteq U(Z)$ y $\text{cl}_X (U(Z)) \cap A \setminus Z = \emptyset$. Dados $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}(A)$ distintos entonces $U(Z_1) \setminus \text{cl}_X (U(Z_2)) \neq \emptyset$ o $U(Z_2) \setminus \text{cl}_X (U(Z_1)) \neq \emptyset$. Esto pues si no pasa lo primero tendríamos

$$Z_1 \subseteq U(Z_1) \subseteq \text{cl}_X (U(Z_2)) \subseteq X \setminus (A \setminus Z_2) = (X \setminus A) \cup Z_2$$

Y como $Z_1 \cap X \setminus A = \emptyset$ entonces $Z_1 \subseteq Z_2$. Por tanto

$$U(Z_2) \setminus \text{cl}_X (U(Z_1)) \neq \emptyset.$$

Si suponemos adicionalmente que $U(Z_2) \setminus \text{cl}_X (U(Z_1))) = \emptyset$ se sigue que $Z_2 \subseteq Z_1$ lo cual implicaría que $Z_1 = Z_2$, contrario a la elección de Z_1 y Z_2. De esta forma concluimos que

$$U(Z_1) \cap D \neq U(Z_2) \cap D$$

Siempre que $Z_1 \neq Z_2$. Por tanto la función $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(D)$ definida como $\varphi(A) = U(A) \cap D$ es inyectiva, de donde

$$\mathfrak{c} < |\mathcal{P}(A)| = 2^{\mathfrak{c}} \leq |\mathcal{P}(D)| = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}.$$

Lo cual es una contradicción. Por tanto no existe tal conjunto A y X es $\aleph_1$ compacto. ■

Ahora sí podemos ver el Teorema de Jones.

Teorema 4.25. *Supongamos hipótesis del continuo. Entonces todo espacio de Moore, normal y separable es metrizable.*

Demostración. Por el Lema 4.24 tenemos que X es $\aleph_1$ compacto, mientras que por el Corolario 4.6 X es semiestratificable. Entonces por la Proposición 2.26 concluimos que X es Lindelöf y por último el Corolario 4.9 nos da la metrizabilidad. ■

Capítulo 5

g-funciones

El concepto de una g función fue introducido por Heath en [7]. En dicho artículo Heath da las caracterizaciones de un espacio semimétrico y desarrollables en términos de una función $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ que en este trabajo no son más que los Teoremas 3.6 y 4.4, respectivamente. Estos teoremas sirvieron como motivación para dar un nuevo enfoque al estudio de las generalizaciones de los espacios métricos. Este nuevo enfoque resultó ser bastante eficiente pues permitía establecer de forma más natural la relación entre clases de espacios definidas por conceptos que en principio son bastante distintos. Por ejemplo, los espacios de Moore están definidos en términos de una sucesión de cubiertas, mientras que los espacios semiestratificables son espacios en los que todo abierto es F_σ de forma monótona, no se ve una relación entre estas dos clases de espacios a simple vista, sin embargo, si hubieramos definido los espacios de Moore y semiestratificables como en los Teoremas 4.4 y 2.13 se ve claro que todo espacio de Moore es semiestratificable e incluso pareciera que los espacios semiestratificables surgen de debilitar las condiciones del Teorema 4.4, cuando en realidad el origen de estos espacios es totalmente distinto tal como vimos en el primer capítulo.

El uso del término «g-función» se debe más que nada a que Heath usó la letra g para denotar a las funciones en su artículo. Dicho esto las g-funciones son más una notación común que un concepto matemático establecido, razón por la cual su definición puede variar de un artículo a otro pero nosotros adoptaremos la siguiente.

Definición 5.1. *Sea X un espacio. Decimos que $g : \mathbb{N} \times X \to \tau_X$ es una g-función para X si cumple lo siguiente:*

- *Para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n, x)$.*
- *Para todos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ $g(n + 1, x) \subseteq g(n, x)$.*

Detengamos un momento a clarificar la notación de esta sección. A partir de este momento prescindiremos un poco del formalismo en las secciones entre resultados y cada que coloquemos expresiones como x, x_n, y_n haremos referencia a un punto en el espacio y a los n-ésimos términos de las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Sucesiones que también estarán contenidas en el espacio X.

Es claro que nuestra definición de g-función no dice absolutamente nada acerca de la topología de X por si misma. Podríamos definir $g(n, x) = X$ y esto sería una g-función para cualquier espacio topológico. Entonces la importancia de las g-funciones viene de agregar ciertas propiedades menos triviales que ahora sí nos den información acerca de la topología. Un buen comienzo viene de considerar la siguiente condición:

(Fc) Para todo $x \in X$ la familia $\{g(n, x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base local para x.

Como el nombre sugiere, esta propiedad no es más que decir que el espacio X es primero numerable. Más aún, se vale el recíproco, todo espacio primero numerable tiene una g-función con la propiedad (Fc).

Proposición 5.2. *Sea X un espacio. X es primero numerable si y solo si tiene una g-función que satisface (Fc).*

Demostración. Si X tiene una g-función que satisface (Fc) entonces trivialmente es primero numerable.
Supongamos ahora que X es primero numerable. Para cada $x \in X$ sea $\{U_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base local numerable. Definamos

$$g(n, x) = \bigcap_{m=1}^{n} U_m^x.$$

Entonces g satisface lo buscado. ■

Con la Proposición 5.2 ya obtuvimos información acerca de la topología de un espacio en términos de la existencia de una g-función que cumple cierta propiedad. Pero no nos detengamos aquí. Como sabemos por el Teorema 2.13, otra condición interesante a considerar es la siguiente:

(Ss) Si para toda $n \in \mathbb{N}$ $x \in g(n, x_n)$ entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

De tal forma que podemos reformular el Teorema 2.13 como sigue:

Teorema 5.3. *Sea X un espacio. X es semiestratificable si y solo si tiene una g-función que satisface (Ss).*

La mayoría de las propiedades que agregaremos a una g función estarán dadas en términos de pertenencia, contención y convergencia, por lo cual si tenemos dos g-funciones que satisfacen propiedades distintas entonces el espacio tiene una tercera que cumple simultáneamente las propiedades de las primeras. Por ejemplo, si f, h son g-funciones que satisfacen (Fc) y (Ss), respectivamente, entonces podemos definir g como

$$g(x, n) = f(n, x) \cap h(n, x)$$

y resulta que g es una g-función que satisface (Fc) y (Ss). Esto no es más que la prueba del Teorema 3.11, por lo que en realidad probamos lo siguiente.

Proposición 5.4. *Sea X un espacio. X tiene una g-función que satisface (Fc) y (Ss) si y solo si tiene g-funciones que satisfacen las condiciones por separado.*

Podemos hacer algo análogo a la reformulación del Teorema 2.13 para el Teorema 3.6 para obtener.

Teorema 5.5. *Sea X un espacio. X es semimetrizable si y solo si tiene una g-función que satisface (Fc) y (Ss).*

Lo cual se traduce en que un espacio es semimetrizable si y solo si es primero numerable y semiestratificable usando las Proposiciones 5.2 y 5.3 junto al Teorema 5.4, resultado que no es más que nuestro Teorema 3.11.

Teoremas como el 5.5 son otra de las razones por las cuales se estudia a las g-funciones, pues permiten «factorizar» una propiedad topológica en términos de condiciones para una g-función, condiciones que además pueden resultar en propiedades topologícas interesantes por si mismas.

Siguiendo con la reinterpretación de nuestro trabajo, ahora consideremos la siguiente condición para una g-función.

(Dev) Si para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\{x, x_n\} \subseteq g(n, y_n)$ entonces $x_n \to y_n$.

Notemos lo siguiente. Si g es una g-función que satisface (Dev), entonces satisface (Fc). Para ver esto tomemos $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y supongamos que para toda $n \in \mathbb{N}$ $g(n, x) \nsubseteq U$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in g(n, x) \setminus U$ y entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ $\{x, x_n\} \subseteq g(n, x)$. Como g cumple (Dev), concluimos que $x_n \to x$, pero como $X \setminus U$ es cerrado esto implica que $x \in X \setminus U$, lo cual es imposible.

Con esto último en mente podemos reescribir el Teorema 4.4 como.

Teorema 5.6. *Sea X un espacio regular. X es de Moore si y solo si tiene una g-función que satisface (Dev).*

La razón de no enunciarlo así desde el principio es simplemente para mantener una relación clara entre los Teoremas 2.13, 3.6 y 4.4. Esta es, cada uno de ellos está escrito en términos de una función que satisface tres condiciones, de tal forma que las condiciones del Teorema 2.13 son más débiles que sus contrapartes del Teorema 2.13 y estas a su vez son más débiles que las correspondientes en el Teorema 4.4.

Los espacios estratificables dieron inicio a esta tesis y con ellos mismos cerraremos, dando su propia caracterización en términos de una g-función.

Proposición 5.7. *Sea X un espacio. X es estratificable si y solo si tiene una g-función que cumple*

(St) Para todos $x \in X$ y $U \in \tau_X$ tales que $x \in U$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin cl_X\left(\bigcup\{g(n, y) \mid y \in X \setminus U\}\right)$.

Demostración. Supongamos primero que X es estratificable con una estratificación S creciente.

Definamos $g(n, x)$ como

$$g(n, x) = X \setminus \mathrm{cl}_X\left(S(X \setminus \{x\}, n)\right).$$

Comencemos viendo que g es una g-función. Como S es estratificación para X tenemos que $\mathrm{cl}_X\left(S(n, X \setminus \{x\})\right) \subseteq X \setminus \{x\}$ y por tanto $x \in g(n, x)$. Por otra parte si $y \neq x$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \in S(n, X \setminus \{x\})$ y por tanto $y \notin g(n,x)$. De esto concluimos que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n,x) = \{x\}.$$

Y $g(n+1,x) \subseteq g(n,x)$ porque pedimos S creciente. Por tanto g es una g-función.

Solo nos queda probar que g satisface (St). Sean $x \in U \in \tau_X$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in S(n,U)$, entonces para todo $y \in X \setminus U$ tenemos $U \subseteq X \setminus \{y\}$ y como S es estratificación entonces $S(n,U) \subseteq S(n, X \setminus \{y\})$. Por tanto

$$g(n,y) \subseteq X \setminus \mathrm{cl}_X\left(S(n,U)\right).$$

Lo que nos dice que $S(n,U) \cap \bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\} = \emptyset$ y por tanto

$$x \notin \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\}\right)$$

que era lo buscado.

Ahora supongamos que X tiene una función que satisface (St).

Para cada $U \in \tau_X$ definamos

$$S(n,U) = X \setminus \mathrm{cl}_X\left(\bigcup g(n,y) \mid y \in X \setminus U\}\right).$$

Como g satisface (St), para cada $x \in U$ tenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \mathrm{cl}_X\left(\bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\}\right)$ y por tanto $x \in S(n,U)$. Concluimos que

$$U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(n,U).$$

Por otra parte tenemos $X \setminus U \subseteq \bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\}$ y por tanto $X \setminus \bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\} \subseteq U$. De esto obtenemos

$$\mathrm{int}_X\left(X \setminus \bigcup\{g(n,y) \mid y \in X \setminus U\}\right) \subseteq U.$$

Equivalentemente

$$\mathrm{cl}_X\left(S(n,U)\right) \subseteq U.$$

Pues $X \setminus \mathrm{cl}_X(A) = \mathrm{int}_X(X \setminus A)$ para todo $A \subseteq X$. Concluimos que

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S(n, U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{cl}_X(S(n, U)).$$

Por último, sea $V \in \tau_X$ tal que $U \subseteq V$. Entonces

$$\bigcup \{g(n, y) \mid y \in X \setminus V\} \subseteq \bigcup \{g(n, y) \mid y \in X \setminus U\}.$$

Y de esto se sigue $S(n, U) \subseteq S(n, V)$. Por tanto S es una estratificación para X.

$\blacksquare$

Bibliografía

[1] Borges, Carlos: *On stratifiable spaces.* Pacific Journal of Mathematics, 17(1):1–16, 1966.

[2] Ceder, Jack G: *Some generalizations of metric spaces.* Pacific J. Math, 11(1):105–125, 1961.

[3] Creede, Geoffrey: *Concerning semi-stratifiable spaces.* Pacific Journal of Mathematics, 32(1):47–54, 1970.

[4] Engelking, Ryszard: *General topology.* 1989.

[5] Gruenhage, Gary: *Generalized metric spaces.* En *Handbook of set-theoretic topology*, páginas 423–501. Elsevier, 1984.

[6] Heath, Robert: *A regular semi-metric space for which there is no semi-metric under which all spheres are open.* Proceedings of the American Mathematical Society, 12:810–811, 1961.

[7] Heath, Robert: *Arc-wise connectedness in semi-metric spaces.* Pacific Journal of Mathematics, 12(4):1301–1319, 1962.

[8] Heath, RW, DJ Lutzer y PL Zenor: *Monotonically normal spaces.* Transactions of the american mathematical society, 178:481–493, 1973.

[9] Hodel, RE: *A history of generalized metrizable spaces.* En *Handbook of the History of General Topology*, páginas 541–576. Springer, 1998.

[10] Lutzer, David J: *Semimetrizable and stratifiable spaces.* General Topology and Its Applications, 1(1):43–48, 1971.

[11] Min Gao, Zhi y Yoshikazu Yasui: *Some remarks on g-functions.* Topology Proceedings, Mayo 2019.

[12] Nagata, J I: *Modern general topology*, volumen 33. Elsevier, 1985.

[13] Smirnov, Ju. M.: *On metrization of topological spaces.* Uspekhi Matem. Nauk, 6(6):100–111, 1951.