



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

## FACULTAD DE CIENCIAS

Semimicroscopic Algebraic Cluster Model (SACM).  
Aplicado al  $^{12}\text{C}$  y  $^{32}\text{S}$  como configuraciones de  
partículas  $\alpha$  y  $^{16}\text{O}$  respectivamente.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Físico

PRESENTA:

Leonardo Javier Chávez Núñez

TUTOR

Dr. Peter Otto Hess Bechstedt

Ciudad de México, 2019





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



1. Datos del alumno

Chávez

Núñez

Leonardo Javier

55 2656 3636

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

411000662

2. Datos Del tutor

Dr.

Peter Otto

Hess

Bechstedt

3. Datos Del Sinodal 1

Dr.

Roelof

Bijker

4. Datos Del Sinodal 2

Dr.

Luis Armando

Acosta

Sánchez

5. Datos Del Suplente 1

Dr.

Víctor Manuel

Velázquez

Aguilar

6. Datos Del Suplente 2

Dra.

Paulina

Amador

Valenzuela

7. Datos del trabajo escrito

Semimicroscopic Algebraic Cluster Model (SACM). Aplicado al  $^{12}\text{C}$  y  $^{32}\text{S}$  como configuraciones de partículas  $\alpha$  y  $^{16}\text{O}$  respectivamente.

47 P

2019



### *Agradecimientos*

A mis padres, quienes desde pequeño me enseñaron el amor por el conocimiento y el valor del trabajo duro. Y a mi hermano.

A Nidiiz, mi compañera y amiga durante gran parte de este proyecto, lo único constante en mi vida. Te amo, bonita.

Al profesor Peter Hess, quien me ha acogido como parte de su equipo, y me ha dado impulso e inspiración para seguir una carrera como físico. De verdad, muchas gracias.

A los cuatro fantásticos: Ito, Acapulco, y particularmente a Daniel y Julián, con quienes emprendimos este viaje y también fueron mi familia.

Fay, Chino y Manfredo, los quiero gorditos.

Lore, gracias por ser mi amiga, aún a la distancia.

A a todos y cada uno de mis compañeros de la Facultad de Ciencias, en mis múltiples etapas, desde el equipo de primer semestre, donde quiera que estén, hasta el grupo del más reciente propedéutico. Con quienes seguramente compartí más lágrimas que risas, gracias, muchachos.

Al señor Juan Murrieta, la señora Carmen, y Montse quienes me han acogido en su familia.

No puedo dejar de hacer mención de los proyectos DGAPA-PAPIIT IN100418 y CONACYT No. 251817.

Gracias a todos.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>1. Semimicroscopic Algebraic Cluster Model: SACM</b>	<b>7</b>
1.1. Modelo del Vibrón . . . . .	7
1.2. Aproximación Algebraica Semimicroscópica . . . . .	9
1.2.1. Estructura de Grupo . . . . .	10
1.2.2. El Principio de Exclusión de Pauli en el SACM . . . . .	11
1.2.3. El Hamiltoniano . . . . .	13
<b>2. <math>^{12}C</math> y <math>^{32}S</math></b>	<b>15</b>
2.1. Carbono - $^{12}C$ - . . . . .	15
2.2. Azufre - $^{32}S$ - . . . . .	20
<b>3. Aplicación del SACM en <math>^{12}C</math> y <math>^{32}S</math></b>	<b>23</b>
3.1. $^{12}C$ dentro del SACM . . . . .	23
3.1.1. Introducción . . . . .	24
3.1.2. Configuración geométrica . . . . .	25
3.1.3. Discusión . . . . .	26
3.2. $^{32}S$ dentro del SACM . . . . .	29
3.2.1. Forbiddenness . . . . .	30
3.2.2. Discusión . . . . .	32



<i>ÍNDICE GENERAL</i>	2
<b>4. Discusión general y Conclusiones</b>	<b>41</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	44

# Introducción

A lo largo de nuestra vida hemos observado como es que la materia modifica su estructura y su comportamiento de acuerdo a las condiciones de su entorno. Es así que cuando en un sólido la temperatura del sistema aumenta, eventualmente las redes cristalinas que lo conforman se fragmentan dando lugar a la fase líquida. Si las condiciones externas siguen modificándose, habrá de nuevo una transición, esta vez a una fase gaseosa.

No hay razones para asegurar que la materia detiene este comportamiento a escalas microscópicas, y si bien, conforme la escala se reduce, las implicaciones cuánticas van tomando mayor importancia. Podemos considerar que al haber modificaciones en la energía de un sistema, en nuestro caso, núcleos atómicos, sus componentes internos, los nucleones, encuentren distintas formas de organización.

Ante esta perspectiva y dado que las partículas  $\alpha$  fueron observadas, a través de los fenómenos radiactivos, con anterioridad al descubrimiento del neutrón, Gamow[1] y sus contemporáneos tuvieron la idea de describir al núcleo como un sistema conformado por partículas  $\alpha$ . Tiempo después debido al descubrimiento del neutrón por Chadwick, la popularidad de esta idea decayó.

Paralelo a esto, cuando observamos la relación que existe entre la energía de amarre por nucleón ( $E_B/A$ ), y el número de masa, considerando el isóbaro más estable en cada caso (fig. 1), el valor máximo aparece alrededor de 8.5 MeV, para  $A \approx 56$ , usualmente asociado al isótopo  $^{56}Fe$  [2]. A partir de ahí  $E_B/A$  decrece paulatinamente conforme  $A$  crece, debido a la repulsión coulombiana. Observando en la dirección opuesta podemos ver como  $E_B/A$  se incrementa desde uno hasta llegar al máximo. Más interesante resulta observar que para números de masa  $A = 4n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  el valor de la energía de amarre por nucleón es

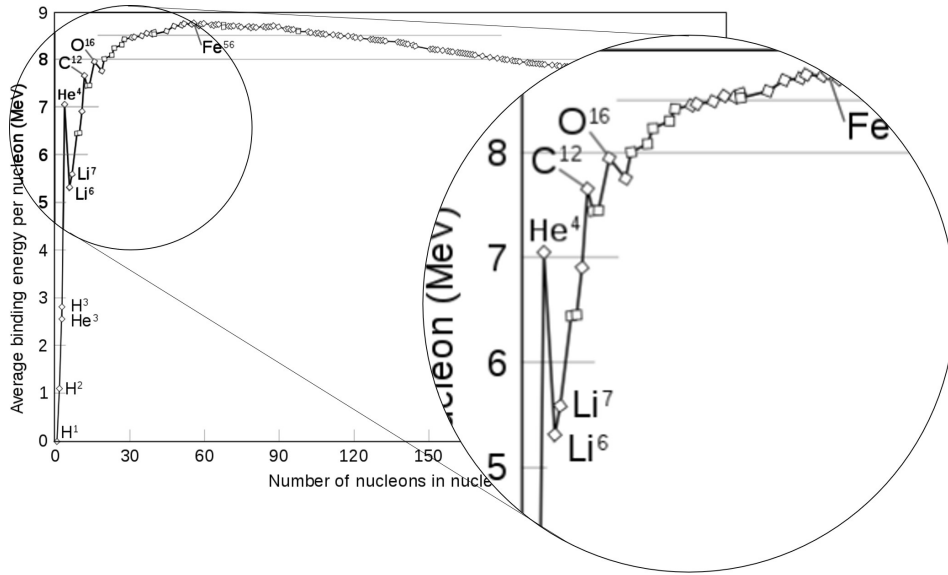


Figura 1: Energía de amarre promedio por nucleón, como función del número de masa A para el isóbaro más estable[3].

notablemente mayor que para sus vecinos inmediatos en los picos mostrados en la fig 1.

Estos núcleos, ( ${}^4\text{He}$ ,  ${}^8\text{Be}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ , etc.) cumplen que  $Z=N$ , sumado a lo dicho en el párrafo anterior, sugiere que a los nucleones les gusta formar cúmulos de partículas  $\alpha$  dentro de los núcleos.

No son pocos los modelos que han surgido para describir sistemas nucleares conformados por cúmulos, especialmente donde estos cúmulos son partículas  $\alpha$ . El modelo que nos concierne en este trabajo es el Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos (Semimicroscopic Algebraic Cluster Model, SACM). Y los sistemas que buscamos describir son los núcleos  ${}^{12}\text{C}$  y  ${}^{32}\text{S}$ .

En el primer capítulo se ilustrarán dos modelos algebraicos, el modelo de vibrones y, con mayor detalle, el SACM. La importancia del carbono y del azufre en la ciencia actual, así como los resultados obtenidos previamente en la descripción de sus isótopos más abundantes y estables se exponen en el segundo capítulo.

Para el capítulo 3 aplicaremos el modelo sobre los núcleos de  ${}^{12}\text{C}$  y  ${}^{32}\text{S}$ , se analizarán las consecuencias de considerar la estructura interna de los cúmulos, reflejado en el Principio de

Exclusión de Pauli, o de no hacerlo considerando solo la naturaleza bosónica de los cúmulos, partículas  $\alpha$  y  $^{16}\text{O}$  para cada caso, respectivamente.

En el caso del  $^{32}\text{S}$  se introducirá el concepto de forbiddenness, cuya consideración es necesaria para la descripción de algunos sistemas donde los cúmulos tienen un número de masa  $A > 12$ . La idea principal alrededor de la forbiddenness es dejar de considerar los cúmulos en su estado base, y permitir que al menos uno se encuentre excitado. De este modo, el número de cuantas correspondientes al movimiento relativo de los cúmulos puede reducirse.

En este caso el sistema  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$  pasa a ser  $^{16}\text{O}^* + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$  donde el  $^{16}\text{O}^*$  significa que se encuentra en un estado excitado. Logrando que por primera vez el modelo de cúmulos pueda describir los estados a bajas energías del  $^{32}\text{S}$ .

En el capítulo final se incluirán las conclusiones y se proponen extensiones al modelo,  $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha = 4\alpha \rightarrow ^{16}\text{O}$ ,  $5\alpha \rightarrow ^{20}\text{Ne}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{48}\text{Cr}$ , etc.



# Capítulo 1

## Semimicroscopic Algebraic Cluster

### Model: SACM

#### 1.1. Modelo del Vibrón

A principios de los años 1980 fue descrito el modelo de vibrones [4], este es un modelo fenomenológico que puede ser considerado como un modelo simple, toma en cuenta el movimiento relativo entre dos cúmulos ignorando su estructura interna y el Principio de exclusión de Pauli [5].

En este, el espectro del movimiento colectivo es generado por la interacción de un número finito ( $N$ ) de bosones, dispuestos en estados de una sola partícula, los cuales contienen un momento angular y paridad  $l^\pi = 0^+$  y  $1^-$ , llamados bosones  $\sigma$  y bosones  $\pi$ , respectivamente. A partir de los operadores de creación y aniquilación  $\hat{\sigma}, \hat{\sigma}^\dagger, \hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\mu^\dagger$  ( $\mu = -1, 0, +1$ ) es posible generar una estructura algebraica  $U(4)$ .

Los estados base del modelo de la misma manera que sus números cuánticos son obtenidos a través de dos cadenas de grupo, ambas iniciando con el grupo  $U(4)$  y terminando con el grupo asociado al álgebra del momento angular  $O(3)$ .

$$U(4) \supset U(3) \supset O(3),$$
$$|N_t, n_\pi, L\rangle. \tag{1.1}$$

$$\begin{array}{ccccc}
U(4) & \supset & O(4) & \supset & O(3), \\
|N_t, & & \omega, & & L).
\end{array} \tag{1.2}$$

Donde  $N_t$  es el número total de bosones,  $L$  corresponde al momento angular,  $n_\pi$  es el número de bosones  $\pi$ , y  $\omega$  corresponde al número cuántico vibracional.

Los generadores del modelo de vibrones (VM) pueden obtenerse como una expansión en serie en términos de los productos de los operadores de creación y aniquilación; ya que el momento angular es un buen número cuántico dentro del modelo, éstos son acoplados a tensores  $O(3)$ ,

$$B_m^{(l)}(l_1, l_2) = [b_{l_1}^\dagger \times \tilde{b}_{l_2}]_m^{(l)} = \sum_{m_1, m_2} \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l m \rangle b_{l_1 m_1}^\dagger \tilde{b}_{l_2 m_2}, \tag{1.3}$$

Los operadores  $b^\dagger$  corresponden a  $\sigma^\dagger$  o  $\pi_\mu^\dagger$ , mientras que  $\tilde{b}_{lm}$  denota un tensor esférico que está asociado al operador de aniquilación  $\tilde{b}_{lm}$  como:

$$\tilde{b}_{lm} = (-1)^{l-m} b_{l-m}. \tag{1.4}$$

Por lo general, la expansión termina con interacciones de segundo orden.

La simetría dinámica  $O(4)$  (cadena 1.2) describe un sistema que consiste en un dipolo rígido en su estado de equilibrio, es de hecho llamado *límite de la molécula rígida*. Por otro lado, la simetría  $U(3)$  (cadena 1.1) describe el movimiento vibracional-rotacional del sistema en equilibrio dentro de un marco esférico. Es llamado *límite de la molécula suave* y es el que más ha hallado uso dentro de la física nuclear.

El grupo  $U(3)$  corresponde a la descripción del oscilador armónico tridimensional. Dado esto, cuando usamos la simetría de la cadena (1.1) llegamos a la descripción del movimiento relativo de los cúmulos en términos de un oscilador armónico, donde cada bosón  $\pi$  corresponde a oscilaciones entre los cúmulos, es decir, la descripción del VM implica que los grados internos de libertad de los dos cúmulos se encuentran “congelados” y solo el movimiento relativo entre ellos es considerado. Por otro lado, estas oscilaciones son equivalentes a las excitaciones en el modelo de capas (Shell Model, SM)[6].

## 1.2. Aproximación Algebraica Semimicroscópica

El modelo de vibrones describe un sistema en términos de dos (o más) cúmulos y sus movimientos relativos. Sin embargo, se encuentra con una severa desventaja cuando el sistema que buscamos describir se está conformado por núcleos con estructura interna, compuestos por fermiones. Tal desventaja tiene su origen en que el modelo concebido en su forma original ignora por completo el principio de exclusión de Pauli (PEP), fundamental en el estudio de cualquier fenómeno cuántico.

Tal omisión se corrige parcialmente a través de la *condición de Wildermuth* (Ecuación 1.5). La cual permite deshacernos de todo un conjunto de estados prohibidos, con cuantas de oscilación relativa determinadas, sin embargo, aún mantiene estados prohibidos por el PEP.

Para corregir esta dificultad se ha presentado un modelo semimicroscópico (SACM)[7] en el cual, la estructura interna de los cúmulos es descrita a partir del modelo de capas y su representación en términos del grupo  $SU(3)$ , mientras que el movimiento relativo entre los cúmulos es descrito como el de un oscilador armónico.

El hecho de que ambas configuraciones estén construidas en términos de un oscilador armónico permite que sus Hamiltonianos puedan transformarse de una configuración a otra con la transformación de coordenadas adecuada. Esto nos permite construir la antisimetrización apropiada a partir de ambos modelos, además de encontrar diversas conexiones cualitativas [8].

Para el caso de sistemas de  $k$  cúmulos:

- *Los bosones  $\pi$ .* En el modelo de vibrones (cadena 1.1),  $n_\pi$  se refiere al número de cuantas contenidas en el movimiento relativo. Debido a la equivalencia entre los Hamiltonianos, las cuantas de excitación del modelo de cúmulos corresponde precisamente a las cuantas de excitación en el modelo de capas, es decir, a la excitación de los nucleones dentro del SM.
- *La condición del Wildermuth.* Esta se puede expresar en términos del número de cuantas contenidas en los estados base de cada cúmulo.

$$n_\pi \geq n_{\pi_0} = N - \sum_{i=1}^k N_{C_i} \quad (1.5)$$



donde  $n_\pi$  corresponde al movimiento relativo total entre los cúmulos (pudiendo haber  $k$  coordenadas relativas de movimiento, cada una con un correspondiente  $n_k$  tal que  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n_\pi$ ),  $N_{C_i}$  es el número de cuantas contenidas por el cúmulo  $i$  en su estado base dentro del SM, y  $N$  es el número de cuantas en el estado base del núcleo que se busca construir dentro del mismo SM.

Dado que consideramos ambos cúmulos en su estado base, la diferencia de cuantas entre la suma de ambos y el sistema completo en su estado base, debe de provenir del movimiento relativo entre ellos, por lo tanto nos permite excluir todo un conjunto de estados con  $n_\pi < n_{\pi_0}$  no permitidos por el principio de exclusión.

- *Equivalencia entre distintas clusterizaciones.* En caso de que en configuraciones compuestas por dos o más cúmulos aparezcan diferentes estados con números cuánticos equivalentes a un determinado estado del modelo de capas, entonces todos estos estados resultan equivalentes entre sí. Por ejemplo, el estado base del  $^{16}\text{O}$  puede ser considerado un estado esférico dentro del modelo de capas, tanto como un sistema de cúmulos  $^{12}\text{C} + \alpha$ ,  $^8\text{Be} + ^8\text{Be}$  ó  $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$  [9].

### 1.2.1. Estructura de Grupo

Si deseamos describir un sistema de  $k$  cúmulos, la simetría correspondiente a la estructura interna del cúmulo  $i$  será la del grupo  $U_{C_i}^{ST}(4) \otimes U_{C_i}(3)$ , donde el primer grupo corresponde a la interacción espín- isoespín, y la segunda a la parte espacial.

Dentro de este mismo sistema existen  $k - 1$  movimientos relativos independientes, cada uno descrito por  $U_{R_j}(4)$ . De ahí entonces que la estructura de grupo del modelo sea [7]

$$U_{C_1}^{ST}(4) \otimes U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}^{ST}(4) \otimes U_{C_2}(3) \otimes \dots \otimes U_{C_k}^{ST}(4) \otimes U_{C_k}(3) \\ \otimes U_{R_1}(4) \otimes U_{R_2}(4) \dots \otimes U_{R_{k-1}}(4) \quad (1.6)$$

Si consideramos el caso más simple en el que solo se tienen dos cúmulos, y además ambos tienen espín e isoespín cero, es decir son núcleos par-par, obtendremos la estructura

$$\begin{aligned}
 & U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}(3) \otimes U_R(4) \quad \supset \quad U_{C_1}(3) \otimes U_{C_2}(3) \otimes U_R(3) \\
 & \left[ n_1^{C_1}, n_2^{C_1}, n_3^{C_1} \right], \left[ n_1^{C_2}, n_2^{C_2}, n_3^{C_2} \right], [N, 0, 0, 0], \quad [n_\pi, 0, 0], \\
 \supset & \quad SU_{C_1}(3) \otimes SU_{C_2}(3) \otimes SU_R(3) \quad \supset \quad SU_C(3) \otimes SU_R(3) \quad \supset \quad SU(3) \quad \supset \quad O(3) \\
 & (\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}), (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}), (n_\pi, 0), \quad (\lambda_C, \mu_C), (n_\pi, 0), \quad (\lambda, \mu), \quad K_L, L, \quad (1.7)
 \end{aligned}$$

Donde  $U_{C_i}(3)$  ( $[n_1^{C_i}, n_2^{C_i}, n_3^{C_i}]$ ) corresponde a la representación irreducible (irrep) de los estados base de ambos cúmulos dentro del modelo de capas,  $U_R(4)$  ( $[N, 0, 0, 0]$ ) al movimiento relativo. Todo esto es llevado a su representación en términos de los grupos  $SU_{C_i}(3)$  y  $SU_R(3)$  ( $(\lambda_{C_i}, \mu_{C_i}), (n_\pi, 0)$ ) respectivamente.

A partir del producto directo  $(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}) \otimes (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2})$  se construye la representación del grupo  $SU_C(3)$

$$(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}) \otimes (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}) = \sum_{\lambda_C, \mu_C} m_{(\lambda_C, \mu_C)}(\lambda_C, \mu_C). \quad (1.8)$$

El término  $m_{(\lambda_C, \mu_C)}$  corresponde a la multiplicidad de cada elemento  $(\lambda_C, \mu_C)$  dentro del espacio.

Posteriormente al espacio construido por los cúmulos en el producto de la ecuación 1.8 debemos añadirle el movimiento relativo entre ellos, lo cual es llevado a cabo mediante el producto directo del mismo grupo multiplicado por la representación  $(n_\pi, 0)$  correspondiente al  $SU_R(3)$ , recordemos que este término contiene las cuantas de excitación dentro del sistema.

$$(\lambda_C, \mu_C) \otimes (n_\pi, 0) = \sum_{\lambda, \mu} m_{(\lambda, \mu)}(\lambda, \mu). \quad (1.9)$$

### 1.2.2. El Principio de Exclusión de Pauli en el SACM

Hasta este punto, el modelo solo ha incluido parcialmente el Principio de Exclusión, a través de la condición de Wildermuth, además de eso se ha construido una representación del modelo en términos de un grupo  $SU(3)$ .

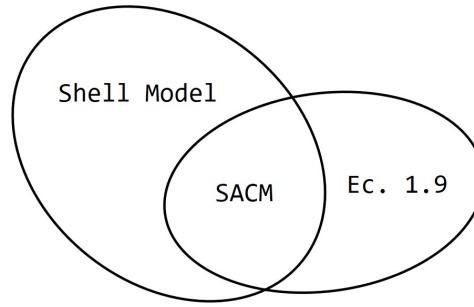


Figura 1.1: El espacio correspondiente al SACM es la intersección del espacio construido en la ecuación 1.9 y el espacio del SM.

Por otro lado, el modelo de capas está construido, en primer lugar, a partir de un potencial tipo oscilador armónico, mismo que se puede llevar con relativa facilidad a las representaciones  $U(n)$  y  $SU(n)$ , y en segundo lugar con base en el Principio de Exclusión de Pauli.

Esto puede resumirse en dos sentencias:

- Los estados contenidos en el modelo de capas pueden ser expresados en la forma  $(\lambda, \mu)$  del  $SU(3)$  y
- Estos estados son permitidos por el principio de exclusión.

Para incluir el principio de exclusión en el modelo buscamos la intersección de estos dos espacios. Es decir, del espacio construido en la ecuación 1.9 solo se conservan aquellos cuya representación en  $SU(3)$  coincida con la representación del modelo de capas. Esto garantizará que sean permitidos por el PEP y serán aquellos que pertenezcan al Modelo Semimicroscópico Algebraico de Cúmulos, SACM (figura 1.1)[10].

Los estados contenidos dentro del SACM contendrán los números cuánticos

$$|(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}), (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}), n_\pi, (\lambda_C, \mu_C), (\lambda, \mu), K_L, L\rangle . \quad (1.10)$$

derivados de la cadena 1.7.

El número  $K$  así como el momento angular  $L$  para cada representación  $(\lambda, \mu)$  se deducen de la siguiente manera. El número  $K$  nos sirve como instrumento para llevar la cuenta de  $L$  [11]. En general, dos estados donde  $K_1 \neq K_2$  son no ortogonales.

$$K = K_0 = \min(\lambda, \mu), K_0 - 2, K_0 - 4, \dots, 1 \text{ ó } 0$$

$$L = \begin{cases} L_0 = \max(\lambda, \mu), L_0 - 2, L_0 - 4, \dots, 1 \text{ ó } 0 & \text{si } K = 0 \\ K, K + 1, K + 2, \dots, K + \min(\lambda, \mu) & \text{si } K \neq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

### 1.2.3. El Hamiltoniano

Dentro del SACM se emplea un Hamiltoniano expresado de la siguiente forma, en la que se incluyen los operadores de Casimir de  $SU(3)$ .

$$H = \hbar\omega n_\pi + (a_2 - a_5 \Delta n_\pi) C_2(\lambda, \mu) + (a_3 + a_L (-1)^L + a_{L n_\pi} \Delta n_\pi) \hat{L}^2 + t_2 \hat{K}^2$$

$$+ t_1 C_3(\lambda, \mu) + t_3 [C_2(\lambda, \mu)]^2 + b_1 [(\sigma^\dagger)^2 - (\pi^\dagger \cdot \pi^\dagger)] \cdot [h.c.]. \quad (1.12)$$

Este es una versión simplificada de un Hamiltoniano más completo, sin embargo para propósitos del trabajo es suficiente.

El primer término es el dominio del oscilador armónico, y el valor de  $\hbar\omega$  está dado por  $\hbar\omega = 45A^{-1/3} - 25A^{-2/3}$  [13],  $C_2(\lambda, \mu)$  es el operador de Casimir de  $SU(3)$  de segundo orden, cuyo eigenvalor es:

$$C_2(\lambda, \mu) = (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) \quad (1.13)$$

así como  $C_3(\lambda, \mu)$  es el operador de Casimir de tercer orden

$$C_3(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu)(2\lambda + \mu + 3)(\lambda + 2\mu + 3) \quad (1.14)$$

y  $\Delta n_\pi = n_\pi - n_{\pi_0}$ .

El segundo término corresponde a la interacción cuadrupolo-cuadrupolo, el tercer y cuarto término son útiles al hacer correcciones, el último término de la primer línea rompe la degeneración del momento angular para estados con una misma representación  $SU(3)$ . El término que contiene al momento angular describe los cambios en el momento de inercia para estados muy excitados, y con cambios de espín. Todos estos se encuentran dentro del límite  $SU(3)$  lo

que permite que el Hamiltoniano tenga soluciones analíticas, cuyos valores propios se obtienen al sustituir los eigenvalores de cada operador.

El término final, un generador del grupo  $O(4)$  combina representaciones irreducibles (irreps) de  $SU(3)$ , saliendo de los límites de este último.

# Capítulo 2

## $^{12}\text{C}$ y $^{13}\text{C}$

### 2.1. Carbono - $^{12}\text{C}$ -

Se han observado alrededor de quince isótopos de carbono, dos estables,  $^{12}\text{C}$  y  $^{13}\text{C}$  los cuales conforman más del 99.9% del total, (alrededor del 98.9% corresponde a  $^{12}\text{C}$ ). En la naturaleza solo se encuentra un isótopo inestable,  $^{14}\text{C}$ , de carácter cosmogénico, a partir de la reacción  $^{14}\text{N}(n,p)^{14}\text{C}$  y que corresponde a menos del 0.1% de la composición total [14].

En esta sección [15] se pretende dar una perspectiva general sobre la investigación teórica referente a la estructura de cúmulos, particularmente del isótopo  $^{12}\text{C}$ .

La síntesis de  $^{12}\text{C}$  ocurre a través de lo que se conoce como proceso de triple  $\alpha$  [16, 17]. Este proceso ocurre mediante el consumo de helio en estrellas, cuya temperatura es de 2-3 GK[18]. Las primeras dos partículas  $\alpha$  se fusionan para formar  $^8\text{Be}$ , isótopo inestable que en breve ( $10^{-16}\text{s}$ ) vuelve a dividirse en dos  $\alpha$ -s. El segundo paso, consiste en la captura de una tercer partícula  $\alpha$ , para construir un  $^{12}\text{C}$  con una excitación cercana a los 7.5 MeV, seguido de una emisión electromagnética decayendo en el estado base. Hoyle predijo la existencia de un estado en 7.68 MeV [19], y logró observarlo al medir la reacción  $^{14}\text{N}(d,\alpha)^{12}\text{C}$  usando un espectrómetro de alta resolución [20]. Experimentos subsecuentes refinaron la medición en 7.654 MeV e indican una mayor probabilidad de tener espín y paridad  $J^\pi = 0^+$  [21][22].

La existencia del estado de Hoyle, facilita el proceso de captura  $\alpha$  por un factor de 10-100 millones [19]. Se puede pensar que éste estado esté conformado por una estructura particular,

que le permita ubicarse cerca, apenas por encima, del umbral de decaimiento  $\alpha$  del  $^{12}\text{C}$ , 7.367 MeV.

A finales de los años sesenta, Ikeda y sus colaboradores esbozaron la idea de estados conformados por cúmulos [23], esencialmente, dice que cerca de los umbrales de desintegración es posible que los núcleos modifiquen su estructura. Digamos que el estado fundamental de  $^8\text{Be}$ , que decae en dos partículas  $\alpha$  en 92 keV, podría tener una estructura de cúmulos  $\alpha$  bien definida .

Por otro lado, en el umbral de decaimiento de  $^8\text{Be}+\alpha$  (o su equivalente  $\alpha+\alpha+\alpha$ ), permitiría que la energía de excitación interna funja como energía de enlace entre los cúmulos, tal como se muestra en los diagramas de Ikeda [23], en los que se describen estados conformados por cúmulos cerca de los umbrales de desintegración.

Todo esto abre la posibilidad de que, cerca de la región del estado de Hoyle, existan las condiciones óptimas para la configuración del  $^{12}\text{C}$  como una subestructura de 3  $\alpha$  [19].

El modelo de capas (SM) reproduce bastante bien las energías del estado base  $0^+$ , así como del primer estado excitado  $2^+$  (4.44 MeV) [24], sin embargo, falla al tratar de describir el segundo estado  $0_2^+$ . En tiempos recientes [25] la energía del estado Hoyle ( $0_2^+$ ) ha sido reproducida en términos del SM, considerando estados excitados, con cuantas de oscilación  $n$  altas. Esto puede explicar por que ha sido tan complicado reproducirlo.

Utilizando el modelo de Manerau-Brink [26, 27, 28, 29] o Alpha Cluster Model ( $\alpha$ -CM) se han encontrado dos estructuras geométricas. En primer lugar un triángulo equilátero, históricamente asociado con el estado base, en segundo lugar se trata de una cadena, que inicialmente se asoció con el estado de Hoyle, de acuerdo a las conjeturas de Morinaga[30].

En este modelo se construyen cúmulos conformados por pares de protones y neutrones, acoplados con un momento angular igual a cero, teniendo la función de onda

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{b^3\pi^{3/2}}} \exp\left[\frac{-(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)^2}{2b^2}\right]. \quad (2.1)$$

Dónde  $\mathbf{R}_i$  es vector posición del cúmulo  $i$  y  $b = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2$  es un parámetro que delimita el tamaño de la partícula  $\alpha$ . La función total de un sistema de  $N$  cúmulos se antisimetriza a través de un determinante de Slater.

$$\Phi_\alpha(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_N) = K \mathcal{A} \prod_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{R}_i). \quad (2.2)$$

$\mathcal{A}$  es el operador de antisimetrización y  $K$  una constante de normalización.

A distancias relativamente cortas, la antisimetrización resulta más significativa y “rompe” a las partículas  $\alpha$ , conforme la distancia crece entre los cúmulos, las partículas  $\alpha$  mantienen su estructura bosónica. Es decir, conforme los cúmulos se juntan, como ocurre para estados de baja energía, la función va perdiendo su estructura de  $N$ - $\alpha$ , pero no necesariamente su simetría.

Dada la naturaleza bosónica del sistema de tres partículas  $\alpha$ , se ha propuesto la posibilidad de que para algunos estados (Hoyle, por ejemplo) la estructura interna de las partículas  $\alpha$  deje de ser importante. Para poder considerar tal circunstancia se requiere que el radio nuclear sea considerablemente grande[15].

En tales circunstancias el papel del antisimetrizador  $\mathcal{A}$  de la ecuación 2.2 podría ser mínimo, y el sistema puede ser descrito como tres bosones. Visto de este modo estamos hablando de un condensado de Bose-Einstein de partículas  $\alpha$  [31, 32, 33, 34].

Tomando esto último en cuenta la función de onda de Bloch-Brink 2.2 fue adaptada por Tohsaki, Horiuchi, Schuck y Röpke (THSR), tomando una forma similar a la del  $\alpha$ -CM:

$$\langle \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N | \Phi_{n\alpha} \rangle = \mathcal{A} [\phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \phi_\alpha(\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7, \mathbf{r}_8) \dots \phi_\alpha(\mathbf{r}_{N-3}, \mathbf{r}_{N-2}, \mathbf{r}_{N-1}, \mathbf{r}_N)], \quad (2.3)$$

para  $N$  nucleones agrupados en  $n$  grupos de cuatro, cada uno descrito por  $\phi_\alpha$ :

$$\phi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = e^{-\frac{R^2}{B^2}} \phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots), \quad (2.4)$$

donde  $R = [\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4]/4$  es la coordenada del centro de masa de la partícula  $\alpha$  y

$$\phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots) = \exp\left(-[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3, \dots]^2 / b^2\right), \quad (2.5)$$

$b$  es un parámetro de tamaño para la partícula  $\alpha$  libre, y  $B$  ( $\gg b$ ) es un parámetro que describe el tamaño de una distribución Gaussiana común.

En el caso límite en que  $B \rightarrow \infty$  el antisimetrizador  $\mathcal{A}$  deja de ser poderoso y la función de onda 2.3 se torna en el producto de Gaussianas. ¡Una función de onda que describe un gas de



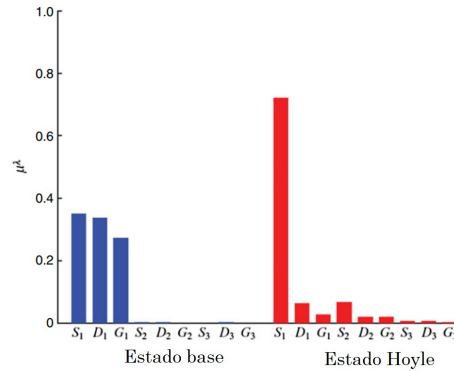


Figura 2.1: Comparación del estado base y el estado de Hoyle. Se muestra la ocupación de las órbitas de las partículas  $\alpha$ , asociadas a cada estado [15, 35, 36].

partículas  $\alpha$  libres! Por otro lado, a medida que el volumen descende, la antisimetrización se vuelve más relevante al igual que los grados de libertad fermiónicos del sistema. Muy similar a la función de onda 2.2, pero esta vez con un grado de libertad adicional.

El Bose-Einstein Condensated Model (BEC), a partir de la función de onda THSR descompone la función de onda del estado Hoyle en las funciones de onda de partículas alfa individuales. Tal descomposición muestra hasta un 70 % de traslape con una función THSR de 3 partículas  $\alpha$ , confirmando que en tal estado, las partículas  $\alpha$  mantienen aproximadamente sus propiedades asintóticas. Por otro lado, el estado base, tiene componentes S, D y G con amplitudes prácticamente iguales [35, 36] (figura 2.1).

Esto demuestra la poderosa influencia que tiene el PEP fraccionando las partículas  $\alpha$  en el estado base. El hecho de que en el estado Hoyle haya hasta 30 % de contribución por orbitales distintos a los estados-S indica que el PEP tiene influencia aún en el estado Hoyle. El modelo BEC predice el estado  $2^+$  ( $9.4 \text{ MeV}$ ) con una precisión de  $0.6 \text{ MeV}$  [33, 37]

La Antisymmetrized Molecular Dynamics (AMD, Dinámica molecular antisimetrizada) [38] se caracteriza porque la existencia de los cúmulos no es algo que se considere *a priori*, y por ende sus coordenadas relativas no son tomadas en cuenta. Los grados de libertad de cada nucleón se consideran explícitamente y estos son antisimetrizados. La estructura de cúmulos emerge espontáneamente y sin ser presupuesta, a través de las interacciones nucleón-nucleón y el mismo PEP.

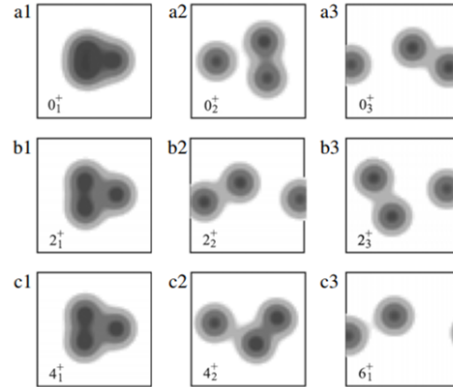


Figura 2.2: Densidades del  $^{12}\text{C}$  de acuerdo a la AMD. a1, b1, c1 corresponden a la banda del estado base  $0_1^+$ ; a2, b2, c2 a la del estado Hoyle  $0_2^+$  y a3, b3, c3 a la banda  $0_3^+$  [39].

La AMD proporciona una buena descripción del espectro para estados del  $^{12}\text{C}$  [39]. En la figura 2.2 son mostradas las estructuras de los primeros estados  $0^+$ ,  $2^+$  y  $4^+$ .

Se puede observar como en la banda correspondiente al estado base, la estructura de cúmulos está presente aunque no hay una delimitación clara entre cada cúmulo. Figurándonos de algún modo que las partículas  $\alpha$  estuvieran traslapadas, es visible también una deformación triangular. El estado Hoyle por otro lado, si muestra más claramente no solo delimitación, sino una franca separación, por parte de uno de los cúmulos, mientras que los estados  $2_2^+$  y  $4_2^+$  están completamente deformados. En la tercer banda la descripción es muy similar a esta última.

El modelo algebraico de cúmulos [40] (Algebraic Cluster Model, ACM), describe el movimiento relativo de n-cúmulos en términos de una simetría  $U(\nu + 1)$  donde  $\nu = 3(n - 1)$  representa el número de grados de libertad relativos. Para el problema de dos cuerpos, el modelo se reduce al modelo de vibrones ( $U(4)$ )(sec. 1.1), para tres cúmulos el álgebra correspondiente es  $U(7)$ . El Hamiltoniano utilizado es invariante ante permutaciones ante el grupo  $S_n$  para las partículas  $\alpha$  y no considera excitaciones internas, es decir, las partículas  $\alpha$  se mantienen en su estado base.

El ACM concluye que [40] la banda de rotaciones del estado base contiene estados tanto de paridad positiva como negativa. Sostiene que el estado base consiste en tres partículas  $\alpha$  colocadas en los vértices de un triángulo equilátero. En el caso del estado Hoyle, por el contra-

rio, presuntamente podría tener distintas interpretaciones sobre su configuración geométrica; lineal, curvada o triangular, para su determinación requieren un estado  $3^-$  en la banda de Hoyle.

## 2.2. Azufre - $^{32}\text{S}$ -

El número atómico del azufre es 16. Fue uno de los primeros elementos en ser identificados por el hombre, comenzando su uso desde la edad antigua.

Se conocen 23<sup>1</sup> isótopos del azufre, de los cuales solo cuatro son estables.  $^{32}\text{S}$  (94.99 %),  $^{34}\text{S}$  (4.25 %),  $^{33}\text{S}$  (0.75 %) y  $^{36}\text{S}$  (0.01 %).

El  $^{32}\text{S}$  es sintetizado a partir del llamado “ $\alpha$  process” (proceso alfa), consecuente del ya citado *triple  $\alpha$  process*. Una vez que se ha producido suficiente  $^{12}\text{C}$ , las reacciones dejan de ser exclusivamente entre partículas  $\alpha$  y el carbono comienza a consumirse a través de la reacción  $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ . En algún momento hay suficiente  $^{16}\text{O}$  dando lugar a reacciones  $^{16}\text{O}(\alpha, \gamma)^{20}\text{Ne}$ .

Esta cadena continua, y eventualmente los combustibles presentes son  $^{28}\text{Si}$  y  $\alpha$ , cuyas reacciones producen  $^{32}\text{S}$  y un fotón de 6.95 MeV[41].

El sistema  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$  ha sido bastante estudiado, sin embargo, ha tenido que competir con sistemas de 8  $\alpha$ , pues los modelos de estos cúmulos son numerosos y bastante exitosos en las investigaciones de núcleos más ligeros. Por otro lado, a medida que se incrementa el número de partículas  $\alpha$  su estudio se complica, lo que le resta ventaja ante sistemas de dos cúmulos, como en este caso de  $^{16}\text{O}$ .

A principios de la década de los 70 Reidemeister[42] hizo una descripción microscópica del sistema, utilizando el modelo de capas de dos centros (two-center shell model, TCSM)[43, 44]. En el TCSM se utiliza un potencial de oscilador armónico con dos centros separados por una distancia  $r$  entre ellos. Al variar el valor de  $r$  se minimiza la energía del sistema.

La energía mínima (-223.0 MeV) se obtiene para  $r=3.6$  fm y un momento cuadrupolar de  $Q=205$   $\text{fm}^2$ , en este punto la estructura de capas inicial de los oxígenos está completamente alterada.

Se hallaron los estados  $0^+$  (3.78 MeV) y  $2^+$  (4.29 MeV).

---

<sup>1</sup>Información tomada de <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/>, el día 11 de agosto de 2019, 23:00

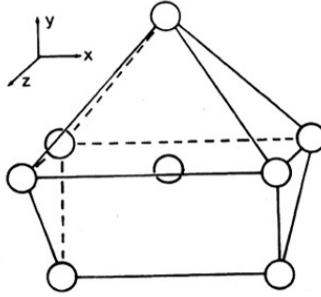


Figura 2.3: Se muestran las posiciones relativas de las partículas  $\alpha$  calculadas en [47].

Algunos años después [45, 46] el sistema fue analizado desde el método de grupo resonante (Resonating Group Method, RGM). Señalan que la fuerte interacción entre el PEP y la fuerza nucleón- nucleón conlleva a efectos atractivos en la región intermedia ( $3.8 \text{ fm} \leq r \leq 6.0 \text{ fm}$ ) lo cual produce dos bandas rotacionales. Reproducen exitosamente las funciones de excitación y las distribuciones angulares en la región de  $20 \text{ MeV} < E_{CM} < 30 \text{ MeV}$ .

Paralelamente se hacía un análisis del sistema dentro del marco del  $\alpha$ -CM de Brink [47] donde la simetría y la configuración geométrica del sistema fueron calculadas minimizando la energía al variar las posiciones relativas de las partículas  $\alpha$ . Las energías de excitación, los momentos cuadrupolares, así como los radios, son calculados.

Se hace énfasis en que realizar aproximaciones en las que la simetría tiene restricciones *ad hoc*, lo cuál es muy usual, puede llevar a resultados engañosos. En la figura 2.3 se muestran las posiciones relativas de las partículas  $\alpha$  que obtuvieron. Notése que de estar a escala, las partículas se traslaparían. El autor concluye que la configuración por cúmulos  $\alpha$  es pobre en el caso del  $^{32}\text{S}$ .

Finalmente, se hace mención del estudio del sistema  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$  dentro del marco del SACM [48]. Resultará importante, en el próximo capítulo la comparación con nuestro trabajo. En este se analiza el  $^{32}\text{S}$  como tres configuraciones distintas  $^{28}\text{Si}_{(0,12)} + \alpha$ ,  $^{16}\text{O}_{(0,0)} + ^{16}\text{O}_{(0,0)}$  y  $^{28}\text{Si}_{(12,0)} + \alpha$ . Los primeros casos consideran a los cúmulos en su estado base, mientras el último considera el  $^{28}\text{Si}$  en un estado excitado que le da una forma prolata. Han calculado numerosos valores para transiciones, tanto dipolares como cuadrupolares que en ese entonces aún no habían sido medidos experimentalmente. El espectro de energía se ajusta razonablemente

bien, en especial si hablamos de energías superiores a los 10 MeV.

## Capítulo 3

# Aplicación del SACM en $^{12}\text{C}$ y $^{32}\text{S}$

### 3.1. $^{12}\text{C}$ dentro del SACM

Previamente se han explorado distintos modelos de cúmulos y sus resultados, particularmente aplicados a este isótopo. En esta sección aplicaremos el modelo algebraico semimicroscópico de cúmulos, el sistema considerado corresponde a tres partículas  $\alpha$ . Como coordenadas consideramos las coordenadas de Jacobi,  $\rho$  correspondiente a la distancia entre dos de los cúmulos, subsistema que llamaremos  $^8\text{Be}$ , y  $\lambda$  asociada a la distancia entre la tercer partícula  $\alpha$  y el centro de masa de  $^8\text{Be}$  (figura 3.1).

Estos resultados ya han sido publicados en [49], como antecedente de nuestro trabajo.

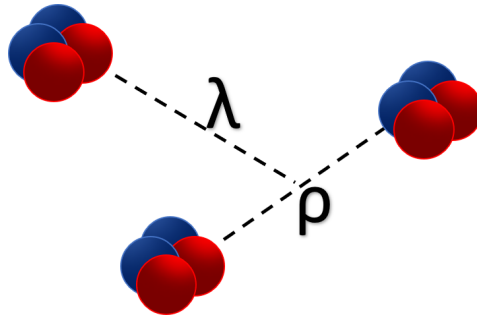


Figura 3.1: Coordenadas de Jacobi ( $\rho, \lambda$ ) para el sistema de tres partículas  $\alpha$ . Propia

### 3.1.1. Introducción

Para construir el sistema debemos seguir el procedimiento descrito en la sección 1.2, es decir, construir un macro-espacio a partir de las ecuaciones 1.8 y 1.9 y eliminar todos los estados que no estén contenidos en el SM. A este proceso debemos añadir las condiciones arrojadas por la simetrización de las partículas  $\alpha$ , en un sistema de tres cuerpos[50].

Por su configuración dentro del Shell Model (capa  $n=0$  llena), la representación irreducible de cada uno de los cúmulos es  $C_i = C_\alpha = (0, 0)$  y sus momentos tanto de espín como isospín son  $T = J = 0$ . También es necesario aplicar la condición de Wildermuth [8], ecuación 1.5. Consideremos primero el subsistema  $^8Be$  conformado por dos partículas  $\alpha$ .

En su estado base, cada partícula  $\alpha$  contiene dos neutrones y dos protones, todos y cada uno en la capa  $n=0$ , por lo que  $N_{C_i} = N_\alpha = 0$  para las dos  $\alpha$ . Por otro lado, el  $^8Be$  contiene dos protones y dos neutrones en la capa  $n=0$  y además dos protones y dos neutrones en la capa  $n=1$ , es decir, 4 partículas con una cuanta de oscilación cada una, por lo tanto  $N_{s_{Be}} = 4$ , finalmente  $n_{\pi_\rho} = N_{s_{Be}} - (N_\alpha + N_\alpha) = 4$ . El sub-sistema  $\alpha + \alpha \rightarrow ^8Be$  debe contener al menos  $n_{\pi_\rho} = 4$  cuantas de oscilación relativa entre las  $\alpha$ 's para cumplir la condición de Wildermuth.

También se debe cumplir la condición para la coordenada  $\lambda$ , en este caso tenemos  $N_\alpha = 0$  de la tercer  $\alpha$  y  $N_{s_{Be}} = 4$  para los cúmulos. Además del  $^{12}C$  que contiene cuatro nucleones en la capa  $n=0$ , y cuatro protones + cuatro neutrones en la capa  $n=1$ , 8 partículas con una cuanta de oscilación cada una,  $N_{^{12}C} = 8$  y por lo tanto  $n_{\pi_\lambda} = N_{^{12}C} - (N_{s_{Be}} + N_\alpha) = 8 - (4 + 0) = 4$ .

El espacio de representaciones ha sido tomado de [51] y es referido en el cuadro 3.1. Este espacio está construido con base en el Principio de Exclusión, por lo que podemos llamarlo microscópico.

Usando las reglas de Elliot (ec. 1.11), al espacio mostrado en el cuadro 3.1 se le pueden asociar estados de espín y paridad. Habrá que considerar que para  $n_\pi$  pares los estados tienen paridad positiva, para  $n_\pi$  impares la paridad es negativa.

Sobre la configuración geométrica del sistema de tres partículas  $\alpha$  dentro de otros modelos ya hemos hecho una descripción previa en el capítulo 2.

Cuadro 3.1: Espacio modelo para el sistema de  $3\alpha$ [51],

hasta  $6\hbar\omega$  de excitación, la multiplicidad está indicada por un superíndice, de otro modo es 1.

$n_\pi\hbar\omega$	$(\lambda, \mu)$
0	(0,4)
1	(3,3)
2	(2,4),(6,2)
3	(3,4),(5,3),(9,1)
4	(0,6),(4,4),(6,3),(8,2),(12,0)
5	(3,5),(5,4),(7,3),(9,2),(11,1)
6	(2,6),(6,4) <sup>2</sup> ,(8,3),(10,2),(12,1),(14,0)

### 3.1.2. Configuración geométrica

Parece intuitivo pensar que al trabajar con tres partículas idénticas la configuración simétrica del sistema sea precisamente un triángulo equilátero. Aunque los sistemas cuánticos tienen la fama de ser especialistas en romper con nuestra intuición, este no parece ser el caso.

Si uno piensa en tres cuerpos clásicos idénticos, en un sistema en que interactúan mutuamente y es simétrico con respecto a permutaciones, la primera configuración que se nos ocurre es un triángulo equilátero. De este modo la distancia entre dos de las partículas es la misma sin importar cuál tomemos como referencia. Ante cualquier rotación, el sistema aparentemente no tendrá cambios para el observador. Partiendo de esta idea clásica se puede hacer un análisis de nuestro sistema cuántico.

En [49] se hace un análisis geométrico, detallado, pero a la vez simple [49, 52] en el que obteniendo valores mínimos aproximados para las coordenadas  $\rho$  y  $\lambda$  a los que llamamos  $\rho_0$  y  $\lambda_0$

$$\rho_0 = 2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu_{\alpha\alpha}\omega}}, \quad \lambda_0 = 2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu_{sBe\alpha}\omega}} \quad (3.1)$$

Donde  $\mu$  denota a las masas reducidas de cada sub-sistema. Finalmente el radio  $\frac{\lambda_0}{\rho_0}$  nos lleva a un resultado bien conocido.



$$\frac{\lambda_0}{\rho_0} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \quad (3.2)$$

que evidentemente se trata de un triángulo equilátero. Esto sugiere que nuestra intuición no ha sido rota, aún.

Conforme el núcleo se excita, los números  $n_{\pi\rho}$  y  $n_{\pi\lambda}$  crecen de tal modo que juntos sumen la cantidad total  $n_\pi$  para lo cual se pueden dar varias combinaciones, lo que finalmente desencadena en deformaciones diversas que pueden ir desde un simple aumento en el radio del  $^{12}\text{C}$  hasta deformaciones complejas como la bien conocida configuración de cadena del estado Hoyle [23].

### 3.1.3. Discusión

Para ajustar el espectro utilizamos el Hamiltoniano introducido en el Capítulo 1 (ec. 1.12).

Donde se incluyen siete parámetros, el mismo número que en [53] con el fin de comparar los resultados obtenidos en ambos modelos, más un término que mezcla las representaciones irreducibles de  $SU(3)$  y es generador del grupo  $O(4)$  dejando un total de 8 parámetros.

En la figura 3.2 se compara el ajuste obtenido con los datos experimentales que se tienen del  $^{12}\text{C}$ , del mismo modo, en el cuadro 3.2 se muestran los valores a los cuales corresponde el ajuste.

Los estados más bajos con paridad negativa están contenidos en la representación (3,3), que contiene dos bandas,  $L = 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$  (en la figura 3.2 solo se muestran  $1^-$  y  $2^-$ ) y  $L = 3^-, 4^-, 5^-, 6^-$ .

En la figura 3.3 se pueden comparar los resultados mostrados por el Algebraic Cluster Model (ACM) [53], con los nuestros, en este no se ha considerado el PEP, y lo que buscamos nosotros son los efectos del mismo sobre el sistema de  $3\alpha$ .

En el ACM se pueden señalar distintos puntos: la existencia de dobletes  $4^+ - 4^-$  en las bandas del estado base, la banda del estado Hoyle y en la banda  $1^-$ . La forma en que se han ordenado las bandas en el modelo, donde han combinado estados con paridad tanto positiva como negativa, así como la presencia de un estado  $5^-$  en la banda del estado base, el cuál se supone como prueba de la configuración triangular del sistema.

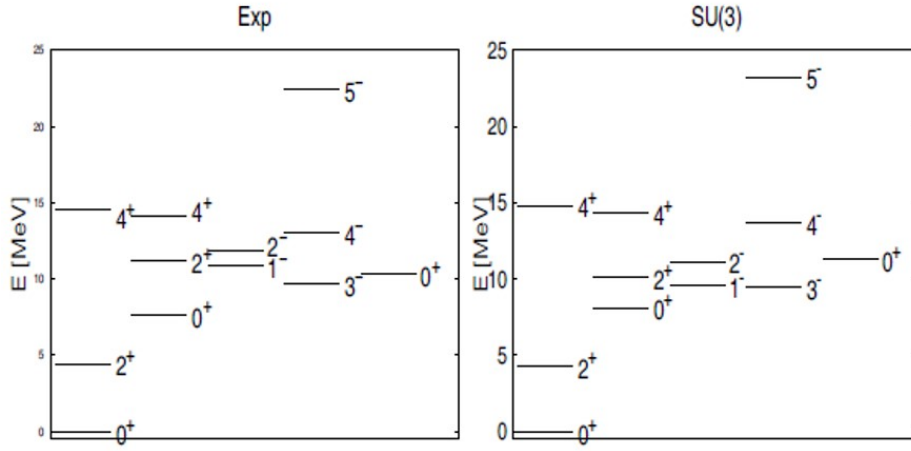


Figura 3.2: Espectro del  $^{12}\text{C}$ . Del lado izquierdo se observa la parte experimental, mientras que del lado derecho se muestra la reproducción del modelo para  $SU(3)$  puro[49].

Cuadro 3.2: Lista de parámetros para el ajuste y sus valores[49].

Parámetro [MeV]	Valor
$a_2$	-0.190031
$a_3$	0.669745
$a_L$	-0.0269914
$a_{L_{n\pi}}$	-0.0854681
$t_2$	-0.776579
$t_1$	-0.0124853
$t_3$	0.00150477
$b_1$	0.0

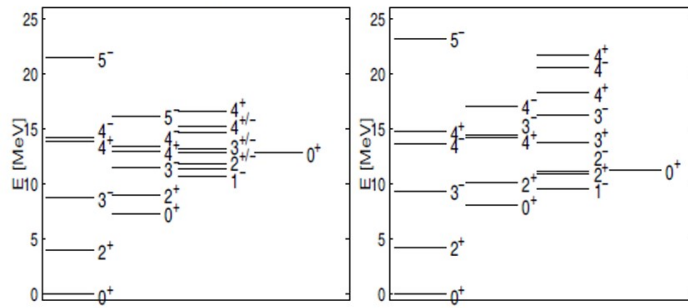


Figura 3.3: Espectro del  $^{12}\text{C}$  hasta 25 MeV obtenido en [53] (izquierda) y el SACM (derecha), las bandas ordenadas de la misma manera que en [53].

Al comparar los resultados de ambos modelos, múltiples observaciones sobre estos aspectos salen a relucir.

Los dobletes  $4^+ - 4^-$  son reproducidos por el SACM, más no del todo para la banda  $1^-$  (figura 3.3).

La ausencia del estado  $5^-$  ( $\approx 16\text{MeV}$ ) en la segunda banda  $0^+$  también es remarcable. El estado  $5^-$  ( $> 20\text{MeV}$ ) es reproducido, pero no aparece en la banda del estado base, sino en (3,3).

Dentro del SACM aparece una nueva banda  $1^-$  (figura 3.4) correspondiente a la representación  $7(9, 1)^1$ , mientras que la primera banda  $1^-$ , por su parte corresponde a la representación  $5(3, 3)$ . Es decir, ambas bandas son no degeneradas, aún a pesar de que en el espectro sus primeros estados ( $1^-$  y  $2^-$ ) sean muy similares.

Entonces podemos hablar de que el PEP tiene una fuerte influencia sobre el sistema, y trae consigo las siguientes consecuencias:

- Cada banda corresponde a un estado intrínseco  $(\lambda, \mu)$  y sus estados corresponden a rotaciones del mismo. Dos estados con diferente representación  $[(\lambda_1, \mu_1) \neq (\lambda_2, \mu_2)]$  no pueden coexistir en una misma banda. Por otro lado, la paridad está dada por  $\pi = (-1)^{n_\pi}$ . Y para cada nivel de excitación  $n_\pi$  los irrep son diferentes, por lo tanto: Los estados con paridad positiva no pueden estar en la misma banda que los estados con paridad negativa.

<sup>1</sup>la notación corresponde a  $n_\pi(\lambda, \mu)$



$12 + 32 = 44$ . Por lo tanto para cumplir la condición de Wildermuth requerimos que:

$$n_{\pi} \geq n_{\pi_0} = N_{32S} - (N_{16O} + N_{16O}) = 44 - (12 + 12) = 44 - 24 = 20 \quad (3.3)$$

Siendo que la irrep en  $SU(3)$  del  $^{16}O$  es  $(0,0)$ , al aplicar el producto de la ecuación 1.8 en nuestro sistema obtenemos simplemente el resultado  $(0,0)$ .

$$(\lambda_{C_1}, \mu_{C_1}) \otimes (\lambda_{C_2}, \mu_{C_2}) = (0,0) \otimes (0,0) = (0,0) \quad (3.4)$$

Al multiplicar este resultado con la representación correspondiente al movimiento relativo entre los cúmulos obtenemos un resultado que no es favorable.

$$(\lambda_c, \mu_c) \otimes (n_{\pi}, 0) = (0,0) \otimes (20,0) = (20,0) \quad (3.5)$$

¡La irrep del  $^{32}S$ ,  $(4,8)$  no logra ser reproducida! Al menos en los términos en los que hemos construido nuestro modelo. Este desperfecto puede ser corregido introduciendo el concepto de forbiddenness en el trabajo.

### 3.2.1. Forbiddenness

En los modelos de cúmulos nucleares, como en nuestro caso, dos o más cúmulos en su estado base no siempre se pueden acoplar al estado base del núcleo unido [55], pues existe una restricción estructural para ciertas combinaciones. Ésta existe para cualquier sistema de cúmulos donde  $A_1, A_2 > 36$  y para un nutrido número de sistemas con  $A_1, A_2 > 12$ , es universal e independiente del modelo que se esté empleando.

Para superar tal restricción y lograr que el sistema de cúmulos reproduzca el estado base del núcleo unido, en [55] se introdujo el concepto de *forbiddenness*.

La idea de este concepto es permitir la excitación de alguno de los cúmulos dentro de su estructura interna, substrayendo esas cuantas de excitación del movimiento relativo ( $n_{\pi}$ ) incrementando con ello la posibilidad de obtener la configuración del estado base del núcleo unido.

A la cuanta mínima de excitación necesaria en el cúmulo para conseguirlo, es a lo que llamaremos *forbiddenness*. En [55], utilizan el sistema  $^{40}Ca + ^{40}Ca \rightarrow ^{80}Zr$  para ilustrar el concepto.

Sin alejarse de la idea principal, en un artículo posterior [56], se corrige la forma en que se calcula el valor de la forbiddenness. El desarrollo formal se encuentra dentro del mismo, mientras que aquí se ha tomado la libertad de solo enunciar la ecuación que permitirá aplicar el concepto en nuestro sistema

$$n_c = \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{n_0 - (\lambda - \mu) - (2\lambda_c - \mu_c)\} \right] \\ + \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{n_0 - (\lambda + 2\mu) + (\lambda_c - \mu_c)\} \right] \quad (3.6)$$

Donde  $n_c$  es el valor numérico de la forbiddenness,  $(\lambda, \mu)$  es la irrep del estado base del núcleo unido,  $n_0$  es la  $n_\pi$  mínima permitida por la condición de Wildermuth y  $(\lambda_c, \mu_c)$  corresponde al resultado de la ecuación 1.8.

Mencionado esto, una vez introducido la definición de la forbiddenness y la manera de calcular su valor, reconsideramos que para nuestro sistema:  $n_0 = 20$ ,  $(\lambda, \mu) = (4, 8)$  y  $(\lambda_c, \mu_c) = (0, 0)$ :

$$n_c = \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 - (4 - 8) - (2 * 0 - 0)\} \right] + \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 - (4 + 2 * 8) + (0 - 0)\} \right] = \\ \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 - (-4)\} \right] + \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 - (4 + 16)\} \right] = \\ \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 + 4\} \right] + \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{20 - 20\} \right] = \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{24\} \right] + \max \left[ 0, \frac{1}{3} \{0\} \right] = \\ \max [0, 8] + 0 = 8 \quad (3.7)$$

Esto implica que uno de nuestros  $^{16}O$  deberá ser excitado hasta 8 cuantas, y que por lo tanto el valor de  $n_{\pi_0}$  encontrado en la ecuación 3.3 cambiará su valor a  $n_{\pi_0} = 12$  pues habrá cedido 8 de sus cuantas al oxígeno.

Conocido esto, el siguiente paso consistió en hallar la irrep  $(\lambda_f, \mu_f)$  más pequeña de  $^{16}O$  con  $n = 8$  cuantas de excitación ( $^{16}O^*$ ) que al acoplarse con el  $^{16}O$  no excitado y las  $n_{\pi_0} = 12$  cuantas de movimiento relativo reprodujera la irrep del estado base del  $^{32}S$  (4,8), es decir:

$$(\lambda_f, \mu_f) \otimes (0, 0) \otimes (n_{\pi_0}, 0) =$$

$$(\lambda_f, \mu_f) \otimes (n_{\pi_0}, 0) = (\lambda_f, \mu_f) \otimes (12, 0) = (4, 8) + \sum_{\lambda, \mu} m_{(\lambda, \mu)}(\lambda, \mu) \quad (3.8)$$

Finalmente obtuvimos que  $(\lambda_f, \mu_f)_{^{16}O^*} = (10, 2)$

### 3.2.2. Discusión

Una vez aplicada la forbiddenness podemos reproducir el modelo del SACM tal como se mostró en la sección 1.2, solo que en este caso, las representaciones de los cúmulos serán  $(\lambda, \mu)_{^{16}O^*} = (10, 2)$  y  $(\lambda, \mu)_{^{16}O} = (0, 0)$  en la ecuación 1.8 y  $n_{\pi_0} = 12$  en la ecuación 1.9.

El espacio hallado para el  $^{32}S$  se muestra en el cuadro 3.3. Donde se incluyen también los espacios publicados en [48] donde se consideraron las configuraciones de  $^{28}Si + \alpha$  y  $^{16}O + ^{16}O$ . En [48] no se encontraron aparentemente estados compatibles con el sistema  $^{16}O + ^{16}O$ , sino hasta cuatro cuantas de excitación ( $n_{\pi} = 24$ ) pues aparece un estado (24,0) (no se muestra en la tabla), y esto es debido a que entonces los autores no han tomado en cuenta la forbiddenness. Todos los estados encontrados para la configuración  $^{28}S + \alpha$  son reproducidos por nosotros lo cual representa una nueva contribución en el estudio del  $^{32}S$ .

Para este sistema se utilizó el mismo Hamiltoniano presentado en el Capítulo 1, en la ecuación 1.12

En la figura 3.5 se muestra el espectro experimental que se ha hallado previamente para el  $^{32}S$ . El orden de las bandas se da en términos del SACM. Nótese las tres bandas correspondientes al estado base (4,8). Dentro del modelo aparece el estado  $0_3^+$  en la banda (6,8) sin embargo, experimentalmente aparece con una energía superior (7.54 MeV) a los 7.12 MeV del  $2_5^+$ . Esto podría interpretarse como la aparición de un estado  $0^+$  adicional, cuya energía sea menor a 7.12 MeV.

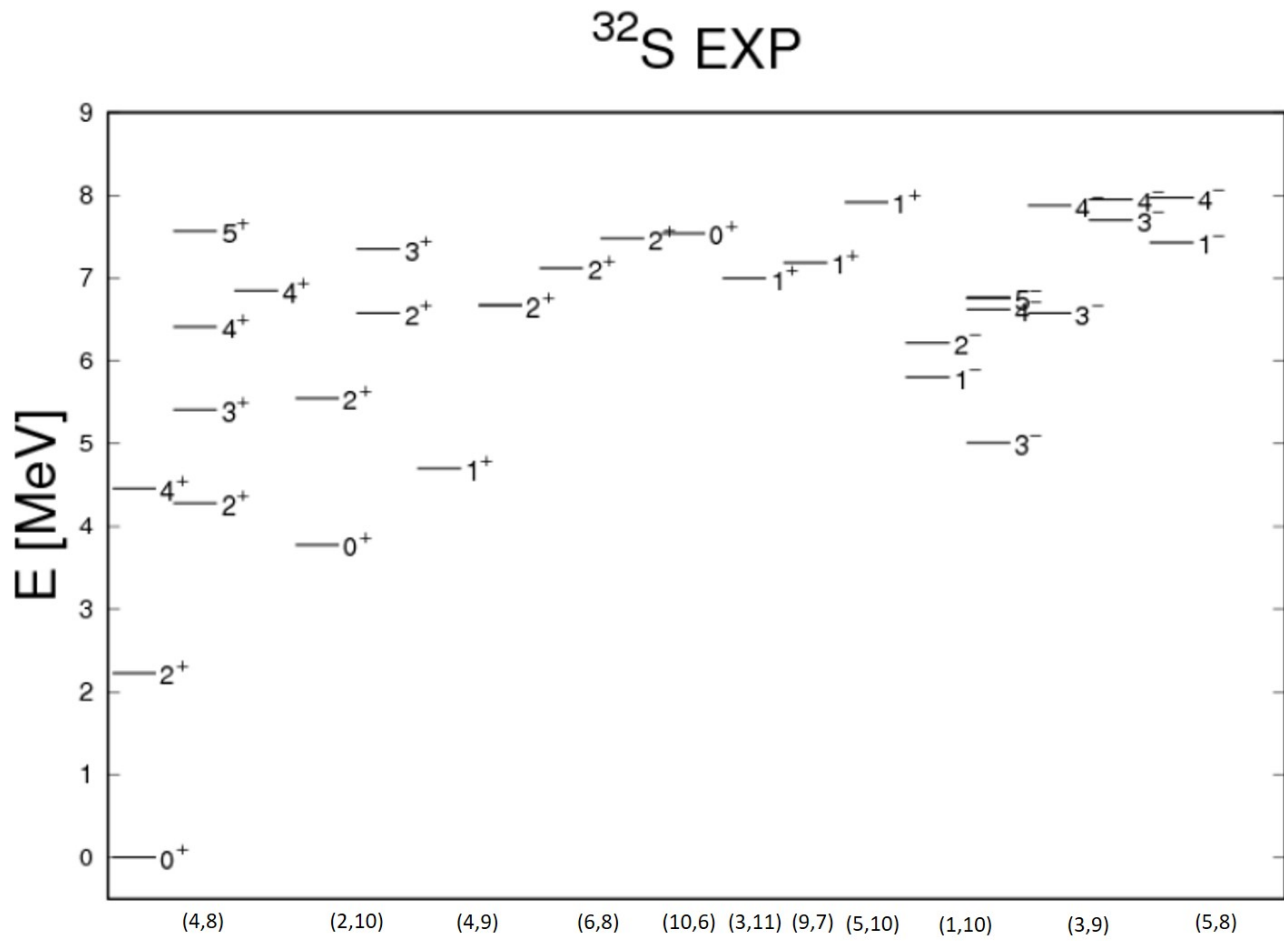


Figura 3.5: Se muestra el espectro experimental del  $^{32}\text{S}$  hasta  $8\text{MeV}$ . El orden de las bandas es de acuerdo al proyectado por el SACM.



Cuadro 3.3: Espacio modelo para el sistema de  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O} \rightarrow ^{32}\text{S}$  hasta  $15\hbar\omega$  (3 cuantas de excitación). Se agregan también los espacios encontrados en [48] para los sistemas  $^{28}\text{Si}(12, 0) + \alpha$  y  $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ .

$n_\pi \hbar\omega$	$(\lambda, \mu)$	$^{28}\text{Si}(12, 0) + \alpha$	$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$
12	(4,8)	(4,8)	-
13	(1,10),(3,9),(5,8),(2,11),(7,7),(4,10)	(9,6)(7,7),(5,8),(3,9)	-
14	(2,10),(4,9),(6,8),(3,11),(8,7),(5,10) (7,9),(10,6),(4,12),(9,8),(6,11) (12,5),(8,10),(11,7),(14,4)	(14,4),(12,5),(10,6),(8,7) (6,8),(4,9),(2,10)	-
15	(3,10),(5,9),(7,8),(4,11),(9,7),(6,10),(8,9) (11,6),(10,8),(7,11),(13,5)(9,10),(12,7) (15,4),(11,9),(14,6),(13,8),(17,3),(16,5),(19,2)	(19,2),(17,3),(15,4),(13,5) (11,6),(9,7),(7,8),(5,9) (3,10),(1,11)	-

En cuanto a los estados con paridad negativa deseamos señalar la tan alta densidad del espectro, principalmente para las últimas cuatro bandas que aparecen en la figura, para estados  $4^-$  y  $3^-$ . En las bandas<sup>2</sup> 13(5,8)1 y 13(5,8)3 el modelo incluye estados  $1^-$ ,  $2^-$ ,  $3^-$  y  $4^-$ ; y  $3^-$ ,  $4^-$  y  $5^-$  respectivamente. Sin embargo de estos solo se muestra un estado  $4^-$  pues el resto del espectro paridad negativa presenta mayores energías, lo que nos hace esperar se proyecten nuevos estados en estas bandas.

Se realizaron numerosos ajustes a los parámetros fenomenológicos, con los cuales se logró reproducir de manera aceptable el espectro para los estados de bajas energías.

En el primer ajuste (figura 3.6), vemos la primera banda 12(4,8)0 muy bien reproducida, a diferencia de la banda siguiente 12(4,8)2, donde las energías se ven un poco elevadas junto a su contra parte experimental, y en el extremo superior se sobreponen los estados  $4_2^+$  y  $5_1^+$ . Las bandas asociadas a las irrep (2,10) y (6,8) tienen buen aspecto, con especial mención para la banda 14(6,8)0, pues muestra un estado  $0^+$  adicional con una energía de 4.92 MeV. El estado  $0^+$  de la banda 14(10,6)0 no logra reproducirse correctamente.

<sup>2</sup>la notación es  $n_\pi(\lambda, \mu)k$

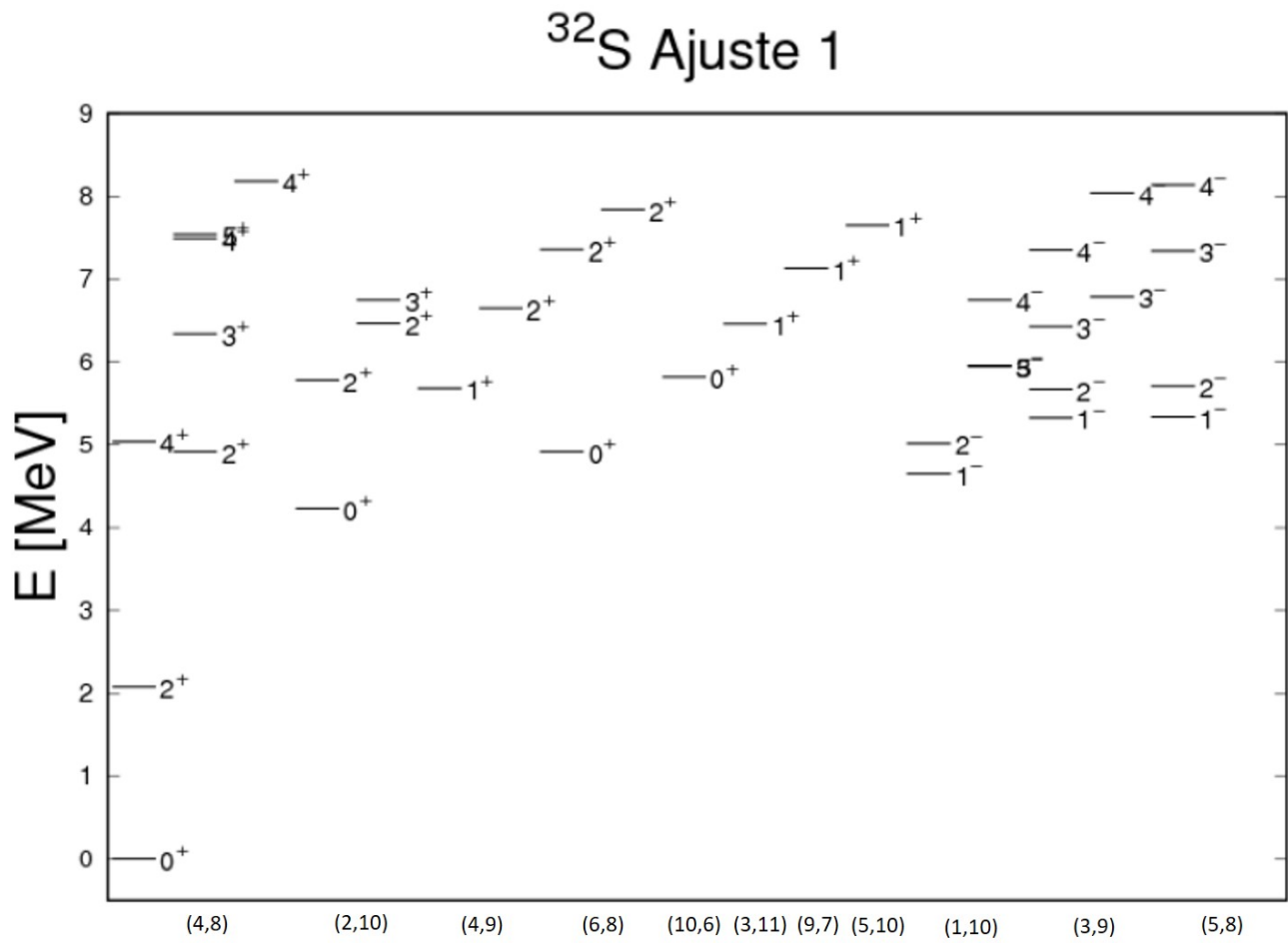


Figura 3.6: Ajuste 1. Estados proyectados por el modelo para el espectro del  $^{32}\text{S}$  y energías  $= 8\text{MeV}$ .

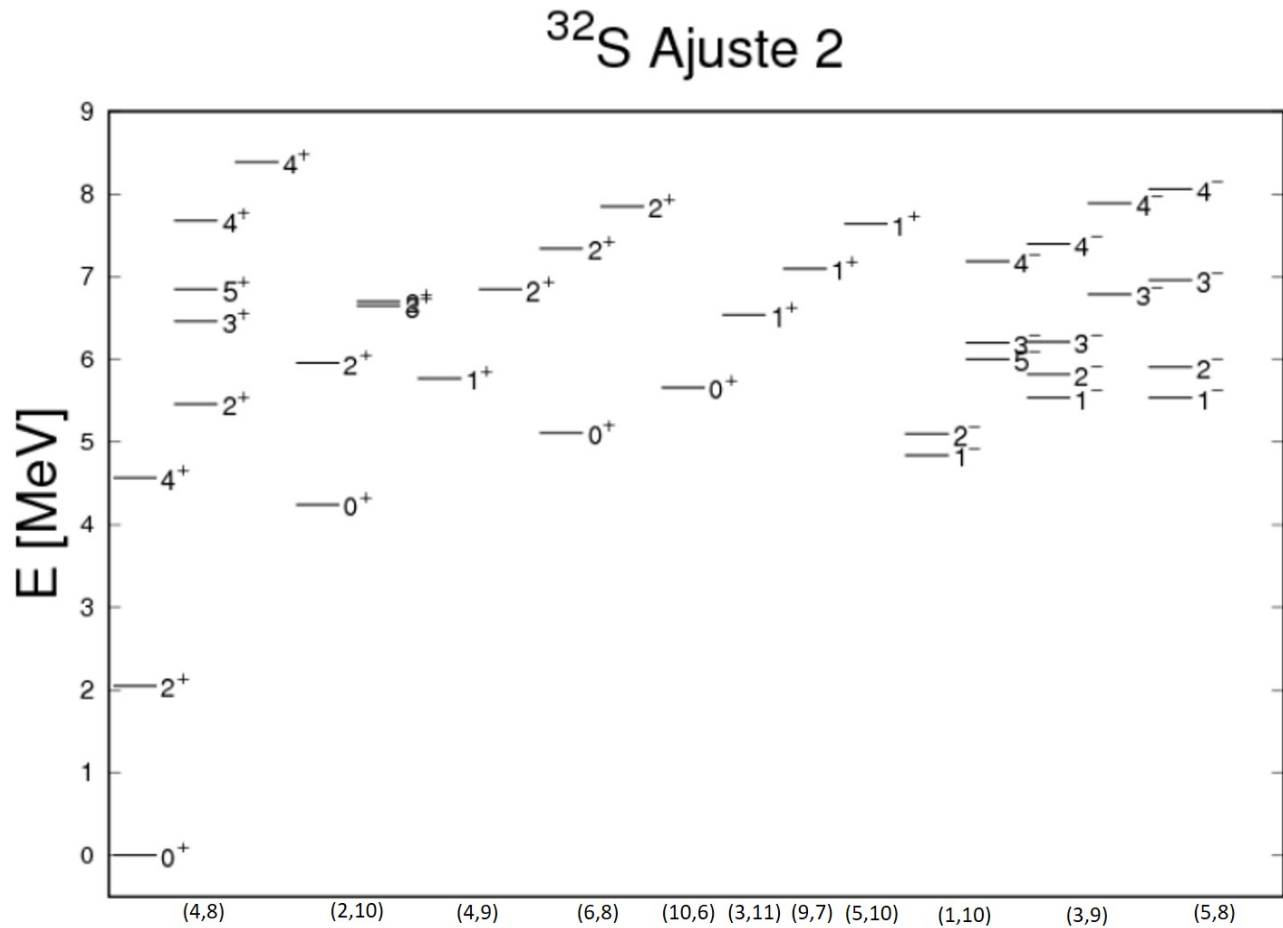


Figura 3.7: Ajuste 2. Estados proyectados por el modelo para el espectro del  $^{32}\text{S}$  y energías  $\approx 8\text{MeV}$ .

Los estados  $1_1^-$  y  $2_1^-$  aparecen un poco abajo del valor esperado. La banda 13(3,9)3 presenta un ajuste aceptable. Mientras que para la banda 13(3,9)1 aparecen estados  $1^-$  y  $3^-$  con energías 5.33 MeV y 6.79 MeV, respectivamente. Esto hace que el espectro se vuelva menos denso en esta banda. La banda (5,8) presenta un mejor ajuste con respecto a los valores obtenidos experimentalmente. Podríamos entonces interpretar los estados  $1^-$  y  $3^-$  ya mencionados como nuevos estados correspondientes a 13(3,9)1. El estado  $4^-$  de la banda (5,8) tiene también un muy buen ajuste.

El segundo ajuste (figura 3.7) es una muy buena reproducción, también, del espectro experimental. Se pueden señalar algunas diferencias significativas.

Las bandas correspondientes a las irrep (4,8), (2,10) y (6,8) tienen las mismas características que en el primer caso. Aquí encontramos que el estado  $0^+$  de la banda 14(6,8)0 tiene una energía de 5.11 MeV, y de nuevo no se reproduce la energía para el siguiente estado  $0^+$  14(10,6)0.

Las bandas de paridad negativa correspondientes a la irrep (3,9) presentan un buen ajuste. Mientras que en las bandas (5,8) aparecen los estados  $1^-$ ,  $2^-$ , y los dos  $3^-$  que estaban haciendo falta.

Los dos estados con espín  $J = 5$  que se presentan en el ajuste manifiestan valores muy bajos. Esto fue una constante a lo largo del trabajo.

En el ajuste 3 (figura 3.8) se observa un mejor ajuste para las tres primeras bandas, incluso el estado  $5^+$  aunque un poco elevado. Por otro lado, los estados  $2^+$  de las bandas(2,10) reducen el valor de su energía significativamente, y los de las bandas (6,8) incrementan.

El estado  $0^+$  de la banda 14(6,8)0 tiene una energía de 4.69 MeV y en este caso sí se reproduce la energía del siguiente  $0^+$  (estado 2(10,6)0).

En cuanto a los estados de paridad negativa se logra duplicar lo hecho en el ajuste 2.

En el cuadro 3.4 se presentan los valores calculados para los parámetros del hamiltoniano en los tres casos.

También hemos calculado la energía de las primeras transiciones E2. Los resultados se enumeran en el cuadro 3.5

Podemos enumerar los resultados encontrados para el  $^{32}S$  como sigue:

- La necesidad de aplicar el concepto de forbiddenness, y aquí puede señalarse que en los modelos citados en el Capítulo 2, prácticamente se pasa por alto el estado base del  $^{32}S$ , a excepción del  $\alpha$ -CM. Muy probablemente hayan tenido dificultades para encontrarlo precisamente al ignorar la forbiddenness.
- Una vez introducido este concepto, si se usa de manera adecuada, el modelo continúa siendo igual de sencillo en cuanto a requerimientos matemáticos y computacionales, que para un sistema donde no existe la forbiddenness ( $^{12}C$  por ejemplo).

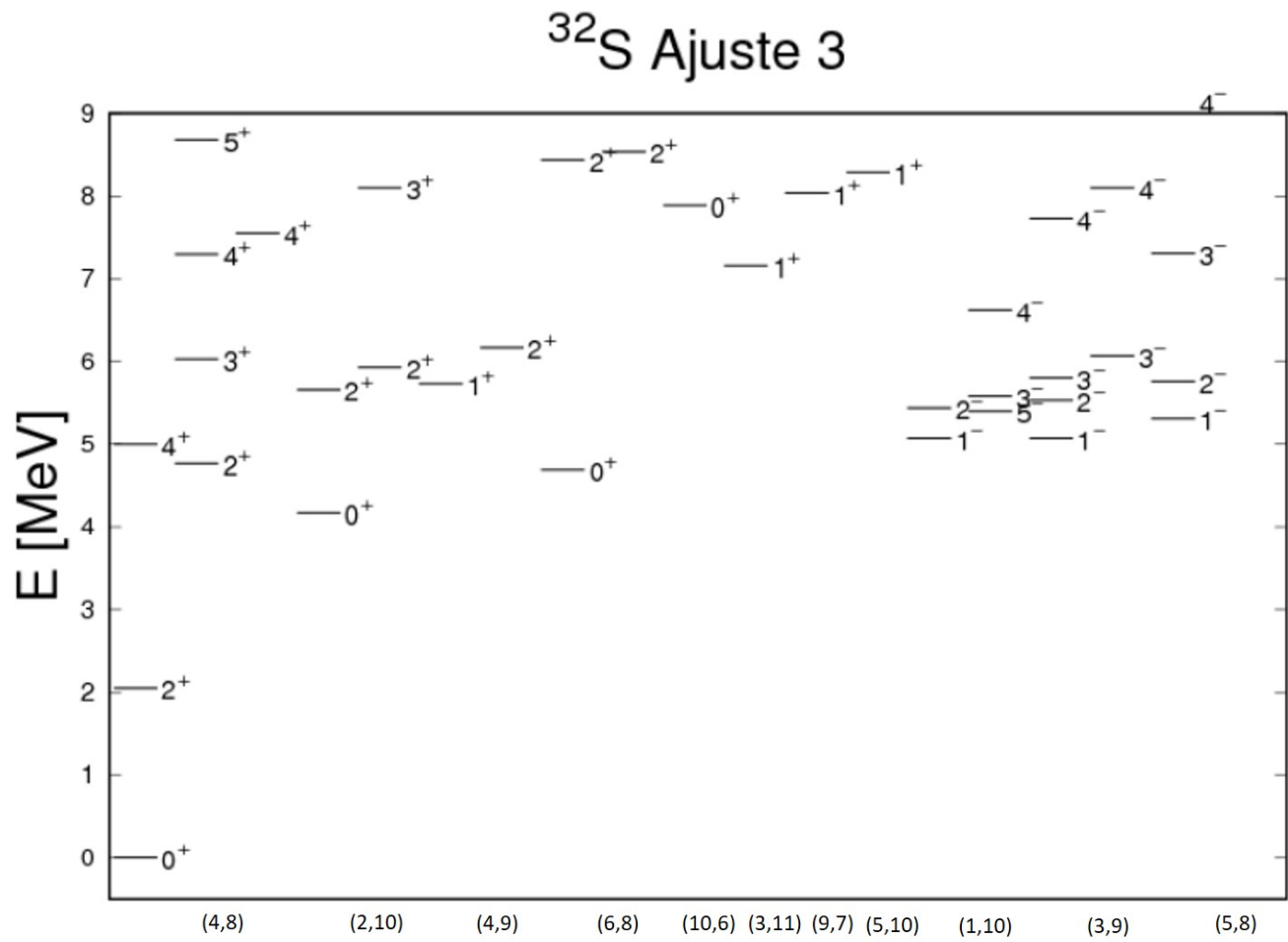


Figura 3.8: Ajuste 3 Estados proyectados por el modelo para el espectro del  $^{32}\text{S}$  y energías  $= 8\text{MeV}$ .

Cuadro 3.4: Parámetros del hamiltoniano de acuerdo a cada uno de los ajustes realizados.

Parametro	ajuste 1	ajuste 2	ajuste 3
$\hbar\omega$	11.69	11.69	11.69
$a_1$	0.1968557	0.2471461	0.2811952
$a_2$	-0.1048856	-0.0954199	-0.0657936
$a_3$	0.7925792	0.8666189	0.7635936
$a_4$	7.8821667	0.0946509	9.4625977
$a_5$	0.0001757	0.0530373	0.0074384
$a_6$	0.2385718	0.2414341	0.2142710
$a_L$	0.0308163	0.0484874	0.0364323
$a_{Ln\pi}$	-0.0495376	-0.0244227	-0.0473469
$t_1$	0.0001976	0.0002076	0.0005305
$t_2$	-0.7895577	-0.9595915	-0.7664016
$t_3$	0.0000805	0.0000576	0.0000072
$b_1$	0	0.1199390	0.0731091

Cuadro 3.5: Transiciones de fase, en Weisskopf units (WU). Los espacios en blanco indican que no se han encontrado valores experimentales para esa transición.

caso	$2_1^+ \rightarrow 0_1^+$		$2_2^+ \rightarrow 0_1^+$		$4_1^+ \rightarrow 2_1^+$	
	Exp	Teo	Exp	Teo	Exp	Teo
1	11.8±12	13.08		75.38	14.0±3	12.13
2	11.8±12	13.10		75.62	14.0±3	12.15
3	11.8±12	13.11		75.63	14.0±3	12.15

Cuadro 3.6: Transiciones de fase, en Weisskopf units (WU)(Cont.)

caso	$2_1^- \rightarrow 0_1^-$		$2_2^- \rightarrow 0_2^-$		$4_1^- \rightarrow 2_2^-$		$4_2^- \rightarrow 2_1^-$	
	Exp	Teo	Exp	Teo	Exp	Teo	Exp	Teo
1		120.67		1.01		136.21		0.85
2		94.82		$6.47 \times 10^{-6}$		$1.07 \times 10^{-3}$		$3.64 \times 10^{-9}$
3		76.99		1.00		137.27		2.34

- La aparición de un estado  $0^+$  en la banda (6,8), con una energía de  $(4.9 \pm 0.2) MeV$ .
- En la banda 13(3,9)1 los estados  $1_2^-$   $3_2^-$  y un estado adicional  $2_2^-$  aparecen con energías menores a las experimentales, como se muestra en la figura 3.5 lo cual abre el espectro permitiéndonos verlo menos denso en esa región. Mientras tanto los estados experimentales considerados previamente para esta banda bien pueden pertenecer a bandas de orden superior.
- Aparecen  $1^-$ ,  $2^-$  y dos  $3^-$  que corresponden a las bandas de la configuración (5,8). Con energías de entre 5 y 7 MeV. Uno de los estados  $3^-$  bien podría corresponder al estado considerado en la banda 13(3,9)1 en la figura 3.5.
- Los estados para espín  $J \geq 5$  no han logrado ser reproducidos con éxito. Si bien, la mayoría de estos se encuentran más allá de las consideraciones para el trabajo ( $J_{MAX} = 6$ ,  $E_{MAX} = 8MeV$ ), esto queda de manifiesto en las bandas 12(4,8)2 y 13(1,10).

## Capítulo 4

# Discusión general y Conclusiones

Para describir configuraciones de cúmulos suelen considerarse dos tipos de enfoque, el microscópico y el fenomenológico.

En el caso de enfoques microscópicos, que combinan espacios microscópicos con fuerzas efectivas nucleón-nucleón, el cálculo detallado de algunas configuraciones resulta bastante complicado, especialmente aquellas que incluyen estados excitados.

Por el otro lado los enfoques puramente fenomenológicos son relativamente fáciles de aplicar. Estos consideran interacciones fenomenológicas entre los cúmulos y espacios que son construidos sin tomar en cuenta el Principio de Pauli. Suelen describir satisfactoriamente la parte más alta del espectro, pero usualmente fallan al describir regiones cercanas al estado base, donde la influencia del principio de exclusión es bastante importante.

Es por eso que los modelos semimicroscópicos, construidos con base en espacios microscópicos e interacciones fenomenológicas, parecen los más adecuados para dar la mejor descripción de sistemas de cúmulos.

La parte microscópica es considerada por la parte física que contiene, a cualquier escala es importante tomar en cuenta el PEP. Ya sea que el sistema por describir sean las moléculas  $O_2$  u  $O_3$ ; o los núcleos  $^{12}C$ ,  $^{32}S$  o  $^{48}Cr$ . Siempre se debe considerar la antisimetrización de los fermiones involucrados.



De ser el caso, en que las funciones de onda no muestren un traslape y la antisimetrización se muestre débil podremos de algún modo omitir el PEP y continuar con el modelo.

Es por eso que al describir las moléculas de  $O_2$  y  $O_3$ , se pasa por alto el principio de exclusión para los núcleos y de mayor manera para los protones y neutrones individuales.

Se mencionan estas moléculas en particular, pues contienen el mismo número tanto de protones como de neutrones que los núcleos de  $^{32}S$  y  $^{48}Cr$  cuyo tratamiento es totalmente diferente, pues aquí las interacciones y coordenadas de los nucleones son precisamente lo que determina el comportamiento del sistema, y otros elementos como los electrones quedan de lado.

Es decir, el orden de magnitud en el que estemos trabajando juega un papel importante en cuanto a qué variables utilizaremos en nuestra descripción. Siendo un sistema nuclear el que estamos tratando, son las variables relacionadas con los componentes, es decir los nucleones, las que habremos de ocupar y por supuesto de manera imprescindible el Principio de Exclusión.

También debemos considerar que por el principio de incertidumbre, no es posible determinar que los cúmulos, ya sea que hablemos de partículas  $\alpha$  o  $^{16}O$  se encuentren específicamente en una posición con respecto al resto. De esta manera cuando hablamos de una configuración geométrica, nos referimos a una configuración promedio.

De manera más correcta debemos pensar que nuestro sistema es descrito por una función de probabilidad para  $A$  partículas. Esta función puede presentar  $n$  crestas (3 para el  $^{12}C$  y 2 para el  $^{32}S$  por ejemplo), tales crestas significan que existe una mayor probabilidad de que los nucleones se ubiquen en una vecindad alrededor de ellas, formando cúmulos.

A grandes rasgos, hablamos de  $A$  nucleones “oscilando” entre estas crestas. Nosotros nos hemos dado la libertad de tomar cada cresta como un sistema con cierta independencia del resto, y considerar las interacciones entre ellas, reduciendo el grado de complejidad del tratamiento.

En contraste, las interacciones fenomenológicas son utilizadas porque simplemente son más fáciles de aplicar.

Comprendiendo todas estas condiciones puramente físicas, las herramientas matemáticas dentro del modelo son simples de utilizar, pues todo parte del oscilador armónico y ya ha sido descrito en el Capítulo 1.

Tenemos en nuestras manos una herramienta práctica y sencilla que eficazmente describe el comportamiento de sistemas de núcleos ligeros ( $^{12}C$ ) como medianos ( $^{32}S$ ).

La importancia de considerar o no el PEP fue discutida y sus efectos mostrados en la sección 3.1 donde se han comparado resultados con modelos que no lo han tomado en cuenta.

Conforme los sistemas contienen más partículas involucradas, sus tratamientos se van volviendo más complejos y fenómenos físicos que no son universales como el PEP comienzan a aparecer. Tal ha sido el caso de la forbiddenness que aparece independientemente del modelo con el que se esté tratando. El SACM, también puede darle solución a este problema a través de la ecuación 3.6 y con el procedimiento ya descrito en la sección 3.2.1.

Sin embargo, el hecho de que el sistema no pueda ser descrito tal cual fue planteado en el Capítulo 1 puede hacer pensar en que la naturaleza misma rechaza la configuración tal como se está buscando. Mayormente si el modelo encaja por si mismo para estados de orden superior.

Es decir, si el estado base no puede ser descrito como un sistema de dos cúmulos idénticos es por que su configuración no es tal. Viéndolo desde el punto de vista de la función de onda de 32 nucleones, al “excitar uno de los oxígenos” lo que estamos haciendo es modificar alguna de las crestas, de tal modo que los cúmulos a tratar sean diferentes ( $^{28}Si + \alpha$  como en [48] o  $^{20}Ne + ^{12}C$ ) y para estados más excitados exista como tal la configuración  $^{16}O + ^{16}O$ . Sin embargo como recurso matemático resulta formidable, pues cumple el objetivo que es utilizar un sistema previamente considerado donde ambos cúmulos son esféricos y no deformados como el  $^{12}C$ .

## 4.1. Conclusiones

En particular habría que enlistar las conclusiones obtenidas para el caso de nuestros dos sistemas:

$^{12}C$

- Cada banda corresponde a un estado intrínseco  $(\lambda, \mu)$  y sus estados corresponden a rotaciones del mismo. Dos estados con diferente representación  $[(\lambda_1, \mu_1) \neq (\lambda_2, \mu_2)]$  no pueden coexistir en una misma banda. Por otro lado, la paridad está dada por  $\pi = (-1)^{n_\pi}$ . Y para cada nivel de excitación  $n_\pi$  los irrep son diferentes, por lo tanto: los estados con paridad positiva no pueden estar en la misma banda que los estados con paridad negativa.
- Desaparecen los dobletes  $4^+ - 4^-$  en bandas comunes. Son parcialmente reproducidos y separados por paridad.
- Aparece una segunda banda  $1^-$ .
- No aparece el estado  $5^-$  en la banda del estado Hoyle.

$^{32}S$

- La necesidad de aplicar el concepto de forbiddenness, y aquí puede señalarse que en los modelos citados en el Capítulo 2, prácticamente pasa por alto el estado base del  $^{32}S$ , a excepción del  $\alpha$ -CM. Muy probablemente hayan tenido dificultades para encontrarlo precisamente al ignorar la forbiddenness.
- Una vez introducido este concepto, si se usa de manera adecuada, el modelo continúa siendo igual de sencillo en cuanto a requerimientos matemáticos y computacionales, que para un sistema donde no existe la forbiddenness ( $^{12}C$  por ejemplo).
- La aparición de un estado  $0^+$  en la banda (6,8), con una energía de  $(4.9 \pm 0.2) MeV$ .

- En la banda 13(3,9)1 los estados  $1_2^-$   $3_2^-$  y un estado adicional  $2_2^-$  aparecen con energías menores a las experimentales, como se muestra en la figura 3.5 lo cual abre el espectro permitiéndonos verlo menos denso en esa región. Mientras tanto los estados experimentales considerados previamente para esta banda bien pueden pertenecer a bandas de orden superior.
- Aparecen  $1^-$ ,  $2^-$  y dos  $3^-$  que corresponden a las bandas de la configuración (5,8). Con energías de entre 5 y 7 MeV. Uno de los estados  $3^-$  bien podría corresponder al estado considerado en la banda 13(3,9)1 en la figura 3.5.
- Los estados para espín  $J \geq 5$  no han logrado ser reproducidos con éxito. Si bien, la mayoría de estos se encuentran más allá de las consideraciones para el trabajo ( $J_{MAX} = 6$ ,  $E_{MAX} = 8MeV$ ), esto queda de manifiesto en las bandas 12(4,8)2 y 13(1,10).

### Conclusiones generales

- Ante la complejidad que conlleva desarrollar modelos puramente microscópicos y la problemática de los modelos fenomenológicos pasando por alto el PEP, es preciso considerar modelos que tomen lo mejor de cada caso.
- El modelo semimicroscópico algebraico de cúmulos nucleares se manifiesta como una opción, ya que al considerar solo el movimiento relativo entre cúmulos tiene la simpleza de un modelo algebraico. Además, al construir un espacio que es compatible con el modelo de capas, se consideran solo estados permitidos por el PEP, como cualquier modelo microscópico.
- Además contiene un Hamiltoniano fenomenológico lo cual facilita ajustes en los espectros.
- Los espectros tanto del  $^{12}C$  como del  $^{32}S$  logran ser reproducidos de una manera bastante aceptable, con esto verificamos que el modelo funciona en núcleos pequeños y medianos.
- Se ha explorado el concepto de forbiddenness y un método para corregir sus efectos. Exitosamente se ha aplicado en el  $^{32}S$ .

# Bibliografía

- [1] Gamow G 1930, Proc. Roy. Soc. 1930 A 126, 632
- [2] M.P. Fewell, American Journal of Physics 63 (1995) 6534
- [3] S.M. Wong, Introductory Nuclear Physics, Wiley-VCH, Weinheim 2014
- [4] F. Iachello Phys. Rev. C 23 (1981), 2778
- [5] H.J. Daley, F. Iachello, Ann. Phys. (NY) 167 (1986),73
- [6] Walter Greiner, Joachim A. Maruhn, D.A. Bromley Nuclear Models-Springer-Verlag (1996)
- [7] Cseh J, Lévai G. Ann. Phys. (NY) 230 (1994), 165
- [8] K Wildermuth, Y. C. Tang, A Unified Theory of the Nucleus, Academic Press, New York, 1977
- [9] J. Cseh, W. Scheid, J. Phys. G: Nucl. Phys. 18 (1992), 1419
- [10] K. Wildermuth, Th. Kanellopoulos, Nucl. Phys. 7 (1958)150
- [11] J.P. Elliott, Proc. R. Soc. London A 245, 128 (1958).
- [12] J.P. Elliott, Proc. R. Soc. London A 245, 562 (1958).
- [13] J. Blomqvist, A. Molinari, Nucl. Phys. A 106, 545 (1968).

- [14] T.W. Boutton, D.C. Coleman, D.C., B. Fry, B. (1991). Stable carbon isotope ratios of natural materials: 2 Atmospheric, terrestrial, marine, and freshwater environments. United States: Academic Press, Inc.
- [15] M. Freer, H.O.U. Fynbo, Progress in Particle and Nuclear Physics, 78 (2014) 1
- [16] E. Opik, Proc. R. Ir. Acad. A 54 (1951) 49.
- [17] E.E. Salpeter, Astrophys. J. 115 (1952) 326.
- [18] R. de Diego, E. Garridoa, D.V. Fedorovb, A.S. Jensenb, Physics Letters B 695 (2011) 324328
- [19] F. Hoyle, Astrophys. J. Suppl. Ser. 1 (1954) 12.
- [20] D.N.F. Dunbar, R.E. Pixley, W.A. Wenzel, W. Whaling, Phys. Rev. 92 (1953) 649.
- [21] C.W. Cook, W.A. Fowler, C.C. Lauritsen, T. Lane, Phys. Rev. 107 (1957) 508.
- [22] D. DellAquila et al. Phys. Rev. Lett. 119, 132501 (2017)
- [23] K. Ikeda, et al., Prog. Theor. Phys. Suppl. (1968) 464. Extra Numbers.
- [24] S. Karataglidis, et al., Phys. Rev. C 52 (1995) 861.
- [25] A.C. Dreyfuss, K.D. Launey, T. Dytrych, J.P. Draayer, C. Bahri, Phys. Lett. B 727, 511 (2013).
- [26] H. Marenau, Phys. Rev. C 59 (1941) 37
- [27] D.M. Brink, in: C. Bloch (Ed.), Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Varenna, 1965, Course 36, Academic Press, New York, 1966, p. 247.
- [28] D.M. Brink, Nuclear Phys. A 91 (1967) 1.
- [29] D.M Brink, J. Phys.Conf..Ser. 111 (2008)012001
- [30] H. Morinaga, Phys. Rev. 101 (1956)254.

- [31] Y. Funaki, et al. Eur. Phys.J.A.28(2006) 259.
- [32] A. Tohsaki, et al. Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 192501.
- [33] Y. Funaki, A. Tohsaki, H. Horiuchi, P. Schuck G. Röpke, Phys. Rev. C 67 (2003) 051306.
- [34] T. Yamada, P. Schuck, Phys. Rev. C 69 (2004) 024309
- [35] T. Yamada, P. Schuck, Eur. Phys. J. A 26 (2005) 185
- [36] Y. Funaki, H. Horiuchi, W. von Oertzen, G. Roepke, Peter Schuck, A. Tohsaki, T. Yamada, Phys. Rev. C 80 (2009)064326
- [37] Y. Funaki, et. al., Eur. Phys. J. A 24 (2005)321.
- [38] Y. Kanada En'yo, H. Horiuchi, Prog. Theoret. Phys. 142 (2001) 205.
- [39] Y. Kanada En'yo, Progr. Theoret. Phys. 117 (2007) 655
- [40] R Bijker 2017 J. Phys.: Conf. Ser. 863 012009
- [41] E. Margaret Burbidge, G. R. Burbidge, William A. Fowler, and F. Hoyle Rev. Mod. Phys. 29, 547
- [42] G. Reidemeister, Nuclear Physics A197 (1972) 631
- [43] D. Scharnweber,W. Greiner, U. Mosel, Nuclear Physics A (1971) 257278.
- [44] J. Maruhn, W. Greiner, Z. Physik 251 (1972) 431-457
- [45] T. Ando, K. Ikeda, A. Tohsaki-Suzuki, Progress of theoretical Physics, Vol. 61, No. 1, 1979.
- [46] T. Ando, K. Ikeda, A. Tohsaki-Suzuki, Progress of theoretical Physics, Vol. 64, No. 5, 1980.
- [47] W. Bauhoff, H. Schultheis, R. Schultheis, Phys. Rev. C 22 (1980)
- [48] J. Cseh, G. Lévai, et.al. Phys. Rev. C 58 2144 (1998).

- [49] P.O. Hess, Eur. Phys. J. A 54, 32 (2018)
- [50] M. Moshinsky, Y.F. Smirnov, The harmonic oscillator in modern physics, Harwood Academic Publishers, Amsterdam, 1996.
- [51] H. Horiuchi, Prog. Theor. Phys. 51, 1266 (1974)
- [52] P.O. Hess, G. Lévai, J. Cseh, Phys. Rev. C 54, 2345 (1996).
- [53] D.J. Marín-Lámbarri, R. Bijker, M. Freer et al., Phys.Rev. Lett. 113, 012502 (2014)
- [54] P.O. Hess, et. al. Eur. Phys. J. A 55 71 (2019)
- [55] Smirnov Y F and Tchuvilsky Y M 1984 Phys. Lett. B 134 25
- [56] H Yépez-Martínez, P.O. Hess, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 42 (2015) 095109 (13pp)
- [57] Morales Hernández Giovani Erick, (2012) Introducir «Cranking» en el Modelo Semimicroscópico de Cúmulos Nucleares y Transiciones de Fase (tesis de pregrado) Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México, México
- [58] M.Freer, A.C. Merchant J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 23 (1997) 261