Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Familias Independientes: Teorema de Balcar-Franěk y familias σ-intependientes maximales

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TíTULO DE:

Matemática

PRESENTA:

ESTEFANÍA DEL CARMEN RIVIELLO RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2019

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno Apellido Paterno Apellido Materno Nombre(s) Teléfono Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Carrera Número de cuenta	1. Datos del alumno Riviello Rodríguez Estefanía del Carmen 5664-2397 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 412003604
2. Datos del tutor Grado Nombre(s) Apellido Materno Apellido Paterno	2. Datos del tutor Dr. Roberto Pichardo Mendoza
3. Datos de Sinodal 1 Grado Nombre(s) Apellido Materno Apellido Paterno	3. Datos de Sinodal 1 Dr. David Meza Alcántara
4. Datos de Sinodal 2 Grado Nombre(s) Apellido Materno Apellido Paterno	4. Datos de Sinodal 2 M. en C. Rafael Rojas Barbachano
5. Datos de Sinodal 3 Grado Nombre(s) Apellido Materno Apellido Paterno	5. Datos de Sinodal 3 Dr. Iván Martínez Ruiz
6. Datos de Sinodal 4 Grado Nombre(s) Apellido Materno Apellido Paterno	6. Datos de Sinodal 4 Dra. Gabriela Campero Arena
7. Datos del trabajo escrito Título Número de páginas Año	7. Datos del trabajo escrito Familias Independientes: Teorema de Balcar-Franěk y familias σ-intependientes maximales 79 2019

No fate but what we make

AGRADECIMIENTOS

A mis maestros que constantemente me motivan a empujar mis límites y buscar siempre mejorar en todo ámbito. Sus enseñanzas van más allá de lo académico y siempre las tendré presentes.

A mis amigos, Paulina Agret Torres y Yaudiel Erasmo Sanchez, que son la familia que escojo.

A mis hermanas que son mis complices, mi compás moral y protectoras. Yaya!

Principalmente quiero agracecer a mis papás. No sólo he tenido su amor y apoyo incodicional, pero también han sido mis mejores guías en la vida. Con su ejemplo me han enseñado valentía, fortaleza y generosidad para enfrentar cualquier obstáculo. Son los mejores padres que pude haber pedido y me siento afortunada y honorada de ser su hija.

RESUMEN

Las familias independientes en álgebras booleanas se han vuelto una herramienta importante en el estudio de la teoría de conjuntos.

El propósito de la tesis es el de detallar dos resultados relacionados con familias independientes: el Teorema de Balcar-Franěk (toda álgebra booleana A completa e infinita tiene una familia independiente de tamaño $|A|$) y que la existencia de una familia σ-independiente maximal implica que la Hipótesis del Continuo es cierta. Exhibimos esto en tres partes: en el primer capítulo estableceremos las definiciones fundamentales y mostraremos los resultados pertinentes. Principalmente cubriremos temas de combinatoria (por ejemplo, la prueba de la versión general del Lema del Δ-sistema), órdenes parciales (en particular la noción de forcing de Cohen) y álgebras booleanas. Definiremos familias independientes y exploraremos estos objetos matemáticos con ejemplos y algunos resultados. El primer resultado (Teorema de Pospíšil) nos dice que si el álgebra booleana A tiene una familia independiente S, entonces A tiene al menos $2^{|S|}$ ultrafiltros. Luego, mostramos que dado κ, un cardinal infinito, se tiene que el conjunto potencia de κ tiene una familia independiente de tamaño 2^κ (Teorema de Kantorovich-Hausdorff).

El segundo capítulo estará dedicado a generalizar el Teorema de Kantorovich-Hausdorff a álgebras de Boole, es decir, el Teorema de Balcar-Franěk. Para ello, estudiaremos algunas funciones cardinales con el propósito de mostrar que ciertas álgebras booleanas admiten una descomposición que nos será útil para probar el teorema central del capítulo. También abarcaremos temas relacionados con conjuntos independientes de anticadenas maximales y conjuntos independientes de subálgebras que nos ayudarán a construir familias independientes en distintos casos. En la última sección se utilizará todo lo visto para probar el Teorema de Balcar-Franěk y como corolario, calcularemos la cardinalidad del espacio de Stone de un álgebra de Boole completa e infinita.

Finalmente, el tercer capítulo está dedicado a las familias θ-independientes maximales (dado un cardinal infinito θ), donde mostraremos que la existencia de una familia σ-independiente maximal implica la hipótesis del continuo. El texto concluye con una discusión de la

relación entre la existencia de este tipo de familias y la existencia de cardinales medibles. Estos resultados se presentan originalmente en el artículo de Kunen llamado "Maximal σ-independent families" que aparece en la publicación Fundamenta Mathematicae (ver [4]).

Se recomienda que el lector esté familiarizado con los conceptos y resultados básicos de la teoría de conjuntos y de álgebras booleanas con la intención de que nuestro trabajo pueda ser leído de manera fluida y clara. De no ser, así se invita a consultar los textos [2] y [5] para cubrir los prerrequisitos necesarios.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

En este capítulo estableceremos los conceptos que se usarán a lo largo de la tesis y enunciaremos algunos resultados de álgebras booleanas que nos serán de utilidad en el estudio de las familias independientes.

Dados θ, un cardinal, y X y Y, conjuntos, entonces:

1. $[X]^{\theta}$ representará a la familia de subconjuntos de X cuya cardinalidad es θ, es decir, $[X]^{\theta} = \{E \subseteq X : |E| = \theta\}$.

2. $[X]^{\leqslant\theta}$ representará a la familia de subconjuntos de X cuya cardinalidad es menor o igual a θ, es decir, $[X]^{\leqslant\theta} = \{E \subseteq X : |E| \leqslant \theta\}$.

3. $[X]^{<\theta}$ representará a la familia de subconjuntos de X cuya cardinalidad es menor que θ, es decir, $[X]^{<\theta} = \{E \subseteq X : |E| < \theta\}$.

4. ${}^{X}Y$ representará al conjunto de todas las funciones de X en Y.

5. Denotaremos por $\mathscr{P}(X)$ al conjunto potencia de X.

Si f es una función, $\operatorname{dom}(f)$ y $\operatorname{img}(f)$ representarán el dominio e imagen de f, respectivamente. Además, si E es un conjunto, denotaremos a la imagen directa de E bajo f por $f[E]$, y con $f^{-1}[E]$ al conjunto $\{x \in \operatorname{dom}(f) : f(x) \in E\}$. Usaremos $f^{-1}\{y\}$ en lugar de $f^{-1}[\{y\}]$.

Adicionalmente, $\operatorname{ot}(W)$ representará al tipo de orden del conjunto bien ordenado W. Para cualquier ordinal α denotaremos por $\operatorname{cf}\alpha$ a su cofinalidad. Diremos que un cardinal κ es regular si $\operatorname{cf}\kappa = \kappa$. Si $\operatorname{cf}\kappa \neq \kappa$, diremos que κ es singular. Para cualquier cardinal κ, κ^{+} denotará al sucesor de κ.

Definición 1.1. Dadas dos funciones, f y g, definimos

$$f \circ g = \{(x, z) : \exists y \ ((x, y) \in g \wedge (y, z) \in f)\}.$$

En particular, la composición de f con g se puede realizar incluso si $\operatorname{img}(g)$ no es un subconjunto de $\operatorname{dom}(f)$.

Definición 1.2. Diremos que una función f es una *función cardinal* si los elementos de la imagen son cardinales.

Definición 1.3. Sean E un conjunto no vacío y $\{X_e : e \in E\}$ una familia de conjuntos no vacíos. Definimos al *producto cartesiano* de $\{X_e : e \in E\}$ (denotado por $\prod\{X_e : e \in E\}$) como el conjunto de todas las funciones de elección, es decir, $x \in \prod\{X_e : e \in E\}$ si y sólo si $x : E \to \bigcup\{X_e : e \in E\}$ satisface que $x(e) \in X_e$ para cada $e \in E$.

Todo lo que no se defina explícitamente en el presente texto deberá entenderse como en [2].

1.1 Combinatoria infinita

Proposición 1.4. *$\kappa^\kappa = 2^\kappa$ para cualquier κ, cardinal infinito.*

Demostración. Sea κ un cardinal infinito. Como $2 < \kappa$, entonces $2^\kappa \leqslant \kappa^\kappa$. Por otro lado, $\kappa < 2^\kappa$ por el Teorema de Cantor [2, Teorema 7.26]. Por lo que tenemos que $\kappa^\kappa \leqslant 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$. Así, concluimos que $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. #

Definición 1.5. Sean α un ordinal y θ un cardinal. Definimos a ${}^{<\theta}\alpha$ como el conjunto de todas las funciones cuyo dominio es un ordinal menor a θ y cuya imagen está contenida en α. Además, denotaremos a la cardinalidad de ${}^{<\theta}\alpha$ por $\alpha^{<\theta}$.

Note que si $\alpha > 0$ y tomamos $\beta < \gamma < \theta$, entonces ${}^{\beta}\alpha$ y ${}^{\gamma}\alpha$ son ajenos. Por esta razón, $\alpha^{<\theta} = \sup\{|{}^{\xi}\alpha| : \xi < \theta\}$.

Lema 1.6. *Sean κ y θ cardinales infinitos con θ regular. Entonces $\kappa \leqslant |[\kappa]^{<\theta}| \leqslant \kappa^{<\theta}$.*

Demostración. Como $\kappa = |\{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\}|$ y $\{\{\alpha\} : \alpha < \kappa\} \subseteq [\kappa]^{<\theta}$, entonces $\kappa \leqslant |[\kappa]^{<\theta}|$. Ahora, para cualquier $D \in [\kappa]^{<\theta}$ definamos $A_D = \{f \in {}^{|D|}D : f \text{ es suprayectiva}\}$. Note que $\emptyset \neq A_D \subseteq {}^{<\theta}\kappa$. Además, si $D, E \in [\kappa]^{<\theta}$ fueran tales que hay $f \in A_D \cap A_E$, entonces $D = \operatorname{img} f = E$ ya que f es suprayectiva, y por ende, $A_D = A_E$. De esta manera, si tomamos $\phi : [\kappa]^{<\theta} \to \bigcup\{A_D : D \in [\kappa]^{<\theta}\}$, una función de elección, entonces tenemos que ϕ es inyectiva y por lo tanto, $|[\kappa]^{<\theta}| \leqslant |\bigcup\{A_D : D \in [\kappa]^{<\theta}\}| \leqslant |{}^{<\theta}\kappa| = \kappa^{<\theta}$. #

Lema 1.7. *Si $\kappa \geqslant 1$ y $\theta \geqslant 1$ son números cardinales, entonces* $\max\{\theta, \kappa\} \leqslant \kappa^{<\theta}$.

Demostración. Es fácil notar que las funciones $f : \theta \to {}^{<\theta}\kappa$ y $g : \kappa \to {}^{<\theta}\kappa$ dadas por $f(\xi) = \xi \times \{0\}$ y $g(\eta) = \{(0, \eta)\}$ son inyectivas. De esta manera, el resultado queda probado. #

Lema 1.8. *Sean α un ordinal mayor que 1 y θ un cardinal infinito. Entonces, se tiene que* $\alpha^{<\theta} = (\alpha + 1)^{<\theta}$.

Demostración. Cuando $\omega \leqslant \alpha$, tenemos que $|{}^{\xi}\alpha| = |{}^{\xi}(\alpha + 1)|$ para cualquier $\xi < \theta$ y en consecuencia, $\alpha^{<\theta} = (\alpha + 1)^{<\theta}$.

Por otro lado, note que si $2 \leqslant \alpha < \omega$, entonces los conjuntos $\bigcup\{{}^{n}\alpha : n < \omega\}$ y $\bigcup\{{}^{n}(\alpha + 1) : n < \omega\}$ son infinitos numerables. Además, las condiciones $\omega \leqslant \beta < \theta$ implican que $|{}^{\beta}\alpha| = |{}^{\beta}(\alpha + 1)|$. Por lo tanto también se tiene que $\alpha^{<\theta} = (\alpha + 1)^{<\theta}$. #

Proposición 1.9. *Sean κ y θ cardinales. Si θ es infinito regular y $\kappa \geqslant 2$, entonces* $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} = \kappa^{<\theta}$.

Demostración. Empecemos por notar que la desigualdad $\kappa^{<\theta} \leqslant (\kappa^{<\theta})^{<\theta}$ es corolario del lema 1.7. Para probar que $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} \leqslant \kappa^{<\theta}$ usaremos la siguiente

Afirmación 1. Si $\alpha \in \theta \setminus 1$, entonces $|{}^{\alpha}({}^{<\theta}\kappa)| \leqslant \kappa^{<\theta}$.

Nuestro plan es definir una función inyectiva $\varphi : {}^{\alpha}({}^{<\theta}\kappa) \to {}^{<\theta}(\kappa + 1)$, y emplearemos el lema 1.8 para obtener nuestra desigualdad. Sea $f \in {}^{\alpha}({}^{<\theta}\kappa)$, arbitraria, y denotemos por W_f al buen orden que resulta al equipar a

$$\bigcup\{\{\xi\} \times (\operatorname{dom}(f(\xi)) + 1) : \xi < \alpha\}$$

con el orden lexicográfico. Hagamos $\delta_f := \operatorname{ot}(W_f)$ y sea $h_f : \delta_f \to W_f$ el isomorfismo de orden correspondiente. Más aún, $\pi_0^f : W_f \to \alpha$ y $\pi_1^f : W_f \to \sup\{\operatorname{dom}(f(\xi)) + 1 : \xi < \alpha\}$ serán las proyecciones en las coordenadas respectivas. Definamos

$$h_f^0 := \pi_0^f \circ h_f \quad \text{y} \quad h_f^1 := \pi_1^f \circ h_f.$$

Entonces, la función $\varphi(f) : \delta_f \to \kappa + 1$ dada por

$$\varphi(f)(\xi) = \begin{cases} f(h^0_f(\xi))(h^1_f(\xi)), & \text{si } h^1_f(\xi) \in \operatorname{dom}(f(h^0_f(\xi))) \\ \kappa, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

satisface que $\varphi(f) \in {}^{<\theta}(\kappa + 1)$ (recuerde que $\alpha < \theta = \operatorname{cf}(\theta)$).

Del párrafo anterior se deduce que $\varphi : {}^{\alpha}({}^{<\theta}\kappa) \to {}^{<\theta}(\kappa + 1)$ es una función. Probemos que es inyectiva. Si $f, g \in {}^{\alpha}({}^{<\theta}\kappa)$ son de tal manera que $f \neq g$, entonces existe

$$\beta := \min\{\xi < \alpha : f(\xi) \neq g(\xi)\}.$$

Tenemos dos posibilidades, $\operatorname{dom} f(\beta) \neq \operatorname{dom} g(\beta)$ ó $\operatorname{dom} f(\beta) = \operatorname{dom} g(\beta)$.

En el primer caso, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\operatorname{dom} f(\beta) < \operatorname{dom} g(\beta)$ y hagamos $\eta_0 := h^{-1}_g(\beta, \operatorname{dom} f(\beta))$ para obtener

$$\varphi(g)(\eta_0) \in \operatorname{img}(g(\beta)) \subseteq \kappa = \varphi(f)(\eta_0)$$

y así, $\varphi(f) \neq \varphi(g)$.

Para la segunda situación, existe $\gamma \in \operatorname{dom} f(\beta)$ con $f(\beta)(\gamma) \neq g(\beta)(\gamma)$ y de este modo, $\eta_1 := h^{-1}_f(\gamma, \beta) = h^{-1}_g(\gamma, \beta)$ y además,

$$\varphi(f)(\eta_1) = f(\beta)(\gamma) \neq g(\beta)(\gamma) = \varphi(g)(\eta_1);$$

nuevamente, $\varphi(f) \neq \varphi(g)$.

Observe que la afirmación nos garantiza que $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} \leqslant \theta \cdot (\kappa + 1)^{<\theta}$ y por los lemas 1.7 y 1.8, tenemos que $\theta \cdot (\kappa + 1)^{<\theta} = (\kappa + 1)^{<\theta} = \kappa^{<\theta}$, es decir, $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} \leqslant \kappa^{<\theta}$. #

Definición 1.10. Diremos que una familia de conjuntos B es un Δ-sistema con raíz r si para cualesquiera $x, y \in B$ se tiene que $x \cap y = r$ siempre que $x \neq y$.

Proposición 1.11. *Sean μ y λ cardinales infinitos tales que: $\lambda < \mu$ con $\mu = \operatorname{cf}(\mu)$ y cualquier $\alpha < \mu$ cumple que $\alpha^{<\lambda} < \mu$. Si un conjunto A satisface que $|A| \geqslant \mu$ y todo $x \in A$ cumple que $|x| < \lambda$, entonces A contiene un Δ-sistema de cardinalidad μ.*

Demostración. Como A tiene cardinalidad mayor o igual a μ, entonces existe $A_0 \in [A]^{\mu}$. Luego, $|\bigcup A_0| \leqslant \mu \cdot \lambda = \mu$, ya que $\lambda < \mu$. Sea $f : \bigcup A_0 \to \mu$ una función inyectiva. Llamemos $A_1 := \{f[x] : x \in A_0\}$. Dada la definición de A_1, si $E \subseteq A_1$ fuese un Δ-sistema con $|E| = \mu$, entonces $\{f^{-1}[y] : y \in E\} \subseteq A_0$ sería un Δ-sistema de cardinalidad μ contenido en A. De este modo, es suficiente con encontrar un Δ-sistema en A_1 de tamaño μ para demostrar la proposición.

Observemos que $\bigcup A_1 \subseteq \mu$ y $|A_1| = \mu$. Como para cada $x \in A_0$ tenemos que $|x| < \lambda$, entonces $|f[x]| < \lambda$, es decir, $A_1 \subseteq [\mu]^{<\lambda}$. Por ello, podemos definir $g : A_1 \to \lambda$ tal que para toda $y \in A_1$, $g(y) = \mathrm{ot}(y)$, donde y hereda su orden de μ.

Notemos que $A_1 = \bigcup \{g^{-1}\{\xi\} : \xi < \lambda\}$. Dado que $|A_1| = \mu$ y $\mu > \lambda$ es regular, entonces existe $\delta < \lambda$ tal que $|g^{-1}\{\delta\}| = \mu$. Sea $A_2 = g^{-1}\{\delta\}$. De esta forma, $A_2 \subseteq A_1 \subseteq [\mu]^{<\lambda}$ y para todo $x \in A_2$, el tipo de orden de x es δ. Luego, para cada $x \in A_2$ existe $h_x : \delta \to x$, un isomorfismo de orden. Observe que podemos escribir a cada $x \in A_2$ como el conjunto $\{h_x(\xi) : \xi < \delta\}$. Por lo tanto, $\bigcup A_2 = \bigcup_{\xi<\delta} \{h_x(\xi) : x \in A_2\}$.

Afirmación 1. $|\bigcup A_2| = \mu$

Como $|A_2| = \mu$, sabemos que $|\bigcup A_2| \leqslant \mu \cdot |\delta| \leqslant \mu \cdot \lambda = \mu$. Supongamos que $|\bigcup A_2| < \mu$ para llegar a una contradicción. Entonces $|\bigcup A_2| < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$, por lo que existe $\alpha < \mu$ tal que $\bigcup A_2 \subseteq \alpha$. Luego, $x \in A_2$ implica que $x \subseteq \bigcup A_2 \subseteq \alpha$. Sea $\phi : A_2 \to {}^{\delta}\alpha$ tal que $\phi(x) = h_x$ para cada $x \in A_2$. Si $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $h_x = h_y$ lo cual implica que $x = \mathrm{img}(h_x) = \mathrm{img}(h_y) = y$. Por ello, ϕ es una función inyectiva. Además, como $\delta < \lambda$, entonces ${}^{\delta}\alpha \subseteq {}^{<\lambda}\alpha$. De esto se deduce que $\mu = |A_2| \leqslant |{}^{\delta}\alpha| \leqslant |{}^{<\lambda}\alpha| = \alpha^{<\lambda} < \mu$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $|\bigcup A_2| = \mu$.

Ahora, tenemos que $|\bigcup A_2| = \mu$ y que $\bigcup A_2 = \bigcup_{\xi<\delta} \{h_x(\xi) : x \in A_2\}$ con $\delta < \lambda < \mu$ y μ regular. Por lo tanto, existe $\xi < \delta$ tal que $|\{h_x(\xi) : x \in A_2\}| = \mu$. Denotemos por ξ_0 al mínimo de los ordinales ξ menores que δ tales que $|\{h_x(\xi) : x \in A_2\}| = \mu$.

Observemos que $|\{h_x(\xi_0) : x \in A_2\}| = \mu$, es decir, el conjunto $\{h_x(\xi_0) : x \in A_2\}$ no es acotado en μ. Dada $\eta < \xi_0$ tenemos que el conjunto $\{h_x(\eta) : x \in A_2\}$ tiene cardinalidad menor que μ, ya que ξ_0 es mínimo. Por ello, el conjunto $\{h_x(\eta) + 1 : x \in A_2\}$ tiene cardinalidad menor que μ. Llamemos ζ_η al cardinal del conjunto $\{h_x(\eta) + 1 : x \in A_2\}$.

Hagamos

$$B := \{h_x(\eta) + 1 : x \in A_2 \text{ y } \eta < \xi_0\} = \bigcup_{\eta<\xi_0} \{h_x(\eta) + 1 : x \in A_2\}$$

y empleemos las desigualdades $\xi_0 < \delta < \lambda < \mu$ y la regularidad de μ para deducir que

$$|B| \leqslant |\xi_0| \cdot \sup\{\zeta_\eta : \eta < \xi_0\} < \mu \cdot \mu = \mu.$$

Tomemos $\rho := \sup\{h_x(\eta) + 1 : x \in A_2 \text{ y } \eta < \xi_0\} = \sup B$. Note que $\rho < \mu$.

Afirmación 2. Existe $\{x_\alpha : \alpha < \mu\} \subseteq A_2$ de tal modo que lo siguiente es cierto para cada $\alpha < \mu$

$$h_{x_\alpha}(\xi_0) > \max\{\rho,\ \sup\{h_{x_\beta}(\eta) : \beta < \alpha \text{ y } \eta < \delta\}\}.$$

Empleemos recursión transfinita: supongamos que para algún $\alpha < \mu$ tenemos definido $\{x_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq A_2$ tal que $h_{x_\beta}(\xi_0) > \max\{\rho, \sup\{h_{x_\gamma}(\eta) : \gamma < \beta \text{ y } \eta < \delta\}\}$ para cada $\beta < \alpha$.

Definamos $E := \{h_{x_\beta}(\eta) : \beta < \alpha \text{ y } \eta < \delta\}$ y observemos que $|E| \leqslant |\alpha||\delta| < \mu$. Así, $\sup E < \mu$ y como $\{h_x(\xi_0) : x \in A_2\}$ no está acotado en μ, existe $x_\alpha \in A_2$ con $h_{x_\alpha}(\xi_0) > \max\{\rho, \sup E\}$. Esto completa la recursión.

Nuestra construcción garantiza que si $\alpha < \beta < \mu$, entonces $h_{x_\beta}(\xi_0) \notin \{h_{x_\alpha}(\eta) : \eta < \delta\} = x_\alpha$, por lo que $h_{x_\beta}(\xi_0) \in x_\beta \setminus x_\alpha$, lo cual implica que $x_\alpha \neq x_\beta$.

Veamos que $x_\alpha \cap x_\beta \subseteq \rho$ siempre que $\alpha < \beta < \mu$. Sea $y \in x_\alpha \cap x_\beta$. Por la definición de ρ, nos bastará con demostrar que existen $\eta < \xi_0$ y $x \in A_2$ tales que $y < h_x(\eta) + 1$. Fijemos $\gamma_0, \gamma_1 < \delta$ de tal manera que $y = h_{x_\alpha}(\gamma_0) = h_{x_\beta}(\gamma_1)$. Como h_{x_α} y h_{x_β} son isomorfismos de orden de δ en x_α y x_β, respectivamente, solo debemos comprobar que $\gamma_i < \xi_0$ para alguna $i \in 2$. Si suponemos que $\gamma_0, \gamma_1 \geqslant \xi_0$, la desigualdad $\alpha < \beta$ y la afirmación 2 implican que $y = h_{x_\alpha}(\gamma_0) < h_{x_\beta}(\xi_0) \leqslant h_{x_\beta}(\gamma_1) = y$, lo cual es una contradicción.

Tomemos $R := \{\rho \cap x_\alpha : \alpha < \mu\}$ y para cada $z \in R$ fijemos una biyección $\phi_z : |z| \to z$. De este modo, R y $F = \{\phi_z : z \in R\}$ son equipotentes. Más aún, si $z \in R$, entonces $z = x_\alpha \cap \rho$, para algún $\alpha < \mu$, y en consecuencia, $|z| \leqslant |x_\alpha| = |\delta| \leqslant \delta < \lambda$. Luego, $F \subseteq {}^{<\lambda}\rho$ y como $\rho < \mu$, las hipótesis de nuestra proposición implican que $|R| = |F| \leqslant \rho^{<\lambda} < \mu$. Así, la regularidad de μ garantiza que existe $r \in R$ con la propiedad de que el conjunto $D := \{\alpha < \mu : x_\alpha \cap \rho = r\}$ tiene cardinalidad μ.

Si $\alpha, \beta \in D$ son tales que $\alpha < \beta$, entonces $x_\alpha \cap x_\beta \subseteq \rho$ y, por ende, $x_\alpha \cap x_\beta = (x_\alpha \cap x_\beta) \cap \rho = (x_\alpha \cap \rho) \cap (x_\beta \cap \rho) = r \cap r = r$.

En resumen, $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ es un Δ-sistema con raíz r, de cardinalidad μ y contenido en $A_2 \subseteq A_1$. #

El siguiente teorema es conocido como el Lema del Δ-sistema.

Teorema 1.12 (Lema del Δ-sistema)**.** *Sean λ y μ cardinales tales que $\omega \leqslant \lambda < \mu = \mathrm{cf}(\mu)$ y $\alpha^{<\lambda} < \mu$ para cualquier $\alpha < \mu$. Si $\{b_\alpha : \alpha < \mu\}$ satisface que $|b_\alpha| < \lambda$ para toda $\alpha < \mu$, entonces existe $B \in [\mu]^\mu$ de tal modo que $\{b_\alpha : \alpha \in B\}$ es un Δ-sistema.*

Demostración. Sea $A = \{b_\alpha : \alpha < \mu\}$. Si $|A| < \mu$, existe $B \in [\mu]^\mu$ de tal modo que $|\{b_\alpha : \alpha \in B\}| = 1$ y, naturalmente, todo conjunto unipuntual es un Δ-sistema. Por otro lado, si $|A| = \mu$, aplicamos la proposición 1.11 para hallar un Δ-sistema $C \in [A]^\mu$ y hacemos $B = \{\alpha \in \mu : b_\alpha \in C\}$ para concluir. #

1.2 Órdenes y la noción de forcing de Cohen

Para las siguientes definiciones de esta sección, tomaremos $(\mathbb{P}, \leqslant)$, un orden parcial fijo.

Definición 1.13. Diremos que $D \subseteq \mathbb{P}$ es *denso* en $\mathbb{P}$ si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe un $d \in D$ de manera que $d \leqslant p$.

Definición 1.14. Sean $p, q \in \mathbb{P}$.

1. Diremos que p y q son *compatibles en* $\mathbb{P}$ si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Usaremos la notación $p \mid q$ ó $q \mid p$ para abreviar la frase "p y q son compatibles".

2. Diremos que p y q son *incompatibles en* $\mathbb{P}$ si no existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Usaremos la notación $p \perp q$ ó $q \perp p$ para abreviar la frase "p y q son compatibles".

Definición 1.15. Sea $A \subseteq \mathbb{P}$.

1. Diremos que A es una *cadena en* $\mathbb{P}$ si cualesquiera dos elementos de A son comparables.

2. Se dirá que A es una *anticadena en* $\mathbb{P}$ si cualesquiera dos elementos de A son incompatibles.

3. Diremos que A es una *anticadena maximal en* $\mathbb{P}$ si es anticadena y para cualquier anticadena B en $\mathbb{P}$ que cumple la contención $A \subseteq B$ se sigue la igualdad $A = B$.

A continuación presentamos una forma alternativa de describir las anticadenas maximales.

Lema 1.16. *Si W es una anticadena en el orden parcial $\mathbb{P}$, entonces W es una anticadena maximal si y sólo si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in W$ con $p \mid q$.*

La demostración de este resultado puede encontrarse en [6], proposición 1.5.

Definición 1.17. Sea μ un cardinal. Diremos que $\mathbb{P}$ tiene *la condición de la μ-anticadena*, la μ.c.c. para abreviar, si cualquier anticadena en $\mathbb{P}$ tiene cardinalidad menor a μ.

Definición 1.18. Para cualquier cardinal infinito λ y cualesquiera conjuntos I y J, se define

$$\mathrm{Fn}(I, J, \lambda) := \{p \subseteq I \times J \ : p \text{ es función y } |p| < \lambda\}.$$

Note que la contención inversa, $\supseteq$, es un órden parcial para el conjunto definido arriba, es decir, si $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$, entonces diremos que $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subseteq p$. Siempre que nos refiramos a $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ como noción de forcing u orden parcial estaremos pensando en $\supseteq$ como el orden parcial correspondiente.

Al conjunto $\mathrm{Fn}(I, J, \omega)$ lo denotaremos simplemente por $\mathrm{Fn}(I, J)$.

Lema 1.19. *Sean I y J conjuntos, y λ un cardinal. Si $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$, entonces $p \mid q$ si y sólo si $p \cup q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$.*

Demostración. Si $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ son compatibles, entonces existe $r \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ de tal manera que $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Por la definición de orden en $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$, tenemos que $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$. Luego, $p \cup q \subseteq r$. De esta manera, $p \cup q$ es función y $|p \cup q| \leqslant |r| < \lambda$. Así, $p \cup q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$.

Por otro lado, supongamos que $p, q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ son tales que $p \cup q \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$. Note que $p \subseteq p \cup q$ y $q \subseteq p \cup q$ implica que $p \cup q \leqslant p$ y $p \cup q \leqslant q$. Así, $p \cup q$ es un elemento de $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ por debajo de p y q, es decir, $p \mid q$. #

Por el lema anterior, podemos observar que la noción de compatibilidad entre elementos de $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ equivale a la compatibilidad de funciones. De esta manera, cuando tenemos $p, r \in \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ tales que $r \leqslant p$, decimos que r extiende a p.

Teorema 1.20. *Sean I y J conjuntos, donde $|J| \geqslant 2$, y sea λ un cardinal infinito regular. Entonces* $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ *tiene la* $(|J|^{<\lambda})^+$*.c.c.*

Demostración. Para simplificar notación, hagamos $\mu := (|J|^{<\lambda})^+$. Para demostrar nuestro teorema probaremos que ninguna familia indizada con μ puede ser una anticadena en $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$. Para esto, supongamos que $\{p_\xi : \xi < \mu\} \subseteq \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$. Si $\alpha < \mu$, entonces $|\alpha| \leqslant |J|^{<\lambda}$, así que $\alpha^{<\lambda} \leqslant (|J|^{<\lambda})^{<\lambda}$ y por la proposición 1.9, $\alpha^{<\lambda} \leqslant |J|^{<\lambda} < \mu$. Luego, por el teorema 1.12, existen $B \in [\mu]^\mu$ y r de tal modo que $\{\mathrm{dom}(p_\xi) : \xi \in B\}$ es un Δ-sistema con raíz r. En consecuencia, $|r| < \lambda$ y así, $|{}^r J| < \mu$. Luego, la función $f : B \longrightarrow {}^r J$ dada por $f(\xi) = p_\xi \restriction r$ debe tener una fibra de tamaño μ, es decir, existe $\alpha \in B$ con

$$|\{\xi \in B : p_\xi \restriction r = p_\alpha \restriction r\}| = \mu.$$

Tomemos $\beta \in f^{-1}\{p_\alpha \restriction r\} \setminus \{\alpha\}$ y observemos que la condición $p_\alpha \restriction r = p_\beta \restriction r$ implica que $p_\alpha \mid p_\beta$ (lema 1.19). #

Corolario 1.21. *Sean I y J conjuntos donde $J \neq \emptyset$, y sea λ un cardinal infinito singular. Entonces* $\mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ *tiene la* $(|J|^{<\lambda})^+$*.c.c.*

Demostración. Llamemos $\mu = (|J|^{<\lambda})^+$ y supongamos que existe $\{p_\xi : \xi < \mu\} \subseteq \mathrm{Fn}(I, J, \lambda)$ de tal modo que para cualesquiera $\xi < \eta < \mu$ se tiene que $p_\xi \perp p_\eta$. Sea $g : \mu \longrightarrow \lambda$ la función dada por $g(\xi) = |p_\xi|$. Así, podemos escribir a μ como $\bigcup\{g^{-1}\{\theta\} : \theta < \lambda \text{ es cardinal}\}$. Por la regularidad de μ, hay un cardinal $\theta < \lambda$ de tal manera que $Y = \{p_\xi : \xi \in g^{-1}\{\theta\}\}$ tiene tamaño μ. Note que como λ es singular, entonces $\theta < \lambda$ implica que $\theta^+ < \lambda$. Llamemos $\kappa := \theta^+$. De esta manera, ${}^{<\kappa}|J| \subseteq {}^{<\lambda}|J|$ lo cual implica que $|J|^{<\kappa} \leqslant |J|^{<\lambda}$ y por lo tanto $(|J|^{<\kappa})^+ \leqslant (|J|^{<\lambda})^+ = \mu$. Pero entonces Y es anticadena de tamaño mayor o igual que $(|J|^{<\kappa})^+$ en $\mathrm{Fn}(I, J, \kappa)$ con κ regular, lo cual contradice el teorema 1.20. #

1.3 Álgebras booleanas

En cuanto a la teoría de álgebras booleanas, nos estaremos basando en el libro [5]. Sin embargo, a lo largo del trabajo se usará notación distinta para algunos conceptos. Los que no sean especificados en esta sección se deben de tomar como en [5].

Sean A un álgebra de Boole, $a, b \in A$ y $E \subseteq A$. Entonces usaremos las siguientes notaciones:

- $a \vee b$ en lugar de $a + b$;
- $a \wedge b$ en lugar de $a \cdot b$;
- $\bigvee E$ y $\bigwedge E$ en lugar de $\sum E$ y $\prod E$, respectivamente;
- $a - b$ para el elemento $a \wedge (-b)$ en A.

Recordemos que las Leyes de De Morgan son válidas en las álgebras de Boole, es decir, para cualesquiera $a, b \in A$ tenemos las siguientes igualdades: $-(a \vee b) = (-a) - b$ y $-(a \wedge b) = (-a) \vee (-b)$; más aún, si E es un subconjunto de A para el cual existe $\bigvee E$ (respectivamente, $\bigwedge E$), entonces un cálculo rutinario muestra que también existen $\bigwedge\{-e : e \in E\}$ (respectivamente, $\bigvee\{-e : e \in E\}$) y $-\bigvee E = \bigwedge\{-e : e \in E\}$ (respectivamente, $-\bigwedge E = \bigvee\{-e : e \in E\}$).

Será de uso común para nosotros el emplear la notación $A^+ := A \setminus \{0\}$. Además, las operaciones booleanas definen un orden parcial. Así, cuando hablemos de compatibilidad, incompatibilidad, anticadenas y anticadenas maximales en un álgebra booleana A estaremos pensando en el orden parcial A^+. En particular, una anticadena en A será un conjunto $W \subseteq A^+$ de tal forma que $a \wedge b = 0$ siempre que $a, b \in W$ satisfagan $a \neq b$. Por otro lado, resultados clásicos de la teoría de álgebras booleanas garantizan que una anticadena $W \subseteq A$ es maximal si y sólo si $\bigvee W$ existe y es igual a 1.

Lema 1.22. *Sea E un subconjunto del álgebra booleana A y sea $a \in A$. Si $\bigvee E$ existe, entonces $\bigvee\{e \wedge a : e \in E\}$ también existe y*

$$a \wedge \bigvee E = \bigvee\{a \wedge e : e \in E\}.$$

Demostración. Sean $X := \{a \wedge e : e \in E\}$ y $b := a \wedge \bigvee E$. Veamos que b es cota superior de X. Si $e \in E$, entonces $e \leqslant \bigvee E$, por lo que $a \wedge e \leqslant a \wedge \bigvee E = b$.

Ahora, para concluir la prueba del lema sólo tenemos que probar que si $c \in A$ es una cota superior de X, entonces $b \leqslant c$; equivalentemente, si $c \in A$ satisface $b \nleqslant c$, entonces existe $e \in E$ con $a \wedge e \nleqslant c$.

Sea $c \in A$ de tal manera que $b \nleqslant c$. Esto implica que $(\bigvee E) \geqslant b - c \neq 0$ y entonces, $(\bigvee E) - (b - c) < \bigvee E$. Luego, existe algún $e \in E$, tal que $e \nleqslant (\bigvee E) - (b - c)$, es decir,

$$0 \neq e - \left[\left(\bigvee E\right) - (b - c)\right] = \left(e - \bigvee E\right) \vee (e \wedge (b - c)) = 0 \vee (e \wedge b) - c \leqslant (e \wedge a) - c.$$

Así, $a \wedge e \nleqslant c$. #

Es importante notar que cada vez que hablemos del *álgebra booleana* $\mathscr{P}(X)$, para algún conjunto X, estaremos pensando en el orden dado por la contención directa.

A continuación presentamos notación que será empleada abundantemente en el resto de la tesis.

Definición 1.23. Dada A, un álgebra de Boole, y $a \in A$ cualquiera, definimos $a^0 := a$ y $a^1 := -a$.

En seguida definiremos algunos conceptos que nos ayudarán a tener una noción de “tamaño" en un álgebra de Boole.

Definición 1.24. Sean A un álgebra de Boole y $F \subseteq A$. Diremos que F es un *filtro* en A si

1. $0 \notin F$ y $F \neq \emptyset$.

2. Si $u, v \in F$, entonces $u \wedge v \in F$.

3. Para cualesquiera $u \in F$ y $v \in A$, si $u \leqslant v$, entonces $v \in F$.

Definición 1.25. Sea A un álgebra de Boole y $U \subseteq A$ un filtro en A. Diremos que U es un *ultrafiltro* en A si es un filtro maximal, es decir, que para cualquier F, filtro en A, si $U \subseteq F$ entonces $U = F$.

El concepto de filtro, intuitivamente, nos sirve para determinar objetos del álgebra que son “grandes". Hágase notar que para cada filtro F de un álgebra booleana A, tenemos que $1 \in F$. Esto se deduce apartir de las condiciones 1 y 3 de la definición 1.24. De manera dual, definimos ideal para dar una noción de lo que significa que un objeto sea “pequeño".

Definición 1.26. Sean A un álgebra de Boole e $I \subseteq A$. Diremos que I es un *ideal* en A si

1. $0 \in I$ y $1 \notin I$.

2. Si $u, v \in I$, entonces $u \vee v \in I$.

3. Para cualesquiera $u \in I$ y $v \in A$, si $v \leqslant u$ entonces $v \in I$.

Definición 1.27. Sean A un álgebra de Boole e I un ideal en A. Diremos que I es *principal* en A si existe un elemento $a \in A$ de tal manera que $I = \{x \in A : x \leqslant a\}$, donde $\leqslant$ es el orden parcial de A. En caso contrario, se dirá que I es un *ideal no principal*.

Definición 1.28. Supongamos que A es un álgebra booleana. Dado $a \in A$, sea

$$A \upharpoonright a := \{x \in A : x \leqslant a\},$$

donde $\leqslant$ es el orden parcial de A.

Note que cualquier $E \subseteq A \upharpoonright a$ es un subconjunto de A. Por ello, si A es completa, entonces $A \upharpoonright a$ también es completa cuando se le equipa con el orden que hereda de A; los ceros de A y de $A \upharpoonright a$ coinciden y los elementos minimales de $(A \upharpoonright a)^+$ también son minimales en A^+, pero no necesariamente tienen el mismo uno (de hecho, a es el uno de $A \upharpoonright a$). Más aún, para cada $x \in A \upharpoonright a$, su complemento en $A \upharpoonright a$ es igual a $a - x := a \wedge (-x)$, donde $-x$ es el complemento de x en A.

Por otro lado, notemos que si estamos hablando del álgebra booleana $\mathscr{P}(X)$ para un conjunto X y tomamos $a \in \mathscr{P}(X)$, entonces $\mathscr{P}(X) \upharpoonright a = \mathscr{P}(a)$.

Definición 1.29. Sean A y B álgebras boleanas. Diremos que A *es isomorfa a* B ($A \cong B$) si existe una función $\varphi : A \to B$ con las siguientes propiedades:

1. $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(1) = 1$,

2. $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ para toda $a, b \in A$,

3. $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \vee \varphi(b)$ para toda $a, b \in A$ y

4. $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ para toda $a \in A$.

Decimos que la función φ es un *isomorfismo de* A *a* B.

Definición 1.30. Sean A un álgebra de Boole y $a \in A$. Diremos que a es un *átomo de A* si es un elemento minimal de A^+. Denotaremos por $\mathrm{Atom}(A)$ al conjunto de todos los átomos de A.

Es conveniente notar que para cualquier álgebra de Boole A, el conjunto $\mathrm{Atom}(A)$ es una anticadena en A.

Definición 1.31. Se dirá que un álgebra de Boole A es *atómica* si el conjunto $\mathrm{Atom}(A)$ es denso en A.

Recordemos que cuando hablamos de densidad (definición 1.13), trabajamos en el orden parcial en A^+, es decir, D es denso en A si $D \subseteq A^+$ y para cada $a \in A^+$ existe $d \in D$ con $d \leqslant a$.

Definición 1.32. Sea $X \subseteq A$. Llamaremos *subálgebra generada por X* al conjunto

$$\langle X \rangle = \bigcap \{B \subseteq A : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es subálgebra de } A\}.$$

Es fácil notar que $\langle X \rangle$ es subálgebra de A.

Dado X, un subconjunto de algún álgebra booleana A, haremos $X^* := \{-x : x \in X\}$.

Proposición 1.33. *Sea A un álgebra booleana y $X \subseteq A$. Para toda $a \in \langle X \rangle$ hay $n \in \omega$ y $\{S_i : i < n\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$ de tal manera que $a = \bigvee \{\bigwedge S_i : i < n\}$.*

Demostración. Llamemos $B = \{\bigvee \{\bigwedge S_i : i < n\} : \{S_i : i < n\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}\}$. Bastará mostrar que $B = \langle X \rangle$. En primer término, la contención $X \subseteq \langle X \rangle$ junto con el hecho de que $\langle X \rangle$ es una subálgebra de A implica que $B \subseteq \langle X \rangle$. Para demostrar que $\langle X \rangle \subseteq B$, veamos que B es subálgebra de A, es decir, veremos que lo siguiente es cierto para cualesquiera $a, b \in B$:

1. $0 \in B$,

2. $a \vee b \in B$ y

3. $-a \in B$.

Note primero que $\bigvee \emptyset = 0$, por lo que $0 \in B$. Ahora, si tomamos $a, b \in B$, entonces hay $n, m \in \omega$, $\{S_i : i < n\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$ y $\{R_j : j < m\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$ de tal manera que $a = \bigvee\{\bigwedge S_i : i < n\}$ y $b = \bigvee\{\bigwedge R_j : j < m\}$. Definamos $D_k = S_k$ para $k < n$ y $D_k = R_{k-n-1}$ para $n \leqslant k < n+m$. Así obtenemos que

$$a \vee b = \bigvee\{\bigwedge S_i : i < n\} \vee \bigvee\{\bigwedge R_j : j < m\} = \bigvee\{\bigwedge D_k : k < n+m\}$$

con $\{D_i : i < n+m\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$ y por lo tanto, $a \vee b \in B$.

Finalmente, sean $a \in B$, $n \in \omega$ y $\{S_i : i < n\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$ de tal manera que $a = \bigvee\{\bigwedge S_i : i < n\}$. Entonces, por las Leyes de De Morgan, $-a = \bigwedge\{\bigvee S_i^* : i < n\}$. Ahora, tomemos $E = \prod\{S_i^* : i < n\}$ y para cada $e \in E$ hagamos $R_e := \operatorname{img}(e)$. Se sigue que E es finito y $\{R_e : e \in E\} \subseteq [X \cup X^*]^{<\omega}$. Más aún, la distributividad de $\wedge$ sobre $\vee$ nos da $-a = \bigvee\{\bigwedge R_e : e \in E\}$, con lo cual, $-a \in B$.

Así, hemos demostrado que B es subálgebra de A. Por otro lado, para cada $x \in X$, $x = \bigvee\{\bigwedge\{x\}\}$ y, de este modo, $X \subseteq B$. Todo esto implica que $\langle X \rangle \subseteq B$. #

Definición 1.34. Sea E un conjunto y $\{A_e : e \in E\}$ una colección de álgebras booleanas. Entonces el producto cartesiano $\prod\{A_e : e \in E\}$ es llamado el *álgebra producto* considerando las siguientes operaciones: si $a, b \in \prod\{A_e : e \in E\}$ y $e \in E$, entonces

- $0(e) = 0 \in A_e$ y $1(e) = 1 \in A_e$,
- $(a \wedge b)(e) = a(e) \wedge b(e)$,
- $(a \vee b)(e) = a(e) \vee b(e)$ y
- $(-a)(e) = -a(e)$.

1.4 Completez

Definición 1.35. Si A es un álgebra de Boole y θ es un cardinal, diremos que A es θ-completa si para cualquier $S \subseteq A$ tal que $|S| < \theta$ tenemos que $\bigwedge S$ y $\bigvee S$ existen. De este modo, A será llamada *completa* si es $|A|^+$-completa.

Note que A es un álgebra booleana completa si y sólo si para cualquier $E \subseteq A$ se tiene que tanto $\bigvee E$ como $\bigwedge E$ existen.

Lema 1.36. *Sea A un álgebra booleana completa y λ un número cardinal. Si tenemos $E = \{x_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq A$ y definimos $e_\xi := \bigvee\{x_\eta : \eta \leqslant \xi\}$ y $d_\xi := e_\xi - \bigvee\{e_\eta : \eta < \xi\}$ para cada $\xi < \lambda$, entonces*

1. *$\xi < \eta < \lambda$ implica que $d_\xi \wedge d_\eta = 0$ y*

2. *$\bigvee E = \bigvee\{d_\xi : \xi < \lambda\}$.*

Demostración. Por definición, tenemos que si $\xi < \eta < \lambda$, entonces $d_\xi \wedge d_\eta = 0$. Luego, sólo debemos verificar que $\bigvee\{d_\xi : \xi < \lambda\} = \bigvee E$ para concluir la prueba. Haremos esto demostrando, por inducción transfinita, que $e_\xi = \bigvee\{d_\eta : \eta \leqslant \xi\}$, siempre que $\xi < \lambda$ (observe que $\bigvee E = \bigvee\{e_\eta : \eta < \lambda\}$).

Supongamos entonces que $\alpha < \lambda$ es tal que la igualdad de arriba se verifica para cada $\xi < \alpha$. Sea $e := \bigvee\{e_\xi : \xi < \alpha\}$. Como $e_\alpha, e \in A$, se sigue que

$$e_\alpha = (e_\alpha \wedge e) \vee (e_\alpha - e) = (e_\alpha \wedge e) \vee d_\alpha.$$

Por otro lado, el que $\{e_\xi : \xi < \lambda\}$ sea creciente nos da $e \leqslant e_\alpha$ y así, $e_\alpha = e \vee d_\alpha$. Este es el momento de emplear la hipótesis inductiva para obtener $e = \bigvee\{d_\xi : \xi < \alpha\}$ y en consecuencia, $e_\alpha = \bigvee\{d_\xi : \xi \leqslant \alpha\}$, tal y como se deseaba. #

Lema 1.37. *Sean A, un álgebra booleana completa, y μ un cardinal regular infinito. Si A satisface la μ.c.c., entonces para cualquier $X \subseteq A$ hay una anticadena $Y \in [A]^{<\mu}$ de tal manera que $\bigvee X = \bigvee Y$.*

Demostración. Enumeramos a X con $\lambda := |X|$, es decir, $X = \{x_\xi : \xi < \lambda\}$ y definamos d_ξ para cada $\xi < \lambda$ tal y como se hizo en el lema 1.36. Ahora hagamos $Y := \{y_\xi : \xi < \lambda\} \setminus \{0\}$ y empleamos el inciso 1 del lema 1.36 para deducir que Y es una anticadena en A. Como A tiene la μ.c.c., $|Y| < \mu$. Finalmente, el inciso 2 del lema 1.36 nos da $\bigvee Y = \bigvee X$. #

Ahora hablaremos del grado de completez y de saturación de un ideal, ambas nociones que serán ampliamente mencionadas en el capítulo 3 de este trabajo.

Definición 1.38. Sean A un álgebra de Boole completa, I un ideal en A, y θ un cardinal. Diremos que un ideal I es *θ-completo* si para cualquier $X \in [I]^{<\theta}$ se tiene que $\bigvee X \in I$.

Definición 1.39. Sean A un álgebra de Boole, I un ideal en A, y θ un cardinal. Diremos que un ideal I es *θ-saturado* si no existe $\{a_\xi : \xi < \theta\} \subseteq A \setminus I$ de tal modo que $a_\xi \wedge a_\eta \in I$ siempre que $\xi < \eta < \theta$.

Lema 1.40. *Sean A, un álgebra booleana completa, y κ un cardinal. Si I es un ideal en A que no es κ-completo, entonces existen $\lambda < \kappa$, un número cardinal, y $\{d_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq I$ de tal modo que $\bigvee\{d_\xi : \xi < \lambda\} \notin I$ y siempre que $\xi < \eta < \lambda$, se tiene que $d_\xi \wedge d_\eta = 0$.*

Demostración. Como I no es κ-completo, podemos denotar por λ al mínimo número cardinal para el que existe $E \subseteq I$ con $|E| = \lambda$ y $\bigvee E \notin I$. Claramente, $\lambda < \kappa$. Enumeremos a E como $E = \{x_\xi : \xi < \lambda\}$ y para cada $\xi < \lambda$ hagamos d_ξ tal y como aparece definido en el lema 1.36. La minimalidad de λ implica que $\{d_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq I$.

Aplicando el lema 1.36 se tiene que $\bigvee\{d_\xi : \xi < \lambda\} = \bigvee E \notin I$ y que si $\xi < \eta < \lambda$, entonces $d_\xi \wedge d_\eta = 0$. #

Proposición 1.41. *Sea A un álgebra booleana $|E|^+$-completa y E una anticadena maximal en A. Entonces $A \cong \prod\{A \upharpoonright e : e \in E\}$.*

Demostración. Observemos primero que al ser E anticadena maximal, entonces $\bigvee E = 1$. Luego, el lema 1.22 nos asegura que las igualdades siguientes son ciertas para cada $a \in A$.

$$a = a \wedge 1 = a \wedge \bigvee E = \bigvee\{a \wedge e : e \in E\}.$$

Ahora, definamos $B := \prod\{A \upharpoonright e : e \in E\}$ y la función $\varphi : A \longrightarrow B$ de manera que para cada $a \in A$ y $e \in E$ se tiene que $\varphi(a)(e) = e \wedge a$, y mostremos que φ es isomorfismo, esto es, verifiquemos que φ es una función suprayectiva tal que para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene lo siguiente:

1. $\varphi^{-1}\{0\} = \{0\}$,
2. $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)$ y
3. $\varphi(-a) = -\varphi(a)$.

Es claro que $\varphi(0) = 0 \in B$. Para ver que $\varphi^{-1}\{0\} \subseteq \{0\}$ tomemos $a \in A^+$. Por la observación del principio de la prueba, existe $e \in E$ de tal modo que $a \wedge e > 0$ y por ende $\varphi(a)(e) \neq 0$. Luego, $\varphi(a)$ no es el cero de B. Esto prueba el inciso 1.

Para mostrar la suprayectividad de φ, tomemos $f \in \prod\{A \restriction e : e \in E\}$ y definamos $a := \bigvee\{f(e) : e \in E\}$. Recordando que para cada $e \in E$ tenemos que $f(e) \in A \restriction e$ y que E es anticadena, fijamos $e_0 \in E$ y vemos que:

$$\varphi(a)(e_0) = e_0 \wedge a = e_0 \wedge \bigvee\{f(e) : e \in E\} = \bigvee\{e_0 \wedge f(e) : e \in E\} = e_0 \wedge f(e_0) = f(e_0).$$

Esto muestra que $\varphi(a) = f$ y con ello, la suprayectividad de φ.

Finalmente, sean $a, b \in \prod\{A \restriction e : e \in E\}$ y $e_0 \in E$. De el párrafo que sigue a la definición 1.28, en $A \restriction e_0$ sucede que

$$\varphi(-a)(e_0) = e_0 - a = -(e_0 \wedge a) = -\varphi(a)(e_0).$$

Por otro lado,

$$\varphi(a \wedge b)(e_0) = e_0 \wedge (a \wedge b) = (e_0 \wedge a) \wedge (e_0 \wedge b) = \varphi(a)(e_0) \wedge \varphi(b)(e_0).$$

Por lo tanto, φ es isomorfismo. #

Lema 1.42. *Si A es un álgebra booleana completa y atómica, entonces A y $\mathscr{P}(\mathrm{Atom}(A))$ son isomorfas.*

La demostración de este lema se puede encontrar en el corolario 2.7 en [5].

Lema 1.43. *Toda álgebra booleana completa A es isomorfa a un producto de la forma $(A \restriction w) \times (A \restriction -w)$, donde*

1. *$A \restriction w$ es isomorfa a $\mathscr{P}(S)$, para algún conjunto S, y*

2. *$A \restriction (-w)$ carece de átomos.*

Demostración. Sea $w = \bigvee \mathrm{Atom}(A)$. Si $w \in \{0, 1\}$, entonces $(A \restriction w) \times (A \restriction (-w))$ es igual a $\{0\} \times A$ o a $A \times \{0\}$; en el primer caso, la proyección en la segunda coordenada es un isomorfismo de $A \times \{0\}$ en A, mientras que en el otro caso basta con usar la proyección en la primera coordenada. Luego, por el resto de la prueba supondremos que $0 < w < 1$.

Como el conjunto $W = \{w, -w\}$ es anticadena maximal, la proposición 1.41 nos afirma que $A \cong \{A \restriction x : x \in W\} = (A \restriction w) \times (A \restriction (-w))$.

Afirmación 1. $A \restriction w$ es atómica.

Argumentemos primero que $\mathrm{Atom}(A) \subseteq \mathrm{Atom}(A \upharpoonright w)$. Para esto, sean $a \in \mathrm{Atom}(A)$ y $b \in (A \upharpoonright w)^+$ arbitrarios tales que $b \leqslant a$. Entonces $a \leqslant \bigvee \mathrm{Atom}(A) = w$ por lo que $b \leqslant a \leqslant w$ y b es tal que $b \in A^+$, así que $b = a$ y $a \in (A \upharpoonright w)^+$. Luego, $a \in \mathrm{Atom}(A \upharpoonright w)$.

Ahora, sea $x \in (A \upharpoonright w)^+$. Por el lema 1.22, $0 < x = x \wedge w = \bigvee\{x \wedge a : a \in \mathrm{Atom}(A)\}$, así que $x \wedge a > 0$ para algún $a \in \mathrm{Atom}(A)$. Por otro lado, las desigualdades $0 < x \wedge a \leqslant a$ implican que $x \wedge a = a$. De este modo, $a \in \mathrm{Atom}(A \upharpoonright w)$ y $a \leqslant x$, con lo cual se concluye la prueba de la afirmación.

Note que la afirmación y el lema 1.42 nos dan el inciso 1 del presente lema. Por otro lado, si $(A \upharpoonright (-w))^+$ tuviera un elemento minimal a, entonces a también sería minimal en A^+, es decir, sería un átomo de A. Esto implicaría que a sería un elemento positivo por debajo de w y de $-w$, lo cual es una contradicción. Así concluimos que $A \upharpoonright (-w)$ carece de átomos. $\#$

Asumiremos que A es un álgebra booleana completa para el resto de la sección. Con esta hipótesis en mente, si B es una subálgebra de A, se dirá que B una subálgebra completa de A si para cualquier $E \subseteq B$ se satisface que E tiene supremo en B y que éste coincide con el supremo de E calculado en A. Similarmente, dado un cardinal κ, diremos que B es una subálgebra κ-completa de A si para cualquier $E \in [B]^{<\kappa}$ se tiene que E posee supremo en B y éste es el mismo que el supremo de E obtenido en A.

Hágase notar que hay álgebras booleanas completas que poseen subálgebras no completas. Por ejemplo, tomemos al álgebra booleana completa $\mathscr{P}(\omega)$ y notemos que el conjunto dado por $B = \{X \in \mathscr{P}(\omega) : |X| < \omega \text{ ó } |\omega \setminus X| < \omega\}$ es una subálgebra de $\mathscr{P}(\omega)$. Además, para toda $n \in \omega$ se tiene que $\{n\} \in B$, pero $\{2n : n \in \omega\} \notin B$. Por lo tanto B no es completa.

Definición 1.44. Sea $X \subseteq A$ y sea κ un cardinal. Llamaremos *subálgebra κ-completa generada por X* y *subálgebra completa generada por X* a los conjuntos

- $\langle X\rangle^{\kappa\text{-}cm} = \bigcap\{B \subseteq A : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es subálgebra } \kappa\text{-completa de } A\}$ y
- $\langle X\rangle^{cm} = \bigcap\{B \subseteq A : X \subseteq B \text{ y } B \text{ es subálgebra completa de } A\}$,

respectivamente. Note que $\langle X\rangle^{\kappa\text{-}cm}$ es una subálgebra κ-completa de A y que $\langle X\rangle^{cm}$ es una subálgebra completa de A.

Cabe mencionar que no existe un resultado análogo a la proposición 1.33 para las subálgebras de la definición anterior.

Proposición 1.45. *Sea μ un cardinal regular infinito. Si A es un álgebra booleana completa que satisface la μ.c.c., entonces para cualquier $X \subseteq A$ se tiene que*

$$|\langle X\rangle^{cm}| \leqslant \max\{\omega, |X|\}^{<\mu}.$$

Demostración. Hagamos $\lambda := \max\{\omega, |X|\}$ y definamos recursivamente a la familia $\{X_\alpha : \alpha < \mu\}$ de la siguiente manera:

- $X_0 = X \cup \{0, 1\}$;
- $X_{\alpha+1} = X_\alpha \cup X_\alpha^* \cup \{\bigvee M : M \in [X_\alpha]^{<\mu}\}$ y
- $X_\alpha = \bigcup\{X_\beta : \beta < \alpha\}$, si α es un ordinal límite menor que μ.

Mostremos que $B := \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \mu\}$ es una subálgebra μ-completa de A. Claramente, $0 \in X_0 \subseteq B$. Ahora, si $a, b, \in B$, existen $\alpha, \beta < \mu$ de tal modo que $a \in X_\alpha$ y $b \in X_\beta$; luego, si $\gamma := \max\{\alpha, \beta\}$, entonces $\{a, b\} \in [X_\gamma]^{<\mu}$ y, por ende, $a \vee b \in X_{\gamma+1} \subseteq B$. Por otro lado, $-a \in X_\alpha^* \subseteq X_{\alpha+1} \subseteq B$.

Con respecto a la μ-completez: si $E \in [B]^{<\mu}$, sea $f : E \to \mu$ de tal modo que $e \in X_{f(e)}$, para cada $e \in E$. La regularidad de μ y la desigualdad $|E| < \mu$ implican que existe $\alpha < \mu$ con $\mathrm{img}(f) \subseteq \alpha$. Así, $E \in [X_\alpha]^{<\mu}$ y en consecuencia, $\bigvee E$, el supremo de E en A, es un elemento de $X_{\alpha+1} \subseteq B$.

De todo lo anterior se infiere que si $C := \langle X\rangle^{\mu\text{-}cm}$, entonces $C \subseteq B$.

Afirmación 1. $C = B$ y $|C| \leqslant \lambda^{<\mu}$.

Verificaremos nuestra afirmación probando por inducción transfinita que para todo $\beta < \mu$ se tiene que $X_\beta \subseteq C$ y $|X_\beta| \leqslant \lambda^{<\mu}$ (note que como consecuencia de la desigualdad previamente mencionada se obtiene que $|B| \leqslant \mu \cdot \lambda^{<\mu}$ y por el lema 1.7, $|B| \leqslant \lambda^{<\mu}$).

Observemos, en primer término, que $X_0 \subseteq C$, y de acuerdo con el lema 1.7,

$$|X_0| \leqslant \lambda \leqslant \lambda^{<\mu}.$$

Supongamos que $\alpha < \mu$ satisface $X_\alpha \subseteq C$ y $|X_\alpha| \leqslant \lambda^{<\mu}$. El que C sea subálgebra de A nos da $X_\alpha^* \subseteq C$; además, la μ-completez de C produce $\{\bigvee M : M \in [X_\gamma]^{<\mu}\} \subseteq C$. En resumen, $X_{\alpha+1} \subseteq C$. Por otro lado, $|X_\alpha^*| = |X_\alpha|$ y según el lema 1.6 y la proposición 1.9, $|[X_\alpha]^{<\mu}| \leqslant (\lambda^{<\mu})^{<\mu} = \lambda^{<\mu}$. De esto se deduce que

$$|X_{\alpha+1}| \leqslant 3 \cdot \lambda^{<\mu} = \lambda^{<\mu}.$$

Finalmente, si $\alpha < \mu$ es un ordinal límite, de tal modo que $X_\beta \subseteq C$ y $|X_\beta| \leqslant \lambda^{<\mu}$ para cada $\beta < \alpha$, entonces $X_\alpha \subseteq C$ y por el lema 1.7, $|X_\alpha| \leqslant |\alpha| \cdot \lambda^{<\mu} \leqslant \mu \cdot \lambda^{<\mu} = \lambda^{<\mu}$.

Si probamos que C es, de hecho, una subálgebra completa de A, entonces obtendremos la contención $\langle X\rangle^{cm} \subseteq C$ y por ende, la desigualdad enunciada en la proposición.

En primer término, el que C sea una subálgebra de A implica que toda anticadena en C también es una anticadena en A; luego, C satisface la μ.c.c. Ahora, si $X \subseteq C$, el lema 1.37 nos da $Y \in [C]^{<\mu}$ de tal manera que $\bigvee X = \bigvee Y \in C$. #

Lema 1.46. *Si $W \subseteq A^+$ es una anticadena maximal en A, entonces $\langle W\rangle^{cm} \cong \mathscr{P}(W)$.*

Demostración. Definamos $B := \{\bigvee E : E \subseteq W\}$ y mostremos que B es una subálgebra completa de A.

Como $0 = \bigvee \emptyset$, se tiene que $0 \in B$. Ahora, sean $a, b \in B$. Entonces existen $E_0, E_1 \subseteq W$ de tal forma que $a = \bigvee E_0$ y $b = \bigvee E_1$. Luego $a \vee b = (\bigvee E_0) \vee (\bigvee E_1) = \bigvee(E_0 \cup E_1)$, y por ende, $a \vee b \in B$. Para concluir que B es una subálgebra de A tomemos $a \in B$ y fijemos $E \subseteq W$ con $a = \bigvee E$. El que W sea anticadena maximal implica que

$$1 = \bigvee W = \bigvee(E \cup (W \setminus E)) = (\bigvee E) \vee \bigvee(W \setminus E)$$

y $(\bigvee E) \wedge \bigvee(W \setminus E) = \emptyset$; en otras palabras, $-a = -\bigvee E = \bigvee(W \setminus E)$; con lo cual $-a \in B$.

Ahora, con respecto a la completez de B: si $E \subseteq B$, entonces para cada $e \in E$ existe $H_e \subseteq W$ de tal manera que $e = \bigvee H_e$. Hagamos $H := \bigcup\{H_e : e \in E\}$ y notemos que $\bigvee E = \bigvee\{\bigvee H_e : e \in E\} = \bigvee H$; con lo cual, $\bigvee E \in B$, tal y como se requería.

De lo anterior se deduce que $\langle W\rangle^{cm} \subseteq B$. Por otro lado, el que $\langle W\rangle^{cm}$ sea una subálgebra completa que contiene a W implica que $B \subseteq \langle W\rangle^{cm}$. Así, $B = \langle W\rangle^{cm}$.

Mostremos que $\mathrm{Atom}(B) = W$. En primer lugar, si $a \in W$ y $b \in B^+$ satisfacen $b \leqslant a$, entonces hay $E \subseteq W$ de tal suerte que $a = \bigvee E$. Como $a > 0$, $E \neq \emptyset$ y por esta razón podemos fijar $c \in E$. Luego, $a, c \in W$ y $c \leqslant b \leqslant a$; dado que W es anticadena, obtenemos que $a = b = c$. En consecuencia, $a \in \mathrm{Atom}(B)$.

Ahora, en la otra dirección: sea $a \in B^+ \setminus W$. Existe $E \subseteq W$ con $a = \bigvee E$ y, por ende, $|E| \geqslant 2$. De este modo, si $b \in E$, se sigue que $0 < b < a$, es decir, $a \notin \mathrm{Atom}(B)$.

En vista de que B es completa y W es un subconjunto denso de B, podemos emplear el lema 1.42 para concluir que $\langle W \rangle^{cm} \cong \mathscr{P}(W)$. #

1.5 Familias Independientes

Finalmente estamos en condiciones de definir el tema central de esta tesis, las familias indepenedientes. Para ello, consideramos conveniente introducir la notación siguiente.

Definición 1.47. Sean λ un cardinal, A un álgebra de Boole λ-completa y $S \subseteq A$. Para cada $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \lambda)$ definimos $\overline{p} := \bigwedge\{a^{p(a)} : a \in \mathrm{dom}(p)\}$.

Note que, con la notación establecida en la definición previa, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{p} &= \bigwedge(\{a : a \in p^{-1}\{0\}\} \cup \{-a : a \in p^{-1}\{1\}\}) \\ &= \bigwedge\{a : a \in p^{-1}\{0\}\} - \bigvee\{a : a \in p^{-1}\{1\}\}) \\ &= \bigwedge p^{-1}\{0\} - \bigvee p^{-1}\{1\}.\end{aligned}$$

Además, si $p = \emptyset$, entonces $\overline{p} = \bigwedge\{a^{\emptyset(a)} : a \in \mathrm{dom}(\emptyset)\} = \bigwedge \emptyset = 1$. En particular, cuando $A = \mathscr{P}(X)$, con X un conjunto, se sigue que $\overline{\emptyset} = X$.

Definición 1.48. Sea S un subconjunto de A, un álgebra de Boole, y sea θ un cardinal. Para cada $r \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$ definimos (recuerde la definición 1.47)

$$S \restriction r := \{x \wedge \overline{r} : x \in S \setminus \mathrm{dom}(r)\}.$$

Claramente, $S \restriction r$ es un subconjunto de $A \restriction \overline{r}$.

Definición 1.49. Sean θ cardinal infinito, A un álgebra de Boole completa y $S \subseteq A$. Diremos que S es *θ-independiente* en A si y sólo si para cualquier $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$ se tiene que $\overline{p} \neq 0$ (ver definición 1.47).

Definición 1.50. Sean θ cardinal infinito y X un conjunto. Diremos que $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ es *θ-independiente uniforme* en X si y sólo si para cada $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$, $|\overline{p}| = |X|$.

Usaremos los términos *"independientes"* e *"independientes uniformes"* para referirnos a las familias ω-independientes y ω-independientes uniformes, respectivamente.

Note que si $S \subseteq \mathscr{P}(X)$ es θ-independiente y $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$, entonces $D_i := p^{-1}\{i\}$, para cada $i \in 2$, es un elemento de $[S]^{<\theta}$; además, $D_0 \cap D_1 = \emptyset$ y se tiene que

$$\overline{p} = \bigwedge\{y : y \in D_0\} \cap \bigwedge\{X \setminus y : y \in D_1\}$$

(recuerde que el símbolo $\bigcap \emptyset$ carece de sentido, pero $\bigwedge \emptyset = X$ en $\mathscr{P}(X)$). Algunos autores definen a las familias θ-independientes en términos de subconjuntos ajenos de S de cardinalidad menor que θ. Por la observación anterior, estas dos definiciones son equivalentes.

Ejemplo 1.51. *Tomemos $S = \{m\mathbb{N} : m \in \mathbb{N}$ y m es primo$\}$ en el álgebra booleana $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ donde $m\mathbb{N} := \{mn : n < \omega\}$ para cada $m < \omega$. Sea $p \in \mathrm{Fn}(S, 2)$ y enumeremos a su dominio, digamos $\mathrm{dom}(p) = \{m_0\mathbb{N}, m_1\mathbb{N}, ..., m_n\mathbb{N}\}$. Luego, por definición, $\overline{p}$ contiene a las soluciones del sistema:*

$$\begin{gathered} x \equiv p(m_0)\ mod(m_0) \\ x \equiv p(m_1)\ mod(m_1) \\ \vdots \\ x \equiv p(m_n)\ mod(m_n) \end{gathered}$$

Ahora, como m_i y m_j son primos relativos para cada $i < j \leqslant n$, el Teorema Chino del Residuo nos dice que el sistema tiene solución, y por lo tanto S es independiente en $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

En el siguiente resultado consideraremos el orden dado en la definición 1.18.

Lema 1.52. *Sea A un álgebra booleana y S un conjunto θ-independiente en A. Entonces, para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P} = \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$, $p \mid q$ si y sólo si $\overline{p} \wedge \overline{q} \neq 0$*

Demostración. Supongamos que $p, q \in \mathbb{P}$ son tales que $p \mid q$. Entonces, por el lema 1.19, $r = p \cup q$ es tal que $p \subseteq r$, $q \subseteq r$ y $r \in \mathbb{P}$. Esto implica que $\overline{r} \leqslant \overline{p}$ y $\overline{r} \leqslant \overline{q}$ y que $\overline{r} \neq 0$ ya que S es θ-independiente. Por lo tanto $0 \neq \overline{r} \leqslant \overline{p} \wedge \overline{q}$.

Ahora probemos la otra implicación por contrapuesta. Sean $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $p \perp q$. Por la definición del orden en $\mathbb{P}$ tenemos que p y q son incompatibles como funciones, es decir, existe $a \in \operatorname{dom}(p) \cap \operatorname{dom}(q)$ tal que $p(a) \neq q(a)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p(a) = 0$ y $q(a) = 1$. Entonces $\overline{p} \leqslant a$ y $\overline{q} \leqslant -a$. Esto implica que $\overline{p} \wedge \overline{q} \leqslant a \wedge (-a) = 0$, por lo que $\overline{p} \wedge \overline{q} = 0$. #

Recuerde que, dada un álgebra booleana A, diremos que $S \subseteq A$ es un *subconjunto centrado* (o que *tiene la propiedad de la intersección finita*) si para cualquier $E \in [S]^{<\omega}$ se satisface que $\bigwedge E \neq 0$. Más aún, todo subconjunto centrado de A está contenido en algún ultrafiltro en A.

Una aplicación inmediata de las familias independientes es que pueden ser usadas para estimar por abajo el número total de ultrafiltros del álgebra booleana.

Teorema 1.53. *Sean A un álgebra de Boole y $S \subseteq A$ una familia independiente. Entonces A tiene al menos $2^{|S|}$ ultrafiltros.*

Demostración. Sean A y S como en el enunciado del teorema. Para cada $f \in {}^{S}2$ definamos $G_f = \{x^{f(x)} : x \in S\}$. Como S es independiente, G_f tiene la propiedad de la intersección finita, por lo que existe U_f, un ultrafiltro en A, tal que $G_f \subseteq U_f$.

Ahora, si $f, g \in {}^{S}2$ son tales que $f \neq g$, entonces existe $x \in S$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Esto implica que $x^{f(x)} = -x^{g(x)}$, $x^{g(x)} \in G_g$ y $x^{f(x)} \in G_f$. Como U_g es filtro, entonces $x^{f(x)} = -x^{g(x)} \notin U_g$, es decir, $x^{f(x)} \in U_f \setminus U_g$. Por lo tanto $U_f \neq U_g$.

Así, A tiene al menos $2^{|S|}$ ultrafiltros. #

Definición 1.54. Sea U un ultrafiltro en el álgebra booleana $\mathscr{P}(X)$ para algún conjunto X. Si U cumple que para todo $x \in U$ ocurre que $|x| = |X|$, entonces diremos que U es un *ultrafiltro uniforme*.

El siguiente teorema que se demostrará es el Teorema de Kantorovich-Hausdorff, también conocido como el Teorema de Fichtenholz, o el Teorema de Fichtenholz-Kantorovich-Hausdorff. Kantorovich y Fichtenholz mostraron el teorema para $\kappa = \theta = \omega$, y fue Hausdorff quien lo generalizó. La prueba que se mostrará es la del caso general.

Teorema 1.55. *Sean κ y θ cardinales infinitos con θ regular. Si $\kappa^{<\theta} = \kappa$, entonces el álgebra booleana $\mathscr{P}(\kappa)$ contiene una familia θ-independiente uniforme de cardinalidad 2^κ. En particular, para cualquier κ infinito, $\mathscr{P}(\kappa)$ contiene una familia independiente uniforme de cardinalidad 2^κ.*

Demostración. Por el lema 1.6, $\kappa \leqslant |[\kappa]^{<\theta}| \leqslant \kappa^{<\theta} = \kappa$, lo cual implica que $|[\kappa]^{<\theta}| = \kappa$. Análogamente, se tiene que $|[[\kappa]^{<\theta}]^{<\theta}| = \kappa$. Definamos $P = [\kappa]^{<\theta} \times [[\kappa]^{<\theta}]^{<\theta}$. De esta manera tenemos que $|P| = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Tomemos el álgebra de Boole $\mathscr{P}(P)$ y definamos para cada $u \in \mathscr{P}(\kappa)$,

$$X_u = \{(F, \mathscr{F}) \in P : F \cap u \in \mathscr{F}\} \text{ y } S = \{X_v : v \in \mathscr{P}(\kappa)\}.$$

Veamos que $|S| = 2^\kappa$. Sean $u, v \in \mathscr{P}(\kappa)$ tales que $u \neq v$. Entonces $u \setminus v \neq \emptyset$ o $v \setminus u \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u \setminus v \neq \emptyset$. Sea $\alpha \in u \setminus v$, y sean $F = \{\alpha\}$ y $\mathscr{F} = \{F\}$. Como $F \cap u = \{\alpha\} = F \in \mathscr{F}$, entonces $(F, \mathscr{F}) \in X_u$. Por otro lado, $F \cap v = \emptyset \notin \mathscr{F}$ y entonces $(F, \mathscr{F}) \notin X_v$. Por ello $X_u \neq X_v$. Este razonamiento demuestra que $|S| \geqslant 2^\kappa$ y como $S \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$, concluimos que $|S| = 2^\kappa$.

Ahora, mostremos que S es θ-independiente uniforme. Si ocurriese que $\kappa < \theta$, entonces se tendría que $\mathscr{P}(\kappa) = [\kappa]^{\leqslant\kappa} \subseteq [\kappa]^{<\theta}$, y en consecuencia, $\kappa < 2^\kappa \leqslant |[\kappa]^{<\theta}|$, lo cual contradice la igualdad $|[\kappa]^{<\theta}| = \kappa$. Por lo tanto, $\theta \leqslant \kappa$. Sea $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$. Como $|p| < \theta \leqslant \kappa < 2^\kappa$, existen $u, v \in \mathscr{P}(\kappa)$ distintos de tal manera que $\{X_u, X_v\} \cap \mathrm{dom}(p) = \emptyset$. Definamos $q = p \cup \{(X_u, 0), (X_v, 1)\}$ para obtener $q \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$; además, $\overline{q} \subseteq \overline{p}$, por lo que será suficiente mostrar que $|\overline{q}| = \kappa$.

Comencemos por fijar $\alpha, \beta \in \theta \setminus 1$ y conjuntos $\{u_i : i \in \alpha\}$, $\{v_j : j \in \beta\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ de manera que que $q^{-1}\{0\} = \{X_{u_i} : i < \alpha\}$ y $q^{-1}\{1\} = \{X_{v_i} : i < \beta\}$. Así, obtenemos que $\overline{q} = \bigcap_{i<\alpha} X_{u_i} \setminus \bigcup_{j<\beta} X_{v_j}$. Ahora, para cada $(i, j) \in \alpha \times \beta$ definamos $B_{ij} = u_i \triangle v_j$, y sea

$$e : \alpha \times \beta \to \bigcup\{B_{ij} : (i, j) \in \alpha \times \beta\}$$

una función de elección. Para cada $(i, j) \in \alpha \times \beta$, hagamos $\alpha_{ij} := e(i, j)$. Tomemos $E = \{\alpha_{ij} : (i, j) \in \alpha \times \beta\} = \mathrm{img}(e)$ y $\mathscr{E} = \{F \in [\kappa]^{<\theta} : E \subseteq F\}$. Sabemos que $\mathscr{E} \subseteq [\kappa]^{<\theta}$ y en consecuencia, $\mathscr{E}$ tiene a lo más κ elementos. Además $|E| < \theta \leqslant \kappa$, por lo cual la función $f : \kappa \setminus E \to \mathscr{E}$ tal que a cada γ la manda a $E \cup \{\gamma\}$ es inyectiva. En consecuencia, $|\mathscr{E}| = \kappa$.

Sean $F \in \mathscr{E}$ y $\mathscr{F} = \{F \cap u_i : i < \alpha\}$. Entonces, por definición de $\mathscr{F}$, tenemos que para toda $i < \alpha$, $(F, \mathscr{F}) \in X_{u_i}$. Por otro lado, si $i < \alpha$ y $j < \beta$, entonces $\alpha_{ij} \in u_i \setminus v_j$ o $\alpha_{ij} \in v_j \setminus u_i$. Si $\alpha_{ij} \in u_i \setminus v_j$, entonces $\alpha \in F \cap u_i \setminus (F \cap v_j)$, lo cual implica que $F \cap u_i \neq F \cap v_j$. Análogamente si $\alpha_{ij} \in u_i \setminus v_j$, se deduce que $F \cap u_i \neq F \cap v_j$. Entonces, para cualquier $j < \beta$, $F \cap v_j \notin \mathscr{F}$, es decir, $(F, \mathscr{F}) \notin X_{v_j}$. Por lo tanto, $(F, \mathscr{F}) \in \overline{q}$. Este proceso se puede hacer para cada $F \in \mathscr{E}$ por lo que $|\overline{q}| = \kappa$.

Dado que $|P| = \kappa$, existe $\psi : P \to \kappa$ biyectiva. Como S es θ-independiente uniforme en $\mathscr{P}(P)$ de tamaño 2^κ, el conjunto S'$= \{\psi[D] : D \in S\}$ es θ-independiente uniforme en $\mathscr{P}(\kappa)$ de tamaño 2^κ.

Note que para cualquier κ infinito, siempre se tiene que $\kappa^{<\omega} = \kappa$. Entonces, para cualquier κ infinito existe $S \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ independiente uniforme de cardinalidad 2^κ. $\#$

Con este resultado podemos demostrar el Teorema de Pospíšil.

Teorema 1.56. *Para cualquier κ, cardinal infinito, existen exactamente 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes en $\mathscr{P}(\kappa)$.*

Demostración. Denotemos por $\mathscr{U}$ al conjunto de todos los ultrafiltros uniformes en $\mathscr{P}(\kappa)$. Como cada ultrafiltro en $\mathscr{P}(\kappa)$ es un elemento de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\kappa))$, entonces $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(\kappa))$. Por ello, basta demostrar que al menos hay 2^{2^κ} ultrafiltros uniformes en $\mathscr{P}(\kappa)$ para demostrar nuestro resultado.

Por el teorema 1.55, el álgebra booleana $\mathscr{P}(\kappa)$ posee una familia independiente uniforme de cardinalidad 2^κ, digamos S. Para cada $f \in {}^S 2$ definamos

$$G_f = \{x \subseteq \kappa : |\kappa \setminus x| < \kappa\} \cup \{x : x \in f^{-1}\{0\}\} \cup \{\kappa \setminus x : x \in f^{-1}\{1\}\}.$$

Observe que si $x \in [\kappa]^\kappa$ y y es un subconjunto de κ tal que $|\kappa \setminus y| < \kappa$, se tiene que $x = (x \cap y) \cup ((\kappa \setminus y) \cap x)$. Como $|(\kappa \setminus y) \cap x| \leqslant |\kappa \setminus y| < \kappa$ y $|x| = \kappa$, obtenemos $|x \cap y| = \kappa$.

Ahora, si $F \in [G_f]^{<\omega}$ y definimos $D := \{x \in F : |\kappa \setminus x| < \kappa\}$, entonces existe $p \in \mathrm{Fn}(S, 2)$ de tal modo que $p \subseteq f$ y $F = D \cup p^{-1}\{0\} \cup \{\kappa \setminus x : x \in p^{-1}\{1\}\}$. Como S es independiente uniforme, entonces $|\overline{p}| = \kappa$. Si es el caso que $D = \emptyset$, se sigue que $\bigwedge F = \overline{p}$ y por ello, $|\bigwedge F| = |\overline{p}| = \kappa$. De lo contrario, se tiene que $\bigwedge F = \overline{p} \cap \bigcap D$ y por lo dicho en el párrafo anterior (más inducción finita) deducimos que $|\overline{p} \cap \bigcap D| = \kappa$.

De lo hecho en el párrafo anterior se sigue que para cada $f \in {}^S2$, G_f es una familia centrada y así, existe U_f un ultrafiltro en κ con la propiedad de que $G_f \subseteq U_f$. El argumento que empleamos en la prueba del teorema 1.53 nos muestra que $U_f \neq U_g$ siempre que $f, g \in {}^S2$ sean distintas. Además, por la definición de G_f tenemos que si $y \in [\kappa]^{<\kappa}$, entonces $\kappa \setminus y \in G_f$ y en consecuencia, $U_f \in \mathscr{U}$. #

CAPÍTULO 2: EL TEOREMA DE BALCAR-FRANĚK

La demostración fue publicada en 1982 en el artículo llamado “Independent families in complete Boolean algebras” de la revista Transactions of the American Mathematical Society. El teorema de Balcar-Franěk dice que toda álgebra de Boole infinita y completa tiene una familia independiente de la misma cardinalidad del álgebra. Como consecuencia, podemos determinar el número total de ultrafiltros en dicha álgebra.

Las primeras tres secciones tienen por propósito demostrar los lemas necesarios para probar dicho resultado, introduciendo las definiciones necesarias. La demostración del teorema aparece en la última sección del presente capítulo.

2.1 Conjuntos finitamente distinguidos

Definición 2.1. Sea $F \subseteq X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$. Diremos que F es *finitamente distinguido* si para cualquier $D \in [F]^{<\omega}$ existe $\alpha < \delta$ de tal manera que $\pi_\alpha \upharpoonright D$ es una función inyectiva.

Para el siguiente resultado emplearemos la notación usada previamente en la definición.

Lema 2.2. *Si cada X_α es infinito, entonces X tiene un subconjunto finitamente distinguido $F \subseteq X$ con $|F| = |X|$.*

Demostración. Supondremos que $\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$ es de tal manera que si $\xi < \eta < \delta$ entonces $|X_\xi| \leqslant |X_\eta|$, y haremos la demostración por inducción sobre δ. Para $\delta = 1$, $F = X$ funciona. Ahora, supongamos que $\delta > 0$ y que para toda $\gamma < \delta$ existe $F \subseteq \prod\{X_\xi : \xi < \gamma\}$, finitamente distinguido, tal que $|F| = |\prod\{X_\xi : \xi < \gamma\}|$. Tenemos dos casos.

<u>Caso 1.</u> $\delta = \alpha + \beta$ con $0 < \alpha, \beta < \delta$ (naturalmente, estamos hablando de suma de ordinales aquí).

Sean $X_1 = \prod\{X_\xi : \xi < \alpha\}$ y $X_2 = \prod\{X_\eta : \alpha \leqslant \eta < \delta\}$. Note que X_1 y X_2 son distintos del vacío. Además, la función $\varphi : X_1 \times X_2 \longrightarrow X$ que a cada pareja (f, g) le relaciona $\varphi(f, g) = f \cup g$, es biyectiva. Así, se tiene que $|X| = |X_1 \times X_2|$, por lo que $|X| = |X_1|$ o $|X| = |X_2|$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $|X| = |X_1|$.

Por hipótesis inductiva, existe $F_1 \subseteq X_1$ finitamente distinguido en X_1, de manera que $|F_1| = |X_1| = |X|$. Como $X_2 \neq \emptyset$, existe $h \in X_2$. Definamos $F = \{g \cup h : g \in F_1\}$. Note que $F \subseteq X$. Veamos que F es finitamente distinguido.

Si $n \in \omega$ y $f_0, f_1, ..., f_n \in F$, entonces $f_0 \restriction \alpha, f_1 \restriction \alpha, ..., f_n \restriction \alpha \in F_1$. Como F_1 es finitamente distinguido, existe $\gamma < \alpha$ de tal manera que $(f_i \restriction \alpha)(\gamma) \neq (f_j \restriction \alpha)(\gamma)$ para cualquier $i < j \leqslant n$. De esta manera, si $i < j \leqslant n$, obtenemos que $f_i(\gamma) = (f_i \restriction \alpha)(\gamma) \neq (f_j \restriction \alpha)(\gamma) = f_j(\gamma)$. Por lo tanto, F es finitamanete distinguido.

<u>Caso 2.</u> Para toda $\alpha < \delta$ el tipo de orden de $\delta \setminus \alpha$ es δ (obsérvese que el presente caso se da justo cando el Caso 1 falla).

En particular, si $\mu = |\delta|$, entonces toda $\alpha < \delta$ cumple que $|\delta \setminus \alpha| = \mu$. Llamemos $E := [\delta]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$. Notemos que $|E| = |\delta| = |\mu|$, así que podemos enumerar a E con μ sin repeticiones, es decir, $E = \{e_\xi : \xi < \mu\}$, donde $\xi < \eta < \mu$ implica que $e_\xi \neq e_\eta$. Definamos recursivamente una función $i : E \to \delta$ como sigue: dado $\eta < \mu$, tenemos que $|\delta \setminus \max(e_\eta)| = \mu$ y que $\{i(e_\xi) : \xi < \eta\}$ es un subconjunto de δ con menos de μ elementos; luego, existe $i(e_\eta) \in \delta \setminus (\max(e_\eta) \cup \{i(e_\xi) : \xi < \eta\})$.

De lo anterior se deduce que $i : E \to \delta$ es inyectiva y que $\max(e_\eta) \leqslant i(e_\eta)$, para cualquier $\eta < \mu$.

Para cada $e \in E$ definamos $Y_e := \prod\{X_\alpha : \alpha \in i(e)\}$. Para cada $\beta \in e$, $\beta \leqslant i(e)$ y por la hipótesis que tenemos sobre $\{X_\xi : \xi < \delta\}$, podemos afirmar que $|X_\beta| \leqslant |X_{i(e)}|$. Así, $|Y_e| \leqslant |X_{i(e)}||e|$, con $X_{i(e)}$ infinito y e finito. Esto implica que $|Y_e| \leqslant |X_{i(e)}|$, y por lo tanto existe una función inyectiva $m_e : Y_e \to X_{i(e)}$.

Sea $^* : X \to X$ dada por

$$g^*(\beta) = \begin{cases} m_e(g \restriction e)(\beta), & \text{si } \beta = i(e) \text{ para alguna } e \in E \\ g(\beta), & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y tomemos al conjunto $F = \{g^* : g \in X\}$.

Afirmación 1. La función * es inyectiva y, en consecuencia, F es un subconjunto finitamente distinguido de X.

Sean $n \in \omega$ y $g_0,\ g_1,\ g_2, ...,\ g_n \in X$ distintos. Luego, existe $\alpha_{ij} < \delta$ para cada $i < j \leqslant n$

de tal manera que $g_i(\alpha_{ij}) \neq g_j(\alpha_{ij})$. Hagamos $e := \{\alpha_{ij} : i < j \leqslant n\}$ y observemos que las funciones $g_0 \upharpoonright e,\ g_1 \upharpoonright e,\ g_2 \upharpoonright e,\ ...,\ g_n \upharpoonright e$ son elementos distintos de Y_e. Luego, la inyectividad de m_e nos asegura que para $\beta = i(e)$ se tiene que

$$m_e(g_0 \upharpoonright e)(\beta),\ m_e(g_1 \upharpoonright e)(\beta),\ m_e(g_2 \upharpoonright e)(\beta),\ ...,\ m_e(g_n \upharpoonright e)(\beta)$$

son distintos dos a dos, es decir, $g_0^*,\ g_1^*,\ g_2^*, ...,\ g_n^*$ son distintos y por lo tanto, nuestro lema queda demostrado. #

Corolario 2.3. *Si $\{A_\alpha : \alpha < \delta\}$ es una familia de álgebras booleanas y, para cada $\alpha < \delta$, E_α es un subconjunto independiente e infinito de A_α, entonces el álgebra booleana producto $\prod\{A_\alpha : \alpha < \delta\}$ contiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|\prod\{E_\alpha : \alpha < \delta\}|$.*

Demostración. Por el lema anterior, existe $E \subseteq \prod\{E_\alpha : \alpha < \delta\}$ de tal manera que E es finitamente distinguido y tiene la propiedad de que $|E| = |\prod\{E_\alpha : \alpha < \delta\}|$. Veamos que E es independiente en el álgebra de Boole $A := \prod\{A_\alpha : \alpha < \delta\}$.

Tomemos $p \in \mathrm{Fn}(E, 2)$ y probemos que $\overline{p} \neq 0$ (note que el cálculo de $\overline{p}$ se está realizando en A). En vista de que $\overline{p} \in A$, bastará ver que $\overline{p}(\xi) \neq 0$ para algún $\xi < \delta$. Como $\mathrm{dom}(p) \in [E]^{<\omega}$ y E es finitamente distinguido, existe $\eta < \delta$ tal que $\pi_\eta \upharpoonright \mathrm{dom}(p)$ es una función inyectiva, donde $\pi_\eta : A \to A_\eta$ es la proyección en la η-ésima coordenada. Esto último nos permite definir $q : \pi_\eta[\mathrm{dom}(p)] \to 2$ mediante $q(a(\eta)) = p(a)$, para cada $a \in \mathrm{dom}(p)$. En consecuencia, el diagrama de abajo conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(p) \subseteq E \arrow[r, "\pi_\eta"] \arrow[d, "p"'] & E_\eta \arrow[dl, "q"] \\
2 &
\end{tikzcd}$$

y además $q \in \mathrm{Fn}(E_\eta, 2)$. Luego, el que E_η sea un subconjunto independiente de A_η nos da $\overline{q} \neq 0$. Más aún,

$$\begin{aligned}
\overline{p}(\eta) &= \Big(\bigwedge\{a^{p(a)} : a \in \mathrm{dom}(p)\}\Big)(\eta) \\
&= \bigwedge\{a^{p(a)}(\eta) : a \in \mathrm{dom}(p)\} \\
&= \bigwedge\{a(\eta)^{q(a(\eta))} : a \in \mathrm{dom}(p)\} = \overline{q} \neq 0.
\end{aligned}$$

#

2.2 Familias independientes de anticadenas maximales

Definición 2.4. Sea A un álgebra booleana. Diremos que $\mathcal{W}$, una familia de anticadenas maximales de A, es *independiente* si para cualquier $F \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ y cualquier $f \in \prod F$ se tiene que $\bigwedge \mathrm{img}(f) > 0$.

Las familias independientes de anticadenas maximales nos ayudan a analizar y construir familias independientes en distintos casos.

Observación 2.5. *Argumentemos que si tomamos dos elementos distintos W y V de un conjunto independiente de anticadenas maximales $\mathcal{W}$, estos dos tienen que ser ajenos. Si no fuera así, entonces habría $x \in W \cap V$ y, sin pérdida de generalidad, $y \in W \setminus V$. Luego, $x \wedge y = 0$ ya que son elementos distintos de la anticadena W. Definimos $F = \{W, V\}$ y $f = \{(W, y), (V, x)\}$. Como $\mathcal{W}$ es independiente, entonces $0 < \bigwedge \mathrm{img}(f) = \bigwedge\{x, y\} = x \wedge y = 0$, lo cual es una contradicción.*

Lema 2.6. *Si E es un subconjunto del álgebra booleana A tal que $\{\{e, -e\} : e \in E\}$ es una familia independiente de anticadenas maximales, entonces E es independiente.*

Demostración. Basta ver que a cada $q \in \mathrm{Fn}(E, 2)$ le podemos asociar el conjunto $F := \{\{e, -e\} : e \in \mathrm{dom}(q)\}$ y $f \in \prod F$ de manera que $f(\{e, -e\}) = e^{q(e)}$ para cada $e \in \mathrm{dom}(q)$. Así, $\overline{q} = \bigwedge \mathrm{img}(f) > 0$. #

Lema 2.7. *Sea A un álgebra booleana completa. Si E es un subconjunto independiente e infinito de A y W es una anticadena maximal para la cual*

$$\mathcal{W} := \{W\} \cup \{\{e, -e\} : e \in E\}$$

es una familia independiente de anticadenas maximales, entonces A tiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|E|^{|W|}$.

Demostración. Como W es anticadena maximal, entonces $A \cong \prod\{A \restriction w : w \in W\}$ por la proposición 1.41. Entonces mostraremos que $\prod\{A \restriction w : w \in W\}$ tiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|E|^{|W|}$.

Primero mostremos que E y W tienen la propiedad de que

$$|\{e \in E : \{e, -e\} \cap W \neq \emptyset\}| \leqslant 1.$$

Supongamos que esto no sucede y tomemos $e_1, e_2 \in E$ distintos de tal manera que $\{e_1, -e_1\} \cap W \neq \emptyset \neq \{e_2, -e_2\} \cap W$. Así, existen $i, j \in 2$ tales que $e_1^i, e_2^j \in W$. Si fuera el caso de que $e_1^i \neq e_2^j$, entonces $e_1^i \wedge e_2^j = 0$ pues ambos son elementos de la anticadena W. Así, $p := \{(e_1, i), (e_2, j)\} \in \mathrm{Fn}(E, 2)$ y satisface $\overline{p} = 0$; una contradicción al hecho de que E es independiente. Esto implica que $e_1^i = e_2^j$, de lo cual se deduce que $e_1 = -e_2$. Luego se tendría que $e_1 \wedge e_2 = 0$, que también es una contradicción.

Entonces podemos definir al conjunto $E' := E \setminus \{e \in E : \{e, -e\} \cap W \neq \emptyset\}$. Lo hecho en el párrafo previo muestra que E' tiene tamaño $|E|$, y además sabemos que E' es independiente en A. Ahora, definamos para cada $w \in W$ al conjunto $E_w := \{e \wedge w : e \in E'\}$ y la función $\psi_w : E' \longrightarrow E_w$ de manera que $\psi_w(e) = e \wedge w$ para cada $e \in E'$. Es fácil notar que ψ_w es una función sobreyectiva. Afirmamos que también es una función inyectiva. Supongamos que no lo es para llegar a una contradicción. Así, hay $e_1, e_2 \in E'$ distintos con $e_1 \wedge w = e_2 \wedge w$. Esto implica que

$$w \wedge (e_1 - e_2) = (w \wedge e_1) \wedge (w - e_2) = (w \wedge e_1) \wedge (w - (w \wedge e_2)) = (w \wedge e_1) - (w \wedge e_2) = 0.$$

Por otro lado, definamos al conjunto $F := \{W, \{e_1, -e_1\}, \{e_2, -e_2\}\}$ y a la función $f := \{(W, w), (\{e_1, -e_1\}, e_1), (\{e_2, -e_2\}, -e_2)\}$. De esta manera, se sigue que $F \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ y $f \in \prod F$. Por hipótesis, tenemos que $\mathcal{W}$ es una familia independiente de anticadenas maximales y entonces $\bigwedge \mathrm{img}(f) > 0$. Con lo anterior demostrado, obtenemos que

$$0 < \bigwedge \mathrm{img}(f) = \bigwedge \{w, e_1, -e_2\} = (e_1 - e_2) \wedge w = 0,$$

lo cual es la contradicción que buscabamos.

Ahora, veamos que E_w es una familia independiente en $A \restriction w$. Sea $p \in \mathrm{Fn}(E_w, 2)$.

$$\begin{tikzcd} E_w \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[l, "\psi_w"'] \arrow[dl, "p \circ \psi_w"] \\ 2 & \end{tikzcd}$$

Note que $\mathrm{dom}(p) \in [E_w]^{<\omega}$ implica que $\psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)] \in [E']^{<\omega}$. Definimos al conjunto $G := \{W\} \cup \{\{e, -e\} : e \in \psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)]\}$ y a la función $g \in \prod G$ de tal manera que

$g(W) = w$ y para cada $e \in \psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)]$ tengamos que $g(\{e, -e\}) = e^{p\circ\psi_w(e)}$. De esta manera, la condición $G \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ implica que $\bigwedge \mathrm{img}(g) > 0$.

Por otro lado, observemos que las igualdades siguientes son ciertas (recuerde que si $a \in A \restriction w$, entonces su complemento en $A \restriction w$ es $w - a$).

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathrm{img}(g) &= \bigwedge(\{w\} \cup \{e^{p\circ\psi_w(e)} : e \in \psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)]\}) \\ &= w \wedge \bigwedge\{e^{p\circ\psi_w(e)} : e \in \psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)]\} \\ &= \bigwedge\{w \wedge e^{p(w\wedge e)} : e \in \psi_w^{-1}[\mathrm{dom}(p)]\} = \overline{p}. \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que E_w es una familia independiente en $A \restriction w$ con $|E_w| = |E'| = |E|$.

Luego, el corolario 2.3 nos asegura que $\prod\{A \restriction w : w \in W\}$ tiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|\prod\{E_w : w \in W\}| = |E|^{|W|}$. #

Este lema nos permite dar otra demostración del Teorema de Kantorovich-Hausdorff (teorema 1.55) para el caso de $\theta = \omega$ usando familias independientes de anticadenas maximales.

Corolario 2.8. *Si X es un conjunto infinito de cardinalidad κ, entonces el álgebra booleana $\mathscr{P}(X)$ tiene un subconjunto independiente de cardinalidad 2^κ.*

Demostración. Definamos $Z := \{s \in {}^\omega 2 : |s^{-1}\{1\}| < \omega\}$ y notemos que Z es infinito numerable. Ahora pongamos $Y := \kappa \times Z$ y observemos que $|Y| = \kappa = |X|$. Así que sólo debemos mostrar que $\mathscr{P}(Y)$ tiene una familia independiente de tamaño 2^κ.

Definamos $w_\alpha := \{\alpha\} \times Z$, para cada $\alpha < \kappa$, y $e_n := \{(x, s) \in Y : s(n) = 1\}$ para cada $n < \omega$. Es fácil notar que $W = \{w_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una anticadena maximal en $\mathscr{P}(Y)$ de tamaño κ (esto es, una partición de Y).

Veamos que $\mathcal{W} := \{W\} \cup \{\{e_n, Y \setminus e_n\} : n < \omega\}$ es una familia independiente de anticadenas maximales. Tomemos $F \in [\mathcal{W}]^{<\omega}$ y $f \in \prod F$ arbitrarias. Llamemos B al conjunto $\{n < \omega : \{e_n, Y \setminus e_n\} \in F\}$ y tomemos a la sucesión $s \in {}^\omega 2$ de manera que $s(n) = 1$ si y sólo si $e_n \in \mathrm{img}(f)$, para cada $n \in \omega$.

Así, la finitud de F nos garantiza que $s \in Z$ y además, $(\alpha, s) \in f(\{e_n, Y \setminus e_n\})$ para cualesquiera $n \in B$ y $\alpha < \kappa$. De este modo, si existe $\beta < \kappa$ con $w_\beta \in F$, deducimos que $(\beta, s) \in \bigwedge \operatorname{img}(f)$ y en caso contrario, $(0, s) \in \bigwedge \operatorname{img}(f)$. Por lo tanto, hemos mostrado que $\mathcal{W}$ es un familia independiente de anticadenas maximales.

Luego, el lema 2.6 nos asegura que el conjunto $E = \{e_n : n < \omega\}$ es una familia independiente en $\mathscr{P}(Y)$. Finalmente, aplicando el lema 2.7 concluimos que $\mathscr{P}(Y)$ tiene una familia independiente de tamaño $|E|^{|\mathcal{W}|} = \omega^\kappa = 2^\kappa$. #

Para el siguiente lema conviene tener presente la proposición 1.33.

Lema 2.9. *Sea $\{W\} \cup \mathcal{V}$ un conjunto independiente de anticadenas maximales en el álgebra booleana A, donde para cada $V \in \mathcal{V}$ se tiene que $|V| = 2$. Entonces, para cualquier $a \in (\langle W \cup \bigcup \mathcal{V} \rangle)^+$ existen $F \in [\{W\} \cup \mathcal{V}]^{<\omega}$ y $f : F \longrightarrow (\langle W \cup \bigcup \mathcal{V} \rangle)^+$ de tal manera que $0 < \bigwedge \operatorname{img}(f) \leqslant a$.*

Demostración. Sea $a \in (\langle W \cup \bigcup \mathcal{V} \rangle)^+$ y llamemos $\mathcal{D} = (W \cup \bigcup \mathcal{V}) \cup (W \cup \bigcup \mathcal{V})^*$. Note que $V^* = V$ para toda $V \in \mathcal{V}$ y por lo tanto $\mathcal{D} = (W \cup \bigcup \mathcal{V}) \cup W^*$. Por la proposición 1.33, hay $n \in \omega$ y $S_0, S_1, ..., S_n \in [\mathcal{D}]^{<\omega}$ de tal manera que $a = \bigvee\{\bigwedge S_i : i \leqslant n\}$. Claramente, $\bigwedge S_i \leqslant a$ para cualquier $i \leqslant n$. Además, $\bigwedge S_i > 0$ para alguna $i \leqslant n$ ya que $a > 0$. Ahora, si $P \in \mathcal{V} \cup \{W\}$, entonces P es una anticadena en A y, por ende, $|P \cap S_i| \leqslant 1$.

Observe que si $S_i = \emptyset$, entonces $\bigvee S_i = 1$ y, en consecuencia, $a = 1$, por lo que cualesquiera $F \in [\{W\} \cup \mathcal{V}]^{<\omega}$ y $f : F \longrightarrow (\langle W \cup \bigcup \mathcal{V} \rangle)^+$ funcionan. Entonces, supongamos por el resto de nuestro argumento que $S_i \neq \emptyset$.

<u>Caso 1.</u> $S_i \subseteq W \cup \bigcup \mathcal{V}$. Definimos entonces a $F = \{P \in \{W\} \cup \mathcal{V} : P \cap S_i \neq \emptyset\}$. De este modo, para cada $P \in F$ se tiene que $P \cap S_i$ consiste de exactamente un elemento, al que denotaremos por $f(P)$. Note que esto nos produce una función $f \in \prod F$ y como $\{W\} \cup \mathcal{V}$ es un conjunto independiente de anticadenas maximales, deducimos que $0 < \bigwedge \operatorname{img}(f) = \bigwedge S_i \leqslant a$.

<u>Caso 2.</u> $S_i \cap W^* \neq \emptyset$. Si sucediera que $W^* \subseteq S_i$, entonces tendríamos que

$$0 < \bigwedge S_i \leqslant \bigwedge W^* = \bigwedge\{-w : w \in W\} = -\bigvee W = -1 = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto hay $w \in W$ de manera que $-w \notin S_i$. Luego, para toda $x \in W$ que satisfaga $-x \in S_i$ se tiene que $x \wedge w = 0$, lo que implica que $w \leqslant -x$. Así,

$w \leqslant \bigwedge(S_i \cap W^*)$. Definamos entonces $F = \{W\} \cup \{V \in \mathcal{V} : S_i \cap V \neq \emptyset\}$ y a $f \in \prod F$ tal que $f(V) \in S_i \cap V$ para toda $V \in F \setminus \{W\}$ y $f(W) = w$. De este modo, $\bigwedge \mathrm{img}(f) > 0$ y

$$\begin{aligned} \bigwedge \mathrm{img}(f) &= w \wedge \bigwedge(\mathrm{img}(f) \setminus \{w\}) \\ &\leqslant \bigwedge(S_i \cap W^*) \wedge \bigwedge(S_i \setminus W^*) \\ &= \bigwedge S_i \leqslant a, \end{aligned}$$

lo que termina la demostración. #

Note que en el lema previo puede tenerse que $\mathcal{V} = \emptyset$.

Definición 2.10. Sea κ un cardinal. Diremos que un conjunto $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de subálgebras del álgebra booleana A es independiente si para toda $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y toda $f : F \longrightarrow \bigcup\{B_\alpha^+ : \alpha \in F\}$ se tiene que $\bigwedge \mathrm{img}(f) > 0$ en A.

Esta definición y la de conjunto independiente de anticadenas maximales son similares. De hecho, los conjuntos independientes de anticadenas maximales nos generan familias independientes de subálgebras como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Sean κ un cardinal y $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un conjunto independiente de anticadenas maximales en el álgebra booleana A. Si para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$ se tiene que:*

- $|V| = 2$ *siempre que* $V \in \mathcal{V}_\alpha$ *y*
- $W_\alpha \neq W_\beta$, $\{W_\xi : \xi < \kappa\} \cap \mathcal{V}_\alpha = \emptyset$ *y* $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset$,

entonces $\{\langle W_\alpha \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\}$ es una familia independiente de subálgebras de A.

Demostración. Para simplificar notación, hagamos $B_\alpha := \langle W_\alpha \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha\rangle$ para cada $\alpha < \kappa$. Ahora, fijemos $F \in [\kappa]^{<\omega}$ y $f : F \longrightarrow \bigcup\{B_\alpha^+ : \alpha \in F\}$. Dada $\alpha < \kappa$, empleemos el lema 2.9 para obtener $G_\alpha \in [\{W_\alpha\} \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha]^{<\omega}$ y $g_\alpha : G_\alpha \longrightarrow B_\alpha^+$ de tal modo que $0 < \bigwedge \mathrm{img}(g_\alpha) \leqslant f(\alpha)$.

El inciso 2 de la proposición y la observación 2.5 nos garantizan que si α y β son elementos distintos de F entonces $\mathrm{dom}(g_\alpha) \cap \mathrm{dom}(g_\beta) = \emptyset$, es decir, $\{g_\alpha : \alpha \in F\}$ es un sistema de funciones compatibles. Asi, $g = \bigcup\{g_\alpha : \alpha \in F\}$ es una función con dominio $G := \bigcup\{G_\alpha : \alpha \in F\}$. Como G es un subconjunto finito de $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, deducimos que

$$0 < \bigwedge \operatorname{img}(g) = \bigwedge\{\bigwedge \operatorname{img}(g_\alpha) : \alpha \in F\} \leqslant \bigwedge \operatorname{img}(f).$$

#

Corolario 2.12. *Si κ es un cardinal y $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto independiente de anticadenas maximales en el álgebra booleana A de tal modo que $W_\alpha \neq W_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $\{\langle W_\alpha \rangle : \alpha < \kappa\}$ es una familia independiente de subálgebras de A.*

Demostración. Basta con hacer $\mathcal{V}_\alpha := \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$ y notar que todas las hipótesis de la proposición 2.11 son satisfechas. #

Nuestro objetivo principal es obtener familias independientes, entonces la siguiente proposición nos muestra como construir una utilizando una familia independiente de subálgebras.

Proposición 2.13. *Sean κ un cardinal infinito y $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ un conjunto de subálgebras independiente en A. Si U_α es una familia independiente en B_α, para cada $\alpha < \kappa$, entonces $U = \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia independiente en A.*

Demostración. Tomemos $p \in \operatorname{Fn}(U, 2)$ y mostremos que $\overline{p} \neq 0$. Si $\operatorname{dom}(p) = \emptyset$, no hay nada que probar así que supongamos que no es el caso. Siendo $\operatorname{dom}(p)$ un conjunto finito, podemos numerarlo sin repeticiones como $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$ para algún $n < \omega$. Definamos para cada $i < n+1$: $\alpha_i := \min\{\alpha < \kappa : y_i \in U_\alpha\}$, y llamemos $D = \{\alpha_i : i < n+1\}$. Notemos que $|D| \leqslant n+1$ por las posibles repeticiones. Si tomamos $\alpha \in D$, tenemos que $p \restriction (U_\alpha \cap \operatorname{dom}(p)) \in \operatorname{Fn}(U_\alpha, 2)$; lo que implica que $a_\alpha := \overline{p \restriction (U_\alpha \cap \operatorname{dom}(p))} \in B_\alpha^+$. Además, la contención $\operatorname{dom}(p) \subseteq \bigcup\{U_{\alpha_i} : i < n+1\}$ implica que $\overline{p} = \bigwedge\{a_\alpha : \alpha \in D\}$.

Como $\mathcal{B}$ es familia independiente de subálgebras definimos $F := \{B_\alpha : \alpha \in D\}$ y a la funcion $f : D \longrightarrow \bigcup\{B_\alpha^+ : \alpha \in D\}$ de tal manera que $f(\alpha) = a_\alpha$. De esta manera, $\bigwedge \operatorname{img}(f) > 0$. Luego,

$$\overline{p} = \bigwedge\{\overline{p \restriction (U_\alpha \cap \operatorname{dom}(p))} : \alpha \in D\} = \bigwedge\{a_\alpha : \alpha \in D\} = \bigwedge \operatorname{img}(f) > 0.$$

Esto termina la prueba de que U es independiente. #

Para el resto del capítulo estaremos usando la notación establecida en la definición 1.28 y en el párrafo que precede a la definición 1.44.

Suponga que A es un álgebra booleana y que $u \in A$. Convengamos en denotar por $\langle u \rangle$ al álgebra generada por $\{u\}$ y notemos que la proposición 1.33 nos garantiza que $\langle u \rangle = \{0, u, -u, 1\}$. De este modo, si B es una subálgebra de A, entonces el conjunto de subálgebras de $A, \{B, \langle u \rangle\}$, es independiente si y sólo si para cualquier $x \in B^+$ se tiene que $x \wedge u \neq 0 \neq x - u$.

Lema 2.14 (Vladimirov)**.** *Sea B una subálgebra completa del álgebra booleana completa A. Si para cada $b \in B^+$ se tiene que $(B \restriction b)^+$ no es un subconjunto denso de $A \restriction b$, entonces existe $u \in A$ de tal modo que $\{B, \langle u \rangle\}$ es independiente.*

Demostración. Definamos $D := \{d \in A^+ : B^+ \cap (A \restriction d) = \emptyset\}$ y probemos que es denso en A. Sea $a \in A^+$ y supongamos que $a \notin D$. Entonces $B^+ \cap (A \restriction a) \neq \emptyset$, por lo que existe $b \in B^+ \cap (A \restriction a)$. La hipótesis de que $(B \restriction b)^+$ no es denso en $A \restriction b$ nos permite elegir $a' \in (A \restriction b)^+$ de manera que para cualquier $c \in (B \restriction b)^+$ se tiene que $c \nleqslant a'$. Así, $0 < a' \leqslant b \leqslant a$ y $B^+ \cap (A \restriction a') = \emptyset$, es decir, $a' \leqslant a$ y $a' \in D$.

Ahora, definamos $f : A \longrightarrow B$ de manera que $f(a) = \bigwedge\{b \in B : a \leqslant b\}$ para cada $a \in A$. Note que para cualquier $a \in A$ ocurre que $a \leqslant f(a)$. Veamos que el conjunto $f[D]$ es denso en B. Dada $b' \in B^+$, tomemos $d \in D$ tal que $d \leqslant b'$. Luego, nuestra definición de f produce $f(d) \leqslant b'$.

Empleemos las proposiciones 1.8 y 1.9 de [6] para fijar C, una anticadena maximal en B, de manera que $C \subseteq f[D]$. Tomemos una función de elección $e : \{f^{-1}\{c\} \cap D : c \in C\} \longrightarrow D$ y llamemos $E = \mathrm{img}(e)$. Luego, $f \restriction E$ es inyectiva y $f[E] = C$. Afirmamos que $u := \bigvee E$ es el elemento de A cuya existencia está garantizada por nuestro lema.

Tomemos $b \in B^+$. Como $C = f[E]$ es anticadena maximal en B, existe $e_0 \in E$ tal que $b \wedge f(e_0) > 0$. Si fuera el caso que $b \wedge u = 0$, como $e_0 \leqslant u$, entonces $b \wedge e_0 = 0$; lo que implica que $e_0 \leqslant -b$. Luego, nuestra definición de f nos da $f(e_0) \leqslant -b$ y por lo tanto, $b \wedge f(e_0) = 0$, contradiciendo nuestra elección de e_0. Así, $b \wedge u > 0$.

Por otro lado, note que si $v \in E$ y $e_0 \neq v$, entonces $f(e_0) \neq f(v)$. Recordando que $f[E]$ es anticadena, tenemos que

$$0 = f(v) \wedge f(e_0) \geqslant v \wedge f(e_0) \geqslant (v \wedge f(e_0)) - e_0 = v \wedge (f(e_0) - e_0).$$

Trivialmente, $v \wedge (f(e_0) - e_0) = 0$. Así, $(f(e_0) - e_0) \wedge \bigvee E = 0$ (ver lema 1.22), lo que implica que $f(e_0) - e_0 \leqslant -u$. Si suponemos que $b - u = 0$, obtenemos las siguientes desigualdades:

$$0 = b - u \geqslant b \wedge (f(e_0) - e_0) = (b \wedge f(e_0)) - e_0.$$

De esto deducimos que $b \wedge f(e_0) \leqslant e_0$. Como $e_0 \in D$, por hipótesis $B^+ \cap (A \upharpoonright e_0) = \emptyset$. Luego, la pertenencia $b \wedge f(e_0) \in B \cap (A \upharpoonright e_0)$ implica que $b \wedge f(e_0) = 0$, nuevamente contradiciendo nuestra elección de e_0. Por lo tanto, $b - u > 0$. $\#$

2.3 Algunas funciones cardinales

En esta sección una función cardinal es una función ϕ de la clase de todas las álgebras booleanas en la clase de todos los números cardinales de tal modo que siempre que A y B sean un par de álgebras booleanas isomorfas, se tendrá que $\phi(A) = \phi(B)$.

Un ejemplo de una función cardinal es la función densidad definida de la siguiente forma para cada álgebra booleana A:

$$\pi(A) = \min\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } A\}$$

La función celularidad es otro ejemplo de una función cardinal. Esta función está dada por:

$$c(A) = \sup\{|X| : X \text{ es una anticadena en } A\}$$

para cada ágebra booleana A y nos ayudará como herramienta para demostrar el resultado que le da título a este capítulo.

Definición 2.15. Sea ϕ una función cardinal.

1. Diremos que ϕ *preserva el orden* si para cada álgebra booleana A y para cualesquiera $a, b \in A$ se tiene que $\phi(A \upharpoonright a) \leqslant \phi(A \upharpoonright b)$ siempre que $a \leqslant b$.

2. Un álgebra booleana A será llamada *ϕ-homogénea* si $\phi(A \upharpoonright a) = \phi(A)$ para cualquier $a \in A^+$.

Usaremos la notación $\phi(a)$ para abreviar $\phi(A \upharpoonright a)$, para cualquier $a \in A$.

Sea A un álgebra booleana y sean $a, b \in A$ con $a < b$. Si D es un subconjunto denso de $A \upharpoonright b$, entonces $\{x \wedge a : x \in D\} \setminus \{0\}$ es un subconjunto denso de $A \upharpoonright a$ y, por ende, $\pi(a) \leqslant \pi(b)$. Ahora, si W es una anticadena en $A \upharpoonright a$, se sigue que W es una anticadena en $A \upharpoonright b$ y, en consecuencia, $c(a) \leqslant c(b)$. En resumen, tanto π como c preservan el orden.

Definición 2.16. Diremos que A *alcanza* su celularidad si $c(A) = |W|$, para alguna W, anticadena en A.

Lema 2.17. *Sean A, un álgebra booleana, y $a \in A$. Si $\mu < c(a)$, entonces hay una anticadena W en $A \upharpoonright a$ de tamaño μ. Más aún, si A es completa y $\mu \geqslant \omega$, W se puede elegir maximal.*

Demostración. La definición de $c(a)$ junto con la condición $\mu < c(a)$ implican que existe V, una anticadena en $A \upharpoonright a$, de tal manera que $\mu \leqslant |V|$. Así, cualquier $W \in [V]^\mu$ es una anticadena en $A \upharpoonright a$ de tamaño μ.

Ahora, si A es completa y $\mu \geqslant \omega$, hagamos $a := -\bigvee W$. Cuando $a = 0$, se deduce que W es maximal; en caso contrario, $W \cup \{a\}$ es una anticadena maximal en A de cardinalidad μ. #

Corolario 2.18. *Si $\mu^+ \leqslant c(a)$, entonces hay una anticadena W en $A \upharpoonright a$ de tamaño μ^+.*

Demostración. Si $\mu^+ < c(a)$, el lema anterior nos da una anticadena W en $A \upharpoonright a$ de tamaño μ^+. Supongamos entonces que $\mu^+ = c(a)$. Note que si $A \upharpoonright a$ no posee una anticadena de tamaño μ^+, entonces para cada W, anticadena en $A \upharpoonright a$, se tiene que $|W| < \mu^+$ y, en consecuencia, $|W| \leqslant \mu$; de aquí, $c(a) \leqslant \mu$, una contradicción. #

Lema 2.19. *Si A es un álgebra booleana infinita, entonces $\pi(A) \geqslant \omega$.*

Demostración. Supongamos que $\pi(A) < \omega$ y fijemos $D \subseteq A^+$, un subconjunto denso de A, con $|D| = \pi(A)$. Mostraremos que la función $f : \mathscr{P}(D) \to A$ dada por $f(E) = \bigvee E$ es suprayectiva y de este modo concluiremos que A es finita.

Dado $a \in A$, hagamos $E := \{x \in D : x \leqslant a\}$. Claramente, $E \in \mathscr{P}(D)$ y $f(E) \leqslant a$. Ahora, si sucediese que $\bigvee E < a$, se seguiría que $a - \bigvee E \in A^+$ y por ende existiría $x \in D$ con $x \leqslant a - \bigvee E \leqslant a$. Así, $x \in E$ y $x \wedge \bigvee E = 0$; una contradicción a $x \in A^+$. #

Proposición 2.20. *Sea A un álgebra booleana completa, infinita, sin átomos, c-homogénea y π-homogénea. Si $\kappa := c(A)$ y $\lambda := \pi(A)$, entonces se cumplen las siguientes implicaciones:*

- *si A alcanza su celularidad, entonces $|A| = \lambda^\kappa$;*
- *si A no alcanza su celularidad, entonces $|A| = \lambda^{<\kappa}$.*

Demostración. Tomemos un conjunto $X = \{x_\xi : \xi < \lambda\}$ que sea denso en A y esté indizado sin repeticiones.

Supongamos que A alcanza su celularidad. Para cada $a \in A^+$ tomemos W_a, una anticadena maximal en $(A \restriction a) \cap X$. Recuerde que la maximalidad de W_a implica que $\bigvee W_a = a$. Como A es c-homogénea, entonces $|W_a| \leqslant c(A) = \kappa$. Definamos para cada $a \in A^+$ a la función $f_a : \kappa \longrightarrow \lambda + 1$ como la función recursiva dada por:

$$f_a(\alpha) = \min((\{\xi < \lambda : x_\xi \in W_a\} \setminus f[\alpha]) \cup \{\lambda\}),$$

para cada $\alpha < \kappa$.

Tomemos $\alpha < \lambda$ y observemos que las siguientes equivalencias se dan:

$$\alpha \in f_a^{-1}[\lambda] \iff f_a(\alpha) < \lambda \iff f_a(\alpha) \in \{\xi < \lambda : x_\xi \in W_a\} \setminus f[\alpha] \iff x_{f_a(\alpha)} \in W_a.$$

Por lo tanto, $W_a = \{x_{f_a(\alpha)} : \alpha \in f_a^{-1}[\lambda]\}$.

De los párrafos previos se deduce que la función $\psi : A^+ \longrightarrow {}^\kappa(\lambda+1)$ dada por $\psi(a) = f_a$ está bien definida. Además, si $a, b \in A^+$ son tales que $f_a = f_b$, entonces $f_a^{-1}[\lambda] = f_b^{-1}[\lambda]$; lo que implica que $W_a = W_b$ y por lo tanto $a = \bigvee W_a = \bigvee W_b = b$, es decir, la función ψ es inyectiva. Considerando que A es infinita, deducimos que $|A| = |A^+|$ y por lo tanto obtenemos que $|A| = |A^+| \leqslant |{}^\kappa(\lambda + 1)| = |{}^\kappa\lambda| = \lambda^\kappa$.

Para demostrar que $\lambda^\kappa \leqslant |A|$ consideremos W, una anticadena maximal en A, de tal manera que $|W| = \kappa$. Como A es π-homogénea, $\lambda = \pi(A) = \pi(a) \leqslant |A \restriction a|$ para cada $a \in W$. Luego, la proposición 1.41 afirma que $\prod\{A \restriction a : a \in W\} \cong A$, lo cual implica que

$$\lambda^\kappa \leqslant |\prod\{A \restriction a : a \in A^+\}| = |A|.$$

Esto concluye la demostración de la primera implicación.

Ahora supongamos que A no alcanza su celularidad. La demostración de que $|A| \leqslant \lambda^{<\kappa}$ es similar al caso en que A alcanza su celularidad con algunas modificaciones. Note que si A no alcanza su celularidad, tampoco $A \restriction a$ para cualquier $a \in A$, dado a que A es c-homogénea.

Para cada $a \in A^+$ tomemos W_a, una anticadena maximal en $(A \restriction a) \cap X$, y llamemos $\kappa_a = |W_a|$. Note que W_a es maximal en $A \restriction a$, es decir, $\bigvee W_a = a$. Como A es c-homogénea, entonces $\kappa_a \leqslant c(A) = \kappa$. Definamos para cada $a \in A^+$ a la función $f_a : \kappa_a \longrightarrow \lambda + 1$ como la función recursiva dada por:

$$f_a(\alpha) = \min((\{\xi < \lambda : x_\xi \in W_a\} \setminus f[\alpha]) \cup \{\lambda\})$$

para cada $\alpha < \kappa_a$.

Tomemos $\alpha < \lambda$ y observemos que las siguientes equivalencias se dan:

$$\alpha \in f_a^{-1}[\lambda] \Longleftrightarrow f_a(\alpha) < \lambda \Longleftrightarrow f_a(\alpha) \in \{\xi < \lambda : x_\xi \in W_a\} \setminus f[\alpha] \Longleftrightarrow x_{f_a(\alpha)} \in W_a.$$

Por lo tanto, $W_a = \{x_{f_a(\alpha)} : \alpha \in f_a^{-1}[\lambda]\}$. Así, la función $\phi : A^+ \longrightarrow {}^{<\kappa}(\lambda + 1)$ dada por $\phi(a) = f_a$ está bien definida. El mismo argumento que empleamos en el caso previo para probar que ψ era inyectiva aplica aquí para verificar que ϕ es inyectiva.

Empleemos ahora la hipótesis de que A es infinita y el corolario 1.8 para deducir que $|A| = |A^+| \leqslant |{}^{<\kappa}(\lambda + 1)| = |{}^{<\kappa}\lambda| = \lambda^{<\kappa}$.

Mostremos que $\lambda^{<\kappa} \leqslant |A|$. Tomemos para cada $\alpha < \kappa$ una anticadena maximal W_α en A de tal manera que $|\alpha| \leqslant |W_\alpha|$. Así, sabemos por argumentos anteriores que

$$\lambda^{|\alpha|} \leqslant |\prod\{A \restriction a : a \in W_\alpha| = |A|$$

para cada $\alpha < \kappa$. De este modo, $|A|$ es cota superior del conjunto $\{\lambda^{|\alpha|} : \alpha < \kappa\}$, lo que implica que $\lambda^{<\kappa} = \sup\{\lambda^{|\alpha|} : \alpha < \kappa\} \leqslant |A|$. #

Observación 2.21. *Suponga ϕ es una función cardinal que preserva el orden, que A es un álgebra booleana y que $a \in A$. Si $A \restriction a$ es ϕ-homogénea, entonces $A \restriction x$ también es ϕ-homogénea, para cualquier $x \in A \restriction a$.*

Lema 2.22. *Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una colección finita de funciones cardinales que preservan el orden y sea A un álgebra booleana completa. Entonces existe $W \subseteq A^+$ de tal manera que*

1. *si $x \in W$, $A \upharpoonright x$ es ϕ_i-homogénea para cualquier $i \leqslant n$ y*

2. *A es isomorfa al producto $\prod\{A \upharpoonright x : x \in W\}$.*

Demostración. Tomemos al conjunto

$$D := \{x \in A^+ : A \upharpoonright x \text{ es } \phi_j\text{-homogénea para toda } j \leqslant n\}$$

y mostremos que es denso en A. Tomemos $a \in A^+$ y definamos recursivamente a la sucesión $(a_j)_{j \leqslant n}$ de la siguiente manera: $a_0 = a$ y para cada $j < n$ seleccionamos $a_{j+1} \in A \upharpoonright a_j$ de manera que

$$\phi_{j+1}(a_{j+1}) = \min\{\phi_{j+1}(x) : x \in A \upharpoonright a_j\}.$$

Es evidente que a_0 está bien definido. Además, si suponemos que a_j está bien definido, entonces $a_j \in A \upharpoonright a_j$, por lo que el conjunto $\{\phi_j(x) : x \in A \upharpoonright a_j\}$ es no vacío. Así, tiene un elemento mínimo, digamos $\lambda = \min\{\phi_j(x) : x \in A \upharpoonright a_j\}$. Luego, a_{j+1} también está bien definido seleccionando $a_{j+1} \in \phi^{-1}\{\lambda\}$.

Note que la sucesión $(a_j)_{j \in n+1}$ cumple que

$$a = a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0.$$

Además, para cada $j \leqslant n$, si tomamos $x \in (A \upharpoonright a_{j+1})^+$, tenemos que $x \leqslant a_{j+1} \leqslant a_j$, por lo que $\phi_j(x) \leqslant \phi_{j+1}(a_{j+1})$. Por otro lado, como $\phi_{j+1}(a_{j+1})$ es mínimo y $x \in A \upharpoonright a_j$, entonces $\phi_{j+1}(a_{j+1}) \leqslant \phi_{j+1}(x)$, es decir, $\phi_{j+1}(x) = \phi_{j+1}(a_{j+1})$. Con esto hemos demostrado que $A \upharpoonright a_{j+1}$ es ϕ_{j+1}-homogénea.

Del párrafo anterior y la observación 2.21 deducimos que $a_n \in D$ y $a_n \leqslant a$.

Finalmente, usamos las proposiciones 1.8 y 1.9 de [6] para fijar una anticadena maximal W en A de manera que $W \subseteq D$. De esta manera, queda mostrado el inciso 1 del lema. Por otro lado, el inciso 2 de nuestro lema se cumple gracias a la proposición 1.41. #

Las siguientes definiciones se ocuparán para la demostración del teorema de Balcar-Voltjáš.

Definición 2.23. Sea A un álgebra booleana y W una anticadena W en A. Para cada $a \in A$ definamos

$$W(a) := \{w \in W : w \wedge a > 0\}.$$

Observación 2.24. *Si V y W anticadenas en A y $a \in A$, entonces se satisface lo siguiente:*

- *$V \subseteq W$ implica que $V(a) \subseteq W(a)$ y*
- *$(V \setminus W)(a) = V(a) \setminus W(a)$.*

Definición 2.25. Sea $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión en A^+. Decimos que $\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un *refinamiento ajeno de* $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ si para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$ se tiene que $0 < b_\alpha \leqslant a_\alpha$ y $b_\alpha \wedge b_\beta = 0$.

Teorema 2.26 (Balcar-Voltjáš)**.** *Sea A un álgebra booleana y sea κ un cardinal infinito. Si $\kappa^+ \leqslant c(A \restriction x)$ para cada $x \in A^+$, entonces toda sucesión $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq A^+$ tiene un refinamiento ajeno.*

Demostración. Sea $\{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una sucesión en A^+. Recordando la definición 2.23, demostraremos lo siguiente.

Afirmación 1. Existe una familia $\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de anticadenas que cumple las siguientes propiedades:

1. $X_\alpha \subseteq X_\beta$ para cualesquiera $\alpha < \beta < \kappa$,
2. $|X_{\alpha+1}(a_\alpha)| = \kappa^+$ para toda $\alpha < \kappa$ y
3. si $\alpha, \beta < \kappa$, entonces $X_\alpha(a_\beta) = \emptyset$ ó $|X_\alpha(a_\beta)| = \kappa^+$.

Supongamos que la afirmación ha sido probada y hagamos $X := \bigcup\{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Note que por el inciso 1, X es anticadena, y por el inciso 2 de la afirmación tenemos que $\kappa^+ \leqslant |X(a_\alpha)|$ para cualquier $\alpha < \kappa$. Así, podemos definir recursivamente la sucesión $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de manera que $x_\alpha \in X(a_\alpha) \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ siempre que $\alpha < \kappa$. Para cada $\alpha < \kappa$ llamemos $b_\alpha := x_\alpha \wedge a_\alpha$. Como $x_\alpha \in X(a_\alpha)$, sabemos que $b_\alpha = x_\alpha \wedge a_\alpha > 0$ y claramente $b_\alpha \leqslant a_\alpha$. Además, si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces:

$$b_\alpha \wedge b_\beta = (x_\alpha \wedge a_\alpha) \wedge (x_\beta \wedge a_\beta) = (x_\alpha \wedge x_\beta) \wedge (a_\alpha \wedge a_\beta) = 0 \wedge (a_\alpha \wedge a_\beta) = 0.$$

Por lo tanto, $\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es el refinamiento ajeno que buscabamos.

Para demostrar la afirmación, construiremos dicha familia de manera recursiva e inductivamente iremos probando la afirmación. Definamos $X_0 = \emptyset$. Supongamos que para $\gamma < \kappa$ tenemos la familia de anticadenas $\{X_\xi : \xi < \gamma\}$ construida de manera que lo siguiente se verifica.

1. $X_\alpha \subseteq X_\beta$ para toda $\alpha < \beta < \gamma$,
2. $|X_{\alpha+1}(a_\alpha)| = \kappa^+$ para toda $\alpha + 1 < \gamma$ y
3. se da que $X_\alpha(a_\beta) = \emptyset$ ó que $|X_\alpha(a_\beta)| = \kappa^+$ para toda $\alpha < \gamma$ y toda $\beta < \kappa$.

Buscamos definir X_γ de manera que la familia de anticadenas $\{X_\xi : \xi < \gamma + 1\}$ también cumpla las propiedades deseadas.

Si γ es límite, definamos $X_\gamma = \bigcup\{X_\xi : \xi < \gamma\}$. Igual que antes, X_γ es una anticadena en A y además, por definición, la familia cumple los inciso 1 y 2. Fijemos $\beta < \kappa$ y note que $X_\gamma(a_\beta) = \bigcup\{X_\alpha(a_\beta) : \alpha < \gamma\}$; de esta manera, $|X_\gamma(a_\beta)| = |\gamma| \cdot \sup\{|X_\alpha(a_\beta)| : \alpha < \gamma\}$. Recordemos que para cualquier $\alpha < \gamma$ la hipótesis inductiva nos afirma que $|X_\alpha(a_\beta)| \leqslant \kappa^+$. Si para alguna $\alpha < \gamma$ sucede que $|X_\alpha(a_\beta)| = \kappa^+$, entonces $|X_\gamma(a_\beta)| = \kappa^+$, ya que $\gamma < \kappa$. En caso contrario, se tiene la igualdad $X_\alpha(a_\beta) = \emptyset$ para cualquier $\alpha < \gamma$ y, en consecuencia, $X_\gamma(a_\beta) = \emptyset$. Así, también se cumple la condición 3.

Supongamos ahora que $\gamma = \delta + 1$ y dividamos nuestra construcción de X_γ en dos casos (recuerde la condición 3 de nuestra hipótesis inductiva).

<u>Caso 1.</u> $|X_\delta(a_\delta)| = \kappa^+$. Definamos $X_\gamma = X_{\delta+1} := X_\delta$. Por definición, se cumple la primera condición. Ahora, tomemos $\alpha + 1 < \gamma + 1$, esto es, $\alpha + 1 \leqslant \gamma$. Si $\alpha + 1 < \gamma$, la hipótesis inductiva nos da la condición 2. Si $\alpha + 1 = \gamma = \delta + 1$, obtenemos que

$$|X_{\alpha+1}(a_\alpha)| = |X_{\delta+1}(a_\delta)| = |X_\delta(a_\delta)| = \kappa^+,$$

y así también se cumple la condición 2. Finalmente, para verificar que la condición 3 se cumple basta verificarla para $\beta < \kappa$ arbitraria y $\alpha = \gamma$. De esta manera, tenemos que

$$X_\alpha(a_\beta) = X_{\delta+1}(a_\beta) = X_\delta(a_\beta);$$

como $\delta < \gamma$, entonces $X_\delta(a_\beta) = \emptyset$ ó $|X_\delta(a_\beta)| = \kappa^+$.

Caso 2. $X_\delta(a_\delta) = \emptyset$. En este caso, si tomamos $x \in X_\delta$ arbitrario, tenemos que $x \wedge a_\delta = 0$ ó, equivalentemente, $x \leqslant -a_\delta$, es decir, $x \in A \restriction (-a_\delta)$. De este argumento se sigue que $X_\delta \subseteq A \restriction (-a_\delta)$. Por una de las hipótesis de nuestro teorema tenemos que $c(a_\delta) \geqslant \kappa^+$ y, según el corolario 2.18, existe una anticadena Y de tamaño κ^+ en $A \restriction a_\delta$. Como X_δ es anticadena en $A \restriction (-a_\delta)$, entonces $X_\delta \cup Y$ es anticadena en A.

Definamos $X_{\delta+1} := X_\delta \cup (Y \setminus \bigcup\{Y(a_\rho) : \rho < \kappa \text{ y } |Y(a_\rho)| \leqslant \kappa\})$. La condición 1 se cumple ya que por definición $X_\delta \subseteq X_{\delta+1}$. Para ver que la condición 2 se satisface, basta verificarla para $\alpha + 1 = \gamma = \delta + 1$.

Llamemos $B := \{\xi < \kappa : |Y(a_\xi)| \leqslant \kappa\}$ y así, $X_{\delta+1} = X_\delta \cup (Y \setminus \bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\})$. Observe que la definición de Y implica que $a_\delta \wedge y = y > 0$ para toda $y \in Y$. Por lo tanto, $Y(a_\delta) = Y$. Además, como $X_\delta(a_\delta) = \emptyset$, utilizando la observación 2.24 tenemos que

$$\begin{aligned}
X_{\delta+1}(a_\delta) &= \Big(X_\delta \cup (Y \setminus \bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B)\})\Big)(a_\delta) \\
&= X_\delta(a_\delta) \cup \Big(Y \setminus \bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\}\Big)(a_\delta) \\
&= \Big(Y \setminus \bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\}\Big)(a_\delta) \\
&= Y(a_\delta) \setminus \Big(\bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\}\Big)(a_\delta) \\
&= Y \setminus (\bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\})(a_\delta).
\end{aligned}$$

Luego, la definición de B nos da que

$$|(\bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\})(a_\delta)| \leqslant \kappa \cdot \sup\{|Y(a_\xi)| : \xi \in B\} \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

que, junto con la igualdad $|Y| = \kappa^+$, implica que $|Y \setminus (\bigcup\{Y(a_\eta) : \eta \in B\})(a_\delta)| = \kappa^+$.

Para terminar la prueba de la afirmación falta mostrar la condición 3 para $\gamma = \delta + 1$. Tomemos $\beta < \kappa$ y dividamos nuestro argumento en dos subcasos. En ambos emplearemos la observación 2.24.

Subcaso 1. Si $|X_\delta(a_\beta)| = \kappa^+$, entonces:

$$X_\delta(a_\beta) \subseteq X_{\delta+1}(a_\beta) = X_\delta(a_\beta) \cup (Y \setminus \bigcup\{Y(a_\rho) : \rho < \kappa \text{ y } |Y(a_\rho)| \leqslant \kappa\})(a_\beta) \subseteq X_\delta(a_\beta) \cup Y,$$

lo cual implica que

$$\kappa^+ = |X_\delta(a_\beta)| \leqslant |X_{\delta+1}(a_\beta)| \leqslant \max\{|X_\delta(a_\beta)|, |Y|\} = \kappa^+.$$

Subcaso 2. Si $X_\delta(a_\beta) = \emptyset$ y $|Y(a_\beta)| \leqslant \kappa$, entonces $Y(a_\beta) \subseteq \bigcup\{Y(a_\rho) : \rho < \kappa \text{ y } |Y(a_\rho)| \leqslant \kappa\}$, lo que implica que:

$$(Y \setminus \bigcup\{Y(a_\rho) : \rho < \kappa \text{ y } |Y(a_\rho)| \leqslant \kappa\})(a_\beta) =$$
$$Y(a_\beta) \setminus (\bigcup\{Y(a_\rho) : \rho < \kappa \text{ y } |Y(a_\rho)| \leqslant \kappa\})(a_\beta) = \emptyset,$$

y por lo tanto $X_{\delta+1}(a_\beta) = \emptyset$.

Esto termina la prueba de la afirmación y, en consecuencia, del teorema. #

Teorema 2.27 (Erdős-Tarski)**.** *Sea A un álgebra booleana. Si $c(A)$ es un cardinal singular, la celularidad de A es alcanzada.*

Demostración. Sean $\lambda = c(A)$, $\kappa = \mathrm{cf}(\lambda) < \lambda$ y $\{\lambda_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \lambda$ una sucesión cofinal estrictamente creciente de cardinales, es decir, $\lambda = \sup\{\lambda_\alpha : \alpha < \kappa\}$. La prueba se hará considerando tres casos.

Caso 1. Existe $b \in A^+$ de tal manera que $c(x) = \lambda$ para cada $x \in (A \upharpoonright b)^+$. Entonces $\kappa < \lambda = c(b)$ y por el lema 2.17 se sigue que existe $\{b_\alpha : \alpha < \kappa\}$, una anticadena en $A \upharpoonright b$. Note que para cada $\alpha < \kappa$, el que $b_\alpha \in A \upharpoonright b$ implica que $\lambda_\alpha < \lambda = c(b_\alpha)$ y por por lema 2.17 hay una anticadena Z_α en $A \upharpoonright b_\alpha$ de tamaño λ_α. Luego, $\bigcup\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una anticadena en A de tamaño λ.

Supongamos ahora que el caso 1 falla. Como la celularidad es una función cardinal que preserva el orden, se sigue que $S := \{a \in A^+ : c(a) < \lambda\}$ es un subconjunto denso de A. Empleemos las proposiciones 1.8 y 1.9 de [6] para fijar $X \subseteq D$, una anticadena maximal en A. Note que $|X| \leqslant \lambda$ ya que $c(A) = \lambda$. Usaremos estos conjuntos para los casos 2 y 3.

Caso 2. $\sup\{c(x) : x \in X\} = \lambda$. Para cada $\alpha < \kappa$ hagamos $E_\alpha := \{x \in X : c(x) > \lambda_\alpha\}$. Como $\{c(x) : x \in E_\alpha\}$ es cofinal en λ, se sigue que $|E_\alpha| \geqslant \kappa = \mathrm{cf}(\lambda)$. Esta observación nos garantiza que se puede definir recursivamente $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de tal modo que $x_\alpha \in E_\alpha \setminus \{x_\beta : \beta < \alpha\}$, para cualquier $\alpha < \kappa$. Así, podemos tomar Z_α, anticadena de tamaño λ_α en $A \upharpoonright x_\alpha$, siempre que $\alpha < \kappa$. Entonces el conjunto $\bigcup\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una anticadena en A de tamaño λ.

Caso 3. $\sup\{c(x) : x \in X\} < \lambda$. Mostraremos, por contradicción, que $|X| = \lambda$. Supongamos que $|X| < \lambda$ y definamos $\mu = \sup\{c(x) : x \in X\}$ y $\mu' = (\max\{|X|, \mu\})^+$. De esta manera, el hecho que λ sea singular implica que $\mu' < \lambda = c(A)$. El que X sea una anticadena maximal en A implica que para cualquier $y \in Y$ existe $x \in X$ con $x \wedge y > 0$ (lema 1.16), esto es (recuerde la definición 2.23), $Y = \bigcup\{Y(x) : x \in X\}$. Por otro lado, para cada $x \in X$ la colección $\{x \wedge y : y \in Y(x)\}$ es una anticadena en $A \upharpoonright x$ y así, $|Y(x)| \leqslant c(x) \leqslant \mu$. Esto implica que

$$\mu' = |Y| = |\bigcup\{Y(x) : x \in X\}| \leqslant \mu \cdot |X| < \mu',$$

que es una contradición. Por lo tanto, $|X| = \lambda$. #

2.4 Prueba del Teorema de Balcar-Franěk

Lema 2.28. *Sea A un álgebra booleana completa para la cual $\kappa := c(A)$ no es alcanzada. Si A es c-homogénea, entonces existe una familia independiente de anticadenas maximales, $\mathcal{W}$, en A tal que $|\mathcal{W}| = \kappa$ y $\sup\{|W| : W \in \mathcal{W}\} = \kappa$.*

Demostración. Como la celularidad de A no es alcanzada, entonces el teorema 2.27 nos afirma que $\kappa = c(A)$ es regular. Además, si tomamos $\mathcal{V}$, un conjunto de anticadenas no vacío, se tiene que $|V| \leqslant \kappa$ para toda $V \in \mathcal{V}$, lo que implica que $\sup\{|V| : V \in \mathcal{V}\} \leqslant \kappa$. Por ello, bastará construir $\mathcal{W}$, una familia independiente de anticadenas maximales de tamaño κ y con la propiedad de que $\sup\{|V| : V \in \mathcal{V}\} \geqslant \kappa$.

Observe que si κ fuese finito, entonces $c(A)$ sería alcanzada. Por ende, $\kappa \geqslant \omega$. Más aún, afirmamos que existen $\{x_n : n \in \omega\}$, $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq A^+$ de tal modo que $x_n \wedge y_n = 0$, $x_{n+1} \leqslant y_n$ y $y_{n+1} \leqslant y_n$, para toda $n \in \omega$. En particular, $\{x_n : n \in \omega\}$ sería una anticadena de tamaño ω en A y de este modo tendríamos probado que $\kappa > \omega$. Construyamos recursivamente nuestras sucesiones: como $2 < \kappa$, el lema 2.17 produce una anticadena de cardinalidad 2 en A, $\{x_0, y_0\}$. Ahora, si ya tenemos $\{x_i : i \leqslant n\}$ y $\{y_i : i \leqslant n\}$, para alguna $n \in \omega$, entonces $2 < \kappa = c(y_n)$ (recuerde que A es c-homogénea) y, por ende, podemos usar el lema 2.17 para fijar $\{x_{n+1}, y_{n+1}\}$, una anticadena de tamaño 2 en $A \upharpoonright y_n$. Esto concluye la recursión.

Afirmación 1. Para cualquier $\mathcal{V}$, familia independiente de anticadenas maximales en A, tal que $|\mathcal{V}| < \kappa$ y cualquier cardinal infinito $\tau < \kappa$, hay una anticadena maximal $T \notin \mathcal{V}$ en A de tamaño τ de manera que $\mathcal{V} \cup \{T\}$ es familia independiente de anticadenas maximales en A.

Si se demuestra la afirmación, entonces podemos construir recursivamente a la familia independiente de anticadenas maximales $\mathcal{W}$ deseada como se describe a continuación.

- $Q_0 = \{\{1\}\}$ y para cada $\alpha < \kappa$:
- $Q_{\alpha+1} = Q_\alpha \cup \{T_\alpha\}$, donde T_α tiene tamaño $|\alpha+\omega|$ (obtenida a partir de la afirmación),
- $Q_\alpha = \bigcup\{Q_\beta : \beta < \alpha\}$ para α límite;

y de este modo, proponemos $\mathcal{W} := \bigcup\{Q_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Por la construcción de T_α, para cada $\alpha < \kappa$, tenemos que $|\mathcal{W}| = \kappa$ y $\sup\{|W| : W \in \mathcal{W}\} = \kappa$.

Para demostrar la afirmación tomemos $\omega \leqslant \tau < \kappa$ y $\mathcal{V}$, un conjunto de anticadenas independiente en A con $|\mathcal{V}| < \kappa$. Note que los elementos de $\mathcal{V}$ tienen tamaño menor que κ debido a que la celularidad de A no es alcanzada. Por ello, $|\bigcup \mathcal{V}| < \kappa$. Definamos

$$B := \{\bigwedge F : F \in [\bigcup \mathcal{V}]^{<\omega}\}.$$

Como B está indizado con $[\bigcup \mathcal{V}]^{<\omega}$, entonces $|B| < \kappa$. Hagamos $\mu := |B \setminus \{0\}|$ y fijemos $\{a_\gamma : \gamma < \mu\}$, una enumeración sin repeticiones de $B \setminus \{0\}$. En vista que $\mu^+ \leqslant \kappa = c(A)$, podemos aplicar el teorema 2.26 y obtener $\{b_\gamma : \gamma < \mu\}$, un refinamiento disjunto de $\{a_\gamma : \gamma < \mu\}$.

Fijemos $\gamma < \mu$. El que $A \upharpoonright b_\gamma$ sea completa, junto con las desigualdades $\omega \leqslant \tau < \kappa = c(A \upharpoonright b_\gamma)$, implica (lema 2.17) que $A \upharpoonright b_\gamma$ posee una anticadena maximal de tamaño τ. Sea $\{c_{\gamma\delta} : \delta < \tau\}$ una enumeración sin repeticiones de dicha anticadena.

Ahora hagamos

$$x_0 = (-\bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\}) \vee \bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\} \text{ y}$$
$$x_\delta = \bigvee\{c_{\gamma\delta} : \gamma < \mu\} \text{ para cada } 0 < \delta < \tau.$$

Llamemos $T := \{x_\delta : \delta < \tau\}$ y notemos que para cualquier $\delta < \tau$ se tiene que $x_\delta \leqslant \bigvee\{c_{\gamma\delta} : \gamma < \mu\}$. Además, si seleccionamos $\eta < \xi < \tau$ y $\alpha, \beta < \mu$ tenemos los siguientes casos:

- si $\alpha = \beta$, entonces $c_{\alpha\eta} \wedge c_{\beta\xi} = c_{\alpha\eta} \wedge c_{\alpha\xi} = 0$, ya que $\{c_{\alpha\delta} : \delta < \tau\}$ es anticadena en $A \restriction b_\alpha$;

- si $\alpha \neq \beta$, entonces $c_{\alpha\eta} \wedge c_{\beta\xi} \leqslant b_\alpha \wedge b_\beta = 0$, pues $\{b_\gamma : \gamma < \mu\}$ es anticadena.

Esto, con el lema 1.22, implica que:

$$x_\eta \wedge x_\xi \leqslant \bigwedge\{c_{\alpha\eta} : \alpha < \mu\} \wedge \bigwedge\{c_{\beta\xi} : \beta < \mu\} = \bigwedge\{c_{\alpha\eta} \wedge c_{\beta\xi} : \alpha, \beta < \mu\} = 0.$$

Por lo que T es anticadena en A.

Notemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\} &= \bigvee\{\bigvee\{c_{\gamma\delta} : \delta < \tau\} : \gamma < \mu\} = \bigvee\{c_{\gamma\delta} : \gamma < \mu \text{ y } \delta < \tau\} \\
&= \bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\} \vee \bigvee\{c_{\gamma\delta} : \gamma < \mu \text{ y } 0 < \delta < \tau\} \\
&= \bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\} \vee \bigvee\{\bigvee\{c_{\gamma\delta} : \gamma < \mu\} : 0 < \delta < \tau\} \\
&= \bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\} \vee \bigvee\{x_\delta : 0 < \delta < \tau\}.
\end{aligned}$$

Así, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\bigvee\{x_\delta : \delta < \tau\} &= x_0 \vee \bigvee\{x_\delta : 0 < \delta < \tau\} \\
&= \Big((-\bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\}) \vee \bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\}\Big) \vee \bigvee\{x_\delta : 0 < \delta < \tau\} \\
&= (-\bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\}) \vee \Big(\bigvee\{c_{\gamma 0} : \gamma < \mu\} \vee \bigvee\{x_\delta : 0 < \delta < \tau\}\Big) \\
&= (-\bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\}) \vee \bigvee\{b_\gamma : \gamma < \mu\} = 1.
\end{aligned}$$

Por ello, T es maximal.

Para terminar la demostración de la afirmación tomemos $V_0, V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}$ distintos, $v_i \in V_i$ para cada $i \in n+1$ y $x_\delta \in T$. Como $\mathcal{V}$ es independiente, entonces el elemento $p = \bigwedge\{v_i : i \in n+1\}$ es distinto del 0. Por lo tanto, p es un elemento de $B \setminus \{0\}$, así que $p = a_\gamma$ para alguna $\gamma < \mu$. Esto nos da las siguientes desigualdedes:

$$v_0 \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_n \wedge x_\delta = p \wedge x_\delta = a_\gamma \wedge x_\delta \geqslant b_\gamma \wedge x_\delta \geqslant c_{\gamma\delta} \wedge c_{\gamma\delta} = c_{\gamma\delta} > 0,$$

lo cual confirma que $\mathcal{V} \cup \{T\}$ es una familia independiente de anticadenas maximales. #

La proposición siguiente es el último resultado preliminar que necesitamos para la prueba del Teorema de Balcar-Franěk.

Proposición 2.29. *Si A es un álgebra booleana completa, infinita, sin átomos, c-homogénea y π-homogénea, entonces A posee un subconjunto independiente de cardinalidad $|A|$.*

Demostración. Sean $\kappa = c(A)$ y $\lambda = \pi(A)$. Por el lema 2.19, $\lambda \geqslant \omega$. Para probar que $\kappa \geqslant \omega$ construiremos recursivamente un par de conjuntos $\{x_n : n \in \omega\}$, $\{y_n : n \in \omega\} \subseteq A^+$ de tal modo que $x_n \wedge y_n = 0$, $x_{n+1} \leqslant y_n$ y $y_{n+1} \leqslant y_n$, para cualquier $n \in \omega$. De este modo, $\{x_n : n \in \omega\}$ será una anticadena infinita en A. Con esta idea en mente, fijemos $a \in A^+$. Como a no es un átomo, existen $x_0, y_0 \in (A \upharpoonright a)^+$ con $x_0 \wedge y_0 = 0$; ahora, si ya hemos obtenido $\{x_i : i \leqslant n\}$ y $\{y_i : i \leqslant n\}$, para algún $n \in \omega$, entonces $y_n \notin \mathrm{Atom}(A)$ y en consecuencia, hay $x_{n+1}, y_{n+1} \in (A \upharpoonright y_n)^+$ de tal suerte que $x_{n+1} \wedge y_{n+1} = 0$. Esto completa la recursión.

Note que como A no tiene átomos, entonces $A \upharpoonright a$ es infinita para cualquier $a \in A^+$. Demostraremos la proposición en dos casos.

<u>Caso 1.</u> $c(A)$ es alcanzada. En este caso se da que $|A| = \lambda^\kappa$ por la proposición 2.20. Sea μ el mínimo cardinal tal que $\mu^\kappa = \lambda^\kappa$. Así, $\mu \leqslant \lambda$. Además, si existiese $\nu < \mu$ con $\nu^\kappa \geqslant \mu^\kappa$, se tendría que $\mu^\kappa \leqslant (\nu^\kappa)^\kappa = \nu^{\kappa \cdot \kappa} = \nu^\kappa$, contradiciendo la minimalidad de μ. En resumen, para cada $\nu < \mu$ se satisface que $\nu^\kappa < \mu^\kappa$.

Como A alcanza su celularidad, existe una anticadena en A de tamaño κ. Esta anticadena puede ser extendida a una anticadena maximal en A (proposición 1.9 de [6]), digamos W. Luego, $|W| = \kappa$.

Si sucediese que $\mu = 2$, tomamos $D := \langle W \rangle$. Como W es anticadena, la proposición 1.33 nos da $D = \{\bigvee S : S \in [W]^{<\omega}\}$ y de este modo, $\mathrm{Atom}(D) = W$. Así, el lema 1.42 produce $D \cong \mathscr{P}(W) \cong \mathscr{P}(\kappa)$. Fijemos $h : \mathscr{P}(\kappa) \to D$, un isomorfismo, y usemos el Teorema de Hausdorff-Kantorovich (teorema 2.8) para obtener S, una familia independiente de tamaño 2^κ en $\mathscr{P}(\kappa)$. Entonces, $\{h(x) : x \in S\}$ es una familia independiente en $D \subseteq A$ de tamaño $|A|$.

Analicemos el caso $\mu > 2$. El que κ sea infinito implica que $2^\kappa = n^\kappa$ para cualquier $n \in \omega \setminus 2$. Por esta razón, la condición $\mu > 2$ nos garantiza que $\mu \geqslant \omega$.

Queremos emplear el lema 2.7 como sigue: construiremos por recursión una familia independiente $\{e_\xi : \xi < \mu\}$ en A de tal modo que $\xi < \eta < \mu$ implique que $e_\xi \neq e_\eta$ y, además, $\{W\} \cup \{\{e_\xi, -e_\xi\} : \xi < \mu\}$ sea una familia independiente de anticadenas maximales en A. Esto nos dará la existencia de un subconjunto independiente de A de tamaño $|E|^{|W|} = \mu^\kappa = \lambda^\kappa = |A|$.

Supongamos que tenemos $\{e_\xi : \xi < \rho\}$ construida para $\rho < \mu$ y busquemos e_ρ con la propiedad de que $\{e_\xi : \xi < \rho + 1\}$ sea un subconjunto independiente de A y que $\{W\} \cup \{\{e_\xi, -e_\xi\} : \xi < \rho + 1\}$ es una familia independiente de anticadenas maximales en A. Por hipótesis inductiva sabemos que el conjunto $\mathcal{V} = \{W\} \cup \{\{e_\xi, -e_\xi\} : \xi < \rho\}$ es una familia independiente de anticadenas maximales. Como $|V| \leqslant \kappa$ para cualquier $V \in \mathcal{V}$, entonces $|\bigcup \mathcal{V}| \leqslant |\mathcal{V}| \cdot \kappa$. Por otro lado, las desigualdades $|\mathcal{V}| \leqslant \rho < \mu$ y $\mu > 2$ implican que $|\mathcal{V}|^\kappa < \mu$ y $2^\kappa < \mu$. Luego, $|\mathcal{V}|^\kappa \cdot 2^\kappa < \mu$.

Ahora, la igualdad $\kappa = c(A)$ garantiza que A tiene la κ^+.c.c., así que la proposición 1.45 nos dice que la subálgebra $D := \langle \bigcup \mathcal{V} \rangle^{cm}$ tiene la propiedad de que

$$|D| \leqslant \max(\omega, |\mathcal{V}| \cdot \kappa)^{<\kappa^+} = (|\mathcal{V}| \cdot \kappa)^\kappa = |\mathcal{V}|^\kappa \cdot 2^\kappa < \mu \leqslant \lambda = \pi(A).$$

Así, para toda $d \in D^+$ el conjunto $(D \restriction d)^+$ no es denso en $A \restriction d$ ya que $|D \restriction d| \leqslant |D| < \pi(A) = \pi(d)$. Luego, por el lema 2.14 (Lema de Vladimirov), hay $e \in A$ que cumple que $d \wedge e > 0$ y $d - e > 0$ para cualquier $d \in D^+$. De esta manera, basta con hacer $e_\rho := e$.

<u>Caso 2.</u> A no alcanza su celularidad. En esta situción tenemos que A tiene la propiedad de la κ.c.c. Además, la proposición 2.20 nos dice que $|A| = \lambda^{<\kappa}$.

Por el lema 2.28 hay $\mathcal{W}$, una familia independiente de anticadenas maximales en A, de tamaño κ con la propiedad de que $\sup\{|W| : W \in \mathcal{W}\} = \kappa$. Digamos que $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $W_\alpha \neq W_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \kappa$, y para cada $\alpha < \kappa$ llamemos κ_α al cardinal $|W_\alpha|$.

Sea μ el mínimo cardinal de tal manera que $\mu^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa}$.

Si $\mu = 2$, para cada $\alpha < \kappa$ consideremos a B_α, la subálgebra completa de A generada por W_α. De esta manera, $B_\alpha \cong \mathscr{P}(\kappa_\alpha)$ (lema 1.46) y por ende podemos usar el Teorema de Hausdorff-Kantorovich (teorema 1.55) para encontrar U_α, una familia independiente en B_α, de tamaño 2^{κ_α}. De acuerdo al corolario 2.12, $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto independiente de subálgebras de A. De este modo, por la proposición 2.13, el conjunto $U = \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$

es una familia independiente en A y tiene tamaño $\sup\{2^{\kappa_\alpha} : \alpha < \kappa\} = 2^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa} = |A|$.

Para el resto de nuestra prueba supondremos que $\mu > 2$. Note que si tuviesemos que $\mu \leqslant 2^{<\kappa}$, entonces $\lambda^{<\kappa} = \mu^{<\kappa} \leqslant (2^{<\kappa})^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$ (proposición 1.9) y, por otro lado, la desigualdad $2 < \lambda$ implica que $2^{<\kappa} \leqslant \lambda^{<\kappa}$, con lo cual concluiríamos que $\lambda^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$; una contradicción a la minimalidad de μ. Por lo tanto, $\kappa \leqslant 2^{<\kappa} < \mu$ (lema 1.7). Además, para toda $\nu < \mu$ se tiene que $\nu^{<\kappa} < \mu$, ya que la desigualdad $\mu \leqslant \nu^{<\kappa}$ implica que

$$\lambda^{<\kappa} = \mu^{<\kappa} \leqslant (\nu^{<\kappa})^{<\kappa} = \nu^{<\kappa} \leqslant \mu^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa},$$

contradiciendo la minimalidad de μ.

Ahora, buscamos $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$, una familia de conjuntos independientes de anticadenas maximales en A, de tal manera que:

- $|\mathcal{V}_\alpha| = \mu$ para cada $\alpha < \kappa$;
- para cualesquiera $\alpha < \kappa$ y $V \in \mathcal{V}_\alpha$ se tiene que $|V| = 2$;
- si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $\mathcal{V}_\alpha \cap \mathcal{V}_\beta = \emptyset$;
- para cualquier $\alpha < \kappa$, $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \cap \mathcal{V}_\alpha = \emptyset$;
- el conjunto $\{W_\alpha : \alpha < \kappa\} \cup \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un conjunto independiente de anticadenas maximales.

Fijemos $\alpha < \kappa$. Emplearemos recursión sobre μ para hallar $\{e_\xi : \xi < \mu\}$, un subconjunto independiente de A, de tal modo que $e_\xi \neq e_\eta$, si $\xi < \eta < \mu$, y $\{W_\alpha\} \cup \{\{e_\xi, -e_\xi\} : \xi < \mu\}$ es un conjunto independiente de anticadenas maximales en A. Supongamos que para $\rho < \mu$ tenemos $\{e_\xi : \xi < \rho\}$ construida, donde $\mathcal{B} := \{W_\alpha\} \cup \{\{e_\xi, -e_\xi\} : \xi < \rho\}$ es independiente. Tomemos $B = \langle \bigcup \mathcal{B} \rangle^{cm}$. Estimemos la cardinalidad de B como sigue: en primer término, $|\bigcup \mathcal{B}| \leqslant \kappa + 2|\rho|$; ahora, el que κ sea infinito implica que $|\bigcup \mathcal{B}| \leqslant \kappa \cdot |\rho|$. Finalmente, recordemos que A satisface la κ.c.c., que para cada $\nu < \mu$ se tiene que $\nu^{<\kappa} < \mu$ y la proposición 1.45 para deducir lo siguiente:

$$|B| = |\langle \bigcup \mathcal{B} \rangle^{cm}| \leqslant (\kappa \cdot |\rho|)^{<\kappa} < \mu \leqslant \lambda = \pi(A).$$

Lo anterior, junto con la π-homogeneidad de A, nos garantiza que para cualquier $b \in B^+$ el conjunto $(B \restriction b)^+$ no es denso en $A \restriction b$. Luego, el Lema de Vladimirov (lema 2.14) nos da un elemento $u \in A$ de tal manera que para toda $b \in B^+$ se tiene que $b \wedge u > 0$ y $b - u > 0$. Así, es suficiente con poner $e_\rho := u$ para terminar nuestra recursión.

La construcción previa nos asegura que $\mathcal{V} = \{\{e, -e\} : e \in E\}$ tiene cardinalidad μ. Como $\kappa < \mu$, podemos encontrar una partición de $\mathcal{V}$ en κ pedazos de tamaño μ, es decir, existe $\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de tal modo que $\mathcal{V} = \bigcup\{\mathcal{V}_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y además se satisface que $|\mathcal{V}_\alpha| = \mu$ y $\mathcal{V}_\alpha \neq \mathcal{V}_\beta$ siempre que $\alpha < \beta < \kappa$.

Para cada $\alpha < \kappa$ tomemos $B_\alpha = \langle W_\alpha \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha \rangle$ y D_α, la completación booleana de B_α, esto es, D_α es un álgebra booleana completa que contiene a una subálgebra densa que es isomorfa a B_α (ver secciones 4.2 y 4.3 de [5]). Sin pérdida de generalidad, supondremos que, de hecho, B_α es una subálgebra de D_α y que $(B_\alpha)^+$ es un subconjunto denso de $(D_\alpha)^+$.

Ahora, la función $h_\alpha : B_\alpha \to A$ dada por $h_\alpha(x) = x$, para cada $x \in B_\alpha$, es un homomorfismo de álgebras booleanas y como A es completa, el Teorema de Extensión de Sirkorski (ver Theorem 5.9 de [5]) nos da un homomorfismo booleano $H_\alpha : D_\alpha \to A$ de tal modo que $H_\alpha \restriction B_\alpha = h_\alpha$. Verifiquemos que H_α es inyectiva: si $x, y \in D_\alpha$ satisfacen $x \neq y$, entonces $x - y \neq 0$ ó $y - x \neq 0$. En el primer caso, la densidad de B_α^+ en D_α nos da un elemento $b \in B_\alpha^+$ con $b \leqslant x - y$; luego

$$0 < b = h(b) = H_\alpha(b) \leqslant H_\alpha(x - y) = H_\alpha(x) - H_\alpha(y)$$

y así, $H_\alpha(x) \neq H_\alpha(y)$. Un razonamiento similar aplica cuando $y - x \neq 0$.

Del párrafo anterior se sigue que la subálgebra $C_\alpha := H_\alpha[D_\alpha]$ de A es isomorfa a D_α y tiene a B_α como subálgebra densa. En particular, C_α, vista como álgebra booleana, es completa, pero puede suceder que el supremo de un conjunto $S \subseteq C_\alpha$ calculado en C_α difiera del supremo de S cuando éste se calcula en A.

Dada $\alpha < \kappa$, el que C_α sea completa implica que podemos aplicar el lema 2.7 a la colección $\{W_\alpha\} \cup \bigcup \mathcal{V}_\alpha$ para hallar U_α, un subconjunto independiente de C_α, con $|U_\alpha| = |\mathcal{V}_\alpha|^{|W_\alpha|} = \mu^{\kappa_\alpha}$. Observe que si $\alpha < \beta < \kappa$, entonces $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$. En particular, la cardinalidad de $U := \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es

$$|U| = \sup\{|U_\alpha| : \alpha < \kappa\} = \sup\{\mu^{\kappa_\alpha} : \alpha < \kappa\} = \mu^{<\kappa} = \lambda^{<\kappa} = |A|.$$

De esta forma, sólo debemos argumentar que U es un subconjunto independiente de A.

Según la proposición 2.11, $\{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia independiente de subálgebras de A y como cada B_α es denso en C_α, se sigue que $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ también es una familia independiente de subálgebras de A. Finalmente, invoquemos la proposición 2.13 para concluir que U es independiente. #

Teorema 2.30 (Balcar-Franěk). *Si A es un álgebra booleana completa e infinita, A tiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|A|$.*

Demostración. Sea A como en el enunciado. Por el lema 1.43, tenemos que $A \cong (A \upharpoonright w) \times (A \upharpoonright (-w))$, donde $A \upharpoonright w \cong \mathscr{P}(\kappa)$ para algún cardinal κ y $A \upharpoonright (-w)$ carece de átomos. Denotemos por B al álgebra booleana $A \upharpoonright w$ y por C al álgebra booleana $A \upharpoonright (-w)$. Supongamos que $h : B \times C \longrightarrow A$ es un isomorfismo. Note que $|A| = |B \times C| = |B| \cdot |C| = \max(|B|, |C|)$, y consideremos los siguientes casos.

<u>Caso 1.</u> $|A| = |B|$. Esta suposición implica que κ es un cardinal infinito, así que por el corolario 2.8, B posee un subconjunto independiente S de cardinalidad $2^\kappa = |A|$. Luego, $h[S \times \{0\}]$ es un subconjunto independiente de A de tamaño $|A|$.

<u>Caso 2.</u> $|A| = |C|$. Como las funciones cardinales c y π preservan el orden, podemos aplicar el lema 2.22. Así, existe $W \subseteq C^+$ de tal manera que $C \cong \prod\{C \upharpoonright x : x \in W\}$, y además, si $x \in W$ entonces $C \upharpoonright x$ es c-homogénea y π-homogénea. Luego, para cada $x \in W$ la proposición 2.29 nos afirma que $C \upharpoonright x$ tiene una familia independiente de tamaño $|C \upharpoonright x|$. Del corolario 2.3 deducimos que el álgebra booleana producto $\prod\{C \upharpoonright x : x \in W\}$ tiene un subconjunto independiente de cardinalidad $|\prod\{C \upharpoonright x : x \in W\}|$. Como $C \cong \prod\{C \upharpoonright x : x \in W\}$, entonces C tiene una familia independiente de tamaño $|C|$. Finalmente, de forma análoga al caso 1, A tiene una familia independiente de tamaño $|A|$. #

Una aplicación inmediata del Teorema de Balcar-Franěk es que podemos calcular el tamaño del espacio de Stone de un álgebra de Boole infinita y completa. El espacio de Stone de un álgebra booleana A, usualmente denotado por $S(A)$, está compuesto por todos lo ultrafiltros de A.

Corolario 2.31. *Si A es un álgebra booleana infinita y completa, entonces A tiene $2^{|A|}$ ultrafiltros.*

Demostración. Por el Teorema de Balcar-Franěk, existe una familia independiente $S \subseteq A$ de tamaño $|A|$. Luego, el teorema 1.53 nos dice que A tiene al menos $2^{|A|}$ ultrafiltros. Por otro lado, $S(A) \subseteq \mathscr{P}(A)$ y de este modo, $|S(A)| = 2^{|A|}$. #

CAPÍTULO 3: FAMILIAS INDEPENDIENTES MAXIMALES

Este capítulo está dedicado a estudiar la relación entre familias θ-independientes maximales y propiedades de cardinales. Al final del capítulo llegaremos a hacer uso de ideales saturados.

3.1 Preámbulo

En esta sección, θ será un cardinal infinito, A un álgebra booleana completa, S un subconjunto de A y $\mathbb{P} = \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$.

Definición 3.1. Diremos que S es *θ-independiente maximal en A* si y sólo si S es θ-independiente en A y para cada $a \in A \setminus S$ se tiene que $S \cup \{a\}$ no es θ-independiente en A.

Lema 3.2. *S es θ-independiente maximal en A si y sólo si para toda $a \in A$ existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\overline{p} \leqslant a$ ó $\overline{p} \leqslant -a$.*

Demostración. Mostraremos que el enunciado "S no es θ-independiente maximal" es equivalente a la existencia de $x \in A$ tal que para toda $p \in \mathbb{P}$ se tiene que $\overline{p} \wedge x \neq 0$ y $\overline{p} - x \neq 0$.

Si S no es θ-independiente máximal en A, entonces existe $x \in A \setminus S$ tal que $S \cup \{x\}$ es θ-independiente en A. Ahora, sea $p \in \mathbb{P}$. Note que las funciones $p \cup \{(x, 0)\}$ y $p \cup \{(x, 1)\}$ son ambas elementos de $\mathrm{Fn}(S \cup \{x\}, 2, \theta)$. Como $S \cup \{x\}$ es θ-independiente, entonces

$$\overline{p} \wedge x = \overline{p \cup \{(x, 0)\}} \neq 0 \ \text{ y } \ \overline{p} - x = \overline{p \cup \{(x, 1)\}} \neq 0.$$

Supongamos ahora que existe $x \in A$ tal que para toda $p \in \mathbb{P}$ se tiene que $\overline{p} \wedge x \neq 0$ y $\overline{p} - x \neq 0$; note que si x fuese elemento de S, se tendría que $r = \{(x, 0)\} \in \mathbb{P}$ y $\overline{r} - x = x - x = 0$, lo cual contradiría nuestra elección de x. Veamos que $S \cup \{x\}$ es θ-independiente para mostrar que S no es maximal.

Sea $p \in \mathrm{Fn}(S \cup \{x\}, 2, \theta)$. Si $x \notin \mathrm{dom}(p)$, entonces $p \in \mathbb{P}$, por lo que $\overline{p} \neq 0$. Por otro lado, si $x \in \mathrm{dom}(p)$, entonces $q = p \setminus \{(x, p(x))\} \in \mathbb{P}$. Por hipótesis, $\overline{q} \wedge x \neq 0$ y $\overline{q} - x \neq 0$. Esto implica que $\overline{p} \neq 0$. #

Mostraremos a continuación que, cuando $\theta = \omega$, toda álgebra booleana no trivial posee un subconjunto S como el descrito en la definición previa.

Proposición 3.3. *Si A es un álgebra booleana no trivial, entonces A tiene una familia independiente maximal.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}$ es el conjunto de todas las familias independientes en A y ordenado con la contención directa, $\subseteq$. Si probamos que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ y que toda cadena en $\mathcal{S}$ está acotada en $\mathcal{S}$, podemos aplicar el Lema de Zorn para terminar la prueba.

Como A es no trivial, existe $x \in A \setminus \{0, 1\}$. De esta manera, $\{x\} \in \mathcal{S}$, es decir, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Ahora, tomemos $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$, una cadena en $\mathcal{S}$, y veamos que $\bigcup \mathcal{C}$ es una familia independiente. Sea $p \in \mathrm{Fn}(\bigcup \mathcal{C}, 2)$ y para cada $x \in \mathrm{dom}(p)$ sea $S_x \in \mathcal{C}$ de tal modo que $x \in S_x$. Como $|\mathrm{dom}(p)| < \omega$ y $\mathcal{C}$ es una cadena, existe $S \in \{S_x : x \in \mathrm{dom}(p)\}$ de tal modo que $S_x \subseteq S$ para cada $x \in \mathrm{dom}(p)$; en particular, $\mathrm{dom}(p) \subseteq S$. Luego, tenemos que $p \in \mathrm{Fn}(S, 2)$ y S es una familia independiente en A. Por lo tanto, $\overline{p} \neq 0$. #

Este argumento no se puede extender a cualquier cardinal. Por ejemplo, más adelante (ver corolario 3.16) probaremos que la existencia de una familia ω_1-independiente maximal no numerable en algún álgebra booleana de la forma $\mathscr{P}(X)$ implica la hipótesis del continuo, es decir, $\omega_1 = \mathfrak{c}$.

Las siguientes dos secciones están dedicadas a demostrar el resultado citado abajo.

Teorema 3.4. *Sea θ un cardinal regular y no numerable. Si $S \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ es una familia θ-independiente maximal con $|S| \geqslant \theta$, entonces:*

1. $2^{<\theta} = \theta$ *y*

2. *existen cardinales κ' y λ de tal modo que $\omega \leqslant \kappa' \leqslant \kappa$,*

$$\sup\{(2^{|\alpha|})^+ : \alpha < \theta\} \leqslant \lambda \leqslant \min\{\kappa', 2^\theta\}$$

y $\mathscr{P}(\kappa')$ posee un ideal no principal θ^+-saturado y λ-completo.

Claramente, el teorema previo se concentra en el álgebra booleana $\mathscr{P}(\kappa)$. Sin embargo, en aras de ser lo más generales posible, probaremos algunos resultados preliminares que aplican a cualquier álgebra booleana completa. De forma específica: en la sección siguiente supondremos que A es un álgebra booleana completa, que θ es un cardinal infinito y que S es un subconjunto θ-independiente maximal de A con $|S| \geqslant \theta$.

3.2 Lema de Glazer

En esta sección veremos algunas consecuencias importantes de la existencia de familias θ-independientes maximales que nos ayudarán a definir un ideal. Este último se usará para demostrar el teorema 3.4.

Para el primer resultado usaremos la notación de la definición 1.48.

Lema 3.5. *Para cada $r \in \mathbb{P}$ definamos $\psi_r : S \setminus \mathrm{dom}(r) \to S \restriction r$ mediante $\psi_r(y) = y \wedge \overline{r}$ para toda $y \in S \setminus \mathrm{dom}(r)$. Entonces ψ_r es una biyección y para cada $a \in S \restriction r$ se satisface que $a = \psi_r^{-1}(a) \wedge \overline{r}$.*

Demostración. Fijemos $r \in \mathbb{P}$. Claramente, $\mathrm{img}(\psi_r) = S \restriction r$, así que sólo debemos comprobar que ψ_r es inyectiva. Sean $x, y \in S \setminus \mathrm{dom}(r)$ distintos. Hagamos $q := r \cup \{(x,0),(y,1)\}$. Note que $q \in \mathbb{P}$. Además,

$$0 \neq \overline{q} = \overline{r} \wedge x \wedge (-y) = (\overline{r} \wedge x) \wedge ((-\overline{r}) \vee (-y)) = (\overline{r} \wedge x) \wedge (-(\overline{r} \wedge y));$$

por lo tanto $\psi_r(x) = x \wedge \overline{r} \neq y \wedge \overline{r} = \psi_r(y)$.

Entonces, hemos mostrado que ψ_r es biyectiva y la segunda parte del lema es un argumento rutinario que omitiremos. #

El siguiente resultado ocupará la notación que se utiliza en la definición 1.28.

Proposición 3.6. *$S \restriction r$ es una familia θ-independiente en $A \restriction \overline{r}$ para toda $r \in \mathbb{P}$.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{P}$ y tomemos su respectiva ψ_r (ver lema 3.5). Convengamos en denotar por e_a a la imagen de $a \in S \setminus \mathrm{dom}(r)$ bajo ψ_r, en otras palabras, e_a es el único elemento de $S \restriction r$ que satisface $e_a = a \wedge \overline{r} = \psi_r(a)$.

Para el resto de la prueba fijemos $p \in \mathrm{Fn}(S \upharpoonright r, 2, \theta)$. Hagamos $p' = p \circ \psi_r$ (ver definición 1.1) para obtener que $p' \in \mathrm{Fn}(S \setminus \mathrm{dom}(r), 2, \theta) \subseteq \mathbb{P}$. Luego $p = p' \circ \psi_r^{-1}$ y, por ende, $p = \{(e_a, p'(a)) : a \in \mathrm{dom}(p')\}$. En particular, $p(e_a) = p(a \wedge \overline{r}) = p'(a)$ para cada $a \in \mathrm{dom}(p')$ (ver diagrama de abajo).

$$\begin{tikzcd}
e_a & & a \arrow[ll] \\
S \upharpoonright r \arrow[d, "p"'] & & S \setminus \mathrm{dom}(r) \arrow[ll, "\psi_r"'] \arrow[dll, "p'"] \\
2 & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, con la intención de verificar la θ-independencia de $S \upharpoonright r$ en $A \upharpoonright \overline{r}$, notemos que $\overline{p} = \left(\bigwedge p^{-1}\{0\}\right) \wedge \bigwedge\{\overline{r} - x : x \in p^{-1}\{1\}\}$, pues $\overline{r} - x$ es el complemento de x en $A \upharpoonright \overline{r}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= \bigwedge\{e_a^{p(e_a)} : a \in \mathrm{dom}(p')\} = \bigwedge\{(a \wedge \overline{r})^{p'(a)} : a \in \mathrm{dom}(p')\} \\
&= \bigwedge\{a \wedge \overline{r} : a \in (p')^{-1}\{0\}\} \wedge \bigwedge\{\overline{r} - a : a \in (p')^{-1}\{1\}\} \\
&= \overline{r} \wedge \bigwedge\{a : a \in (p')^{-1}\{0\}\} \wedge \bigwedge\{-a : a \in (p')^{-1}\{1\}\} = \overline{r} \wedge \overline{p'}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\overline{p} = \overline{r} \wedge \overline{p'}$. Más aún, como $\mathrm{dom}(p') \subseteq S \setminus \mathrm{dom}(r)$, entonces $r \cup p' \in \mathbb{P}$. Entonces $0 \neq \overline{r \cup p'} = \overline{r} \wedge \overline{p'} = \overline{p}$. Por lo tanto, $S \upharpoonright r$ es una familia θ-independiente en $A \upharpoonright \overline{r}$. #

El resultado previo puede ser resumido diciendo que la propiedad de ser θ-independiente es hereditaria, esto es, siempre que S es θ-independiente, se sigue que todas sus restricciones, $S \upharpoonright r$ con $r \in \mathbb{P}$, también son θ-independientes.

Definición 3.7. Una colección $T \subseteq A$ será llamada *hereditariamente θ-independiente maximal* si para cualquier $r \in \mathbb{P}$ se tiene que $T \upharpoonright r$ es una familia θ-independiente maximal en $A \upharpoonright \overline{r}$.

Hágase notar que si T es hereditariamente θ-independiente maximal, entonces T es θ-independiente maximal en A pues $T \upharpoonright \emptyset = T$ y $A \upharpoonright \overline{\emptyset} = A$.

Teorema 3.8 (Lema de Glazer)**.** *Si S es θ-independiente maximal, existe $r \in \mathbb{P}$ de tal modo que $S \upharpoonright r$ es una familia hereditariamente θ-independiente maximal en $A \upharpoonright \overline{r}$.*

Demostración. Supongamos que para toda $p \in \mathbb{P}$ tenemos que $S \upharpoonright p$ no es una familia hereditariamente θ-independiente maximal en $A \upharpoonright \overline{p}$ y definamos

$$D = \{r \in \mathbb{P} : S \upharpoonright r \text{ no es } \theta\text{-independiente maximal en } A \upharpoonright \overline{r}\}$$

Veamos que D es denso en $\mathbb{P}$ (definición 1.13).

Sea $p \in \mathbb{P}$. Por hipótesis, tenemos que $S \upharpoonright p$ no es hereditariamente θ-independiente en $A \upharpoonright \overline{p}$, por lo que existe $q \in \mathrm{Fn}(S \upharpoonright p, 2, \theta)$ tal que $(S \upharpoonright p) \upharpoonright q$ no es θ-independiente maximal en $(A \upharpoonright \overline{p}) \upharpoonright \overline{q}$. Observe que como el complemento de $x \in A \upharpoonright \overline{p}$ en $A \upharpoonright \overline{p}$ es $\overline{p} - x$, se tiene que $\overline{q} = \left(\bigwedge q^{-1}\{0\}\right) \wedge \bigwedge\{\overline{p} - x : x \in q^{-1}\{1\}\}$.

Para cada $a \in \mathrm{dom}(q)$ denotemos por e_a al único elemento en $S \setminus \mathrm{dom}(p)$ tal que $a = e_a \wedge \overline{p} = \psi_p(e_a)$ (ver lema 3.5). Definamos $r = p \cup (q \circ \psi_p)$ (ver definición 1.1).

$$a \longleftarrow e_a$$

$$\begin{tikzcd}
S \upharpoonright p \arrow[d, "q"'] & S \setminus \mathrm{dom}(p) \arrow[l, "\psi_p"'] \arrow[d, "q \circ \psi_p"'] & \mathrm{dom}(p) \arrow[d, "p"] \\
2 & 2 & 2
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que $q \circ \psi_p = \{(e_a, q(a)) : a \in \mathrm{dom}(q)\}$, es decir, $\mathrm{dom}(q \circ \psi_p) = \psi_p^{-1}[\mathrm{dom}\, q] \subseteq S \setminus \mathrm{dom}(p)$. Entonces, r es una función. Por otro lado, como tomamos $q \in \mathrm{Fn}(S \upharpoonright p, 2, \theta)$ y $p \in \mathbb{P}$, obtenemos las desigualdades $|q \circ \psi_p| < \theta$ y $|p| < \theta$; así, $|r| < \theta$. Luego, $r \in \mathbb{P}$. Además, $r \leqslant p$, así que bastará mostrar que $r \in D$, es decir, que $S \upharpoonright r$ no es θ-independiente maximal en $A \upharpoonright \overline{r}$. Como ya sabemos que $(S \upharpoonright p) \upharpoonright q$ no es θ-independiente maximal en $(A \upharpoonright \overline{p}) \upharpoonright \overline{q}$, si vemos que $(S \upharpoonright p) \upharpoonright q = S \upharpoonright r$ y $(A \upharpoonright \overline{p}) \upharpoonright \overline{q} = A \upharpoonright \overline{r}$, entonces ya tendríamos mostrada la densidad de D.

Primero notemos que si $a \in \mathrm{dom}(q)$, entonces $a = e_a \wedge \overline{p}$ y el complemento de a en A es $-(e_a \wedge \overline{p}) = (-e_a) \vee (-\overline{p})$. Por lo tanto $\overline{p} - a = \overline{p} \wedge ((-e_a) \vee (-\overline{p})) = \overline{p} - e_a$. De esto obtenemos que

$$\begin{aligned}
\overline{r} &= \overline{p} \wedge \overline{(q \circ \psi_p)} = \overline{p} \wedge \bigwedge\{e_a : a \in \ q^{-1}\{0\}\} \wedge \bigwedge\{-e_a : a \in \ q^{-1}\{1\}\} \\
&= \overline{p} \wedge \bigwedge\{\overline{p} \wedge e_a : a \in \ q^{-1}\{0\}\} \wedge \bigwedge\{\overline{p} \wedge (-e_a) : a \in \ q^{-1}\{1\}\} \\
&= \overline{p} \wedge \bigwedge\{a : a \in \ q^{-1}\{0\}\} \wedge \bigwedge\{\overline{p} - a : a \in \ q^{-1}\{1\}\} = \overline{p} \wedge \overline{q}.
\end{aligned}$$

Además, tenemos las equivalencias listadas a continuación:

$$\begin{gathered}
x \in (A \upharpoonright \overline{p}) \upharpoonright \overline{q} \Leftrightarrow (x \in A \upharpoonright \overline{p} \ \text{ y } \ x \leqslant \overline{q}) \Leftrightarrow (x \in A \ \text{ y } \ x \leqslant \overline{p} \ \text{ y } \ x \leqslant \overline{q}) \\
\Leftrightarrow (x \in A \ \text{ y } \ x \leqslant \overline{p} \wedge \overline{q} = \overline{r}) \Leftrightarrow x \in A \upharpoonright \overline{r}.
\end{gathered}$$

Por lo tanto $(A \upharpoonright \overline{p}) \upharpoonright \overline{q} = A \upharpoonright \overline{r}$.

Por otro lado, si $x \in S \upharpoonright r$, entonces existe $y \in S \setminus \mathrm{dom}(r)$ tal que $x = y \wedge \overline{r} = y \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}$. Como $y \in S \setminus \mathrm{dom}(r) \subseteq S \setminus \mathrm{dom}(p)$, entonces $\psi_p(y) = y \wedge \overline{p} \in S \upharpoonright p$. Si fuera el caso que $\psi_p(y) \in \mathrm{dom}(q)$, se tendría que $y \in \mathrm{dom}(q \circ \psi_p) \subseteq \mathrm{dom}(r)$, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto $y \wedge \overline{p} \in (S \upharpoonright p) \setminus \mathrm{dom}(q)$, lo cual implica que $x \in (S \upharpoonright p) \upharpoonright q$. Entonces hemos mostrado que $S \upharpoonright r \subseteq (S \upharpoonright p) \upharpoonright q$.

Con respecto a la otra contención, si $x \in (S \upharpoonright p) \upharpoonright q$, se sigue que existe $y \in (S \upharpoonright p) \setminus \mathrm{dom}(q)$ tal que $x = y \wedge \overline{q}$. Esto implica que existe $z \in S \setminus \mathrm{dom}(p)$ tal que $y = z \wedge \overline{p}$ y $x = y \wedge \overline{q} = z \wedge \overline{p} \wedge \overline{q}$. Si $z \in \mathrm{dom}(r)$, entonces $z \in \mathrm{dom}(q \circ \psi_p)$ y por lo tanto tendríamos que $y = z \wedge \overline{p} = e_z \in \mathrm{dom}(q)$, una contradicción. Entonces hemos mostrado que $(S \upharpoonright p) \upharpoonright q \subseteq S \upharpoonright r$. Por lo tanto $(S \upharpoonright p) \upharpoonright q = S \upharpoonright r$, lo cual muestra que D es denso.

Ahora empleemos las proposiciones 1.8 y 1.9 de [6] para fijar una anticadena maximal W en $\mathbb{P}$ tal que $W \subseteq D$. Como para cada $r \in W \subseteq D$ se tiene que la familia $S \upharpoonright r$ no es θ-independiente maximal en $A \upharpoonright \overline{r}$, entonces, por el lema 3.2, existe $x_r \in A \upharpoonright \overline{r}$ tal que para toda $q \in \mathrm{Fn}(S \upharpoonright r, 2, \theta)$ tenemos que $\overline{q} \nleq x_r$ y $\overline{q} \nleq \overline{r} - x_r$. El que $\overline{q} \leqslant \overline{r}$ implica, junto con $\overline{q} \nleq \overline{r} - x_r$, que $\overline{q} \nleqslant x_r$.

Llamemos $x := \bigvee\{x_r : r \in W\} \in A$ (recuerde que, por hipótesis, A es completa). Dado que S es θ-independiente maximal, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\overline{p} \leqslant x^i$ para alguna $i < 2$ (lema 3.2). Por otro lado, como W es anticadena maximal, el lema 1.16 nos dice que existe $r \in W$ tal que $p \mid r$.

Llamemos

$$q := \{(a \wedge \overline{r}, p(a)) : a \in \mathrm{dom}(p) \setminus \mathrm{dom}(r)\}.$$

Entonces $q \in \mathrm{Fn}(S \restriction r, 2, \theta)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\overline{q} &= \bigwedge\{a \wedge \overline{r} : a \in p^{-1}\{0\} \setminus \mathrm{dom}(r)\} \wedge \bigwedge\{\overline{r} - a : a \in p^{-1}\{1\} \setminus \mathrm{dom}(r)\} \\
&= \overline{r} \wedge \bigwedge\{a : a \in p^{-1}\{0\} \setminus \mathrm{dom}(r)\} \wedge \bigwedge\{-a : a \in p^{-1}\{1\} \setminus \mathrm{dom}(r)\} \\
&= \overline{r} \wedge \overline{p} \leqslant \overline{r} \wedge x^i.
\end{aligned}$$

Note que si $t \in W \setminus \{r\}$, entonces $r \perp t$; lo cual implica que $\overline{r} \wedge \overline{t} = 0$ (ver lema 1.52). Por ello, $\overline{r} \wedge x_t = 0$ (recuerde que $x_t \in A \restriction \overline{t}$). Luego, si $i = 0$, podemos aplicar el lema 1.22 y deducir que

$$\overline{q} \leqslant \overline{r} \wedge x = \overline{r} \wedge \bigvee\{x_t : t \in W\} = \bigvee\{\overline{r} \wedge x_t : t \in W\} = \bigvee\{\overline{r} \wedge x_r, 0\} = \overline{r} \wedge x_r.$$

Como $x_r \in A \restriction \overline{r}$, tenemos que $q \in \mathrm{Fn}(S \restriction r, 2, \theta)$ y $\overline{q} \leqslant x_r$, lo cual contradice nuestra elección de r. Por otro lado, si $i = 1$, entonces $\overline{q} \leqslant \overline{r} \wedge (-x) \leqslant \overline{r} \wedge (-x_r)$, lo cual es una contradicción.

De esta manera, obtenemos una contradicción que surge de suponer que no hay $p \in \mathbb{P}$ para el que $S \restriction p$ sea una familia hereditariamente θ-independiente maximal en $A \restriction \overline{p}$. Así, el teorema queda demostrado. #

Corolario 3.9. *Supongamos que S es hereditariamente θ-independiente maximal. Si $p \in \mathbb{P}$ y $x \in A$ son arbitrarios, entonces existe $r \in \mathbb{P}$ con $r \leqslant p$ y de tal modo que $\overline{r} \leqslant \overline{p} - x$ o $\overline{r} \leqslant x$.*

Demostración. Dado que $S \restriction p$ es θ-independiente en $A \restriction \overline{p}$ y $\overline{p} - x \in A \restriction \overline{p}$, el lema 3.2 implica que existe $q \in \mathrm{Fn}(S \restriction p, 2, \theta)$ de tal suerte que $\overline{q} \leqslant \overline{p} - x$ ó $\overline{q} \leqslant \overline{p} - (\overline{p} - x) = \overline{p} \wedge x$. Ahora, si ψ_p es como en el lema 3.2, entonces los argmentos dados en los primeros párrafos de la prueba del Lema de Glazer muestran que $r := p \cup (q \circ \psi_p)$ satisface que $r \in \mathbb{P}$ y $\overline{r} = \overline{p} \wedge \overline{q} = \overline{q}$. De este modo, r es el elemento de $\mathbb{P}$ mencionado en el corolario. #

Observe que si $p \in \mathbb{P}$, entonces $|\mathrm{dom}(p)| < \theta \leqslant |S|$ y así, $|S \setminus \mathrm{dom}(p)| = |S|$. Luego, el lema 3.5 nos garantiza que $S \restriction p$ y S son equipotentes. Analicemos el caso $A = \mathscr{P}(\kappa)$.

Según el teorema 3.8, existe $r \in \mathbb{P}$ de tal modo que $\mathscr{P}(\kappa) \restriction \overline{r} = \mathscr{P}(\overline{r})$ posee una familia hereditariamente θ-independiente maximal de cardinalidad al menos θ. Hagamos $\kappa' := |\overline{r}|$ y notemos que $\omega \leqslant \kappa' \leqslant \kappa$. Así, κ' es el cardinal cuya existencia está garantizada por el inciso (2) del teorema 3.4.

De este modo, en la sección siguiente supondremos que A es un álgebra booleana completa, que θ es un cardinal regular infinito y que S es un subconjunto hereditariamente θ-independiente maximal de A con $|S| \geqslant \theta$.

3.3 Familias independientes e ideales

Definamos I como el conjunto de todos los elementos del álgebra de Boole que tienen la propiedad de que no existe $p \in \mathbb{P}$ para el que $\overline{p}$ esté por debajo de él, es decir

$$I = \{a \in A : \neg \exists p \in \mathbb{P} \ (\overline{p} \leqslant a)\}.$$

Para el siguiente lema usaremos las definiciones 1.30 y 1.31.

Lema 3.10. *I es un ideal que contiene a todos los átomos de A. Además, si A es atómica, entonces I es no principal.*

Demostración. Como S es hereditariamente θ-independiente maximal, entonces para cualquier $p \in \mathbb{P}$ se tiene que $\overline{p} \neq 0$, es decir, $\overline{p} \nleqslant 0$. Por lo tanto, $0 \in I$. Además, $\emptyset \in \mathbb{P}$ y $\overline{\emptyset} = 1 \leqslant 1$, por lo que $1 \notin I$.

Ahora, si tomamos $x \in I$ y $y \in A$ tales que $y \leqslant x$, no puede ser que haya $r \in \mathbb{P}$ con $\overline{r} \leqslant y$ ya que esto implicaría que $\overline{r} \leqslant y \leqslant x$, lo cual contradiría la pertenencia $x \in I$. Entonces, $y \in I$.

Ahora veamos que si tomamos dos elementos arbitrarios x y y en I, entonces $x \vee y \in I$. Supongamos que $x \vee y \notin I$ para llegar a una contradicción. Entonces hay $p \in \mathbb{P}$ de tal manera que $\overline{p} \leqslant x \vee y$. Luego, $\overline{p} - (x \vee y) = 0$.

Note que como x y y están en I, entonces para toda $q \in \mathbb{P}$ se tiene que $\overline{q} - x \neq 0 \neq \overline{q} - y$. Por el corolario 3.9 aplicado a p y x, existe una $q_0 \in \mathbb{P}$ de tal modo que $q_0 \leqslant p$ y que alguna de las condiciones siguientes sucede: $\overline{q_0} \leqslant \overline{p} - x$ ó $\overline{q_0} \leqslant x$. Como $x \in I$, entonces el caso que se debe de dar es $\overline{q_0} \leqslant \overline{p} - x$. Análogamente, para $y \in A$ y $q_0 \in \mathbb{P}$ existe $q_1 \in \mathbb{P}$ que extiende a q_0 de manera que $\overline{q_1} \leqslant \overline{q_0} - y$ ó $\overline{q_1} \leqslant y$. Siendo y un elemento de I deducimos que $\overline{q_1} \leqslant \overline{q_0} - y$. De esta manera, se tiene que

$$0 \neq \overline{q_1} \leqslant \overline{q_0} - y \leqslant (\overline{p} - x) - y = \overline{p} - (x \vee y) = 0$$

lo cual es una contradicción. Así, tenemos que I es un ideal.

Por otro lado, tomemos $a \in A$ un átomo. Supongamos que existe $p \in \mathbb{P}$ de tal manera que $\overline{p} \leqslant a$. Como a es átomo y $\overline{p} \neq 0$, entonces $a = \overline{p}$. Como $|S| \geqslant \theta > |p|$, entonces existe $z \in S \setminus \operatorname{dom} p$. Tomando $i \in 2$ arbitraria definimos $q_i = p \cup \{(z, i)\}$. De esta manera, $q_i \in \mathbb{P}$ y por lo tanto $0 \neq \overline{q_i} = \overline{p} \wedge z^i = a \wedge z^i \leqslant a$. Siendo a un átomo, tenemos que $a \wedge z^i = a$, lo que nos dice que $a \leqslant z^i$. Pero $i \in 2$ fue arbitraria y de este modo, $0 \neq a \leqslant z - z = 0$, lo cual es una contradicción. Así, a está en I.

Si agregamos la hipótesis de que A es atómica y suponemos que I es principal, entonces hay $b \in A$ tal que $I = \{x \in A : x \leqslant b\}$. En especial, $b \in I$ y así, $b \neq 1$. Por ello, $-b \neq 0$. Siendo A atómica, existe $a \in \operatorname{Atom}(A)$ de manera que $a \leqslant -b$, pero como $\operatorname{Atom}(A) \subseteq I$, también se tendría que $a \in I$ lo que implicaría que $a \leqslant b$. Luego, $a \leqslant b - b = 0$, contradiciendo el que a es átomo. Por lo tanto, I no puede ser principal. #

Proposición 3.11. *I es un ideal $(2^{|\alpha|})^+$-completo para cada $\alpha < \theta$.*

Demostración. La prueba será por contradicción: supongamos que I no es $(2^\alpha)^+$-completo para algún cardinal $\alpha < \theta$.

Por el lema 1.40, existen un cardinal $\lambda < (2^\alpha)^+$ y $\{a_\xi : \xi < \lambda\} \subseteq I$ de tal modo que $\bigvee\{a_\xi : \xi < \lambda\} \notin I$ y $a_\xi \wedge a_\eta = 0$ siempre que $\xi < \eta < \lambda$. El que $\lambda < (2^\alpha)^+$ implica que $\lambda \leqslant 2^\alpha$, así que podemos fijar $H \subseteq {}^\alpha 2$ de tal modo que $|H| = \lambda$. Empleemos a H para reindizar nuestra familia $\{a_\xi : \xi < \lambda\}$, esto es, tomemos $\{y_f : f \in H\} \subseteq I$ con $\bigvee\{y_f : f \in H\} \notin I$ y $y_f \wedge y_g = 0$ cuando $f, g \in H$ sean distintos. Definamos entonces $y_f = 0$ para cada $f \in {}^\alpha 2 \setminus H$ y obtengamos lo siguiente:

- $\{y_f : f \in {}^\alpha 2\} \subseteq I$,
- $y := \bigvee\{y_f : f \in {}^\alpha 2\} \notin I$ y
- si $f, g \in {}^\alpha 2$ satisfacen $f \neq g$, entonces $y_f \wedge y_g = 0$.

Para cualesquiera $\xi \leqslant \alpha$ e $i < 2$ hagamos $y_i^\xi := \bigvee\{y_f : f \in {}^\alpha 2 \text{ y } f(\xi) = i\}$. Recursivamente contruiremos una sucesión $\{p_\xi : \xi < \alpha\} \subseteq \mathbb{P}$ y una función $g \in {}^\alpha 2$ de tal modo que lo siguiente sea cierto para cada $\xi < \alpha$:

1. $\overline{p_0} \leqslant y$,

2. $\xi < \eta < \alpha$ implica que $p_\eta \leqslant p_\xi$ (en particular $\overline{p_\eta} \leqslant \overline{p_\xi}$),

3. $\overline{p_{\xi+1}} \leqslant y^\xi_{g(\xi)}$.

La condición $y \notin I$ produce $p_0 \in \mathbb{P}$ de tal modo que 1 se verifica. Supongamos entonces que para algún $\beta < \alpha$ hemos obtenido $\{p_\xi : \xi < \beta\}$ y $\{g(\xi) : \xi + 1 < \beta\}$ satisfactoriamente. Si β es límite, proponemos $p_\beta = \bigcup\{p_\xi : \xi \leqslant \beta\}$. La regularidad de θ y la condición 2 producen $p_\beta \in \mathbb{P}$. Por otro lado, $\{g(\xi) : \xi + 1 \leqslant \beta\} = \{g(\xi) : \xi + 1 < \beta\}$.

En el caso en que $\beta = \gamma + 1$ para algún $\gamma < \alpha$, empecemos por notar que, como consecuencia de 2, $p_\gamma \leqslant p_0$ y así, $\overline{p_\gamma} \leqslant \overline{p_0} \leqslant y$; luego, la igualdad $y = y_0^\gamma \vee y_1^\gamma$ nos da $\overline{p_\gamma} - y_0^\gamma = \overline{p_\gamma} \wedge y_1^\gamma \leqslant y_1^\gamma$. Ahora apliquemos el corolario 3.9 a $y_0^\gamma \in A$ y $p_\gamma \in \mathbb{P}$ para obtener la existencia de $p_{\gamma+1} \in \mathbb{P}$ con $p_{\gamma+1} \leqslant p_\gamma$ y, una de dos, $\overline{p_{\gamma+1}} \leqslant y_0^\gamma$ ó $\overline{p_{\gamma+1}} \leqslant \overline{p_\gamma} - y_0^\gamma$. En vista de la observación hecha al principio de este párrafo, se deduce que existe $g(\gamma) \in 2$ de tal suerte que $\overline{p_{\gamma+1}} \leqslant y^\gamma_{g(\gamma)}$. Esto completa nuestra recursión.

Observemos que el lema 1.22 nos da $\bigwedge\{y^\xi_{g(\xi)} : \xi < \alpha\} = y_g$. Además, el definir $p_\alpha := \bigcup\{p_\xi : \xi < \alpha\}$ produce $p_\alpha \in \mathbb{P}$ y, según la condición 3, $\overline{p_\alpha} \leqslant \bigwedge\{y^\xi_{g(\xi)} : \xi < \alpha\}$; esto es, $\overline{p_\alpha} \leqslant y_g$. Luego, $y_g \notin I$, que es la contradicción buscada. #

Considerando la definición 1.39, mostremos la siguiente proposición.

Proposición 3.12. *I es un ideal $(2^{<\theta})^+$-saturado.*

Demostración. Supongamos que no lo es. Así, existe un conjunto $\{x_\gamma : \gamma < (2^{<\theta})^+\} \subseteq A \setminus I$ de tal manera que si $\gamma < \delta < (2^{<\theta})^+$, entonces $x_\gamma \wedge x_\delta \in I$. Notemos que para cada $\gamma < (2^{<\theta})^+$, como $x_\gamma \in A \setminus I$, existe $p_\gamma \in \mathbb{P}$ de tal manera que $\overline{p_\gamma} \leqslant x_\gamma$. Además, si $\gamma < \delta < (2^{<\theta})^+$ son tales que p_γ y p_δ son compatibles, se sigue que $p_\gamma \cup p_\delta \in \mathbb{P}$ y $\overline{p_\gamma \cup p_\delta} \leqslant \overline{p_\gamma} \wedge \overline{p_\delta} \leqslant x_\gamma \wedge x_\delta \in I$; un absurdo. Así, concluimos que $p_\gamma \perp p_\delta$. De esta manera, $\{p_\gamma : \gamma < (2^{<\theta})^+\}$ es una anticadena en $\mathbb{P}$. Esto contradice el teorema 1.20 que nos dice que $\mathbb{P}$ tiene la $(2^{<\theta})^+$.c.c. Por lo tanto, I es un ideal $(2^{<\theta})^+$-saturado. #

Ahora tenemos todas las herramientas para probar del teorema 3.4. Convengamos en suponer, por el resto de la sección, que κ' es un número cardinal y que S es una familia hereditariamente θ-independiente maximal en el álgebra de Boole $\mathscr{P}(\kappa')$ con $|S| \geqslant \theta$ (en especial, el álgebra de Boole completa A que hemos usado a lo largo de este capítulo será igual, a partir de este momento, a $\mathscr{P}(\kappa')$). Recordemos que el orden del álgebra es $\subseteq$ y su cero correspondiente es $\emptyset$.

Proposición 3.13. $2^{<\theta} = \theta$

Demostración. El lema 1.7 nos da la desigualdad $\theta \leqslant 2^{<\theta}$. Luego, sólo debemos demostrar que para cada $\alpha < \theta$ se tiene que $|{}^{\alpha}2| \leqslant \theta$.

Sea $\alpha < \theta$. La desigualdad $|S| \geqslant \theta$ implica que existe $T \in [S]^{\theta}$. Ahora, la igualdad $|\theta \times \alpha| = \theta$ garantiza que podemos enumerar a T sin repeticiones de la siguiente manera: $T = \{A_{\rho\xi} : \rho < \theta \text{ y } \xi < \alpha\}$.

Para cada $\delta \in \kappa$ definamos $\psi_\delta : \theta \to {}^{\alpha}2$ de tal manera que para cada $\rho < \theta$ obtengamos la función $\psi_\delta(\rho) : \alpha \to 2$ donde $\psi_\delta(\rho)(\xi) = 1$ si y sólo si $\delta \in A_{\rho\xi}$. Para cada $f \in {}^{\alpha}2$ hagamos $R_f := \{\delta < \kappa : f \notin \operatorname{img}(\psi_\delta)\}$. Probemos, como corolario de la afirmación de abajo y de la proposición 3.11, que hay una $\delta < \kappa$ que tiene la propiedad de que $\delta \notin R_f$ para toda $f \in {}^{\alpha}2$, es decir, $\delta \in \kappa \setminus \bigcup\{R_f : f \in {}^{\alpha}2\}$; así, su correspondiente ψ_δ sería una función sobreyectiva y la proposición quedaría demostrada.

Afirmación 1. $R_f \in I$ para cada $f \in {}^{\alpha}2$.

Sea $f \in {}^{\alpha}2$ y supongamos que $R_f \notin I$. Entonces existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $\overline{p} \subseteq R_f$. Como $|\operatorname{dom}(p)| < \theta = |T|$ y nuestra enumeración de T no tiene repeticiones, podemos tomar $\rho < \theta$ de manera que $\operatorname{dom}(p) \cap \{A_{\rho\xi} : \xi < \alpha\} = \emptyset$ y definir $q := p \cup \{(A_{\rho\xi}, f(\xi)) : \xi < \alpha\}$. Así, q es un elemento de $\mathbb{P}$ de tal modo que $q \leqslant p$. Sea $\xi < \alpha$ arbitrario. Nuestra definición de q da $q(A_{\rho\xi}) = f(\xi)$; en particular, $\overline{q} \subseteq {A_{\rho\xi}}^{f(\xi)}$. Luego, para cada $\delta \in \overline{q}$ se sigue que $\delta \in {A_{\rho\xi}}^{f(\xi)}$ y de este modo, $\psi_\delta(\rho)(\xi) = f(\xi)$. Así, $f = \psi_\delta(\rho) \in \operatorname{img}(\psi_\delta)$ para cada $\delta \in \overline{q}$.

Del párrafo anterior se sigue que $\overline{q} \subseteq \kappa \setminus R_f$ y, en consecuencia, $\overline{p} = \overline{q} \cap \overline{p} \subseteq (\kappa' \setminus R_f) \cap R_f = \emptyset$, lo cual es una contradicción a que S sea θ-independiente. Por lo tanto, $R_f \in I$.

Como I es $(2^{|\alpha|})^+$-completo, sucede que $\bigcap\{R_f : f \in 2^\alpha\} \in I$, y por ello podemos afirmar que $\kappa \setminus \bigcap\{R_f : f \in 2^\alpha\} \neq \emptyset$. #

El resultado siguiente es consecuencia directa de las proposiciones 3.12 y 3.13.

Corolario 3.14. *I es θ^+-saturado.*

Denotemos por λ al mínimo cardinal μ de tal modo que I no es μ^+-completo. Mostremos que λ satisface las condiciones del inciso (2) del teorema 3.4.

En primer término, si I no fuese λ-completo, existirían $\mu < \lambda$ y $E \in [I]^\mu$ de tal manera que $\bigcup E \notin I$. Luego, I no sería μ^+-completo, contradiciendo la minimalidad de λ. En resumen, I es λ-completo.

Lema 3.15. $\sup\{(2^{|\alpha|})^+ : \alpha < \theta\} \leqslant \lambda \leqslant \min\{\kappa', 2^\theta\}$

Demostración. Si existiese $\alpha < \theta$ de tal modo que $\lambda < (2^{|\alpha|})^+$, entonces $\lambda^+ \leqslant (2^{|\alpha|})^+$ y como I no es λ^+-completo, I tampoco sería $(2^{|\alpha|})^+$-completo; una contradicción a la proposición 3.11. Este argumento prueba la desigualdad de la izquierda en nuestro lema.

Para mostrar que $\lambda \leqslant 2^\theta$ tomemos $S_0 \in [S]^\theta$ y para cada $f \in {}^{S_0}2$ definamos

$$\overline{f} := \left(\bigwedge f^{-1}\{0\}\right) \cap \left(\bigwedge f^{-1}\{1\}\right).$$

Supongamos, en busca de una contradicción, que $\overline{f} \notin I$. Entonces $\overline{p} \subseteq \overline{f}$, para algún $p \in \mathbb{P}$. Ahora, si existiese $a \in S_0 \setminus \operatorname{dom}(p)$, se tendría que $q := p \cup \{(a, 1 - f(a))\}$ sería un elemento de $\mathbb{P}$ con $q \leqslant p$; luego, $\overline{q} \subseteq \overline{p} \subseteq \overline{f} \subseteq a^{f(a)}$ y $\overline{q} \subseteq a^{1-f(a)}$, es decir, $\overline{q} = \emptyset$. Este absurdo muestra que $S_0 \subseteq \operatorname{dom}(p)$, lo cual, a su vez, implica que $\theta \leqslant |\operatorname{dom}(p)| < \theta$, la contradicción buscada.

Por definición, se tiene que $\bigcup\{\overline{f} : f \in {}^{S_0}2\} \subseteq \kappa'$. Por otro lado, si $\alpha \in \kappa'$ entonces la función $f_\alpha : S_0 \longrightarrow 2$ dada por $f_\alpha(a) = 0$ si y sólo si $\alpha \in a$, para cualquier $a \in S_0$, satisface $\alpha \in \overline{f_\alpha}$. Por lo tanto, $\alpha \in \bigcup\{\overline{f} : f \in {}^{S_0}2\}$ lo que implica que $\kappa' \subseteq \bigcup\{\overline{f} : f \in {}^{S_0}2\}$. De esta manera, concluimos que $\kappa' = \bigcup\{\overline{f} : f \in {}^{S_0}2\}$ por lo que I no es $(2^\theta)^+$-completo, y así $\lambda \leqslant 2^\theta$.

Finalmente, el lema 3.10 nos da $\{\{\alpha\} : \alpha < \kappa'\} = \operatorname{Atom}(\mathscr{P}(\kappa')) \subseteq I$ y, por ende, I no es $(\kappa')^+$-completo; así, $\lambda \leqslant \kappa'$. #

Con esto concluimos la prueba del teorema 3.4.

Corolario 3.16. *Si algún álgebra booleana de la forma $\mathscr{P}(X)$ posee una familia ω_1-independiente maximal no numerable, entonces $\omega_1 = \mathfrak{c}$.*

Demostración. Aplicado el teorema 3.4 a $\theta = \omega_1$ obtenemos, por el primer inciso, que $\omega_1 = 2^{<\omega_1} = 2^{\omega} = \mathfrak{c}$. #

3.4 Familias independientes maximales y cardinales grandes

En esencia, el teorema 3.4 establece que la existencia de cierta familia independiente maximal implica que hay un ideal con características interesantes. De este modo, tiene sentido preguntarse por la otra implicación, esto es, ¿será que la existencia de cierto tipo de ideales implica que hay familias independientes maximales? Una respuesta a esta pregunta está dada en el último resultado de nuestro trabajo. En éste se menciona la completación booleana de un orden parcial y por esta razón le recomendamos al lector la lectura de las sección 4.2 de [5]; de manera similar, emplearemos álgebras cociente así que supondremos familiaridad con la sección 5.4 de [5].

Teorema 3.17. *Sean λ y θ cardinales con $\theta \leqslant \lambda$, θ regular y $2^{<\theta} = \theta$. Denote por B a la completación booleana del orden parcial $\mathrm{Fn}(2^\lambda, 2, \theta)$. Si existe I, un ideal θ^+-saturado λ-completo en $\mathscr{P}(\lambda)$, con la propiedad de que $B \cong \mathscr{P}(\lambda)/I$, entonces existe S, una familia θ-independiente maximal en $\mathscr{P}(\lambda)$.*

Demostración. Hagamos $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(2^\lambda, 2, \theta)$ y supongamos que $\psi : B \to \mathscr{P}(\lambda)/I$ es un isomorfismo. Sin perder generalidad supondremos que $\mathbb{P}$ es un suborden denso de B.

Sea $\delta < 2^\lambda$. Definamos $p_\delta^i := \{(\delta, i)\}$, para cada $i < 2$, y notemos que $\{p_\delta^0, p_\delta^1\} \subseteq \mathbb{P}$. Como $\mathbb{P}$ es denso en B y las funciones p_δ^0 y p_δ^1 son incompatibles, entonces $p_\delta^0 \wedge p_\delta^1 = 0$ en B, así que $\psi(p_\delta^0) \wedge \psi(p_\delta^1) = [\emptyset]$ (observe que estamos usando el símbolo $[a]$ para denotar a la clase de equivlencia de $a \subseteq \lambda$ módulo I). Fijemos $X_\delta \in \psi(p_\delta^0)$ y $Y_\delta \in \psi(p_\delta^1)$. Entonces

$$[Y_\delta] = \psi(p_\delta^1) \leqslant -\psi(p_\delta^0) = -[X_\delta].$$

Concentrémonos en verificar que $[Y_\delta] = -[X_\delta]$.

Supogamos, buscando una contradicción, que $a := -[X_\delta] - [Y_\delta]$ es tal que $a \neq [\emptyset]$. Usemos la densidad de $\mathbb{P}$ en B para hallar $p \in \mathbb{P}$ con $\psi(p) \leqslant a$. Tenemos dos posibilidades por analizar. Primero, si $q := p \cup p_\delta^0$ es función, entonces $q \leqslant p$ y $q \leqslant p_\delta^0$, de donde $\psi(q) \leqslant \psi(p) \leqslant a \leqslant -[X_\delta]$ y $\psi(q) \leqslant \psi(p_\delta^0) \leqslant a \leqslant [X_\delta]$; luego $\psi(q) = [\emptyset]$, una contradicción al hecho de que $\mathbb{P}$ no posee mínimo. Por otro lado, si $r := p \cup p_\delta^1$ fuese función, se seguiría que $\psi(r) \leqslant \psi(p) \leqslant a \leqslant -[Y_\delta]$ y $\psi(q) \leqslant \psi(p_\delta^1) \leqslant a \leqslant [Y_\delta]$; nuevamente: $\psi(r) = [\emptyset]$, lo cual es imposible.

En resumen, $[Y_\delta] = [-X_\delta]$, para cada $\delta < 2^\lambda$. Más aún, si $i < 2$, entonces $[\emptyset] \neq \psi(p_\delta^i) = [X_\delta]^i$. En particular, se sigue que si $\xi < \eta < 2^\lambda$, entonces $[X_\xi] \neq [X_\eta]$.

Definamos $S := \{X_\xi : \xi < 2^\lambda\}$ y mostremos que $S' := \{[X_\xi] : \xi < 2^\lambda\}$ es un subconjunto θ-independiente de $\mathscr{P}(\lambda)/I$. Con esto en mente, tomemos $r \in \mathrm{Fn}(S', 2, \theta)$ y hagamos $D := \{\xi < 2^{<\lambda} : [X_\xi] \in \mathrm{dom}(p)\}$. Entonces $|D| = |\mathrm{dom}(p)|$ (ver párrafo previo) y por ende, la función $q : D \to 2$ dada por $q(\xi) = r([X_\xi])$, para cada $\xi \in D$, satisface $q \in \mathbb{P}$. Ahora, si $\xi \in D$, se sigue que $q \leqslant p_\xi^{q(\xi)}$ y de esta manera, $[\emptyset] \neq \psi(q) \leqslant \bigwedge\{[X_\xi]^{q(\xi)} : \xi \in D\} = \overline{r}$, esto es, $\overline{r} \neq [\emptyset]$.

La contención $I \subseteq \mathscr{P}(\lambda)$ nos da $|I| \leqslant 2^\lambda$ y dado que $\theta \leqslant \lambda < 2^\lambda$, se sigue que podemos enumerar a I como $\{C_\delta : \delta < 2^\lambda\}$ de tal forma que para cada $C \in I$ obtenemos $|\{\delta < 2^\lambda : C = C_\delta\}| \geqslant \theta$. Ahora, para cada $\delta < 2^\lambda$ definamos $Z_\delta := X_\delta \setminus C_\delta$ y observemos que $[Z_\delta] = [X_\delta]$. Luego, de lo hecho en el párrafo anterior deducimos que $T = \{Z_\delta : \delta < 2^\lambda\}$ es un subconjunto θ-independiente de $\mathscr{P}(\lambda)$. Emplearemos el lema 3.2 para probar que T es θ-independiente maximal, esto es, mostraremos que si $X \in \mathscr{P}(\lambda)$, entonces existe $q \in \mathrm{Fn}(T, 2, \theta)$ de tal manera que $\overline{q} \subseteq X$ ó $\overline{q} \subseteq \lambda \setminus X$.

Como I es ideal en $\mathscr{P}(\lambda)$, se deduce que $X \notin I$ ó $\lambda \setminus X \notin I$, es decir, existe $i < 2$ con $[X]^i \neq [\emptyset]$. Ahora, el que $\mathbb{P}$ sea denso en B, implica que existe $r \in \mathbb{P}$ con $\psi(r) \leqslant [X]^i$. Hagamos $E = \{p_\xi^{r(\xi)} : \xi \in \mathrm{dom}(r)\}$ para obtener que $E \subseteq \mathbb{P}$ y $r = \bigcup E$. De este modo, el ínfimo de $\psi[E] = \{[X_\xi]^{r(\xi)} : \xi \in \mathrm{dom}(r)\}$ en B es igual a $\psi(r)$. De esto se deduce que si

$$p := \{(Z_\xi, r(\xi)) : \xi \in \mathrm{dom}(r)\},$$

entonces $p \in \mathrm{Fn}(S, 2, \theta)$ y $[\overline{p}] \leqslant \psi(r)$. En particular, $[\overline{p}] \leqslant [X]^i$.

Cuando $i = 0$, obtenemos $\overline{p} \setminus X \in I$. Luego, nuestra enumeración de I nos arroja

$\delta \in 2^\lambda \setminus \mathrm{dom}(r)$ de tal modo que $C_\delta = \overline{p} \setminus X$. Definamos $q = p \cup \{(Z_\delta, 0)\}$ y, de este modo, $q \in \mathrm{Fn}(T, 2, \theta)$ y

$$\begin{aligned}\overline{q} &= \overline{p} \cap Z_\delta = \overline{p} \cap (X_\delta \setminus C_\delta) = X_\delta \cap (\overline{p} \setminus C_\delta)\\ &= X_\delta \cap (\overline{p} \setminus (\overline{p} \setminus X)) = X_\delta \cap (\overline{p} \cap X) \subseteq X\end{aligned}$$

Por otro lado, si $i = 1$, llegamos a que $\overline{p} \setminus (\lambda \setminus X) = \overline{p} \cap X \in I$. Igual que antes, existe $\eta \in 2^\lambda \setminus \mathrm{dom}(r)$ de tal manera que $C_\eta = \overline{p} \cap X$. Hagamos $q = p \cup \{(Z_\eta, 0)\}$ para obtener $q \in \mathrm{Fn}(T, 2, \theta)$ y

$$\begin{aligned}\overline{q} &= \overline{p} \cap Z_\eta = \overline{p} \cap (X_\eta \setminus C_\eta) = X_\eta \cap (\overline{p} \setminus C_\eta)\\ &= X_\eta \cap (\overline{p} \setminus (\overline{p} \cap X)) = X_\eta \cap (\overline{p} \setminus X) \subseteq \lambda \setminus X.\end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba. #

Concluimos el trabajo con algunos comentarios. Los teoremas 3.4 y 3.17 tienen como hilo conductor la existencia de ideales no principales que son θ^+-saturados y λ-completos en algún cardinal κ. A este respecto, una revisión cuidadosa del capítulo 22 de [1] le mostrará al lector la estrecha relación que guardan la existencia de ideales ω_1-saturados que son κ-completos en un cardinal κ con qué tan grande es κ; por ejemplo, si el cardinal κ posee un ideal ω_1-saturado y κ-completo, entonces (ver [1, Corollary 22.5, p. 412]) κ es débilmente Mahlo y, una de dos, (ver lemas 10.9 y 10.14 de [1]) κ es medible o $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$ y κ es débilmente inaccesible.

Lo anterior nos dice, entre otras cosas, que la existencia de familias θ-independientes, con $\theta > \omega$, es una hipótesis de cardinales grandes. Mostrando, nuevamente (ver corolario 3.16), la abismal diferencia que se da entre los casos $\theta = \omega$ (proposición 3.3) y $\theta > \omega$.

[1] T. Jech, *Set Theory, 3rd Millennium ed, rev. and expanded*, Springer, 2002.

[2] F. Hernández Hernández, *Teoría de Conjuntos (una introducción)*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 13, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[3] K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[4] K. Kunen, *Maximal σ-independent Families*, Fundamenta Mathematicae Vol. 117.1 páginas: 75-80. `http://eudml.org/doc/211375`, 1983.

[5] J. Monk, R. Bonnet, S. Koppelberg, *Handbook of Boolean algebras*, Amsterdam: North-Holland, 1989.

[6] A. L. Celis Martínez, *Encajes entre nociones de forcing*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2013.

Alumna: Estefanía del Carmen Riviello Rodríguez

Asesor: Doctor Roberto Pichardo Mendoza