



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

TRANSFORMACIONES DE DARBOUX ESTOCÁSTICAS PARA CAMINATAS
ALEATORIAS EN \mathbb{N}_0 Y \mathbb{Z}

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
CLAUDIA IVONNE JUAREZ GALLEGOS

DIRECTOR DE TESIS:
MANUEL DOMÍNGUEZ DE LA IGLESIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CD. MEX., OCTUBRE 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

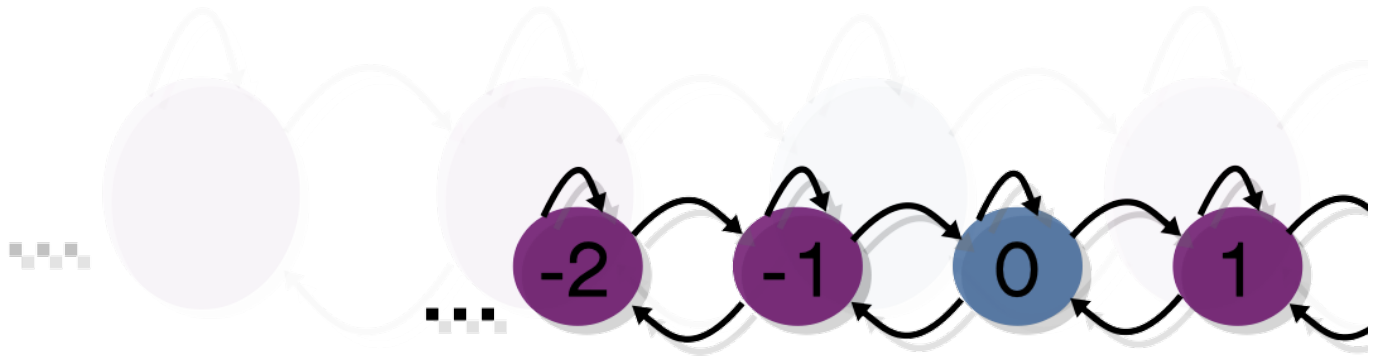
DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TRANSFORMACIONES DE DARBOUX PARA CAMINATAS ALEATORIAS EN \mathbb{N}_0 Y \mathbb{Z}

CLAUDIA IVONNE JUAREZ GALLEGOS



UNAM
OCTUBRE 2019

Agradecimientos

Agradezco especialmente a mi familia, por el apoyo incondicional y el aliento constante que me brindaron toda la vida.

A mi tutor, el Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia por su continua guía y paciencia, no solo durante la realización de esta tesis, sino también durante toda mi formación académica.

Agradezco a mis maestros y a mis amigos, quienes sin duda han dejado una huella permanente en mi vida y me han ayudado a crecer tanto académica como personalmente.

Quiero agradecer también a las instituciones que hicieron posible la realización de este trabajo. A la Universidad Nacional Autónoma de México que me abrió sus puertas desde preparatoria y que a lo largo de estos años me ha puesto frente a oportunidades que nunca imaginé.

Agradezco al Instituto de Matemáticas por acogerme y brindarme un espacio de trabajo en el cual logré formar lazos que sé que duraran toda la vida.

Agradezco al CONACYT por la beca nacional de maestría brindado durante la maestría.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM N104219 titulado "Métodos espectrales para el análisis de modelos probabilísticos, estocásticos y cuánticos". Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	I
Introducción	1
1. Transformación de Darboux para caminatas aleatorias en \mathbb{N}_0	5
1.1. Factorizaciones UL y LU estocásticas	5
1.2. Transformación de Darboux y relación entre las medidas espectrales	13
1.3. Ejemplo	19
2. Transformación de Darboux para caminatas aleatorias en \mathbb{Z}	23
2.1. Factorizaciones UL y LU estocásticas	24
2.2. Transformación de Darboux y relación entre las matrices espectrales	34
2.3. Ejemplos	57
Conclusiones	65
Bibliografía	69

Introducción

Los procesos estocásticos son una herramienta muy útil en el estudio de fenómenos aleatorios que se desarrollan a través del tiempo. Dado que existe una gran cantidad de situaciones en las que es necesario tomar decisiones que involucran este tipo de fenómenos, el espectro de aplicaciones de la teoría de procesos estocásticos es muy extenso, con ejemplos que van desde la física [6], biología [1], climatología [5], ingeniería [25] y medicina [2], entre muchas otras.

Una de las clases de procesos estocásticos más importantes son los procesos de Markov, los cuales tienen la propiedad de que dado el estado actual, el pasado y el futuro son independientes. En esta tesis se estudiarán procesos de Markov a tiempo discreto con espacio de estados discreto E , conocidos como cadenas de Markov, particularmente aquellas cuyo espacio de estados es numerable y en las cuales el proceso solo puede ir del estado i al estado j en un paso cuando $|i - j| \leq 1$. A dichas cadenas de Markov se les conoce como *caminatas aleatorias*, y su estudio gira en torno a la matriz de transición P . Esta última está formada por las probabilidades de transición entre los posibles estados, es decir, $(P)_{ij \in E} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ es la probabilidad de transición a un paso del estado i al estado j , por lo que $P_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$. La literatura existente sobre la teoría de caminatas aleatorias es extensa, con monografías clásicas tales como [18, 20, 22] donde en general se pueden encontrar buenas introducciones a la teoría de cadenas de Markov.

Si el espacio de estados de una caminata aleatoria es $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, la matriz de transición P , denominada matriz de Jacobi en teoría de operadores, es una matriz tridiagonal semi-infinita (con entradas P_{ij} tales que $i, j \in \mathbb{N}_0$) que se puede ver como un operador acotado y autoadjunto en el espacio $\ell^2_\pi(\mathbb{N}_0)$ para cierta sucesión $\pi = (\pi_n)_{n \geq 0}$. Por lo tanto se puede aplicar el Teorema Espectral y encontrar la correspondiente *medida espectral* asociada. Esta fue la herramienta principal que usaron S. Karlin y J. McGregor

en una serie de artículos escritos en los años cincuenta (véase [15, 16, 17]), donde inicialmente estudiaron cadenas de nacimiento y muerte y posteriormente el caso de caminatas aleatorias con espacio de estados en \mathbb{N}_0 . En sus artículos, los autores encontraron una representación integral para las probabilidades de transición a m pasos en términos de polinomios ortogonales, conocida como *fórmula de representación de Karlin-McGregor* y mostraron su utilidad para estudiar propiedades probabilísticas de los procesos tales como recurrencia y absorción. Desde entonces, muchos otros autores como M. E. H. Ismail, D. Masson, G. Valent, E. van Doorn, H. Dette o P. Flajolet por mencionar unos pocos, han contribuido a ampliar esta conexión (véase [14] para un resumen de estos resultados).

En este trabajo se analiza una factorización estocástica del tipo UL (LU), la cual consiste en descomponer a la matriz P en el producto de dos matrices estocásticas: una matriz bidiagonal superior y una matriz bidiagonal inferior (y viceversa). Al realizar una *transformación de Darboux discreta*, es decir, invertir el orden de multiplicación de los factores, se obtiene una nueva matriz tridiagonal cuya medida espectral está relacionada con la medida espectral original mediante una *transformación de Geronimus* (UL) o una *transformación de Christoffel* (LU). El estudio de la transformación de Geronimus y de la transformación de Christoffel para familias de polinomios ortogonales se remonta a los años cuarenta, pero no fue hasta 1997 cuando Alexei Zhedanov en [26] estudió las relaciones entre las medidas espectrales las cuales se conocen con los mismos nombres y se definen en el Teorema 1.3 de esta tesis.

La idea de descomponer a la matriz de transición asociada a un proceso estocástico no es nueva. Un ejemplo es el estudio de W. K. Grassman en [7] quien consideró una cadena de Markov con estados finitos y propuso la factorización $I - P = (A - I)(B - S)$, donde A es una matriz triangular superior, B es triangular inferior y S es diagonal. Posteriormente D. P. Heyman en [12] extendió la factorización a procesos en los que P tiene infinitos estados y es positivo recurrente. Más tarde V. Vigon en [23] estudió la factorización UL de una cadena de Markov considerando una factorización de la forma $I - P = (I - L)(I - K)$, donde L es una matriz triangular superior y K es triangular inferior, y su relación con la factorización de Wiener-Hopf.

Las factorizaciones consideradas en [7, 12, 23] son diferentes a las desarrolladas por F. A. Grünbaum y M. Domínguez de la Iglesia en [10] donde estudiaron la factorización UL (LU) de la matriz de transición de una caminata aleatoria con espacio de estados en \mathbb{N}_0 irreducible de la forma $P = P_U P_L$, donde P_U es una matriz bidiagonal superior y P_L es bidiagonal inferior añadiendo la condición de que ambas matrices sean *estocásticas*. En el Capítulo 1 de este trabajo se presentan los resultados de [10] en donde se muestra que, de hecho, la factorización UL depende de un parámetro libre, mientras que la factorización LU ($P = \tilde{P}_L \tilde{P}_U$) es única. Además los autores presentan una condición necesaria y suficiente para que la factorización estocástica exista. Para el caso LU, dicha condición

resulta ser una cota superior para el parámetro libre, mientras que para el caso UL la cota superior es para una entrada de P . Es aquí donde se presenta la relación con teoría de fracciones continuas, ya que las cotas anteriores son fracciones continuas que se construyen alternando los coeficientes de la matriz P . Se analiza también la transformación de Darboux discreta (la matriz resultante al intercambiar el orden de multiplicación) de ambas factorizaciones y se muestra la relación de las medidas espectrales asociadas.

En la última sección de [17], S. Karlin y J. McGregor analizaron el caso de caminatas aleatorias con espacio de estados en $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. La matriz de transición P , que en este caso es una matriz doblemente infinita (el número de filas y renglones va de menos infinito a infinito), genera dos familias de polinomios ortogonales linealmente independientes. Como P se puede ver como un operador tridiagonal acotado y autoadjunto en el espacio de Hilbert $\ell^2_\pi(\mathbb{Z})$, aplicando ahora el Teorema Espectral tres veces se obtienen tres medidas que se acomodan en una matriz de dimensión 2×2 llamada *matriz espectral* que se denota como $\Psi(x)$ y también se obtiene una representación integral para las probabilidades de transición a m pasos. Posteriormente W. E. Pruitt en [21] hizo un análisis similar con procesos de nacimiento y muerte con espacio de estados en \mathbb{Z} . Desde una perspectiva más teórica, D. R. Masson y J. Repka en [19] estudiaron la conexión que existe entre polinomios ortogonales, fracciones continuas, ecuaciones diferenciales y los operadores de Jacobi autoadjuntos en $\ell^2(\mathbb{Z})$ y más recientemente D. Dai, M. E. H. Ismail y X. Wang en [3] estudiaron matrices de Jacobi doblemente infinitas con ayuda de fracciones continuas.

Las caminatas aleatorias con espacio de estados en \mathbb{Z} pueden verse como un caso particular de los denominados procesos *quasi-birth-and-death* (QBD) que son procesos donde el espacio de estados es de dimensión 2 de la forma $\mathbb{N}_0 \times \{1, \dots, N\}$ para $N \in \mathbb{N}$. La primera componente (discreta) se denomina *nivel*, mientras que la segunda componente (discreta y finita) se denomina *fase*. Las transiciones sólo son posibles entre niveles adyacentes, pero es posible moverse entre cualesquiera de las fases. En este caso la matriz de transición, en vez de ser tridiagonal, es una matriz tridiagonal por bloques semi-infinita y la herramienta adecuada para el análisis espectral es la teoría de polinomios ortogonales a valores matriciales. En [4, 8] se establece esta relación y se hace un análisis espectral de procesos QBD. Recientemente F. A. Grünbaum y M. Domínguez de la Iglesia en [11] estudiaron la factorización estocástica por bloques UL y LU para procesos QBD tal como hicieron en [10] para caminatas aleatorias simples pero no profundizaron la relación existente entre las matrices espectrales asociadas a las transformaciones de Darboux discretas.

En el Capítulo 2 se extienden los resultados contenidos en el trabajo de F. A. Grünbaum y M. Domínguez de la Iglesia en [10]. Se estudia la factorización estocástica UL (LU) de una caminata aleatoria con espacio de estados en \mathbb{Z} , con la excepción de que ahora la matriz de transición P asociada al proceso es una matriz doblemente infinita. En este

caso tanto la factorización UL como la factorización LU dependen de un parámetro libre (a diferencia de lo que ocurre con la factorización LU en \mathbb{N}_0 , que es única). En este caso, como las matrices son doblemente infinitas, la condición necesaria y suficiente para que la factorización sea estocástica va a ser que el parámetro libre (en ambas factorizaciones) esté acotado superior e inferiormente por ciertas fracciones continuas.

En la segunda sección del Capítulo 2 se analiza la transformación de Darboux discreta de la matriz de transición P . Las nuevas matrices $\tilde{P} = P_L P_U$ para la factorización UL y $\hat{P} = \tilde{P}_U \tilde{P}_L$ para la factorización LU también son doblemente infinitas y, dado que ambas dependen de un parámetro libre, representan nuevas familias de caminatas aleatorias que están relacionadas con la caminata aleatoria original. Se muestra que la relación entre la matriz espectral asociada a P y las matrices espectrales asociadas a sus transformaciones de Darboux \tilde{P} y \hat{P} están dadas por

$$\tilde{\Psi}(x) = \mathbf{S}_0(x)\Psi_S(x)\mathbf{S}_0^*(x) \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}(x) = \mathbf{T}_0(x)\Psi_T(x)\mathbf{T}_0^*(x),$$

respectivamente, donde $\Psi_S(x)$ y $\Psi_T(x)$ son transformaciones de Geronimus de la matriz espectral original $\Psi(x)$, $\mathbf{S}_0(x)$ y $\mathbf{T}_0(x)$ son polinomios matriciales de grado uno y $\mathbf{S}_0^*(x)$ y $\mathbf{T}_0^*(x)$ sus correspondientes matrices traspuestas conjugadas.

Finalmente, en la última sección del Capítulo 2, se aplican los resultados obtenidos en esta tesis a dos ejemplos. El primero es la caminata aleatoria con probabilidades de transición constantes y el segundo también tiene probabilidades de transición constantes, pero el estado cero puede ser atractor o repulsor. Resulta interesante ver que bajo ciertas condiciones la transformación de Darboux discreta, en ambos casos, resulta invariante, es decir, después de invertir el orden de los factores la caminata aleatoria resulta igual a la original. Este fenómeno no se da en el caso de caminatas aleatorias con espacio de estados en \mathbb{N}_0 . Todos los resultados del Capítulo 2 son originales y se pueden consultar en [13].

Transformación de Darboux para caminatas aleatorias en \mathbb{N}_0

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por M. Domínguez de la Iglesia y F. A. Grünbaum en [10] en donde se considera la matriz de transición P de una caminata aleatoria con espacio de estados en $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$. El objetivo principal es ver bajo qué condiciones se puede factorizar a P como producto de una matriz bidiagonal superior y una matriz bidiagonal inferior (y viceversa) con la condición de que ambas sean estocásticas.

En [10] se analizan dos maneras de factorizar a P : la primera es la factorización UL, es decir, expresar a P como $P_U P_L$ que va a depender de un parámetro libre. La segunda es la factorización LU, es decir, expresar a P como $\tilde{P}_L \tilde{P}_U$ que resulta ser única. A continuación se estudia la transformación de Darboux que consiste en invertir el orden de multiplicación de los factores de P y se analiza la relación entre la medida espectral asociada a la matriz de transición P y la medida espectral asociada a la matriz estocástica resultante de la transformación de Darboux. Para el caso de la factorización UL dicha relación está dada por una transformación de Geronimus, mientras que para el caso de la factorización LU la relación estará dada por una transformación de Christoffel.

1.1. Factorizaciones UL y LU estocásticas

En esta sección se obtienen las factorizaciones UL y LU de la matriz de transición P asociada a una caminata aleatoria. Dichas factorizaciones resultan útiles ya que si es posible asociar a P con un modelo de urnas, en ese contexto, la factorización representaría

la descomposición de un experimento en la realización de dos experimentos consecutivos más simples.

Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria irreducible con espacio de estados \mathbb{N}_0 y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & b_2 & a_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Para la factorización UL descomponga a P de la siguiente forma

$$P = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & y_1 & x_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_2 & x_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & r_2 & s_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = P_U P_L, \quad (1.2)$$

o equivalentemente

$$a_n = x_n s_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (1.3)$$

$$b_n = x_n r_{n+1} + y_n s_n, \quad n \geq 0, \quad (1.4)$$

$$c_n = y_n r_n, \quad n \geq 1. \quad (1.5)$$

Como se busca que P_U y P_L sean estocásticas, entonces se tiene que

$$x_n + y_n = 1, \quad n \geq 0, \quad (1.6)$$

$$s_0 = 1, \quad r_n + s_n = 1, \quad n \geq 1. \quad (1.7)$$

Como P es irreducible y estocástica, es decir $0 < a_n, c_{n+1} < 1$, $n \geq 0$, automáticamente se tiene que $x_n s_{n+1} > 0$, $n \geq 0$ y $y_n r_n > 0$, $n \geq 1$. Es importante notar que el sistema de ecuaciones (1.3)-(1.7) tiene *un parámetro libre* $0 \leq y_0 < 1$, a partir del cual es posible obtener las entradas de P_U y P_L como sigue: se fija y_0 y por las ecuaciones (1.6) y (1.7) se cumple que $s_0 = 1$ y $x_0 = 1 - y_0$. Entonces para $n \geq 1$ se obtiene $s_n, r_n, y_n, x_n, s_{n+1}, r_{n+1}, \dots$ usando las ecuaciones (1.3), (1.7), (1.5) y (1.6) en ese orden.

Por otro lado, para la factorización LU, la descomposición es

$$P = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \tilde{r}_1 & \tilde{s}_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{r}_2 & \tilde{s}_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{y}_2 & \tilde{x}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \tilde{P}_L \tilde{P}_U, \quad (1.8)$$

o equivalentemente

$$a_n = \tilde{s}_n \tilde{x}_n, \quad n \geq 0, \quad (1.9)$$

$$b_n = \tilde{r}_n \tilde{x}_{n-1} + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 0, \quad (1.10)$$

$$c_n = \tilde{r}_n \tilde{y}_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad (1.11)$$

como se busca que \tilde{P}_L y \tilde{P}_U sean estocásticas, se tienen las condiciones

$$\tilde{s}_0 = 1, \quad \tilde{r}_n + \tilde{s}_n = 1, \quad n \geq 1, \quad (1.12)$$

$$\tilde{x}_n + \tilde{y}_n = 1, \quad n \geq 0. \quad (1.13)$$

Como antes, por la irreducibilidad de P , se tiene que $\tilde{s}_n \tilde{x}_n > 0$, $n \geq 0$ y $\tilde{r}_n \tilde{y}_{n-1} > 0$, $n \geq 1$, pero con la diferencia de que en este caso *no hay parámetro libre*, es decir, la factorización será única ya que a partir de $\tilde{s}_0 = 1$ se pueden generar las sucesiones \tilde{x}_n , \tilde{y}_n , \tilde{r}_{n+1} y \tilde{s}_{n+1} , con $n \geq 0$, de manera única usando las ecuaciones (1.9), (1.13), (1.11) y (1.12) en ese orden.

Los sistemas de ecuaciones (1.3)-(1.7) y (1.9)-(1.13) consideran condiciones para que la suma por renglones de las matrices P_U y P_L o \tilde{P}_L y \tilde{P}_U sea uno, sin embargo no se considera la condición de que los coeficientes estén dentro del intervalo $[0, 1]$, de manera que podría ocurrir que algunos coeficientes sean negativos. Es por eso que es necesario analizar bajo qué condiciones la factorización UL (LU) es estocástica, es decir, ambos factores son realmente matrices estocásticas. Para ello se necesitan los siguientes resultados que aparecen en [10].

Lema 1.1. *Sean P_U y P_L como en la ecuación (1.2) y $s_0 = 1$. Entonces P_U es una matriz estocástica si y sólomente si P_L es una matriz estocástica. El mismo resultado ocurre para la factorización LU en la ecuación (1.8).*

Demostración. Suponiendo que P_U es matriz estocástica, por inducción se tiene que si $x_0 + y_0 = 1$ usando las ecuaciones (1.3), (1.4), (1.7) y la hipótesis de que P es estocástica

$$s_1 + r_1 = \frac{a_0}{x_0} + \frac{b_0 - y_0 s_0}{x_0} = \frac{a_0}{x_0} + \frac{b_0 - y_0}{x_0} = \frac{a_0 + b_0 - y_0}{x_0} = \frac{1 - y_0}{x_0} = \frac{x_0}{x_0} = 1.$$

Ahora, si $s_n + r_n = 1$, de nuevo por las ecuaciones (1.3)-(1.5) y (1.7) se tiene que

$$s_{n+1} + r_{n+1} = \frac{a_n + b_n - y_n s_n}{x_n} = \frac{a_n + b_n - y_n(1 - r_n)}{x_n} = \frac{a_n + b_n + c_n - y_n}{x_n} = \frac{1 - y_n}{x_n} = 1.$$

Como por hipótesis P y P_U son estocásticas, tienen coeficientes no negativos. Entonces por las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) se tiene que los coeficientes de P_L son no negativos.

Por lo tanto P_L es matriz estocástica.

Suponiendo ahora que P_L es estocástica, usando las ecuaciones (1.3), (1.4) y (1.5) los coeficientes de P_U son positivos y se tiene que para $n \geq 0$

$$\begin{aligned} x_n + y_n &= x_n(s_{n+1} + r_{n+1}) + y_n(s_n + r_n) \\ &= x_n s_{n+1} + x_n r_{n+1} + y_n s_n + y_n r_n \\ &= a_n + b_n + c_n = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto P_U es estocástica. □

Lema 1.2. Sean s_n, r_n, x_n, y_n las sucesiones que se obtienen a partir de la ecuación (1.2). Con $0 \leq y_0 < 1$ parámetro libre, se cumple que

$$y_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{1 - \frac{a_n}{1 - y_n}}, \quad n \geq 0,$$

mientras que

$$s_1 = \frac{a_0}{1 - y_0}, \quad s_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{1 - \frac{c_n}{1 - s_n}}, \quad n \geq 1.$$

Demostración. Usando las mismas ecuaciones que antes se tiene que

$$y_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{r_{n+1}} = \frac{c_{n+1}}{1 - s_{n+1}} = \frac{c_{n+1}}{1 - \frac{a_n}{x_n}} = \frac{c_{n+1}}{1 - \frac{a_n}{1 - y_n}},$$

y que

$$s_{n+1} = \frac{a_n}{x_n} = \frac{a_n}{1 - y_n} = \frac{a_n}{1 - \frac{c_n}{r_n}} = \frac{a_n}{1 - \frac{c_n}{1 - s_n}}.$$

□

Es importante notar que el lema anterior involucra únicamente a la factorización UL que hay que tratar con especial cuidado ya que y_0 es parámetro libre. Más aún, el Lema 1.2 no garantiza que al elegir $0 < y_0 < 1$, P_U y P_L resulten ser matrices estocásticas. Es por eso que es necesario hacer un análisis más profundo para encontrar condiciones sobre dicho parámetro libre que garanticen que las sucesiones s_n, r_n, x_n, y_n generen matrices estocásticas. Para ello, será necesario hacer uso de notación y algunos resultados de teoría de fracciones continuas (ver [24]).

Sea H la fracción generada por la alternancia de los coeficientes $\{a_n\}_{n \geq 0}$ y $\{c_n\}_{n \geq 1}$, es decir,

$$H = 1 - \frac{a_0}{1 - \frac{c_1}{1 - \frac{a_1}{1 - \dots}}}$$

A expresiones como la anterior se les conoce como *fracciones continuas* y la notación que se usará para representarlas es la siguiente

$$H = 1 - \frac{a_0}{1} - \frac{c_1}{1} - \frac{a_1}{1} - \dots . \quad (1.14)$$

Se define a los *convergentes* de H como las fracciones truncadas, es decir,

$$\begin{aligned} h_{2n} &= 1 - \frac{a_0}{1} - \frac{c_1}{1} - \frac{a_1}{1} - \dots - \frac{c_n}{1}, \quad n \geq 0, \\ h_{2n+1} &= 1 - \frac{a_0}{1} - \frac{c_1}{1} - \frac{a_1}{1} - \dots - \frac{a_n}{1}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Usando teoría de fracciones continuas (ver [24] pp.15), se sabe que es posible expresar a los convergentes como el cociente

$$h_n = \frac{A_n}{B_n}, \quad (1.16)$$

donde las sucesiones $\{A_n\}_{n \geq 0}$ y $\{B_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + \xi_n A_{n-2}, \quad A_{-1} = 1, \quad A_0 = 1 \quad n \geq 1, \\ B_n &= B_{n-1} + \xi_n B_{n-2}, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

para alguna sucesión $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ que se determinará a continuación.

Obsérvese que

$$\begin{aligned} 1 &= h_0 = \frac{A_0}{B_0}, \\ 1 - a_0 &= h_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_0 + \xi_1 A_{-1}}{B_0 + \xi_1 B_{-1}} = 1 + \xi_1, \\ \frac{1 - c_1 - a_0}{1 - c_1} &= h_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1 + \xi_2 A_0}{B_1 + \xi_2 B_0} = \frac{1 + \xi_1 + \xi_2}{1 + \xi_2}, \end{aligned}$$

de manera que $\xi_1 = -a_0$, $\xi_2 = -c_1$, entonces para h_3 se tiene que

$$1 - \frac{a_0}{1 - \frac{c_1}{1 - a_1}} = h_3 = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_2 + \xi_3 A_1}{B_2 + \xi_3 B_1},$$

simplificando la fracción de la izquierda y sustituyendo los valores de ξ_1 y ξ_2 se tiene que

$$\frac{1 - a_0 - c_1 - a_1(1 - a_0)}{1 - c_1 - a_1} = \frac{1 - a_0 - c_1 + \xi_3(1 - a_0)}{1 - c_1 + \xi_3},$$

por lo que $\xi_3 = -a_1$. Continuando con el mismo procedimiento se tiene que

$$1 - \frac{a_0}{1 - \frac{c_1}{1 - \frac{a_1}{1 - c_2}}} = h_4 = \frac{A_4}{B_4} = \frac{A_3 + \xi_4 A_2}{B_3 + \xi_4 B_2},$$

simplificando la fracción de la izquierda y sustituyendo los valores de ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 a la derecha se tiene que

$$\frac{1 - a_0 - c_1 - a_1(1 - a_0) - c_2(1 - a_0 - c_1)}{1 - a_1 - c_1 - c_2(1 - c_1)} = \frac{1 - a_0 - c_1 - a_1(1 - a_0) + \xi_4(1 - a_0 - c_1)}{1 - a_1 - c_1 + \xi_4(1 - c_1)},$$

por lo que $\xi_4 = -c_2$ y en general se tiene que $\xi_{2n} = -c_n$ y $\xi_{2n+1} = -a_n$. Entonces las ecuaciones que satisfacen $\{A_n\}_{n \geq 0}$ y $\{B_n\}_{n \geq 0}$ son las siguientes

$$\begin{cases} A_{2n} = A_{2n-1} - c_n A_{2n-2}, & n \geq 1, \\ B_{2n} = B_{2n-1} - c_n B_{2n-2}, & n \geq 1, \\ A_{2n+1} = A_{2n} - a_n A_{2n-1}, & n \geq 0, \\ B_{2n+1} = B_{2n} - a_n B_{2n-1}, & n \geq 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 B_0 - A_0 B_1 &= (1 - a_0) - 1 = -a_0, \\ A_2 B_1 - A_1 B_2 &= 1 - a_0 - c_1 - (1 - a_0)(1 - c_1) = -a_0 c_1, \end{aligned}$$

suponiendo que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned} A_{2n-2} B_{2n-3} - A_{2n-3} B_{2n-2} &= -a_0 c_1 a_1 c_2 \cdots a_{n-2} c_{n-1}, \\ A_{2n-1} B_{2n-2} - A_{2n-2} B_{2n-1} &= -a_0 c_1 \cdots c_{n-1} a_{n-1}, \end{aligned}$$

entonces, usando las relaciones (1.17) para $n + 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} A_{2n} B_{2n-1} - A_{2n-1} B_{2n} &= [A_{2n-1} - c_n A_{2n-2}] B_{2n-1} - A_{2n-1} [B_{2n-1} - c_n B_{2n-2}] \\ &= A_{2n-1} B_{2n-1} - c_n A_{2n-2} B_{2n-1} - A_{2n-1} B_{2n-1} + c_n A_{2n-1} B_{2n-2} \\ &= c_n [A_{2n-1} B_{2n-2} - A_{2n-2} B_{2n-1}] = -a_0 c_1 \cdots c_{n-1} a_{n-1} c_n, \end{aligned}$$

y con esto se cumple que

$$\begin{aligned} A_{2n+1} B_{2n} - A_{2n} B_{2n+1} &= [A_{2n} - a_n A_{2n-1}] B_{2n} - A_{2n} [B_{2n} - a_n B_{2n-1}] \\ &= A_{2n} B_{2n} - a_n A_{2n-1} B_{2n} + A_{2n} B_{2n} + a_n A_{2n} B_{2n-1} \\ &= a_n [A_{2n} B_{2n-1} - A_{2n-1} B_{2n}] = -a_0 c_1 \cdots a_{n-1} c_n a_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_{2n}B_{2n-1} - A_{2n-1}B_{2n} &= -a_0c_1a_1c_2 \cdots a_{n-1}c_n, & n \geq 1, \\ A_{2n+1}B_{2n} - A_{2n}B_{2n+1} &= -a_0c_1 \cdots c_n a_n, & n \geq 0, \end{aligned}$$

y usando la ecuación (1.16) se tiene que

$$h_{2n+2} - h_{2n+1} = \frac{A_{2n+2}}{B_{2n+2}} - \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} = \frac{A_{2n+2}B_{2n+1} - A_{2n+1}B_{2n+2}}{B_{2n+2}B_{2n+1}} = -\frac{a_0c_1 \cdots a_{n-1}c_n}{B_{2n+2}B_{2n+1}}, \quad (1.18)$$

$$h_{2n+1} - h_{2n} = \frac{A_{2n+1}}{B_{2n+1}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{A_{2n+1}B_{2n} - A_{2n}B_{2n+1}}{B_{2n+1}B_{2n}} = -\frac{a_0c_1a_1c_2 \cdots c_n a_n}{B_{2n+1}B_{2n}}. \quad (1.19)$$

Con la notación de fracciones continuas anterior es posible presentar uno de los teoremas más importantes que aparecen en [10] y que establece una condición necesaria y suficiente sobre y_0 para obtener una factorización UL en la que se obtengan dos matrices estocásticas.

Teorema 1.3. *Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición P en la ecuación (1.1), y sean P_U y P_L las matrices resultantes de la factorización UL generadas a partir del sistema (1.3)-(1.7) con $0 \leq y_0 < 1$ parámetro libre. Sea H definida en la ecuación (1.14) y sus convergentes $h_n = \frac{A_n}{B_n}$ definidos en las ecuaciones (1.15). Si*

$$0 < A_n < B_n, \quad n \geq 1,$$

entonces H es convergente. Además P_U y P_L son estocásticas si y sólo si

$$0 \leq y_0 \leq H.$$

Demostración. Por hipótesis $0 < A_n < B_n$, entonces como $h_n = \frac{A_n}{B_n}$ para $n \geq 1$, se tiene que $0 < h_n < 1$. Además $0 < a_n, c_{n+1} < 1$ y usando las ecuaciones (1.18) y (1.19) se tiene que

$$h_{2n+2} - h_{2n+1} < 0 \quad \text{y} \quad h_{2n+1} - h_{2n} < 0,$$

de lo que se sigue que

$$0 < \cdots < h_{2n+2} < h_{2n+1} < h_{2n} < \cdots < h_1 < h_0 = 1.$$

Por lo tanto $\{h_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión decreciente y acotada. Además, $h_n > H$, por lo tanto $\{h_n\}_{n \geq 0}$ converge a H .

Suponiendo ahora que P_U y P_L son estocásticas, se cumple que $0 \leq y_0 < 1 = h_0$ y se satisfacen las ecuaciones del Lema 1.2. Entonces para los subíndices pares se tiene que

$$y_n = \frac{c_n}{1 - s_n} < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad s_n < 1 - c_n,$$

sustituyendo el valor de s_n y despejando se obtiene que

$$y_{n-1} < 1 - \frac{a_{n-1}}{1 - c_n},$$

repitiendo el mismo procedimiento hasta llegar a y_0 se tiene que

$$y_0 < 1 - \left[\frac{a_0}{1} \right] - \left[\frac{c_1}{1} \right] - \dots - \left[\frac{c_n}{1} \right],$$

es decir, $y_0 < h_{2n}$.

Mientras que para los impares se tiene que

$$s_{n+1} = \frac{a_n}{1 - y_n} < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad y_n < 1 - a_n,$$

sustituyendo el valor de y_n y despejando se obtiene que

$$s_n < 1 - \frac{c_n}{1 - a_n} \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{a_{n-1}}{1 - y_{n-1}} < 1 - \frac{c_n}{1 - a_n},$$

es decir,

$$y_{n-1} < 1 - \frac{a_{n-1}}{1 - \frac{c_n}{1 - a_n}},$$

repitiendo el mismo procedimiento hasta llegar a y_0 se tiene que

$$y_0 < 1 - \left[\frac{a_0}{1} \right] - \left[\frac{c_1}{1} \right] - \dots - \left[\frac{a_n}{1} \right],$$

es decir, $y_0 < h_{2n+1}$.

Entonces para toda $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple que $y_0 < h_n$. Como $\{h_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión acotada y decreciente con límite H , se concluye que $0 \leq y_0 \leq H$. La prueba de que P_U y P_L son estocásticas si se cumple que $0 \leq y_0 \leq H$ sigue los mismos pasos con un argumento de inducción fuerte sobre n para demostrar que $s_n \in [0, 1]$.

□

Teorema 1.4. *Para la factorización LU se tiene que las matrices resultantes son estocásticas si y sólo si*

$$0 \leq a_0 \leq \tilde{H},$$

con

$$\tilde{H} = 1 - \left[\frac{c_1}{1} \right] - \left[\frac{a_1}{1} \right] - \left[\frac{c_2}{1} \right] - \left[\frac{a_2}{\dots} \right],$$

siempre que $0 < \tilde{A}_n < \tilde{B}_n$, $n \geq 1$, donde $\tilde{h}_n = \tilde{A}_n / \tilde{B}_n$ son los convergentes de \tilde{H} .

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 1.3 usando ahora las relaciones

$$\tilde{r}_{n+1} = \frac{c_{n+1}}{1 - \frac{a_n}{1 - \tilde{r}_n}} = \frac{c_{n+1}}{1 - \tilde{x}_n}, \quad n \geq 0,$$

y

$$\tilde{x}_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{1 - \frac{c_{n+1}}{1 - \tilde{x}_n}} = \frac{a_{n+1}}{1 - \tilde{r}_{n+1}}, \quad n \geq 0, \quad \tilde{x}_0 = a_0.$$

1.2. Transformación de Darboux y relación entre las medidas espectrales

En esta sección se analizará la relación entre la matriz P y su transformación de Darboux. La transformación de Darboux es la matriz resultante de intercambiar los elementos de la factorización estocástica de P y, de hecho, también será una matriz estocástica ya que la multiplicación de matrices estocásticas sigue siendo estocástica.

En el contexto de los modelos de urnas, con la factorización estocástica de P es posible reinterpretar un experimento como la realización de dos experimentos consecutivos más simples, A y B. La transformación de Darboux se puede interpretar como intercambiar el orden de los dos experimentos, es decir, realizar primero el experimento B y después el experimento A.

Para el caso de la factorización UL, se tiene que la transformación de Darboux discreta está dada por

$$\tilde{P} = P_L P_U = \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ r_1 & s_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & r_2 & s_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 & x_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & y_1 & x_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & y_2 & x_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \tilde{c}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{a}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Desarrollando el producto, los coeficientes de \tilde{P} están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n &= s_n x_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{b}_n &= r_n x_{n-1} + s_n y_n, \quad n \geq 0, \\ \tilde{c}_n &= r_n y_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La matriz \tilde{P} es estocástica por ser producto de matrices estocásticas y depende del parámetro libre y_0 , por lo que \tilde{P} genera una familia de caminatas aleatorias con probabilidades de transición $\{\tilde{a}_n\}_{n \geq 0}$, $\{\tilde{b}_n\}_{n \geq 0}$ y $\{\tilde{c}_n\}_{n \geq 1}$.

Ahora, sea P la matriz de transición de una caminata aleatoria con espacio de estados en \mathbb{N}_0 como en la ecuación (1.1). Se consideran los polinomios generados a partir de la ecuación de autovalores $xQ = PQ$, con $Q = (Q_0(x), Q_1(x), \dots)^T$ un vector semi-infinito traspuesto de polinomios en x tales que $\deg(Q_n) = n$, de donde se obtiene la familia que satisface la siguiente ecuación de recurrencia a tres términos:

$$\begin{aligned} Q_{-1}(x) &= 0, & Q_0(x) &= 1, \\ xQ_0(x) &= a_0Q_1(x) + b_0Q_0(x), \\ xQ_n(x) &= a_nQ_{n+1}(x) + b_nQ_n(x) + c_nQ_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.22}$$

De acuerdo con Karlin y McGregor en [17], definiendo a $\pi = (\pi_n)_{n \geq 0}$ como la solución a las *ecuaciones de simetría* $\pi P = \pi$ con la condición inicial $\pi_0 = 1$, se tiene que

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{a_0 \cdots a_{n-1}}{c_1 \cdots c_n}, \quad n \geq 1, \tag{1.23}$$

y visto como operador en el espacio de Hilbert $\ell_\pi^2(\mathbb{N}_0) = \{(\alpha_n)_{n \geq 0} : \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 \pi_n < \infty\}$, P es un operador de Jacobi autoadjunto, lineal y acotado (de norma menor o igual a 1) y por lo tanto se puede aplicar el Teorema Espectral (o Teorema de Favard) de donde se obtiene que la familia de polinomios $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal con respecto a una única medida ω soportada en el intervalo $[-1, 1]$ en el espacio $L_\omega^2([-1, 1]) = \{f : \int_{-1}^1 |f(x)|^2 d\omega(x) < \infty\}$. Esta medida se conoce como *medida espectral* y satisface que

$$\int_{-1}^1 Q_n(x)Q_m(x)d\omega(x) = \frac{1}{\pi_n} \delta_{n,m}, \tag{1.24}$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker.

Como Q satisface la ecuación $xQ = PQ$, multiplicando P_L por la izquierda y usando la factorización UL de P se tiene que $xP_LQ = P_LP_UP_LQ$, y por la ecuación (1.20) $xP_LQ = \tilde{P}P_LQ$. Definiendo $\tilde{Q} = P_LQ$ se tiene que \tilde{Q} satisface la ecuación $x\tilde{Q} = \tilde{P}\tilde{Q}$, es decir, $\{\tilde{Q}_n\}_{n \geq 0}$ es la familia de polinomios ortogonales asociada a \tilde{P} y, por definición, satisface

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_0(x) &= s_0Q_0(x) = 1, \\ \tilde{Q}_n(x) &= r_nQ_{n-1}(x) + s_nQ_n(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Otra relación importante entre Q y \tilde{Q} que surge de la factorización de P es la siguiente: tomando $xQ = PQ$, entonces $xQ = P_UP_LQ$, y por la definición de \tilde{Q} se cumple que $xQ = P_U\tilde{Q}$, es decir,

$$xQ_n(x) = x_n\tilde{Q}_{n+1}(x) + y_n\tilde{Q}_n(x), \quad n \geq 0. \tag{1.26}$$

Lo mismo se puede hacer para la factorización LU en la que la transformación de Darboux está dada por

$$\hat{P} = \tilde{P}_U \tilde{P}_L = \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 & \tilde{x}_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \tilde{y}_1 & \tilde{x}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{y}_2 & \tilde{x}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \tilde{r}_1 & \tilde{s}_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \tilde{r}_2 & \tilde{s}_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 & \hat{a}_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hat{c}_1 & \hat{b}_1 & \hat{a}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \hat{c}_2 & \hat{b}_2 & \hat{a}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes de \hat{P} están dados por

$$\begin{aligned} \hat{a}_n &= \tilde{s}_{n+1} \tilde{x}_n, \quad n \geq 0, \\ \hat{b}_n &= \tilde{r}_{n+1} \tilde{x}_n + \tilde{s}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 0, \\ \hat{c}_n &= \tilde{r}_n \tilde{y}_n, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Como Q satisface la ecuación $xQ = PQ$, usando la factorización de P y multiplicando \tilde{P}_U por la izquierda se obtiene que $x\tilde{P}_U Q = \tilde{P}\tilde{P}_U Q$, de manera que definiendo a $\bar{Q} = \tilde{P}_U Q$, se cumple que $x\bar{Q} = \tilde{P}\bar{Q}$ y la familia $\{\bar{Q}_n\}_{n \geq 0}$ se puede obtener a partir de $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ como sigue

$$\tilde{y}_n Q_n(x) + \tilde{x}_n Q_{n+1}(x) = \bar{Q}_n(x), \quad n \geq 0. \tag{1.28}$$

Además, si $xQ = \tilde{P}_L \tilde{P}_U Q$, también se tiene la relación $xQ = \tilde{P}_L \bar{Q}$, es decir

$$\begin{aligned} xQ_0(x) &= \tilde{s}_0 \bar{Q}_0(x), \\ xQ_n(x) &= \tilde{r}_n \bar{Q}_{n-1}(x) + \tilde{s}_n \bar{Q}_n(x), \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Lema 1.5. Sea $\{\bar{Q}_n(x)\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios definida en la ecuación (1.28). Entonces

$$\bar{Q}_n(x) = x\hat{Q}_n(x), \tag{1.30}$$

donde $\{\hat{Q}_n\}_{n \geq 0}$ es una familia de polinomios con $\hat{Q}_0(x) = 1$ y $\deg(\hat{Q}_n) = n$.

Demostración. Como $\tilde{s}_0 = 1$, por la ecuación (1.29) $\bar{Q}_0(x) = xQ_0(x) = x$, de manera que $\hat{Q}_0(x) = 1$. Suponiendo que se cumple que $\bar{Q}_{n-1}(x) = x\hat{Q}_{n-1}(x)$ con $\deg(\hat{Q}_{n-1}) = n - 1$. Entonces para n , de nuevo por la ecuación (1.29) se tiene que

$$\bar{Q}_n(x) = \frac{x}{\tilde{s}_n} Q_n(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \bar{Q}_{n-1}(x) = \frac{x}{\tilde{s}_n} Q_n(x) - \frac{x\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \hat{Q}_{n-1}(x) = x \left(\frac{1}{\tilde{s}_n} Q_n(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \hat{Q}_{n-1}(x) \right),$$

donde la segunda igualdad se da por hipótesis de inducción. Considerando ahora

$$\hat{Q}_n(x) = \frac{1}{\tilde{s}_n} Q_n(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \hat{Q}_{n-1}(x),$$

donde $\deg(\hat{Q}_{n-1}) = n - 1$ y $\deg(Q_n) = n$, entonces $\deg(\hat{Q}_n) = n$. Por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\bar{Q}_n(x) = x\hat{Q}_n(x)$, con $\hat{Q}_0(x) = 1$ y $\deg(\hat{Q}_n) = n$. \square

Ahora que se cuenta con las familias de polinomios asociadas a cada una de las transformaciones de Darboux de P se puede presentar el teorema que relaciona las medidas espectrales.

Teorema 1.6. Sean $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición P como en la ecuación (1.1), $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios generada por P a partir del sistema (1.22) y ω su medida espectral. Sean $\{\tilde{Q}_n\}_{n \geq 0}$ la familia de polinomios dada por la ecuación (1.25) asociada a la transformación de Darboux de la factorización UL, \tilde{P} , y la transformación de Geronimus de ω

$$\tilde{\omega}(x) = y_0 \frac{\omega(x)}{x} + M\delta_0(x), \quad M = 1 - y_0 \mu_{-1}, \quad (1.31)$$

donde $\delta_0(x)$ es la delta de Dirac y $\mu_{-1} = \int_{-1}^1 x^{-1} d\omega(x)$ está bien definida. Entonces se cumple que

$$\int_{-1}^1 \tilde{Q}_n(x) \tilde{Q}_m(x) d\tilde{\omega}(x) = \frac{1}{\tilde{\pi}_n} \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker y $\tilde{\pi}_n$ son los coeficientes potenciales de \tilde{P} definidos como

$$\tilde{\pi}_0 = 1, \quad \tilde{\pi}_n = \frac{\tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{c}_1 \cdots \tilde{c}_n}, \quad n \geq 1. \quad (1.32)$$

Para el caso de la factorización estocástica LU se tiene que la familia $\{\hat{Q}_n\}_{n \geq 0}$ definida en la ecuación (1.30) asociada a la transformación de Darboux \hat{P} , y considerando la transformación de Christoffel de ω

$$\hat{\omega}(x) = \frac{x\omega(x)}{\tilde{y}_0}, \quad (1.33)$$

cumple que

$$\int_{-1}^1 \hat{Q}_n(x) \hat{Q}_m(x) d\hat{\omega}(x) = \frac{1}{\hat{\pi}_n} \delta_{n,m},$$

donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker y $\hat{\pi}_n$ son los coeficientes potenciales de \hat{P} definidos como

$$\hat{\pi}_0 = 1, \quad \hat{\pi}_n = \frac{\hat{a}_0 \cdots \hat{a}_{n-1}}{\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_n}, \quad n \geq 1. \quad (1.34)$$

Demostración. Empezando con la prueba para la factorización UL, para probar la ortogonalidad de la familia $\{\tilde{Q}_n\}_{n \geq 0}$ basta con que se cumpla para los monomios. Por las ecuaciones (1.31), (1.25) y $j \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_n(x) x^j d\tilde{\omega}(x) &= y_0 \int_{-1}^1 \tilde{Q}_n(x) x^{j-1} d\omega(x) \\ &= y_0 r_n \int_{-1}^1 Q_{n-1}(x) x^{j-1} d\omega(x) + y_0 s_n \int_{-1}^1 Q_n(x) x^{j-1} d\omega(x). \end{aligned}$$

Por la ortogonalidad de $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, la primera integral se anula para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y la segunda integral se anula para $j \in \{1, \dots, n\}$, por lo que la integral completa se anula para $j \in \{1, \dots, n-1\}$. Para $j = 0$ se tiene que por la ecuación (1.26) y la ortogonalidad de $\{Q_n\}_{n \geq 0}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \tilde{Q}_n(x) d\tilde{\omega}(x) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{x_{n-1}} Q_{n-1}(x) - \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \tilde{Q}_{n-1}(x) \right) d\tilde{\omega}(x) \\
&= \frac{y_0}{x_{n-1}} \int_{-1}^1 Q_{n-1}(x) d\omega(x) - \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_{n-1}(x) d\tilde{\omega}(x) \\
&= -\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{x}{x_{n-2}} Q_{n-2}(x) - \frac{y_{n-2}}{x_{n-2}} \tilde{Q}_{n-2}(x) \right) d\tilde{\omega}(x) \right] \\
&= \frac{y_{n-1} y_{n-2}}{x_{n-1} x_{n-2}} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_{n-2}(x) d\tilde{\omega}(x) = \dots = (-1)^{n-1} \frac{y_{n-1} \cdots y_1}{x_{n-1} \cdots x_1} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_1(x) d\tilde{\omega}(x) \\
&= (-1)^{n-1} \frac{y_{n-1} \cdots y_1}{x_{n-1} \cdots x_1} \left[\int_{-1}^1 \left(\frac{x}{x_0} Q_0(x) - \frac{y_0}{x_0} \tilde{Q}_0(x) \right) d\tilde{\omega}(x) \right] \\
&= (-1)^{n-1} \frac{y_{n-1} \cdots y_1}{x_{n-1} \cdots x_1} \left[\frac{y_0}{x_0} \int_{-1}^1 Q_0(x) d\omega(x) - \frac{y_0}{x_0} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_0(x) d\tilde{\omega}(x) \right] \\
&= (-1)^{n-1} \frac{y_{n-1} \cdots y_0}{x_{n-1} \cdots x_0} \left[\int_{-1}^1 d\omega(x) - \int_{-1}^1 d\tilde{\omega}(x) \right] = 0,
\end{aligned}$$

ya que

$$\int_{-1}^1 d\tilde{\omega}(x) = y_0 \int_{-1}^1 \frac{d\omega(x)}{x} + M = y_0 \mu_{-1} + 1 - y_0 \mu_{-1} = 1.$$

Por lo tanto, la familia $\{\tilde{Q}_n\}_{n \geq 0}$ es ortogonal con respecto a $\tilde{\omega}$. Las normas se pueden calcular a partir de las relaciones (1.26) y (1.25) como sigue

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \tilde{Q}_n^2(x) d\tilde{\omega}(x) &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{y_n} Q_n(x) - \frac{x_n}{y_n} \tilde{Q}_{n+1}(x) \right) \tilde{Q}_n(x) d\tilde{\omega}(x) \\
&= \frac{y_0}{y_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) \tilde{Q}_n(x) d\omega(x) - \frac{x_n}{y_n} \int_{-1}^1 \tilde{Q}_{n+1}(x) \tilde{Q}_n(x) d\tilde{\omega}(x) \\
&= \frac{y_0}{y_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) [r_n Q_{n-1}(x) + s_n Q_n(x)] d\omega(x) \\
&= \frac{r_n y_0}{y_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_{n-1}(x) d\omega(x) + \frac{s_n y_0}{y_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_n(x) d\omega(x) \\
&= \frac{s_n y_0}{y_n} \frac{1}{\pi_n} = \frac{1}{\tilde{\pi}_n},
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque sustituyendo la ecuación (1.21) en la ecuación

(1.32) y usando el sistema (1.3)-(1.5) para obtener la expresión en (1.23) se llega a que

$$\tilde{\pi}_n = \frac{\tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{c}_1 \cdots \tilde{c}_n} = \frac{s_0 x_0 \cdots s_{n-1} x_{n-1}}{r_i y_0 \cdots r_n y_{n-1}} = \frac{s_0 a_0 \cdots a_{n-2} x_{n-1}}{y_0 c_1 \cdots c_{n-1} r_n} = \frac{s_0 r_n}{y_0 s_n} \pi_n = \frac{r_n}{y_0 s_n} \pi_n.$$

Para la factorización LU también se puede probar la ortogonalidad de $\{\hat{Q}_n\}_{n \geq 0}$ integrando con respecto a los monomios. Usando las ecuaciones (1.28), (1.30), (1.33) y que $\tilde{s}_0 = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \hat{Q}_n(x) x^j d\hat{\omega}(x) &= \int_{-1}^1 \bar{Q}_n(x) x^{j-1} d\hat{\omega}(x) \\ &= \tilde{y}_0 \tilde{y}_n \int_{-1}^1 Q_n(x) x^j d\omega(x) + \tilde{y}_0 \tilde{x}_n \int_{-1}^1 Q_{n+1}(x) x^j d\omega(x), \end{aligned}$$

que por la ortogonalidad de $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ se anula para $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Para calcular las normas se usan las mismas relaciones y la ecuación (1.29) y se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \hat{Q}_n^2(x) d\hat{\omega}(x) &= \int_{-1}^1 \bar{Q}_n^2(x) x^{-2} d\hat{\omega}(x) = \frac{1}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 \bar{Q}_n^2(x) x^{-1} d\omega(x) \\ &= \frac{1}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 \left(\frac{x}{\tilde{s}_n} Q_n(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \bar{Q}_{n-1}(x) \right) \bar{Q}_n(x) x^{-1} d\omega(x) \\ &= \frac{1}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) \bar{Q}_n(x) d\omega(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 \bar{Q}_{n-1}(x) \bar{Q}_n(x) x^{-1} d\omega(x), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \bar{Q}_{n-1}(x) \bar{Q}_n(x) x^{-1} d\omega(x) &= \tilde{y}_0 \int_{-1}^1 \bar{Q}_{n-1}(x) \bar{Q}_n(x) x^{-2} d\hat{\omega}(x) \\ &= \tilde{y}_0 \int_{-1}^1 \hat{Q}_{n-1}(x) \hat{Q}_n(x) d\hat{\omega}(x) = 0, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \hat{Q}_n^2(x) d\hat{\omega}(x) &= \frac{1}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) \bar{Q}_n(x) d\omega(x) \\ &= \frac{1}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) (\tilde{y}_n Q_n(x) + \tilde{x}_n Q_{n+1}(x)) d\omega(x) \\ &= \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_n(x) d\omega(x) + \frac{\tilde{x}_n}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_{n+1}(x) d\omega(x) \\ &= \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \int_{-1}^1 Q_n(x) Q_n(x) d\omega(x) = \frac{\tilde{y}_n}{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n} \frac{1}{\pi_n} = \frac{1}{\hat{\pi}_n}. \end{aligned}$$

La última igualdad se da ya que al sustituir la ecuación (1.27) en la ecuación (1.34) y usando el sistema (1.9)-(1.11) para obtener la expresión en (1.23) se llega a

$$\hat{\pi}_n = \frac{\hat{a}_0 \cdots \hat{a}_{n-1}}{\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_n} = \frac{\tilde{s}_1 \tilde{x}_0 \cdots \tilde{s}_n \tilde{x}_{n-1}}{\tilde{y}_0 \tilde{r}_1 \tilde{y}_1 \cdots \tilde{r}_n \tilde{y}_n} = \frac{a_0 \cdots a_{n-1} \tilde{s}_n \tilde{y}_0}{c_1 \cdots c_n \tilde{y}_n \tilde{s}_0} = \frac{\tilde{y}_0 \tilde{s}_n}{\tilde{y}_n} \pi_n.$$

□

Una de las principales ventajas de tener la medida espectral es que con ella es posible encontrar las probabilidades de transición a m pasos. Dado que la matriz P de la ecuación (1.1) es la matriz de transición, se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \mathbb{P}(X_1 = n + 1 | X_0 = n), \quad n \geq 0, \\ b_n &= \mathbb{P}(X_1 = n | X_0 = n), \quad n \geq 0, \\ c_n &= \mathbb{P}(X_1 = n - 1 | X_0 = n), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

y se definen las *probabilidades de transición a m pasos* como

$$P_{i,j}^{(m)} = \mathbb{P}(X_{n+m} = j | X_n = i), \quad i, j, n, m \geq 0.$$

Entonces, es posible usar la *fórmula de representación de Karlin-McGregor* de [17] que establece que para todo $i, j, m \geq 0$

$$P_{i,j}^{(m)} = \pi_j \int_{-1}^1 x^m Q_i(x) Q_j(x) d\omega(x), \quad (1.35)$$

con

$$\pi_n = \frac{1}{\|Q_n\|_\omega^2},$$

donde $\|Q_n\|_\omega^2$ denota la norma del n -ésimo polinomio, que por la ecuación (1.24) está dada por

$$\|Q_n\|_\omega^2 = \int_{-1}^1 Q_n^2(x) d\omega(x).$$

De la misma forma, teniendo las medidas espectrales de \tilde{P} y \hat{P} , es posible obtener las respectivas probabilidades de transición a m pasos.

1.3. Ejemplo

A continuación se analizará un ejemplo (estudiado en [10]) en el que se aplican los resultados de las secciones anteriores.

Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con espacio de estados en \mathbb{N}_0 y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c & b & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c & b & a & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

con $a_0 + b_0 = 1$ y $a + b + c = 1$. Primero habrá que analizar las condiciones bajo las cuales existe una factorización estocástica UL usando el Teorema 1.3.

Sea H definida en la ecuación (1.14), que en este caso viene dada por

$$H = 1 - \left\lfloor \frac{a_0}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{c}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{1} \right\rfloor - \dots = 1 - \frac{a_0}{F},$$

donde

$$F = 1 - \left\lfloor \frac{c}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{c}{1} \right\rfloor - \dots = 1 - \left\lfloor \frac{c}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{F} \right\rfloor.$$

Entonces, se tiene que F satisface la ecuación cuadrática

$$F^2 - (1 - a - c)F + a = 0,$$

cuyas soluciones son

$$F_{\pm} = \frac{1 + a - c \pm \sqrt{(1 + a - c)^2 - 4a}}{2}.$$

Para que F_{\pm} sean reales se tiene que asumir que $(1 + a - c)^2 - 4a \geq 0$, o despejando se obtiene que $(1 - \sqrt{a})^2 \geq c$. De hecho, el valor de F es la solución positiva, pues como $0 < H < 1$, entonces $a_0/F < 1$, es decir, $0 < a_0 < F$. Por lo tanto, por el Teorema 1.3, existirá una factorización estocástica UL de P si

$$0 \leq y_0 \leq 1 - \frac{2a_0}{1 + a - c + \sqrt{(1 + a - c)^2 - 4a}}.$$

El caso de la factorización LU es más sencillo, ya que $\tilde{H} = 1 - \left\lfloor \frac{c}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{1} \right\rfloor - \dots = F$.

Entonces la factorización estocástica existirá si

$$0 \leq a_0 \leq \frac{1 + a - c + \sqrt{(1 + a - c)^2 - 4a}}{2}.$$

Para poder encontrar las medidas espectrales asociadas a las transformaciones de Darboux \tilde{P} y \hat{P} , el primer paso es encontrar la medida espectral ω asociada a P . Una

manera conocida es comparando P con la matriz que se obtiene de eliminar el primer renglón y la primera fila \check{P} , es decir, si P es como en (1.1) y

$$\check{P} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c_3 & b_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Sea $\check{\omega}$ la medida espectral asociada a \check{P} . Entonces se tiene la siguiente relación que aparece en [17] y es consecuencia de la fórmula de representación de Karlin-McGregor

$$1 + B(z; \omega)[z - b_0 + a_0 c_1 B(z; \check{\omega})] = 0, \quad (1.36)$$

donde $B(z; \psi)$ es la *transformación de Stieltjes* de la medida ψ con soporte en el intervalo $[-1, 1]$ definida como

$$B(z; \psi) = \int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{x - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1],$$

se puede encontrar más información en [10]. Una vez que se obtiene $B(z; \check{\omega})$, es posible obtener $\check{\omega}$ usando la *fórmula de inversión de Perron-Stieltjes*

$$\int_a^b d\check{\omega}(x) + \frac{1}{2}\check{\omega}(\{a\}) + \frac{1}{2}\check{\omega}(\{b\}) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{Im} B(x + i\epsilon; \check{\omega}) dx, \quad -1 \leq a \leq b \leq 1.$$

Lo anterior resulta muy útil para este caso en particular, ya que

$$\check{P} = \begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c & b & a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & c & b & a & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

que no cambia al eliminar el primer renglón y la primera fila. Por la ecuación (1.36), la transformación de Stieltjes de $\check{\omega}$ satisface que

$$acB(z; \check{\omega})^2 + (z - b)B(z; \check{\omega}) + 1 = 0,$$

entonces

$$B(z; \check{\omega}) = \frac{b - z \pm \sqrt{(z - \sigma_+)(z - \sigma_-)}}{2ac}, \quad \sigma_{\pm} = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2,$$

de la cual se escoge la solución positiva para que $B(z; \check{\omega})$ esté acotada cuando $z \rightarrow \infty$. De nuevo, por la ecuación (1.36) y racionalizando se tiene que

$$B(z; \omega) = \frac{2a - aa_0 - a_0 + a_0c + (a_0 - 2a)z + a_0\sqrt{(z - \sigma_+)(z - \sigma_-)}}{2(1 - z)[(a_0 - a)z + a - a_0a + a_0c + a_0^2 - a_0]},$$

y usando la fórmula de inversión de Perron-Stieltjes se tiene que (ver detalles en la Sección 4 de [10])

$$\omega(x) = \omega_c(x) + \omega(\{1\})\delta_1(x) + \omega(\{\gamma\})\delta_\gamma(x), \quad \text{con } \gamma = \frac{a_0 - a + a_0a - a_0c - a_0^2}{a_0 - a},$$

donde ω_c denota a la parte continua de ω y viene dada por

$$\omega_c(x) = \frac{a_0\sqrt{x - \sigma_-}\sqrt{\sigma_+ - x}}{2\pi(a_0 - a)(1 - x)(x - \gamma)}, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+] \subseteq [-1, 1],$$

con $\sigma_\pm = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2$; $\omega(\{\cdot\})$ denota a la parte discreta de ω y viene dada por

$$\omega(\{1\}) = \frac{c - a}{a_0 + c - a}\chi_{\{c > a\}}, \quad \omega(\{\gamma\}) = \frac{(a_0 - a)^2 - ac}{(a_0 - a)^2 - ac + a_0c}\chi_{\{(a_0 - a)^2 > ac\}},$$

donde χ_A es la función indicadora.

Una vez que se tiene ω , por el Teorema 1.6, es posible obtener $\tilde{\omega}$ y $\hat{\omega}$ haciendo una transformación de Geronimus (teniendo cuidado con las deltas para no tener problemas al integrar) y una transformación de Christoffel respectivamente. Usando la fórmula de representación de Karlin-McGregor en la ecuación (1.35), también es posible obtener las probabilidades de transición a m pasos para las caminatas aleatorias generadas por P , \tilde{P} y \hat{P} . Para más detalles véase la Sección 4 de [10] donde se analiza el ejemplo anterior para el caso de $a = c = 1/4$ y se asocia al proceso con un modelo de urnas.

En la Sección 5 de [10] se hace el mismo análisis para la caminata aleatoria generada por los polinomios de Jacobi, donde ahora las probabilidades de transición son funciones racionales que dependen de n en general. En este caso se da una versión más simple del modelo de urnas asociado a los polinomios de Jacobi y que fue estudiado en [9].

Transformación de Darboux para caminatas aleatorias en \mathbb{Z}

En este capítulo, de la misma forma que en el Capítulo 1, se busca obtener una factorización UL (LU) de la matriz de transición P de una caminata aleatoria con la diferencia de que se considerará el espacio de estados en \mathbb{Z} por lo que P será una matriz doblemente infinita. Al igual que en el capítulo anterior, al buscar condiciones para que los factores P_U y P_L (\tilde{P}_L y \tilde{P}_U) sean matrices estocásticas será necesario usar resultados conocidos en teoría de fracciones continuas.

Una diferencia fundamental con el caso en el que el espacio de estados es \mathbb{N}_0 es que, para el caso LU con espacio de estados en \mathbb{Z} , la factorización también depende de un parámetro libre de manera que no será única. Esto implicará que también habrá una condición necesaria y suficiente para encontrar una factorización en matrices estocásticas.

En la segunda parte de este capítulo se busca la relación entre las medidas que hacen ortogonales a los polinomios generados por P y las medidas que hacen ortogonales a los polinomios generados por su transformación de Darboux \tilde{P} en el caso de la factorización UL y \hat{P} en el caso de la factorización LU. La primera diferencia fundamental con respecto al Capítulo 1 es que para este caso, dado que las matrices son doblemente infinitas, no se genera una familia de polinomios, sino dos linealmente independientes. Por esta razón, es necesario aplicar el teorema espectral tres veces a partir del cual surgen tres medidas que se agrupan en una matriz positiva definida de dimensión 2×2 llamada *matriz espectral* y lo mismo se hace con las dos familias de polinomios, de manera que la ortogonalidad se presenta en forma matricial.

La segunda diferencia importante es que al considerar una caminata aleatoria con es-

pacio de estados en \mathbb{N}_0 con su factorización LU y hacer la transformación de Darboux, la relación entre las medidas espectrales está dada por la transformación de Christoffel que no depende de ningún parámetro. En este caso, la relación estará dada por una transformación de Geronimus (como para la factorización UL) y la razón para que esto ocurra es que al considerar el espacio de estados en \mathbb{Z} también existe un parámetro libre del cual dependerá la nueva medida.

Los resultados contenidos en este capítulo dieron origen al artículo [13].

2.1. Factorizaciones UL y LU estocásticas

En esta sección se buscará la factorización de la matriz de transición P de una caminata aleatoria con espacio de estados en \mathbb{Z} en dos matrices bidiagonales y se buscarán condiciones bajo las cuales sea posible asegurar que ambas resulten ser matrices estocásticas.

Antes de iniciar el análisis correspondiente es necesario presentar la notación que se usará y que, de hecho, es una extensión de la notación presentada en el Capítulo 1.

Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria irreducible con espacio de estados en \mathbb{Z} y matriz de transición

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & c_{-1} & b_{-1} & a_{-1} & & \\ \hline & & c_0 & b_0 & a_0 & \\ & & & c_1 & b_1 & a_1 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right). \quad (2.1)$$

Para la factorización UL se busca descomponer a P de la siguiente manera

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & & & & \\ & y_{-1} & x_{-1} & & & \\ \hline & & y_0 & x_0 & & \\ & & & y_1 & x_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|ccc} \ddots & \ddots & & & & \\ & r_{-1} & s_{-1} & & & \\ \hline & & r_0 & s_0 & & \\ & & & r_1 & s_1 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{array} \right) = P_U P_L,$$

o equivalentemente

$$b_n = y_n s_n + r_{n+1} x_n, \quad (2.2)$$

$$a_n = x_n s_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.3)$$

1) Con \tilde{s}_0 fija y para $n \geq 0$, obtener $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{r}_{n+1}, \tilde{s}_{n+1}$ usando las ecuaciones (2.9), (2.12), (2.10) y (2.11) en ese orden.

2) Con \tilde{s}_0 fija y para $n \leq 0$, obtener $\tilde{r}_n, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{x}_{n-1}, \tilde{s}_{n-1}$ usando las ecuaciones (2.11), (2.10), (2.12) y (2.9) en ese orden.

Es importante notar que los sistemas de ecuaciones (2.2)-(2.6) y (2.8)-(2.12) no garantizan que los coeficientes de las matrices resultantes estén entre cero y uno. De manera que es posible obtener una descomposición de P en la que los factores no sean estocásticos. Sin embargo se tiene el siguiente resultado que, al igual que en el Capítulo 1, establece que si una de las matrices es estocástica, la otra también lo será.

Teorema 2.1. *Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición P como en la ecuación (2.1) y sean P_U y P_L las matrices resultantes de la factorización UL usando el sistema (2.2)-(2.4) con el parámetro libre $0 < y_0 < 1$. Entonces P_U es una matriz estocástica si y sólo si P_L es una matriz estocástica. El mismo resultado se tiene para \tilde{P}_L y \tilde{P}_U generadas a partir del sistema (2.8)-(2.10) con el parámetro libre $0 < \tilde{s}_0 < 1$.*

Demostración. Sea P_U la matriz bidiagonal superior resultante de la factorización tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $x_n + y_n = 1$.

Para los subíndices positivos se demostró en el Lema 1.1 que $s_n + r_n = 1$, $n \geq 1$. Para los subíndices negativos se usa de nuevo inducción. Para $n = -1$ usando las ecuaciones (2.2)-(2.4), si $r_0 + s_0 = 1$

$$\begin{aligned} s_{-1} + r_{-1} &= \frac{b_{-1} - r_0 x_{-1}}{y_{-1}} + \frac{c_{-1}}{y_{-1}} = \frac{1 - a_{-1} - r_0 x_{-1}}{y_{-1}} = \frac{1 - a_{-1} - x_{-1}(1 - s_0)}{y_{-1}} \\ &= \frac{1 - a_{-1} + x_{-1}s_0 - x_{-1}}{y_{-1}} = \frac{1 - a_{-1} + a_{-1} - x_{-1}}{y_{-1}} = \frac{1 - x_{-1}}{y_{-1}} = 1. \end{aligned}$$

Suponiendo que $s_{-n} + r_{-n} = 1$ para $n > 0$, entonces para $-n - 1$

$$\begin{aligned} s_{-n-1} + r_{-n-1} &= \frac{b_{-n-1} - r_{-n} x_{-n-1}}{y_{-n-1}} + \frac{c_{-n-1}}{y_{-n-1}} = \frac{1 - a_{-n-1} - r_{-n} x_{-n-1}}{y_{-n-1}} \\ &= \frac{1 - a_{-n-1} - x_{-n-1}(1 - s_{-n})}{y_{-n-1}} = \frac{1 - a_{-n-1} + x_{-n-1}s_{-n} - x_{-n-1}}{y_{-n-1}} \\ &= \frac{1 - x_{-n-1}}{y_{-n-1}} = 1, \end{aligned}$$

y como $a_n, c_n > 0$ y $x_n, y_n > 0$ por irreducibilidad, entonces $r_n, s_{n+1} > 0$. Por lo tanto P_L es una matriz estocástica.

Ahora, sea P_L la matriz bidiagonal inferior resultante de la factorización tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $s_n + r_n = 1$. Usando las ecuaciones (2.2)-(2.4)

$$\begin{aligned} b_n &= y_n s_n + r_{n+1} x_n = y_n(1 - r_n) + (1 - s_{n+1})x_n \\ &= y_n - y_n r_n + x_n - s_{n+1} x_n = y_n - c_n + x_n - a_n, \end{aligned}$$

de manera que

$$a_n + b_n + c_n = y_n + x_n,$$

y usando que P es matriz estocástica, se obtiene que $1 = x_n + y_n$. Como $s_{n+1}, r_n > 0$ y $a_n, c_n > 0$ por irreducibilidad, entonces $x_n, y_n > 0$. Por lo tanto P_L es una matriz estocástica.

La prueba para la factorización LU es similar. □

Es importante notar que por las ecuaciones (2.3) y (2.4) se tiene que

$$y_n = \frac{c_n}{r_n} = \frac{c_n}{1 - s_n} \quad \text{y} \quad s_n = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{1 - y_{n-1}}, \quad (2.13)$$

con lo cual es posible obtener las sucesiones de coeficientes $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{s_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y después las sucesiones de coeficientes $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{r_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ usando las ecuaciones (2.5) y (2.6).

Para el caso LU, por las ecuaciones (2.9) y (2.10), se tienen las relaciones

$$\tilde{r}_n = \frac{c_n}{\tilde{y}_{n-1}} = \frac{c_n}{1 - \tilde{x}_{n-1}} \quad \text{y} \quad \tilde{x}_n = \frac{a_n}{\tilde{s}_n} = \frac{a_n}{1 - \tilde{r}_n}, \quad (2.14)$$

con lo cual es posible obtener las sucesiones de coeficientes $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{r}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y después las sucesiones de coeficientes $\{\tilde{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{\tilde{s}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ usando las ecuaciones (2.11) y (2.12).

Ahora usando la notación de fracciones continuas vista en el Capítulo 1, se define

$$H' = \cfrac{c_0}{1} - \cfrac{a_{-1}}{1} - \cfrac{c_{-1}}{1} - \dots \quad (2.15)$$

que involucra a los coeficientes con subíndice negativo y se toma a

$$H = 1 - \cfrac{a_0}{1} - \cfrac{c_1}{1} - \cfrac{a_1}{1} - \dots \quad (2.16)$$

como en la ecuación (1.14), que involucra a los coeficientes con subíndice positivo.

Para H' y $n \geq 0$, los convergentes, definidos como la fracción truncada, son

$$\begin{aligned} h'_{-2n} &= \left[\frac{c_0}{1} \right] - \left[\frac{a_{-1}}{1} \right] - \dots - \left[\frac{a_{-n}}{1} \right], \\ h'_{-2n-1} &= \left[\frac{c_0}{1} \right] - \left[\frac{a_{-1}}{1} \right] - \dots - \left[\frac{c_{-n}}{1} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

y usando teoría de fracciones continuas (ver [24] pp.15), se sabe que es posible expresar a los convergentes como

$$h'_{-n} = \frac{A'_{-n}}{B'_{-n}}, \quad n \geq 0,$$

donde las sucesiones $\{A'_{-n}\}_{n \geq 0}$ y $\{B'_{-n}\}_{n \geq 0}$ satisfacen

$$\begin{aligned} A'_{-n} &= A'_{-n+1} + \zeta_{-n} A'_{-n+2}, \quad n \geq 1, \\ B'_{-n} &= B'_{-n+1} + \zeta_{-n} B'_{-n+2}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} A'_1 &= -1, & A'_0 &= 0, \\ B'_1 &= 0, & B'_0 &= 1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} h'_0 &= \frac{A'_0}{B'_0} = 0, \\ c_0 = h'_{-1} &= \frac{A'_{-1}}{B'_{-1}} = \frac{A'_0 + \zeta_{-1} A'_1}{B'_0 + \zeta_{-1} B'_1} = -\zeta_{-1}, \\ \frac{c_0}{1 - a_{-1}} = h'_{-2} &= \frac{A'_{-2}}{B'_{-2}} = \frac{A'_{-1} + \zeta_{-2} A'_0}{B'_{-1} - \zeta_{-2} B'_0} = \frac{-\zeta_{-1}}{1 + \zeta_{-2}}, \end{aligned}$$

de manera que $\zeta_{-1} = -c_0$ y $\zeta_{-2} = -a_{-1}$. Continuando con el mismo procedimiento para h'_{-3} se tiene que

$$\frac{c_0}{1 - \frac{a_{-1}}{1 - c_{-1}}} = h'_{-3} = \frac{A'_{-3}}{B'_{-3}} = \frac{A'_{-2} + \zeta_{-3} A'_{-1}}{B'_{-2} + \zeta_{-3} B'_{-1}},$$

simplificando la fracción de la izquierda y sustituyendo los valores de ζ_{-1} y ζ_{-2} se tiene que

$$\frac{c_0(1 - c_{-1})}{1 - a_{-1} - c_{-1}} = \frac{c_0(1 + \zeta_{-3})}{1 - a_{-1} + \zeta_{-3}},$$

por lo que $\zeta_{-3} = -c_{-1}$. Para h'_{-4} se tiene que

$$\frac{c_0}{1 - \frac{a_{-1}}{1 - \frac{c_{-1}}{1 - a_{-2}}}} = h'_{-4} = \frac{A'_{-4}}{B'_{-4}} = \frac{A'_{-3} + \zeta_{-4} A'_{-2}}{B'_{-3} + \zeta_{-4} B'_{-2}},$$

simplificando la fracción de la izquierda y sustituyendo los valores de ζ_{-1} , ζ_{-2} y ζ_{-3} se tiene que

$$\frac{c_0(1 - c_{-1}) - c_0 a_{-2}}{1 - a_{-1} - c_{-1} - a_{-2}(1 - a_{-1})} = \frac{c_0(1 - c_{-1}) + \zeta_{-4} c_0}{1 - a_{-1} - c_{-1} + \zeta_{-4}(1 - a_{-1})},$$

por lo que $\zeta_{-4} = -a_{-2}$. En general se tiene que $\zeta_{-2n} = -a_{-n}$ y $\zeta_{-2n-1} = -c_{-n}$ de manera que la relación de recurrencia está dada por

$$\begin{cases} A'_{-2n} = A'_{-2n+1} - a_{-n} A'_{-2n+2} \\ B'_{-2n} = B'_{-2n+1} - a_{-n} B'_{-2n+2} \end{cases}, \quad n \geq 1,$$

$$\begin{cases} A'_{-2n-1} = A'_{-2n} - c_{-n} A'_{-2n+1} \\ B'_{-2n-1} = B'_{-2n} - c_{-n} B'_{-2n+1} \end{cases}, \quad n \geq 1.$$

Usando las relaciones anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} A'_0 B'_{-1} - A'_{-1} B'_0 &= -c_0, \\ A'_{-1} B'_{-2} - A'_{-2} B'_{-1} &= c_0(1 - a_{-1}) - c_0 = -c_0 a_{-1}, \end{aligned}$$

suponiendo que para $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned} A'_{-2n+2} B'_{-2n+1} - A'_{-2n+1} B'_{-2n+2} &= -c_0 a_{-1} \cdots a_{-n+1} c_{-n+1}, \\ A'_{-2n+1} B'_{-2n} - A'_{-2n} B'_{-2n+1} &= -c_0 a_{-1} \cdots c_{-n+1} a_{-n}, \end{aligned}$$

entonces para $n + 1$ se cumple que

$$\begin{aligned} A'_{-2n} B'_{-2n-1} - A'_{-2n-1} B'_{-2n} &= A'_{-2n} [B'_{-2n} - c_{-n} B'_{-2n+1}] - [A'_{-2n} - c_{-n} A'_{-2n+1}] B'_{-2n} \\ &= A'_{-2n} B'_{-2n} - c_{-n} A'_{-2n} B'_{-2n+1} - A'_{-2n} B'_{-2n} + c_{-n} A'_{-2n+1} B'_{-2n} \\ &= c_{-n} [A'_{-2n+1} B'_{-2n} - A'_{-2n} B'_{-2n+1}] \\ &= -c_0 a_{-1} \cdots a_{-n} c_{-n}, \end{aligned}$$

y con esto

$$\begin{aligned} A'_{-2n-1} B'_{-2n-2} - A'_{-2n-2} B'_{-2n-1} &= A'_{-2n-1} [B'_{-2n-1} - a_{-n-1} B'_{-2n}] - [A'_{-2n-1} - a_{-n-1} A'_{-2n}] B'_{-2n-1} \\ &= A'_{-2n-1} B'_{-2n-1} - a_{-n-1} A'_{-2n-1} B'_{-2n} - A'_{-2n-1} B'_{-2n-1} + a_{-n-1} A'_{-2n} B'_{-2n-1} \\ &= a_{-n-1} [A'_{-2n} B'_{-2n-1} - A'_{-2n-1} B'_{-2n}] \\ &= -c_0 a_{-1} \cdots c_{-n} a_{-n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A'_{-2n} B'_{-2n-1} - A'_{-2n-1} B'_{-2n} &= -c_0 a_{-1} \cdots a_{-n} c_{-n}, \quad n \geq 0, \\ A'_{-2n-1} B'_{-2n-2} - A'_{-2n-2} B'_{-2n-1} &= -c_0 a_{-1} \cdots c_{-n} a_{-n-1}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.18}$$

De la misma forma, para H con $n \geq 0$, se tienen los convergentes definidos en la igualdad (1.15) expresados como fracción en la ecuación (1.16), donde las sucesiones $\{A_n\}_{n \geq 0}$ y $\{B_n\}_{n \geq 0}$ satisfacen las ecuaciones de recurrencia (1.17).

Con la notación y resultados sobre fracciones continuas usada en esta sección, es posible presentar el siguiente teorema que finalmente establece las condiciones necesarias y suficientes para obtener como resultado de la factorización UL dos matrices que sean estocásticas.

Teorema 2.2. *Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición P como en la ecuación (2.1), y sea P_U y P_L las matrices resultantes de la factorización UL generadas por el sistema (2.2)-(2.6) con el parámetro libre $0 < y_0 < 1$. Sean H y H' definidas en las ecuaciones (2.15) y (2.16) respectivamente, $h_n = \frac{A_n}{B_n}$ y $h'_{-n} = \frac{A'_{-n}}{B'_{-n}}$ definidas en las ecuaciones (1.15) y (2.17) respectivamente y se asume que $H' \leq H$. Si*

$$0 < A_n < B_n, \quad 0 < A'_{-n} < B'_{-n}, \quad n \geq 0,$$

entonces H y H' son convergentes y P_U y P_L son matrices estocásticas si y sólo si

$$H' \leq y_0 \leq H. \quad (2.19)$$

Demostración. La convergencia de H se probó en el Teorema 1.3 del Capítulo 1. Para H' , suponiendo que $0 < A'_{-n} < B'_{-n}$, entonces $h'_{-n} = \frac{A'_{-n}}{B'_{-n}} < 1$. Además por la definición de h'_{-n} y por la ecuación (2.18) se tiene que

$$\begin{aligned} h'_{-2n-1} - h'_{-2n} &= \frac{A'_{-2n-1}}{B'_{-2n-1}} - \frac{A'_{-2n}}{B'_{-2n}} = \frac{A'_{-2n-1}B'_{-2n} - A'_{-2n}B'_{-2n-1}}{B'_{-2n-1}B'_{-2n}} \\ &= \frac{c_0 a_{-1} \cdots a_{-n} c_{-n}}{B'_{-2n-1}B'_{-2n}} > 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h'_{-2n-2} - h'_{-2n-1} &= \frac{A'_{-2n-2}}{B'_{-2n-2}} - \frac{A'_{-2n-1}}{B'_{-2n-1}} = \frac{A'_{-2n-2}B'_{-2n-1} - A'_{-2n-1}B'_{-2n-2}}{B'_{-2n-2}B'_{-2n-1}} \\ &= \frac{c_0 a_{-1} \cdots c_{-n} a_{-n-1}}{B'_{-2n-2}B'_{-2n-1}} > 0. \end{aligned}$$

Entonces $h'_{-2n} < h'_{-2n-1}$ y $h'_{-2n-1} < h'_{-2n-2}$ y así

$$0 = h'_0 < h'_{-1} < \cdots < h'_{-2n} < h'_{-2n-1} < h'_{-2n-2} < \cdots < 1,$$

por lo que la sucesión $\{h'_{-n}\}_{n \geq 0}$ es estrictamente creciente y acotada, por lo tanto converge a H' .

Para la segunda parte de la demostración, suponiendo que P_U y P_L son matrices estocásticas, se cumple que $0 < y_0 < 1$ y se satisfacen las ecuaciones (2.13), entonces despejando se obtiene que

$$s_0 = 1 - \frac{c_0}{y_0} > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad h'_{-1} < y_0$$

y de la misma manera

$$y_{-1} = 1 - \frac{a_{-1}}{s_0} > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad h'_{-2} = \frac{c_0}{1 - a_{-1}} < y_0.$$

Siguiendo el mismo procedimiento,

$$y_{-n} = 1 - \frac{a_{-n}}{s_{-n+1}} > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad a_{-n} < s_{-n+1},$$

sustituyendo el valor de s_{-n+1} y despejando se tiene que

$$\frac{c_{-n+1}}{1 - a_{-n}} < y_{-n+1},$$

y repitiendo los pasos anteriores hasta llegar a y_0 se llega a que

$$\frac{c_0}{1} - \left\lfloor \frac{a_{-1}}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{c_{-1}}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a_{-2}}{1} \right\rfloor \dots - \left\lfloor \frac{a_{-n}}{1} \right\rfloor < y_0 \quad \text{si y sólo si} \quad h'_{-2n} < y_0.$$

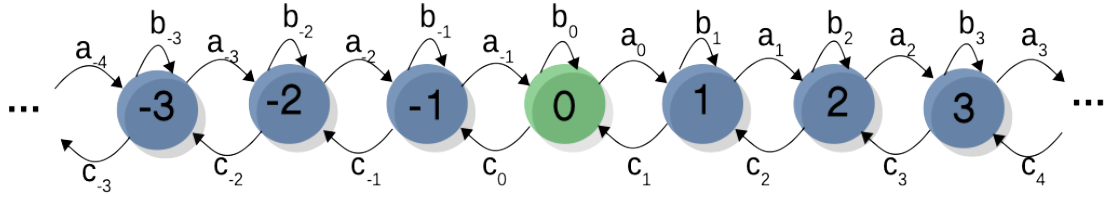
Para h'_{-2n-1} se procede de la misma forma. Por lo tanto para toda $n \geq 0$, $h'_{-2n} < h'_{-2n-1} < y_0$. Como la sucesión $\{h'_{-n}\}_{n \geq 0}$ converge a H' se concluye que

$$0 = h'_0 < h'_{-n} < H' \leq y_0.$$

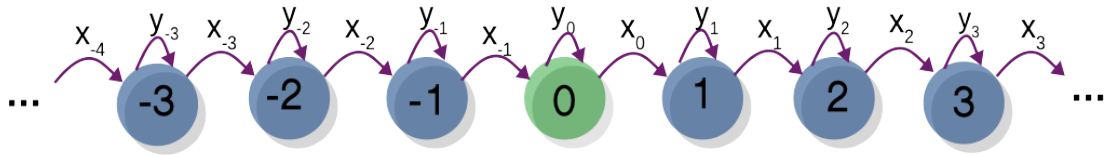
Para los coeficientes con subíndice positivo y la fracción continua H ya se probó en el Teorema 1.3 que $y_0 \leq H$. Por lo tanto se obtiene la desigualdad (2.19).

Finalmente, suponiendo que $H' \leq y_0 \leq H$, como se mostró antes $0 < H'$ y $H < 1$. Entonces $0 < y_0 < 1$, y por inducción se concluye que P_U y P_L son matrices estocásticas. \square

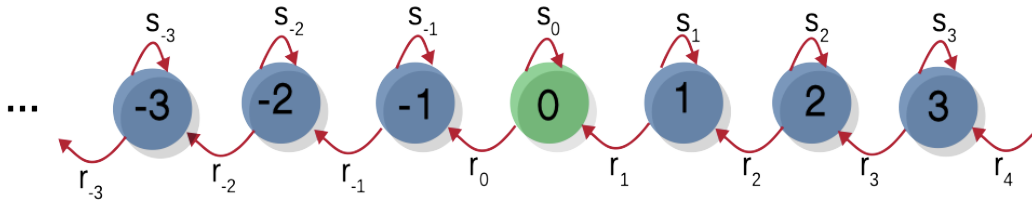
El teorema anterior muestra cómo descomponer una caminata aleatoria descrita por P , cuyo esquema se puede ver como sigue



en dos experimentos sucesivos: el primero es una cadena de nacimiento puro descrito por P_U



mientras que el segundo es una cadena de muerte pura descrito por P_L .



Al igual que para la factorización UL, para el caso LU se tiene el siguiente teorema que establece las condiciones para las cuales la factorización será estocástica.

Teorema 2.3. Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición P dada en la ecuación (2.1), y sean \tilde{P}_U y \tilde{P}_L las matrices resultantes de la factorización LU generadas por el sistema (2.8)-(2.12) con el parámetro libre $0 < \tilde{s}_0 < 1$. Sean H y H' como en las ecuaciones (2.15) y (2.16) respectivamente y se asume que $H' \leq H$. Bajo las condiciones del Teorema 2.2 se tiene que \tilde{P}_U y \tilde{P}_L son matrices estocásticas si y sólo si

$$1 - H \leq \tilde{s}_0 \leq 1 - H'. \quad (2.20)$$

Demostración. Por el Teorema 2.2, H y H' son convergentes. Suponiendo que \tilde{P}_L y \tilde{P}_U son matrices estocásticas, se satisfacen las ecuaciones (2.14) y entonces

$$\tilde{s}_{-n} = \frac{a_{-n}}{\tilde{x}_{-n}} < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad 1 - a_{-n} > \tilde{y}_{-n},$$

sustituyendo el valor de y_{-n} y despejando se tiene que

$$1 - a_{-n} > \frac{c_{-n+1}}{\tilde{r}_{-n+1}} \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{s}_{-n+1} < 1 - \frac{c_{-n+1}}{1 - a_{-n}},$$

de nuevo reemplazando el valor de s_{-n+1} y despejando

$$\left| \frac{a_{-n+1}}{1} \right| - \left| \frac{c_{-n+1}}{1} \right| - \left| \frac{a_{-n}}{1} \right| < 1 - \tilde{y}_{-n+1} \quad \text{si y sólo si} \quad 1 - \left| \frac{a_{-n+1}}{1} \right| - \left| \frac{c_{-n+1}}{1} \right| - \left| \frac{a_{-n}}{1} \right| > \tilde{y}_{-n+1},$$

repitiendo los pasos anteriores hasta llegar a \tilde{s}_0 se obtiene que

$$\tilde{s}_0 < 1 - \left| \frac{c_0}{1} \right| - \left| \frac{a_{-1}}{1} \right| - \left| \frac{c_{-1}}{1} \right| - \dots - \left| \frac{a_{-n}}{1} \right| = 1 - h'_{-2n}.$$

Por la prueba del Teorema 2.2 se sabe que la sucesión $\{1 - h'_{-n}\}_{n \geq 0}$ es estrictamente decreciente y converge a $1 - H'$, por lo que se tiene que $\tilde{s}_0 < 1 - h'_{-2n} < 1 - h'_{-2n+1}$, para toda $n \geq 0$, entonces

$$\tilde{s}_0 \leq 1 - H' < 1 - h'_{-n} < 1 - h'_0 = 1.$$

Por otro lado, por las ecuaciones (2.14) también se tiene que

$$\tilde{r}_n = \frac{c_n}{\tilde{y}_{n-1}} < 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \tilde{x}_{n-1} < 1 - c_n,$$

sustituyendo el valor de x_{n-1} y despejando

$$\frac{a_{n-1}}{\tilde{s}_{n-1}} < 1 - c_n \quad \text{si y sólo si} \quad \frac{a_{n-1}}{1 - c_n} < \tilde{s}_{n-1},$$

repitiendo los mismos hasta llegar a \tilde{s}_0 se tiene que

$$\tilde{s}_0 > \left| \frac{a_0}{1} \right| - \left| \frac{c_1}{1} \right| - \left| \frac{a_1}{1} \right| - \dots - \left| \frac{c_n}{1} \right| = 1 - h_{2n}.$$

De nuevo, por la prueba del Teorema 2.2 se sabe que la sucesión $\{1 - h_n\}_{n \geq 0}$ es estrictamente creciente y converge a $1 - H$, por lo que se cumple que $1 - h_{2n-1} < 1 - h_{2n} < \tilde{s}_0$ y entonces

$$0 = 1 - h_0 < 1 - h_{2n} < 1 - H \leq \tilde{s}_0.$$

Por lo tanto se obtiene la desigualdad (2.20).

Finalmente suponiendo que $1 - H \leq \tilde{s}_0 \leq 1 - H'$, como $0 < H'$ y $H < 1$, entonces $0 < \tilde{s}_0 < 1$ y por inducción se prueba que \tilde{P}_U y \tilde{P}_L son matrices estocásticas.

□

Obsérvese que en el teorema anterior se ha elegido a \tilde{s}_0 como parámetro libre, sin embargo es posible elegir a \tilde{r}_0 , en cuyo caso, la condición para que exista la factorización estocástica LU resulta ser la misma que para la factorización estocástica UL con su respectivo parámetro libre, es decir, como $\tilde{r}_0 = 1 - \tilde{s}_0$ la condición del teorema anterior es equivalente a

$$H' \leq \tilde{r}_0 \leq H.$$

2.2. Transformación de Darboux y relación entre las matrices espectrales

En esta sección se busca la relación entre las medidas que hacen ortogonales a los polinomios generados por P y las medidas que hacen ortogonales a los polinomios generados por su *transformación de Darboux* la cual consiste en invertir el orden de los multiplicandos obtenidos de la factorización estocástica estudiada en la sección anterior.

Dado que se cuenta con dos factorizaciones de P , se estudiará a la transformación de Darboux en cada uno de ellos. Se denotarán como \hat{P} en el caso de la factorización UL y \hat{P} en el caso de la factorización LU.

El objetivo de esta sección es encontrar la relación que existe entre P y su transformación de Darboux a través de su espectro. Naturalmente, hay que comenzar explicando qué se entenderá como *espectro* (o *matriz espectral* de acuerdo con S. Karlin y J. McGregor en la Sección 4 de [17]) de P . Considerando a P como en la ecuación (2.1), para encontrar la familia de polinomios ortogonales asociada se tiene que resolver el sistema $Pq = xq$ donde $q = (\dots, Q_{-1}(x), Q_0(x), Q_1(x), \dots)$ es un vector doblemente infinito de polinomios. Existen, de hecho, dos familias q^α , $\alpha = 1, 2$, que satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia

$$\begin{aligned} Q_0^1(x) &= 1 & Q_0^2(x) &= 0 \\ Q_{-1}^1(x) &= 0 & Q_{-1}^2(x) &= 1 \\ xQ_n^\alpha(x) &= a_n Q_{n+1}^\alpha(x) + b_n Q_n^\alpha(x) + c_n Q_{n-1}^\alpha(x), & \alpha &\in \{1, 2\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \deg(Q_n^1) &= n, & n &\geq 0, & \deg(Q_n^2) &= n-1, & n &\geq 1, \\ \deg(Q_{-n-1}^1) &= n-1, & n &\geq 1, & \deg(Q_{-n-1}^2) &= n, & n &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De la relación de recurrencia a tres términos (2.21), se tienen las ecuaciones

$$Q_{n+1}^\alpha(x) = \frac{x - b_n}{a_n} Q_n^\alpha(x) - \frac{c_n}{a_n} Q_{n-1}^\alpha(x) \quad y \quad Q_{n-1}^\alpha(x) = \frac{x - b_n}{c_n} Q_n^\alpha(x) - \frac{a_n}{c_n} Q_{n+1}^\alpha(x).$$

Con lo que, considerando los grados de los polinomios, es fácil ver que si R_n^1 y L_{n-1}^1 son los coeficientes líderes de $Q_n^1(x)$ y $Q_{-n-1}^1(x)$, respectivamente, se tiene que para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} R_0^1 &= 1, & R_1^1 &= \frac{R_0^1}{a_0}, & R_2^1 &= \frac{R_1^1}{a_1} = \frac{1}{a_0 a_1}, \dots, & R_n^1 &= \frac{R_{n-1}^1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_0 \cdots a_{n-1}}, \\ L_{-1}^1 &= 0, & L_0^1 &= -\frac{R_0^1 a_{-1}}{c_{-1}} = -\frac{a_{-1}}{c_{-1}}, & L_1^1 &= \frac{L_0^1}{c_{-2}} = -\frac{a_{-1}}{c_{-1} c_{-2}}, \dots, & L_{n-1}^1 &= -\frac{a_{-1}}{c_{-1} \cdots c_{-n}}. \end{aligned}$$

De la misma forma, si R_{n-1}^2 y L_n^2 son los coeficientes líderes de $Q_n^2(x)$ y $Q_{-n-1}^2(x)$, respectivamente, se tiene que para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} L_0^2 = 1, \quad L_1^2 = \frac{L_0^2}{c_{-1}} = \frac{1}{c_{-1}}, \quad L_2^2 = \frac{L_1^2}{c_{-2}} = \frac{1}{c_{-1}c_{-2}}, \dots, L_{n-1}^2 = \frac{1}{c_{-1} \cdots c_{-n}} \\ R_{-1}^2 = 0, \quad R_0^2 = -\frac{L_0^2 c_0}{a_0}, \quad R_1^2 = \frac{R_0^2}{a_1} = -\frac{c_0}{a_0 a_1}, \dots, R_{n-1}^2 = \frac{R_{n-2}^2}{a_{n-1}} = -\frac{c_0}{a_0 \cdots a_{n-1}}. \end{aligned}$$

Entonces, para $n \geq 1$, es posible expresar a los polinomios con sus coeficientes líderes como sigue

$$\begin{aligned} Q_n^1(x) = R_n^1 x^n + \mathcal{O}(x^{n-1}), \quad Q_n^2(x) = R_{n-1}^2 x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2}), \\ Q_{-n-1}^1(x) = L_{n-1}^1 x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2}), \quad Q_{-n-1}^2(x) = L_n^2 x^n + \mathcal{O}(x^{n-1}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Definiendo a los coeficientes potenciales de P como las soluciones a las ecuaciones $\pi P = \pi$ con la condición inicial $\pi_0 = 0$ se tiene que

$$\pi_0 = 1, \quad \pi_n = \frac{a_0 \cdots a_{n-1}}{c_1 \cdots c_n}, \quad \pi_{-n} = \frac{c_0 c_{-1} \cdots c_{-n+1}}{a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-n}}, \quad n \geq 1. \quad (2.24)$$

Como en el Capítulo 1, por la Sección 4 de [17], se sabe que P es un operador lineal autoadjunto de norma ≤ 1 en $\ell_\pi^2(\mathbb{Z})$ y aplicando el teorema espectral se obtienen tres medidas ψ_{11} , ψ_{12} y ψ_{22} (pues $\psi_{12} = \psi_{21}$) con soporte en el $[-1, 1]$ tales que ψ_{11} y ψ_{22} son medidas positivas, ψ_{12} es una medida signada con $\int_{-1}^1 \psi_{12} = 0$ y por la simetría de P

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \int_{-1}^1 Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) d\psi_{\alpha, \beta}(x) = \frac{\delta_{i, j}}{\pi_j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

A la matriz

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x) & \psi_{12}(x) \\ \psi_{12}(x) & \psi_{22}(x) \end{pmatrix}$$

se le conoce como *matriz espectral* de P y es una matriz positiva definida. Además se tiene la *fórmula de representación de Karlin-McGregor* para calcular las probabilidades de transición a m pasos como sigue

$$P_{i, j}^{(m)} = \pi_j \int_{-1}^1 x^m \sum_{\alpha, \beta=1}^2 Q_i^\alpha(x) Q_j^\beta(x) d\psi_{\alpha, \beta}(x), \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

En forma vectorial, la fórmula de representación de Karlin-McGregor se puede expresar como sigue

$$P_{i, j}^{(m)} = \pi_j \int_{-1}^1 x^m (Q_i^1(x), Q_i^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} Q_j^1(x) \\ Q_j^2(x) \end{pmatrix} dx, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad (2.25)$$

y la ortogonalidad como

$$\int_{-1}^1 (Q_i^1(x), Q_i^2(x)) \begin{pmatrix} d\psi_{11}(x) & d\psi_{12}(x) \\ d\psi_{12}(x) & d\psi_{22}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_j^1(x) \\ Q_j^2(x) \end{pmatrix} = \frac{\delta_{i,j}}{\pi_j}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

Por simplicidad se asume que todas las medidas son diferenciables con respecto a la medida de Lebesgue y se denota, abusando de la notación, a Ψ como su matriz de densidades.

A continuación se da un resultado de equivalencia para la ortogonalidad vectorial en términos de monomios.

Lema 2.4. Sean $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\alpha = 1, 2$ definidas el sistema (2.21). Entonces

$$\int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} Q_m^1(x) \\ Q_m^2(x) \end{pmatrix} dx = \frac{\delta_{n,m}}{\pi_n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (2.26)$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) x^j dx &= \begin{cases} (0, 0), & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ (\alpha_n, 0), & j = n, \end{cases} \\ \int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) x^j dx &= \begin{cases} (0, 0), & j = 0, 1, \dots, n-1, \\ (0, \beta_n), & j = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde las integrales se resuelven entrada por entrada, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = c_1 \cdots c_n$ y $\beta_n = \frac{a_{-1} \cdots a_{-n-1}}{c_0}$, para $n \geq 0$.

Demostración. Sea

$$\mathbf{Q}_n(x) = \begin{pmatrix} Q_n^1(x) & Q_n^2(x) \\ Q_{-n-1}^1(x) & Q_{-n-1}^2(x) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0,$$

de manera que la ecuación (2.26) es equivalente a

$$\int_{-1}^1 \mathbf{Q}_n(x) \Psi(x) \mathbf{Q}_m^*(x) dx = \begin{pmatrix} 1/\pi_n & 0 \\ 0 & 1/\pi_{-n-1} \end{pmatrix} \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 0,$$

donde * representa a la matriz traspuesta conjugada, $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker y la integral se resuelve entrada a entrada. Como $\mathbf{Q}_n(x)$ es un polinomio matricial de grado n cuyo coeficiente líder es no singular (por la ecuación (2.23)), la ortogonalidad anterior es equivalente a

$$\int_{-1}^1 \mathbf{Q}_n(x) \Psi(x) x^j dx = \begin{cases} 0_{2 \times 2}, & j = 0, \dots, n-1 \\ D_n, & j = n \end{cases}, \quad (2.28)$$

donde $0_{2 \times 2}$ denota a la matriz nula de dimensión 2×2 y D_n es una matriz diagonal no singular. Los renglones de la integral anterior son las ecuaciones (2.27), por lo que lo único que falta es calcular los valores de α_n y β_n . Pero por la ecuación anterior, la ecuación (2.23) y la ortogonalidad de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, la integral en la ecuación (2.26) se puede ver como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi_n} &= \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} Q_n^1(x) \\ Q_n^2(x) \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} R_n^1 x^n + \mathcal{O}(x^{n-1}) \\ R_{n-1}^2 x^{n-1} + \mathcal{O}(x^{n-2}) \end{pmatrix} dx \\
&= \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} R_n^1 x^n \\ R_{n-1}^2 x^{n-1} \end{pmatrix} dx \\
&= R_n^1 \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} x^n \\ 0 \end{pmatrix} dx + R_{n-1}^2 \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \end{pmatrix} dx \\
&= R_n^1 \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} x^n \\ 0 \end{pmatrix} dx.
\end{aligned}$$

De manera que usando la ecuación (2.24), se tiene que

$$\int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \begin{pmatrix} x^n \\ 0 \end{pmatrix} dx = \frac{R_n^1}{\pi_n} = c_1 \cdots c_n.$$

Por lo tanto, y ya que D_n en la ecuación (2.28) es diagonal, se tiene que

$$\int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) x^n dx = (c_1 \cdots c_n, 0),$$

donde la integral se resuelve entrada por entrada. De la misma forma se prueba que

$$\int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) x^n dx = \left(0, \frac{a_{-1} \cdots a_{-n-1}}{c_0} \right).$$

□

Transformación de Darboux para la factorización UL

Para la factorización UL, la transformación de Darboux está dada por

$$\tilde{P} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \tilde{c}_{-1} & \tilde{b}_{-1} & \tilde{a}_{-1} & & \\ \hline & & \tilde{c}_0 & \tilde{b}_0 & \tilde{a}_0 & \\ & & & \tilde{c}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{a}_1 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right) = P_L P_U$$

es una matriz tridiagonal estocástica que describe a una familia de caminatas aleatorias en \mathbb{Z} que dependen del parámetro libre y_0 y cuyos coeficientes satisfacen las nuevas relaciones

$$\begin{aligned}\tilde{b}_n &= y_n s_n + r_n x_{n-1}, \\ \tilde{a}_n &= x_n s_n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

$$\tilde{c}_n = y_{n-1} r_n,\tag{2.30}$$

Las familias de polinomios $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ se obtienen resolviendo la ecuación $Pq^\alpha = xq^\alpha$, usando la factorización de P y multiplicando P_L por la izquierda, se tiene que $\tilde{P}P_Lq^\alpha = xP_Lq^\alpha$, de manera que $s^\alpha = P_Lq^\alpha$ con $s^\alpha = (\dots, S_{-1}^\alpha(x), S_0^\alpha(x), S_1^\alpha(x), \dots)$ satisface la ecuación $\tilde{P}s^\alpha = xs^\alpha$. A esta nueva familia, se le denotará como $(S_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ y se define a través de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ como sigue

$$S_n^\alpha(x) = s_n Q_n^\alpha(x) + r_n Q_{n-1}^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \{1, 2\}.\tag{2.31}$$

Por otro lado, usando la factorización $P = P_U P_L$ y la ecuación $Pq^\alpha = xq^\alpha$, entonces $P_U P_L q^\alpha = xq^\alpha$, de manera que $P_U s^\alpha = xq^\alpha$. Desarrollando esta ecuación se obtiene $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ en términos de $(S_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ como sigue

$$xQ_n^\alpha(x) = x_n S_{n+1}^\alpha(x) + y_n S_n^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \{1, 2\},\tag{2.32}$$

relación que resulta muy útil ya que al evaluar en $x = 0$ se llega a que

$$\begin{aligned}S_n^\alpha(0) &= (-1)^n \frac{y_0 \cdots y_{n-1}}{x_0 \cdots x_n} S_0^\alpha(0), \quad n \geq 1, \\ S_{-n-1}^\alpha(0) &= (-1)^{n+1} \frac{x_{-1} \cdots x_{-n-1}}{y_{-1} \cdots y_{-n-1}} S_0^\alpha(0), \quad n \geq 0,\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde

$$S_0^\alpha(0) = \begin{cases} s_0 & \text{si } \alpha = 1 \\ r_0 & \text{si } \alpha = 2 \end{cases}.$$

La ecuación (2.33) establece una relación directa entre las familias de polinomios $(S_n^1)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(S_n^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ en $x = 0$, ya que evaluando para $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ es claro que

$$s_0 S_n^2(0) = r_0 S_n^1(0), \quad n \in \mathbb{Z}.\tag{2.34}$$

Otra relación interesante surge al buscar una forma de expresar a los polinomios $(S_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ en términos de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, pues usando las ecuaciones (2.31) y (2.33) de forma

recursiva se tiene que

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^\alpha(x) &= \frac{x}{x_n} Q_n^\alpha(x) - \frac{y_n}{x_n} S_n^\alpha(x) = \frac{x}{x_n} Q_n^\alpha(x) + \frac{S_{n+1}^\alpha(0)}{S_n^\alpha(0)} \left[\frac{x}{x_{n-1}} Q_{n-1}^\alpha(x) - \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} S_{n-1}^\alpha(x) \right] \\
&= \frac{x}{x_n} Q_n^\alpha(x) + \frac{S_{n+1}^\alpha(0)}{S_n^\alpha(0)} \left[\frac{x}{x_{n-1}} Q_{n-1}^\alpha(x) + \frac{S_n^\alpha(0)}{S_{n-1}^\alpha(0)} S_{n-1}^\alpha(x) \right] \\
&= x \left[\frac{Q_n^\alpha(x)}{x_n} + \frac{S_{n+1}^\alpha(0)}{S_n^\alpha(0)} \frac{Q_{n-1}^\alpha(x)}{x_{n-1}} \right] + \frac{S_{n+1}^\alpha(0)}{S_{n-1}^\alpha(0)} S_{n-1}^\alpha(x) \\
&= \dots = x \sum_{j=0}^n \frac{S_{n+1}^\alpha(0)}{S_{j+1}^\alpha(0)} \frac{Q_j^\alpha(x)}{x_j} + S_{n+1}^\alpha(0).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_n^\alpha(x) = S_n^\alpha(0) \left[1 + x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_j^\alpha(x)}{S_{j+1}^\alpha(0) x_j} \right], \quad n \geq 1, \quad (2.35)$$

y de manera similar se tiene que

$$S_{-n-1}^\alpha(x) = S_{-n-1}^\alpha(0) \left[1 + x \sum_{j=0}^n \frac{Q_{-j-1}^\alpha(x)}{S_{-j-1}^\alpha(0) y_{-j-1}} \right], \quad n \geq 0. \quad (2.36)$$

Dado que se conocen las condiciones iniciales de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, sustituyendo en la ecuación (2.31) se obtiene que

$$\begin{aligned}
S_0^1(x) &= s_0, & S_0^2(x) &= r_0, \\
S_{-1}^1(x) &= -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}}, & S_{-1}^2(x) &= \frac{x - x_{-1} r_0}{y_{-1}}.
\end{aligned}$$

Es importante notar que esta familia no satisface las mismas condiciones iniciales que $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$. De hecho tampoco respeta los grados de los polinomios pues se tiene que

$$\begin{aligned}
\deg(S_n^1) &= n, \quad n \geq 0, & \deg(S_n^2) &= n, \quad n \geq 0, \\
\deg(S_{-n-1}^1) &= n, \quad n \geq 0, & \deg(S_{-n-1}^2) &= n + 1, \quad n \geq 0.
\end{aligned} \quad (2.37)$$

Sin embargo es posible hacer una transformación de este sistema tomando la matriz

$$\mathbf{S}_n(x) = \begin{pmatrix} S_n^1(x) & S_n^2(x) \\ S_{-n-1}^1(x) & S_{-n-1}^2(x) \end{pmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Entonces

$$\mathbf{S}_0(x) = \begin{pmatrix} s_0 & r_0 \\ -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}} & \frac{x - x_{-1} r_0}{y_{-1}} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

y como

$$|\mathbf{S}_0(x)| = \frac{xs_0}{y-1} \neq 0$$

si $x \neq 0$, se puede definir un nuevo sistema con ayuda de la siguiente proposición.

Proposición 2.5. *Si $x \neq 0$, la expresión*

$$\tilde{Q}_n(x) = \mathbf{S}_n(x)\mathbf{S}_0^{-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.39)$$

es un polinomio matricial de grado n , es decir, su coeficiente líder es una matriz no singular. Si $x = 0$, $\tilde{Q}_n^\alpha(0)$, $\alpha = 1, 2$, están bien definidos y se pueden calcular en términos de $S_n^\alpha(0)$ y $Q_n^\alpha(0)$, $\alpha = 1, 2$.

Demostración. Por la ecuación (2.38), se tiene que

$$\mathbf{S}_0^{-1}(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \frac{x - x_{-1}r_0}{s_0} & -\frac{y-1}{s_0} \\ x_{-1} & y-1 \end{pmatrix},$$

y desarrollando la igualdad (2.39) se obtiene que para $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n^1(x) &= \frac{S_n^1(x)}{s_0} + \frac{x_{-1}}{x} \left(-\frac{r_0}{s_0} S_n^1(x) + S_n^2(x) \right) \\ \text{y } \tilde{Q}_n^2(x) &= \frac{y-1}{x} \left(-\frac{r_0}{s_0} S_n^1(x) + S_n^2(x) \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Por otro lado, usando las ecuaciones (2.34), (2.35) y (2.36), se cumple que

$$\begin{aligned} -\frac{r_0}{s_0} S_0^1(x) + S_0^2(x) &= 0, \\ -\frac{r_0}{s_0} S_n^1(x) + S_n^2(x) &= x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{S_n^2(0)}{x_j} \left(\frac{Q_j^2(x)}{S_{j+1}^2(0)} - \frac{Q_j^1(x)}{S_{j+1}^1(0)} \right), \quad n \geq 1, \\ -\frac{r_0}{s_0} S_{-n-1}^1(x) + S_{-n-1}^2(x) &= x \sum_{j=0}^n \frac{S_{-n-1}^2(0)}{y_{-j-1}} \left(\frac{Q_{-j-1}^2(x)}{S_{-j-1}^2(0)} - \frac{Q_{-j-1}^1(x)}{S_{-j-1}^1(0)} \right), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto las familias $(\tilde{Q}_n^\alpha(x))_{n \in \mathbb{Z}}$, $\alpha = 1, 2$ son múltiplos de x , es decir, son familias de polinomios y por lo tanto también están bien definidos para $x = 0$.

Ahora, por las igualdades (2.37) se tiene que para $n \geq 1$

$$\deg \left(\frac{1}{x} \left(-\frac{r_0}{s_0} S_n^1(x) + S_n^2(x) \right) \right) = n-1, \quad \text{y} \quad \deg \left(\frac{1}{x} \left(-\frac{r_0}{s_0} S_{-n-1}^1(x) + S_{-n-1}^2(x) \right) \right) = n.$$

Entonces, por las ecuaciones (2.40) se tiene que

$$\begin{aligned} \deg(\tilde{Q}_n^1) &= n, & n \geq 0, & & \deg(\tilde{Q}_n^2) &= n - 1, & n \geq 1, \\ \deg(\tilde{Q}_{-n-1}^1) &= n - 1, & n \geq 1, & & \deg(\tilde{Q}_{-n-1}^2) &= n, & n \geq 0, \end{aligned}$$

donde hay que poner especial atención al $\deg(\tilde{Q}_{-n-1}^1)$ ya que resulta ser de grado n . Sin embargo, si denotamos por Λ_n al coeficiente de x^n del polinomio $\tilde{Q}_{-n-1}^1(x)$, por las ecuaciones (2.40), (2.31) y (2.23) se tiene que

$$\begin{aligned} \Lambda_n &= \frac{1}{s_0}(r_{-n-1}L_n^1) + x_{-1}(r_{-n-1}L_{n+1}^2) = \frac{1}{s_0} \left(-\frac{a_{-1}r_{-n-1}}{c_{-1} \cdots c_{-n-1}} \right) + x_{-1} \left(\frac{r_{-n-1}}{c_{-1} \cdots c_{-n-1}} \right) \\ &= \frac{r_{-n-1}}{s_0 c_{-1} \cdots c_{-n-1}} (a_{-1} - x_{-1}s_0) = 0, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la ecuación (2.3). Por lo tanto $\deg(\tilde{Q}_{-n-1}^1) = n - 1$. Finalmente, por definición se cumple que $\tilde{Q}_0(x) = I_{2 \times 2}$, la matriz identidad de dimensión 2×2 .

□

Definiendo ahora los coeficientes potenciales para \tilde{P} como

$$\tilde{\pi}_0 = 1, \quad \tilde{\pi}_n = \frac{\tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{c}_1 \cdots \tilde{c}_n}, \quad \tilde{\pi}_{-n} = \frac{\tilde{c}_0 \cdots \tilde{c}_{-n+1}}{\tilde{a}_{-1} \cdots \tilde{a}_{-n}}, \quad n \geq 1, \quad (2.41)$$

$M_{-1} = \int_{-1}^1 \frac{d\Psi(x)}{x}$ siempre que la integral esté bien definida y a la matriz de medidas

$$\Psi_S(x) = \frac{y_0}{s_0} \frac{\Psi(x)}{x} + \left[\begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} - \frac{y_0}{s_0} M_{-1} \right] \delta_0(x), \quad (2.42)$$

es posible presentar el siguiente teorema que presenta la relación entre la familia de polinomios ortogonales asociada a P y la asociada a \tilde{P} y, de hecho, muestra que la familia de polinomios $(\tilde{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ es ortogonal.

Teorema 2.6. *Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria irreducible con espacio de estados en \mathbb{Z} y matriz de transición P como en la ecuación (2.1). Sean P_U y P_L las matrices estocásticas resultantes de la factorización UL de P y \tilde{P} su transformación de Darboux. Sean $(S_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(\tilde{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ las familias de polinomios definidas en las ecuaciones (2.31) y (2.39) respectivamente. Entonces si*

$$\tilde{\Psi}(x) = \mathbf{S}_0(x) \Psi_S(x) \mathbf{S}_0^*(x), \quad (2.43)$$

con $\Psi_S(x)$ definida en la ecuación (2.42), se tiene que

$$\int_{-1}^1 \tilde{Q}_n(x) \tilde{\Psi}(x) \tilde{Q}_m^*(x) dx = \begin{pmatrix} 1/\tilde{\pi}_n & 0 \\ 0 & 1/\tilde{\pi}_{-n-1} \end{pmatrix} \delta_{n,m},$$

donde $(\tilde{\pi}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ está definida en la ecuación (2.41).

Demostración. Dado que la familia $(\tilde{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisface las mismas condiciones iniciales que $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, por el Lema 2.4 es suficiente que la ortogonalidad se pruebe integrando con respecto a los monomios.

Para los subíndices positivos se tiene que si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) x^j dx &= \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) x \tilde{\Psi}(x) x^{j-1} dx \\ &= \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \mathbf{S}_0(x) x \Psi_S(x) \mathbf{S}_0^*(x) x^{j-1} dx \\ &= \frac{y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \mathbf{S}_0^{-1}(x) \mathbf{S}_0(x) \Psi(x) \mathbf{S}_0^*(x) x^{j-1} dx \\ &= \frac{y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi(x) \mathbf{S}_0^*(x) x^{j-1} dx, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por la ecuación (2.43) y la tercera por las ecuaciones (2.39) y (2.42). Utilizando la relación (2.31)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) x^j dx &= \frac{s_n y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \mathbf{S}_0^*(x) x^{j-1} dx \\ &\quad + \frac{r_n y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) \mathbf{S}_0^*(x) x^{j-1} dx. \end{aligned}$$

Notando ahora que

$$\mathbf{S}_0^*(x) = \begin{pmatrix} s_0 & -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}} \\ r_0 & \frac{x - x_{-1} r_0}{y_{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}} \\ r_0 & -\frac{x_{-1} r_0}{y_{-1}} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_{-1}} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

se tiene que $\mathbf{S}_0^*(x) = A^* + xB^*$ donde A^* y B^* son matrices constantes. Entonces, siguiendo

con la integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) x^j dx &= \frac{s_n y_0}{s_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right] \\ &\quad + \frac{r_n y_0}{s_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right]. \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.27) el primer término de la suma se anula para $j \in \{1, \dots, n\}$, el segundo y tercer términos se anulan para $j \in \{0, \dots, n-1\}$ y el cuarto término se anula para $j \in \{0, \dots, n-2\}$, por lo que la integral completa se anula para $j \in \{1, \dots, n-2\}$. Para $j = n-1$ se anulan los primeros tres términos y se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) x^{n-1} dx &= \frac{r_n y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) B^* x^{n-1} dx \\ &= \frac{r_n y_0}{s_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) x^{n-1} dx \right] B^* \\ &= \frac{r_n y_0}{s_0} (\alpha_{n-1}, 0) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y-1} \end{pmatrix} = (0, 0). \end{aligned}$$

Para $j = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \mathbf{S}_0^{-1}(x) \mathbf{S}_0(x) \Psi_S(x) \mathbf{S}_0^*(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi_S(x) \mathbf{S}_0^*(x) dx \\ &= \left[\int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi_S(x) dx \right] A^* + \left[\int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) x \Psi_S(x) dx \right] B^*, \end{aligned}$$

donde la primera igualdad se da por las ecuaciones (2.39), (2.43) y la tercera por la descomposición de $\mathbf{S}_0^*(x)$ que se usó en la igualdad (2.44). El segundo término de la suma se puede extender usando las ecuaciones (2.42) y (2.31)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) x \Psi_S(x) dx &= \frac{y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi(x) dx \\ &= \frac{s_n y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) dx + \frac{r_n y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x)) \Psi(x) dx \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

pues como $n > 1$, entonces $n - 1 > 0$ y por la ecuación (2.27) las integrales se anulan. Volviendo a la integral de interés, por la ecuación (2.35) se tiene que

$$(S_n^1(x), S_n^2(x)) = x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{x_j} \left(\frac{S_n^1(0)}{S_{j+1}^1(0)} Q_j^1(x), \frac{S_n^2(0)}{S_{j+1}^2(0)} Q_j^2(x) \right) + (S_n^1(0), S_n^2(0))$$

y por la ecuación (2.42) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= \left[\int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi_S(x) dx \right] A^* \\ &= (S_n^1(0), S_n^2(0)) \left[\begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} - \frac{y_0}{s_0} M_{-1} \right] A^* \\ &\quad + \frac{y_0}{s_0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{x_j} \int_{-1}^1 \left(\frac{S_n^1(0)}{S_{j+1}^1(0)} Q_j^1(x), \frac{S_n^2(0)}{S_{j+1}^2(0)} Q_j^2(x) \right) \Psi(x) dx A^* \\ &\quad + \frac{y_0}{s_0} (S_n^1(0), S_n^2(0)) M_{-1} A^*. \end{aligned}$$

Es importante notar que como

$$\frac{S_n^1(0)}{S_{j+1}^1(0)} = \frac{S_n^2(0)}{S_{j+1}^2(0)}$$

y es constante, todos los elementos del segundo término de la suma se anulan excepto cuando $j = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= (S_n^1(0), S_n^2(0)) \begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} A^* \\ &\quad + \frac{y_0}{s_0 x_0} \frac{S_n^1(0)}{S_1^1(0)} \int_{-1}^1 (Q_0^1(x), Q_0^2(x)) \Psi(x) dx A^*. \end{aligned}$$

Como $\int_{-1}^1 (Q_0^1(x), Q_0^2(x)) \Psi(x) dx = (1, 0)$ y $S_1^1(0) = -\frac{s_0 y_0}{x_0}$, y sustituyendo el valor de A^* que aparece en la ecuación (2.44), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= \left[(S_n^1(0), S_n^2(0)) \begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} - (S_n^1(0)/s_0^2, 0) \right] A^* \\ &= \left(\left(1 - \frac{1}{s_0} \right) \frac{S_n^1(0)}{s_0}, \frac{S_n^2(0)}{r_0} \right) \begin{pmatrix} s_0 & -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}} \\ r_0 & \frac{-x_{-1} r_0}{y_{-1}} \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{r_0}{s_0} S_n^1(0) + S_n^2(0), \frac{x_{-1}}{y_{-1}} \left(\frac{r_0}{s_0} S_n^1(0) - S_n^2(0) \right) \right). \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.34) se tiene que $\frac{r_0}{s_0}S_n^1(0) = S_n^2(0)$, por lo tanto

$$\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x))\tilde{\Psi}(x)dx = (0, 0).$$

Para los subíndices negativos la prueba es análoga, pues si $n \geq 1$, usando las ecuaciones (2.31), (2.39), (2.42), (2.43) y la descomposición de $\mathbf{S}_0^*(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x))\tilde{\Psi}(x)x^j dx &= \frac{y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x))\Psi(x)\mathbf{S}_0^*(x)x^{j-1} dx \\ &= \frac{s_{-n-1}y_0}{s_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x))\Psi(x)A^*x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x))\Psi(x)B^*x^j dx \right] \\ &\quad + \frac{r_{-n-1}y_0}{s_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{-n-2}^1(x), Q_{-n-2}^2(x))\Psi(x)A^*x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{-n-2}^1(x), Q_{-n-2}^2(x))\Psi(x)B^*x^j dx \right], \end{aligned}$$

donde, por la ecuación (2.27) el primer término de la suma se anula para $j \in \{1, \dots, n\}$, el segundo se anula para $j \in \{0, \dots, n-1\}$, el tercero para $j \in \{1, \dots, n+1\}$ y el cuarto término se anula para $j \in \{0, \dots, n\}$, por lo que la integral completa se anula para $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Para $j = 0$, se tiene que por las ecuaciones (2.39), (2.43) y la descomposición de $\mathbf{S}_0^*(x)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x))\tilde{\Psi}(x)dx &= \int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x))\Psi_S(x)\mathbf{S}_0^*(x)dx \\ &= \left[\int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x))\Psi_S(x)dx \right] A^* + \left[\int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x))x\Psi_S(x)dx \right] B^*, \end{aligned}$$

donde el segundo término de la suma se puede extender usando las ecuaciones (2.42) y (2.31), y por la ortogonalidad de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x))x\Psi_S(x)dx &= \frac{s_{-n-1}y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x))\Psi(x)dx \\ &\quad + \frac{r_{-n-1}y_0}{s_0} \int_{-1}^1 (Q_{-n-2}^1(x), Q_{-n-2}^2(x))\Psi(x)dx = (0, 0). \end{aligned}$$

Entonces usando las ecuaciones (2.36) y (2.42) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= \left[\int_{-1}^1 (S_{-n-1}^1(x), S_{-n-1}^2(x)) \Psi_S(x) dx \right] A^* \\
&= (S_{-n-1}^1(0), S_{-n-1}^2(0)) \left[\begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} - \frac{y_0}{s_0} M_{-1} \right] A^* \\
&\quad + \frac{y_0}{s_0} \sum_{j=0}^n \frac{1}{y_{-j-1}} \int_{-1}^1 \left(\frac{S_{-n-1}^1(0)}{S_{-j-1}^1(0)} Q_{-j-1}^1(x), \frac{S_{-n-1}^2(0)}{S_{-j-1}^2(0)} Q_{-j-1}^2(x) \right) \Psi(x) dx A^* \\
&\quad + \frac{y_0}{s_0} (S_{-n-1}^1(0), S_{-n-1}^2(0)) M_{-1} A^*.
\end{aligned}$$

De la misma forma que antes, por la ecuación (2.27) como

$$\frac{S_{-n-1}^1(0)}{S_{-j-1}^1(0)} = \frac{S_{-n-1}^2(0)}{S_{-j-1}^2(0)}$$

es constante, las integrales de la suma se anulan excepto cuando $j = 0$, de manera que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= (S_{-n-1}^1(0), S_{-n-1}^2(0)) \begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} A^* \\
&\quad + \frac{y_0}{s_0 y_{-1}} \frac{S_{-n-1}^2(0)}{S_{-1}^2(0)} \int_{-1}^1 (Q_{-1}^1(x), Q_{-1}^2(x)) \Psi(x) dx A^*.
\end{aligned}$$

Por la ecuación (2.27) se sabe que

$$\int_{-1}^1 (Q_{-1}^1(x), Q_{-1}^2(x)) \Psi(x) dx = (0, a_{-1}/c_0) = (0, x_{-1} s_0 / y_0 r_0)$$

y además $S_{-1}^2(0) = -\frac{x_{-1} r_0}{y_{-1}}$. Sustituyendo el valor de A^* que aparece en la expresión (2.44) se tiene que el resultado de la integral anterior es

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx &= \left[\left(\frac{S_{-n-1}^1(0)}{s_0}, \frac{S_{-n-1}^2(0)}{r_0} \right) - \left(0, \frac{S_{-n-1}^2(0)}{r_0^2} \right) \right] A^* \\
&= \left(\frac{S_{-n-1}^1(0)}{s_0}, \frac{S_{-n-1}^2(0)}{r_0} \left(1 - \frac{1}{r_0} \right) \right) \begin{pmatrix} s_0 & -\frac{x_{-1} s_0}{y_{-1}} \\ r_0 & -\frac{x_{-1} r_0}{y_{-1}} \end{pmatrix} \\
&= \left(S_{-n-1}^1(0) - \frac{s_0}{r_0} S_{-n-1}^2(0), \frac{x_{-1}}{y_{-1}} \left(-S_{-n-1}^1(0) + \frac{s_0}{r_0} S_{-n-1}^2(0) \right) \right).
\end{aligned}$$

Por la ecuación (2.34) se tiene que $S_{-n-1}^1(0) = -\frac{s_0}{r_0} S_{-n-1}^2(0)$, por lo tanto

$$\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_{-n-1}^1(x), \tilde{Q}_{-n-1}^2(x)) \tilde{\Psi}(x) dx = (0, 0).$$

Para calcular las normas se tiene que usando las ecuaciones (2.39) y (2.43) y para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x))^* dx &= \int_{-1}^1 (S_n^1(x), S_n^2(x)) \Psi_S(x) (S_n^1(x), S_n^2(x))^* dx \\
&= \int_{-1}^1 \left[\frac{x}{y_n} (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) - \frac{x_n}{y_n} (S_{n+1}^1(x), S_{n+1}^2(x)) \right] \Psi_S(x) (S_n^1(x), S_n^2(x))^* dx \\
&= \frac{1}{y_n} \int_{-1}^1 x (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi_S(x) (S_n^1(x), S_n^2(x))^* dx \\
&\quad - \frac{x_n}{y_n} \int_{-1}^1 (S_{n+1}^1(x), S_{n+1}^2(x)) \Psi_S(x) (S_n^1(x), S_n^2(x))^* dx,
\end{aligned}$$

donde para la segunda igualdad se usa la ecuación (2.32). Como el segundo término del lado derecho de la última igualdad se anula, usando la ecuación (2.42) y la relación (2.31) se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x)) \tilde{\Psi}(x) (\tilde{Q}_n^1(x), \tilde{Q}_n^2(x))^* dx &= \frac{\int_{-1}^1 x (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi_S(x) (S_n^1(x), S_n^2(x))^* dx}{y_n} \\
&= \frac{y_0}{y_n s_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) [s_n (Q_n^1(x), Q_n^2(x))^* + r_n (Q_{n-1}^1(x), Q_{n-1}^2(x))^*] dx \\
&= \frac{s_n y_0}{y_n s_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) (Q_n^1(x), Q_n^2(x))^* dx = \frac{s_n y_0}{y_n s_0} \frac{1}{\pi_n} = \frac{1}{\tilde{\pi}_n}.
\end{aligned}$$

La última igualdad, para $n \geq 0$, se cumple ya que al sustituir las ecuaciones (2.29) y (2.30) en (2.41) y usando (2.3) y (2.4) para obtener (2.24)

$$\tilde{\pi}_n = \frac{\tilde{a}_0 \dots \tilde{a}_{n-1}}{\tilde{c}_1 \dots \tilde{c}_n} = \frac{x_0 s_0 \dots x_{n-1} s_{n-1}}{y_0 r_1 \dots y_{n-1} r_n} = \frac{a_0 \dots a_{n-1}}{c_1 \dots c_n} \frac{s_0 y_n}{y_0 s_n} = \pi_n \frac{s_0 y_n}{y_0 s_n}.$$

Para los índices negativos se tiene que

$$\tilde{\pi}_{-n-1} = \frac{\tilde{c}_0 \dots \tilde{c}_{-n}}{\tilde{a}_{-1} \dots \tilde{a}_{-n-1}} = \frac{y_{-1} r_0 \dots y_{-n-1} r_{-n}}{x_{-1} s_{-1} \dots x_{-n-1} s_{-n-1}} = \frac{c_0 \dots c_{-n}}{a_{-1} \dots a_{-n-1}} \frac{s_0 y_{-n-1}}{y_0 s_{-n-1}} = \pi_{-n-1} \frac{s_0 y_{-n-1}}{y_0 s_{-n-1}}.$$

□

Transformación de Darboux para la factorización LU

En este caso, al igual que en la sección anterior se busca la relación entre la familia de polinomios ortogonales generada por P y la generada por \hat{P} . En este caso la matriz \hat{P} es la transformación de Darboux de la factorización LU de P , es decir $P = \hat{P}_L \hat{P}_U$ y

$$\hat{P} = \tilde{P}_U \tilde{P}_L.$$

Sea P como en la ecuación (2.1) la matriz de transición de una caminata aleatoria irreducible con espacio de estados en \mathbb{Z} . Como se mostró antes, P genera a las familias de polinomios $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\alpha \in \{1, 2\}$ que satisfacen las ecuaciones (2.21) y son ortogonales con respecto a $\Psi(x)$.

Si $P = \tilde{P}_L \tilde{P}_U$ como en la ecuación (2.7), la transformación de Darboux es

$$\hat{P} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & \hat{c}_{-1} & \hat{b}_{-1} & \hat{a}_{-1} & & \\ & & \hat{c}_0 & \hat{b}_0 & \hat{a}_0 & \\ & & & \hat{c}_1 & \hat{b}_1 & \hat{a}_1 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{array} \right) = \tilde{P}_U \tilde{P}_L,$$

que es una matriz tridiagonal estocástica y sus coeficientes satisfacen las nuevas relaciones

$$\hat{b}_n = \tilde{y}_n \tilde{s}_n + \tilde{r}_{n+1} \tilde{x}_n,$$

$$\hat{a}_n = \tilde{x}_n \tilde{s}_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.45)$$

$$\hat{c}_n = \tilde{y}_n \tilde{r}_n. \quad (2.46)$$

A partir de aquí sólo se mantendrá la notación para la familia $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ de la sección anterior. Dicha familia se obtiene de resolver el sistema $Pq^\alpha = xq^\alpha$, entonces $\tilde{P}_L \tilde{P}_U q^\alpha = xq^\alpha$, multiplicando \tilde{P}_U por la izquierda se tiene que $\hat{P} \tilde{P}_U q^\alpha = x \tilde{P}_U q^\alpha$, por lo tanto $t^\alpha = \tilde{P}_U q^\alpha$ satisface que $\hat{P} t^\alpha = x t^\alpha$. A esta nueva familia de polinomios se le denotará como $(T_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ y se define a partir de $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ como

$$T_n^\alpha(x) = \tilde{y}_n Q_n^\alpha(x) + \tilde{x}_n Q_{n+1}^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \{1, 2\}, \quad (2.47)$$

como $\tilde{P}_L \tilde{P}_U q^\alpha = xq^\alpha$ y $t^\alpha = \tilde{P}_U q^\alpha$, entonces $\tilde{P}_L t^\alpha = xq^\alpha$ de donde se obtiene a los polinomios $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ en términos de $(T_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$xQ_n^\alpha(x) = \tilde{r}_n T_{n-1}^\alpha(x) + \tilde{s}_n T_n^\alpha(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \in \{1, 2\}. \quad (2.48)$$

Evaluando en $x = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} T_n^\alpha(0) &= (-1)^{n+1} \frac{\tilde{r}_n \cdots \tilde{r}_0}{\tilde{s}_n \cdots \tilde{s}_0} T_{-1}^\alpha(0), \\ T_{-n-1}^\alpha(0) &= (-1)^n \frac{\tilde{s}_{-n} \cdots \tilde{s}_{-1}}{\tilde{r}_{-n} \cdots \tilde{r}_{-1}} T_{-1}^\alpha(0), \end{aligned} \quad (2.49)$$

con

$$T_{-1}^\alpha(0) = \begin{cases} \tilde{x}_{-1} & \text{si } \alpha = 1 \\ \tilde{y}_{-1} & \text{si } \alpha = 2 \end{cases}.$$

Al evaluar las expresiones en (2.49) en $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$, se encuentra la relación entre las sucesiones $(T_n^1(0))_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(T_n^2(0))_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\tilde{y}_{-1}T_n^1(0) = \tilde{x}_{-1}T_n^2(0), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.50)$$

Otra de las relaciones importantes entre $(T_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, será la siguiente que se obtiene de usar las ecuaciones (2.48) y (2.49) recursivamente

$$\begin{aligned} T_n^\alpha(x) &= \frac{x}{\tilde{s}_n} Q_n^\alpha(x) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} T_{n-1}^\alpha(x) \\ &= \frac{x}{\tilde{s}_n} Q_n^\alpha(x) + \frac{T_n^\alpha(0)}{T_{n-1}^\alpha(0)} \left[\frac{x}{\tilde{s}_{n-1}} Q_{n-1}^\alpha(x) + \frac{T_{n-1}^\alpha(0)}{T_{n-2}^\alpha(0)} T_{n-2}^\alpha(x) \right] \\ &= x \left[\frac{Q_n^\alpha(x)}{\tilde{s}_n} + \frac{T_n^\alpha(0) Q_{n-1}^\alpha(x)}{T_{n-1}^\alpha(0) \tilde{s}_{n-1}} \right] + \frac{T_n^\alpha(0)}{T_{n-2}^\alpha(0)} T_{n-2}^\alpha(x) \\ &= \dots = x \sum_{j=0}^n \frac{T_n^\alpha(0)}{T_j^\alpha(0) \tilde{s}_j} Q_j^\alpha(x) + T_n^\alpha(0), \end{aligned}$$

es decir,

$$T_n^\alpha(x) = T_n^\alpha(0) \left[1 + x \sum_{j=0}^n \frac{Q_j^\alpha(x)}{T_j^\alpha(0) \tilde{s}_j} \right], \quad n \geq 0. \quad (2.51)$$

De manera similar se tiene que

$$T_{-n-1}^\alpha(x) = T_{-n-1}^\alpha(0) \left[1 + x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q_{-j-1}^\alpha(x)}{T_{-j-2}^\alpha(0) \tilde{r}_{-j-1}} \right], \quad n \geq 1. \quad (2.52)$$

Como se conocen las condiciones iniciales de la familia $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, es posible encontrar las condiciones iniciales para $(T_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ que son las siguientes

$$\begin{aligned} T_0^1(x) &= \frac{x - \tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0}, & T_0^2(x) &= -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0}, \\ T_{-1}^1(x) &= \tilde{x}_{-1}, & T_{-1}^2(x) &= \tilde{y}_{-1}, \end{aligned}$$

y es posible comprobar que

$$\begin{aligned} \deg(T_n^1) &= n + 1 & n \geq 0, & \quad \deg(T_n^2) = n, & n \geq 0, \\ \deg(T_{-n-1}^1) &= n - 1 & n \geq 1, & \quad \deg(T_{-n-1}^2) = n, & n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como en la sección anterior, esta familia no satisface las condiciones iniciales de la familia $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ pero es posible hacer la siguiente transformación para obtener una familia que sí lo haga. Tomando

$$\mathbf{T}_n(x) = \begin{pmatrix} T_n^1(x) & T_n^2(x) \\ T_{-n-1}^1(x) & T_{-n-1}^2(x) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

se tiene que

$$\mathbf{T}_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{x - \tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0} & -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0} \\ \tilde{x}_{-1} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.54)$$

y $|\mathbf{T}_0(x)| = \frac{x \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0} \neq 0$ si $x \neq 0$, con lo que se tiene la siguiente proposición.

Proposición 2.7. *Si $x \neq 0$, la expresión*

$$\hat{Q}_n(x) = \mathbf{T}_n(x) \mathbf{T}_0^{-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.55)$$

es un polinomio matricial de grado n , es decir, su coeficiente líder es una matriz singular. Si $x = 0$, $\hat{Q}_n^\alpha(0)$, $\alpha = 1, 2$, están bien definidos y se pueden calcular en términos de $T_n^\alpha(0)$ y $Q_n^\alpha(0)$, $\alpha = 1, 2$.

Demostración. Por la ecuación (2.54) se tiene que

$$\mathbf{T}_0^{-1}(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 & \tilde{r}_0 \\ -\tilde{s}_0 \tilde{x}_{-1} & x - \tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1} \\ \tilde{y}_{-1} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix},$$

y desarrollando la expresión (2.55) se tiene que para $n \in \mathbb{Z}$

$$\hat{Q}_n^1(x) = \frac{\tilde{s}_0}{x} \left(T_n^1(x) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_n^2(x) \right) \quad \text{y} \quad \hat{Q}_n^2(x) = \frac{T_n^2(x)}{\tilde{y}_{-1}} - \frac{\tilde{r}_0}{x} \left(T_n^1(x) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_n^2(x) \right). \quad (2.56)$$

Por otro lado, para $n \geq 0$, usando las ecuaciones (2.50), (2.51) y (2.52) se tiene que

$$\begin{aligned} T_0^1(x) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_0^2(x) &= 0, \\ T_n^1(x) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_n^2(x) &= x \sum_{j=0}^n \frac{T_n^1(0)}{\tilde{s}_j} \left(\frac{Q_j^1(x)}{T_j^1(0)} - \frac{Q_j^2(x)}{T_j^2(0)} \right), \\ T_{-n-1}^1(x) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_{-n-1}^2(x) &= x \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_{-n-1}^1(0)}{\tilde{r}_{-j-1}} \left(\frac{Q_{-j-1}^1(x)}{T_{-j-2}^1(0)} - \frac{Q_{-j-1}^2(x)}{T_{-j-2}^2(0)} \right), \end{aligned}$$

por lo que $(\hat{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, $\alpha = 1, 2$ son múltiplos de x , es decir, son polinomios y por lo tanto $\hat{Q}_n^\alpha(0)$ están bien definidos.

Finalmente, por definición se tiene que $\hat{Q}_0(x) = I_{2 \times 2}$ y por las ecuaciones (2.53) y (2.56) se tiene que

$$\begin{aligned} \deg(\hat{Q}_n^1) &= n \quad n \geq 0, & \deg(\hat{Q}_n^2) &= n - 1, \quad n \geq 0 \\ \deg(\hat{Q}_{-n-1}^1) &= n - 1 \quad n \geq 1, & \deg(\hat{Q}_{-n-1}^2) &= n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

□

Considerando a los coeficientes potenciales de \hat{P} , definidos como

$$\hat{\pi}_0 = 1, \quad \hat{\pi}_n = \frac{\hat{a}_0 \cdots \hat{a}_{n-1}}{\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_n}, \quad \hat{\pi}_{-n} = \frac{\hat{c}_0 \cdots \hat{c}_{-n+1}}{\hat{a}_{-1} \cdots \hat{a}_{-n}}, \quad n \geq 1, \quad (2.57)$$

$M_{-1} = \int_{-1}^1 \frac{d\psi(x)}{x}$ siempre que la integral esté bien definida y a la matriz de medidas

$$\Psi_T(x) = \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \frac{\Psi(x)}{x} + \left[\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}_{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{y}_{-1}} \end{pmatrix} - \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} M_{-1} \right] \delta_0(x), \quad (2.58)$$

en este caso también se tiene el teorema que presenta la relación entre la familia de polinomios generada por P y la generada por \hat{P} .

Teorema 2.8. *Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria irreducible con espacio de estados en \mathbb{Z} y matriz de transición P como en la ecuación (2.1). Sean \tilde{P}_L y \tilde{P}_U las matrices resultantes de la factorización LU de P y \hat{P} su transformación de Darboux. Sean $(T_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ y $(\hat{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ las familias de polinomios definidas en las ecuaciones (2.47) y (2.55) respectivamente. Entonces para*

$$\hat{\Psi}(x) = \mathbf{T}_0(x) \Psi_T(x) \mathbf{T}_0^*(x), \quad (2.59)$$

con $\Psi_T(x)$ definida en la ecuación (2.58), se tiene que

$$\int_{-1}^1 \hat{Q}_n(x) \hat{\Psi}(x) \hat{Q}_m^*(x) dx = \begin{pmatrix} 1/\hat{\pi}_n & 0 \\ 0 & 1/\hat{\pi}_{-n-1} \end{pmatrix} \delta_{n,m},$$

donde $(\hat{\pi}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ está definida en la ecuación (2.57).

Demostración. Dado que la familia $(\hat{Q}_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisface las mismas condiciones iniciales que $(Q_n^\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$, por el Lema 2.4 es suficiente probar la ortogonalidad integrando con respecto a los monomios.

Para los subíndices positivos, si $n \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) x^j dx &= \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) x \hat{\Psi}(x) x^{j-1} dx \\
&= \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \mathbf{T}_0^{-1}(x) \mathbf{T}_0(x) x \Psi_T(x) \mathbf{T}_0^*(x) x^{j-1} dx \\
&= \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi(x) \mathbf{T}_0^*(x) x^{j-1} dx \\
&= \frac{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) \mathbf{T}_0^*(x) x^{j-1} dx \\
&\quad + \frac{\tilde{x}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_{n+1}^1(x), Q_{n+1}^2(x)) \Psi(x) \mathbf{T}_0^*(x) x^{j-1} dx
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por las ecuaciones (2.55), (2.59) y (2.58) y la cuarta igualdad se da por la ecuación (2.47). Como

$$\mathbf{T}_0^*(x) = \begin{pmatrix} \frac{x - \tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{x}_{-1} \\ -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{x}_{-1} \\ -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{s}_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que $\mathbf{T}_0^*(x) = A^* + xB^*$ donde A^* y B^* son matrices constantes. Volviendo a la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) x^j dx &= \frac{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right] \\
&\quad + \frac{\tilde{x}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{n+1}^1(x), Q_{n+1}^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{n+1}^1(x), Q_{n+1}^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right].
\end{aligned}$$

Por la ecuación (2.27), el primer término se anula para $j \in \{1, \dots, n\}$, el segundo para $j \in \{0, \dots, n-1\}$, el tercero para $j \in \{1, \dots, n+1\}$ y el cuarto para $j \in \{0, \dots, n\}$. Por lo tanto

$$\int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) x^j dx = 0, \quad \text{si } j = 1, \dots, n-1.$$

Para $j = 0$, por las ecuaciones (2.59) y (2.55)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \mathbf{T}_0^{-1}(x) \mathbf{T}_0 \Psi_T(x) \mathbf{T}_0^*(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) \mathbf{T}_0^*(x) dx. \end{aligned}$$

Usando la descomposición $\mathbf{T}_0^*(x) = A^* + xB^*$ es posible desarrollar la integral anterior como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) A^* dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) x B^* dx, \end{aligned}$$

y por las ecuaciones (2.58) y (2.47), el segundo término de la suma se puede desarrollar como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) x B^* dx &= \frac{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) B^* dx \\ &\quad + \frac{\tilde{x}_n \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_{n+1}^1(x), Q_{n+1}^2(x)) \Psi(x) B^* dx, \end{aligned}$$

que por la ecuación (2.27) se anula. Para desarrollar el primer término de la suma se utilizará la ecuación (2.51) y por la expresión (2.58) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) A^* dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[(T_n^1(0), T_n^2(0)) + x \sum_{j=0}^n \frac{1}{\tilde{s}_j} \left(\frac{Q_j^1(x) T_n^1(0)}{T_j^1(0)}, \frac{Q_j^2(x) T_n^2(0)}{T_j^2(0)} \right) \right] \Psi_T(x) A^* dx \\ &= \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} (T_n^1(0), T_n^2(0)) M_{-1} A^* + (T_n^1(0), T_n^2(0)) \left[\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{x}_{-1} & 1 \\ 0 & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} - \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} M_{-1} \right] A^* \\ &\quad + \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \sum_{j=0}^n \frac{1}{\tilde{s}_j} \int_{-1}^1 \left(\frac{Q_j^1(x) T_n^1(0)}{T_j^1(0)}, \frac{Q_j^2(x) T_n^2(0)}{T_j^2(0)} \right) \Psi(x) A^* dx. \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.50), se tiene que

$$\frac{T_n^1(0)}{T_j^1(0)} = \frac{T_n^2(0)}{T_j^2(0)},$$

usando la ecuación (2.27) las integrales de la suma se anulan para $j > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= (T_n^1(0), T_n^2(0)) \frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}_{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{y}_{-1}} \end{pmatrix} A^* \\ &\quad + \frac{T_n^1(0)}{\tilde{y}_0 T_0^1(0)} \int_{-1}^1 (Q_0^1(x), Q_0^2(x)) \Psi(x) A^* dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como $T_0^1(0) = -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0}$, $\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} = \frac{\tilde{x}_{-1} \tilde{s}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0}$ y $\int_{-1}^1 (Q_0^1(x), Q_0^2(x)) \Psi(x) dx = (1, 0)$, sustituyendo A^*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \left[\frac{\tilde{x}_{-1} \tilde{s}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0} \begin{pmatrix} T_n^1(0) & T_n^2(0) \\ \tilde{x}_{-1} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} - \frac{\tilde{s}_0 T_n^1(0)}{\tilde{y}_0 \tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}} (1, 0) \right] A^* \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0} T_n^1(0) \left(1 - \frac{1}{x_{-1}}\right) & \frac{\tilde{x}_{-1} \tilde{s}_0 T_n^2(0)}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0 \tilde{y}_{-1}} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{x}_{-1} \\ -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}}{\tilde{s}_0} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{y}_0} [\tilde{y}_{-1} T_n^1(0) - \tilde{x}_{-1} T_n^2(0)] & \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0} [-\tilde{y}_{-1} T_n^1(0) + \tilde{x}_{-1} T_n^2(0)] \end{pmatrix} \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la relación (2.50).

Siguiendo los mismos pasos para los subíndices negativos, si $n \geq 1$ se tiene que por las ecuaciones (2.47), (2.55), (2.58), (2.59) y la descomposición de $\mathbf{T}_0^*(x)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) x^j dx &= \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) \mathbf{T}_0^*(x) x^{j-1} dx \\ &= \frac{\tilde{y}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right] \\ &\quad + \frac{\tilde{x}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \left[\int_{-1}^1 (Q_{-n}^1(x), Q_{-n}^2(x)) \Psi(x) A^* x^{j-1} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{-1}^1 (Q_{-n}^1(x), Q_{-n}^2(x)) \Psi(x) B^* x^j dx \right]. \end{aligned}$$

Por la ecuación (2.27), el primer término se anula para $j \in \{1, \dots, n\}$, el segundo para $j \in \{0, \dots, n-1\}$, el tercero para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y el cuarto para $j \in \{0, \dots, n-2\}$.

Por lo tanto la integral completa se anula para $j \in \{1, \dots, n-2\}$. Para $j = n-1$ se anulan los tres primeros términos y se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) x^{n-1} dx &= \frac{\tilde{x}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_{-n}^1(x), Q_{-n}^2(x)) \Psi(x) x^{n-2} dx B^* \\ &= \frac{\tilde{x}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} (0, \beta_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tilde{s}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0). \end{aligned}$$

Para $j = 0$, por las ecuaciones (2.59), (2.55) y la descomposición de $\mathbf{T}_0^*(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi_T(x) \mathbf{T}_0^*(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi_T(x) A^* dx + \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi_T(x) x B^* dx. \end{aligned}$$

Por las ecuaciones (2.58), (2.47) y (2.27), el segundo término de la suma se puede desarrollar como

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi_T(x) x B^* dx &= \frac{\tilde{y}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_{-n-1}^1(x), Q_{-n-1}^2(x)) \Psi(x) B^* dx \\ &+ \frac{\tilde{x}_{-n-1} \tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_{-n}^1(x), Q_{-n}^2(x)) \Psi(x) B^* dx = (0, 0). \end{aligned}$$

Entonces, usando ahora las ecuaciones (2.52) y (2.58) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \int_{-1}^1 (T_{-n-1}^1(x), T_{-n-1}^2(x)) \Psi_T(x) A^* dx \\ &= \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} (T_{-n-1}^1(0), T_{-n-1}^2(0)) M_{-1} A^* \\ &+ (T_{-n-1}^1(0), T_{-n-1}^2(0)) \left[\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}_{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{y}_{-1}} \end{pmatrix} - \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} M_{-1} \right] A^* \\ &+ \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\tilde{r}_{-j-1}} \int_{-1}^1 \left(\frac{Q_{-j-1}^1(x) T_{-n-1}^1(0)}{T_{-j-2}^1(0)}, \frac{Q_{-j-1}^2(x) T_{-n-1}^2(0)}{T_{-j-2}^2(0)} \right) \Psi(x) A^* dx, \end{aligned}$$

donde por la ecuación (2.50), se tiene que

$$\frac{T_{-n-1}^1(0)}{T_{-j-2}^1(0)} = \frac{T_{-n-1}^2(0)}{T_{-j-2}^2(0)}.$$

Usando nuevamente la ecuación (2.27) las integrales de la suma se anulan excepto para $j = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= (T_{-n-1}^1(0), T_{-n-1}^2(0)) \frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{x}_{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{y}_{-1}} \end{pmatrix} A^* \\ &+ \frac{\tilde{s}_0 T_{-n-1}^2(0)}{\tilde{y}_0 \tilde{r}_{-1} T_{-2}^2(0)} \int_{-1}^1 (Q_{-1}^1(x), Q_{-1}^2(x)) \Psi(x) A^* dx. \end{aligned}$$

Finalmente, como $T_{-2}^2(0) = -\frac{\tilde{s}_{-1} \tilde{y}_{-1}}{\tilde{r}_{-1}}$, $\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} = \frac{\tilde{x}_{-1} \tilde{s}_0}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_0}$ y $\int_{-1}^1 (Q_{-1}^1(x), Q_{-1}^2(x)) \Psi(x) dx = (0, a_{-1}/c_0) = (0, \tilde{x}_{-1} \tilde{s}_{-1} / \tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1})$ y sustituyendo A^*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_{-n-1}^1(x), \hat{Q}_{-n-1}^2(x)) \hat{\Psi}(x) dx &= \left[\frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} T_{-n-1}^1(0) & T_{-n-1}^2(0) \\ \tilde{x}_{-1} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} - \frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \begin{pmatrix} T_{-n-1}^2(0) \\ 0, \frac{T_{-n-1}^2(0)}{\tilde{y}_{-1}^2} \end{pmatrix} \right] A^* \\ &= \left[\begin{pmatrix} \frac{\hat{a}_{-1} T_{-n-1}^1(0)}{\hat{c}_0 \tilde{x}_{-1}}, \frac{\hat{a}_{-1} T_{-n-1}^2(0)}{\hat{c}_0 \tilde{y}_{-1}} \left(1 - \frac{1}{\tilde{y}_{-1}}\right) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{r}_0 \tilde{x}_{-1}}{\tilde{r}_0 \tilde{y}_{-1}} & \tilde{x}_{-1} \\ -\frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_{-1}} & \tilde{y}_{-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{\hat{a}_{-1} \tilde{r}_0}{\hat{c}_0 \tilde{s}_0} \left[T_{-n-1}^1(0) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_{-n-1}^2(0) \right], \frac{\hat{a}_{-1}}{\hat{c}_0} \left[T_{-n-1}^1(0) - \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_{-1}} T_{-n-1}^2(0) \right] \right) = (0, 0), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la igualdad (2.50).

Para calcular las normas, para $n \in \mathbb{Z}$, se tiene que por las ecuaciones (2.59) y (2.55)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x))^* dx &= \int_{-1}^{-1} (T_n^1(x), T_n^2(x)) \Psi_T(x) (T_n^1(x), T_n^2(x))^* dx \\ &= \int_{-1}^{-1} \left[\frac{x}{\tilde{s}_n} (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} (T_{n-1}^1(x), T_{n-1}^2(x)) \right] \Psi_T(x) (T_n^1(x), T_n^2(x))^* dx \\ &= \frac{1}{\tilde{s}_n} \int_{-1}^{-1} x (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi_T(x) (T_n^1(x), T_n^2(x))^* dx \\ &\quad - \frac{\tilde{r}_n}{\tilde{s}_n} \int_{-1}^{-1} (T_{n-1}^1(x), T_{n-1}^2(x)) \Psi_T(x) (T_n^1(x), T_n^2(x))^* dx, \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se da por la expresión (2.48) y en la última igualdad el segundo

término se anula. Entonces usando las ecuaciones (2.47) y (2.58)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x)) \hat{\Psi}(x) (\hat{Q}_n^1(x), \hat{Q}_n^2(x))^* dx &= \frac{\int_{-1}^1 x(Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi_T(x) (T_n^1(x), T_n^2(x))^* dx}{\tilde{s}_n} \\
&= \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{s}_n \tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) [\tilde{y}_n(Q_n^1(x), Q_n^2(x))^* + \tilde{x}_n(Q_{n+1}^1(x), Q_{n+1}^2(x))^*] dx \\
&= \frac{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}{\tilde{s}_n \tilde{y}_0} \int_{-1}^1 (Q_n^1(x), Q_n^2(x)) \Psi(x) (Q_n^1(x), Q_n^2(x))^* dx \\
&= \frac{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}{\tilde{s}_n \tilde{y}_0} \frac{1}{\pi_n} = \frac{1}{\hat{\pi}_n}.
\end{aligned}$$

La última igualdad, para $n \geq 0$, se cumple porque sustituyendo las ecuaciones (2.45) y (2.46) en (2.57) y usando las ecuaciones (2.9) y (2.10) para obtener la expresión (2.24) se llega a que

$$\hat{\pi}_n = \frac{\hat{a}_0 \dots \hat{a}_{n-1}}{\hat{c}_1 \dots \hat{c}_n} = \frac{\tilde{x}_0 \tilde{s}_1 \dots \tilde{x}_{n-1} \tilde{s}_n}{\tilde{y}_1 \tilde{r}_1 \dots \tilde{y}_n \tilde{r}_n} = \frac{a_0 \dots a_{n-1}}{c_1 \dots c_n} \frac{\tilde{s}_n \tilde{y}_0}{\tilde{y}_n \tilde{s}_0} = \pi_n \frac{\tilde{s}_n \tilde{y}_0}{\tilde{y}_n \tilde{s}_0}.$$

Para los índices negativos se tiene que

$$\hat{\pi}_{-n-1} = \frac{\hat{c}_0 \dots \hat{c}_{-n}}{\hat{a}_{-1} \dots \hat{a}_{-n-1}} = \frac{\tilde{y}_0 \tilde{r}_0 \dots \tilde{y}_{-n} \tilde{r}_{-n}}{\tilde{x}_{-1} \tilde{s}_0 \dots \tilde{x}_{-n-1} \tilde{s}_{-n}} = \frac{c_0 \dots c_{-n}}{a_{-1} \dots a_{-n-1}} \frac{\tilde{s}_{-n-1} \tilde{y}_0}{\tilde{y}_{-n-1} \tilde{s}_0} = \pi_{-n-1} \frac{\tilde{s}_{-n-1} \tilde{y}_0}{\tilde{y}_{-n-1} \tilde{s}_0}.$$

□

En este capítulo se ha mostrado como, a través de la medida espectral asociada a P , se encuentran las medidas espectrales asociadas a \tilde{P} y \hat{P} y con ellas es posible calcular las probabilidades de transición de probabilidades a m pasos usando la fórmula de representación de Karlin-McGregor en la ecuación (2.25).

2.3. Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $\{X_n; n = 0, 1, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición como en la ecuación (2.1) donde

$$a_n = a, \quad b_n = b, \quad c_n = c, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tales que $a+b+c = 1$, $a, c > 0$ y $b \geq 0$. Entonces, las fracciones continuas en las ecuaciones (2.15) y (2.16) se pueden calcular de manera explícita ya que

$$H = 1 - \left| \frac{a}{1} \right| - \left| \frac{c}{H} \right| \quad \text{y} \quad H' = c/H.$$

Por lo tanto

$$H^2 + H(a - c - 1) + c = 0.$$

Como $H' = c/H$, se puede comprobar que

$$H = \frac{1}{2}(1 + c - a + \sqrt{(1 + c - a)^2 - 4c}) \quad \text{y} \quad H' = \frac{1}{2}(1 + c - a - \sqrt{(1 + c - a)^2 - 4c}),$$

donde $a \leq (1 - \sqrt{c})^2$ para asegurar la convergencia. Entonces, por el Teorema 2.2, si se elige al parámetro libre en el rango $H' \leq y_0 \leq H$, existe la factorización UL estocástica. Es importante notar que si se elige a y_0 en los extremos del rango las matrices P_U y P_L serán constantes. En efecto,

$$y_n = H, \quad x_n = 1 - H, \quad s_n = 1 - \frac{c}{H}, \quad r_n = \frac{c}{H}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Lo mismo ocurre cuando $y_0 = H'$. Por otro lado, por el Teorema 2.3, la factorización LU estocástica existirá si $H' \leq \tilde{r}_0 \leq H$. En ambos casos ocurre que si se elige a \tilde{r}_0 en los extremos del rango, la transformación de Darboux es invariante, es decir, $\tilde{P} = P$ (o $\hat{P} = P$).

Usando la Proposición 4.3 de [10] y el método de la transformación de Stieltjes del ejemplo en el Capítulo 1 se encuentra que la matriz espectral de P está dada por

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x - b}{2c} \\ \frac{x - b}{2c} & a/c \end{pmatrix}, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+], \quad \sigma_{\pm} = 1 - (\sqrt{a} \mp \sqrt{c})^2, \quad (2.60)$$

y también es posible obtener M_{-1}

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_- \sigma_+}} & \frac{1}{2c} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{\sigma_- \sigma_+}} \right) \\ \frac{1}{2c} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{\sigma_- \sigma_+}} \right) & \frac{a}{c \sqrt{\sigma_- \sigma_+}} \end{pmatrix}.$$

Para que M_{-1} esté bien definido se requiere que $\sigma_- > 0$, o equivalentemente, $a < (1 - \sqrt{c})^2$ que es la misma condición para la convergencia de H y H' .

Para la factorización UL se tiene que por la ecuación (2.38)

$$\mathbf{S}_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{y_0 - c}{a(y_0 - c)} & \frac{c}{y_0} \\ -\frac{y_0}{y_0(1 - a) - c} & \frac{x(y_0 - c) - ac}{y_0(1 - a) - c} \end{pmatrix},$$

y por la ecuación (2.42)

$$\Psi_S(x) = \frac{y_0}{y_0 - c} \left(y_0 \frac{\Psi(x)}{x} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{y_0 - c}{c} \end{pmatrix} - y_0 M_{-1} \right] \delta_0(x) \right),$$

y después de algunos cálculos se obtiene que por la ecuación (2.43)

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{\pi x \sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}} \left[\tilde{A} + \tilde{B}x + \tilde{C}x^2 \right] + \tilde{M}\delta_0(x),$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{(H' - y_0)(H - y_0)}{s_0 y_0} \begin{pmatrix} 1 & -x_{-1}/y_{-1} \\ -x_{-1}/y_{-1} & (x_{-1}/y_{-1})^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{by_0}{2cy_{-1}} \\ -\frac{by_0}{2cy_{-1}} & \frac{(y_0 b - c(1 - c))x_{-1}^2}{acy_{-1}^2} \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \frac{y_0}{2cy_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \frac{(y_0 - H')(H - y_0)}{s_0 y_0 \sqrt{\sigma_- \sigma_+}} \begin{pmatrix} 1 & -x_{-1}/y_{-1} \\ -x_{-1}/y_{-1} & (x_{-1}/y_{-1})^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de donde se puede ver que si se elige $y_0 = H'$ ó $y_0 = H$, $\tilde{M} = 0_{2 \times 2}$, $\tilde{A} = 0_{2 \times 2}$ y

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{2c} \\ -\frac{b}{2c} & a/c \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \frac{1}{2c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de manera que $\Psi(x) = \tilde{\Psi}(x)$.

Para la factorización LU se tiene que

$$\hat{\Psi}(x) = \frac{1}{\pi x \sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}} \left[\hat{A} + \hat{B}x + \hat{C}x^2 \right] + \hat{M}\delta_0(x),$$

con

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\tilde{r}_0(H' - \tilde{r}_0)(H - \tilde{r}_0)}{\tilde{x}_{-1}\tilde{s}_0^2} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 \\ -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 & (\tilde{s}_0/\tilde{r}_0)^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \frac{\tilde{r}_0\tilde{y}_0}{\tilde{x}_{-1}\tilde{s}_0} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b}{2\tilde{y}_0\tilde{r}_0} \\ -\frac{b}{2\tilde{y}_0\tilde{r}_0} & \frac{\tilde{s}_0}{\tilde{y}_0\tilde{r}_0} \frac{\tilde{x}_{-1}}{\tilde{y}_0\tilde{r}_0} \end{pmatrix}, \\ \hat{C} &= \frac{1}{2\tilde{s}_0\tilde{x}_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \frac{\tilde{r}_0(\tilde{r}_0 - H')(H - \tilde{r}_0)}{\tilde{s}_0^2\tilde{x}_{-1}\sqrt{\sigma_- \sigma_+}} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 \\ -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 & (\tilde{s}_0/\tilde{r}_0)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De nuevo, si $y_0 = H'$ ó $y_0 = H$ se obtiene la matriz espectral original, es decir $\hat{\Psi}(x) = \Psi(x)$.

Finalmente, usando la fórmula de representación de Karlin-McGregor en la ecuación (2.25) es posible obtener las probabilidades de transición a m pasos.

Ejemplo 2

El segundo caso que es posible analizar y aplicar los resultados que se obtienen es una caminata aleatoria en la que hay probabilidades que atraen o repelen el proceso al estado cero. Sea $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ una caminata aleatoria con matriz de transición como en la ecuación (2.1) donde

$$a_n = a, \quad c_n = c, \quad n \geq 0, \quad c_{-n} = a, \quad a_{-n} = c, \quad n \geq 1, \quad b_n = n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

con $a + b + c = 1$, $a, c > 0$ y $b \geq 0$. En esta caminata aleatoria las probabilidades a y c para los estados positivos se intercambian para los estados negativos de manera que si $a < c$ y el proceso está en un estado positivo, éste decrecerá con mayor probabilidad y si el proceso está en un estado negativo, éste crecerá con mayor probabilidad, es decir, el estado cero es atractor. Si $a > c$ el estado cero es repulsor.

La fracción continua en la expresión (2.15) satisface la misma ecuación cuadrática que en el ejemplo anterior, entonces

$$H = \frac{1}{2}(1 + c - a + \sqrt{(1 + c - a)^2 - 4c}),$$

mientras que la fracción continua en la expresión (2.16) es

$$H' = \frac{c}{1 - \frac{c}{H}}.$$

Racionalizando se tiene que

$$H' = \frac{c}{2a}(1 - c + a - \sqrt{(1 + c - a)^2 - 4c}).$$

En este caso, evidencia computacional indica que $H' \leq H$ si

$$\begin{cases} 0 < a \leq (1 - \sqrt{c})^2, & \text{si } 0 < c \leq 1/4, \\ 0 < a \leq \frac{1 - 2c}{2}, & \text{si } 1/4 \leq c < 1. \end{cases}$$

Entonces, por el Teorema 2.2, si $H' \leq y_0 \leq H$ existe la factorización UL estocástica. En este caso hay que notar que si $y_0 = H$, sólomente los estados positivos de la

transformación de Darboux permanecen invariantes, mientras que si $y_0 = H'$ sólo los estados negativos permanecen invariantes. Por otro lado, por el Teorema 2.3, la factorización LU estocástica existe si $H' \leq \tilde{r}_0 \leq H$ y también se tiene invarianza para los estados negativos o para los estados positivos de la transformación de Darboux si \tilde{r}_0 toca los extremos del rango.

Como en el ejemplo anterior, usando la Proposición 4.3 de [10] y el método de la transformación de Stieltjes es posible calcular la matriz espectral asociada a P pero en este caso se tiene una parte absolutamente continua y una parte discreta, es decir, $\Psi(x) = \Psi_c(x) + \Psi_d(x)$ donde

$$\Psi_c(x) = \frac{(a+c)\sqrt{(x-\sigma_-)(\sigma_+-x)}}{2\pi c(1-x)(x-2b+1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-b}{a+c} \\ \frac{x-b}{a+c} & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in [\sigma_-, \sigma_+],$$

con σ_{\pm} definidas en la ecuación (2.60) y

$$\Psi_d(x) = \frac{c-a}{2c} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \delta_{2b-1}(x) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \delta_1(x) \right] \chi_{\{c>a\}},$$

donde χ_A es la función indicadora.

Aquí el cálculo de M_{-1} es más complicado ya que hay que considerar la parte discreta de la matriz espectral, por lo que es posible que al final exista una delta de Dirac en $x = 0$ si $2b - 1 = 0$. Sin embargo, se tiene que

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} \mu_{-1} & \frac{\gamma - b\mu_{-1}}{a+c} \\ \frac{\gamma - b\mu_{-1}}{a+c} & \mu_{-1} \end{pmatrix} + \frac{c-a}{c(2b-1)} \begin{pmatrix} b & -(a+c) \\ -(a+c) & b \end{pmatrix} \chi_{\{c>a\}},$$

donde

$$\mu_{-1} = \frac{1}{2c(2b-1)} ((a+c)\sqrt{\sigma_-\sigma_+} - b|a-c|), \quad \gamma = \begin{cases} 1, & \text{si } c \leq a, \\ a/c, & \text{si } c > a. \end{cases}$$

Para que M_{-1} esté bien definido es necesario que $a < (1 - \sqrt{c})^2$, que es la misma condición para que H y H' sean convergentes. En este caso se tiene que si $b = 1/2$ ($c = 1/2 - a$), M_{-1} se simplifica y resulta ser

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4a}{|4a-1|} & 2 \left(\gamma - \frac{2a}{|4a-1|} \right) \\ 2 \left(\gamma - \frac{2a}{|4a-1|} \right) & \frac{4a}{|4a-1|} \end{pmatrix} + \frac{1-4a}{1-2a} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \chi_{\{a<1/4\}}.$$

Para la factorización UL se tiene que por las ecuaciones (2.42) y (2.43)

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{\sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}}{2\pi cx(1-x)(x-2b+1)} \left[\tilde{A} + \tilde{B}x + \tilde{C}x^2 \right] + \tilde{\mathbf{M}}_0 \delta_0(x) + \tilde{\mathbf{M}}_{2b-1} \delta_{2b-1}(x) + \tilde{\mathbf{M}}_1 \delta_1(x),$$

donde las matrices \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , $\tilde{\mathbf{M}}_0$, $\tilde{\mathbf{M}}_{2b-1}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_1$ están dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{(a+c)(\alpha_+ - y_0)(\alpha_- - y_0)}{s_0 y_0} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x_{-1}}{y_{-1}} \\ -\frac{x_{-1}}{y_{-1}} & \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 2c & \frac{(c(1-2c) - by_0)x_{-1}}{cy_{-1}} \\ \frac{(c(1-2c) - by_0)x_{-1}}{cy_{-1}} & \frac{2(by_0 - c(1-c))x_{-1}^2}{cy_{-1}^2} \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \frac{y_0 s_0 x_{-1}}{cy_{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{(a-c)x_{-1}}{cy_{-1}} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_0 &= \frac{a(\bar{H}' - \bar{H})(y_0 - H')(H - y_0)}{c(2b-1)s_0 y_0} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x_{-1}}{y_{-1}} \\ -\frac{x_{-1}}{y_{-1}} & \left(\frac{x_{-1}}{y_{-1}}\right)^2 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_{2b-1} &= \frac{c-a}{2c(2b-1)} \begin{pmatrix} (s_0 - r_0)^2 & -(s_0 - r_0)(s_{-1} - r_{-1}) \\ -(s_0 - r_0)(s_{-1} - r_{-1}) & (s_{-1} - r_{-1})^2 \end{pmatrix} \chi_{\{c>a\}}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_1 &= \frac{c-a}{2c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \chi_{\{c>a\}}, \end{aligned}$$

$$\text{con } \alpha_{\pm} = \frac{c}{a+c} (1 \pm \sqrt{1 - 2a - 2c}).$$

Si $b = 1/2$, los términos $\tilde{\mathbf{M}}_0$ y $\tilde{\mathbf{M}}_{2b-1}$ de la la transformación de Geronimus no están bien definidos, pero es posible definir a la matriz espectral es términos de la *derivada* de la delta de Dirac en $x = 0$ como sigue

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{\sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}}{2\pi cx^2(1-x)} \left[\tilde{A} + \tilde{B}x + \tilde{C}x^2 \right] + \tilde{\mathbf{M}}_0 \delta_0(x) - \tilde{\mathbf{M}}_0' \delta_0'(x) + \tilde{\mathbf{M}}_1 \delta_1(x),$$

donde $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ y $\tilde{\mathbf{M}}_1$ son las mismas que antes y

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}'_0 &= \lim_{b \rightarrow 1/2} (2b - 1) \tilde{\mathbf{M}}_{2b-1}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_0 &= \eta \frac{(y_0 - H')(H - y_0)}{s_0 y_0} \begin{pmatrix} 1 & -x_{-1}/y_{-1} \\ -x_{-1}/y_{-1} & (x_{-1}/y_{-1})^2 \end{pmatrix}, \\ \eta &= \begin{cases} \frac{1}{2(1-2a)(1-4a)}, & \text{si } a < 1/4, \\ \frac{a}{4a-1}, & \text{si } a > 1/4. \end{cases}\end{aligned}$$

Si $b = 1/2$ y $a = 1/4$, entonces M_{-1} no está bien definido, pero en ese caso se tiene que $c = 1/4$ por lo que se vuelve al Ejemplo 1.

Para la factorización LU se tiene que

$$\hat{\Psi}(x) = \frac{\sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}}{2\pi c x(1-x)(x - 2b + 1)} \left[\hat{A} + \hat{B}x + \hat{C}x^2 \right] + \hat{\mathbf{M}}_0 \delta_0(x) + \hat{\mathbf{M}}_{2b-1} \delta_{2b-1}(x) + \hat{\mathbf{M}}_1 \delta_1(x),$$

donde

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{(a+c)(\beta_+ - \tilde{s}_0)(\beta_- - \tilde{s}_0)}{\tilde{s}_0 \tilde{y}_0} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 \\ -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 & (\tilde{s}_0/\tilde{r}_0)^2 \end{pmatrix}, \quad \beta_{\pm} = \frac{a + c\sqrt{2b-1}}{a+c}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{\tilde{y}_0 \tilde{r}_0} \begin{pmatrix} \frac{2\tilde{r}_0}{\tilde{s}_0} (c(1-c) - p\tilde{r}_0) & (a-c)\tilde{r}_0 - c(1-2c) \\ (a-c)\tilde{r}_0 - c(1-2c) & 2c\tilde{s}_0\tilde{x}_{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \frac{\tilde{y}_{-1}}{\tilde{y}_0} \begin{pmatrix} \frac{a-c}{\tilde{y}_{-1}} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{M}}_0 &= \frac{a(\bar{H}' - \bar{H})(\tilde{r}_0 - H')(H - \tilde{r}_0)}{c(2b-1)\tilde{s}_0\tilde{y}_0} \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 \\ -\tilde{s}_0/\tilde{r}_0 & (\tilde{s}_0/\tilde{r}_0)^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}}_1 = \frac{c-a}{2c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \chi_{\{c>a\}}, \\ \hat{\mathbf{M}}_{2b-1} &= \frac{c-a}{2c(2b-1)} \begin{pmatrix} (\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0)^2 & -(\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0)(\tilde{x}_{-1} - \tilde{y}_{-1}) \\ -(\tilde{x}_0 - \tilde{y}_0)(\tilde{x}_{-1} - \tilde{y}_{-1}) & (\tilde{x}_{-1} - \tilde{y}_{-1})^2 \end{pmatrix} \chi_{\{c>a\}}.\end{aligned}$$

Si $a = c$, se tiene el Ejemplo 1 en el que la transformación de Darboux, en los dos casos, es invariante si $y_0 = H$ y $y_0 = H'$. En este caso ocurre además que si $0 < a < 1/2$ y $a + c = 1/2$ y $b = 1/2$, los valores de las fracciones continuas dependen solamente de a y hay dos casos.

El primer caso es $0 < a \leq 1/4$, en donde $H = H' = 1 - 2a$. Entonces $y_0 = 1 - 2a$ y se tiene que

$$\begin{aligned}y_n &= 1 - 2a, \quad n \geq 0, \quad y_{-n} = 2a, \quad n \geq 1, \\ s_n &= r_n = 1/2, \quad x_n = 1 - y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Las probabilidades de transición resultan ser iguales al caso original excepto en el estado cero (la transformación resulta “casi” invariante) en el que se tiene que

$$\tilde{c}_0 = a, \quad \tilde{a}_0 = a, \quad \tilde{b}_0 = 1 - 2a.$$

La matriz espectral está dada por

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{\sqrt{(x - \sigma_-)(\sigma_+ - x)}}{2\pi cx(1 - x)} \left[\tilde{B} + \tilde{C}x \right] + \tilde{M}_1 \delta_1(x), \quad \sigma_{\pm} = 1/2 \pm \sqrt{2a(1 - 2a)},$$

donde

$$\tilde{B} = (1 - 2a) \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1 - 2a}{2a} \\ -\frac{1 - 2a}{2a} & \frac{(1 - 2a)^2}{4a^2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \frac{1 - 2a}{2a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1 - 4a}{2a} \end{pmatrix},$$

y $\tilde{M}_1 = \frac{1 - 4a}{2(1 - 2a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

El segundo caso es $1/4 < a < 1/2$, donde $H = 1/2$ y $H' = (1 - 2a)/4a$. Entonces

$$(1 - 2a)/4a \leq y_0 \leq 1/2.$$

Aquí, si $y_0 = 1 - 2a$ se obtiene el caso anterior, es decir, las probabilidades de transición permanecen invariantes excepto en el estado 0. Si $y_0 = 1/2$, sólo los estados positivos de la transformación permanecen invariantes, mientras que si $y_0 = (1 - 2a)/4a$, sólo los estados negativos permanecen invariantes.

Finalmente, una vez que se tienen las matrices espectrales, usando la fórmula de representación de Karlin-McGregor es posible calcular las probabilidades de transición a m pasos.

Conclusiones

Los resultados obtenidos en esta tesis están relacionados con caminatas aleatorias cuyo espacio de estados está contenido o es igual a los números enteros \mathbb{Z} . El tema principal se centra en la factorización UL (LU) estocástica de la matriz de transición P y la relación entre las correspondientes medidas espectrales una vez que se aplica la transformación de Darboux discreta, que consiste en invertir el orden de multiplicación de los factores.

En el Capítulo 1 se presentaron resultados obtenidos por M. Domínguez de la Iglesia y F. A. Grünbaum en [10] quienes consideran el espacio de estados $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, de manera que la matriz de transición P asociada a la caminata aleatoria es una matriz tridiagonal semi-infinita. Los autores obtienen una condición para la existencia de la factorización estocástica: en el caso UL debe ocurrir que $0 \leq y_0 \leq H$, donde y_0 es un parámetro libre; mientras que en el caso LU debe ocurrir que $a_0 \leq H$ donde a_0 es la probabilidad de ir del estado 0 al estado 1. Si la factorización existe, entonces será única. En ambos casos H es una fracción continua que se construye alternando las entradas fuera de la diagonal principal de P . Posteriormente se analiza la relación que existe entre P y su transformación de Darboux discreta a través de sus correspondientes medidas espectrales cuya existencia y unicidad está garantizada por el Teorema Espectral. Si ω es la medida espectral asociada a $P = P_U P_L$ y $\tilde{\omega}$ es la medida espectral asociada a la transformación de Darboux $\tilde{P} = P_L P_U$, entonces ocurre que $\tilde{\omega}$ es una transformación de Geronimus de ω , es decir

$$\tilde{\omega}(x) = y_0 \frac{\omega(x)}{x} + M \delta_0(x), \quad \text{con} \quad M = 1 - y_0 \int_{-1}^1 x^{-1} d\omega(x).$$

Por otro lado, considerando la factorización $P = \tilde{P}_L \tilde{P}_U$, si $\hat{\omega}$ es la medida espectral asociada a la transformación de Darboux $\hat{P} = \tilde{P}_U \tilde{P}_L$, entonces ocurre que $\hat{\omega}$ es una transformación de Christoffel de ω , es decir

$$\hat{\omega}(x) = \frac{x\omega(x)}{\tilde{y}_0}.$$

A partir de los resultados obtenidos en [10] surge el interés por obtener resultados similares considerando ahora una caminata aleatoria cuyo espacio de estados es \mathbb{Z} , es decir, la matriz de transición P es una matriz tridiagonal doblemente infinita. Es en el Capítulo 2 donde se desarrollan las ideas anteriores y cuyos resultados principales aparecen en [13]. La primera parte del capítulo se centra en obtener la factorización del tipo UL (LU) y se busca la condición para que dicha factorización sea estocástica. Una diferencia con respecto al caso semi-infinito es que en este caso ninguna de las factorizaciones resulta ser única pues los sistemas de ecuaciones resultantes dependen siempre de un parámetro libre. Más aún, la condición que garantiza la existencia de la factorización estocástica es una extensión del caso semi-infinito: para la factorización UL la condición es $H' \leq y_0 \leq H$; mientras que para la factorización LU la condición es $H' \leq \tilde{r}_0 \leq H$. En ambos casos H' es la fracción continua que se construye alternando las entradas negativas fuera de la diagonal principal de P y H es la misma que para el caso semi-infinito.

La segunda parte del Capítulo 2 trata la relación entre P y su transformación de Darboux. En este caso se habla de matrices espectrales en vez de medidas espectrales ya que, al ser P doblemente infinita, van a existir dos familias linealmente independientes de polinomios asociadas. El Teorema Espectral en este caso garantiza la existencia y unicidad de tres medidas que se acomodan en una matriz conocida como matriz espectral asociada a P . Considerando las similitudes entre las factorizaciones estocásticas UL y LU, no resulta sorprendente encontrar que la relación entre las medidas espectrales sea muy similar. Si $\Psi(x)$ es la matriz espectral asociada a $P = P_U P_L$ y $\tilde{\Psi}(x)$ es la matriz espectral asociada a la transformación de Darboux $\tilde{P} = P_L P_U$, ocurre que

$$\tilde{\Psi}(x) = \mathbf{S}_0(x) \Psi_S(x) \mathbf{S}_0^*(x),$$

con

$$\Psi_S(x) = \frac{y_0}{s_0} \frac{\Psi(x)}{x} + \left[\begin{pmatrix} 1/s_0 & 0 \\ 0 & 1/r_0 \end{pmatrix} - \frac{y_0}{s_0} M_{-1} \right] \delta_0(x), \quad \text{con} \quad M_{-1} = \int_{-1}^1 x^{-1} d\Psi(x),$$

donde $\mathbf{S}_0(x)$ es cierto polinomio matricial de grado 1. Para la factorización LU el resultado es similar, pero cambiando el polinomio matricial $\mathbf{S}_0(x)$. Obsérvese que en este caso la matriz espectral $\tilde{\Psi}$ es una transformación de Christoffel (multiplicando por la izquierda $\mathbf{S}_0(x)$ y por la derecha $\mathbf{S}_0^*(x)$) de una transformación de Geronimus Ψ_S de la matriz espectral original.

Por último se estudiaron dos ejemplos. El primero es el caso en el que todas las probabilidades de transición son constantes y el segundo es el caso en el que se intercambian las probabilidades de crecimiento y decrecimiento para los estados positivos y negativos.

Finalmente, cabe mencionar algunos problemas abiertos que han surgido de la elaboración de esta tesis:

- En este caso, dado que P es estocástica, se tiene que el soporte de la medida o matriz espectral está contenido en el intervalo $[-1, 1]$. Por otro lado se encontró que la condición necesaria para la existencia de una factorización estocástica es $H' \leq y_0 \leq H$. Elegir al parámetro libre dentro de ese rango parece estar relacionado con el hecho de que el soporte de la medida o matriz espectral resultante esté contenido en el intervalo $[0, 1]$, como lo muestran los ejemplos estudiados en esta tesis. La demostración general de este hecho es un problema abierto.
- En general, se puede estudiar la factorización $P = P_U P_L + \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. En esta tesis se estudia el caso $\lambda = 0$, pero se podría estudiar el caso en el que $\lambda = 1$ en donde se agrega una delta de Dirac a la medida espectral en $x = 1$. En ese caso, la matriz \tilde{P} podría describir un proceso recurrente positivo, sin embargo, al hacer la factorización en general no se tiene que P_U y P_L son estocásticas. Este estudio estaría relacionado con los trabajos en [12, 23].
- Las cadenas de nacimiento y muerte son la extensión a tiempo continuo de las caminatas aleatorias. En ese caso también se cuenta con una matriz tridiagonal Q asociada al proceso conocida como *generador infinitesimal* por lo que podría considerarse una factorización $Q = Q_U Q_L$ de manera que Q_U y Q_L tengan una interpretación probabilística. Lo anterior se podría estudiar para los casos \mathbb{N}_0 y \mathbb{Z} , así como los correspondientes estudios de sus transformaciones de Darboux.

Bibliografía

- [1] ALLEN, LINDA J. S. (2010). *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Nueva Jersey: Chapman and Hall.
- [2] CAPASSO, V. Y BAKSTEIN, D. (2015). *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes: Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine*. Cambridge, MA: Birkhäuser Boston.
- [3] DAI, D., ISMAIL, M. E. H. Y WANG, X. (2019). Doubly infinite Jacobi matrices revisited: resolvent and spectral measure. *Advances in Mathematics* **343**, 157–192.
- [4] DETTE, H., REUTHER, B., STUDDEN, W. Y ZYGMUNT, M. (2006). Matrix measures and random walks with a block tridiagonal transition matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **29** (1), 117–142.
- [5] DOBROVOLSKI, S. G. (2000). *Stochastic Climate Theory: Models and Applications*. Berlin: Springer.
- [6] GARDINER C. W. Y ZOLLER P. (2004). *Quantum Noise*. Berlin: Springer Series in Synergetics.
- [7] GRASSMANN, W. K. (1993). Means and variances in Markov reward systems. En Meyer C. D. and Plemmons, R.J. (Ed.) *Linear Algebra, Markov Chains and Queueing Models* (pp. 193–204). The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol 48. New York, NY: Springer.
- [8] GRÜNBAUM, F. A. (2007). Random walks and orthogonal polynomials: some challenges. *Probability, Geometry and Integrable Systems. MSRI Publications* **55**, 241–260.

- [9] GRÜNBAUM, F. A. (2010). An urn model associated with Jacobi polynomials. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science* **5**, 55–63.
- [10] GRÜNBAUM, F. A. Y DE LA IGLESIA, M. D. (2018). Stochastic LU factorizations, Darboux transformations and urn models. *Journal of Applied Probability* **55** (3), 862–886.
- [11] GRÜNBAUM, F. A. Y DE LA IGLESIA, M. D. (2019). Stochastic Darboux transformations for quasi-birth-and-death processes and urn models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **478**, 634–654.
- [12] HEYMAN, D. P. (1995). A decomposition theorem for infinite stochastic matrices. *Journal of Applied Probability* **32** (4), 893–901.
- [13] DE LA IGLESIA, M. D. Y JUAREZ, C. (2019). The spectral matrices associated with the stochastic Darboux transformations of random walks on the integers. Sometido, arXiv:1907.05942 [math.CA].
- [14] SCHOUTENS, W. (2000). *Stochastic processes and orthogonal polynomials*. Lectures Notes in Statistics 146. New York, NY: Springer-Verlag.
- [15] KARLIN, S. Y MCGREGOR, J. (1957). The differential equations of birth and death processes, and the Stieltjes moment problem. *Transactions of the American Mathematical Society* **85** (2), 489–546.
- [16] KARLIN, S. Y MCGREGOR, J. (1957). The classification of birth-and-death processes. *Transactions of the American Mathematical Society* **86** (2), 366–400.
- [17] KARLIN, S. Y MCGREGOR, J. (1959). Random walks. *Illinois Journal of Mathematics* **3** (1), 66–81.
- [18] KARLIN, S. Y TAYLOR, M. H. (1975) *A first course in stochastic processes*. New York, NY: Academic press Inc.
- [19] MASSON, D. R. Y REPKA, J. (1991). Spectral theory of Jacobi matrices in $\ell^2(\mathbb{Z})$ and the $su(1,1)$ Lie algebra. *SIAM Journal in Mathematical Analysis* **22** (4), 1131–1146.
- [20] NORRIS, J. R. (1997) *Markov chains*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- [21] PRUITT, W. E. (1963). Bilateral birth and death processes. *Transactions of the American Mathematical Society* **107** (3), 508–525.
- [22] ROSS, S. M. (1996) *Stochastic processes*. California, CA: Wiley series in probability and statistics.

- [23] VIGON, V. (2013). LU factorization versus Wiener-Hopf factorization for Markov chains. *Acta Applicandae Mathematicae* **128** (1), 1–37.
- [24] WALL, H. S. (1948). *Analytic theory of continued fractions*. New York, NY: D. Van Nostrand Company, Inc.
- [25] YATES, R. D. Y GOODMAN, D. J. (2014). *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*. USA: John Wiley and Sons, Inc.
- [26] ZHEDANOV A. (1997). Rational spectral transformations and orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **85**, 67–86.