Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Caos en gráficas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Matemático

PRESENTA:

Daniel Ornelas Durán

ASESOR:

Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano

Ciudad Universitaria, CDMX, 2019

1. Datos del alumno

Apellido paterno	Ornelas
Apellido materno	Durán
Nombre	Daniel
Teléfono	57 67 10 25
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad o Escuela	Facultad de Ciencias
Carrera	Matemáticas
Número de cuenta	305154815

2. Datos del tutor

Grado	Dr.
Nombre	Jorge Marcos
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	Montejano

3. Datos del sinodal 1

Grado	Dra.
Nombre	Verónica
Apellido paterno	Martínez de la Vega
Apellido materno	y Mansilla

4. Datos del sinodal 2

Grado	Dr.
Nombre	Leobardo
Apellido paterno	Fernández
Apellido materno	Román

4. Datos del sinodal 3

Grado	Dra.
Nombre	Patricia
Apellido paterno	Pellicer
Apellido materno	Covarrubias

6. Datos del sinodal 4

Grado	M. en C.
Nombre	Jorge
Apellido paterno	Moreno
Apellido materno	Montes

7. Datos del trabajo escrito

Título	Caos en gráficas
Número de páginas	135
Año	2019

Dedicado a mi madre y a mi mamá Elisa

Agradecimientos

A mi mamá, por tanto y por todo.

A mi hermano, por ser él y nada más.

A mi padre, por siempre apoyarme y confiar en mí.

A mis abuelas, por cuidarme y educarme.

A mis abuelos, por regañarme y consentirme.

A mis tíos, en especial a Gaby, Moy y Paty, por ser tan buenos conmigo.

A Quetzal, por darme tanto cariño.

A Alan y Lupita, por ser mis primos favoritos.

A mis amigos, en especial a Axel, por hacerme reír siempre.

A mis asesores, por los consejos y la paciencia. En especial a Jorge, por las excelentes clases de Topología.

A mis sinodales, por leer y corregir este trabajo.

Por último, agradezco a los proyectos PAPIIT IN101216 y IN106319 "Teoría de Continuos, Hiperespacios y Sistemas Dinámicos II y III", por la beca otorgada para realizar este trabajo.

Prefacio

En 1975, T.Y. Li y J. Yorke publicaron su célebre artículo "*Period three implies chaos*"([19]), en el cual prueban que toda función continua $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ que tenga un punto periódico de periodo 3, tiene puntos periódicos de todos los periodos. Además, obtienen un subconjunto no numerable de $[0,1]$, en el cual la función se comporta de una manera muy peculiar. Pasa que cada vez que se toman dos puntos distintos de dicho conjunto, las trayectorias bajo f de esos puntos se acercan tanto como se desee, pero también se alejan una cierta distancia. Más aún, las trayectorias de los puntos de dicho conjunto no siguen ninguna órbita periódica. Como ese comportamiento es un tanto extraño, sin dar una definición formal, ellos se refieren a esto diciendo que la función se comportaba de manera "*caótica*" en ese conjunto.

Se dice que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es *caótica en el sentido de Li-Yorke* si y sólo si existe existe $\delta > 0$ y existe $S \subseteq [0,1]$ no numerable tal que para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in S$ se cumple que $\liminf \mid f^n(x) - f^n(y) \mid = 0$ y $\limsup \mid f^n(x) - f^n(y) \mid \geq \delta$. A matemáticos como J. Smítal y M. Kutcha les interesaba encontrar condiciones suficientes o equivalentes para este tipo de caos y descubrieron que basta con un par de puntos que se comporten similar a como se comportan los puntos en el caos de Li-Yorke para que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ sea Li-Yorke caótica. El primer objetivo de este trabajo es dar una prueba de este hecho donde, además, se muestra que el conjunto no numerable es un conjunto de Cantor. El segundo objetivo es estudiar las ideas generales de la generalización de dicho resultado a funciones continuas en gráficas topológicas. El tercer y último objetivo de este trabajo es analizar funciones continuas en espacios métricos infinitos numerables y compactos, y ver si cumplen con una condición análoga a las dos anteriores. Este trabajo se basa fuertemente en los trabajos de Sylvie Ruette y L. Snoha ([26], [25]), y Jan de Vries [11].

El capítulo 1 trata sobre conceptos básicos como por ejemplo: el omega conjunto límite, los puntos aproximadamente periódicos, las órbitas de conjuntos y los pares de Li-Yorke. El segundo capítulo trata sobre la entropía topológica (que tanto movimiento provoca la función en los puntos del intervalo) y las herraduras en mapeos del intervalo. En el capítulo 3 se analiza qué pasa con las funciones continuas del intervalo en el intervalo que tienen entropía topológica cero y un par de Li-Yorke, mientras que en el capítulo 4 se presentan resultados que dicen que basta con que un una función continua del intervalo en el intervalo tenga entropía positiva para que tenga un conjunto de Cantor, el cual vuelve a la función parte de la clase de las funciones Li-Yorke caóticas. El capítulo 5 está dedicado a estudiar las ideas de la generalización del resultado principal del capítulo 4 a funciones continuas en gráficas topológicas. Por último, el sexto capítulo habla de las funciones continuas en espacios métricos infinitos numerables y compactos que tienen un par de Li-Yorke.

Índice

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción a la sección

La notación que utilizaremos es la siguiente:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de números naturales.
2. $\mathbb{Q}$ es el conjunto de números racionales.
3. $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales.
4. $\overline{\mathbb{R}}$ es el conjunto de los reales extendidos.
5. $Card(B)$ denota la cardinalidad de un conjunto B.
6. $\limsup a_n$ denota el límite superior de una sucesión (a_n).
7. $\liminf a_n$ denota el límite interior de una sucesión (a_n).
8. $\exp(a)$ denota a la función exponencial aplicada a un número real a.
9. $\log(a)$ denota al logaritmo natural aplicado a un número real a.
10. $\biguplus_{s\in S} A_s$ denota la unión ajena de una familia $\{A_s\}_{s\in S}$.
11. $\overline{A}^X$ denota la cerradura de A con respecto a un espacio X. Si no hay confusión sobre al espacio con respecto al cual se toma la cerradura, simplemente se escribirá $\overline{A}$.
12. $Int_X(B)$ y $Fr_X(B)$ denotan el interior de B y la frontera de B con respecto a X, respectivamente. Si no hay confusión sobre el espacio con respecto al cual se toman el interior o la frontera, simplemente escribiremos $Int(B)$ y $Fr(B)$.
13. $der_X(B)$ denota al conjunto de los puntos de acumulación de B en X.

1.2. Conceptos básicos

Esta sección está dedicada a dar las definiciones básicas de los sistemas dinámicos discretos.

Definición 1.2.1. *Un **sistema dinámico** se define como un par (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \longrightarrow X$ es una función continua.*

Definición 1.2.2. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $z \in X$. A la sucesión $(f^n(z))_{n\geq 0}$ se le conoce como **la trayectoria de** z **bajo** f. Al conjunto $\{f^n(z) \mid n \geq 0\}$ se le llama **la órbita de** z **bajo** f.*

Definición 1.2.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $z \in X$. Diremos que z es **un punto periódico de** f si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(z) = z$. A $k = \min\{m \in \mathbb{N} \mid f^m(z) = z\}$ se le conoce como **el periodo de** z. En caso de que z sea un punto periódico de f, diremos que **la órbita de** z **bajo** f **es periódica**. Si $k = 1$, diremos que z **es un punto fijo de** f.*

Definición 1.2.4. *Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Decimos que una función continua $\phi : X \longrightarrow Y$ es una **semiconjugación entre** (X, f) **y** (Y, g) si y sólo si ϕ es suprayectiva y el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

*conmuta, es decir, $\phi \circ f = g \circ \phi$. Si resulta que ϕ es un homeomorfismo, entonces diremos que es una **conjugación entre** (X, f) **y** (Y, g). Diremos que dos sistemas dinámicos son **semiconjugados o conjugados** si y sólo si existe una semiconjugación o conjugación entre dichos sistemas dinámicos, respectivamente. Cuando no haya confusión con respecto a X y Y, nos referiremos a estos conceptos diciendo que f y g están **conjugadas o semiconjugadas**, respectivamente.*

1.3. Definiciones y algunas propiedades de los pares de Li-Yorke

En esta sección presentamos y estudiamos algunos resultados referentes al concepto principal de esta tesis : los pares de Li-Yorke.

Definición 1.3.1. *Sean $((X, d), f)$ un sistema dinámico y $\delta > 0$.*

(i) *Diremos que dos puntos $x, y \in X$ son **un par de Li-Yorke módulo** δ **o un par** δ**-revuelto de** f si y sólo si $\limsup\ d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ y $\liminf\ d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.*

(ii) *Diremos que $Z \subseteq X$ es un **conjunto** δ**-revuelto de** f si y sólo si cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in Z$ son un par de Li-Yorke módulo δ de f.*

(iii) *Diremos que $x, y \in X$ son un **par de Li-Yorke o un par revuelto de** f si y sólo si existe una $\varepsilon > 0$ tal que x y y son un par de Li-Yorke módulo ε de f.*

(iv) *Diremos que $Z \subseteq X$ es un* **conjunto revuelto de** *f si y sólo si para cualesquiera dos puntos distintos $z, w \in Z$ se cumple que z y w son un par de Li-Yorke de f.*

Analicemos qué es lo que quiere decir que $x, y \in X$ sean un par de Li-Yorke módulo $\delta > 0$. Si $b = \limsup\ d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta$, entonces existe una sucesión de naturales que es estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq 0}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} d\left(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)\right) = b$. Análogamente, como $0 = \liminf\ d\left(f^n(x), f^n(y)\right)$, existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $(n_j)_{j\geq 0}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} d\left(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)\right) = 0$. Ahora, sea $N \in \mathbb{N}$. Dado que $(n_k)_{k\geq 0}$ es estrictamente creciente, $\lim\limits_{k\to\infty} d\left(f^{n_k}(x), f^{n_k}(y)\right) = b$ y $b > \delta$, podemos encontrar un número natural $m_N > N$ tal que $d\left(f^{m_N}(x), f^{m_N}(y)\right) > \delta$. Esto nos dice que frecuentemente encontraremos puntos de las trayectorias de x y y que estarán alejados al menos $\delta > 0$. Análogamente, dado $K \in \mathbb{N}$, como $(n_j)_{j\geq 0}$ es estrictamente creciente y $\lim\limits_{j\to\infty} d\left(f^{n_j}(x), f^{n_j}(y)\right) = 0$, tenemos que para cualquier $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \leq \delta$, podemos encontrar un natural $m_K > K$ tal que $d\left(f^{m_K}(x), f^{m_K}(y)\right) < \varepsilon$. Lo anterior quiere decir que frecuentemente podemos encontrar puntos de las trayectorias de x y y que estén arbitrariamente cerca, en particular, más cerca que δ.

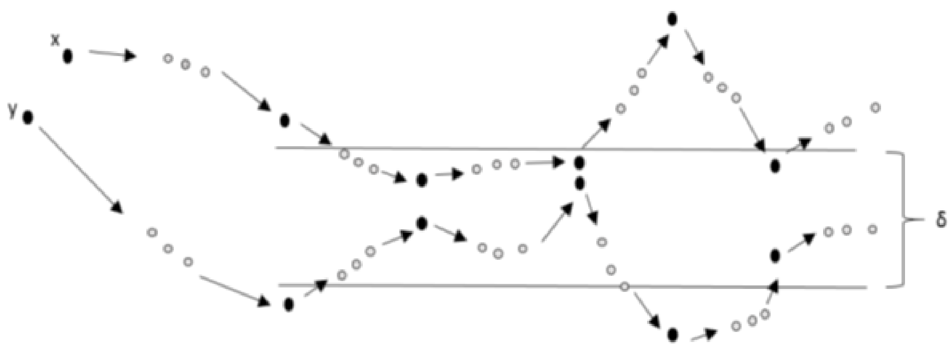

Figura 1.1: Un par de Li-Yorke módulo $\delta > 0$, con $\limsup d\left(f^n(x), f^n(y)\right) > \delta$.

Un hecho que vamos a utilizar, y que puede ser encontrado en [4] p. 81, es que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y $c = \liminf a_n$, entonces las siguientes dos propiedades caracterizan a c:

(i) *Si $r < c$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, se cumple que $r < a_n$.*

(ii) *Si $r > c$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que $N_n \geq n$ y tal que $r > a_{N_n}$.*

Similarmente, si $b = \limsup a_n$, entonces b queda caracterizado por las siguientes propiedades:

(i) *Si $r > b$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple que $r > a_n$.*

(ii) *Si $r < b$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que $N_n \geq n$ y tal que $r < a_{N_n}$.*

Proposición 1.3.2. *Sea $((X, d), f)$ un sistema dinámico.*

(*i*) *Sean $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $(x, y) \in X \times X$ es un par de Li-Yorke módulo δ de f^m, entonces (x, y) también es un par de Li-Yorke módulo δ de f.*

(*ii*) *Sea $\delta > 0$. Si $(x, y) \in X \times X$ es un par de Li-Yorke módulo δ de f, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, $(f^m(x), f^m(y))$ también es un par de Li-Yorke de f módulo δ.*

(*iii*) *Si $(x, y) \in X \times X$ es un par de Li-Yorke de f, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, (x, y) también es un par de Li-Yorke de f^m.*

(*iv*) *Sean $\delta > 0$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $Z \subset X$ es un conjunto δ-revuelto para f^m, entonces Z es un conjunto δ-revuelto para f.*

Demostración:

Veamos (*i*). Sean $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$ y $(x, y) \in X \times X$ un par δ-revuelto. Fijemos $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como

$$\left\{d\left(f^{km}(x), f^{km}(y)\right) \mid k \geq 0\right\} \subseteq \left\{d\left(f^{k}(x), f^{k}(y)\right) \mid k \geq 0\right\},$$

tenemos que

$$\left\{d\left(f^{km}(x), f^{km}(y)\right) \mid k \geq n\right\} \subseteq \left\{d\left(f^{k}(x), f^{k}(y)\right) \mid k \geq n\right\};$$

por lo tanto,

$$\sup_{k \geq n} d\left(f^{km}(x), f^{km}(y)\right) \leq \sup_{k \geq n} d\left(f^{k}(x), f^{k}(y)\right).$$

Dado que n fue arbitraria, concluimos que

$$\delta \leq \limsup d\left(f^{nm}(x), f^{nm}(y)\right) \leq \limsup d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right).$$

Análogamente, sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como

$$\left\{d\left(f^{km}(x), f^{km}(y)\right) \mid k \geq n\right\} \subseteq \left\{d\left(f^{k}(x), f^{k}(y)\right) \mid k \geq n\right\},$$

obtenemos que

$$\inf_{k \geq n} d\left(f^{km}(x), f^{km}(y)\right) \geq \inf_{k \geq n} d\left(f^{k}(x), f^{k}(y)\right) \geq 0.$$

Dado que n fue arbitraria, tenemos que

$$0 = \liminf d\left(f^{nm}(x), f^{nm}(y)\right) \geq \liminf d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) \geq 0;$$

por lo tanto, $\liminf d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) = 0$.

Probemos (*ii*). Sean $\delta > 0$, $m \in \mathbb{N}$ y $(x, y) \in X \times X$ un par δ-revuelto. Notemos que la sucesión de reales $\left(d\left(f^n\left(f^m(x)\right), f^n\left(f^m(y)\right)\right)\right)_{n \geq 0} = \left(d\left(f^n(x), f^n(y)\right)\right)_{n \geq m}$ es una cola de $\left(d\left(f^n(x), f^n(y)\right)\right)_{n \geq m}$; así, tienen los mismos límites superiores e inferiores; por lo tanto,

$$\limsup d\left(f^n\left(f^m(x)\right), f^n\left(f^m(y)\right)\right) \geq \delta \quad \text{y} \quad \liminf d\left(f^n\left(f^m(x)\right), f^n\left(f^m(y)\right)\right) = 0.$$

Comprobemos (iii). Supongamos que $(x,y)\in X\times X$ es un par de Li-Yorke de f. Lo primero que probaremos es que $\liminf d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$. Sea $r>0$ y sea $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Dada $j\in\{1,...,m-1\}$, tenemos que f^j es uniformemente continua; así, existe $\delta_j=\delta_j(r)>0$ tal que para toda $z,w\in X$, si $d(z,w)<\delta_j$, entonces $d(f^j(z),f^j(w))<r$. Ahora, definamos al número $a=\min\{\delta_i,r\mid j\in\{1,...,m-1\}\}>0$.

Por hipótesis, $\liminf d\left(f^n(x),f^n(y)\right)=0<a$, lo cual implica que $\left(d\left(f^n(x),f^n(y)\right)\right)_{n\geq 0}$ tiene una subsucesión convergente a 0; por lo que existe un natural $l\geq(m-1)+mn$ tal que $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)<a$. Tenemos que $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}=\biguplus_{j=0}^{m-1}\{j+km\mid k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$, así que $l=j+km$ para alguna $j\in\{0,...,m-1\}$ y una $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Necesariamente $k\geq n$; ya que si $k<n$, entonces $km<nm$; lo cual implica que $l=j+km<j+nm\leq(m-1)+nm$. Contradiciendo que $l\geq(m-1)+nm$.

Caso (1): Si $j=0$, entonces $d\left(f^{km}(x),f^{km}(y)\right)=d\left(f^l(x),f^l(y)\right)<a\leq r$, donde $k\geq n$.

Caso (2): Si $j\in\{1,...,m-1\}$, entonces podemos tomar $j^*\in\{1,...,m-1\}$ tal que $j+j^*=m$. Dado que $d\left(f^{j+km}(x),f^{j+km}(y)\right)=d\left(f^l(x),f^l(y)\right)<a\leq\delta_{j^*}$, por la continuidad uniforme de f^{j^*}, $d\left(f^{(k+1)m}(x),f^{(k+1)m}(y)\right)=d\left(f^{j^*+j+km}(x),f^{j^*+j+km}(y)\right)<r$, donde $k+1>n$.

Así, como $r>0$ fue arbitraria, podemos concluir que $\liminf d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$.

Afirmación: $\limsup d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)>0$.

Razón: Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\limsup d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$. Como $\liminf d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$. Como (x,y) es par de Li-Yorke de f, debe existir una $\delta>0$ tal que (x,y) es un par de Li-Yorke módulo δ. Ahora, por la continuidad uniforme, para cada $j\in\{1,...,m-1\}$ existe $\delta_j\left(\frac{\delta}{2}\right)>0$ tal que para toda $z,w\in X$, si $d(z,w)<\delta_j$, entonces $d(f^j(z),f^j(w))<\delta$. Sea $a=\min\left\{\frac{\delta}{2},\delta_j\mid j\in\{1,...,m-1\}\right\}>0$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)=0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geq N$, se tiene que $d\left(f^{nm}(x),f^{nm}(y)\right)<a$. Como $\limsup d\left(f^n(x),f^n(y)\right)\geq\delta>\frac{\delta}{2}$, tenemos que existe un natural $l\geq(m-1)+Nm$ tal que $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)>\frac{\delta}{2}$. Debido a que $l\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, resulta que $l=j+km$, para alguna $j\in\{0,...,m-1\}$ y para alguna $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Necesariamente $k\geq N$; ya que si $k<N$, entonces $l=j+km<j+Nm\leq(m-1)+Nm$. Contradiciendo que $l\geq(m-1)+Nm$.

Caso (1): Supongamos que $j=0$. Así, $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)=d\left(f^{km}(x),f^{km}(y)\right)<a\leq\frac{\delta}{2}$, ya que $k\geq N$. Lo anterior contradice el hecho de que $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)>\frac{\delta}{2}$.

Caso (2): Supongamos que $j\in\{1,...,m-1\}$. Como $k\geq N$, tenemos que $d\left(f^{km}(x),f^{km}(y)\right)<a\leq\delta_j$. Por la continuidad uniforme de f^j, $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)=d\left(f^{j+km}(x),f^{j+km}(y)\right)<\frac{\delta}{2}$; lo cual contradice que $d\left(f^l(x),f^l(y)\right)>\frac{\delta}{2}$.

Esta contradicción proviene de suponer que $\limsup d\left(f^{nm}\left(x\right), f^{nm}\left(y\right)\right) = 0$. Con esto queda probada la afirmación.

Tomando $\delta^* = \left(\limsup d\left(f^{nm}\left(x\right), f^{nm}\left(y\right)\right)\right)/2 > 0$, tenemos que (x, y) es un par de Li-Yorke módulo δ^* de f^m, con lo cual, queda probado (iii).

La prueba de (iv) es inmediata de (i). ■

1.4. Omega conjunto límite y puntos aproximadamente periódicos

Dentro del estudio de los sistemas dinámicos discretos es interesante y útil saber cuáles son los puntos que una cierta órbita "visita"más. En esta sección se estudia el conjunto formado por dichos puntos y cuyo nombre es el omega conjunto límite. En esta sección también se analiza el comportamiento de ciertos puntos que, a pesar de no ser periódicos, "siguenüna órbita periódica. Dichos puntos reciben el nombre de puntos aproximadamente periódicos. Además, se estudia la relación que hay entre ambos conceptos.

Definición 1.4.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define el* ***omega conjunto límite de la trayectoria*** $\left(f^n\left(x\right)\right)_{n\geq 0}$ *como*

$$\omega\left(x, f\right) = \left\{z \in X \mid \textit{Existe una subsucesión de } \left(f^n\left(x\right)\right)_{n\geq 0} \textit{ que converge a } z\right\}.$$

Cuando nos refiramos a un omega conjunto límite para f, estamos pensando en $\omega(x, f)$, para alguna $x \in X$.

El siguiente teorema es una resumen de las propiedades más relevantes de un omega conjunto límite, una demostración de éste se encuentra en [26], p. 3.

Teorema 1.4.2. *Sean $\left(\left(X, d\right), f\right)$ un sistema dinámico. Si $x \in X$, entonces se satisfacen los siguientes enunciados:*

(i) $\omega\left(x, f\right) \neq \emptyset$.

(ii) $\omega\left(x, f\right)$ *es un conjunto cerrado en X.*

(iii) $f\left(\omega\left(x, f\right)\right) = \omega\left(x, f\right)$.

(iv) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n\left(\omega\left(x, f\right)\right) = \omega\left(x, f\right)$.*

(v) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\omega\left(f^n(x), f\right) = \omega\left(x, f\right)$.*

(vi) *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in \mathbb{N}$, $\omega\left(f^m(x), f^n\right) = f^m\left(\omega\left(x, f^n\right)\right)$.*

(vii) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\omega\left(x, f\right) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega\left(f^i\left(x\right), f^n\right)$.*

$(viii)$ *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tenemos que si $\omega(x, f)$ es infinito, entonces, $\omega(f^m(x), f^n)$ es infinito.*

Los siguienetes lemas nos dicen como es que se comporta un omega conjunto límite cuya cardinalidad sea finita y como es que se relaciona un omega conjunto límite con un abierto que lo contenga. Una prueba de ellos se puede encontrar en [22], pp. 170 y 171, respectivamente.

Lema 1.4.3. *Sea (X, f) un sistema dinámico, sea $z \in X$ y sea U un abierto en X. Si $\omega(z, f) \subseteq U$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geq N$ se cumple que $f^n(z) \in U$.*

Lema 1.4.4. *Sea (X, f) un sistema dinámico y sea $z \in X$ tal que $\omega(z, f)$ es finito. Entonces existe $w \in \omega(z, f)$ tal que w es un punto periódico de f y $\omega(z, f)$ es la órbita periódica de w bajo f.*

Ahora, daremos una definición de vital importancia para este trabajo, sobre todo para los capítulos 3 y 4.

Definición 1.4.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que $x \in X$ es* ***un punto aproximadamente periódico de*** *f si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$ existe un punto periódico $z \in X$ de f tal que $\limsup d(f^n(x), f^n(z)) \leq \epsilon$.*

Lema 1.4.6. *Sea $((X, d), f)$ un sistema dinámico y sean $x, y \in X$. Si x y y son aproximadamente periódicos, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{ó} \quad \liminf d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Demostración:

Sean $x, y \in X$ puntos aproximadamente periódicos para f. Para probar el lema, supongamos que $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ y demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $z, w \in X$ puntos periódicos de f tales que cumplen que $\limsup d(f^n(x), f^n(z)) \leq \frac{\varepsilon}{20}$ y $\limsup d(f^n(y), f^n(w)) \leq \frac{\varepsilon}{20}$. Así, podemos encontrar un número natural N tal que para todo $n \geq N$ se cumple que $d(f^n(x), f^n(z)) < \frac{\varepsilon}{10}$ y $d(f^n(y), f^n(w)) < \frac{\varepsilon}{10}$. Sea p un múltiplo positivo del periodo de z y w.

Afirmación: Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \{0, ..., p-1\}$, $d\left(f^{M+i}(x), f^{M+i}(y)\right) \leq \frac{\varepsilon}{10}$.

Razón: Como f es uniformemente continua, existe $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{10}\right) > 0$ tal que para todo $s, s^* \in X$, si $d(s, s^*) < \delta$, entonces se cumple que $d(f(s), f(s*)) < \frac{\varepsilon}{10}$. Sea $r_{p-2} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, \delta\right\} > 0$. Así, podemos encontrar una $\delta_{r_{p-2}} > 0$ dada por la continuidad uniforme de f para r_{p-2}. Sea $r_{p-3} = \min\left\{\delta_{r_{p-2}}, \frac{\varepsilon}{10}\right\} > 0$. De nuevo, existe $\delta_{r_{p-3}} > 0$ dada por la continuidad uniforme de f para r_{p-3}. Podemos seguir este proceso hasta obtener que $\delta_{r_{p-(p-1)}} = \delta_{r_1} > 0$ dada por la continuidad uniforme de f para $r_1 = r_{p-(p-1)} > 0$.

Ahora, definimos $r_0 = \text{mín}\left\{\delta_{r_1}, \frac{\varepsilon}{10}\right\} > 0$. Como $\text{lím inf}\, d\left(f^n(x), f^n(y)\right) = 0$, tenemos que existe un natural $M \geq N$ tal que $d\left(f^M(x), f^M(y)\right) < r_0 \leq \delta_{r_1}$. Por la definición de δ_{r_1},

$$d\left(f^{M+1}(x), f^{M+1}(y)\right) < r_1 \leq \delta_{r_2},$$

y por la definición de δ_{r_2} tenemos que

$$d\left(f^{M+2}(x), f^{M+2}(y)\right) < r_2 \leq \delta_{r_3}.$$

Seguimos este proceso recursivo hasta obtener que

$$d\left(f^{M+p-2}(x), f^{M+p-2}(y)\right) < r_{p-2} \leq \delta.$$

Por la definición de δ, concluimos que

$$d\left(f^{M+p-1}(x), f^{M+p-1}(y)\right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

En resumen,

$$d\left(f^{M+p-1}(x), f^{M+p-1}(y)\right) < \frac{\varepsilon}{10},$$

y tenemos que para cada $i \in \{0, ..., p-2\}$ se cumple que

$$d\left(f^{M+i}(x), f^{M+i}(y)\right) < r_i \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

con lo cual queda probada la afirmación.

Sea $n \geq M$. Como $n - M \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \biguplus_{j=0}^{p-1} \{j + mp \mid m \geq 0\}$, resulta que existen únicos $j \in \{0, ..., p-1\}$ y $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $n - M = j + lp$, es decir, $n = M + j + lp$. Así, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \leq{} & d\left(f^n(x), f^n(z)\right) + d\left(f^n(z), f^{M+j}(x)\right) + d\left(f^{M+j}(x), f^{M+j}(y)\right) \\ & + d\left(f^{M+j}(y), f^n(w)\right) + d\left(f^n(w), f^n(y)\right). \end{aligned}$$

Como $n \geq M \geq N$, tenemos que

$$d\left(f^n(x), f^n(z)\right) < \frac{\varepsilon}{10} \text{ y } d\left(f^n(y), f^n(w)\right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

También tenemos que

$$d\left(f^{M+j}(x), f^n(z)\right) = d\left(f^{M+j}(x), f^{M+j}\left(f^{lp}(z)\right)\right) = d\left(f^{M+j}(x), f^{M+j}(z)\right) < \frac{\varepsilon}{10},$$

ya que p es múltiplo del periodo de z. De manera similar, como p es múltiplo del periodo de w, resulta que

$$d\left(f^{M+j}(y), f^n(w)\right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Además, por la afirmación probada anteriormente,

$$d\left(f^{M+j}(x), f^{M+j}(y)\right) < \frac{\varepsilon}{10}.$$

Esto implica que

$$d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) < \frac{5\varepsilon}{10} < \varepsilon,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^{n}(x), f^{n}(y)\right) = 0.$$

■

Proposición 1.4.7. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $x \in X$ es tal que $\omega(x, f)$ es finito, entonces x es aproximadamente periódico.*

Demostración:

Sea $x \in X$ tal que $\omega(x, f)$ es finito y sea $\epsilon > 0$. Por el Lema 1.4.4, $\omega(x, f)$ es una órbita periódica, es decir, $\omega(x, f) = \{x_1, ..., x_m\}$, donde x_1 es un punto periódico de f de periodo m.

Supongamos que $m = 1$. Por el Lema 1.4.3, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x) \in B(x_1, \epsilon)$, es decir, si $n \geq N$, entonces $d(f^n(x), x_1) < \epsilon$. Dado que x_1 es punto fijo de f, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_1) = x_1$; con lo cual podemos concluir que si $n \geq N$, entonces $d(f^n(x), f^n(x_1)) < \epsilon$. En virtud de lo anterior, obtenemos que $\limsup\ d(f^n(x), f^n(x_1)) \leq \epsilon$.

Supongamos que $m > 1$. Dado que X es un espacio métrico, entonces podemos encontrar una $\delta_1 > 0$ tal que para cada $w, y \in \omega(x, f)$, donde $w \neq y$, se cumpla que $\overline{B(w, \delta_1)} \cap \overline{B(y, \delta_1)} = \emptyset$. Sea $k = \min\{\epsilon, \delta_1\} > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta_k > 0$ tal que para todo $s, z \in X$, si $d(s, z) < \delta_k$, entonces $d(f(s), f(z)) < k$. Ahora, sea $r = \min\{k, \delta_k\} > 0$. Por construcción, $\omega(x, f) \subseteq \biguplus_{i=1}^{m} B(x_i, r)$, y como $\biguplus_{i=1}^{m} B(x_i, r)$ es abierto en X, por el Lema 1.4.3, existe una $N \in \mathbb{N}$ múltiplo de m tal que si $n \geq N$, entonces $f^n(x) \in \biguplus_{i=1}^{m} B(x_i, r)$. Esto implica que existe una única $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $f^N(x) \in B(x_j, r)$.

Afirmación: Para todo $s \in \mathbb{N}$ se cumple que $d\left(f^{N+s}(x), f^s(x_j)\right) < r$.

Razón: Por inducción sobre s. Sea $s = 1$. Tenemos que $d\left(f^N(x), x_j\right) < r \leq \delta_k$, y debido a la definición de δ_k, podemos deducir que

$$d\left(f^{N+1}(x), f(x_j)\right) < k;$$

esto quiere decir que

$$f^{N+1}(x) \in B(f(x_j), k).$$

Como $\omega(x, f)$ es una órbita periódica, $f(x_j) \in \omega(x, f)$ y, dado que $k \leq \delta_1$, para cada $w \in \omega(x, f) - \{f(x_j)\}$ se cumple que $B(f(x_j), k) \cap B(w, k) = \emptyset$. Esto implica que para cada $w \in \omega(x, f) - \{f(x_j)\}$,

$f^{N+1}(x) \notin B(w,k)$. Como $r \leq k$, deducimos que para cada $w \in \omega(x,f) - \{f(x_j)\}$,

$$f^{N+1}(x) \notin B(w,r),$$

y ya que $f^{N+1}(x) \in \biguplus_{i=1}^{m} B(x_i,r)$, obtenemos que

$$f^{N+1}(x) \in B(f(x_j),r),$$

es decir,

$$d\left(f^{N+1}(x), f(x_j)\right) < r.$$

Suponga cierto para $s = l$, es decir, $d\left(f^{N+l}(x), f^{l}(x_j)\right) < r$. Como $r \leq \delta_k$, por la continuidad uniforme, $d\left(f^{N+l+1}(x), f^{l+1}(x_j)\right) < k$; así,

$$f^{N+l+1}(x) \in B\left(f^{l+1}(x_j), k\right).$$

Como $\omega(x,f)$ es una órbita periódica, concluimos que $f^{l+1}(x_j) \in \omega(x,f)$ y, como $k \leq \delta_1$, para cada $w \in \omega(x,f) - \left\{f^{l+1}(x_j)\right\}$,

$$f^{N+l+1}(x) \notin B(w,k).$$

Además, como $r \leq k$, resulta que $f^{N+l+1}(x) \notin B(w,r)$. Dado que $f^{N+l+1}(x) \in \biguplus_{i=1}^{m} B(x_i,r)$, tenemos que

$$f^{N+l+1}(x) \in B\left(f^{l+1}(x_j), r\right),$$

es decir,

$$d\left(f^{N+l+1}(x), f^{l+1}(x_j)\right) < r,$$

con lo cual probamos la afirmación.

Como $x_j \in \omega(x,f)$, x_j es un punto periódico de periodo m, y dado que N es un múltiplo de m, $f^{N}(x_j) = x_j$; así, por la afirmación, para toda $s \in \mathbb{N}$,

$$d\left(f^{N+s}(x), f^{N+s}(x_j)\right) < r.$$

Es decir, para todo $n \geq N$ tenemos que

$$d(f^{n}(x), f^{n}(x_j)) < r.$$

Por lo tanto,

$$\limsup d(f^{n}(x), f^{n}(x_j)) \leq r \leq k \leq \epsilon.$$

■

Lema 1.4.8. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si $z \in X$, entonces para todo D subconjunto no vacío, cerrado y propio de $\omega(z,f)$ se cumple que*

$$\overline{f(\omega(z,f) - D)} \cap D \neq \emptyset.$$

Demostración:

Supongamos por el contrario que existe $D \subseteq \omega(z,f)$ no vacío, propio y cerrado tal que

$$\overline{f(\omega(z,f)-D)} \cap D = \emptyset.$$

Dado que X es métrico, podemos encontrar dos abiertos en X, digamos V y U tales que $\left(\overline{U} \cap \overline{V}\right) = \emptyset$, $D \subseteq U$ y $\overline{f(\omega(z,f)-D)} \subseteq V$. Sea $W = f^{-1}(V)$, como $f : X \to X$ es continua, cerrada y $f(W) = f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V$, tenemos que

$$f\left(\overline{W}\right) = \overline{f(W)} \subseteq \overline{V};$$

lo cual implica que

$$\overline{f(W)} \cap \overline{U} = \emptyset.$$

Por otro lado

$$\omega(z,f) - D \subseteq f^{-1}(f(\omega(z,f)-D)) \subseteq f^{-1}\left(\overline{f(\omega(z,f)-D)}\right) \subseteq f^{-1}(V) = W,$$

por lo tanto,

$$\omega(z,f) = (\omega(z,f)-D) \cup D \subseteq W \cup U.$$

Como f es una función continua, W es un abierto en X, así, $W \cup U$ es un abierto en X que contiene a $\omega(z,f)$; consecuentemente, aplicando el Lema 1.4.3, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n \geq N$ se tiene que $f^n(z) \in W \cup U$. Además, como $U \cap \omega(z,f) \neq \emptyset$ y $W \cap \omega(z,f) \neq \emptyset$, los puntos de la trayectoria $(f^n(z))_{n\geq 0}$ no solamente se quedan eventualmente en $U \cup W$, si no que también se van intercambiado constantemente entre U y W; así, podemos encontrar una sucesión de naturales $(n_i)_{i\geq 1}$ estrictamente creciente tal que $f^{n_i}(z) \in W$ y $f^{n_i+1}(z) \in U$. Como $(f^{n_i}(z))_{i\geq 1}$ tiene una subsucesión convergente, supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe $y \in \overline{W}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(z) = y$. Por la continuidad de f, $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i+1}(z) = f(y)$, donde $f(y) \in \overline{U}$. Por lo tanto,

$$f(y) \in f\left(\overline{W}\right) \cap \overline{U} = \overline{f(W)} \cap \overline{U};$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que $\overline{f(W)}$ y $\overline{U}$ son ajenos. ■

Proposición 1.4.9. *Sea (X,f) un sistema dinámico. Si $x \in X$ es tal que $\omega(x,f)$ es infinito, entonces ningún punto aislado de $\omega(x,f)$ es un punto periódico de f.*

Demostración:

Supongamos por el contrario que existe $x \in X$ tal que $\omega(x,f)$ es infinito y que tenemos un punto $y \in \omega(x,f)$ que es un punto aislado en $\omega(x,f)$, que a su vez es un punto periódico para f de periodo $m \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (vii), $y \in \bigcup_{i=0}^{m-1} \omega\left(f^i(x), f^m\right)$, por lo tanto, existe $j \in \{0, ..., m-1\}$ tal que $y \in \omega\left(f^j(x), f^m\right)$. Como y es un punto aislado de $\omega(x,f)$, existe un abierto U de X tal que $U \cap \omega(x,f) = \{y\}$. Por lo anterior,

$$U \cap \omega\left(f^j(x), f^m\right) = \{y\}.$$

Así, y es un punto aislado de $\omega\left(f^j(x), f^m\right)$.

Afirmación: $\omega\left(f^j(x), f^m\right) = \{y\}$.

Razón: Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $\omega\left(f^j(x), f^m\right) \neq \{y\}$. Como y es aislado en $\omega\left(f^j(x), f^m\right)$,

$$y \notin der_X\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right)\right);$$

esto implica que

$$der_X\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right) \subseteq der_X\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right)\right) \subseteq \omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}.$$

Lo anterior nos dice que $\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}$ es un cerrado dado que contiene a todos sus puntos de acumulación, y ya que $\omega\left(f^j(x), f^m\right) \neq \{y\}$, concluimos que

$$\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\} \neq \emptyset.$$

Ahora, aplicando el Lema 1.4.8 a f^m y a $\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}$, tenemos que

$$\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right) \cap \overline{f^m\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right)\right)} \neq \emptyset;$$

lo cual implica que

$$\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right) \cap \overline{f^m(\{y\})} \neq \emptyset;$$

y como $f^m(y) = y$, tenemos que

$$\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right) \cap \overline{\{y\}} \neq \emptyset,$$

es decir,

$$\left(\omega\left(f^j(x), f^m\right) - \{y\}\right) \cap \{y\} \neq \emptyset;$$

lo cual es una clara contradicción. Con esto queda demostrada la afirmación.

Esta afirmación nos lleva a una contradicción con el supuesto de que $\omega(x, f)$ sea infinito, ya que por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega\left(f^j(x), f^m\right)$ es infinito. ■

1.5. Las órbitas de los conjuntos conexos

Definición 1.5.1. *Sea (X, f) un sistema dinámico y sea $A \subseteq X$. Al conjunto $Orb_f(A) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(A)$ se le conoce como* ***la órbita de A bajo f.***

Proposición 1.5.2. Sean (X, f) un sistema dinámico, $z \in X$ y $H \subseteq X$. Los siguientes enunciados se cumplen:

(i) $Orb_f(\{z\}) = \{f^n(z) \mid n \geq 0\}$;

(ii) para toda $s \in \mathbb{N}$, $f^s(Orb_f(H)) \subseteq Orb_f(H)$;

(iii) para toda $s \in \mathbb{N}$, $Orb_f(H) = \bigcup_{i=0}^{s-1} Orb_{f^s}(f^i(H))$.

Demostración:

La prueba de (i) es inmediata de la definición. Para probar (ii), tomemos un número natural s. Tenemos que

$$f^s(Orb_f(H)) = f^s(\bigcup_{n\geq 0} f^n(H)) = \bigcup_{n\geq 0} f^{n+s}(H) = \bigcup_{n\geq s} f^n(H) \subseteq \bigcup_{n\geq 0} f^n(H) = Orb_f(H).$$

Para ver (iii), tomemos un entero no negativo $j \in \{0, \ldots, s-1\}$. Por (ii), $f^j(H) \subseteq Orb_f(H)$, entonces para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f^{ns}(f^j(H)) \subseteq f^{ns}(Orb_f(H)) \subseteq Orb_f(H);$$

lo cual implica que

$$Orb_{f^s}(f^j(H)) \subseteq Orb_f(H).$$

Dado que j fue arbitrario,

$$\bigcup_{i=0}^{s-1} Orb_{f^s}(f^i(H)) \subseteq Orb_f(H).$$

Ahora, sea $z \in Orb_f(H)$, así, existe $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $z \in f^m(H)$. Como $\mathbb{N}\cup\{0\} = \biguplus_{i=0}^{s-1} \{i + sp \mid p \geq 0\}$, existen $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ y $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $m = i + sp$. Así,

$$z \in f^m(H) = f^{sp}(f^i(H));$$

lo que implica que

$$z \in Orb_{f^s}(f^i(H)).$$

Concluimos que

$$z \in \bigcup_{i=0}^{s-1} Orb_{f^s}(f^i(H))$$

y, por lo tanto,

$$Orb_f(H) \subseteq \bigcup_{i=0}^{s-1} Orb_{f^s}(f^i(H)).$$

■

Lema 1.5.3. *Sean (X, f) un sistema dinámico, H un subconjunto de X y $E = Orb_f(H)$. Si H es conexo, entonces uno y solamente uno de los siguientes enunciados se cumple:*

(i) *Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^k(H)$ es componente conexa de E.*

(ii) *Existen $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que las componentes conexas de E son:*

- (a) *para toda $j \in \{0, ..., p-1\}$, $E_j = \bigcup_{n\geq 0} f^{j+np}(H)$, en el caso $m = 0$; y*
- (b) *para toda $k \in \{0, ..., m-1\}$, $f^k(H)$, y para toda $j \in \{0, ..., p-1\}$, $E_j = \bigcup_{n\geq 0} f^{m+j+np}(H)$, en el caso $m \geq 1$.*

Demostración:

Sea S el conjunto de enteros no negativos m tales que para alguna $i \in \mathbb{N}$, $f^m(H)$ y $f^{m+i}(H)$ están contenidos en la misma componente conexa de E. Tenemos los siguientes casos:

Caso (1). Supongamos que $S = \emptyset$. Sean a y b enteros no negativos distintos y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a < b$. Dado que $S = \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$, $f^a(H)$ y $f^{a+i}(H)$ están contenidos en componentes conexas distintas de E; en particular, $f^a(H)$ y $f^b(H)$ están contenidas en distintas componentes conexas de E. Esto implica que $f^a(H) \cap f^b(H) = \emptyset$. Por lo tanto, $E = \biguplus_{k \geq 0} f^k(H)$. Como para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^k(H)$ es conexo, resulta que $f^k(H)$ es componente conexa de E, es decir, se cumple (i).

Caso (2). Supongamos que $S \neq \emptyset$. Así, sea $m = \min S$. Si pasara que $m \geq 1$ y que para algunos $k \in \{0, ..., m-1\}$ y $r \in (\mathbb{N} \cup \{0\} - \{k\})$, $f^k(H) \cap f^r(H) \neq \emptyset$, tendríamos que $f^k(H)$ y $f^r(H)$ se encuentran contenidos en la misma componente conexa de E. Si $k < r$, entonces tenemos una contradicción con la definición de m, ya que $k < m$. Análogamente, si $r < k$, entonces tenemos una contradicción con la definición de m, ya que $r < k < m$. Por lo tanto, para cada $k \in \{0, ..., m-1\}$ y para cada $r \in (\mathbb{N} \cup \{0\} - \{k\})$,

$$f^k(H) \cap f^r(H) = \emptyset.$$

Esto implica que

$$E = \left(\biguplus_{k=0}^{m-1} f^k(H) \right) \biguplus E^*,$$

donde $E^* = \bigcup_{k \geq m} f^k(H)$. Concluimos que para cada $k \in \{0, ..., m-1\}$, $f^k(H)$ es componente conexa de E.

Para comenzar el caso cuando $m = 0$, basta determinar las componentes conexas de E^* ya que

$$E^* = \bigcup_{k \geq m} f^k(H) = \bigcup_{k \geq 0} f^k(H) = Orb_f(H) = E.$$

Análogamente, por el párrafo anterior, para terminar con el caso $m \geq 1$, es suficiente con determinar las componentes conexas de E^*. De aquí en adelante, cada vez que nos refiramos a componentes conexas, son componentes de E^*. Sea p el mínimo número natural para el cual $f^m(H)$ y $f^{m+p}(H)$ están en la misma componente conexa Z. Sea $i \in \mathbb{N}$, así,

$$f^{m+i}(H) \subseteq f^i(Z) \text{ y } f^{m+p+i}(H) \subseteq f^i(Z)$$

. Como Z es conexo, $f^i(Z)$ es conexo. Ahora, por la Proposición 1.5.2 inciso (ii), $f^i(E^*) \subseteq E^*$; con lo cual $f^i(Z) \subseteq E^*$. De lo anterior, podemos deducir que $f^i(Z)$ está contenida en una componente conexa de E^*, digamos Z^*. Esto implica que

$$f^{m+i}(H) \subseteq Z^* \text{ y } f^{m+p+i}(H) \subseteq Z^*.$$

Con esto hemos probado la afirmación siguiente:

Afirmación 1: Para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{m+i}(H)$ y $f^{m+p+i}(H)$ están en la misma componente conexa de E^*.

Afirmación 2: Para cada $j \in \{0,...,p-1\}$, $E_j = \bigcup_{n\geq 0} f^{m+j+np}(H)$ está contenido en una componente conexa de E^*.

Razón: Sea $j \in \{0,...,p-1\}$. Por la Afirmación 1, $f^{m+j}(H)$ y $f^{m+j+p}(H)$ están en la misma componente conexa. Supongamos que hay un $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para todo $n \in \{0,...,l\}$, los conjuntos $f^{m+j+np}(H)$ están en la misma componente conexa. Por la Afirmación 1,

$$f^{m+j+lp}(H) \text{ y } f^{m+j+lp+p}(H) = f^{m+j+(l+1)p}(H)$$

están en la misma componente. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, los conjuntos $f^{m+j+np}(H)$ están en la misma componente; por lo cual E_j está contenido en dicha componente conexa. Con esto queda probada esta afirmación.

Por otra parte, notemos que $E^* = \bigcup_{j=0}^{p-1} E_j$. La familia $D = \{E_j\}_{j=0}^{p}$ tiene p integrantes (contando repeticiones) y, por la Afirmación 2, cada integrante de D está contenido en alguna componente conexa. Esto implica que E^* tiene r componentes, donde r es un natural tal que $1 \leq r \leq p$. Lo anterior también nos dice que cada componente conexa de E^* contiene una cantidad infinita de conjuntos $f^s(H)$, donde $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Afirmación 3: Si $i \geq m$, entonces $f^i(H), ..., f^{i+r-1}(H)$ están contenidos en distintas componentes conexas de E^*.

Razón: Supongamos que la afirmación no es cierta, es decir, supongamos que existen $g, l \in \mathbb{N}$ tales que $i \leq g < l \leq i+r-1$, para los cuales $f^g(H)$ y $f^l(H)$ están contenidos en la misma componente conexa, digamos Z. Sea $e \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $g \leq e < l$, sea $d = l - g$ y sea $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $e = g + q$. Por lo supuesto, $f^{g+q}(H), f^{l+q}(H) \subseteq f^q(Z)$. Tenemos que $f^q(Z)$ es conexo en E^*, por lo tanto, está contenido en una componente conexa. Así, $f^{g+q}(H)$ y $f^{l+q}(H)$ están contenidos en una misma componente conexa, es decir, $f^e(H)$ y $f^{l-g+e}(H) = f^{e+d}(H)$ están contenidos en una misma componente.

Ahora, supongamos que algún $c \in \mathbb{N}$ cumple que para todo $t \in \{0,...,c\}$, los conjuntos $f^{e+td}(H)$ están en la misma componente conexa, digamos Z^*. Entonces $f^{e+(c-1)d+d}(H), f^{e+cd+d}(H) \subseteq f^d(Z^*)$, es decir, $f^{e+cd}(H), f^{e+(c+1)d}(H) \subseteq f^d(Z^*)$. Como $f^d(Z^*)$ está contenido en una componente conexa, $f^{e+cd}(H), f^{e+(c+1)d}(H)$ están contenidos en la misma componente conexa. Por lo tanto, por inducción, para todo $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ los conjuntos $f^{e+td}(H)$ están en la misma componente conexa; de aquí tenemos que $E_e = \bigcup_{t\geq 0} f^{e+td}(H)$ está en una componente conexa. Por otra parte, tenemos que la familia dada por

$B = \{E_e\}_{e=g}^{l}$ tiene $l-g$ integrantes (contando repeticiones), en consecuencia los conjuntos de B están contenidos en a lo más $l-g$ componentes conexas. Sea $M = \{g, g+1, g+2, g+3, ...\}$ y sea $b \in M$. Así, $b = g + x$, donde $x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \biguplus_{a=0}^{d-1} \{a + nd \ \mid \ t \geq 0\},$$

$x = a + td$ para alguna $a \in \{0, ..., d-1\}$ y alguna $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, es decir,

$$b = g + a + td.$$

Por otro lado

$$g \leq g + a < g + d = l,$$

esto quiere decir que

$$b = e + td,$$

donde $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $g \leq e = g + a < l$. Esto implica que

$$f^b(H) \subseteq E_e \in B.$$

Con lo anterior, podemos concluir que todos los conjuntos $f^b(H)$, donde $b \in M$, están contenidos en a lo más $l-g$ componentes conexas.

Como $l \leq i + r - 1$ e $i \leq g$, tenemos que $l - g \leq i + r - 1 - g$ e $i - g \leq 0$; lo cual implica que

$$l - g \leq r - 1 < r.$$

Por lo tanto,

$$0 < r - (l - g).$$

Así, hay $r - (l-g)$ componentes conexas de E^* que solamente pueden contener a $f^b(H)$, donde $b \in (\mathbb{N} \cup \{0\} - M) = \{0, ..., g-1\}$. Esto contradice el hecho de que cada componente conexa de E^* contiene una cantidad infinita de conjuntos $f^s(H)$, donde $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Con esto queda probada la Afirmación 3.

De la Afirmación 3, tomando $i = m$ tenemos que $f^m(H), ..., f^{m+r-1}(H)$ están en distintas componentes conexas. De nuevo, por la Afirmación 3, tomando $i = m+1$ tenemos que $f^{m+1}(H), ..., f^{m+r}(H)$ están contenidas en distintas componentes conexas. Esto implica que $f^m(H)$ y $f^{m+r}(H)$ están en componentes distintas a las $r-1$ componentes que contienen a $f^{m+1}(H), ..., f^{m+r-1}(H)$. Dado que hay r componentes de E^*, concluimos que $f^m(H)$ y $f^{m+r}(H)$ están en la misma componente conexa; así, por la definición de p, $p \leq r$. Con esto concluimos que $p = r$, es decir, E^* tiene p componentes conexas.

De lo anterior, tenemos que $f^{m}(H), ..., f^{m+p-1}(H)$ están en componentes conexas distintas. Y dado que para cada $j \in \{0, ..., p-1\}$, E_j y $f^{m+j}(H)$ están en la misma componente, $E_0, ..., E_{p-1}$ están contenidas en diferentes componentes conexas, es decir, si $Z_0, ..., Z_{p-1}$ son las p componentes conexas de E^*, entonces para todo $j \in \{0, ..., p-1\}$, $E_j \subseteq Z_j$. Además, si $j \in \{0, ..., p-1\}$, entonces

$$Z_j = Z_j \cap E^* = Z_j \cap \left(\biguplus_{j=0}^{p-1} E_j \right) = Z_j \cap E_j \subseteq E_j,$$

es decir, para todo $j \in \{0, ..., p-1\}$, E_j es componente conexa de E^*. Así, m y p cumplen con (ii). ■

Corolario 1.5.4. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $H \subseteq X$ conexo y $E = Orb_f(H)$. Si existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $H \cap f^n(H) \neq \emptyset$, entonces existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $E = \biguplus_{j=0}^{p-1} E_j$, donde para cada $j \in \{0, ..., p-1\}$, $E_j = \bigcup_{k \geq 0} f^{j+kp}(H)$ es componente conexa de E. Más aún, se cumple que para cada $j \in \{0, ..., p-2\}$, $f(E_j) = E_{j+1}$ y $f(E_{p-1}) \subseteq E_0$.*

Demostración:
Si existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $H \cap f^n(H) \neq \emptyset$, por el lema anterior, tenemos que se cumple el caso (ii). Más aún, siguiendo la notación de la prueba anterior $m = \text{mín}\, S = 0$. Por lo tanto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $E = \biguplus_{j=0}^{p-1} E_j$, donde para cada $j \in \{0, ..., p-1\}$, $E_j = \bigcup_{k \geq 0} f^{j+kp}(H)$ es componente conexa de E. Además, si $j \in \{0, ..., p-2\}$, entonces

$$f(E_j) = f\left(\bigcup_{k \geq 0} f^{j+kp}(H) \right) = \bigcup_{k \geq 0} f^{j+1+kp}(H) = E_{j+1};$$

y si $j = p-1$, entonces

$$f(E_{p-1}) = f\left(\bigcup_{k \geq 0} f^{p-1+kp}(H) \right) = \bigcup_{k \geq 0} f^{p+kp}(H) = \bigcup_{k \geq 1} f^{kp}(H) \subseteq \bigcup_{k \geq 0} f^{kp}(H) = E_0.$$

■

Corolario 1.5.5. *Sean (X, f) un sistema dinámico, $H \subseteq X$ conexo y $E = Orb_f(H)$. Si existe una $n \in \mathbb{N}$ tal que $H \cap f^n(H) \neq \emptyset$, entonces existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{E} = \biguplus_{j=0}^{p-1} E_j$, donde para cada $j \in \{0, \ldots, p-1\}$, E_j es componente conexa de $\overline{E}$ y también es un compacto en X. Además, se cumple que para cada $j \in \{0, ..., p-2\}$,*

$$f(E_j) = E_{j+1} \quad y \quad f(E_{p-1}) \subseteq E_0.$$

Demostración:
Si tenemos un conexo $H \subseteq X$ tal que cumple las hipótesis del enunciado, por el Corolario 1.5.4, entonces existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $E = \biguplus_{j=0}^{p-1} E_j$, donde para cada $j \in \{0, ..., p-1\}$, E_j es componente conexa de

E y se cumple que para cada $j \in \{0, ..., p-2\}$, $f(E_j) = E_{j+1}$ y $f(E_{p-1}) \subseteq E_0$. Por otro lado, por la Proposición 1.5.2 inciso (ii), tenemos que para toda $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^s(\overline{E}) = \overline{f^s(E)} \subseteq \overline{E}$. Lo cual implica que $Orb_f(\overline{E}) \subseteq \overline{E}$. Tomemos el conjunto conexo más grande que se pueda formar con los conjuntos $\overline{E_j}$, donde $j \in \{0, \ldots, p-1\}$, tal que contenga a $\overline{E_0}$. Digamos que dicho conjunto es

$$S = \overline{E_0} \cup \overline{E_{s_1}} \cup \ldots \cup \overline{E_{s_{p-1}}},$$

donde para todo $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $s_i \{0, \ldots, p-1\}$.

Primero veamos que $Orb_f(S) = \overline{E}$. Como $S \subseteq \overline{E}$, obtenemos que $Orb_f(S) \subseteq Orb_f\left(\overline{E}\right) \subseteq \overline{E}$. Ahora, sea $j \in \{0, \ldots, p-1\}$. Tenemos que $\overline{E_j} = \overline{f^j(E_0)} = f^j\left(\overline{E_0}\right) \subseteq f^j(S)$; esto implica que $\overline{E} \subseteq Orb_f(S)$. Por otra parte,

$$f^p(S) = \overline{f^p\left(E_0 \cup \ldots \cup E_{s_{p-1}}\right)} \subseteq \overline{f^p(E_0) \cup \ldots \cup f^p\left(E_{s_{p-1}}\right)} \subseteq \overline{E_0 \cup \ldots \cup E_{s_{p-1}}} = S;$$

aplicando el Corolario 1.5.4, tenemos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{E} = Orb_f(S) = \biguplus_{j=0}^{k-1} L_j$, donde para cada $j \in \{0, ..., k-1\}$, L_j es componente conexa de $\overline{E}$ y donde para cada $j \in \{0, ..., k-2\}$, $f(L_j) = L_{j+1}$ y $f(L_{k-1}) \subseteq L_0$. Además, dado que S es un conjunto cerrado en X y las componentes conexas siempre son conjuntos cerrados, tenemos que para toda $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, L_j es cerrado en X y, dado que X es compacto, resulta que para todo $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, L_j es compacto. ∎

Capítulo 2

Entropía topológica y herraduras

Normalmente para llegar a un lugar muy lejano se deben hacer ciertas paradas, que por sí solas son bonitas o interesantes y, en efecto, este es el caso. Este capítulo está dedicado a dos conceptos centrales dentro de los sistemas dinámicos: el de *entropía topológica* y el de *herradura*. Verificaremos algunas relaciones que hay entre estos dos conceptos, en particular, veremos la prueba del teorema de Misiurewicz para funciones continuas en un intervalo compacto. Dicho teorema nos garantiza que si una función tiene entropía positiva, alguna iteración va a tener una herradura estricta. También, en este capítulo, veremos varias proposiciones y lemas que serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

2.1. Definición y resultados conocidos sobre la entropía topológica

En esta sección, veremos un breve resumen del capítulo 7 de [27], con los resultados enunciados para espacios métricos compactos.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico y sea α una cubierta de X. Se dice que una familia β* ***refina a la cubierta*** *α, lo cual denotaremos como $\alpha < \beta$, si y sólo si para todo $B \in \beta$ existe $A \in \alpha$ tal que $B \subseteq A$. Si esto pasa, se dice que β es un refinamiento de α.*

Sean X un espacio métrico compacto y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ cubiertas abiertas de X. Definimos $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i = \{\bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in \alpha_i\}$. Observemos que $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ es una cubierta abierta de X y que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha_i < \bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$. Ahora, supongamos que $T : X \longrightarrow X$ es una función continua y que α es una cubierta abierta de X. Denotamos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $T^{-i}(\alpha) = \left\{B \subseteq X \mid \text{existe } A \in \alpha \text{ tal que } T^{-i}(A) = B\right\}$. Es claro que para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $T^{-i}(\alpha)$ es una cubierta abierta de X. Tomaremos a $T^{0}(\alpha) = \alpha$.

Definición 2.1.2. *Sean X un espacio métrico compacto, α una cubierta abierta de X y $N(\alpha) = \text{mín}\{Card(\beta) \mid \beta \text{ es subcubierta finita de } \alpha\}$. Se define la* ***entropía de*** *α como $H(\alpha) = \log N(\alpha)$.*

Teorema 2.1.3. ([27], p. 87) Sea (a_n) una sucesión de números reales subaditiva, es decir, una sucesión tal que para todo $n, p \in \mathbb{N}$, $a_{n+p} \leq a_n + a_p$. Entonces, $\text{lím} \frac{a_n}{n}$ existe y es igual a $\text{ínf} \frac{a_n}{n}$.

Probando que la sucesión definida como $a_n = H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)\right)$ es subaditiva y aplicando el Teorema 2.1.3, se prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4. *Sean X un espacio métrico compacto, α una cubierta abierta de X y $T : X \longrightarrow X$ una función continua. Entonces,* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)\right)$ *existe.*

Con el teorema anterior, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2.1.5. *Sean X un espacio métrico compacto, α una cubierta abierta de X y $T : X \longrightarrow X$ una función continua. Se define a la **entropía de T relativa a** α como* $h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}(\alpha)\right)$.

Observación 2.1.6. *Sean α y β cubiertas abiertas de X y $T : X \longrightarrow X$ continua. Las siguientes condiciones se cumplen:*

(*i*) $h(T,\alpha) \geq 0$.

(*ii*) *Si $\alpha < \beta$, entonces $h(T,\alpha) \leq h(T,\beta)$.*

(*iii*) $h(T,\alpha) \leq H(\alpha)$.

Definición 2.1.7. *Sean X un espacio métrico compacto y $T : X \longrightarrow X$ continua. Se define a la **entropía de** T como $h(T) = \sup\{h(T,\alpha) \mid \alpha \text{ es cubierta abierta de } X\}$.*

Observación 2.1.8. *Si $T : X \longrightarrow X$ continua, entonces:*

(*i*) $h(T) \geq 0$.

(*ii*) *$h(T)$ puede ser calculada tomando el supremo solamente sobre las cubiertas abiertas finitas.*

(*iii*) *Si $Y \subseteq X$ es cerrado en X y $T(Y) = Y$, entonces, $h\left(T_{|Y}\right) \leq h(T)$.*

Teorema 2.1.9. *Sean X_1 y X_2 espacios métricos compactos, $T_1 : X_1 \longrightarrow X_1$ y $T_2 : X_2 \longrightarrow X_2$ funciones continuas y $\phi : X_1 \longrightarrow X_2$ una semiconjugación entre (X_1, T_1) y (X_2, T_1). Entonces $h(T_1) \geq h(T_2)$. Si ϕ resulta ser un homeomorfismo, entonces $h(T_1) = h(T_2)$.*

Teorema 2.1.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $T : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo, entonces $h(T) = h\left(T^{-1}\right)$.*

Proposición 2.1.11. *Para todo sistema dinámico (X,T) y para todo $k \in \mathbb{N}$, $h\left(T^k\right) = kh(T)$.*

2.2. Herraduras

En esta sección los sistemas dinámicos que se estudian son los conformados por un intervalo cerrado no degenerado y una función continua.

Definición 2.2.1. *Sean (I, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$, donde $n \geq 2$. Sea $A = \{J_1, \ldots, J_n\}$ una familia de intervalos cerrados no degenerados en I. Se dice que A es una* n-**herradura para** f *si y sólo si los intervalos en A tienen interiores ajenos dos a dos y se cumple que para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\bigcup_{j=1}^{n} J_j \subseteq f(J_i)$. Si además A es una familia ajena dos a dos, entonces decimos que A es* n-**herradura estricta**. *Cuando $n = 2$ decimos que A es una* **herradura** *o* **herradura estricta**, *respectivamente.*

Ejemplo 2.2.2. La función identidad $id : I \longrightarrow I$ es una función la cual no tiene herraduras.

Ejemplo 2.2.3. Sea $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la función dada por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}]. \\ 2 - 2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

A esta función se le conoce como la función tienda y su gráfica es la siguiente:

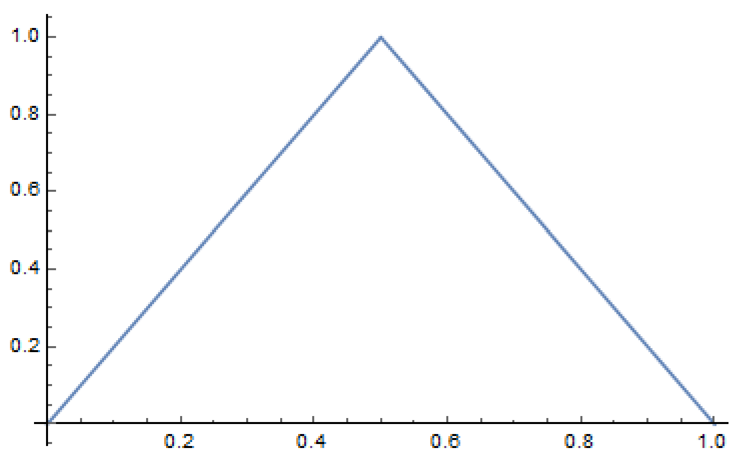

Figura 2.1: La Tienda

Tenemos que $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ es una herradura para T, ya que $T([\frac{1}{2}, 1]) = T([0, \frac{1}{2}]) = [0, 1]$. Sin embargo, T no tiene herraduras estrictas.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos una función $g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, \frac{1}{3}]. \\ -3x + 2, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]. \\ 3x + 2, & x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

La gráfica de esta función se encuentra en la Figura 2.2. Del análisis gráfico, podemos concluir fácilmente que la familia $\{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$ es una herradura estricta para g y que la familia $\{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\}$ es una herradura que no es estricta.

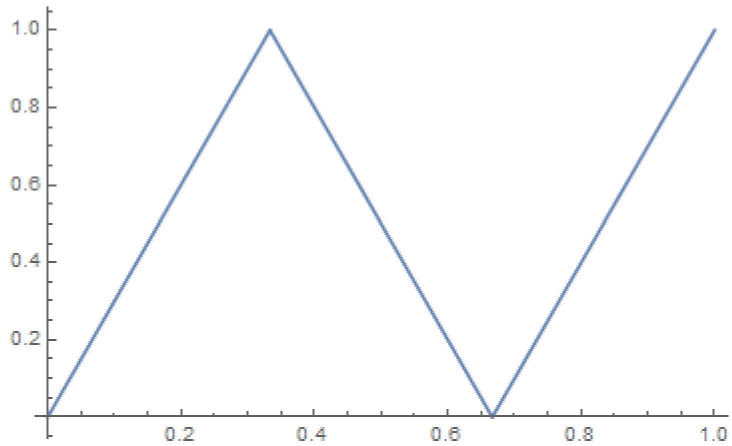

Figura 2.2: Gráfica del Ejemplo 2.2.4.

Una prueba del siguiente teorema se encuentra en [22], p. 170 o en [26], p. 7.

Teorema 2.2.5. *Sea (I, f) un sistema dinámico, sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $J_0, \ldots, J_n$, $n+1$ intervalos compactos contenidos en I tales que para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $J_{i+1} \subseteq f(J_i)$. Entonces existe un intervalo compacto K contenido en J_0 tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^i(K) \subseteq J_i$, $f^n(K) = J_n$, $f^n(Int_{\mathbb{R}}(K)) = Int_{\mathbb{R}}(J_n)$ y $f^n(Fr_{\mathbb{R}}(K)) = Fr_{\mathbb{R}}(J_n)$. Si además $J_0 \subseteq J_n$, entonces existe un punto $y \in J_0$ tal que $f^n(y) = y$ y tal que para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^i(y) \in J_i$.*

Nota 2.2.6. Aunque en ninguna de las dos referencias del teorema anterior se enuncia la parte referente a la imagen de los interiores, sí es clara durante las pruebas.

La notación que utilizaremos para el producto cartesiano de n veces un conjunto A será A^n.

Proposición 2.2.7. *Sean (I, f) un sistema dinámico, $p \geq 2$ un número natural y $P = \{0, \ldots, p-1\}$. Si $\{J_0, \ldots, J_{p-1}\}$ una p-herradura de f, entonces existe una familia de intervalos cerrados no degenerados*

$$\left\{J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right\}_{(n,(a_0,\ldots,a_{n-1}))\in\mathbb{N}\times P^n}$$

que cumple las siguientes condiciones:

(i) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $(a_0, \ldots, a_{n-1}), (b_0, \ldots, b_{n-1}) \in P^n$, con $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (b_0, \ldots, b_{n-1})$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$ y $J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$ tienen interiores ajenos. En caso de que la p-herradura sea estricta,*

$$J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \cap J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})} = \emptyset.$$

(ii) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y para todo $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^n$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \subseteq J_{(a_0,\ldots,a_{n-2})}$.*

(iii) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y para todo $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^n$, $f\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right) = J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}$.*

(iv) *Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$ y para todo $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in P^n$,*

$$f\left(Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right)\right) = Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right) \text{ y } f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right)\right) = Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right).$$

Demostración:

Construiremos la familia buscada por inducción. Veamos que se cumple (i) para $n = 1$. Por hipótesis, $\{J_0, \ldots, J_{p-1}\}$ es una herradura, entonces los interiores de los intervalos en dicha familia son ajenos dos a dos. En caso de ser una p-herradura estricta, los intervalos de la familia son ajenos dos a dos.

Ahora supongamos que $n = 2$. Como $\{J_0, \ldots, J_{p-1}\}$ es una p-herradura para f, para todo $a_0, a_1 \in P$ se tiene que $J_{a_1} \subseteq f(J_{a_0})$. Por el Teorema 2.2.5, para cada $a_0, a_1 \in P$ existe un intervalo cerrado $J_{(a_0,a_1)} \subseteq J_{a_0}$ tal que

$$f\left(J_{(a_0,a_1)}\right) = J_{a_1},\ f\left(Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,a_1)}\right)\right) = Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{a_1}\right),\ \text{y } f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,a_1)}\right)\right) = Int_{\mathbb{R}}\left(J_{a_1}\right).$$

Los intervalos recién construidos cumplen con (ii), (iii) y (iv). Veamos que cumplen (i). Sean (a_0, a_1), $(b_0, b_1) \in P^2$, donde $(a_0, a_1) \neq (b_0, b_1)$. Si $a_0 \neq b_0$, como $J_{(b_0,b_1)} \subseteq J_{b_0}$, $J_{(a_0,a_1)} \subseteq J_{a_0}$ y los interiores de J_{a_0} y J_{b_0} son ajenos, entonces los interiores de $J_{(b_0,b_1)}$ y $J_{(a_0,a_1)}$ también son ajenos. Más aún, si J_{a_0} y J_{b_0} son ajenos, entonces $J_{(b_0,b_1)}$ y $J_{(a_0,a_1)}$ también son ajenos. Por (iv),

$$f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,a_1)}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,b_1)}\right)\right) \subseteq f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,a_1)}\right)\right) \cap f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,b_1)}\right)\right) = Int_{\mathbb{R}}\left(J_{a_1}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{b_1}\right),$$

para todo $a_1 \neq b_1$; la cual es una intersección vacía ya que $\{J_0, \ldots, J_{p-1}\}$ es una p-herradura; por lo tanto,

$$Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,a_1)}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,b_1)}\right) = \emptyset.$$

Análogamente, si $\{J_0, \ldots, J_{p-1}\}$ fuera una p-herradura estricta, entonces, por (iii),

$$f\left(J_{(a_0,a_1)} \cap J_{(b_0,b_1)}\right) \subseteq f\left(J_{(a_0,a_1)}\right) \cap f\left(J_{(b_0,b_1)}\right) = J_{a_1} \cap J_{b_1} = \emptyset;$$

por lo tanto,

$$J_{(a_0,a_1)} \cap J_{(b_0,b_1)} = \emptyset.$$

Supongamos que (i), (ii), (iii) y (iv) son válidas para $n \geq 2$ y tomemos $(a_0, \ldots, a_n) \in P^{n+1}$. Por hipótesis de inducción, $J_{(a_1,\ldots,a_n)} \subseteq J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})} = f\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right)$; así, por el Teorema 2.2.5, existe un intervalo cerrado $J_{(a_0,\ldots,a_n)} \subseteq J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$ tal que

$$f\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right) = J_{(a_1,\ldots,a_n)},\ f\left(Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right)\right) = Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_n)}\right)$$

y

$$f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right)\right) = Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_n)}\right).$$

Con los intervalos recién construidos, tenemos que se cumplen (ii), (iii) y (iv). Verifiquemos que se cumple (i). Sean $(a_0, \ldots, a_n)$ y $(b_0, \ldots, b_n) \in P^{n+1}$ elementos distintos en P^n. Así, existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $a_i \neq b_i$. Si $i \neq n$, entonces $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \neq (b_0, \ldots, b_{n-1})$ y, por hipótesis de inducción, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$ y

$J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$ tienen interiores ajenos o ellos mismos son ajenos, en caso de que $\{J_0,\ldots,J_{p-1}\}$ fuese una p-herradura estricta. Usando (ii), obtenemos que $J_{(a_0,\ldots,a_n)}$ y $J_{(b_0,\ldots,b_n)}$ tienen interiores ajenos o ellos mismos son ajenos, respectivamente. Si $i=n$, $a_n \neq b_n$; por hipótesis de inducción

$$f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right)\right) \cap f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right)\right) = Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_n)}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right) = \emptyset,$$

lo cual implica que

$$f\left(Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right)\right) = \emptyset;$$

o en dado caso de que $\{J_0,\ldots,J_{p-1}\}$ fuese una p-herradura estricta,

$$f\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)} \cap J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right) \subseteq J_{(a_1,\ldots,a_n)} \cap J_{(a_0,\ldots,a_n)} = \emptyset.$$

En virtud de lo anterior, concluimos que

$$Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_n)}\right) \cap Int_{\mathbb{R}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right) = \emptyset$$

o que

$$J_{(a_0,\ldots,a_n)} \cap J_{(b_0,\ldots,b_n)} = \emptyset,$$

respectivamente. Concluimos que se cumple (i), completando la inducción. ■

Proposición 2.2.8. *Sean (I,f) un sistema dinámico y $p \geq 2$ un número natural. Si f tiene una p-herradura, entonces para toda $m \in \mathbb{N}$, f^m tiene una p^m-herradura.*

Demostración:

Sean $\{J_0,\ldots,J_{p-1}\}$ una p-herradura para f, $m \in \mathbb{N}$, con $m \geq 2$ y $P = \{0,\ldots,p-1\}$. Sea C la familia de intervalos dada por la Proposición 2.2.7. Sea $D \subseteq C$ dado por $D = \left\{J_{(a_0,\ldots,a_{m-1})}\right\}_{(a_0,\ldots,a_{m-1})\in P^m}$. Por (i) de la Proposición 2.2.7, los interiores de los intervalos en D son ajenos dos a dos y, consecuentemente son distintos. Así, en D hay p^m intervalos ya que ésta es la cardinalidad de P^m. Por (iii) de la Proposición 2.2.7, tenemos que para cada $(a_0,\ldots,a_{m-1}) \in P^m$, $f^{m-1}\left(J_{(a_0,\ldots,a_{m-1})}\right) = J_{a_{m-1}}$, donde, por construcción de la familia C, $J_{a_{m-1}} \in \{J_0,\ldots,J_{p-1}\}$. Con esto tenemos que $f^m\left(J_{(a_0,\ldots,a_{m-1})}\right) = f\left(J_{a_{m-1}}\right)$; el cual contiene a $J_0 \cup \ldots \cup J_{p-1}$, que por (ii), a su vez contiene a

$$\bigcup_{(a_0,\ldots,a_{m-1})\in P^m} J_{(a_0,\ldots,a_{m-1})}.$$

Es decir, D es una p^m-herradura para f^m. ■

Los siguientes dos teoremas son clásicos dentro del estudio de los sistemas dinámicos discretos en el intervalo. Dichos resultados son comúnmente mostrados en un curso elemental de sistemas dinámicos discretos, lo cual, no quiere decir que sus pruebas sean sencillas. El primero de ellos es conocido como el Teorema de Stefan (una prueba de este teorema se puede encontrar en [5], página 10), mientras que el segundo (y más famoso) es conocido como el Teorema de Sharkovskii (su prueba se puede encontrar en [5], página 6).

Teorema 2.2.9. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Supongamos que f tiene una órbita periódica de periodo impar $n > 1$. Si para todo número impar m tal que $1 < m < n$, f no tiene una órbita periódica de periodo m, entonces existe un punto c en la órbita de periodo n tal que los puntos de dicha órbita tienen el orden*

$$f^{n-1}(c) < f^{n-3}(c) < \ldots < f^2(c) < c < f(c) < \ldots < f^{n-2}(c)$$

ó el orden contrario

$$f^{n-1}(c) > f^{n-3}(c) > \ldots > f^2(c) > c > f(c) > \ldots > f^{n-2}(c).$$

Teorema 2.2.10. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Sea $\prec$ un orden total de los números naturales dado de la siguiente manera:*

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec \ldots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec \ldots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec \ldots \prec 2^3 \cdot 3 \prec 2^3 \cdot 5 \prec \ldots \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Si f tiene una órbita periódica de periodo n y si $n \prec m$, entonces f tiene una órbita periódica de periodo m.

Proposición 2.2.11. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Si f tiene una herradura, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

Demostración:

Veamos que el enunciado se cumple para herraduras estrictas. Sea $\{J, K\}$ una herradura estricta para f. Como $J \subseteq f(K), J \subseteq f(J)$ y $K \subseteq f(J)$, por el Teorema 2.2.5, existe un punto periódico $x \in K$ tal que $f(x) \in J$, $f^2(x) \in J$ y $f^3(x) = x$. Dado que $K \cap J = \emptyset$, el periodo de x bajo f es 3 y, por el Teorema 2.2.10, f tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Ahora, sea $\{[a, b], [b, c]\}$ una herradura para f.

Caso 1: Supongamos que b es un punto fijo para f. Como $a, c \in [a, b] \cup [b, c] \subseteq f([b, c])$, tenemos que el conjunto $A = \{x \in [b, c] \mid f(x) \in \{a, c\}\} \neq \emptyset$. Como $A = f^{-1}(\{a, c\}) \cap [b, c]$ y f es continua, A es cerrado. Claramente A es acotado y, por lo tanto, existe $d = \min A$. En principio, dado que b es un punto fijo de f, $b < d$ y por la elección de d, $f([b, d))$ no contiene ni a a ni a c. De lo anterior, tenemos que $f([d, c])$ debe contener tanto a a como a c. Por la conexidad de $f([d, c])$, $[a, c] \subseteq f([d, c])$. Dado que $[a, b] \cup [d, c] \subseteq [a, c]$, $\{[a, b], [d, c]\}$ es una herradura estricta para f y, por la conclusión del primer párrafo de esta demostración, f tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Caso 2: Supongamos que b no es un punto fijo. Por hipótesis, tenemos que $[b, c] \subseteq f([a, b]), [b, c] \subseteq f([b, c])$ y $[a, b] \subseteq f([b, c])$, así, por el Teorema 2.2.5, existe un punto periódico $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \in [b, c]$, $f^2(x) \in [b, c]$ y $f^3(x) = x$. Con esto, necesariamente el periodo de x es un divisor de 3, es decir, su periodo es 1 o es 3. Si su periodo fuera 1, es decir, si x fuera un punto fijo de f, como

$x \in [a,b]$ y $x = f(x) \in [b,c]$, entonces $x = b$; lo cual es una contradicción con el hecho de que b no es un punto fijo. Por lo tanto, x es un punto periódico de f de periodo 3, y por el Teorema 2.2.10, f tiene puntos periódicos de todos los periodos.

■

Proposición 2.2.12. *Sea (I,f) un sistema dinámico. Si f tiene un punto periódico de periodo impar que no sea punto fijo, entonces existe $\{J,K\}$ una herradura estricta para f^2 tal que tanto J como K no contienen puntos finales de I.*

Demostración:

Sea $A = \{n \in B \mid n \text{ es periodo de algún punto periódico de } f\}$, donde B es el conjunto de todos los naturales impares mayores que 1. Por hipótesis, tenemos que $A \neq \emptyset$ y, dado que A está bien ordenado, podemos tomar su mínimo. Sea $k = \min A$ y sea x un punto periódico que tenga periodo k. Por la elección de k y el Teorema 2.2.9, existe y en la trayectoria de x bajo f tal que los puntos $y_i = f^i(y)$, donde $i \in \{0,\dots,p-1\}$, de dicha órbita se ordenan como

$$y_{p-1} < y_{p-3} < \dots < y_2 < y_0 < y_1 < \dots < y_{p-2}$$

ó

$$y_{p-2} < \dots < y_1 < y_0 < y_2 < \dots < y_{p-3} < y_{p-1}.$$

Supongamos que $y_{p-2} < \dots < y_1 < y_0 < y_2 < \dots < y_{p-3} < y_{p-1}$, la prueba en el otro caso es análoga. Tenemos que

$$y_0 \in [y_1, y_2] \subseteq f([y_1, y_0]),$$

por lo supuesto y por conexidad de $f([y_1,y_0])$. Así, existe $a \in (y_1, y_0)$ tal que $f(a) = y_0$; en consecuencia

$$f^2(a) = f(y_0) = y_1 < a.$$

Sea $s \in (y_1, a) \subseteq [y_1, y_{p-1}]$. Por la conexidad de $f^2([y_{p-3}, y_{p-1}])$,

$$[y_1, y_{p-1}] \subseteq f^2([y_{p-3}, y_{p-1}]);$$

por lo tanto, existe $d \in (y_{p-3}, y_{p-1})$ tal que $f^2(d) = s < a$.

Ahora, sea $z \in (d, y_{p-1}) \subseteq [y_0, y_{p-1}]$. Dado que $f^2([a, y_{p-3}])$ es conexo y como $f^2(a) < y_0$,

$$[y_0, y_{p-1}] \subseteq f^2([a, y_{p-3}]).$$

Esto implica que existe $b \in (a, y_{p-3})$ tal que $d < z = f^2(b)$. Sea $w \in (d, y_{p-1}) \subseteq [y_0, y_{p-1}]$. Como $f^2(d) < y_0$ y dado que $f^2([y_{p-3}, d])$ es conexo,

$$[y_0, y_{p-1}] \subseteq f^2([y_{p-3}, d]).$$

De lo anterior, tenemos que existe $c \in (y_{p-3}, d)$ tal que $d < w = f^2(c)$. En resumen, suponiendo sin pérdida de generalidad que $f^2(c) < f^2(b)$, tenemos que

$$y_{p-2} < \ldots < f^2(a) = y_1 < f^2(d) < a < y_0 < b < \ldots < y_{p-3} < c < d < f^2(c) < f^2(b).$$

Por la conexidad de $f^2([a,b])$ y $f^2([c,d])$, concluimos que $\{[a,b],[c,d]\}$ es una herradura estricta para f^2, donde ni a ni d son puntos finales de I, ya que $y_1 < a < d < y_{p-1}$.
■

Lema 2.2.13. *Sean (I,f) un sistema dinámico tal que f no tiene herradura, $x \in I$,*

$$U = \{y \in Orb_f(x) \mid y \leq f(y)\} \text{ y } L = \{y \in Orb_f(x) \mid f(y) \leq y\}.$$

Si U y L son no vacíos, entonces $\sup U \leq \inf L$ *y existe un punto fijo z de f tal que $z \in [\sup U, \inf L]$.*

Demostración:
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hacemos $x_n = f^n(x)$, y supongamos que U y L no son vacíos. Así, existen $x_n, x_m \in I$ tales que $x_n \in U$ y $x_m \in L$. Queremos demostrar que $x_n \leq x_m$. Supongamos lo contrario, supongamos que $x_m < x_n$.

Supongamos que $n < m$. Como $x_m = f^{m-n}(x_n) < x_n$, entonces x_n no es fijo; de esta forma, $f(x_m) \leq x_m < x_n < f(x_n)$. Definimos a la función $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ como $h(x) = f(x) - x$. Tenemos que $h(x_m) \leq 0$ y $h(x_n) > 0$ y, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $z \in [x_m, x_n]$ tal que $h(z) = 0$, por lo tanto, $f(z) = z$. Con esto tenemos que el conjunto $B = \{y \in [x_m, x_n] \mid f(y) = y\}$ es no vacío. Sea (y_n) una sucesión en B tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, con $y \in I$. Por la continuidad de f, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y)$. Por otro lado, para toda n, $f(y_n) = y_n$, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = y$ y, por la unicidad del límite, $f(y) = y$. Es decir, B es cerrado y, en consecuencia, B es compacto. Así, B tiene un máximo. Sea $y = \max B$. Como y es un punto fijo y x_n no es un punto fijo, $y < x_n$.

Afirmación 1: Para todo $x \in (y, x_n]$, $x < f(x)$.

Razón: Si $x = x_n$, entonces la afirmación se cumple inmediatamente ya que x_n no es punto fijo y está en U. Ahora, si existe $w \in (y, x_n)$ tal que $f(w) \leq w$, entonces $h(w) \leq 0$ y $h(x_n) > 0$. Como h es continua, existe $z^* \in [w, x_n]$ tal que $h(z^*) = 0$; así, $f(z^*) = z^*$. Con ello, $z^* \in B$ y $z^* > y$, lo cual es una contradicción con la definición de y. Por lo tanto, la Afirmación 1 es cierta.

Por la definición de y y por la Afirmación 1 aplicada a x_n, tenemos que $x_m \leq y < x_{n+1}$. Así, existe $k \in \{n+1, \ldots, m-1\}$ tal que si $i \in \{n, \ldots, k\}$, entonces

$$y < x_i \text{ y } x_{k+1} \leq y.$$

Afirmación 2: Para toda $i \in \{n, \ldots, k-1\}$, $x_i < x_k$.

Razón: Por inducción. Supongamos que $i = n$. Tenemos que $x_{k+1} \leq y < x_k$. Si $x_k \in (y, x_n]$, por la Afirmación 1, entonces $x_k < x_{k+1}$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $x_n < x_k$. Ahora, supongamos que para alguna $i \in \{n, \ldots, k-1\}$, $x_i < x_k$. Si $x_k \leq x_{i+1}$, entonces tendríamos que $x_{k+1} \leq y < x_i < x_k \leq x_{i+1}$. Así, por la conexidad de $f([y, x_i])$ y $f([x_i, x_k])$, $[y, x_i] \cup [x_i, x_k] \subseteq [y, x_{i+1}] \subseteq f([y, x_i])$ y $[y, x_i] \cup [x_i, x_k] \subseteq [x_{k+1}, x_{i+1}] \subseteq f([x_i, x_k])$. En virtud de lo anterior, concluimos que $\{[y, x_i], [x_i, x_k]\}$ es una herradura de f; lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $x_{i+1} < x_k$ y, por inducción, la Afirmación 2 es cierta.

Por la Afirmación 2, tenemos que $x_{k+1} \leq y < x_{k-1} < x_k$. Así, por la conexidad de $f([y, x_{k-1}])$ y $f([x_{k-1}, x_k])$,

$$[y, x_{k-1}] \cup [x_{k-1}, x_k] \subseteq [y, x_k] \subseteq f([y, x_{k-1}])$$

y

$$[y, x_{k-1}] \cup [x_{k-1}, x_k] \subseteq [x_{k+1}, x_k] \subseteq f([x_{k-1}, x_k]).$$

En virtud de lo anterior, concluimos que $\{[y, x_{k-1}], [x_{k-1}, x_k]\}$ es una herradura de f; lo cual contradice nuestra hipótesis. Esta contradicción viene de suponer que $n < m$.

Como x_m y x_n son diferentes, entonces $m \neq n$, por lo tanto, $m < n$. Como $x_m < x_n = f^{n-m}(x_m)$, resulta que x_m no es punto fijo. Lo cual implica que $f(x_m) < x_m < x_n \leq f(x_n)$; de aquí, $h(x_m) < 0$ y $h(x_n) \geq 0$. Como h es continua, existe $z \in [x_m, x_n]$ tal que $f(z) = z$. Esto y la continuidad de f implican que B es un conjunto compacto y no vacío. Sea $y = \min B$. Como y es un punto fijo y x_m no lo es, $x_m < y$. Con una prueba totalmente simétrica a la del caso $n < m$, se puede llegar a los siguientes enunciados:

1. Para todo $x \in (y, x_n]$, $f(x) < x$.

2. Existe $k \in \{n+1, \ldots, m-1\}$ tal que si $i \in \{n, \ldots, k\}$, entonces $x_i < y$ y $y \leq x_{k+1}$.

3. Para todo $i \in \{m, \ldots, k-1\}$, $x_k < x_i$

A partir de dichos enunciados, haciendo una prueba totalmente simétrica al caso $n < m$, llegamos a una contradicción con el hecho de que f no tiene herraduras.

Estos absurdos nos hacen concluir que la suposición de que $x_m < x_n$ es falsa. Por lo tanto, $x_n \leq x_m$. De esta forma, dado que x_n y x_m fueron arbitrarios, concluimos que $\sup U \leq \inf L$. Por la definición de U y L y la continuidad de f, tenemos que $f(\sup U) \geq \sup U$ y $f(\inf L) \leq \inf L$. Como $h(\sup U) \geq 0$ y $h(\inf L) \leq 0$, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $z \in [\sup U, \inf L]$ tal que $h(z) = 0$. Es decir, $f(z) = z$. ∎

2.3. Relación entre la entropía topológica y las herraduras

Hasta ahora, hemos estudiado los conceptos de entropía topológica y herradura de manera independiente. Dichos conceptos parecieran estar lejos uno del otro, pero en esta sección comprobaremos que en realidad estos conceptos están íntimamente relacionados. Veremos que es relativamente sencillo comprobar que una herradura implica entropía topológica positiva. También comprobaremos que si una función f tiene entropía topológica positiva, entonces hay una iteración de f que tiene una herradura estricta. Este último resultado es conocido como el Teorema de Misiurewicz y es, básicamente, el Teorema principal de esta sección.

Teorema 2.3.1. *Sean (I, f) un sistema dinámico y $p \in \mathbb{N}$, con $p \geq 2$. Si f tiene una p-herradura, entonces $h(f) \geq \log p$.*

Demostración:

Primero lo haremos suponiendo que f tiene una p-herradura estricta $\{J_1, \ldots, J_p\}$. Como I es métrico, existen $U_1, \ldots, U_p$ conjuntos abiertos en I tales que son ajenos dos a dos y tales que $J_1 \subseteq U_1, \ldots, J_p \subseteq U_p$. Sea $U = I - (\bigcup_{i=1}^{p} J_i)$, el cual es no vacío dado que la herradura considerada es estricta. Además, U es un abierto por ser complemento de un cerrado. Por lo tanto, $C = \{U_1, \ldots, U_p, U\}$ es una cubierta abierta de I.

Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \text{para todo } i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in \{1, \ldots, p\}\}$.
Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, definimos

$$L_x = \left\{y \in I \mid y \in J_{x_1}, f(y) \in J_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(y) \in J_{x_n}\right\}.$$

Como la familia $\{J_1, \ldots, J_p\}$ es ajena dos a dos, dados $x, x^* \in A$, donde $x \neq x^*$, se tiene que $L_x \cap L_{x^*} = \emptyset$. Sea $x \in A$, dado que $\{J_1, \ldots, J_p\}$ es una p-herradura, para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,

$$J_{x_{i+1}} \subseteq f(J_{x_i}).$$

Así, por el Teorema 2.2.5, existe $K \subseteq J_{x_1}$ intervalo cerrado que cumple que

$$f(K) \subseteq J_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(K) \subseteq J_{x_n}.$$

Tomando $y \in K \subseteq J_{x_1}$, tenemos que $f(y) \in J_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(y) \in J_{x_n}$, es decir, $L_x \neq \emptyset$. Sea $y \in L_x$, donde $y \in J_{x_1}, f(y) \in J_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(y) \in J_{x_n}$, entonces $y \in J_{x_1} \cap f^{-1}(J_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(J_{x_n})$. Por otro lado, como $J_{x_1} \subseteq U_{x_1}, J_{x_2} \subseteq U_{x_2}, \ldots, J_{x_n} \subseteq U_{x_n}$, tenemos que

$$J_{x_1} \subseteq U_{x_1}, f^{-1}(J_{x_2}) \subseteq f^{-1}(U_{x_2}), \ldots, f^{-(n-1)}(J_{x_n}) \subseteq f^{-(n-1)}(U_{x_n}).$$

Esto implica que $y \in U_{x_1} \cap f^{-1}(U_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(U_{x_n})$; así,

$$L_x \subseteq U_{x_1} \cap f^{-1}(U_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(U_{x_n}),$$

es decir, existe un elemento en $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C)$ que contiene a L_x.
Sea $V_{x_1} \cap f^{-1}(V_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(V_{x_n}) \in \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C)$ distinto a $U_{x_1} \cap f^{-1}(U_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(U_{x_n})$ que contenga a L_x. En consecuencia, existe un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $f^{-(i-1)}(V_{x_i}) \neq f^{-(i-1)}(U_{x_i})$; esto implica que $V_{x_i} \neq U_{x_i}$, es decir, $V_{x_i} \in C - \{U_{x_i}\}$.
Sea $y \in L_x$. Supongamos que $V_{x_i} = U$. Tenemos que $f^{i-1}(y) \in J_{x_i}$. Por lo supuesto, $f^{i-1}(y) \in V_{x_i} = U$, es decir, $U \cap J_{x_i} \neq \emptyset$; lo cual por construcción, es un absurdo.
Supongamos entonces que $V_{x_i} \in C - \{U_{x_i}, U\}$. Por construcción, $V_{x_i} \cap U_{x_i} = \emptyset$, pero $f^{i-1}(y) \in U_{x_i} \cap V_{x_i}$, lo cual es un absurdo. Esto quiere decir que $U_{x_1} \cap f^{-1}(U_{x_2}) \cap \ldots \cap f^{-(n-1)}(U_{x_n})$ es el único elemento de $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C)$ que contiene a L_x. Concluimos que se necesitan al menos $Card(A) = p^n$ elementos de $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C)$ para cubrir a todos los conjuntos L_x. De esta forma,

$$N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(C)\right) \geq p^n.$$

Como $n \in \mathbb{N}$ fue arbitraria, $h(f, C) \geq \log p$, por lo tanto, $h(f) \geq \log p$.

Ahora, supongamos que f tiene una p-herradura no necesariamente estricta. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $p^N \geq 3$. Sea $n \geq N$ un natural. Por la Proposición 2.2.8, f^n tiene una p^n-herradura. Enumeramos a los intervalos de la p^n-herradura de izquierda a derecha en I, digamos $J_1, \ldots, J_{p^n}$. Considerando a los intervalos con índices impares, obtenemos una $\left\lceil \frac{p^n}{2} \right\rceil$-herradura estricta para f^n, donde $\left\lceil \frac{p^n}{2} \right\rceil$ es el mínimo entero mayor o igual a $\frac{p^n}{2}$. Aplicando lo que probamos inicialmente, tenemos que $h(f^n) \geq \log \left\lceil \frac{p^n}{2} \right\rceil \geq \log \frac{p^n}{2}$. Por la Proposición 2.1.11, $h(f) = \frac{1}{n} h(f^n)$; lo cual implica que $h(f) \geq \frac{1}{n} \log \frac{p^n}{2} = \log p - \frac{\log 2}{n}$. Dado que esto se cumple para todo $n \geq N$, entonces $h(f) \geq \log p$. ■

Definición 2.3.2. *Sea α una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de I y sea $n \in \mathbb{N}$.*

(i) Definimos a $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^n$ como **una cadena de longitud** *n* **sobre** *α si y sólo si existe $x \in I$ tal que para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f^i(x) \in A_i$.*

(ii) Al conjunto de todas las cadenas de longitud n sobre α lo denotamos como $\alpha^{(n)}$ y a su cardinalidad la denotaremos como $C_n(\alpha)$.

(iii) Dado $A \in \alpha$, denotamos a $\left\{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^{(n)} \mid A_0 = A\right\}$ como $\alpha_A^{(n)}$ y a su cardinalidad la denotamos como $C_n(\alpha \mid A)$.

Observación 2.3.3. La definición de cadena de longitud n sobre α es equivalente a que $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \neq \emptyset$.

Sea α una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de I y ajena dos a dos. Sean $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ y $(B_0, \ldots, B_{n-1})$ elementos en $\alpha^{(n)}$ distintos. De este modo, existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $A_k \cap B_k = \emptyset$. Si existiera $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \cap \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$, entonces $f^k(x) \in A_k \cap B_k$; lo cual es una contradicción; así, $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$ y $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$ son ajenos. Ahora, si $(A_0, \ldots, A_{n-1}) = (B_0, \ldots, B_{n-1})$, claramente

$\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$ y $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$ son iguales, es decir, que si $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$ y $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$ son distintos, entonces $(A_0, \ldots, A_{n-1})$ y $(B_0, \ldots, B_{n-1})$ son distintos. En virtud de lo anterior, hay una biyección entre $\alpha^{(n)}$ y $\left\{\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \mid (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^{(n)}\right\}$. Con esto, tenemos la siguiente observación:

Observación 2.3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Si α es una familia ajena dos a dos de subconjuntos de I, entonces los conjuntos $\left\{\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \mid (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^{(n)}\right\}$ y $\alpha^{(n)}$ tienen el mismo número de elementos.*

Sigamos en el supuesto de que α es ajena dos a dos y sea $m \in \mathbb{N}$. Si $(A_0, \ldots, A_{m+n-1}) \in \alpha^{(m+n)}$, entonces es claro que $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^{(n)}$. Por otro lado,

$$\emptyset \neq f^n\left(\bigcap_{i=n}^{m+n-1} f^{-i}(A_i)\right) \subseteq \bigcap_{i=n}^{m+n-1} f^n\left(f^{-i}(A_i)\right) \subseteq \bigcap_{i=0}^{m-1} f^{-i}(A_{n+i});$$

en consecuencia, $(A_n, \ldots, A_{m+n-1}) \in \alpha^{(m)}$. Es decir, para cada cadena de longitud $n+m-1$ sobre α, dado que α es ajena dos a dos, podemos encontrar una única cadena de longitud n y otra única cadena de longitud m sobre α, lo cual prueba que $C_{m+n}(\alpha) \leq C_n(\alpha) C_m(\alpha)$. Consecuentemente, $\log C_{m+n}(\alpha) \leq \log C_n(\alpha) + \log C_m(\alpha)$. Así, suponiendo que para toda $n \in \mathbb{N}$, siempre existe al menos una cadena de longitud n sobre α, la sucesión $(\log C_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ está bien definida y, además, es subaditiva. Por el Teorema 2.1.3,

$$h^*(f, \alpha) = \text{lím} \frac{\log C_n(\alpha)}{n}$$

existe y para todo $n \in \mathbb{N}$, $h^*(f, \alpha) \leq \frac{1}{n} \log C_n(\alpha)$. Adicionalmente, supongamos que α es una cubierta de I, es decir, supongamos que α sea una partición de I. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in I$. Dado que α es partición, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ existe $A_{j(i)} \in \alpha$ tal que $f^i(x) \in A_{j(i)}$; por lo tanto, $x \in \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-1}\left(A_{j(i)}\right)$; con lo cual $\left(A_{j(1)}, \ldots, A_{j(n)}\right) \in \alpha^{(n)}$. Por otro lado, dado $A \in \alpha$, como α es partición, existe $x \in I$ tal que $x \in A$. Aplicando el argumento anterior, existe una cadena de longitud n sobre α que comienza en A. Estas observaciones las resumimos en los siguientes enunciados:

Observación 2.3.5. *Toda partición α de I satisface:*

(*i*) *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\left\{\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \mid (A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \alpha^{(n)}\right\}$ es cubierta de I.*

(*ii*) *Para toda $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{(n)} \neq \emptyset$.*

(*iii*) *$h^*(f, \alpha) = \text{lím} \frac{\log C_n(P)}{n}$ existe.*

(*iv*) *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $h^*(f, \alpha) \leq \frac{1}{n} \log C_n(\alpha)$.*

(*iv*) *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in \alpha$, $\alpha_A^{(n)} \neq \emptyset$.*

Antes de comenzar con la prueba del teorema de Misiurewicz, necesitamos algunos resultados preliminares.

Una prueba del siguiente teorema se encuentra en [5], p. 211.

Teorema 2.3.6. Sea (I, f) un sistema dinámico. Sean J, K intervalos tales que $f(J) \cap K \neq \emptyset$, entonces existe un intervalo $L \subseteq J$ tal que $f(L) = f(J) \cap K$.

Lema 2.3.7. *Sea* $s : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$s(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ log\,(x) & si \quad 1 \leq x. \end{cases}$$

Si $\left(a_n^1\right)_{n\geq 1}, \ldots, \left(a_n^k\right)_{n\geq 1}$ *son sucesiones de reales no negativos, entonces*

$$\operatorname{lím\,sup}\left(\frac{s\left(a_n^1 + \ldots + a_n^k\right)}{n}\right) = \operatorname{máx}\left\{\operatorname{lím\,sup}\left(\frac{s\left(a_n^i\right)}{n}\right) \mid i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

Demostración:

Sea β igual al lado derecho de la ecuación que queremos demostrar y sea $\epsilon = \beta + \delta$, con $\delta > 0$. Como $\epsilon > \beta$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$ existe $p_i \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq p_i$, entonces $\epsilon > \frac{s\left(a_n^i\right)}{n}$. Definimos $p = \operatorname{máx}\left\{p_1, \ldots, p_k, \frac{2}{\epsilon}\right\}$; así, para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, si $n \geq p$, entonces $\epsilon > \frac{s\left(a_n^i\right)}{n}$, es decir, $n\epsilon > s\left(a_n^i\right)$. Sea $n \geq p$ e $i \in \{1, \ldots, k\}$. Si $s\left(a_n^i\right) = 0$, entonces $a_n^i \in [0, 1]$. Como $p \geq \frac{2}{\epsilon} > \frac{1}{\epsilon}$, $p\epsilon > 1$; implicando que $n\epsilon > 1$. Esto, a su vez, implica que $\exp(n\epsilon) > a_n^i$. Si $s\left(a_n^i\right) > 0$, entonces $s\left(a_n^i\right) = \log a_n^i$. Como $n\epsilon > s\left(a_n^i\right) = \log a_n^i$, tenemos que $\exp(n\epsilon) > a_n^i$. Es decir, en cualquier caso, para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\exp(n\epsilon) > a_n^i$; lo cual implica que $k \exp(n\epsilon) > \sum_{i=1}^k a_n^i$. Así, para toda $n \geq p$, como $k \exp(n\epsilon) > 1$, se tiene que

$$\frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \leq \frac{s\left(k \exp(n\epsilon)\right)}{n} = \frac{\log\left(k \exp(n\epsilon)\right)}{n} = \frac{\log k}{n} + \epsilon = \frac{\log k}{n} + \beta + \delta.$$

Con esto podemos concluir que $\operatorname{lím\,sup} \frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \leq \beta + \delta$. Como $\delta > 0$ fue arbitraria, tomando el límite cuando δ tiende a cero, obtenemos que $\operatorname{lím\,sup} \frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \leq \beta$. Ahora, dado que la función s es creciente, para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \geq \frac{s\left(a_n^i\right)}{n};$$

lo cual implica que para toda $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\operatorname{lím\,sup} \frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \geq \operatorname{lím\,sup} \frac{s\left(a_n^i\right)}{n}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{lím\,sup} \frac{s\left(\sum_{i=1}^k a_n^i\right)}{n} \geq \beta = \operatorname{máx}\left\{\operatorname{lím\,sup}\left(\frac{s\left(a_n^i\right)}{n}\right) \mid i \in \{1, \ldots, k\}\right\}.$$

$\blacksquare$

Lema 2.3.8. *Si* $(a_n)_{n\geq 1}$ *y* $(b_n)_{n\geq 0}$ *son sucesiones de reales no negativos, entonces*

$$\operatorname{lím\,sup}_n\left(\frac{log\left(\sum_{k=1}^n exp\left(a_k + b_{n-k}\right)\right)}{n}\right) \leq \operatorname{máx}\left\{\operatorname{lím\,sup}_n\left(\frac{a_n}{n}\right), \operatorname{lím\,sup}_n\left(\frac{b_n}{n}\right)\right\}.$$

Demostración:

Sea β el lado derecho de la desigualdad que queremos demostrar. Si $\beta = \infty$, entonces la desigualdad se cumple trivialmente. Supongamos que $\beta < \infty$ y sea $\lambda = \beta + \delta$, con $\delta > 0$. Como $\lambda > \beta$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq p$, entonces $\frac{a_n}{n} < \lambda$ y $\frac{b_n}{n} < \lambda$. Sea $\sigma = \text{máx}\left\{\lambda, \frac{a_i}{i} + 1, \frac{b_i}{i} + 1, b_0 + 1 \mid i \in \{1, \ldots, p-1\}\right\}$. Así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{n} < \sigma$ y $\frac{b_n}{n} < \sigma$.

Afirmación: Si $n \geq 2p$ y $1 \leq k \leq n$, entonces $a_k + b_{n-k} < p\sigma + n\lambda$.

Razón: Tenemos que analizar cuando $k \geq p$ o $n - k \geq p$, ya que si se da que $k < p$ y $n - k < p$, entonces $n < 2p$; en contradicción con el supuesto de que $n \geq 2p$.

Caso 1: Si $k \geq p$ y $n-k \geq p$, entonces $\frac{a_k}{k} < \lambda$ y $\frac{b_{n-k}}{n-k} < \lambda$; lo cual implica que $a_k + b_{n-k} < k\lambda + n\lambda - k\lambda = n\lambda < p\sigma + n\lambda$.

Caso 2: Si $k < p$ y $n - k \geq p$, entonces $\frac{a_k}{k} < \sigma$ y $\frac{b_{n-k}}{n-k} < \lambda$; con lo cual tenemos que $a_k + b_{n-k} < k\sigma + (n-k)\,\lambda < p\sigma + n\lambda$.

Caso 3: Si $k \geq p$ y $n - k < p$, entonces $\frac{a_k}{k} < \lambda$ y $\frac{b_{n-k}}{n-k} < \sigma$; con lo cual $a_k + b_{n-k} < k\lambda + (n-k)\,\sigma < n\lambda + p\sigma$.

Con esto, probamos la afirmación.

Ahora, por la afirmación, para todo $n \geq 2p$ y para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\exp(a_k + b_{n-k}) < \exp(p\sigma + n\lambda)$. En consecuencia, $\sum_{k=1}^{n} \exp(a_k + b_{n-k}) < n \exp(p\sigma + n\lambda)$. Por lo tanto, para todo $n \geq 2p$,

$$\frac{\log \sum_{k=1}^{n} \exp(a_k + b_{n-k})}{n} \leq \frac{\log n}{n} + \frac{p\sigma}{n} + \lambda;$$

lo cual implica que

$$\text{lím sup} \frac{\log \sum_{k=1}^{n} \exp(a_k + b_{n-k})}{n} \leq \lambda = \beta + \delta.$$

Como $\delta > 0$ fue arbitraria, podemos hacer tender a δ hacia 0; con esto obtenemos que

$$\text{lím sup} \frac{\log \sum_{k=1}^{n} \exp(a_k + b_{n-k})}{n} \leq \beta = \text{máx}\left\{\limsup_{n} \left(\frac{a_n}{n}\right), \limsup_{n} \left(\frac{b_n}{n}\right)\right\}.$$

■

Teorema 2.3.9. (Misiurewicz). *Sea (I, f) un sistema dinámico. Si $h(f) > 0$, entonces para todo λ con $0 < \lambda < h(f)$ y para todo $N > 0$ existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $k \geq 2$, $n > N$, $\frac{1}{n} \log k \geq \lambda$ y tales que f^n tiene una k-herradura estricta.*

Demostración:

Sean λ tal que $0 < \lambda < h(f)$ y $N > 0$. Primero probaremos el enunciado cuando $\log 3 < \lambda < h(f)$ y con la diferencia de que encontraremos una p-herradura que no es necesariamente estricta. Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda < c < h(f)$. Por la definición de $h(f)$, existe una cubierta abierta α de I tal que $c < h(f,\alpha)$. Dado que I es compacto, existe $\beta > 0$ un número de Lebesgue de la cubierta α. Sea $Z = \{z_i \mid i \in \{0,\ldots,k\}\} \subseteq I$, donde $k \geq 2$, tal que $\min I = z_0 < \ldots < z_k = \max I$ y tal que la distancia entre cualesquiera dos elementos de Z sea menor a $\frac{\beta}{2}$. Tenemos que $P = \{[z_{i-1}, z_i), [z_{k-1}, z_k] \mid i \in \{1,\ldots,k-1\}\}$ es una partición de I cuyos integrantes son intervalos. Dado $x \in A \in P$, tenemos que si $y \in A$, entonces $\mid x - y \mid \leq diam(A) \leq \frac{\beta}{2}$, es decir, $A \subseteq (x-\beta, x+\beta)$. Y por la definición de β, existe $A^* \in \alpha$ tal que $A \subseteq (x-\beta, x+\beta) \subseteq A^*$, es decir, para todo $A \in P$ existe $B \in \alpha$ tal que $A \subseteq B$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para cada cadena $\{A_1,\ldots,A_n\} \in P^{(n)}$ y para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$, por lo anterior, existe $B_i \in \alpha$ tal que, $A_i \subseteq B_i$. Por lo tanto, $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$. Sea D el conjunto cuyos elementos son los conjuntos abiertos $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i)$ recién formados. Primeramente, cada elemento de D contiene al menos un elemento de la forma $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$, con $(A_0,\ldots,A_{n-1}) \in P^{(n)}$; así, por la Observación 2.3.4, se tiene que $Card(D) \leq C_n(P)$. Por la Observación 2.3.5 inciso (i), D cubre a I, y, además, $D \subseteq \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)$. Por lo tanto, $N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \leq Card(D)$, y, consecuentemente $N\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \leq C_n(P)$. Así, tomando logaritmo natural, para toda $n \in \mathbb{N}$, $H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \leq \log C_n(P)$; lo cual implica que $h(f,\alpha) \leq h^*(f,P)$; por lo tanto,

$$0 < \log 3 < c < h(f,\alpha) < h^*(f,P). \tag{2.1}$$

Por otro lado, sea $n \in \mathbb{N}$. Como $P^{(n)} = \biguplus_{A\in P} P_A^{(n)}$, entonces, $C_n(P) = \sum_{A\in P} C_n(P \mid A)$. En consecuencia, para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\frac{logC_n(P)}{n} = \frac{\log \sum_{A\in P} C_n(P|A)}{n}$; por lo tanto, por el Lema 2.3.7, existe $A \in P$ tal que

$$h^*(f,P) = \limsup \frac{\log C_n(P)}{n} = \limsup \frac{\log \sum_{A\in P} C_n(P \mid A)}{n} = \limsup \frac{\log C_n(P \mid A)}{n},$$

así, el conjunto

$$F = \left\{A \in P \mid h^*(f,P) = \limsup \frac{\log C_n(P \mid A)}{n}\right\}$$

es diferente del vacío.

Afirmación 1: Para toda $A \in F$, $h^*(f,P) = \limsup \frac{\log C_n(F|A)}{n}$.

Razón: Si $P = F$, entonces no hay nada que probar. Supongamos que $F \subsetneq P$. Sea $A \in F$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Sea $(A_0,\ldots,A_{n-1}) \in P_A^{(n)}$. Como $A_0 = A \in F$, existe un natural máximo $m \in \{1,\ldots,n\}$ tal que para toda $i \in \{0,\ldots,m-1\}$ se tiene que $A_i \in F$. En caso de que $m = n$, resulta que $(A_0,\ldots,A_{n-1}) \in F_A^{(n)}$, y en el caso en el que $1 \leq m \leq n-1$, tenemos que $(A_0,\ldots,A_{m-1}) \in F_A^{(n)}$ y $(A_m,\ldots,A_{n-1}) \in P_B^{(n)}$ para algún $B \in P - F$. Para cada $k \in \{1,\ldots,n-1\}$, sea Q_k el conjunto de cadenas de longitud n sobre P que comienzan en A tales que son una cadena de longitud k sobre F seguidas de una cadena de longitud

$n-k$ sobre $P-F$. Sea $Q_n = F_A^{(n)}$. Tenemos que para todo $k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$Card\,(Q_k) \leq C_k\,(F \mid A) \sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B), \tag{2.2}$$

donde convenimos que si $n=k$, $\sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B) = 1$. Sea $s : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por

$$s(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ log\,(x) & si \quad\quad 1 \leq x \end{cases}$$

Veamos que para toda $k \in \{1,\ldots,n\}$,

$$Card\,(Q_k) \leq \exp\left(s\,(C_k\,(F \mid A)) + \log \sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B)\right). \tag{2.3}$$

La expresión $\log \sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B)$ está bien definida gracias a la Observación 2.3.5 inciso (iv) y a que $\sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B) = 1$, si $n=k$. Sea $k \in \{1,\ldots,n\}$. Si $Q_k = \emptyset$, entonces, dado que la exponencial nunca se anula, la desigualdad es inmediata. Si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $F_A^{(k)} \neq \emptyset$. Por (2.2), $\log Card\,(Q_k) \leq \log Card\,(Q_k) + \log \sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B)$, y tomando la exponencial, obtenemos la desigualdad.

Tenemos que $P_A^{(n)} = \biguplus_{k=1}^{n} Q_k$. Esto implica que $C_n\,(P \mid A) = \sum_{k=1}^{n} Card\,(Q_k)$, y por (2.3), tenemos que

$$C_n\,(P \mid A) \leq \sum_{k=1}^{n} \exp\left(s\,(C_k\,(F \mid A)) + \log \sum_{B\in P-F} C_{n-k}\,(P \mid B)\right). \tag{2.4}$$

Para $j \in \{1,\ldots,n\}$, sea $a_j = s\,(C_j\,(F \mid A))$, y para $j \in \{0,\ldots,n\}$, sea $b_j = \log \sum_{B\in P-F} C_j\,(P \mid B)$, donde resulta, por la convención sobre la suma, que b_0 está bien definida y que es igual a 0. Así, (2.4) se convierte en

$$C_n\,(P \mid A) \leq \sum_{k=1}^{n} \exp\,(a_k + b_{n-k}). \tag{2.5}$$

Dado que (2.5) se obtuvo para una $n \in \mathbb{N}$ arbitraria y dado que $A \in F$, tenemos que

$$h^*\,(f,P) = \limsup \frac{\log C_n\,(P \mid A)}{n} \leq \limsup \frac{\log \sum_{k=1}^{n} \exp\,(a_k + b_{n-k})}{n};$$

en consecuencia, por el Lema 2.3.8,

$$h^*\,(f,P) \leq \max\left\{\limsup \frac{a_n}{n}, \limsup \frac{b_n}{n}\right\}. \tag{2.6}$$

Por otro lado, para todo $B \in P-F$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $P_B^{(n)} \subseteq P^{(n)}$, lo cual implica que para todo $B \in P-F$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $C_n\,(P \mid B) \leq C_n\,(P)$. Así, por la definición de F, para todo $B \in P-F$, $\limsup \frac{\log C_n(P|B)}{n} < h^*\,(f,P)$, es decir,

$$\max\left\{\limsup \frac{\log C_n\,(P \mid B)}{n} \mid B \in P-F\right\} < h^*\,(f,P)\,.$$

Ahora, por el Lema 2.3.7,

$$\limsup \frac{b_n}{n} = \limsup \frac{\log \sum_{B \in P-F} C_n (P \mid B)}{n} = \max \left\{ \limsup \frac{\log C_n (P \mid B)}{n} \mid B \in P - F \right\}.$$

Por lo tanto,

$$\limsup \frac{b_n}{n} < h^* (f, P) ;$$

y, por (2.6), concluimos que

$$h^* (f, P) \leq \limsup \frac{a_n}{n} = \limsup \frac{s (C_n (F \mid A))}{n}. \tag{2.7}$$

Supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_A^{(m)} = \emptyset$ y sea $n \geq m$. Si hubiera una cadena de longitud n sobre F que comience en A, digamos, $(A, \ldots, A_{m-1}, \ldots, A_{n-1})$, entonces $(A, \ldots, A_{m-1}) \in F_A^{(m)}$; lo cual contradice nuestra suposición. Con lo cual para todo $n \geq m$, $F_A^{(m)} = \emptyset$; esto, junto con (2.1), implica que para todo $n \geq m$, $\limsup \frac{s(C_n(F|A))}{n} = 0 < h^* (f, P)$. Lo anterior es una contradicción con (2.7), así, para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_A^{(n)} \neq \emptyset$. Por lo tanto, (2.7) se reescribe como

$$h^* (f, P) \leq \limsup \frac{\log C_n (F \mid A)}{n}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_A^{(n)} \subseteq P_A^{(n)}$, resulta que

$$\limsup \frac{\log C_n (F \mid A)}{n} \leq h^* (f, P) .$$

Dado que $A \in F$ fue arbitraria, terminamos de probar la afirmación.

Afirmación 2: Para toda $A \in F$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $N_n \in \mathbb{N}$, con $N_n \geq n$, tal que $\exp (cN_n) < C_{N_n} (F \mid A)$ y $3C_{N_n} (F \mid A) \leq C_{N_n+1} (F \mid A)$.

Razón: Sea $A \in F$. Supongamos lo contrario, supongamos que existe un natural N tal que para todo $n \geq N$, si $\exp (cn) < C_n (F \mid A)$, entonces $C_{n+1} (F \mid A) < 3C_n (F \mid A)$, es decir, para todo $n \geq N$ se tiene que

$$\text{si } c < \frac{\log C_n (F \mid A)}{n}, \text{ entonces } C_{n+1} (F \mid A) < 3C_n (F \mid A) . \tag{2.8}$$

Ahora, veamos que para todo natural $q \geq N$ existe un natural $n_q \geq q$ tal que $\frac{\log C_{n_q}(F|A)}{n_q} \leq c$. Supongamos que no fuera así, es decir, supongamos que existe un $q \geq N$ tal que para todo $n \geq q$,

$$c < \frac{\log C_n (F \mid A)}{n}.$$

Entonces, por (2.8), tenemos que

$$C_{q+1} (F \mid A) < 3C_q (F \mid A) .$$

Supongamos que para $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $C_{q+i}(F \mid A) < 3^i C_q(F \mid A)$. Como $q+i \geq q$, tenemos que

$$c < \frac{\log C_{q+i}(F \mid A)}{q+i};$$

así, por (2.8),

$$C_{q+i+1}(F \mid A) < 3C_{q+i}(F \mid A) = 3 \cdot 3^i C_q(F \mid A) = 3^{i+1} C_q(F \mid A).$$

Por inducción, para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$C_{q+i}(F \mid A) < 3^i C_q(F \mid A).$$

Lo cual implica que para toda $i \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\log C_{q+i}(F \mid A)}{i} < \log 3 + \frac{\log C_q(F \mid A)}{i}$$

y, por la Afirmación 1,

$$h^*(f, P) = \limsup \frac{\log C_n(F \mid A)}{n} \leq \log 3.$$

Lo anterior es una contradicción con (2.1). Con esto, tenemos que el conjunto

$$S = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{\log C_n(F \mid A)}{n} \leq c \right\}$$

es no vacío.

Sean $n \in S$ y $r \in \mathbb{N}$ tales que para todo $m \in \{n+1, \ldots, n+r\}$ se cumple que $c < \frac{\log C_m(F|A)}{m}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, cada cadena de longitud $k+1$ sobre F que comienza con A es una cadena de longitud k que comienza con A seguida de una cadena de longitud 1, ambas sobre F. De donde se sigue que para toda $k \in \mathbb{N}$, $C_{k+1}(F \mid A) \leq Card(F)\, C_k(F \mid A)$. Aplicando (2.8) r menos un veces tenemos que

$$C_{n+r}(F \mid A) \leq Card(F)\, C_{n+r-1}(F \mid A) < Card(F)\, 3^{r-1} C_n(F \mid A); \tag{2.9}$$

esto implica que

$$\log C_{n+r}(F \mid A) < \log Card(F) + (r-1)\log 3 + \log C_n(F \mid A).$$

Dado que $c < \frac{\log C_{n+r}(F|A)}{n+r}$,

$$c(n+r) < \log C_{n+r}(F \mid A) < \log Card(F) + (r-1)\log 3 + \log C_n(F \mid A).$$

Ahora, como $n \in S$, $\frac{\log C_n(F|A)}{n} \leq c$; lo cual implica que

$$c(n+r) < \log Card(F) + (r-1)\log 3 + nc.$$

Por lo tanto,

$$r(c - \log 3) < \log Card(F) - \log 3;$$

con lo cual concluimos que

$$r < \frac{\log Card\,(F) - \log 3}{c - \log 3} = t^* < t^* + 2 = t.$$

De aquí podemos sacar dos conclusiones. La primera es que como $r > 0$ por ser un número natural y por la suposición de $c > \log 3$, tenemos que $\log Card(F) > \log 3$, es decir que, $Card(F) > 3$. La segunda es que por (2.9), dado que $r < t$,

$$C_{n+r}\,(F \mid A) < Card\,(F)\,3^{t-1} C_n\,(F \mid A)\,. \tag{2.10}$$

Ya que c, r y n son números positivos y la función exponencial es estrictamente creciente

$$\exp(nc) < \exp((n+r)c);$$

además, como $t > 2$,

$$1 < Card(F)3^{t-1};$$

así, como $\frac{\log C_n(F|A)}{n} \leq c$, tenemos que

$$C_n\,(F \mid A) \leq \exp\,(nc) < Card\,(F)\,3^{t-1} \exp\,((n+r)\,c)\,. \tag{2.11}$$

Sustituyendo la primera desigualdad de (2.11) en (2.10), y aplicando el hecho de que la función exponencial es estrictamente creciente, obtenemos que

$$C_{n+r}\,(F \mid A) < Card\,(F)\,3^{t-1} \exp\,(nc) < Card\,(F)\,3^{t-1} \exp\,((n+r)\,c)\,. \tag{2.12}$$

Así, por la segunda desigualdad de (2.11) y por (2.12), tenemos que para toda $k \in \{0, \ldots, r\}$,

$$C_{n+k}\,(F \mid A) < Card\,(F)\,3^{t-1} \exp\,((n+r)\,c)\,. \tag{2.13}$$

Por lo tanto, (2.13) se cumple para cualquier $n \in S$ y cualquier $r \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \in \{1, \ldots, r\}$, $m \notin S$. Esto quiere decir que fijando $n_N \in S$, tenemos que para toda $n \geq n_N$ se tiene que

$$C_n\,(F \mid A) < Card\,(F)\,3^{t-1} \exp\,(nc)\,.$$

Esto implica que para toda $n \geq n_N$,

$$\frac{\log C_n\,(F \mid A)}{n} < \frac{Card\,(F)}{n} + \frac{(t-1)\log 3}{n} + c.$$

Por la desigualdad anterior, la Afirmación 1 y el hecho de que t es independiente de n , tenemos que

$$h^*\,(F \mid A) = \limsup \frac{\log C_n\,(F \mid A)}{n} \leq c;$$

lo cual es una contradicción con (2.1). Esto termina la prueba de la Afirmación 2.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $\{A_0, \ldots, A_{n-1}\} \subseteq F$. Definimos $A_0^* = A_0$ y si $n \geq 2$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A_i^* = A_i \cap f\left(A_{i-1}^*\right)$. Notemos que por definición y por la continuidad de f, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, A_i^* es un intervalo.

Afirmación 3: $A_{n-1}^* = f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right)$.

Razón: Dada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que $x_i \in A_i^* = A_i \cap f\left(A_{i-1}^*\right)$ si y sólo si existe $x_{i-1} \in A_{i-1}^*$ tal que $f(x_{i-1}) = x_i \in A_i$. Por lo tanto, $x_{n-1} \in A_{n-1}^*$ si y sólo si existe $x_0 \in A_0^* = A_0$ tal que $f(x_0) \in A_1, \ldots, f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} \in A_{n-1}$. Esta última afirmación es equivalente a que existe $x_0 \in \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)$ y $f^{n-1}(x_0) = x_{n-1} \in A_{n-1}$; que a su vez es equivalente a que $x_{n-1} \in f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right)$.

Afirmación 4: $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F^{(n)}$ si y sólo si $A_{n-1}^* \neq \emptyset$.

Razón: $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F^{(n)}$ equivale a $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \neq \emptyset$. Además, $\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \neq \emptyset$ es equivalente a $f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right) \neq \emptyset$; y $f^{n-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i)\right) \neq \emptyset$ pasa si y sólo si $A_{n-1}^* \neq \emptyset$, por la Afirmación 3.

Afirmación 5: Si $A_{n-1}^* \neq \emptyset$, entonces, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A_i^* \neq \emptyset$.

Razón: Si para alguna $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, $A_j^* = \emptyset$, entonces sus imágenes bajo iteraciones de f son vacías, lo cual implica que $A_{n-1}^* = \emptyset$.

Afirmación 6: Existe una sucesión de familias de intervalos $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que cumple con lo siguiente:

(a) $\delta_1 = F$, y

(b) para todo $n \in \mathbb{N}$, δ_n es una familia de intervalos ajena dos a dos.

Además, para todo número natural $n \geq 2$ y para toda $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F^{(n)}$ existe un intervalo $J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})} \in \delta_n$ que satisface:

(*i*) $f^{n-1}\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right) = A_{n-1}^*$.

(*ii*) Para toda $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f^i\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right) \subseteq A_i^* \subseteq A_i$.

(*iii*) $J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})} \subseteq J_{(A_0,\ldots,A_{n-2})} \subseteq \ldots \subseteq J_{(A_0)}$, donde, $J_{(A_0)} = A_0 \in F$.

Razón: Para $n = 1$, tomamos $\delta_1 = F$, donde para todo $A \in F$, $J_{(A)} = A$. Sea $n = 2$ y sea $(A_0, A_1) \in F^{(2)}$. Por la Afirmación 4, $A_1^* \neq \emptyset$. Así, $A_1^* \subseteq f(A_0^*) = f(A_0)$. Por el Teorema 2.3.6, existe un intervalo $J_{(A_0,A_1)} \subseteq A_0$ intervalo tal que $f\left(J_{(A_0,A_1)}\right) = A_1^* \subseteq A_1$. Sea

$$\delta_2 = \left\{J_{(A_0,A_1)}\right\}_{(A_0,A_1)\in F^{(2)}}.$$

Falta ver que δ_2 es una familia de intervalos ajena dos a dos. Sean $J_{(A_0,A_1)}, J_{(B_0,B_1)} \in \delta_2$ dos intervalos distintos. Esto implica que $(A_0, A_1) \neq (B_0, B_1)$; consecuentemente existe $i \in \{0, 1\}$ tal que $A_j \neq B_j$. Dado que $F \subseteq P$ es una familia ajena dos a dos, $A_j \cap B_j = \emptyset$. Si existiera $z \in J_{(A_0,A_1)} \cap J_{(B_0,B_1)}$, entonces

$$f^j(z) \in f^j\left(J_{(A_0,A_1)}\right) \cap f^j\left(J_{(B_0,B_1)}\right) \subseteq A_j \cap B_j;$$

lo cual contradice que A_j y B_j sean ajenos. Por lo tanto,

$$J_{(A_0,A_1)} \cap J_{(B_0,B_1)} = \emptyset.$$

Supongamos que la afirmación es válida para $n = k \geq 2$, es decir, supongamos que está definida una familia $\delta_k = \left\{J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}\right\}_{(A_0,\ldots,A_{k-1})\in F^{(k)}}$ de intervalos ajenos dos a dos que cumple con (i), (ii) y (iii). Sea $(A_0, \ldots, A_k) \in F^{(k+1)}$. Por la Afirmación 4, $A_k^* \neq \emptyset$. Como $(A_0, \ldots, A_{k-1}) \in F^{(k)}$, existe un intervalo $J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})} \in \delta_k$ que cumple con (i), (ii) y (iii). Como $J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}$ cumple (i),

$$A_k^* \subseteq f\left(A_{k-1}^*\right) = f\left(f^{k-1}\left(J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}\right)\right) = f^k\left(J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}\right).$$

Como A_k^* es intervalo, entonces, por el Teorema 2.3.6, existe un intervalo $J_{(A_0,\ldots,A_k)} \subseteq J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}$ tal que

$$f^k\left(J_{(A_0,\ldots,A_k)}\right) = A_k^*.$$

Dado que $J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}$ cumple (ii), tenemos que para todo $i \in \{0, \ldots, k\}$,

$$f^i\left(J_{(A_0,\ldots,A_k)}\right) \subseteq A_i^* \subseteq A_i.$$

Y dado que $J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})}$ cumple (iii), resulta que

$$J_{(A_0,\ldots,A_k)} \subseteq J_{(A_0,\ldots,A_{k-1})} \subseteq \ldots \subseteq J_{(A_0)}.$$

Sea $\delta_{k+1} = \left\{J_{(A_0,\ldots,A_k)}\right\}_{(A_0,\ldots,A_k)\in F^{(k+1)}}$. Falta ver que δ_{k+1} es una familia de intervalos ajena dos a dos. Sean $J_{(A_0,\ldots,A_k)}, J_{(B_0,\ldots,B_k)} \in \delta_k$ intervalos distintos. Así, $(A_0, \ldots, A_k) \neq (B_0, \ldots, B_k)$; consecuentemente existe $j \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $A_j \neq B_j$. Dado que $A_j, B_j \in F$, tenemos que $A_j \cap B_j = \emptyset$. Si existiera $z \in J_{(A_0,\ldots,A_k)} \cap J_{(B_0,\ldots,B_k)}$, entonces

$$f^j(z) \in f^j\left(J_{(A_0,\ldots,A_k)}\right) \cap f^j\left(J_{(B_0,\ldots,B_k)}\right) \subseteq A_j \cap B_j;$$

lo cual es contradice el hecho de que A_j y B_j son ajenos. Por lo tanto,

$$J_{(A_0,\ldots,A_k)} \cap J_{(B_0,\ldots,B_k)} = \emptyset.$$

Por inducción, queda probada la afirmación.

Dado $n \in \mathbb{N}$, observemos que si $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F^{(n)}$ y $A_n \in F$, entonces $f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right) \cap A_n = f\left(A^*_{n-1}\right) \cap A_n = A^*_n$. Por la Afirmación 4, concluimos que $f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right) \cap A_n \neq \emptyset$ si y sólo si $(A_0, \ldots, A_n) \in F^{(n+1)}$. Así, tenemos que si $A \in F$, entonces $f^n\left(J_{(A,\ldots,A_{n-1})}\right) \cap A_n \neq \emptyset$ es equivalente a que $(A, \ldots, A_n) \in F_A^{(n+1)}$; lo cual, aunado al hecho de que F es ajena dos a dos, prueba la siguiente afirmación:

Afirmación 7: Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $A \in F$,

$$C_{n+1}(F \mid A) = \sum_{(A_0,\ldots,A_{n-1}) \in F_A^{(n)}} Card\left(\left\{B \in F \mid f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right) \cap B \neq \emptyset\right\}\right).$$

Ahora, para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $A, B \in F$, definimos

$$\gamma(A, B, n) = \left\{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^{(n)} \mid B \subseteq f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right)\right\}.$$

Afirmación 8: Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ y para todo $A, B, C \in F$,

$$Card(\gamma(A, B, n)) \cdot Card(\gamma(B, C, m)) \leq Card(\gamma(A, C, n+m)).$$

Razón: Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $A, B, C \in F$. Sean $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in \gamma(A, B, n)$ y $(B_0, \ldots, B_{n-1}) \in \gamma(B, C, m)$. Por la Afirmación 6 inciso (iii), $J_{(B_0,\ldots,B_{m-1})} \subseteq J_{(B_0)} = B_0 = B \subseteq f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right)$; lo cual implica, por el Teorema 2.3.6, que existe un intervalo $K \subseteq J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ tal que $f^n(K) = J_{(B_0,\ldots,B_{m-1})}$. Dado que $J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}$ cumple (ii) de la Afirmación 6, para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $f^i(K) \subseteq A_i$, y para todo $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, $f^{n+j}(K) = f^j\left(J_{(B_0,\ldots,B_{m-1})}\right) \subseteq B_j$. Así, tenemos que $K \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \cap \bigcap_{i=m}^{n+m-1} f^{-i}(B_{i-n})$; y ya que $K \neq \emptyset$, $(A_0, \ldots, A_{n-1}, B_0, \ldots, B_{m-1}) \in F^{(n+m)}$. Por la Afirmación 3, tenemos que

$$f^{n+m-1}\left(\bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(A_i) \cap \bigcap_{i=m}^{n+m-1} f^{-i}(B_{i-n})\right) = D^*_{n+m-1},$$

donde estamos pensando que $(D_0, \ldots, D_{n+m-1}) = (A_0, \ldots, A_{n-1}, B_0, \ldots, B_{m-1})$. Por la Afirmación 6 inciso (i),

$$D^*_{n+m-1} = f^{n+m-1}\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1},B_0,\ldots,B_{m-1})}\right);$$

y como $f^{n+m-1}(K) \subseteq D^*_{n+m-1}$,

$$f^{n+m-1}(K) \subseteq f^{n+m-1}\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1},B_0,\ldots,B_{m-1})}\right).$$

Con esto concluimos que

$$C \subseteq f^m\left(J_{B_0,\ldots,B_{m-1}}\right) = f^{n+m}(K) \subseteq f^{n+m}\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1},B_0,\ldots,B_{m-1})}\right).$$

Por lo tanto, $(A_0, \ldots, A_{n-1}, B_0, \ldots, B_{m-1}) \in \gamma(A, C, n+m)$. Es decir, por cada elemento de $\gamma(A, B, n)$ y cada elemento de $\gamma(B, C, m)$ existe al menos un elemento de $\gamma(A, C, n+m)$, lo cual prueba la afirmación.

Afirmación 9: Para cada $A \in F$ y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_{n+1}(F \mid A) - 2C_n(F \mid A) \leq \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, n)).$$

Razón: Seam $A \in F$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, n)) &= \sum_{B \in F} Card\left(\left\{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^{(n)} \mid B \subseteq f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)\right\}\right) \\
&= Card\left(\left\{((A_0, \ldots, A_{n-1}), B) \in F^{(n)} \times F \mid A_0 = A,\ B \subseteq f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)\right\}\right) \\
&= \sum_{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^n} Card\left(\left\{B \in F \mid B \subseteq f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)\right\}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como f^n es continua, $f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)$ es un intervalo; así, si $f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)$ intersecta a k intervalos de F, dado que F es ajena dos a dos, entonces $f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)$ contiene al menos a $k-2$ de dichos intervalos. Por lo tanto, para todo $(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^{(n)}$,

$$Card\left(\left\{B \in F \mid f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right) \cap B \neq \emptyset\right\}\right) - 2 \leq Card\left(\left\{B \in F \mid B \subseteq f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right)\right\}\right).$$

Sustituyendo esto en la ecuación anterior obtenemos

$$\sum_{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^{(n)}} \left[Card\left(\left\{B \in F \mid f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right) \cap B \neq \emptyset\right\}\right) - 2\right] \leq \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, n)),$$

es decir,

$$\sum_{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_A^{(n)}} Card\left(\left\{B \in F \mid f^n\left(J_{(A_0, \ldots, A_{n-1})}\right) \cap B \neq \emptyset\right\}\right) - 2C_n(F \mid A) \leq \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, n)).$$

Sustituyendo la igualdad de la Afirmación 7 en la desigualdad anterior, obtenemos la Afirmación 9.

Afirmación 10: Dada $n \in \mathbb{N}$ existe un natural $N_n \geq n$ dado por la afirmación 2. Así, para toda $A \in F$ se tiene que $\exp(cN_n) < \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, N_n))$.

Razón: Sea $A \in F$. Por la Afirmación 9, $C_{N_n+1}(F \mid A) - 2C_{N_n}(F \mid A) \leq \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, N_n))$; y dado que por la Afirmación 2, $\exp(cN_n) < C_{N_n}(F \mid A)$ y $3C_{N_n}(F \mid A) \leq C_{N_n+1}(F \mid A)$, concluimos que

$$\exp(cN_n) < C_{N_n}(F \mid A) = 3C_{N_n}(F \mid A) - 2C_{N_n}(F \mid A) \leq \sum_{B \in F} Card(\gamma(A, B, N_n)).$$

Lo cual demuestra la Afirmación 10.

Afirmación 11: Para toda $A \in F$ existe $B_A \in F$ tal que

$$\lambda < c \leq \limsup \frac{s\left(Card\left(\gamma\left(A, B_A, n\right)\right)\right)}{n}.$$

Razón: Sea $A \in F$. Por la Afirmación 2 y la Afirmación 10, existe una infinidad de naturales m tales que

$$\exp\left(cm\right) < \sum_{B \in F} Card\left(\gamma\left(A, B, m\right)\right);$$

en consecuencia

$$c \leq \limsup \frac{s\left(\sum_{B \in F} Card\left(\gamma\left(A, B, n\right)\right)\right)}{n}.$$

Aplicando el Lema 2.3.7, tenemos que existe $B_A \in F$ tal que

$$\limsup \frac{s\left(Card\left(\gamma\left(A, B_A, n\right)\right)\right)}{n} = \limsup \frac{s\left(\sum_{B \in F} Card\left(\gamma\left(A, B, n\right)\right)\right)}{n};$$

así, sustituyendo en la desigualdad anterior, obtenemos la Afirmación 11.

Ahora, definimos la función $\phi : F \longrightarrow F$ como $\phi\left(A\right) = B_A$. Como F es finito, tenemos que ϕ tiene un punto periódico, es decir, existe $V \in F$ y existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^p\left(V\right) = V$ y tal que para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\phi^i\left(V\right) \neq V$.

Afirmación 12: Sea $G = \{m_i \mid i \in \{0, \ldots, p-1\}\}$ un conjunto de p naturales. Para cada $m_i \in G$, donde $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, existe un natural $n_i \geq m_i$ tal que

$$\exp\left(\lambda n_i\right) \leq Card\left(\gamma\left(\phi^i\left(V\right), \phi^{i+1}\left(V\right), n_i\right)\right).$$

Razón: Sea $m_i \in G$, donde $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Como $\phi^i\left(V\right) \in F$, por la Afirmación 11 y la definición de ϕ,

$$\lambda < \limsup \frac{s\left(Card\left(\gamma\left(\phi^i\left(V\right), \phi^{i+1}\left(V\right), n\right)\right)\right)}{n}.$$

De la desigualdad anterior tenemos que existe $n_i \geq m_i$ tal que

$$\lambda < \frac{s\left(Card\left(\gamma\left(\phi^i\left(V\right), \phi^{i+1}\left(V\right), n_i\right)\right)\right)}{n_i};$$

lo cual implica que $\lambda n_i < s\left(Card\left(\gamma\left(\phi^i\left(V\right), \phi^{i+1}\left(V\right), n_i\right)\right)\right)$. Por definición de s y dado que $\lambda n_i > 0$, obtenemos que $\lambda n_i < \log\left(Card\left(\gamma\left(\phi^i\left(V\right), \phi^{i+1}\left(V\right), n_i\right)\right)\right)$. Aplicando la exponencial, obtenemos la Afirmación 12.

A continuación, concluiremos la prueba. Tenemos que $N > 0$ es un real arbitrario, por lo tanto, podemos encontrar un conjunto de naturales G de p elementos tal que la suma de dichos p elementos sea mayor a N. Así, para cada $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, sea $n_i \in \mathbb{N}$ dado por la Afirmación 12. Por lo mencionado anteriormente, $N < \sum_{i=0}^{p-1} n_i$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\exp\left(\lambda \sum_{i=0}^{p-1} n_i\right) &= \prod_{i=0}^{p-1} \exp(\lambda n_i) \\ &\leq \prod_{i=0}^{p-1} Card\left(\gamma\left(\phi^i(V), \phi^{i+1}(V), n_i\right)\right) && \text{(por la Afirmación 12)} \\ &\leq Card\left(\gamma\left(V, V, \sum_{i=0}^{p-1} n_i\right)\right) && \text{(aplicando la Afirmación 8 en } p \text{ ocasiones).}\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\gamma\left(V, V, n = \sum_{i=0}^{p-1} n_i\right) = \left\{(A_0, \ldots, A_{n-1}) \in F_V^{(n)} \mid V \subseteq f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})}\right)\right\}$$

tiene al menos k elementos, donde $k \geq \exp(n\lambda) > 3$, ya que $\lambda > \log 3$. Digamos que dichos elementos son las cadenas $(A_0, \ldots, A_{n-1})_1, \ldots, (A_0, \ldots, A_{n-1})_k$. Así, tenemos que existen

$$J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_1}, \ldots, J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_k}$$

intervalos ajenos dos a dos (ya que δ_n es ajena dos a dos), tales que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$V \subseteq f^n\left(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_j}\right)$$

y donde, por la Afirmación 6 inciso (iii), para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_j} \subseteq A_0 = V.$$

Notemos, además, que como los intervalos en F no son degenerados, ninguno de los intervalos en la Afirmación 6 es degenerado. Entonces,

$$\left\{\overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_1}}, \ldots, \overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_k}}\right\}$$

es una familia de intervalos cerrados con interiores ajenos dos a dos tal que para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\bigcup_{j=1}^{k} \overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_j}} \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{f^n(J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_j})} = f^n(\overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_j}}).$$

Por lo tanto,

$$\left\{\overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_1}}, \ldots, \overline{J_{(A_0,\ldots,A_{n-1})_k}}\right\}$$

es una k-herradura para f^n, donde $n = \sum_{i=0}^{p-1} n_i > N$; y dado que $k \geq \exp(n\lambda)$,

$$\frac{\log k}{n} \geq \lambda.$$

Ahora, veamos que se cumple el teorema para el caso $0 < \lambda < h(f)$ y $N > 0$. Sea c tal que $\lambda < c < h(f)$ y sea $q \in \mathbb{N}$ tal que $qc > \log 3$ y $q(c - \lambda) \geq \log 2$. Por el Teorema 2.1.11, $h(f^q) = qh(f) > qc \geq \log 3$. Aplicando lo que hemos demostrado a f^q, tenemos que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n > N$, $\frac{\log k}{n} \geq qc$ y tales que f^{nq} tiene una k-herradura, digamos $\{J_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que los intervalos de la k-herradura fueron indexados de izquierda a derecha. Sea $\left[\frac{k}{2}\right]$ el entero mínimo que es mayor o igual a $\frac{k}{2}$. Como $\frac{\log k}{n} \geq qc > \log 3$, entonces $k > 3^n \geq 3$. De este modo, el conjunto $\{J_i \mid i \in \{1, \ldots, k\}, i \text{ impar}\}$ forma una $\left[\frac{k}{2}\right]$-herradura estricta para f^{qn}. Además, como $\left[\frac{k}{2}\right] \geq \frac{k}{2}$,

$$\frac{\log\left[\frac{k}{2}\right]}{qn} \geq \frac{\log k - \log 2}{qn} = \frac{\log k}{qn} - \frac{\log 2}{qn} \geq c - \frac{\log 2}{qn}. \tag{2.14}$$

Dado que $q(c - \lambda) \geq \log 2$, entonces $c - \frac{\log 2}{q} \geq \lambda$; que, sustituyéndolo en (2.14) obtenemos que $\frac{\log\left[\frac{k}{2}\right]}{qn} \geq \lambda$. Además, como $n > N$, $nq > N$. Con esto, queda probado el teorema. ■

Teorema 2.3.10. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $h(f) > 0$.

(ii) *f tiene un punto periódico cuyo periodo no es de la forma 2^k, con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

(iii) *Existe un número natural n para el cual f^n tiene una herradura estricta.*

Demostración:

Probemos que (i) implica (ii). Como $h(f) > 0$, por el Teorema 2.3.9, tenemos que existe un número natural n para el cual f^n tiene una herradura; así, por la Proposición 2.2.11, f^n tiene puntos periódicos de todos los periodos. Esto implica que f tiene algún punto periódico que no es potencia de 2.

Veamos que (ii) implica (iii). Cualquier número natural que no sea potencia de 2 puede ser escrito de la forma $2^w p$, donde p es un número impar mayor que 1 y $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, si f tiene un punto periódico de periodo $2^w p$ con p impar mayor que 1 y con $w \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces f^{2^w} tiene un punto periódico de periodo p. Por la Proposición 2.2.12, $f^{2^w} \circ f^{2^w} = f^{2^w + 2^w} = f^{2 \cdot 2^w} = f^{2^{w+1}}$ tiene una herradura estricta.

Por último, supongamos que f^n tiene una herradura estricta. Por el Teorema 2.3.1, $h(f^n) \geq \log 2 > 0$; consecuentemente, por la Proposición 2.1.11, $h(f) > 0$. Esto hace ver que (iii) implica (i). ■

Capítulo 3

Conjunto de Cantor δ-revuelto I

El objetivo de este capítulo es probar que dada una función continua $f : J \longrightarrow J$, donde J es un intervalo compacto, tal que $h(f) = 0$: Si f tiene un par de Li-Yorke, entonces existe una $\delta > 0$ y existe $C \subseteq J$ un conjunto de Cantor tales que C es un conjunto δ-revuelto para f.

De aquí en adelante todos los sistemas dinámicos considerados son sistemas donde el espacio es un intervalo compacto con la métrica que hereda de $\mathbb{R}$ dada por el valor absoluto. Antes de comenzar con el siguiente lema es conveniente agregar notación. Sean $A, B \subseteq I$ no vacíos. El símbolo $A < B$ quiere decir que para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$, $a < b$. Análogamente, si $y \in I$, la expresión $y < A$ significa que para todo $a \in A$, $y < a$. Un significado análogo tiene la expresión $A < y$. También es conveniente mencionar que en varias de las pruebas se utiliza el hecho de que los conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos. Una prueba de este hecho se puede encontrar en la página 80 de [9].

Lema 3.0.1. *Sean (I, f) un sistema dinámico tal que f^2 no tiene herradura y $x \in I$ tal que su órbita es infinita. Si existe un natural $k \geq 2$ tal que $f^k(x) < x < f(x)$ ó $f(x) < x < f^k(x)$, entonces existen $z \in I$ punto fijo de f y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para toda $n \geq N$, $z < f^n(x)$ si y sólo si $f^{n+1}(x) < z$.*

Demostración:

Sean $U = \{y \in Orb_f(x) \mid y < f(y)\}$ y $L = \{y \in Orb_f(x) \mid f(y) < y\}$. Como existe $k \geq 2$ tal que $f^k(x) < x < f(x)$ ó $f(x) < x < f^k(x)$. Supongamos que $f^k(x) < x < f(x)$. Dado que $x < f(x)$, entonces $x \in U$. Ahora, dado que $k \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}$ está bien ordenado, podemos considerar al mínimo $l \in \mathbb{N}$ que cumple la misma condición que k. Por la definición de l y dado que x no es un punto fijo (su órbita es infinita), tenemos que $f^l(x) < x < f^{l-1}(x)$; por lo tanto $f^{l-1}(x) \in L$. Así, L y U son no vacíos. Análogamente, si suponemos que $f(x) < x < f^k(x)$ podemos llegar a que U y L son no vacíos.

Dado que f^2 no tiene herradura, entonces f no puede tener herradura, ya que si la tuviera una herradura $\{K, J\}$, resulta que $K \cup J \subseteq f(K) \subseteq f(K \cup J) \subseteq f^2(K)$. Análogamente, $K \cup J \subseteq f^2(J)$. Es decir, $\{K, J\}$ es una herradura para f^2; lo cual contradice nuestra hipótesis. Así, por el Lema 2.2.13, existe un punto fijo z de f tal que $z \in [\sup U, \text{ínf}\, L]$. Como z es punto fijo, se tiene que

$$U < z < L. \tag{3.1}$$

Para relajar la notación, definamos para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x_n = f^n(x)$. Remarquemos que como la órbita de x bajo f es infinita, todos sus puntos son distintos. De nuevo, dado que $x_k < x < x_1$ ó $x_1 < x < x_k$, tenemos que alguno de los siguientes conjuntos de naturales

$$S = \{\alpha \geq 2 \mid \text{existe } p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } x_{p+\alpha} < x_p < x_{p+1}\}$$

ó

$$S = \{\alpha \geq 2 \mid \text{existe } p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que } x_{p+1} < x_p < x_{p+\alpha}\}$$

es no vacío. De este modo, existen un par de enteros no negativos (p, r) tales que $0 \leq p$ y $2 \leq r$ tal que r es el mínimo que cumple con $x_{p+r} < x_p < x_{p+1}$ o $x_{p+1} < x_p < x_{p+r}$.

Afirmamos que $r = 2$. Para demostrarlo, supongamos que $3 \leq r$. Supongamos que

$$x_{p+r} < x_p < x_{p+1},$$

el otro caso es totalmente simétrico. Si pasara que $x_{p+1} < x_{p+2}$, tendríamos que $x_{p+r} < x_{p+1} < x_{p+2}$. Definiendo a $p* = p + 1$, tenemos que $p*$ y $r - 1$ son dos enteros no negativos, con $r - 1 \geq 2$, tales que

$$x_{p*+r-1} < x_{p*} < x_{p*+1},$$

lo cual es una contradicción con el hecho de que p y r son números enteros no negativos tales que r es el número natural mayor o igual que dos más pequeño que cumple con $x_{p+r} < x_p < x_{p+1}$. Como la órbita de x es infinita, entonces $x_{p+1} \neq x_{p+2}$; así, tenemos que

$$x_{p+r} < x_p < x_{p+2} < x_{p+1}; \tag{3.2}$$

lo que implica que

$$x_p \in U$$

y

$$x_{p+1} \in L.$$

Por (3.1),

$$x_p < z < x_{p+1}.$$

Sea $q \in \{p + 1, \ldots, p + r - 1\}$ tal que para todo $n \in \{p + 1, \ldots, q\}$,

$$z < x_n$$

y

$$x_{q+1} < z.$$

Por (3.1), tenemos que

$$x_{q+1} < x_{q+2}$$

y también tenemos que para todo $n \in \{p+1, \ldots, q\}$,

$$x_{n+1} < x_n.$$

Dado que r es mínimo, no podemos tener que $x_{p+r} < x_{q+1} < x_{q+2}$, así, tenemos que los puntos de la órbita están acomodados de la siguiente forma:

$$x_{q+1} \leq x_{p+r} < x_p < z < x_q < x_{q-1} < \ldots < x_{p+2} < x_{p+1}. \tag{3.3}$$

Necesariamente $p+2 \leq q$, ya que si $q = p+1$, entonces $x_{p+2} \leq x_{p+r} < x_p < x_{p+1}$; lo cual contradice a (3.2). En consecuencia,

$$[x_p, x_q] \cup [x_q, x_{p+1}] \subseteq [x_{q+1}, x_{p+1}] \subseteq f\left([x_p, x_q]\right);$$

se sigue que

$$[x_p, x_q] \cup [x_q, x_{p+1}] \subseteq f^2\left([x_p, x_q]\right).$$

Por otro lado, $[x_p, x_q] \subseteq [x_{q+1}, x_{p+2}] \subseteq f\left([x_q, x_{p+1}]\right)$, así,

$$[x_p, x_q] \cup [x_q, x_{p+1}] \subseteq f\left([x_p, x_q]\right) \subseteq f^2\left([x_q, x_{p+1}]\right).$$

Con esto, tenemos que

$$\left\{[x_p, x_q], [x_q, x_{p+1}]\right\}$$

es una herradura para f^2; lo cual es una contradicción con nuestra hipótesis. Por lo tanto, $r = 2$.

En virtud de lo anterior, aseguramos la existencia de un entero p tal que

$$x_{p+2} < x_p < x_{p+1} \text{ ó } x_{p+1} < x_p < x_{p+2}. \tag{3.4}$$

Ahora, supongamos que la conclusión del teorema no es cierta, es decir, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $i \geq n$ tal que

$$z < x_i \text{ y } z \leq x_{i+1} \text{ o } x_i \leq z \text{y} x_{i+1} < z.$$

Dado que todos los puntos de la órbita son distintos y z es fijo, tenemos que $z < x_i$ y $z < x_{i+1}$ ó $x_i < z$ y $x_{i+1} < z$. Si $z < x_i$, $z < x_{i+1}$ y $x_i < x_{i+1}$, entonces $x_i \in U$ y, por (3.1), $x_i < z$; lo cual no puede ser. Con esto deducimos que $z < x_{i+1} < x_i$. Análogamente, en el caso $x_i < z$ y $x_{i+1} < z$, por (3.1), $x_i < x_{i+1} < z$. En resumen,

$$\text{para todo } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ existe } i \geq n \text{ tal que } z < x_{i+1} < x_i \text{ ó } x_i < x_{i+1} < z. \tag{3.5}$$

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nos fijamos en $i(n)$ el mínimo entero que cumple con (3.5). Sea

$$Q = \{p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid p \text{ cumple con } (3,4)\}.$$

Sea $p \in Q$ tal que $i(p) - p$ sea mínimo. Sea $i = i(p)$. Vamos a suponer que

$$x_{p+2} < x_p < x_{p+1},$$

el otro caso es totalmente análogo.
Por (3.1), $x_p < z < x_{p+1}$; lo cual implica que

$$i \geq p + 2.$$

Si $i = p + 2$, entonces $x_{p+2} < x_{p+3} < z$. Tenemos que

$$[x_{p+3}, z] \cup [z, x_{p+1}] \subseteq f([x_{p+2}, x_p]),$$

por lo tanto,

$$[x_{p+2}, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq f([z, x_{p+1}]) \subseteq f^2([x_{p+2}, x_p]).$$

Ahora, $[z, x_{p+1}] \subseteq f([x_p, z])$, en consecuencia,

$$[x_{p+2}, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq f([z, x_{p+1}]) \subseteq f^2([x_p, z]).$$

Es decir,

$$\{[x_{p+2}, x_p], [x_p, z]\}$$

es una herradura para f^2; lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto,

$$i \geq p + 3.$$

Sea $n \in \{p+1, \ldots, i\}$. Si n cumple con (3.4), como i es el mínimo entero que es mayor que p tal que cumple con (3.5), entonces $i = i(n)$. De este modo, $i - n < i - p$; en contradicción con la elección de p. Por lo tanto, para toda $n \in \{p+1, \ldots, i\}$, n no cumple (3.4), es decir,

$$\text{para toda } n \in \{p+1, \ldots, i\}, \ x_n \text{ no está entre } x_{n+1} \text{ y } x_{n+2}. \tag{3.6}$$

Veamos por inducción sobre n la siguiente afirmación. Para toda $n \in \{p+2, \ldots, i\}$, con $n-p$ par, tenemos que:

$$x_{p+2} < x_{p+4} < x_{p+6} < \ldots < x_{n-2} < x_n < z < x_{n-1} < x_{n-3} < \ldots < x_{p+3} < x_{p+1}. \tag{3.7}$$

Ya teníamos que $x_{p+2} < z < x_{p+1}$, con lo cual se cumple el caso $n = p + 2$.

Supongamos que la afirmación se cumple para alguna $n \in \{p+2, \ldots, i-2\}$ con $n - p$ par. Por (3.1), tenemos que $x_n < x_{n+1}$; y por (3.6), $x_n < x_{n+2}$. También debemos tener que $z < x_{n+1}$. Si no, $x_n < x_{n+1} < z$; lo cual contradice el hecho de que $i - p$ sea mínimo. Por (3.6), x_{n-1} no puede estar entre x_n y x_{n+1}. Además, por hipótesis de inducción $z < x_{n-1}$. En resumen, tenemos que $x_n < z < x_{n+1} < x_{n-1}$. De nuevo, por (3.1), $x_{n+2} < x_{n+1}$; y por (3.1) y (3.6), $x_n < x_{n+2} < z$. Con esto tenemos que (3.7) se cumple para $n+2$, y así, terminamos la inducción.

Ahora probaremos el enunciado siguiente por inducción sobre n. Para toda $n \in \{p+2, \ldots, i\}$, con $n-p$ par,

$$x_n < x_p. \tag{3.8}$$

Ya tenemos que $x_{p+2} < x_p$. Supongamos que se cumple para alguna $n \in \{p+2, \ldots, i-2\}$. Prosigamos por contradicción, es decir, supongamos que no se cumple para $n+2$. Esto quiere decir que $x_n < x_p < x_{n+2}$. Por (3.7), tenemos que $x_{p+2} < x_n < x_p < x_{n+2} < z$. Por un lado, tenemos que

$$[x_n, x_p] \cup [x_p, x_{n+2}] \subseteq [x_{p+2}, x_{n+2}] \subseteq f^2\left([x_n, x_p]\right).$$

Por otro lado, analicemos qué pasa con la iteración $n+4$. Si $n+4 \leq i$, por (3.7), entonces $x_{n+2} < x_{n+4}$. Si $n+4 = i+1$, por (3.7), entonces $x_{i-1} < z$. Dado que $i-p$ es mínimo, resulta que $z < x_i$. Por la elección de i, $z < x_{i+1} < x_i$. Por lo tanto, $x_{n+2} < z < x_{n+4} = x_{i+1}$. Si $n+4 = i+2$, por la elección de i y por (3.7), entonces $x_i < x_{i+1} < z$. Así, por (3.1), $x_{i+1} < x_{i+2} = x_{n+4}$; lo cual implica que $x_{n+2} = x_i < x_{n+4}$. Es decir, en cualquier caso tenemos que $x_{n+2} < x_{n+4}$. De este modo,

$$[x_n, x_p] \cup [x_p, x_{n+2}] \subseteq [x_{p+2}, x_{n+4}] \subseteq f^2\left([x_p, x_{n+2}]\right).$$

Por lo tanto,

$$\{[x_n, x_p], [x_p, x_{n+2}]\}$$

es una herradura para f^2; lo cual contradice nuestra hipótesis. Con esto concluimos que si $x_n < x_p$, entonces $x_{n+2} < x_p$. Con lo anterior, terminamos la inducción.

Para finalizar la prueba, veamos que (3.5) es un absurdo. Sea $j = i$ si $i-p$ es par y sea $j = i-1$ si $i-p$ es impar. Notemos que en el primer caso, por (3.8), $x_j < x_p$. Recordemos también que en el caso que estamos analizado, por (3.1), $x_p < z$. Si $j = i$, por (3.5), entonces $x_i < x_{i+1} < z$; y por (3.7),

$$[z, x_{p+1}] \subseteq [x_{i+1}, x_{p+1}] \subseteq f\left([x_i, x_p]\right).$$

De nuevo, por (3.7) y por lo mencionado anteriormente,

$$[x_i, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq [x_{p+2}, z] \subseteq f\left([z, x_{p+1}]\right) \subseteq f^2\left([x_i, x_p]\right).$$

Por otro lado, por (3.7),

$$[x_i, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq [x_{p+2}, z] \subseteq f^2\left([x_p, z]\right).$$

Así,

$$\{[x_j, x_p], [x_p, z]\}$$

es una herradura para f^2; lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto, $j = i-1$. Por (3.5) y (3.7), $z < x_{i+1} < x_i$. Por (3.8), $x_j = x_{i-1} < x_p$. De este modo, por (3.7) y lo mencionado al inicio del argumento,

$$[x_j, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq [x_{p+2}, x_{i+1}] \subseteq f^2\left([x_j, x_p]\right).$$

Además, por (3.7),

$$[x_j, x_p] \cup [x_p, z] \subseteq [x_{p+2}, z] \subseteq f^2([x_p, z]).$$

Por lo tanto,

$$\{[x_j, x_p], [x_p, z]\}$$

es una herradura para f^2; lo cual contradice nuestra hipótesis. Esto demuestra que (3.5) es un absurdo. Como (3.5) proviene de suponer lo contrario de lo que se quería probar, por contradicción, el lema queda demostrado. ■

Lema 3.0.2. *Sea (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$ y sea $x \in I$. Si $\omega(x, f)$ es infinito, entonces $\omega(x, f)$ no contiene ningún punto periódico de f.*

Demostración:

Dado que $\omega(x, f)$ es infinito, tenemos que todos los puntos de $(f^n(x))_{n\geq 0}$ son distintos. Como $\omega(x, f)$ es compacto, tiene un máximo y un mínimo y, dado que es infinito, tenemos que

$$\omega(x, f) \cap (\min \omega(x, f), \max \omega(x, f)) \neq \emptyset.$$

Esto implica que existe un número natural p tal que

$$\min \omega(x, f) < f^p(x) < \max \omega(x, f).$$

Si $f^{p+1}(x) > f^p(x)$, dado que $\min \omega(x, f)$ es un elemento de $\omega(x, f)$ que es diferente de $f^p(x)$, entonces podemos encontrar un natural $q > p+1$ tal que $f^q(x)$ esté arbitrariamente cerca de $\min \omega(x, f)$, de tal manera que

$$f^q(x) < f^p(x) < f^{p+1}(x).$$

Análogamente, si $f^{p+1}(x) < f^p(x)$, como $\max \omega(x, f)$ es un elemento de $\omega(x, f)$ que es diferente de $f^p(x)$, entonces podemos encontrar un número natural $q > p+1$ tal que $f^q(x)$ esté arbitrariamente cerca de $\max \omega(x, f)$, de tal suerte que

$$f^{p+1}(x) < f^p(x) < f^q(x).$$

Por el Teorema 2.3.1, f^2 no puede tener herradura. Con esto, podemos aplicar el Lema 3.0.1 al punto $f^p(x)$, deduciendo que existen $N^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y un punto fijo z tales que para todo $n \geq N^*$,

$$f^n(f^p(x)) < z$$

si y sólo si

$$z < f^{n+1}(f^p(x)).$$

Definimos $N = N^* + p$. En consecuencia, para todo $n \geq N$,

$$f^n(x) < z$$

si y sólo si

$$z < f^{n+1}(x).$$

Ahora definimos $y = f^N(x)$ o $y = f^{N+1}(x)$ de tal manera que $y < z$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $y_n = f^n(y)$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (v), $\omega(y, f) = \omega(x, f)$. Además, para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$y_{2i} < z < y_{2i+1}. \tag{3.9}$$

Veamos que $\omega(x, f)$ no tiene puntos fijos de f. Supongamos lo contrario, supongamos que existe $a \in \omega(x, f) = \omega(y, f)$ tal que $f(a) = a$. Por la definición del omega conjunto límite, existe una sucesión de naturales estrictamente creciente $(n_i)_{i\geq 0}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i} = a$. Por la continuidad de f, $\lim\limits_{i\to\infty} y_{n_i+1} = f(a) = a$. El conjunto $\{n_i \mid i \geq 0\}$ contiene una cantidad infinita de impares o una cantidad infinita de pares; en cualquier caso, existe una sucesión estrictamente creciente $(k_i)_{i\geq 0}$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} y_{2k_i} = a$ y $\lim\limits_{i\to\infty} y_{2k_i+1} = a$. Así, por (3.9), tenemos que $z = a$; en consecuencia, $z \in \omega(x, f)$. Sea $g = f^2$. Por la Proposición 2.1.11, $h\left(g^2\right) = 4h(f) = 0$ y, por el Teorema 2.3.1, g^2 no tiene herradura. Por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega(y, g)$ es infinito. No existen $m < r$ enteros no negativos tales que $g^m(y) = g^r(y)$, ya que la trayectoria de y bajo g sería periódica o eventualmente periódica; implicando que $\omega(y, g)$ fuera finito. Dada esta situación, si la sucesión $(g^n(y))_{n\geq 0}$ fuera estrictamente creciente, por (3.9), tendríamos que $\lim\limits_{n\to\infty} g^n(y) = z$; lo cual implicaría que $\omega(y, g)$ es finito. Así, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $g^{m+1}(y) < g^m(y)$. Por (3.9) y dado que $\lim\limits_{i\to\infty} y_{2k_i} = z$, existe $q > m + 1$ tal que $g^{m+1}(y) < g^m(y) < g^q(y)$. Ahora, podemos aplicar el Lema 3.0.1 a g y al punto $g^m(y)$ y, combinándolo con (3.9), obtenemos que existe un natural N^* y también un s punto fijo de g tales que para toda $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$y_{2N^*+4i} < s < y_{2N^*+4i+2} < z. \tag{3.10}$$

Como $z \in \omega(y, g)$, existe una sucesión estrictamente creciente $(m_i)_{i\geq 0}$ la cual cumple que $\lim\limits_{i\to\infty} g^{m_i}(y) = z$. Dado que g^{N^*} es continua y z es punto fijo, tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} g^{N^*+m_i}(y) = \lim_{i\to\infty} y_{2N^*+2m_i} = z.$$

Existe $i^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que si $i \geq i^*$, m_i es impar; si no, por (3.10), tendríamos una infinidad de términos de

$$\left(g^{N^*+m_i}(y)\right)_{i\geq 0}$$

tales que

$$g^{N^*+m_i}(y) < s < z;$$

lo cual implicaría que dicha sucesión no converge a z. De nuevo, por la continuidad de g,

$$\lim_{i\to\infty} g^{N^*+m_i+1}(y) = z.$$

Por otro lado, para toda $i \geq i^*$, $m_i = 2m_i^* + 1$, para alguna $m_i^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así,

$$2m_i + 2 = 4m_i^* + 2 + 2 = 4(m_i^* + 1),$$

y por (3.10),

$$g^{N^*+m_i+1}(y) = y_{2N^*+2m_i+2} < s < z.$$

Esto implica que

$$\left(g^{N^*+m_i+1}(y)\right)_{i\geq 0}$$

no converge a z; lo cual es una contradicción. Así, tenemos que $\omega(x,f)$ no tiene puntos fijos. En resumen, para toda f función continua de un intervalo compacto en él mismo, donde $h(f)=0$, si $\omega(x,f)$ es infinito, entonces $\omega(x,f)$ no contiene puntos fijos. Regresando a la prueba, sea $n\in\mathbb{N}$. Por la Proposición 2.1.11, $h(f^n)=0$. Ahora, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, para toda $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, $\omega\left(f^i(x),f^n\right)$ es infinito; entonces, aplicando lo recién demostrado, obtenemos que para toda $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, $\omega\left(f^i(x),f^n\right)$ no contiene puntos fijos de f^n. Así, por el Teorema 1.4.2 inciso (vii), $\omega(x,f)$ no tiene puntos fijos de f^n, es decir, no contiene puntos n-periódicos de f. Dado que n fue arbitraria, se ha demostrado el lema. ■

Definición 3.0.3. *Sean (I,f) un sistema dinámico, $J\subseteq I$ un intervalo no vacío y $p\in\mathbb{N}$. Decimos que J es un **intervalo p-periódico para** f si y sólo si la familia $\left\{f^i(J)\right\}_{i=0}^{p-1}$ es ajena dos a dos y $f^p(J)=J$.*

Proposición 3.0.4. *Sean (I,f) un sistema dinámico y $J\subseteq I$ un intervalo p-periódico para f con $p\in\mathbb{N}$.*

(i) Sea $i\in\{0,\ldots,p-1\}$. Si $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ satisface que $f^i(J)\cap f^j(J)\neq\emptyset$, entonces existe un único $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $j=i+qp$. En particular, $f^i(J)=f^j(J)$.

(ii) Para todo $i\in\{0,\ldots,p-1\}$, $f^i(J)$ es un intervalo p-periódico.

(iii) Sean $i,j\in\{0,\ldots,p-1\}$, con $i\neq j$. Para todo $r\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $f^r\left(f^i(J)\right)\cap f^r\left(f^j(J)\right)=\emptyset$.

Demostración:

Demostremos (i). Sean $i\in\{0,\ldots,p-1\}$ y $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tales que

$$f^i(J)\cap f^j(J)\neq\emptyset.$$

Tenemos que $\mathbb{N}\cup\{0\} = \biguplus_{k=0}^{p-1}\{k+qp\mid q\geq 0\}$, así que $j=k+qp$ con únicos $k\in\{0,\ldots,p-1\}$ y $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Como $f^p(J)=J$,

$$f^j(J)=f^{k+qp}(J)=f^k\left(f^{qp}(J)\right)=f^k(J);$$

lo cual implica que

$$f^i(J)\cap f^k(J)\neq\emptyset.$$

Dado que $k\in\{0,\ldots,p-1\}$ y la familia $\{f^s(J)\}_{s=0}^{p-1}$ es ajena dos a dos, tenemos que $i=k$, es decir, $j=i+qp$. Además, resulta que

$$f^j(J)=f^{i+qp}(J)=f^i\left(f^{qp}(J)\right)=f^i(J),$$

ya que $f^p(J) = J$.

Ahora probemos (ii). Sea $i \in \{0, \ldots, p-1\}$. Dado que f^i es una función continua, $f^i(J)$ es un conjunto conexo en I y, por lo tanto, es un intervalo. Como $f^p(J) = J$, obtenemos que

$$f^p\left(f^i(J)\right) = f^i\left(f^p(J)\right) = f^i(J).$$

Sean $l, t \in \{0, \ldots, p-1\}$, con $l \neq t$, tales que

$$f^l\left(f^i(J)\right) \cap f^t\left(f^i(J)\right) \neq \emptyset.$$

En principio, tenemos que necesariamente $i+t$ e $i+l$ son elementos de $\{0, \ldots, 2p-2\}$. Por otro lado,

$$i + t = k + np$$

para únicos $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $n \geq 2$, como $np \geq 2p$ y $k > -2$, entonces

$$i + t > 2p - 2,$$

lo cual es una contradicción. Así,

$$i + t \in \{0, \ldots, p-1\} \quad \text{o} \quad i + t = k + p.$$

Análogamente,

$$i + l \in \{0, \ldots, p-1\} \quad \text{o} \quad i + l = k^* + p,$$

con $k^* \in \{0, \ldots, p-1\}$. Si $i+l, i+t \in \{0, \ldots, p-1\}$, dado que $i+l \neq i+t$ y $\{f^s(J)\}_{s=0}^{p-1}$ es una familia ajena dos a dos, entonces

$$f^{i+l}(J) \cap f^{i+t}(J) = \emptyset;$$

lo cual es una contradicción. Si $i+l \in \{0, \ldots, p-1\}$ e $i+t = k+p$, por (i), entonces $i+t = i+l+p$, es decir,

$$t = l + p;$$

lo cual no puede ser ya que $t \in \{0, \ldots, p-1\}$. Una contradicción análoga se da cuando $i+t \in \{0, \ldots, p-1\}$ e $i+l = k^*+p$. Ahora, consideremos que $i+t = k+p$ e $i+l = k^*+p$. Como $i+t \neq i+l$, se sigue que $k \neq k^*$; y dado que J es p-periódico,

$$f^{i+t}(J) \cap f^{i+l}(J) = f^k(J) \cap f^{k^*}(J) = \emptyset.$$

Esto nos lleva a un absurdo. Así, para toda $l, t \in \{0, \ldots, p-1\}$, con $l \neq t$,

$$f^l\left(f^i(J)\right) \cap f^t\left(f^i(J)\right) = \emptyset.$$

Veamos que (iii) es cierta. Sean $i, j \in \{0, \ldots, p-1\}$, con $i \neq j$. Sea $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j < i$. Tenemos que existen únicos $k, l \in \{0, \ldots, p-1\}$ y $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

tales que $j + r = k + np$ e $i + r = l + mp$. Si pasara que $k = l$, entonces $i - j = (m - n)\,p > 0$, es decir, $i = (m - n)\,p + j > p - 1$; lo cual es una contradicción con la definición de i. Así, $k \neq l$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} f^r\left(f^i(J)\right) \cap f^r\left(f^j(J)\right) &= f^{r+i}(J) \cap f^{r+j}(J) \\ &= f^{l+mp}(J) \cap f^{k+np}(J) \\ &= f^l\left(f^{mp}(J)\right) \cap f^k\left(f^{np}(J)\right) \\ &= f^l(J) \cap f^k(J) = \emptyset \qquad (J \text{ es } p-\text{periódico}). \end{aligned}$$

■

La Proposición 3.0.7 es la herramienta básica para probar el resultado principal de este capítulo. Antes de comenzar, especifiquemos algo referente al lenguaje. Sea I un intervalo compacto y sea $A \subset I$ un subconjunto no vacío de I. La notación $z < A$ significa que un punto z de I que cumple que para todo $a \in A$, $z < a$. Análogamente, el símbolo $A < z$ significa que un punto z de I que cumple que para todo $a \in A$, $a < z$.

Definición 3.0.5. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ no vacíos. Diremos que un punto z* ***está entre los conjuntos*** *A* ***y*** *B si y sólo si $A < z < B$ ó $A > z > B$.*

Definición 3.0.6. *Sea $f : A \longrightarrow A$ una función. Sea dice que $B \subseteq A$* ***es f-invariante*** *si y sólo si $f(B) \subseteq B$. En dado caso de que $f(B) = B$, diremos que B* ***es fuertemente f-invariante.***

Con esta definición y el Teorema 1.4.2, tenemos que los omega conjuntos límite son fuertemente invariantes.

Proposición 3.0.7. *Sean (I, f) una sistema dinámico tal que $h(f) = 0$ y $x \in I$. Si $\omega(x, f)$ es infinito, entonces existe una sucesión de intervalos cerrados no degenerados $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que:*

(i) para toda $n \geq 0$, X_n es 2^n-periódico. Además, $f(X_n), \ldots, f^{2^n-1}(X_n)$ también son intervalos cerrados 2^n-periódicos;

(ii) para toda $n \geq 1$ y para todo $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, con $i \neq j$, existe un punto $z \in I$ tal que $f^{2^n-1}(z) = z$ y tal que z está entre $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$;

(iii) para toda $n \geq 0$, $X_{n+1} \cup f^{2^n}(X_{n+1}) \subseteq X_n$;

(iv) para toda $n \geq 0$, $\omega(x, f) \subseteq \bigcup_{i=0}^{2^n-1} f^i(X_n)$;

(v) para toda $n \geq 0$ y para toda $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, $f^i(X_n)$ es el intervalo cerrado f^{2^n}-invariante más pequeño que contiene a $\omega(f^i(x), f^{2^n})$; y

(vi) para toda $n \geq 0$, existe $N \geq 0$ tal que para toda $k \geq N$, $f^k(x) \in f^k(X_n)$.

Demostración:

Primero vamos a definir la sucesión. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definimos $h_n = f^{2^n}$ y también definimos al intervalo

$$I_n = [\text{mín}\, \omega(x, h_n), \text{máx}\, \omega(x, h_n)]\,.$$

Proponemos que

$$X_n = \overline{\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right)}.$$

Veamos que $h_n\left(X_n\right) = X_n$. Dado que h_n es continua y cerrada,

$$h_n\left(X_n\right) = h_n(\overline{\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right)}) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} h_n^k\left(I_n\right)} \subseteq X_n.$$

Por otro lado, $\omega\left(x, h_n\right) \subseteq I_n$; lo cual implica, por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), que para toda $k \geq 0$, $\omega\left(x, h_n\right) = h_n^k\left(\omega\left(x, h_n\right)\right) \subseteq h_n^k\left(I_n\right)$. Dado que $h_n^k\left(I_n\right)$ es un intervalo, tenemos que para toda $k \geq 0$, $I_n \subseteq h_n^k\left(I_n\right)$. En particular, $I_n \subseteq h_n\left(I_n\right)$. Esto implica que $\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right) \subseteq \bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(h_n\left(I_n\right)\right) = h_n\left(\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right)\right)$; por lo tanto,

$$X_n = \overline{\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right)} \subseteq \overline{h_n(\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right))} = h_n(\overline{\bigcup_{k \geq 0} h_n^k\left(I_n\right)}) = h_n(X_n).$$

Con esto, tenemos que $h_n(X_n) = X_n$.

Como ya habíamos mencionado, para todo $k \geq 0$, $I_n \subseteq h_n^k(I_n)$. Esto nos dice que $\bigcap_{k \geq 0} h_n^k(I_n)$ no es vacía; en consecuencia, dado que para toda $k \geq 0$, $h_n^k(I_n)$ es conexo, tenemos que $\bigcup_{k \geq 0} h_n^k(I_n)$ es conexo. Es decir, X_n es conexo y cerrado; así, X_n es un intervalo compacto. Como $\omega(x, f)$ es infinito, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega(x, h_n)$ es infinito; de este modo, I_n es no degenerado. Consecuentemente X_n es no degenerado.

Probaremos (v). Sea M un intervalo cerrado que es h_n-invariante y tal que $\omega\left(x, h_n\right) \subseteq M$. De esta forma, $I_n \subseteq M$. Esto implica que para toda $k \geq 0$, $h_n^k\left(I_n\right) \subseteq h_n^k\left(M\right) \subseteq M$; consecuentemente $X_n \subseteq M$. En virtud de lo anterior y dado que $\omega(x, h_n) \subseteq X_n$, concluimos que

$$X_n \;\; \text{es el intervalo cerrado más pequeño } h_n\text{-invariante que contiene a } \; \omega(x, h_n). \tag{3.11}$$

Si $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, entonces $h_n\left(f^i\left(X_n\right)\right) = f^{2^n}\left(f^i\left(X_n\right)\right) = f^i\left(f^{2^n}\left(X_n\right)\right) = f^i\left(h_n\left(X_n\right)\right) = f^i\left(X_n\right)$. Como $\omega\left(x, h_n\right) \subseteq X_n$, por el Teorema 1.4.2 inciso (vi), $\omega\left(f^i\left(x\right), h_n\right) = f^i\left(\omega\left(x, h_n\right)\right) \subseteq f^i\left(X_n\right)$. Sea M un intervalo cerrado h_n-invariante que contiene a $\omega\left(f^i\left(x\right), h_n\right)$. Entonces, por el Teorema 1.4.2 incisos (vi) y (iv),

$$\omega\left(x, h_n\right) = \omega\left(f^{2^n}\left(x\right), h_n\right) = \omega\left(f^{2^n - i}\left(f^i\left(x\right)\right), h_n\right) = f^{2^n - i}\left(\omega\left(f^i\left(x\right), h_n\right)\right) \subseteq f^{2^n - i}\left(M\right);$$

y dado que X_n es el intervalo cerrado h_n-invariante más pequeño que contiene a $\omega(x, h_n)$, $X_n \subseteq f^{2^n-i}(M)$. Así, $f^i(X_n) \subseteq f^i\left(f^{2^n-i}(M)\right) = h_n(M) \subseteq M$. Con esto se demuestra que para toda $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$,

$$f^i(X_n) \text{ es el intervalo cerrado más pequeño } h_n\text{-invariante que contiene a } \omega(f^i(x), h_n). \tag{3.12}$$

Con esto demostramos el enunciado (v).

Ahora, probemos (iv). Por el Teorema 1.4.2 inciso (vii) y, por (3.12), $\omega(x, f) = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \omega\left(f^i(x), h_n\right) \subseteq \bigcup_{i=0}^{2^n-1} f^i(X_n)$.

Veamos que es cierto (iii). Como $\omega\left(x, h_n^2\right) \subseteq \omega(x, h_n)$, entonces $I_{n+1} \subseteq I_n$. Tenemos también que para toda $k \geq 1$, $h_{n+1}^k = f^{2^n 2k} = (f^{2^n})^{2k} = h_n^{2k}$; lo cual implica que

$$X_{n+1} \cup h_n(X_{n+1}) = \overline{\bigcup_{k\geq 0} h_n^{2k}(I_{n+1})} \cup \overline{\bigcup_{k\geq 0} h_n^{2k+1}(I_{n+1})} \subseteq \overline{\bigcup_{k\geq 0} h_n^k(I_n)} = X_n.$$

Con esto queda probado (iii).

Ahora que ya tenemos a la sucesión $(X_n)_{n\geq 0}$ definida, probaremos (ii) por inducción. Si $n = 1$, lo que se debe probar es que existe un punto fijo z de f tal que

$$\max X_1 < z < \min f(X_1).$$

Tenemos por el Teorema 2.3.1, que f no puede tener una herradura, ya que si la tuviera $h(f) > 0$. Como $\omega(x, f)$ es infinito, todos los términos de la trayectoria de x bajo f son distintos entre sí. De nuevo, como $\omega(x, f)$ es infinito,

$$\omega(x, f) \cap (\min \omega(x, f), \max \omega(x, f)) \neq \emptyset.$$

Esto implica que existe un número entero $k \geq 1$ tal que

$$\min \omega(x, f) < f^k(x) < \max \omega(x, f).$$

Si pasara que $f^{k+1}(x) < f^k(x)$, dado que $\max \omega(x, f) \in \omega(x, f)$, entonces podemos encontrar un número entero $j > k + 1$, tal que

$$f^{k+1}(x) < f^k(x) < f^j(x).$$

Análogamente, si $f^k(x) < f^{k+1}(x)$, como $\min \omega(x, f) \in \omega(x, f)$, podemos encontrar un número entero $j > k + 1$, tal que

$$f^j(x) < f^k(x) < f^{k+1}(x).$$

Así, podemos aplicar el Lema 3.0.1 al punto $f^k(x)$ y a la función f, obteniendo que existe un número natural N^* y existe un punto fijo de z de f tal que para toda $m \geq N^*$,

$$z < f^m(f^k(x)) \text{ si y sólo si } f^{m+1}(f^k(x)) < z.$$

Sea $N = N^{*} + k$. Si $m \geq N$, entonces

$$f^{2m}(x) < z \;\text{ si y sólo si }\; z < f^{2m+1}(x)$$

o

$$f^{2m+1}(x) < z \;\text{ si y sólo si }\; z < f^{2m}(x).$$

Sea $X_1 = [c, d]$. Como $I_1 \subseteq X_1$, entonces

$$c \leq \text{mín}\, \omega(x, h_1) \leq \text{máx}\, \omega(x, h_1) \leq d,$$

donde $h_1 = f^2$.

Supongamos que si $m \geq N$, entonces

$$f^{2m}(x) < z \text{ si y sólo si } z < f^{2m+1}(x). \tag{3.13}$$

Tenemos que (3.13) implica que $\text{máx}\, \omega(x, h_1) \leq z$.

Afirmación 1: $d < z$.

Razón: Supongamos lo contrario, es decir que $z \in [\text{máx}\, \omega(x, h_1), d]$. Definamos al conjunto

$$T = \{s \in [\text{máx}\, \omega(x, h_1), d] \;\mid\; h_1(s) = s\}.$$

Como z es punto fijo, $T \neq \emptyset$. Como h_1 es continua, T es cerrado y, en consecuencia, es compacto. Así, sea $t = \text{mín}\, T$. Como $\omega(x, f)$ es infinito, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega(x, h_1)$ es infinito. Por la Proposición 2.1.11, $h(h_1) = 2h(f) = 0$. Por el Lema 3.0.2, $\omega(x, h_1)$ no contiene puntos periódicos. De este modo,

$$h_1(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) \neq \text{máx}\, \omega(x, h_1).$$

Más aún, por el Teorema 1.4.2 inciso (iii),

$$h_1(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) \in \omega(x, h_1).$$

Así,

$$h_1(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) < \text{máx}\, \omega(x, h_1).$$

Dado que t es punto fijo para h_1,

$$h_1(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) < \text{máx}\, \omega(x, h_1) < t.$$

Si hubiera un punto $y \in (\text{máx}\, \omega(x, h_1), t)$ tal que $h_1(y) \geq y$, tomando a la función $p(v) = h_1(v) - v$, tenemos que $p(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) < 0$ y que $p(y) \geq 0$. Debido al Teorema del Valor Intermedio, podemos asegurar la existencia de $q \in [\text{máx}\,\omega(x,h_1), y]$ tal que $p(q) = 0$. Consecuentemente $h_1(q) = q$; lo cual contradice la definición de t. Esto implica que

$$\text{para todo } \ y \in [\text{máx}\,\omega(x,h_1), t), \quad h_1(y) < y. \tag{3.14}$$

Afirmación 1.1: Existe $y^* \in [c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]$ tal que $h_1(y^*) = t$.

Razón: Para ver esto, por el Teorema 1.4.2 inciso (iii), $\omega(x,h_1) = h_1(\omega(x,h_1))$. Con esto deducimos que

$$\text{máx}\,\omega(x,h_1) \leq \text{máx}\,h_1(\omega(x,h_1)) \leq \text{máx}\,h_1(I_1) \leq \text{máx}\,h_1([c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]) = l.$$

Además, dado que $[c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)] \subseteq X_1$, tenemos que

$$h_1([c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]) \subseteq h_1(X_1) = X_1;$$

por lo tanto, $l \leq \text{máx}\,X_1 = d$. Supongamos que $l < t$, tenemos que dado un $s \in [\text{máx}\,\omega(x,h_1), l]$, por (3.14), $h_1(s) < s \leq l$. Como $[\text{máx}\,\omega(x,h_1), l] \subseteq X_1$, obtenemos que

$$h_1([\text{máx}\,\omega(x,h_1), l]) \subseteq h_1(X_1) = X_1;$$

lo cual implica que $c \leq h_1(s)$ y, por lo tanto, $h_1(s) \in [c,l]$. Así, $h_1([\text{máx}\,\omega(x,h_1), l]) \subseteq [c,l]$. Sea $s \in [c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]$. Claramente $h_1(s) \leq l$; además, como $[c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)] \subseteq X_1$, obtenemos que $h_1([c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]) \subseteq h_1(X_1) = X_1$. Esto nos dice que $c \leq h_1(s)$. En consecuencia, $h_1(s) \in [c,l]$; por lo tanto, $h_1([c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]) \subseteq [c,l]$. Se sigue que

$$h_1([c,l]) = h_1([c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)]) \cup h_1([\text{máx}\,\omega(x,h_1), l]) \subseteq [c,l] \cup [c,l] = [c,l].$$

Además, como $I_1 \subseteq [c,l]$, tenemos que $\omega(x,h_1) \subseteq [c,l]$; esto implica que $X_1 \subseteq [c,l]$, ya que por (3.11), X_1 es el intervalo cerrado más pequeño en ser h_1-invariante y contener a $\omega(x,h_1)$. Sin embargo, $X_1 \subseteq [c,l]$ es falso, ya que $l < t \leq d$. Con esto, llegamos a la conclusión que $l \geq t$. Como $h_1(\text{máx}\,\omega(x,h_1)) < t \leq l$ y h_1 es continua, el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $y^* \in [c, \text{máx}\,\omega(x,h_1))$ tal que $h_1(y^*) = t$. Con esto terminamos de probar la Afirmación 1.1.

La Afirmación 1.1 implica que $A = \{y \in [c, \text{máx}\,\omega(x,h_1)] \mid h_1(y) = t\}$ es no vacío. Por la continuidad de h_1, resulta ser que A es cerrado y, por lo tanto, compacto. Sea $y = \text{máx}\,A$. Como $h_1(\text{máx}\,\omega(x,h_1)) \neq t$, entonces $y < \text{máx}\,\omega(x,h_1)$. Tomemos $w = \text{ínf}\,h_1((y,t))$.

Afirmación 1.2: $t > w > y$ y $[w,t]$ es h_1-invariante que contiene a $\omega(x,h_1)$.

Razón: Para ver lo primero, sea $s \in (y,t)$. Afirmamos que $h_1(s) < t$. Supongamos que $h_1(s) \geq t$. Así, tenemos que

$$h_1(\text{máx}\,\omega(x,h_1)) < \text{máx}\,\omega(x,h_1) < t \leq h_1(s).$$

En el caso en el que $s \in (y, \text{máx}\, \omega(x, h_1))$, dado que $y = \text{máx}\, A$, resulta que

$$h_1(\text{máx}\, \omega(x, h_1)) < t < h_1(s).$$

Por el Teorema del Valor Intermedio, existe $q \in (s, \text{máx}\, \omega(x, h_1))$ tal que $h_1(q) = t$; de esta manera,

$$y < q < \text{máx}\, \omega(x, h_1)$$

y

$$h_1(q) = t.$$

Esto contradice la definición de y. Si $s \in [\text{máx}\, \omega(x, h_1), t)$, entonces, por (3.14), $h_1(s) < s < t \leq h_1(s)$; lo cual es una contradicción. Con esto probamos nuestra afirmación.

Ahora, supongamos que $h_1(s) \leq y$. Tenemos que

$$h_1(s) \leq y < s < t = h_1(y);$$

así,

$$\{[y, s], [s, t]\}$$

sería una herradura para h_1. Pero esto resulta ser una contradicción, ya que $h(h_1) = 0$ y, por el Teorema 2.3.1, se sigue que h_1 no puede tener una herradura. De este modo,

$$\text{para todo } s \in (y, t),\ y < h_1(s) < t. \tag{3.15}$$

Por la definición de y, $h_1(y) = t > y$ y, por (3.15), $t > w = \text{mín}\, h_1([y, t]) > y$. Para probar la segunda parte de la afirmación, tomemos un $s \in [y, w]$. Como $[y, w] \subseteq [y, t]$, por la definición de w y por (3.15), tenemos que $t \geq h_1(s) \geq w$, es decir,

$$h_1([y, w]) \subseteq [w, t].$$

Del mismo modo, sea $s \in [w, t]$, como $[w, t] \subseteq [y, t]$, por la definición de w y por (3.15), tenemos que $t \geq h_1(s) \geq w$, es decir,

$$h_1([w, t]) \subseteq [w, t].$$

Como $y < \text{máx}\, \omega(x, h_1) < t$, existe $i \in \mathbb{N}$, tal que

$$h_1^i(x) \in (y, t) \subseteq [y, t] = [y, w] \cup [w, t].$$

Dado que $h_1([w, t]) \subseteq [w, t]$ y $h_1([y, w]) \subseteq [w, t]$, para toda $j \geq i + 1$, tenemos que

$$h_1^j(x) \in [w, t];$$

esto implica que

$$\omega(x, h_1) \subseteq [w, t].$$

Así, terminamos la prueba de la Afirmación 1.2.

Por la Afirmación 1.2 y por (3.11), $X_1 \subseteq [w,t]$; pero como $c \leq y < w$, obtenemos que $[w,t]$ no contiene a X_1. Esto es una contradicción, la cual viene de suponer que $z \leq d$. Con esto queda probada la Afirmación 1.

La Afirmación 1 implica que $h_1(X_1) = X_1 < z$. Si $z \in f(X_1)$, entonces

$$z = f(z) \in h_1(X_1);$$

lo cual no puede ser, así que

$$z \notin f(X_1).$$

Ahora, por (3.12),

$$\omega\left(f\left(x\right), h_1\right) \subseteq f\left(X_1\right)$$

y, por (3.13),

$$z \leq \text{mín}\, \omega\left(f\left(x\right), h_1\right).$$

Esto implica que $z < f(X_n)$. En resumen,

$$X_1 < z < f(X_1).$$

Ahora, en el supuesto de que si $m \geq N$, entonces

$$f^{2m}\left(x\right) > z \text{ si y sólo si } z > f^{2m+1}\left(x\right),$$

se pude hacer una prueba análoga a la anterior y llegar a que $X_1 > z > f\left(X_1\right)$. Así, podemos concluir que el caso base es cierto.

Ahora, supongamos que (ii) se cumple para $n \in \mathbb{N}$. Sean $i, j \in \left\{0, \ldots, 2^{n+1} - 1\right\}$, donde $0 \leq i < j$.

Caso (1): Supongamos que $j = i + 2^n$. Tenemos que $h(h_n) = 2^n h(f) = 0$, por la Proposición 2.1.11. Como $\omega(x,f)$ es infinito, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega(f^i(x), h_n)$ es infinito. Definimos

$$I^* = [\text{mín}\, \omega(f^i(x), h_{n+1}), \text{máx}\, \omega(f^i(x), h_{n+1})].$$

Como $f^{2^n} \circ f^{2^n} = f^{2^{n+1}}$, por el Teorema 1.4.2 incisos (vi) y (vii),

$$\omega(f^i(x), h_{n+1}) = \omega(f^i(x), f^{2^{n+1}}) \subseteq \omega(f^i(x), f^{2^n}) = f^i(\omega(x, f^{2^n})) = f^i(\omega(x, h_n)).$$

Esto implica que como $\omega(x, h_{n+1}) \subseteq I_{n+1} \subseteq X_{n+1}$, entonces

$$\omega(f^i(x), h_{n+1}) \subseteq f^i(X_{n+1}).$$

A su vez, dado que $f^i(X_{n+1})$ es un intervalo y $\omega(f^i(x), h_{n+1})$ tiene a su máximo y mínimo,

$$I^* \subseteq f^i(X_{n+1}).$$

En resumen:

(1) $h(h_n) = 0$;

(2) $\omega(f^i(x), h_n)$ es infinito;

(3) $I^* \subseteq f^i(X_{n+1})$ y

(4) $f^i(X_{n+1})$ y $h_n(f^i(X_n)) = f^j(X_{n+1})$ son los intervalos cerrados $h_{n+1} = h_n \circ h_n$-invariantes más pequeños que contienen a $\omega(f^i(x), h_{n+1})$ y $\omega(f^j(x), h_{n+1}) = \omega(h_n(f^i(x)), h_{n+1})$, respectivamente, por (3.12).

Si sustituimos a f por h_n, x por $f^i(x)$, I_1 por I^* y a X_1 por $f^i(X_{n+1})$, podemos aplicarle el caso base a la función h_n y al punto $f^i(x)$, obteniendo que existe un punto fijo z de h_n que está entre $f^i(X_{n+1})$ y $h_n(f^i(X_{n+1})) = f^j(X_{n+1})$.

Caso(2): Supongamos que $j - i \neq 2^n$. Sabemos que podemos encontrar enteros $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ y $p_1, p_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $i = k_1 + p_1 2^n$ y $j = k_2 + p_2 2^n$. Dado que $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, tanto p_1 como p_2 solamente pueden ser cero o uno. Si $p_1 = p_2 = 1$, como $i \neq j$, entonces $k_1 \neq k_2$. Si $p_1 = 0$ y $p_2 = 1$, entonces $i = k_1$ y $j = k_2 + 2^n$. Si $k_1 = k_2$, entonces $j = i + 2^n$; en contradicción con lo supuesto en este caso, así, $k_1 \neq k_2$. El caso $p_1 = 1$ y $p_2 = 0$ no puede ocurrir, ya que $i < j$. Así que de cualquier forma $k_1 \neq k_2$. Entonces, por la hipótesis de inducción, existe z tal que $f^{2^{n-1}}(z) = z$ y tal que está entre $f^{k_1}(X_n)$ y $f^{k_2}(X_n)$. Por otro lado, dado que ya probamos (iii) y X_n es fuertemente f^{2^n}-invariante, podemos asegurar que

$$f^i(X_{n+1}) \subseteq f^i(X_n) = f^{k_1}(f^{p_1 2^n}(X_n)) = f^{k_1}(X_n).$$

Análogamente,

$$f^j(X_{n+1}) \subseteq f^{k_2}(X_n).$$

Con esto, concluimos que z es tal que $f^{2^n}(z) = f^{2^{n-1}+2^{n-1}}(z) = z$ y está entre $f^i(X_{n+1})$ y $f^j(X_{n+1})$.

De esta manera, el caso inductivo se cumple y queda probado el enunciado (ii).

Ahora, probemos (i). Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ya sabemos que $h_n(X_n) = X_n$. Si $n = 0$, entonces $f(X_0) = h_0(X_0) = X_0$; cumpliéndose (i). Si $n \geq 1$, entonces, por el enunciado (ii), para todo $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ diferentes hay un punto que está entre $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$; así que dichos conjuntos no se pueden intersectar, es decir, $X_n, \ldots, f^{2^n-1}(X_n)$ son ajenos dos a dos. De este modo, X_n es un intervalo 2^n-periódico de f. Por la Proposición 3.0.4 inciso (ii), $f(X_n), \ldots, f^{2^n-1}(X_n)$ también son intervalos 2^n-periódicos.

Veamos que (vi) también se cumple. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por (i), X_n es un intervalo fuertemente f^{2^n}-invariante; que además, por (v), contiene a $\omega(x, f^{2^n})$. Como $w(x, f)$ es infinito, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, $\omega(x, f^{2^n})$ es infinito; en consecuencia, $\omega(x, f^{2^n}) \cap Int(X_n) \neq \emptyset$. Esto implica que existe $m \geq 0$ tal que $f^{m \cdot 2^n}(x) \in X_n$. Sea $N = m2^n$. Como N es múltiplo de 2^n, $f^N(x) \in X_n = f^N(X_n)$. Lo que implica que para toda $k \geq N$, $f^k(x) \in f^k(X_n)$. ■

Lema 3.0.8. *Sea (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$. Si J es un intervalo p-periódico de f, entonces existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p = 2^k$.*

Demostración:

Caso 1. Supongamos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(J)$ es un punto, digamos y. Sea $m \in \mathbb{N}$ el natural mínimo para el cual $k \leq mp$. Así, $J = f^{mp}(J) = f^{mp-k}\left(f^k(J)\right) = f^{mp-k}(\{y\}) = \left\{f^{mp-k}(y)\right\}$. Como $f^p\left(\left\{f^{mp-k}(y)\right\}\right) = f^p(J) = J = \left\{f^{mp-k}(y)\right\}$ y la familia $\left\{f^i\left(\left\{f^{mp-k}(y)\right\}\right)\right\}_{i=0}^{p-1} = \left\{f^i(J)\right\}_{i=0}^{p-1}$ es ajena dos a dos, tenemos que $f^{mp-k}(y)$ es un punto periódico de periodo p. Si p no es una potencia de 2, por el Teorema 2.3.10, resulta que $h(f) > 0$; lo cual contradice que $h(f) = 0$. Concluimos que p es una potencia de 2.

Caso 2. Supongamos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $f^k(J)$ no es degenerado. Como f es cerrada y continua, $\overline{J} = \overline{f^p(J)} = f^p\left(\overline{J}\right)$; así, por el Lema 2.2.5, existe $x \in \overline{J}$ tal que $f^p(x) = x$, es decir, x es un punto periódico. Además, por el Teorema 2.3.10, el periodo de x debe ser de la forma 2^k, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si pasara que $x \in J$, como $\left\{f^i(J)\right\}_{i=0}^{p-1}$ es ajena dos a dos, entonces p es el periodo de x; con lo cual, $p = 2^k$. Supongamos ahora que $x \in Fr_{\mathbb{R}}(J)$. En principio, como $f^p(x) = x$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p = m2^k$. Veamos que m no puede ser mayor o igual a 3. Supongamos que $m \geq 3$. Primero, como $x \in \overline{J}$, tenemos que

$$x = f^{2^k}(x) \in f^{2^k}\left(\overline{J}\right) = \overline{f^{2^k}(J)}$$

y

$$x = f^{2^k}(x) = f^{2^k}\left(f^{2^k}(x)\right) = f^{2^{k+1}}(x) \in f^{2^{k+1}}\left(\overline{J}\right) = \overline{f^{2^{k+1}}(J)}.$$

Como $m \geq 3$, entonces $p > 2^{k+1} > 2^k$; lo que quiere decir que $J, f^{2^k}(J)$ y $f^{2^{k+1}}(J)$ son ajenos dos a dos. Consecuentemente $x \in Fr_{\mathbb{R}}\left(f^{2^{k+1}}(J)\right)$, ya que si $x \in Int_{\mathbb{R}}\left(f^{2^{k+1}}(J)\right)$, entonces existiría un intervalo abierto V en I sin sus extremos tal que $x \in V \subseteq f^{2^{k+1}}(J)$; lo cual implicaría que

$$J \cap V \neq \emptyset$$

y, por lo tanto,

$$J \cap f^{2^{k+1}}(J) \neq \emptyset;$$

en contradicción con el hecho de que J y $f^{2^{k+1}}(J)$ son ajenos. Así,

$$\overline{J} \text{ y } \overline{f^{2^{k+1}}(J)}$$

son dos intervalos no degenerados que se intersectan en un punto final. Pero además

$$x \in \overline{f^{2^k}(J)},$$

$$J \cap f^{2^k}(J) = \emptyset,$$

$$f^{2^{k+1}}(J) \cap f^{2^k}(J) = \emptyset$$

y

$$\overline{f^{2^k}(J)} \text{ es un intervalo,}$$

implicando que

$$\overline{f^{2^k}(J)} = \{x\}.$$

Lo cual es una contradicción con el hecho de que $f^{2^k}(J)$ no es degenerado. Esta contradicción viene de suponer que $m \geq 3$, así, $m = 1$ ó $m = 2$. Con ello, podemos asegurar que p es una potencia de 2. ∎

Definición 3.0.9. *Sean (I, f) un sistema dinámico y $a_0, a_1 \in I$ dos puntos distintos. Se dice que a_0* ***y*** *a_1* ***son f-separables*** *si y sólo si existen dos intervalos ajenos J_0 y J_1 y dos enteros positivos n_0 y n_1 tales que para cada $i \in \{0,1\}$, $a_i \in J_i$ y J_i es n_i-periódico para f. De modo contrario, diremos que a_0 y a_1 no son f-separables.*

Lema 3.0.10. *Sean (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$, $x_0 \in I$ tal que $\omega(x_0, f)$ es infinito, $a_0, a_1 \in \omega(x_0, f)$, con $a_0 \neq a_1$, y $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ la sucesión dada en la Proposición 3.0.7. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *a_0 y a_1 son f-separables.*

(ii) *Existe $n \in \mathbb{N}$ y existen $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, con $i \neq j$, tales que $a_0 \in f^i(X_n)$ y $a_1 \in f^j(X_n)$.*

Demostración:

Veamos que (i) implica (ii). Por definición, existen intervalos ajenos J_0 y J_1 y existen números naturales n_0 y n_1 tales que para cada $q \in \{0,1\}$, $a_q \in J_q$, $f^{n_q}(J_q) = J_q$ y la familia $\left\{f^k(J_q)\right\}_{k=0}^{n_q-1}$ es ajena dos a dos. Como $h(f) = 0$, por el Lema 3.0.8, existe un entero $n \geq 0$ tal que $n_0 = 2^n$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (iv), $a_0 \in \omega(x_0, f) \subseteq \bigcup_{i=0}^{2^n-1} f^i(X_n)$; así, existe $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $a_0 \in f^i(X_n)$. Sea $Y = f^i(X_n) \cap J_0$. Y es no vacío, ya que tiene a a_0; más aún, es un intervalo, ya que es intersección de dos intervalos. Tenemos también que Y es f^{2^n}−invariante, ya que

$$\begin{aligned}
f^{2^n}(Y) &= f^{2^n}\left(f^i(X_n) \cap J_0\right) \\
&\subseteq f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) \cap f^{2^n}(J_0) \\
&= f^i(X_n) \cap J_0 && \text{(por la Proposición 3.0.7 inciso } (i) \text{ y } f^{2^n}(J_0) = J_0) \\
&= Y.
\end{aligned}$$

Así, dado que $a_0 \in Y$, tenemos que $f^{2^n}(a_0), f^{2^{n+1}}(a_0) \in Y$. Por otro lado, debido al Teorema 1.4.2 inciso (iv), $a_0, f^{2^n}(a_0), f^{2^{n+1}}(a_0) \in \omega(x_0, f)$. Como $h(f) = 0$ y $\omega(x_0, f)$ es infinito, el Lema 3.0.2 nos dice que $\omega(x_0, f)$ no contiene puntos periódicos, lo cual implica que $a_0, f^{2^n}(a_0)$ y $f^{2^{n+1}}(a_0)$ son distintos. Se sigue que $Y \cap \omega(x_0, f)$ contiene al menos tres puntos distintos. En consecuencia, existe

$$z \in Int(Y) \cap \omega(x_0, f),$$

es decir, existe una subsucesión de $(f^m(x_0))_{m \geq 0}$ que converge a z y, dado que $Int(Y)$ es un conjunto abierto, existe $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^b(x_0) \in Int(Y) \subseteq Y.$$

Dado que $f^{2^n}(Y) \subseteq Y$, la sucesión $\left(f^{l2^n}\left(f^b(x_0)\right)\right)_{l \geq 0}$ es una sucesión en Y; así,

$$\omega\left(f^b(x_0), f^{2^n}\right) \subseteq \overline{Y}.$$

Ahora, sabemos que $b \in \mathbb{N} \cup \{0\} = \biguplus_{j=0}^{2^n-1} \{j + s2^n \mid s \geq 0\}$, lo cual implica que existen únicas $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tales que $b = j + s2^n$, es decir, $f^b(x_0) = f^{j+s2^n}(x_0)$. A partir de lo anterior, deducimos que

$$f^b(x_0) \in Orb_{f^{2^n}}\left(f^j(x_0)\right);$$

consecuentemente, por el Teorema 1.4.2 inciso (v),

$$\omega\left(f^j(x_0), f^{2^n}\right) = \omega\left(f^b(x_0), f^{2^n}\right) \subseteq \overline{Y}.$$

Por otro lado, dado que f^{2^n} es cerrada y continua y X_n es un conjunto cerrado,

$$\overline{Y} = \overline{f^i(X_n) \cap J_0} \subseteq \overline{f^i(X_n)} = f^i\left(\overline{X_n}\right) = f^i(X_n),$$

es decir,

$$\omega\left(f^j(x_0), f^{2^n}\right) \subseteq f^i(X_n).$$

Supongamos que $j \neq i$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (v),

$$\omega\left(f^j(x_0), f^{2^n}\right) \subseteq f^j(X_n);$$

así,

$$f^i(X_n) \cap f^j(X_n) \neq \emptyset.$$

Pero esto es un absurdo, dado que i y j son dos elementos distintos en $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ y por la Proposición 3.0.7 inciso (i),

$$f^i(X_n) \cap f^j(X_n) = \emptyset.$$

Esto quiere decir que $i = j$ y con ello tenemos que

$$\omega\left(f^i(x_0), f^{2^n}\right) \subseteq \overline{Y}.$$

Ya sabíamos que Y es un intervalo que además es f^{2^n}-invariante, así que $\overline{Y}$ es un intervalo cerrado que además, gracias a que f^{2^n} es continua y cerrada, $\overline{Y}$ es f^{2^n}-invariante. Como $f^i(X_n)$ es el intervalo cerrado f^{2^n}-invariante más pequeño que contiene a $\omega\left(f^i(x_0), f^{2^n}\right)$,

$$f^i(X_n) \subseteq \overline{Y}.$$

Esto implica que

$$f^i(X_n) = \overline{Y}.$$

Por la proposición 3.0.7 inciso (iv), existe $j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que

$$a_1 \in f^j(X_n).$$

Para terminar de demostrar esta implicación, basta ver que $i \neq j$. Supongamos lo contrario, supongamos que $i = j$. Tenemos que $a_1 \in f^i(X_n) = \overline{Y}$. Como $a_1 \notin J_0$, resulta que $a_1 \notin Y$; lo cual implica que

$$a_1 \in Fr_{\mathbb{R}}\left(\overline{Y}\right) = Fr_{\mathbb{R}}\left(f^i(X_n)\right).$$

Sea $c \neq a_1$ tal que $c \in Fr_{\mathbb{R}}\left(f^i(X_n)\right)$. Entonces

$$Y = f^i(X_n) - \{a_1\}$$

o

$$Y = f^i(X_n) - \{a_1, c\}.$$

Supongamos que $Y = f^i(X_n) - \{a_1\}$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (i),

$$f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) = f^i(X_n);$$

esto implica que

$$f^{2n}(a_1) \in f^i(X_n).$$

Dado que $f^{2^n}(Y) \subseteq Y$, para todo $d \in Y$,

$$f^{2^n}(d) \neq a_1.$$

Si $f^{2^n}(a_1) \in Y$, entonces

$$f^{2^n}(a_1) \neq a_1.$$

En resumen, para todo $d \in f^i(X_n)$,

$$f^{2^n}(d) \neq a_1,$$

es decir,

$$a_1 \notin f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right).$$

Lo anterior implica que

$$f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) \neq f^i(X_n);$$

lo que es una contradicción. Así,

$$f^{2^n}(a_1) \notin Y,$$

pero como $f^{2n}(a_1) \in f^i(X_n)$, tenemos que

$$f^{2^n}(a_1) = a_1.$$

Ahora, supongamos que $Y = f^i(X_n) - \{a_1, c\}$. Como $f^{2^n}(Y) \subseteq Y$, para todo $d \in Y$, $f^{2^n}(d) \neq a_1$ y $f^{2^n}(d) \neq c$. Si $f^{2^n}(a_1) \in K$, como $f^{2^n}(Y) \subseteq Y$, entonces para todo $d \in Y \cup \{a_1\}$, $f^{2^n}(d) \in Y$. Si $f^{2^n}(c) = c$, entonces $a_1 \notin f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right)$. Si $f^{2^n}(c) = a_1$, entonces $c \notin f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right)$. Si $f^{2^n}(c) \in Y$, entonces $a_1, c \notin f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right)$. En cualquier caso

$$f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) \neq f^i(X_n);$$

lo cual es una contradicción, ya que por la Proposición 3.0.7 inciso (i), $f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) = f^i(X_n)$. Así, como $f^{2^n}\left(f^i(X_n)\right) = f^i(X_n)$,

$$f^{2^n}(a_1) \in f^i(X_n) - Y = \{a_1, c\}.$$

Análogamente,

$$f^{2^n}(c) \in f^i(X_n) - Y = \{a_1, c\}.$$

En virtud de lo anterior, podemos tener que ($f^{2^n}(a_1) = a_1$ y $f^{2^n}(c) = c$) o ($f^{2^n}(a_1) = c$ y $f^{2^n}(c) = a_1$). En el segundo caso,

$$f^{2^{n+1}}(a_1) = f^{2^n}\left(f^{2^n}(a_1)\right) = f^{2^n}(c) = a_1.$$

Con esto, tenemos que tanto en el caso $Y = f^i(X_n) - \{a_1\}$ como en el caso $Y = f^i(X_n) - \{a_1, c\}$, $a_1 \in \omega(x_0, f)$ es un punto periódico. Pero esto es una contradicción, ya que por el Lema 3.0.2, $\omega(x_0, f)$ no contiene puntos periódicos. Dicha contradicción viene de suponer que $i = j$. Por lo tanto, $i \neq j$; concluyendo que (i) implica (ii) es cierto.

Ahora, demostremos que (ii) implica (i). Supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ y existen $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, con $i \neq j$, tales que $a_0 \in f^i(X_n)$ y $a_1 \in f^j(X_n)$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (i), $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$ son 2^n-periódicos; y dado que X_n es 2^n-periódico, entonces $f^i(X_n) \cap f^j(X_n) = \emptyset$. Tomando $n_0 = n_1 = 2^n$ y a los intervalos $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$, tenemos que a_0 y a_1 son f-separables. ■

Lema 3.0.11. *Sean (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$ y $x_0 \in I$ tal que $\omega(x_0, f)$ es infinito.*

(i) *Si $J \subseteq I$ es un intervalo que contiene tres puntos distintos de $\omega(x_0, f)$, entonces J contiene un punto periódico de f.*

(ii) *Si $U \subseteq I$ es un intervalo abierto tal que $U \cap \omega(x_0, f) \neq \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^n(U)$ contiene un punto periódico.*

Demostración:

Demostremos (i). Sean $x_1, x_2, x_3 \in J \cap \omega(x_0, f)$ y supongamos que $x_1 < x_2 < x_3$. Como $h(f) = 0$ y $\omega(x_0, f)$ es infinito, existe la sucesión de intervalos $(X_n)_{n \geq 0}$ dada por la Proposición 3.0.7.

Afirmación: Existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y existen $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, con $i \neq j$, tales que $x_1 \in f^i(X_n)$ y $x_3 \in f^j(X_n)$.

Razón: Por la Proposición 3.0.7 inciso (iv), para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$x_1, x_2, x_3 \in \omega(x_0, f) \subseteq \bigcup_{k=0}^{2^n - 1} f^k(X_n).$$

Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $i_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $x_1, x_3 \in f^{i_n}(X_n)$. Como $x_2 \in (x_1, x_3) \cap \omega(x_0, f)$, existe una subsucesión de $(f^n(x_0))_{n \geq 0}$ que converge a x_2 y que eventualmente se queda contenida en (x_1, x_3). Así, existen números naturales m y p, con $m > p$, tales que

$$f^m(x_0), f^{m-p}(x_0) \in (x_1, x_3) \subseteq [x_1, x_3].$$

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $x_1, x_3 \in f^{i_n}(X_n)$ y $f^{i_n}(X_n)$ es un intervalo, $[x_1, x_3] \subseteq f^{i_n}(X_n)$; lo cual implica que $f^m(x_0), f^{m-p}(x_0) \in f^{i_n}(X_n)$. Así,

$$f^m(x_0) = f^{m+p-p}(x_0) = f^p\left(f^{m-p}(x_0)\right) \in f^{i_n+p}(X_n),$$

es decir,

$$f^m(x_0) \in f^{i_n}(X_n) \cap f^{i_n+p}(X_n)$$

y, como $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fue arbitrario, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $i_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que

$$f^{i_n}(X_n) \cap f^{i_n+p}(X_n) \neq \emptyset.$$

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_0} > p$. Por lo anterior, existe $i_{n_0} \in \{0, \ldots, 2^{n_0} - 1\}$ tal que

$$f^{i_{n_0}}(X_{n_0}) \cap f^{i_{n_0}+p}(X_{n_0}) \neq \emptyset.$$

Por la Proposición 3.0.7 inciso (i), $f^{i_{n_0}}(X_{n_0})$ es 2^{n_0}-periódico y, el hecho de que $2^{n_0} > p$, implica que

$$f^{i_{n_0}}(X_{n_0}) \cap f^{i_{n_0}+p}(X_{n_0}) = \emptyset.$$

De esta forma obtenemos una contradicción; lo cual implica que

$$\text{existe } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ tal que para todo } i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}, x_1 \notin f^i(X_n) \text{ o } x_3 \notin f^i(X_n). \tag{3.16}$$

Por otro lado, $x_1, x_3 \in \bigcup_{k=0}^{2^n-1} f^k(X_n)$; en consecuencia, existen $i_{x_1}, i_{x_3} \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tales que $x_1 \in f^{i_{x_1}}(X_n)$ y $x_3 \in f^{i_{x_3}}(X_n)$; que por (3.16), $i_{x_1} \neq i_{x_3}$. Con esto queda probada la afirmación.

Por la Proposición 3.0.7 inciso (ii), tenemos que entre $f^{i_{x_1}}(X_n)$ y $f^{i_{x_3}}(X_n)$ existe un punto z tal que $f^{2^n}(z)=z$, que en este caso, por la afirmación, cumple que $z\in[x_1,x_3]$. A su vez, como $x_1,x_3\in J$ y J es un intervalo, entonces $[x_1,x_3]\subseteq J$ y, por lo tanto, $z\in J$, donde z es un punto periódico.

Ahora demostremos (ii). Sea $x\in U\cap\omega(x_0,f)$, donde $U\subseteq I$ es un intervalo abierto. Si U contiene puntos periódicos, no hay nada que probar; así que supongamos que U no contiene puntos periódicos. Sea L el intervalo maximal con respecto a la contención tal que $U\subseteq L$ y tal que L no contenga puntos periódicos. Como $x\in U\cap\omega(x_0,f)$, existe una subsucesión de $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ que converge a x. Dado que U es un abierto, dicha subsucesión se queda eventualmente contenida en U; lo cual implica que existen naturales k,n_1,n_2, con $n_1<n_2$, tales que $f^k(x_0)\in U$, $f^{k+n_1}(x_0)\in U$ y $f^{k+n_2}(x_0)\in U$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), $f^{n_1}(x),f^{n_2}(x)\in\omega(x_0,f)$. Por el Lema 3.0.2, $\omega(x_0,f)$ no contiene puntos periódicos; así que $x\neq f^{n_1}(x)$, $x\neq f^{n_2}(x)$ y $f^{n_1}(x)\neq f^{n_2}(x)$. Si $x,f^{n_1}(x),f^{n_2}(x)$ estuvieran en L, por el inciso (i) anteriormente probado, L tendría un punto periódico de f; en contradicción con la definición de L. Como $x\in U\subseteq L$, existe $i\in\{1,2\}$ tal que $f^{n_i}(x)\notin L$. Ahora, $f^k(x_0)\in U$, implicando que $f^{k+n_i}(x_0)\in f^{n_i}(U)$. Además, $f^{k+n_i}(x_0)\in U\subseteq L$; se sigue que $L\cap f^{n_i}(U)\neq\emptyset$; lo cual implica que $S=L\cup f^{n_i}(U)$ es un intervalo no vacío, que además, contiene propiamente a L, ya que $f^{n_i}(x)\notin L$ y $f^{n_i}(x)\in f^{n_i}(U)\subseteq S$. Si pasara que $f^{n_i}(U)$ no contiene puntos periódicos, entonces S es un intervalo que tampoco tiene puntos periódicos y que además es tal que $U\subseteq L\subsetneq S$; lo cual es una contradicción con la maximalidad de L. De esta manera, podemos concluir que $f^{n_i}(U)$ contiene al menos un punto periódico. ■

Lema 3.0.12. *Sean (I,f) un sistema dinámico tal que $h(f)=0$, $x_0,x_1\in I$ tales que $\omega(x_0,f)$ y $\omega(x_1,f)$ son infinitos, $a_0,a_1\in I$ tales que $a_0\in\omega(x_0.f)$ y $a_1\in\omega(x_1,f)$ y $(X_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de intervalos cerrados dada por la Proposición 3.0.7 para $\omega(x_0,f)$. Supongamos que para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\omega(x_1,f)\subseteq\bigcup_{k=0}^{2^n-1}f^k(X_n)$ y que para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ existe $i_n\in\{0,\ldots,2^n-1\}$ tal que $a_0,a_1\in f^{i_n}(X_n)$. Si $A_0,A_1\subseteq I$ son intervalos tales que $a_0\in Int(A_0)$ y $a_1\in Int(A_1)$, entonces existen $m\in\mathbb{N}$ y $i_m\in\{0,\ldots,2^m-1\}$ tales que*

$$a_0,a_1\in f^{i_m}(X_m)\subseteq f^{2^m}(A_0)\cap f^{2^m}(A_1).$$

Demostración:

Primero probemos la siguiente Proposición:

Proposición 3.0.13. *Con las hipótesis y notación del lema, se tiene que para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,*

$$f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\cup f^{2^n}\left(f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\right)\subseteq f^{i_n}(X_n).$$

Razón: Sea $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (iii), $X_{n+1}\cup f^{2^n}(X_{n+1})\subseteq X_n$, consecuentemente, $f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\cup f^{2^n}\left(f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\right)\subseteq f^{i_{n+1}}(X_n)$. Así, $a_0\in f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\subseteq f^{i_{n+1}}(X_n)$, y como $a_0\in f^{i_n}(X_n)$, entonces, $f^{i_{n+1}}(X_n)\cap f^{i_n}(X_n)\neq\emptyset$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (i), X_n es 2^n-periódico y, aplicando la Proposición 3.0.4 inciso (i), $f^{i_n}(X_n)=f^{i_{n+1}}(X_n)$. En resumen,

$$f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\cup f^{2^n}\left(f^{i_{n+1}}(X_{n+1})\right)\subseteq f^{i_{n+1}}(X_n)=f^{i_n}(X_n).$$

Con lo cual queda probada la proposición.

Ahora probaremos el lema. Por la Proposición 3.0.7 inciso (i), para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{i_n}(X_n)$ es 2^n-periódico. Como A_0 y A_1 son intervalos, $Int(A_0)$ y $Int(A_1)$ son intervalos abiertos. Tenemos que $a_0 \in \omega(x_0, f) \cap Int(A_0)$ y que $a_1 \in \omega(x_1, f) \cap Int(A_1)$. Por el Lema 3.0.11 inciso (ii), existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que tanto $f^{k_0}(Int(A_0))$ como $f^{k_1}(Int(A_1))$ tienen un punto periódico, digamos z_0 y z_1, respectivamente. Por el Teorema 2.3.10 inciso (ii), tenemos que los periodos de z_0 y z_1 son necesariamente potencias de dos; así, sea $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que 2^p es múltiplo de los periodos de z_0 y z_1. Ahora, sea $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $p < q$, $\max\{k_0, k_1\} \leq 2^q$ y tal que 2^q sea múltiplo del periodo de z_0 y z_1. Definamos $y_0 = f^{2^q - k_0}(z_0)$ y $y_1 = f^{2^q - k_1}(z_1)$. Como 2^p es múltiplo del periodo de z_0, resulta que $f^{2^p}(y_0) = f^{2^p}\left(f^{2^q - k_0}(z_0)\right) = f^{2^q - k_0}\left(f^{2^p}(z_0)\right) = f^{2^q - k_0}(z_0) = y_0$. Análogamente, tenemos que $f^{2^p}(y_1) = y_1$. Como $f^{i_q}(X_q)$ es 2^q-periódico y $2^p < 2^q$, $f^{2^p}\left(f^{i_q}(X_q)\right) \cap f^{i_q}(X_q) = \emptyset$. Si $y_0 \in f^{i_q}(X_q)$, entonces $y_0 = f^{2^p}(y_0) \in f^{2^p}\left(f^{i_q}(X_q)\right)$; implicando que $f^{i_q}(X_q) \cap f^{2^p}\left(f^{i_q}(X_q)\right) \neq \emptyset$. De este modo, obtenemos una contradicción, así que

$$y_0 \notin f^{i_q}(X_q). \tag{3.17}$$

Análogamente,

$$y_1 \notin f^{i_q}(X_q). \tag{3.18}$$

Sea $j \in \{0, 1\}$. Como 2^q es múltiplo del periodo de z_j,

$$f^{2^q}(y_j) = f^{2^q}\left(f^{2^q - k_j}(z_j)\right) = f^{2^q - k_j}(z_j) = y_j. \tag{3.19}$$

Como $f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$ es 2^{q+1}-periódico,

$$f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \cap f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) = \emptyset. \tag{3.20}$$

De nuevo, como $f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$ es $2^q + 2^q = 2^{q+1}$-periódico,

$$f^{2^q + 2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) = f^{i_{q+1}}(X_{q+1}). \tag{3.21}$$

Ahora, $z_j \in f^{k_j}(A_j)$; de lo cual se sigue que

$$y_j = f^{2^q - k_j}(z_j) \in f^{2^q - k_j + k_j}(A_j) = f^{2^q}(A_j). \tag{3.22}$$

Como $a_j \in A_j$, tenemos que

$$f^{2^q}(a_j) \in f^{2^q}(A_j). \tag{3.23}$$

Por hipótesis, $a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$; por lo tanto,

$$f^{2^q}(a_j) \in f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right). \tag{3.24}$$

A partir de (3.18), podemos considerar los casos $y_j < f^{i_q}(X_q)$ o $f^{i_q}(X_q) < y_j$.

Caso 1. Supongamos que $y_j < f^{i_q}(X_q)$. Por (3.20), podemos considerar los siguientes subcasos:

Subcaso 1.1. Supongamos que $f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) < f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right)$. Por la Proposición 3.0.13, tenemos que $f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{i_q}(X_q)$; y como $y_j < f^{i_q}(X_q)$,

$$y_j < f^{i_{q+1}}(X_{q+1}).$$

Por (3.24) y dado que $f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) < f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right)$, resulta que

$$f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) < f^{2^q}(a_j).$$

En resumen, $y_j < f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) < f^{2^q}(a_j)$; lo cual implica que

$$f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq \left[y_j, f^{2^q}(a_j)\right]. \tag{3.25}$$

Por (3.22), (3.23) y dado que $f^{2^q}(A_j)$ es un intervalo, obtenemos que $\left[y_j, f^{2^q}(a_j)\right] \subseteq f^{2^q}(A_j)$; y por (3.25), $f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{2^q}(A_j)$. En consecuencia,

$$f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{2^q+2^q}(A_j).$$

Así, por (3.24),

$$f^{2^q}(a_j) \in f^{2^q+2^q}(A_j).$$

Tenemos que por (3.19) y por (3.22), $y_j = f^{2^q}(y_j) \in f^{2^q+2^q}(A_j)$; y como $f^{2^q+2^q}(A_j)$,

$$\left[y_j, f^{2^q}(a_j)\right] \subseteq f^{2^q+2^q}(A_j).$$

Ahora, por (3.25), $f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{2^q+2^q}(A_j)$. Como $f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$ es $2^q + 2^q = 2^{q+1}$-periódico,

$$a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{2^q+2^q+2^q+2^q}(A_j) = f^{2^{q+2}}(A_j).$$

Subcaso 1.2. Supongamos que $f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) < f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$. Por la Proposición 3.0.13, tenemos que $f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{i_q}(X_q)$; y como $y_j < f^{i_q}(X_q)$,

$$y_j < f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right).$$

Dado que $a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$, se sigue que

$$f^{2^q+2^q}(a_j) \in f^{2^q+2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) = f^{i_{q+1}}(X_{q+1}).$$

Además, como tenemos que $f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) < f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$, entonces

$$f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) < f^{2^q+2^q}(a_j).$$

En resumen, $y_j < f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) < f^{2^q+2^q}(a_j)$. Lo anterior implica que

$$f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq \left[y_j, f^{2^q+2^q}(a_j)\right]. \tag{3.26}$$

Por (3.19) y por (3.22), $y_j = f^{2^q}(y_j) \in f^{2^q+2^q}(A_j)$; y por (3.23), $f^{2^q+2^q}(a_j) \in f^{2^q+2^q}(A_j)$. Así, dado que $f^{2^q+2^q}(A_j)$ es un intervalo, tenemos que

$$\left[y_j, f^{2^q+2^q}(a_j)\right] \subseteq f^{2^q+2^q}(A_j).$$

Ahora, por (3.26), $f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{2^q+2^q}(A_j)$; lo que implica que

$$f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{2^q+2^q+2^q}(A_j), \tag{3.27}$$

ya que $f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$ es $2^q + 2^q = 2^{q+1}$-periódico.

Por (3.22) y por (3.19),

$$y_j = f^{2^q+2^q}(y_j) \in f^{2^q+2^q+2^q}(A_j).$$

Como $a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1})$, entonces

$$f^{2^q+2^q}(a_j) \in f^{2^q+2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) = f^{i_{q+1}}(X_{q+1});$$

y por (3.27),

$$f^{2^q+2^q}(a_j) \in f^{2^q+2^q+2^q}(A_j).$$

De nuevo, como $f^{2^q+2^q+2^q}(A_j)$ es un intervalo tal que tiene a y_j y a $f^{2^q+2^q}(a_j)$, tenemos que

$$\left[y_j, f^{2^q+2^q}(a_j)\right] \subseteq f^{2^q+2^q+2^q}(A_j).$$

De este modo, por (3.26),

$$f^{2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{2^q+2^q+2^q}(A_j).$$

En virtud de lo anterior, tenemos que

$$a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) = f^{2^q+2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{2^q+2^q+2^q+2^q}(A_j) = f^{2^{q+2}}(A_j).$$

Haciendo una prueba totalmente simétrica a la anterior, suponiendo que $f^{i_q}(X_q) < y_j$, podemos concluir que

$$a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) = f^{2^q+2^q}\left(f^{i_{q+1}}(X_{q+1})\right) \subseteq f^{2^q+2^q+2^q+2^q}(A_j) = f^{2^{q+2}}(A_j).$$

Caso 2. Supongamos que $f^{i_q}(X_q) < y_j$.

En resumen, obtenemos que

$$a_j \in f^{i_{q+1}}(X_{q+1}) \subseteq f^{2^{q+2}}(A_j).$$

Por la Proposición 3.0.13, tenemos que

$$f^{i_{q+2}}(X_{q+2}) \subseteq f^{i_{q+1}}(X_{q+1}).$$

Así que para toda $j \in \{0, 1\}$,

$$f^{i_{q+2}}(X_{q+2}) \subseteq f^{2^{q+2}}(A_j).$$

Tomando $m = q + 2$, concluimos que

$$a_0, a_1 \in f^{i_m}(X_m) \subseteq f^{2^m}(A_0) \cap f^{2^m}(A_1).$$

■

Lema 3.0.14. *Sean (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$, $x_0, x_1 \in I$ tales que $\omega(x_0, f)$ y $\omega(x_1, f)$ son infinitos, $a_0 \in \omega(x_0, f)$ y $a_1 \in \omega(a_1, f)$, con $a_0 \neq a_1$, y $(X_n)_{n\geq 0}$ la sucesión dada por la Proposición 3.0.7 para $\omega(x_0, f)$. Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega(x_1, f) \subseteq \bigcup_{d=0}^{2^n-1} f^d(X_n)$. Si para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $i_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $a_0, a_1 \in f^{i_n}(X_n)$, entonces existen sucesiones de enteros no negativos, $(n_k)_{k\geq 0}$ y $(m_k)_{k\geq 0}$, y existe una familia de intervalos cerrados no vacíos*

$$\left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(k,(b_0,\ldots,b_k))\in\left(\mathbb{N}\cup\{0\},\{0,1\}^{k+1}\right)}$$

tales que:

(*i*) *Para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $(b_0, \ldots, b_{k+1}) \in \{0, 1\}^{k+2}$, $J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})} \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$.*

(*ii*) *Para toda $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y para toda $(b_0, \ldots, b_k), (c_0, \ldots, c_k) \in \{0, 1\}^{k+1}$, con $(b_0, \ldots, b_k) \neq (c_0, \ldots, c_k)$, $J_{(b_0,\ldots,b_k)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)} = \emptyset$.*

(*iii*) *Para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $(b_0, \ldots, b_k) \in \{0, 1\}^{k+1}$, $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right) = f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$.*

(*iv*) *Para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m_k \geq k$ y $n_{k+1} - n_k = 2^{m_{k+1}}$.*

(*v*) *Para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $i \in \{0, 1\}$, se tiene que $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}\right) \subseteq \left[a_i - \frac{1}{k+1}, a_i + \frac{1}{k+1}\right]$.*

Demostración:

Vamos a definir las sucesiones y a la familia de intervalos de manera inductiva. Sea $k = 0$. Sea $\delta = | a_1 - a_0 | > 0$. Sean $A_0 = \left[a_0 - \frac{\delta}{3}, a_0 + \frac{\delta}{3}\right] \cap I$ y $A_1 = \left[a_1 - \frac{\delta}{3}, a_1 + \frac{\delta}{3}\right] \cap I$. Como $a_0 \in Int(A_0)$ y $a_1 \in Int(A_1)$, por el Lema 3.0.12, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_0, a_1 \in f^{i_m}(X_m) \subseteq f^{2^m}(A_0) \cap f^{2^m}(A_1)$. Por el Teorema 2.2.5, existen intervalos cerrados $J_{(0)} \subseteq A_0$ y $J_{(1)} \subseteq A_1$ tales que $f^{2^m}\left(J_{(0)}\right) = f^{i_m}(X_m)$ y $f^{2^m}\left(J_{(1)}\right) = f^{i_m}(X_m)$. Definamos $m_0 = m$ y $n_0 = 2^m$. Como $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, tenemos que $J_{(0)} \cap J_{(1)} = \emptyset$, con lo cual se cumple (*ii*). Por otro lado, $f^{n_0}\left(J_{(0)}\right) = f^{n_0}\left(J_{(1)}\right) = f^{2^m}\left(J_{(1)}\right) = f^{i_m}(X_m) = f^{i_{m_0}}(X_{m_0})$, con lo cual se cumple (*iii*). Como $m_0 = m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, inmediatamente se cumple (*iv*). Supongamos definidos $n_k, m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y la familia $\left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(b_0,\ldots,b_k)\in\{0,1\}^{k+1}}$. Sea $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{1}{k+2}, \frac{\delta}{3}\right\}$. Sean $A_0 = [a_0 - \alpha, a_0 + \alpha] \cap I$ y $A_1 = [a_1 - \alpha, a_1 + \alpha] \cap I$. Como tenemos las hipótesis del lema anterior, tenemos que se cumple la Proposición 3.0.13. Así, $f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2}) \subseteq f^{i_{m_k+1}}(X_{m_k+1}) \subseteq f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$ y, ya que $f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$ es 2^{m_k}-periódico, se sigue que $f^{2\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2})\right) \subseteq f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$. Ahora, por la Proposición 3.0.13, $f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2}) \subseteq f^{i_{m_k+1}}(X_{m_k+1})$. Esto implica que $f^{2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2})\right) \subseteq f^{2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+1}}(X_{m_k+1})\right)$ y, como por la Proposición 3.0.13, $f^{2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+1}}(X_{m_k+1})\right) \subseteq f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$, concluimos que $f^{2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2})\right) \subseteq f^{i_{m_k}}(X_{m_k})$. En virtud de lo anterior, $f^{3\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}(X_{m_k+2})\right) \subseteq$

$f^{2\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)\right) = f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$. En resumen, $S = \left\{f^{s\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)\right)\right\}_{s=0}^{3}$ es una familia de conjuntos que están contenidos en $f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$ y que, además, son ajenos dos a dos, dado que $f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)$ es $4\cdot 2^{m_k} = 2^{m_k+2}$-periódico. Consideremos a los elementos de S de izquierda a derecha y sea D_{m_k+2} el segundo de ellos. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) &= f^{4\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)\right) \\ &= f^{3\cdot 2^{m_k}}\left(f^{2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)\right)\right) \\ &= f^{2\cdot 2^{m_k}}\left(f^{2\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)\right)\right) \\ &= f^{2^{m_k}}\left(f^{3\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que independientemente de quién sea D_{m_k+2}, existe $j \in \{0,\ldots,3\}$ tal que

$$f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(D_{m_k+2}\right) = f^{i_{m_k}+2}\left(X_{m_k+2}\right).$$

Sea $i \in \{0,1\}$. Como $a_i \in \omega\left(x_i, f\right)$, en virtud del Teorema 1.4.2 inciso (iv), existe $z_i \in \omega\left(x_i, f\right)$ tal que $f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(z_i\right) = a_i$. Por hipótesis, $\omega\left(x_i, f\right) \subseteq \bigcup_{r=0}^{2^{m_k+2}-1} f^r\left(X_{m_k+2}\right)$, así, existe $r \in \left\{0,\ldots,2^{m_k+2}-1\right\}$ tal que $z_i \in f^r\left(X_{m_k+2}\right)$; de este modo, $f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(z_i\right) = a_i \in f^{j\cdot 2^{m_k}+r}\left(X_{m_k+2}\right)$. Como $a_i \in f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right)$, tenemos que $f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) \cap f^{j\cdot 2^{m_k}+r}\left(X_{m_k+2}\right) \neq \emptyset$. Por lo tanto, dado que X_{m_k+2} es un intervalo periódico aunado a la Proposición 3.0.4 inciso (i), $f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) = f^{j\cdot 2^{m_k}+r}\left(X_{m_k+2}\right)$. Si $f^r\left(X_{m_k+2}\right) \neq D_{m_k+2}$, dado que X_{m_k+2} es un intervalo 2^{m_k+2}-periódico, entonces $f^r\left(X_{m_k+2}\right) \cap D_{m_k+2} = \emptyset$. De nuevo, por la Proposición 3.0.4 inciso (iii) y dado que X_{m_k+2} es 2^{m_k+2}-periódico,

$$\emptyset = f^{j\cdot 2^{m_k}+r}\left(X_{m_k+2}\right) \cap f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(D_{m_k+2}\right) = f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) \cap f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) = f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right);$$

lo cual es una contradicción, ya que $f^{i_{m_k+2}}\left(X_{m_k+2}\right) \neq \emptyset$. Así, $f^r\left(X_{m_k+2}\right) = D_{m_k+2}$, lo cual implica que $z_i \in D_{m_k+2}$. Es decir, $z_0, z_1 \in D_{m_k+2}$.

Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (iv), $z_0 \in \omega\left(x_0, f\right) \subseteq \bigcup_{d=0}^{2^n-1} f^d\left(X_n\right)$. Por hipótesis, $z_1 \in \omega\left(x_1, f\right) \subseteq \bigcup_{d=0}^{2^n-1} f^d\left(X_n\right)$. De este modo, existen $j_0, j_1 \in \{0,\ldots,2^n-1\}$ tales que $z_0 \in f^{j_0}\left(X_n\right)$ y $z_1 \in f^{j_1}\left(X_n\right)$; así, $a_0 = f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(z_0\right) \in f^{j_0+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right)$ y $a_1 = f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(z_1\right) \in f^{j_1+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right)$. Ahora, supongamos que $j_0 \neq j_1$. Por hipótesis $a_0, a_1 \in f^{i_n}\left(X_n\right)$, consecuentemente $f^{j_0+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right) \cap f^{i_n}\left(X_n\right) \neq \emptyset$ y $f^{j_1+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right) \cap f^{i_n}\left(X_n\right) \neq \emptyset$. Como X_n es 2^n-periódico e $i_n \in \{0,\ldots,2^n-1\}$, podemos aplicar la Proposición 3.0.4 inciso (i), obteniendo que $f^{j_0+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right) = f^{i_n}\left(X_n\right) = f^{j_1+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right)$. Por otro lado, dado que X_n es 2^n-periódico y $j_0 \neq j_1$, por la Proposición 3.0.4 inciso (iii), $f^{j_0+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right) \cap f^{j_1+j\cdot 2^{m_k}}\left(X_n\right) = \emptyset$; lo cual es una clara contradicción, por lo tanto, $j_0 = j_1$. Esto prueba que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, z_0 y z_1 están en el mismo intervalo $f^w\left(X_n\right)$, donde $w \in \{0,\ldots,2^n-1\}$. Por la definición de D_{m_k+2}, tenemos que $D_{m_k+2} \subseteq Int\left(f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)\right)$, en consecuencia, $z_0, z_1 \in Int\left(f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)\right)$, que además es un intervalo, ya que $f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$ lo es.

Sea $i \in \{0,1\}$. Dado que $a_i \in Int\,(A_i)$, se sigue que $z_i \in f^{-(j\cdot 2^{m_k})}\,(Int\,(A_i))$. Como $f^{j\cdot 2^{m_k}}$ es una función continua, $f^{-(j\cdot 2^{m_k})}\,(Int\,(A_i))$ es un conjunto abierto en I. Así, sea U_i un intervalo abierto tal que $z_i \in U_i \subseteq f^{-(j\cdot 2^{m_k})}\,(Int\,(A_i))$. Por lo tanto, $z_i \in U_i \cap Int\left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)$, donde $U_i \cap Int\left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)$ es un intervalo abierto por ser una intersección finita de intervalos abiertos. Así, z_0 y z_1 cumplen las hipótesis del Lema 3.0.12, con lo cual, podemos asegurar la existencia de $q \in \mathbb{N}$ y $p \in \{0,\dots,2^q-1\}$ tales que

$$z_0, z_1 \in f^p\,(X_q) \subseteq f^{2^q}\left(U_0 \cap Int\left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right) \cap f^{2^q}\left(U_1 \cap Int\left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right);$$

de esta forma,

$$z_0, z_1 \in f^p\,(X_q) \subseteq f^{2^q}\left(U_0 \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right) \cap f^{2^q}\left(U_1 \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(U_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right) &\subseteq f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(U_i) \cap f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right) \\
&= f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(U_i) \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k}) && \left(f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k}) \text{ es } 2^{m_k}\text{-periódico}\right) \\
&\subseteq f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(f^{-(j\cdot 2^{m_k})}\,(Int\,(A_i))\right) \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k}) && \left(U_i \subseteq f^{-(j\cdot 2^{m_k})}\,(Int\,(A_i))\right) \\
&\subseteq Int\,(A_i) \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k}) \\
&\subseteq A_i \cap f_{i_{m_k}}\,(X_{m_k}).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(f^p\,(X_q)) &\subseteq f^{2^q}\left(f^{j\cdot 2^{m_k}}\left(U_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right) && \left(f^p\,(X_q) \subseteq f^{2^q}\left(U_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right) \\
&\subseteq f^{2^q}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right),
\end{aligned}$$

es decir,

$$f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(f^p\,(X_q)) \subseteq f^{2^q}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right). \tag{3.28}$$

Como $z_0 \in f^p\,(X_q)$, entonces $a_0 = f^{l\cdot 2^{m_k}}\,(z_0) \in f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(f^p\,(X_q))$. Como por hipótesis $a_0 \in f^{i_q}\,(X_q)$, entonces $f^{i_q}\,(X_q) \cap f^{j\cdot 2^{m_k}+p}\,(X_q) \neq \emptyset$. Dado que X_q es 2^q-periódico e $i_q \in \{0,\dots,2^q-1\}$, por la Proposición 3.0.4 inciso (i),

$$f^{i_q}\,(X_q) = f^{j\cdot 2^{m_k}+p}\,(X_q) = f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(f^p\,(X_q)). \tag{3.29}$$

Definimos a m_{k+1} como $q\,(k+2)$. Tenemos que $2^{m_{k+1}} - 2^q = 2^{q(k+2)} - 2^q = 2^{qk}\cdot 2^{2q} - 2^q = 2^q\left(2^{qk}\cdot 2^q - 1\right)$ y como $f^{i_q}\,(X_q)$ es 2^q-periódico,

$$f^{2^{m_{k+1}}-2^q}\left(f^{i_q}\,(X_q)\right) = f^{i_q}\,(X_q). \tag{3.30}$$

Tenemos por (3.30), (3.29) y (3.28) que

$$f^{i_q}\,(X_q) = f^{2^{m_{k+1}}-2^q}\left(f^{i_q}\,(X_q)\right) = f^{2^{m_{k+1}}-2^q}\left(f^{j\cdot 2^{m_k}}\,(f^p\,(X_q))\right) \subseteq f^{2^{m_{k+1}}-2^q}\left(f^{2^q}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right).$$

Como

$$f^{2^{m_{k+1}}-2^q}\left(f^{2^q}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right)\right) = f^{2^{m_{k+1}}}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\,(X_{m_k})\right),$$

tenemos que

$$f^{i_q}\left(X_q\right) \subseteq f^{2^{m_{k+1}}}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)\right).$$

Además, por la Proposición 3.0.13 y ya que $m_{k+1} \geq q$, se sigue que

$$f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right) \subseteq f^{i_q}\left(X_q\right);$$

lo que implica que

$$f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right) \subseteq f^{2^{m_{k+1}}}\left(A_i \cap f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)\right).$$

Como $A_i \cap f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$ y $f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right)$ son intervalos cerrados, entonces, por el Teorema 2.2.5, existe $B_i \subseteq A_i \cap f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$ intervalo cerrado tal que $f^{2^{m_{k+1}}}\left(B_i\right) = f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right)$, donde $i \in \{0,1\}$. Notemos que como A_0 y A_1 son ajenos, entonces, B_0 y B_1 también lo son.

Sea $(b_0, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^{k+1}$ y sea $i \in \{0,1\}$. Por hipótesis de inducción, $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right) = f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$. Como $B_i \subseteq f^{i_{m_k}}\left(X_{m_k}\right)$, por el Teorema 2.2.5, existe un intervalo cerrado $J_{(b_0,\ldots,b_k,i)} \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$ tal que $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}\right) = B_i$; así, $f^{n_k+2^{m_{k+1}}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}\right) = f^{2^{m_{k+1}}}\left(B_i\right) = f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right)$. Definamos $n_{k+1} = n_k + 2^{m_{k+1}}$. Con esto $n_{k+1} - n_k = 2^{m_{k+1}}$. Además, dado que $q \in \mathbb{N}$, $m_{k+1} = q(k+2) > k+1$, esto cumple con (iv). Ahora, a la familia de intervalos dada por la hipótesis de inducción le agregamos los intervalos $J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}$ obtenidos de la forma anterior. Sea $\left\{J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})}\right\}_{(b_0,\ldots,b_{k+1})\in\{0,1\}^{k+2}}$ dicha familia. Sean $(b_0, \ldots, b_{k+1}) \neq (c_0, \ldots, c_{k+1})$. Si $(b_0, \ldots, b_k) \neq (c_0, \ldots, c_k)$, por hipótesis de inducción, entonces $J_{(c_0,\ldots,c_k)} \cap J_{(b_0,\ldots,b_k)} = \emptyset$ y, como para toda $i \in \{0,1\}$, $J_{(b_0,\ldots,b_k,i)} \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$ y $J_{(c_0,\ldots,c_k,i)} \subseteq J_{(c_0,\ldots,c_k)}$, tenemos que para toda $i \in \{0,1\}$, $J_{(b_0,\ldots,b_k,i)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k,i)} = \emptyset$. Esto implica que $J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})} \cap J_{(c_0,\ldots,c_{k+1})} = \emptyset$. Supongamos que $(b_0, \ldots, b_k) = (c_0, \ldots, c_k)$ y $b_{k+1} \neq c_{k+1}$. Supongamos existe $y \in J_{(b_0,\ldots,b_k,0)} \cap J_{(b_0,\ldots,b_k,1)}$. Sabemos que existen intervalos cerrados B_0 y B_1 ajenos tales que $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,0)}\right) = B_0$ y $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,1)}\right) = B_1$, de esta forma, $f^{n_k}(y) \in B_0 \cap B_1$; pero $B_1 \cap B_0 = \emptyset$. Con lo anterior, concluimos que $J_{(b_0,\ldots,b_k,1)} \cap J_{(b_0,\ldots,b_k,0)} = \emptyset$, es decir, $J_{(c_0,\ldots,c_{k+1})} \cap J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})} = \emptyset$. Con lo cual se verifica (ii). Ahora, por construcción, para toda $(b_0, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^{k+1}$ y para toda $i \in \{0,1\}$, $f^{n_k+2^{m_{k+1}}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}\right) = f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right)$. Lo cual implica que dada $(b_0, \ldots, b_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+2}$, $f^{n_{k+1}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})}\right) = f^{n_k+2^{m_{k+1}}}\left(J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})}\right) = f^{i_{m_{k+1}}}\left(X_{m_{k+1}}\right)$, y con ello se satisface (iii). Así, hemos definido sucesiones de enteros $(n_k)_{k\geq 0}$ y $(m_k)_{k\geq 0}$ y una familia de intervalos cerrados

$$\left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(k,(b_0,\ldots,b_k))\in\left(\mathbb{N}\cup\{0\},\{0,1\}^{k+1}\right)}$$

tales que cumplen con (ii), (iii) y (iv).

Verifiquemos (i) y (v). Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la construcción de la familia, obtuvimos que para toda $(b_0, \ldots, b_k) \in \{0,1\}^{k+1}$ y para toda $i \in \{0,1\}$, $J_{(b_0,\ldots,b_k,i)} \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$. Lo cual implica que dado $(b_0, \ldots, b_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+2}$, $J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})} \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$. Con esto se satisface (i). Para finalizar, sea $(b_0, \ldots, b_k) \in \{0,1\}$ y sea $i \in \{0,1\}$. Por construcción, existen intervalos cerrados B_i y A_i tales que $f^{n_k}\left(J_{(b_0,\ldots,b_k,i)}\right) = B_i \subseteq A_i$, donde $A_i = [a_i - \alpha, a_i + \alpha] \cap I$ y $\alpha = \text{mín}\left\{\frac{1}{k+2}, \frac{\delta}{3}\right\}$. Así, $A_i \subseteq \left[a_i - \frac{1}{k+2}, a_i + \frac{1}{k+2}\right]$; por lo tanto,

$f^{n_k}\left(J_{(b_0,\dots,b_k,i)}\right) \subseteq \left[a_i - \frac{1}{k+2}, a_i + \frac{1}{k+2}\right]$, cumpliéndose (v). ■

Primero recordemos unas cosas que serán útiles para la prueba del siguiente lema. Denotemos con Σ al espacio de sucesiones de ceros y unos. La métrica que vamos a utilizar en este espacio es $d_\Sigma : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dada por $d_\Sigma\left((a_k)_{k\geq 0}, (b_k)_{k\geq 0}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k - b_k|}{2^k}$. Hay varios resultados clásicos que tienen que ver con este espacio métrico que vamos a utilizar; una prueba del primer resultado se encuentra en la página 217 de [28], mientras que una prueba del segundo enunciado se puede encontrar en la página 112 de [12].

Corolario 3.0.15. *El conjunto de Cantor es homeomorfo a* (Σ, d_Σ).

Lema 3.0.16. *Sean* $s, t \in \Sigma$. *Sea* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Si las primeras* $n+1$ *entradas de* s *y* t *son iguales, entonces,* $d_\Sigma(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$. *Por otro lado, si* $d_\Sigma(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$, *entonces las primeras* n *entradas de* s *y* t *son iguales.*

Otro recordatorio fundamental en este trabajo es el siguiente:

Definición 3.0.17. *Sea* X *un conjunto. Se dice que* $A \subseteq P(X)$ *es una* ***sigma álgebra de*** X *si cumple con las siguientes condiciones:*

(i) $X, \emptyset \in A$;

(ii) *dada una sucesión* $(E_n)_{n\geq 1}$ *en* A, *entonces* $\bigcup_{n\geq 1} E_n \in A$; *y*

(iii) *si* $E_1 \in A$, *entonces* $X - E_1 \in A$.

De la definición, se puede mostrar fácilmente A es cerrado bajo uniones finitas e intersecciones numerables. También se puede verificar que la intersección de sigma álgebras en X es, de nueva cuenta, una sigma álgebra en X. Dado $E \subseteq P(X)$, se puede verificar que existe una única sigma álgebra minimal (en el sentido de la contención) tal que contiene a E. Esta sigma álgebra es en realidad la intersección de todas las sigma álgebras sobre X que contienen a E. A dicha sigma álgebra se le conoce como la sigma álgebra generada por E. Ahora, si partimos de un espacio topológico (X, τ), podemos pensar en la sigma álgebra que genera τ. Esta sigma álgebra es conocida como la sigma álgebra de Borel, $B(\tau)$, y a sus elementos se les conoce como Borelianos. Entre los Borelianos se encuentran los abiertos, cerrados, los conjuntos a lo más numerables y los compactos en (X, τ). Para ver más detalles al respecto, véase el capítulo 2 de [15].

El siguiente teorema nos dará la existencia del conjunto de Cantor que estamos buscando. Es conocido como el teorema de Alexandrov-Hausdorff y se puede encontrar en la página 83 de [18].

Teorema 3.0.18. *Sea* X *un espacio topológico separable y completamente metrizable. Si* $L \subseteq X$ *es un Boreliano, entonces o* L *es a lo más numerable o* L *contiene un conjunto de Cantor.*

Recordemos que en un espacio métrico, la distancia entre conjuntos se define como $dist(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. Referente a esto, un ejercicio clásico del Análisis Matemático es ver que la distancia de un cerrado a un compacto ajenos siempre es positiva. Este hecho nos ayudará en lo que resta del trabajo.

Lema 3.0.19. *Sean (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$, $x_0, x_1 \in I$ tales que $\omega(x_0, f)$ y $\omega(x_1, f)$ son infinitos, $a_0 \in \omega(x_0, f)$ y $a_1 \in \omega(x_1, f)$, donde $a_0 \neq a_1$, y $(X_n)_{n\geq 0}$ la sucesión dada por la Proposición 3.0.7 para $\omega(x_0, f)$. Supongamos que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega(x_1, f) \subseteq \bigcup_{d=0}^{2^n-1} f^d(X_n)$. Si para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $i_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $a_0, a_1 \in f^{i_n}(X_n)$, entonces existe una $\delta > 0$ y existe un conjunto de cantor $C \subseteq I$ tales que C es un conjunto δ-revuelto para f.*

Demostración:

Tenemos que existen sucesiones de enteros no negativos $(n_k)_{k\geq 0}$ y $(m_k)_{k\geq 0}$ y una familia de intervalos cerrados $\left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(k,(b_0,\ldots,b_k))\in\left(\mathbb{N}\cup\{0\},\{0,1\}^{k+1}\right)}$ dadas por el Lema 3.0.14.

Para todo $b = (b_k)_{k\geq 0} \in \Sigma$, definimos $J_b = \bigcap_{k\geq 0} J_{(b_0,\ldots,b_k)}$. Tenemos en principio, por el Lema 3.0.14 inciso (i), que $\left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(k,(b_0,\ldots,b_k))\in\left(\mathbb{N}\cup\{0\},\{0,1\}^{k+1}\right)}$ es una familia anidada. Así, J_b es un intervalo cerrado no vacío, por ser una intersección de intervalos compactos no vacíos. Sean $b, c \in \Sigma$ tales que $b \neq c$. Así, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b_k \neq c_k$, y, por lo tanto, $(b_0, \ldots, b_k) \neq (c_0, \ldots, c_k)$. Por el lema 3.0.14 inciso (ii), $J_{(b_0,\ldots,b_k)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)} = \emptyset$; y como $J_c \subseteq J_{(c_0,\ldots,c_k)}$ y $J_b \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$, resulta que $J_b \cap J_c = \emptyset$. Es decir,

$$\text{para todo } b, c \in \Sigma, \text{ con } b \neq c, J_b \cap J_c = \emptyset. \tag{3.31}$$

Sea $A = \{b \in \Sigma \mid J_b \text{ es no degenerado}\}$. Si A fuera no numerable, por (3.31), tendríamos una cantidad no numerable de intervalos no degenerados ajenos dos a dos. Ahora, por la densidad de los números racionales, podemos encontrar un racional por cada uno de estos intervalos. De nuevo, por (3.31), estos números racionales serían distintos, es decir, tendríamos una cantidad no numerable de números racionales; lo cual no puede ser, ya que los números racionales son numerables. Así, A debe ser a lo más numerable.

Sea

$$Y_0 = \bigcap_{k\geq 0} \bigcup_{(b_0,\ldots,b_k)\in\{0,1\}^{k+1}} J_{(b_0,\ldots,b_k)},$$

y sea

$$Y = Y_0 - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b).$$

Tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, el conjunto $\bigcup_{(b_0,\ldots,b_k)\in\{0,1\}^{k+1}} J_{(b_0,\ldots,b_k)}$ es cerrado, por ser unión finita de cerrados. Esto demuestra que Y_0 es un cerrado, pues es intersección de conjuntos cerrados. Ahora, el conjunto $\bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b)$ es abierto, pues es unión de conjuntos abiertos, de este modo, su complemento es un conjunto cerrado; por lo tanto, el conjunto $Y = Y_0 - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b) = Y_0 \cap \left(I - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b)\right)$ es cerrado, por ser intersección de cerrados.

Afirmación: $Y_0 = \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$.

Razón: Sea $y \in Y_0$. Esto implica que $y \in \bigcup_{(b_0)\in\{0,1\}} J_{(b_0)}$. Consecuentemente existe $c_0 \in \{0, 1\}$ tal que $y \in J_{(c_0)}$. Supongamos que están definidos $c_0, \ldots, c_k \in \{0, 1\}$ tales que $y \in J_{(c_0)} \cap \ldots \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)}$.

Como $y \in Y_0$, tenemos que y está en $\bigcup_{(b_0,\ldots,b_{k+1})\in\{0,1\}^{k+2}} J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})}$. Así, existe $(d_0,\ldots,d_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+2}$ tal que $y \in J_{(d_0,\ldots,d_{k+1})}$. Por el Lema 3.0.14 inciso (i), $J_{(d_0,\ldots,d_{k+1})} \subseteq J_{(d_0,\ldots,d_k)}$; lo cual implica que $y \in J_{(d_0,\ldots,d_k)}$. Con esto, $y \in J_{(d_0,\ldots,d_k)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Esto quiere decir, por el Lema 3.0.14 inciso (ii), que $(c_0,\ldots,c_k) = (d_0,\ldots,d_k)$. Definimos $c_{k+1} = d_{k+1}$. Por lo tanto, encontramos una sucesión $c = (c_k)_{k\geq 0} \in \Sigma$ tal que para toda $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $y \in J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Esto implica que $y \in J_c \subseteq \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$; con lo cual $Y_0 \subseteq \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$. Ahora, sea $y \in \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$. Entonces existe $c \in \Sigma$ tal que $y \in J_c = \bigcap_{k\geq 0} J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Se sigue que para toda $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $y \in J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Lo anterior implica que para toda $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $y \in \bigcup_{(b_0,\ldots,b_k)\in\{0,1\}^{k+1}} J_{(b_0,\ldots,b_k)}$. Por lo tanto, $y \in Y_0$; obteniendo que $\bigcup_{b\in\Sigma} J_b \subseteq Y_0$. Con esto, demostramos la afirmación.

Tenemos que para cada $b \in \Sigma$, $J_b - Int_{\mathbb{R}}(J_b) = Fr_{\mathbb{R}}(J_b)$. Por (3.31), Y_0 y $\bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b)$ son uniones ajenas; lo que implica que $Y = \biguplus_{b\in\Sigma}(J_b - Int_{\mathbb{R}}(J_b)) = \biguplus_{b\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_b)$.

Sea $g : Y \longrightarrow \Sigma$ dada por $g(x) = b$, si $x \in J_b$. La función g está bien definida, ya que para todo $x \in Y$ existe $b \in \Sigma$ tal que $x \in J_b$. Por (3.31), si $c \in \Sigma$ es tal que $c \neq b$, entonces $J_c \cap J_b = \emptyset$; lo que quiere decir que $x \neq J_c$. Así, g le relaciona a x una y sólo una sucesión, que en este caso es b. Sea $b \in \Sigma$. Como $J_b \neq \emptyset$, existe $x \in J_b$; por lo tanto, $g(x) = b$, es decir, g es suprayectiva. Veamos que g es continua. Sea $x \in Y$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Sea $d \in \Sigma$ tal que $x \in J_d$. Con lo cual $g(x) = d$. Dado que $F = \left\{J_{(b_0,\ldots,b_k)}\right\}_{(b_0,\ldots,b_k)\in\{0,1\}^{k+1}}$ es una familia finita, podemos considerar el mínimo de las distancias que hay entre sus miembros, digamos δ^*. Como F es una familia de conjuntos compactos que son ajenos dos a dos, $\delta^* > 0$. Sea $y \in Y$ tal que $\mid y - x \mid < \delta^*$. Sea $r \in \Sigma$ tal que $y \in J_r$. Con lo cual $g(y) = r$. Si $y \notin J_{(d_0,\ldots,d_k)}$, entonces $y \in J_{(r_0,\ldots,r_k)}$, con $(d_0,\ldots,d_k) \neq (r_0,\ldots,r_k)$. Así, $\delta^* > \mid y - x \mid \geq dist\left(J_{(d_0,\ldots,d_k)}, J_{(r_0,\ldots,r_k)}\right) \geq \delta^*$, que es una contradicción; por lo tanto, $y \in J_{(d_0,\ldots,d_k)}$. Esto implica, por el Lema 3.0.14 inciso (ii), que $(d_0,\ldots,d_k) = (r_0,\ldots,r_k)$. Así, $d_\Sigma(g(y), g(x)) = d_\Sigma(r,d) \leq \frac{1}{2^k} < \epsilon$. Con esto se demuestra que g es continua.

Ahora, sea $w : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ dada por

$$w\left((b_k)_{k\geq 0}\right) = (0, b_0, 0, 0, b_0, b_1, \ldots, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-\text{veces}}, b_0, \ldots, b_{n-1}, \ldots).$$

Sean $(b_k)_{k\geq 0}, (c_k)_{k\geq 0} \in \Sigma$ tales que $(b_k)_{k\geq 0} \neq (c_k)_{k\geq 0}$. Así, existe $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que $b_m \neq c_m$. Como b_m y c_m tienen las mismas coordenadas en sus respectivas sucesiones, entonces, por definición de w, b_m y c_m aparecen en las mismas coordenadas de $w((b_k)_{k\geq 0})$ y de $w((c_k)_{k\geq 0})$, respectivamente; y como $b_m \neq c_m$, resulta que $w((b_k)_{k\geq 0}) \neq w((c_k)_{k\geq 0})$. Por lo tanto, w es inyectiva. Sean $b \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ y sea $\delta^* = \frac{1}{2^n}$. Si $c \in \Sigma$ es tal que $d_\Sigma(c,b) < \delta^*$, por el Lema 3.0.16, tenemos que las primeras n coordenadas de c y de b son iguales. Esto implica, por definición de w, que al menos las primeras $n+1$ coordenadas de $w(b)$ y $w(c)$ son iguales; por lo tanto, $d_\Sigma(w(c), w(b)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Esto demuestra que w es continua.

Para toda $b \in \Sigma$, $w(b) \in \Sigma$. Si $w(b) \in A$, entonces $J_{w(b)}$ es no degenerado. Como g es suprayectiva y $J_{w(b)}$ es no degenerado, existen dos puntos $x_{w(b)}, y_{w_{(b)}} \in Y$, que son los puntos frontera de $J_{w(b)}$, tales que $g(x_{w(b)}) = g(y_{w(b)}) = w(b)$. Tomemos como el menor de éstos a $x_{w(b)}$. Sea $G = \left\{y_{w(b)} \in Y \mid b \in \Sigma\right\}$. Recordemos que A es a lo más numerable, esto implica que G es a lo más numerable. Ahora, si resulta que $w(b) \notin A$, entonces $J_{w(b)}$ es degenerado. Como g es suprayectiva y $J_{w(b)}$ es degenerado, existe un único $x_{w(b)}$ tal que $\left\{x_{w(b)}\right\} = J_{w(b)} \subseteq Y$ y tal que $g(x_{w(b)}) = w(b)$. Definimos $T = \left\{x_{w(b)} \in Y \mid b \in \Sigma\right\}$.

Afirmación: $T = g^{-1}\left(w\left(\Sigma\right)\right) - G$.

Razón: Sea $x_{w(b)} \in T$, con $b \in \Sigma$. Tenemos, por construcción, que $g(x_{w(b)}) = w(b) \in w(\Sigma)$. De esta manera, $x_{w_{(b)}} \in g^{-1}\left(w\left(\sigma\right)\right)$. Además, por construcción, T no tiene elementos de G, por lo tanto, $x_{w_{(b)}} \in g^{-1}\left(w\left(\sigma\right)\right) - G$. Sea $y \in g^{-1}\left(w\left(\Sigma\right)\right) - G$. Tenemos que $g(y) \in w(\Sigma)$, así, existe $b \in \Sigma$ tal que $g(y) = w(b)$. Esto nos dice que $y \in J_{w(b)}$. Si $J_{w(b)}$ es degenerado, entonces quiere decir que y es el único punto tal que $g(y) = w(b)$, y por construcción de T, $y \in T$. Si $J_{w(b)}$ es no degenerado, como $y \notin G$, entonces pasa que y es el menor de los puntos frontera de $J_{w(b)}$ y, por la construcción de T, $y \in T$.

Afirmación: T es no numerable.

Razón: Sabemos que Σ es no numerable y dado que w es inyectiva, resulta que $w(\Sigma)$ es no numerable. Así, por (3.31), tenemos que $\left\{J_{w(b)} \mid b \in \Sigma\right\}$ es no numerable; en consecuencia, $g^{-1}\left(w\left(\Sigma\right)\right)$ es no numerable. Y dado que G es a lo más numerable, entonces $T = g^{-1}\left(w\left(\Sigma\right)\right) - G$ es no numerable.

Afirmación: T es $\mid a_0 - a_1 \mid = \delta$-revuelto para f.

Razón: Sean $x_{w(b)}, x_{w(c)} \in T$, con $b, c \in \Sigma$. Por la definición de w, tenemos que $w(b)$ y $w(c)$ tienen una infinidad de mismas coordenadas que son iguales a 0; esto implica que para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $k_m > m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que las $k_m + 1$-ésimas coordenadas de $w(c)$ y $w(b)$ son iguales a 0. Es decir, podemos asegurar la existencia de una sucesión estrictamente creciente de naturales $(k_m)_{m \geq 0}$ tal que las $k_m + 1$-ésimas coordenadas de $w(c)$ y $w(b)$ son iguales a 0. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tenemos que $x_{w(b)} \in J_{w(b)} \subseteq J_{(w(b)_0, \ldots, w(b)_{k_m}, 0)}$ y $x_{w(c)} \in J_{w(c)} \subseteq J_{(w(c)_0, \ldots, w(c)_{k_m}, 0)}$. Ahora, por el Lema 3.0.14 inciso (v), se sigue que

$$f^{n_{k_m}}\left(J_{(w(b)_0, \ldots, w(b)_{k_m}, 0)}\right) \subseteq \left[a_0 - \frac{1}{k_m + 1}, a_0 + \frac{1}{k_m + 1}\right]$$

y que

$$f^{n_{k_m}}\left(J_{(w(c)_0, \ldots, w(c)_{k_m}, 0)}\right) \subseteq \left[a_0 - \frac{1}{k_m + 1}, a_0 + \frac{1}{k_m + 1}\right];$$

implicando que

$$f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right), f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \in \left[a_0 - \frac{1}{k_m + 1}, a_0 + \frac{1}{k_m + 1}\right].$$

Por lo tanto,

$$\mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid \leq \frac{2}{k_m+1}.$$

Lo anterior se cumple para toda $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, dado que $\lim_{m\to\infty} \frac{1}{k_m+1} = 0$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid = 0.$$

Como $(f^{n_{k_m}}(x_{w(b)}))_{m\geq 0}$ y $(f^{n_{k_m}}(x_{w(c)}))_{m\geq 0}$ son subsucesiones de las trayectorias de $x_{w(b)}$ y de $x_{w(c)}$, respectivamente, obtenemos que

$$\liminf \mid f^{n}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n}\left(x_{w(c)}\right) \mid = 0.$$

Ahora, sean $b, c \in \Sigma$ y $x_{w(b)}, x_{w(c)} \in T$ puntos distintos. Dado que w es una función, $b \neq c$. Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b_j \neq c_j$. Por la definición de w, hay una cantidad infinita de coordenadas de $w(b)$ y de $w(c)$ en las que coinciden los valores b_j y c_j, es decir, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $k_m > m$ tal que las $k_m + 1$-ésimas coordenadas de $w(b)$ y $w(c)$ son b_j y c_j, respectivamente. Con esto, podemos asegurar la existencia de una sucesión de naturales estrictamente creciente $(k_m)_{m\geq 0}$ tal que las $k_m + 1$-ésimas coordenadas de $w(b)$ y $w(c)$ son b_j y c_j, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b_j = 0$ y que $c_j = 1$. Por el Lema 3.0.14 inciso (v), tenemos que para toda $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$f^{n_{k_m}}\left(J_{(w(b)_0,\ldots,w(b)_{k_m},b_j)}\right) \subseteq \left[a_0 - \frac{1}{k_m+1}, a_0 + \frac{1}{k_m+1}\right]$$

y

$$f^{n_{k_m}}\left(J_{(w(c)_0,\ldots,w(c)_{k_m},c_j)}\right) \subseteq \left[a_1 - \frac{1}{k_m+1}, a_1 + \frac{1}{k_m+1}\right];$$

y como

$$x_{w(b)} \in J_{(w(b)_0,\ldots,w(b)_{k_m},b_j)} \quad \text{y} \quad x_{w(c)} \in J_{(w(c)_0,\ldots,w(c)_{k_m},c_j)},$$

entonces

$$f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) \in \left[a_0 - \frac{1}{k_m+1}, a_0 + \frac{1}{k_m+1}\right] \text{ y } f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \in \left[a_1 - \frac{1}{k_m+1}, a_1 + \frac{1}{k_m+1}\right].$$

Así,

$$\begin{aligned}
\delta &= \mid a_0 - a_1 \mid \\
&= \mid a_0 + f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) + f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) - a_1 \mid \\
&\leq \mid a_0 - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) \mid + \mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid + \mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) - a_1 \mid \\
&= \frac{2}{k_m+1} + \mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid;
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid \geq \delta - \frac{2}{k_m+1}.$$

Como $\lim_{m\to\infty} \dfrac{1}{k_m+1} = 0$, tenemos que

$$\lim_{m\to\infty} \mid f^{n_{k_m}}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n_{k_m}}\left(x_{w(c)}\right) \mid \geq \delta.$$

Como $(f^{n_{k_m}}(x_{w(b)}))_{m\geq 0}$ y $(f^{n_{k_m}}(x_{w(c)}))_{m\geq 0}$ son subsucesiones de las trayectorias de $x_{w(b)}$ y de $x_{w(c)}$, respectivamente, obtenemos que

$$\limsup \mid f^{n}\left(x_{w(b)}\right) - f^{n}\left(x_{w(c)}\right) \mid \geq \delta.$$

Con esto demostramos que T es δ-revuelto para f.

Para finalizar, como Σ es compacto y w es continua, $w(\Sigma)$ es compacto y, por lo tanto, $w(\Sigma)$ es cerrado. Dado que g es continua, $g^{-1}(w(\Sigma))$ es un conjunto cerrado en Y. Como Y es cerrado en I, $g^{-1}(w(\Sigma))$ es cerrada en I; por lo tanto, es un Boreliano de I. Como G es a lo más numerable, entonces G también es un Boreliano de I. Así, $T = g^{-1}(w(\Sigma)) - G = g^{-1}(w(\Sigma)) \cap (I - G)$ es un Boreliano en I, que además, es no numerable. Como I es separable y completamente metrizable, por el Teorema 3.0.18, existe $C \subseteq T$ un conjunto de Cantor. Dado que T es δ-revuelto para f, concluimos que C también es δ-revuelto para f. ■

Un hecho importante que vamos a aplicar, referente a una sucesión de intervalos cerrados anidados $(I_n)_{n\geq 1}$ es que $\bigcap_{n\geq 1} I_n = [\lim a_n, \lim b_n]$, donde $I_n = [a_n, b_n]$. Este hecho lo puede encontrar en la página 6 de [16].

Proposición 3.0.20. *Sea (I, f) un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$. Si todo omega conjunto límite infinito para f tiene solamente pares de puntos distintos que son f-separables, entonces todos los puntos de I son aproximadamente periódicos para f.*

Demostración:

Sea $x \in I$. Si $\omega(x, f)$ es finito, entonces, por la Proposición 1.4.7, tenemos que x es aproximadamente periódico. Ahora, supongamos que $\omega(x, f)$ es infinito. Por la compacidad de I y por el Teorema 1.4.2 inciso (ii), todos los conjuntos omega límite en el intervalo son compactos; por lo tanto, tienen mínimo y máximo. Para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y cada $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, sean $a_n^i = \min \omega(f^i(x), f^{2^n})$, $b_n^i = \max \omega(f^i(x), f^{2^n})$ y $I_n^i = [a_n^i, b_n^i]$. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ la sucesión de intervalos cerrados dada por la Proposición 3.0.7 para $\omega(x, f)$.

Observación: Para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $j \in \left\{0, \ldots, 2^{n+1} - 1\right\}$ existe $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $j = i$ ó $j = i + 2^n$.

Afirmación 1: Para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, $I_{n+1}^i \cup I_{n+1}^{i+2^n} \subseteq I_n^i$.

Razón: Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$. El Teorema 1.4.2 inciso (vii) nos asegura que para cualquier $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, una función continua g y un punto z, tenemos la igualdad $\omega(z, g) =$

$\bigcup_{j=0}^{m-1}\omega(g^i(z),g^m)$. Aplicando esto a $m=2$, $g=f^{2^n}$ y $z=f^i(x)$, tenemos que $\omega(f^i(x),f^{2^{n+1}})\cup\omega(f^{i+2^n}(x),f^{2^{n+1}})=\omega(f^i(x),f^{2^n})$. Esto implica que $I_{n+1}^i\cup I_{n+1}^{i+2^n}\subseteq I_n^i$.

Afirmación 2: Para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ pasa que cada miembro de la familia $\left\{I_{n+1}^i\right\}_{i=0}^{2^{n+1}-1}$ está contenido en algún miembro de la familia $\left\{I_n^i\right\}_{i=0}^{2^n-1}$.

Razón: Sea $j\in\left\{0,\ldots,2^{n+1}-1\right\}$. Por la observación, $j=i+2^n$ ó $j=i$, donde $i\in\{0,\ldots,2^n-1\}$. De esta manera, por la Afirmación 1, tenemos que $I_{n+1}^j\subseteq I_n^i$.

Afirmación 3: Para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y para toda $i\in\{0,\ldots,2^n-1\}$, $a_n^i,b_n^i\in\omega(x,f)$.

Razón: Dado $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ e $i\in\{0,\ldots,2^n-1\}$, por el Teorema 1.4.2 inciso (vii), $\omega(f^i(x),f^{2^n})\subseteq\omega(x,f)$. Lo que implica que $a_n^i,b_n^i\in\omega(x,f)$.

Afirmación 4: Para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, la familia $\left\{I_n^i\right\}_{i=0}^{2^n-1}$ es ajena dos a dos.

Razón: Sea $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (i), dados $i,j\in\{0,\ldots,2^n-1\}$ distintos, $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$ son ajenos. Por la Proposición 3.0.7 inciso (v), $\omega(f^i(x),f^{2^n})\subseteq f^i(X_n)$ y $\omega(f^j(x),f^{2^n})\subseteq f^j(X_n)$. Dado que $f^i(X_n)$ y $f^j(X_n)$ son intervalos, tenemos que $I_n^i\subseteq f^i(X_n)$ y $I_n^j\subseteq f^j(X_n)$; implicando que I_n^i e I_n^j son ajenos.

Afirmación 5: Dada $\epsilon>0$ existe $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para toda $i\in\{0,\ldots,2^m-1\}$ se cumple que $diam(I_m^i)<\epsilon$.

Razón: Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que existe $\epsilon>0$ tal que para toda $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ existe $j_n\in\{0,\ldots,2^n-1\}$ tal que $diam(I_n^{j_n})\geq\epsilon$. Sea $a_0\in I_0^0$. Suponga definidos $a_0,\ldots,a_n$ tales que para cada $k\in\{0,\ldots,n\}$, $a_k\in I_k^{j_k}$. Como $diam(I_{n+1}^{j_{n+1}})\geq\epsilon$, $I_{n+1}^{j_{n+1}}$ es no degenerado. Así, existe $a_{n+1}\in I_{n+1}^{j_{n+1}}-\{a_0,\ldots,a_n\}$. Con esto, hemos definido una sucesión $(a_n)_{n\geq0}$ de reales distintos tales que para cada $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $a_n\in I_n^{j_n}$. Por la Afirmación 1, tenemos que $(a_n)_{n\geq0}$ es una sucesión en I_0^0. Como I_0^0 es compacto, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k\geq0}$ de enteros no negativos y existe $a\in I_0^0$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.

Afirmación 5.1: Para cada $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ existe un único $s_m\in\{0,\ldots,2^m-1\}$ tal que $a\in I_m^{s_m}$ y tal que tiene una infinidad de términos de $(a_{n_k})_{k\geq0}$.

Razón: Sea $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Como $(n_k)_{k\geq0}$ es estrictamente creciente, existe $K\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para toda $k\geq K$, $n_k>m$. Sea $k\geq K$. Por la Afirmación 2 aplicada n_k-m veces, tenemos que cada integrante de la familia $\left\{I_{n_k}^i\right\}_{i=0}^{2^{n_k}-1}$ está contenido en algún integrante de la familia $\left\{I_m^i\right\}_{i=0}^{2^m-1}$, en particular, $I_{n_k}^{j_{n_k}}$. Esto implica que a_{n_k} está en alguno de los intervalos de la familia $\{I_m^i\}_{i=0}^{2^m-1}$. Dado que $k \geq K$ fue arbitraria, lo que tenemos es que $\{a_{n_k} \mid k \geq K\}$ está contenida en $\bigcup_{i=0}^{2^m-1} I_m^i$. Como $(a_{n_k})_{k\geq K}$ está formada por reales diferentes, $\{a_{n_k} \mid k \geq K\}$ es infinito; y dado que la familia $\{I_m^i\}_{i=0}^{2^m-1}$ es finita, existe $s_m \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$ tal que $I_m^{s_m}$ tiene una infinidad de elementos de $\{a_{n_k} \mid k \geq K\}$. De esto, podemos construir una subsucesión $(a_{n_{k_r}})_{r\geq 0}$ de (a_{n_k}) tal que todos sus términos se encuentren en $I_m^{s_m}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, tenemos que $\lim\limits_{r\to\infty} a_{n_{k_r}} = a$ y, dado que $I_m^{s_m}$ es un conjunto cerrado, $a \in I_m^{s_m}$. Si existe $p_m \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$ diferente de s_m tal que $a \in I_m^{p_m}$, entonces $I_m^{p_m} \cap I_m^{s_m} \neq \emptyset$. Pero esto es una contradicción con la Afirmación 4, así que $I_m^{s_m}$ es el único que tiene a a. Análogamente, si resulta que $I_m^{p_m}$ contiene una infinidad de términos de $(a_{n_k})_{k\geq 0}$, entonces podríamos construir una subsucesión de $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ en $I_m^{p_m}$ que sea convergente a a y, como $I_m^{p_m}$ es un cerrado, entonces $a \in I_m^{p_m} \cap I_m^{s_m}$. Esto es una contradicción con la Afirmación 4. Con lo cual terminamos la prueba de la Afirmación 5.1.

Ahora, formamos la sucesión de intervalos $(I_n^{s_n})_{n\geq 0}$, donde para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $I_n^{s_n}$ es el dado por la afirmación 5.1.

Afirmación 5.2: $(I_n^{s_n})_{n\geq 0}$ está anidada.

Razón: Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la afirmación 2, tenemos que $I_{n+1}^{s_{n+1}} \subseteq \bigcup_{i=0}^{2^n-1} I_n^i$. Por la afirmación 4, $I_n^{s_n}$ y $H = (\bigcup_{i=0}^{2^n-1} I_n^i) - I_n^{s_n}$ están mutuamente separados; así que, por la conexidad de $I_{n+1}^{s_{n+1}}$, $I_{n+1}^{s_{n+1}} \subseteq I_n^{s_n}$ ó $I_{n+1}^{s_{n+1}} \subseteq H$. Por construcción, $a \in I_{n+1}^{s_{n+1}} \cap I_n^{s_n}$; lo cual implica que $I_{n+1}^{s_{n+1}} \subseteq I_n^{s_n}$.

Afirmación 5.3: Para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $diam(I_n^{s_n}) \geq \epsilon$.

Razón: Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tenemos que $I_m^{s_m}$ tiene una infinidad de términos de $(a_{n_k})_{k\geq 0}$, así, podemos encontrar una subsucesión $(a_{n_{k_r}})_{r\geq 0}$ de $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ tal que es una sucesión en $I_m^{s_m}$ y tal que converge a $a \in I_m^{s_m}$. Como $(n_{k_r})_{r\geq 0}$ es estrictamente creciente, existe $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $n_{k_r} > m$. Tenemos que $a_{n_{k_r}}$ está en $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}}$. Aplicando la Afirmación 2 $n_{k_r} - m$ veces, llegamos a la conclusión de que $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}}$ está contenido en $\bigcup_{i=0}^{2^m-1} I_m^i$. Por la Afirmación 4, $I_m^{s_m}$ y $H = (\bigcup_{i=0}^{2^m-1} I_m^i) - I_m^{s_m}$ están mutuamente separados y, por la conexidad de $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}}$, $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}} \subseteq I_m^{s_m}$ ó $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}} \subseteq H$. Pero tenemos que $a_{n_{k_r}} \in I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}} \cap I_m^{s_m}$, lo cual implica que $I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}} \subseteq I_m^{s_m}$. Dado que $diam(I_{n_{k_r}}^{i_{n_{k_r}}}) \geq \epsilon$, concluimos que $diam(I_m^{s_m}) \geq \epsilon$.

Procedemos a encontrar una contradicción. Por la Afirmación 5.2, $J = \bigcap_{n\geq 0} I_n^{s_n} = [a, b]$, donde $a = \lim a_n^{s_n}$ y $b = \lim b_n^{s_n}$. Por la Afirmación 5.3, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_n^{s_n} - a_n^{s_n} \geq \epsilon$. Como los límites son monótonos, $b - a \geq \epsilon$. Esto implica que $b \neq a$. Además, por la Afirmación 3, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n^{s_n}, b_n^{s_n} \in \omega(x, f)$ y, como $\omega(x, f)$ es un conjunto cerrado (Teorema 1.4.2 inciso (ii)), $a, b \in \omega(x, f)$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (v), para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\omega(f^{s_n}(x), f^{2^n}) \subseteq f^{s_n}(X_n)$. Dado que $f^{s_n}(X_n)$ es un intervalo, $I_n^{s_n} \subseteq f^{s_n}(X_n)$. Esto implica que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $s_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $a, b \in J \subseteq f^{s_n}(X_n)$. Así, por el Lema 3.0.10, tenemos que a y b no son f-separables. Esto entra en contradicción con la hipótesis de que todo par de puntos distintos de $\omega(x, f)$ son f-separables. Con esto probamos la Afirmación 5.

Fijemos $\epsilon > 0$. Por la Afirmación 5, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para toda $i \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$, $diam(I_n^i) < \frac{\epsilon}{2}$. Por la Afirmación 2, cada miembro de $\left\{I_{m+1}^i\right\}_{i=0}^{2^{m+1}-1}$ tiene diámetro menor a ϵ, así, podemos considerar a $m \geq 1$.

Afirmación 6: Existe $y \in I_m^0$ un punto tal que $f^{2^m-1}(y) = y$, y para cada $i \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$, $f^i(y) \in I_m^i$.

Razón: Sea $i \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$. Sabemos que $f(\omega(f^{i-1}(x), f^{2^m})) = \omega(f^i(x), f^{2^m})$ (por el Teorema 1.4.2 inciso (v)), por lo tanto, existen $u, v \in \omega(f^{i-1}(x), f^{2^m})$ tales que $f(v) = a_m^i$ y $f(u) = b_m^i$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u \leq v$. Entonces, dado que $f([u, v])$ es un intervalo, $I_m^i \subseteq f([u, v]) \subseteq f(I_m^{i-1})$. Además, por el Teorema 1.4.2 incisos (v) y (vi), $f(\omega(f^{2^m-1}(x), f^{2^m})) = \omega(f^{2^m}(x), f^{2^m}) = \omega(x, f^{2^m})$; por lo tanto, existen $u, v \in \omega(f^{2^{m-1}}(x), f^{2^m})$ tales que $f(v) = a_m^0$ y $f(u) = b_m^0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $u \leq v$. Dado que $f([u, v])$ es un intervalo, tenemos que $I_m^0 \subseteq f([u, v]) \subseteq f(I_m^{2^m-1})$. En resumen, para todo $i\,\{0, \ldots, 2^m - 1\}$, $I_m^{i+1} \subseteq f(I_m^i)$, y $I_m^0 \subseteq I_m^{2^m-1}$; así, por el Teorema 2.2.5, existe $y \in I_m^0$ tal que $f^{2^m-1}(y) = y$ y tal que para cada $i \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$, $f^i(y) \in I_m^i$.

Como para cada $i \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}$, f^i es uniformemente continua, existe $\delta_i = \delta_i(\frac{\epsilon}{2}) > 0$ dada para la continuidad uniforme de f^i. Definimos a $\delta = \min\left\{\delta_i, \frac{\epsilon}{2} \mid i \in \{1, \ldots, 2^m - 1\}\right\}$, la cual resulta ser positiva.

Afirmación 7: Existe $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para toda $k \geq N$ existe $z_k \in \omega(x, f^{2^m})$ tal que

$$\mid f^{k2^m}(x) - z_k \mid \leq \delta.$$

Razón: Supongamos lo contrario. Es decir, supongamos que para toda $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $k_N \geq N$ tal que para toda $z \in \omega(x, f^{2^m})$ se tiene que $\mid f^{k_N 2^m}(x) - z \mid \geq \delta$. Por lo supuesto, existe $s_0 = k_0 \geq 0$ tal que $\mid f^{s_0 2^m}(x) - z \mid \geq \delta$. Supongamos definida s_N. Así, existe $s_{N+1} = k_{s_N+1} \geq s_N + 1$ tal que para todo $z \in \omega(x, f^{2^m})$ se tiene que $\mid f^{s_{N+1}2^m}(x) - z \mid \geq \delta$. Con esto, hemos formado una subsucesión $(f^{s_N 2^m}(x))_{N\geq 0}$ de $(f^{s2^m}(x))_{s\geq 0}$ tal que para toda $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para toda $z \in \omega(x, f^{2^m})$ se tiene que $\mid f^{s_N 2^m}(x) - z \mid \geq \delta$. Como I es un espacio compacto, $(f^{s_N 2^m}(x))_{N\geq 0}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $p \in I$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(f^{s_N 2^m}(x))_{N\geq 0}$ converge a p. Como $(f^{s_N 2^m}(x))_{N\geq 0}$ es subsucesión de $(f^{s2^m}(x))_{s\geq 0}$, tenemos que $p \in \omega(x, f^{2^m})$. Así, existe un entero N_0 tal que $\mid f^{s_{N_0} 2^m}(x) - p \mid < \delta$. Esto es una contradicción, ya que por construcción $\mid f^{s_{N_0} 2^m}(x) - p \mid \geq \delta$.

Afirmación 8: Para todo $k \geq N$ y para todo $i \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$, $\mid f^i(y) - f^i(z_k) \mid \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Razón: Sea $k \geq N$ y sea $i \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$. Como $z_k \in \omega(x, f^{2^m})$, por el Teorema 1.4.2 inciso (vi),

$f^i(z_k) \in \omega(f^i(x), f^{2^m}) \subseteq I^i_m$. Por la Afirmación 6, $f^i(y) \in I^i_m$ y, como $diam(I^i_m) < \frac{\epsilon}{2}$, $\mid f^i(y) - f^i(z_k) \mid < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $k \geq N$ y sea $i \in \{0, \ldots, 2^m - 1\}$. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\mid f^{k2^m+i}(x) - f^{k2^m+i}(y) \mid \leq \mid f^{k2^m}(f^i(x)) - f^i(z_k) \mid + \mid f^i(z_k) - f^{k2^m}(f^i(y)) \mid .$$

Por la Afirmación 7, $\mid f^{k2^m}(x) - z_k \mid \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$; en consecuencia, por la continuidad uniforme de f^i,

$$\mid f^{k2^m+i}(x) - f^{k2^m+i}(y) \mid < \frac{\epsilon}{2} + \mid (f^i(z_k)) - f^{k2^m}(f^i(y)) \mid .$$

Además, por la Afirmación 6, $f^{k2^m}(f^i(y)) = f^i(f^{k2^m}(y)) = f^i(y)$, entonces, por la Afirmación 8,

$$\mid f^{k2^m+i}(x) - f^{k2^m+i}(y) \mid < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Esto implica que para toda $n \geq N2^m$, $\mid f^n(x) - f^n(y) \mid < \epsilon$. En otras palabras,

$$\limsup \mid f^n(x) - f^n(y) \mid \leq \epsilon.$$

Por definición, concluimos que x es aproximadamente periódico. ■

Ahora, vamos a dar la definición de que un sistema dinámico sea *caótico* en el sentido de Li-Yorke.

Definición 3.0.21. *Sean X un espacio métrico compacto y (X, f) un sistema dinámico. Decimos que (X, f) **es Li-Yorke caótico** si y sólo si existe $S \subseteq X$ no numerable tal que es un conjunto revuelto de f.*

Teorema 3.0.22. *Sea (I, f) un un sistema dinámico tal que $h(f) = 0$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) (I, f) es Li-Yorke caótico.

(ii) Existe $x \in I$ tal que no es aproximadamente periódico para f.

(iii) Existe un omega conjunto límite infinito de f tal que tiene un par de puntos distintos que no son f-separables.

(iv) Existe $\delta > 0$ y existe $C \subseteq I$ conjunto de Cantor tales que C es un conjunto δ-revuelto de f.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Por contrapuesta. Supongamos que todos los puntos en I son aproximadamente periódicos. Así, si tomamos $x, y \in I$, por el Lema 1.4.6, tenemos que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{o} \quad \liminf d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

En cualquier caso, tenemos que x y y no forman un par de Li-Yorke. Como fueron dos puntos arbitrarios, tenemos que f no puede tener un conjunto no numerable que sea revuelto; por lo tanto, (I, f) no es

Li-Yorke caótico.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por contrapuesta. Supongamos que todo omega conjunto límite infinito de f tiene solamente pares de puntos distintos que son f-separables. Así, aplicando la Proposición 3.0.20, tenemos que todos los puntos de I son aproximadamente periódicos.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Supongamos que existe un $x \in I$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito y tal que tiene un par de puntos distintos a_0 y a_1 tales que no son f-separables. Por el Lema 3.0.10, tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $i_n \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$ tal que $a_0, a_1 \in f^{i_n}(X_n)$, donde $(X_n)_{n \geq 0}$ es la sucesión de intervalos dada por la Proposición 3.0.7 para $\omega(x, f)$. Por la Proposición 3.0.7 inciso (iv), para toda $n \geq 0$, $\omega(x, f) \subseteq \bigcup_{i=0}^{2^n-1} f^i(X_n)$. Tomando $x_0 = x_1 = x$, podemos aplicar el Lema 3.0.19, con lo cual aseguramos las existencias de una $\delta > 0$ y de un conjunto de Cantor $C \subseteq I$ tales que C es un conjunto δ-revuelto de f.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Si suponemos (iv), el conjunto de Cantor C es un conjunto δ-revuelto que es no numerable, así, (I, f) es Li-Yorke caótico. ■

Ahora, estamos listos para demostrar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.0.23. *Sea $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y sea $f : J \longrightarrow J$ una función continua tal que $h(f) = 0$. Si f tiene un par de Li-Yorke, entonces existe una $\delta > 0$ y existe $C \subseteq J$ un conjunto de Cantor tales que C es un conjunto δ-revuelto para f.*

Demostración:

Sean x y y dos puntos en I que forman un par de Li-Yorke. Si ambos puntos son aproximadamente periódicos para f, entonces, por el Lema 1.4.6,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0 \quad \text{o} \quad \liminf d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

Lo cual, en cualquiera de los casos nos dice que x y y no son un par revuelto. Así, alguno de los dos no es aproximadamente periódico para f. Por el Teorema 3.0.22 equivalencia (ii)-(iv), existe $\delta > 0$ y existe un conjunto de Cantor $C \subseteq I$ tales que C es un conjunto δ-revuelto de f. ■

Capítulo 4

Conjunto de Cantor δ-revuelto II

En este capítulo, de nuevo estudiaremos sistemas dinámicos (I, f) de tal manera que I es un intervalo compacto con la métrica usual heredada de $\mathbb{R}$. El objetivo de este capítulo es probar que dada una función $f : I \longrightarrow I$ continua, es suficiente que tenga un par de Li-Yorke para que tenga un conjunto de Cantor δ-revuelto.

Para probar este resultado, veremos qué pasa con los sistemas dinámicos para los cuales la entropía topológica de la función es positiva. Comenzaremos recordando la definición de la *función corrimiento*, $\sigma : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ dada por $\sigma((a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Dicha función es, claramente, suprayectiva. Veamos que es continua. Sea $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ y sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$, así, proponemos que $\delta = \frac{1}{2^{N+2}}$. Sea $b \in \Sigma$ tal que $d_\Sigma(a, b) < \delta$. Por el Lema 3.0.16, las primeras $N + 2$ coordenadas de a y b son iguales. Esto implica, por la definición de σ, que las primeras $N + 1$ entradas de $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ son iguales. De nuevo, por el lema 3.0.16, $d_\Sigma(\sigma(a), \sigma(b)) \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Con esto probamos que σ es continua en a y, dado que a fue arbitrario, se sigue que σ es continua.

Teorema 4.0.1. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Si f tiene una herradura estricta, digamos $\{J_0, J_1\}$, entonces existen $Y \subseteq I$ compacto, $g : Y \longrightarrow \Sigma$ función, $F \subseteq Y$ a lo más numerable, $A \subseteq \Sigma$ y una familia de subintervalos de I cerrados y no degenerados $\left\{J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right\}_{(n,(a_0,\ldots,a_{n-1}))\in\mathbb{N}\times\{0,1\}^n}$ tales que cumplen las siguientes condiciones:*

(i) $g : Y \longrightarrow \Sigma$ *es continua y suprayectiva tal que*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f_{|Y}} & Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \Sigma & \xrightarrow[\sigma]{} & \Sigma \end{array}$$

conmuta, es decir, $g \circ f_{|Y} = \sigma \circ g$, donde σ es la función corrimiento;

(ii) $g_{|Y-F} : Y - F \longrightarrow \Sigma - A$ *es una biyección;*

(iii) $g_{|F} : F \longrightarrow A$ *es dos a uno;*

(*iv*) *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $(a_0,\ldots,a_{n-1}),(b_0,\ldots,b_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \cap J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})} = \emptyset$, *si* $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \neq (b_0,\ldots,b_{n-1})$;

(*v*) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *con* $n \geq 2$, *y para todo* $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \subseteq J_{(a_0,\ldots,a_{n-2})}$;

(*vi*) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *con* $n \geq 2$, *y para todo* $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $f\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right) = J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}$;

(*vii*) *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y para todo* $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$,

$$\{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } a_0,\ldots,a_{n-1}\} = Y \cap J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}, \text{ y}$$

(*viii*) *para toda* $(a_n)_{n\geq 0} \in \Sigma - g(F)$, $\lim\limits_{n\to\infty} diam\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right) = 0$.

Demostración:

Dado que f tiene una herradura estricta $\{J_0, J_1\}$, por la Proposición 2.2.7, existe una familia de intervalos cerrados no degenerados,

$$\left\{J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right\}_{(n,(a_0,\ldots,a_{n-1}))\in\mathbb{N}\times\{0,1\}^n}$$

tal que cumple las siguientes condiciones:

(*i*) para cada $n \in \mathbb{N}$ y para todo $(a_0,\ldots,a_{n-1}),(b_0,\ldots,b_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \cap J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})} = \emptyset$, si $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \neq (b_0,\ldots,b_{n-1})$;

(*ii*) para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y para todo $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})} \subseteq J_{(a_0,\ldots,a_{n-2})}$;

(*iii*) para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y para todo $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $f\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right) = J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}$; y

(*iv*) para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, y para todo $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, $f\left(Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right)\right) = Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right)$.

Para todo $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$, definimos $J_b = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$. Tenemos que J_b es un intervalo cerrado no vacío, ya que es una intersección de intervalos cerrados no vacíos y anidados. Sean $b, c \in \Sigma$ tales que $b \neq c$. Así, existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $b_k \neq c_k$ y, por lo tanto, $(b_0,\ldots,b_k) \neq (c_0,\ldots,c_k)$. Por el inciso (*i*), $J_{(b_0,\ldots,b_k)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)} = \emptyset$; y como $J_c \subseteq J_{(c_0,\ldots,c_k)}$ y $J_b \subseteq J_{(b_0,\ldots,b_k)}$, entonces, $J_b \cap J_c = \emptyset$. Es decir,

$$\text{para todo } b, c \in \Sigma, \text{ con } b \neq c, J_b \cap J_c = \emptyset. \tag{4.1}$$

Sea

$$Y_0 = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{(b_0,\ldots,b_{n-1})\in\{0,1\}^n} J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})},$$

y sea

$$Y = Y_0 - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}\left(J_b\right).$$

Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{(b_0,\ldots,b_{n-1})\in\{0,1\}^n} J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$ es un conjunto cerrado, por ser unión finita de cerrados; así, Y_0 es un cerrado, por ser intersección de conjuntos cerrados. Ahora, $\bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b)$ es un conjunto abierto, por ser unión de conjuntos abiertos. De este modo, su complemento $Y = Y_0 - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b) = Y_0 \cap \left(I - \bigcup_{b\in\Sigma} Int_{\mathbb{R}}(J_b)\right)$ es un conjunto cerrado, por ser intersección de cerrados.

Afirmamos que

$$Y_0 = \bigcup_{b\in\Sigma} J_b.$$

Sea $y \in Y_0$. Tenemos que $y \in \bigcup_{(b_0)\in\{0,1\}} J_{(b_0)}$; así, existe $c_0 \in \{0,1\}$ tal que $y \in J_{(c_0)}$. Supongamos que están definidos $c_0, \ldots, c_k \in \{0,1\}$ tales que $y \in J_{(c_0)} \cap \ldots \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Como $y \in Y_0$, se sigue que $y \in \bigcup_{(b_0,\ldots,b_{k+1})\in\{0,1\}^{k+2}} J_{(b_0,\ldots,b_{k+1})}$. De esta forma, existe $(d_0,\ldots,d_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+2}$ tal que $y \in J_{(d_0,\ldots,d_{k+1})}$. Por el inciso (ii), $J_{(d_0,\ldots,d_{k+1})} \subseteq J_{(d_0,\ldots,d_k)}$, entonces $y \in J_{(d_0,\ldots,d_k)}$, es decir, $y \in J_{(d_0,\ldots,d_k)} \cap J_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Por el inciso (i), se sigue que $(c_0,\ldots,c_k) = (d_0,\ldots,d_k)$. Así, definamos $c_{k+1} = d_{k+1}$. Por lo tanto, encontramos una sucesión $c = (c_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, $y \in J_{(c_0,\ldots,c_{n-1})}$, es decir, $y \in J_c$. Concluimos que $y \in \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$, con lo cual $Y_0 \subseteq \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$. Ahora, sea $y \in \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$, resulta que existe $c \in \Sigma$ tal que $y \in J_c = \bigcap_{n\geq 1} J_{(c_0,\ldots,c_{n-1})}$, es decir, para toda $n \in \mathbb{N}$, $y \in J_{(c_0,\ldots,c_{n-1})}$. Esto implica que para toda $n \in \mathbb{N}$, $y \in \bigcup_{(b_0,\ldots,b_{n-1})\in\{0,1\}^n} J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$ y, por lo tanto, $y \in Y_0$, obteniendo que $\bigcup_{b\in\Sigma} J_b \subseteq Y_0$.

Ahora, por (4.1) y ya que $Y_0 = \bigcup_{b\in\Sigma} J_b$, Y_0 es una unión ajena; con lo cual deducimos que $Y = \bigcup_{b\in\Sigma} (J_b - Int_{\mathbb{R}}(J_b)) = \bigcup_{b\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_b)$ también es una unión ajena.

Sea $g : Y \longrightarrow \Sigma$ dada por $g(x) = b$, si $x \in J_b$. Notemos que g está bien definida ya que para toda $x \in Y$ existe $b \in \Sigma$ tal que $x \in J_b$. Por (4.1), si $c \in \Sigma$ satisface que $c \neq b$, entonces $J_c \cap J_b = \emptyset$; lo que quiere decir que $x \notin J_c$. Así, g le relaciona a x una y sólo una sucesión, que en este caso es b. Sea $b \in \Sigma$. Como $J_b \neq \emptyset$, existe $x \in J_b$ y, en consecuencia, $g(x) = b$, concluyendo que g es suprayectiva. Veamos que g es continua. Sea $x \in Y$ y sea $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Sea $d \in \Sigma$ tal que $x \in J_d$. Con esto $g(x) = d$. Dado que $F = \left\{J_{(b_0,\ldots,b_n)}\right\}_{(b_0,\ldots,b_n)\in\{0,1\}^{n+1}}$ es una familia finita, podemos considerar el mínimo de las distancias que hay entre sus miembros, digamos δ^*. Por el inciso (i), tenemos que F es una familia de conjuntos compactos que son ajenos dos a dos, así que $\delta^* > 0$. Sea $y \in Y$ tal que $\mid y - x \mid < \delta^*$. Sea $r \in \Sigma$ tal que $y \in J_r$. Debido a esto $g(y) = r$. Si $y \notin J_{(d_0,\ldots,d_n)}$, entonces $y \in J_{(r_0,\ldots,r_n)}$, donde $(d_0,\ldots,d_n) \neq (r_0,\ldots,r_n)$. Así, $\delta^* > \mid y - x \mid \geq dist\left(J_{(d_0,\ldots,d_n)}, J_{(r_0,\ldots,r_n)}\right) \geq \delta^*$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $y \in J_{(d_0,\ldots,d_n)}$. Por el inciso (i), esto implica que $(d_0,\ldots,d_n) = (r_0,\ldots,r_n)$. Se sigue, por el Lema 3.0.16, que $d_\Sigma(g(y), g(x)) = d_\Sigma(r, d) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Con esto se demuestra que g es continua.

Veamos que $g \circ f_{|Y} = \sigma \circ g$. Para ello, probaremos un par de cosas:

(1) Para todo $a \in \Sigma$, $f(Fr_{\mathbb{R}}(J_a)) = Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$.

Razón: Sean $a=(a_n)_{n\geq 0}\in\Sigma$ y $x\in Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$. Como J_a es intersección de intervalos cerrados anidados, existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y tal que para toda $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right)$. Ahora, por (iv), para toda $n\in\mathbb{N}$, $f(x_n)\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right)$. Así, hay una cantidad infinita de puntos de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ tales que son mínimos o son máximos de los intervalos que los tienen, respectivamente. De este modo, existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que para todo $k\in\mathbb{N}$, $f(x_{n_k})=\min J_{(a_1,\ldots,a_{n_k-1})}$, ó para todo $k\in\mathbb{N}$, $f(x_{n_k})=\max J_{(a_1,\ldots,a_{n_k-1})}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$, resulta que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=x$; así, por continuidad, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x)$. Al ser $J_{\sigma(a)}$ una intersección de intervalos cerrados anidados, $\lim\limits_{n\to\infty}\min J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\max J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Se sigue que

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\max J_{(a_1,\ldots,a_{n_k-1})}\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$$

o bien, que

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}\min J_{(a_1,\ldots,a_{n_k-1})}\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right).$$

Con esto tenemos que $f\left(Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\right)\subseteq Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Ahora, sea $y\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Como $J_{\sigma(a)}$ es una intersección de intervalos cerrados y anidados, existe una sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$, $y_n\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right)$, y tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n=y$. Por (iv), para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{(a_0),\ldots,a_{n-1}}\right)$ tal que $f(x_n)=y_n$. Así, hay una infinidad de términos de $(x_n)_{n\geq 1}$ tales que para toda $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\min J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$, ó para toda $n\in\mathbb{N}$, $x_n=\min J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}$. Con esto, podemos formar una sucesión $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, que sea subsucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$, tal que para todo $k\in\mathbb{N}$, $x_{n_k}=\min J_{(a_0,\ldots,a_{n_k-1})}$, ó tal que para todo $k\in\mathbb{N}$, $x_{n_k}=\max J_{(a_0,\ldots,a_{n_k-1})}$. Tenemos que J_a es una intersección de intervalos cerrados anidados, consecuentemente $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$; implicando que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x)$. Ahora, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}=y$ y, por la unicidad del límite, $f(x)=y$. Con esto, $y\in f\left(Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\right)$, es decir, $Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)\subseteq f\left(Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\right)$.

(2) $f(Y)=Y$.

Razón: Sea $x\in\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Tenemos que existe $a\in\Sigma$ tal que $x\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Como $\sigma(a)\in\Sigma$, $x\in\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$. Ahora, sea $x\in\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$. Entonces existe $a=(a_n)_{n\geq 0}\in\Sigma$ tal que $x\in Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$. Podemos definir $c=(0,a_0,a_1,\ldots)$. Así, $\sigma(c)=a$; con lo cual $x\in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(c)}\right)$, es decir, $x\in\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Esto demuestra que $\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)=\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
f(Y) &= f\Big(\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\Big)\\
&= \bigcup_{a\in\Sigma} f\left(Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\right)\\
&= \bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right) && \text{(Por (1))}\\
&= \bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a) && \left(\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)=\bigcup_{a\in\Sigma} Fr_{\mathbb{R}}(J_a)\right)\\
&= Y.
\end{aligned}$$

Corroboremos que $g \circ f_{|Y} = \sigma \circ g$. Dado $x \in Y$, por (4.1), existe $a \in \Sigma$ tal que $x \in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_a\right)$. Por (1), $f(x) \in Fr_{\mathbb{R}}\left(J_{\sigma(a)}\right)$. Esto implica que $g(f(x)) = \sigma(a) = \sigma(g(x))$, es decir, que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f_{|Y}"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ \Sigma \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sea $b = (b_s)_{s\geq 0} \in \Sigma$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que

$$H = \{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } b_0, \dots, b_{n-1}\} = Y \cap J_{(b_0,\dots,b_{n-1})}.$$

Sea $x \in H$. Por definición de H, $x \in Y$ y $g(x)$ comienza con $b_0, \dots, b_{n-1}$. Consecuentemente, por definición de $J_{g(x)}$, $x \in J_{g(x)} \subseteq J_{(b_0,\dots,b_{n-1})}$. Esto implica que $x \in Y \cap J_{(b_0,\dots,b_{n-1})}$; con lo cual tenemos una contención. Ahora, sea $x \in Y \cap J_{(b_0,\dots,b_{n-1})}$. Como $x \in Y$, existe $c \in \Sigma$ tal que $x \in J_c$. Por definición de J_c, tenemos que $x \in J_c \subseteq J_{(c_0,\dots,c_{n-1})}$. Si $(b_0, \dots, b_{n-1}) \neq (c_0, \dots, c_{n-1})$, entonces, por (i), $J_{(b_0,\dots,b_{n-1})} \cap J_{(c_0,\dots,c_{n-1})} = \emptyset$; lo cual no puede ser, ya que $x \in J_{(b_0,\dots,b_{n-1})} \cap J_{(c_0,\dots,c_{n-1})}$. Así, $(b_0, \dots, b_{n-1}) = (c_0, \dots, c_{n-1})$. Como $g(x) = c$ y c comienza con $(c_0, \dots, c_{n-1}) = (b_0, \dots, b_{n-1})$, tenemos que $x \in H$.

Observemos que el conjunto $A = \{b \in \Sigma \mid J_b \text{ es no degenerado}\}$ es a lo más numerable, ya que si no lo fuera, por (4.1), tendríamos una cantidad no numerable de intervalos no degenerados ajenos dos a dos. Por la densidad de los números racionales, en cada uno de estos intervalos podemos encontrar un número racional y, dado que los intervalos son ajenos dos a dos, tenemos que todos los racionales que encontramos son distintos entre sí, es decir, tendríamos una cantidad no numerable de números racionales. Lo anterior es contradictorio con el hecho de que los números racionales son numerables.

Ahora, tenemos que para cada $c \in A$, el intervalo J_c no es degenerado. Así, si definimos el conjunto $F = g^{-1}(A) = \{x \in Y \mid g(x) \in A\}$, entonces tenemos que por cada elemento $c \in A$ existen exactamente dos elementos $x_c, y_c \in F$ tales que $g(x_c) = g(y_c) = c$. Además, dado que A es a lo más numerable, F también lo es. Por otro lado, sea $c \in \Sigma - A$. Por definición de A, J_c es degenerado. Sea $\{x\} = J_c$. Por definición de g, existe uno y sólo un punto, a decir x, en Y tal que $g(x) = c$. Como $g(x) \notin A$, resulta que $x \notin F$. Así, para cada $c \in \Sigma - A$ existe uno y sólo un punto $x_c \in Y - F$ tal que $g(x_c) = c$. Es decir, $g_{Y-F} : Y - F \longrightarrow \Sigma - A$ es una biyección.

Para finalizar la prueba del teorema, sea $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \Sigma - g(F)$. Como g es suprayectiva, $g(g^{-1}(A)) = A$. Se sigue que $b \in \Sigma - g(F) = \Sigma - g(g^{-1}(A)) = \Sigma - A$; esto implica que J_b es degenerado. Como J_b es una intersección de intervalos anidados, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \min J_{(b_0,\dots,b_{n-1})} = \min J_b$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \max J_{(b_0,\dots,b_{n-1})} =$

$\max J_b$. Dado que J_b es degenerado, $\lim_{n\to\infty} \max J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})} = \max J_b = \min J_b = \lim_{n\to\infty} \min J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$ y, como $\lim_{n\to\infty} diam(J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}) = \lim_{n\to\infty} \max J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})} - \lim \min J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} diam(J_{(b_0,\ldots,b_{n-1})}) = 0.$$

■

Vamos a probar que en los sistemas dinámicos donde el espacio es un intervalo compacto, el hecho de que la entropía topológica de la función sea positiva, nos implica la existencia de una $\delta > 0$ y de un conjunto de Cantor que es δ-revuelto para f.

Teorema 4.0.2. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Si $h(f) > 0$, entonces existe una $\delta > 0$ y existe $C \subset I$ un conjunto de Cantor tales que C es un conjunto $\delta - revuelto$.*

Demostración:

Por el Teorema 2.3.9, existen $r, m \in \mathbb{N}$ tales que $r > 1$, $\frac{1}{r}\log m \geq \frac{h(f)}{2}$ y tales que f^r tiene una m-herradura estricta, con $m \geq 2$. De la m-herradura estricta, podemos tomar los intervalos con la distancia más grande entre ellos, digamos J_0 y J_1. Por definición de m-herradura estricta, tenemos que $\{J_0, J_1\}$ es una herradura estricta. Así, $t = f^r$ cumple las hipótesis del Teorema 4.0.1, por lo que existen $Y \subseteq I$ compacto, $g : Y \longrightarrow \Sigma$ función, $F \subseteq Y$ a lo más numerable, $A \subseteq \Sigma$ y una familia de intervalos cerrados no degenerados $\left\{J_{(a_0,\ldots,a_{n-1})}\right\}_{(n,(a_0,\ldots,a_{n-1}))\in\mathbb{N}\times\{0,1\}^n}$ tales que cumplen de (i) a $(viii)$ para t.

Ahora, sea $b = (b_n)_{n\geq 0} \in \Sigma - g(F)$. Definimos $w_b : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ como

$$w_b\left((c_n)_{k\geq 0}\right) = (b_0, c_0, b_0, b_1, c_0, c_1, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, \ldots, b_0, \ldots, b_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-1}, \ldots).$$

Sean $(a_n)_{n\geq 0}, (c_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ tales que $(a_n)_{n\geq 0} \neq (c_n)_{n\geq 0}$. Así, existe $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a_p \neq c_p$. Dado que a_p y c_p tienen las mismas coordenadas en sus respectivas sucesiones y, por la definición de w_b, se sigue que a_p y c_p aparecen en las mismas coordenadas de $w_b((a_n)_{n\geq 0})$ y de $w_b((c_n)_{n\geq 0})$, respectivamente; y como $a_p \neq c_p$, entonces $w_b((a_n)_{n\geq 0}) \neq w_b((c_n)_{n\geq 0})$. Por lo tanto, w_b es inyectiva. Veamos que es continua. Sean $a \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ y sea $\delta^* = \frac{1}{2^n}$. Si $c \in \Sigma$ es tal que $d_\Sigma(c, a) < \delta^*$, por el Lema 3.0.16, tenemos que las primeras n coordenadas de c y de a son iguales. Esto implica, por definición de w_b, que al menos las primeras $n+1$ coordenadas de $w_b(a)$ y $w_b(c)$ son iguales y, por lo tanto, $d_\Sigma(w_b(a), w_b(c)) \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$. Así, w_b es continua.

Para todo $c \in \Sigma$ tenemos que $w_b(c) \in \Sigma$. De aquí, tenemos dos opciones:

(1) Si $w_b(c) \in A$, por (iii), entonces existen exactamente dos puntos $x_{w(c)}, y_{w(c)} \in F$ tales que $g(y_{w_b(c)}) = g(x_{w_b(c)}) = w_b(c)$. Tomemos como el menor de éstos a $x_{w_b(c)}$ y formemos el conjunto que tiene a los números $y_{w_b(c)}$, digamos $G = \left\{y_{w_b(c)} \in F \mid c \in \Sigma\right\}$.

(2) Si resulta que $w_b(c) \notin A$, por (i), existe un único $x_{w_b(c)} \in Y - F$ tal que $g(x_{w_b(c)}) = w_b(c)$.

Así, reunamos en un conjunto a los números menores $x_{w_b(c)}$ de la primera opción y a los puntos $x_{w_b(c)}$ que se encontraron en la segunda opción. Sea $T = \left\{x_{w_b(c)} \in Y \mid c \in \Sigma\right\}$ dicho conjunto.

Afirmación: $T = g^{-1}\left(w_b\left(\Sigma\right)\right) - G$.

Razón: Sea $x_{w_b(c)} \in T$, con $c \in \Sigma$. Por construcción, notemos que $g(x_{w_b(c)}) = w_b(c) \in w_b(\Sigma)$; implicando que $x_{w_b(c)} \in g^{-1}\left(w_b\left(\Sigma\right)\right)$. Además, T no tiene elementos de G, por lo que $x_{w_b(c)} \in g^{-1}\left(w\left(\sigma\right)\right) - G$. Sea $y \in g^{-1}\left(w_b\left(\Sigma\right)\right) - G$. Entonces $g(y) \in w_b(\Sigma)$, se sigue que existe $c \in \Sigma$ tal que $g(y) = w_b(c)$. Si resulta que $w_b(c) \notin A$, entonces y es uno de los puntos de la opción (2), es decir, $y \in T$. Si pasa que $w_b(c) \in A$, entonces nos encontramos ahora en la opción (1), pero por construcción de T y dado que $y \notin G$, $y \in T$.

Afirmación: T es no numerable.

Razón: Sabemos que Σ es no numerable y, dado que w_b es inyectiva, entonces $w_b(\Sigma)$ es no numerable; como g es suprayectiva, se sigue que $g^{-1}\left(w_b\left(\Sigma\right)\right)$ es no numerable. Como G es a lo más numerable, entonces $g^{-1}\left(w_b\left(\Sigma\right)\right) - G$ es no numerable.

Sea $\delta = dist(J_0, J_1)$, la cual es positiva ya que J_0 y J_1 son ajenos, no vacíos y compactos.

Afirmación: T es δ-revuelto para t.

Razón: Sean $x_{w_b(c)}, x_{w_b(a)} \in T$ puntos distintos, donde $c, a \in \Sigma$. Como $x_{w_b}(c), x_{w_b(a)}$ son distintos y w_b es una función, $c \neq a$. Por lo tanto, existe $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $a_j \neq c_j$. Por la definición de w_b, hay una cantidad infinita de coordenadas de $w_b(a)$ y de $w_b(c)$ en las que coinciden los valores b_j y c_j, es decir, para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $k_s > s$ tal que las $k_s + 1$-ésimas coordenadas de $w_b(a)$ y $w_b(c)$ son b_j y c_j, respectivamente. Con esto, podemos asegurar la existencia de una sucesión de naturales estrictamente creciente $(k_s)_{s \geq 0}$ tal que las $k_s + 1$-ésimas coordenadas de $w_b(a)$ y $w_b(c)$ son b_j y c_j, respectivamente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_j = 0$ y que $c_j = 1$. Tenemos que para cada $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por (iii),

$$t^{k_s}\left(J_{(w_b(c)_0, \ldots, w_b(c)_{k_s-1}, c_j)}\right) \subseteq J_{c_j} = J_1$$

y

$$t^{k_s}\left(J_{(w_b(a)_0, \ldots, w_b(a)_{k_s-1}, a_j)}\right) \subseteq J_{a_j} = J_0.$$

Por definición de $J_{w_b(a)}$ y $J_{w_b(c)}$, tenemos que $x_{w_b(a)} \in J_{w_b(a)} \subseteq J_{(w_b(a)_0, \ldots, w_b(a)_{k_s-1}, a_j)}$ y $x_{w_b(c)} \in J_{w_b(c)} \subseteq J_{(w_b(c)_0, \ldots, w_b(c)_{k_s-1}, c_j)}$; en consecuencia, $t^{k_s}(x_{w_b(a)}) \in J_0$ y $t^{k_s}(x_{w_b}(c)) \in J_1$. Dado que δ es la distancia entre J_0 y J_1, $\mid t^{k_s}(x_{w_b(a)}) - t^{k_s}(x_{w_b(c)}) \mid \geq \delta$. Como las sucesiones $(t^{k_s}(x_{w_b(a)}))_{s \geq 0}$ y $(t^{k_s}(x_{w_b(c)}))_{s \geq 0}$ son subsucesiones de las trayectorias de $x_{w_b(a)}$ y de $x_{w_b(c)}$ bajo t, respectivamente, obtenemos que

$$\limsup \mid t^n(x_{w_b(a)}) - t^n(x_{w_b(c)}) \mid \geq \delta.$$

Para dar una mejor descripción de lo que sigue en la prueba, definamos algo más. Dado $c \in \Sigma$, sabemos que existe una cantidad infinita de coordenadas de $w_b(c)$ que son iguales a b_0. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ diremos que $b_0, \ldots, b_{n-1}$ es el n-ésimo bloque de $w_b(c)$ si y sólo si es la n-ésima aparición de b_0 en $w_b(c)$.

De nuevo, sean $x_{w_b(a)}, w_b(c) \in T$, con $c, a \in \Sigma$. Vamos a definir una sucesión de números enteros no negativos de la siguiente manera: como b_0 está en la primera coordenada de $w_b(a)$ y $w_b(c)$, definimos $m_1 = 0$. Así, $\sigma^{m_1}(w_b(c))$ y $\sigma^{m_1}(w_b(a))$ comienzan con b_0. Supongamos que está definido $m_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $k \in \mathbb{N}$, de tal manera que $\sigma^{m_k}(w_b(c))$ y $\sigma^{m_k}(w_b(a))$ comienzan con el k-ésimo bloque de $w_b(a)$ y $w_b(c)$. Notemos que el k-ésimo bloque de $w_b(a)$ y $w_b(c)$ es $b_0, \ldots, b_{k-1}$. Sabemos, por definición de w_b, que las coordenadas siguientes a b_{k-1} en $w_b(a)$ y $w_b(c)$ son $c_0, \ldots, c_{k-1}, b_0, \ldots, b_k$ y $a_0, \ldots, a_{k-1}, b_k, \ldots, b_k$, respectivamente. Así, tomamos $m_{k+1} = m_k + 2k$. Entonces

$$\sigma^{m_{k+1}}(w_b(c)) = \sigma^{2k}((b_0, \ldots, b_{k-1}, c_0, \ldots, c_{k-1}, b_0, \ldots, b_k, \ldots)) = (b_0, \ldots, b_k, \ldots)$$

y que

$$\sigma^{m_{k+1}}(w_b(a)) = \sigma^{2k}((b_0, \ldots, b_{k-1}, a_0, \ldots, a_{k-1}, b_0, \ldots, b_k, \ldots)) = (b_0, \ldots, b_k, \ldots).$$

Así, hemos definido una sucesión de enteros no negativos $(m_k)_{k\geq 1}$ estrictamente creciente tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^{m_k}(w_b(c))$ y $\sigma^{m_k}(w_b(a))$ comienzan con $b_0, \ldots, b_{k-1}$. Dado que $g \circ t_{|Y} = \sigma \circ g$, tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma^{m_k}(w_b(a)) = \sigma^{m_k}(g(x_{w_b(a)})) = g(t_{|Y}^{m_k}(x_{w_b(a)})) = g(t^{m_k}(x_{w_b(a)}))$$

y

$$\sigma^{m_k}(w_b(c)) = \sigma^{m_k}(g(x_{w_b(c)})) = g(t_{|Y}^{m_k}(x_{w_b(c)})) = g(t^{m_k}(x_{w_b(c)})).$$

Esto que implica que $g(t^{m_k}(x_{w_b(c)}))$ y $g(t^{m_k}(x_{w_b(a)}))$ comienzan con $b_0, \ldots, b_{k-1}$. Así,

$$t^{m_k}(x_{w_b(a)}), t^{m_k}(x_{w_b(a)}) \in \{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } b_0, \ldots, b_{k-1}\}.$$

Por (vii), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } b_0, \ldots, b_{k-1}\} = Y \cap J_{(b_0, \ldots, b_{k-1})} \subseteq J_{(b_0, \ldots, b_{k-1})}.$$

Ahora, dado que $b \in \Sigma - g(F)$, por $(viii)$, $\lim\limits_{k\to\infty} diam\left(J_{(b_0,\ldots,b_{k-1})}\right) = 0$. De esta forma,

$$\lim_{k\to\infty} diam\left(\{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } b_0, \ldots, b_{k-1}\}\right) = 0$$

y, como

$$\mid t^{m_k}(x_{w_b(a)}) - t^{m_k}(x_{w_b(a)}) \mid \leq diam\left(\{x \in Y \mid g(x) \text{ comienza con } b_0, \ldots, b_{k-1}\}\right),$$

resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \mid t^{m_k}(x_{w_b(a)}) - t^{m_k}(x_{w_b(a)}) \mid = 0.$$

Esto implica que

$$\liminf \mid t^m(x_{w_b(a)}) - t^m(x_{w_b(a)}) \mid = 0.$$

Con esto terminamos de probar la afirmación.

Para finalizar con la prueba del teorema, como Σ es compacto y w_b es continua, $w_b(\Sigma)$ es compacto y, por lo tanto, $w(\Sigma)$ es cerrado. Dado que g es continua, entonces, $g^{-1}(w_b(\Sigma))$ es un conjunto cerrado en Y; y como Y es cerrado en I, entonces, $g^{-1}(w_b(\Sigma))$ es cerrada en I. Así, $g^{-1}(w_b(\Sigma))$ es un Boreliano de I. Como G es a lo más numerable, G también es un Boreliano de I. Como $T = g^{-1}(w_b(\Sigma)) - G = g^{-1}(w_b(\Sigma)) \cap (I - G)$, resulta que es un Boreliano de I, que además, es no numerable. Como I es separable y completamente metrizable, entonces, por el Teorema 3.0.18, existe $C \subseteq T$ un conjunto de Cantor. Dado que T es δ-revuelto para t, entonces, C también es δ-revuelto para t. Ahora, por la Proposición 1.3.2 inciso (iv), tenemos que C es un conjunto de Cantor δ-revuelto para f. ■

Teorema 4.0.3. *Sea (I, f) un sistema dinámico. Si I tiene un par de Li-Yorke de f, entonces existe una $\delta > 0$ y un conjunto de cantor $C \subseteq I$ tal que C es un conjunto δ-revuelto de f.*

Demostración:

Supongamos que tenemos un sistema dinámico (I, f) tal que existen $x, y \in I$ que forman un par de Li-Yorke de f. Si $h(f) > 0$, por el Teorema 4.0.2, tenemos que existe $\delta > 0$ y existe un Cantor $C \subseteq I$ tal que C es δ-revuelto para f. Si $h(f) = 0$, como x y y forman un par de Li-Yorke para f, entonces, por el Teorema 3.0.23, existe $\delta > 0$ y existe un Cantor $C \subseteq I$ tal que C es δ-revuelto para f. Con esto, tenemos la prueba del teorema. ■

Antes de seguir al siguiente capítulo, debemos mencionar un par de cosas más.

Definición 4.0.4. *Un **arco** es un espacio topológico que es homeomorfo a $[0, 1]$ con la topología usual.*

Una prueba de la siguiente caracterización de conjunto de Cantor puede ser encontrada en la página 217 de [28].

Teorema 4.0.5. *El conjunto de Cantor (con la métrica usual) es el único espacio métrico que es totalmente disconexo, perfecto y compacto, salvo homeomorfismos.*

Teorema 4.0.6. *Sea (A, f) un sistema dinámico, donde A es un arco. Si A tiene un par de Li-Yorke para f, entonces existe una $\delta > 0$ y existe un conjunto de Cantor $C \subseteq A$ tales que C es δ-revuelto para f.*

Demostración:

Sean $x, y \in A$ un par revuelto de f, es decir, existe $\delta^* > 0$ tal que $\limsup d_A(f^n(x), f^n(y)) > \delta^*$ y $\liminf d_A(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Sea $h : [0, 1] \longrightarrow A$ un homeomorfismo. Como h es suprayectiva, existen $w, z \in [0, 1]$ tales que $h(z) = x$ y $h(w) = y$. Sea $\epsilon > 0$. Como $h^{-1} : A \longrightarrow [0, 1]$ es continua y A es compacto, h^{-1} es uniformemente continua; así, existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon) > 0$ dada por la continuidad uniforme de h^{-1}. Como $\liminf d_A(f^n(h(z)), f^n(h(w))) = 0$, existe una sucesión estrictamente creciente de enteros no negativos $(n_k)_{k\geq 0}$ tal que $\lim_{k\to\infty} d_A(f^{n_k}(h(z)), f^{n_k}(h(w))) = 0$. Se sigue que existe $K \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para toda $k \geq K$, $d_A(f^{n_k}(h(z)), f^{n_k}(h(w))) < \delta_1$. En consecuencia, $\mid h^{-1}(f^{n_k}(h(z))) - h^{-1}(f^{n_k}(h(w))) \mid < \epsilon$. Dado que $\epsilon > 0$ fue arbitraria, $\lim_{k\to\infty} \mid h^{-1}(f^{n_k}(h(z))) - h^{-1}(f^{n_k}(h(w))) \mid = 0$. Esto implica que

$$\liminf \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid = 0.$$

Ahora, si suponemos que para todo $\delta > 0$, $\limsup \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid \leq \delta$, entonces $\limsup \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid = 0$, es decir,

$$0 = \limsup \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid = \liminf \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid .$$

Con esto, aseguramos que

$$\lim_{n\to\infty} \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid = 0.$$

Como $h : [0,1] \longrightarrow A$ es uniformemente continua, existe $\delta_2 = \delta_2(\delta^*) > 0$ dada por la continuidad uniforme de h. Por lo dicho en el párrafo anterior, existe $N \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para todo $n \geq N$, $\mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid < \delta_2$; implicando que

$$d_A(f^n(h(z)), f^n(h(w))) = d_A(h(h^{-1}(f^n(h(z)))), h(h^{-1}(f^n(h(w))))) < \delta^*.$$

Así, $\limsup d_A(f^n(x), f^n(y)) = \limsup d_A(f^n(h(z)), f^n(h(w))) \leq \delta^*$; que es una contradicción con el hecho de que x y y forman un par de Li-Yorke módulo δ^* de f. Con esto, tenemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que $\limsup \mid h^{-1}(f^n(h(z))) - h^{-1}(f^n(h(w))) \mid < \delta_3$. En resumen $z, w \in [0,1]$ forman un par de Li-Yorke de $h^{-1} \circ f \circ h : [0,1] \longrightarrow [0,1]$. Aplicando el Teorema 4.0.3, existe $\delta_4 > 0$ y existe un conjunto de Cantor $C \subseteq [0,1]$ tales que C es un conjunto δ_4-revuelto de $h^{-1} \circ f \circ h$.

Sean $x_0, y_0 \in h(C)$. Tenemos que existen $s, r \in C$ tales que $h(r) = x_0$ y $h(s) = y_0$. Sea $\epsilon > 0$. Como h es uniformemente continua, existe $\delta_5 = \delta_5(\epsilon) > 0$ dada por la continuidad uniforme de h. Como C es δ_4-revuelto, $\liminf \mid h^{-1}(f^n(h(s))) - h^{-1}(f^n(h(s))) \mid = 0$; lo cual implica que existe $(n_k)_{k\geq 0}$ estrictamente creciente tal que $\lim_{k\to\infty} \mid h^{-1}(f^{n_k}(h(s))) - h^{-1}(f^{n_k}(h(s))) \mid = 0$. Así, existe $K \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tal que para todo $k \geq K$, $\mid h^{-1}(f^{n_k}(h(s))) - h^{-1}(f^{n_k}(h(s))) \mid < \delta_5$. Consecuentemente, $d_A(f^{n_k}(h(s)), f^{n_k}(h(s))) = d_A(h(h^{-1}(f^{n_k}(h(s)))), h(h^{-1}(f^{n_k}(h(s))))) < \epsilon$. Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} d_A(f^{n_k}(h(s)), f^{n_k}(h(s))) = 0$. Concluimos que $\liminf d_A(f^n(h(s)), f^n(h(s))) = 0$. Es decir, para todo $x_0, y_0 \in h(C)$,

$$\liminf d_A(f^n(x_0), f^n(y_0) = 0.$$

Supongamos que para todo $\delta > 0$, $h(C)$ no es un conjunto δ-revuelto de f. Como para todo $x_0, y_0 \in h(C)$, $\liminf d_A(f^n(x_0), f^n(y_0) = 0$, entonces tiene que pasar que para cada $\delta > 0$ existen $x_\delta, y_\delta \in h(C)$, donde $x_\delta \neq y_\delta$, tales que $\limsup d_A(f^n(x_\delta), f^n(y_\delta)) \leq \delta$. Sabemos que existe $\delta_6 = \delta_6(\delta_4) > 0$ dada por la continuidad uniforme de h^{-1}. Así, existen $s, w \in h(C)$, donde $s \neq w$, tales que $\limsup d_A(f^n(s), f^n(w)) \leq \frac{\delta_6}{2}$. Dado que h es un homeomorfismo, existen $r, z \in C$ diferentes tales que $h(r) = s$ y $h(z) = w$. Como $\liminf d_A(f^n(h(r)), f^n(h(z))) = 0$, existe $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para toda $n \geq N$, $d_A(f^n(h(r)), f^n(h(z))) = d_A(f^n(s), f^n(w)) < \delta_6$, y por la continuidad uniforme, $| h^{-1}(f^n(h(r))) - h^{-1}(f^n(h(z))) | < \delta_4$. Por lo tanto, $\limsup | h^{-1}(f^n(h(r))) - h^{-1}(f^n(h(z))) | \leq \delta_4$. Esto es una contradicción con el hecho de que C es un conjunto δ_4-revuelto para $h^{-1} \circ f \circ h$. Así, existe $\delta > 0$ tal que $h(C)$ es un conjunto δ-revuelto de f. Dado que el ser totalmente disconexo, perfecto y compacto se preserva bajo homeomorfismos, resulta que $h(C) \subseteq A$ es un conjunto de Cantor. ■

Capítulo 5

Conjunto de Cantor δ-revuelto III

En este capítulo, consideraremos solamente sistemas dinámicos (G, f), donde G es una gráfica topológica finita y $f : G \longrightarrow G$ es una función continua. El fin de este capítulo es mostrar las ideas principales de la generalización del Teorema 4.0.3 a funciones continuas en gráficas, es decir, queremos ver que para funciones continuas en gráficas basta un par de Li-Yorke para tener un Cantor δ-revuelto, para alguna $\delta > 0$. Omitimos las pruebas de algunos teoremas que vamos a utilizar cuyas pruebas son largas y se salen del propósito primordial del capítulo y la tesis.

Comencemos con una observación referente a los espacios homeomorfos al intervalo $[0, 1]$, es decir, a lo arcos.

Observación 5.0.1. Dado un arco A y dados $h, g : [0, 1] \to A$ homeomorfismos, se cumple que

$$\{h(0), h(1)\} = \{g(0), g(1)\} .$$

Definición 5.0.2. *Sean A un arco y $h : [0, 1] \to A$ un homeomorfismo. Se dice que $h(0)$ y $h(1)$ son* ***los puntos finales de A.***

Definición 5.0.3. *Una* ***gráfica topológica finita*** *(G, d) es un continuo el cual puede ser expresado como una unión finita de subconjuntos de G, $G = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$, donde para cada $i \in \{1, ..., m\}$, (G_i, d_{G_i}) es un arco y si $j, i \in \{1, ..., m\}$ son tales que $j \neq i$, se tiene que G_j y G_i son ajenos ó se intersectan en uno ó en ambos de sus puntos finales. A los puntos finales de los arcos de la gráfica los llamaremos vértices, $V(G)$.*

Cuando nos refiramos a una gráfica, estamos hablando de una gráfica topológica finita.

Definición 5.0.4. *Sean K un continuo, β un cardinal y $p \in K$.*

(i) *Decimos que* ***el orden de*** *p* ***en*** *K* ***es menor o igual a*** *β si y sólo si para todo abierto U de K que tenga a p existe $V \subseteq K$ abierto en K tal que $p \in V \subseteq U \subseteq K$ y tal que $Card(Fr_K(V)) \leq \beta$. Esto lo denotamos como $Ord(p, K) \leq \beta$.*

(ii) *Decimos que* ***el orden de*** p ***en*** K ***es igual a*** β *si y sólo si* $Ord(p,K) \leq \beta$ *y* $Ord(p,K) \nleq \alpha$ *para cualquier número cardinal* $\alpha < \beta$*. Esto lo denotamos como* $Ord(p,K) = \beta$*.*

Con esta definición, resulta ser que las gráficas quedan caracterizadas por el siguiente teorema, cuya prueba se puede encontrar en la página 144 de [24].

Teorema 5.0.5. Un continuo X es una gráfica si y sólo si X cumple los siguientes enunciados:

(i) Para toda $x \in X$, $Ord(x,X) < Card(\mathbb{N})$.

(ii) Para casi toda $x \in X$, $Ord(x,X) = 2$.

Dado que casi todos los puntos en una gráfica tienen orden 2, a estos puntos les llamaremos **puntos ordinarios**; a los puntos en una gráfica que tienen orden 1, les llamaremos **puntos finales** y a los puntos de orden distinto de 1 y 2, les llamaremos **puntos de ramificación**. Con esto, tenemos que tanto los puntos finales como los puntos de ramificación son vértices de la gráfica.

Los subcontinuos de una gráfica tienen una forma muy particular, la cual está dada por el siguiente resultado cuya prueba se encuentra en la página 145 de [24].

Corolario 5.0.6. *Todo subcontinuo no degenerado de una gráfica topológica es una gráfica topológica.*

Así, tiene sentido la siguiente definición:

Definición 5.0.7. *Sea* G *una gráfica. Decimos que* $K \subseteq G$ ***es una subgráfica de*** G *si y sólo si* K *es un subcontinuo no degenerado de* G*.*

Cada vez que consideremos a una subgráfica K de G, donde G tiene una expresión en unión finita de arcos fija, pensaremos que sus vértices son los vértices de G que tiene K unión los puntos finales en K. Con esta convención, podemos hacer lo siguiente: Sea L subgráfica de G. Dado que L es conexa, puede tener hasta dos puntos finales en cada arco de G y, dado que G tiene un número de arcos finito, tenemos que L tiene una cantidad finita de vértices. Más aún, están acotados por $M^* = Card(V(G)) + 2Card(A(G))$, donde $A(G)$ es la familia de arcos de la expresión de G considerada. Dado que L es arbitraria, tenemos que existe $M = M^* + 1 > 0$ tal que para toda subgráfica L de G, se cumple que $Card(V(L)) < M$.

Otra cosa que debemos puntualizar es la siguiente: Sean $K, L \subseteq G$ subgráficas de G. Sea $A \in A(G)$. Como K y L son conexas, el número de componentes conexas de $K \cap A$ y $L \cap A$ son a lo más dos. Así, el número de componentes conexas de $K \cap L \cap A$ es finito, dado que A es un arco. Como A fue arbitrario, tenemos que el número de componentes conexas de $K \cap L$ es finito. En resumen, la intersección de subgráficas de una gráfica G tiene una cantidad finita de componentes conexas.

Definición 5.0.8. *Sean* (G,f) *un sistema dinámico y* $k \in \mathbb{N}$*. A una subgráfica* K *de* G *se le conoce como* ***una subgráfica*** k***-periódica bajo*** f *o* ***una subgráfica periódica de periodo*** k ***bajo*** f *si y sólo si* $K, f(K), \ldots, f^{k-1}(K)$ *son ajenos dos a dos y* $f^k(K) = K$*. Si en lugar de tener que* $f^k(K) = K$

solamente tenemos que $f^k(K) \subseteq K$, a la subgráfica K se le conoce como ***una subgráfica débilmente k-periódica****. Si K es k-periódica, entonces a su órbita se le conoce como* ***un k-ciclo de gráficas*** *o un* ***ciclo de periodo k****. Si K es débilmente k-periódica, a su órbita bajo f se le conoce como* ***un k-ciclo débil de gráficas*** *o un* ***ciclo débil de gráficas de periodo k.***

Para facilitar la escritura, varias veces escribiremos para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^i(K) = K_i$. Con una argumentación idéntica a la Proposición 3.0.4, tenemos la siguiente proposición que enunciamos sin demostración:

Proposición 5.0.9. *Sean (G, f) un sistema dinámico y $K_0 \subseteq G$ una subgráfica p-periódica bajo f, donde $p \in \mathbb{N}$.*

(*i*) *Sea $i \in \{0, \dots, p-1\}$. Si $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ es tal que $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, entonces existe un único $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $j = i + qp$. En particular, $K_i = K_j$.*

(*ii*) *Para todo $i \in \{0, \dots, p-1\}$, K_i es una gráfica p-periódica.*

(*iii*) *Sean $i, j \in \{0, \dots, p-1\}$, con $i \neq j$. Para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $K_{i+r} \cap K_{j+r} = \emptyset$.*

Proposición 5.0.10. *Sean $K_0, \dots, K_{k-1}$ subgráficas ajenas dos a dos tales que $K_0 = K_k$, donde $k \in \mathbb{N}$. Dados $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$, existe $s \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $f^s(K_i) = K_j$.*

Demostración:

Si $i = j$, $s = 0$. Sean $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$, con $i \neq j$. Si $i < j$, entonces $s = j - i$. Supongamos que $j < i$. Dado que $K_0 = K_k$, $f^{k-i}(K_i) = K_0$. Tomando $s = k - i + j$, tenemos que $f^s(K_i) = f^j(K_0) = K_j$. Si $S \geq k$, tendríamos que $-i + j \geq 0$. Lo cual implicaría que $j \geq i$; contradiciendo que $j < i$. Por lo tanto, $s \in \{0, \dots, k-1\}$. ■

Proposición 5.0.11. *Sean $K_0 \subseteq G$ una subgráfica y $k \in \mathbb{N}$. Si K_0 es k-periódica, entonces para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $Orb_f(K_0) = Orb_f(K_i)$.*

Demostración:

Sea $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Sea $x \in Orb_f(K_0)$. Se sigue que existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \in K_m$. Sabemos que existen únicos $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $q \in \{0, \dots, k-1\}$ tales que $m = q + pk$. Por la Proposición 5.0.9 inciso (ii), K_q es k-periódica. Entonces $K_m = f^{pk}(K_q) = K_q$. Por la Proposición 5.0.10, existe $s \in \{0, \dots, k-1\}$ tal que $f^s(K_i) = K_q = K_m$; en consecuencia, $x \in f^s(K_i)$. Concluimos que $Orb_f(K_0) \subseteq Orb_f(K_i)$.

Sea $x \in Orb(K_i)$. Así, existe $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $x \in f^m(K_i)$. Tenemos que $f^i(K_0) = K_i$, lo cual implica que $x \in f^{m+i}(K_0) \subseteq Orb_f(K_0)$. Podemos concluir que $Orb_f(K_i) \subseteq Orb_f(K_0)$. ■

Proposición 5.0.12. *Si $K_0 \subseteq G$ es una gráfica k-periódica, con $k \in \mathbb{N}$, $Orb_f(K_0) = \biguplus_{i=0}^{k-1} K_i$.*

Demostración:

Por la Proposición 1.5.2 inciso (iii), $Orb_f(K_0) = \bigcup_{i=0}^{k-1} Orb_{f^k}(K_i)$. Dado que para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, por la Proposición 5.0.9, K_i es k-periódica, tenemos que $Orb_{f^k}(K_i) = K_i$. Por lo tanto, $Orb_f(K_0) = \bigcup_{i=0}^{k-1} K_i$. Además, $K_0, \dots, K_{k-1}$ son ajenos dos a dos, por lo tanto, la órbita de K_0 resulta ser una unión ajena. ■

Comenzaremos con un resultado clásico en topología, cuya prueba se encuentra en la página 355 de [14], y proseguiremos con algunos lemas que serán de gran ayuda durante este capítulo.

Corolario 5.0.13. *Si X es un continuo y $A_1, A_2, A_3, \dots$ son subcontinuos de X que están anidados ($A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$), entonces el conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots$ es un subcontinuo de X.*

Lema 5.0.14. *Sean (G, f) un sistema dinámico, $k \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Si X es un k-ciclo débil de gráficas tal que $\omega(x, f) \subseteq X$, entonces existe un k-ciclo de gráficas W tal que $\omega(x, f) \subseteq W \subseteq X$.*

Demostración:

Sea K una subgráfica débilmente k-periódica de G tal que $\omega(x, f) \subseteq X = Orb_f(K)$.

Afirmación 1: $Y = \bigcap_{n \geq 0} f^{nk}(K)$ es un subcontinuo de G.

Razón: Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} f^{(n+1)k}(K) = f^{nk+k}(K) &= f^{nk}\left(f^k(K)\right) \\ &\subseteq f^{nk}(K) && \left(f^k(K) \subseteq K\right), \end{aligned}$$

esto implica que la sucesión $\left(f^{nk}(K)\right)_{n \geq 0}$ es una sucesión anidada de subcontinuos de G, así, por el Teorema 5.0.13, $Y = \bigcap_{n \geq 0} f^{nk}(K)$ es un subcontinuo de G.

Afirmación 2: $Y, f(Y), \dots, f^{k-1}(Y)$ son ajenos dos a dos y $f^k(Y) = Y$.

Razón: Probemos que $f^k(Y) = Y$. Primero veamos que $f^k(Y) \subseteq Y$.

$$\begin{aligned} f^k(Y) = f^k\left(\bigcap_{n \geq 0} f^{nk}(K)\right) &\subseteq \bigcap_{n \geq 0} f^k\left(f^{nk}(K)\right) \\ &= \bigcap_{n \geq 0} f^{nk+k}(K) = \bigcap_{n \geq 0} f^{nk}\left(f^k(K)\right) \\ &\subseteq \bigcap_{n \geq 0} f^{nk}(K) && \left(f^k(K) \subseteq K\right) \\ &= Y. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que $Y \subseteq f^k(Y)$. Sea $y \in Y$. Por definición de Y, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $y \in f^{nk}(K)$. Como $y \in f^k(K)$, existe $z_0 \in K$ tal que $f^k(z_0) = y$. Como $y \in f^{2k}(K) = f^k\left(f^k(K)\right)$, existe $z_1 \in f^k(K)$ tal que $f^k(z_1) = y$. Supongamos definida $z_n \in f^{nk}(K)$ tal que $f^k(z_n) = y$. Como $y \in f^{(n+2)k}(K) = f^k\left(f^{(n+1)k}(K)\right)$, existe $z_{n+1} \in f^{(n+1)k}(K)$ tal que $f^k(z_{n+1}) = y$. Así, hemos definido una sucesión $(z_n)_{n\geq 0}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z_n \in f^n(K)$ y $f^k(z_n) = y$. Como $\left(f^{nk}(K)\right)_{n\geq 0}$ está anidada, $(z_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión en K y, dado que K es un compacto, tenemos que existe $(n_j)_{j\geq 1}$ estrictamente creciente y existe $z \in K$ tales que $\lim\limits_{j\to\infty} z_{n_j} = z$. Como f^k es continua, $\lim\limits_{j\to\infty} f^k\left(z_{n_j}\right) = f^k(z)$. Pero, por construcción, para toda $j \in \mathbb{N}$, $f^k\left(z_{n_j}\right) = y$, por lo tanto, $\lim\limits_{j\to\infty} f^k\left(z_{n_j}\right) = y$. Por la unicidad del límite, resulta que $f^k(z) = y$. Para terminar de verificar la contención, basta con demostrar que $z \in Y$. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $(n_j)_{j\geq 1}$ es estrictamente creciente, podemos encontrar una $j^* \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j^*$, entonces $n_j > m$. Por la construcción de $(z_n)_{n\geq 0}$ y dado que $\left(f^{nk}(K)\right)_{n\geq 0}$ es anidada, para todo $j \geq j^*$ se tiene que $z_{n_j} \in f^{mk}(K)$. Como $\left(z_{n_j}\right)_{j\geq j^*}$ es una cola de $\left(z_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ y $\lim\limits_{j\to\infty} z_{n_j} = z$, resulta que $\left(z_{n_j}\right)_{j\geq j^*}$ converge a z. Como f^{mk} es una función cerrada, $f^{mk}(K)$ es un cerrado, lo cual implica que $z \in f^{mk}(K)$, es decir, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z \in f^{mk}(K)$, así, $z \in Y$. Por otra parte, dado que $Y \subseteq K$, entonces para todo $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $f^i(Y) \subseteq f^i(K)$ y, dado que $K, f(K), \ldots, f^{k-1}(K)$ son ajenos dos a dos, entonces $Y, f(Y), \ldots, f^{k-1}(Y)$ son ajenos dos a dos.

Afirmación 3: $\omega(x, f) \subseteq Orb_f(Y)$.

Razón: Sea $y \in \omega(x, f)$. Como $\omega(x, f) \subseteq X$, existe $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $y \in f^i(K)$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), existe $z_1 \in \omega(x, f)$ tal que $f^{i+k}(z_1) = y$. Supongamos que $z_1 \notin K$. Como $\omega(x, f) \subseteq X$, existe $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $z_1 \in f^j(K)$, esto implica que $f^{i+k}(z_1) \in f^{i+k+j}(K) = f^{i+j}\left(f^k(K)\right)$. Dado que $f^k(K) \subseteq K$, tenemos que $f^{i+k+j}(K) \subseteq f^{i+j}(K)$, por lo tanto, $f^{i+k}(z_1) \in f^{i+j}(K)$. Además, como $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $f^{i+j}(K) \cap f^i(K) = \emptyset$, ya que por Proposición 5.0.9, $f^i(K)$ es k-periódica. Esto implica que $f^{i+k}(z_1) \notin f^i(K)$. Lo que quiere decir esto es que $f^{i+k}(z_1) \neq y$; lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $z_1 \in K$. Entonces, definiendo $w_1 = f^k(z_1)$, tenemos que $w_1 \in f^k(K)$, $f^i(w_1) = f^i\left(f^k(z_1)\right) = f^{i+k}(z_1) = y$ y, por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), $w_1 \in \omega(x, f)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y supongamos definido $w_n \in \omega(x, f) \cap f^{nk}(K)$ tal que $f^i(w_n) = y$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), existe $z_{n+1} \in \omega(x, f)$ tal que $f^{i+(n+1)k}(z_{n+1}) = y$. Supongamos que $z_{n+1} \notin K$. Como $\omega(x, f) \subseteq X$, existe $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $z_{n+1} \in f^j(K)$; esto implica que $f^{i+(n+1)k}(z_{n+1}) \in f^{i+(n+1)k+j}(K)$. Dado que $f^{(n+1)k}(K) \subseteq K$, se sigue que $f^{i+(n+1)k+j}(K) = f^{i+j}\left(f^{(n+1)k}(K)\right) \subseteq f^{i+j}(K)$; por lo tanto, $f^{i+(n+1)k}(z_1) \in f^{i+j}(K)$. Además, como $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, $f^{i+j}(K) \cap f^i(K) = \emptyset$. Esto implica que $f^{i+(n+1)k}(z_1) \notin f^i(K)$. Por lo tanto, $f^{i+(n+1)k}(z_{n+1}) \neq y$, lo cual es una contradicción, así que $z_{n+1} \in K$. Si definimos $w_{n+1} = f^{(n+1)k}(z_{n+1})$, entonces $f^i(w_{n+1}) = f^i\left(f^{(n+1)k}(z_{n+1})\right) = f^{i+(n+1)k}(z_{n+1}) = y$ y $w_{n+1} \in f^{(m+1)k}(K)$. Además, por el inciso (iv) del Teorema 1.4.2, $w_{n+1} \in \omega(x, f)$. Con esto, aseguramos la existencia de una sucesión $(w_n)_{n\geq 1}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in f^{nk}(K) \cap \omega(x, f)$ y $f^i(w_n) = y$. Como $\left(f^{nk}(K)\right)_{n\geq 0}$ es anidada, $(w_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión en K y, dado que K es compacto, entonces existen una sucesión de naturales estrictamente creciente $(n_j)_{j\geq 1}$ y $w \in K$ tales que $\lim\limits_{j\to\infty} w_{n_j} = w$. Por la continuidad de f^i podemos concluir que $\lim\limits_{j\to\infty} f^i\left(w_{n_j}\right) = f^i(w)$. Por construcción de $(w_n)_{n\geq 1}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, $f^i\left(w_{n_j}\right) = y$, por lo tanto, $\lim\limits_{j\to\infty} f^i\left(w_{n_j}\right) = y$. Así, por la unicidad de los límites, $f^i(w) = y$.

Veamos que $w \in Y$. Sea $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como $(n_j)_{j\geq 1}$ es estrictamente creciente, existe j^* tal que si $j \geq j^*$, entonces $n_j > m$. Por construcción de $(w_n)_{n\geq 1}$ y dado que $\left(f^{nk}(K)\right)_{n\geq 0}$ está anidada, pasa que si $j \geq j^*$, entonces $w_{n_j} \in f^{mk}(K)$. Esto implica que la cola $\left(w_{n_j}\right)_{j\geq j^*}$ de la sucesión $\left(w_{n_j}\right)_{j\geq 1}$ está contenida en $f^{mk}(K)$. Como $f^{mk}(K)$ es un cerrado y $\left(w_{n_j}\right)_{j\geq j^*}$ converge a w, tenemos que $w \in f^{mk}(K)$. Es decir, para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $w \in f^{mk}(K)$; por lo tanto, $w \in Y$. Con esto, podemos afirmar que $y \in f^i(Y)$, donde $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. En consecuencia, $y \in Orb_f(Y)$. Así, $\omega(x,f) \subseteq Orb_f(Y)$.

Afirmación 4: Y es no degenerado.

Razón: Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que Y es degenerado, es decir, $Y = \{p\}$ con $p \in G$. Por la Afirmación 2, p es un punto periódico de periodo k, por lo tanto, $Orb_f(Y) = Orb_f(\{p\})$ es finita. Lo anterior es una contradicción, ya que por la afirmación (3), $Orb_f(Y)$ es infinito. Por lo tanto, Y es no degenerado.

Por las Afirmaciones 1 y 4, tenemos que Y es una subgráfica de G. Por la Afirmación 3, tenemos que $\omega(x,f) \subseteq Orb_f(Y) \subseteq Orb_f(K) = X$. Además, por la Afirmación 2, aseguramos que $Orb_f(Y)$ es un k-ciclo de gráficas. ■

Antes de seguir nuestro camino, hagamos la siguiente observación: Dada una expresión de G en arcos y dado un conexo C en G, podemos pensar en $C \cap A$, donde $A \in A(G)$. Como C es conexo y A es un arco, la intersección tiene a lo más dos componentes conexas, digamos I_1 e I_2. Dado que A es un arco, I_1 e I_2 son homeomorfos a algún intervalo en $\mathbb{R}$; así, cada uno tiene a lo más dos puntos extremos. Los puntos que no son puntos extremos en I_1 e I_2 están en el interior de I_1 e I_2 con respecto a G, así que no pueden formar parte de la frontera de C en G. Por lo tanto, a lo más 4 puntos de $A \cap C$ pueden formar parte de la frontera de C en G. Dado que A fue arbitrario, obtenemos que la frontera de C en G es finita.

Lema 5.0.15. *Sean (G,f) un sistema dinámico, $l,k \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ tal que $\omega(x,f)$ es infinito. Si X es un k-ciclo de gráficas y Y es un l-ciclo de gráficas tales que contienen a $\omega(x,f)$, entonces existe un m-ciclo de gráficas Z, con $m \in \mathbb{N}$, tal que $\omega(x,f) \subseteq Z \subseteq X \cap Y$. Más aún, $m \geq \max\{k,l\}$.*

Demostración:

Sean K y L subgráficas periódicas de G de periodos k y l que tengan ciclos de gráficas X y Y, respectivamente. Sean $A = \{0, \ldots, k-1\}$ y $B = \{0, \ldots, l-1\}$. Primero notemos que

$$X \cap Y = \left(\biguplus_{i=0}^{k-1} f^i(K) \right) \cap \left(\biguplus_{j=0}^{l-1} f^j(L) \right) = \biguplus_{(i,j) \in A \times B} \left(f^i(K) \cap f^j(L) \right),$$

es decir, $X \cap Y$ es una unión finita de intersecciones de subgráficas de G. Como el número de componentes conexas de una intersección de dos subgráficas es finito, entonces el número de componentes conexas de $X \cap Y$ es finito. De esas componentes, consideremos a las que intersectan a $\omega(x, f)$, digamos que son $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$. Como $\omega(x, f)$ es infinito, podemos considerar que Z_0 contiene una cantidad infinita de puntos de $\omega(x, f)$. Como Z_0 es un conexo en $X \cap Y$, también es conexo en G, por lo que $Fr_G(Z_0)$ es finita. Consecuentemente, dado que $\omega(x, f)$ es infinito, existe $c \in Int_G(Z_0) \cap \omega(x, f)$. Por la definición de $\omega(x, f)$, existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_r)_{r \geq 1}$ tal que $\lim\limits_{r \to \infty} f^{n_r}(x) = c$; esto implica que existe $r^* \in \mathbb{N}$ tal que si $r \geq r^*$, entonces $f^{n_r}(x) \in Int_G(Z_0)$. Sea $E = Orb_f(Z_0)$. Como $f^{n_{r^*}}(x) \in Z_0$, para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{n_{r^*}+i}(x) \in f^i(Z_0) \subseteq E$, es decir, una cola de la trayectoria de x bajo f se queda contenida en E. Lo anterior implica que $\omega(x, f) \subseteq \overline{E}$. Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned}
f(X \cap Y) &= f \left(\bigcup_{(i,j) \in A \times B} \left(f^i(K) \cap f^j(L) \right) \right) \\
&= \bigcup_{(i,j) \in A \times B} f\left(f^i(K) \cap f^j(L) \right) \\
&\subseteq \bigcup_{(i,j) \in A \times B} \left(f^{i+1}(K) \cap f^{j+1}(L) \right) \\
&\subseteq \bigcup_{(i,j) \in A \times B} \left(f^i(K) \cap f^j(L) \right) && \left(f^k(K) \subseteq K \text{ y } f^l(L) \subseteq L \right) \\
&= X \cap Y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n_{|X \cap Y} : X \cap Y \longrightarrow X \cap Y$ es una función continua. Así, para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n_{|X \cap Y}(Z_0) = f^n(Z_0)$ se queda contenida en una componente conexa de $X \cap Y$. Más aún, por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), $f^n(Z_0) \cap \omega(x, f) \neq \emptyset$; y como las únicas componentes conexas de $X \cap Y$ que intersectan a $\omega(x, f)$ son $Z_0, \ldots, Z_n$, entonces para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n(Z_0) \subseteq \bigcup_{i=0}^n Z_0$. Es decir, $E \subseteq \bigcup_{i=0}^n Z_i$. Tenemos que $X \cap Y$ es un conjunto cerrado G, ya que es una intersección de cerrados en G. En virtud de lo anterior, podemos concluir que

$$\omega(x, f) \subseteq \overline{E} \subseteq \overline{\bigcup_{i=0}^n Z_i} \subseteq \overline{X \cap Y} = X \cap Y.$$

Como para todo $r \geq r^*$, $f^{n_r}(x) \in Int_G(Z_0)$, resulta que $f^{n_{r^*}}(x), f^{n_{r^*+1}}(x) \in Int_G(Z_0)$. Así, tomando $s \in \mathbb{N}$ tal que $n_{r^*+1} = n_{r^*} + s$, tenemos que $f^s(Z_0) \cap Z_0 \neq \emptyset$. Aplicando el Corolario 1.5.5, existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{E} = \biguplus_{j=0}^{p-1} E_j$, donde para cada $j \in \{0, ..., p-1\}$, E_j es componente conexa de $\overline{E}$ y es un conjunto compacto de G. Más aún, se cumple que para cada $j \in \{0, ..., p-2\}$, $f(E_j) = E_{j+1}$ y $f(E_{p-1}) \subseteq E_0$.

Si $E_0 = \{y\}$, como $f^p(\{y\}) \subseteq \{y\}$, resultaría que y es periódico y, por lo tanto, $Orb_f(y) = \bigcup_{j=0}^{p-1} E_j$ sería finita, pero esto contradice que $\overline{E} = \bigcup_{j=0}^{p-1} E_j$ es infinito, ya que contiene a $\omega(x, f)$. Así, E_0 no es degenerado, en resumen, E_0 es un subcontinuo no degenerado de G, por lo tanto, E_0 es subgráfica de G. Esto implica que $\overline{E}$ es un p-ciclo débil de gráficas. Así, aplicando el Lema 5.0.14, existe un p-ciclo de gráficas Z, tal que $\omega(x, f) \subseteq Z \subseteq \overline{E} \subseteq X \cap Y$.

Veamos la afirmación sobre el periodo de Z. Supongamos que J es una subgráfica p-periódica tal que su órbita es Z. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l = \text{máx}\{k, l\}$. Supongamos también que $p < l$. Como $J \subseteq X \cap Y$ es conexo y está contenido en Y, debe estar contenido en alguna de las componentes conexas de Y, es decir, existe $t \in \{0, \ldots, l-1\}$ tal que $J \subseteq f^t(L)$. Se sigue que $f^p(J) \subseteq f^{t+p}(L)$. Como $p < l$ y $f^t(L)$ es l-periódica, $f^{t+p}(L) \cap f^t(L) = \emptyset$; por lo tanto, $f^p(J) \cap f^t(L) = \emptyset$. Como $f^p(J) = J$, resulta que $f^p(J) \subseteq f^t(L)$, lo cual es una contradicción, ya que $f^p(J)$ no es vacío. Dicha contradicción proviene de suponer que $p < l$. Por lo tanto, $p \geq \text{máx}\{k, l\}$. ■

Lema 5.0.16. *Sean (G, f) un sistema dinámico, $k \in \mathbb{N}$ y $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Si $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(J)$, donde J es una gráfica k-periódica, es tal que $\omega(x, f) \subseteq X$, entonces para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\omega(x, f) \cap f^i(J)$ es infinito.*

Demostración:

Sea $J_0 = J \subseteq G$ subgráfica k-periódica tal que $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} J_i$. Como $\omega(x, f)$ es infinito, existe $i^* \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $J_{i^*} \cap \omega(x, f)$ es infinito. Veamos que para todo $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $J_i \cap \omega(x, f)$ es infinito. Supongamos que existe $j \in \{0, \ldots, k-1\} - \{i^*\}$ tal que $J_j \cap \omega(x, f)$ es finito, digamos que está formado por $p_1, \ldots, p_s$, donde $s \in \mathbb{N}$. Como X es un k-ciclo, por la Proposición 5.0.10, podemos encontrar $b \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $J_{j+b} = J_{i^*}$. Por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), $f^b(p_1), \ldots, f^b(p_s) \in \omega(x, f) \cap J_{i^*}$. Dado que $J_{i^*} \cap \omega(x, f)$ es infinito, podemos encontrar a $y \in J_{i^*} \cap \omega(x, f) - \left\{f^b(p_1), \ldots, f^b(p_s)\right\}$. De nuevo, por el Teorema 1.4.2 inciso (iv), existe $z \in \omega(x, f)$ tal que $f^b(z) = y$. Si pasara que $z \in J_{j^*}$ donde $j^* \in \{0, \ldots, k-1\} - \{j\}$, por la Proposición 5.0.9 inciso (iii), $J_{j^*+b} \cap J_{j+b} = \emptyset$, es decir, $J_{j^*+b} \cap J_{i^*} = \emptyset$. Esto implicaría que $f^b(z) \notin J_i$; por lo tanto, $f^b(z) \neq y$. Lo anterior es una contradicción, así, $z \in J_j$. Esto quiere decir que $z = p_r$ para alguna $r \in \{1, \ldots, s\}$. Entonces $f^b(p_r) = f^b(z) = y \neq f^b(p_r)$; lo cual, claramente, es una contradicción. Con esto se acaba la prueba del lema. ■

Proposición 5.0.17. *Sean X y Y ciclos de gráficas en (G, f) con periodos l y k, respectivamente. Si $X \subseteq Y$, entonces existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $l = qk$.*

Demostración:

Sean J_0 una subgráfica l-periódica y K_0 una subgráfica k-periódica tales que $X = Orb_f(J_0)$ y $Y = Orb_f(K_0)$. Supongamos que $J_0 \subseteq K_0$ (podemos renombrar de ser necesario, por la Proposición 5.0.11). Como K_0 es k-periódica, para todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{qk}(K_0) = K_0$. De nuevo, como K_0 es k-periódica para todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $m \neq qk$, se tiene que $f^m(K_0) \cap K_0 = \emptyset$. Por lo supuesto, $f^l(J_0) \subseteq f^l(K_0)$. Como $f^l(J_0) = J_0$, resulta que $J_0 \subseteq f^l(K_0)$, por lo tanto, $K_0 \cap f^l(K_0) \neq \emptyset$. Se sigue que $K_0 = f^l(K_0)$. Con esto, concluimos que $l = qk$, para alguna $q \in \mathbb{N}$. ■

Ahora, sean (G, f) un sistema dinámico y $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Sea

$$\Psi(x) = \{X \mid X \subseteq G \text{ es un ciclo de gráficas } \text{ y } \omega(x, f) \subseteq X\}.$$

Dado que G es una gráfica débilmente periódica de periodo 1 que contiene a $\omega(x, f)$, por el Lema 5.0.14, existe Y un 1-ciclo de gráficas tal que $\omega(x, f) \subseteq Y \subseteq Orb_f(G) = G$, por lo tanto, $\Psi(x) \neq \emptyset$. Pensemos en los periodos de los ciclos que conforman a $\Psi(x)$, los cuales pueden estar acotados o no. Primero veamos cómo es la situación cuando los periodos no están acotados.

Lema 5.0.18. *Sean (G, f) un sistema dinámico y $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Si los periodos de los ciclos en $\Psi(x)$ no están acotados, entonces existe una sucesión $(X_n)_{n \geq 1}$ de elementos de $\Psi(x)$ tal que:*

(i) *si para cada $n \in \mathbb{N}$, k_n es el periodo de X_n, la sucesión $(k_n)_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente;*

(ii) *para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$; y*

(iii) $\omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n \geq 1} X_n$.

Además, tenemos que:

(iv) *para todo $n \in \mathbb{N}$, k_{n+1} es múltiplo de k_n;*

(v) *para todo $n \in \mathbb{N}$, cada componente conexa de X_n contiene el mismo número de componentes conexas de X_{n+1}, de hecho, contiene $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq 2$ componentes conexas; y*

(vi) *$\omega(x, f)$ no contiene puntos periódicos.*

Demostración:

Como los periodos de los ciclos en $\Psi(x)$ no están acotados, para todo $M > 0$ existe un ciclo $Y_M \in \Psi(x)$ con periodo $per(Y_M) \in \mathbb{N}$ tal que $per(Y_M) > M$. De esta manera, existe $Y_1 \in \Psi(x)$ tal que $l_1 = per(Y_1) > 1$. Supongamos definidos Y_n y $per(Y_n) = l_n > n$, donde $n \in \mathbb{N}$. Tenemos que existe $Y_{n+1} \in \Psi(x)$ tal que $l_{n+1} = per(Y_{n+1}) > l_n$. Así, definimos una sucesión $(Y_n)_{n \geq 1}$ en $\Psi(x)$ con periodos estrictamente crecientes $(l_n)_{n \geq 1}$.

Definamos $Z_1 = Y_1$. Para $n \in \mathbb{N}$, supongamos definido Z_n tal que $\omega(x, f) \subseteq Z_n$. Como $\omega(x, f) \subseteq Z_n \cap Y_{n+1}$, por el Lema 5.0.15, existe Z_{n+1} un ciclo en $\Psi(x)$ tal que $\omega(x) \subseteq Z_{n+1} \subseteq Z_n \cap Y_{n+1}$. Además, cumple que $z_{n+1} = per(Z_{n+1}) \geq l_{n+1}$. Por lo tanto, hemos definido una sucesión $(Z_n)_{n \geq 1}$ en $\Psi(x)$ que está anidada y cuyos periodos $(z_n)_{n \geq 1}$ cumplen que para toda $n \in \mathbb{N}$, $z_n \geq l_n$. Sea $n_1 = 1$. Supongamos que para $i \in \mathbb{N}$, está definido $n_i \in \mathbb{N}$. Como $(l_n)_{n \geq 1}$ es estrictamente creciente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $l_m > z_{n_i}$. Por lo tanto, $z_m \geq l_m > z_{n_i}$. Tomamos a $n_{i+1} = m$. Con esto, hemos definido una sucesión de naturales estrictamente creciente $(n_i)_{i\geq 1}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, $z_{n_{i+i}} > z_{n_i}$. Ahora, definimos para toda $i \in \mathbb{N}$, $X_i = Z_{n_i}$ y $k_i = z_{n_i}$. Afirmamos que $(X_i)_{i\geq 1}$ y $(k_i)_{i\geq 1}$ son las sucesiones buscadas. En efecto, como para todo $i \in \mathbb{N}$, $z_{n_{i+1}} > z_{n_i}$, resulta que para todo $i \in \mathbb{N}$, $k_{i+1} > k_i$, con esto queda probado (i). Para verificar (ii), basta decir que dado que $(Z_n)_{n\geq 1}$ es anidada, entonces $(Z_{n_i})_{i\geq 1}$ también lo es; por lo tanto, $(X_i)_{i\geq 1}$ es anidada. Además, por la definición de $\Psi(x)$, es inmediato (iii).

Por la Proposición 5.0.17 y dado que $(X_i)_{i\geq 1}$ está anidada, podemos concluir que se cumple (iv). Para verificar (v), tomemos $i \in \mathbb{N}$ y sean K_i y K_{i+1} las gráficas periódicas de periodos k_i y k_{i+1}, respectivamente, tales que $K_{i+1} \subseteq K_i$, $X_i = Orb_f(K_i)$ y $X_{i+1} = Orb_f(K_{i+1})$. Sean $p = \frac{k_{i+1}}{k_i}$, $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$ y $n \in \{0, \ldots, p-1\}$. Tenemos que

$$nk_i + j \leq (p-1)\,k_i + j = k_i\left(\frac{k_{i+1}}{k_i} - 1\right) + j = k_{i+1} - k_i + j < k_{i+1} - k_i + k_i = k_{i+1}.$$

Además, $f^{nk_i+j}(K_{i+1}) \subseteq f^{nk_i+j}(K_i) = f^j(K_i)$. Lo anterior, aunado a que K_{i+1} es k_{i+1}-periódica, implica que para todo $j \in \{0, \ldots, k_i - 1\}$, $\left\{f^{nk_i+j}(K_{i+1}) \mid n \in \{0, \ldots, p-1\}\right\}$ es una familia ajena dos a dos, donde todos sus elementos están contenidos en $f^j(K_i)$. Así, cada $f^j(K_i)$ contiene a p conjuntos de la forma $f^{nk_i+j}(K_{i+1})$, es decir, X_i contiene p componentes de X_{i+1}. Adicionalmente, dado que k_{i+1} es múltiplo de k_i y $k_{i+1} > k_i$, $p \geq 2$.

Para finalizar, probemos que se cumple (vi). Para ello, supongamos que existe $z \in \omega(x, f)$ que es un punto periódico de f de periodo $s \in \mathbb{N}$. Por (iii), $z \in \bigcap_{i\geq 1} X_i$, es decir, para todo $i \in \mathbb{N}$, $z \in X_i$. Sea $i \in \mathbb{N}$ y sea K_i una subgráfica k_i-periódica tal que $X_i = Orb_f(K_i)$ y tal que $z \in K_i$. Como $f^s(z) = z$, $f^s(K_i) \cap K_i \neq \emptyset$; por lo tanto, $f^s(K_i) = K_i$. Esto implica que $s \geq k_i$. Con esto concluimos que para todo $i \in \mathbb{N}$, $s \geq k_i$, lo cual nos dice que $(k_i)_{i\geq 1}$ es acotada, en contradicción con (i). Por lo tanto, se cumple (vi). ∎

Ahora, describiremos la situación cuando los periodos de los ciclos en $\Psi(x)$ están acotados. Para ello, haremos uso de resultados referentes a redes, los cuales puede encontrar en el capítulo 2 de [21]. Además, necesitaremos del Lema de Zorn y del teorema siguiente, cuyas pruebas se encuentran en la página 142 de [17] y en la página 355 de [14], respectivamente.

Teorema 5.0.19. *Sea $\{C_s\}_{s\in S}$ una familia de subcontinuos de un espacio métrico X. Si para cualesquiera $s_1, s_2 \in S$ existe $s_3 \in S$ tal que $C_{s_3} \subseteq C_{s_1} \cap C_{s_2}$, entonces $\bigcap_{s\in S} C_s$ es un subcontinuo de X.*

Lema 5.0.20. *Sean (G, f) un sistema dinámico y $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Si los periodos de los ciclos en $\Psi(x)$ están acotados, entonces existe un ciclo $X \in \Psi(x)$ tal que para todo ciclo $Y \in \Psi(x)$, $X \subseteq Y$. Además, el periodo de X es máximo entre todos los periodos de los ciclos de $\Psi(x)$.*

Demostración:

Sea S el conjunto de todos los periodos de los ciclos de $\Psi(x)$. Como S es un subconjunto acotado de

$\mathbb{N}$, existe $\alpha \in S$ tal que para todo $k \in S$, $k \leq \alpha$. Definimos

$$\Psi_\alpha = \{X \in \Psi(x) \mid X \text{ tiene periodo } \alpha\}.$$

Lo primero que tenemos que decir es que $\Psi_\alpha \neq \emptyset$, ya que α es máximo. Definamos lo siguiente: para todo $A, B \in \Psi_\alpha$, $A \leq B$ si y sólo si $B \subseteq A$. Sean $A, B, C \in \Psi_\alpha$. Evidentemente, $A \leq A$. Si $A \leq B$ y $B \leq A$, por doble contención tenemos que $A = B$. Además, si $A \leq B$ y $B \leq C$, entonces $C \subseteq B \subseteq A$; por lo tanto, $A \leq C$. Es decir, $\leq$ es un orden parcial en Ψ_α.

Sea $\Theta = (Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una cadena en Ψ_α, donde $(\Lambda, \preceq)$ es un orden total tal que para todo $\lambda, \lambda_* \in \Lambda$, si $\lambda \preceq \lambda_*$, entonces $Y_\lambda \leq Y_{\lambda_*}$; es decir, si $\lambda \preceq \lambda_*$, entonces $Y_{\lambda_*} \subseteq Y_\lambda$. Sea $\lambda^* \in \lambda$. Como Y_{λ^*} es un ciclo de gráficas de periodo α, Y_{λ^*} tiene α componentes conexas, digamos que son $C^0_{\lambda^*}, \ldots, C^{\alpha-1}_{\lambda^*}$ tales que $f\left(C^0_{\lambda^*}\right) = C^1_{\lambda^*}, \ldots, f\left(C^{\alpha-1}_{\lambda^*}\right) = C^0_{\lambda^*}$. Sea $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$ y sea $\lambda \in \Lambda$. Si $\lambda^* \preceq \lambda$, entonces $Y_\lambda \subseteq Y_{\lambda^*}$; y dado que Y_{λ^*} y Y_λ son ciclos de gráficas que tienen el mismo periodo, existe una única C^i_λ componente conexa de Y_λ, tal que $C^i_\lambda \subseteq C^i_{\lambda^*}$. Así, para cada $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$ y para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una única componente conexa C^i_λ de Y_λ tal que está contenida en $C^i_{\lambda^*}$, si $\lambda^* \preceq \lambda$; o contiene a $C^i_{\lambda^*}$, si $\lambda \preceq \lambda^*$. Con dichas componentes conexas formamos la familia $\left\{C^i_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Sean $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Supongamos que $\lambda_1 \preceq \lambda_2$. Si $\lambda_1 \preceq \lambda_2 \preceq \lambda^*$, entonces $C^i_{\lambda^*} \subseteq C^i_{\lambda_1}$ y $C^i_{\lambda^*} \subseteq C^i_{\lambda_2}$, es decir, $C^i_{\lambda_1} \cap C^i_{\lambda_2} \neq \emptyset$. Dado que $Y_{\lambda_2} \subseteq Y_{\lambda_1}$, $C^i_{\lambda_2} \subseteq Y_{\lambda_1}$, de esta forma, como $C^i_{\lambda_2}$ es un conexo, éste se queda contenido en una de las componentes conexas de Y_{λ_1}. Esto implica que $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda_1}$; con lo cual concluimos que $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda_1} \cap C^i_{\lambda_2}$. Si $\lambda_1 \preceq \lambda^* \preceq \lambda_2$, por construcción de $\left\{C^i_\lambda\right\}_{\lambda \in \Lambda}$, $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda^*} \subseteq C^i_{\lambda_1}$. Se sigue que $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda_1} \cap C^i_{\lambda_2}$. Si $\lambda^* \preceq \lambda_1 \preceq \lambda_2$, entonces $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda^*}$. Argumentando como en el caso anterior, $C^i_{\lambda_2}$ se queda contenido en una de las componentes conexas de Y_{λ_1}. Supongamos que dicha componente es $C^j_{\lambda_1}$, donde $j \in \{0, \ldots, \alpha-1\} - \{i\}$. Dado que $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^j_{\lambda_1} \subseteq C^j_{\lambda^*}$, resulta que $C^i_{\lambda^*} \cap C^j_{\lambda^*} \neq \emptyset$; lo cual es una contradicción, ya que son componentes conexas distintas de Y_{λ^*}. Por lo tanto, $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda_1}$. Lo anterior implica que $C^i_{\lambda_2} \subseteq C^i_{\lambda_1} \cap C^i_{\lambda_2}$. Así, por el Teorema 5.0.19, para cada $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$ es un subcontinuo en G. Además, tenemos que $Y = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = \biguplus_{i=0}^{\alpha-1} \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda\right)$.

Antes de seguir, aclaremos la notación que se utilizará posteriormente. Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sabemos que existen únicos $w_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $v_n \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$ tales que $n = v_n + w_n \alpha$. A v_n lo denotaremos como $n \mod \alpha$.

Afirmación: Para toda $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$, $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^{i+1 \mod \alpha}_\lambda$.

Razón: Sea $i \in \{0, \ldots, \alpha-1\}$. Por un lado, ya que para toda $\lambda \in \Lambda$, Y_λ es un ciclo de gráficas, tenemos que $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f\left(C^i_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^{i+1 \mod \alpha}_\lambda$. Veamos la otra contención. Sea $z \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^{i+1 \mod \alpha}_\lambda$. Como para toda $\lambda \in \Lambda$, Y_λ es un ciclo de gráficas, obtenemos que para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $z_\lambda \in C^i_\lambda$ tal que $f(z_\lambda) = z$. Como Λ es totalmente ordenado, Λ es dirigido, por lo tanto, $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red. Sean

$\lambda_* \in \Lambda$, $\Lambda_* = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_* \preceq \lambda\}$ e $Id : \Lambda_* \longrightarrow \Lambda_* \subseteq \Lambda$ la identidad en Λ_*. Si tomamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_*$ tales que $\lambda_1 \preceq \lambda_2$, entonces $Id(\lambda_1) \preceq Id(\lambda_2)$. Veamos que $Id(\Lambda_*) = \Lambda_*$ es cofinal en Λ. Sea $\lambda \in \Lambda$. Como $\lambda_* \in \Lambda$, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\lambda \preceq \lambda_1$ y $\lambda_* \preceq \lambda_1$. Por lo tanto, $\lambda_1 \in \Lambda_*$; implicando que Λ_* sea cofinal en Λ. Así, $\left(z_{Id(\lambda)}\right)_{\lambda \in \Lambda_*} = (z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_*}$ es una subred de $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Dado que si $\lambda_* \preceq \lambda$, implica que $C^i_\lambda \subseteq C^i_{\lambda_*}$, se tiene que $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_*}$ está contenida en $C_{\lambda^i_*}$; el cual es un conjunto compacto, así que existe una subred $\left(z_{g(\beta)}\right)_{\beta \in \Delta}$ de $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_*}$, donde Δ es dirigido, $g : \Delta \longrightarrow \Lambda_*$ es una función monótona, $g(\Delta)$ es cofinal en Λ_* y existe un punto $p \in C^i_{\lambda_*}$ para el cual $\lim_\beta z_{g(\beta)} = p$. Por construcción, para toda $\beta \in \Delta$, $f\left(z_{g(\beta)}\right) = z$. Además, por la continuidad de f, $\lim_\beta f\left(z_{g(\beta)}\right) = f(p)$. Dado que el límite de redes es único, $f(p) = z$. Veamos que $p \in \bigcap^{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$. Sea $\lambda \in \Lambda$. Como Λ es dirigido, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que $\lambda \preceq \lambda_1$ y $\lambda_* \preceq \lambda_1$. Dado que $g(\Delta)$ es cofinal en Λ_*, existe $\beta_1 \in \Delta$ tal que $\lambda_1 \preceq g(\beta_1)$. Análogamente al argumento dado para $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_*}$, se demuestra que $\left(z_{g(\beta)}\right)_{\beta \in \Delta_1}$ es subred de $\left(z_{g(\beta)}\right)_{\beta \in \Delta}$, donde $\Delta_1 = \{\beta \in \Delta \mid \beta_1 \preceq \beta\}$. En virtud de lo anterior, tenemos que $\left(z_{g(\beta)}\right)_{\beta \in \Delta_1}$ converge a p. Además, tenemos que si $\beta \in \Delta_1$, $\beta_1 \preceq \beta$. Con esto, $g(\beta_1) \preceq g(\beta)$ y, como $\lambda \preceq \lambda_1 \preceq g(\beta_1)$, resulta que $\lambda \preceq g(\beta)$. Esto implica que $C^i_{g(\beta)} \subseteq C^i_\lambda$. Con esto demostramos que $\left(z_{g(\beta)}\right)_{\beta \in \Delta_1}$ es una red en C^i_λ; por lo tanto, $p \in C^i_\lambda$. Dado que λ fue arbitrario, $p \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$. Esto demuestra que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^{i+1 \mod \alpha}_\lambda \subseteq f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda\right)$. Lo anterior termina la prueba de la afirmación.

Ahora, supongamos que para alguna $j \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^j_\lambda$ es degenerado. Dado que para toda $i \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, $f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^{i+1 \mod \alpha}_\lambda$, se sigue que para todo $i \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$ es degenerado, es decir, Y es finito. Pero dado que para toda λ, $\omega(x, f) \subseteq Y_\lambda$, tenemos que $\omega(x, f) \subseteq Y$; lo cual implica que Y es infinito, dado que $\omega(x, f)$ lo es. Esta contradicción nos lleva a concluir que para todo $i \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$ no es degenerado. En resumen, escribiendo para cada $i \in \{0, \ldots, \alpha - 1\}$, $C_i = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C^i_\lambda$, tenemos que $C_0, \ldots, C_{\alpha-1}$ son subgráficas de G, ajenas dos a dos, de tal manera que $f(C_0) = C_1, f(C_1) = C_2, \ldots, f(C_{\alpha-1}) = C_0$. Es decir, $Y = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = \bigcup_{i=0}^{\alpha-1} C_i$ es un ciclo de gráficas de periodo α, que además contiene a $\omega(x, f)$. Así, $Y \in \Psi_\alpha$ cumple que para todo $\lambda \in \Lambda$, $Y_\lambda \preceq Y$ y, dado que la cadena $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ fue arbitraria, por el Lema de Zorn, existe $X \in \Psi_\alpha$ tal que para todo $X_* \in \Psi_\alpha$, si $X \leq X_*$, entonces $X_* = X$.

Afirmamos que X es el ciclo de gráficas buscado. El periodo de X es máximo entre los periodos de $\Psi(x)$. Sea $Z \in \Psi(x)$. Como $\omega(x, f) \subseteq Z \cap X$, por el Lema 5.0.15, existe S ciclo de gráficas tal que $\omega(x, f) \subseteq S \subseteq Z \cap X$, donde además su periodo es mayor o igual que el periodo de X que es α. De lo anterior, $S \in \Psi(x)$ y $X \leq S$ y, como α es el máximo de los periodos en $\Psi(x)$, entonces el periodo de S es α. Por lo tanto, $S \in \Psi_\alpha$. Dado que X es maximal en Ψ_α, $X = S$. En consecuencia, $X \subseteq Z$. ■

Sea (G, f) un sistema dinámico y supongamos que $K \subseteq G$ es una gráfica periódica bajo f, donde su ciclo es $X \subseteq G$. Definimos

$$E(X, f) = \left\{ y \in X \mid \text{para toda vecindad } U \text{ de } y \text{ en } X,\ \overline{Orb_f(U)}^X = X \right\}.$$

Proposición 5.0.21. *Sea (G, f) un sistema dinámico. Si $X \subseteq G$ es un ciclo de gráficas de (G, f), entonces:*

(i) $E(X, f)$ *es cerrado; y*

(ii) $E(X, f)$ *es f-invariante.*

Demostración:

Comencemos con la prueba de (i). Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $E(X, f)$ tal que converge a un punto $x \in X$. Sea U una vecindad de x en X. Por definición, existe V abierto en X tal que $x \in V \subseteq U$. Por la convergencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_N \in V$ y, como $x_N \in E(X, f)$, se sigue que $X = \overline{Orb_f(V)}^X \subseteq \overline{Orb_f(U)}^X$. Por lo tanto, $X = \overline{Orb_f(U)}^X$. Esto implica que $x \in E(X, f)$ y, en consecuencia, $E(X, f)$ es cerrado.

Ahora, veamos (ii). Sea $x \in E(X, f)$. Sea U vecindad de $f(x)$ en X. Por definición, existe V abierto en X, tal que $f(x) \in V \subseteq U$. Como X es un ciclo de gráficas bajo f, $f_{|X} : X \longrightarrow X$ es continua y cerrada. Por la continuidad, $f^{-1}(V)$ es un abierto en X tal que contiene a x. En consecuencia:

$$\begin{aligned}
X &= f(X) && (X \text{ es un ciclo de gráficas})\\
&= f\left(\overline{Orb_f\left(f^{-1}(V)\right)}^X\right) && (x \in E(X, f))\\
&= \overline{f\left(Orb_f\left(f^{-1}(V)\right)\right)}^X && \left(f_{|X} \text{ es cerrada}\right)\\
&= \overline{Orb_f\left(f\left(f^{-1}(V)\right)\right)}^X && \\
&\subseteq \overline{Orb_f(V)}^X && \left(f\left(f^{-1}(V)\right) \subseteq V\right)\\
&\subseteq \overline{Orb_f(U)}^X && (V \subseteq U).
\end{aligned}$$

Así, $X = \overline{Orb_f(U)}^X$, por lo tanto, $f(x) \in E(X, f)$, es decir, $f(E(X, f)) \subseteq E(X, f)$. ■

Lema 5.0.22. *Sean (G, f) un sistema dinámico, $x \in G$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Supongamos que los periodos de los ciclos de gráficas en $\Psi(x)$ están acotados. Si K el ciclo de gráficas en $\Psi(x)$ dado por el Lema 5.0.20, entonces:*

(i) *Para todo $y \in \omega(x, f)$ y para toda vecindad U de y en K, $\overline{Orb_f(U)}^K = K$; y*

(ii) $\omega(x, f) \subseteq E(K, f)$. *En particular, $E(X, f)$ es infinito.*

Demostración:

Basta probar (i) dado que (ii) es consecuencia inmediata de (i). Como K es una unión finita de subgráficas de G, tenemos que su frontera en G es finita y, dado que $\omega(x, f) \subseteq K$ es infinito, entonces $\omega(x, f) \cap Int_G(K) \neq \emptyset$. Como $Int_G(K)$ es un abierto en G, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x) \in Int_G(K)$. Sea $f_{|K} : K \longrightarrow K$. Tenemos que $f_{|K}$ está bien definida, ya que K es estrictamente f-invariante. Así, $(f^n(f^N(x)))_{n\geq 0} = (f^n_{|K}(f^N(x)))_{n\geq 0}$ es una sucesión en K y, dado que K es compacto, $\omega\left(f^N(x), f\right) =$

$\omega\left(f^N(x), f_{|K}\right) \subseteq K$.

Ahora, sean $y \in \omega(x,f)$ y U una vecindad de y en K. Sea V abierto en K tal que $y \in V \subseteq U$. Sea C la componente conexa de K que contiene a y. Así, $y \in C \cap V$. Como C es una subgráfica, C es localmente conexa; además, $C \cap V$ es un abierto en C. Por lo tanto, existe W un abierto conexo de C tal que $y \in W \subseteq C \cap V$. Notemos que, dado que C es el complemento de una unión finita de cerrados en K, C es abierto en K; por lo tanto, W es abierto y conexo en K. Por el Teorema 1.4.2 inciso (v), $\omega(x,f) = \omega\left(f^N(x), f\right)$; implicando que $y \in \omega\left(f^N(x), f_{|K}\right)$. De esta manera, existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} f_{|K}^{n_k}\left(f^N(x)\right) = y$. Como $y \in W$, podemos encontrar $k^* \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k^*$, entonces, $f_{|K}^{n_k}\left(f^N(x)\right) \in W$. En particular, $f_{|K}^{n_{k^*}}\left(f^N(x)\right), f_{|K}^{n_{k^*+1}}\left(f^N(x)\right) \in W$. En consecuencia, si $n_* = n_{k^*+1} - n_{k^*} \in \mathbb{N}$ y $c = f_{|K}^{n_{k^*}}\left(f^N(x)\right)$, tenemos que $c, f_{|K}^{n_*}(c) \in W$, es decir, $f_{|K}^{n_*}(W) \cap W \neq \emptyset$. Por el Corolario 1.5.5, tenemos que $\overline{Orb_{f_{|K}}(W)}^K = \overline{Orb_f(W)}^K = X$ es un ciclo débil de gráficas en K. Por otro lado, dado que $c \in W$, la trayectoria de c bajo $f_{|K}$ es una sucesión que se queda contenida en $Orb_{f_{|K}}(W)$. Se sigue que $\omega\left(c, f_{|K}\right) \subseteq \overline{Orb_{f_{|K}}(W)}^K$; por lo tanto, $\omega\left(c, f_{|K}\right) \subseteq X$. Ahora, por el Teorema 1.4.2 inciso (v), $\omega\left(c, f_{|K}\right) = \omega\left(f^N(x), f_{|K}\right)$ y, por lo ya mencionado, $\omega(x,f) \subseteq X$. Como X es un ciclo débil de gráficas en K, también lo es en G; aplicando el Lema 5.0.14 tenemos que existe un ciclo de gráficas Z tal que $\omega(x,f) \subseteq Z \subseteq X$. Por hipótesis, K cumple que $K \subseteq Z \subseteq X \subseteq K$; consecuentemente $X = K$. Dado que $K = X \subseteq \overline{Orb_f(U)}^K \subseteq K$, entonces $\overline{Orb_f(U)}^K = K$. Con esto concluimos que $y \in E(K,f)$. ■

Definición 5.0.23. *Sea (X,f) un sistema dinámico, donde X es métrico compacto. A f se le llama **transitiva** si y sólo si para cada par de abiertos no vacíos $V, U \subseteq X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Definición 5.0.24. *Sean (X,f) y (Y,g) sistemas dinámicos. Sea $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado en X y f-invariante. Sea ψ una semiconjugación entre (X,f) y (Y,g). A ψ la llamaremos una **casi conjugación** entre $\left(F, f_{|F}\right)$ y (Y,g) si y sólo si ψ cumple las siguientes condiciones:*

(i) *$\psi(F) = Y$;*

(ii) *para cada $y \in Y$, $\psi^{-1}(y)$ es conexo;*

(iii) *para cada $y \in Y$, $\psi^{-1} \cap F = Fr_X\left(\psi^{-1}(y)\right)$; y*

(iv) *existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $y \in Y$, $\psi^{-1}(y) \cap F$ tiene a los más N elementos.*

Vamos a comenzar a enunciar varios de los teoremas, en total 4, dichos teoremas no los vamos a probar, son pruebas muy largas y se salen del objetivo general de la tesis; sin embargo, es necesario hacer una o más breves anotaciones de cada uno de ellos. El primero de estos se puede encontrar en [7].

Teorema 5.0.25. *Sea (G,f) un sistema dinámico. Sea $X \subseteq G$ una variedad tal que $f(X) \subseteq X$. Supongamos que $E = E(X,f)$ es infinito. Entonces:*

(i) *E es perfecto.*

(ii) *$f_{|E}$ es transitiva.*

(iii) *Si $E \subseteq \omega(z,f)$, entonces, $E = \omega(z,f)$.*

(iv) *Existe Y una variedad, existe $g : Y \longrightarrow Y$ función transitiva y existe $\psi : X \longrightarrow Y$ semiconjugación entre $\left(X, f_{|X}\right)$ y (Y,g) que es casi conjugación entre $\left(E, f_{|E}\right)$ y (Y,g).*

En [7], A. M. Blokh habla de variedades como un espacio (no necesariamente conexo) que puede ser visto como una unión finita de arcos que se pegan bien, es decir, los arcos o son ajenos o solamente se intersectan en uno o en ambos de sus puntos finales. Traduciéndolo al lenguaje que estamos utilizando, para nosotros una variedad de las que habla Blokh, no es más que una una gráfica o una unión finita y ajena de gráficas (en caso de que el espacio no sea conexo). Blokh define el conjunto E en términos de dichas variedades, pero dado que nuestro interés está en las gráficas periódicas y en los ciclos de gráficas, nosotros nos restringimos a estos casos. Vamos a requerir del inciso (iv) del Teorema 5.0.25, para el caso en el que X es un ciclo de gráficas.

Corolario 5.0.26. *Sean (G,f) un sistema dinámico y $X \subseteq G$ un k-ciclo de gráficas. Si $E = E(X,f)$ es infinito, entonces existe Y una unión finita y ajena de gráficas, existe $g : Y \longrightarrow Y$ función transitiva y existe $\psi : X \longrightarrow Y$ semiconjugación entre $\left(X, f_{|X}\right)$ y (Y,g) que es casi conjugación entre $\left(E, f_{|E}\right)$ y (Y,g).*

Si consideramos que X es una subgráfica de G, como $\psi : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva, entonces $\psi(X) = Y$ es conexo y, por lo tanto, Y es una gráfica. Con esto en mente, podemos enunciar (iv) del teorema 5.0.25 de la siguiente forma:

Corolario 5.0.27. *Sean (G,f) un sistema dinámico y $X \subseteq G$ una subgráfica tal que $f(X) \subseteq X$. Si $E = E(X,f)$ es infinito, entonces existe Y una gráfica, existe $g : Y \longrightarrow Y$ función transitiva y existe $\psi : X \longrightarrow Y$ semiconjugación entre $\left(X, f_{|X}\right)$ y (Y,g) que es casi conjugación entre $\left(E, f_{|E}\right)$ y (Y,g).*

El siguiente teorema que vamos a enunciar se encuentra en [6], el cual, originalmente está escrito en ruso. Sin embargo, en [1] se hace una prueba detallada del teorema en inglés.

Teorema 5.0.28. *Sea Y una unión finita y ajena de gráficas y $g : Y \longrightarrow Y$ una función transitiva. Si g tiene puntos periódicos, entonces $h(g) > 0$.*

Corolario 5.0.29. *Sean (G,f) un sistema dinámico y $X \subseteq G$ un ciclo de gráficas. Si $E(X,f)$ es infinito y X tiene un punto periódico de f, entonces $h(f) > 0$*

Demostración:

Como $E(X,f)$ es infinito y X es un ciclo de gráficas, podemos aplicar el Corolario 5.0.26, el cual nos asegura la existencia de una unión finita y ajena de gráficas Y, la existencia de una función continua y transitiva $g : Y \longrightarrow Y$ y la existencia de una función $\phi : X \longrightarrow Y$ que es una semiconjugación entre $(X, f_{|X})$

y (Y, g). Sea $p \in X$ un punto n-periódico de f. Como ϕ es semiconjugación, $g^n(\phi(p)) = \phi(f^n_{|X}(p)) = \phi(p)$, es decir, $\phi(p)$ es un punto periódico de g. Por el Teorema 5.0.28, tenemos que $h(g) > 0$. Por el Teorema 2.1.9, $h(f_{|X}) \geq h(g) > 0$. Además, por la Observación 2.1.8 inciso (iii), $h(f) \geq h(f_{|X}) > 0$. ∎

En [20] hacen ver que el teorema de Misiurewicz (Teorema 2.3.9) tiene una versión en sistemas dinámicos donde el espacio en cuestión es una gráfica. En principio, tenemos que aclarar qué significa que $f : G \longrightarrow G$ tenga una herradura.

Definición 5.0.30. *Sea G una gráfica. Diremos que un arco $A \subseteq G$ es un **intervalo cerrado de** G si y sólo si A es un arco tal que no contiene vértices de G, a excepción tal vez en sus puntos finales.*

Definición 5.0.31. *Sean (G, f) un sistema dinámico y $s \in \mathbb{N}$ tal que $s \geq 2$. Una s-**herradura** es un intervalo cerrado $I \subseteq G$ y un conjunto de subintervalos cerrados de I, $\{J_1, \ldots, J_s\}$, los cuales tienen interiores ajenos dos a dos tales que para toda $i \in \{1, \ldots, s\}$, $f(J_i) = I$. En caso de que $\{J_1, \ldots, J_s\}$ sea ajena dos a dos, diremos que la s-**herradura es estricta**.*

A continuación, enunciamos el teorema de Misiurewicz versión gráficas, cuya prueba se encuentra en [20].

Teorema 5.0.32. *Sea (G, f) un sistema dinámico. Si $h(f) > 0$, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, donde $0 < \lambda < h(f)$, y para todo $N \in \mathbb{N}$ existen enteros $n \geq N$ y $p \geq 2$ tales que f^n tiene una p-herradura estricta. Además, $\frac{\log p}{n} \geq \lambda$.*

Proposición 5.0.33. *Sean (G, f) un sistema dinámico y $J, I \subseteq G$ intervalos cerrados de G tales que $J \subseteq f(I)$ y tal que $f(I)$ es un intervalo cerrado. Entonces existe $K \subseteq I$ intervalo cerrado de G tal que $f(K) = J$ y tal que $f(Fr_G(K)) = Fr_G(J)$.*

Demostración:

Como I y $f(I)$ son arcos, sabemos que existen homeomorfismos $g : [0, 1] \longrightarrow I$ y $r : f(I) \longrightarrow [0, 1]$. Así, la función $r \circ f_{|I} \circ g : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es una función continua. Por un lado, $r(J) \subseteq [0, 1] = r(f_{|I}(g([0, 1])))$. Se sigue, por el Teorema 2.2.5, que existe un intervalo compacto $K \subseteq [0, 1]$ tal que $r(f_{|I}(g(K))) = r(J)$ y tal que $r(f_{|I}(g(Fr_{\mathbb{R}}(K)))) = Fr_{\mathbb{R}}(r(J))$. Por otro lado, dado que g y r son homeomorfismos de un intervalo a un arco, sabemos que manda puntos finales en puntos finales; por lo tanto, $g(Fr_{\mathbb{R}}(K)) = Fr_G(g(K))$ y $r(Fr_G(J)) = Fr_{\mathbb{R}}(r(J))$. Así, como r tiene inversa, $f_{|I}(g(K)) = J$ y $f_{|I}(Fr_G(g(K))) = Fr_G(J)$. Tenemos que $g(K)$ es el arco buscado. ∎

Esta proposición (en su versión para intervalos) es la herramienta que se utiliza para la construcción de los intervalos en la Proposición 2.2.7 incisos (ii), (iii) y (iv). Estos enunciados fueron clave en la prueba del Teorema 4.0.1, el cual, combinado con Misiurewicz, hacía válido el Teorema 4.0.2. En resumen, dado que el teorema de Misiurewicz es válido para funciones continuas en una gráfica y también es válida la Proposición 5.0.33, podemos argumentar de manera idéntica los teoremas 4.0.1 y 4.0.2, para obtener el siguiente teorema:

Teorema 5.0.34. *Sea (G, f) un sistema dinámico. Si $h(f) > 0$, entonces existe una $\delta > 0$ y existe un Cantor $C \subseteq G$ tales que C es δ-revuelto para f.*

Procederemos a enunciar el cuarto y último teorema que vamos a necesitar más adelante. Para ello, es necesario recordar qué es una rotación irracional de S^1. El círculo unitario se define como $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid\mid z \mid= 1\} = \{\exp(2\pi ti) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $[t] = \exp(2\pi ti)$. Del análisis complejo, sabemos que dados $t, s \in \mathbb{R}$, $[t] = [s]$ si y sólo si $t - s \in \mathbb{Z}$. Vamos a pensar a S^1 con la métrica euclideana que hereda de $\mathbb{C}$. Es bien sabido que (S^1, d_e) es un continuo, donde d_e es la métrica euclideana restringida a S^1.

Recordemos que

$$\cos a - \cos b = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ y } \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{5.1}$$

Veamos cómo es que funciona la métrica euclideana en S^1. Sean $t, s \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\begin{aligned} d_e([s],[t]) &= \left((\cos(2\pi s) - \cos(2\pi t))^2 + (\operatorname{sen}(2\pi s) - \operatorname{sen}(2\pi t))^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(4 \operatorname{sen}(\pi(s-t))(\operatorname{sen}^2(\pi(s+t)) + \cos^2(\pi(s+t)))\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(por 5.1)} \\ &= \left(4 \operatorname{sen}^2(\pi(s-t))\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(propiedad pitagórica)} \\ &= 2 \mid \operatorname{sen}(\pi(s-t)) \mid. \end{aligned}$$

Ahora, definamos un tipo de funciones muy especiales en S^1. Sea $a \in \mathbb{R}$, donde $a \neq 0$. Definimos a una *rotación por el número* $a \in \mathbb{R}$ como la correspondencia $R_a : S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $R_a([s]) = [s + a]$. Si a es irracional, a la función se le conoce como una **rotación irracional**. Análogamente, si a es racional, a la función se le conoce como una **rotación racional**. Se puede verificar fácilmente que es una función bien definida y no es difícil darse cuenta que es una función suprayectiva. Más aún,

$$d_e(R_a([s]), R_a([t])) = 2 \mid \operatorname{sen}(\pi(s + a - (t + a))) \mid= 2 \mid \operatorname{sen}(\pi(s-t)) \mid= d_e([s],[t]).$$

Esto implica que R_a es una isometría de S^1 en S^1.

Tomemos $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $[s] \in S^1$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $m \neq n$. Si pasara que $R_a^n([s]) = R_a^m([s])$, tendríamos que $[s + na] = [s + ma]$; esto pasa si y sólo si $(s + na) - (s + ma) \in \mathbb{Z}$, es decir, $a(n - m) \in \mathbb{Z}$. Sea $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a(n - m) = q$. Como $n - m$ es un número entero distinto de cero, $a = \frac{q}{m-n} \in \mathbb{Q}$. Lo anterior, es claramente una contradicción. Así, $R_a^n([s]) \neq R_a^m([s])$. Dado que $m, n \in \mathbb{Z}$ y $[s] \in S^1$ fueron arbitrarios, podemos asegurar que la órbita de todos los puntos de S^1 bajo una rotación irracional está conformada por puntos distintos entre sí. En particular, esto prueba que las rotaciones irracionales no tienen puntos periódicos.

Otra propiedad importante de las rotaciones irracionales es que son transitivas. Véase la página 221 de [5]. El siguiente teorema, cuya prueba se encuentra en [6] y [1], nos asegura que una función transitiva en una gráfica queda básicamente caracterizada, si es que no tiene puntos periódicos.

Teorema 5.0.35. *Sea (G, f) un sistema dinámico tal que f es transitiva. Si f no tiene puntos periódicos, entonces (G, f) está conjugado con (S^1, R_a), donde R_a es una rotación irracional en S^1.*

Ahora, vamos a probar un último lema antes de que veamos el teorema principal de este capítulo.

Proposición 5.0.36. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Supongamos que existe una sucesión de intervalos no vacíos, cerrados en $\mathbb{R}$ y ajenos dos a dos $(I_n)_{n\geq 1}$ contenida en $[a, b]$. Entonces $\lim_{n\to\infty} diam\,(I_n) = 0$.*

Demostración:

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$, con $m_n \geq n$, tal que $diam\,(I_{m_n}) \geq \epsilon$. Sea $n \geq 2$. La distancia mínima entre los intervalos $I_1, \ldots, I_n$ es positiva, dado que son ajenos dos a dos y compactos. Digamos que dicha distancia es δ. Tenemos que

$$diam\left(\biguplus_{j=1}^{n} I_i\right) \geq diam\,(I_1) + \ldots + diam\,(I_n) + (n-1)\delta > \sum_{i=1}^{n} diam\,(I_i);$$

y dado que n fue arbitraria, lo anterior se vale para cualquier natural mayor o igual que 2.

Tenemos que $[a, b]$ tiene diámetro $M = b - a > 0$. Por la propiedad arquimediana, existe un natural $N \geq 2$ tal que $N\epsilon > M$. Con esto tenemos que

$$diam\left(\bigcup_{j=1}^{m_N} I_j\right) \geq \sum_{i=1}^{N} diam\,(I_{m_i}) \geq N\epsilon > M.$$

Sin embargo, esto es una contradicción, ya que como $\bigcup_{j=1}^{m_N} I_j \subseteq [a-b]$, entonces $diam\left(\bigcup_{j=1}^{m_N} I_j\right) \leq b-a = M$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \text{lím}\, diam\,(I_n) = 0$. ■

Proposición 5.0.37. *El diámetro de una gráfica es menor o igual a la suma de los diámetros de sus arcos.*

Demostración:

Para los intervalos, el resultado es obvio. Sea $n \geq 2$ un número natural y sea $G = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ una gráfica, donde para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, A_i es arco en G. Tenemos que G es compacta y sabemos que la función distancia $d_G : G \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, por lo tanto, existen $x, y \in G$ tales que $d(x, y) = \sup\{d(z, w) \mid z, w \in G\} = diam(G)$. Como G tiene más de un punto, cumple que $diam(G) > 0$ y, por lo tanto, $x \neq y$. Si pasara que x y y están en el mismo arco A de G, tenemos que

$$diam(G) = d(x, y) \leq diam A \leq \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Supongamos que x y y están en arcos distintos de G. Sabemos que una gráfica es conexa por arcos, así, podemos considerar un encaje $h : [0, 1] \longrightarrow G$ que conecte a x y y. Sean $A_1^*, \ldots, A_m^*$, donde $m \leq n$, los arcos de G tales que intersectan a $h([0,1])$. Dado que $h([0,1])$ es conexo, $\bigcup_{j=1}^{m} A_j^m$ es conexo. Así, supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in A_1^*$ y $y \in A_m^*$. También podemos suponer que $A_l^* \cap A_k^* \neq \emptyset$ si y sólo si $\mid l-k \mid \leq 1$, con $l,k \in \{1,\ldots,m\}$. Para todo $l,k \in \{1,\ldots,m\}$, con $\mid l-k \mid \leq 1$, sea $c_{j,k} \in G$ el punto final que comparten A_l^* y A_k^*. Tenemos, por la desigualdad del triángulo que

$$diam(G) = d(x,y) \leq d(x,c_{1,2}) + \ldots + d(c_{m-1,m},y) \leq \sum_{j=1}^{m} diam(A_j^*) \leq \sum_{i=1}^{n} diam(A_i).$$

■

Proposición 5.0.38. *Sea (A,d) un arco y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en A. Supongamos que $h: A \longrightarrow [0,1]$ es un homeomorfismo. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \mid h(x_n) - h(y_n) \mid = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Como $h^{-1} : [0,1] \longrightarrow A$ es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ que cumple con la continuidad uniforme. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \mid h(x_n) - h(y_n) \mid = 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $\mid h(x_n) - h(y_n) \mid \leq \delta$. De esta manera, si $n \geq N$, entonces, por la continuidad uniforme, $d(h^{-1}(h(x_n)), h^{-1}(h(y_n))) < \epsilon$ y, dado que h es un homeomorfismo, $d(x_n,y_n) < \epsilon$. ■

Proposición 5.0.39. *Sea G una gráfica. Si $(G_n)_{m\geq 0}$ es una sucesión de subgráficas de G ajenas dos a dos, entonces $\lim\limits_{m\to\infty} diam(G_m) = 0$.*

Demostración:

Sea $G = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$, donde para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$, A_i es un arco. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe $m_n^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $m_n^* \geq n$, tal que $diam(G_{m_n^*}) \geq \epsilon$. Así, sabemos que existe $m_0^* \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $G_{m_0^*}$ tiene diámetro mayor o igual a ϵ. Definimos $m_0 = m_0^*$. Supongamos que está definido m_n. Por lo supuesto, existe $m_{m_n+1}^* \geq m_n + 1 > m_n$ tal que $G_{m_{m_n+1}^*}$ tiene diámetro mayor o igual a ϵ. Definimos $m_{n+1} = m_{m_n+1}^* > m_n$. Así, hemos construido una subsucesión $(G_{m_n})_{n\geq 0}$ de $(G_m)_{m\geq 0}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $diam(G_{m_n}) \geq \epsilon$.

Por lo mencionado al inicio del capítulo, sabemos que existe $M > 0$ tal que las cardinalidades de vértices y arcos de cualquier subgráfica de G son menores que M. Sea $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Por la Proposición 5.0.37,

$$\epsilon \leq diam(G_{m_n}) \leq \sum_{A_{G_{m_n}} \in Arc(G_{m_n})} diam(A_{m_n}) = R_n,$$

donde $Arc(G_{m_n})$ es el conjunto de arcos de G_{m_n}. Así, existe un $A_{m_n} \in Arc(G_{m_n})$ tal que

$$diam(A_{G_{m_n}}) \geq \frac{\epsilon}{Card(Arc(G_{m_n}))} \geq \frac{\epsilon}{M}.$$

Con esto, hemos formado una sucesión de arcos $(A_{m_n})_{n\geq 0}$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $diam(A_{G_{m_n}}) \geq \frac{\epsilon}{M}$. Además, dado que $(G_m)_{m\geq 0}$ es ajena dos a dos, $(A_{m_n})_{n\geq 0}$ también es ajena dos a dos.

Como $(A_{m_n})_{n\geq 0}$ es una sucesión de arcos ajenos en G y dado que G tiene una cantidad finita de arcos, entonces existe un arco B de G tal que contiene una infinidad de los arcos de la sucesión $(A_{m_n})_{n\geq 0}$. Así, con esta infinidad de arcos, formamos una subsucesión de $(A_{m_n})_{n\geq 0}$, digamos $(A_{m_{n_k}})_{k\geq 0}$. Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sean $x_{m_{n_k}}$ y $y_{m_{n_k}}$ los puntos finales de $A_{m_{n_k}}$. Sea $h : B \longrightarrow [0,1]$ un homeomorfismo. Así, $(h(A_{m_{n_k}}))_{k\geq 0}$ resulta ser una sucesión de intervalos cerrados, ya que h es continua. Dado que h es biyectiva y $(A_{m_{n_k}})_{k\geq 0}$ es ajena dos a dos , $(h(A_{m_{n_k}}))_{k\geq 0}$ es ajena dos a dos. Por la Proposición 5.0.36,

$$\lim_{k\to\infty} \mid h(x_{m_{n_k}}) - h(y_{m_{n_k}}) \mid = \lim_{k\to\infty} diam(h(A_{m_{n_k}})) = 0.$$

Por otro lado, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_{m_{n_k}}$ es compacto, entonces existen $z_{m_{n_k}}, v_{m_{n_k}} \in A_{m_{n_k}}$ tales que $diam(A_{m_{n_k}}) = d(z_{m_{n_k}}, v_{m_{n_k}})$. Sea L el arco con puntos finales $v_{m_{n_k}}$ y $z_{m_{n_k}}$ y que esté contenido en $A_{m_{n_k}}$. Se sigue que $h(L) \subseteq h(A_{m_{n_k}})$; lo que implica que

$$0 \leq \mid h(v_{m_{n_k}}) - h(z_{m_{n_k}}) \mid \leq \mid h(x_{m_{n_k}}) - h(y_{m_{n_k}}) \mid .$$

Con esto, podemos concluir que $\lim\limits_{k\to\infty} \mid h(v_{m_{n_k}}) - h(z_{m_{n_k}}) \mid = 0$. A su vez, esto implica, por la Proposición 5.0.38, que

$$\lim_{k\to\infty} diam(A_{m_{n_k}}) = d(v_{m_{n_k}}, z_{m_{n_k}}) = 0.$$

Sin embargo, esto es imposible, ya que para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $diam(A_{m_{n_k}}) \geq \frac{\epsilon}{M} > 0$. Con esta contradicción, concluimos que $\lim\limits_{m\to\infty} diam(G_m) = 0$. ■

Proposición 5.0.40. *Sean (Y,d) un espacio métrico compacto, (X,ρ) un espacio métrico y $T : (Y,d) \longrightarrow (X,\rho)$ una función continua. Si existen sucesiones en Y, $(x_n)_{n\geq 0}$ y $(y_n)_{n\geq 0}$, tales que $\liminf d(x_n, y_n) = 0$, entonces $\liminf \rho(T(x_n), T(y_n)) = 0$.*

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$. Como $\liminf d(x_n, y_n) = 0$, existe una sucesión de naturales estrictamente creciente, (n_k) tal que $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$. Como Y es compacto, resulta que T es uniformemente continua. Sea $\delta(\epsilon) > 0$ una delta dada por la continuidad uniforme de T. Se sigue que existe un natural K tal que para todo $k \geq K$ se cumple que $d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \delta$. Por la continuidad uniforme de T, para todo natural $k \geq K$ se cumple que $\rho(T(x_{n_k}), T(y_{n_k})) < \epsilon$. Esto implica que $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(T(x_{n_k}), T(y_{n_k})) = 0$, en consecuencia, $\liminf \rho(T(x_n), T(y_n)) = 0$. ■

Lema 5.0.41. *Sean $((G,d), f)$, $((Y,\rho), g)$ sistemas dinámicos, donde G y Y son gráficas, y $E \subseteq G$ un conjunto cerrado tal que $f(E) \subseteq E$. Supongamos que existe una semiconjugación $h : G \longrightarrow Y$ entre (G,f) y (Y,g), que es una casi conjugación entre $f_{|E}$ y g. Si g es conjugada a una rotación irracional del círculo, entonces G no contiene pares de Li-Yorke de f.*

Demostración:

Supongamos que tenemos dos puntos $x, y \in G$ tales que $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Por la Proposición

5.0.40, tenemos que $\liminf \rho(h(f^n(x)), h(f^n(y))) = 0$. Tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $h \circ f^n = g^n \circ h$, así, $\liminf \rho(g^n(h(x)), g^n(h(y))) = 0$.

Veamos lo siguiente, como $g : Y \longrightarrow Y$ es una conjugación de una rotación irracional, existe $t : Y \longrightarrow S^1$ un homeomorfismo y existe $R : S^1 \longrightarrow S^1$ una rotación irracional tal que $t \circ g = R \circ t$. Tenemos, por la Proposición 5.0.40, que $\liminf d_{S^1}(t(g^n(h(x))), t(g^n(h(y)))) = 0$. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $t \circ g^n = R^n \circ t$, por lo tanto, $\liminf d_{S^1}(R^n(t(h(x))), R^n(t(h(y)))) = 0$. Si pasara que $h(x) \neq h(y)$, como t es un homeomorfismo $t(h(x)) \neq t(h(y))$, entonces $d_{S^1}(t(h(x)), t(h(y))) = c > 0$. Dado que las rotaciones en S^1 son isometrías, para toda $n \in \mathbb{N}$, $d_{S^1}(R^n(t(h(x))), R^n(t(h(y)))) = c > 0$ y, por lo tanto, $\liminf d_{S^1}(R^n(t(h(x))), R^n(t(h(y)))) = c > 0$. Esto es una contradicción, así que $h(x) = h(y)$.

Con lo anterior, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $h(f^n(x)) = g^n(h(x)) = g^n(h(y)) = h(f^n(y))$. Así, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $z_n = h(f^n(x)) = h(f^n(y))$ y $G_n = h^{-1}(\{z_n\})$. Primero, como la función h es continua, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, G_n es un conjunto cerrado en G y, dado que G es un espacio compacto, G_n es compacto. Además, dado que h es casi conjugación, para cada $n \in \mathbb{N}$, G_n es un conjunto conexo. Notemos también que por definición de imagen inversa, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n(x), f^n(y) \in G_n$.

Caso (1): Si existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $G_k = \{v\}$, como $f^k(x), f^k(y) \in G_k$, entonces $f^k(x) = v = f^k(y)$. Así, para todo $n \geq k$, tenemos que $f^n(x) = f^n(y)$. Lo que implica que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ y, con esto, tenemos que x y y no pueden formar un par de Li-Yorke.

Caso (2): Si pasara que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, G_n es no degenerado, entonces para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, G_n es una subgráfica de G. Supongamos que existen $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $m < k$, tales que $G_k \cap G_m \neq \emptyset$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\emptyset &\neq G_k \cap G_m \\ &= h^{-1}(\{z_k\}) \cap h^{-1}(\{z_m\}) \\ &= h^{-1}(\left\{h(f^k(x))\right\}) \cap h^{-1}(\{h(f^m(x))\}) \\ &= h^{-1}(\left\{g^k(h(x))\right\}) \cap h^{-1}(\{g^m(h(x))\}).\end{aligned}$$

Se sigue que existe $u \in h^{-1}(\{g^k(h(x))\}) \cap h^{-1}(\{g^m(h(x))\})$. Por la definición de imagen inversa, $g^m(h(x)) = h(u) = g^k(h(x))$ y, tenemos que $z_k = h(f^k(x)) = g^k(h(x))$ y $z_m = h(f^m(x)) = g^m(h(x))$, por lo tanto, $z_k = z_m$. De esta manera,

$$g^{k-m}(z_m) = g^{k-m}(g^m(h(x))) = g^k(h(x)) = z_k = z_m,$$

es decir, z_m es un punto periódico de g. Pero es una contradicción, ya que las rotaciones irracionales del círculo no tienen puntos periódicos y, por lo tanto, tampoco sus conjugados. Así, tenemos que $(G_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión de subgráficas de G ajenas dos a dos. Por la Proposición 5.0.39, $\lim_{n\to\infty} diam(G_n) = 0$. Como para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^n(x), f^n(y) \in G_n$, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$0 \leq d(f^n(x), f^n(y)) \leq diam(G_n);$$

lo que implica que

$$\lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Con esto, por definición de par de Li-Yorke, x y y no forman un par de Li-Yorke. ■

Teorema 5.0.42. *Sea $((G, d), f)$ un sistema dinámico. Si G tiene un par de Li-Yorke para f, entonces existe $\delta > 0$ y existe un conjunto de Cantor $C \subseteq G$ tales que C es δ-revuelto para f.*

Demostración:

Sean $x, y \in G$ un par de puntos que sean par de Li-Yorke de f. Si $\omega(x, f)$ y $\omega(y, f)$ son finitos, por la Proposición 1.4.7, tenemos que y y x son aproximadamente periódicos, esto implica, por el Lema 1.4.6, que $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$ ó $\liminf d(f^n(x), f^n(y)) > 0$; que por definición, se sigue que x y y no son un par de Li-Yorke. Así, alguno de estos omega conjuntos límite debe ser infinito. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\omega(x, f)$ es infinito. Tenemos dos casos, cuando los periodos de los ciclos en $\Psi(x) = \{X \subseteq G \mid X \subseteq G$ es un ciclo de gráficas y $\omega(x, f) \subseteq X\}$ están acotados y cuando no lo están.

Supongamos que los ciclos de $\Psi(x)$ no están acotados. Por el Lema 5.0.18, existe una sucesión de ciclos de gráficas en G, $(X_n)_{n\geq 1}$, tal que:

(i) si para cada $n \in \mathbb{N}$, k_n es el periodo de X_n, entonces la sucesión $(k_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente;

(ii) para todo $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$;

(iii) $\omega(x, f) \subseteq \bigcap_{n\geq 1} X_n$;

(iv) para todo $n \in \mathbb{N}$, k_{n+1} es múltiplo de k_n;

(v) para todo $n \in \mathbb{N}$, cada componente conexa de X_n contiene el mismo número de componentes conexas de X_{n+1}, de hecho, son $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq 2$; y

(vi) $\omega(x, f)$ no contiene puntos periódicos.

Como $(k_n)_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $k_n \geq 2$ y tal que $k_n > Card(V(G))$. Como k_n es el periodo de X_n, k_n es el número de componentes conexas de X_n. Se sigue que existe J una componente conexa de X_n tal que no contiene vértices de G. Esto quiere decir, que como $J \subseteq G$, $J \subseteq A$, donde A es una componente de $G - V(G)$ que es homeomorfa al intervalo abierto $(0, 1)$. Tenemos que $\frac{k_{n+1}}{k_n} \geq 2$ y que $\frac{k_{n+2}}{k_{n+1}} \geq 2$, en consecuencia, $\frac{k_{n+2}}{k_n} \geq 4$, es decir, cada componente de X_n tiene al menos 4 componentes de X_{n+2}. Dada esta situación, podemos elegir alguna de las componentes de X_{n+2}, digamos I, tal que se encuentre en el interior de J. Recordemos que I al ser una componente de X_{n+2} es un conjunto no degenerado y compacto. Por un lado $I \subseteq J \subseteq A$, dado que A es homeomorfo al intervalo $(0,1)$, tenemos que I es una conexo, compacto y no degenerado que es homeomorfo a un subconjunto de $(0,1)$. Dado que los únicos conexos, compactos y no degenerados que son subconjuntos de $(0,1)$ son los intervalos compactos, tenemos que I es un arco. Como I es componente conexa de X_{n+2} y $\omega(x,f) \subseteq X_{n+2}$, por el Lema 5.0.16, tenemos que $\omega(x,f) \cap I$ es infinito.

Como I es un arco, I tiene una cantidad finita de puntos frontera; por lo tanto, $\omega(x,f) \cap Int_G(I) \neq \emptyset$. Sea $z \in \omega(x,f) \cap Int_G(I)$. Por definición, existe una subsucesión $(f^{n_k}(x))_{k\geq 0}$ de la trayectoria de x bajo f tal que converge a z. Como $Int_G(I)$ es un conjunto abierto que contiene a z, existe una $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que para toda $k \geq \kappa$ se tiene que $f^{n_k}(x) \in Int_G(I)$. Sea $v = f^{n_\kappa}(x)$ y sea $g = f^{k_{n+2}}$. Como I es una de las componentes de X_{n+2}, tenemos que $g(I) = f^{k_{n+2}}(I) = I$. Esto implica que para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $g^m(v) \in I$. Sea $w = f^{n_\kappa}(y)$. Por la Proposición 1.3.2 inciso (ii), tenemos que como x y y son pares de Li-Yorke de f, v y w son pares de Li-Yorke para f. Además, por la misma proposición inciso (iii), tenemos que v y w son un par de Li-Yorke de g. Tenemos entonces que $\liminf d(g^m(v), g^m(w)) = 0$; así, existe una subsucesión de $(d(g^m(v), g^m(w)))_{m\geq 0}$, digamos $(d(g^{m_s}(v), g^{m_s}(w)))_{s\geq 0}$, tal que $\lim_{s\to\infty} d(g^{m_s}(v), g^{m_s}(w)) = 0$, donde $(m_s)_{s\geq 0}$ es una sucesión de naturales estrictamente creciente. Como $(g^{m_s}(v))_{s\geq 0}$ es una subsucesión de $(g^m(v))_{m\geq 0}$ y dado que para todo $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $g^m(v) \in I$, obtenemos que $(g^{m_s}(v))_{s\geq 0}$ es una sucesión en I. Sabemos que I es compacto, entonces existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $(m_{s_l})_{l\geq 0}$ tal que $\lim_{l\to\infty} g^{m_{s_l}}(v) = c$, donde $c \in I$. Por otro lado, $(d(g^{m_{s_l}}(v), g^{m_{s_l}}(w)))_{l\geq 0}$ es una subsucesión de $(d(g^{m_s}(v), g^{m_s}(w)))_{s\geq 0}$, por lo tanto, $\lim_{s\to\infty} d(g^{m_s}(v), g^{m_s}(w)) = 0$.

Veamos que la sucesión $(g^{m_{s_l}}(w))_{l\geq 0}$ converge a c. Sea $\epsilon > 0$. Dado que $\lim_{l\to\infty} d(g^{m_{s_l}}(v), g^{m_{s_l}}(w)) = 0$ y que $\lim_{l\to\infty} g^{m_{s_l}}(v) = c$, tenemos que existe un número entero $L \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que si $l \geq L$, se cumple que $d(g^{m_{s_l}}(v), g^{m_{s_l}}(w)) < \frac{\epsilon}{2}$ y que $d(g^{m_{s_l}}(v), c) < \frac{\epsilon}{2}$. Así, si $l \geq L$, por la desigualdad del triángulo, $d(g^{m_{s_l}}(w), c) \leq d(g^{m_{s_l}}(w), g^{m_{s_l}}(v)) + d(g^{m_{s_l}}(v), c) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, es decir, $\lim_{l\to\infty} g^{m_{s_l}}(w) = c$. Como $c \in I \subseteq Int_G(J)$, $\lim_{l\to\infty} g^{m_{s_l}}(v) = c$ y $\lim_{l\to\infty} g^{m_{s_l}}(w) = c$, tenemos que existe j un natural tal que $g^j(w), g^j(v) \in Int_G(J)$.

Ahora, por las propiedades enunciadas de la sucesión $(k_n)_{n\geq 1}$, tenemos que k_{n+2} es múltiplo de k_{n+1}, que a su vez es múltiplo de k_n. Así, k_{n+2} es múltiplo de k_n. Consecuentemente existe un natural p tal que $k_{n+2} = pk_n$. Como J es una componente de X_n, J tiene periodo k_n; se sigue que $g(J) = f^{k_{n+2}}(J) = f^{pk_n}(J) = J$. Ya sabíamos que v y w forman un par de Li-Yorke de g, en consecuencia, $g^j(v)$ y $g^j(w)$ forman un par de Li-Yorke de g, por la Proposición 1.3.2 inciso (ii). Por otra parte, análogo al argumento que se utilizó para I, podemos concluir que J es un arco. Con esto, concluimos que $g^j(v), g^j(w) \in J$ forman un par de Li-Yorke de $g_{|J} : J \longrightarrow J$. Como $g_{|J} : J \longrightarrow J$ es una función continua, donde J es un arco, por el Teorema 4.0.6, existe una $\delta > 0$ y un conjunto de Cantor $C \subseteq J$ tal que C es δ-revuelto para $g_{|J}$ y, en consecuencia, para g. Por la Proposición 1.3.2 inciso (iv), resulta que C es un conjunto δ-revuelto para f.

Supongamos ahora que los periodos de los ciclos de $\Psi(x)$ están acotados. Por el Lema 5.0.20, existe un ciclo de gráficas $X \in \Psi(x)$ tal que para todo ciclo en $Y \in \Psi$, $Y \subseteq X$, donde el periodo de X es máximo entre todos los periodos de los ciclos de $\Psi(x)$. Por otra parte, por el Lema 5.0.22 inciso (ii), tenemos que $\omega(x, f) \subseteq E(X, f)$; en particular, $E(X, f)$ es infinito.

Veamos que X tiene al menos un punto periódico de f. Lo haremos por reducción al absurdo. Supongamos que X no tiene puntos periódicos de f. Sean $X_0, \ldots, X_{k-1}$ las componentes conexas de X.

Afirmación: $E(X, f) = \bigcup_{i=0}^{k-1} E(X_i, f^i)$.

Razón: Sea $z \in E(X_j, f^k)$, donde $j \in \{0, \ldots, k-1\}$. Sea U una vecindad de z en X y sea $Y_0 = X_j$. Como X es un ciclo de gráficas, $X = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(X_j) = \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(Y_0)$. Tenemos que $W = U \cap Y_0$ es una vecindad de z en Y_0, y como $z \in E(Y_0, f^k)$, $\overline{Orb_{f^k}(W)}^{Y_0} = Y_0$.

Como $W \subseteq U$,

$$Orb_{f^k}(W) \subseteq Orb_{f^k}(U) \subseteq Orb_f(U);$$

lo cual implica que

$$\overline{Orb_{f^k}(W)}^{Y_0} \subseteq \overline{Orb_f(U)}^{Y_0} \subseteq \overline{Orb_f(U)}^{X}.$$

Por otro lado, tenemos que para todo $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$\begin{aligned} f^s(\overline{Orb_f(U)}^X) &= \overline{f^s(Orb_f(U))}^X \\ &= \overline{f^s(\bigcup_{n\geq 0} f^n(U))}^X \\ &= \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{n+s}(U)}^X \\ &\subseteq \overline{Orb_f(U)}^X. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(Y_0) \\ &= \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(\overline{Orb_{f^k}(W)}^{Y_0}) \\ &\subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} f^i(\overline{Orb_f(U)}^X) \\ &\subseteq \overline{Orb_f(U)}^X; \end{aligned}$$

por lo tanto, $X = \overline{Orb_f(U)}^X$. Concluimos que $z \in E(X,f)$; con lo cual $\bigcup_{i=1}^{k} E(X_i, f^i) \subseteq E(X,f)$. Ahora, sea $z \in E(X,f)$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $z \in X_0$. Sea U una vecindad de z en X_0. En principio, dado que $X_0, \dots, X_{k-1}$ son componentes de X, son cerradas en X; por lo tanto, $X_0 = X - \bigcup_{i=1}^{k-1} X_i$ es un abierto en X. Esto implica que U es una vecindad de z en X; y dado que $z \in E(X,f)$, $\overline{Orb_f(U)}^X = X$. Por la Proposición 1.5.2 inciso (iii), $X = \overline{Orb_f(U)}^X = \overline{\bigcup_{i=0}^{k-1} Orb_{f^k}(f^i(U))}^X = \bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{Orb_{f^k}(f^i(U))}^X$. Por otro lado, como $U \subseteq X_0$, para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\overline{Orb_{f^k}(f^i(U))}^X \subseteq \overline{Orb_{f^k}(X_i)}^X = \overline{X_i}^X = X_i$; lo cual implica que

$$\begin{aligned} X_0 &= X \cap X_0 \\ &= \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} \overline{Orb_{f^k}(f^i(U))}^X \right) \cap X_0 \\ &= \overline{Orb_{f^k}(U)}^X \cap X_0 \\ &= \overline{Orb_{f^k}(U)}^{X_0}. \end{aligned}$$

Dado que U fue una vecindad arbitraria de z en X_0, $z \in E(X_0, f^k)$; implicando que

$$E(X,f) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} E(X_i, f^k).$$

Por doble contención, queda probada la afirmación.

Como $\omega(x,f)$ es infinito y está contenido en X, por el Lema 5.0.16, para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\omega(x,f) \cap X_i$ es infinito. Tenemos también que $\omega(x,f) \subseteq E(X,f)$; se sigue que para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\omega(x,f) \cap X_i \subseteq E(X,f) \cap X_i = \left(\bigcup_{i=0}^{k-1} E(X_i, f^i) \right) \cap X_i = E(X_i, f^k)$. Esto implica que para cada $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $E(X_i, f^k)$ es infinito. Definamos $g = f^k_{|X_0}$. Por lo anterior, $E = E(X_0, g)$ es infinito, así, por el Corolario 5.0.27, existen una gráfica Y, una función transitiva $r : Y \longrightarrow Y$ y una semiconjugación $\phi : X_0 \longrightarrow Y$ entre (X_0, g) y (Y, r) que es una casi conjugación entre $g_{|E}$ y r.

Supongamos que r tiene un punto periódico de periodo $m \in \mathbb{N}$, digamos $p \in Y$. Como ϕ es casi conjugación, tenemos que $L = \phi^{-1}(\{p\}) \cap E$ es finito. De hecho, L es no vacío, ya que como $\phi(E) = Y$, existe $p^* \in E$ tal que $\phi(p^*) = p$; con lo cual $p^* \in L$. Sea $z \in L$. Por la Proposición 5.0.21 inciso (ii), E es g-invariante; lo cual implica que $g^m(z) \in E$. Además, como $\phi(z) = p$ y $\phi \circ g^m = r^m \circ \phi$, $\phi(g^m(z)) = r^m(\phi(z)) = p$, tenemos que $g^m(z) \in \phi^{-1}(\{p\})$. En resumen, $g^m(z) \in L$. Dado que $z \in L$ fue arbitrario, $g^m_{|L} : L \longrightarrow L$ es función y, como L es un conjunto finito, $g^m_{|L}$ tiene un punto periódico; en consecuencia, g tiene un punto periódico. Pero dado que X no tiene puntos periódicos de f, X_0 no tiene puntos periódicos de g; implicando que r no tiene puntos periódicos. Tenemos que Y es una gráfica y que $r : Y \longrightarrow Y$ es una función continua y transitiva sin puntos periódicos, entonces, por el Teorema 5.0.35, r es conjugada a una rotación irracional del círculo. Con esto, podemos aplicar el Lema 5.0.41, y concluir que g no tiene pares de Li-Yorke en X_0.

Por otra parte, como x y y forman un par de Li-Yorke para f, existe una subsucesión de la sucesión $(d(f^n(x), f^n(y)))_{n\geq 0}$, digamos $(d(f^{n_s}(x), f^{n_s}(y)))_{s\geq 0}$, que converge a 0. Como G es compacto, $(f^{n_s}(x))_{s\geq 0}$ tiene una subsucesión convergente a un punto de G. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $(f^{n_s}(x))_{s\geq 0}$ converge a $p \in G$. Así, dado que $\lim\limits_{s\to\infty} f^{n_s}(x) = p$ y $\lim\limits_{s\to\infty} d(f^{n_s}(x), f^{n_s}(y)) = 0$, entonces $\lim\limits_{s\to\infty} f^{n_s}(y) = p$; por lo tanto, $p \in \Omega = \omega(x, f) \cap \omega(y, f)$, es decir, $\Omega \neq \emptyset$. También tenemos, por el Teorema 1.4.2 inciso (iii), que $f(\Omega) \subseteq \Omega$. Además, dado que $\omega(x, f) \subseteq X$, entonces $\Omega \subseteq X$. Supongamos que $\Omega \subseteq Fr_G(X)$. Como X es una unión de subgráficas ajenas de G, $Fr_G(X)$ es finita; implicando que Ω sea finito. De esta forma, la función $f_{|\Omega} : \Omega \longrightarrow \Omega$ tiene un punto periódico, lo cual contradice el supuesto de que X no tiene puntos periódicos de f. Por lo tanto, existe $z \in \Omega \cap Int_G(X)$; esto implica que existe $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^N(x), f^N(y) \in X$. Sabemos, por la Proposición 1.3.2 inciso (ii), que $x^* = f^N(x)$ y $y^* = f^N(y)$ son un par de Li-Yorke para f. Dado que X es f-invariante, para toda $n \geq 0$, $f^n(x^*), f^n(y^*) \in X$. Por otro lado, dado que $X_0, \ldots, X_{k-1}$ son compactos y ajenos dos a dos, el mínimo entre sus distancias es positiva, digamos $\epsilon > 0$. Como $\liminf d(f^n(x^*), f^n(y^*)) = 0$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^q(x^*), f^q(y^*)) < \epsilon$ y, por la definición de ϵ, tenemos que existe $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ tal que $f^q(x^*), f^q(y^*) \in X_i$. Dado que X es un ciclo de subgráficas, por la Proposición 5.0.10, existe $b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f^b(X_i) = X_0$. Por lo tanto, $f^{q+b}(x^*), f^{q+b}(y^*) \in X_0$. Por la Proposición 1.3.2 inciso (ii), $x^{**} = f^{q+b}(x^*)$ y $y^{**} = f^{q+b}(y^*)$ son un par de Li-Yorke para f. Esto implica, por la Proposición 1.3.2 inciso (iii) y la g-invarianza de X_0, que (x^{**}, y^{**}) es un par de Li-Yorke para g. Esto contradice el hecho de que g no tiene pares de Li-Yorke. Dicha contradicción proviene de suponer que X no tiene puntos periódicos de f; por lo tanto, X tiene al menos un punto periódico de f.

Como f tiene un punto periódico en X y $E(X, f)$ es infinito, podemos aplicar el Corolario 5.0.29 para concluir que $h(f) > 0$. Así, por el Teorema 5.0.34, tenemos que existe $\delta > 0$ y un conjunto de Cantor $C \subseteq G$ tales que C es δ-revuelto para f. Con esto, terminamos la prueba del teorema. ■

Capítulo 6

Conjuntos revueltos infinitos en espacios numerables

Si bien, el trabajo consiste en encontrar conjuntos de Cantor que sean revueltos para los cuales un par de Li-Yorke implique su existencia (en gráficas y en el intervalo), no dejaremos de lado a los espacios que son infinitos pero numerables. En este caso, veremos también que la existencia de un par revuelto implica la existencia de un conjunto "grande"que sea δ-revuelto, para alguna $\delta > 0$.

Proposición 6.0.1. *Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Si $\omega(x, f)$ tiene a un punto aislado (en la topología relativa de $\omega(x, f)$) y un punto periódico de f, entonces existe una $\delta > 0$ y un conjunto $Y \subseteq X$ infinito tal que Y es un conjunto δ-revuelto para f.*

Demostración:
Sea $x \in X$ tal que $\omega(x, f)$ es infinito. Supongamos que $\omega(x, f)$ tiene a un punto periódico z de f de periodo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos también que $\omega(x, f)$ tiene a un punto aislado z_0. Por el Teorema 1.4.2 inciso (vii), tenemos que $z_0 \in \omega(f^i(x), f^k)$ y $z \in \omega(f^j(x), f^k)$, donde $i, j \in \{0, \dots, k-1\}$. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
f^{i+k-j}(\omega(f^j(x), f^k)) &= f^i(f^{k-j}(\omega(f^j(x), f^k))) \\
&= f^i(\omega(f^{k-j}(f^j(x)), f^k)) && \text{(por el inciso } (vi) \text{ del Teorema 1.4.2)} \\
&= f^i(\omega(f^k(x), f^k)) \\
&= f^i(\omega(x, f^k)) && \text{(por el inciso } (v) \text{ del Teorema 1.4.2)} \\
&= \omega(f^i(x), f^k) && \text{(por el inciso } (v) \text{ del Teorema 1.4.2).}
\end{aligned}$$

Esto implica que $f^{i+k-j}(z) \in \omega(f^i(x), f^k)$. Dado que z es un punto periódico de periodo k para f, $f^{i+k-j}(z)$ también es punto $k-$periódico de f y, en consecuencia, es punto fijo de f^k. Además, como z_0 es un punto aislado en $\omega(x, f)$, también es punto aislado en $\omega(f^i(x), f^k)$. Se sigue, por el Teorema 1.4.2 inciso $(viii)$, que $\omega(f^i(x), f^k)$ es infinito. En resumen, tomando a $p = f^{i+k-j}(z)$, $y = f^i(x)$ y $g = f^k$, tenemos que $\omega(y,g)$ es infinito, tiene un punto fijo p de g y tiene un punto aislado z_0.

Por la Proposición 1.4.9, tenemos que ningún punto aislado en $\omega(y,g)$ puede ser punto periódico de g; en consecuencia $p \neq z_0$. Como z_0 es aislado en $\omega(y,g)$, existe $\delta > 0$ tal que $\{z_0\} = B_{4\delta}(z_0) \cap \omega(y,g)$. Dado que $\omega(y,g)$ es infinito, tenemos que $Orb_g(y)$ es infinita.

Afirmación: $Orb_g(y)$ es un conjunto δ-revuelto para g.

Razón: Sean $w, v \in Orb_g(y)$ distintos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $w = g^m(v)$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\liminf d(g^n(w), g^n(v)) = 0$. Como v es un punto en la órbita de y bajo g, por el Teorema 1.4.2 inciso (v), tenemos que $p \in \omega(y,g) = \omega(v,g)$. Entonces, existe una sucesión estrictamente creciente de enteros no negativos $(n_q)_{q\geq 0}$ tal que $\lim_{q\to\infty} g^{n_q}(v) = p$. Por la continuidad de g^m, $\lim_{q\to\infty} g^{n_q}(w) = \lim_{q\to\infty} g^{n_q+m}(v) = g^m(p) = p$. Como $(g^{n_q}(w))_{q\geq 0}$ y $(g^{n_q}(v))_{q\geq 0}$ convergen al mismo punto p, tenemos que $\lim_{q\to\infty} d(g^{n_q}(w), g^{n_q}(v)) = 0$. Con esto, aseguramos que $\liminf d(g^n(w), g^n(v)) = 0$.

Comprobemos que $\limsup d(g^n(w), g^n(v)) \geq \delta$. Sea $\overline{B}_{3\delta}(z_0)$ la bola cerrada de radio 3δ con centro en z_0. Si pasara que la trayectoria de w bajo g visita una cantidad infinita de veces a $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$, podemos formar una subsucesión de $(g^n(w))_{n\geq 0}$, digamos $(g^{n_s}(w))_{s\geq 0}$, que está contenida en $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$. Tenemos que $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0) = \overline{B}_{3\delta}(z_0) \cap (X - B_\delta(z_0))$, así, $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$ es un cerrado, por ser intersección de cerrados y, dado que X es un compacto, tenemos que $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$ es un compacto. Con esto, podemos asegurar que $(g^{n_s}(w))_{s\geq 0}$ tiene una subsucesión que converge a un punto $a \in \overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$. Por definición de omega conjunto límite, $a \in \omega(w,g)$. De esta manera, $(\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)) \cap \omega(w,g) \neq \emptyset$. Sin embargo, esto es una contradicción, ya que $\omega(w,g) \cap (\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)) = \omega(y,g) \cap (\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)) \subseteq \omega(y,g) \cap B_{4\delta}(z_0) = \{z_0\}$ y, como claramente $z_0 \notin \overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$, tenemos que $\omega(y,g) \cap (\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)) = \emptyset$. Esto quiere decir que la trayectoria de w bajo g visita una cantidad finita de veces al conjunto $\overline{B}_{3\delta}(z_0) - B_\delta(z_0)$, es decir,

$$\text{existe } N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que para toda } n \geq N, g^n(w) \in (X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)) \cup B_\delta(z_0). \tag{6.1}$$

Ahora, sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Dado que $p \in \omega(y,g) = \omega(w,g)$, existe una sucesión estrictamente creciente de naturales $(n_s)_{s\geq 0}$ tal que $\lim_{s\to\infty} g^{n_s}(w) = p$. Como p es un punto fijo de g, tenemos que para toda $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\lim_{s\to\infty} g^{n_s}(g^r(w)) = p$. Como $p \notin B_{4\delta}(z_0)$, tenemos que $X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)$ es un abierto que contiene a p; por lo tanto, existe $N_1 \in \mathbb{N}$, donde $N_1 > \max\{N, n_0\}$,

$$\text{tal que para toda } r \in \{0, \ldots, 2m\}, g^{n_{N_1}}(g^r(w)) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0). \tag{6.2}$$

Por otro lado, como $z_0 \in \omega(w,g)$, existe $l \in \mathbb{N}$, donde $l > n_{N_i} + 2m$, tal que $g^l(w) \in B_\delta(z_0)$. Sea α el mínimo de los naturales que tienen la propiedad anterior. Supongamos que $\alpha - m > n_{N_1} + 2m$. Como $(n_s)_{s\geq 0}$ es estrictamente creciente, $n_{N_1} \geq N_1$; con lo cual $\alpha - m > n_{N_1} + 2m > N_1 > N$. Así, por (6.1),

$g^{\alpha-m}(w) \in (X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)) \cup B_\delta(z_0)$. Si $g^{\alpha-m}(w) \in B_{3\delta}(z_0)$, se estaría contradiciendo la definición de mínimo de α; por lo tanto, $g^{\alpha-m}(w) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)$. Ahora, si $\alpha - m = n_{N_1} + 2m$, por (6.2), entonces $g^{\alpha-m}(w) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)$. Si pasara que $\alpha - m < n_{N_1} + 2m$, como $\alpha - m > n_{N_1} + m$, entonces $n_{N_1} + 2m > \alpha - m > n_{N_1} + m$. Así, por (6.2), $g^{\alpha-m}(w) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)$. En resumen, encontramos un natural α tal que $\alpha > n_{N_1} + 2m \geq N_1 + 2m > n_0 + 2m$ y tal que $g^\alpha(v) = g^{\alpha-m}(w) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0)$ y $g^\alpha(w) \in B_\delta(z_0)$. Dado que n_0 fue arbitraria, tenemos que

$$\text{para toda } n_0 \in \mathbb{N} \text{ existe } j_{n_0} \in \mathbb{N}, \text{ donde } j_{n_0} > n_0, \text{ tal que } g^{j_{n_0}}(v), g^{j_{n_0}}(w) \in X - \overline{B}_{3\delta}(z_0). \tag{6.3}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea j_n dado por (6.3). Si $d(g^{j_n}(w), g^{j_n}(v)) \leq 2\delta$, entonces

$$\begin{aligned} d(g^{j_n}(v), z_0) &\leq d(g^{j_n}(v), g_{j_n}(w)) + d(g^{j_n}(w), z_0) \\ &< 2\delta + \delta = 3\delta, && \text{(por (6.3))} \end{aligned}$$

implicando que $g^{j_n}(v) \in \overline{B}_{3\delta}(z_0)$. Esto es una contradicción con (6.3). En conclusión, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $j_n > n$ tal que $d(g^{j_n}(v), g^{j_n}(w)) > 2\delta$. Por definición de límite superior, se sigue que

$$\text{lím sup}\, d(g^n(v), g^n(w)) \geq 2\delta > \delta.$$

Con esto, tenemos que $Orb_g(y)$ es un conjunto δ-revuelto para g, que además, es infinito. Invocando a la Proposición 1.3.2 inciso (iv), tenemos que $Orb_g(y)$ es un conjunto δ-revuelto para f. ■

Para seguir nuestro camino, es necesario recordar uno de los teoremas clásicos dentro de la topología y el análisis matemático, que es el teorema de Baire.

Definición 6.0.2. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X* ***es un espacio de Baire*** *si y sólo si dada una colección numerable $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de cerrados en X donde cada uno de sus integrantes tenga interior vacío en X, se cumple que $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ tiene interior vacío en X.*

El siguiente teorema nos dice que los espacios en los que estamos trabajando son espacios de Baire. Su prueba se encuentra en la página 296 de [23].

Teorema 6.0.3. *Si X es compacto y Hausdorff, entonces X es un espacio de Baire.*

Con esto en mente, podemos probar el siguiente lema, que es la antesala del resultado que buscamos en este capítulo.

Lema 6.0.4. *Si X es un espacio topológico numerable, compacto y Hausdorff, entonces toda función continua $f : X \longrightarrow X$ tiene un punto periódico.*

Demostración:

Afirmamos que existe un conjunto $M \subseteq X$ que es no vacío, compacto, f-invariante y tal que para todo $A \subseteq X$ no vacío, compacto, f-invariante, se cumple que $M \subseteq A$. Para ver la afirmación, aplicaremos el

Lema de Zorn. Sea F la colección de de todos los conjuntos no vacíos, compactos, f-invariantes contenidos en X. Consideremos que F tiene el orden parcial dado por la inclusión, es decir, $V \preceq U$ si y sólo $U \subseteq V$. Sea L una cadena en F. Como todos los elementos de L son compactos, no vacíos y comparables dos a dos, entonces L es una familia de cerrados (por estar en un espacio Hausdorff) que tiene la propiedad de la intersección finita. Como estamos en un espacio compacto, se sigue que $T = \bigcap L \neq \emptyset$. Como la intersección de cerrados es un cerrado, T es un cerrado en X y, debido a la compacidad de X, T es un compacto. Claramente, para todo $A \in L$, $A \preceq T$. Además, como los miembros de L son f-invariantes, $f(T) = f(\bigcap_{A\in L} A) \subseteq \bigcap_{A\in L} f(A) \subseteq \bigcap_{A\in L} A = T$, es decir, T es f-invariante. Por lo tanto, T resulta ser una cota superior de L en F. Así, por el Lema de Zorn, existe $M \in F$ tal que para todo $A \in F$, $A \preceq M$. Con esto, queda probada la afirmación.

Tenemos que M es un compacto y Hausdorff (por ser subespacio de un Hausdorff) y, por lo tanto, un espacio de Baire (Teorema 6.0.3). Como M es numerable, es igual a una unión numerable de conjuntos unitarios. Si todos estos conjuntos tuvieran interior vacío en M, como M es de Baire, entonces M tendría interior vacío en M, lo cual no puede ser ya que un espacio tiene interior no vacío en sí mismo; así, debe existir un punto $z \in M$ tal que $\{z\}$ tiene interior no vacío en M.

Por otro lado, tomemos un punto $x \in M$. Tenemos, por la invarianza de M, que $Orb_f(x) \subseteq M$ y, como M es cerrado, $\overline{Orb_f(x)} \subseteq M$. Además, $f(\overline{Orb_f(x)}) = \overline{f(Orb_f(x))} \subseteq \overline{Orb_f(x)}$. En resumen $\overline{Orb_f(x)}$ es un conjunto no vacío, compacto (por estar en un compacto) y f-invariante, por lo tanto, $M \subseteq \overline{Orb_f(x)}$. Con esto, $\overline{Orb_f(x)}^M = M$. En particular, $Orb_f(f(z)) \cap \{z\} \neq \emptyset$; lo cual implica que z es un punto periódico de f. ■

Corolario 6.0.5. *Sea (X, f) un sistema dinámico, donde X es numerable. Si f tiene un par revuelto, entonces existe una $\delta > 0$ y existe un conjunto infinito $Y \subseteq X$ tales que Y es δ-revuelto para f.*

Demostración:

Sea (x, y) un par de Li-Yorke para f. Si $\omega(x, f)$ y $\omega(y, f)$ son finitos, entonces ambos son aproximadamente periódicos (Proposición 1.4.7) y, por el Lema 1.4.6, x y y no forman un par de Li-Yorke. Así, sin pérdida de generalidad, supongamos que $\omega(x, f)$ es infinito.

Tenemos, por el Teorema 1.4.2 inciso (ii), que $\omega(x, f)$ es un compacto y Hausdorff (por ser subespacio de un compacto y Hausdorff) y, por lo tanto, un espacio de Baire (Teorema 6.0.3). Como $\omega(x, f)$ es numerable, es igual a una unión numerable de conjuntos unitarios. Si todos estos conjuntos tuvieran interior vacío en $\omega(x, f)$, como $\omega(x, f)$ es de Baire, entonces $\omega(x, f)$ tendría interior vacío en $\omega(x, f)$; lo cual no puede ser, ya que un espacio tiene interior no vacío en sí mismo. Se sigue que debe existir un punto $z \in \omega(x, f)$ tal que $\{z\}$ tiene interior no vacío en $\omega(x, f)$, es decir, $\omega(x, f)$ tiene un punto aislado.

Por el Teorema 1.4.2 inciso (iii), $f_{|\omega(x,f)} : \omega(x, f) \longrightarrow \omega(x, f)$ es una función bien definida y continua.

A $f_{|\omega(x,f)}$ le podemos aplicar el Lema 6.0.4 para obtener que $\omega(x,f)$ tiene un punto periódico de f. Con esto, hemos reunido las hipótesis de la Proposición 6.0.1, para concluir que existe una $\delta > 0$ y un conjunto $Y \subseteq X$ infinito tales que Y es δ-revuelto para f. ■

Bibliografía

[1] Alsedá, Ll.; Del Río, M. A.; Rodríguez, J. A. *Transitivity and dense periodicity for graph maps.* J. Difference Equ. Appl. 9 (2003), no. 6, 577-598.

[2] Apostol, Tom M. *Mathematical Analysis.* Second edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1974.

[3] Bartle, Robert G.; Sherbert, Donald R. *Introduction to Real Analysis.* Fourth edition. John Wiley and Sons, Inc., U.S.A., 2011.

[4] Berberian, Sterling K. *Fundamentals of real analysis.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 1999.

[5] Block, L. S.; Coppel, W. A. *Dynamics in one dimension.* Lectures Notes in Mathematics, 1513. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[6] Blokh, A. M. *On transitive mappings of one-dimensional branched manifolds.* (Russian). Differential-difference equations and problems of mathematical physics (Russian), 3-9, 131, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1984.

[7] Blokh, A. M. *Dynamical systems on one-dimensional branched manifolds. I.* (Russian). Teoriya Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. No. 46 (1986), 8-18; translation in J. Soviet Math. 48(1990), no. 5, 500-508.

[8] Bridges, Douglas S. *Foundations of real and abstract analysis.* Graduate Text in Mathematics, 174. Springer-Verlag, New York, 1998.

[9] Carothers, N. L. *Real analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[10] Casarrubias Segura, Fidel; Tamariz Mascarúa, Ángel. *Elementos de Topología General.* Aportaciones Matemáticas: Textos, 37. Sociedad Matemática Mexicana, México; Instituto de Matemáticas, UNAM, México, 2012.

[11] de Vries, Jan. *Topological dynamical systems. An introduction to the dynamics of continuous mappings.* De Gruyter Studies in Mathematics, 59. De Gruyter, Berlin, 2014.

[12] Devaney, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems.* Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.

[13] Dugundji, James. *Topology.* Allyn and Baccon, Inc., Boston, Mass. 1966.

[14] Engelking, Ryszard. *General topology.* Translated from the Polish by the author. Second edition. Sigma Series in Pure Mathematics, 6. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[15] Folland, Gerald B. *Real analysis. Modern techniques and their applications.* Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1999.

[16] Hurtado, E. R. *Notas de clase: funciones y sucesiones.* Recuperado de `http://sistemas.fciencias.unam.mx/~erhc/calculo1_20161/inicio6.html`.

[17] Hrbacek, Karel; Jech, Thomas. *Introduction to set theory.* Third edition. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 220. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999.

[18] Kechris, Alexander S. *Classical descriptive set theory.* Graduate Text in Mathematics, 156. Springer-Verlag, New York, 1995.

[19] Li, T.; Yorke, J. *Period three implies chaos.* The American Mathematical Monthly 82 (1975), no. 10, 985-992.

[20] Llibre, Jaume; Misiurewicz, Michal. *Horseshoes, entropy and periods for graph maps.* Topology 32 (1993), no. 3, 649-664.

[21] Megginson, Robert E. *An introduction to Banach space theory.* Graduate Text in Mathematics, 183. Springer-Verlag, New York, 1998.

[22] Méndez, Héctor. *Sistemas Dinámicos Discretos.* Las prensas de ciencias. Facultad de ciencias, UNAM, México, 2014.

[23] Munkres, James R. *Topology.* Second edition. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000.

[24] Nadler, Sam B., Jr. *Continuum theory. An introduction.* Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 158. Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[25] Ruette, Sylvie; Snoha, L. *For graph maps, one scrambled pair implies Li-Yorke chaos.* Proc. Amer. Math. Soc., 142 (2014), no. 6, 2087-2100.

[26] Ruette, Sylvie. *Chaos on the interval.* University Lecture Series, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.

[27] Walters, Peter. *An introduction to ergodic theory.* Graduate Text in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[28] Willard, Stephen. *General Topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.