



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Algunos resultados recientes acerca de los  
Puntos de Fermat

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**MATEMÁTICO**

PRESENTA:  
**OMAR TORRES GARCÍA**

TUTOR:  
**DR. RODOLFO SAN AGUSTÍN CHI**



CIUDAD DE MÉXICO 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del Alumno

Torres  
García  
Omar  
5529646700  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
408084716

2. Datos del Tutor

Dr.  
Rodolfo  
San Agustín  
Chi

3. Datos del Sinodal 1

Dr.  
Carlos  
Álvarez  
Jiménez

4. Datos del Sinodal 2

Dr.  
Vinicio Antonio  
Gómez  
Gutiérrez

5. Datos del Sinodal 3

Dra.  
Isabel Alicia  
Hubard  
Escalera

6. Datos del Sinodal 4

M. en C.  
José Antonio  
Gómez  
Ortega

6. Datos del trabajo escrito

Algunos resultados recientes acerca de Los Puntos de Fermat  
81 pp.  
2019

*Al hombre que siempre creyó en mí, mi padre:  
El ingeniero Anselmo Torres Alor.*



# Prólogo

Cuando se me propuso la idea de trabajar en este tema, supe que sería muy complicado y eso fue precisamente lo que me atrajo, saber que invertiría tiempo en sumergirme en temas que llamaban mi atención, provocó en mí, un rotundo sí.

Es por ello que tengo el enorme privilegio de presentar este trabajo, que consiste en la demostración de algunos teoremas en donde los puntos de Fermat son mostrados y utilizados para el desarrollo y obtención de otros resultados, que en definitiva son muy interesantes.

En el primer capítulo se demuestra de manera muy completa, el Teorema de Fermat, que es la piedra angular de este trabajo; posteriormente, encontraremos un apartado de lemas importantes, en donde se exponen las herramientas que necesitaremos para ir de la mano en los capítulos posteriores.

Estas demostraciones tienen una redacción muy amigable con el lector, de tal manera que un alumno con conocimientos básicos de Geometría moderna pueda entenderlas y que un docente en el aula pueda exponerlas sin inconveniente alguno.

Es por esta razón que, los resultados de Lester y La academia Olimpia, tuvieron que ser explicados y desarrollados paso a paso, buscando hacerlos, lo más explícitos posibles.

La parte más compleja de este trabajo son las demostraciones de la enciclopedia de Geometría Euclidiana de Deko Dekov, ya que esta enciclopedia contiene teoremas generados por computadora, es decir, a diferencia de los resultados de La academia Olimpia, en donde hay cierto camino trazado, las demostraciones de Deko Dekov se hicieron sin ningún material previo.

Este trabajo sin duda alguna es el que más me ha costado, pero fue la mejor elección que pude hacer, ya que gracias a este trabajo comencé a sentir que tal vez podía hacer realidad mi sueño: ser algún día, Geómetra.



# Índice General

1. Introducción. . . . .	1
2. Teoremas de Fermat y Napoleón	
2.1 Teorema de Fermat . . . . .	3
2.1.1 Triángulos internos. . . . .	3
2.1.2 Triángulos externos . . . . .	7
2.2 Teorema de Napoleón . . . . .	11
2.3 El teorema de Fermat implica el teorema de Napoleón. . . . .	13
2.3.1 Triángulos internos . . . . .	13
2.3.2 Triángulos externos . . . . .	15
2.4 El teorema de Fermat para triángulo degenerado . . . . .	18
2.5 El teorema de Napoleón para triángulo degenerado. . . . .	21
2.6 Algunos lemas importantes . . . . .	23
2.6.1 Fermatianas en el triángulo equilátero. . . . .	23
2.6.2 Longitud de fermatianas . . . . .	25
2.6.3 Fermatianas en el triángulo isósceles . . . . .	27
2.6.4 Ortocentro y circuncentro . . . . .	28
2.6.5 Fermatianas de triángulos externos. . . . .	29
2.6.6 Isogonales conjugados. . . . .	31
3. Desarrollo de resultados de Lester y Academia Olimpia	
3.1 Extensión del teorema de Lester. . . . .	33
3.1.1 Para un triángulo isósceles. . . . .	34
3.1.2 Para un triángulo equilátero. . . . .	35
3.2 Teorema de las nueve alturas. . . . .	36
3.2.1 Triángulos Externos. . . . .	37
3.2.2 Triángulos Internos . . . . .	43
3.3 Teorema sobre alturas y circuncentro. . . . .	49
3.4 Teorema sobre la longitud de fermatianas . . . . .	52



3.5 Teorema del baricentro y triángulo de Napoleón. . . . .	55
3.5.1 Triángulos Externos . . . . .	55
3.5.2 Triángulos Internos . . . . .	57
4. Desarrollo de resultados de la enciclopedia de Geometría Euclidiana de Deko Dekov . . . . .	59
4.1 Teorema del primer punto isodinámico y punto de Fermat. . . . .	61
4.2 Teorema del triángulo Pedal . . . . .	63
4.3 Teorema del triángulo Ceviano. . . . .	67
4.4 Teorema del triángulo Circunceviano. . . . .	69
4.5 Teorema del triángulo medio-ceviano. . . . .	71

Referencias

# 1. Introducción

Este trabajo tiene como principal objetivo hablar de los puntos de Fermat y su enlace con otros resultados; a lo largo de los 4 capítulos notaremos el uso de una notación enfocada a la comprensión del lector, y tal vez alguna simbología convencional sea sustituida por un par de palabras, sin embargo, esto se hace con el fin ya mencionado.

En el capítulo inicial, demostramos el teorema de Fermat en sí, de las dos formas posibles, es decir, con triángulos hacia adentro y hacia afuera, de aquí en adelante les diremos triángulos internos y externos respectivamente.

Continuando en el trabajo, analizamos la conexión con el Teorema de Napoleón y hacemos un estudio también con triángulos internos y externos.

Antes de empezar el siguiente capítulo, se estudian ciertos lemas que se ocuparán en los dos capítulos posteriores, ya que luego, solo se hacen mención de estos lemas sólo como referencias.

Proseguimos con el desarrollo de los resultados de la academia Olimpia: si bien algunos de estos teoremas ya tenían la demostración total o parcial, el trabajo que se realizó fue desarrollar estas demostraciones con la finalidad de hacerlos muy explícitos al lector, siendo éste último docente o alumno.

En este apartado introducimos el término de fermatiana, término propiamente empleado por La academia Olimpia, que más adelante estudiaremos a detalle.

Por último encontraremos las demostraciones de la enciclopedia de Deko Dekov, esta última muestra teoremas formulados por una computadora. La labor del Dr. Rodolfo San Aguntin Chi en esta sección, fue seleccionar de entre la inmensa gama de Teoremas, los adecuados a este trabajo, es decir, los Teoremas más relevantes respecto a los puntos de Fermat.

En esta sección, a diferencia del capítulo anterior, no tenemos algún material de apoyo o referencia, por lo que las demostraciones son auténticas y propias de esta tesis. Vemos términos como *half-cevian triangle* cuya traducción no la encontramos en literatura en español, por lo que lo sustituiremos por el término *Triángulo medio-Ceviano*.

Espero que el contenido de este trabajo, sea un aporte y pueda ser usado en un futuro como referencia o recurso en el aula, en una clase de geometría moderna.



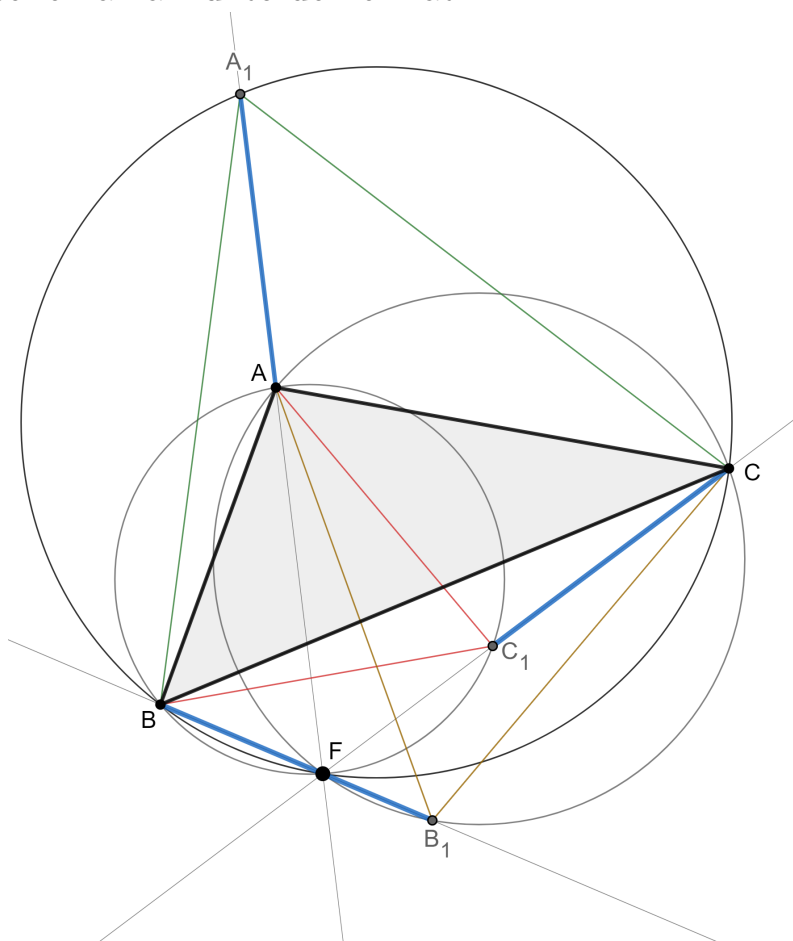
## 2. Teoremas de Fermat y Napoleón

En éste capítulo encontraremos las demostraciones que son el punto de partida de todo el trabajo. Veremos las demostraciones con Triángulos externos e internos, llamados también primer y segundo punto de Fermat respectivamente, incluso encontraremos el teorema de Fermat y Napoleón para el caso de un triángulo degenerado.

### 2.1 Teorema de Fermat

#### 2.1.1 Triángulos Internos

Si en un triángulo cualquiera  $ABC$ , se trazan hacia adentro los equiláteros  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  y  $ACB_1$ ; entonces los segmentos  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , son iguales y las líneas que determinan son concurrentes en F, formando seis ángulos iguales. A F se le llama Punto de Fermat.



## **Demostración:**

### **Concurrencia**

Sean  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  y  $ACB_1$  triángulos equiláteros internos,  $F$  la intersección de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  con el segmento  $BB_1$ .

$\widehat{BAC_1}$  y  $\widehat{C_1FB}$  son suplementarios, ya que sus arcos completan la circunferencia, entonces la suma de estos, sería  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$  y  $\widehat{BAC_1} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{BFC_1} = 120^\circ$$

Por otro lado, la cuerda  $AC_1$ , es subtendida por los ángulos  $\widehat{ABC_1}$  y  $\widehat{AFC_1}$  por lo que

$$\widehat{ABC_1} = \widehat{AFC_1}$$

pero  $\widehat{ABC_1} = 60^\circ$  y entonces

$$\widehat{AFC_1} = 60^\circ$$

Como  $\widehat{BFA} + \widehat{AFC_1} = \widehat{BFC_1} = 120^\circ$ , tenemos que

$$\widehat{BFA} = 60^\circ = \widehat{AFC_1}$$

Como  $\widehat{BFC_1} = 120^\circ$  entonces,  $\widehat{C_1FB_1} = 60^\circ$  y además  $\widehat{AFC_1} + \widehat{C_1FB_1} = \widehat{AFB_1}$  por lo que

$$\widehat{AFB_1} = 120^\circ$$

tomando en cuenta que  $\widehat{ACB_1} = 60^\circ$ , tenemos que el cuadrilátero  $AFB_1C$  es cíclico, entonces la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  pasa por  $F$ .

Por otro lado, veamos que  $\widehat{AFC} = \widehat{AB_1C} = 60^\circ$  por ser ángulos que subtienden la cuerda  $AC$ , tomando en cuenta que  $\widehat{AFC_1} = 60^\circ = \widehat{AFC}$  tenemos que

$C$  y  $C_1$  son colineales y pasan por  $F$

además, como  $\widehat{BFC_1} = 120^\circ$  entonces

$$\widehat{BFC} = 120^\circ$$

Asumiendo este último hecho y que  $\widehat{BA_1C} = 60^\circ$ , el cuadrilátero  $A_1BFC$  es cíclico, entonces la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  pasa por  $F$ .

Ahora, si nos fijamos en la cuerda  $A_1C$  de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BCA_1}$  es subtendida por los ángulos  $\widehat{A_1FC}$  y  $\widehat{A_1BC}$ , además, como  $\widehat{A_1BC} = 60^\circ$ , tenemos

$$\widehat{A_1FC} = 60^\circ$$

Entonces hemos mostrado que

$$\widehat{AFC_1} = 60^\circ = \widehat{A_1FC}$$

de donde  $A$  y  $A_1$  comparten a  $FC$  que contiene a  $FC_1$  por ser colineales y tienen el mismo ángulo de  $60^\circ$  por lo que concluimos que

$A$  y  $A_1$  son colineales y pasan por  $F$

Como  $B$  y  $B_1$  pasan por  $F$ , por construcción, entonces

$AA_1, BB_1$  y  $CC_1$  concurren en  $F$  y forman ángulos iguales de  $60^\circ$ .

## Igualdad

Como  $\widehat{C_1BC} + \widehat{ABC} = 60^\circ$  y los ángulos  $\widehat{A_1BA} + \widehat{ABC} = 60^\circ$

$$\widehat{A_1BA} = \widehat{C_1BC}$$

Además

$$BA_1 = BC$$

y

$$BA = BC_1$$

por criterio *L.A.L*

$$\triangle ABA_1 \cong \triangle C_1BC$$

entonces

$$AA_1 = CC_1$$

Análogamente, el ángulo  $A_1CA + ACB = 60^\circ$  y  $B_1CB + ACB = 60^\circ$ , los ángulos

$$\widehat{A_1CA} = \widehat{B_1CB}$$

Además

$$BC = A_1C$$

y

$$AC = B_1C$$

por criterio *L.A.L*

$$\triangle BB_1C \cong \triangle A_1AC$$

entonces

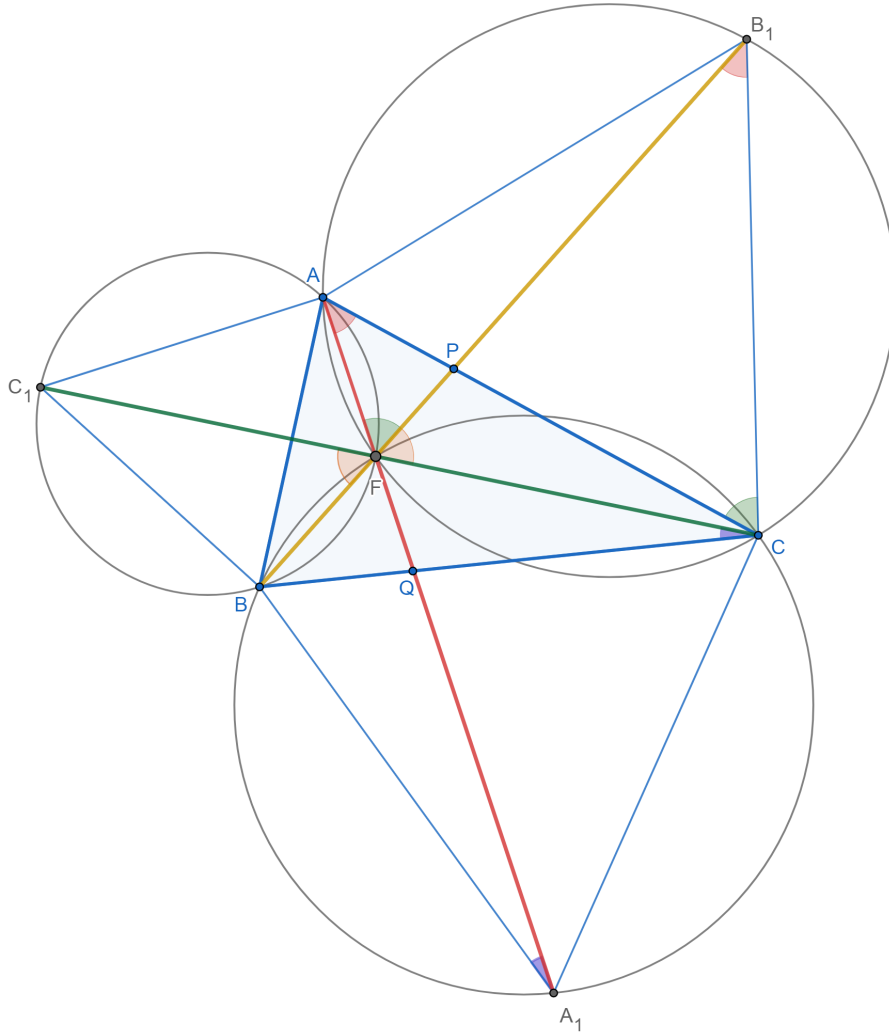
$$AA_1 = BB_1$$

y por último

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

### 2.1.2 Triángulos externos

Si en un triángulo cualquiera  $ABC$ , se trazan hacia afuera los equiláteros  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  y  $ACB_1$ ; entonces los segmentos  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , son iguales y las líneas que determinan son concurrentes en  $F$ , formando seis ángulos iguales.



**Demostración:**

#### Concurrencia

Sean  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  Y  $ACB_1$  triángulos equiláteros hacia afuera y  $F = BB_1 \cap \mathcal{C}_{C_1BA}$ .  $\widehat{AC_1B}$  y  $\widehat{BFA}$  son suplementarios, ya que sus arcos completan la circunferencia y entonces la suma de estos, sería  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ , pero  $\widehat{AC_1B} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{BFA} = 120^\circ$$



Por otro lado, la cuerda  $AC_1$ , es subtendida por los ángulos  $\widehat{ABC_1}$  y  $\widehat{AFC_1}$  por lo que

$$\widehat{ABC_1} = \widehat{AFC_1}$$

pero  $\widehat{ABC_1} = 60^\circ$  y entonces

$$\widehat{AFC_1} = 60^\circ$$

Como  $\widehat{BFC_1} + \widehat{AFC_1} = \widehat{BFA} = 120^\circ$ , tenemos que

$$\widehat{BFC_1} = 60^\circ = \widehat{AFC_1}$$

Tomando en cuenta que por construcción  $B$ ,  $F$  y  $B_1$  son colineales, como  $\widehat{BFA} = 120^\circ$ ,

$$\widehat{AFB_1} = 60^\circ$$

Ahora veamos al cuadrilátero  $AFCB_1$ , llamemos  $P$  a la intersección de las diagonales  $AC$  y  $FB_1$ ; de donde  $\widehat{FPA} = \widehat{CPB_1}$  por ser opuestos por el vértice y  $\widehat{AFP} = 60^\circ = \widehat{B_1CP}$  entonces por criterio de semejanza *A.A.*

$$\triangle FPA \approx \triangle B_1PC$$

en particular, los lados  $FP$  y  $PC$  son proporcionales, como también  $AP$  y  $PB_1$ , de modo que

$$\frac{FP}{PC} = \frac{AP}{PB_1}$$

y luego

$$\frac{PB_1}{PC} = \frac{AP}{FB}$$

y estas son las razones de semejanza de los triángulos  $\triangle APB_1$  y  $\triangle CPF$  y entonces

$$\triangle APB_1 \approx \triangle CPF$$

en particular  $\widehat{CFP} = \widehat{B_1AP}$ , pero  $\widehat{B_1AP} = 60^\circ$ , por ser ángulo interno de un triángulo equilátero, de aquí  $\widehat{CFP} = 60^\circ$ ; dada la colinealidad de  $P$ , con  $F$ , tenemos

$$\widehat{CFP} = \widehat{CFB_1} = 60^\circ$$

Ahora observemos al cuadrilátero  $AFCB_1$ , en donde  $\widehat{CFA} + \widehat{AB_1C} = 180^\circ$ , es decir, son suplementarios, además, si vemos al triángulo  $\triangle AFC$ ,

$$\widehat{CAF} + \widehat{FCA} = 60^\circ$$

viendo estos ángulos como parte de los ángulos  $\widehat{B_1AF}$  y  $\widehat{FCB_1}$  tenemos

$$\widehat{B_1AC} + \widehat{CAF} + \widehat{FCA} + \widehat{ACB_1}$$

esto es

$$60^\circ + \widehat{CAF} + \widehat{FCA} + 60^\circ$$

y por la suma de  $\widehat{CAF}$  y  $\widehat{FCA}$ , tenemos

$$60^\circ + 60^\circ + 60^\circ$$

por lo que los ángulos  $\widehat{B_1AF}$  y  $\widehat{FCB_1}$  son suplementarios, por lo que el cuadrilátero  $AFCB_1$  es cíclico y lo podemos inscribir en la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$

Ahora veamos la suma de los ángulos

$$\widehat{C_1FA} + \widehat{AFB_1} + \widehat{B_1FC} = 180^\circ$$

por lo que  $C$  y  $C_1$  son colineales, además  $CC_1$  pasa por  $F$

Ahora observemos que, como  $B$ ,  $F$  y  $B_1$  son colineales y

$$\widehat{B_1FC} + \widehat{CFB} = 180^\circ$$

entonces

$$\widehat{CFB} = 120^\circ$$

Como  $\widehat{BA_1C} = 60^\circ$   $\widehat{CFB}$  y  $\widehat{BA_1C}$  son suplementarios y por otro lado  $\widehat{FBC} + \widehat{BCF} = 60^\circ$  ya que  $\widehat{CFB} = 120^\circ$ , fijándonos en los ángulos  $\widehat{FBA_1}$  y  $\widehat{A_1CF}$ , vemos que estos ángulos están formados por dos ángulos de  $60^\circ$  y entonces

$$\widehat{FBA_1} + \widehat{A_1CF} = \widehat{FBC} + \widehat{CBA_1} + \widehat{A_1CB} + \widehat{BCF} = \widehat{FBC} + 60^\circ + 60^\circ + \widehat{BCF}$$

pero ya habíamos visto que  $\widehat{FBC} + \widehat{BCF} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{FBC} + \widehat{CBA_1} + \widehat{A_1CB} + \widehat{BCF} = 180^\circ$$

es decir,  $\widehat{FBA_1}$  y  $\widehat{A_1CF}$  son suplementarios, por lo que cuadrilátero  $BA_1CF$  es cíclico y podemos inscribirlo en la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$

Tomando este último resultado, veamos a la cuerda  $CA_1$  que es subtendida por los ángulos  $\widehat{CFA_1}$  y  $\widehat{CBA_1}$  y como  $\widehat{CBA_1} = 60^\circ$  entonces

$$\widehat{CFA_1} = 60^\circ$$

y ahora observemos que  $\widehat{AFC} = 120^\circ$  y  $\widehat{CFA_1} = 60^\circ$ , es decir,

$$\widehat{AFC} + \widehat{CFA_1} = 180^\circ$$

por lo que  $A$  y  $A_1$  son colineales, además  $AA_1$  pasa por  $F$

De este modo hemos probado que  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  concurren en  $F$ .

## Igualdad

Tengamos en cuenta primero que en el cuadrilátero  $AFCB_1$ , dada la semejanza de los triángulos  $\triangle CPF$  y  $\triangle B_1PA$ , tenemos

$$\widehat{PB_1A} = \widehat{PCF}$$

teniendo este resultado, veamos que  $P$ , por construcción es colineal con  $AC$  y con  $FB_1$ , a su vez  $F$  es colineal con  $B$  y  $B_1$ , así como con  $C$  y  $C_1$  estas afirmaciones sustentan que

$$\begin{aligned}\widehat{PB_1A} &= \widehat{BB_1A} \\ \widehat{PCF} &= \widehat{ACC_1}\end{aligned}$$

y de aquí

$$\widehat{BB_1A} = \widehat{ACC_1}$$

enfocados en los triángulos  $\triangle BB_1A$  y  $\triangle ACC_1$ ,  $AB = C_1A$  por ser lados de un triángulo equilátero,  $\widehat{BB_1A} = \widehat{ACC_1}$  y  $AC = B_1A$  por ser también lados de un triángulo equilátero, entonces, por el criterio *L.A.L*

$$\triangle BB_1A \cong \triangle ACC_1$$

en particular

$$BB_1 = CC_1$$

Ahora observemos al cuadrilátero  $BA_1CF$ , llamemos  $Q$  a la intersección de las diagonales  $FA_1$  y  $BC$ ; dada la semejanza de los triángulos  $\triangle QBA_1$  y  $\triangle QCF$ , tenemos

$$\widehat{QA_1B} = \widehat{QCF}$$

teniendo este resultado, veamos que  $Q$ , por construcción es colineal con  $BC$  y con  $FA_1$  y a su vez  $F$  es colineal con  $A$  y  $A_1$ , estas afirmaciones sustentan que

$$\begin{aligned}\widehat{QA_1B} &= \widehat{AA_1B} \\ \widehat{QCF} &= \widehat{BCC_1}\end{aligned}$$

y de aquí

$$\widehat{AA_1B} = \widehat{BCC_1}$$

enfocados en los triángulos  $\triangle AA_1B$  y  $\triangle BCC_1$ ,  $BA_1 = BC$  por ser lados de un triángulo equilátero,  $\widehat{BCC_1} = \widehat{AA_1B}$  y  $C_1B = BA$  por ser también lados de un triángulo equilátero, entonces por el criterio *L.A.L*

$$\triangle AA_1B \cong \triangle BCC_1$$

en particular

$$AA_1 = CC_1$$

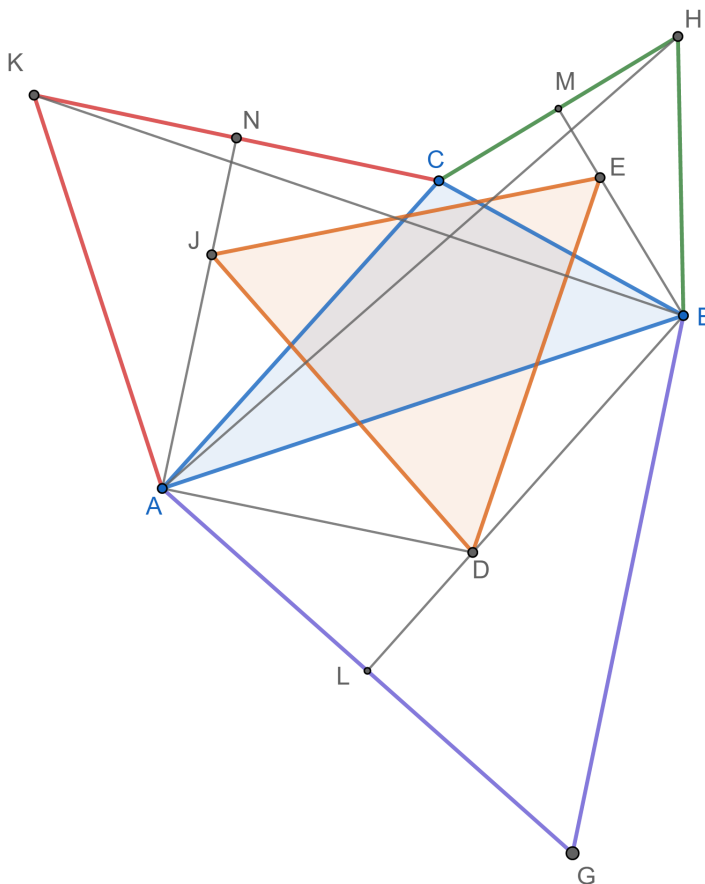
y, reuniendo resultados,

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

De aquí en adelante, llamaremos a estos segmentos:  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , *fermatianas del triángulo*; y entonces hemos probado que las fermatianas tienen igual longitud y concurren en  $F$ , punto de Fermat, tanto en triángulos internos como externos y esto concluye la demostración.

## 2.2 Teorema de Napoleón

Si se construyen triángulos equiláteros externos ó internos, en los lados de un triángulo cualquiera, sus centros forman un triángulo equilátero.



### Demostración

#### Triángulos externos

Sea  $ABC$  un triángulo cualquiera,  $AGB$ ,  $BHC$ ,  $CKA$ , triángulos equiláteros externos,  $D$ ,  $E$  y  $J$  sus centros de gravedad.

Tenemos que  $\widehat{ACK} = \widehat{BCH}$  por ser ángulos internos de triángulos equiláteros, de este modo  $\widehat{BCK} = \widehat{ACH}$ , además  $AC = KC$  así como  $CH = CB$  por ser lados de triángulos equiláteros y entonces por criterio  $L.A.L$

$$\triangle BKC \cong \triangle AHC$$

En particular

$$AH = BK$$

Por otro lado, sea  $M$  la extensión del segmento  $BE$  al lado  $CH$  y  $L$  la extensión del segmento  $BD$  al lado  $AG$ . Como  $D$  y  $E$ , son centros de gravedad de los triángulos  $ABG$  y  $CBH$  respectivamente, sabemos que  $\widehat{ABL} = \widehat{CBM} = \frac{1}{2}\widehat{ABG} = \frac{1}{2}\widehat{CBH} = 30^\circ$

Además, tomemos en cuenta que el baricentro, ortocentro y circuncentro de un triángulo equilátero es el mismo punto, por lo que  $BL$  y  $BM$  son medianas y usando este hecho,  $BD = \frac{2}{3}BL$  y  $BE = \frac{2}{3}BM$  y entonces

$$\triangle BCM \approx \triangle ABL$$

por lo que  $\frac{CB}{AB} = \frac{BM}{BL}$  pero  $CB = BH$  entonces  $\frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BL}$  y luego

$$\frac{BH}{BM} = \frac{AB}{BL}$$

por otro lado como  $BD = \frac{2}{3}BL$  y  $BE = \frac{2}{3}BM$  tenemos que  $BL = \frac{3}{2}BD$  y  $BM = \frac{3}{2}BE$  respectivamente, entonces

$$\frac{BH}{BM} = \frac{AB}{BL} \rightarrow \frac{BH}{\frac{3}{2}BE} = \frac{AB}{\frac{3}{2}BD}$$

por lo que

$$\frac{BH}{BE} = \frac{AB}{BD}$$

Ahora veamos que  $\widehat{CBE} + \widehat{ABD} = 60^\circ = \widehat{CBH}$  por lo que  $\widehat{DBE} = \widehat{ABC} + 60^\circ$  y  $\widehat{ABH} = \widehat{ABC} + 60^\circ$  y luego

$$\widehat{DBE} = \widehat{ABH}$$

y de esta forma concluimos que

$$\triangle DBE \approx \triangle ABH$$

en particular  $AH$  es proporcional a  $DE$ .

De la misma manera podemos mostrar que

$$\frac{AK}{AJ} = \frac{AB}{AD}$$

y posteriormente ver que

$$\widehat{DAJ} = \widehat{BAK}$$

y concluir que

$$\triangle AKB \approx \triangle AJD$$

y en particular  $BK$  es proporcional a  $DJ$ , pero ya teníamos que  $AH = BK$  y tomando en cuenta la igualdad de las proporciones de los baricentros, concluimos que

$$DE = DJ$$

y análogamente podemos ver que  $DJ = JE$  y de aquí

$$\triangle DEJ \text{ es equilátero}$$

## 2.3 El teorema de Fermat implica el teorema de Napoleón

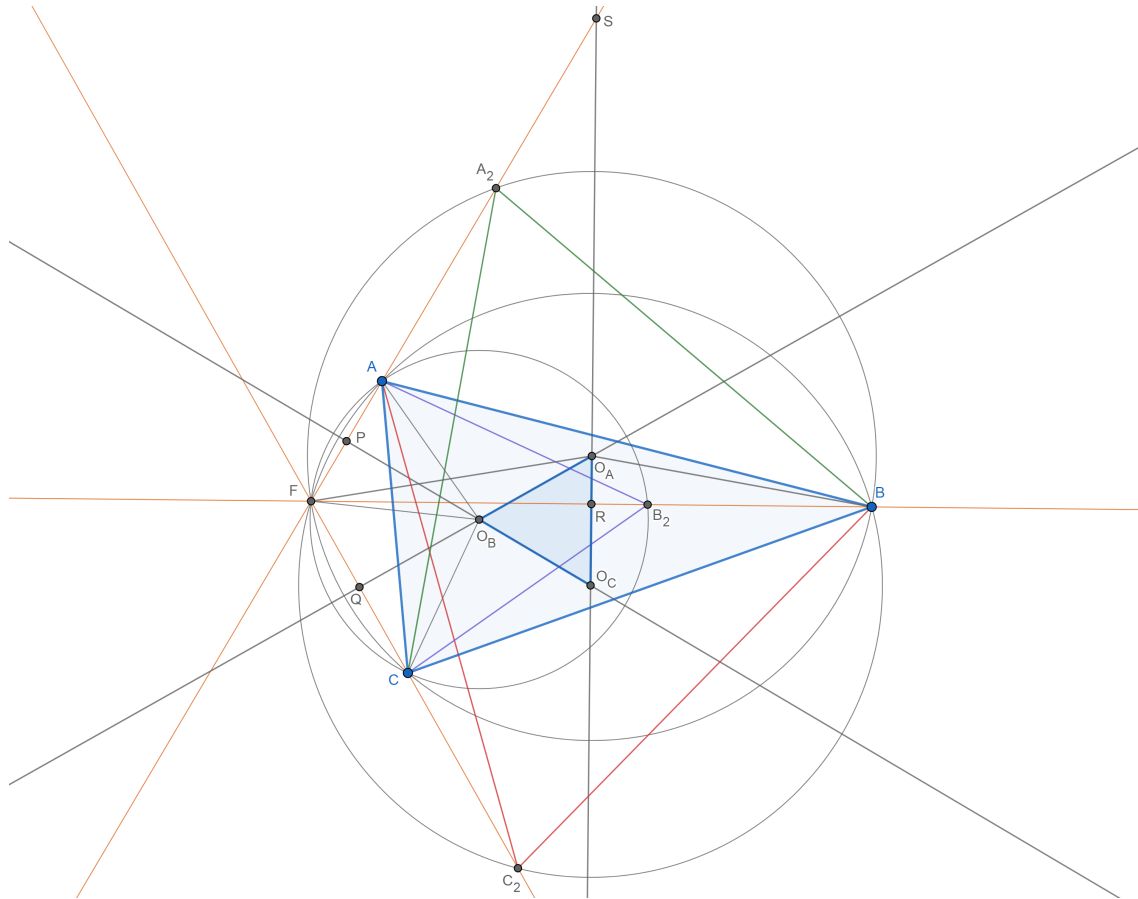
### 2.3.1 Triángulos internos

#### Demostración

Dado el teorema de Fermat, con equiláteros hacia adentro tenemos que:

$$AA_2 = BB_2 = CC_2 \quad \text{y} \quad AA_2 \cap BB_2 \cap CC_2 = F$$

y  $F$  con seis ángulos de  $60^\circ$



Primero observemos a las circunferencias  $\mathcal{C}_{ACB_2}$  y  $\mathcal{C}_{A_2BC}$  que tienen por cuerda común a  $FC$  de donde  $O_A$  es equidistante a  $F$  y a  $C$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{A_2BC}$  y  $O_B$  también es equidistante  $F$  y  $C$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_2}$ ; por lo que la recta que define  $O_AO_B$  es mediatriz de  $FC$ . Si llamamos  $Q$  a la intersección de  $O_AO_B$  con  $FC$  tenemos que

$$\widehat{FQO_B} = 90^\circ$$

Si de la misma manera vemos a la cuerda  $AF$  que es común en las circunferencias  $\mathcal{C}_{ACB_2}$  y  $\mathcal{C}_{ABC_2}$ , podemos ver que la recta que define  $O_B O_C$  es mediatriz de  $FA$  y si llamamos  $P$  a la intersección de  $O_B O_C$  con  $FA$  tenemos que

$$\widehat{O_B P F} = 90^\circ$$

Ahora observemos al cuadrilátero  $PFQO_B$ , donde tenemos que  $\widehat{O_B P F}$  y  $\widehat{O_B Q F}$  son suplementarios y  $\widehat{P F Q} = 120^\circ$  por estar  $P$  y  $Q$  en las fermatianas  $AA_2$  y  $CC_2$  respectivamente y de esta manera, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos internos de los cuadriláteros es  $360^\circ$  y usándolo en  $PFQO_B$  tenemos

$$\widehat{O_B P F} + \widehat{P F Q} + \widehat{F Q O_B} + \widehat{Q O_B P} = 360^\circ$$

sustituyendo los resultados obtenidos anteriormente

$$90^\circ + 120^\circ + 90^\circ + \widehat{Q O_B P} = 360^\circ$$

y de aquí tenemos

$$\widehat{Q O_B P} = 60^\circ$$

pero este ángulo es opuesto por el vértice al ángulo  $\widehat{O_A O_B O_C}$  y entonces

$$\widehat{O_A O_B O_C} = 60^\circ$$

Ahora llamemos  $R$  a la intersección de  $O_A O_C$  con  $FB$  y  $S$  a la intersección de  $O_A O_C$  con  $FA$ .

Podemos ver que  $FB$  es cuerda común en las circunferencias  $\mathcal{C}_{ABC_2}$  y  $\mathcal{C}_{A_2 BC}$  en donde  $O_A$  es equidistante a  $F$  y a  $B$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{A_2 BC}$ , además  $O_C$  también es a equidistante  $F$  y  $B$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_2}$ ; por lo que la recta que define  $O_A O_C$  es mediatriz de  $FB$ . En particular  $\widehat{F R S} = 90^\circ$

Ahora veamos que  $\widehat{R F S} = 60^\circ$  por ser ángulo formado por fermatianas y  $\widehat{F R S} = 90^\circ$  de aquí  $\widehat{R S F} = 30^\circ$ , que por la colinealidad de  $R$  con  $O_C$  podemos decir también que

$$\widehat{O_C S P} = 30^\circ$$

además como  $P$  es colineal con  $F$  y  $A_2$ ,  $\widehat{S P O_C} = 90^\circ$  y como  $\widehat{O_C S P} = 30^\circ$  tenemos

$$\widehat{P O_C S} = 60^\circ$$

y por ser  $O_C$ ,  $O_A$  y  $S$  colineales, así como  $P$ ,  $O_B$  y  $O_C$  en particular tenemos

$$\widehat{O_B O_C O_A} = 60^\circ$$

Ya habíamos mostrado anteriormente que  $\widehat{O_A O_B O_C} = 60^\circ$ , entonces, fijándonos en el triángulo  $\triangle O_A O_B O_C$  tenemos

$$\widehat{O_A O_B O_C} = 60^\circ \quad \text{y} \quad \widehat{O_B O_C O_A} = 60^\circ$$

de aquí,  $\triangle O_A O_B O_C$  es equilátero.

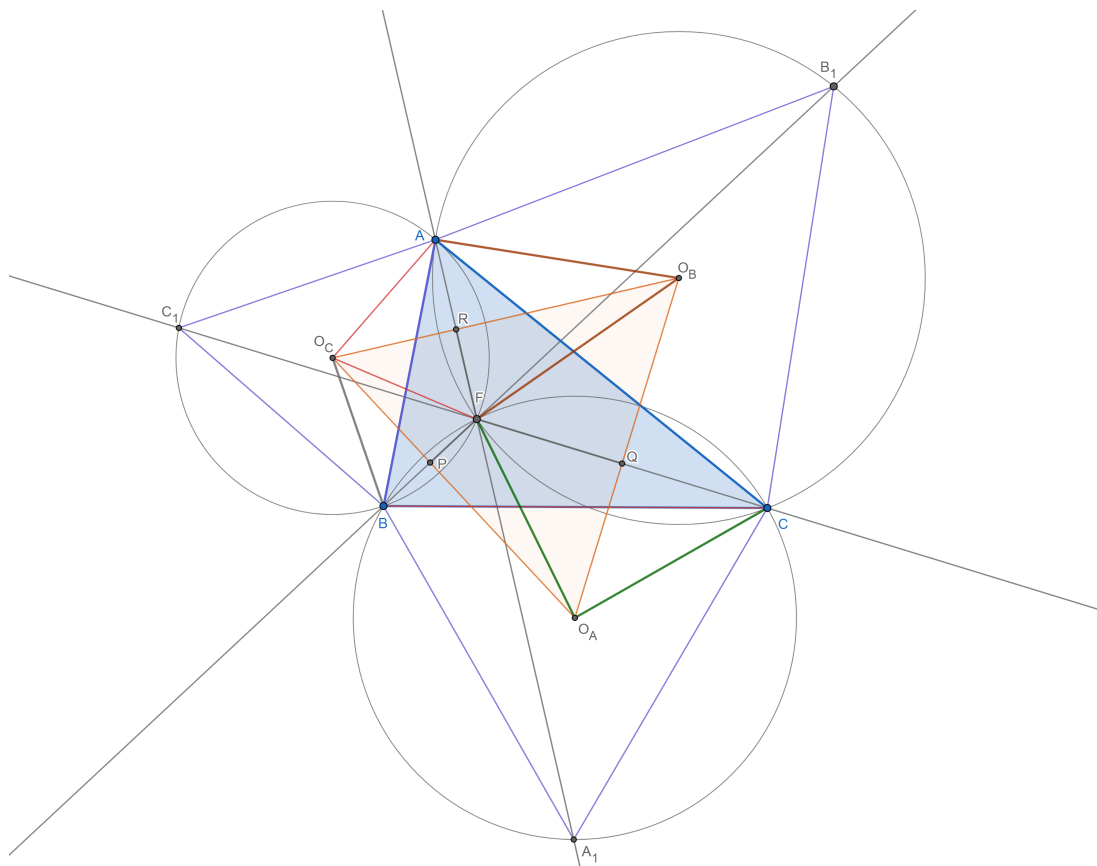
## 2.3.2 Triángulos externos

### Demostración

Dado el teorema de Fermat, con equiláteros hacia afuera tenemos que:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 \quad \text{y} \quad AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = F$$

y  $F$  con seis ángulos de  $60^\circ$



Sea  $P$  la intersección de  $O_C O_A$  con  $BF$ , si observamos a los triángulos  $\triangle BPO_C$  y  $\triangle FPO_C$  tenemos lo siguiente:  $O_C P$  es lado compartido,  $O_C B = O_C F$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{C_1BA}$ , esto hace a  $\triangle BFO_C$  isósceles por lo que  $\widehat{O_C B P} = \widehat{O_C F P}$  y de aquí

$$\triangle BPO_C \cong \triangle FPO_C$$

dada la colinealidad de  $B$ ,  $P$  y  $F$  tenemos que  $\widehat{BPO_C} = 90^\circ = \widehat{FPO_C}$  en particular

$$\widehat{FPO_C} = 90^\circ$$

este resultado lo ocuparemos posteriormente.



Llamemos ahora  $R$  a la intersección de  $O_C O_B$  con  $AF$ , si observamos a los triángulos  $\triangle FRO_C$  y  $\triangle ARO_C$  tenemos lo siguiente:  $O_C R$  es lado compartido,  $O_C F = O_C A$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{C_1BA}$ , esto hace a  $\triangle O_C F A$  isósceles por lo que  $\widehat{O_C F R} = \widehat{O_C A R}$  y de aquí

$$\triangle FRO_C \cong \triangle ARO_C$$

dada la colinealidad de  $A$ ,  $R$  y  $F$  tenemos que  $\widehat{ARO_C} = 90^\circ = \widehat{FRO_C}$  en particular

$$\widehat{FRO_C} = 90^\circ$$

Ahora nos fijamos en el cuadrilátero  $O_C P F A$  en donde  $\widehat{FPO_C} + \widehat{FRO_C} = 180^\circ$ , es decir, son suplementarios, entonces  $\widehat{PFR} + \widehat{RO_C P} = 180^\circ$ , esto por la suma de ángulos internos de un cuadrilátero, pero  $\widehat{PFR} = 120^\circ$  por ser ángulo formado por dos ángulos de  $60^\circ$  de las fermtianas  $AA_1$  y  $BB_1$  y entonces

$$\widehat{RO_C P} = 60^\circ$$

como  $R$  está en  $O_B O_C$  y  $P$  en  $O_C O_A$ , entonces  $\widehat{RO_C P} = \widehat{O_B O_C O_A}$  y de aquí

$$\widehat{O_B O_C O_A} = 60^\circ$$

De manera análoga llamemos ahora  $Q$  a la intersección de  $O_A O_B$  con  $FC$ , si observamos a los triángulos  $\triangle FQO_A$  y  $\triangle CQO_A$  tenemos lo siguiente:  $O_A Q$  es lado compartido,  $O_A F = O_A C$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$ , esto hace a  $\triangle FO_A C$  isósceles por lo que  $\widehat{O_A F Q} = \widehat{O_A C Q}$  y de aquí

$$\triangle FQO_A \cong \triangle CQO_A$$

dada la colinealidad de  $C$ ,  $Q$  y  $F$  tenemos que  $\widehat{FQO_A} = 90^\circ = \widehat{CQO_A}$  en particular

$$\widehat{FQO_A} = 90^\circ$$

pero  $O_A$ ,  $Q$  y  $O_B$  también son colineales, por lo que  $\widehat{FQO_A} = 90^\circ = \widehat{FQO_B}$  y de esta igualdad usaremos en particular

$$\widehat{FQO_B} = 90^\circ$$

Ahora nos fijamos en el cuadrilátero  $FQO_B R$  de donde ya habíamos mostrado anteriormente que  $\widehat{FR O_C} = 90^\circ$  por lo que usando la colinealidad de  $O_C$ ,  $R$  y  $O_B$  tenemos que

$$\widehat{O_B R F} = 90^\circ$$

y entonces

$$\widehat{O_B R F} + \widehat{F Q O_B} = 180^\circ$$

es decir, son suplementarios, por lo que

$$\widehat{R F Q} + \widehat{Q O_B R} = 180^\circ$$

esto porque la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es  $360^\circ$ , pero  $\widehat{R F Q} = 120^\circ$  por ser ángulo formado por dos ángulos de  $60^\circ$  de las fermatianas  $AA_1$  y  $CC_1$  y entonces

$$\widehat{Q O_B R} = 60^\circ$$

como  $Q$  está en  $O_A O_B$  y  $R$  en  $O_B O_C$ ,  $\widehat{Q O_B R} = \widehat{O_A O_B O_C}$  y de aquí

$$\widehat{O_A O_B O_C} = 60^\circ$$

como ya teníamos que

$$\widehat{O_B O_C O_A} = 60^\circ$$

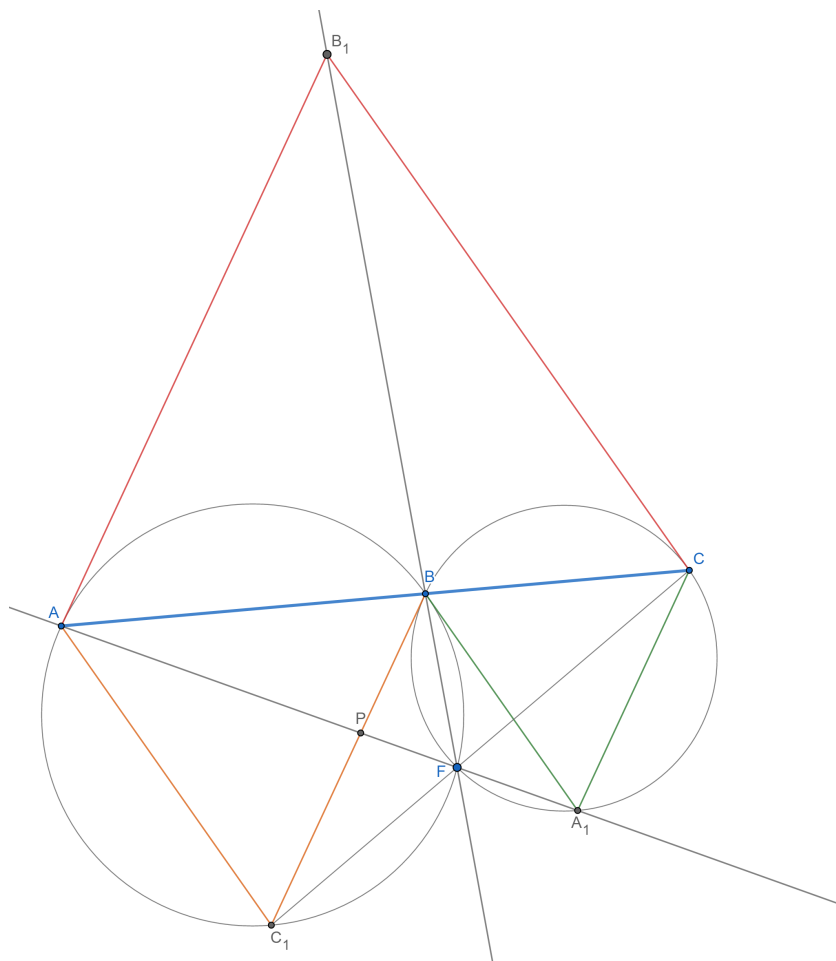
entonces

$$\widehat{O_C O_A O_B} = 60^\circ$$

y luego el triángulo  $\triangle O_A O_B O_C$  tiene tres ángulos internos iguales de  $60^\circ$ , es decir  $\triangle O_A O_B O_C$  es equilátero.

**Teorema 2.4 El teorema de Fermat para un triángulo degenerado con  $B = 180^\circ$**

**Demostración**



Sean  $\widehat{ABC} = 180^\circ$ ;  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ ,  $ACB_1$  equiláteros y  $BB_1 \cap AA_1 = F$

Veamos los triángulos  $\triangle ACA_1$  y  $\triangle B_1CB$ ,  $BC = CA_1$  por ser  $\triangle BCA_1$  equilátero,  $\widehat{A_1CB} = 60^\circ = \widehat{B_1CA}$  por ser ángulos internos de triángulos equiláteros,  $AC = CB_1$ , por ser  $ACB_1$  equilátero, de este modo por criterio *L.A.L.*

$$\triangle ACA_1 \cong \triangle B_1CB$$

y

$$AA_1 = BB_1$$

Observemos ahora a los triángulos  $\triangle CAC_1$  y  $\triangle B_1AB$  en donde tenemos que,  $AC = AB_1$  por ser  $\triangle ACB_1$  equilátero,  $\widehat{C_1AB} = \widehat{BAB_1}$  por ser ángulos internos de triángulos equiláteros,  $AB = AC_1$  por ser  $\triangle ABC_1$  equilátero, de este modo por criterio *L.A.L.*

$$\triangle CAC_1 \cong \triangle B_1AB$$

de esta manera

$$BB_1 = CC_1$$

y entonces

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

Por otro lado, hemos mostrado antes que  $\triangle ACA_1 \cong \triangle B_1CB$  y como  $F$ , es punto de intersección de  $AA_1$  y  $BB_1$  por construcción,  $F$  se encuentra en  $AA_1$ , así como  $B$  se encuentra en  $AC$ , también por construcción, de modo que

$$\widehat{CAA_1} = 60^\circ = \widehat{BAF}$$

Además  $\widehat{ABF} = \widehat{B_1BC}$  por ser opuestos por el vértice, de manera que por criterio *A.A.*

$$\triangle ABF \approx \triangle B_1BC$$

y de este resultado tenemos que  $\widehat{B_1CB} = \widehat{AFB} = 60^\circ$  por ser ángulo interno de un triángulo equilátero, en particular usaremos que

$$\widehat{AFB} = 60^\circ$$

y luego,  $F$  se encuentra en  $AA_1$ , por lo que

$$\widehat{BFA_1} = 120^\circ$$

Ahora, analizaremos al cuadrilátero  $ABFC_1$ , llamaremos  $P$  a la intersección de sus diagonales y analicemos los triángulos  $\triangle BPF$  y  $\triangle APC_1$  de donde  $\widehat{FPB} + \widehat{PBF} + \widehat{BFP} = 180^\circ$  pero ya habíamos mostrado que  $\widehat{BFP} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{FPB} + \widehat{PBF} + 60^\circ = 180^\circ$$

fijándonos en el otro triángulo  $\widehat{C_1PA} + \widehat{PAC_1} + \widehat{AC_1P} = 180^\circ$ , pero  $\widehat{AC_1P} = 60^\circ$  por ser ángulo interno de un triángulo equilátero, entonces

$$\widehat{C_1PA} + \widehat{PAC_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

además  $\widehat{FPB} = \widehat{C_1PA}$  por ser opuestos por el vértice y analizando las dos igualdades

$$\widehat{FPB} + \widehat{PBF} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{C_1PA} + \widehat{PAC_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

y por lo mencionado anteriormente concluimos que

$$\widehat{PBF} = \widehat{PAC}_1$$

Como P intersección de  $BC_1$  y  $AF$ ,  $\widehat{PBF} = \widehat{C_1BF}$  y  $\widehat{PAC}_1 = \widehat{FAC}_1$  de esta manera

$$\widehat{C_1BF} = \widehat{FAC}_1$$

y como estos ángulos estan formados por los lados opuestos,  $BF$  y  $AC_1$ , del cuadrilátero  $ABFC_1$ , entonces,  $ABFC_1$  es cuadrilátero cíclico y la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  pasa por  $F$ . Ahora, si observamos la cuerda  $AC_1$ , es subtendida por los ángulos  $\widehat{ABC_1}$  y  $\widehat{C_1FA}$ , por lo que

$$\widehat{ABC_1} = 60^\circ = \widehat{C_1FA}$$

Ahora veamos al cuadrilátero  $BFA_1C$  cuya suma de sus ángulos internos es  $360^\circ$  por lo que tenemos que

$$\widehat{BFA_1} + \widehat{FA_1C} + \widehat{A_1CB} + \widehat{CBF} = 360^\circ$$

pero ya teníamos que  $\widehat{BFA_1} = 120^\circ$  y  $\widehat{A_1CB} = 60^\circ$ , luego, como la suma de ángulos internos de un cuadrilátero es  $360^\circ$  entonces

$$\widehat{FA_1C} + \widehat{CBF} = 180^\circ$$

Es decir, son suplementarios, por lo que el cuadrilátero  $BFA_1C$  es cíclico y la circunferencia  $\mathcal{C}_{BCA_1}$  pasa por  $F$

Ahora observemos la cuerda  $BC$ , la cual es subtendida por los ángulos  $\widehat{CA_1B}$  y  $\widehat{CFB}$ , por lo que

$$\widehat{CA_1B} = 60^\circ = \widehat{CFB}$$

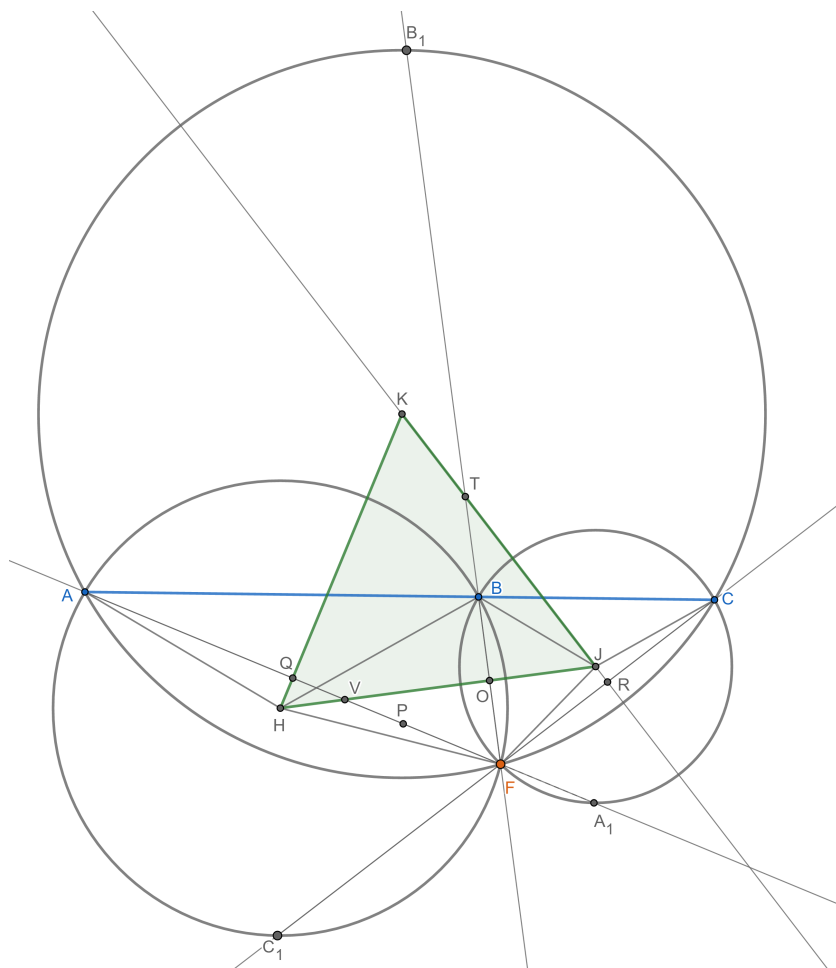
posteriormente

$$\widehat{C_1FA} + \widehat{AFB} + \widehat{BFC} = 180^\circ$$

por lo que  $C_1$ ,  $F$  y  $C$ , son colineales y entonces  $CC_1$  pasa por  $F$ .

## Teorema 2.5 El teorema de Napoleón para un triángulo degenerado con $B = 180^\circ$

### Demostración



Sea  $Q$  la intersección de  $AF$  con  $HK$ , veamos que  $AF$  cuerda común de las circunferencias  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $\mathcal{C}_{AC_1B}$  y luego,  $H$  es equidistante a  $F$  y a  $A$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{AC_1B}$  y  $K$  también es equidistante a  $F$  y a  $A$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$ ; por lo que la recta que define  $HK$  es mediatriz de  $AF$  y en particular

$$HK \perp AF$$

Análogamente llamemos  $R$  a la intersección de  $FC$  con  $KJ$ , veamos que  $FC$  cuerda común de las circunferencias  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  y luego,  $K$  es equidistante a  $F$  y a  $C$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $J$  también es equidistante a  $F$  y a  $C$  por ser radios de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$ ; por lo que la recta que define  $KJ$  es mediatriz de  $FC$  y en particular

$$KJ \perp FC$$

De la misma forma, llamando  $O$  a la intersección de  $BF$  con  $HJ$  y asumiendo que  $BF$  es cuerda común de las circunferencias  $\mathcal{C}_{AC_1B}$  y  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  podemos mostrar que

$$BF \perp HJ$$

Por otro lado, sea  $T$  intersección de  $BF$  con  $KJ$  como  $\widehat{TFR} = 60^\circ$  y  $\widehat{FRT} = 90^\circ$ ,

$$\widehat{RTF} = 30^\circ = \widehat{JTO}$$

Pero  $\widehat{TOJ} = 90^\circ$  por lo que el triángulo  $\triangle OJT$  tiene un ángulo interno de  $90^\circ$  y otro de  $30^\circ$ , por lo que

$$\widehat{OJT} = 60^\circ$$

Ahora llamemos  $V$  intersección de  $HJ$  y  $AF$ , observando al triángulo  $\triangle QVH$  y teniendo en cuenta que  $\widehat{VOF} = 90^\circ$  y  $\widehat{VFO} = 60^\circ$ ,  $\widehat{OVF} = 30^\circ$ , pero como  $\widehat{QVH}$  y  $\widehat{OVF}$  son opuestos por el vértice

$$\widehat{QVH} = 30^\circ$$

además  $HK \perp AF$ , por lo que  $\widehat{HQV} = 90^\circ$  de aquí

$$\widehat{VHQ} = 60^\circ$$

Por último veamos que  $\widehat{OJT}$  y  $\widehat{VHQ}$  son ángulos internos del triángulo  $\triangle HJK$ , ambos de  $60^\circ$  es decir

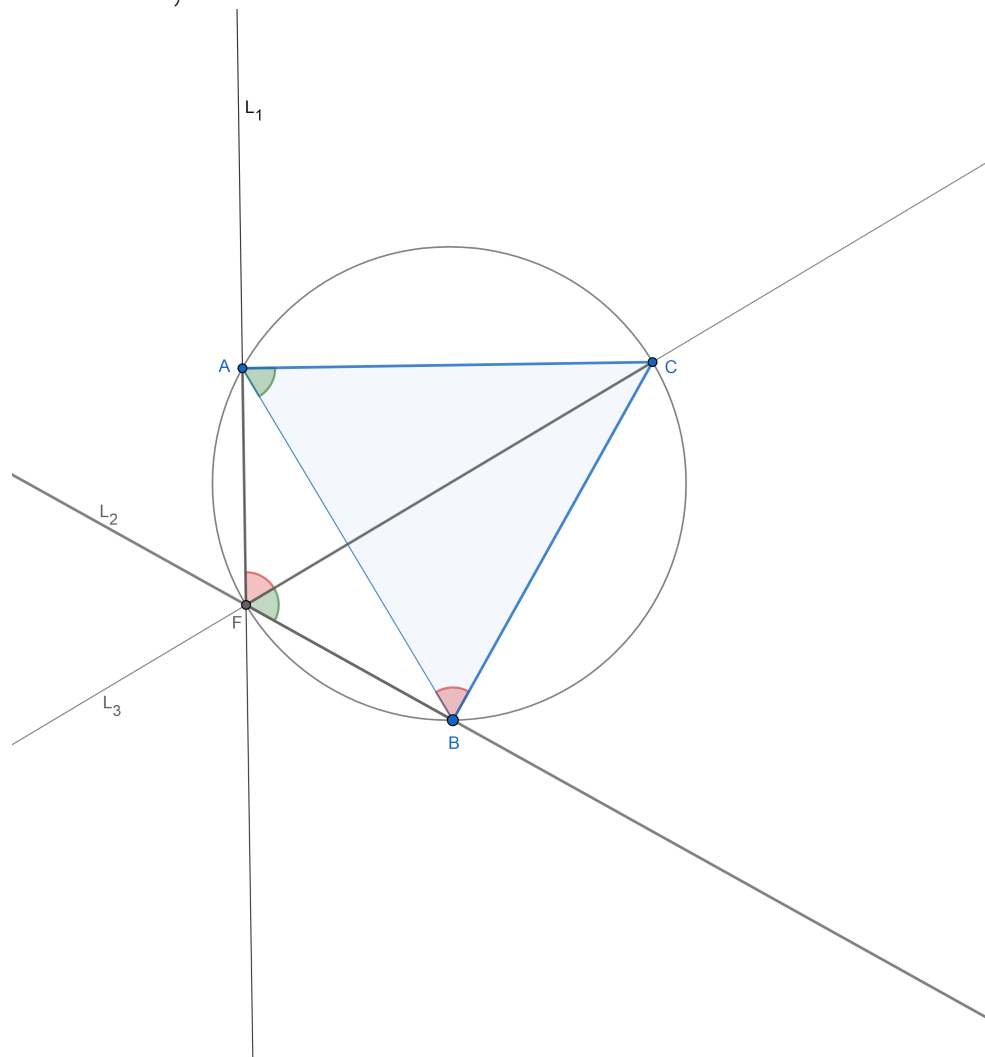
$$\widehat{HJK} = \widehat{JKH} = 60^\circ$$

por lo que

$\triangle HJK$  es equilátero.

## 2.6 Algunos lemas importantes

**Lema 2.6.1:** Si dos vértices de un triángulo equilátero están sobre dos fermatianas, el tercero está sobre la tercera fermatiana.



### Demostración

Sea  $A$  en  $L_1$  y  $B$  en  $L_2$ ,  $C$  el punto de intersección de  $L_3$  y la circunferencia que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $F$ .

Veámos que la cuerda  $AC$  es subtendida por los ángulos  $\widehat{AFC}$  y  $\widehat{ABC}$ , pero  $\widehat{AFC} = 60^\circ$ , por ser ángulo formado por fermatianas, de aquí

$$\widehat{ABC} = 60^\circ$$

Análogamente, si nos fijamos en la cuerda  $BC$ , esta es subtendida por los ángulos  $\widehat{CFB}$  y  $\widehat{CAB}$ , pero  $\widehat{CFB} = 60^\circ$ , por ser ángulo formado por fermatianas y de aquí

$$\widehat{CAB} = 60^\circ$$



Por último nos fijamos en el triángulo  $\triangle ABC$ , en donde tenemos que

$$\widehat{CAB} = 60^\circ \text{ y } \widehat{ABC} = 60^\circ$$

y como

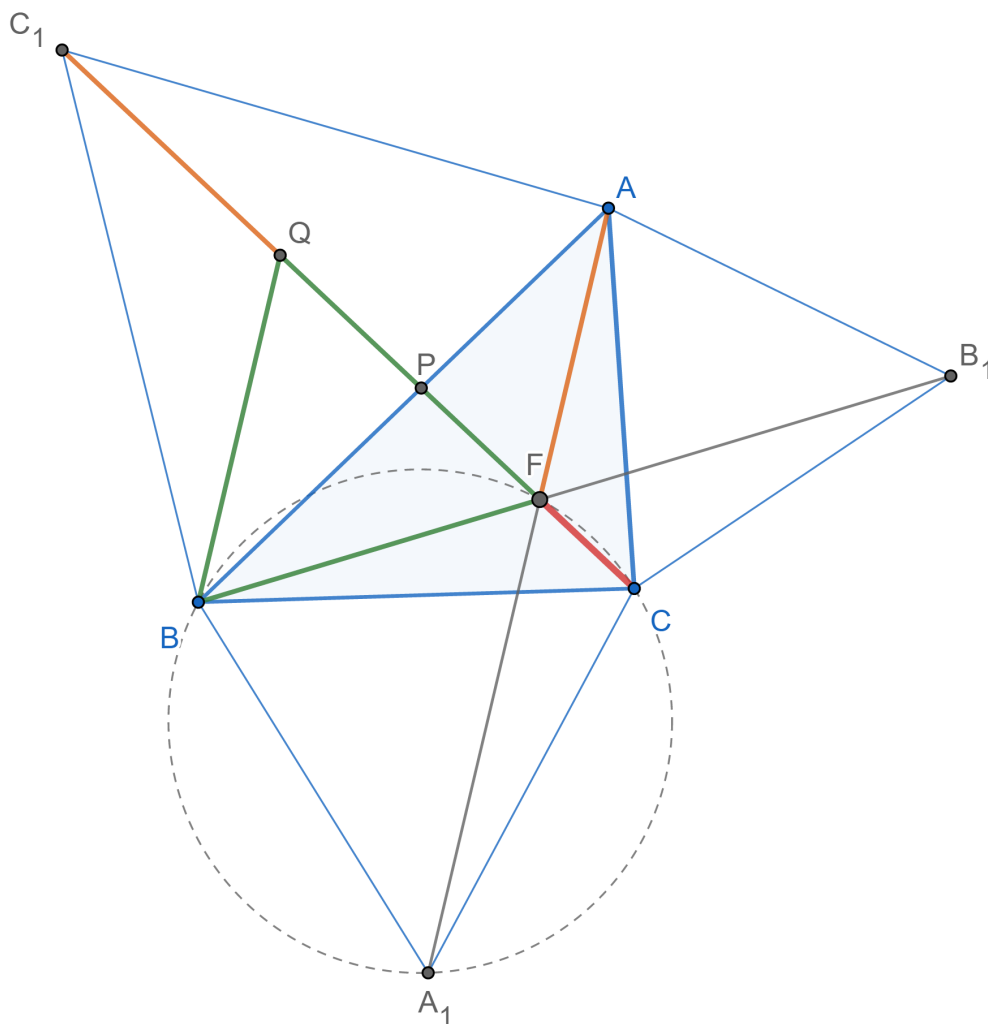
$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$$
$$\widehat{BCA} = 60^\circ$$

y entonces  $\triangle ABC$  tiene tres ángulos internos de  $60^\circ$  por lo que  $\triangle ABC$  es equilátero.

Entonces concluimos que la tercera fermtiana  $L_3$  pasa por un punto C, que es vértice de un triángulo equilátero y por la unicidad de este punto, se trata del triángulo equilátero  $\triangle ABC$

**Lema 2.6.2:** Para un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ ; la longitud de las fermatianas es igual a la suma de los segmentos que van de los vértices al punto de Fermat.

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = AF + BF + CF$$



### Demostración

Tomando en cuenta resultados mostrados anteriormente tenemos que el cuadrilátero  $FCA_1B$  es cíclico. Entonces, usando el teorema de Ptolomeo tenemos lo siguiente:

$$FA_1 \cdot BC = BF \cdot CA_1 + FC \cdot BA_1$$

Pero  $BC = CA_1 = BA_1$  por ser  $BCA_1$  equilátero, entonces

$$FA_1 \cdot BC = BF \cdot CA_1 + FC \cdot BA_1 \longrightarrow FA_1 = BF + FC$$

Pero  $AF + FA_1 = AA_1$  y luego

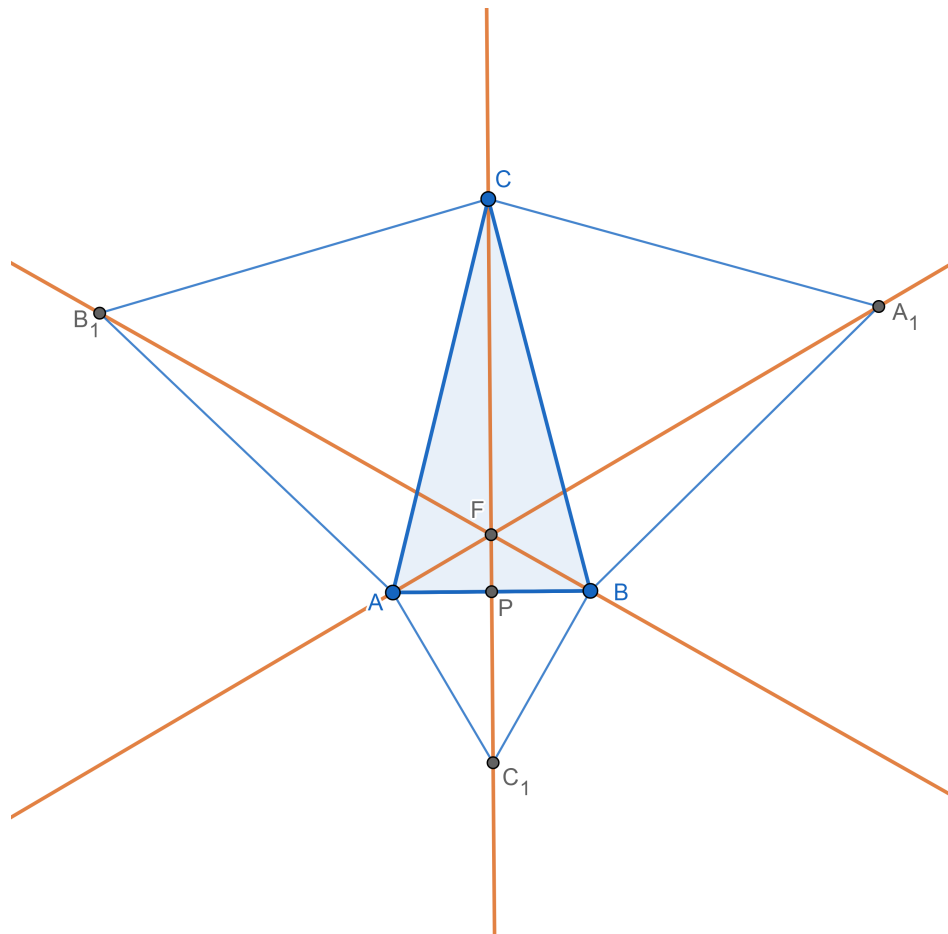
$$AF + BF + FC = AA_1$$

como se ha mostrado anteriormente la igualdad de las fermatianas  $A_1$ ,  $B_1$  y  $C_1$  tenemos

$$AF + BF + FC = AA_1 = BB_1 = CC_1$$

y esto concluye la demostración.

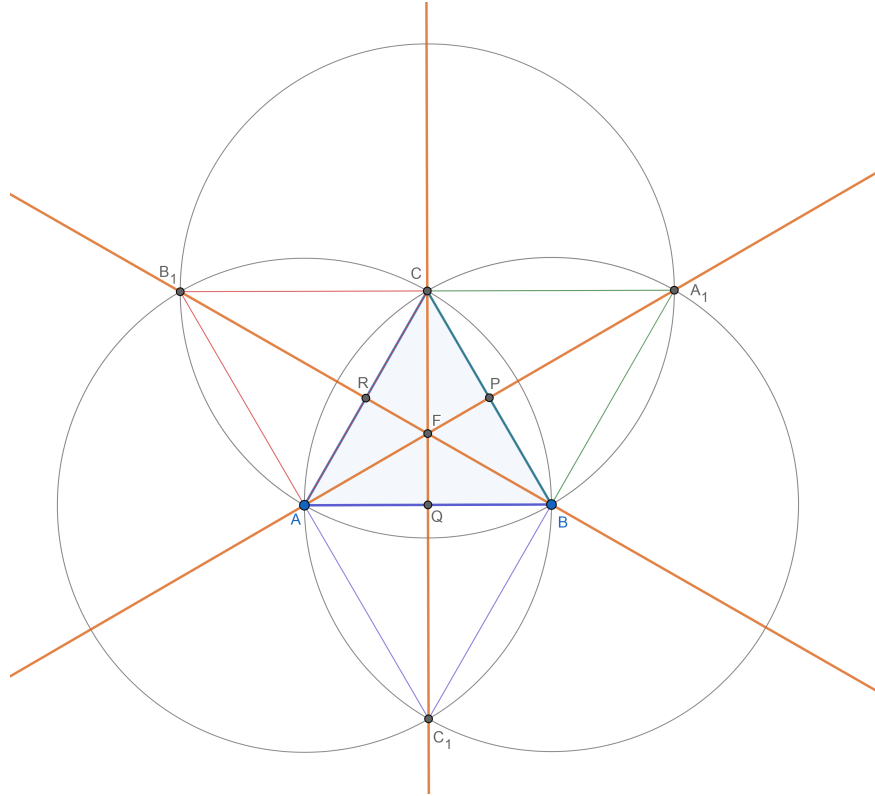
**Lema 2.6.3:** La fermatiana que pasa por el lado desigual del triángulo isósceles, es mediatriz de ese lado.



Tomando en cuenta a la mediatriz como lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes a los extremos del segmento, tenemos lo siguiente:

$AC = BC$  por ser  $ABC$  isósceles, por lo que  $C$  se encuentra en la mediatriz de  $AB$ , por otro lado,  $AC_1 = BC_1$  por ser  $ABC_1$  equilátero, por lo que  $C_1$  también se encuentra en la mediatriz de  $AB$ , pero  $CC_1$  es fermatiana por construcción y entonces la recta que pasa por  $C$  y  $C_1$  es mediatriz de  $AB$ , lado desigual del triángulo isósceles  $ABC$  y esto último era lo que queríamos mostrar.

**Lema 2.6.4: El punto de Fermat de un triángulo equilátero es también su ortocentro y su circuncentro.**



Análogo al lema anterior, podemos mostrar que  $AA_1$  es mediatriz de  $CB$ , si llamamos  $P$  a la intersección de  $CB$  con  $AA_1$  y nos fijamos en los triángulos  $\triangle CPA_1$  y  $\triangle BPA_1$  tenemos que  $PA_1$  es lado común,  $\widehat{CPA_1} = 90^\circ = \widehat{BPA_1}$  y  $CP = BP$  por ser  $P$  punto medio de  $CB$  y por criterio *L.A.L.*

$$\triangle CPA_1 \cong \triangle BPA_1$$

Como  $C$  y  $B$  son colineales,  $\widehat{CPA_1} = 90^\circ = \widehat{BPA_1}$  por lo que  $PA_1$  es altura.

Como  $P$  es intersección de  $BC$  y  $AA_1$  por construcción,  $P$  es colineal a  $A$  y  $A_1$ .

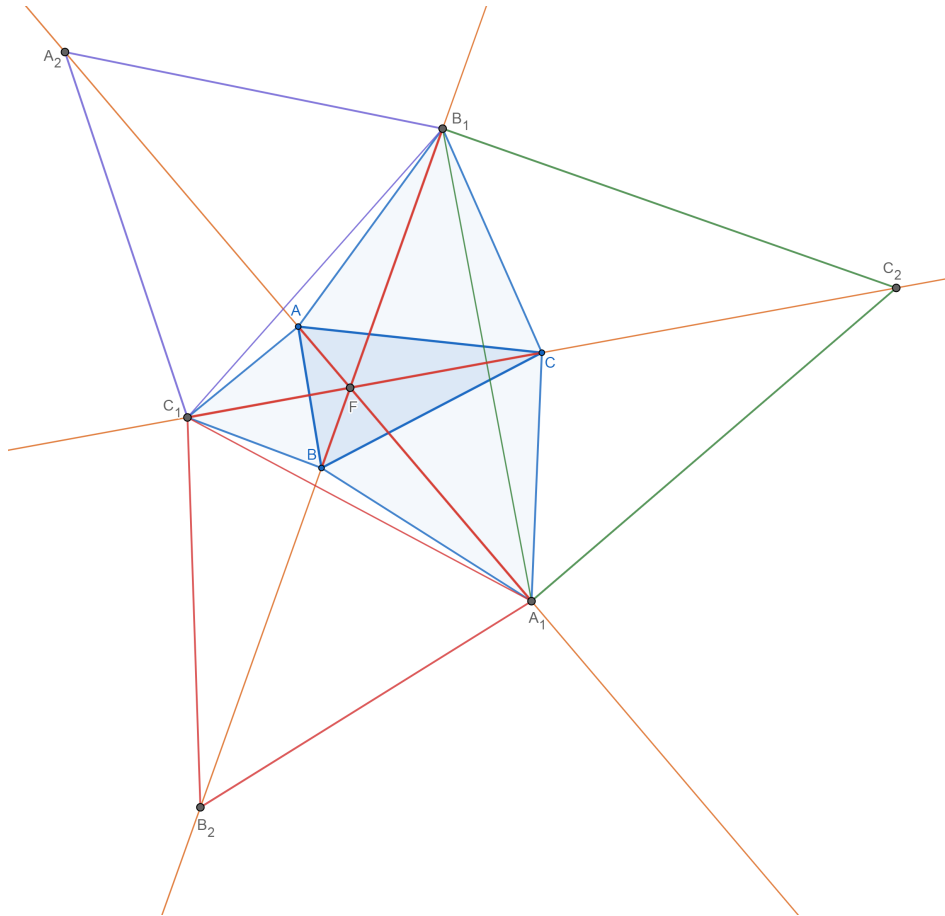
De este modo, al ser  $PA_1$  perpendicular a  $BC$ ,  $AA_1$  también lo es; así como también  $PA_1$  pasa por el punto medio de  $BC$ , de la misma forma que  $AA_1$ . De lo anterior concluimos que la fermatiana  $AA_1$  contiene a altura que pasa por  $A$  y es mediatriz de  $BC$ .

Análogamente, llamando  $Q$ , a la intersección de  $AB$  con  $FC_1$  y a  $R$  intersección de  $CA$  con  $FB_1$ , tenemos que  $BB_1$  contiene a altura que pasa por  $B$  y es mediatriz de  $AC$ ; así como  $CC_1$  contiene a altura que pasa por  $C$  y es mediatriz de  $AB$ .

Sabemos que las fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  concurren en  $F$ ; por lo que estas alturas y mediatrices mencionadas anteriormente, también concurren en  $F$ , pero por definición el ortocentro es la intersección de las alturas del triángulo y el circuncentro la intersección de sus mediatrices, de aquí, concluimos que el punto de Fermat de un triángulo equilátero es también su ortocentro y su circuncentro.

**Lema 2.6.5:** Para un triángulo cualquiera  $ABC$ ;  $ABC_1$ ,  $ACB_1$  y  $BCA_1$  equiláteros; se tiene:

- 1) Los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ , tienen el mismo punto de Fermat  $F$  y sus fermatianas son colineales.
- 2)  $A_1A_2 = 2AA_1$ ,  $B_1B_2 = 2BB_1$ ,  $C_1C_2 = 2CC_1$ .



### Demostración

1) Por el lema 2.5.1, tenemos que el equilátero  $\triangle A_1B_1C_2$ , tiene en sus vértices  $A_1$  y  $B_1$ , las fermatianas  $AA_1$  y  $BB_1$  respectivamente y de esta manera por  $C_2$  pasa la tercera, pero esa fermatiana es  $CC_1$  y entonces mostramos la colinealidad de  $C$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .

De manera Análoga podemos mostrar la colinealidad de  $B$ ,  $B_1$  y  $B_2$  así como de  $A$ ,  $A_1$  y  $A_2$ .

Por lo que concluimos que la intersección de las fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  del triángulo  $\triangle ABC$  es la misma que la intersección de  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  y  $C_1C_2$ , fermatianas de  $\triangle A_1B_1C_1$ ; pero  $F$  es dicho punto de intersección por lo que los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$ , tienen el mismo punto de Fermat.

2) Una vez probando que los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle A_1B_1C_1$ , tienen el mismo punto de Fermat, en la demostración de este apartado, cuando hablemos de  $F$ , en los diferentes triángulos, estaremos hablando del mismo punto.

Veamos que, por Teorema de Fermat y el lema 2.5.2 tenemos

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = AF + BF + CF$$

Además si observamos al triángulo  $A_1B_1C_1$  y a los equiláteros formados en sus lados,  $\triangle A_1B_1C_2$ ,  $\triangle B_1C_1A_2$  y  $\triangle C_1A_1B_2$  tenemos la igualdad de sus fermatianas

$$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = A_1F + B_1F + C_1F$$

Usando estos resultados tenemos

$$A_1A_2 + AA_1 = (A_1F + B_1F + C_1F) + (AF + BF + CF)$$

en donde ordenando tenemos

$$A_1A_2 + AA_1 = (A_1F + AF) + (B_1F + BF) + (C_1F + CF)$$

pero

$$(A_1F + AF) + (B_1F + BF) + (C_1F + CF) = AA_1 + BB_1 + CC_1$$

en donde ya sabemos que  $AA_1 = BB_1 = CC_1$  y de aquí

$$A_1A_2 + AA_1 = AA_1 + BB_1 + CC_1 = 3AA_1$$

luego

$$A_1A_2 = 3AA_1 - AA_1$$

y entonces

$$A_1A_2 = 2AA_1$$

y de manera análoga podemos mostrar que  $B_1B_2 = 2BB_1$  y  $C_1C_2 = 2CC_1$  y esto último completa la demostración.

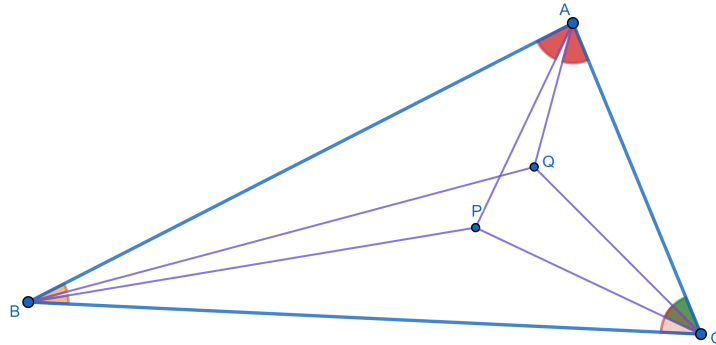
*Definición.* Dos puntos  $P, Q$  en un triángulo  $ABC$ , tal que

$$\widehat{BAP} = \widehat{QAC},$$

$$\widehat{CBP} = \widehat{QBA},$$

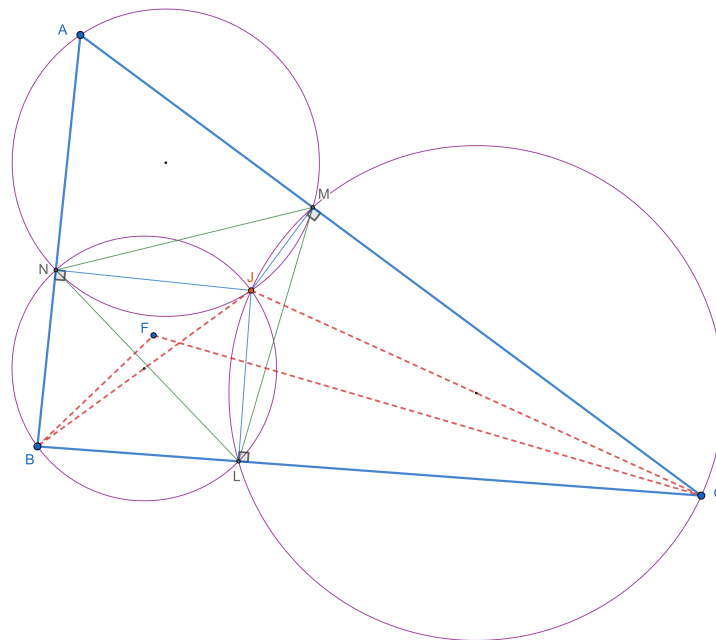
$$\widehat{ACP} = \widehat{QCB}$$

Son isogonales conjugados respecto al triángulo.



**Lema 2.6.6:** Para cualesquiera dos puntos isogonales conjugados  $F$  y  $J$  tenemos

$$\widehat{BFC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{A}$$





## Demostración

Como  $J$  y  $F$  son isogonales conjugados, tenemos que  $\widehat{FBC} = \widehat{JBA}$  y  $\widehat{FCB} = \widehat{JCA}$ . Veamos que

$$\widehat{BFC} + \widehat{BJC} = (180^\circ - \widehat{FBC} - \widehat{FCB}) + (180^\circ - \widehat{JBC} - \widehat{JCB})$$

Por las igualdades mostradas al inicio tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{BFC} + \widehat{BJC} &= (180^\circ - \widehat{JBA} - \widehat{JCA}) + (180^\circ - \widehat{JBC} - \widehat{JCB}) \\ &= 360^\circ - (\widehat{JBC} + \widehat{JBA}) - (\widehat{JCA} + \widehat{JCB}) \\ &= 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{A}) \\ &= 180^\circ + \widehat{A}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\widehat{BFC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{A}$$

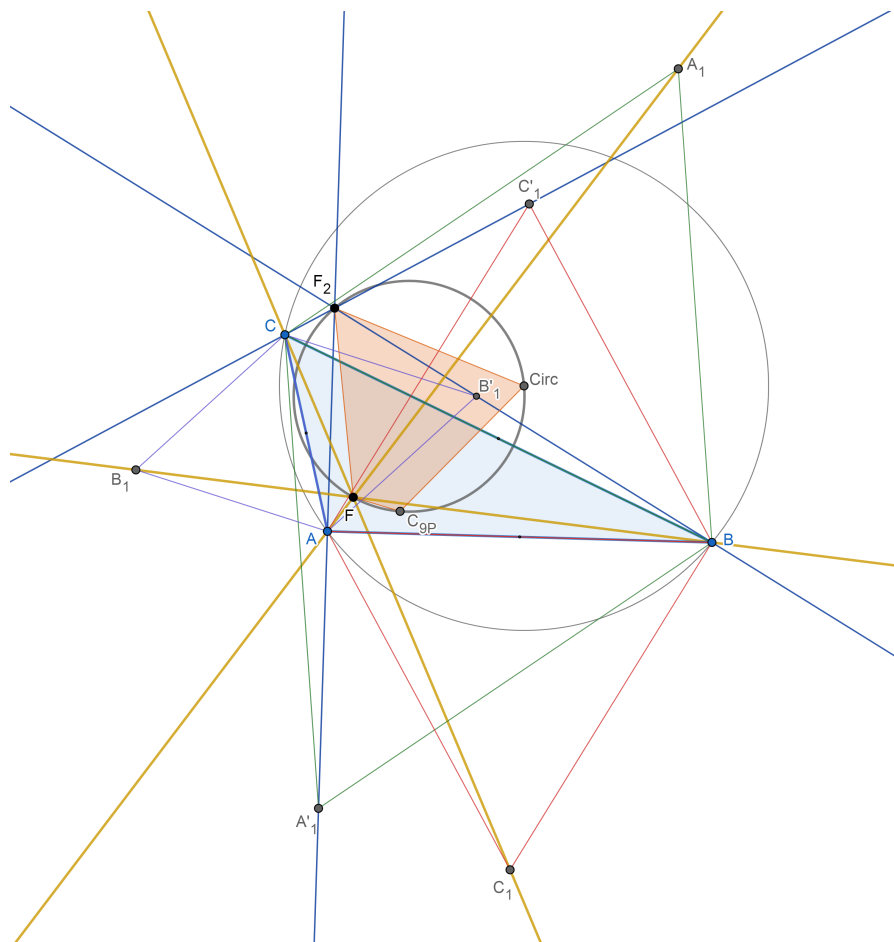
y esto último, es lo que queríamos mostrar.

### 3. Desarrollo de resultados de Lester y Academia Olimpia

En este capítulo, trabajaremos sobre el material de Academia Olimpia, que es un grupo de Geómetras entusiastas que han hecho sus aportaciones, de manera anónima; sin embargo, el trabajo que se ha realizado, consistió en desarrollar todos estos resultados, en la medida de hacerlos muy accesibles al lector, es decir, en este material encontramos demostraciones muy reducidas, entre "paso y paso", por ello, se desarrollaron detalladamente e incluso se mostraron partes relevantes con ayuda de otros lemas y teoremas que encontramos en el apartado de lemas importantes de este mismo trabajo.

#### Teorema de Lester

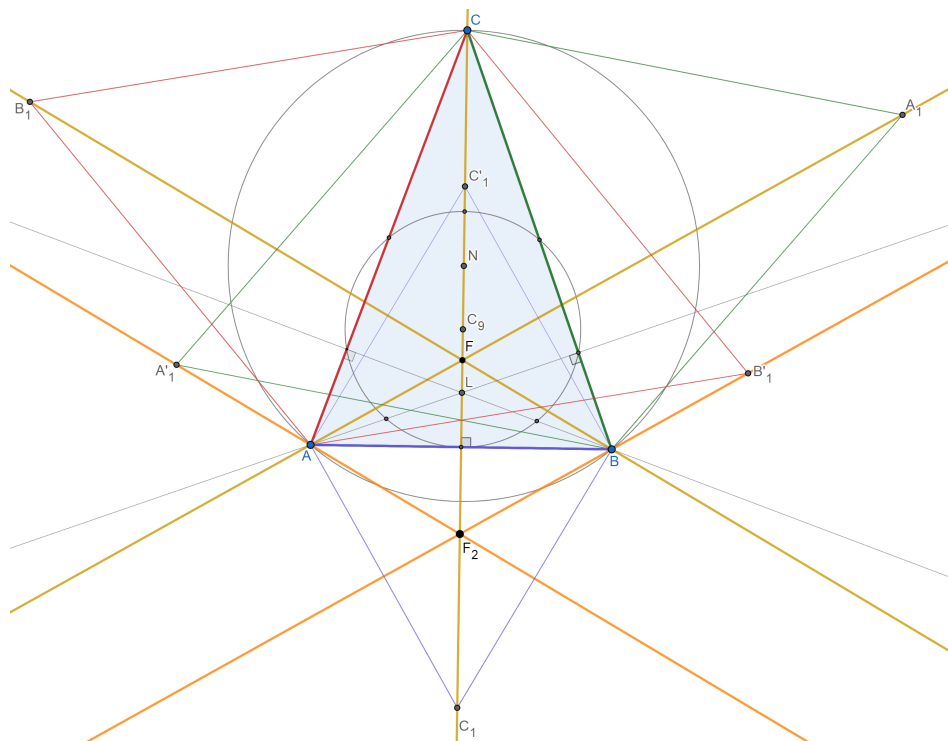
En todo triángulo escaleno, los dos puntos de Fermat, el circuncentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos son concíclicos.



La demostración del teorema de Lester podemos encontrarla en alguna referencia (<http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp53-56.pdf>), sin embargo, el objetivo de este apartado, es extenderlo a triángulos Isósceles y Equiláteros.

### 3.1.1 Extensión para un Triángulo Isósceles

Sea  $\triangle ABC$  isósceles,  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle BCA_1$  y  $\triangle CAB_1$ , equiláteros externos;  $\triangle ABC'_1$ ,  $\triangle BCA'_1$  y  $\triangle CAB'_1$ , equiláteros internos.



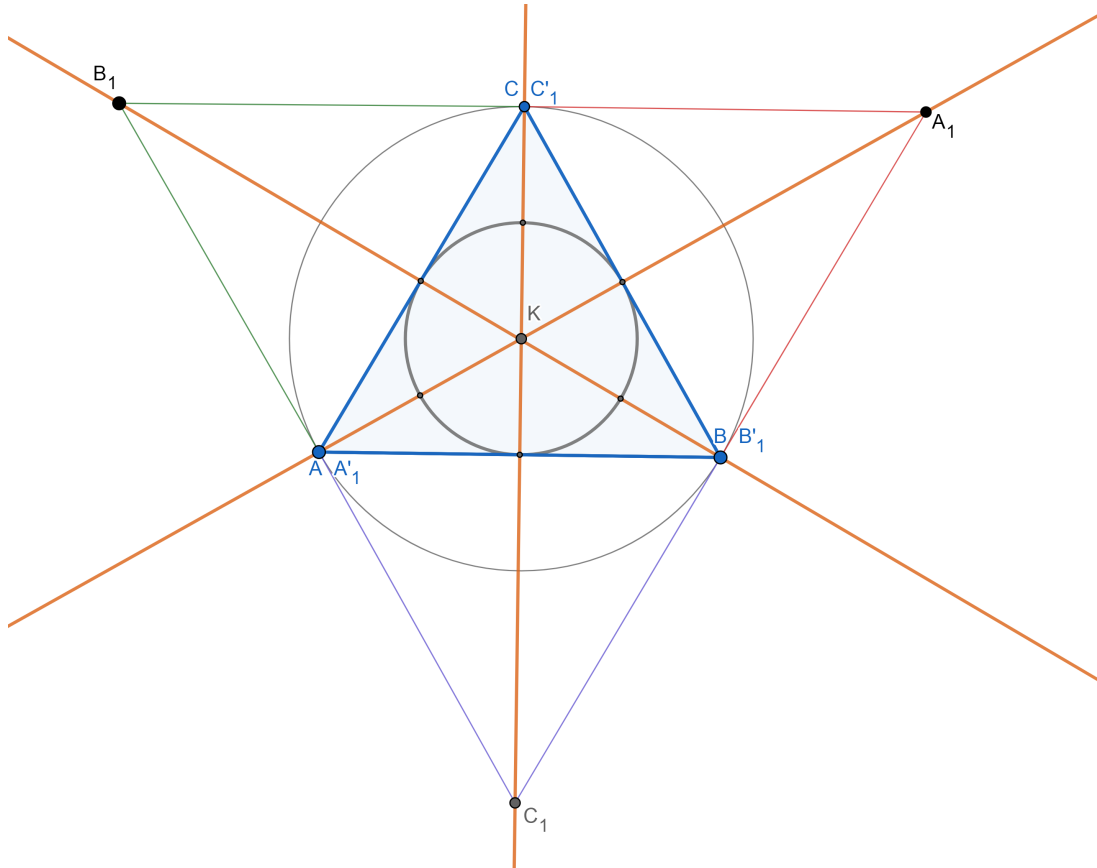
Ya hemos mostrado anteriormente en el lema 2.5.3 que la fermatiana que pasa por la base del triángulo isósceles, en este caso  $CC_1$ , es mediana y altura del triángulo, así como mediatriz del lado  $AB$ , de esta manera, en la fermatiana esta el circuncentro  $N$  y ortocentro  $L$  de  $\triangle ABC$ , en particular  $F$ , punto de Fermat, se encuentra en  $CC_1$ ; por otro lado, asumiendo que una propiedad de la circunferencia de los nueve puntos es que su centro, es el punto medio del segmento que une al circuncentro con el ortocentro, entonces el centro de la circunferencia  $C_9$ , se encuentra en  $CC_1$ , porque  $N$  y  $L$  también lo están.

Por el lema 2.5.1 el equilátero  $ABC_1$  tiene los vértices  $A$  y  $B$  sobre dos fermatianas por lo que  $C'_1$  está en la tercera fermatiana, pero también mostramos anteriormente que las fermatianas en triángulos equiláteros son mediatrices y alturas, en particular  $C'_1$  es mediatriz de  $AB$  pero también  $CC_1$  lo es, y por la unicidad de esta recta,  $C$ ,  $C_1$  y  $C'_1$  son colineales. Asumiendo el hecho que  $CC'_1$  es fermatiana, el segundo punto de Fermat (*Punto de Fermat de Triángulos internos*)  $F_2$ , se encuentra sobre  $CC'_1$ , que es colineal con  $C_1$ , tenemos entonces que,  $F_2$  está también en  $CC_1$ .

De esta manera, los dos Puntos de Fermat  $F$  y  $F_2$ , el circuncentro  $N$  de  $\triangle ABC$  y el centro de la circunferencia de los nueve puntos  $C_9$  están en  $CC_1$  y son concíclicos.

### 3.1.2 Extension para un Triángulo Equilátero

Sea  $\triangle ABC$  Equilátero,  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle BCA_1$  y  $\triangle CAB_1$ , equiláteros externos;  $\triangle ABC'_1$ ,  $\triangle BCA'_1$  y  $\triangle CAB'_1$ , equiláteros internos.



Para este caso llamemos al punto  $K$  al circuncentro de  $\triangle ABC$ , que por ser equilátero,  $K$  también es ortocentro y baricentro. Como el centro de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento que une al circuncentro con el ortocentro y estos dos últimos son el mismo punto, entonces  $K$  también es el centro de la circunferencia de los nueve puntos

Hemos mostrado anteriormente en el lema 2.5.4, que el circuncentro y el punto de Fermat en un triángulo equilátero, son el mismo punto. Por lo que  $K$  entonces, también es el punto de Fermat del triángulo  $\triangle ABC$ .

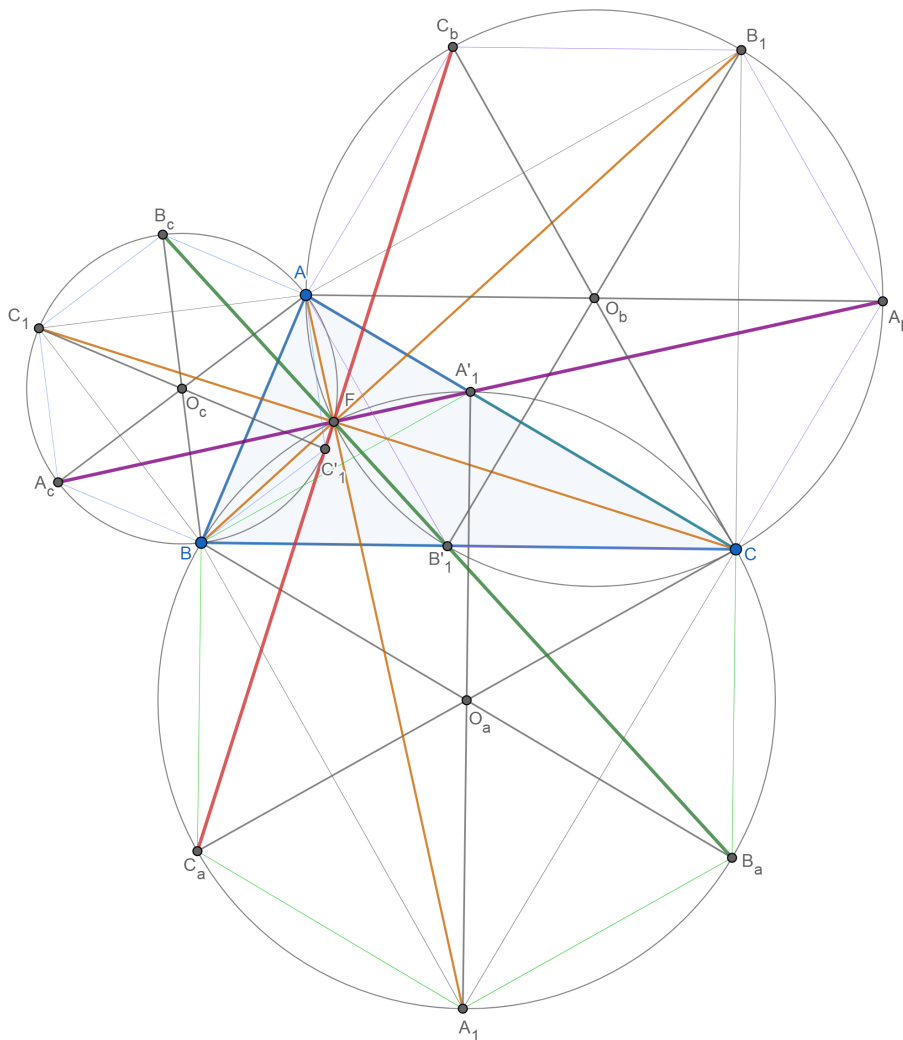
Si vemos los triángulos internos  $A'_1$ ,  $B'_1$  y  $C'_1$  coinciden con  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente y de esta manera las fermatianas son puntos y estos no pueden ser el segundo punto de Fermat, sin embargo las circunferencias  $\mathcal{C}_{AB'_1C}$ ,  $\mathcal{C}_{BC'_1A}$  y  $\mathcal{C}_{CA'_1B}$  pasan por  $F_2$ , segundo punto de Fermat, que en este caso, las tres circunferencias, son una sola, que es la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC}$  con centro en  $K$  y de aquí, el único punto en común de estas circunferencias es su centro, es decir,  $K$  es el segundo punto de Fermat del triángulo equilátero  $\triangle ABC$ .

De este modo, el primer y segundo punto de Fermat, el circuncentro y el centro de la circunferencia de los nueve puntos de  $\triangle ABC$ , coinciden, son un mismo punto y por ello son concíclicos.

## Teorema de las nueve alturas

**Teorema 3.2.** Sean  $ABC$  un triángulo cualquiera,  $\triangle ABC_1$ ,  $\triangle BCA_1$  y  $\triangle ACB_1$  equiláteros hacia afuera de centros  $O_c$ ,  $O_a$  y  $O_b$  (**Triángulo de Napoleón**);  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$ ,  $C_1C'_1$ ;  $AA_c$  por  $O_c$ ,  $AA_b$  por  $O_b$ ,  $BB_c$  por  $O_c$ ,  $BB_a$  por  $O_a$ ,  $CC_a$  por  $O_a$  y  $CC_b$  por  $O_b$ , diámetros. Entonces:

1. Las alturas de  $AA_1A'_1$ ,  $AA_1A_b$  y  $AA_1A_c$ , desde  $A'_1$ ,  $A_b$  y  $A_c$ , se encuentran en una misma recta; así las de  $BB_1B'_1$ ,  $BB_1B_a$  y  $BB_1B_c$ , desde  $B'_1$ ,  $B_a$  y  $B_c$ ; y las de  $CC_1C'_1$ ,  $CC_1C_b$  y  $CC_1C_a$ , desde  $C'_1$ ,  $C_b$  y  $C_a$ , respectivamente.
2. Estas alturas son concurrentes en  $F$ , punto de Fermat de  $ABC$  y bisecan los seis ángulos iguales formados por las fermatianas.
3.  $(A, B_c, C_1, A_c, B$  y  $C'_1)$ ;  $(B'_1, C, A_b, B_1, C_b$  y  $A)$ ;  $(B, C_a, A_1, B_a, C$  y  $A'_1)$ ; son los vértices de los hexágonos regulares inscritos en las circunferencias  $\mathcal{C}_{ABC_1}$ ,  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $\mathcal{C}_{BCA_1}$ , respectivamente.



### 3.2.1 Triángulos Externos

#### Demostración

1. Las alturas de los triángulos  $AA_1A'_1$ ,  $AA_1A_b$  y  $AA_1A_c$ , desde  $A'_1$ ,  $A_b$  y  $A_c$ , se encuentran en una misma recta; así las de  $BB_1B'_1$ ,  $BB_1B_a$  y  $BB_1B_c$ , desde  $B'_1$ ,  $B_a$  y  $B_c$ ; y las de  $CC_1C'_1$ ,  $CC_1C_b$  y  $CC_1C_a$ , desde  $C'_1$ ,  $C_b$  y  $C_a$ , respectivamente.

Como  $A$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  y  $AA_c$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle AFA_c$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{AFA_c} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $AA_c$ .

Del mismo modo como  $A$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $AA_b$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle AFA_b$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{AFA_b} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $AA_b$ .

Si nos fijamos en  $AF$  como base de los triángulos  $\triangle AFA_c$  y  $\triangle AFA_b$ ,  $FA_c$  y  $FA_b$  son sus respectivas alturas y al compartir  $AF$  como lado, tenemos

$$\widehat{A_cFA} + \widehat{A_bFA} = 180^\circ$$

por lo que  $A_c$  y  $A_b$  son colineales y además pasan por  $F$ .

Utilizando el hecho que  $A$ ,  $A_1$  y  $F$  son colineales por ser  $AA_1$  fermatiana del triángulo  $\triangle ABC$  y que  $\widehat{AFA_b} = 90^\circ$ , tenemos su complemento  $A_1FA_b = 90^\circ$ .

Por otro lado,  $F$  y  $A_1$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$ , además y  $A'_1A_1$  es diámetro de  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  por construcción, por lo que podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle FA_1A'_1$ , de donde

$$\widehat{A_1FA'_1} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $A_1A'_1$  y como  $\widehat{A_1FA_b} = 90^\circ$ , tenemos que  $A'_1$  y  $A_b$  son colineales y además pasan por  $F$ . de este modo  $A_c$ ,  $A'_1$  y  $A_b$  **son colineales y pasan por  $F$** .

Veamos ahora que  $B$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  y  $BB_c$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle BFB_c$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{BFB_c} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $BB_c$ .

Del mismo modo como  $B$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  y  $BB_a$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle BFB_a$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{BFB_a} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $BB_a$ .

Si nos fijamos en  $BF$  como base de los triángulos  $\triangle BFB_c$  y  $\triangle BFB_a$ ,  $FB_c$  y  $FB_a$  son sus respectivas alturas y al compartir  $BF$  como lado, tenemos

$$\widehat{B_cFB} + \widehat{B_aFB} = 180^\circ$$

por lo que  $B_c$  y  $B_a$  son colineales y además pasan por  $F$ .

Utilizando el hecho que  $B$ ,  $B_1$  y  $F$  son colineales por ser  $BB_1$  fermatiana del triángulo  $\triangle ABC$  y que  $\widehat{BFB_a} = 90^\circ$ , tenemos su complemento  $\widehat{B_1FB_a} = 90^\circ$ .

Por otro lado,  $F$  y  $B_1$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$ , además y  $B'_1B_1$  es diámetro de  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  por construcción, por lo que podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle FB'_1B_1$ , de donde

$$\widehat{B_1FB'_1} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $B'_1B_1$  y como  $\widehat{B_1FB_a} = 90^\circ$  tenemos que  $B'_1$  y  $B_a$  son colineales y además pasan por  $F$ . de este modo  $B_c$ ,  $B'_1$  y  $B_a$  son colineales y pasan por  $F$ .

Pasemos a analizar las otras tres alturas, esta vez veamos a los puntos  $C$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BCA_1}$  y  $C_aC$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle C_aFC$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{C_aFC} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $C_aC$ .

Del mismo modo como  $C$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $C_bC$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle CFC_b$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{CFC_b} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $C_bC$ .

Si nos fijamos en  $CF$  como base de los triángulos  $\triangle CFC_a$  y  $\triangle CFC_b$ ,  $FC_a$  y  $FC_b$  son sus respectivas alturas y al compartir  $CF$  como lado, tenemos

$$\widehat{CFC_a} + \widehat{CFC_b} = 180^\circ$$

por lo que  $C_a$  y  $C_b$  son colineales y además pasan por  $F$ .

Utilizando el hecho que  $C$ ,  $C_1$  y  $F$  son colineales por ser  $CC_1$  fermatiana del triángulo  $\triangle ABC$  y que  $\widehat{CFC_a} = 90^\circ$ , tenemos su complemento  $\widehat{C_aFC_1} = 90^\circ$ .

Por otro lado,  $F$  y  $C_1$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BAC_1}$ , además  $C'_1C_1$  es diámetro de  $\mathcal{C}_{BAC_1}$  por construcción, por lo que podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle C_1FC'_1$ , de donde

$$\widehat{C_1FC'_1} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $C_1C'_1$  y como  $\widehat{C_1FC_a} = 90^\circ$  tenemos que  $C'_1$  y  $C_a$  son colineales y además pasan por  $F$ . de este modo  $C_b$ ,  $C'_1$  y  $C_a$  son colineales y pasan por  $F$ .

## 2. Estas alturas son concurrentes en $F$ , punto de Fermat de $ABC$ y bisecan los seis ángulos iguales formados por las fermatianas.

Como vimos en la demostración anterior, las alturas son colineales y las 9 pasan por  $F$ , ahora probemos que bisecan a los seis ángulos formados por las fermatianas.

Veamos que

$$\widehat{A_1FC} + \widehat{CFA_b} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{A_1FC} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{CFA_b} = 30^\circ$$

Análogamente

$$\widehat{AFB_1} + \widehat{B_1FA_b} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{AFB_1} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{B_1FA_b} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{CFA_b} = \widehat{B_1FA_b}$$

y entonces  $FA_b$  es bisectriz de  $\widehat{B_1FC}$

De la misma forma

$$\widehat{A_cFC_1} + \widehat{C_1FA} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{C_1FA} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{A_cFC_1} = 30^\circ$$

Además

$$\widehat{A_cFB} + \widehat{BFA_1} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{BFA_1} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{A_cFB} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{A_cFC_1} = \widehat{A_cFB}$$

y entonces  $A_cF$  es bisectriz de  $\widehat{C_1FB}$



Por otro lado

$$\widehat{BFC_1} + \widehat{C_1FB_c} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{BFC_1} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{C_1FB_c} = 30^\circ$$

Análogamente

$$\widehat{B_1FA} + \widehat{AFB_c} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{B_1FA} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{AFB_c} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{C_1FB_c} = \widehat{AFB_c}$$

y entonces  $FB_c$  es bisectriz de  $\widehat{C_1FA}$

Mismo caso tenemos con la suma de los ángulos

$$\widehat{BFA_1} + \widehat{A_1FB_a} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{BFA_1} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{A_1FB_a} = 30^\circ$$

Además

$$\widehat{B_1FC} + \widehat{CFB_a} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{B_1FC} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{CFB_a} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{A_1FB_a} = \widehat{CFB_a}$$

y entonces  $FB_a$  es bisectriz de  $\widehat{A_1FC}$

Por último veamos que

$$\widehat{C_1FB} + \widehat{BFC_a} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{C_1FB} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{BFC_a} = 30^\circ$$

Análogamente

$$\widehat{CFA_1} + \widehat{A_1FC_a} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{CFA_1} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{A_1FC_a} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{BFC_a} = \widehat{A_1FC_a}$$

y entonces  $FC_a$  es bisectriz de  $\widehat{BFA_1}$

De la misma forma

$$\widehat{C_1FA} + \widehat{AFC_b} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{C_1FA} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{AFC_b} = 30^\circ$$

Además

$$\widehat{CFB_1} + \widehat{B_1FC_b} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{CFB_1} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{B_1FC_b} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{AFC_b} = \widehat{B_1FC_b}$$

y entonces  $FC_b$  es bisectriz de  $\widehat{AFB_1}$

Hemos probado entonces que  $A_cF$ ,  $C_aF$ ,  $B_aF$ ,  $A_bF$ ,  $C_bF$  y  $B_cF$  son bisectrices de los ángulos  $\widehat{C_1FB}$ ,  $\widehat{BFA_1}$ ,  $\widehat{A_1FC}$ ,  $\widehat{CFB_1}$ ,  $\widehat{B_1FA}$  y  $\widehat{AFC_1}$  respectivamente, ángulos formados por las fermatianas.

**3.  $(A, B_c, C_1, A_c, B$  y  $C'_1)$  ;  $(B'_1, C, A_b, B_1, C_b$  y  $A)$ ;  $(B, C_a, A_1, B_a, C$  y  $A'_1)$ ; son los vértices de los hexágonos regulares inscritos en las circunferencias  $\mathcal{C}_{ABC_1}$ ,  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $\mathcal{C}_{BCA_1}$ , respectivamente.**

Tomemos en cuenta el hecho que la medida de un ángulo central es el doble de la medida del mismo ángulo con vértice en la circunferencia. y entonces

$$\widehat{CFA_b} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{CO_bA_b} = 60^\circ$$

$$\widehat{A_bFB_1} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{A_bO_bB_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{B_1FC_b} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{B_1O_bC_b} = 60^\circ$$

como  $\widehat{AO_bC_b}$ ,  $\widehat{B'_1O_bA}$  y  $\widehat{CO_bB'_1}$  son ángulos opuestos por el vértice de  $\widehat{CO_bA_b}$ ,  $\widehat{A_bO_bB_1}$  y  $\widehat{B_1O_bC_b}$  respectivamente, son todos iguales a  $60^\circ$ . Fijándonos en el hexágono inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$ , este se encuentra formado con seis triángulos, que al tener por lados radios de la circunferencia y un ángulo igual, por criterio *L.A.L.* estos son congruentes, en particular

$$AB'_1 = B'_1C = CA_b = A_bB_1 = B_1C_b = C_bA$$

entonces el Hexágono  $AB'_1CA_bB_1C_b$  es regular.

Análogamente,

$$\widehat{AFB_c} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{AO_cB_c} = 60^\circ$$

$$\widehat{B_cFC_1} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{B_cO_cC_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{C_1FA_c} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{C_1O_cA_c} = 60^\circ$$

como  $\widehat{AO_cB_c}$ ,  $\widehat{BO_cC'_1}$  y  $\widehat{C'_1O_cA}$  son ángulos opuestos por el vértice de  $\widehat{AO_cB_c}$ ,  $\widehat{B_cO_cC_1}$  y  $\widehat{C_1O_cA_c}$  respectivamente, son todos iguales a  $60^\circ$ . Fijándonos en el hexágono inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{C_1BA}$ , este se encuentra formado con seis triángulos, que al tener por lados radios de la circunferencia y un ángulo igual, por criterio *L.A.L.* estos son congruentes, en particular

$$C_1A_c = A_cB = BC'_1 = C'_1A = AB_c = B_cC_1$$

entonces el Hexágono  $A_cBC'_1AB_cC_1$  es regular.

Por ultimo, veamos que

$$\widehat{C_aFA_1} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{C_aO_aA_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{A_1FB_a} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{A_1O_aB_a} = 60^\circ$$

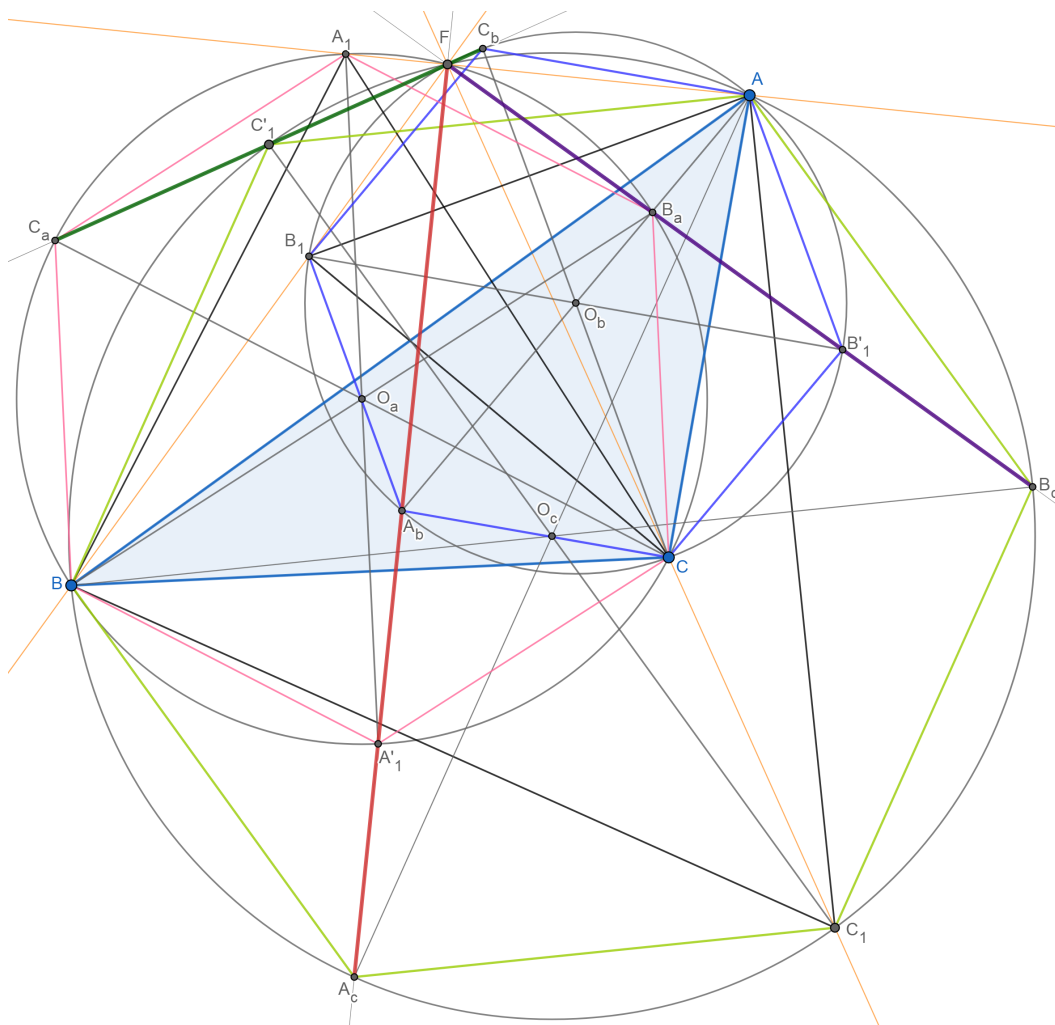
$$\widehat{B_aFC} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{B_aO_aC} = 60^\circ$$

como  $\widehat{CO_aA'_1}$ ,  $\widehat{A'_1O_aB}$  y  $\widehat{BO_aC_a}$  son ángulos opuestos por el vértice de  $\widehat{C_aO_aA_1}$ ,  $\widehat{A_1O_aB_a}$  y  $\widehat{B_aO_aC}$  respectivamente, son todos iguales a  $60^\circ$ . Fijándonos en el hexágono inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$ , este se encuentra formado con seis triángulos, que al tener por lados radios de la circunferencia y un ángulo igual, por criterio *L.A.L.* estos son congruentes, en particular

$$BC_a = C_aA_1 = A_1B_a = B_aC = CA'_1 = A'_1B$$

entonces el Hexágono  $BC_aA_1B_aCA'_1$  es regular.

### 3.2.2 Triángulos internos



#### Demostración

1. Las alturas de los triángulos  $AA_1A'_1$ ,  $AA_1A_b$  y  $AA_1A_c$ , desde  $A'_1$ ,  $A_b$  y  $A_c$ , se encuentran en una misma recta; así las de  $BB_1B'_1$ ,  $BB_1B_a$  y  $BB_1B_c$ , desde  $B'_1$ ,  $B_a$  y  $B_c$ ; y las de  $CC_1C'_1$ ,  $CC_1C_b$  y  $CC_1C_a$ , desde  $C'_1$ ,  $C_b$  y  $C_a$ , respectivamente.

Como  $A$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  y  $AA_c$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle AFA_c$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{AFA_c} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $AA_c$ , de modo que  $FA_c$  es altura del triángulo.

Del mismo modo Como  $A$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $AA_b$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle AFA_b$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{AFA_b} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $AA_b$ , de modo que  $FA_b$  es altura del triángulo.

Si tomamos  $AF$  como base de los triángulos  $\triangle AFA_c$  y  $\triangle AFA_b$ , como  $FA_b$  y  $FA_c$  son sus alturas, tenemos que  $A_c$  y  $A_b$  son colineales y además  $F$ , también lo es.

Utilizando el hecho que  $A$ ,  $A_1$  y  $F$  son colineales por ser  $AA_1$  fermatiana del triángulo  $\triangle ABC$  y que  $\widehat{AFA_b} = 90^\circ$ , tenemos su complemento  $A_1FA_b = 90^\circ$ .

Por otro lado,  $F$  y  $A_1$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$ , además y  $A'_1A_1$  es diámetro de  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  por construcción, por lo que podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle FA_1A'_1$ , de donde

$$\widehat{A_1FA'_1} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $A_1A'_1$  y como  $\widehat{A_1FA_b} = 90^\circ$  tenemos que  $A'_1$  y  $A_b$  son colineales y además  $F$  también lo es, de este modo  $A_c$ ,  $A'_1$ ,  $A_b$  y  $F$  **son colineales**.

Veamos ahora que  $B$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  y  $BB_c$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle BFB_c$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{BFB_c} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $BB_c$ , de modo que  $FB_c$  es altura del triángulo.

Del mismo modo Como  $B$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  y  $BB_a$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle BFB_a$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{BFB_a} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $BB_a$ , de modo que  $FB_a$  es altura del triángulo.

Si tomamos  $BF$  como base de los triángulos  $\triangle BFB_c$  y  $\triangle BFB_a$ , como  $FB_c$  y  $FB_a$  son sus alturas, tenemos que  $B_c$  y  $B_a$  son colineales y además  $F$ , también lo es.

Tomando ahora el diámetro  $B_1B'_1$ , es subtendido por el ángulo  $\widehat{B_1FB'_1} = 90^\circ$ . Asumiendo la colinealidad de  $B$ ,  $B_1$  y  $F$ , por ser  $BB_1$  fermatiana, el ángulo que forman  $BF$  con  $FB_a$  y  $FB_c$ , es el mismo formado con  $B_1F$ , es decir

$$B_1FB_a = 90^\circ = B_1FB_c$$

y como  $B_1FB'_1 = 90^\circ$  entonces  $B_a$ ,  $B'_1$  y  $B_c$  son colineales, además  $F$ , también lo es.

Pasemos a analizar las otras tres alturas, esta vez veamos a los puntos  $C$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BCA_1}$  y  $C_aC$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle C_aFC$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{C_aFC} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $C_aC$ , de modo que  $C_aF$  es altura del triángulo.

Del mismo modo Como  $C$  y  $F$  son puntos de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $C_bC$  es diámetro de esta, por construcción, podemos trazar el triángulo inscrito  $\triangle CFC_b$ , asumiendo este hecho,

$$\widehat{CFC_b} = 90^\circ$$

por subtender el diámetro  $C_bC$ , de modo que  $FC_b$  es altura del triángulo.

Si nos fijamos en  $CF$  como base de los triángulos  $\triangle CFC_a$  y  $\triangle CFC_b$ ,  $FC_a$  y  $FC_b$  son sus respectivas alturas y al compartir  $CF$  como lado, tenemos

$$\widehat{CFC_a} + \widehat{CFC_b} = 180^\circ$$

por lo que  $C_a$  y  $C_b$  son colineales y además pasan por  $F$ .

Tomando ahora el diámetro  $C'_1C_1$ , es subtendido por el ángulo  $\widehat{C'_1FC_1} = 90^\circ$ . Asumiendo la colinealidad de  $F$ ,  $C$  y  $C_1$ , por ser  $CC_1$  fermatiana, el ángulo que forman  $CF$  con  $FC_a$  y  $FC_b$ , es el mismo formado con  $FC_1$ , es decir

$$C_aFC_1 = 90^\circ = C_aFC$$

y como  $C'_1FC = 90^\circ$  entonces  $C_a$ ,  $C'_1$  y  $C_b$  son colineales, además  $F$ , también lo es.

**2. Estas alturas son concurrentes en  $F$ , punto de Fermat de  $ABC$  y bisecan los seis ángulos iguales formados por las fermatianas.**

Como vimos en la demostración anterior, las alturas son colineales, cada terna de alturas es colineal con  $F$ , siendo este último el punto en común, es decir, son concurrentes en  $F$ ; ahora probemos que bisecan a los seis ángulos formados por las fermatianas.

Como los ángulos opuestos por el vértice comparten la misma bisectriz, probaremos que  $C_aF$ ,  $A_cF$  y  $B_cF$  son bisectrices de  $\widehat{A_1FB}$ ,  $\widehat{BFC_1}$  y  $\widehat{C_1FA}$  respectivamente.

Veamos que

$$\widehat{C_aFB} + \widehat{BFC_1} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{BFC_1} = 60^\circ$  por ser  $F$  punto de Fermat por lo que

$$\widehat{C_aFB} = 30^\circ$$

y por otro lado

$$\widehat{A_1FC_a} + \widehat{C_aFB} = 60^\circ$$

ya que  $A_1FB$  es uno de los seis ángulos de  $60^\circ$  formados por las fermatianas y de aquí,  $\widehat{A_1FC_a} = 30^\circ$  por lo que

$$\widehat{A_1FC_a} = \widehat{C_aFB}$$

y entonces  $C_aF$  es bisectriz de  $\widehat{A_1FB}$

Por otro lado

$$\widehat{A_1FB} + \widehat{BFA_c} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{A_1FB} = 60^\circ$  por ser uno de los seis ángulos formados por las fermatianas, por lo que

$$\widehat{BFA_c} = 30^\circ$$

Análogamente

$$\widehat{A_cFC_1} + \widehat{C_1FA} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{C_1FA} = 60^\circ$  por lo que

$$\widehat{A_cFC_1} = 30^\circ$$

de este modo

$$\widehat{BFA_c} = \widehat{A_cFC_1}$$

y entonces  $A_cF$  es bisectriz de  $\widehat{BFC_1}$

Por último veamos que

$$\widehat{BFC_1} + \widehat{C_1FB_c} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{BFC_1} = 60^\circ$  por ser ángulo formado entre fermatianas, por lo que

$$\widehat{C_1FB_c} = 30^\circ$$

De la misma forma

$$\widehat{C_1FA} + \widehat{AFC_b} = 90^\circ$$

pero  $\widehat{C_1FA} = 60^\circ$ , por lo que

$$\widehat{AFC_b} = 30^\circ$$

pero

$$\widehat{C_1FB_c} + \widehat{B_cFA} + \widehat{AFC_b} = 90^\circ$$

sustituyendo tenemos

$$30^\circ + \widehat{B_cFA} + 30^\circ = 90^\circ$$

de aquí

$$\widehat{B_cFA} = 30^\circ$$

luego

$$\widehat{C_1FB_c} = \widehat{B_cFA}$$

y entonces  $B_cF$  es bisectriz de  $\widehat{C_1FA}$



**3.**  $(A, B_c, C_1, A_c, B$  y  $C'_1)$  ;  $(B'_1, C, A_b, B_1, C_b$  y  $A)$ ;  $(B, C_a, A_1, B_a, C$  y  $A'_1)$ ; son los vértices de los hexágonos regulares inscritos en las circunferencias  $\mathcal{C}_{ABC_1}$ ,  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $\mathcal{C}_{BCA_1}$ , respectivamente.

Tomemos en cuenta el hecho que la medida de un ángulo central es el doble de la medida del mismo ángulo con vértice en la circunferencia. y entonces

$$\widehat{C_aFB} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{C_aO_aB} = 60^\circ$$

$$\widehat{BFA'_1} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{BO_aA'_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{A'_1FC} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{A'_1O_aC} = 60^\circ$$

como  $\widehat{CO_aB_a}$ ,  $\widehat{B_aO_aA_1}$  y  $\widehat{A_1O_aC_a}$  son ángulos opuestos por el vértice de  $\widehat{C_aO_aB}$ ,  $\widehat{BO_aA'_1}$  y  $\widehat{A'_1O_aC}$  respectivamente, son todos iguales a  $60^\circ$ . Fijándonos en el hexágono inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{A_1BC}$ , este se encuentra formado con seis triángulos, que al tener por lados radios de la circunferencia y un ángulo igual, por criterio *L.A.L.* estos son congruentes, en particular

$$C_aB = BA'_1 = A'_1C = CB_a = B_aA_1 = A_1C_a$$

entonces el Hexágono  $C_aBA'_1CB_aA_1$  es regular.

Análogamente,

$$\widehat{BFA_c} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{BO_cA_c} = 60^\circ$$

$$\widehat{A_cFC_1} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{A_cO_cC_1} = 60^\circ$$

$$\widehat{C_1FB_c} = 30^\circ \longrightarrow \widehat{C_1O_cB_c} = 60^\circ$$

como  $\widehat{B_cO_cA}$ ,  $\widehat{AO_cC'_1}$  y  $\widehat{C'_1O_cB}$  son ángulos opuestos por el vértice de  $\widehat{BO_cA_c}$ ,  $\widehat{A_cO_cC_1}$  y  $\widehat{C_1O_cB_c}$  respectivamente, son todos iguales a  $60^\circ$ . Fijándonos en el hexágono inscrito en la circunferencia  $\mathcal{C}_{ABC_1}$ , este se encuentra formado con seis triángulos, que al tener por lados radios de la circunferencia y un ángulo igual, por criterio *L.A.L.* estos son congruentes, en particular

$$BA_c = A_cC_1 = C_1B_c = B_cA = AC'_1 = C'_1B$$

entonces el Hexágono  $BA_cC_1B_cAC'_1$  es regular.

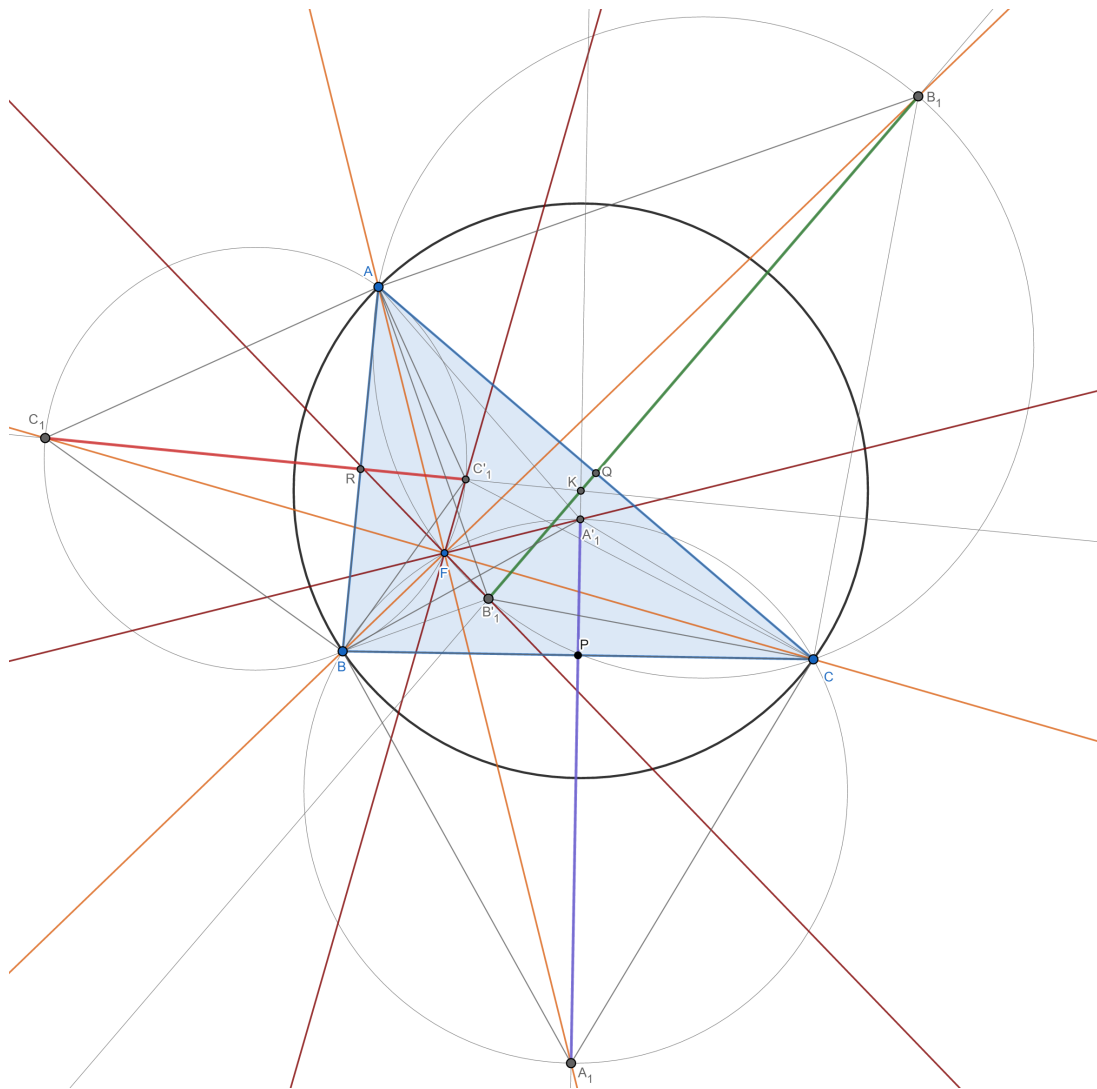
Por último, podemos ver de forma análoga que

$$B_1A_b = A_bC = CB'_1 = B'_1A = AC_b = C_bB_1$$

lo que implica que el Hexágono  $B_1A_bCB'_1AC_b$  es regular y esto termina la demostración

## Teorema sobre alturas y circuncentro

**Teorema 3.3.** Sean  $ABC$  un triángulo cualquiera,  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  y  $CAB_1$  equiláteros, los diámetros  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$  y  $C_1C'_1$  de los circuncírculos de los triángulos equiláteros, concurren en el circuncentro de  $ABC$  y las alturas desde  $A'_1$ ,  $B'_1$  y  $C'_1$  de los triángulos  $AA_1A'_1$ ,  $BB_1B'_1$  y  $CC_1C'_1$  concurren en  $F$ , el punto de Fermat de  $ABC$ , además bisecan los ángulos de  $60^\circ$ .



## Demostración

Llamemos  $P$ , a la intersección de  $BC$  con  $A_1A'_1$ , veamos que el cuadrilátero  $BA_1CA'_1$  que por tener sus vértices en una circunferencia es cíclico, tomemos en cuenta también que  $\widehat{A'_1CA_1} = \widehat{A'_1BA_1} = 90^\circ$ , esto por ser ángulos subtendidos por un diámetro, entonces

$$\widehat{A_1CP} + \widehat{PCA'_1} = 90^\circ = \widehat{A_1BP} + \widehat{PBA'_1}$$

pero  $\widehat{A_1CP} = 60^\circ = \widehat{A_1BP}$  por lo que

$$\widehat{PCA'_1} = 90^\circ = \widehat{PBA'_1}$$

esto hace al triángulo  $\triangle BCA'_1$  isósceles y de aquí

$$BA'_1 = CA'_1$$

entonces  $A'_1$  es equidistante a  $B$  y  $C$  por lo que  $A'_1$  se encuentra en la mediatriz de  $BC$ , de igual forma,  $A_1$  equidista de  $B$  y  $C$  por ser  $\triangle BA_1C$  equilátero, de esta forma la recta que definen  $A'_1A_1$  es mediatriz de  $BC$ .

Análogamente si llamamos  $Q$ , a la intersección de  $AC$  con  $B_1B'_1$ , fijándonos en el cuadrilátero  $AB'_1CB_1$  podemos mostrar que  $B'_1$  es equidistante a  $A$  y  $C$  al igual que  $B_1$  y de esta forma la recta que definen  $B'_1B_1$  es mediatriz de  $AC$ .

Y por último si llamamos  $R$ , a la intersección de  $AB$  con  $C_1C'_1$ , análogo al caso anterior, fijándonos en el cuadrilátero  $AC_1BC'_1$  podemos mostrar que  $C'_1$  es equidistante a  $A$  y  $B$  al igual que  $C_1$  y de esta forma la recta que definen  $C'_1C_1$  es mediatriz de  $AB$ .

Entonces, al tener  $A_1A'_1$ ,  $B_1B'_1$ ,  $C_1C'_1$  mediatrices de los lados,  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$  respectivamente, estas concurren en  $K$ , circuncentro del triángulo  $\triangle ABC$ .

Prosiguiendo con la demostración, tomamos en cuenta a la fermatiana  $AA_1$  y apoyándonos del hecho que  $A'_1A_1$ , es por construcción diámetro de la circunferencia  $\mathcal{C}_{BA_1C}$  y  $F$ , también es punto de esta circunferencia, podemos construir al triángulo inscrito  $\triangle A_1FA'_1$  y tenemos que

$$\widehat{A_1FA'_1} = 90^\circ$$

por ser subtender al diámetro  $A_1A'_1$ , pero por otro lado, al ser  $A$ ,  $F$  y  $A_1$  colineales, tenemos

$$\widehat{A_1FA'_1} + \widehat{AFA'_1} = 180^\circ$$

por lo que

$$\widehat{AFA'_1} = 90^\circ$$

Como  $\widehat{A_1FC} + \widehat{CFA'_1} = 90^\circ$  y  $\widehat{A_1FC} = 60^\circ$  entonces

$$\widehat{CFA'_1} = 30^\circ$$

de la misma forma que  $\widehat{AFB_1} + \widehat{B_1FA'_1} = 90^\circ$  y  $\widehat{AFB_1} = 60^\circ$  entonces

$$\widehat{B_1FA'_1} = 30^\circ$$

de este modo  $FA'_1$  biseca al ángulo  $\widehat{B_1FC}$  y también al ángulo  $\widehat{BFC_1}$  ya que  $\widehat{B_1FC}$  y  $\widehat{BFC_1}$  son opuestos por el vértice y comparten esta bisectriz.

Posteriormente observamos a la fermatiana  $BB_1$  y apoyándonos del hecho que  $B'_1B_1$ , es por construcción diámetro de la circunferencia  $\mathcal{C}_{ACB_1}$  y  $F$ , también es punto de ésta, podemos construir al triángulo inscrito  $\triangle B_1FB'_1$  y tenemos que  $\widehat{B_1FB'_1} = 90^\circ$  por ser subtender al diámetro  $B_1B'_1$ , pero por otro lado, al ser  $B$ ,  $F$  y  $B_1$  colineales, tenemos

$$\widehat{B_1FB'_1} + \widehat{BFB'_1} = 180^\circ$$

por lo que

$$\widehat{BFB'_1} = 90^\circ$$

Como  $\widehat{B_1FC} + \widehat{CFB'_1} = 90^\circ$  y  $\widehat{B_1FC} = 60^\circ$  entonces

$$\widehat{CFB'_1} = 30^\circ$$

de la misma forma que  $\widehat{BFA_1} + \widehat{A_1FB'_1} = 90^\circ$  y  $\widehat{BFA_1} = 60^\circ$  entonces

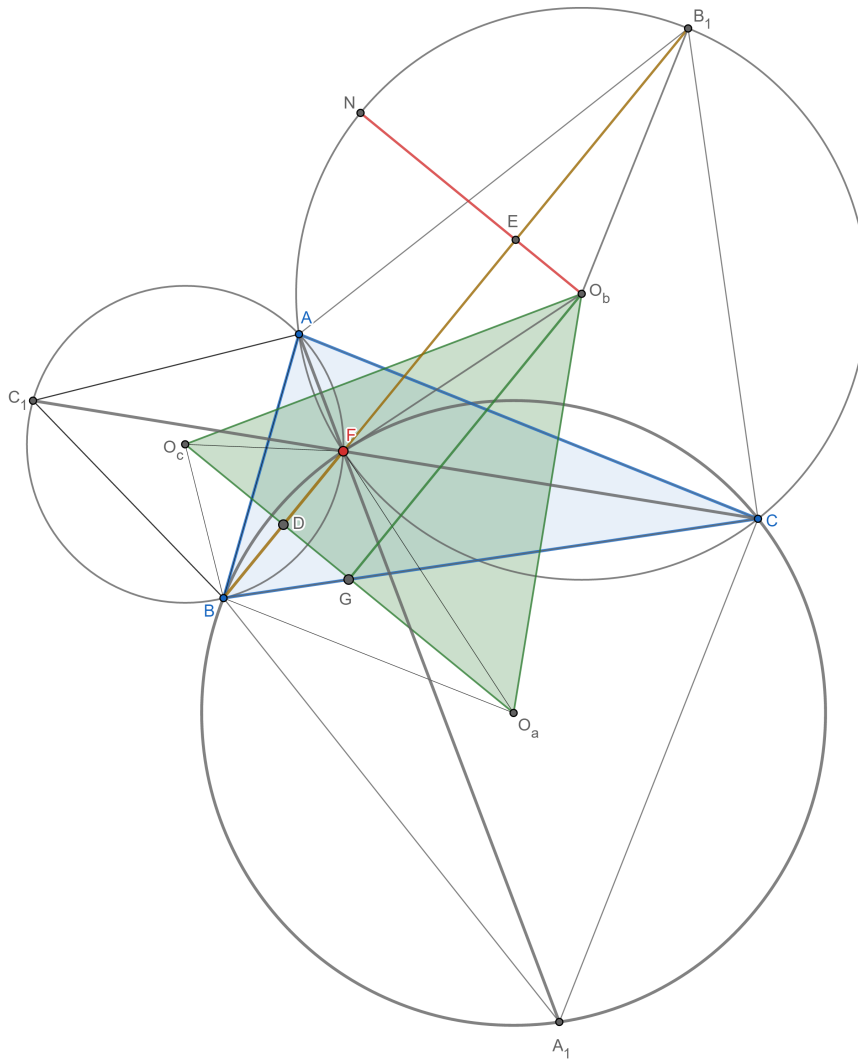
$$\widehat{A_1FB'_1} = 30^\circ$$

de este modo  $FB'_1$  biseca al ángulo  $\widehat{A_1FC}$  y también al ángulo  $\widehat{AFC_1}$  ya que  $\widehat{A_1FC}$  y  $\widehat{AFC_1}$  son opuestos por el vértice y comparten bisectriz.

De forma análoga podemos mostrar que  $FC'_1$  biseca al ángulo  $\widehat{AFB_1}$  y también al ángulo  $\widehat{BFA_1}$  ya que  $\widehat{AFB_1}$  y  $\widehat{A_1FB}$  son opuestos por el vértice y comparten bisectriz.

Y de esta manera hemos mostrado que estas alturas bisecan a los seis ángulos formados por las fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  y esto completa la demostración.

**Teorema 3.4** Las fermatianas de todo triángulo miden  $\sqrt{3}l$ , con  $l$ , lado de su triángulo de Napoleón.



**Demostración:**

Fijémonos en los triángulos  $BO_aO_c$  y  $O_cO_aF$ , como  $O_cO_a$  es lado compartido y  $O_cB = O_cF$  por ser radios de  $\mathcal{C}_{ABC_1}$  y análogamente,  $BO_a = FO_a$  por ser radios de  $\mathcal{C}_{BCA_1}$ , por criterio *L.L.L.*, tenemos que

$$\triangle BO_aO_c \cong \triangle O_cO_aF$$

que implica que

$$\widehat{BO_cO_a} = \widehat{FO_cO_a} \quad \text{y} \quad \widehat{BO_aO_c} = \widehat{FO_aO_c}$$

Si llamamos  $D$  a la intersección de  $BF$  con  $O_cO_a$ , tenemos que  $\widehat{BO_cD} = \widehat{BO_cO_a}$ , por ser  $O_c$ ,  $D$  y  $O_a$  colineales, de la misma forma mostramos que  $\widehat{FO_cD} = \widehat{FO_cO_a}$  y de aquí tenemos

$$BO_cD = FO_cD \quad \text{y} \quad BO_aD = FO_aD.$$

Si nos fijamos en los triángulos  $BDO_c$  y  $FDO_c$ , tenemos que  $O_cD$  es lado compartido, ya teníamos que  $O_cB = O_cF$  además  $\widehat{BO_cD} = \widehat{FO_cD}$  y por lo tanto

$$\triangle BDO_c \cong \triangle FDO_c$$

que implica que  $\widehat{BDO_c} = \widehat{FDO_c}$  pero estos ángulos se encuentran sobre  $BF$ , por lo que

$$\widehat{BDO_c} = 90^\circ = \widehat{FDO_c}$$

y además

$$BD = FD$$

Veámos ahora los triángulos  $BDO_a$  y  $FDO_a$ , tenemos que  $DO_a$  es lado compartido, ya teníamos que  $BO_a = FO_a$  y que  $\widehat{BO_aD} = \widehat{FO_aD}$  y por lo tanto

$$\triangle BO_aD \cong \triangle FO_aD$$

que implica que  $\widehat{BDO_a} = \widehat{FDO_a}$  pero estos ángulos se encuentran sobre  $BF$ , por lo que

$$\widehat{BDO_a} = 90^\circ = \widehat{FDO_a}$$

De esta manera tenemos cuatro ángulos iguales de  $90^\circ$  con  $D$  en común y como  $D$  es punto medio de  $BF$ ,

$O_cO_a$  es mediatriz de  $BF$ .

Tracemos el radio  $O_bN$  de  $\mathcal{C}_{AB_1C}$  perpendicular a  $FB_1$  con intersección en  $E$  y fijémonos en el triángulo  $FO_bB_1$  que es isósceles, por tener por lados los radios  $FO_b$  y  $O_bB_1$  y de aquí tenemos que

$$\widehat{O_bFE} = \widehat{O_bB_1E}$$

Además como  $\widehat{FEO_b} = \widehat{B_1EO_b}$  por ser  $NO_b$  perpendicular, tenemos:

$$\widehat{O_bFE} + \widehat{FEO_b} + \widehat{EO_bF} = 180^\circ$$

y

$$\widehat{O_bB_1E} + \widehat{B_1EO_b} + \widehat{EO_bB_1} = 180^\circ$$

por lo que

$$\widehat{EO_bF} = \widehat{EO_bB_1}$$

Usando que  $FO_b = O_bB_1$  por ser radios tenemos que

$$\triangle FEO_b \cong \triangle B_1EO_b$$

De aquí tenemos que  $FE = EB_1$  y de esta manera

$O_bN$  es mediatriz de  $FB_1$ .

Veamos ahora la altura a  $O_b$  del triángulo  $\triangle O_a O_b O_c$  y con  $G$  pie de la misma. Y sabemos que  $DE$  es paralela a  $GO_b$  por ser ambas perpendiculares a  $O_c O_a$ , además  $NO_b$  es perpendicular a  $FB_1$  con con intersección en  $E$ , de aquí formamos cuatro ángulos internos iguales de  $90^\circ$ , formando al rectángulo  $DGO_b E$  por lo que

$$DE = GO_b$$

Si llamamos  $h$  a la longitud de  $GO_b$ , tenemos que

$$DE = h$$

Tomando en cuenta que  $DE = DF + FE$ ,  $BD = DF$  y  $EB_1 = FE$  tenemos

$$BB_1 = BD + DF + FE + EB_1$$

ordenando

$$BB_1 = DF + FE + BD + EB_1$$

sustituyendo  $BD$  y  $EB_1$  tenemos

$$BB_1 = DF + FE + DF + FE$$

luego

$$BB_1 = DE + DE = 2DE$$

como  $DE = h$  obtenemos

$$BB_1 = 2h$$

Continuando, llamemos  $\ell$  a la longitud de los lados del triángulo de Napoleón, como  $\triangle O_a O_b O_c$  es equilátero, la altura  $GO_b$  es también mediatriz de  $O_c O_a$  por lo que  $G$  es punto medio de  $O_c O_a$  y  $GO_a = \frac{1}{2}\ell$ .

Fijámonos ahora, en el triángulo  $\triangle GO_a O_b$  y tomando en cuenta que  $h$  es la longitud de  $GO_b$ , por teorema de Pitágoras tenemos

$$h = \sqrt{\ell^2 - \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\ell^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ell$$

Por lo que

$$BB_1 = 2h = \sqrt{3}\ell$$

Pero ya hemos mostrado la igualdad de fermatianas anteriormente, esto es

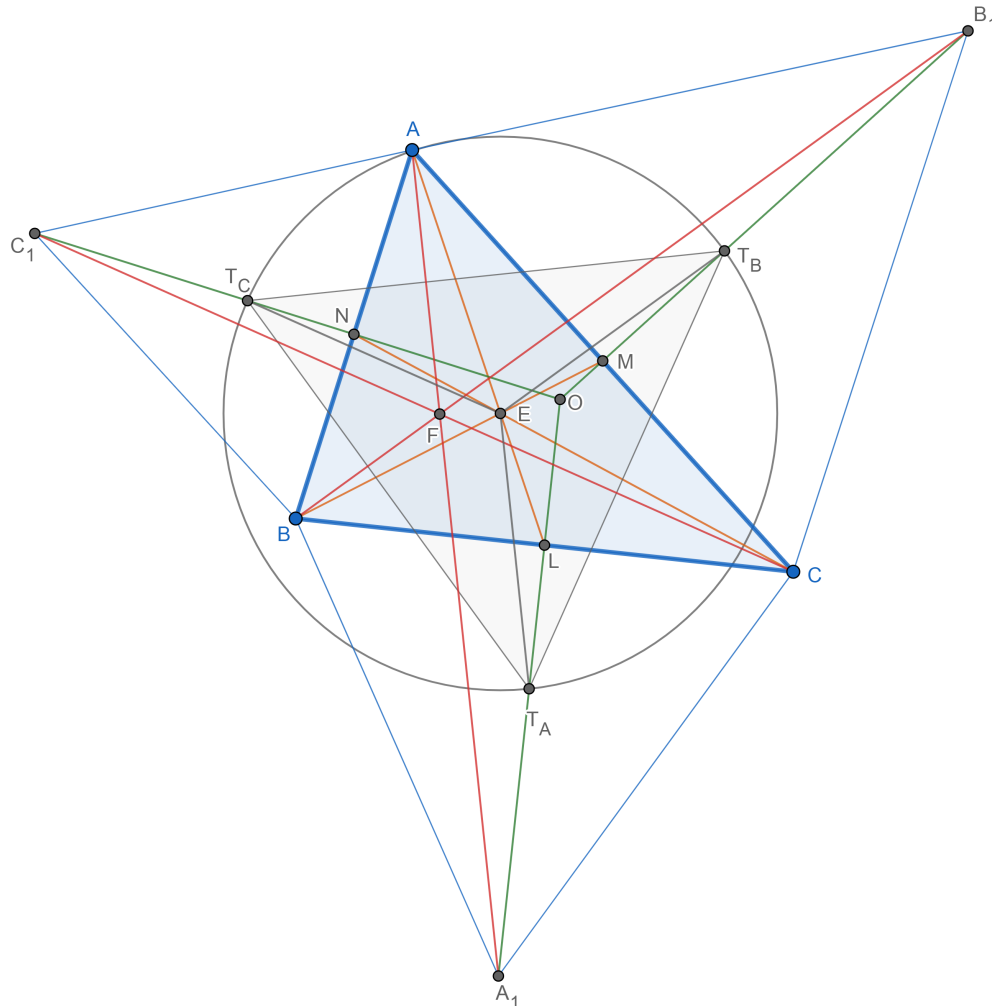
$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \sqrt{3}\ell$$

y esto completa la demostración.

## Teorema 3.5 El baricentro de todo triángulo, es centro de sus dos triángulos de Napoleón.

### 3.5.1 Triángulos externos

#### Demostración



Sean  $ABC$ , un triángulo cualquiera;  $ABC_1$ ,  $ACB_1$  y  $BCA_1$ , equiláteros;  $N, M$  y  $L$  puntos medios de  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ , respectivamente;  $T_A T_B T_C$  triángulo de Napoleón de  $ABC$ ;  $O$  circuncentro de  $ABC$ ,  $F$  su punto de Fermat y  $E$  su centro de gravedad.

Usando el hecho que, en un triángulo equilátero el circuncentro también es baricentro y ortocentro,  $T_A$  es en particular baricentro del triángulo  $BCA_1$  por lo que  $A_1 T_A$  y  $T_A L$  están en proporción  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$  de  $A_1 L$  respectivamente, misma proporción a la que están los segmentos  $AE$  y  $EL$  de  $AL$ , por ser  $E$  baricentro del triángulo  $ABC$



Entonces, por construcción, fijándonos en los triángulos  $AA_1L$  y  $ET_AL$ , tenemos dos lados correspondientes de medidas proporcionales y el ángulo  $ALA_1$  es ángulo en común y por criterio  $L.A.L$

$$\triangle AA_1L \approx \triangle ET_AL$$

y en particular

$$ET_A = \frac{1}{3}AA_1$$

Por otro lado,  $T_B$  es en particular baricentro del triángulo  $ACB_1$  por lo que  $B_1T_B$  y  $T_BM$  están en proporción  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$  de  $B_1M$  respectivamente, misma proporción a la que están los segmentos  $BE$  y  $EM$  por ser  $E$  baricentro del triángulo  $ABC$  y entonces, por construcción, fijándonos en los triángulos  $BB_1M$  y  $ET_BM$  tenemos dos lados correspondientes de medidas proporcionales y el ángulo  $BMB_1$  es ángulo en común y por criterio  $L.A.L$

$$\triangle BB_1M \approx \triangle ET_BM$$

y en particular tenemos

$$ET_B = \frac{1}{3}BB_1$$

Análogamente podemos mostrar, por criterio  $L.A.L$

$$\triangle CC_1N \approx \triangle ET_CN$$

en particular

$$ET_C = \frac{1}{3}CC_1$$

Entonces, reuniendo nuestros resultados tenemos que

$$ET_A = \frac{1}{3}AA_1, \quad ET_B = \frac{1}{3}BB_1 \quad \text{y} \quad ET_C = \frac{1}{3}CC_1$$

Pero  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  son fermatianas, por lo que

$$AA_1 = BB_1 = CC_1$$

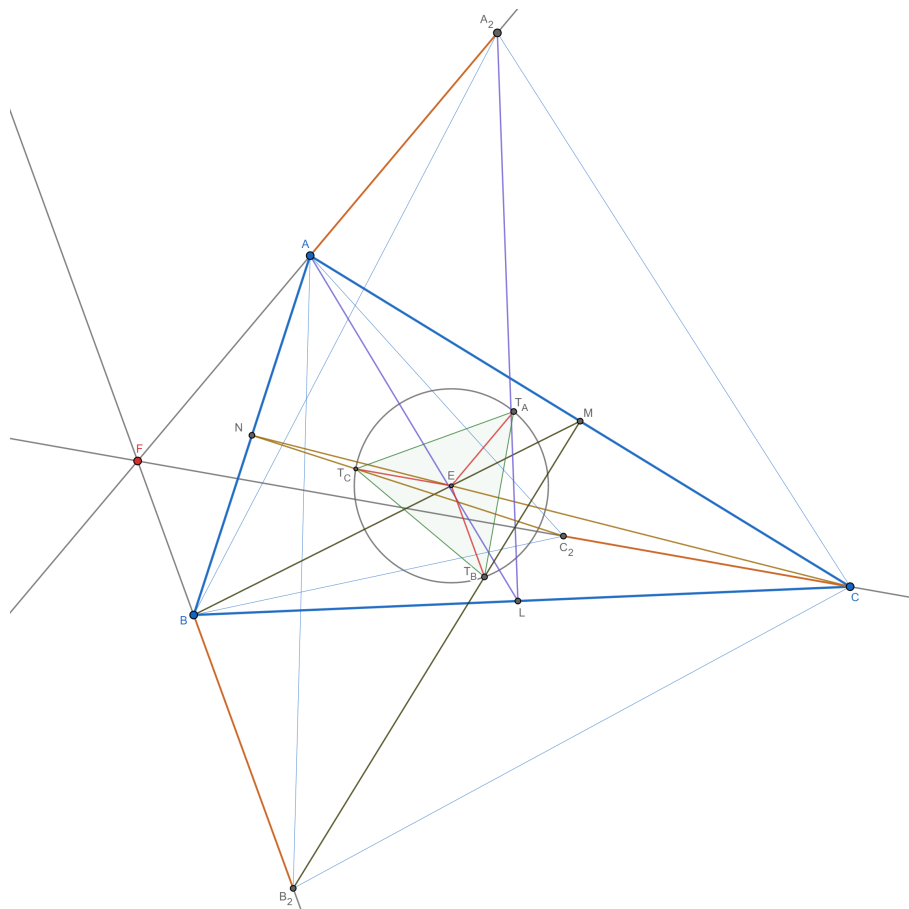
y de aquí

$$ET_A = ET_B = ET_C$$

de esta manera mostramos que  $E$  es equidistante de  $T_A$ ,  $T_B$  y  $T_C$ , es decir, es centro del Triángulo de Napoleón.

## 3.5.2 Triángulos Internos

### Demostración



Sean  $ABC$ , un triángulo cualquiera;  $ABC_2$ ,  $ACB_2$  y  $BCA_2$ , equiláteros hacia adentro;  $L, M$  y  $N$  puntos medios de  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$ , respectivamente;  $T_A T_B T_C$  triángulo de Napoleón interno y  $E$  baricentro del triángulo  $ABC$  y  $F$  su punto de Fermat.

Similar al caso anterior, usaremos el hecho de que, en un triángulo equilátero el circuncentro también es baricentro y ortocentro,  $T_A$  es en particular Baricentro del triángulo  $BCA_2$  por lo que  $A_2 T_A$  y  $T_A L$  están en proporción  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$  de  $A_2 L$  respectivamente, misma proporción a la que están los segmentos  $AE$  y  $EL$  por ser  $E$  baricentro del triángulo  $ABC$  y entonces, por construcción, fijándonos en los triángulos  $AA_2 L$  y  $ET_A L$  tenemos dos lados correspondientes de medidas proporcionales y el ángulo  $ALA_2$  es ángulo en común y por criterio  $L.A.L$

$$\triangle AA_2 L \approx \triangle ET_A L$$

en particular tenemos que

$$ET_A = \frac{1}{3} AA_2$$

Por otro lado,  $T_B$  es en particular baricentro del triángulo  $ACB_2$  por lo que  $B_2T_B$  y  $T_B M$  están en proporción  $\frac{2}{3}$  y  $\frac{1}{3}$  de  $B_2M$  respectivamente, misma proporción a la que están los segmentos  $BE$  y  $EM$  por ser  $E$  baricentro del triángulo  $ABC$  y entonces, por construcción, fijándonos en los triángulos  $BB_2M$  y  $ET_B M$  tenemos dos lados correspondientes de medidas proporcionales y el ángulo  $BMB_2$  es ángulo en común y por criterio  $L.A.L$

$$\triangle BB_2M \approx \triangle ET_B M$$

y en particular

$$ET_B = \frac{1}{3}BB_2$$

Análogamente podemos mostrar, por criterio  $L.A.L$

$$\triangle CC_2N \approx \triangle ET_C N$$

y en particular

$$ET_C = \frac{1}{3}CC_2$$

Entonces, reuniendo nuestros resultados tenemos que

$$ET_A = \frac{1}{3}AA_2, \quad ET_B = \frac{1}{3}BB_2 \quad y \quad ET_C = \frac{1}{3}CC_2$$

Pero  $AA_2$ ,  $BB_2$  y  $CC_2$  son fermatianas, por lo que

$$AA_2 = BB_2 = CC_2$$

y de aquí

$$ET_A = ET_B = ET_C$$

de esta manera mostramos que  $E$  es equidistante de  $T_A$ ,  $T_B$  y  $T_C$ , es decir, es centro del Triángulo de Napoleón interno.

## 4. Desarrollo de Resultados de la enciclopedia de Geometría Euclidiana de Deko Dekov

En este capítulo se demuestran algunos de los teoremas de la enciclopedia de Deko Dekov: *Computer Discovered Encyclopedia of Euclidean Geometry*, los teoremas que se seleccionaron son todos, referentes al Primer Punto de Fermat; esta enciclopedia de matemáticas es la primera en el mundo de su tipo, como su nombre lo dice: generada por computadora.

Es importante mencionar que los teoremas generados no contienen errores, no hay detalles faltantes por lo que el conocimiento generado es "Completo".

Esta enciclopedia tiene como objetivo que los universitarios se familiaricen con la habilidad de la computadora de producir nuevo conocimiento y posteriormente usar la enciclopedia misma.

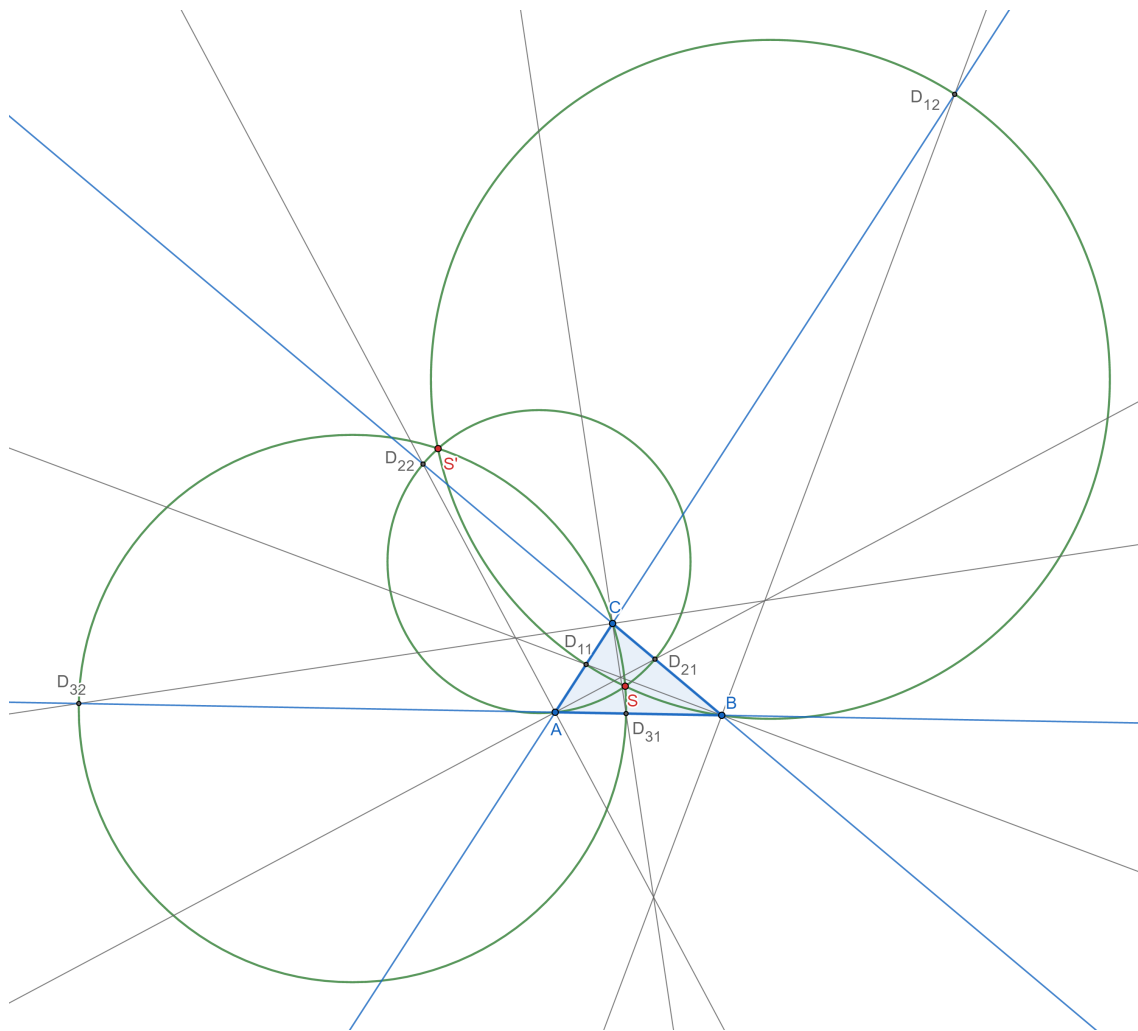
En su primera parte, de Geometría Euclideana, contiene más de tres mil teoremas, lo que la hace el recurso más completo en Geometría Euclidiana.

Como mencionamos anteriormente los teoremas son generados por computadora, por lo que algunos, ya son teoremas conocidos y otros en cambio, son nuevos, recién descubiertos por la computadora; por lo que no hay material o referencias previas, y es lo que hace a las demostraciones de este trabajo, auténticas.

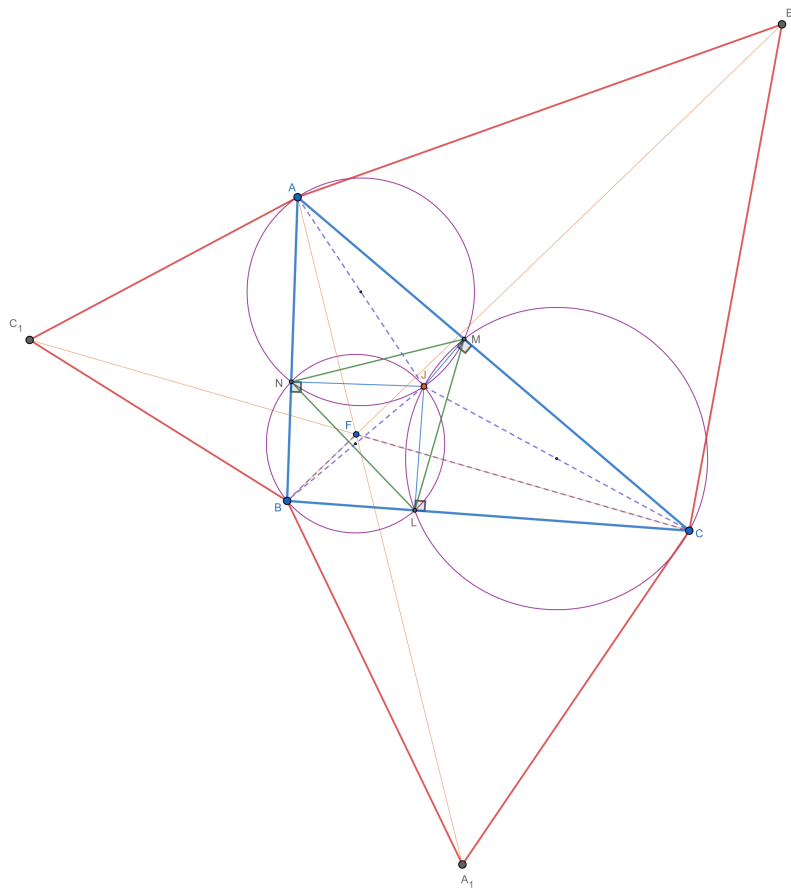
Es por esto último que los editores de este gran aporte (Sava Grozdev, Hiroshi Okumura y Deko Dekov), invitan a enviar a su sitio web las demostraciones de los teoremas recién generados por el ordenador, ya que como mencionamos, algunas demostraciones aún no existen.

*Definición:* Los puntos  $S$  y  $S'$  en los cuales las tres circunferencias de Apolonio se intersectan, son el primer y segundo punto isodinámico respectivamente.

Estos puntos se pueden construir trazando las bisectrices de los ángulos internos y externos del triángulo. Cada par de bisectrices intersectan a un lado del triángulo o su extensión en dos puntos  $D_{i1}$  y  $D_{i2}$ , con  $i = 1, 2, 3$ . Las tres circunferencias que tienen a  $D_{11}D_{12}$ ,  $D_{21}D_{22}$  y  $D_{31}D_{32}$  como diámetros, son las circunferencias de Apolonio  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ , además, como anteriormente mencionamos, los puntos  $S$  y  $S'$  son el primer y segundo punto isodinámico, respectivamente.



**Teorema 4.1: El primer punto isodinámico y el primer punto de Fermat son conjugados isogonales.**



## Demostración

Sea  $J$  el primer punto isodinámico de  $\triangle ABC$ ;  $\triangle LMN$  el triángulo pedal de  $J$  y los cuadriláteros cíclicos  $JMAN$ ,  $JNBL$  y  $JLCM$ .

Sabemos que  $F_1$ , primer punto de Fermat, es el único punto que satisface que

$$\widehat{AF_1B} = \widehat{BF_1C} = \widehat{CF_1A} = 120^\circ$$

Así que será suficiente probar que el isogonal conjugado de  $J$ , llamémosle  $F$ , cumple con estas medidas angulares.

Tenemos que

$$\widehat{NJM} + \widehat{NJB} + \widehat{BJL} + \widehat{LJC} + \widehat{CJM} = 360^\circ$$

además,  $\widehat{NJM} = 180^\circ - \widehat{A}$  por ser ángulos opuestos del cuadrilátero cíclico;  $\widehat{NJB} = \widehat{BLN}$  por ser subtendidos por la misma cuerda;  $\widehat{BLN} = 90^\circ - \widehat{JLN}$ , además  $\widehat{BJL} + \widehat{LJC} = \widehat{BJC}$ , también  $\widehat{CJM} = \widehat{MLC}$  por ser subtendidos por la misma cuerda y a su vez  $\widehat{MLC} = 90^\circ - \widehat{MLJ}$ .

Entonces en la igualdad

$$\widehat{NJM} + \widehat{NJB} + \widehat{BJL} + \widehat{LJC} + \widehat{CJM} = 360^\circ$$

sustituyendo tenemos

$$180^\circ - \widehat{A} + 90^\circ - \widehat{JLN} + \widehat{BJC} + 90^\circ - \widehat{MLJ} = 360^\circ$$

luego

$$\widehat{BJC} = 360^\circ - 180^\circ + \widehat{A} - 90^\circ + \widehat{JLN} - 90^\circ + \widehat{MLJ}$$

y de aquí

$$\widehat{BJC} = \widehat{JLN} + \widehat{A} + \widehat{MLJ}$$

pero  $\widehat{JLN} + \widehat{MLJ} = 60^\circ$  ya que  $\triangle LMN$  es equilátero, por lo que

$$\widehat{BJC} = 60^\circ + \widehat{A}$$

Además como  $F$  y  $J$  son isogonales conjugados, por el lema 2.5.6 tenemos que  $\widehat{BFC} + \widehat{BJC} = 180^\circ + \widehat{A}$  y entonces  $\widehat{BFC} = 180^\circ + \widehat{A} - \widehat{BJC}$ , sustituyendo tenemos

$$\widehat{BFC} = 180^\circ + \widehat{A} - (60^\circ + \widehat{A})$$

entonces

$$\widehat{BFC} = 120^\circ$$

Análogamente podemos mostrar que

$$\widehat{AFB} = 120^\circ \quad y \quad \widehat{CFA} = 120^\circ$$

Entonces  $F$  cumple que

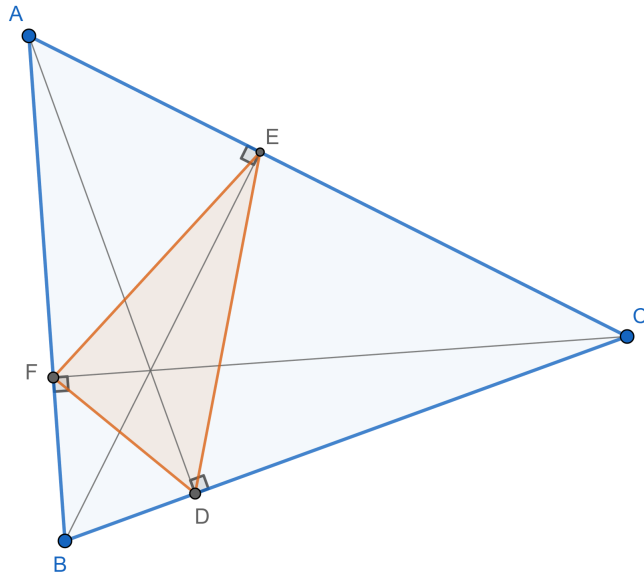
$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$$

Y el punto que tiene estas medidas angulares es el punto de Fermat, por lo que

$$F = F_1$$

y entonces  $F_1$  es el isogonal conjugado de  $J$ , el primer punto isodinámico del triángulo  $\triangle ABC$  y esto concluye la demostración.

*Definición:* El triángulo cuyos vértices son los pies de las alturas de un triángulo es llamado el triángulo pedal del triángulo dado. En la siguiente figura,  $DEF$  es el triángulo pedal de  $ABC$ .



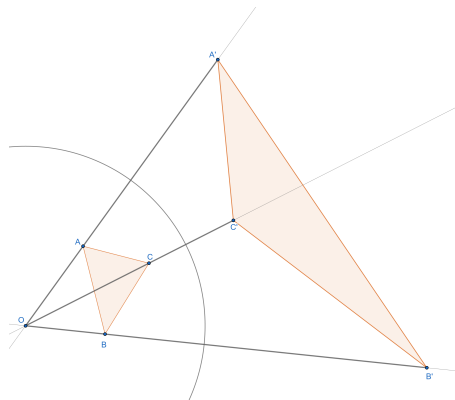
**Teorema 4.2: El primer punto de Fermat es igual al primer punto isodinámico del triángulo pedal del primer punto de Fermat.**

Primero mostraremos el resultado de un teorema que nos servirá de apoyo para realizar la demostración.

*Definición:* Si  $P$  y  $P'$  son dos puntos colineales con el centro  $O$  de una circunferencia, cuyo radio es  $r > 0$  de tal forma que  $OP \cdot OP' = r^2$ , cada uno de los puntos  $P$  y  $P'$  es inverso del otro con respecto a la circunferencia. El punto  $O$  es el centro de inversión, la circunferencia  $O$  es la circunferencia de inversión y su radio es el radio de inversión.

**Teorema 4.2.1. Si  $A', B', C'$  son los inversos de los puntos  $A, B, C$  y  $O$  es el centro de inversión entonces**

$$\angle ABC + \angle A'B'C' = \angle AOC$$





## Demostración

Cabe mencionar que en esta demostración ocuparemos ángulos dirigidos, veamos entonces que

$$\angle ABO = \angle OA'B' = \angle A'OB' + \angle OB'A'$$

además

$$\angle OBC = \angle B'C'O = \angle C'B'O + \angle B'OC'$$

teniendo en cuenta que

$$\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$$

sustituyendo tenemos

$$\angle ABC = (\angle A'OB' + \angle OB'A') + (\angle C'B'O + \angle B'OC')$$

luego

$$\angle ABC = (\angle A'OB' + \angle B'OC') + (\angle C'B'O + \angle OB'A')$$

se sigue que

$$\angle ABC = \angle A'OC' + \angle C'B'A'$$

por lo tanto

$$\angle ABC = \angle A'OC' - \angle A'B'C'$$

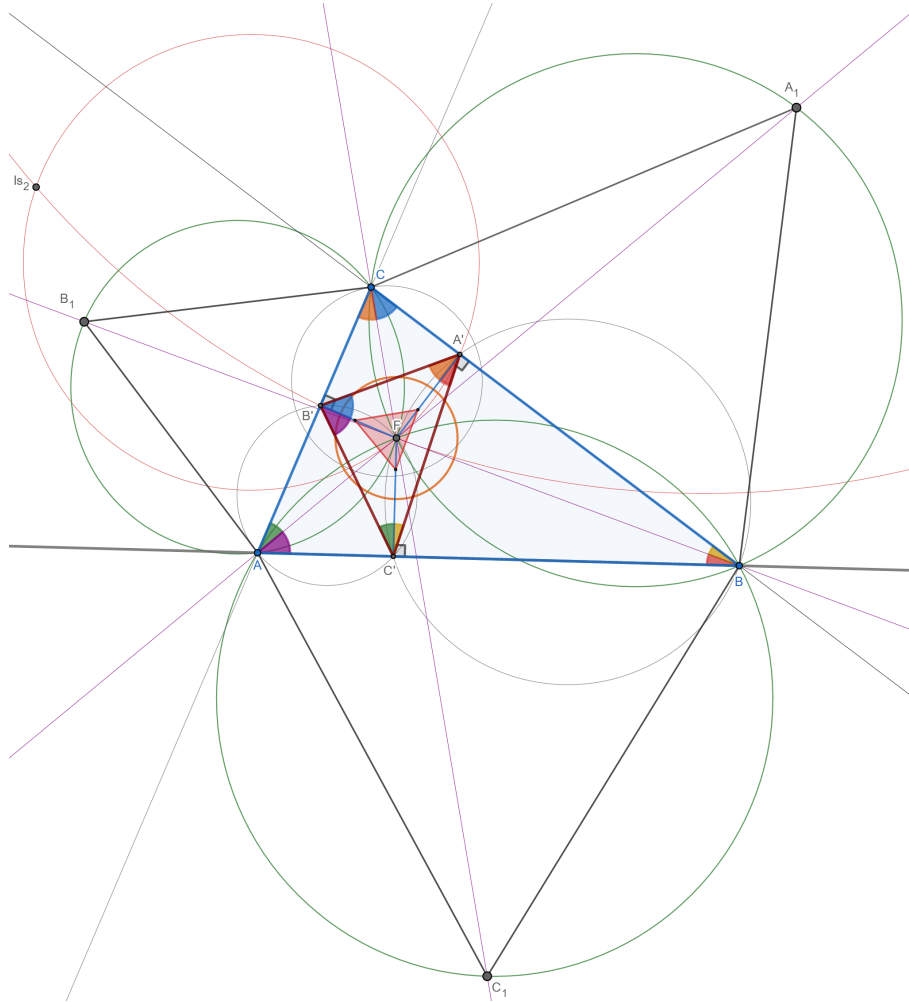
y finalmente

$$\angle ABC + \angle A'B'C' = \angle A'OC'$$

que es lo que se quería mostrar.

Este último resultado lo ocuparemos posteriormente con  $A'B'C'$  equilátero.

Una vez mostrado lo anterior, prosigamos a mostrar que el primer punto de Fermat es el primer punto isodinámico del triángulo pedal del primer punto de Fermat.



Sea  $F$ , primer punto isodinámico de  $\triangle ABC$ , analizaremos las medidas angulares de  $F$ , respecto al triángulo, para ver que se trata del punto de Fermat de este último.

Como el triángulo  $\triangle A'B'C'$  es pedal, tenemos que

$$\widehat{C'A'F} = \widehat{ABF}$$

$$\widehat{FB'C'} = \widehat{FAB}$$

Utilizando el resultado del teorema 4.2.1 tenemos que  $\widehat{C'FA'} = \widehat{C'B'A'} + 60^\circ$ , ya que  $F$  es punto isodinámico y sus inversos transforman a  $\triangle ABC$  en un triángulo equilátero, por ello la medida angular de  $60^\circ$ .

A su vez  $\widehat{C'FA'} + \widehat{A'C'F} + \widehat{FA'C'} = 180^\circ$  y sustituyendo tenemos

$$\widehat{C'B'A'} + 60^\circ + \widehat{A'C'F} + \widehat{FA'C'} = 180^\circ$$

y luego

$$\widehat{FA'C'} = 180^\circ - \widehat{C'B'A'} - 60^\circ - \widehat{A'C'F}$$

Por otro lado  $\widehat{B'FC'} = \widehat{B'A'C'} + 60^\circ$ , a su vez  $\widehat{B'FC'} + \widehat{FB'C'} + \widehat{B'C'F} = 180^\circ$  y sustituyendo tenemos

$$\widehat{B'A'C'} + 60^\circ + \widehat{FB'C'} + \widehat{B'C'F} = 180^\circ$$

y luego

$$\widehat{FB'C'} = 180^\circ - \widehat{B'A'C'} - 60^\circ - \widehat{B'C'F}$$

Fijándonos en el triángulo  $\triangle AFB$  tenemos que  $\widehat{FAB} + \widehat{ABF} + \widehat{AFB} = 180^\circ$ , pero por las igualdades del triángulo pedal mencionadas al principio de esta demostración tenemos:

$$\widehat{FA'C'} + \widehat{FB'C'} + \widehat{AFB} = 180^\circ$$

Sustituyendo resultados anteriores tenemos

$$180^\circ - \widehat{C'B'A'} - 60^\circ - \widehat{A'C'F} + 180^\circ - \widehat{B'A'C'} - 60^\circ - \widehat{B'C'F} + \widehat{AFB} = 180^\circ$$

y luego

$$-\widehat{C'B'A'} + 60^\circ - \widehat{A'C'F} - \widehat{B'A'C'} - \widehat{B'C'F} + \widehat{AFB} = 0$$

Esto es

$$-(\widehat{C'B'A'} + \widehat{B'A'C'}) + 60^\circ - (\widehat{A'C'F} + \widehat{B'C'F}) + \widehat{AFB} = 0$$

Observando al triángulo  $\triangle C'A'B'$  tenemos que

$$\widehat{C'B'A'} + \widehat{B'A'C'} = 180 - \widehat{B'C'A'}$$

además

$$\widehat{B'C'F} + \widehat{A'C'F} = \widehat{B'C'A'}$$

por lo que

$$-(\widehat{C'B'A'} + \widehat{B'A'C'}) + 60^\circ - (\widehat{A'C'F} + \widehat{B'C'F}) + \widehat{AFB} = 0$$

y sustituyendo tenemos

$$-(180 - \widehat{B'C'A'}) + 60^\circ - (\widehat{B'C'A'}) + \widehat{AFB} = 0$$

esto es

$$-180 + \widehat{B'C'A'} + 60^\circ - \widehat{B'C'A'} + \widehat{AFB} = 0$$

y luego

$$\widehat{AFB} = 120^\circ$$

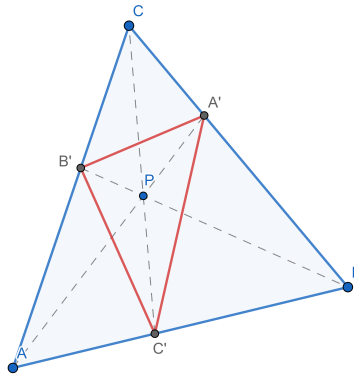
análogamente podemos mostrar que

$$\widehat{AFB} = 120^\circ \quad \text{y} \quad \widehat{CFA} = 120^\circ$$

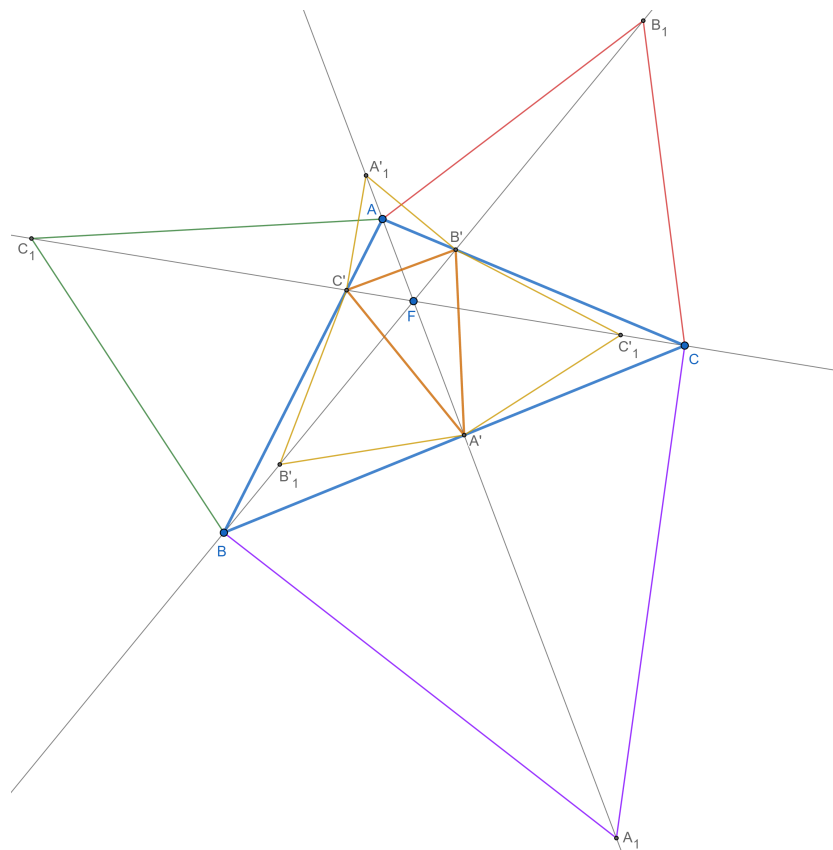
Pero el único punto que cumple esta igualdad es el primer punto de Fermat, por lo que  $F$ , primer punto isodinámico de  $\triangle A'B'C'$  es el primer punto de Fermat de  $\triangle ABC$  y esto concluye la demostración.

*Definición:* Una ceviana es un segmento que une al vértice de un triángulo con un punto del lado opuesto.

*Definición:* Dado un punto  $P$  y un triángulo  $ABC$ , el triángulo Ceviano  $A'B'C'$  de  $P$ , está definido como el triángulo formado por los extremos de las cevianas que pasan por  $P$ .



**Teorema 4.3:** El primer punto de Fermat  $F$  de  $\triangle ABC$  es igual al primer punto de Fermat del triángulo ceviano  $\triangle A'B'C'$  de  $F$ .



## Demostración

Primero veámos a la fermatiana  $AA_1$  en donde observamos que  $A$ ,  $F$  y  $A_1$  son colineales, si llamamos  $A'$  a la intersección de  $BC$  con  $AA_1$ , en donde  $AA'$  es ceviana del triángulo  $\triangle ABC$  y entonces

$$A, F, A' \text{ y } A_1 \text{ son colineales}$$

Del mismo modo, llamando  $B'$  a la intersección de  $AC$  con  $BB_1$  y  $C'$  a la intersección de  $AB$  con  $CC_1$ , podemos ver que

$$B, F, B' \text{ y } B_1 \text{ son colineales}$$

y

$$C, F, C' \text{ y } C_1 \text{ son colineales}$$

Ahora veamos al triángulo  $\triangle C'B'A'_1$  que es equilátero por construcción y por sus vértices  $B'$  y  $C'$  pasan las fermatianas  $BB_1$  y  $CC_1$  respectivamente. Esto porque  $B'$  es intersección de  $BB_1$  con  $AC$ , y  $C'$  es intersección de  $CC_1$  con  $AB$

Por otro lado, en el lema 2.5.1, mostramos que, si dos vértices de un triángulo equilátero estan sobre dos fermatianas, el tercero esta sobre la tercera fermatiana, por lo que aseguramos, que la tercera fermatiana pasa por el vertice  $A'_1$ .

Como  $F$ , es punto de intersección de las fermatianas y estas intersectan al triángulo  $\triangle ABC$  en  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ , podemos construir el triángulo  $\triangle A'B'C'$ , triángulo ceviano de  $\triangle ABC$  respecto a  $F$ .

Veamos que  $A'_1$  se encuentra en la fermatiana  $AA_1$  por lo que

$$A'_1, A, F, A' \text{ y } A_1 \text{ son colineales}$$

De la misma forma podemos ver que

$$B, B'_1, F, B' \text{ y } B_1 \text{ son colineales}$$

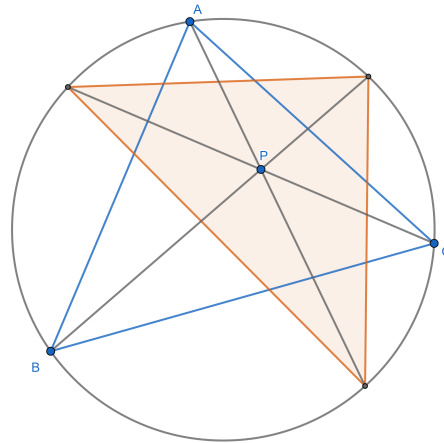
y

$$C_1, C', F, C'_1 \text{ y } C \text{ son colineales}$$

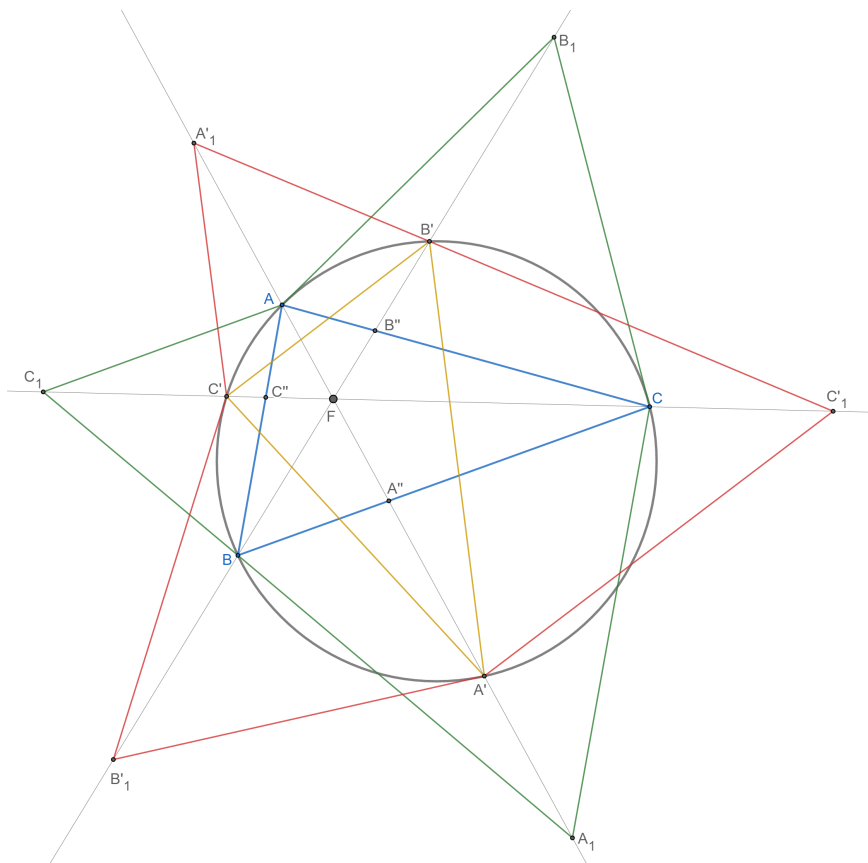
Por último notemos que las tres fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , del triángulo  $\triangle ABC$  contienen a las fermatianas  $A'A'_1$ ,  $B'B'_1$  y  $C'C'_1$  del triángulo ceviano  $\triangle A'B'C'$  y estas se intersectan en  $F$ , punto de Fermat de  $\triangle ABC$ .

Por lo tanto, el punto de Fermat del triángulo ceviano  $\triangle A'B'C'$  es el mismo que el del triángulo  $\triangle ABC$  y esto último es lo que queríamos mostrar.

*Definición:* El triángulo circunceviano de un punto  $P$  respecto al triángulo  $ABC$  es el formado por las intersecciones de las cevianas  $AP$ ,  $BP$  y  $CP$  con la circunferencia circunscrita.



**Teorema 4.4:** El primer punto de Fermat  $F$ , de  $\triangle ABC$  es igual al primer punto de Fermat del triángulo circunceviano  $\triangle A'B'C'$  de  $F$ .



**Demostración**

Primero veámos a la fermatiana  $AA_1$  en donde observamos que  $A$ ,  $F$  y  $A_1$  son colineales, si llamamos  $A'$  a la intersección de la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$  con  $AA_1$ , en donde  $AA'$  es la extensión de la ceviana  $AA''$  del triángulo  $\triangle ABC$  y entonces

$$A, F, A' \text{ y } A_1 \text{ son colineales}$$

Del mismo modo podemos ver que

$$B, F, B' \text{ y } B_1 \text{ son colineales}$$

y

$$C, F, C' \text{ y } C_1 \text{ son colineales}$$

Ahora veamos al triángulo  $\triangle C'B'A'_1$  que es equilátero por construcción; como  $B'$  y  $C'$  son las intersecciones de  $BB_1$  y  $CC_1$  con la circunferencia circunscrita del triángulo  $\triangle ABC$ , además,  $BB'$  es la extensión de la ceviana  $BB''$ , y  $CC'$  es la extensión de la ceviana  $CC''$ , entonces, el triángulo  $\triangle A'B'C'$  es circunceviano respecto a  $F$ .

Además, por los vértices  $B'$  y  $C'$  del triángulo  $\triangle C'B'A'_1$  pasan las fermatianas  $BB_1$  y  $CC_1$ , entonces, usando el lema 2.5.1, sabemos que la tercera fermatiana pasa por el vertice  $A'_1$ . Pero esta fermatiana es  $AA_1$  por lo que

$$A'_1, A, F, A' \text{ y } A_1 \text{ son colineales}$$

Análogamente

$$B, B'_1, F, B' \text{ y } B_1 \text{ son colineales}$$

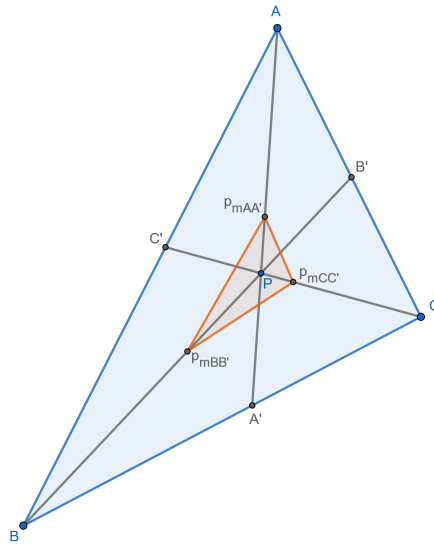
y

$$C_1, C', F, C'_1 \text{ y } C \text{ son colineales}$$

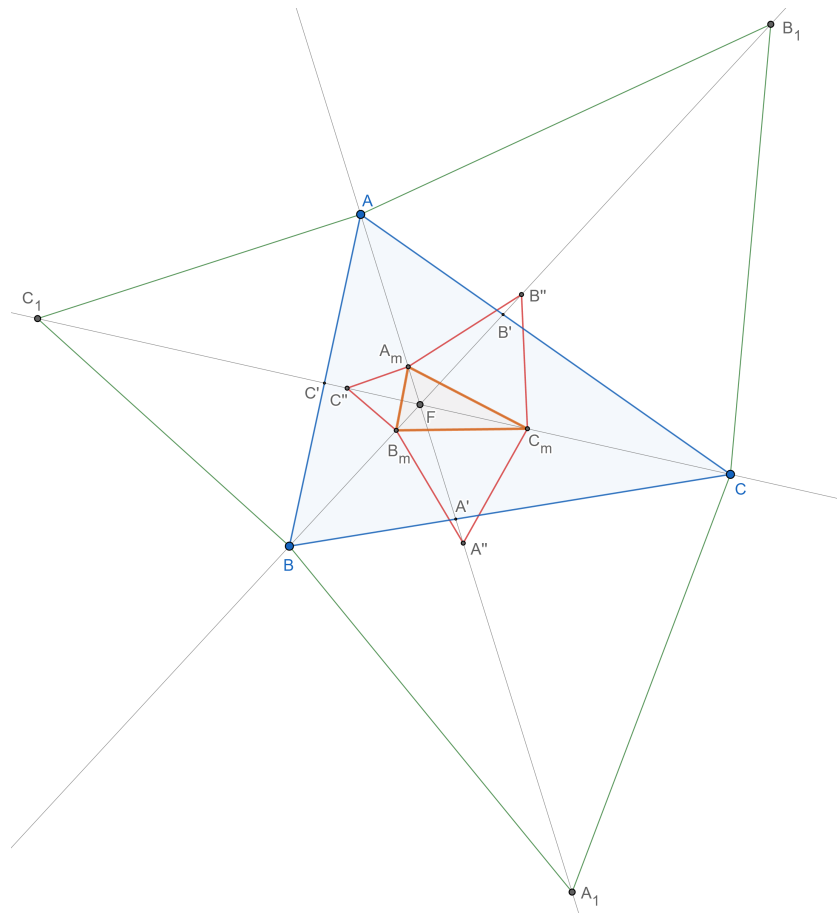
De esta forma, aseguramos que las tres fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , del triángulo  $\triangle ABC$  se encuentran sobre las mismas rectas donde se encuentran respectivamente, las fermatianas  $A'A'_1$ ,  $B'B'_1$  y  $C'C'_1$  del triángulo circunceviano  $\triangle A'B'C'$  y estas se intersectan en  $F$ , punto de Fermat de  $\triangle ABC$ .

Por lo tanto, el punto de Fermat del triángulo circunceviano  $\triangle A'B'C'$  es el mismo que el del triángulo  $\triangle ABC$ , que es lo que queríamos mostrar.

*Definición:* El triángulo medio-ceviano de un punto  $P$  respecto al triángulo  $ABC$  es el que tiene por vértices a los puntos medios de las cevianas de  $P$ .



**Teorema 4.5:** El primer punto de Fermat  $F$  de  $\triangle ABC$  es igual al primer punto de Fermat del triángulo medio-ceviano  $\triangle A_m B_m C_m$  de  $F$ .





## Demostración

En el teorema 4.3, mostramos que el punto de Fermat del triángulo  $\triangle ABC$  es el mismo que el del triángulo ceviano respecto a  $F$ . Por otro lado, por definición de triángulo medio-ceviano y llamando  $A_m$ ,  $B_m$  y  $C_m$  los puntos medios de las cevianas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  respectivamente, tenemos que

$A$ ,  $A_m$ ,  $F$ ,  $A'$  y  $A_1$  son colineales,

$B$ ,  $B_m$ ,  $F$ ,  $B''$  y  $B_1$  son colineales

y

$C$ ,  $C_m$ ,  $F$ ,  $C'$  y  $C_1$  son colineales,

Usando este hecho, trazando los triángulos externos del triángulo  $\triangle A_mB_mC_m$  y utilizando el resultado del lema 2.5.1, tenemos que por  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$  pasan respectivamente, las fermatianas  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$  del triángulo  $\triangle ABC$ , es decir,  $AA_1$ ,  $BB_1$  y  $CC_1$ , contienen respectivamente a  $A_mA''$ ,  $B_mB''$  y  $C_mC''$ , fermatianas del triángulo medio-ceviano  $\triangle A_mB_mC_m$  y estas se intersectan en  $F$ , punto de Fermat de  $\triangle ABC$ .

Por lo tanto, el punto de Fermat del triángulo medio ceviano  $\triangle A_mB_mC_m$  es el mismo que el del triángulo  $\triangle ABC$  y esto concluye la demostración.

# Referencias

- 1) Beluhov N. Ivanov, *An elementary proof of Lester's Theorem*, <http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp53-56.pdf>, 2012.
- 2) Coxeter S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1975.
- 3) Coxeter S. L. Greitzer, *Introduction to Geometry*, Wiley Classics Library, 1989.
- 4) Levi S. Shively, *Introducción a la Geometría Moderna*, John Wiley & Sons, 1984.
- 5) Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publications, 1960
- 6) Sava Grozdev, Hiroshi Okumura, Deko Dekov, *Computer-Generated, Encyclopedia of Euclidean Geometry, Part 1. Triangle Centers*, <http://www.ddekov.eu/e1/htm/TP13.htm>, 2006
- 7) Weisstein Eric W. *Lester Circle*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/LesterCircle.html>
- 8) Weisstein Eric W. *Isogonal Conjugate*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/IsogonalConjugate.html>