



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALOGÍAS CLÁSICO-CUÁNTICAS EN  
SISTEMAS ELECTRÓNICOS SINTÉTICOS

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

**Físico**

PRESENTA:

**Javier Carrillo Martínez**

TUTOR:

Dr. Roberto de Jesús León Montiel



Ciudad Universitaria, CD. MX. , 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Hoja de datos del jurado**

### **1. Datos del alumno**

Carrillo

Martínez

Javier

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

311140510

### **2. Datos del tutor**

Dr.

Roberto de Jesús

León

Montiel

### **3. Datos del sinodal 1**

Dr.

Jorge

Gustavo

Hirsch

### **4. Datos del sinodal 2**

Dr.

Pablo

Barberis

Blostein

### **5. Datos del sinodal 3**

Dr.

Carlos

Ramírez

Ramos

### **6. Datos del sinodal 4**

Dr.

Víctor

Manuel

Velázquez

Aguilar

### **7. Datos del trabajo escrito**

Analogías Clásico-Cuánticas en sistemas electrónicos sintéticos

36 p

2019





# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Dinámica de sistemas cuánticos</b>	<b>5</b>
2.1. Sistemas cuánticos de dos niveles . . . . .	5
2.2. Operaciones con qubits . . . . .	6
2.3. Dinámica de $N$ qubits . . . . .	9
<b>3. Análogo clásico de sistemas cuánticos</b>	<b>13</b>
3.1. Teoría de circuitos . . . . .	13
3.1.1. Elementos electrónicos de circuitos básicos . . . . .	13
3.1.2. Leyes de Kirchhoff . . . . .	14
3.2. Representación electrónica de una red de $N$ qubits . . . . .	16
3.2.1. Dímeros (2 osciladores) . . . . .	17
3.2.2. Trímeros (3 osciladores) . . . . .	19
<b>4. Transporte Perfecto</b>	<b>21</b>
4.1. Modelo cuántico de transporte perfecto . . . . .	21
4.2. Modelo clásico: Implementación experimental. . . . .	23
<b>5. Conclusiones</b>	<b>29</b>
<b>A. Implementación</b>	<b>31</b>
<b>B. Caracterización de las pérdidas energéticas.</b>	<b>33</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>



# Introducción

---

El manejo y transformación de la energía es un tema de gran importancia en la vida contemporánea, debido a que se conocen muchas formas de energía y constantemente se realizan desarrollos tecnológicos que permiten expandir el uso de éstas en más sectores de la sociedad, particularmente, en el mundo de la investigación el entendimiento de la energía en sus distintas formas avanza constantemente para caracterizar más fenómenos, así como para el diseño de nuevas estrategias para su uso.

Una parte importante sobre el entendimiento de la energía es su transporte eficiente, a pequeña y gran escala. Un ejemplo sobre esta búsqueda a gran escala es el diseño y fabricación de materiales macroscópicos que permitan el transporte electrónico con alta eficiencia para lograr llevar la energía de un lado a otro. Mientras que a pequeña escala, se estudia la posibilidad de usar la energía para controlar el comportamiento, cuántico o clásico, de los sistemas del orden de micro y nano. En particular, la fabricación de materiales con características de transporte diseñadas a priori, diferentes a las de sistemas naturales genera gran interés en la comunidad científica y tecnológica, debido a su rol protagónico para el desarrollo de nuevos dispositivos de captación y almacenamiento de energía solar, sensado químico y biológico e incluso para el diseño de nuevos circuitos electrónicos y fotónicos capaces de realizar tareas complejas con alta eficiencia.

Un ejemplo de la importancia del transporte eficiente de energía a escalas pequeñas se puede encontrar en la computación cuántica, pues es sabido que para el desarrollo de ésta, se requiere la transferencia coherente de estados a través de sistemas con un gran número de qubits [1],[2], por lo que recientemente se han buscado protocolos que permitan realizar este tipo de transferencias coherentes, y se ha mostrado que al considerar sistemas en el subespacio de una excitación, la coherencia se preserva mientras la excitación esté coherentemente deslocalizada



## 1. INTRODUCCIÓN

---

[3], por lo que en este trabajo se trabajará en el subespacio de una dimensión, con un sistema que se ha demostrado que cumple con la condición de que la excitación se encuentre coherentemente deslocalizada.

Al fenómeno de transporte con eficiencia del 100 % se le conoce como transporte perfecto y la búsqueda de protocolos que permitan estas eficiencias en el transporte, es de interés particularmente en sistemas de qubits, pues este comportamiento corresponde a una compuerta de intercambio o SWAP gate en la computación cuántica. Este tipo de compuertas son clave para el desarrollo de la misma, pues se ha propuesto el uso de éstas para el almacenamiento y transporte de información cuántica entre estados estacionarios [2].

Actualmente el modelo teórico de transporte perfecto en una red de qubits al igual que otros sistemas está bastante bien estudiado, de modo que a fin de implementar este tipo de dispositivos el siguiente paso recae en la capacidad experimental para preparar, con gran precisión, al sistema bajo estudio en estados cuánticos (o clásicos) muy particulares. Esta rama de la física experimental se conoce como Ingeniería de Hamiltonianos. Existen diferentes plataformas en donde la ingeniería de Hamiltonianos se puede llevar a cabo mediante arreglos de guías de onda [1], circuitos electrónicos sintéticos [4], circuitos superconductores [5], arreglos de iones atrapados [6] y cavidades ópticas [7].

En esta tesis se presenta un sistema teórico-computacional de una SWAP gate cuántica basada en un protocolo de transporte perfecto [1] y su análogo clásico, así como la parametrización para relacionar los parámetros de ambos modelos. De forma paralela se muestran mediciones de la implementación clásica de este modelo basada en circuitos electrónicos sintéticos que permita implementar experimentalmente simulaciones de diferentes protocolos cuánticos y clásicos.

La estructura del documento está organizada de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presentan los conceptos básicos concernientes al sistema cuántico del que se ocupa esta tesis, tales como lo son los qubits, cómo se operan y las ecuaciones necesarias para describir su evolución temporal. Terminando con una de las dos ecuaciones indispensables para encontrar el resultado clave del trabajo, que son dos conjuntos que relacionan los parámetros del sistema clásico con el sistema cuántico.

En el segundo capítulo se describe un sistema clásico de osciladores electrónicos análogo al sistema cuántico descrito en el capítulo 1 comenzando por la introducción de cada uno de los componentes de éste, así como las relaciones necesarias para obtener las ecuaciones dinámicas del sistema. En este capítulo se encuentra

---

la otra ecuación que nos permite encontrar la parametrización entre los sistemas del capítulo 1 y el 2, posteriormente se describen los dímeros y trímeros, casos particulares del sistema de  $N$  qubits con su respectivo análogo clásico y el mapeo que permite relacionar ambos sistemas.

El tercer capítulo consiste en la implementación teórico-computacional, así como el reporte de resultados de una implementación experimental de compuerta cuántica conocida como SWAP gate, para esto se presenta el fenómeno de transporte perfecto y su Hamiltoniano de interacción que será empleado para resolver las ecuaciones cuánticas y con estas encontrar los parámetros del sistema clásico, los que posteriormente serán probados en una implementación experimental para mostrar la equivalencia entre ambos sistemas, tanto teórica como experimentalmente.



## Dinámica de sistemas cuánticos

---

### 2.1. Sistemas cuánticos de dos niveles

Los sistemas cuánticos que son de importancia para esta tesis son aquellos cuya función de onda consiste en una superposición de dos posibles estados, es decir:

$$|q\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad (2.1)$$

donde los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  están dados por

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

La idea de dos estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  sugieren un análogo con los bits de la teoría de la computación clásica que usan 0 y 1 para indicar el estado apagado (0) o encendido (1) de un transistor, por esta razón a los estados representados por la ecuación (2.1) se les conoce como qubits o bits cuánticos, al conjunto  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  se le conoce como base computacional y dado que  $\alpha, \beta$  son números complejos tales que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Por la condición de normalización, el vector representado en la ecuación (2.1) pertenece a un espacio complejo dos dimensional [8].

Este tipo de representaciones permite modelar dos niveles de energía en un sistema atómico, por ejemplo los estados en que un electrón se puede encontrar al orbitar un núcleo atómico, donde el estado  $|0\rangle$  representaría el estado base, mientras  $|1\rangle$  representaría el estado excitado. De modo que al realizar una medición del estado del sistema, se obtiene  $|0\rangle$  con probabilidad  $|\alpha|^2$  y  $|1\rangle$  con probabilidad  $|\beta|^2$ .

Con el ejemplo anterior se puede observar que la diferencia principal entre

## 2. DINÁMICA DE SISTEMAS CUÁNTICOS

---

un bit cuántico (qubit) y uno clásico radica en el valor indeterminado del qubit, pues su valor queda definido hasta que es medido. Esto motiva la idea de realizar cálculos de forma análoga a la computación clásica, pero usando como unidad mínima de cómputo los qubits en lugar de los bits, esta idea ha motivado muchos trabajos componiendo una rama relativamente nueva de la ciencia a la que se conoce como computación cuántica.[8]

En general, un estado  $|\psi\rangle$  puede estar compuesto por un conjunto de  $N$  qubits, dado por el producto exterior de todos éstos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \dots \otimes |\psi_N\rangle, \\ &= |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle |\psi_3\rangle \dots |\psi_N\rangle, \end{aligned} \tag{2.3}$$

de modo que el estado  $|\psi\rangle$  tiene un total de  $2^N$  posibles configuraciones, por ejemplo un estado de dos qubits tendría  $2^2 = 4$  configuraciones distintas,  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  y  $|11\rangle$ , que a su vez están dadas por:

$$\begin{aligned} |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ |10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

### 2.2. Operaciones con qubits

A fin de introducir un concepto necesario para el capítulo 4, se explora brevemente la forma de operar qubits, que responde al siguiente paso para desarrollar una teoría de la computación cuántica. Para esto hay que definir lo equivalente a las compuertas lógicas de la computación clásica. Con un solo qubit se puede construir la compuerta cuántica NOT, que al aplicarse sobre el qubit (2.1) lo transforma en

$$\begin{aligned} NOT(|q\rangle) &= NOT(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle), \\ &= \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La naturaleza vectorial de los qubits permite formalizar las compuertas cuánticas mediante el uso de matrices, en el caso de la compuerta NOT para un solo qubit su matriz correspondiente está dada por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

En general, la única propiedad que debe cumplir una matriz  $U$  para ser compuerta cuántica de  $n$  qubits es [8]:

- Ser unitaria ( $U^\dagger U = I$ )

se puede observar que en el ejemplo de la  $X^\dagger = X$  y  $X^\dagger X = I$ , así que es una compuerta cuántica.

Entre más qubits conformen un estado, las compuertas para operarlos se complican más, esto se puede ejemplificar mediante la obtención de la compuerta para un estado de dos qubits llamadas puertas de intercambio o *SWAP gates*. Estas compuertas intercambian los qubits que componen un estado, su comportamiento se muestra en el cuadro 2.1

Entrada	Salida
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	$ 10\rangle$
$ 10\rangle$	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	$ 11\rangle$

Tabla 2.1: Compuerta de intercambio para un estado de 2 qubits.

Ahora, su representación matricial se puede obtener mediante la suma del producto exterior entre cada configuración del estado con su respectiva salida [9], esto es:

$$\begin{aligned} SWAP &= \sum_i |Entrada\rangle_i \langle Salida|_i, \\ &= |00\rangle \langle 00| + |01\rangle \langle 10| + |10\rangle \langle 01| + |11\rangle \langle 11|, \end{aligned} \tag{2.7}$$

## 2. DINÁMICA DE SISTEMAS CUÁNTICOS

---

recordando la ecuación (2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
 SWAP &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + \\
 &\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 0 \ 1), \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Obsérvese que al igual que la compuerta **NOT** para un solo qubit, esta matriz cumple que  $SWAP^\dagger = SWAP$  y como las columnas que forman la matriz forman una base ortonormal de  $C^4$  se puede garantizar que la matriz es unitaria[10], por lo que corresponde a una compuerta cuántica.

En general, las compuertas cuánticas y su implementación son de gran interés en la comunidad científica, debido a que consiste prácticamente en un prerequisite para la computación cuántica como indica Wilmott en [11], particularmente, la compuerta de intercambio o SWAP gate son ampliamente utilizadas en el diseño de circuitos para algoritmos cuánticos, un ejemplo de esto es una implementación del algoritmo de Shor realizada por Fowler [12] donde emplean esta compuerta para la factorización de cualquier número con complejidad logarítmica. Debido a la gran importancia de esta compuerta en el desarrollo del último capítulo se presenta una implementación clásica con circuitos electrónicos de este tipo de compuertas.

## 2.3. Dinámica de $N$ qubits

El caso general del sistema de interés de esta tesis consiste en un sistema de  $N$  qubits interactuantes mediante una constante de acoplamiento  $J$  con 2 estados posibles, base  $|g\rangle$  y excitado  $|e\rangle$  cuya energía es  $\varepsilon = \hbar\omega_n$  con  $n$  denotando el número de qubit.

En esta tesis nos enfocaremos al espacio de una sola excitación, es decir que solo uno de los qubits puede estar en el estado excitado mientras el resto está en el estado base. Es conveniente escribir cada estado en términos de la base de número de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} |1\rangle &= |e\rangle_1 |g\rangle_2 \cdots |g\rangle_N, \\ |n\rangle &= |g\rangle_1 |g\rangle_2 \cdots |e\rangle_n \cdots |g\rangle_N, \\ |N\rangle &= |g\rangle_1 |g\rangle_2 \cdots |e\rangle_N, \end{aligned} \tag{2.9}$$

y con estos estados el hamiltoniano de interacción considerando todos los qubits se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H_{int} &= \sum_n \sum_{m \neq n}^N J_{nm} |n\rangle \langle m|, \\ &= \sum_{n \neq m} J_{nm} |n\rangle \langle m|. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para obtener el Hamiltoniano total ( $H_0 + H_{int}$ ) se agrega la energía de cada qubit, quedando de la siguiente forma:

$$H = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n \neq m} J_{nm} |n\rangle \langle m|. \tag{2.11}$$

Para obtener la evolución temporal del sistema se debe resolver la ecuación de Schrödinger:



## 2. DINÁMICA DE SISTEMAS CUÁNTICOS

---

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle &= H |\psi(t)\rangle, \\
 &= \sum_{n=1}^N \varepsilon_n |n\rangle \langle n|\psi(t)\rangle + \sum_{n \neq m} J_{nm} |n\rangle \langle m|\psi(t)\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde  $\varepsilon_n$  es la energía del  $n$ -ésimo qubit y  $J_{nm}$  el acoplamiento entre el  $n$ -ésimo y  $m$ -ésimo qubit.

Recordando que el sistema se encuentra en el subespacio de una sola excitación, resulta conveniente expandir la función de onda dependiente del tiempo  $|\psi(t)\rangle$  como combinación lineal de los elementos de la base de número para expresar la localización de la excitación:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |n\rangle, \tag{2.13}$$

sustituyendo esto en la ecuación de Schrödinger y desarrollando se tiene

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n C_n(t) |n\rangle &= \hat{H} \sum_n C_n(t) |n\rangle, \\
 &= \left[ \sum_m \varepsilon |m\rangle \langle m| + \sum_{m \neq k} J_{mk} |m\rangle \langle k| \right] \sum_n C_n(t) |n\rangle, \\
 &= \sum_{m,n} \varepsilon_n C_n(t) |m\rangle \langle m|n\rangle + \sum_n C_n(t) \sum_{m \neq k} J_{mk} |m\rangle \langle k|n\rangle, \\
 &= \sum_n \varepsilon_n C_n(t) |m\rangle \delta_{n,m} + \sum_n C_n(t) \sum_{m \neq k} J_{mk} |m\rangle \delta_{k,n}, \\
 &= \sum_n \varepsilon_n C_n(t) |n\rangle + \sum_{n,m,n \neq m} J_{nm} C_m(t) |n\rangle, \\
 \sum_n \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) \right] |n\rangle &= \sum_n \left[ \varepsilon_n C_n(t) + \sum_{m,n \neq m} J_{nm} C_m(t) \right] |n\rangle.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

De modo que basta con resolver:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) = \varepsilon_n C_n(t) + \sum_{m, n \neq m} J_{nm} C_m(t), \quad (2.15)$$

para obtener la dinámica completa del sistema, porque al conocer los coeficientes  $C_n$  la función de onda queda determinada y con ella la información del sistema.

Un trabajo similar por John Briggs [13] muestra que para obtener los parámetros del mapeo entre el sistema cuántico aquí descrito y un sistema clásico análogo expuesto en el siguiente capítulo, es conveniente tomar la segunda derivada de la ecuación (2.15).

$$\begin{aligned} \ddot{C}_n &= -\frac{\varepsilon_n^2}{\hbar^2} C_n - \frac{\varepsilon_n}{\hbar^2} \sum_m J_{nm} C_m - \frac{\varepsilon_m}{\hbar^2} \sum_m J_{mm'} C_{m'} - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{m, m'} J_{nm} J_{mm'} C_{m'}, \\ &= -\omega_n^2 C_n - \omega_n \sum_m \frac{2J_{nm}}{\hbar} C_m - \sum_m (\omega_m - \omega_n) \frac{J_{nm}}{\hbar} C_m - \sum_{m, m'} \frac{J_{nm}}{\hbar} \frac{J_{mm'}}{\hbar} C_{m'}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\omega_n = \frac{\varepsilon_n}{\hbar}$ . Escalando el tiempo como  $t = \omega_n t$ , entonces  $\frac{\partial C_n}{\partial \omega_n t} = \dot{C}_n$  y la ecuación anterior se transforma en

$$\ddot{C}_n = -C_n - \sum_m \frac{2J_{nm}}{\varepsilon_n} C_m - \sum_m \left( \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_n} - 1 \right) \frac{J_{nm}}{\varepsilon_n} C_m - \sum_{m, m'} \frac{J_{nm}}{\varepsilon_n} \frac{J_{mm'}}{\varepsilon_n} C_{m'}. \quad (2.17)$$

Para fines de este trabajo se consideran los casos de acoplamiento débil, es decir  $\frac{J_{nm}}{\varepsilon_n} \ll 1$  y se considera  $\varepsilon_n \sim \varepsilon_m$  por lo que se pueden despreciar el último y penúltimo término de la ecuación 2.17 reduciéndose a la siguiente ecuación

$$\ddot{C}_n = -\varepsilon_n^2 C_n - \varepsilon_n \sum_m 2J_{nm} C_m, \quad (2.18)$$

que representa un resultado muy importante que será utilizado en el siguiente capítulo para encontrar una relación entre el sistema aquí presentado y un sistema de  $N$  osciladores electrónicos acoplados, encontrando que bajo ciertas condiciones es posible establecer una parametrización que vuelve ambos sistemas análogos.



## Análogo clásico de sistemas cuánticos

---

### 3.1. Teoría de circuitos

El análisis de circuitos RLC como los que se analizarán en este capítulo requieren el conocimiento del comportamiento de cada uno de sus elementos, capacitores, resistencias e inductores, así como las leyes de Kirchoff para el análisis de circuitos, en esta sección se presentan estos conceptos así como ecuaciones útiles para el posterior desarrollo del capítulo.

#### 3.1.1. Elementos electrónicos de circuitos básicos

##### Capacitores

Un capacitor consiste en un par de placas conductoras separadas entre sí que al ser conectadas a una fuente de energía adquieren cargas iguales en magnitud ( $q$ ), opuestas en signo, generando una diferencia de potencial entre las placas de acuerdo a la siguiente relación:

$$q = CV, \tag{3.1}$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad conocida como capacitancia. Recordando que la corriente ( $I$ ) se define como carga por unidad de tiempo, la corriente que pasa por un capacitor es proporcional al cambio en el voltaje [14],[15], en símbolos esto es:

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}. \tag{3.2}$$

#### Resistores

La resistencia es una medida de que tan conductor es un material, esto se puede medir aplicando una diferencia de potencial sobre dos puntos de un material homogéneo y midiendo la corriente entre los mismos puntos [14],[15]. Para una diferencia de potencial fija, entre más grande sea el valor de corriente significa que el material es mejor conductor, lo que definimos como un valor de resistencia pequeño. De modo que la corriente que pasa por un resistor se encuentra con la siguiente ecuación:

$$I = \frac{V}{R}, \quad (3.3)$$

donde  $R$  denota la resistencia,  $V$  el voltaje e  $I$  la corriente. Todos los materiales que no sean conductores perfectos poseen una resistencia, pero para el diseño de circuitos se fabrican objetos que tengan una resistencia conocida.

#### Inductores

En general, la inductancia es el factor de proporcionalidad entre la razón de cambio de la corriente que circula por el elemento inductor y la fuerza electromagnética que es generada debido al cambio en la corriente.

A diferencia de los capacitores y resistores, la inductancia es una característica que depende de la geometría de un material, para los propósitos de este capítulo basta con revisar la inductancia de un inductor en forma de solenoide o bobina [14],[15]. En este caso, la siguiente ecuación es útil para el análisis de los circuitos que más adelante se utilizarán

$$V_L = -L \frac{dI}{dt}, \quad (3.4)$$

donde  $V_L$  es el voltaje en el inductor,  $L$  la inductancia e  $I$  la corriente en el inductor y el signo significa que la fuerza electromagnética inducida se opone al cambio en la corriente.

#### 3.1.2. Leyes de Kirchhoff

Para escribir las ecuaciones que determinan la dinámica de los circuitos RLC son necesarias las leyes de Kirchhoff que mediante los principios de conservación de la carga y energía establecen dos ecuaciones que rigen el comportamiento de

las corrientes y los voltajes en un circuito cerrado.

### Ley de nodos

La ley de nodos establece que la corriente que pasa por un nodo debe ser igual a la corriente que sale, de modo que la suma de todas las corrientes que pasa por un nodo es igual a cero, donde un nodo es el punto de intersección entre dos o más elementos del circuito[14], en símbolos ésto es:

$$\sum_{k=1}^n i = 0. \quad (3.5)$$

### Ley de voltajes

Este principio establece que la suma de los voltajes en todos los elementos del circuito debe ser igual al voltaje de entrada, de modo que la suma de todos los voltajes del circuito es igual a cero [14], esto es:

$$\sum_{k=1}^n V_k = 0. \quad (3.6)$$

En conjunto, las leyes de Kirchoff así como las expresiones que relacionan el voltaje y corriente de cada uno de los elementos de un circuito RLC permiten escribir las ecuaciones de la dinámica de un circuito RLC cuyas soluciones oscilantes sugieren el nombre de osciladores electrónicos a este tipo de circuitos. En la siguiente sección se muestra un sistema análogo al sistema cuántico del capítulo anterior usando osciladores electrónicos como análogo de un qubit.

## 3.2. Representación electrónica de una red de $N$ qubits

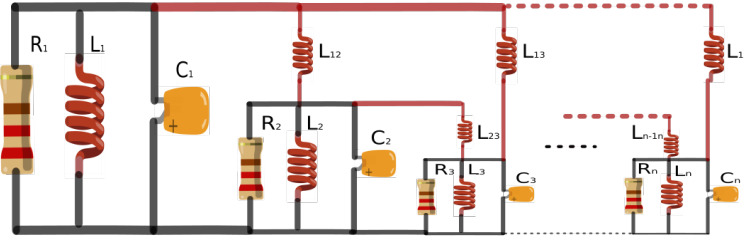


Figura 3.1: Esquema de un sistema de  $n$  circuitos acoplados.

La figura 3.1 ilustra un sistema de  $N$  osciladores electrónicos acoplados cuyas ecuaciones de Kirchoff están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dV_n}{dt} &= \frac{1}{C_n} \left[ -\frac{V_n}{R_n} - I_n - \sum_{i=n+1}^N I_{ni} + \sum_{i=1}^{i < n} I_{in} \right], \\ \frac{dI_n}{dt} &= \frac{1}{L_n} V_n, \\ \frac{dI_{ij}}{dt} &= \frac{1}{L_{ij}} (V_i - V_j), \end{aligned} \quad (3.7)$$

con  $V_n$ ,  $I_n$ ,  $C_n$ ,  $R_n$  y  $L_n$  el voltaje, la corriente, capacitancia, resistencia e inductancia del  $n$ -ésimo oscilador respectivamente, mientras el término  $L_{ij}$  son las inductancias de acoplamiento entre el oscilador  $i$ -ésimo y el  $j$ -ésimo e  $I_{ij}$  es la corriente que circula en cada uno de éstos.

Ahora, para comparar estas ecuaciones con el análogo cuántico del capítulo anterior y con esto definir un mapeo entre los dos sistemas como lo sugieren [4] y [13], se debe hacer un desarrollo de estas ecuaciones para llevarlas a la forma de la ecuación (2.18), para esto se toma la segunda derivada del voltaje, usando la primera del conjunto de ecuaciones (3.7), obteniendo:

$$\frac{d^2V_n}{dt^2} = \frac{1}{C_n} \left[ -\frac{1}{R_n} \frac{dV_n}{dt} - \frac{1}{L_n} V_n - \sum_{i=n+1}^N \frac{1}{L_{ni}} (V_n - V_i) + \sum_{i=1}^{i < n} (V_i - V_n) \right]. \quad (3.8)$$

Para simular las condiciones del sistema cuántico la primer aproximación a realizar es considerar un sistema sin pérdidas de energía, es decir donde las resistencias de cada oscilador son infinitas,  $R_n = \infty$ , lo que eliminaría el primer termino de la ecuación, sin embargo el análisis para el caso de  $N$  osciladores sigue siendo complicado por los términos de acoplamiento entre osciladores, de modo que para hacer este análisis se muestran los casos de 2 y 3 osciladores.

### 3.2.1. Dímeros (2 osciladores)

Sustituyendo  $n = 2$  en la ecuación anterior, las ecuaciones de 2 osciladores acoplados son:

$$\begin{aligned} \frac{d^2V_1}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{12}}\right) \frac{1}{C_1} V_1 + \frac{1}{L_{12}C_1} V_2, \\ \frac{d^2V_2}{dt^2} &= -\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_{12}}\right) \frac{1}{C_2} V_2 + \frac{1}{L_{12}C_2} V_1. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De igual forma, tomando  $n = 2$  en la ecuación cuántica 2.18 las ecuaciones cuánticas de un sistema de 2 qubits interactuantes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \ddot{C}_1 &= -\varepsilon_1^2 C_1 - \varepsilon_1 2J_{12} C_2, \\ \ddot{C}_2 &= -\varepsilon_2^2 C_2 - \varepsilon_2 2J_{21} C_1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparando ambos conjuntos de ecuaciones se establecen las siguientes relaciones que representan un mapeo entre el sistema cuántico y el clásico:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{12}}\right) \frac{1}{C_1}}; \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_{12}}\right) \frac{1}{C_2}}, \quad (3.11)$$



### 3. ANÁLOGO CLÁSICO DE SISTEMAS CUÁNTICOS

---

$$J_{12} = -\frac{1}{2\varepsilon_1 L_{12} C_1}; \quad J_{21} = -\frac{1}{2\varepsilon_2 L_{12} C_2}. \quad (3.12)$$

### 3.2.2. Trímeros (3 osciladores)

De forma completamente análoga al caso anterior las ecuaciones clásicas a resolver son:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2V_1}{dt^2} &= - \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{12}} + \frac{1}{L_{13}} \right) \frac{1}{C_1} V_1 + \frac{1}{L_{12}C_1} V_2 + \frac{1}{L_{13}C_1} V_3, \\
\frac{d^2V_2}{dt^2} &= - \left( \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_{23}} + \frac{1}{L_{12}} \right) \frac{1}{C_2} V_2 + \frac{1}{L_{12}C_2} V_1 + \frac{1}{L_{23}C_2} V_3, \\
\frac{d^2V_3}{dt^2} &= - \left( \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_{13}} + \frac{1}{L_{23}} \right) \frac{1}{C_3} V_3 + \frac{1}{L_{13}C_3} V_1 + \frac{1}{L_{23}C_3} V_2.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Mientras que las ecuaciones del sistema cuántico son

$$\begin{aligned}
\ddot{C}_1 &= -\varepsilon_1^2 C_1 - \varepsilon_1 2J_{12} C_2 - \varepsilon_1 2J_{13} C_3, \\
\ddot{C}_2 &= -\varepsilon_2^2 C_2 - \varepsilon_2 2J_{21} C_1 - \varepsilon_2 2J_{23} C_3, \\
\ddot{C}_3 &= -\varepsilon_3^2 C_3 - \varepsilon_3 2J_{31} C_1 - \varepsilon_3 2J_{32} C_2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Comparando:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \sqrt{\left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_{12}} + \frac{1}{L_{13}} \right) \frac{1}{C_1}}, \\
\varepsilon_2 &= \sqrt{\left( \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_{23}} + \frac{1}{L_{12}} \right) \frac{1}{C_2}}, \\
\varepsilon_3 &= \sqrt{\left( \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_{13}} + \frac{1}{L_{23}} \right) \frac{1}{C_3}}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$J_{12} = -\frac{1}{2\varepsilon_1 L_{12} C_1}; \quad J_{21} = -\frac{1}{2\varepsilon_2 L_{12} C_2}, \tag{3.16}$$

$$J_{13} = -\frac{1}{2\varepsilon_1 L_{13} C_1}; \quad J_{31} = -\frac{1}{2\varepsilon_3 L_{13} C_3}, \tag{3.17}$$

$$J_{23} = -\frac{1}{2\varepsilon_2 L_{23} C_2}; \quad J_{32} = -\frac{1}{2\varepsilon_3 L_{23} C_3}. \tag{3.18}$$

### 3. ANÁLOGO CLÁSICO DE SISTEMAS CUÁNTICOS

---

Con estos dos casos se puede inferir que el mapeo entre un sistema de  $N$  osciladores electrónicos acoplados y  $N$  qubits interactuantes está dado por los siguientes conjuntos de ecuaciones:

$$J_{ik} = -\frac{1}{2\varepsilon_i L_{ik} C_i}; \quad (3.19)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\left(\frac{1}{L_i} + \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{L_{ij}}\right) \frac{1}{C_i}}. \quad (3.20)$$

Teniendo estas ecuaciones resulta interesante probar la posibilidad de reproducir fenómenos cuánticos en un sistema enteramente clásico con una alta eficiencia. Para explorar esta idea, en el siguiente capítulo, se modela una compuerta cuántica conocida como compuerta de intercambio o Swap Gate usando las ecuaciones 3.8 para el clásico y 2.15 para el cuántico, comparándose con las mediciones realizadas en un montaje que implementa experimentalmente el sistema de la figura 3.1 con 5 y 7 osciladores.

# Transporte Perfecto

---

## 4.1. Modelo cuántico de transporte perfecto

La naturaleza del sistema planteado sugiere que cada qubit se pueda pensar como un qubit donde el estado base  $|g\rangle$  se corresponde con el estado  $|0\rangle$ , mientras el estado excitado se corresponde con el encendido  $|1\rangle$ . Para explorar esta idea, se realizaron pruebas del fenómeno de transporte perfecto que modela una swap gate.

El transporte perfecto como lo estudian Perez Lejía et al en [1] requiere de una cadena de qubits adyacentes que representan una puerta cuántica o SWAP gate en inglés [1], el sistema empleado se muestra en la figura 4.1.

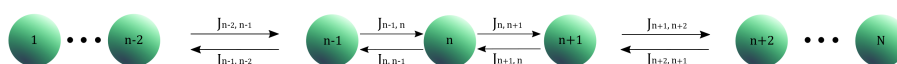


Figura 4.1: Cadena de  $N$  qubits interactuando mediante un acoplamiento  $J_{ij}$

El fenómeno de transporte perfecto es un fenómeno de interacción con primeros vecinos, donde el qubit  $n$  interactúa con el  $n + 1$  y el  $n - 1$ , de modo que el hamiltoniano de interacción ( $H_{int}$ ) de este sistema en la base de número se está dado de la siguiente manera:

$$H_{int} = \sum_{n=1}^N J_{n-1} |n-1\rangle \langle n| + \sum_{n=1}^N J_n |n+1\rangle \langle n|, \quad (4.1)$$

como lo muestran Armando et al en [1], los acoplamientos ( $J_n$ ) están dados

#### 4. TRANSPORTE PERFECTO

---

por:

$$J_n = \frac{\pi}{2t_f} \sqrt{n(N-n)}, \quad (4.2)$$

donde  $t_f$  es el tiempo que toma pasar toda la energía del qubit 1 al qubit Nésimo.

Para calcular una dinámica energética que muestre el fenómeno del transporte perfecto para un sistema de  $N$  qubits se debe usar el hamiltoniano completo  $H = H_o + H_{int}$ , donde  $H_o = \varepsilon_n$  en este caso, en la ecuación (2.14) quedando de la siguiente forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C_n(t) = \varepsilon_n C_n(t) + \sum_{n=1}^N J_{n-1} |n-1\rangle \langle n| + \sum_{n=1}^N J_n |n+1\rangle \langle n|, \quad (4.3)$$

que representa una aproximación a primeros vecinos del sistema cuántico descrito en el capítulo 2.

En la figura 4.2 se muestra la evolución temporal de 0 a  $t_f = \frac{\pi}{2}$  para un sistema de 19 qubits resultado de resolver numéricamente la ecuación 4.3 con  $N = 19$  y  $\varepsilon_i = 0$  y graficar  $|C_n|^2$  representando la energía de cada qubit. Se observa como la energía pasa completamente del sitio 1 al sitio 19 con eficiencia del 100 % al pasar un tiempo  $t_f$ .

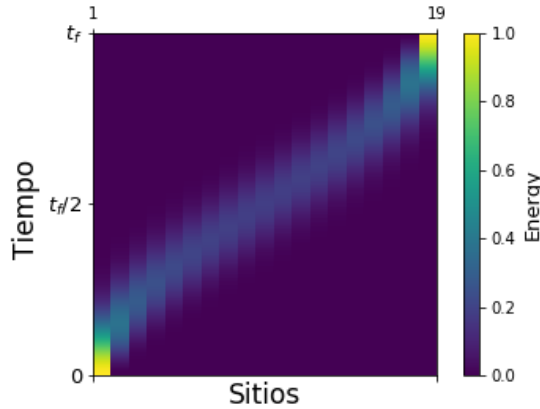


Figura 4.2: Transporte perfecto en un sistema de 19 qubits cuánticos interactuando a primeros vecinos.

Sin embargo, en las implementaciones experimentales obtener eficiencias del

100 %, es algo prácticamente imposible de alcanzar ya que hay pérdidas debido a la presencia de elementos resistivos que disipan la energía en forma de calor, por lo que es necesario agregar un término de decaimiento ( $-i\Gamma$ ) a la energía a fin de incluir estas pérdidas, en el caso cuántico esto se hace tomando  $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n - i\Gamma_n$ . Mientras que en el caso clásico las pérdidas estarán incluidas al resolver la ecuación 3.8 para cada  $n$  sin la simplificación  $R_n = \infty$ . Para encontrar el valor que toma  $\Gamma$  en el apéndice 2 se hace un análisis del decaimiento de la energía, determinando que  $\Gamma = \frac{1}{RC}$

El transporte eficiente en redes de qubits es un fenómeno de sumo interés en la comunidad, pues de poder implementar sistemas con eficiencias cercanas al 100 % se estaría realizando también la implementación de una SWAP gate que como se ha mostrado juegan un papel muy importante para el desarrollo de la computación cuántica, específicamente, en almacenamiento y transporte de información cuántica entre estados estacionarios [2]. Por estas razones se ha buscado realizar plataformas experimentales que implementen protocolos de transporte perfecto en diferentes sistemas físicos como lo son ensamblajes atómicos en cavidades ópticas [16], haces de luz en guías de onda [1] y circuitos cuánticos de fotones [17], de forma paralela se han realizado varias propuestas para la implementación de protocolos empleando cristales de Fluoropatita que presentan estructura cuasi-1D y los espines del  $^{19}F$  están estructurados en forma de cadena lineal, asemejando una cadena de qubits[18],[19] y en diamantes que presentan vacancias de Nitrógeno, donde la cadena de qubits está formada por impurezas de Nitrógeno en posiciones aleatorias[20].

En este trabajo se pretende mostrar que la implementación clásica de un protocolo de transporte perfecto es posible, por lo que en la siguiente sección, se presenta la simulación del protocolo considerando pérdidas de un sistema de 5 y 7 qubits, así como su análogo clásico con osciladores electrónicos y los resultados de una implementación experimental del sistema clásico.

## 4.2. Modelo clásico: Implementación experimental.

En esta sección se muestran las ecuaciones tanto clásicas como cuánticas que se resolvieron para encontrar los parámetros del modelo clásico que eficientan el transporte en una plataforma experimental que recrea el circuito de la figura 3.1.

#### 4. TRANSPORTE PERFECTO

---

Para 5 osciladores, el hamiltoniano completo a insertar en la ecuación (2.14) del sistema cuántico es

$$H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - i\Gamma_1 & J_{12} & 0 & 0 & 0 \\ J_{21} & \varepsilon_2 - i\Gamma_2 & J_{23} & 0 & 0 \\ 0 & J_{32} & \varepsilon_3 - i\Gamma_3 & J_{34} & 0 \\ 0 & 0 & J_{43} & \varepsilon_4 - i\Gamma_4 & J_{45} \\ 0 & 0 & 0 & J_{54} & \varepsilon_5 - i\Gamma_5 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Recordando que se quiere resolver la dinámica del sistema teniendo en cuenta el mapeo que relaciona los parámetros del sistema clásico  $L_n$ ,  $L_{nm}$ ,  $R_n$  y  $C_n$  con los del sistema cuántico  $J_{nm}$  y  $\varepsilon_n$  dados por las ecuaciones (3.19) y (3.20) se deben buscar los parámetros clásicos que maximicen la eficiencia del transporte, es decir que recreen la condición  $\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$  y  $J_{nm} = \frac{\pi}{2t_f} \sqrt{n(N-n)}$ , para esto se debe tomar en cuenta que en la implementación experimental del sistema clásico la selección de parámetros está restringida a una serie de valores discretos en el rango de  $[0.4096, 0.001]$  Faradays con resolución de  $2.44 \times 10^{-8}$ , de modo que tras probar un par de combinaciones para el caso de 5 osciladores, se eligieron los siguientes valores:

Parámetro	Valor [mH]	Parámetro	Valor [mF]
$L_n$	11.16	$C_1$	7.545
$L_{12}$	237.97	$C_2$	7.582
$L_{23}$	193.35	$C_3$	7.582
$L_{34}$	193.35	$C_4$	7.582
$L_{45}$	237.97	$C_5$	7.545

Tabla 4.1: Valores de los parámetros clásicos utilizadas en las simulaciones y en la implementación experimental.

La tabla de la izquierda muestra los valores de inductancia del inductor presente en cada oscilador ( $L_n$ ) que en este caso es un valor fijo y los valores para los inductores de acoplamiento ( $L_{nm}$ ), que por la interacción a primeros vecinos, los mostrados en la tabla son los únicos valores que figuran en el sistema. La tabla 4.4 de la derecha presenta los valores de Capacitancia, en este caso el valor de resistencia es un valor fijo de  $1.8k\Omega$  para todos los osciladores. Dado que los parámetros clásicos determinan el valor de los parámetros cuánticos, estos se muestran a continuación:

Por otro lado, los parámetros clásicos para el sistema con 7 osciladores, son los siguientes:

Mientras que los parámetros cuánticos son:

Parámetro	Valor [ $ms^{-1}$ ]	Parámetro	Valor [ $ms^{-1}$ ]
$J_{12}$	806.1	$J_{21}$	986.4
$J_{23}$	986.9	$J_{32}$	986.9
$J_{34}$	986.4	$J_{43}$	801.8
$J_{45}$	801.8	$J_{54}$	806.1

Tabla 4.2: Valores de los acoplamientos utilizados en las simulaciones de transporte perfecto para una red de 5 qubits.

Parámetro	Valor [ $s^{-1}$ ]	Parámetro	Valor [ $ms^{-1}$ ]
$\varepsilon_1$	345.411	$\Gamma_1$	36.8
$\varepsilon_2$	345.556	$\Gamma_2$	36.6
$\varepsilon_3$	345.741	$\Gamma_3$	36.6
$\varepsilon_4$	345.556	$\Gamma_4$	36.6
$\varepsilon_5$	345.411	$\Gamma_5$	36.8

Tabla 4.3: Valores de las energías y pérdidas utilizadas en las simulaciones de transporte perfecto para una red de 5 qubits.

Parámetro	Valor [ $mH$ ]	Parámetro	Valor [ $mF$ ]
$L_n$	1.116	$C_1$	7.545
$L_{12}$	309.36	$C_2$	7.582
$L_{23}$	181.97	$C_3$	7.582
$L_{34}$	75.45	$C_4$	7.582
$L_{45}$	75.45	$C_5$	7.545
$L_{56}$	181.97	$C_6$	7.582
$L_{67}$	309.36	$C_7$	7.545

Tabla 4.4: Valores de los parámetros clásicos utilizadas en las simulaciones y en la implementación experimental.

Por otro lado, las ecuaciones clásicas del sistema de 5 osciladores a resolver se muestran a continuación, siendo las del sistema con 7 osciladores completamente análogas,



#### 4. TRANSPORTE PERFECTO

---

Parámetro	Valor [ $s^{-1}$ ]	Parámetro	Valor [ $s^{-1}$ ]
$J_{12}$	0.620	$J_{21}$	0.617
$J_{23}$	1.049	$J_{32}$	1.043
$J_{34}$	2.516	$J_{43}$	2.511
$J_{45}$	2.511	$J_{54}$	2.516
$J_{56}$	1.043	$J_{65}$	1.049
$J_{67}$	0.617	$J_{76}$	0.620

Tabla 4.5: Valores de los acoplamientos utilizados en las simulaciones de transporte perfecto para una red de 7 qubits.

Parámetro	Valor [ $s^{-1}$ ]	Parámetro	Valor [ $ms$ ]
$\varepsilon_1$	345.225	$\Gamma_1$	23.1
$\varepsilon_2$	345.432	$\Gamma_2$	23.0
$\varepsilon_3$	347.340	$\Gamma_3$	23.0
$\varepsilon_4$	349.664	$\Gamma_4$	23.1
$\varepsilon_5$	347.340	$\Gamma_5$	23.0
$\varepsilon_6$	345.432	$\Gamma_6$	23.0
$\varepsilon_7$	345.225	$\Gamma_7$	23.1

Tabla 4.6: Valores de las energías y pérdidas utilizadas en las simulaciones de transporte perfecto para una red de 7 qubits.

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2V_1}{dt^2} &= -\varepsilon_1^2V_1 + \frac{1}{L_{12}C_1}V_2 - \frac{dV_1}{dt} \frac{1}{R_1C_1}, \\
 \frac{d^2V_2}{dt^2} &= -\varepsilon_2^2V_2 + \frac{1}{L_{12}C_2}V_1 + \frac{1}{L_{23}C_2}V_3 - \frac{dV_2}{dt} \frac{1}{R_2C_2}, \\
 \frac{d^2V_3}{dt^2} &= -\varepsilon_3^2V_3 + \frac{1}{L_{34}C_3}V_4 + \frac{1}{L_{23}C_3}V_2 - \frac{dV_3}{dt} \frac{1}{R_3C_3}, \\
 \frac{d^2V_4}{dt^2} &= -\varepsilon_4^2V_4 + \frac{1}{L_{34}C_4}V_3 + \frac{1}{L_{45}C_4}V_5 - \frac{dV_4}{dt} \frac{1}{R_4C_4}, \\
 \frac{d^2V_5}{dt^2} &= -\varepsilon_5^2V_5 + \frac{1}{L_{45}C_5}V_4 - \frac{dV_5}{dt} \frac{1}{R_5C_5}.
 \end{aligned}$$

A las ecuaciones anteriores se debe agregar una condición inicial para que las ecuaciones cuánticas y clásicas estén completas, la condición inicial en ambos casos es poner toda la energía en el qubit/oscilador 1. Para resolver las ecuaciones con los parámetros mencionados anteriormente se implementó un método núme-

rico Runge-Kutta de 4 pasos en Python 3 y se resolvió para un tiempo final de 5s y 5.6s con resolución de 0.1ms.

De forma paralela, en una plataforma que implementa el circuito de la figura 3.1 realizada por el investigador postdoctoral del Laboratorio de Fotónica del Instituto de Ciencias Nucleares, Alan Quiroz, que se detalla en el apéndice I, se recrearon los sistemas de 5 y 7 osciladores con los valores de las tablas de la 2 a la 7 y se realizaron mediciones 32 mediciones del voltaje de cada oscilador, que fueron importados a Python y tratados en el mismo.

De las 32 mediciones tomadas para cada voltaje se obtuvieron las envolventes de éstas y con ésta se obtuvo una distribución de las desviaciones estandar como función del tiempo que fue promediada para obtener un valor de incertidumbre para cada voltaje, las incertidumbres se muestran en la tabla 4.7.

Medida	Incertidumbre	Medida	Incertidumbre
$V_1$	$\pm 1\%$	$V_1$	$\pm 0.8\%$
$V_2$	$\pm 0.7\%$	$V_2$	$\pm 2.9\%$
$V_3$	$\pm 2.1\%$	$V_3$	$\pm 3.8\%$
$V_4$	$\pm 2.6\%$	$V_4$	$\pm 3.7\%$
$V_5$	$\pm 2.0\%$	$V_5$	$\pm 3.5\%$
		$V_6$	$\pm 2.3\%$
		$V_7$	$\pm 1.0\%$

Tabla 4.7: Valores de incertidumbre en la medición de .

Los resultados tanto de las ecuaciones clásicas como de las cuánticas, así como un caso representativo de las mediciones realizadas en el dispositivo experimental para el caso de 5 y 7 osciladores se muestran en la figura 4.3, donde se graficó el cuadrado de los voltajes  $V_i$  en el caso clásico teórico y experimental y el cuadrado del valor absoluto de los coeficientes  $|C_n|^2$ .

En la figura 4.3 se grafican la energías normalizadas, a las que llamamos poblaciones, en función del tiempo. En las primeras dos gráficas se puede observar que usando 5 osciladores la energía pasa del primer al quinto qubit con cierta nivel de pérdida, en las figuras 4.3 b) y d) experimentalmente se encuentra que la eficiencia con que se realiza este transporte es del  $73.2\% \pm 4\%$  y  $60.9\% \pm 2\%$  para 5 y 7 osciladores respectivamente. De modo que para ajustar el modelo teórico tanto cuántico como clásico se puede modificar el valor de la resistencia  $R$  para caracterizar las pérdidas, obteniendo que los valores de resistencia que ajustan el modelo son  $R = 1783\Omega$  y  $R = 1529\Omega$  respectivamente, pues predicen las efi-

## 4. TRANSPORTE PERFECTO

---

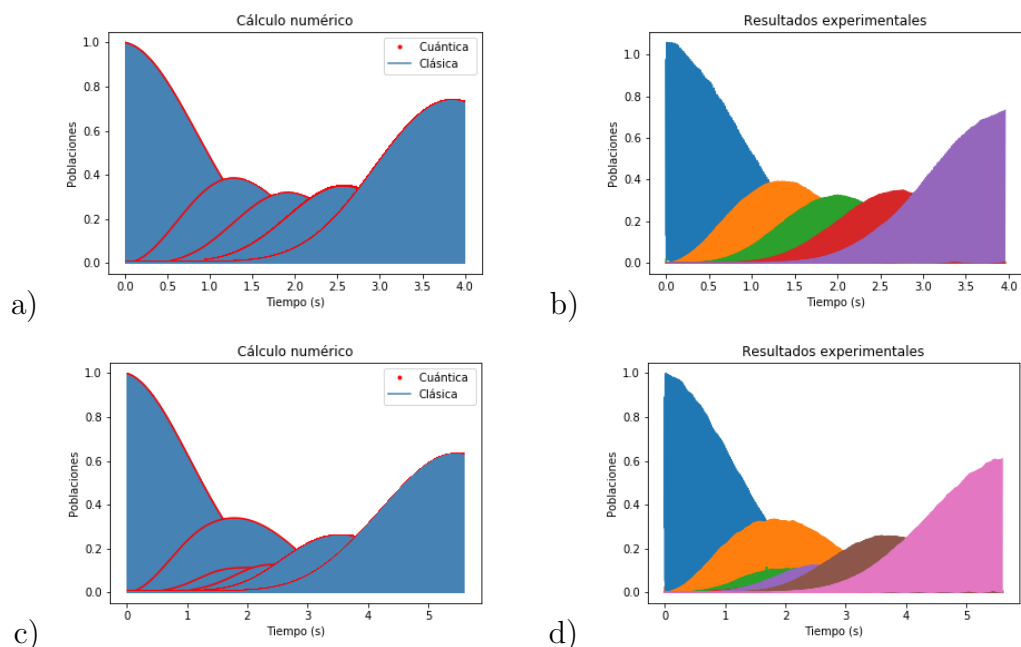


Figura 4.3: a) y c) Soluciones para las ecuaciones clásicas en colores sólidos, para ecuaciones cuánticas la línea puntada. b) y d) Datos experimentales para un arreglo de 5 y 7 osciladores electrónicos interactuantes a primeros vecinos.

ciencias encontradas experimentalmente como se muestra en las figuras 4.3 a) y b).

La menor eficiencia en el transporte con 7 osciladores se explica nuevamente mediante las pérdidas del sistema, pues al ser mayor la cantidad de elementos implicados en el sistema la disipación de energía es mayor. También se observa que la solución a las ecuaciones cuánticas se comportan como la envolvente de las soluciones clásicas, lo que indica que el mapeo entre ambos sistemas funciona perfectamente.

La eficiencia en el montaje utilizado para obtener las gráficas experimentales y que se describe en el apéndice I, está limitada por los valores de resistencia que los OPAMs utilizados permiten alcanzar, en esta caso es de  $1.8k\Omega$ , para mejorar la eficiencia se necesita alcanzar valores más grandes de resistencia, por lo que como trabajo a futuro se espera poder usar OPAMs de instrumentación que permiten alcanzar valores de resistencia más altos. Con el modelo computacional realizado se espera que al tener OPAMs que nos permitan alcanzar  $3k\Omega$  se consigan eficiencias superiores al 80 %.

## Conclusiones

---

En el presente trabajo de investigación se ha estudiado la dinámica de una red de  $N$  qubits interactuantes y de un sistema de  $N$  osciladores RLC acoplados, lo que ha permitido determinar los regímenes donde la dinámica de ambos se comporta de forma análoga, sabiendo esto se realizó un mapeo que permite relacionar los parámetros de ambos sistemas. De forma paralela se realizó una plataforma computacional que permite modelar numéricamente ambas dinámicas, con los parámetros cuánticos en función de los clásicos.

Para probar esta plataforma se estudió un protocolo de transporte perfecto [1] y se mostró que para un sistema sin pérdidas el transporte funciona con eficiencia del 100 %, para hacer el modelo más realista se le agregó un término de pérdida y se determinó mediante un análisis de energía la forma analítica de éstas.

Para probar el nuevo modelo se implementó el protocolo de transporte perfecto en un sistema cuántico con 5 y 7 qubits, este modelo permite estimar los valores de los parámetros cuánticos necesarios para tener una alta eficiencia en el transporte y con esto se determinaron los parámetros clásicos de acuerdo a los valores reales que se pueden emplear en la plataforma que implementa una red de 10 osciladores acoplados.

Se determinó que con el estado actual de la plataforma se pueden llegar a valores de eficiencia del  $73.2\% \pm 4\%$  y  $60.9\% \pm 2\%$ , las cuáles se pueden incrementar con el uso de amplificadores operacionales de instrumentación, que permiten alcanzar valores más grandes de resistencia, acercándose así a la aproximación  $R = \infty$ . Con estas mediciones se probó la consistencia entre el modelo teórico realizado y sus soluciones numéricas con los datos experimentales.

Las principales conclusiones y contribuciones de este trabajo se enlistan a

## 5. CONCLUSIONES

---

continuación:

- Las ecuaciones 3.19 y 3.20 encontradas en este estudio relacionan los parámetros de dos sistemas físicos de naturaleza distinta.
- La plataforma computacional realizada permite encontrar la dinámica de los sistemas cuántico y clásico representando un laboratorio virtual con el que se pueden hacer pruebas para la elección de parámetros, así como la observación de distintos fenómenos en redes de qubits acoplados.
- En conjunto, el mapeo, el modelo de resolución computacional y la plataforma que implementa el circuito de 10 osciladores acoplados representan una herramienta muy poderosa para la exploración de nuevos fenómenos, así como la caracterización de éstos.
- Se probó que es posible la implementación de una SWAP gate en un sistema clásico, que como se vio es de suma importancia para el desarrollo de la computación cuántica, lo que abre la puerta para caracterizar este tipo de compuertas usando nuestro sistema.

## Implementación

---

Para verificar experimentalmente la modelación clásica de una compuerta cuántica de intercambio como se describió en el capítulo 4, así como para otras configuraciones de circuitos que recrean sistemas cuánticos interactuantes de interés, el Dr. Alan Quiroz junto con Diego Montiel realizaron un montaje de circuitos que recrean el circuito de la figura (3.1).

Cada uno de los osciladores se realiza con la ayuda de un amplificador operacional, su diagrama de bloque está representado en la figura A.1 a) donde se observa que para recrear el funcionamiento de un oscilador RLC se requiere una señal de entrada que es recibida por un integrador que simula un capacitor con tres salidas, una multiplicación por una constante que simula una resistencia, otro integrador que simula un inductor y una salida para medir la señal. A la salida del integrador de inducción y el multiplicador resistivo ambas señales llegan a un sumador donde se suman junto a la señal de entrada, vuelven a pasar por el integrador de capacitancia y se repite el proceso.

La implementación real de cada uno de los elementos del circuito se realizó mediante el uso de amplificadores operacionales (OPAMs), tal como se indica en la figura A.1 b) donde la parte del circuito que recrea cada uno de los elementos vienen indicadas con líneas punteadas.

Se implementaron 10 de estos osciladores en una placa electrónica de BCI sobre las que fueron realizadas pistas que permiten conectar los diferentes elementos del circuito, estos 10 osciladores están interconectados mediante 44 inductores igualmente implementados con amplificadores operacionales y a su vez tanto los osciladores como los inductores de acoplamiento están conectados a un módulo de recepción de la señal de voltaje saliente de cada oscilador que puede ser medida al conectar un oscilador.

## A. IMPLEMENTACIÓN

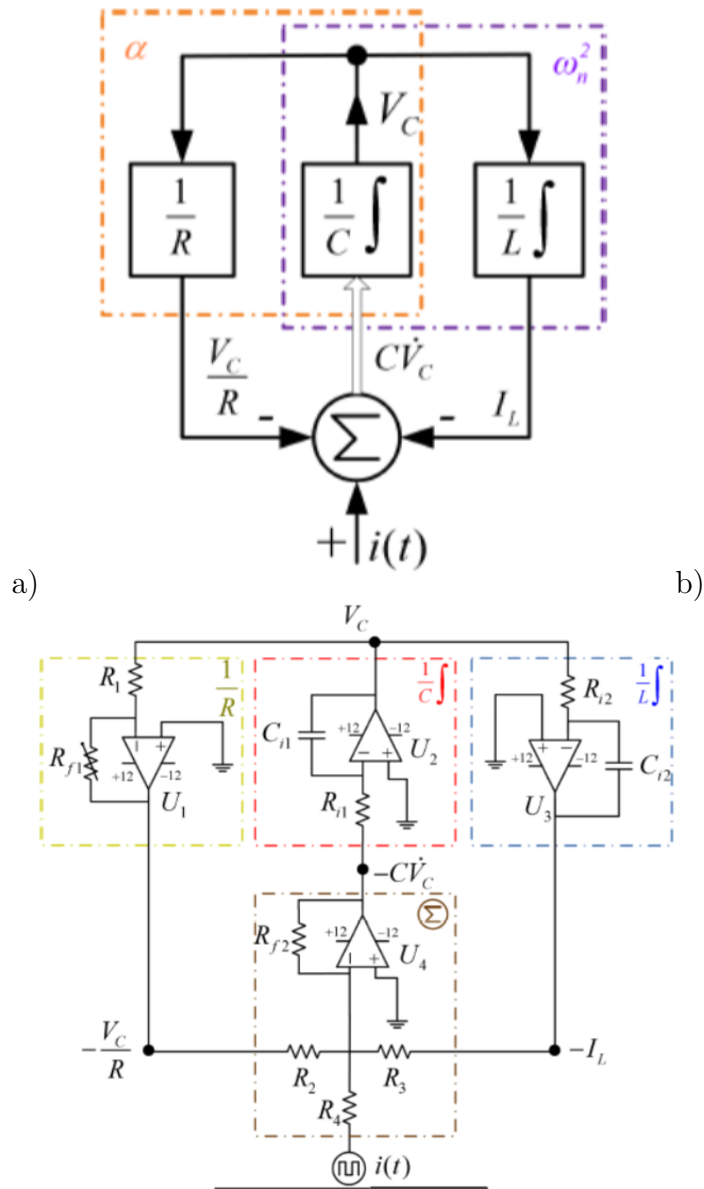


Figura A.1: Oscilador RLC a) diagrama de bloque de y b) circuito electrónico análogo

## Caracterización de las pérdidas energéticas.

---

Como se mencionó en el capítulo 4, para ajustar el modelo de transporte perfecto más cercano a la realidad, es decir que se pueda recrear lo observado en un montaje experimental se analiza el comportamiento de la energía para agregar un término que incorpore las pérdidas. En la figura B.1 se graficó la energía total del circuito de 5 osciladores, dada por la siguiente expresión:

$$E = \sum_{n=1}^5 \left[ \frac{1}{2} C_n V_n^2 + \frac{1}{2} L_n I_n^2 + \frac{1}{2} L_{n,n+1} I_{n,n+1}^2 \right], \quad (\text{B.1})$$

donde cada elemento de la ecuación sigue la notación del capítulo 3. En la figura B.1 se grafica en función del tiempo esta cantidad normalizada. Por otro lado, la energía total del sistema cuántico está dada por la siguiente expresión:

$$E = \sum_{n=1}^5 |C_n|^2, \quad (\text{B.2})$$

en este caso, la energía ya se encuentra normalizada.

Ambas gráficas presentan un cosimilar a un decaimiento exponencial de modo que se ajusta ambas curvas con una función exponencial  $e^{-\Gamma t}$ , de aquí se obtiene que el valor de  $\Gamma$  que ajusta el decaimiento es  $\Gamma = \frac{1}{RC}$  tomando  $R = 1800\Omega$  y  $C = 7.54mF$  valores promedio entre los parámetros usados en los osciladores.



## B. CARACTERIZACIÓN DE LAS PÉRDIDAS ENERGÉTICAS.

---

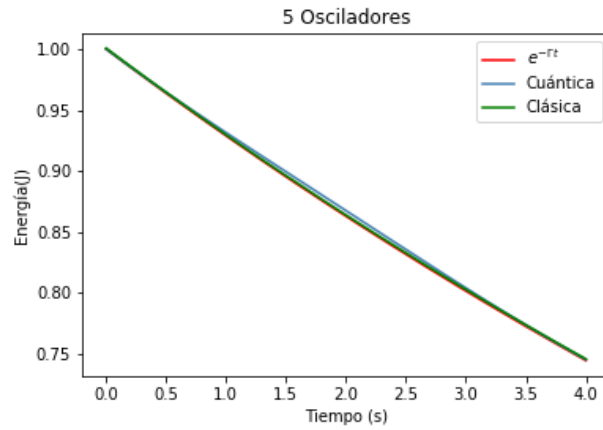


Figura B.1: Decaimiento de la energía del sistema cuántico y clásico de 5 qubits en azul y verde respectivamente, rojo ajuste exponencial.

Como  $C_n^2 \rightarrow e^{-\Gamma t}$ , entonces  $C_n \rightarrow e^{-\frac{\Gamma}{2}t}$ , de modo que el término de pérdida en la energía que queremos agregar uede ser expresado como  $i\Gamma = \frac{i}{RC}$ , de modo que para incluirlas se toma  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon - i\Gamma$

## Bibliografía

---

- [1] A. Perez-Leija, R. Keil, A. Kay, H. Moya-Cessa, S. Nolte, L.-C. Kwek, B. M. Rodríguez-Lara, A. Szameit, and D. N. Christodoulides, “Coherent quantum transport in photonic lattices,” *Physical Review A*, vol. 87, no. 1, p. 012309, 2013. [1](#), [2](#), [21](#), [23](#), [29](#)
- [2] L.-m. Liang *et al.*, “Realization of quantum swap gate between flying and stationary qubits,” *Physical Review A*, vol. 72, no. 2, p. 024303, 2005. [1](#), [2](#), [23](#)
- [3] R. de J León-Montiel, A. Vallés, H. Moya-Cessa, and J. Torres, “Coherent delocalization: views of entanglement in different scenarios,” *Laser Physics Letters*, vol. 12, no. 8, p. 085204, 2015. [2](#)
- [4] R. d. J. León-Montiel, M. A. Quiroz-Juárez, J. L. Domínguez-Juárez, R. Quintero-Torres, J. L. Aragón, A. K. Harter, and Y. N. Joglekar, “Observation of slowly decaying eigenmodes without exceptional points in Floquet dissipative synthetic circuits,” *Communications Physics*, vol. 1, no. 1, p. 88, 2018. [2](#), [16](#)
- [5] B. Peropadre, G. G. Guerreschi, J. Huh, and A. Aspuru-Guzik, “Proposal for microwave boson sampling,” *Physical Review Letters*, vol. 117, no. 14, p. 140505, 2016. [2](#)
- [6] R. Blatt and C. F. Roos, “Quantum simulations with trapped ions,” *Nature Physics*, vol. 8, no. 4, p. 277, 2012. [2](#)
- [7] F. Beaudoin, A. Blais, and W. Coish, “Hamiltonian engineering for robust quantum state transfer and qubit readout in cavity qed,” *New Journal of Physics*, vol. 19, no. 2, p. 023041, 2017. [2](#)
- [8] M. A. Nielsen and I. Chuang, “Quantum computation and quantum information,” 2002. [5](#), [6](#), [7](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [9] A. Poornima, N. Naghabhushana, and R. Ujjinimatad, “Matrix representation of quantum gates,” *International Journal of Computer Applications*, vol. 159, no. 8, 2017. [7](#)
- [10] S. H. Friedberg, A. J. Insel, and L. E. Spence, *Algebra lineal*. Publicaciones Cultural, 1982. [8](#)
- [11] C. M. Wilmott, “On swapping the states of two qudits,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 9, no. 06, pp. 1511–1517, 2011. [8](#)
- [12] A. G. Fowler, S. J. Devitt, and L. C. Hollenberg, “Implementation of Shor’s algorithm on a linear nearest neighbour qubit array,” *arXiv preprint quant-ph/0402196*, 2004. [8](#)
- [13] J. S. Briggs and A. Eisfeld, “Equivalence of quantum and classical coherence in electronic energy transfer,” *Physical Review E*, vol. 83, no. 5, p. 051911, 2011. [11](#), [16](#)
- [14] U. Tietze, C. Schenk, and E. Schmid, *Electronic circuits*. Springer, 1991. [13](#), [14](#), [15](#)
- [15] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics (Prentice Hall)*. Cambridge University Press; 4 edition, 2017. [13](#), [14](#)
- [16] G.-W. Lin, X.-B. Zou, M.-Y. Ye, X.-M. Lin, and G.-C. Guo, “Frequency-up conversion and quantum swap gate in an optical cavity with atomic cloud,” *arXiv preprint arXiv:0801.0789*, 2008. [23](#)
- [17] T. Ono, R. Okamoto, M. Tanida, H. F. Hofmann, and S. Takeuchi, “Implementation of a quantum controlled-swap gate with photonic circuits,” *Scientific reports*, vol. 7, p. 45353, 2017. [23](#)
- [18] A. Ajoy and P. Cappellaro, “Quantum simulation via filtered hamiltonian engineering: Application to perfect quantum transport in spin networks,” *Physical Review Letters*, vol. 110, no. 22, p. 220503, 2013. [23](#)
- [19] P. Cappellaro, C. Ramanathan, and D. G. Cory, “Simulations of information transport in spin chains,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 25, p. 250506, 2007. [23](#)
- [20] A. Ajoy and P. Cappellaro, “Perfect quantum transport in arbitrary spin networks,” *Physical Review B*, vol. 87, no. 6, p. 064303, 2013. [23](#)