Universidad Nacional Autónoma de México

Centro de Nanociencias y Nanotecnología

Sucesiones ultrarrecursivas

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Licenciado en Nanotecnología

P R E S E N T A :

Óscar Andrés Ramírez Ramírez

DIRECTOR

Dr. Armando Reyes Serrato

Ensenada, B. C., 2019

SUCESIONES ULTRARRECURSIVAS

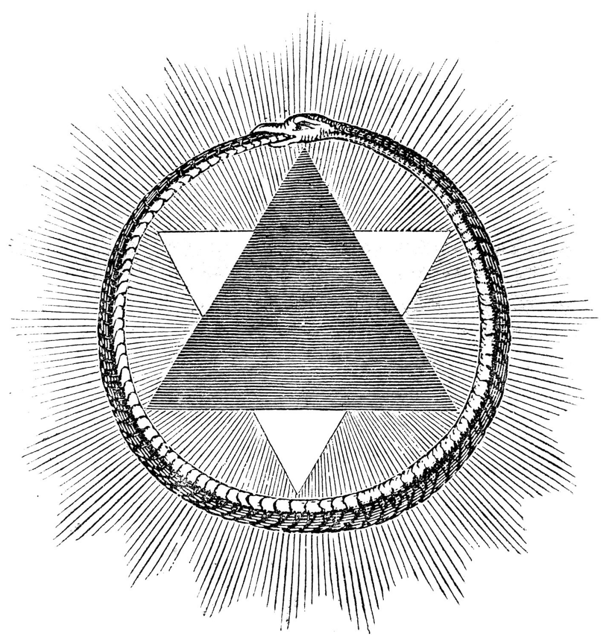
Ó. A. R. R.

Universidad Nacional Autónoma de México
Centro de Nanociencias y Nanotecnología

Tesis dirigida por:
Dr. Armando Reyes Serrato

Óscar Andrés Ram. Ramírez

Sucesiones Ultrarrecursivas



Declaración

Hago constar que el trabajo que presento es de mi autoría y que todo el contenido —ideas, citas textuales, datos, ilustraciones, gráficas, etcétera— tomado de cualquiera obra o debido al trabajo de terceros, ha sido debidamente identificado y citado en el cuerpo del texto y en la bibliografía. Acepto que en caso de no respetar lo anterior puedo ser sujeto de sanciones universitarias.

Afirmo que el material presentado no se encuentra protegido por derechos de autor y me hago responsable de cualquier reclamo relacionado con la violación de derechos de autor.

Óscar Andrés Ramírez Ramírez

A María del Carmen Domínguez Placencia y Guadalupe Rodríguez Rodríguez,
de quienes no heredé apellidos pero sí otros símbolos humanos elementales.

Índice general

Agradecimientos

Mi experiencia universitaria estará por siempre entre mis recuerdos más bellos, valiosos y significativos. Ella culmina justamente con la presentación de esta tesis que he preparado con gran pasión y que he escrito con mucho cariño para el lector atento. El proceso en todo su conjunto me ha dejado no sólo recuerdos, sino enormes satisfacciones, importantes aprendizajes, un necesario crecimiento personal y lo contrario a todo lo anterior en la justa medida. Por ello es que me siento entera y eternamente agradecido con todas las personas que hicieron de esto, no una posibilidad, sino un hecho... y dichoso se los expreso:

Primeramente a mi madre y a mi padre: Berenice Emma Ramírez Domínguez y Carlos Alberto Ramírez Rodríguez, quienes depositaron su confianza, el fruto de sus esfuerzos y principalmente su amor en mí. Sepan que sus generosidades y afectos empiezan mis aspiraciones más honestas y elevadas, y concluyen las mejores de mis acciones. Es para ustedes mi amor y mis intenciones más puras.

Al Dr. Armando Reyes Serrato, por haber confiado en mí durante un momento decisivo y sobretodo porque tengo la certeza de que lo hubiera hecho en cualquier otro momento, pues así de excelente es su decisión de incentivar el interés científico de los estudiantes; prueba categórica de ello son los proyectos *Jóvenes a la Investigación* y la Asociación Civil *Matematiké*, de los cuales es cofundador. Personalmente, me he beneficiado de ambas iniciativas, pero lo que reafirma mi admiración es haber escuchado a otros compañeros hablar de la relevancia que *Jóvenes* tuvo en sus carreras. Gracias por haberme ofrecido todo su apoyo aquel día que llegué a su oficina a comentarle tímidamente acerca de unas "nuevas sucesiones" que creía haber descubierto, por acercarme y guiarme por el increíble mundo de la Materia Condensada.

Al M. E. Francisco Arturo Gamietea y Domínguez, también cofundador de los proyectos mencionados. Por haber compartido conmigo largas pláticas sobre matemáticas y sobre algunas inquietudes referentes a la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media superior. También por atender con paciencia y dedicación a todos los niños y adolescentes que llegan a *Matematiké*, ansiosos (o no) de aprender.

La tercera persona por quien quiero expresar mi admiración debido a su alto impacto social y mostrar mi gratitud por todo lo que he obtenido gracias a su servicio, es la Dra. Laura C. Viana Castrillón. Es en gran medida gracias a su propuesta original que a Ensenada, Baja California, llegaron, llegan y llegarán estudiantes curiosos de los lugares más insospechados de la República; y que se fueron, se van y se irán, más sabios y menos jóvenes, a los lugares más insospechados del mundo.

Agradezco también a todas las personas que le brindan ese carácter único e irrepetible al Centro de Nanociencias y Nanotecnología, por el cual me sentí muy orgulloso de pertenecer: a la M. C. Ana Linda Misquez Mercado, Ana Patron Martínez, M. C. Aritz Barrondo Corral, M. C. Citlali Martínez Sisniega, L. I. Juan Antonio Peralta, Dr. Ernesto Cota Araiza, Dra. Catalina López Bastidas, M. F. María de Lourdes Serrato de la Cruz, Dr. Jesús María Siqueiros Beltrones, Dr. José Valenzuela Benavides, Dr. Óscar Raymond Herrera, M. C. Carlos Ivan Ochoa Guerrero, María del Carmen Paredes Alonso, Lda. en Psic. Laura Adriana Rosales Vázquez, C. P. Laura Osuna Alatorre, L. A. F. D. Juan Francisco Núñez Aguilar, Dr. Leonel Cota Araiza, Dr. Eric Flores Aquino, Soc. Efraín Mendoza López, Biol. María Isabel Pérez Montfort, Dr. Juan Carlos García Ramos, a la Dra. Yanis Toledano Magaña y a todos los que no he alcanzado a mencionar o conocer.

A mis entrañables amigos de la cuarta (generación): Rubí Zarmiento García, Santino Jesulín Zapiain Merino, Christian Andrés Palacios Torrez, José Cristóbal Aguilar Guzmán, Eréndira Santana Suárez, Jorge Alejandro Guerrero Martínez, David Enrique Medina Quiroz, Sebastián Álvarez Ortega y un loable etcétera. También a mis buenos amigos de otras generaciones o escuelas: Axel Melchor Gaona Carranza, Iván Josué Saavedra Soto, Yunuhen Badillo Marroquín, Ángel G. Meza López y Citlalli Montserrat Valdés Noguerón. Cada cual con sus aptitudes excepcionales y, estoy seguro, se encuentra escribiendo una historia digna de contar.

A algunas de las personalidades virtuosas de la tercera generación de la Licenciatura en Nanotecnología, a quienes tuve la suerte de conocer y la fortuna de escuchar. Por orden de aparición: Baldo Luis Nájera Santos, Brian Irving Jaimes Keymolent y Misael Peláez Morales. Todos ellos ejemplo de la individualidad sana, el talento y la excelencia... los hermanos mayores.

A la sublime señorita Valeria Ríos Vargas, por haberme escuchado, leído y aconsejado desde los primeros pasos de las *sucesiones ultrarrecursivas*, por ser quien mejor conoce este trabajo y un magnífico ser humano.

Al extraordinario chicano Etienne I. Palos, por corromper a la juventud, incitándola a involucrarse en el ámbito científico a tan tierna edad. Por ser un gran generador de ideas, un ejemplo auténtico de quien lucha por sus ideales y mi mejor amigo.

Al Venerable Maestro Jayden Yeshe R. Rufrancos, verdadero representante del pensamiento propio y del dominio y control de las artes oscuras. *Saravá, meu irmão*!

A la sociedad mexicana, que no está al inicio o al final de estos agradecimientos porque está constantemente presente en mis pensamientos y determinaciones. Para ella son los deseos más ambiciosos y pasionales que me es posible generar y anhelo sobremanera el día que pueda corresponder todo lo que de ella obtuve al ser un alumno de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Resumen

Se amplió el concepto de *recursión* al definir y estudiar relaciones de recursión que expresan al elemento de una sucesión como función de sus elementos anteriores y **posteriores**. Se encontraron familias de sucesiones infinitas que satisfacen dichas recursiones en todo su dominio; algunas de ellas pueden resolverse con una fórmula explícita (no recursiva) y otras presentan comportamientos más complejos.

Abstract

We extend the concept of *recursion* by defining and studying recurrence relations in which a sequence term is defined as a function of the preceding and/or following terms. We find families of infinite sequences well defined by these recurrences: some of them have closed-form solutions and others have rather complicated behaviors.

Notación y aclaraciones varias

Sobre la notación

m, n, r, s, t, $\ldots$ son usualmente variables en $\mathbb{Z}$.

$(A_n)_{n=0}^{\infty}$, (F_n), (L_n), $\ldots$ son sucesiones infinitas.

$(\upsilon_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, $(\nu_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, (τ_k), (π_k), $\ldots$ son sucesiones bi-infinitas, que no tienen un valor inicial ni uno final, o bien cuyo dominio son los números enteros.

$\mathbf{\Pi} \equiv ((\pi_{m,k})_{k=-\infty}^{\infty})_{m=1}^{\infty}$ y $\mathbf{\Psi}$ representan sucesiones de sucesiones o una familia de sucesiones. *El p-ésimo elemento de* $\mathbf{\Pi}$ *es la sucesión* $(\pi_{p,k})$*; el q-ésimo elemento de* $(\pi_{p,k})$ *es el número* $\pi_{p,q}$.

α, β, γ, δ, $\ldots$ son constantes en $\mathbb{R}$ o clases de recursión, según el contexto.

$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{O}$, $\ldots$ son relaciones de recursión.

$\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\ldots$ son conjuntos.

Sobre el contenido

El trabajo está dividido en cuatro Partes: *Exordium*, *Narratio*, *Argumentatio* y *Peroratio*. Cada parte contiene uno o más capítulos, que a su vez contienen secciones y subsecciones.

La Parte I del escrito está dedicada en gran medida a una exploración personal de los fundamentos de las matemáticas, del concepto de recursividad, del número áureo, las sucesiones de Fibonacci y de Lucas y de otras curiosidades matemáticas.

El estudio exclusivo de las sucesiones recursivas comienza en la penúltima sección del Capítulo 1: *Relaciones de recursión tradicionales*. La Parte II y la Parte III del documento contienen la esencia del trabajo: la presentación de las distintas clases de relaciones de recursión, las nuevas sucesiones y algunos teoremas. La Parte IV contiene las conclusiones del trabajo.

Los Apéndices contienen más capítulos que permiten reforzar, aclarar o profundizar algunas cuestiones del estudio. El capítulo *Prontuario* es un resumen técnico de todo la tesis; en *Notas importantes*, se ha pretendido describir ampliamente los elementos y conceptos más importantes que sirven como fundamento del trabajo. Todos los teoremas que no sean demostrados en el cuerpo del texto, se demuestran en el capítulo *Demostraciones*.

Sobre la numeración

Los teoremas, pies de página, las figuras, definiciones, etcétera, siempre aparecen numerados. Dicha numeración reinicia en cada capítulo; por lo que, si se menciona el "Teorema 1", se estará hablando del primer teorema del capítulo en cuestión, mientras que "Teorema 3.1" se refiere al Teorema 1 del Capítulo 3.

Referencias y pies de página

El frontispicio de la tesis pertenece al libro de la primera referencia, *Woman in the Nineteenth Century* de S. M. Fuller [1], que por haber sido publicado en 1845 ha hecho de la imagen una de dominio público. La mayoría de las ilustraciones que preceden a las distintas Partes son dibujos que L. Rhead realizó para una de las primeras traducciones en inglés del libro Las Mil y Una Noches [2], exceptuando la que precede a la Parte IV, que pertenece a J. C. Murphy [3]. Éstos son los únicos elementos que no se citan en su primera aparición, por consideraciones estéticas.

Los pies de página usualmente contienen información extra cuya lectura puede omitirse si no se desea profundizar en lo que se dice en el texto.

«Solo per voi, figli della dottrina e della sapienza, abbiamo scritto quest'opera. Scrutate il libro, raccoglietevi in quella intenzione che abbiamo dispersa e collocata in più luoghi; ciò che abbiamo occultato in un luogo, l'abbiamo manifestato in un altro, affinché possa essere compreso dalla vostra saggezza»

—Cornelius Agrippa, *De occulta* φ*hilosophia*

Prólogo

La presente tesis no es más que otra aventura del pensamiento, perteneciente a la amplia fila que el ser humano acumuló. Fila tan abundante y presumiblemente finita de la cual nuestro sentido del tiempo sólo nos entrega una parte: la de aquellas obras escritas o dictadas en el pasado. Sabemos que ellas todas han inspirado nuevas obras y que lo seguirán haciendo, es decir, sabemos que al haber existido tienen influencia sobre los textos venideros, pero... ¿pueden los textos aún no escritos tener influencia sobre los que se están gestando en este momento? O más allá ¿puede su influjo alcanzar aquellas obras ya escritas?

En este trabajo se abordan inquietudes similares a las que plantean las dos preguntas anteriores, aunque sobre un tema mucho más sencillo que el de los objetos —como sinónimo amigable de materia— en la línea temporal, se trata de las sucesiones matemáticas. Estudiaremos sucesiones cuyos elementos están en función de elementos anteriores, como en la recursión tradicional, o en función de elementos posteriores; esto último constituye la novedad del tema, ya que no están presentes en la literatura sucesiones de esa naturaleza, aunque sí de otras muy extrañas naturalezas, si se me permite el hipérbaton (Véase el Capítulo 2. Sucesiones recursivas inusuales).

No se espera que el lector haya leído en el pasado (o en el futuro) algún otro artículo o libro relacionado con el tema, dado que es autocontenido. Aunque sí es necesario que sea capaz de leer expresiones matemáticas.

Parte I

EXORDIUM

Un águila gigantesca se abalanza para recoger un pedazo de carne atado a un hombre, dispuesta a llevárselo hacia las cumbres rocosas del paisaje montañoso que los rodea.

0. Preludio matemático

Sobre *un* número oculto

"Ubica una única unidad universal, otro oficio otorgaría opresión;
insisto inspirada: imagina esa esencia Absoluta"

—Zandra Marrem, *Sacro ser I*

NUESTRO ESTUDIO está destinado a comenzar mediante la pregunta siguiente:

¿Existe un número tal que su cuadrado sea igual al número más uno?

Ésta poseerá una respuesta afirmativa si se encuentra un número, que denotaremos como ω, que satisfaga la ecuación

$$\omega^2 = \omega + 1.$$

El número ω, de existir, puede pertenecer a los números naturales, cuyo conjunto se representa de esta manera: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$[1]; también a los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; a los racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$, es decir, al conjunto de números que resultan de la división dos enteros $\frac{m}{n}$ con n diferente a cero; o bien puede ser un número irracional, trascendental, complejo, etc.[2]

[1] No es de aceptación universal el considerar al cero como un elemento de los números naturales, algunos autores lo incluyen en dicho conjunto y otros lo omiten de él. A lo largo de toda esta obra se adopta la convención local: $\in \mathbb{N}$.

[2] Ahora sabemos que este *etcétera* puede ser tan largo como extensiones de los números existan. Desde mediados del siglo XIX, se habló de cuaterniones y octoniones, consecuencia del trabajo de los geniales matemáticos Benjamin Olinde Rodrigues y William Rowan Hamilton, y de los esfuerzos también simultáneos e independientes de John Thomas Graves y Arthur Cayley. Fue Hamilton quien invirtió mayor empeño en idear una expansión de los números complejos y halló los cuaterniones,

El estudio del álgebra elemental nos prepara para manipular ecuaciones de esa naturaleza y encontrar *la solución*: el número oculto detrás de su máscara —la letra omega: ω— y quizá poder reconocerlo como miembro de alguno de los conjuntos mencionados. Existe una solución general para las ecuaciones de segundo grado, es decir, las ecuaciones que tienen la forma $ax^2 = bx + c$ donde $a \neq 0$; de hecho, la nuestra es quizá la ecuación de segundo grado más sencilla, dado que $a = b = c = 1$, pero eso no impide que esconda algunos misterios que han asombrado a matemáticos y matemáticas de todas las épocas.

Apresurarse a resolver la ecuación planteada mediante un método algorítmico memorizado durante la educación básica no significa que se ha comprendido la pregunta inicial; que equivale a decir "saber el valor de ω no significa conocer al número". En cambio, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{\omega}$ y obtener una expresión nueva[3]:

$$\omega = 1 + \frac{1}{\omega}$$

Esta ecuación, equivalente a la anterior, permite definir a ω de esta manera:

ω es igual a uno más el inverso de ω

En ese enunciado se ha usado a ω para definir al mismo ω (esto se conoce como **recursión** y hablaremos de ello más adelante), lo cual nos entrega una nueva manera de representar a ω, un sinónimo o una nueva máscara: $1 + \frac{1}{\omega}$. Si sustituimos en el lado derecho de la ecuación anterior a ω por su sinónimo, obtenemos lo siguiente:

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega}}.$$

Esta ecuación aparenta mayor complejidad que las dos anteriores aunque sigue siendo

no pasarían largos años para que nuevos sistemas de números fueran propuestos; algunos ejemplos de ellos son los números supernaturales (propuestos por Ernst Steinitz como una generalización de los naturales), los hiperreales (extensión de los reales, introducida por Edwin Hewitt) y los números surreales del también genial matemático John Horton Conway, quien no sólo ha de ser mencionado en este pie de página sino que ocupa un lugar especial en esta tesis por su promoción y contribución al tema de las sucesiones definidas por *relaciones de recursión extrañas*. [4–8]

[3]Podemos hacer esto si ω posee un inverso multiplicativo y si se cumple la propiedad distributiva, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, en el sistema de números en el que vive nuestro número oculto.

equivalente a ellas: nunca hemos dejado de hablar del mismo número.[4] Es posible sustituir nuevamente a ω por su sinónimo del lado derecho de la ecuación, y repetir este proceso indefinidamente:

$$\omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega}}} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

*¿Qué es ω: **a)** $\omega^2 - 1$, **b)** $1 + \frac{1}{\omega}$ ó **c)** $1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega}}$?* La respuesta es *todas las anteriores.* ω es un número nacido de la recursión, eternamente autosemejante y de infinitas representaciones... pero también es la solución a la ecuación de segundo grado más sencilla.

Multiplicidad

"Por eso si hay uno, hay dos"

—Facundo Cabral

Sea $P(x)$ un polinomio y r una de sus raíces, es decir $P(r) = 0$, se conoce como orden de multiplicidad al número de oportunidades en que r se presenta como una raíz de $P(x)$. Por ejemplo, si el polinomio $Q(x)$ es tal que $P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$ y se cumple $Q(r) \neq 0$, se dice que r es una raíz simple; si, en cambio, $P(x) = (x-r)^k \cdot R(x)$ con el entero $k > 1$ y cumpliendo $R(r) \neq 0$, se dice que r es una raíz múltiple o de multiplicidad k.

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n (esto es $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, donde n es un natural y a_i es un complejo) y todas sus raíces son simples, el Teorema Fundamental del Álgebra (Teo. A.11) nos dice que $P(x)$ tiene n raíces distintas.[5] Esto nos concierne debido a que el polinomio característico de nuestro problema inicial, que denotaremos

[4] O números, pues es bien conocido que una ecuación de segundo grado puede tener hasta dos raíces distintas.

[5] Puntualmente, el Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que todo polinomio no constante $F(z)$ de grado n y con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene una raíz en $\mathbb{C}$. Corolario de ello es que cualquier polinomio $F(z)$ de grado n se puede escribir de la forma $F(z) = c(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$ donde $c \neq 0$ y $z_i \in \mathbb{C}$. [9]

como $\Omega(x) = x^2 - x - 1$, podría tener más de una raíz. En otras palabras, ω podría representar ya no uno sino dos números diferentes, raíces del polinomio $\Omega(x)$.

Distintas son las maneras en las que se puede empezar a averiguar si $\Omega(x)$ tiene dos raíces simples o si, por el contrario, ω es su raíz múltiple. Quien, cegado por su dominio del álgebra elemental, haya caído en la tentación de solucionar nuestro problema inicial mediante la fórmula general mencionada, sepa que aquí podemos prescindir de esos artificios… pues nos fue dada la facultad de manipular la ecuación $\omega = 1 + \frac{1}{\omega}$ para llegar a una expresión equivalente

$$-\frac{1}{\omega} = 1 - \omega$$

y notar que $-\omega$ es el inverso multiplicativo de $-\frac{1}{\omega}$. Por lo tanto, hemos encontrado un número que también satisface la definición recursiva

$-\frac{1}{\omega}$ *es igual a uno más el inverso de* $-\frac{1}{\omega}$.

De modo que si ω es una raíz de $\Omega(x)$, ¡$-\frac{1}{\omega}$ también lo es!

Finalmente, supongamos que ω es una raíz múltiple de $\Omega(x)$, lo cual indicaría que las dos raíces que hemos encontrado son la misma, es decir

$$\omega = -\frac{1}{\omega}.$$

Esto implicaría que el número que hasta ahora hemos representado con la última letra del alfabeto griego, es en realidad el número imaginario $\omega = \sqrt{-1}$.

Pero es de nuestro conocimiento que $-\frac{1}{\omega} = 1 - \omega$ y, siguiendo nuestra primera suposición $\omega = -\frac{1}{\omega}$, llegamos a la siguiente expresión:

$$\omega = 1 - \omega.$$

Al resolver, obtenemos $\omega = \frac{1}{2}$. Entonces, *¿Qué es ω:* ***a)***$-\frac{1}{\omega}$, ***b)***$\sqrt{-1}$ *ó* ***c)*** $\frac{1}{2}$*?*

El principio del tercero excluido

"Quitarle el Principio del Tercero Excluido a un matemático
es lo mismo que prohibirle al astrónomo el telescopio
o al boxeador usar sus puños"

—David Hilbert

Esa extraña sensación que se experimenta en presencia de una contradicción, sirve de indicio para desarrollar nociones intuitivas de lo que en Lógica se conoce como el principio del tercero excluido y que reza: "Sea A una proposición, por ejemplo 'Aún es de día', entonces A sólo puede ser verdadera o falsa: $A \not\Longleftrightarrow \neg A$" o bien "Todo necesariamente *es* o *no es*". Aceptar este principio en un sistema lógico es excluir cualquier otra posibilidad: todos los enunciados son verdaderos si no son falsos y todos los enunciados que no resulten verdaderos, necesariamente son falsos. [10]

En la sección pasada, supusimos que un enunciado era verdadero (ω es una raíz múltiple de $\Omega(x)$) y llegamos a una innegable contradicción ($\omega = \sqrt{-1} = \frac{1}{2}$). Por consiguiente, es prudente considerar que nuestra suposición es **falsa** y que $\Omega(x)$ goza de dos raíces distintas, denotadas como $-\frac{1}{\omega}$ y ω, o bien α y ω.[6]

El procedimiento lógico que recién empleamos es bien conocido en el ámbito matemático y lleva el nombre de *reducción al absurdo*. Lo acompaña una enorme fama desde hace siglos, porque permite demostrar de manera sencilla e ilustrativa una suerte de resultados importantes en la tradición y por su amplia utilidad en general.[7] Para decirlo explícitamente, el método de reducción al absurdo consiste en suponer la falsedad de una proposición que se quiere demostrar y, a través de una serie de inferencias válidas, llegar a una contradicción o a un absurdo: lo cual implica que la hipótesis inicial falsa, o bien, que la proposición es verdadera.

$$\neg P \implies \cdots \implies S. \text{ Pero } \neg S, \text{ por tanto } P.$$

[6]Puede resultar confuso pensar que estamos denotando dos números que no conocemos mas que a través de una ecuación que ambos cumplen, porque si $\frac{8}{5}$ y $-\frac{5}{8}$ fueran esos números, por ejemplo, no está claro cuál debería llamarse ω y cuál $-\frac{1}{\omega}$. Pero eso no debe ser motivo de preocupación: lo único que estas etiquetas nos indican es la relación que deben cumplir ambas raíces: $(-\frac{1}{\omega})\cdot\omega \equiv \alpha\cdot\omega = -1$.

[7]La irracionalidad de la raíz cuadrada de cualquier número no cuadrado, la existencia de infinitos números primos (atribuida a Euclides), y la prueba de que la suma de los ángulos internos de un triángulo es exactamente dos ángulos rectos (por el matemático francés Adrien-Marie Legendre), por nombrar algunos ejemplos. [11]

Este poderoso método fue elogiado por el matemático G. H. Hardy (1877-1947), cuando escribió lo siguiente:

Reductio ad absurdum —o la reducción al absurdo—, tan querida por Euclides, es una de las mejores armas con que cuenta un matemático. Es por mucho un gambito superior a cualquiera del ajedrez: los ajedrecistas pueden ofrecer un peón o quizá una pieza mayor, pero el matemático ofrece la partida entera. [12]

Este pensamiento lleno de elocuencia encierra un concepto que únicamente fue verdadero antes de 1960, año en que Mijaíl Tal (1936-1992), apodado *El Mago de Riga*, se convirtió en el campeón mundial de ajedrez más joven de la historia.[8]

Si bien el matemático es capaz de ofrecer la partida entera, a decir de Hardy, el extraordinario Mago de Riga era capaz de ir más allá: en el comienzo de su carrera podía provocar, mediante uno o varios sacrificios de piezas importantes, que sus oponentes creyeran que tenían la partida regalada.[9] No transcurrirían varias jugadas para que notaran que en realidad eran víctimas de los sacrificios sin precedentes del joven que tenían enfrente.

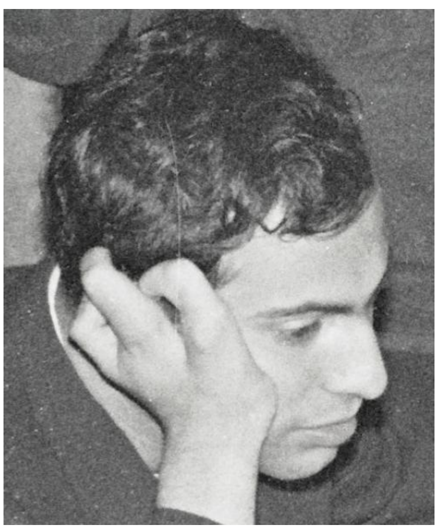


Figura 1: Mijaíl Tal pensando durante una partida de 1961. [14]

La partida que ganó contra A. Koblents en su tierra natal en 1961 es muestra de ello. [13]

Tal juega a las blancas

1.e4 c5 2.♘f3 d6 3.d4 cxd4 4.♘xd4 ♘f6 5.♘c3 a6 6.♗g5 e6 7.f4 ♗e7 8.♕f3 ♕c7 9.O-O-O ♘bd7 10.♗e2 h6 11.♗h4 b5 12.e5 ♗b7 13.exf6[10] ♗xf3 14.♗xf3 d5 15.♘xe6[11](?) fxe6 16.♗h5+ g6 17.♗xg6+ ♔f8 18.fxe7+ ♔g7 19.♗g3 ♘f6 20.♖he1 b4 21.♖xe6[12] bxc3 22.f5 ♕b7 23.b3 ♕d7 24.♗e5 ♕xe6 25.fxe6 ♔xg6 26.♖f1 ♘h7 27.♗xh8 ♖xh8 28.♖f8 ♖xf8 29.exf8=♕ ♘xf8 30.e7 ♔f7 31.exf8=♕+ ♔xf8 32.♔d1

Este tipo de sacrificios son característicos de Tal, pues los expresó a lo largo de toda su carrera. Fueron consecuencia directa de su personalidad atrevida, aunque no siempre disfrutaron de la acep-

[8]En 1985, este título se lo arrebató otra leyenda del ajedrez: Garry Kasparov de 22 años.

[9]La estrategia de engañar a la amenaza para obtener un servicio de ella se relaciona con la ilustración de la página 1: Véase el Capítulo 3. Observaciones y su última sección.

[10]Este es el momento en que Tal decide sacrificar a su Dama.

[11]Momento en el que sacrifica a su caballo.

[12]Y a su otro caballo.

tación general: para algunos representaban jugadas dignas de un genio, para otros un riesgo mayúsculo que él asumía por su creencia de que moriría muy joven.

Durante las partidas, cuando la leyenda del Mago de Riga y sus sacrificios brillantes ya eran conocidos, sus oponentes sentían la presión de no poder calcular en tan poco tiempo todas las combinaciones que demandaba el estilo vehemente de Tal: pocos podían vencerlo en su juego durante una partida viva.[13] Después de las partidas, los aficionados se reunían (o se aislaban) para estudiar con calma todas las variantes que se habían suscitado, buscaban los defectos o los errores en el juego de Tal. Actualmente, cualquier computadora con las instrucciones adecuadas puede encontrar dichas imprecisiones en cuestión de segundos: se ha refutado al Mago de Riga con el rigor lógico que alcanzan los ordenadores.

Pero "*Tal no quería descubrir la verdad del ajedrez, lo que quería era ganar*" y así lo hizo en múltiples ocasiones. [16] Aquí entendemos "verdad del ajedrez" en su sentido más lógico, que no es necesariamente el más profundo: cuando un juego está *matemáticamente resuelto* significa que el análisis del juego es total y conclusivo: por ejemplo, en 2007, el grupo del computólogo canadiense Jonathan Schaeffer resolvió débilmente el famoso juego de Damas, es decir, creó un algoritmo capaz de competir contra cualquier jugador y nunca perder,[14] sin importar si ese jugador es un campeón mundial, el mismo algoritmo o la computadora más poderosa del mundo. [17]

Resulta comprensible que Mijaíl Tal y muchos ajedrecistas actuales no estén verdaderamente interesados en descubrir la verdad del ajedrez, pues ello demandaría un análisis exhaustivo o de *fuerza bruta* que no es propio de la tradición ajedrecística, que en realidad vela por la preparación del individuo para que pueda tomar las mejores decisiones que le permita su intelecto y siempre que sea necesario. Por otro

[13] Un ejemplo de gran belleza en donde Tal empató, es la partida que jugó contra el extraordinario ajedrecista Bobby Fischer, en la que se conoce como una de las partidas más complejas que tuvieron lugar en esa época, se puede consultar comentada por Leontxo García en [15].

[14] En otras palabras, se generó el juego perfecto, en el que ninguno de los jugadores comete errores y eso lleva al empate. Por tanto, el algoritmo puede vencer a cualquier jugador que cometa al menos un error. Esto es lo que se conoce como una resolución débil, una ultradébil es aquélla que sólo demuestra la existencia del juego perfecto pero no lo construye, una resolución fuerte involucraría crear un algoritmo capaz de generar juegos perfectos desde cualquier posición y no sólo desde el principio del juego.

lado, se puede argumentar —aunque aquí no lo haremos— que las reglas del ajedrez son arbitrarias, inspiradas dentro de la imperfección humana y que por lo tanto no merecen un análisis sustancial. Dicho lo anterior, ¿Quién sí está preocupado por conocer *la verdad* de su disciplina? ¿Qué sistemas lógicos o de creencias tienen reglas, dogmas o axiomas que no hayan sido arbitrariamente seleccionados, sino promovidos por esa inquietud y esa sensibilidad que nos permiten reconocer patrones y principios universales en lo que observamos en el interior y el exterior?

En la película The Big Short [18], se presenta la escena en la que un rabino cita a la madre de su estudiante de 10 años, después de descubrir el motivo por el cual el niño parece tan sobresaliente en sus estudios en el yeshivá:

> **Rabino:** P. es un buen niño y M. es un excelente estudiante de la Torá y el Talmud.
> **Madre de M.:** Entonces, ¿cuál es el problema, rabino?
> **Rabino:** Es el motivo por el cual M. estudia tan duro... [toma un respiro] ¡Trata de encontrar inconsistencias en la palabra de Dios!
> **Madre de M.:** [preocupada] ¿Y ha encontrado alguna?

Mijaíl Tal tuvo sus opositores, sus críticos que buscaron absurdos en su obra; en una historia quizá ficticia, el mismo Yahvé enfrentó el escrutinio de un estudiante de tan tierna edad, que leía y releía las páginas que comunican sus leyes; de la misma manera, la obra matemática puede ser sometida a un juicio tajante incluso muchos años después de ser publicada. Cualquier estructura, patrón o concepto que pueda ser abordado y representado fielmente mediante un conjunto de proposiciones lógicas, está en riesgo de albergar la contradicción; tanto es así que en algunos escritos matemáticos no se define el concepto de *Conjunto* en sus capítulos iniciales: para no tropezar tan pronto o para no extender prematuramente una invitación cordial a la paradoja. Por el contrario, esos mismos patrones, estructuras y conceptos pueden verse favorecidos de su representación lógica, pues disfrutamos de una rica herencia histórica, a la que podemos acudir por medio de muchos libros y de muchos maestros.

Contar con la certeza de que hay un ojo crítico que observa nuestras inferencias, lejos de poner en riesgo nuestras propuestas, les garantiza vitalidad... aunque la tesis central tenga que ser cambiada o reformulada. No faltó el audaz lector que reconoció la imposibilidad inmediata de que ω fuera igual a $\sqrt{-1}$, por uno de los Teoremas de Viète,[15] por no mencionar a aquéllos que reconocieron a α y ω desde la primera ecuación. ¿Y cuántos sabrán que uno de esos números puede escribirse de maneras distintas, usando sólo los primeros tres números primos y otros símbolos?

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \qquad \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

Pero existen otras cuestiones que quizá son más importantes de analizar:

1. *¿Cuáles son las reglas que aceptamos todos los que estudiamos matemáticas?*

2. *¿Por qué podemos confiar en un resultado previo, como los Teoremas de Viète?*

Existe una tercera pregunta que también resulta interesante plantear (**3.** *¿De dónde nacen las inferencias que hacemos?*) pero por la naturaleza de esta tesis y sobretodo de esta sección, hemos decidido excluirla.

Las cuatro fuentes de conocimiento

"Yo soy el Alfa y la Omega, el Principio y el Fin"

Apocalipsis 22:13

Es necesario confesar que el tratamiento dado al problema inicial —encontrar α y ω, raíces del polinomio $x^2 - x - 1$— no atiende verdaderamente a la necesidad de solucionarlo. En cambio, se ha manipulado la primera ecuación para llegar a otras equivalentes y que ello nos lleve a la discusión de algunos conceptos y nociones, con la intención de que nos resulten familiares cuando se definan recursión, sucesiones recursivas, transformación de sucesiones y sucesiones ultrarrecursivas.

Veremos que todos los procedimientos empleados en ésta y la siguiente sección serán efectivos para solucionar el problema inicial y dar un valor numérico a α y ω, también para desarrollar algunas habilidades de manipulación de expresiones matemáticas y estrategias que conduzcan al desarrollo de nuevos conocimientos.

[15] El resultado puntual que heredó François Viète y que nos resulta de utilidad es el siguiente: $x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2}$ donde x_1 y x_2 son raíces del polinomio de segundo grado $a_2x^2 + a_1x + a_0$, lo cual implica que si $a_2, a_1 \in \mathbb{Q}$, como es nuestro caso, entonces $(x_1 + x_2) \in \mathbb{Q}$. [19] *Consecuentemente, es imposible que nuestra primera ecuación tenga una raíz múltiple imaginaria.*

Antes, nos hemos planteado la pregunta "*¿Cuáles son las reglas aceptadas o establecidas en matemáticas?*". Para nuestros propósitos, la respuesta es sencilla de escribir, pero para que logre ser comprendida, es necesario que quien la lea experimente algún tipo de relación directa con ella; que la cuestione (que *cuestione a la respuesta*), que la ponga a prueba y que extraiga de ella algún beneficio: simiente asegurada de la creación de un recuerdo y de la confianza hacia la teoría. Los beneficios pueden ser una aplicación en otras áreas del conocimiento, alguna ayuda brindada en la vida cotidiana o sencillamente el placer intelectual.

Los axiomas que vamos a adoptar son aquéllos propios de los números reales $\mathbb{R}$, tomados de [20], y se dividen en cuatro conjuntos de axiomas.[16]

I. Axiomas sobre la adición

† *Estabilidad o cerradura:* Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a+b \in \mathbb{R}$.
† *Ley conmutativa:* Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $a+b=b+a$.
† *Ley asociativa:* Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(a+b)+c=a+(b+c)$.
† *Existencia y unicidad del elemento neutro aditivo:* Hay un elemento y sólo un elemento, al que denotamos por '0', tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a+0=a=0+a$.
† *Existencia y unicidad del inverso aditivo:* Para cada $a \in \mathbb{R}$, hay un y sólo un elemento al que denotamos por '$-a$' tal que $a+(-a)=0=-a+a$.

II. Axiomas sobre la multiplicación

† *Estabilidad:* Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$.
† *Ley conmutativa:* Para todo a y b en $\mathbb{R}$, $ab=ba$.
† *Ley asociativa:* Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $(ab)c=a(bc)$.
† *Existencia y unicidad del elemento neutro multiplicativo:* Hay un elemento y sólo un elemento, al que denotamos por '1', diferente de 0, tal que para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1=a=1 \cdot a$.
† *Existencia y unicidad del inverso multiplicativo:* Para cada $a \in \mathbb{R}$, diferente de 0, hay un y sólo un elemento al que denotamos por 'a^{-1}' tal que $a \cdot a^{-1}=1=a^{-1} \cdot a$.

---

[16] A menudo se define axioma como *un enunciado tan sencillo o evidente que se admite sin demostración*, sin embargo, ésta ha demostrado ser una manera limitada de pensar en los axiomas. Un axioma es una proposición que resulta independiente del resto, es decir, que no es deducible ni refutable por las otras proposiciones aceptadas. Históricamente, el *axioma de la elección* y el *quinto postulado de Euclides*, han jugado un papel muy importante en el replanteamiento del axioma como concepto: el primero pertenece precisamente a aquellos axiomas que no son *sencillos* ni *evidentes* y fue demostrado como independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel por Paul Cohen; el segundo, aunque altamente motivado por nuestras intuiciones sobre el espacio, al ser negado da lugar a la formulación de nuevas geometrías: las geometrías no euclidianas, que tienen mucho o todo que ver con nuestro universo, considerando que la Teoría de la relatividad general de Einstein está cimentada en una de ellas, la geometría de Riemann. Para ambos axiomas, existieron matemáticos dispuestos a demostrarlos a partir de otros axiomas, aunque sobra decir que ninguno tuvo éxito. [21–23]

III. Axioma sobre la distribución

† *Ley distributiva:* Para todo a, b y c en $\mathbb{R}$, $a(b+c) = ab + ac$ y $(b+c)a = ba + ca$.

IV. Axiomas de orden

† *Ley de tricotomía:* Para cualesquiera dos elementos a y b en $\mathbb{R}$, una y solamente una de las siguientes relaciones se verifica $a < b$, $a = b$, $a > b$.
† *Ley transitiva:* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
† Si $a < b$, entonces, para todo $c \in \mathbb{R}$, $a + c < b + c$.
† Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Estos cuatro conjuntos de axiomas, junto con *el axioma del supremo* que definiremos más adelante, constituyen las reglas que emplearemos a lo largo de la tesis. De ellos se pueden deducir todas las fórmulas que se enseñan en los primeros años escolares (como la suma de fracciones, las leyes de los exponentes y muchas otras), también algunos resultados que damos por hecho constantemente, por ejemplo, que todo número multiplicado por cero da como resultado cero. Demostremos este hecho:

Demostración. Veamos que para toda a y b en los reales, se cumple lo siguiente $a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot (b+0) = a \cdot b$, según la ley distributiva y la propiedad del neutro aditivo. Ahora sumamos al inverso aditivo de $a \cdot b$ y después empleamos la ley asociativa:

$$a \cdot b + a \cdot 0 = a \cdot b \iff -(a \cdot b) + (a \cdot b + a \cdot 0) = -(a \cdot b) + (a \cdot b)$$
$$\iff (-(a \cdot b) + a \cdot b) + a \cdot 0 = 0 \iff 0 + a \cdot 0 = 0 \iff a \cdot 0 = 0. \qquad \square$$

Todas las demostraciones matemáticas son de esta naturaleza: se parte de axiomas, hechos conocidos o resultados previos y mediante inferencias lógicas válidas se llega al resultado deseado. Esto se relaciona con la pregunta "*¿Por qué podemos confiar en un resultado previo?*" Y una respuesta es *porque presume de haber sido demostrado mediante procedimientos lógicos válidos*. En otras palabras, su veracidad está implícita en los axiomas y la labor de algunos matemáticos es encontrar esas maneras de concatenar los argumentos lógicos, de modo que la hipótesis sea demostrada: el nacimiento de un teorema, que se puede entender como la unión de nueva información verdadera con la información aceptada previamente.

De modo que una pequeña lista de axiomas da lugar a una multitud de teoremas, que se valen de métodos, definiciones y teorías matemáticas para ser correctamente demostrados. Esto recuerda al hecho de que las pocas reglas del ajedrez dan lugar a un número gigantesco de partidas posibles… número que se presume mayor al de los átomos que habitan nuestro universo.

Y como al ajedrecista cuando planea sus estrategias, el procedimiento de demostración exige al matemático creatividad, rigor lógico y una eficiente ejecución. Es natural que surja la pregunta: si actualmente las computadoras pueden vencer a todos los ajedrecistas profesionales,[17] ¿las computadoras también son mejores que los matemáticos más preparados?

Para responder esto, hace falta preguntarnos también *¿De dónde provienen las inferencias que hacen los matemáticos?* Cuando demostramos que todo número multiplicado por cero da como resultado cero, empezamos usando la ley distributiva… pero **¿por qué?** ¿Puede una computadora imitar este comportamiento, aquél que nos lleva a hacer planteamientos convenientes? ¿Puede acaso encontrar un comportamiento más eficiente, como los algoritmos han encontrado maneras de jugar superiores a las que propone cualquier profesional y cualquier teoría ajedrecística?

Desde hace años, las calculadoras son más rápidas que cualquier persona y es cierto que algunos algoritmos derivan e integran con mayor rapidez y eficiencia algunas funciones elementales, pues eso representa un proceso mecánico que al ser humano le exige bastante atención para ser ejecutado sin errores. Para un programa de computadora, es imposible no adoptar y seguir rigurosamente las instrucciones con que ha sido escrito, en cambio, el humano tiende a olvidar detalles o a ignorar algunas imprecisiones o defectos de su trabajo para poder proseguir con otras tareas.

Y es quizá precisamente esto lo que representa una ventaja para el ser humano: la imperfección o *el caos*; el hecho de que su mente tenga un comportamiento estocástico, no predecible, casi garantiza la aparición de ideas no triviales. Si el ser en

[17] Esta afirmación es fuerte y correcta: actualmente, ningún ajedrecista vence a los mejores algoritmos autodidactas, que no fueron programados por ningún humano sino que son capaces de jugar millones de partidas contra sí mismos y mejorar su nivel de juego haciendo modificaciones a su propio código. Es el caso de AlphaZero, que ya domina el ajedrez, el Go y el shōgi, y que además ha mostrado superioridad frente a los mejores algoritmos actuales. Ver [24].

cuestión es capaz de apreciar y evaluar sus propios pensamientos y tiene entrenadas sus habilidades lógico-matemáticas, tendrá la posibilidad de seleccionar las ideas más oportunas y desarrollarlas más tarde con mayor cuidado o rigor: en él reside una fuente del conocimiento, que puede llevarlo a un descubrimiento que se perfeccionará con el paso del tiempo y la llegada de aquellas generaciones que ordenan las teorías.

Para Herbert Turnbull, los cuatro ingredientes de las matemáticas eran la aritmética, el álgebra, el análisis y la geometría; ellos habían sido presentados desde el comienzo mismo de la ciencia: Eudoxo con sus intereses por los números puros, Pitágoras con los patrones y arreglos de objetos, Arquímedes y sus especulaciones acerca del infinito y Apolonio con sus proyecciones de líneas y curvas. [25]

Pasemos a combinar esos cuatro sabores, definiendo a los números ω_1 y ω_2, el primero con un valor de $\omega_1 = \frac{1}{2}$ y el segundo cumpliendo la siguiente relación $\omega_2 = 1 + \frac{1}{\omega_1}$, es decir, $\omega_2 = 1 + \frac{2}{1} = \frac{3}{1}$. Desarrollemos los números siguientes mediante el mismo procedimiento: $\omega_{n+1} = 1 + \frac{1}{\omega_n}$; el resultado es la sucesión

$$(\omega_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{11}{7},\ \frac{18}{11},\ \frac{29}{18},\ \ldots\right).$$

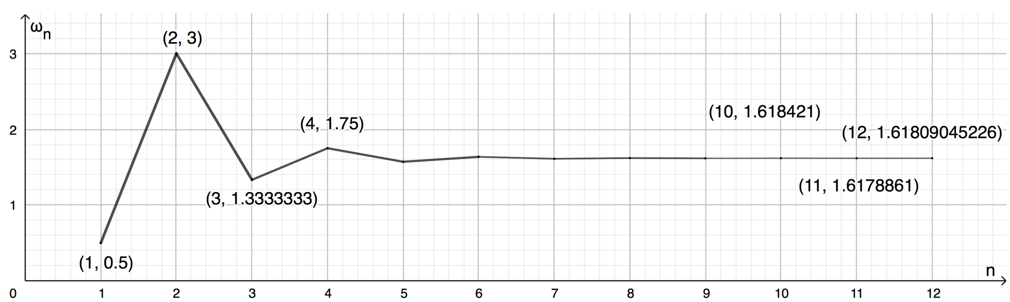


Figura 2: Comportamiento de ω_n con $n > 0$. [26]

En la Figura 2, se observa que conforme n se hace más grande, los elementos consecutivos se hacen más cercanos, es decir, $\omega_n \approx \omega_{n+1}$. Pero $\omega_{n+1} = 1 + \frac{1}{\omega_n}$, luego:

$$\omega_n \approx 1 + \frac{1}{\omega_n}$$

ω_n *es aproximadamente uno más el inverso de* ω_n

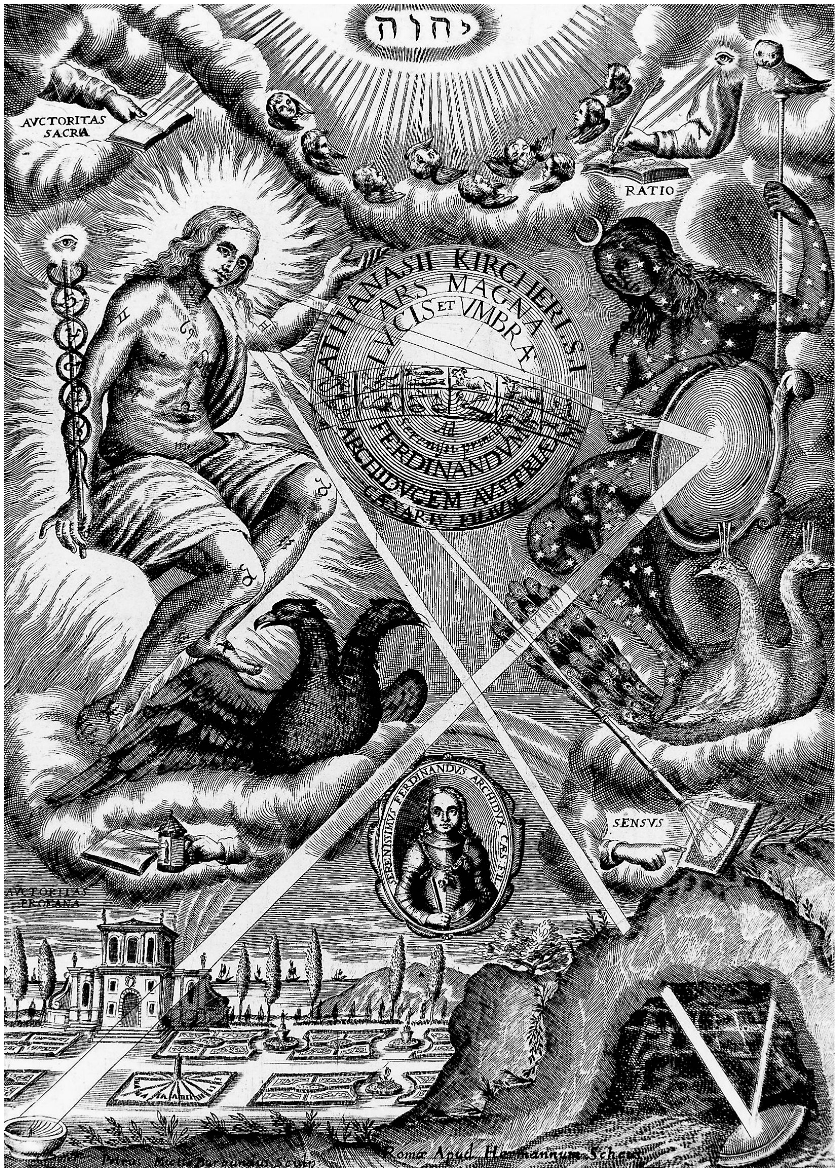


Figura 3: Frontispicio calcográfico diseñado por Petrus Miotte para la obra *Ars Magna Lucis et Umbrae* de Athanasius Kircher, en donde se tratan asuntos de los cuerpos celestes. *Se representan las cuatro fuentes de conocimiento: la Autoridad Sagrada, representada por el Libro de Dios, la Biblia, en el ángulo superior izquierdo, donde es directamente iluminada por Él; la Razón, sobre la cabeza de Diana, la Luna, hallándose cerca de Dios pero filtrada por el ojo interior; el Conocimiento a través de los Sentidos o la Percepción, que no ha sido iluminado por los rayos de Dios, sino por Apolo, el Sol. Finalmente, surgiendo de las nubes de la oscuridad que ocultan la visión del águila bicéfala, está la Autoridad Profana: aquélla de los "grandes libros" o bien del conocimiento heredado de "grandes hombres" que poseían una extraordinaria intuición acerca de la conducta humana y de la naturaleza del universo; está representada como la simple y pobre luz de una vela, insuficiente por sí sola para ayudar a la comprensión del mundo natural si no es complementada por las otras fuentes.* [27–29]

También se observa que los elementos de la sucesión crecen, decrecen, vuelven a crecer, y así sucesivamente: $\omega_1 < \omega_2$, $\omega_2 > \omega_3$, $\omega_3 < \omega_4, \ldots$ Es posible demostrar que este comportamiento prevalecerá.

Lema 1 (Todo lo que sube, baja)**.** *Sea* (ω_n) *una sucesión que satisface la ecuación* $\omega_{m+1} = 1 + \frac{1}{\omega_m}$ *para todo* $m > 0$*. Si* $0 < \omega_n < \omega_{n+1}$*, entonces* $\omega_{n+2} < \omega_{n+1}$*.*

Demostración. Queremos demostrar que $0 < \omega_n < 1 + \frac{1}{\omega_n} \implies 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n}} < 1 + \frac{1}{\omega_n}$.

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n}} < 1 + \frac{1}{\omega_n} \iff \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n}} < \frac{1}{\omega_n} \iff \frac{1}{\omega_n + 1} < \frac{1}{\omega_n^2}$$
$$\iff \omega_n^2 < \omega_n + 1 \iff \omega_n^{-1} \cdot \omega_n^2 < \omega_n^{-1} \cdot (\omega_n + 1) \iff \omega_n < 1 + \frac{1}{\omega_n} \qquad \square$$

Usando exactamente el mismo procedimiento pero cambiando '$<$' por '$>$', puede demostrarse que *todo lo que baja, sube*. Estos hechos y la Figura 2 parecen sugerirnos que conforme n aumenta, ω_n es cada vez más próximo a $1 + \frac{1}{\omega_n}$, o bien, que ω_n tiene una propiedad cada vez más parecida a la de los números α y ω.

El axioma del supremo

"Your powers of observation continue to serve you well"

—V

Volvamos a observar el patrón que tomó lugar en la primera sección:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

Donde los tres puntos suspensivos indican que la expresión matemática ha de continuar: nuevos números, símbolos de suma y de fracción irían apareciendo de no ser porque nos es imposible dibujar un patrón infinito con la tinta de las impresoras o con los *pixeles* de una pantalla, según sea el caso. Si nos olvidamos por unos instantes del trasfondo matemático que contienen aquellos símbolos y los apreciamos como las imágenes que también son, podemos intuir que la imagen total aparecería múltiples veces en la representación infinita que jamás podremos ver; puntualmente, se observa que la imagen completa reaparecería en cada denominador existente.

De una manera similar puede representarse al término n-ésimo de la sucesión (ω_n), colocando a ω_1 en el denominador número $n-1$:

$$\omega_2 = 1 + \frac{1}{\omega_1}, \quad \omega_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_1}}, \quad \omega_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\omega_1}}}, \quad \cdots \quad \omega_n = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}$$

De esta sucesión sabemos que $0 < \omega_n < \omega_{n+1} \implies \omega_{n+2} < \omega_{n+1}$, es decir, sus valores oscilan. También se tiene la siguiente propiedad

Lema 2. $0 < \omega_n < \omega_{n+1} \implies \omega_n < \omega_{n+2}$, *y por el Lema 1,* $\omega_n < \omega_{n+2} < \omega_{n+1}$.

Demostración. Queremos mostrar que $\omega_n < 1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}$ o bien $\omega_n < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n}}$:

$$\omega_n < 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega_n}} \iff \omega_n + 1 < 1 + \frac{1}{\omega_n} + 1 \iff \omega_n < 1 + \frac{1}{\omega_n} \iff \omega_n < \omega_{n+1} \quad \square$$

Todo lo que este resultado y su análogo ($\omega_n > \omega_{n+1} \implies \omega_n > \omega_{n+2} > \omega_{n+1}$[18]) nos quieren transmitir es: una vez que se ha obtenido un *número grande*, jamás se podrá generar, bajo las mismas instrucciones[19], un número mayor a él, y lo mismo puede decirse de los *números pequeños*. Es decir, cada número ω_n mayor (menor) al anterior ω_{n-1} delimita por siempre el crecimiento (decrecimiento) de los siguientes números. La Figura 4 muestra visualmente en qué consiste esa delimitación y cómo ello indica que ω_n tiende a cierto valor conforme n aumenta...

ω_n es cada vez más parecido a uno más el inverso de ω_n.

[18] También puede usarse la misma demostración cambiando todo '$<$' por '$>$'.

[19] Estas *instrucciones* serán representadas con la función $A\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $A(x) \equiv 1 + \frac{1}{x}$. Por definición: $A(\omega) = \omega$, $A(\alpha) = \alpha$, es decir, α y ω son sus eigenelementos (Definición A.14). El elemento ω_2 es resultado de $A(\omega_1) = A(\frac{1}{2})$, ω_3 es $A(\omega_2) = A(A(\omega_1)) = [A \circ A](\omega_1) \equiv A^2(\omega_1)$ y en general $\omega_n = A^n(\omega_1)$. Por las propiedades que se han empleado, los Lemas 1 y 2 son validos para cualquier valor que resulte de $A^n(x)$ con $x > 0$.

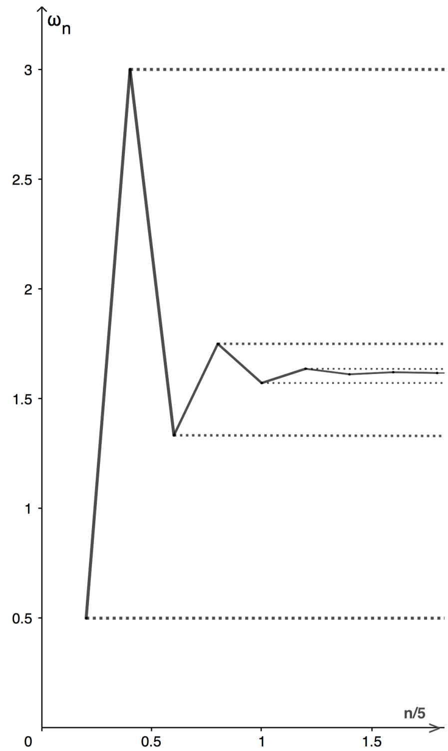


Figura 4: Comportamiento de (ω_n), o bien, de la función $A^n(\frac{1}{2})$. [26]

Esto podría parecernos una enorme coincidencia: primero definimos un número arbitrario $\omega_1 = \frac{1}{2}$ y después de aplicarle varias veces la función $A(x) = 1 + \frac{1}{x}$ obtuvimos una *aproximación* de ω.[20]

Usamos la palabra "aproximación" por lo que se verá a continuación: Si tomamos el número $\omega_{12} = 1.61809045226$ y lo evaluamos en el polinomio $\Omega(x) = x^2 - x - 1$, obtenemos lo siguiente: $\Omega(\omega_{12}) = 0.000126\ldots$

Es decir, ω_{12} es *cercano* a una de las raíces de $\Omega(x)$. Al lector le sorprenderá saber que si se elige arbitrariamente casi cualquier valor,[21] tras aplicarle una cierta cantidad de veces la función A, se obtienen aproximaciones de ω. Por ejemplo, si tomamos el número 1650 y le aplicamos treinta veces la función A, obtenemos lo siguiente:

$$A^{30}(1650) = 1 + \tfrac{848795661}{1373380229} = 1 + \tfrac{3^2\times 7\times 13472947}{13\times 59\times 1790587} = \mathbf{1.6180339887}50\ldots$$[22]

Si este número es cercano a ω, denotémoslo como $\tilde{\omega}$ y evaluemos $1+\frac{1}{\tilde{\omega}}$, es decir, $A(\tilde{\omega})$,

[20]Ya hemos decidido que la raíz positiva es la que se llamará ω.

[21]Más adelante se encontraran esos valores que son la excepción a este enunciado.

[22]Para realizar este agradable cálculo se empleó una calculadora de fracciones disponible gratuitamente en [30].

o bien $A^{31}(1650)$:

$$1 + \frac{1}{\tilde{\omega}} = \mathbf{1.618033988749}\ldots$$

Los primeros 11[23] *dígitos de $\tilde{\omega}$ son iguales a los de uno más el inverso de $\tilde{\omega}$.*

Ambos valores, $\tilde{\omega}$ y $A(\tilde{\omega})$, delimitan superior e inferiormente a cualquier posible valor $A^n(\tilde{\omega})$; por ejemplo $A(\tilde{\omega}) < A^2(\tilde{\omega}) < \tilde{\omega}$. De hecho, por el Lema 2 y como se puede intuir en la Figura 4, si $x > 0$ es tal que $A(x) < A^2(x)$, entonces $A^{2n+2}(x) < A^{2n}(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$[24] —con $A^0(x) \equiv I_{D_A}(x) = x$— significando que los valores $A^{2n}(x)$ decrecen conforme el valor de n aumenta:

$$A(x) < \cdots < \boldsymbol{A^{2n+2}(x)} < \boldsymbol{A^{2n}(x)} < \cdots < \boldsymbol{A^2(x)} < \boldsymbol{A^0(x)}$$

Por el contrario, los valores de $A^{2n+1}(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tienden a aumentar de valor:

$$\boldsymbol{A(x)} < \boldsymbol{A^3(x)} < \cdots < \boldsymbol{A^{2n+1}(x)} < \boldsymbol{A^{2n+3}(x)} < \cdots < A^0(x)$$

Observemos que $A(x)$ acota inferiormente los valores de la forma $A^{2n}(x)$ y $A^0(x)$ acota superiormente los valores de la forma $A^{2n+1}(x)$. Estos hechos simultáneos implican que cualquier número de la forma $A^{2m+1}(x)$ es una cota inferior de los números $A^{2n}(x)$: $A^{2m+1}(x) < A^{2n}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$; similarmente, cualquier $A^{2m}(x)$ es una cota superior de los números A^{2n+1}: $A^{2n+1}(x) < A^{2m}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Definamos formalmente a qué nos referimos con “delimitar” o “acotar”. [20]

Definición 1. Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales está **acotado superiormente** si existe un número c tal que, para todo $x \in \mathcal{S}$ se cumple $x \leq c$. A dicho número c se llama **cota superior** de $\mathcal{S}$.

Definición 2. Un conjunto $\mathcal{S}$ de números reales está **acotado inferiormente** si existe un número c tal que, para todo $x \in \mathcal{S}$ se cumpla $x \geq c$. A dicho número c se llama **cota inferior** de $\mathcal{S}$.

[23] En notación decimal.

[24] Para realizar ésta y otras aseveraciones que se verán más adelante, se ha empleado un concepto conocido como **Inducción matemática**, que por el momento tomaremos como un hecho y que consiste en suponer que si hay un conjunto $\mathcal{S}$ tal que $0 \in \mathcal{S}$ y $n \in \mathcal{S} \implies n+1 \in \mathcal{S}$, entonces $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{S}$.

En nuestro ejemplo anterior, mostramos que existe una infinidad de cotas superiores de los números $A^{2n+1}(x)$: cualquier número de la forma $A^{2m}(x)$. De hecho, si $A^{2m}(x)$ es una cota superior, $A^{2m+2}(x)$ es una cota superior de menor valor, por lo que nunca encontraremos un número de la forma $A^{2m}(x)$ que sea una cota superior de menor tamaño que cualquiera otra. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 3. Un número c se llama **supremo** de un conjunto $\mathcal{S}$, que escribimos como $c = \sup \mathcal{S}$, si c es una cota superior de $\mathcal{S}$ y ningún número menor que c es una cota superior de $\mathcal{S}$.

Similarmente, puede definirse al **ínfimo** de un conjunto como el mayor número que representa una cota inferior. Debido a que no existe ningún supremo para el conjunto de números $A^{2n+1}(x)$ de la forma $A^{2m}(x)$, es natural preguntarse si dicho conjunto en realidad tiene un supremo… Enunciemos el último axioma de los números reales, que da una respuesta afirmativa a esta pregunta.

V. Axioma del supremo

† Si $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ y éste se encuentra superiormente acotado, entonces $\mathcal{S}$ tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

No es necesaria la existencia de un "*axioma del ínfimo*", debido a que el axioma del supremo implica la existencia de un ínfimo para todo conjunto de valores reales $\mathcal{S}$ que sea inferiormente acotado por c. Basta con considerar el conjunto $\mathcal{S}^-$ de los inversos aditivos de los elementos de $\mathcal{S}$, que tiene una cota superior igual a $-c$, por tanto $\mathcal{S}^-$ tiene un supremo k, ¡implicando $-k$ que será el ínfimo de $\mathcal{S}$!

Demostración. Sea $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ y c su cota inferior, $c \leq s_i$ para todo $s_i \in \mathcal{S}$. Veamos que $\mathcal{S}^- = \{-s_1, -s_2, -s_3, \ldots\}$ tiene una cota superior $-c$:

$$-s_i \leq -c \iff -s_i + (c + s_i) \leq -c + (c + s_i) \iff c \leq s_i$$

Lo cual es cierto por hipótesis. Por tanto, $\mathcal{S}^-$ tiene un supremo que llamamos k y, por un despeje similar al anterior, se demuestra que $\mathcal{S}$ tiene como ínfimo a $-k$. $\square$

Armados con todos estos conceptos y con la reducción al absurdo, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el primer teorema no trivial de nuestro estudio:

Teorema 1. *Sea la función $A(x) = 1 + \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, cuyos eigenelementos son ω, raíz positiva de $\Omega(x) = x^2 - x - 1$ y α, la raíz negativa, se tiene que:*
1) *Si $x > \omega$, entonces $0 < A(x) < \omega$, así como $\omega < A^2(x)$.*
2) *Si $x > \omega$, el supremo del conjunto de números $\{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ es igual al ínfimo de $\{A^{2n}(x)|n \in \mathbb{N}\}$, que es igual a ω:*

$$\sup\ \{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{2n}(x)|n > 0\} = \omega$$

3) *Si $0 < y < \omega$, $A(y) > \omega$, luego:* $\sup\ \{A^{2n}(y)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \omega$.

La demostración de este teorema excede nuestros propósitos actuales, pero se invita al lector a consultarla en el capítulo *Demostraciones* de los Apéndices. El Teorema 1 explica el hecho de que para cualquier $x > 0$ y con un n suficientemente grande, $A^n(x)$ tiene un comportamiento parecido al del número ω. De hecho, podría decirse que es posible acercarnos al valor numérico de ω tanto como deseemos empleando la función A, o bien, que ω es el resultado de aplicar infinitas veces la función A a cualquier número positivo, pero para hacer estas afirmaciones hacen falta algunos conceptos que aún no introducimos —como la definición de límite de una función— y que son ajenos al espíritu de este primer capítulo.

Lo que nunca ha de estar prohibido es hacer suposiciones, basadas o no en observaciones, lo mismo que en corazonadas, conjeturas o cualquier mecanismo que nos lleve a cuestionar una estructura lógica o matemática y con ello extraerle algunas verdades. Esas *verdades* que hemos extraído a lo largo de este capítulo son referentes al comportamiento de la función A.

Primero motivados por observar las gráficas de $A^n(\frac{1}{2})$ (o bien, de los primeros elementos de la sucesión (ω_n)), creímos que esos números tendían a aproximarse a un valor; luego, con ayuda del axioma del supremo y de la demostración por reducción al absurdo, encontramos que el supremo (de los números del tipo $A^{2n+1}(\frac{1}{2})$) y el ínfimo (de los números del tipo $A^{2n}(\frac{1}{2})$) son ambos la raíz positiva del polinomio $\Omega(x)$, que hasta ahora hemos denotado como ω.

Veamos que dicho polinomio está relacionado con el que aparece implícitamente en el libro Elementos de Euclides, cuando define lo que después sería conocido como la proporción aúrea, la proporción divina, entre otros nombres:

Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor: $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}$.

De modo que si el segmento total es igual a la parte mayor multiplicada por la proporción áurea —denotada como φ y a veces como ϕ— se tiene que $AB = \varphi(CB)$. Considerar que $AC = AB - CB = (\varphi - 1)CB$, conduce a lo siguiente

$$\varphi = \frac{CB}{AC} = \frac{CB}{(\varphi - 1)CB} \iff \varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

Tomemos el lado derecho de la última igualdad y pensémosla como una transformación[25] o una función B, es decir, pensemos en la ecuación $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$ como $\varphi = B(\varphi)$ donde $B(x) \equiv \frac{1}{x-1}$ para todo $x \neq 1$. Observemos que $[B \circ A](x) = B(1 + 1/x) = \frac{1}{(1+1/x)-1} = \frac{1}{1/x} = x$ siempre x que esté en el dominio de A y que $A(x)$ esté en el dominio de B. Se dice que $B \circ A = I_{\mathcal{D}_A}$ donde $I_{\mathcal{D}_A}$ es la función identidad del dominio de A.[26] Similarmente, $[A \circ B](x) = 1 + \frac{1}{1/(x-1)} = 1 + (x - 1) = x$, por lo tanto, $A \circ B = I_{\mathcal{D}_B}$.

Se dice que B es la función inversa de A y se denota como A^{-1}; recordemos que ambas fueron definidas precisamente gracias a sus eigenelementos: aquéllos valores que permanecen invariantes ante la aplicación de la función. Por ejemplo, $A(\omega) = \omega$ y $A(\alpha) = \alpha$, así como $A^{-1}(\varphi) = \varphi$. Observemos que $A(\varphi) = A(A^{-1}(\varphi)) = [A \circ A^{-1}](\varphi) = I_{\mathcal{D}_{A^{-1}}}(\varphi) = \varphi$, uniendo ambos extremos: $A(\varphi) = \varphi \ldots$ ¡la proporción áurea es eigenelemento de A!

[25] Ésta no será la última vez que haremos algo parecido a esto.

[26] Aquí hemos tomado la premisa de que $A(x) \in \mathcal{D}_B$ para todo $x \neq 0$; esto se demuestra si se tiene en cuenta que $1 + \frac{1}{x} \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Posteriormente también asumimos que $B(x) \in \mathcal{D}_A$ para todo $x \neq 1$, lo cual se verifica de $\frac{1}{1-x} \neq 0$.

Pero sabemos, por definición, que A sólo tiene dos eigenelementos: las dos raíces del polinomio $\Omega(x)$; debido a que φ representa una proporción entre dos distancias positivas, este número es positivo y consecuentemente...

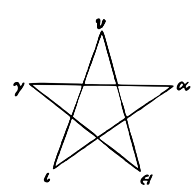
ω y la proporción áurea son el mismo número: $\omega = \varphi$

Para los pitagóricos, este número tenía un valor no solamente matemático, sino místico: aparece en el pentagrama que tan ampliamente adoraron y que asociaron con el universo, la naturaleza, la salud y el arte. Se encuentra en muchas expresiones geométricas pero sobretodo en el pentágono, cuando se calcula la proporción entre su lado y los segmentos del pentagrama inscrito en él.

* Para conocer un poco más acerca de la relación entre ϕ y las matemáticas antiguas, puede consultarse del capítulo *Agregados* de los Apéndices la sección *La proporción áurea y el pentágono*.

A partir de este momento, adoptaremos la manera más común de representar a la raíz positiva de $\Omega(x)$, que es con la letra *phi*: φ, así como no seguiremos hablando de α, sino de $\psi \equiv -\frac{1}{\varphi}$; con esta metamorfosis podemos despedirnos de los dos protagonistas de este capítulo. [31]

"*La quintaesencia de la verdad mental es el símbolo*"



1. En un principio era el signo

De manera típica, se soluciona una ecuación como $x^2 = x + 1$ al encontrar una manera efectiva de despejar x. En cambio, la manera en que nosotros lo resolvemos consiste en definir un valor inicial (en nuestro caso $\frac{1}{2}$) y mostrar que el límite de aplicar la función A infinitas veces es la solución que buscamos ($A^\infty(\frac{1}{2}) = x_1 = \varphi$).

Para que esto sea posible, no es necesario realizar un número infinito de cálculos, basta con encontrar un patrón en los primeros cálculos y ser capaz de demostrar que dicho patrón o comportamiento prevalecerá, para lo cual generalmente se emplea el Principio de Inducción. Para formular dicho principio, **también se emplea el concepto de recursión**, como también se emplea para definir el conjunto de los números naturales; ello nos dice que las definiciones recursivas permiten comunicar con pocos símbolos la totalidad de un conjunto infinito.

Por ejemplo, es posible definir la función factorial de números naturales de la siguiente manera:

- Primera regla: $0! = 1$
- Segunda regla: para todo entero $n > 0$, $n! = n \cdot (n-1)!$

Si tenemos interés de conocer el número 8!, podemos calcularlo con las reglas anteriores, lo cual significa calcular un cierto número de operaciones.[1] También es posible encontrar una función que asemeje al comportamiento de $n!$ conforme n se hace muy grande, y quizá permita conocer un valor aproximado de la función en un **menor número de pasos**... Éste es uno de los caminos de una estructura definida recursi-

[1] Actualmente, estas operaciones rara vez son calculadas por una persona. Más tarde veremos cómo la computación puede jugar un papel importante en el estudio matemático.

vamente: el ser reemplazada por otra función más conveniente. Ocurre con la sucesión de Fibonacci y con los números de Lucas, que pueden ser expresados con funciones del tipo $f(n) = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$ donde α y β son ciertas constantes, también ocurre con cualquier sucesión cuya definición recursiva sea análoga a la de Fibonacci.

Por ello fue desconcertante cuando aparecieron sucesiones recursivas que no podían ser representadas con alguna función conveniente, ni analítica, ni derivable, ni siquiera estrictamente creciente: es el caso de una de las sucesiones propuestas por Hofstadter, que mantiene semejanza en su formulación con la sucesión de Fibonacci, pero se distingue de ella y sus bondades, como se verá en el próximo capítulo.

El interés de este capítulo es precisamente conocer algunas de las bondades que tienen todas las sucesiones análogas a las de Fibonacci, ésas que se definen con la recursión más común y que pueden ser modeladas con funciones conocidas y "afables". Para entender que las propiedades de estas sucesiones no son sólo una casualidad o un milagro, sino que pueden ser interpretadas y demostradas matemáticamente, es necesario equiparse con ciertos conocimientos que se desarrollan ampliamente en el capítulo *Notas importantes* de los Apéndices.

Reminiscencia

En el capítulo anterior, hablamos del polinomio $\Omega(x) = x^2 - x - 1$ con raíces que representamos como φ y $\psi = -\frac{1}{\varphi}$. Aún no conocemos el valor numérico exacto de estos números y tampoco sabemos si son racionales o irracionales. Es de nuestro conocimiento que si ambos cumplen la ecuación $x^2 = x + 1$, también cumplen $x = A(x)$.

Teorema 1. *Para toda $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} A^n(x) = \varphi$. Donde φ es el número positivo que satisface la ecuación de segundo grado $x^2 = x + 1$.*

Demostración. Por la Definición A.20 y el *Principio de cercanía* de la demostración del Teorema 0.1, nuestra intención es mostrar que para todo ε: $0 < \varepsilon < 1$ y todo $x > 0$ existe algún N tal que

$$|A^N(x) - \varphi| < \varepsilon$$

Empezaremos suponiendo que $\varphi < x$. El Teorema 0.1 nos dice que $\varphi < A^{2n}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que el conjunto de números de la forma $A^{2n}(x)$ tiene como ínfimo a φ. Por lo tanto, si existiera un ε tal que para todo n se cumpliera

$$|A^{2n}(x) - \varphi| = A^{2n}(x) - \varphi > \varepsilon,$$

esto implicaría que $A^{2n}(x) > \varphi + \varepsilon \ \forall n$, lo cual es imposible puesto que φ es el ínfimo de dicho conjunto. Por lo tanto, si $\varphi < x$ debe existir un número $N = 2n$ tal que $|A^m(x) - \varphi| < \varepsilon$ para todo $m \geq N$, como se quería demostrar.
Por otro lado, si $0 < x < \varphi$, sabemos que $\varphi < A(x)$ y ya mostramos que debe existir un N tal que $A^N(A(x)) - \varphi = |A^{N+1}(x) - \varphi| < \varepsilon$. Finalmente, si $x = \varphi$, para toda n, $A^n(x) = \varphi \implies |A^n(x) - \varphi| = 0 < \varepsilon$. □

¡Finalmente podemos presumir que hemos encontrado al número φ, o una manera de aproximarlo tanto como deseemos!

$$\varphi = 1.618033988749\ldots$$

Hasta ahora hemos cuidado que todos los números que transformamos con la función A sean mayores a cero. Esto es así porque $A(x) = 1 + \frac{1}{x}$ está indefinido cuando $x = 0$, implicando que $A^2(x) = 1 + \frac{1}{A(x)}$ está indefinido cuando $A(x) = 0$, es decir, cuando $A^{-1}(A(x)) = A^{-1}(0)$, o bien cuando $x = \frac{1}{0-1} = -1$.

Busquemos todos los números enteros que no podrían formar parte del dominio de $A^k(x)$, estos tendrán la forma $A^{-m}(0)$ cuando $0 \leq m < k$. Ya conocemos $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = -\frac{1}{1}$ y conocemos la manera de encontrar el siguiente $\alpha_2 = A^{-1}(\alpha_1)$. En general: $\alpha_n = A^{-1}(\alpha_{n-1}) = A^{-n}(0)$.

$$\alpha_1 = -\frac{1}{1},\ \alpha_2 = -\frac{1}{2},\ \alpha_3 = -\frac{2}{3},\ \alpha_4 = -\frac{3}{5},\ \alpha_5 = -\frac{5}{8},\ \alpha_6 = -\frac{8}{13},\ \alpha_7 = -\frac{13}{21},\ \ldots$$

A estas alturas no debería sorprendernos que $\alpha_7 = -0.\mathbf{61}9047619$, es decir que α_7 y en general α_n para n mucho mayor a uno, tenga los mismos primeros ‘números después del punto' que φ, de hecho —por ser estos valores negativos— se tiene que $\alpha_n \approx 1 - \varphi = \psi$. Es decir, no debería sorprendernos la relación entre la sucesión (α_n) (generada con la función inversa de A) y la raíz negativa del polinomio $x^2 - x - 1$. Puede demostrarse que para todo x negativo $\lim\limits_{n\to\infty} A^{-n}(x) = \psi$.

Teorema 2. *Si $x < \psi$, el supremo del conjunto de números $\{A^{-2n}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es igual al ínfimo de $\{A^{-2n-1}(x)|n > 0\}$, que es igual a ψ:*

$$\sup \{A^{-2n}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \inf \{A^{-2n-1}(x)|n > 0\} = \psi$$

Similarmente, si $\psi < y < 0$, $A(y) < \psi$, luego:

$$\sup \{A^{-2n-1}(y)|n \in \mathbb{N}\} = \inf \{A^{-2n}(x)|n > 0\} = \psi$$

Corolario 1. *Por métodos análogos a los empleados en el Teorema 1, puede demostrarse que para toda $x < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} A^{-n}(x) = \psi$.*

Hemos visto que $\alpha_0 \notin \mathcal{D}_A$, $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathcal{D}_{A^2}$ y, en general, que ningún miembro de la sucesión $(a_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1})$ es elemento de $\mathcal{D}_{A^m}$. También puede decirse que el conjunto $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ tiene una intersección nula con el dominio de A^∞.[2]

Hemos generado dos sucesiones de números:

$$(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(-\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{7}, \frac{18}{11}, \frac{29}{18}, \frac{47}{29}, \ldots\Big): \qquad \lim_{m\to\infty} \omega_m = \varphi = 1.6180\ldots$$
$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\frac{0}{1}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{8}, -\frac{8}{13}, \ldots\Big): \quad \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \psi = -0.6180\ldots$$

Hay dos cosas que resulta interesante notar:

1. Todos los denominadores en (ω_n) y (α_n) también aparecen como numeradores.
2. A partir del tercer elemento, todos los numeradores en (ω_n) y (α_n) son igual a la suma de los dos numeradores anteriores.

[2] Sabemos que $A^{-1}(\alpha_{n-1}) = \alpha_n$ para toda $n > 0$. Por lo tanto, si $\alpha_n \neq 0$, entonces $A(A^{-1}(\alpha_{n-1})) = A(\alpha_n) \implies \alpha_{n-1} = A(\alpha_n)$; lo cual implica que no existe el número α_{-1}, tampoco α_{-2} y así sucesivamente. Por el contrario, observemos que si $\omega_1 = \frac{1}{2}$, existe $\omega_0 \equiv A^{-1}(\omega_1) = \frac{1}{\omega_1 - 1} = \frac{1}{1/2-1} = -2$. Es decir, el número -2 genera toda la sucesión (ω_n) mediante la función A; este hecho resulta de gran belleza porque, como se verá más adelante, los números 2 y -2 juegan un papel de gran importancia en las sucesiones ultrarrecursivas.

Antes de proseguir, consideremos el comportamiento de $(\omega_m - \alpha_m)^2$ para $m > 0$, cuyos primeros valores son los siguientes (m aumenta de izquierda a derecha y de arriba a abajo en la tabla):

m	0	1	2
$(\omega_m - \alpha_m)^2$	$(-2-0)^2 = 4$	$(1/2+1)^2 = 2.25$	12.25
$(\omega_{3+m} - \alpha_{3+m})^2$	4	5.52	4.82
$(\omega_{6+m} - \alpha_{6+m})^2$	5.07	4.97	...

Observemos que cada nuevo valor parece aproximarse al número cinco. Demostremos que este comportamiento se explica con el Teorema A.2, usando la función continua $x \mapsto x^2$ y los límites de ω_m y α_m cuando m tiende a infinito:

$$\lim_{m\to\infty} (\omega_m - \alpha_m)^2 = (\varphi - \psi)^2 = (\varphi - (1-\varphi))^2 = (2\varphi - 1)^2 = 4\varphi^2 - 4\varphi + 1$$

Pero $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, luego $(2\varphi - 1)^2 = (4\varphi^2 - 4\varphi - 4) + 4 + 1 = 0 + 5 = 5$.

Ahora bien, ¡de la igualdad $(2\varphi - 1)^2 = 5$, es posible despejar φ!

$$(2\varphi - 1)^2 = 5 \iff 2\varphi - 1 = \sqrt{5} \iff \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Nos tomó varias páginas resolver el *misterio* con el que empezó nuestra aventura: dimos finalmente con la expresión a la que suele llegar en segundos todo el que resuelve el polinomio $x^2 - x - 1$ usando la fórmula general. Pero nosotros también hemos generado algunos dígitos del número irracional φ sin haber calculado ninguna raíz cuadrada, únicamente empleamos sumas, multiplicaciones y el concepto de límite. Hemos encontrado una manera extraña de calcular la raíz cuadrada de cinco.

$$\sqrt{5} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}}$$

Por otro lado, si $\varphi^2 = \varphi + 1$, es cierto que $\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Por ejemplo: $\varphi^2 = \varphi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$. Es decir:

$$\varphi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$$

como anticipábamos hace unas páginas. Si seguimos, $\varphi^4 = \varphi^3 + \varphi^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $\varphi^5 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$, $\varphi^6 = \frac{18+8\sqrt{5}}{2}, \ldots$ podemos notar que los números en el numerador que acompañan a $\sqrt{5}$ son los numeradores de ω_n y α_n:

$$\varphi^m = \frac{N(\omega_m) + N(\alpha_m)\sqrt{5}}{2}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ donde $N(\alpha_m)$ es el numerador de α_m y $D(\alpha_m)$ su numerador, ambos con valor positivo. Lo mismo para $N(\omega_m)$ y $D(\omega_n)$. Estos números son conocidos como sucesión de Fibonacci y los números de Lucas, respectivamente:

$$(F_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$$
$$(L_n)_{n=0}^{\infty} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots)$$

En ambas sucesiones, todos los elementos excepto los dos valores iniciales cumplen la siguiente relación de recursión:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} \tag{1}$$

Que quiere decir "el n-ésimo elemento es la suma de los dos elementos anteriores", lo cual será cierto siempre que existan dos valores anteriores. En el caso de la sucesión de Fibonacci, se cuenta con los valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, en cambio los números de Lucas tienen las condiciones iniciales $L_0 = 2$ y $L_1 = 1$.

Más adelante, veremos que es posible extender estas sucesiones "hacia la izquierda", es decir, encontrar F_{-1} y L_{-1}. Aunque aún no las construiremos, es conveniente mencionar que existen las sucesiones $(F_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ y $(L_k)_{k=-\infty}^{\infty}$, donde **todos** los elementos satisfacen la expresión (1). Denotaremos como $\mathfrak{F}$ a esta recursión.

Veamos que $\omega_1 = \frac{1}{2} = \frac{L_1}{L_0}$ y $\alpha_1 = -\frac{1}{1} = -\frac{F_1}{F_2}$. Y $\omega_{m+1} = 1 + \frac{1}{\omega_m}$, por lo que

$$\omega_m = \frac{L_m}{L_{m-1}} \implies \omega_{m+1} = 1 + \frac{L_{m-1}}{L_m} = \frac{L_m + L_{m-1}}{L_m} = \frac{L_{m+1}}{L_m}.$$

Por otro lado $\alpha_{m+1} = \frac{1}{\alpha_m - 1}$, y consecuentemente:

$$\alpha_m = -\frac{F_m}{F_{m+1}} \implies \alpha_{m+1} = \frac{1}{-F_m/F_{m+1} - 1} = \frac{F_{m+1}}{-F_m - F_{m+1}} = -\frac{F_{m+1}}{F_{m+2}}.$$

Por lo tanto, parece que hemos demostrado que si el numerador de ω_m (α_m) es un número de Lucas (Fibonacci), los siguientes denominadores serán los siguientes números de Lucas (Fibonacci), por el Principio de Inducción (Teorema A.3). Pero en esta afirmación hemos supuesto que ω_m tiene una sola representación racional, en donde el numerador y el denominador no comparten ningún divisor —lo cual es consecuencia del Teorema Fundamental de la Aritmética (Teorema A.10)— y que esa representación es equivalente a

$$\omega_n = 1 + \frac{1}{\omega_{n-1}} = 1 + \frac{1}{N(\omega_{n-1})/D(\omega_{n-1})} = 1 + \frac{D(\omega_{n-1})}{N(\omega_{n-1})} = \frac{D(\omega_{n-1}) + N(\omega_{n-1})}{N(\omega_{n-1})}$$

Lo cual puede demostrarse con ayuda de dicho teorema, debido a que si D y N son números enteros que no comparten ningún divisor, entonces $D + N$ no comparte ningún divisor ni con D ni con N.

Demostración. Supongamos que existe a que divide a $D + N$ y que también divide a N.

$$\frac{D+N}{a} = b \implies \frac{D}{a} + \frac{N}{a} = b \implies \frac{D}{a} = b - \frac{N}{a}$$

Pero b y $\frac{N}{a}$ son enteros por hipótesis, implicando que a divide a D, lo cual contradice nuestra hipótesis de que D y N no comparten ningún divisor. $\square$

Sólo ahora estamos en condiciones de escribir algunas consideraciones pasadas como teoremas, con toda la certeza de que su verdad se halla fundamentada en los principios más básicos de la construcción axiomática de las números reales que adoptamos desde el inicio.

Teorema 3. *1) Para toda $n \in \mathbb{N}$, $A^n(-2) = \frac{L_n}{L_{n-1}}$, $A^{-n}(0) = -\frac{F_n}{F_{n+1}}$. Donde $A(x) = 1 + \frac{1}{x}$ y $A^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ y F_n, L_n son términos de la sucesión de Fibonacci y de los números de Lucas, que satisfacen la recursión $\mathfrak{F}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

2) Sea φ la proporción áurea, raíz positiva de la ecuación $x^2 = x + 1$, para toda $n \in \mathbb{Z}$ existe la siguiente representación

$$\varphi = \sqrt[n]{\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}}$$

O bien $\varphi^n = \frac{1}{2}(L_n + F_n\sqrt{5})$.

Demostración. **1)** Recordemos que $A^n(-2) = \frac{L_n}{L_{n-1}}$ implica $A^{n+1}(-2) = \frac{L_{n+1}}{L_n}$. Veamos también que $A^{n+1}(-2) = \frac{L_{n+1}}{L_n} \implies A^n(-2) = A^{-1}(A^{n+1}(-2)) = \frac{L_n}{L_{n+1}-L_n} = \frac{L_n}{L_{n-1}}$. Sabemos que para $n = 1$, $A(-2) = \frac{1}{2} = \frac{L_1}{L_0}$; luego, por el Corolario A.1,

$$A^n(-2) = \frac{L_n}{L_{n-1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. La prueba para $A^{-n}(0) = -\frac{F_n}{F_{n+1}}$ es equivalente.

2) Recordemos que $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$, también que $\varphi^0 = \frac{L_0+F_0\sqrt{5}}{2}$ y $\varphi^1 = \frac{L_1+F_1\sqrt{5}}{2}$. Luego, las ecuaciones $\varphi^n = \frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}$ y $\varphi^{n+1} = \frac{L_{n+1}+F_{n+1}\sqrt{5}}{2}$ implican que:

$$\begin{aligned}\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n &= \frac{1}{2}(L_n + F_n\sqrt{5} + L_{n+1} + F_{n+1}\sqrt{5}) \\ &= \frac{1}{2}(L_{n+2} + F_{n+2}\sqrt{5}).\end{aligned}$$

Similarmente, puede demostrarse que las ecuaciones de arriba implican $\varphi^{n-1} = \frac{1}{2}(L_{n-1} + F_{n-1}\sqrt{5})$. Luego, por el Corolario A.2, se cumple

$$\varphi^n = \frac{1}{2}(L_n + F_n\sqrt{5})$$

para toda $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $\varphi = (\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2})^{1/n} \equiv \sqrt[n]{\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}}$. $\square$

Corolario 2. *De los límites ya conocidos de ω_n y α_n, se tiene que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \lim_{n\to\infty} A^n(-2) = \varphi$$
$$\lim_{n\to\infty} -\frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} A^{-n}(0) = \psi$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = -\psi^{-1} = \varphi$.

* Para profundizar un poco más en la naturaleza de la función A y su relevancia en el trabajo, se recomienda consultar del capítulo *Agregados* de los Apéndices la sección *Comentario sobre la función A*.

Relaciones de recursión tradicionales

La siguiente definición es quizá la más importante de todo el documento, pues escapa a las definiciones más comunes que se pueden encontrar en la literatura sobre el mismo concepto.

Definición 1. Una relación de recursión es una ecuación que expresa el elemento de una sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ como dependiente de ciertos elementos de la misma. Esta ecuación tiene la forma

$$a_n = \zeta((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n) \tag{2}$$

donde $\mathcal{Q}_n$ es un conjunto de enteros que está en función de n y ζ es una función de $n \in \mathcal{Q}$ y la sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$. De modo que $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$ puede[3] ser una subsucesión de $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ con dominio en $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q}$.

Si existe un n tal que a_n y $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$ solucionan la Ecuación (2), decimos que $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ satisface la relación de recursión en n.

La diferencia puntual entre esta definición y cualquiera otra es que en ésta no se menciona que la función ζ dependa de los elementos anteriores a a_n. En cambio, se dice que esa función depende de los elementos de la sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$, que puede o no estar definida. Veremos que esta definición es más general que aquélla con que se definen

[3]Si no lo es, es decir si $\mathcal{Q}_n \not\subseteq \mathcal{Q}$, la sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$ no está definida y la igualdad no se satisface.

los tipos de recursión tradicionales y que es apta para desarrollar las recursiones introduciremos en los siguientes capítulos.

Definición 2. Sea $\mathfrak{L}$ una relación de recursión y sea una sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$. Si (D_i) satisface $\mathfrak{L}$ en todo $n \in \mathcal{Q}'$. Decimos que la sucesión está bien definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$.

Definición 3. Una **relación de recursión es lineal** de orden k con coeficientes constantes si posee la siguiente estructura

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} c_j a_{n-j} + F(n) = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n). \tag{3}$$

donde c_j son constantes y $k > 0$. Si $F(n) = 0$, se dice además que la relación es homogénea.

Nótese que esta clase de relaciones de recursión es tal que, siguiendo la Definición 1, $\mathcal{Q}_n = \{n-1, \ldots, n-k\}$ y ζ es

$$\zeta((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n) = \sum_{k\in\mathcal{Q}_n} c_{n-k} a_k + F(n)$$

Notamos que la relación de recursión $\mathfrak{F}$ es uno de los casos más sencillos de las relaciones de recursión lineales homogéneas y de orden 2, el caso $c_2 = c_1 = 1$, es decir, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Una sucesión (a_n) con dominio en los naturales y bien definida por la recursión $\mathfrak{F}$, se dice que cuenta con dos valores iniciales a_0 y a_1. Todos los siguientes valores pueden expresarse como una *combinación lineal* de estos elementos iniciales: $a_2 = a_0 + a_1$, $a_3 = a_1 + a_2 = a_1 + a_0 + a_1 = a_0 + 2a_1$, etc.

Si denotamos $[p, q] \equiv p \cdot a_0 + q \cdot a_1$, podemos escribir todos los elementos de la sucesión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&a_0 = [1,0], \quad a_1 = [0,1], \quad a_2 = [1,1], \quad a_3 = [1,2], \\
&a_4 = [2,3], \quad a_5 = [3,5], \quad a_6 = [5,8], \quad a_7 = [8,13], \quad \ldots
\end{aligned}$$

Donde han aparecido los primeros elementos de la sucesión de Fibonacci. En lugar de probar que $a_n = [F_{n-1}, F_n]$, probaremos un teorema mucho más fuerte, pero antes debemos *extender* el dominio de la sucesión de Fibonacci.

Teorema 4. *Sea una sucesión (A_k) tal que $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, si existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $A_{-m} = \pm A_n$ y $A_{-m-1} = \mp A_{n+1}$, entonces es cierto que $A_{-m-2j} = \pm A_{n+2j}$ y $A_{-m-2j-1} = \mp A_{n+2j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.*

$$(A_k) = (\ldots, \mp A_{n+3}, \pm A_{n+2}, \mp A_{n+1}, \pm A_{-n}[= A_{-m}], \ldots, A_n[= A_n], A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+2}, \ldots)$$

Demostración. Encontremos A_{-m-2} mediante $A_{-m-2} + A_{-m-1} = A_{-m}$:

$$A_{-m-2} = A_{-m} - A_{-m-1} = \pm A_n \pm A_{n+1} = \pm A_{n+2}$$

Sin perder generalidad, definamos la propiedad $P_\pm(x)$ que contiene información de lo que queremos demostrar:

$$P_\pm(x)\colon\ A_{-x} = \pm(-1)^{|x|} A_{x+k} \wedge k = n - m.$$

Sabemos que $x = m$ y $x = m + 1$ cumplen la propiedad y ello implica que la cumplirá $x = m + 2$. Luego, por el Corolario A.1, la propiedad se cumple para todo $m' = m + j$ con $j \in \mathbb{N}$, por lo que la prueba está completa. □

Corolario 3. *La extensión de Fibonacci es tal que $F_{-2n} = -F_{2n}$ y $F_{-2n-1} = F_{2n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión de Lucas, en cambio, $L_{-2n} = L_{2n}$ y $L_{-2n-1} = -L_{2n+1}$.*

$$(F_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\ldots,\ \ 5,\ -3,\ \ 2,\ -1,\ \ 1,\ 0[= F_0],\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ \ldots)$$
$$(L_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (\ldots,\ -11,\ \ 7,\ -4,\ \ 3,\ -1,\ 2[= L_0],\ \ 1,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 7,\ \ 11,\ \ \ldots)$$

Demostración. Basta con considerar lo siguiente:

$$F_{-0} = F_0 = 0 = \boldsymbol{-F_0} \quad \text{y} \quad F_{-1} \equiv F_1 - F_0 = 1 - 0 = \boldsymbol{+F_1}.$$

Similarmente:

$$L_{-0} = L_0 = 2 = \boldsymbol{+L_0} \quad \text{y} \quad L_{-1} \equiv L_1 - L_0 = 1 - 2 = \boldsymbol{-L_1}. \qquad \square$$

Teorema 5. *Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ una sucesión cuyo dominio es un conjunto de dos o más enteros consecutivos tal que se satisface la recursión $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{Q}\setminus\mathcal{V}_\mathcal{Q}$, donde $\mathcal{V}$ se define:*

$$\mathcal{V}_\mathcal{K} = \{m, m+1 | m \in \mathcal{K} \wedge \forall i \in \mathcal{K}(m \leq i)\}$$

como el conjunto que contiene los dos elementos menores —si existen— de todo conjunto $\mathcal{K}$ de enteros consecutivos. Entonces, para todo conjunto de enteros consecutivos $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$, existe una y sólo una extensión $(b_i)_{i\in\mathcal{P}}$ tal que $\forall i \in \mathcal{Q}(b_i = a_i)$ y se encuentra definida por $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{P}\setminus\mathcal{V}_\mathcal{P}$.

Lema 1. *Para cualesquiera $p, p+1, n \in \mathcal{P}$, el miembro n-ésimo de (b_n) puede escribirse como*

$$b_n = F_{n-p-1} \cdot b_p + F_{n-p} \cdot b_{p+1} \equiv [F_{n-p-1}, F_{n-p}]_p, \tag{4}$$

donde F_j es el término j-ésimo de la sucesión de Fibonacci extendida.

La demostración de estos dos resultados se halla en los apéndices. Su importancia aquí radica en que nos permitirán demostrar el siguiente corolario.

Corolario 4. *Existe una y sólo una sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ definida por $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{Q}\setminus\mathcal{V}_\mathcal{Q}$ tal que para dos enteros distintos $p, q \in \mathcal{Q}$, se tiene que $a_p = A$ y $a_q = B$. Donde A y B son constantes en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sean $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ y $(c_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ dos sucesiones con dichas características, veamos que

$$b_q = [F_{q-p-1}, F_{q-p}]_p \implies b_{p+1} = \frac{1}{F_{q-p}}(b_q - F_{q-p-1} \cdot b_p) = \frac{1}{F_{q-p}}(B - F_{q-p-1}A)$$
$$c_q = [F_{q-p-1}, F_{q-p}]_p \implies c_{p+1} = \frac{1}{F_{q-p}}(c_q - F_{q-p-1} \cdot c_p) = \frac{1}{F_{q-p}}(B - F_{q-p-1}A) = b_{p+1}$$

Por lo tanto, según el Lema 1, para todo $n \in \mathcal{Q}$:

$$c_n = [F_{n-p-1}, F_{n-p}]_p = F_{n-p-1} \cdot c_p + F_{n-p} \cdot c_{p+1} = F_{n-p-1} \cdot b_p + F_{n-p} \cdot b_{p+1} = b_n.$$

Luego, $(c_i) = (b_i)$, como se quería demostrar. $\square$

Lo que el corolario anterior nos dice es que sólo hacen falta dos elementos para definir por completo una sucesión que satisface la recursión $\mathfrak{F}$ en todo su dominio (excepto quizá en sus valores iniciales). El siguiente teorema nos hace saber que sumar dos sucesiones recursivas nos da una nueva sucesión recursiva.

Teorema 6. *Sean $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ y $(B_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ dos sucesiones definidas en $\mathcal{Q}'$ por la misma relación de recursión $\mathfrak{L}$ que es lineal de orden k con coeficientes constantes y homogénea. Si $(C_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ es tal que $C_n = A_n + B_n$ para todo $n \in \mathcal{Q}$, entonces esta sucesión también esta definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$.*

Demostración. Para todo $n \in \mathcal{Q}'$, se tiene

$$\begin{aligned} C_n = A_n + B_n &= \sum_{i=1}^{k} c_i A_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} c_i B_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} c_i (A_{n-i} + B_{n-i}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i C_{n-i} \end{aligned}$$

Por lo tanto, (c_i) está definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$, como se quería demostrar. $\square$

Otra característica importante de las sucesiones recursivas tradicionales es que se pueden encontrar fórmulas para calcular sus series, es decir, la suma de un conjunto de elementos consecutivos (o separados por la misma distancia) de la sucesión.

Teorema 7. *Sea una sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por $\mathfrak{F}$ en todo su dominio. Se tienen las siguientes propiedades:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} A_{m+i} &= A_{m+n+2} - A_{m+1}, \\ \sum_{i=0}^{n} A_{m+2i} &= A_{m+2n+1} - A_{m-1}, \end{aligned}$$

$$2\sum_{i=0}^{n} A_{m+3i} = A_{m+3n+2} - A_{m-1},$$
$$5\sum_{i=0}^{n} A_{m+4i} = (A_{m+4n+3} + A_{m+4n+1}) - (A_{m-1} + A_{m-3})$$

Y, en general, para $K \geq 2$, con $N = F_K + 2F_{K-1} - ((-1)^K + 1)$, $r = F_{K-2} + (-1)^K$ y $s = F_{K-1} - (-1)^K$, donde F_n es el n-ésimo elemento de la sucesión de Fibonacci, existe la solución:

$$N\sum_{i=0}^{n} A_{m+Ki} = r(A_{m+Kn+1} - A_{m-K+1}) + s(A_{m+Kn+2} - A_{m-K+2})$$

Este teorema puede demostrarse rutinariamente empleando el Principio de Inducción, sin embargo, aquí se ofrece una nueva notación para estudiar estos problemas y trabajar con cualquier estructura definida por la recursión $\mathfrak{F}$. La demostración y la construcción de dicha notación pueden encontrarse en los Apéndices.

Sorprende ver que aunque todos estos teoremas y corolarios son de un carácter universal (son válidos para cualquier sucesión recursiva definida por $\mathfrak{F}$), la sucesión de Fibonacci aparece en muchos de ellos.

* En el capítulo *Agregados* de los Apéndices, se ofrece la sección *Fibonacci en la naturaleza*, en donde se dan ejemplos de sistemas naturales sencillos en donde emerge la sucesión de Fibonacci.

En el apartado mencionado, se presentan aplicaciones de algunos resultados de esta sección. Con ellos se demuestra lo siguiente:

$$\sqrt{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{2n}}{F_{2n}}. \tag{5}$$

Por el Teorema 3, $\varphi^{2n} = \frac{1}{2}(L_{2n} + F_{2n}\sqrt{5})$, por lo tanto (5) lleva a $\lim_{n\to\infty} \varphi^{2n} = \lim_{n\to\infty} L_{2n}$. Y, por el Corolario 2, sabemos que cuando $n \to \infty$, $L_{2n+1} \to L_{2n} \cdot \varphi$. En conclusión, cuando $n \to \infty$:

$$\varphi^n \to L_n \tag{6}$$

Hemos encontrado una nueva manera de aproximar el valor del número áureo, donde únicamente usamos sumas, divisiones y **una relación de recursión**. También encontramos una propiedad interesante de φ, el hecho de que su potencia n-ésima se acerque al n-ésimo número de Lucas. Es posible demostrar que específicamente L_n es el entero más cercano a φ^n, es decir, para $n > 1$:

$$L_n = [\varphi^n]$$

Ritornello di la Divina Proportione

"No te veo en las estrellas ni te descubro en las rosas,
no estás en todas las cosas"

—Guadalupe Amor, *De las décimas a Dios*

La ecuación de arriba representa al término n-ésimo de los números de Lucas como función de φ. Antes de encontrar las soluciones de toda sucesión recursiva, vamos a dar un par de comentarios acerca de la proporción divina.

Según el Corolario 2, $\frac{F_{n+1}}{F_n} \approx \varphi$. Esto puede representarse visualmente con la Figura 1, donde se aproxima la forma de un rectágulo dorado, es decir, un rectángulo cuyos lados conservan la proporción áurea. En dicha figura, los lados de cada rectángulo son proporcionales a un número de Fibonacci.

El rectángulo dorado (Figura 2) es el único rectángulo que puede dividirse en un cuadrado y un rectángulo con las mismas proporciones. Al repetir este proceso en diversas ocasiones, generando nuevos pequeños cuadrados en cada iteración, observamos que hay un punto en donde todos los rectángulos dorados convergen, el cual es llamado "Ojo de Dios".

También es posible unir los vértices de cada pequeño cuadrado para aproximar la espiral logarítmica que camina hacia el Ojo de Dios; esta espiral aparece en muchos rostros de la naturaleza: en caracoles, en los cuernos de muchos animales e incluso en la cóclea del oído. "Dondequiera que sea necesario llenar un espacio de manera económica y regular, allí se halla la espiral, que al expandirse altera su tamaño pero nunca su forma". [32]

* En el capítulo *Agregados* de los Apéndices, se ofrece la sección *El hombre de los tres siglos*, que relata otras curiosidades acerca del número φ.

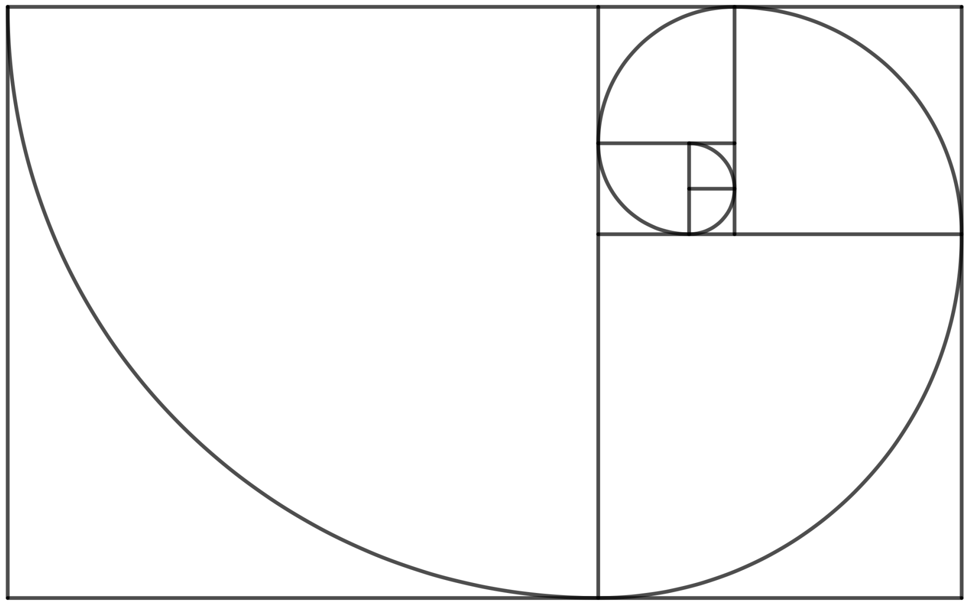


Figura 1: Aproximación de un rectángulo dorado con números de Fibonacci.

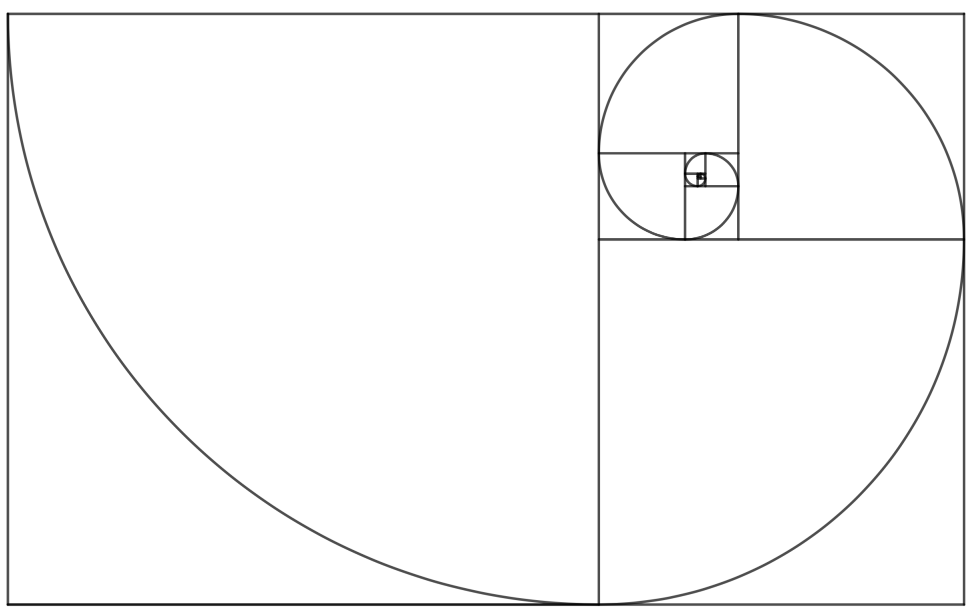


Figura 2: Rectángulo dorado y la espiral logarítmica.

Solución de algunas sucesiones recursivas

Con todos los encantos que el número φ ha mostrado tener, quizá no sorprenda —o sorprenda de más— descubrir que también está involucrado en muchas de las sucesiones que veremos en éste y los próximos capítulos. Analicemos el papel que juega en las sucesiones recursivas tradicionales.

Para resolver la recursión $\mathfrak{F}$, buscaremos solucionar su ecuación funcional característica:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \tag{7}$$

Si existe una función que satisface esta ecuación en todo $n \in \mathbb{Z}$ y que cumple $f(0) = A_0$, $f(1) = A_1$, entonces se dice que f es la solución de la sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, o de cualquiera de sus subsucesiones $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$.

La primera función real supondremos que nos ayuda a resolver (A_n) es la función $f(n) = c^n$ donde c es una constante en $\mathbb{R}$. La Ecuación (7) se convierte en la ecuación $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$, o bien en $x^2 = x^1 + x^0 = x + 1$. Ya sabemos que φ y ψ son las raíces de esa ecuación, de modo que conocemos dos funciones que se comportan como queremos:

$$\begin{aligned} f_1(n) \equiv \varphi^n: &\quad f_1(n) = f_1(n-1) + f_1(n-2) \\ f_2(n) \equiv \psi^n: &\quad f_2(n) = f_2(n-1) + f_2(n-2) \end{aligned}$$

Y cualquier combinación lineal de ellas $f_*(n) \equiv \alpha f_1(n) + \beta f_2(n) = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n$ también será una solución de la ecuación funcional.

$$\begin{aligned} f_*(n) &= \alpha f_1(n) + \beta f_2(n) = \alpha\varphi^n + \beta\psi^n \\ &= \alpha(\varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}) + \beta(\psi^{n-1} + \psi^{n-2}) \\ &= (\alpha\varphi^{n-1} + \beta\psi^{n-1}) + (\alpha\varphi^{n-2} + \beta\psi^{n-2}) \\ &= f_*(n-1) + f_*(n-2) \end{aligned}$$

Demostremos que para esta función f_* siempre podremos encontrar las constantes α

y β tal que

$$f_*(0) = \alpha\varphi^0 + \beta\psi^0 = \alpha + \beta = A_0$$
$$f_*(1) = \alpha\varphi^1 + \beta\psi^1 = \alpha\varphi + \beta\psi = A_1$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribirse de manera matricial y resolverse como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\psi - \varphi} \begin{pmatrix} \psi & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

Pero $\psi - \varphi = 1 - \varphi - \varphi = 1 - 2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$, por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\psi & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} A_1 - \psi A_0 \\ \varphi A_0 - A_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Sustituyendo $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$ en la ecuación anterior, demostramos que la solución de la sucesión de Fibonacci es

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n). \tag{9}$$

Para los números de Lucas, $F_0 = 2$ y $F_1 = 1$, de modo que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(1 - 2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$ y $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1) = 1$. Luego, su solución de los números de Lucas es

$$L_n = \varphi^n + \psi^n. \tag{10}$$

Las Ecuaciones 9 y 10 permiten demostrar de una manera mucho más sencilla algunos resultados previos, como que conforme $n \to \infty$, $\frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{L_{n+1}}{L_n} \to \varphi$. También las siguientes relaciones demostradas anteriormente, vinculadas con la extensión de estas sucesiones 'hacia la izquierda' (o en el dominio de los enteros).

$$F_{-2n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{-2n} - \psi^{-2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}((-\psi^{-1})^{-2n} - (-\varphi^{-1})^{-2n}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\psi^{2n} - \varphi^{2n}) = -F_{2n}$$

$$L_{-2n} = \varphi^{-2n} + \psi^{-2n} = (-\psi^{-1})^{-2n} + (-\varphi^{-1})^{-2n} = \psi^{2n} + \varphi^{2n} = L_{2n}$$

La siguiente relación de recursión que resolveremos será[4]

$$A_n = A_{n-2} + 2A_{n-3} + A_{n-4}. \tag{11}$$

Cuya función deberá estar relacionada con las raíces de la ecuación $x^4 = x^2 + 2x + 1$. Demostremos que φ y ψ son raíces: si ambos son los números y que cumplen $y^m + y^{m+1} = y^{m+2}$ para todo $m \in \mathbb{R}$, entonces

$$y^2 + 2y + 1 = (y^2 + y) + (y + 1) = y^3 + y^2 = y^4.$$

Por el Teorema de Viète (A.12), sabemos que todas las raíces satisfacen la ecuación

$$x_1 + x_2 + \varphi + \psi = 0$$

lo que implica que $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -1}$. El mismo teorema nos dice que

$$x_1(x_2 + \varphi + \psi) + x_2(\varphi + \psi) + \varphi\psi = -1,$$

lo que implica que $x_1x_2 + x_1 + x_2 - 1 = -1$, o bien que $\boldsymbol{x_1x_2 = 1}$. Combinar las dos ecuaciones anteriores conduce al siguiente polinomio

$$x_1^2 + x_1 + 1 = 0,$$

por lo que $x_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $x_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. O bien, usando la notación de Euler[5], $x_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ y $x_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$. De modo que cualquier sucesión (A_n) que cumpla la Recursión (11)

[4]Notemos que cualquier sucesión definida por la recursión $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ también cumple la recursión $A_n = (A_{n-2} + A_{n-3}) + (A_{n+3} + A_{n-4}) = A_{n-2} + 2A_{n+3} + A_{n-4}$. Es posible demostrar que $A_n = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{(m-i)!i!} A_{n-m-i}$: Vease el Capítulo 7. Transformaciones de sucesiones.

[5]Esta notación consiste en expresar el número complejo $\cos x + i \operatorname{sen} x$ como e^{ix}, donde e es el número que se puede definir como el siguiente límite $e = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. En nuestro ejemplo, $-\frac{1}{2}$ es igual al coseno de $\frac{2\pi}{3}$, y $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es el seno del mismo ángulo, por ello se puede usar dicha notación.

tendrá como solución

$$A_n = \alpha e^{\frac{2\pi i}{3}n} + \beta e^{\frac{4\pi i}{3}n} + \gamma\varphi^n + \delta\psi^n$$

Donde las constantes estarán determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} & \varphi & \psi \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} & \varphi^2 & \psi^2 \\ 1 & 1 & \varphi^3 & \psi^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Estos sistemas de ecuaciones pueden resolverse de manera algorítmica empleando distintos métodos. O bien, pueden usarse fórmulas exactas como la *regla de Cramer*, que escribe la solución en términos de determinantes. No calcularemos las soluciones de este sistema de ecuaciones, sino que interpretaremos lo que significa: el problema está resuelto, pues existen funciones explícitas de cualquier sucesión completamente definida por (11).

El siguiente teorema termina de describir uno de los métodos existentes para la solución de relaciones de recursión lineales, de coeficientes constantes y homogéneas de orden k.

Proposición 1. *Sea la relación de recursión* $A_n = \sum_{i=1}^{k} c_i A_{n-i}$*, su solución será de la forma:*

$$A_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) x_i^n$$

donde los s *números* x_i *son las raíces de la ecuación* $x^k = \sum_{i=1}^{k} c_i x^{k-i}$ *y* $P_i(n)$ *es un polinomio de grado* $m_i - 1$*, donde* m_i *es la multiplicidad de la raíz* x_i*.*

Demostración. Si encontramos un conjunto de k funciones reales $f_1, f_2, \ldots, f_k$ tal que todas ellas son soluciones de la ecuación funcional $F(k) = \sum_{i=1}^{k} c_i F(k-i)$, sabemos que cualquier combinación lineal de ellas también será una solución. Si las funciones son también linealmente independientes, entonces se podrá construir la solución de la recursión de la forma $A_n = \sum_{i=1}^{k} b_i f_i(n)$, donde los coeficientes b_i se determinarán en función a los primeros k elementos de la sucesión.

La pregunta es *¿Cómo encontrar estas funciones?* Podemos usar las s raíces del polinomio $x^k - \sum_{i=1}^{k} c_i x^{k-i}$ para construir s funciones del tipo $f_i(n) = x_i^n$ que por definición son soluciones de la ecuación funcional. Lo que esta proposición nos dice es que las restantes $k - s$ funciones pueden generarse considerando la multiplicidad de cada una de las raíces. Probemos que si x_i es una raíz de multiplicidad m_i, la función $n^t x_i^n$ es una solución de la ecuación funcional siempre que $0 \leq t \leq m_i - 1$:

El polinomio $G(x) = x^k - \sum_{i=1}^{k} c_i x^{k-i}$ representa $F(k) - \sum_{i=1}^{k} c_i F(k-i)$ si $F(n) = x^n$. Similarmente, si $H(x) = k^t x^k - \sum_{i=1}^{k} c_i (k-i)^t x^{k-i}$ representa $F(k) - \sum_{i=1}^{k} c_i F(k-i)$ si $F(n) = n^t x^n$. Podemos transformar el primer polinomio de la siguiente manera:

$$x \cdot \frac{d}{dx} G(x) = x \cdot \left(k x^{k-1} - \sum_{i=1}^{k} c_i (k-i) c^{k-i-1} \right) = k x^k + \sum_{i=1}^{k} c_i (k-i) x^{k-i}$$

A este proceso podemos denotarlo como Θ: $[\Theta \circ G](x) = x \cdot \frac{d}{dx} G(x)$. Veamos que aplicar t veces Θ sobre G nos da el segundo polinomio

$$[\Theta^t \circ G](x) = k^t x^k + \sum_{i=1}^{k} c_i (k-i)^t x^{k-i} = H(x)$$

Por hipótesis, $G(x) = (x - x_i)^{m_i} Q(x)$, luego

$$\begin{aligned}[\Theta \circ G](x) = x \cdot \frac{d}{dx} (x - x_i)^{m_i} Q(x) &= (x - x_i)^{m_i - 1} x m_i Q(x) \\ &+ (x - x_i)^{m_i} x \frac{d}{dx} Q(x) \equiv (x - x_i)^{m_i - 1} Q'(x)\end{aligned}$$

donde $Q'(x)$ es otro polinomio. Por lo tanto, aplicarle la transformación a G nos da un nuevo polinomio que tendrá como raíz a x_i siempre que $m_i - 1 > 0$. En general,

$$H(x) = [\Theta^t \circ G](x) \equiv (x - x_i)^{m_i - t} Q''(x)$$

será un polinomio con una raíz igual a x_i siempre que $t < m_i$. Luego, $n^t x_i^n$ es una solución de la ecuación funcional. Por cada raíz x_i, existirá una solución del tipo $b_{m_i-1}n^{m_i-1}x_i^n+\ldots+b_0n^0x_i^n = \left(\sum_{i=0}^{m_i-1} b_i n^i\right)x_i^n$ donde b_i es cualquier número real, a esto es a lo que llamamos $P_i(n)x_i^n$. Por lo tanto, si todas estas funciones son linealmente independientes, la solución de cualquier sucesión definida por la relación de recursión se puede escribir como sigue:

$$A_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)x_i^n \qquad \square$$

Con todo lo anterior, hemos demostrado que la tarea de encontrar la solución de una recursión lineal, de coeficientes constantes y homogénea, puede ser mapeada al problema de encontrar las raíces de un polinomio . Y para resolver una sucesión en particular, hace falta encontrar los coeficientes característicos de la solución general, que estarán determinados por los valores iniciales de la sucesión.

Queremos dar a entender que ya existe cierto dominio sobre estas recursiones tradicionales, por lo que resulta interesante estudiar recursiones no lineales —como los ejemplos que se presentan al inicio del siguiente capítulo— o incluso recursiones muy diferentes, como las que posteriormente darán lugar a las sucesiones ultrarrecursivas. [21]

“Entendemos aquí por signo algo cuya forma es independiente del espacio y del tiempo, así como de las condiciones especiales en las que se produce, de las variaciones insignificantes en su trazado y que, en general y de manera segura, puede ser identificado.
El enfoque que consideramos adecuado y necesario para la fundamentación no sólo de las matemáticas puras, sino en general de todo el pensamiento, la comprensión y la comunicación científicas, puede entonces expresarse en una frase diciendo:
en un principio era el signo”

Parte II

NARRATIO

Un hombre arrodillado ante la imponente presencia de un ifrit,
quien blande un sable que se materializa de una nube de humo.

2. Sucesiones recursivas inusuales

A Chaotic Sequence

One last example of recursion in number theory leads to a small mystery. Consider the following recursive definition of a function:

$$\begin{aligned} Q(n) = & Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \quad \textit{for} \quad n > 2 \\ & Q(1) = Q(2) = 1 \end{aligned}$$

It is reminiscent of the Fibonacci definition in that each new value is a sum of two previous values—but not of the immediately *previous two values. Instead, the two immediately previous values tell* how far to count back *to obtain numbers to be added to make a new value! The first Q-numbers run as follows:*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ \mathbf{5},\ \mathbf{6},\ 6,\ 6,\ 8,\ 8,\ 8,\ 10,\ 9,\ 10,\ \ldots$$

To obtain the next one, move leftwards (from the three dots) respectively 10 and 9 terms; you will hit a 5 and a 6. Their sum—11—yields the new value: Q(18). This is the strange process by which the list of known Q-numbers is used to extend itself. The resulting sequence is, to put it mildly, erratic. The further out you go, the less sense it seems to make. This is one of those very peculiar cases where what seems to be a somewhat natural definition leads to extremely puzzling behavior: chaos produced in a very orderly manner. One is naturally led to wonder whether the apparent chaos conceals some subtle regularity. Of course, by definition, there is regularity, but what is of interest is whether there is another way of characterizing this sequence—and with luck, a nonrecursive way.

En su famoso libro Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid [33], Douglas Hofstadter presenta los números Q por primera vez, justo como está escrito arriba. Algunos años después, las propiedades de dicha sucesión fueron descritas por otros autores y nuevas sucesiones parecidas aparecieron. En las dos secciones siguientes, se presenta una breve semblanza de lo que se conoce acerca de lo que aquí llamamos la sucesión (Q_n) de Hofstadter y otra muy parecida, la sucesión de Conway.

Sucesión de Hofstadter

En la notación que aquí adoptamos, la sucesión $(Q_n)_{n\in\mathcal{A}}$ tiene valores iniciales $Q_1 = Q_2 = 1$ y está bien definida en el resto de su dominio por la siguiente relación de recursión

$$Q_n = Q_{n-Q_{n-1}} + Q_{n-Q_{n-2}}. \tag{1}$$

Que difiere de la fórmula de arriba porque aquí se representa con subíndices lo que allá con paréntesis. La siguiente figura muestra el comportamiento de los primeros dos mil elementos de la sucesión (Q_n).

A día de hoy, no se sabe si el dominio de (Q_n) es $\mathcal{U} = \mathbb{Z}^+ \setminus \{1, 2\}$. Pero existe fuerte evidencia empírica que nos hace creer que ése es el caso: se sabe que la recursión se cumple para los primeros 12×10^9 enteros (mayores a 2). [34]

Decimos que la sucesión (Q_n) **muere** si existe un elemento Q_n que no se pueda construir de acuerdo a la Ecuación 1. Esto sucede cuando $n - Q_{n-1} \leq 0$, pues '$Q_{n-Q_{n-1}}$' está haciendo alusión a un elemento que no existe, pues el dominio (Q_n) son los números enteros positivos.

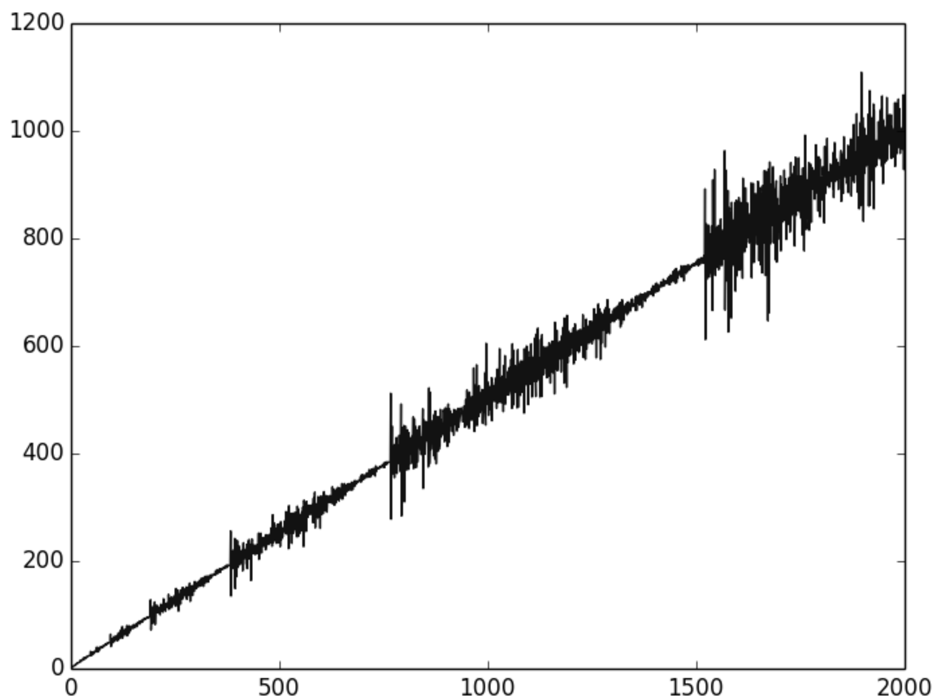


Figura 1: Los primeros 2000 elementos de la sucesión (Q_n).

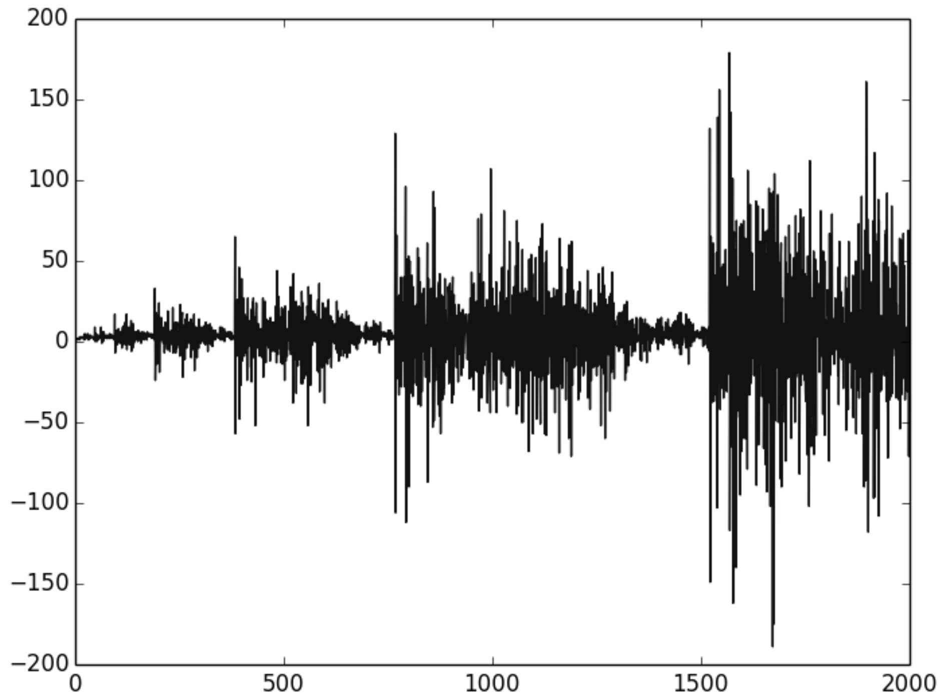


Figura 2: Gráfico de $Q_n - [\frac{n}{2}]$, en donde se observan algunas de las *generaciones* de la sucesión (Q_n).

Se ha observado que existen ciertos números naturales que no aparecen en la sucesión y se cree fuertemente que hay un número infinito de valores que quedan fuera de ella. En [35] se han reportado algunas observaciones sobre el comportamiento (Q_n). Por ejemplo, los valores de la sucesión asimilan la función $f(n) = n/2$, es decir, el n-ésimo término Q_n es $n/2$ más cierto "error" o diferencia.

Este error puede visualizarse en la Figura 2, que muestra la diferencia entre los elementos de (Q_n) y la función $n/2$: se observa que conforme crece n, también aumentan las magnitudes de algunas diferencias.

En este gráfico, se observa también que $Q_n - \frac{n}{2}$ difícilmente tiene una magnitud superior a $\frac{n}{2}$. Aunque no es posible saber de manera inmediata si este comportamiento prevalecerá, es decir, no se puede asegurar que en algún momento el error será superior a $\frac{n}{2}$ y que ello lleve a $n - Q_{n-1} < 0$ (la muerte de (Q_n)).

En [36] se reporta uno de los resultados más interesantes relacionado con (Q_n). Se trata de la construcción de otra sucesión definida justamente por la recursión (1) —que a partir de este momento denotaremos como *recursión* $\mathfrak{H}$— pero con valores iniciales distintos; y ello da lugar a una sucesión con elementos que para nosotros son familiares.

Sea la sucesión (V_k) con $V_n = 0$ para todo $n < 0$, los valores iniciales $V_0 = V_3 = 3$, $V_1 = V_4 = 6$, $V_2 = 5$, $V_5 = 8$. Si la sucesión satisface $\mathfrak{H}$ para todo $n > 5$ entonces

$$V_{3m+2} = F_{m+5}$$

para todo $m \geq 0$, donde F_{m+5} es el $(m+5)$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

En esta construcción, se ha definido la sucesión (V_k) con dominio en **los enteros**. Particularmente, se le ha dado un valor nulo a todos los elementos V_n con $n < 0$. En esencia, se **evita** la condición "$n - V_{n-1} > 0$" para mantener con vida a la sucesión. Los *primeros* elementos de la sucesión (V_k) son los siguientes:

$$(V_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (\ldots, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3[= V_0], 6, \mathbf{5}, 3, 6, \mathbf{8}, 3, 6, \mathbf{13}, 3, 6, \mathbf{21}, 3, 6, \mathbf{34}, \ldots)$$

Debido a que se repiten los valores 3 y 6 a lo largo de toda la "parte derecha" de la sucesión, se dice que es cuasi-periódica. Los valores escritos en negrita son los números de Fibonacci de los que habla la ecuación anterior.

En el ejemplo anterior, se modificaron los valores iniciales para crear una sucesión definida en cierto dominio por la recursión $\mathfrak{H}$. Puede decirse que se definieron **infinitos valores iniciales**: primero infinitos ceros, después tres, seis, cinco, tres, seis y finalmente un ocho, el siguiente valor será generado con base en la relación de recursión; esto puede parecer extraño si se examina desde la perspectiva más tradicional de las sucesiones: *si se definen infinitos valores iniciales, ¿cuándo empieza la sucesión?, ¿cuándo nacerá el primer elemento?*

Este conflicto se disipa rápidamente si hacemos que el dominio de la sucesión sean los números enteros, como se mencionaba anteriormente, pues podemos hablar de dos subsucesiones infinitas: aquélla que contiene infinitos ceros y un conjunto de seis valores iniciales y aquélla definida por la relación de recursión.

Más tarde serán evidentes las recompensas de ampliar el dominio de todas nuestras sucesiones, por ahora seguiremos indagando en estos nuevos tipos de recursión.

Sucesión de Conway

NO SÓLO LOS VALORES INICIALES, también puede modificarse la relación de recursión misma para crear una nueva sucesión. Es el caso de la sucesión que Conway introdujo en 1988 durante una plática en AT&T Bell Labs [37] (hoy conocida como sucesión de Conway o de Conway-Hofstadter), con valores iniciales $C_1 = C_2 = 1$ y para $n > 2$ la sucesión está definida por la siguiente relación de recursión:

$$C_n = C_{C_{n-1}} + C_{n-C_{n-1}}$$

Que es a todas luces similar a la recursión $\mathfrak{H}$. Los primeros veintitrés elementos de la sucesión de Conway son los siguientes

$$(C_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13, \mathbf{14} \ldots)$$

y la gráfica de los primeros dos mil elementos se muestra en la Figura 3.

A diferencia de la sucesión de Hofstadter, se conocen rigurosamente muchas de las propiedades de la sucesión de Conway, entre las que se enlistan las siguientes (como se demuestran en [38]):

- $C_n \leq n$ (lo cual implica que (C_n) está bien definida por la recursión).
- $C_n - C_{n-1}$ es 0 ó 1 para todo $n \geq 1$.
- $C_{2^n} = 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$.
- $C_n = 2^k$ para exactamente $k + 1$ valores de n, donde $k > 0$.
- $C_n \geq \frac{n}{2}$, donde la igualdad únicamente se obtiene cuando n es una potencia de 2 y $n \neq 1$.
- $\frac{C_n}{n} \to \frac{1}{2}$ conforme $n \to \infty$.

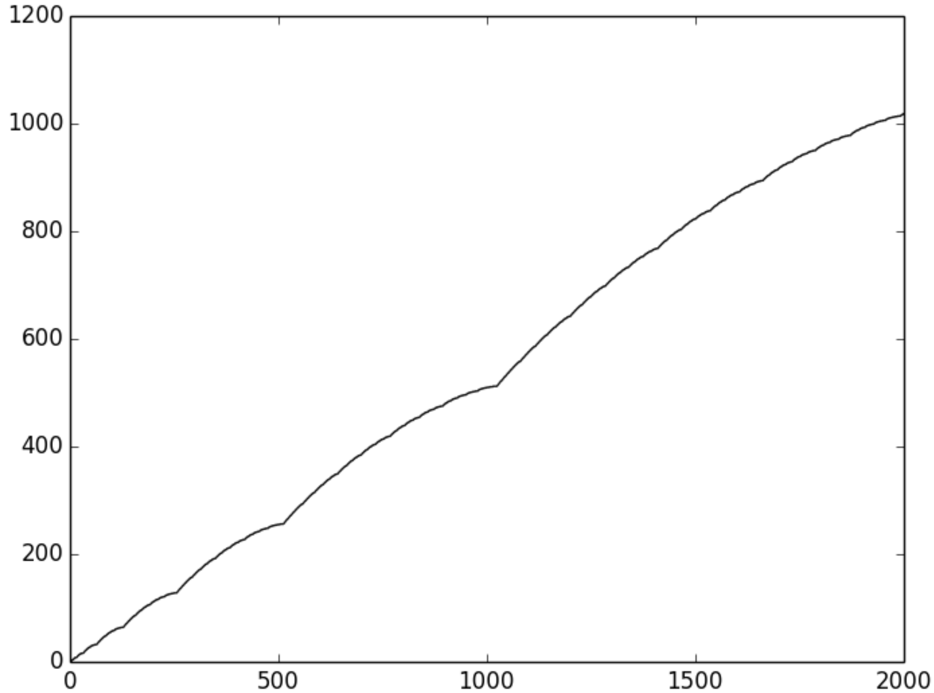


Figura 3: Primeros dos mil elementos de la sucesión de Conway.

- $C_{2n} \leq 2C_n$ para toda n.

La sucesión de Conway, a diferencia de todas las sucesiones que hemos visto hasta ahora (Fibonacci, Lucas y Hofstadter), **sí depende de la notación** y la posición de los elementos.

Para la sucesión de Fibonacci —y para cualquiera definida por la recursión $\mathfrak{F}$— es indiferente si los valores iniciales se colocan en cualquier posición: podemos definir la sucesión (D_n) con valores iniciales $D_4 = D_5 = 1$ y prácticamente esta sucesión sería idéntica a la de Fibonacci, únicamente distinguible por la notación.

Lo mismo podría decirse sobre la construcción de otra sucesión que cumpla la recursión $\mathfrak{H}$ y que tenga los mismos valores iniciales que la sucesión de Hofstadter.

En cambio, si definimos la sucesión (C'_n) con valores iniciales $C'_0 = C'_1 = 1$ y cumpliendo la recursión de Conway para $n > 1$:

$$C'_n = C'_{C'_{n-1}} + C'_{n-C'_{n-1}}$$

obtenemos una sucesión monótona[1] de números positivos:

$$(C'_n) = (1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots).$$

Es posible demostrar que el n-ésimo elemento de (C'_n) es el número n para todo $n > 0$.

Demostración. Supongamos que $C'_m = m$ para cierta m. Veamos que ello implica que $C'_{m+1} = m + 1$:

$$\begin{aligned} C'_{m+1} &= C'_{C'_m} + C'_{m-C'_m} = C'_m + C'_{m-m} \\ &= C'_m + C'_0 = m + 1 \end{aligned}$$

Como se cumple para $m = 1$, por el principio de inducción podemos decir que se cumplirá para todo $m \geq 1$. □

El motivo por el cual existe esta dependencia de la recursión de Conway con la notación es el sumando $C_{C_{n-1}}$, que hace alusión al C_{n-1}-ésimo término de la sucesión, que puede ser un valor u otro, dependiendo de la notación…

hace alusión a un elemento por su nombre.

En cambio, el sumando $C_{n-C_{n-1}}$ hace alusión al elemento que está C_{n-1} lugares hacia la izquierda, el cual siempre está a la misma distancia…

hace alusión a un elemento por su posición.

En la recursión de Hofstadter y en todas las lineales de orden k que definimos, se emplean sumandos que hacen alusión a elementos por su lugar y no por su nombre. Por lo tanto, estas recursiones construyen sucesiones *independientes de la notación*.

Más tarde, todas estas ideas serán formalizadas.

[1]Se dice que una sucesión es monótona si la diferencia entre cualesquiera dos elementos consecutivos es 0 o 1.

Sucesiones tipo Meta-Fibonacci y otras generalizaciones

Las relaciones de recursión con que están definidas las sucesiones de Hofstadter y de Conway, han inspirado el estudio de otras recursiones parecidas (como en [39–41] y en un compendio de recursiones extrañas en [42]), así como han inspirado a otros investigadores a definir familias de sucesiones con recursiones parecidas.

De acuerdo a algunas definiciones anteriores, podemos decir que la recursión de Hofstadter —así como la de Conway— es no lineal, pues cada valor no es la suma de los primeros k valores anteriores multiplicados por una constante o una función.

En 1999, el mismo Hofstadter y Huber estudiaron ampliamente la familia de sucesiones que denotaron como $Q_{r,s}(n)$ [43], donde r y s son dos números enteros positivos con $r < s$. Estos números dan lugar a la relación de recursión que eventualmente cumplirá la sucesión[2]:

$$Q_{r,s}(n) = Q_{r,s}(n - Q_{r,s}(n - r)) + Q_{r,s}(n - Q_{r,s}(n - s)).$$

De su estudio empírico, obtuvieron distintas conjecturas como que las únicas sucesiones bien definidas, cuando todos los s valores iniciales son todos uno, son aquéllas cuyos valores de (r, s) son $(1, 2)$, $(1, 4)$ y $(2, 4)$. El caso $(1, 2)$ corresponde a la sucesión (Q_n) de Hofstadter, y el $(1, 4)$ se estudia ampliamente en [41].

En [44], Nathan Fox define las sucesiones tipo Meta-Fibonacci como aquéllas que eventualmente cumplen una relación de recursión de este tipo:

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-a_{n-i}}.$$

Que indudablemente contiene a la familia de sucesiones $Q_{r,s}(n)$ (cuando $s = k$ y $c_i = 1$ si $i = r$ o $i = s$ y $c_i = 0$ en cualquier otro caso). Es decir, esta familia de sucesiones

[2] Esta ecuación se ha escrito usando la notación de sucesiones donde el n-ésimo término se expresa con paréntesis y no con subíndices. Esto se debe a que en este caso los subíndices ya han sido usados para expresar otra información acerca de la sucesión.

es más general que la anterior.

En la literatura, se conoce a todas estas relaciones de recursión como "recursiones anidadas" (del inglés *nested recurrences*). En la siguiente sección, emplearemos el principio básico de estas sucesiones para crear un nuevo tipo de recursión, que sirve como antecedente para las sucesiones ultrarrecursivas.

Una nueva recursión

EN ESTA SECCIÓN, DEFINIREMOS una relación de recursión para crear nuevas sucesiones. De esta recursión, queremos que cada miembro de la sucesión esté relacionado con un elemento futuro y uno pasado, y que él mismo sea quien decida *qué elementos lo definirán*.

En particular, exploraremos la siguiente recursión

$$a_n = a_{n+a_n} - a_{n-a_n} \tag{2}$$

Obsérvese que esta fórmula es autoreferencial, pues cada elemento depende de su propio valor. Desde luego que este comportamiento es *nuevo*, en el sentido de que ninguna de las recursiones anteriores presentaba uno similar: todas ellas dependían del valor de **otros** elementos de la sucesión —y siempre elementos anteriores—, en cambio en la Ecuación (2) se expresa dependencia del mismo elemento que está al lado izquierdo de la ecuación:

a_n es igual al elemento que está a_n lugares hacia su derecha menos el que está a_n lugares hacia su izquierda.

El enunciado anterior nos hace preguntarnos: *¿Qué sucede si a_n es negativo?*, si ése es el caso, ¿cuál es el elemento que está a_n lugares hacia su derecha? Y preguntarnos por el signo de a_n también nos lleva a preguntarnos *¿qué sucede si a_n es igual a cero?*.

Abordemos primero la última pregunta.

Asumiendo que $a_n = 0$, del lado derecho de la ecuación obtenemos

$$a_{n+a_n} - a_{n-a_n} = a_{n+0} - a_{n-0} = a_n - a_n = 0 - 0 = 0$$

Lo cual hace posible la igualdad $a_n = a_{n+a_n} - a_{n-a_n}$ siempre que $a_n = 0$. Por lo tanto, hemos encontrado una familia de sucesiones que cumplen (2): cualquier sucesión cuyos elementos sean todos cero.

Esta familia de sucesiones, por lo demás aburrida, nos deja la enseñanza de que el número cero en la Recursión (2) *no compromete* el valor de ningún otro número de la sucesión. Veamos qué ocurre del lado derecho de la ecuación si $a_n = 1$:

$$a_{n+a_n} - a_{n-a_n} = a_{n+1} - a_{n-1}$$

Para que (2) sea satisfecha, es absolutamente necesario que $a_{n+1} - a_{n-1} = 1$, pues por hipótesis $a_n = 1$. En otras palabras, la existencia del número uno en la Recursión (2) ejerce una restricción sobre los posibles valores que pueden tomar los dos números que lo rodean (su sucesor y su antecesor).

De manera general, cualquier $a_n \neq 0$, ejerce una restricción similar sobre dos valores de la sucesión. Esto hace de cero el valor inicial ideal para empezar a construir una sucesión bien definida por la Recursión (2).[3]

Antes de continuar con este estudio, es necesario establecer una convención sobre la manera en la que nos estaremos refiriendo a las recursiones principales.

- A la relación de recursión que cumple la sucesión de Fibonacci ($A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$), la denotaremos como Recursión $\mathfrak{F}$.

- A la relación de recursión de la sucesión de Hofstadter —Ecuación (1)—, la denotaremos como Recursión $\mathfrak{H}$.

[3]Desde este momento, nos estamos distanciando del enfoque que se adoptó para definir sucesiones como la de Hofstadter y la de Conway, pues el objetivo es que **absolutamente todos** los valores de la sucesión cumplan la relación de recursión en cuestión. Este mismo empeño fue invertido para extender la sucesión de Fibonacci y los números de Lucas y ello nos brindó muchas sorpresas y satisfacciones: Véase el Capítulo 1. En un principio era el signo.

- A la relación de recursión que definimos en esta sección —Ecuación (2)—, la denotaremos como Recursión $\mathfrak{R}$.
- A una relación de recursión arbitraria, como ya se hizo antes, la denotaremos con el siguiente símbolo $\mathfrak{L}$.

Definamos $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Si $a_1 = 1$, entonces $a_2 - a_0 = 1$, por lo tanto a_2 también es igual a 1; es decir, $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ implican que $a_2 = 1$. Similarmente, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ implican que $a_3 = 2$. Continuando con esta cadena de implicaciones, obtenemos la siguiente estructura[4]:

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots \\ 0, & 1, & 1, & 2, & A, & 3, & B, & C, & 4, & D, & E, & F, & 4+A, & \dots \end{pmatrix}$$

Los números expresados con letras mayúsculas son elementos que **no quedan determinados** por los dos valores iniciales que introdujimos. De cierta manera, tienen la libertad adoptar cualquier valor que no contradiga la Recursión $\mathfrak{R}$; por ejemplo, A podría ser igual a 0, 1, 2, 3 y 4, aunque por distintas razones:

- A podría ser 0, pues sabemos que esto nunca contradice la Recursión $\mathfrak{R}$.
- A podría ser 1, pues la diferencia entre su sucesor y su antecesor es exactamente 1.
- A podría ser 2 y con ello implicar que $B = 3$.
- A podría ser 3 y con ello implicar que $C = 4$.
- A, que es el elemento a_4, podría ser 4, pues $a_8 - a_0 = 4 - 0 = 4$, lo cual es consistente con la Recursión $\mathfrak{R}$.

En todos los enunciados anteriores, hay una razón puntual por la cual se ha usado el modo condicional y no el modo indicativo para conjugar el verbo *poder*. A **podría**

[4] Esta sucesión se ha representado de esta manera, con una matriz cuya primera fila incluye los nombres de los elementos y la segunda sus valores. Hacer esto resulta conveniente por el momento, pues facilita el seguimiento de algunas observaciones.

(y no **puede**) ser 0, pues ello no viola la recursión $\mathfrak{R}$ inmediatamente, pero no tenemos certeza de que no la violará posteriormente, pues tendrá influencia sobre los siguientes valores. Por ejemplo, $a_4 = 0$ implica que $a_{12} = 4$, luego que $a_{16} = 8$ y así sucesivamente... a su vez, estos nuevos valores tendrán influencia sobre otros muchos valores y no es seguro que esa cadena de implicaciones no nos lleve eventualmente a una contradicción, es decir, a un elemento que no satisfaga la recursión $\mathfrak{R}$.

Por último, observemos que A no puede ser 5, pues no existe un elemento que esté cinco lugares hacia su izquierda.

La sucesión (m_n)

Al inicio de esta sección aprendimos que quizá es necesario que cualquier sucesión definida por $\mathfrak{R}$ cuente con infinitos *valores iniciales*, pues una cantidad dada de valores iniciales no necesariamente termina por definir todos los elementos de la sucesión.

Es cansado imaginar que cada vez que aparezca un *valor libre* —como los que anteriormente representábamos con letras mayúsculas— será necesario decidir, escoger o buscar un valor que concuerde con las definiciones, o bien que no viole la recursión $\mathfrak{R}$. Por ello, resulta sugestiva la idea de definir una regla que decida por nosotros cada vez que uno de estos valores indeterminados aparezca.

Empezaremos con la regla que quizá es la más natural, motivados por la observación de la sucesión de Conway, que es monótona:

Cualquier nuevo *valor no determinado, será igual al valor anterior.*

Tomando este principio, el elemento a_4, que al inicio de esta sección representábamos con la letra A, queda inmediatamente definido como el número 2, implicando, como decíamos, que $a_6 = 3$. Luego, la sucesión que estamos construyendo se ve de esta manera (se ha colocado una x en cada valor indeterminado):

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots \\ 0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & \mathbf{3}, & x, & 4, & x, & x, & x, & x, & \dots \end{pmatrix}$$

El elemento $a_6 = 3$ implica que $a_{6+3} - a_{6-3} = 3$, es decir, que $a_9 = 5$. Luego, el siguiente valor indeterminado es a_7, que será igual a a_6. La sucesión ahora cuenta con los siguientes valores:

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & \dots \\ 0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 3, & \mathbf{3}, & 4, & 5, & x, & x, & x, & \dots \end{pmatrix}$$

El elemento $a_7 = 3$ implica que $a_{7+3} - a_{7-3} = 3$, es decir, que $a_{10} = 5$. Similarmente, $a_8 = 4$ implica que $a_{12} = 6$ y $a_9 = 5$ implica que $a_{14} = 7$. Lo que lleva a los siguientes valores:

$$\begin{pmatrix} a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8, & a_9, & a_{10}, & a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \dots \\ 0, & 1, & 1, & 2, & 2, & 3, & 3, & 3, & 4, & 5, & 5, & x, & 6, & x, & 7, & \dots \end{pmatrix}$$

Hasta este momento, la regla que adoptamos no nos ha llevado a ninguna inconsistencia. Contamos con evidencia empírica de que quizá no lo haga nunca: con el uso de un ordenador y un algoritmo que generó el **primer millón de elementos** de esta sucesión y verificó que todos esos elementos cumplieran la recursión $\mathfrak{R}$.

Llamaremos a esta sucesión (m_n). Las siguientes dos figuras muestran sus primeros doscientos elementos y un millón de elementos, respectivamente. Se observa (Figura 5) que esta sucesión también crece como $n/2$; este hecho puede ser explicado suponiendo que **1)** la diferencia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de la sucesión es siempre 0 ó 1, y **2)** que ninguno de estos dos valores tiene algún *motivo especial* para aparecer con mayor frecuencia que el otro.

Definición 1. Sea una sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cuyo dominio $\mathcal{Q}$ es un conjunto de enteros consecutivos, definimos y denotamos a la sucesión $(\Delta D_i)_{i\in\mathcal{Q}'}$ como la **primera diferencia** de (D_i), donde

$$\Delta D_n = D_{n+1} - D_n \tag{3}$$

para todo n si y sólo si $n, n+1 \in \mathcal{Q}$.

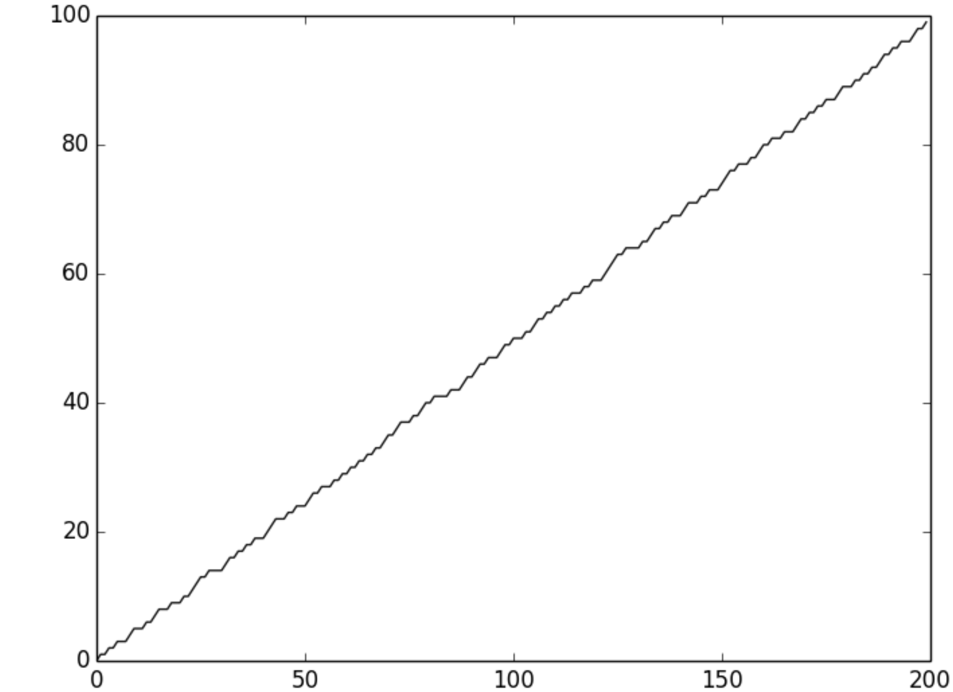


Figura 4: Primeros 200 elementos de la sucesión (m_n).

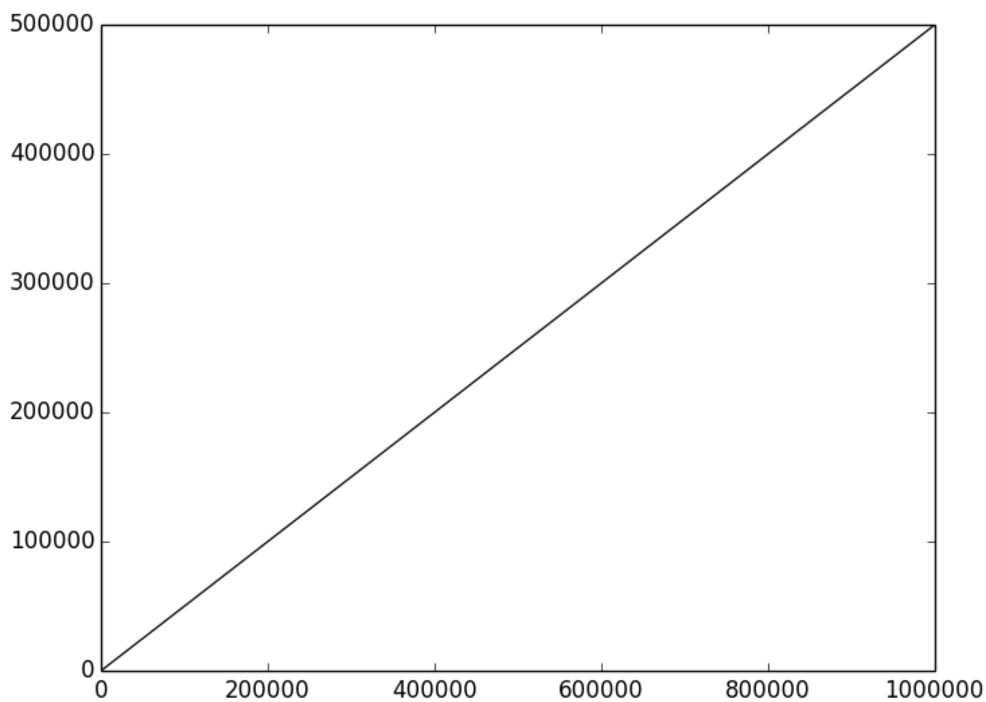


Figura 5: Primer millón de elementos de la sucesión (m_n).

Teorema 1. *Sea cualquier sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cuyo dominio es un conjunto de números consecutivos. El n-ésimo elemento de la sucesión es igual a*

$$D_n = D_p + \sum_{j=p}^{n-1} \Delta D_j \tag{4}$$

siempre que $p \in \mathcal{Q}$ y $p < n$.

Demostración. Demostremos que si se cumple la Ecuación (4) para $p = n - k$, se cumplirá para $p = n - (k+1)$ siempre que $n - (k+1) \in \mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} D_n = D_{n-k} + \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta D_j &= (D_{n-k-1} - D_{n-k-1}) + D_{n-k} + \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta D_j \\ &= D_{n-k-1} + \Delta D_{n-k-1} + \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta D_j \\ &= D_{n-(k+1)} + \sum_{j=n-(k+1)}^{n-1} \Delta D_j \end{aligned}$$

Veamos que (4) se cumple para $p = n - 1$:

$$D_n = D_{n-1} + (D_n - D_{n-1}) = D_{n-1} + \Delta D_{n-1} = D_{n-1} + \sum_{j=n-1}^{n-1} \Delta D_j$$

Luego, (4) se cumplirá para todo $p = n-(1+m)$ con $m \in \mathbb{N}$ siempre que $n-(1+m) \in \mathcal{Q}$; es decir, se cumple para todo $p \in \mathcal{Q}$ y $p < n$. $\square$

Corolario 1. *Sea la sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cuyo dominio es un conjunto de enteros consecutivos. Todo elemento D_n con $n > 0$ es igual a:*

$$D_n = D_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta D_j \tag{5}$$

Observación. Si en la sucesión (Δm_n) todos los elementos son igual a 0 ó 1 y ambos valores aparecen con la misma frecuencia, entonces de acuerdo a la Ecuación (5):

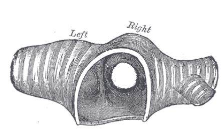
$$m_n = m_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta m_j \approx m_0 + \frac{n}{2}(0) + \frac{n}{2}(1) = 0 + 0 + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

Es posible que este mismo argumento pueda usarse para la sucesión de Conway y para otras, aunque aún no es muy claro cómo demostrar que ambos valores *aparecen con la misma frecuencia*. Lo que sí es posible demostrar, como lo haremos a continuación, es que la primera diferencia de (m_n) es una sucesión que sólo contiene ceros y unos; ello nos ayudará a demostrar finalmente que la sucesión (m_n) está bien definida, es decir, que existe un elemento m_n cumpliendo la relación de recursión $\mathfrak{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2. *Sea (m_n) la sucesión bien definida por la recursión $\mathfrak{R}$, con valores iniciales $m_0 = 0$ y $m_1 = 1$ y cumpliendo el principio "cualquier valor no definido por los valores anteriores es igual a su antecesor". Se tienen los siguientes hechos:*
1) *La diferencia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de la sucesión (m_n) es 0 ó 1. Es decir, para todo n en el dominio de (Δm_n), se tiene $\Delta m_n \in \{0, 1\}$.*
2) *Esta sucesión está bien definida en todos los naturales: $(m_n)_{n=0}^{\infty}$.*

La demostración de este teorema se ofrece en los Apéndices. En este momento, este resultado representa la existencia de la primera sucesión bien definida en **todo su dominio** por una relación de recursión que escapa a la naturaleza de todas las recursiones que aparecen en la literatura. También simboliza el comienzo de un nuevo trayecto, en donde se interpretarán todos los aprendizajes pasados como la parte fragmentaria de una estructura más completa. [45]

"La ruta nos aportó otro paso natural"



3. Observaciones

"Capto la seña de una mano y veo
que hay una libertad en mi deseo"

—Jorge Cuesta, *Canto a un dios mineral*

No fue una tarea trivial demostrar que (m_n) es una sucesión bien definida que cumple una relación de recursión muy extraña. El saber que está bien definida para el primer millón de elementos y observar su gráfica nos animó a suponer que debe estar bien definida para todos los naturales y que sus primeras diferencias siempre serán 0 o 1.

En este sentido, las computadoras son una herramienta inestimable en el quehacer matemático, pues potencian nuestra capacidad de identificar patrones. Esto será más que evidente en la siguientes secciones, donde la observación de unas gráficas nos llevará a demostrar una serie de teoremas que abarcan tanto las recursiones tradicionales, como la de Hofstadter y la que nos ocupa en este capítulo.

Por ahora, nos enfocaremos en definir una nueva regla para generar sucesiones consistentes con la recursión $\mathfrak{R}$. En la demostración del Teorema 2.2, sólo en una ocasión se hizo referencia a la regla o principio anterior, en el enunciado:

Observamos que en este proceso no queda explícitamente definido m_{p+1}, pero si seguimos el principio enunciado previamente, éste sería igual a m_p, por lo tanto $\Delta m_p = 0$ y $\Delta m_{p+1} = 1$.

El teorema funciona porque la primera regla que adoptamos nos permite afirmar que $\Delta m_n \in \{0, 1\}$ para n cada vez más grande. En el enunciado citado, se establecen dos nuevas primeras diferencias: $\Delta m_p = 0$ y $\Delta m_p = 1$, como consecuencia de haber definido $m_{p+1} = m_p$.

Examinando la demostración, se puede notar que si, en cambio, se define $m_{p+1} = m_{p+2}$, ello implica las diferencias $\Delta m_p = 1$ y $\Delta m_p = 0$ y el "teorema" puede seguir funcionando.[1] Esto es algo no muy fácil de digerir, pues se ha dado valor a un elemento indefinido usando un **elemento futuro** de la sucesión. Esta nueva regla se puede expresar con palabras como sigue:

Cada nuevo *valor no determinado, será igual al valor posterior*

No debe de ser sencillo llegar a una regla de esta naturaleza sin antes haber observado una gráfica (o los primeros valores de una sucesión en construcción) y el comportamiento de una sucesión construida por la primera regla que adoptamos, pues no es evidente el hecho de que **ya existe** ese *valor posterior*. Pero en estas nuevas relaciones de recursión, donde los elementos dependen tanto de sus antecesores como de sus sucesores, a menudo observaremos comportamientos alejados de aquellos propios de las recursiones tradicionales.

Es cierto que las recursiones tradicionales pueden ser adaptadas para que cada elemento dependa también de elementos anteriores y posteriores. Por ejemplo, la recursión $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$ es equivalente a $A_n = A_{n+1} - A_{n-1}$. Sin embargo, lo más importante de la recursión que aquí estudiamos, $a_n = a_{n+a_n} - a_{n-a_n}$, es que ésta **no puede ser adaptada para no depender siempre de valores anteriores y posteriores**, o al menos, no en un sentido universal. Reacomodando los términos, tenemos

$$a_{n+a_n} = a_n + a_{n-a_n}. \tag{1}$$

De donde podríamos argumentar que se está relacionando un termino posterior (a_{n+a_n}) con otros anteriores (a_n y a_{n-a_n}), pero esto no siempre es verdad, pues a_n puede ser un **entero negativo**.

Ejemplo de lo anterior es la sucesión

$$(m_j^-)_{j=-\infty}^{0} = (\ldots, -5, -5, -4, -3, -3, -3, -2, -2, -1, -1, 0),$$

[1] En realidad sería un teorema nuevo con una hipótesis distinta: la nueva regla establecida.

es decir la sucesión con dominio en $n < 1$ tal que $m^-_{-n} = -m_n$. Es posible demostrar, y más tarde lo haremos, que esta sucesión cumple $\mathfrak{R}$ en todo su dominio. En ella, casi todos sus valores son negativos y por lo tanto, la Ecuación (1) **no** es una relación de recursión en el sentido tradicional.

Ahora puede argumentarse que en este caso, la ecuación $a_{n-a_n} = a_n + a_{n+a_n}$ sí es tradicional, lo cual es cierto. Sin embargo, ninguno de estos argumentos es válido para la sucesión

$$(m^*_k)^{\infty}_{k=-\infty} = (\ldots, -2, -2, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots),$$

o bien, la sucesión tal que $m^*_n = m^-_n$ para todo $n < 1$ y $m^*_n = m_n$ para todo $n > 0$.

Demostremos que ambas sucesiones están bien definidas por $\mathfrak{R}$ en sus respectivos dominios, como consecuencia del siguiente lema.

Lema 1. *Sea $(S_n)_{n\in\mathcal{Q}}$ una sucesión con cierto dominio $\mathcal{Q}$, donde cada elemento cumple la recursión $S_n = S_{n+S_n} - S_{n-S_n}$. Entonces existe una sucesión que denotamos como $(S^-_j)_{j\in\mathcal{Q}^-}$ tal que $S^-_{-n} = -S_n$ para todo $n \in \mathcal{Q}$ y que satisface la recursión en $\mathcal{Q}^- = \{-n | n \in \mathcal{Q}\}$.*

Demostración. Queremos demostrar que $S^-_{-n} = S^-_{-n+S^-_{-n}} - S^-_{-n-S^-_{-n}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Veamos que ello es consecuencia de que (S_n) cumple la recursión.

$$\begin{aligned} S^-_{-n} = S^-_{-n+S^-_{-n}} - S^-_{-n-S^-_{-n}} &\iff -S_n = S^-_{-n-S_n} - S^-_{-n+S_n} \\ &\iff -S_n = -S_{n+S_n} + S_{n-S_n} \end{aligned}$$

La última expresión es la recursión $\mathfrak{R}$ multiplicada por -1, la cual se cumple para todo $n \in \mathcal{Q}$, por hipótesis. $\square$

Corolario de este resultado es que (m^-_j) está bien definida para $j < 1$, pues este es el caso cuando (S_n) es la sucesión (m_n), que sabemos bien definida por $\mathfrak{R}$ en todo su dominio $\mathbb{N}$. Para demostrar que (m^*_k) está bien definida en el dominio $\mathbb{Z}$ de todos los enteros, vamos a recurrir a un teorema aún más general usando las siguientes definiciones.

Definición 1. Sean las sucesiones $(a_i)_{i\in\mathcal{P}}$ y $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ tal que $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\varnothing$, definimos la unión $(a_i)\cup(b_i)$ de éstas como la sucesión $(c_i)_{i\in\mathcal{T}}$ con $\mathcal{T}=\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ tal que $c_i=a_i$ si y sólo si $i\in\mathcal{P}$ y, por el contrario, $c_i=b_i$ si y sólo si $i\in\mathcal{Q}$.

Definición 2. Una relación de recursión es de clase α si:

1) Tiene la forma

$$S_n=\sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(S_{h_j},n)\colon\, h_j\in f((S_i)_{i\in\mathcal{Q}},n) \tag{2}$$

donde $f\colon\mathcal{R}\times\mathcal{W}\to\{f_j|j\in\mathcal{J}_n\}$ es una función de la sucesión y la posición que **no depende** de su dominio. Con las funciones $f_j\colon\mathcal{R}\times\mathcal{W}\to\mathbb{Z}$ y $g_j\colon\mathbb{R}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$. En la ecuación de arriba h_j representa la función f_j evaluada en $((S_i),n)$.

Y **2)** Si f cumple

$$f((T_i)_{i\in\mathcal{B}},n)=f((R_i)_{i\in\mathcal{A}},n)$$

siempre que $n\in\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ y si $T_i=R_i$ para todo $i\in\mathcal{A}$.

En la primera condición de esta definición, se está suponiendo implícitamente que $|\mathcal{J}_n|=|f((S_i)_{i\in\mathcal{Q}},n)|$ y que $\mathcal{R}$ es un conjunto de sucesiones. La segunda condición está ahí para asegurar que $\sum q_j(T_{h_j},n)=\sum q_j(R_{h_j},n)$ siempre que (T_i) sea una extensión de (R_i), o bien, que cualquier sucesión conserve sus relaciones de recursión al ser extendida.

Todo esto se explica a profundidad más adelante. Por ahora, demostraremos en los apéndices que muchas de las relaciones de recursión que hemos mencionado son de clase α.

Lema 2. *Son de clase α:*

1) Las relaciones de recursión lineales, de orden k, coeficientes constantes y homogéneas.

2) Las relaciones de recursión tipo Meta-Fibonacci.

3) La recursión $\mathfrak{R}$.

Teorema 1. *Sean las sucesiones* $(a_i)_{i\in\mathcal{P}}$ *y* $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *tal que* $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\varnothing$*. Sea* $\mathcal{P}'$ *el subconjunto de* $\mathcal{P}$ *definido por una recursión* $\mathfrak{L}$ *de clase* α *y sea* $\mathcal{Q}'$ *el subconjunto de* $\mathcal{Q}$ *definido por* $\mathfrak{L}$*. Se tiene que la unión de estas sucesiones* $(a_i)\cup(b_i)\equiv(c_i)_{i\in\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}}$ *cumple la relación de recursión al menos para el subconjunto de su dominio* $\mathcal{P}'\cup\mathcal{Q}'$*.*

Demostración. Si la relación de recursión es de clase α, entonces es claro que

$$a_n=\sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(a_{h_j},n) \implies c_n=\sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(c_{h_j},n)$$

siempre que $n\in\mathcal{P}'$, pues $c_{h_j}=a_{h_j}$ para cada h_j que sea un elemento de $f((a_i),n)=f((c_i),n)$. Similarmente, $b_n=\sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(b_{h_j},n) \implies c_n=\sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(c_{h_j},n)$ para todo $n\in\mathcal{Q}'$. Luego, (c_i) cumple la recursión en $\mathcal{P}'\cup\mathcal{Q}'$. $\square$

Corolario 1. *La sucesión* $(m_k^*)_{k\in\mathbb{Z}}$ *tal como se definió cumple la relación de recursión* $\mathfrak{R}$ *para todo* n *entero.*

Demostración. En la demostración del Teorema 2.2 acerca de la sucesión (m_n), se hizo explícito que de la recursión $a_n=a_{n+a_n}-a_{n-a_n}$ se tiene que $n-a_n\le n+1-a_{n+1}$, o bien, que ningún elemento "señala a la izquierda" a un valor anterior al que señaló su antecesor. Esto se visualiza en los primeros términos de la sucesión:

Por lo tanto, la subsucesión $(m_n)_{n=1}^{\infty}=(1,1,2,2,3,\ldots)$ cumple la relación de recursión $\mathfrak{R}$ para todo $n>1$. Luego, por el Teorema 1 sabemos que la unión de la subsucesión anterior con (m_j^-) tiene dominio en $\mathbb{Z}$ y cumple la relación de recursión para todo $n<1$ y para todo $n>1$.

Esta unión es exactamente igual a (m_k^*). Ahora, considerando que $m_1^*=1=1-0=m_2^*-m_0^*$, podemos afirmar que esta sucesión cumple la recursión $\mathfrak{R}$ también en $n=1$ y, por lo tanto, en todo su dominio. $\square$

Siguiendo el mismo estilo de dar un teorema general para demostrar un resultado deseado, vamos a probar que la regla *Cada nuevo valor no determinado, será igual al posterior* genera una sucesión bien definida que cumple la recursión $\mathfrak{R}$.

Teorema 2. *Sea $(S_n)_{n=0}^{p}$ una sucesión cuyo elemento S_r satisface la recursión $\mathfrak{R}$, donde $r + S_r = p$ y para cada $n < p$ se cumple $\Delta S_n \in \{0, 1\}$. Existe una sucesión $(S'_n)_{n=0}^{p'}$ con $p < p'$ donde la subsucesión $(S'_n)_{n=0}^{p}$ es igual a (S_n), para todo $n < p'$ se cumple $\Delta S'_n \in \{0, 1\}$ y el elemento S_{r+1} satisface la misma recursión. Esta sucesión cuenta con las siguientes especificaciones:*
a) Si $\Delta S_r = 0$, entonces $p' = p + 1$ y $S'_{p+1} = S_p + \Delta S_{r-S_r}$.
b) Si $\Delta S_r = 1$, entonces $p' = p + 2$ y $S'_{p+2} = S_p + 1$ y existe la libertad de escoger entre $S'_{p+1} = S'_{p+2}$ y $S'_{p+1} = S'_p$.

Demostración. La demostración de este teorema usa exactamente las mismas ideas y procedimientos que fueron presentados en la demostración del Teorema 2.2. $\square$

Corolario 2. *La sucesión (M_n) cuyos primeros valores son $(0, 1, 1)$ y que cumple el principio "cualquier valor no definido por los valores anteriores es igual a su sucesor", está bien definida por la recursión $\mathfrak{R}$ en todo el dominio de los naturales.*

La Figuras 1 y 2 muestran el comportamiento de la sucesión (M_n). Si se observan los primeros términos, pueden verse rugosidades sin ningún patrón aparente; al contemplar 200 mil de sus elementos, se observa claramente que esta esta sucesión también crece como $n/2\ldots$ justo como lo hacía (m_n).

Lo anterior nos hace suponer que cualquier sucesión bien definida por $\mathfrak{R}$ y generada con el Teorema 2 crecerá de la misma manera. Otro indicio es que la función $F(n) = nc$ cumple la ecuación funcional característica de $\mathfrak{R}$

$$F(n) = F(n + F(n)) - F(n - F(n))$$

sólo cuando $c = 1/2$.

Demostración. Si $F(n) = nc$, la ecuación funcional se traduce en la siguiente

$$\begin{aligned} nc &= (n+nc)c - (n-nc)c \\ \iff nc &= (nc+nc^2) - (nc-nc^2) \iff nc = 2nc^2 \end{aligned}$$

Siempre que $n, c \neq 0$, se tiene $nc = 2nc^2 \iff c = \frac{1}{2}$. □

El número $\frac{1}{2}$ es un viejo conocido por nosotros. Apareció desde las primeras páginas de esta tesis, cuando se supuso que el polinomio $\Omega(x) = x^2 - x - 1$ contaba con una raíz múltiple (Véase el Capítulo 0. Preludio matemático y su segunda sección). Luego fue empleado para definir $\omega_1 = \frac{1}{2}$ y la sucesión (ω_n) tal que cada elemento $n > 1$ cumplía la recursión $\omega_n = A(\omega_{n-1})$. Encontramos que los númeradores y denominadores que aparecen en este conjunto son los números de Lucas y el límite cuando $n \to \infty$ de ω_n es φ, la proporción áurea y raíz positiva de $\Omega(x)$.

Después, hallamos que $(\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ está relacionado con π vía un teorema de Viète (consultar la sección *Comentario sobre la función* A de los Apéndices). Y más tarde descubrimos que $\frac{1}{2}$ también está relacionado con las tazas de crecimiento de las sucesiones de Hofstadter y Conway. Finalmente, lo encontrado en esta sección... pero ésta no será la última vez que encontremos conexiones entre una potencia de ± 2, una relación de recursión, un número irracional y una sucesión recursiva.

Una pregunta abierta de esta sección —y quizá de todo el capítulo— es si existe una manera de encontrar sucesiones bien definidas por la recursión $\mathfrak{R}$ que no sean generadas por ninguna de las dos reglas descubiertas. Quizá eso sea posible si dejamos de exigirle a **absolutamente todos** los elementos de la sucesión que cumplan la recursión, como se realizó con la recursión de Hofstadter cuando se generó aquella sucesión (V_k) en donde aparecían los números de Fibonacci.

En la siguiente sección daremos respuesta a la pregunta: ¿Existen sucesiones bien definidas por $\mathfrak{R}$ con diferentes valores iniciales?

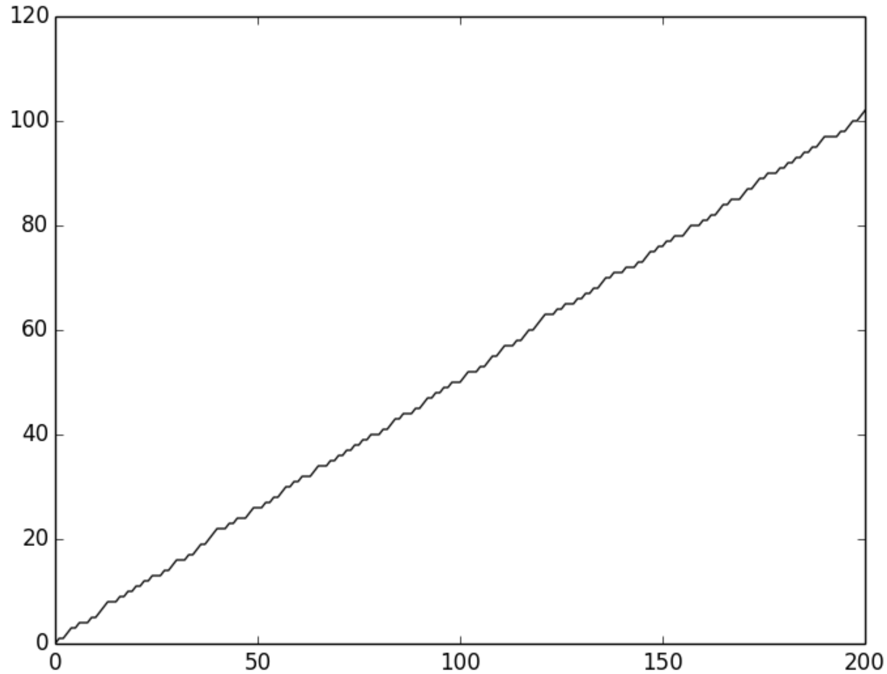


Figura 1: Primeros 200 elementos de la sucesión (M_n).

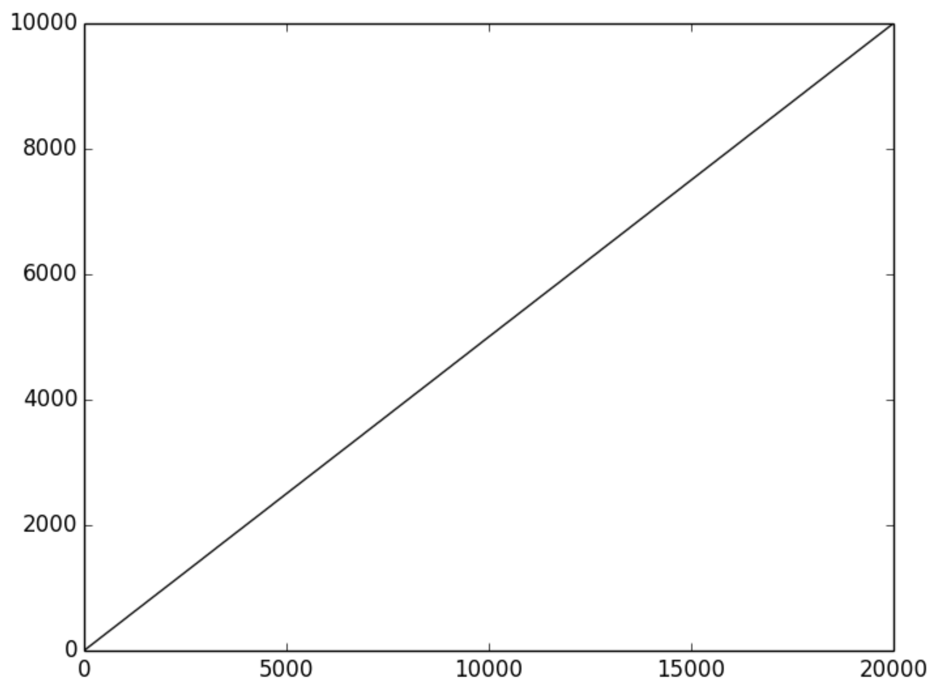


Figura 2: Primeros 20 mil elementos de la sucesión (M_n).

Sucesiones de $\mathfrak{R}$ con diferentes valores iniciales

Busquemos sucesiones definidas por la relación de recursión $\mathfrak{R}$ usando la misma regla con que construimos (m_n) pero con diferentes valores iniciales.

Para construir (m_n), usamos los dos valores iniciales $m_0 = 0$ y $m_1 = 1$. Elegimos $m_0 = 0$ porque 0 es el valor perfecto para empezar una sucesión definida por $\mathfrak{R}$, ya que es el único valor que no exige la existencia de algún elemento anterior; elegimos $m_1 = 1$ porque es el único valor distinto de cero que puede existir en esa posición sin exigir la existencia de un elemento dos o más lugares 'a su izquierda'.

Nuestra intención es generar una sucesión en la que el primer valor distinto de cero sea 2, 3 o cualquier número $r > 1$. Para ello, es absolutamente necesario que los primeros r valores estén definidos y, por hipótesis, sean igual a 0.

La Figura 3 muestra las gráficas de estas sucesiones para $r \in \{1, 2, \ldots, 8\}$. Algo muy interesante ocurre al comparar unas con otras: parece que cada una es una versión *estirada* de la anterior, o bien, una versión estirada de la primera sucesión (m_n). Esto sugiere que existen altas posibilidades de que todas estas sucesiones también estén bien definidas en el dominio de los naturales.

Denotemos como $((m_{r,n}))_{r\in\mathbb{Z}^+}$ a la sucesión cuyo r-ésimo elemento es la sucesión $(m_{r,n})$, que tiene valores iniciales $m_{r,0} = \ldots = m_{r,r-1} = 0$ y $m_{r,r} = r$

$$(m_{r,n}) = (0, \ldots, 0, r).$$

Comparando $(m_n) \equiv (m_{1,n})$ y $(m_{2,n})$

$$(m_{1,n}) = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, \ldots)$$
$$(m_{2,n}) = (0, 0, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10, \ldots)$$

notamos que por cada elemento $m_{1,n}$ existen dos en $(m_{2,n})$ con valor igual a $2m_{1,n}$.

Nuestra intención es demostrar que en $(m_{r,n})$ se cumple $m_{r,rn} = m_{r,rn+1} = \cdots = m_{r,rn+(n-1)} = rm_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero antes necesitamos otros resultados y definiciones.

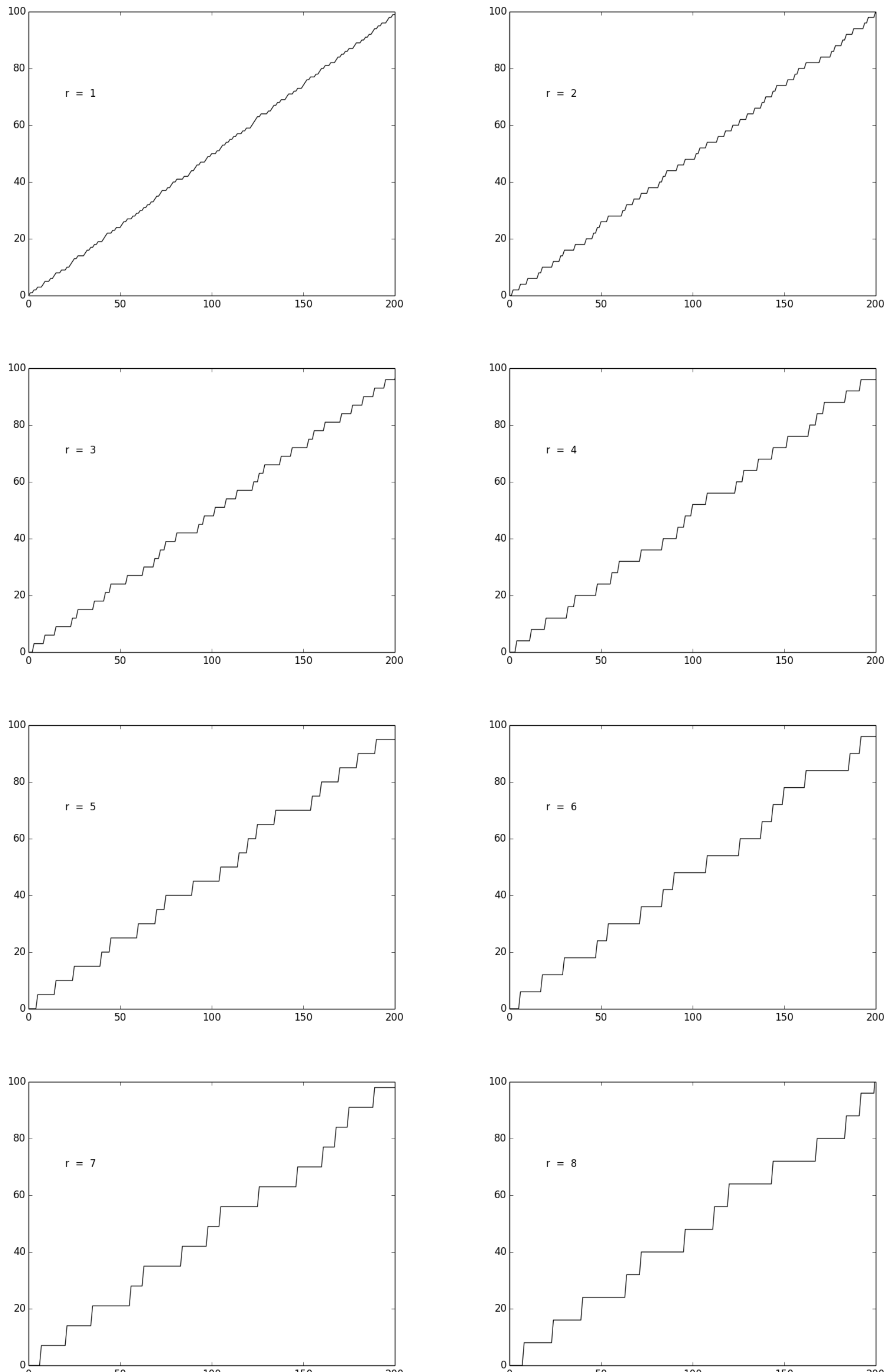


Figura 3: Primeros 200 elementos de cada sucesión $(m_{r,n})$ con $r \in \{1, \ldots, 8\}$.

Definición 3. Sea la sucesión $(S_n)_{n\in\mathcal{Q}}$ y sean $k, r \in \mathbb{Z}$ con $r \neq 0$, denotamos como $(S^r_{k,i})_{i\in\mathcal{P}}$ a la sucesión con dominio en $\mathcal{P} = \{k + rn | n \in \mathcal{Q}\}$ tal que $S^r_{k,k+rn} \equiv rS_n$ para todo $n \in \mathcal{Q}$.

Definición 4. Una relación de recursión es de clase δ si es de clase α y para toda sucesión $(S_n)_{n\in\mathcal{Q}}$ que cumpla dicha recursión en $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$, entonces cualquier sucesión $(S^r_{k,i})_{i\in\mathcal{P}}$ cumple la misma recursión en $\mathcal{P}' = \{k + rn | n \in \mathcal{Q}'\}$.

Teorema 3. *La recursión $\mathfrak{R}$ es de clase δ.*

Demostración. Queremos demostrar que para todo $i = k+rn$ con $n \in \mathcal{Q}'$, $S^r_{k,i}$ cumple la recursión. Usaremos la notación con paréntesis:

$$S^r_k(i \pm S^r_k(i)) = S^r_k(k + rn \pm rS(n)) = S^r_k(k + r(n \pm S(n)) = rS(n \pm S(n))$$

Por lo tanto, $S^r_k(i + S^r_k(i)) - S^r_k(i - S^r_k(i)) = rS(n + S(n)) - rS(n - S(n)) = rS(n)$, de donde se puede llegar a la recursión $\mathfrak{R}$ cosiderando que $rS(n) = S^r_k(i)$. $\square$

Note que para $r = -1$, $k = 0$ y $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}$, el Teorema 3 es equivalente al Lema 1.

Teorema 4. *Sea $\boldsymbol{X} = \{(A_n), (B_n), \ldots\}$ un conjunto de sucesiones que cumplen la recursión $\mathfrak{L}$ de clase δ para un subconjunto de su dominio común $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$, y sea $r \in \mathbb{Z}$ tal que $|r| > 0$. Si para cada $k \in \mathcal{K} \subseteq \{0, \ldots, |r| - 1\}$ generamos una sucesión $(S^r_{k,i})$ con $(S_n) \in \boldsymbol{X}$, entonces la unión de todas ellas $\bigcup_{k\in\mathcal{K}} (S^r_{k,i}) \equiv (T_i)_{i\in\mathcal{P}}$ está bien definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{P}' = \{k + rn | k \in \mathcal{K} \wedge n \in \mathcal{Q}'\}$.*

Demostración. Si $|r| = 1$, el teorema es consecuencia de la Definición 4. Para $|r| > 1$, el Teorema 1 nos dice que lo único que debemos probar es **1)** que la intersección de los dominios de cualquier par $(S^r_{k,i})$ y $(S^r_{k',i})$ con $k \neq k'$ es el conjunto vacío. Y **2)** que la sucesión $\bigcup (S^r_{k,i})$ está definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{P}'$ tal como está escrito arriba.

1) De acuerdo a la Definición 4, el dominio de cada $(S^r_{k,i})$ es $\{k + rn | n \in \mathcal{Q}\}$ para cada k. Demostremos que $\{k + rn | n \in \mathcal{Q}\} \cap \{k' + rn | n \in \mathcal{Q}\} = \varnothing$ siempre que $k \neq k'$. Sean $n, n' \in \mathcal{Q}$, se tiene que:

$$k + rn = k' + rn' \iff k' = r(n - n') + k$$

La diferencia $N \equiv n - n'$ es siempre un número entero, pues ambos son elementos del dominio de una sucesión y, por lo tanto, enteros también. Luego:

$$k + rn = k' + rn' \iff k' = rN + k$$

$N = 0$ implica que $k' = k$, contradiciendo nuestra hipótesis; por lo tanto, $|N| > 0$. No se pierde generalidad si decimos que $rN = |rN|$, luego $k' = rN + k \geq rN + 0 \geq |r|$, es decir, $k' \geq |r|$, lo cual no es posible pues $k' \in \{0, \ldots, |r| - 1\}$ por hipótesis.

Por lo tanto, la intersección de los dominios de cualesquiera $(S^r_{k,i})$ y $(S^r_{k',i})$ es nula y existe $(S^r_{k,i}) \cup (S^r_{k',i})$ definida por la recursión $\mathfrak{L}$ en

$$\{k + rn | n \in \mathcal{Q}'\} \cup \{k' + rn | n \in \mathcal{Q}'\} = \{q + rn | q \in \{k, k'\} \text{ y } n \in \mathcal{Q}'\}.$$

2) Por métodos similares, puede demostrarse que es posible unir $m \leq |r|$ sucesiones del tipo $(S^r_{k,i})$ con $(S_n) \in \boldsymbol{X}$ tal que cada una de éstas cuenta con un k diferente del conjunto $\mathcal{K} \subseteq \{0, \ldots, |r| - 1\}$. Para $m = |r|$, denotamos a dicha unión como la sucesión (T_i) que cumplirá la recursión para toda i en el siguiente conjunto (Def. A.8)

$$\bigcup_{k \in \{0,\ldots,r-1\}} \{k + rn | n \in \mathcal{Q}'\} = \{k + rn | k \in \{0, \ldots, r - 1\} \wedge n \in \mathcal{Q}'\}. \qquad \square$$

Teorema 5. *Sea $r > 1$, la sucesión $(m_{r,n})$ como fue definida previamente es tal que*

$$m_{r,rn} = m_{r,rn+1} = \cdots = m_{r,rn+(r-1)} = rm_n$$

donde m_n es el n-ésimo elemento de la sucesión (m_n). Es decir, $(m_{r,n})$ es la unión (T_i) de todas las sucesiones de la forma $(m^r_{k,n})$ con $k \in \{0, \ldots, r - 1\}$ y, por lo tanto, está definida por $\mathfrak{R}$ en todo $\mathbb{N}$.

Nuevamente, la demostración de este teorema se ofrece en los Apéndices. No es vital incluirlo aquí porque, en todo nuestro estudio, este teorema desempeña un papel meramente simbólico: representa la evidencia de que se ha logrado construir un conjunto infinito de sucesiones recursivas usando una sola sucesión. Esto es una promesa, pues si se lograra imitar esto usando la sucesión de Hofstadter y la recursión $\mathfrak{H}$, se sabría un poco más acerca de un tema que ahora nos es tan desconocido y misterioso.

De modo que nuestra principal motivación actual es crear un equivalente al Teorema 5 para la sucesión de Hofstadter. Anticipamos que no es posible usar directamente el Teorema 4 para este propósito, pues la recursión $\mathfrak{H}$ no es de clase δ, de modo que la intención de la siguiente sección es definir todos los conceptos necesarios para identificar *qué clase de recursión* es la recursión $\mathfrak{H}$, qué propiedades tiene, y cómo puede usarse para construir otras sucesiones.

Y para un propósito global, la siguiente sección ofrece definiciones y teoremas que definitivamente serán útiles para el estudio de las sucesiones ultrarrecursivas.

Invariancias de las relaciones de recursión

MUCHOS DE LOS CONCEPTOS que hemos definido han nacido como resultado del estudio de la familia de sucesiones $(m_{r,n})$. Éstos nos ayudaron a demostrar formalmente que el comportamiento aparente de estas sucesiones es un **hecho matemático**. Sin embargo, resulta conveniente identificar los conceptos principales que entraron en juego para que estas demostraciones pudieran ser realizadas.

Recordemos que una sucesión $a\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$ es una función que mapea un subconjunto de los enteros a los reales. De nuestra definición de recursión

$$a_n = \zeta((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n)$$

podemos decir que la función $\zeta\colon \mathcal{R} \times \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ —con $\mathcal{R} \subseteq \{b|\mathcal{U} \in P(\mathbb{Z}) \wedge b\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}\}$ y $\mathcal{W} \subseteq \mathbb{Z}$—[2] asigna al par ordenado $(\{(j, a_j)|j \in \mathcal{Q}_n\}, n)$ el número real a_n. Donde $\{(j, a_j)|j \in \mathcal{Q}_n\}$ es el conjunto de todos los pares ordenados '(posición, miembro de la sucesión)', o bien la subsucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}$.

El dominio $\mathcal{Q}_n$ tiene asignado un subíndice 'n' para enfatizar el hecho de que el conjunto de elementos que desempeñarán un papel relevante en ζ puede depender de

[2]Aquí se entiende por $P(\mathbb{Z})$ como el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{Z}$, por lo que b representa cualquier sucesión y $\mathcal{R}$ un subconjunto del conjunto de todas las sucesiones existentes.

la posición n. El propósito de esta elección será más evidente en futuros capítulos.

Nótese que si la sucesión (a_i) está bien definida por una relación de recursión en $\mathcal{Q}'$, entonces:

$$\big\{\{(j, a_j)|j \in \mathcal{Q}_n\}|n \in \mathcal{Q}'\big\} \subseteq \mathcal{R} \quad \text{y} \quad \mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{W}.$$

Veamos que, de todas las posibilidades que ofrece la definición que adoptamos, únicamente nos hemos enfocado en aquellas recursiones que pueden escribirse como la suma de distintas funciones dependientes de un sólo elemento de la sucesión y de la posición:

$$a_n = \sum g_j(a_{h_j}, n).$$

Por lo que *parecería* que han quedado fuera de nuestro estudio recursiones como la siguiente:

$$a_n = a_{n-1}a_{n-2}.$$

Invariancia ante la extensión

Enunciemos algunas definiciones clásicas para entender con mayor profundidad las definiciones de *sucesión de clase* α, la de unión de sucesiones, entre otras.

Definición 5. Una función $r\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es una **restricción** de la función $s\colon \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ y $r(i) = s(i)$ para todo $i \in \mathcal{A}$. Bajo las mismas condiciones, se dice que s es una **extensión** de r.

De modo que el concepto de *subsucesión* es en realidad la restricción de una sucesión y el de *unión de dos sucesiones* cuyos dominios no se intersectan, constituye una extensión para ambas sucesiones.

Definición 6. Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cualquier sucesión que satisface la relación de recursión $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$. Sea (B_i) cualquier extensión de (A_i). Decimos que $\mathfrak{L}$ es invariante ante la extensión si (B_i) también satisface la recursión en $\mathcal{Q}'$.

Por definición, toda relación de recursión de clase α es una invariante de la extensión. No sobra mencionar que esto no implica que todas las recursiones que son invariantes ante la extensión son de clase α.

La siguiente definición nos ayudará a entender los otros tipos de invariancia. Aunque su utilidad no termina ahí.

Definición 7. Una transformación de sucesiones

$$\mathrm{U}\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S} \quad \text{tal que} \quad \mathcal{S} \in \{b | \mathcal{U} \in P(\mathbb{Z}) \wedge b\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}\}$$

es una función que mapea una sucesión del conjunto $\mathcal{R}$, como fue definido anteriormente, a otra sucesión.

Estaremos escribiendo las transformaciones con letras mayúsculas. En lugar de escribir $\mathrm{U}((A_i)) = (B_i)$, escribiremos por comodidad

$$\mathrm{U} \circ (A_i) = (B_i),$$

es decir, emplearemos el símbolo que comúnmente se usa para representar una composición de funciones.

Por ejemplo, la transformación identidad $\mathrm{I}_{\mathcal{Q}}$ para toda sucesión con dominio en $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{Z}$ puede definirse como sigue

$$\mathrm{I}_{\mathcal{Q}} \circ (A_i)_{i \in \mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i \in \mathcal{P}}\colon (n \in \mathcal{Q} \iff n \in \mathcal{P}) \wedge \forall n \in \mathcal{P}(B_n = A_n)$$

Por lo tanto, $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ y $(B_i) = (A_i)$. Es decir, para todo $b\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{I}_{\mathcal{Q}} \circ b = b$.
En lo posterior, dejaremos de decir explícitamente 'la transformación $\smile$ con dominio en $\cdots$' y únicamente señalaremos las características. Es decir, hablaremos de cada grupo de transformaciones como si fuera una única transformación.

Aplicarle la transformación identidad a una sucesión puede verse como el equivalente a *multiplicar por uno* o *sumar cero* a cualquier número real. A continuación, se detallan los equivalentes a las operaciones de *suma* y *multiplicación* por otras constantes.

Invariancia ante la traslación

Definición 8. La traslación de sucesiones por el número entero k se define y se denota de la siguiente manera:

$$\mathrm{T}_k \circ (A_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (n \in \mathcal{Q} \iff n+k \in \mathcal{P}) \wedge \forall n+k \in \mathcal{P}(B_{n+k} = A_n) \quad (3)$$

Notemos que si $\mathcal{Q}$ es un conjunto finito, entonces $|\mathcal{Q}| = |\mathcal{P}|$. También que T_0 es la transformación identidad.

Definición 9. Diremos que una transformación de sucesiones es inyectiva respecto al dominio si tiene la forma

$$\mathrm{U} \circ (A_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (n \in \mathcal{Q} \iff f(n) \in \mathcal{P}) \wedge \forall f_n \in \mathcal{P}[B_{f_n} = g_n((A_i), n)] \quad (4)$$

con $f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{Z}$ una función inyectiva (i. e. $f(n) = f(m) \implies n = m$).

Evidentemente, la traslación es una transformación inyectiva respecto al dominio.

Definición 10. Sea U una transformación inyectiva respecto al dominio. Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{P}}$ y $(B_i)_{i\in\mathcal{Q}} = \mathrm{U} \circ (A_i)$. Para todo $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, denotamos como $\mathrm{U} \bullet \mathcal{A}$ a la imagen de $\mathcal{A}$ respecto a la función inyectiva f. Es decir, $\mathrm{U} \bullet \mathcal{A} = \{f(n) | n \in \mathcal{A}\}$.

Definición 11. Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cualquier sucesión que satisface la relación de recursión $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$. Sea k cualquier número entero y sea $(B_i) = \mathrm{T}_k \circ (A_i)$ la traslación de (A_i). Decimos que $\mathfrak{L}$ es invariante ante la traslación si (B_i) satisface la recursión en $\mathrm{T}_k \bullet \mathcal{Q}'$. También decimos que $\mathfrak{L}$ es una relación de recursión de clase β.

Invariancia ante el escalamiento

Definición 12. El escalamiento por el entero $r \neq 0$ es una transformación de sucesiones que se define y se denota de la siguiente manera:

$$\mathrm{E}_r \circ (A_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (n \in \mathcal{Q} \iff rn \in \mathcal{P}) \wedge \forall rn \in \mathcal{P}(B_{rn} = rA_n) \quad (5)$$

Nuevamente, notemos que E_1 es la transformación identidad, y que esta transformación también es inyectiva respecto al dominio con su respectiva función $F(n) = mn$.

Definición 13. Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cualquier sucesión que satisface la relación de recursión $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$. Sea r cualquier número entero distinto de cero y sea $(B_i) = \mathrm{E}_r \circ (A_i)$ un escalamiento de (A_i). Decimos que $\mathfrak{L}$ es invariante ante el escalamiento si (B_i) satisface la recursión en $\mathrm{E}_r \bullet \mathcal{Q}'$. También decimos que $\mathfrak{L}$ es una recursión de clase γ.

Definición 14. Sea $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cualquier sucesión que satisface la relación de recursión $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$. Sea U una transformación de sucesiones inyectiva respecto al dominio y sea $(B_i)_{i\in\mathcal{P}} = \mathrm{U} \circ (A_i)$. En general, decimos que $\mathfrak{L}$ es invariante ante la transformación U si (B_i) satisface la recursión en $\mathrm{U} \bullet \mathcal{Q}'$.

Por las definiciones de $(S^r_{k,n})$ y de recursión clase δ —Definiciones 3 y 4— podemos decir que todas las recursiones de clase δ son invariantes ante la composición de una transformación de escalamiento y una de traslación: en ese orden.

Compruebe el lector que $(S^r_{k,i})_{i\in\mathcal{P}} = \mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r \circ (S_n)_{n\in\mathcal{Q}}$. Sabemos, por definición, que si (S_n) está definida en $\mathcal{Q}'$ por una recursión de clase δ, ello implica que $(S^k_{k,i})$ lo estará en $\{k + rn | n \in \mathcal{Q}'\}$. Ahora bien

$$\begin{aligned}\{k + rn | n \in \mathcal{Q}\} &= \{f(rn) | f(x) = x + k, n \in \mathcal{Q}'\}\\ &= \{f(g(n)) | f(x) = x + k, g(x) = rx, n \in \mathcal{Q}'\}\\ &= \mathrm{T}_k \bullet \mathrm{E}_r \bullet \mathcal{Q}' \quad \text{(Definición 10)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, toda recursión clase δ es invariante ante la composición $\mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r$ (para todo $k \in \mathbb{Z}$ y $r \neq 0$). Para los pares $(0, r)$ y $(k, 1)$, tenemos

$$1)\ \mathrm{T}_0 \circ \mathrm{E}_r = \mathrm{I} \circ \mathrm{E}_r = \mathrm{E}_r$$
$$1)\ \mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r = \mathrm{T}_k \circ \mathrm{I} = \mathrm{T}_k$$

respectivamente. Por lo tanto, las relaciones de recursión de clase δ son invariantes al escalamiento e invariantes a la traslación: son recursiones α, β y γ a la vez.

Tres teoremas y un corolario interesante

Definición 15. Una relación de recursión es de clase α_1 si es de clase α y tiene la forma

$$S_n = \sum_{j \in \mathcal{J}_n} [q_j(n) S_{h_j} + a_j(n)] \colon h_j \in f((S_i), n) \tag{6}$$

que es (2) cuando $g_j(S_{h_j}, n) = q_j(n) S_{h_j} + a_j(n)$ donde $q_j, a_j \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Teorema 6. *Sea $(S_n)_{n \in \mathcal{Q}}$ una sucesión que en $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$ está definida por $\mathfrak{L}$ de clase α_1. La sucesión $(A_i)_{i \in \mathcal{P}} = \mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r \circ (S_n)$ está definida en $\mathrm{T}_k \bullet \mathrm{E}_r \bullet \mathcal{Q}'$ por la recursión*

$$A_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_n} \left[q_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big) A_{k+rh_j} + r a_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big) \right] \tag{7}$$

tal que $h_j \in f((S_n), n)$. Llamamos a (7) la recursión asociada de $\mathfrak{L}$.

Demostración. Sea $A_{k+rn} = rS_n$ e $i = k + rn$, multipliquemos (6) por r:

$$\begin{aligned} rS_n = A_i = r \cdot \left(\sum_{j \in \mathcal{J}_n} [q_j(n) S_{h_j} + a_j(n)] \right) &= \sum_{j \in \mathcal{J}_n} [q_j(n) r S_{h_j} + r a_j(n)] \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}_n} [q_j(n) A_{k+rh_j} + r a_j(n)] \end{aligned}$$ □

Notemos que la recursión (7) no es necesariamente de clase α_1, ni de clase α. Hasta este momento, no se han mostrado relaciones de recursión que no son de clase α; al final de la penúltima sección se darán ejemplos de tales recursiones.

Definición 16. Una relación de recursión es de clase α_2 si es de clase α_1 y su función $f \colon \mathcal{R} \times \mathcal{W} \to \{f_j | j \in \mathcal{J}_n\}$ es tal que

$$((R_i), n) \mapsto \{F_j(n) + G_j(n) \cdot R_{H_j(n)} | j \in \mathcal{J}_n\}.$$

Prácticamente todas las sucesiones que hemos estudiado son de clase α_2. Aún son necesarias algunas definiciones y teoremas antes de enunciar el resultado que buscamos: generar un conjunto infinito de sucesiones que cumplan recursiones como la de Hofstadter en cierto dominio.

Definición 17. Una relación de recursión es de clase α_1^* si es de clase α_1 y la recursión asociada (7) también es de clase α_1, es decir, tiene la forma:

$$A_i = \sum_{j \in \mathcal{J}_i^*} [w_j(i) A_{o_j} + b_j(i)] \colon o_j \in p((A_i), i) \tag{8}$$

Teorema 7. *Toda recursión de clase α_2 es de clase α_1^*. Su recursión asociada también es de clase α_2 y, siguiendo la notación de (8), se tiene que $p \colon \mathcal{R}' \times \mathcal{W}' \to \{o_j | j \in \mathcal{J}_i^*\}$ es tal que:*

$$((R_i), i) \mapsto \{F_j^*(i) + G_j^*(i) \cdot R_{H_j^*(i)} | j \in \mathcal{J}_i^*\}$$

con:

$$\begin{gathered} w_j(i) = q_j(n) = q_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big), \qquad b_j(i) = ra_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big), \qquad \mathcal{J}_i^* = \mathcal{J}_n, \\ F_j^*(i) = k + rF_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big), \quad G_j^*(i) = G_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big) \quad \text{y} \quad H_j^*(i) = k + rH_j\Big(\frac{i-k}{r}\Big). \end{gathered}$$

Demostración. De la parte derecha de la Ecuación (7), $q_j(n)A_{k+rh_j} + a_j(n)$, definimos $w_j(i) \equiv q_j(n)$, $b_j(i) \equiv a_j(n)$ y $o_j \equiv k + rh_j$. Debido a que

$$h_j = F_j(n) + G_j(n) \cdot S_{H_j(n)}$$

de acuerdo a la Definición 16, se tiene que:

$$\begin{aligned} o_j &= (k + rF_j(n)) + G_j(n) \cdot rS_{H_j(n)} \\ &= (k + rF_j(n)) + G_j(n) \cdot A_{k+rH_j(n)} \end{aligned}$$

para cada $j \in \mathcal{J}_n$. Definamos $\mathcal{J}_i^* \equiv \mathcal{J}_n$ y, considerando que $k + rn = i$, podemos hacer el cambio de variable para definir w_j, b_j, F_j^*, G_j^* y H_j^* como están escritas arriba. □

Ahora que tenemos una serie de ecuaciones que nos indican de manera precisa lo que una composición del escalamiento y la traslación le hacen a nuestras recursiones favoritas, podemos empezar a averiguar qué propiedades conservan y bajo qué condiciones.

Empezaremos con el caso de la traslación: $\mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_1 = \mathrm{T}_k$. Buscaremos las recursiones que permanecen invariantes cuando $r = 1$, o bien, ante una traslación; esto sucede cuando todos los pares de funciones enumerados anteriormente son la misma función: por ejemplo de la primera ecuación, $\omega_j(i) = q_j(\frac{i-k}{r})$, queremos buscar una función $Z(x)$ tal que $Z(i) = Z(\frac{i-k}{r})$ cuando $r = 1$ y para todo k entero y todo i que cumpla la recursión.

Del Teorema 7, podemos ver que todas las ecuaciones pueden representarse con alguna de las siguientes ecuaciones funcionales:

$$Z(i) = Z(i-k)$$
$$Z(i) = k + Z(i-k)$$

La primera de ellas —que representa la búsqueda de q_j, b_j y G_j— se puede resolver con cualquier función $Z\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ con periodo k; pero queremos que la función cumpla la ecuación para **todo** k (incluyendo $k = 1$), por lo tanto, la solución es la función constante con dominio en los enteros $Z(i) = c \;\; \forall i \in \mathbb{Z}$. Como G_j representa parte del argumento de una sucesión, es pertinente que ésta sea en cambio $G_j\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
La segunda ecuación funcional —que representa la búsqueda de F_j y H_j— puede resolverse con $Z(x) = x + Z^*(x)$, donde Z^* también debe solucionar la primera ecuación funcional. Demostremos esto:

$$\begin{aligned} Z(x) = x + Z^*(x)\colon Z^*(x) = Z^*(x-k) &\implies Z(x) = x + Z^*(x) = x + Z^*(x-k) \\ &\implies Z(x) = k + (x - k + Z^*(x-k)) \\ &\implies Z(x) = k + Z(x-k) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos encontrado recursiones de clase α_2 que permanecen invariantes a la traslación por cualquier entero $k \neq 0$. Estás se pueden representar de la siguiente manera

---

$$S(n) = \sum_{j \in \mathcal{J}_n} u_j S(n + b_j + c_j S(n + g_j)) + \sum_{j \in \mathcal{J}_n} v_j \tag{9}$$

Donde

$$u_j, v_j \in \mathbb{R}, \quad b_j, c_j, g_j \in \mathbb{Z}$$

Diremos que este nuevo tipo de recursiones son de clase α_2^*. Sabemos, que toda recursión de clase α_2^* es de clase α_2 y de clase β. Nuevamente, casi todas las recursiones tradicionales (las lineales de orden k y coeficientes constantes, las de tipo Meta-Fibonacci e incluso $\mathfrak{R}$) pueden representarse con la Ecuación 9 —y por tanto son α_2^*— exceptuando la sucesión de Conway, pues tiene el sumando C_{C_n}, que no puede ser representado por el tipo de sumandos de la Ecuación 9 debido a que no contiene un n en su argumento.

A lo que antes llamábamos *independencia con respecto a la notación*, ya lo hemos definido formalmente como invariancia ante la traslación. El resultado anterior combinado con el Teorema 6 muestra lo que anticipábamos en el capítulo anterior: las sucesiones definidas en $\mathcal{Q}'$ por una recursión de clase α_2^* —como Fibonacci, Lucas y Hofstadter— son independientes de la notación, o bien, tras aplicarles T_k *conservan su recursión* en $\mathrm{T}_k \bullet \mathcal{Q}'$.

Siendo T_k una transformación inyectiva con respecto al dominio, podemos decir que aplicarle esta transformación a una sucesión definida por un α_2^* nos da otra sucesión definida por la misma recursión en un conjunto de la misma cardinalidad que el primero.

Ahora buscaremos recursiones de clase α_2 que sobreviven a la transformación $\mathrm{T}_0 \circ \mathrm{E}_r = \mathrm{E}_r$, es decir, a un escalamiento. Diremos que todas éstas son recursiones de clase $\alpha_2^\star$; si alguna de estas recursiones es a su vez de clase α_2^* entonces será de clase δ, pues será invariante ante el escalamiento y la traslación.

A cualquier recursión que sea de clase $\alpha_2^\star$ y α_2^*, la llamaremos recursión de clase α_ϕ (el diagrama de la Figura 4 puede ayudar a clarificar este punto). Por lo tanto, esperamos descubrir, por lo menos, a la recursión $\mathfrak{R}$ —que sabemos de clase δ y más recientemente de clase α_2— en la siguiente búsqueda.

Del Teorema 7, cuando $k = 0$, buscamos solucionar las ecuaciones funcionales

$$Z(i) = Z(i/r)$$

$$Z(i) = rZ(i/r)$$

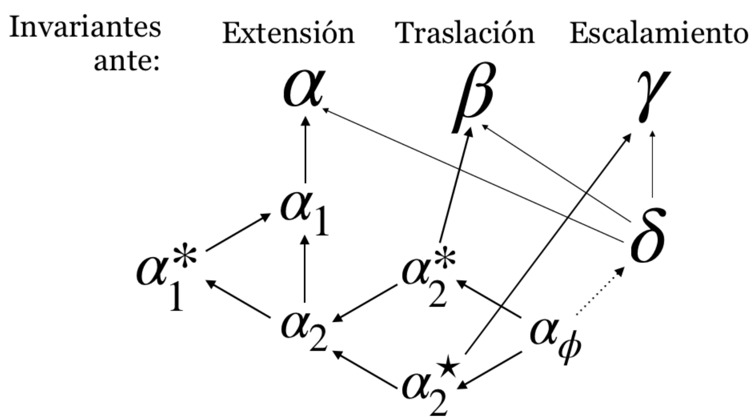


Figura 4: Diagrama de las relaciones entre las distintas clases de recursiones. El sentido de la flecha indica la pertenencia: *todas las recursiones de clase* α_1 *son de clase* α. Se omiten las flechas que resultarían redundantes (como $\alpha_1^* \longrightarrow \alpha$) exceptuando la de $\alpha_\phi \longrightarrow \delta$ para enfatizar el hecho de que este tipo de recursiones son de clase δ, es decir, son invariantes ante las tres transformaciones que se enlistan.

Algunas funciones deben enviar a los enteros y otras a los reales, pero todas tienen dominio en un subconjunto de los enteros (pues $r/i = n$). Observemos que cualquier sucesión

$$z\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{A}\colon i = ri' \implies z_i = z_{i'}$$

es solución de la primera ecuación funcional. Nuevamente, buscamos una función que satisfaga la ecuación para todo $r \neq 0$; por lo tanto, buscamos la función constante con dominio en los enteros: $Z(i) = c \; \forall i \in \mathbb{Z}$.
Similarmente, la segunda ecuación funcional se puede resolver con $Z(x) = xZ^*(x)$, donde $Z^*(x)$ es solución de la primera ecuación funcional. Por lo tanto, las recursiones clase $a_2^\star$ tienen la siguiente estructura.

$$S(n) = \sum_{j \in \mathcal{J}_n} x_j S(d_j n + e_j S(f_j n)) + \sum_{j \in \mathcal{J}_n} y_j n \tag{10}$$

Donde

$$x_j, y_j \in \mathbb{R}, \quad d_j, e_j, f_j \in \mathbb{Z}$$

Veamos que las recursiones $\alpha_2^\star$, definidas por la Ecuación (10), tienen la forma de las recursiones α_2^* (Ecuación (9)) cuando $d_j = f_j = 1$ y $y_j = 0$.

Es decir, las recursiones α_ϕ, que son de clase α_2^* y de clase $\alpha_2^\star$ a la vez, o bien que son de clase α_2 (invariantes a la extensión y con cierta forma) y de clase δ (invariantes a la traslación y el escalamiento), tienen la siguiente forma:

$$S_n = \sum_{j \in \mathcal{J}_n} x_j S_{n+e_j S_n} \tag{11}$$

Como esperábamos, la recursión $\mathfrak{R}$ tiene la forma de las recursiones α_ϕ. Pero no fue así con la recursión $\mathfrak{H}$ de Hofstadter, pues no hay manera de representar esa recursión con la Ecuación (11).

Todas las recursiones de clase α_ϕ satisfacen las condiciones necesarias para poder ser manipuladas con el poderoso Teorema 4 que anteriormente nos permitió construir toda una nueva familia de sucesiones bien definidas a partir de una inicial.

Dicho teorema funciona porque toda recursión $\mathfrak{L}$ de clase δ permanece invariante ante el escalamiento y la traslación. Si empleamos estas transformaciones para generar un conjunto de sucesiones con dominios que no se intersectan, podemos aprovechar la invariancia ante la extensión para unir todas estas sucesiones y crear una sucesión *más grande* que también esté definida por la recursión $\mathfrak{L}$.

En cambio, la recursión $\mathfrak{H}$, y muchas de las recursiones de clase α_1^*, no permanece invariante ante el escalamiento, sino que sufre una *deformación*. En las siguientes páginas desarrollaremos un método para unir un conjunto de sucesiones que cumplan esta recursión *deformada* —o recursión asociada, como la llamamos en el Teorema 6.

Ahora enunciaremos una serie de definiciones y resultados que, como muchos de los anteriores, poseen la suficiente generalidad para ser útiles durante el resto del trabajo y no sólo en este capítulo.

Definición 18. Sean las dos sucesiones $(a_i)_{i\in\mathcal{P}}$ y $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ tal que $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$, definimos y denotamos la unión estricta de éstas $(a_i)\sqcup(b_i)$ como la sucesión $(c_i)_{i\in\mathcal{T}}$ con dominio en $\mathcal{T} = \mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ tal que $c_i = a_i$ para todo $i \in \mathcal{P}$ y $c_i = b_i$ para todo $i \in \mathcal{Q}$.

Observación. Si (a_i) y (b_i) tienen dominios cuya intersección es nula, entonces es cierto que $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \varnothing$. Por lo que existe la unión estricta

$(a_i) \sqcup (b_i)$ y es igual a la unión $(a_i) \cup (b_i)$.

Teorema 8. *Sea* $\boldsymbol{X} = \{(B_n), (C_n), \ldots\}$ *un conjunto de sucesiones. Sea* $\boldsymbol{Y}$ *el conjunto de todas las sucesiones de la forma* $(A_i) = \mathrm{U} \circ (S_n)$ *—con* $(S_n) \in \boldsymbol{X}$ *y donde* U *representa cualquier transformación— que en cierto dominio satisfacen la relación de recursión* $\mathfrak{L}$ *de clase* α*. Sea* $(V_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *una sucesión de* $\boldsymbol{Y}$*, o bien la unión estricta de dos o más sucesiones de ese conjunto, definida por la recursión* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{Q}'$*. Si* $(R_i)_{i\in\mathcal{P}} \in \boldsymbol{Y}$ *es tal que* $R_i = V_i$ *para todo* $i \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$ *y está bien definida por* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{P}'$*, entonces la unión estricta* $(R_i) \sqcup (V_i) \equiv (T_i)_{i\in\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}}$ *satisface la recursión* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{P}' \cup \mathcal{Q}'$*.*

Lema 3. *La unión estricta de dos sucesiones* $(a_i)_{i\in\mathcal{P}}$ *y* $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *—tal que* $a_i = b_i$ *para todo* $i \in \mathcal{O} \equiv \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$*— es igual a la unión de las subsucesiones* $(a_i)_{i\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{O}}$*,* $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}\setminus\mathcal{O}}$ *y* $(a_i)_{i\in\mathcal{O}}$*.*

Demostración. Demostremos el Lema 3. Por hipótesis, $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{O}) \cap (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{O}) = \varnothing$. Por lo tanto, existe $(a_i)_{i\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{O}} \cup (b_i)_{i\in\mathcal{Q}\setminus\mathcal{O}}$, que denotaremos como $(d_i)_{i\in(\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})\setminus\mathcal{O}}$. De igual manera, $((\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \setminus \mathcal{O}) \cap \mathcal{O} = \varnothing$; luego, existe $(d_i) \cup (a_i)_{i\in\mathcal{O}}$, que denotaremos como $(c_i)_{i\in\mathcal{T}}$ donde $\mathcal{T} = ((\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \setminus \mathcal{O}) \cup \mathcal{O} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, y se tiene

$$\begin{aligned} {}^{*}c_i = a_i &\quad \text{para todo } i \in ((\mathcal{P} \setminus \mathcal{O}) \cup \mathcal{O}) = \mathcal{P} \quad \text{y} \\ c_i = b_i &\quad \text{para todo } i \in (\mathcal{Q} \setminus \mathcal{O}) \end{aligned}$$

Por hipótesis, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathcal{O}$, luego:

$${}^{*}c_i = b_i \quad \text{para todo } i \in ((\mathcal{Q} \setminus \mathcal{O}) \cup \mathcal{O}) = \mathcal{Q}.$$

Vemos que (c_i) comparte todas las características $(^{*})$ de la unión estricta, como está escrita en la Definición 18, por lo que $(c_i) = (a_i) \sqcup (b_i)$ y el lema está demostrado. La demostración del Teorema 8 es consecuencia directa de esto y del Teorema 1. □

Por la **observación** de la página anterior, el Teorema 8 es válido cuando $(R_i)_{i\in\mathcal{P}}$ y $(V_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ tienen dominios cuya intersección es nula. Y en dicho caso, se trata de una unión (y no sólo de una unión estricta).

Lema 4. *Sean $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{Y}$ dos conjuntos de sucesiones como los descritos en el Teorema 8, con* $\mathrm{U} = \mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r$. *Para todo* $|r| > 0$, *sea* $\boldsymbol{Z} = \{Z_k | k \in \mathcal{K}\} \subset \boldsymbol{Y}$ *tal que* $|\boldsymbol{Z}| \leq |r|$ *y cada elemento* $Z_k \equiv \mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_r \circ (S_n)$ *depende de algún* $(S_n) \in \boldsymbol{X}$ *y un* k *diferente del conjunto* $\mathcal{K}$, *donde* $\mathcal{K}$ *es tal que si* $k, k' \in \mathcal{K}$, *entonces* $k \neq k' \implies k \not\equiv k' \pmod{r}$.
Para cada Z_k *denotemos como* $\mathcal{Q}_k$ *a su dominio y* $\mathcal{Q}'_k$ *al conjunto definido por la recursión* $\mathfrak{L}$. *La unión* $(T_i)_{i\in\mathcal{P}}$ *de todas las sucesiones* Z_k *tiene dominio en* $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{Q}_k$ *y satisface la recursión* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{P}' = \bigcup\limits_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{Q}'_k$.

Demostración. Recordemos que si un entero $r \neq 0$ divide a $a - b$, decimos que a es congruente con b módulo r y lo denotamos como $a \equiv b \pmod{r}$ (Def. A.34). Si $\mathcal{C}$ es un conjunto finito, $|\mathcal{C}|$ es su cardinalidad, o bien la cantidad de elementos que posee. Por lo tanto, $|r|$ es la cantidad máxima de números que pueden existir en un conjunto de enteros $\mathcal{C}$ tal que $a \not\equiv b \pmod{r}$ para cualesquiera a y b elementos distintos del conjunto $\mathcal{C}$.

Demostremos que si $k, k' \in \mathcal{K}$, entonces

$$k \neq k' \implies \mathcal{Q}_k \cap \mathcal{Q}_{k'} = \varnothing.$$

Sabemos que $\mathcal{Q}_k = \{k + rn\}$ para todo n perteneciente al dominio de cierta sucesión; similarmente, $\mathcal{Q}_{k'} = \{k' + rn'\}$. Por lo tanto:

$$k + rn = k' + rn' \iff k = k' + r(n' - n)$$

pero $N = n' - n$ es un número entero, luego $k = k' + Nr \implies k \equiv k' \pmod{r}$, lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $k + rn \neq k' + rn'$ para todo n y n', y consecuentemente: $\mathcal{Q}_k \cap \mathcal{Q}_{k'} = \varnothing$. Esto quiere decir que todos los elementos de $\boldsymbol{Z}$ poseen dominios cuya intersección es nula.
Por el Teorema 8, la unión estricta (T_i) de estas sucesiones existe, su dominio es $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{Q}_k$ y satisface la recursión $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{P}' = \bigcup\limits_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{Q}'_k$. $\square$

Corolario 3. *Sea $Q_{r,s}(n)$ la familia de sucesiones con $r, s \in \mathbb{Z}^+$ y $r < s$, tal que —exceptuando sus s valores iniciales— todo su dominio cumple la recursión característica*

$$Q_{r,s}(n) = Q_{r,s}(n - Q_{r,s}(n-r)) + Q_{r,s}(n - Q_{r,s}(n-s)). \tag{12}$$

1) *Sea (Q_n) la sucesión de tipo $Q_{1,2}(n)$ con valores iniciales $Q_1 = Q_2 = 1$ y que satisface su recursión característica en $n \in \mathcal{A}$. Para todo $m > 1$ existe una sucesión de tipo $Q_{m,2m}$ cuyos valores iniciales son todos m y que satisface su recursión característica en el conjunto $\{2m+1, 2m+2, \ldots, mn\}$ para todo $n \in \mathcal{A}$.*

2) *Sea (U_n) la sucesión de tipo $Q_{1,4}(n)$ con valores iniciales $U_1 = \ldots = U_4 = 1$ y que satisface su recursión característica en $n \in \mathcal{B}$. Para todo $m > 1$ existe una sucesión de tipo $Q_{m,4m}$ cuyos valores iniciales son todos m y que satisface su recursión característica en el conjunto $\{4m+1, 4m+2, \ldots, mn\}$ para todo $n \in \mathcal{B}$.*

3) *Sea (W_n) la sucesión de tipo $Q_{2,4}(n)$ con valores iniciales $W_1 = \ldots = W_4 = 1$ y que satisface su recursión característica en $n \in \mathcal{C}$. Para todo $m > 1$ existe una sucesión de tipo $Q_{2m,4m}$ cuyos valores iniciales son todos m y que satisface su recursión característica en el conjunto $\{4m+1, 4m+2, \ldots, mn\}$ para todo $n \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Observemos que la recursión (12) es de clase α_2, tal que $\mathcal{J}_n = \{1, 2\}$ para cualquier n, y con las funciones:

$$F_1(n) = F_2(n) = n, \quad G_1(n) = G_2(n) = -1, \quad a_1(n) = a_2(n) = 0$$
$$H_1(n) = n - r, \quad H_2(n) = n - s \quad \text{y} \quad q_1(n) = q_2(n) = 1.$$

Sea (S_n) una sucesión de tipo $Q_{r,s}(n)$ definida por su recursión en el conjunto $\mathcal{P}$. Para todo entero $m > 0$, sea la sucesión (T_i^m) que resulta de la unión de todas las sucesiones $\mathrm{T}_k \circ \mathrm{E}_m \circ (S_n)$ con $k \in \mathcal{K} = \{-m+1, \ldots, 0\}$. Entonces, de acuerdo al

Lema 4 y al Teorema 7, (T_i^m) satisface una recursión α_2 con

$$F_1^*(i) = F_2^*(i) = k + mn = i, \quad G_1(i) = G_2(i) = -1,$$
$$H_1(i) = k + m(n-r) = i - mr \quad \text{y} \quad H_2(i) = k + m(n-s) = i - ms$$

en todo conjunto $\{k + mn\}$ con $k \in \mathcal{K}$ y $n \in \mathcal{P}$. En particular, esta recursión es

$$A(i) = A(i - A(i - mr)) + A(i - A(i - ms)) \tag{13}$$

Es decir, (T_i^m) es una sucesión de tipo $Q_{mr,ms}(n)$ y satisface la recursión en $\{ms + 1, ms + 2, \ldots, mn\}$ con $n \in \mathcal{P}$. Los tres puntos a demostrar de este corolario equivalen a los valores de (r, s) igual a $(1, 2)$, $(1, 4)$ y $(2, 4)$ y debido a que las sucesiones mencionadas ahí tienen s valores iniciales igual a 1: (T_i^m), por definición, tiene ms valores iniciales igual a m. $\square$

El Teorema 8 comparte muchas ideas con el Teorema 1 y el Lema 4 tiene un carácter parecido pero más universal que el del Teorema 4. De hecho, el Teorema 4 bien puede ser un corolario del lema. Sin embargo, ambos teoremas tienen su merecido lugar pues nos hablan de distintos tipos de recursiones.

La importancia del Corolario 3 radica en que las tres sucesiones mencionadas —(Q_n), (U_n) y (W_n)— son las únicas sucesiones de tipo $Q_{r,s}(n)$ que se creían bien definidas. El Lema 4, como fue aplicado para la demostración del corolario, nos dice que cualquier sucesión de tipo $Q_{r,s}(n)$ definida en cierto conjunto implica la existencia de una sucesión $Q_{mr,ms}(n)$ bien definida en cierto conjunto (de mayor cardinalidad que el primero, si éste es finito) para todo entero $m > 1$.

Finalmente, veamos el ejemplo de una recursión que no es de clase α:

$$S_n = \sum_{i \mid i < n \wedge \exists S_i} S_i \tag{XIV}$$

Una sucesión definida por esta recursión es tal que algunos de sus elementos son igual a la suma de todos los anteriores. Escrita con palabras, no parece que la recursión sea muy extraña o descabellada, sin embargo no posee las características necesarias para ser de clase α y por ello no goza de muchos de los resultados de este capítulo.

Demostremos con un pequeño contraejemplo que (XIV) no es de clase α. Sean $(a_n)_{n=1}^{5} = (0, 1, 2, 3, 6)$ y $(b_n)_{n=0}^{6} = (-1, 0, 1, 2, 3, 6, 9)$ notamos que el dominio de (a_n) es subconjunto del dominio de (b_n) y $a_n = b_n$ para todo n en la intersección de ambos dominios. Sin embargo, (a_n) cumple la recursión en $\{4, 5\}$ y (b_n) nunca la cumple.

Las relaciones de recursión como transformación

Hemos visto ejemplos de sucesiones cuya recursión permanece invariante tras la aplicación de cierta transformación. En esta sección reinterpretaremos el concepto de una sucesión recursiva, la veremos como una sucesión que *no cambia* si se le aplica cierta transformación.

Conocemos la transformación identidad que "deja tranquila" a cualquier sucesión

$$\mathrm{I} \circ (A_i)_{i \in \mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i \in \mathcal{Q}} \colon (n \in \mathcal{Q} \iff n \in \mathcal{P}) \wedge \forall n \in \mathcal{P}(B_n = A_n).$$

Decíamos que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$, $(B_i) = (A_i)$ y por lo tanto $\mathrm{I} \circ (A_i) = (A_i)$. Es decir, toda sucesión es invariante ante esta transformación como consecuencia de la igualdad tautológica

$$A_n = A_n.$$

De modo que cualquier sucesión que esté bien definida en cierta parte de su dominio por la relación de recursión

$$A_n = \zeta((A_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}, n),$$

permanecerá inalterada en **esa** parte de su dominio al aplicársele la transformación característica de ζ

$$\mathrm{U}_\zeta \circ (A_i)_{i \in \mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i \in \mathcal{P}} \colon (\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q} \iff n \in \mathcal{P}) \wedge \forall n \in \mathcal{P}[B_n = \zeta((A_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}, n)]$$

Por ejemplo, sea $\mathcal{Q}_n = \{n-1, n-2\}$ y sea $\kappa((A_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n) = A_{n-1} + A_{n-2}$. La transformación U_κ le hace lo siguiente a la sucesión de los números naturales:

$$\mathrm{U}_\kappa \circ (A_n)_{n=0}^{\infty} = (B_i)_{i=2}^{\infty}$$
$$\mathrm{U}_\kappa \circ (0,1,2,3,4,5,\ldots) = (1,3,5,7,9,\ldots)$$

Se observa que $B_i \neq A_i$ para todo i, por lo que en ninguna parte de su dominio la sucesión (A_n) estará definida por la relación de recursión

$$A_n = \kappa((A_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n) = A_{n-1} + A_{n-2}.$$

En cambio, la sucesión de Fibonacci con dominio en los naturales $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, sufre la siguiente transformación

$$\mathrm{U}_\kappa \circ (F_n)_{n=0}^{\infty} = (F_i)_{i=2}^{\infty}$$
$$\mathrm{U}_\kappa \circ (0,1,1,2,3,5,\ldots) = (1,2,3,5,8,\ldots)$$

Y la sucesión de Fibonacci extendida en todos los enteros permanece invariante ante dicha transformación:

$$\mathrm{U}_\kappa \circ (F_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (F_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$
$$\mathrm{U}_\kappa \circ (\ldots - 3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, \ldots) = (\ldots, -1, 1, 0, 1, 2, 3, 5, \ldots)$$

No es absolutamente necesario que una sucesión sea bi-infinita para que permanezca invariante ante una transformación basada en una relación de recursión. Por ejemplo, sea $\mathcal{Q}_n = \{n+A_n, n-A_n\}$ y sea $\lambda((A_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n) = A_{n+A_n} - A_{n-A_n}$; la sucesión $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como fue definida anteriormente, permanece invariante ante la transformación correspondiente: es una eigensucesión de dicha transformación.

$$\mathrm{U}_\lambda \circ (m_n)_{n\in\mathbb{N}} = (m_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\mathrm{U}_\lambda \circ (0,1,1,2,2,3,3,\ldots) = (0,1,1,2,2,\ldots)$$

En cambio, al aplicarle la misma transformación a la sucesión de los números enteros, obtenemos...

$$\mathrm{U}_\lambda \circ (\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots) = (\ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots)$$

la sucesión de los números enteros pares.

Demostración. Denotemos como $(n_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ a la sucesión de los números enteros, con la propiedad $n_x = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Sea $(b_i) = \mathrm{U}_\lambda \circ (n_i)$, tiene que:

$$b_i = n_{i+n_i} - n_{i-n_i} = i + n_i - (i - n_i) = 2n_i = 2i \qquad \square$$

Ahora veamos lo que sucede si aplicamos la transformación U_λ a (b_i), que es equivalente a aplicar dos veces la transformación a (n_i).

$$\mathrm{U}_\lambda^2 \circ (n_i) = \mathrm{U}_\lambda \circ (b_i) = (c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$
$$\mathrm{U}_\lambda \circ (\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots) = (\ldots, -8, 0, 8, \ldots)$$

Demostremos que $c_i = 2^3 i$, y en general que $\mathrm{U}_\lambda^n \circ (n_i) = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\colon x_i = 2^{2^n-1} i$.[3]

Demostración. Asumamos que $(y_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \mathrm{U}_\lambda^m \circ (n_i)$ cumple $y_i = 2^{2^m-1} i$. Demostremos que eso implica que $(z_i)_{i\in\mathbb{Z}} = \mathrm{U}_\lambda^{m+1} \circ (n_i)$ también cumplirá la propiedad: $z_i = 2^{2^{m+1}-1} i$.

$$\mathrm{U}_\lambda^{m+1} \circ (n_i) = \mathrm{U}_\lambda \circ (y_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

Donde

$$\begin{aligned} z_i = y_{i+y_i} - y_{i-y_i} &= 2^{2^m-1}(i + y_i) - 2^{2^m-1}(i - y_i) = 2^{2^m} y_i \\ &= 2^{2^m} \cdot 2^{2^m-1} i = 2^{2^m+2^m-1} i = 2^{2^{m+1}-1} i \end{aligned}$$

Para $m = 0$, es cierto que $\mathrm{U}_\lambda^0(n_i) = (n_i)$, donde $n_i = 2^{2^0-1} i = 2^0 i = i$. Por el Principio de Inducción, $\mathrm{U}_\lambda^n(n_i)$ cumplirá la propiedad para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Verificamos que $n_0 = 0$ es el único elemento de la sucesión (n_i) que permanece

[3] Nuevamente las potencias de 2 están involucradas en nuestros asuntos.

inalterado tras la aplicación de U_λ; es decir, $b_0 = n_0$. También verifiquemos que para cualquier $(x_i) = \mathrm{U}_\lambda^n \circ (n_i)$, $i = 0$ es el único entero tal que $x_0 = n_0$.

$$\begin{aligned} i = 0 &\implies (2^{2^n-1}i = i \ \forall n \in \mathbb{N}), \\ i \neq 0 &\implies 2^{2^n-1}i = i \iff 2^{2^n-1} = 1 \\ &\iff 2^n - 1 = 0 \iff 2^n = 1 \iff n = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que la transformación U_λ, que fue inspirada en la recursión $\mathfrak{R}$, nos ha arrojado información acerca de la sucesión (n_i): esta sucesión está definida por $\mathfrak{R}$ únicamente en $i = 0$, y esa misma posición permanecerá inalterada sin importar cuántas veces se aplique la transformación. Esto es consecuencia directa del siguiente teorema y de que 0 siempre satisface $\mathfrak{R}$.

Teorema 9 (De las relaciones de recursión a las transformaciones)**.** *Sea la recursión* $\mathfrak{L}$: $a_n = \varrho((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n)$. *Sea la sucesión* $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *y la sucesión* $(B_i)_{i\in\mathcal{P}} = \mathrm{U}_\varrho \circ (A_i)$, *entonces* $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{P}$ *y* $\forall i \in \mathcal{Q}'(B_i = A_i)$ *si y sólo si* (A_i) *satisface* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{Q}'$*.*

Parecería que se ha dado un paso hacia atrás en la investigación. Pues, de aspirar a que absolutamente todos los miembros de la sucesión satisfagan una recursión, se pasó a transformar una sucesión *arbitraria* y verificar qué elementos permanecieron inalterados. Parece que se ha sacrificado la totalidad del dominio por una pequeña parte fragmentaria...

Pero así como Simbad cuando entregó sus diamantes para que los comerciantes lo dejaran ir, llevándose otra riqueza (el conocimiento que había descifrado en los susurros nocturnos de las serpientes que lo amenazaban); como Mijaíl Tal cuando hizo jugadas imprecisas pero creó combinaciones bellas; de esa manera, las transformaciones nos permitirán conocer nuevos aspectos de las sucesiones.

"Lo más importante que una estructura puede decir de sí misma
es lo que puede decir acerca de las demás"

2^2. Sucesiones ultrarrecursivas

HASTA ESTE MOMENTO, no hemos tratado con recursiones que no son invariantes a la extensión. De este tipo de recursiones, solo hemos señalado la siguiente:

$$A_n = \sum_{i|i<n\wedge\exists A_i} A_i.$$

Y es la única de este tipo que mencionaremos en todo el documento. Encontraremos una sucesión bien definida por esta recursión en todo el dominio de los enteros; para ello, primero plantearemos la correspondiente ecuación funcional y buscaremos una solución del tipo $F(n) = c^n$, con $|c| > 1$.

$$\begin{aligned}
F(n) = \sum_{i=1}^{\infty} F(n-i) \iff\ & c^n = \sum_{i=1}^{\infty} c^{n-i} \\
\iff\ & c^n = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} c^{n-i} = c^n \left[\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{c^i}\right] \\
\iff\ & \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{c}\right)^i = 1 \\
\iff\ & \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{1}{c^{m+1}} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c} - 1} = 1 \\
\iff\ & \frac{1}{c-1} = 1 \iff \boldsymbol{c = 2}
\end{aligned}$$

De modo que la sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con $A_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ cumple una recursión que no es de clase α. Esta recursión es invariante si se multiplica la sucesión, es decir, si se le aplica la transformación M_m:

$$\mathrm{M}_m \circ (A_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (n \in \mathcal{Q} \iff n \in \mathcal{P}) \wedge \forall n \in \mathcal{P}(B_n = mA_n).$$

También es invariante a cualquier traslación $\mathrm{T}_k \circ (A_k)$; y cualquier escalamiento $\mathrm{E}_r \circ (A_k)$ con $r \in \mathbb{Z}^+$.

Por otro lado, en el límite cuando $n \to \infty$, ¡dicha recursión puede interpretarse como una de clase α!

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} A_{n-i} = \lim_{m\to A_n} \sum_{i=1}^{m} A_{n-i} \\ \implies &\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{A_n} A_{n-i} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{A_{n-1}} A_{n-i} \end{aligned}$$

De manera general, cuando $n \to \infty$, $A_n \to \sum_{i=1}^{A_{n+k}} A_{n-i}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Si $n - A_{n+k} < 0$, también se cumple lo siguiente:

$$A_n = \left\lceil \sum_{i=1}^{A_{n+k}} A_{n-i} \right\rceil, \tag{1}$$

donde $\lceil\ \rceil$ es la función techo (Definición A.32).

De $A_{n+1} = \lceil \sum_{i=1}^{A_n} A_{n+1-i} \rceil$ y sabiendo que $A_{m+1} = 2A_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, es posible demostrar que para todo $n + 1 \in \mathbb{Z}^+$ se cumple lo siguiente:

$$A_{n+j} = \left\lceil \sum_{i=1}^{A_n} (A_{n+1-i} + \varepsilon) \right\rceil = \left\lceil \sum_{i=0}^{A_n-1} (A_{n-i} + \varepsilon) \right\rceil \tag{2}$$

Donde $\varepsilon = 2^j - 2$. También puede demostrarse que al hacer el escalamiento negativo $(A^*_k) = \mathrm{E}_{-1} \circ (A_k)$, todo $n + j \in \mathbb{Z}^-$ cumplirá lo siguiente:

$$A^*_{n+j} = \left\lfloor \sum_{i=0}^{-A^*_n-1} [A^*_{n+i} + \vartheta] \right\rfloor, \tag{3}$$

donde $\lfloor\ \rfloor$ es la función piso (Definición A.32) y $\vartheta = 2 - 2^{-j}$.

Proposición 2. *Sea* (A_k) *una sucesión con dominio en los enteros tal que* $A_k = 2^k$ *para todo* k. *Esta sucesión cumple la recursión*

$$S_{n+j} = \left[\sum_{i=0}^{|S_n|-1} (S_{n-i\mathrm{sgn}\ S_n} + \delta_n) \right] \tag{*}$$

Donde los corchetes grandes simbolizan la función redondeo (Definición A.32), $j > 1$, $\delta_n = (2^{j\mathrm{sgn}\ S_n} - 2)\mathrm{sgn}\ S_n$ *y* sgn *es la función signo (Definición A.31).*

Esta recursión es de clase α *(invariante ante la extensión), de clase* β *(invariante ante cualquier traslación) e invariante ante el escalamiento* E_{-1}. *Para* $|n| >> 1$, *esta recursión es invariante ante cualquier multiplicación o transformación* M_m.

Transformación general

En éste y los capítulos restantes, estudiaremos exhaustivamente sólo un caso particular del siguiente tipo de transformación de sucesiones:

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_\Phi \circ (a_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (b_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q} \iff n+1 \in \mathcal{P}) \\ \wedge \forall n+1 \in \mathcal{P}[b_{n+1} = \Phi((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n, \mathrm{sgn}\ a_n)] \end{aligned} \tag{4}$$

Donde $\Phi\colon \mathcal{R} \times \mathbb{Z} \times \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$ es una función de una subsucesión de (a_i), la posición y el signo de un elemento. En lo posterior, será omitida la escritura de $(\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q} \iff \cdots)$, y únicamente se anotará $b_{n+1} = \Phi(\cdots)$, entendiendo que dicha igualdad ocurre para toda $n+1$ si y sólo si $\mathcal{Q}_n$ está en el dominio de $\mathcal{Q}$.

En particular, nos enfocaremos en las transformaciones donde Φ es de la forma

$$\Phi((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n, \mathrm{sgn}\ a_n) = \sum_{j\in\mathcal{J}_n} g_j(a_{h_j}, n) \colon h_j \in \Psi((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n, \mathrm{sgn}\ a_n) \tag{5}$$

con $g_j\colon \mathbb{R}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\Psi\colon \mathcal{R}\times\mathbb{Z}\times\{-1,0,1\} \to \{\psi_j\}_{j\in\mathcal{J}_n}$ y $\psi_j\colon \mathcal{R}\times\mathbb{Z}\times\{-1,0,1\} \to \mathbb{Z}$.[1]

La transformación que estudiaremos es la siguiente (note que para su definición se

[1]Note que la Ecuación (*) de la Proposición 2 contiene una suma de funciones del tipo $g_j(u_{h_j}, n) = u_{h,j} + \delta$ y $\Psi(\cdots) = \{n - j\mathrm{sgn}\ S_n\}$, pero la suma $[\sum(\cdots)]$ no es una función de la forma Φ —como se define en la Función (5)—, porque usa de la función redondeo.

emplea la función ξ, que es parecida pero más sencilla que la aparece en la Ec. (*)):

$$\mathrm{O} \circ (a_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (b_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon b_{n+1} = \xi((a_i)_{\mathcal{Q}_n}, n, \mathrm{sgn}\ a_n) \equiv \sum_{i=0}^{|a_n|-1} (a_{n-i\mathrm{sgn}\ a_n} + 1) \tag{6}$$

Donde $\mathcal{Q}_n = \{j|0 \leq j \leq |a_n| - 1\}$. En lo posterior, también se omitirá la escritura de este subconjunto en el subíndice y se entenderá que $\xi((a_i), n, \mathrm{sgn}\ a_n)$ se refiere a $\xi((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n, \mathrm{sgn}\ a_n)$.

También usaremos una notación especial para la sucesión transformada de toda $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$. Por (a_i^o) (con superíndice 'o'), denotaremos a la sucesión resultante de $\mathrm{O}\circ(a_i)$.

Eigensucesiones de la transformación O ó *Sucesiones ultrarrecursivas*

Definición 1. Llamamos sucesión ultrarrecursiva a cualquier sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ que está definida en todo su dominio por la recursión:

$$u_{n+1} = \xi((u_i), n, \mathrm{sgn}\ u_n) = \sum_{i=0}^{|u_n|-1} (u_{n-i\mathrm{sgn}\ u_n} + 1). \tag{7}$$

Y que, por definición, es una eigensucesión de O. Es decir $\mathrm{O} \circ (u_k) = (u_k)$. Llamamos a (7) la recursión $\mathfrak{O}$.[2]

Existen dos interpretaciones interesantes de esta definición, ambas provienen de sustituir en la Ecuación 7 a ξ por la siguiente función equivalente (la equivalencia es consecuencia directa del Teorema A.6):

$$\xi((u_i), n, \mathrm{sgn}\ u_n) = |u_n| + \sum_{i=0}^{|u_n|-1} u_{n-i\mathrm{sgn}\ u_n} \tag{8}$$

Interpretación 1. En (u_k), cada elemento u_n genera a su sucesor de acuerdo a las siguientes reglas: u_{n+1} es igual a $|u_n|$ más otros $|u_n|$ elementos: **a)** u_n y los $(u_n - 1)$

[2] Para toda sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$, si existe un número $m = n + 1 \in \mathcal{Q}$ tal que se cumple la igualdad $D_{n+1} = \xi((D_i), n, \mathrm{sgn}\ D_n)$, decimos que (D_i) satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en m.

elementos anteriores (si u_n es **positivo**); **b)** u_n y los $(|u_n|-1)$ elementos posteriores (si u_n es **negativo**); **c)** Si $u_n = 0$, ningún otro valor será agregado.

Interpretación 2. (u_k) es una sucesión autodescriptiva, pues cualesquiera dos términos consecutivos brindan información acerca de la suma de un conjunto de elementos: $u_{n+1} - |u_n| = \sum u_{n\pm i}$. De manera específica: **a)** Si u_n es positivo, $(u_{n+1} - u_n)$ siempre será la suma de los u_n antecesores de u_{n+1}; **b)** Si u_n es negativo, $u_{n+1} + u_n$ será la suma de los $|u_n|$ sucesores de u_{n-1}.

Hasta este momento, no es claro qué combinación de elementos puede dar lugar a una sucesión ultrarrecursiva. Véamos lo que sucede si el elemento 1 aparece en la posición n.

Corolario 1. *Si existe una sucesión ultrarrecursiva* (u_k) *con* $u_n = 1$*, sus sucesores serán:*

$$u_{n+1} = |u_n| + \sum_{i=0}^{|u_n|-1} u_{n-i} = 1 + \sum_{i=0}^{0} u_{n-i} = 1 + u_n = 2$$
$$u_{n+2} = |u_{n+1}| + \sum_{i=0}^{|u_{n+1}|-1} u_{n-i} = 2 + \sum_{i=0}^{1} u_{n-i} = 2 + u_n + u_{n+1} = 2 + 1 + 2 = 5$$

Es decir, $u_n = 1 \implies (u_k) = (\ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{5}, \ldots)$.

No hemos dado un valor universal a u_{n+3}, pues depende de sus 5 predecesores y u_{n-1}, u_{n-2} están indefinidos. En general, es difícil proponer *manualmente* posibles valores para (u_k), pero podemos conocer más acerca de las restricciones que impone la definición misma de las sucesiones ultrarrecursivas.

La función ξ

Para entender muchos de los desarrollos que ser harán en éste y los siguientes capítulos, es necesario familiarizarse con la función ξ. Las dos interpretaciones de arriba pueden ser de ayuda, pero sin duda lo más útil es entender lo que ξ hace en dependencia del signo de a_n. En los capítulos posteriores, a menudo se usarán varias de las funciones equivalentes a ξ que aquí se presentan.

Caso 1. Cuando a_n es un entero positivo, se tiene

$$a_n > 0 \iff \operatorname{sgn} a_n = 1 \implies |a_n| = a_n.$$

Y, por la Ecuación (8), la función ξ es equivalente a:

$$\xi((a_i), n, 1) = a_n + \sum_{i=0}^{a_n - 1} a_{n-i} = 2a_n + \sum_{i=1}^{a_n - 1} a_{n-i}, \tag{9}$$

y también equivalente a las ecuaciones siguientes (Teorema A.6):

$$\xi((a_i), n, 1) = 2a_n + \sum_{i=n+1-a_n}^{n-1} a_i = a_n + \sum_{i=n+1-a_n}^{n} a_i, \tag{10}$$

$$\xi((a_i), n, 1) = 2 + \sum_{i=n+1-a_n}^{n-1} (a_i + 2). \tag{11}$$

Caso 2. Cuando a_n es un entero negativo:

$$a_n < 0 \iff \operatorname{sgn} a_n = -1 \implies |a_n| = -a_n.$$

Y, por la Ecuación (8):

$$\xi((a_i), n, -1) = -a_n + \sum_{i=0}^{-a_n - 1} a_{n+i} = -a_n + a_n + \sum_{i=1}^{-a_n - 1} a_{n+i} = \sum_{i=n+1}^{n-1-a_n} a_i.$$

Si $a_n < -1$, se puede extraer el primer elemento de la suma ($i = n + 1$):

$$\xi((a_i), n, -1) = a_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{n-1-a_n} a_i. \tag{12}$$

Esto nos lleva a la primera conclusión importante acerca de las sucesiones ultrarrecursivas. Pero primero vamos a aclarar algunos puntos.

Por definición, una sucesión ultrarrecursiva (u_k) satisface $\mathfrak{O}$ en todo el dominio de los enteros, es decir

$$u_{n+1} = \xi((u_n), n, \text{sgn } u_n).$$

Por lo tanto, las sucesiones ultrarrecursivas tienen ecuaciones equivalentes a todas las ecuaciones anteriores: las del Caso 1, si $u_n > 0$ y las del Caso 2 si $u_n < 0$. Por ejemplo, de la Ecuación (12), si $u_n < -1$:

$$u_{n+1} = \xi((u_i), n, -1) = u_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{n-1-u_n} u_i.$$

Similarmente, para toda sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$, todas estas ecuaciones pueden usarse para su transformación (a_i^o). Siguiendo el ejemplo anterior, si $a_n < -1$ y $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q}$:

$$a_{n+1}^o = \xi((a_i), n, -1) = a_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{n-1-a_n} a_i.$$

Lema 1. *Sea una sucesión $(D_i)_{i=\alpha+1}^{\beta}$ con $\alpha+1 \leq \beta$ tal que se cumple $\sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = 0$. Existe una extensión $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ con $D_\alpha = \alpha - \beta - 1$, que satisface $\mathfrak{O}$ en $\alpha + 1$.*

Demostración. Por el Teorema 3.7, que relaciona las relaciones de recursión y la transformaciones, queremos demostrar que la transformación con O de dicha extensión es tal que $D_{\alpha+1}^o = D_{\alpha+1}$. Por hipótesis $D_\alpha < -1$, luego:

$$\begin{aligned} D_{\alpha+1}^o = \xi((D_i), \alpha, -1) &= D_{\alpha+1} + \sum_{i=\alpha+2}^{\alpha-1-D_\alpha} D_i \\ &= D_{\alpha+1} + \sum_{i=\alpha+2}^{\alpha-1-(\alpha-\beta-1)} D_i = D_{\alpha+1} + \sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = D_{\alpha+1} + 0. \end{aligned}$$

Como se quería demostrar. □

Corolario 2. *Para toda sucesión ultrarrecursiva (u_k), si el elemento u_n es menor a -1, entonces*

$$\sum_{i=n+2}^{n-1-u_n} u_i = 0. \tag{13}$$

Caso 3. Cuando $a_n = 0$, de acuerdo a la Ecuación 6

$$\xi((a_i), n, 0) = \sum_{i=0}^{-1} a_{n-i\cdot 0}$$

De la definición de suma, sabemos que si $\beta < \alpha$ entonces $\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i \equiv 0$. Por lo tanto:

$$\xi((a_i), n, 0) = 0$$

Corolario 3. *1) Para toda sucesión (D_i) cuyo elemento D_n es cero,*

$$D_n = 0 \implies D_{n+1}^o = 0.$$

2) Por inducción, para toda sucesión ultrarrecursiva (u_k):

$$u_n = 0 \implies u_{n+m} = 0 \; \forall m \in \mathbb{N}.$$

Pero esto es obvio. De acuerdo a la Interpretación 1, si cada elemento produce a su sucesor añadiendo tantos elementos como su magnitud, entonces cero produce otro cero... o una secuencia infinita de ceros "a su derecha". Pero ¿por qué no usamos el operador lógico de doble implicación ($\iff$) en la ecuación anterior? ¿Qué otros valores, además de cero, pueden generar un cero?

Ha llegado el momento de preguntarnos seriamente

¿Hasta qué punto es una pérdida de tiempo estudiar una transformación tan arbitraria como O*?*

El siguiente ejemplo resolverá parcialmente estas preocupaciones y nos llevará al descubrimiento de un interesante número que nos permitirá crear, manipular y proponer sucesiones ultrarrecursivas con propiedades inesperadas.

Ejemplo 1. El Corolario 2 predice la existencia en (u_k) de un elemento igual a cero. La suma contiene sólo un sumando cuando su límite inferior tiene el mismo valor que su límite superior:

$$\sum_{i=n+2}^{n-1-u_n} u_i = \sum_{i=\eta}^{\eta} u_i = u_\eta \iff n+2 = n-1-u_n \iff u_n = -3$$

Sólo hay un sumando cuando $u_n = -3$ y el elemento en la posición $n+2$ tiene que ser $u_{n+2} = 0$, de acuerdo al Corolario 2. Por lo tanto, según resultados anteriores

$$u_n = -3 \implies u_{n+2+m} = 0 \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

A pesar de que el elemento $u_n = -3$ implica la existencia de una sucesión infinita de ceros que inicia dos lugares a su derecha, él no la genera. Lo que genera es a cualquier valor que sea capaz de generar un cero.

Debido a que la suma de cualquier cantidad de sucesores de u_{n+2} es igual a cero, el Corolario 2 nos dice que u_{n+1} podría generar valores negativos. Es decir, para cualquier $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=n+3}^{n+3+m} u_i = \sum_{i=n+3}^{n+3+m} 0 = 0$, luego $u_{n+1} = -m-3\ldots$ significando que $u_n = -3$ puede generar cualquier entero igual o menor a -3. Veamos también que $u_n = -3$ también puede generar a -1 y a -2, pues ambos generan un cero a su derecha (aunque por distintos motivos).

Corolario 4. *Para toda sucesión (D_i):* ***1)*** *Si tiene un -1, su transformada con* O *siempre tiene un cero.*

$$D_n = -1 \implies D_{n+1}^o = 0.$$

2) *Una propiedad muy útil:*

$$D_n = \mathbf{-2} \implies D_{n+1}^o = D_{n+1}. \tag{14}$$

Demostración. Como consecuencia directa de (7):

$$D_n = -1 \implies D_{n+1}^o = \sum_{i=0}^{|-1|-1} (D_{n+i}+1) = \sum_{i=0}^{0} (D_{n+i}+1)$$
$$= D_n + 1 = -1 + 1 = 0.$$

Y usando (8):

$$D_n = -2 \implies D^o_{n+1} = |-2| + \sum_{i=0}^{|-2|-1} D_{n+i} = \sum_{i=0}^{1} D_{n+i}$$
$$= |-2| + (-2) + D_{n+1} = D_{n+1}. \qquad \square$$

Esto significa que ¡$u_n = -2$ genera u_{n+1} sin ninguna restricción! Un -2 en (u_k) permite generar cualquier valor sin comprometer el valor de ningún otro elemento de la sucesión (aunque su mera presencia puede influir en la magnitud de otros elementos).

Intuitivamente, la siguiente parece una sucesión ultrarrecursiva

$$(\ldots, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, \ldots)$$

pues permanecerá igual al ser transformada con O, según lo que demostrados antes. Para convertir esta intuición en una verdad matemática, es necesario ser rigurosos en lo que significan los puntos suspensivos en los dos extremos y especificar la manera en la que se construirá una sucesión de esta naturaleza.

Algunas sucesiones ultrarrecursivas

Queremos gozar de los teoremas que demostramos en los capítulos anteriores, con la finalidad de construir las primeras sucesiones ultrarrecursivas.

Para ello, debemos saber a qué clases de recursiones pertenece nuestra recursión de la Ecuación (7).

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{|a_n|-1} (a_{n-i\operatorname{sgn}\, a_n} + 1) \qquad (\star)$$

Lo primero que salta a la vista es que la Ecuación $(\star)$ manifiesta el elemento en la posición $n+1$ del lado derecho, y no el de la posición n, como estamos acostumbrados. Esto no representa ningún inconveniente, pues puede reescribirse dicha ecuación como sigue:

$$a_m = \sum_{i=0}^{|a_{m-1}|-1} (a_{m-1-i\operatorname{sgn}\, a_{m-1}} + 1), \qquad (15)$$

donde se ha hecho el cambio de variable $m = n+1$. El motivo por el que no se escribió de esta manera desde el principio es porque su lectura representa mayor dificultad.[3] Denotaremos a ambas (15) y $(\star)$ como la recursión $\mathfrak{O}$.

Teorema 1. *La recursión $\mathfrak{O}$ es de clase α.*

Demostración. Definamos

$$\mathcal{J}_m = \{j | j \geq 0 \land j < |a_{m-1}| - 1\}, \quad f((a_i), m) = \{f_j((a_i), m) | j \in \mathcal{J}_m\}$$

tal que $h_j \equiv f_j((a_i), m) = m - 1 - j\text{sgn } a_{m-1}$ para todo $j \in \mathcal{J}_m$ y finalmente $g_j(x, m) = x + 1$.[4] Con estas especificaciones, la recursión $\mathfrak{O}$, de la Ecuación 15, puede escribirse como sigue:

$$a_m = \xi((a_i), m-1, \text{sgn } u_{m-1}) = \sum_{j \in \mathcal{J}_m} g_j(a_{h_j}, m) |\ h_j \in f((a_i), m) \qquad (16)$$

Sea (a'_i) una extensión de (a_i): si (a_i) satisface $\mathfrak{O}$ en m, verifiquemos que $f((a'_i), m) = f((a_i), m)$. Primero notemos que $a_{m-1} = a'_{m-1}$ implica que $\mathcal{J}_m$ tiene las dos siguientes definiciones equivalentes:

$$\mathcal{J}_m = \{j | j \geq 0 \land j < |a_{m-1}| - 1\} = \{j | j \geq 0 \land j < |a'_{m-1}| - 1\}.$$

Luego, para todo m que satisface $\mathfrak{O}$:

$$f((a'_i), m) = \{m - 1 - j\text{sgn } a'_{m-1} | j \in \mathcal{J}_m\} = \{m - 1 - j\text{sgn } a_{m-1} | j \in \mathcal{J}_m\} = f((a_i), m)$$

Por lo tanto, se satisfacen las dos condiciones de una recursión de clase α (Definición 3.2). $\square$

[3] También porque históricamente, ésa fue la primera manera en que se escribió la recursión, como se muestra en [46]. En dicho trabajo no se aborda este tema con las clases de recursiones que aquí definimos (α, β, γ) y tampoco se da el ejemplo de recursiones que no son invariantes a la extensión pero que en el límite se comportan como $\mathfrak{O}$: Véase el Capítulo 4. Sucesiones ultrarrecursivas y sus primeras páginas.

[4] Cuando $|a_{m-1}| > 0$, $\mathcal{J}_m = \{0, \ldots, |a_{m-1}| - 1\}$ Por el contrario, cuando $a_{m-1} = 0$, $\mathcal{J}_m = \varnothing$ y, por la definición de suma, $\sum_{j \in \mathcal{J}_m} a_j = 0$; por lo tanto, la Ecuación (16) es consistente con la Ecuación (15) en cualquiera de estos casos.

Teorema 2. *La recursión $\mathfrak{O}$ es de clase β.*

Demostración. Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ una sucesión definida por $\mathfrak{O}$ en $\mathcal{Q}'$. La sucesión $(a'_i)_{i\in\mathcal{P}} = \mathrm{T}_k \circ (a_i)$ es tal que

$$(m \in \mathcal{Q} \iff m+k \in \mathcal{P}) \wedge \forall m+k \in \mathcal{P}(a'_{m+k} = a_m).$$

Luego,

$$a_m = \sum_{i=0}^{|a_{m-1}|-1} a_{m-1-i\mathrm{sgn}\ a_{m-1}} \implies a'_t = \sum_{i=0}^{|a'_{t-1}|-1} a'_{t-1-i\mathrm{sgn}\ a'_{t-1}}.$$

si $t = m+k$. Por lo tanto, (a'_i) está definida por $\mathfrak{O}$ para todo $t = m+k$ con $m \in \mathcal{Q}'$. O bien, está definida en el conjunto $\mathcal{P}' = \{m+k | m \in \mathcal{Q}'\} = \mathrm{T}_k \bullet \mathcal{Q}'$. Por la Definición 3.11, esta recursión es de clase β. $\square$

Teorema 3. $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$ *es una sucesión ultrarrecursiva.*

Lema 2. *1) Sea la sucesión $(D_i)_{i=s}^t$ tal que $s \in \mathbb{Z}$. Existe la extensión $(D_i)_{i=s-1}^t$ con $D_{s-1} = -2$ y satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en s.*

2) Sea la sucesión $(D_i)_{i=s}^t$ tal que $D_t = -2$. Para cada número real c, existe una extensión $(D_i)_{i=s}^{t+1}$ con $D_{t+1} = c$ y satisface $\mathfrak{O}$ en $t+1$.

3) Para cualesquiera dos enteros $s \leq t$, la sucesión $(-2)_{i=s}^t$ está definida por la recursión $\mathfrak{O}$ en todo i tal que $s < i \leq t$.

Demostración. Nuevamente, usando el Teorema 3.7, demostraremos la primera y segunda parte del lema. **1)** Por el Corolario 4, $D_{s-1} = -2 \implies D_s^o = D_s$; por lo que $(D_i)_{i=s-1}^t$ satisface $\mathfrak{O}$ en s. **2)** Similarmente, $D_t = -2 \implies D_{t+1}^o = D_{t+1} = c$ para todo c, por lo que $(D_i)_{i=s}^{t+1}$ satisface la recursión en $t+1$.

3) Consideremos la sucesión $(-2)_{i=t}$. Usando la primera parte del lema, se demuestra que $(-2)_{i=t-1}^t$ satisface la recursión en $i = t$. Por inducción, la sucesión $(-2)_{i=t-n}^t$ satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en $\{i | t-n < i \leq t\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, incluido $n = t-s$.

Demostración del Teorema 3. Para demostrar que $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$ satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio, consideremos que para todo elemento en la posición $m \in \mathbb{Z}$ podemos definir la subsucesión $(d_i) = (-2)_{i=m-1}^{m}$ y ya se demostró que ésta satisface la recursión en m: debido a que la sucesión $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una extensión de (d_i) y $\mathfrak{O}$ es de clase α, la extensión también satisface la recursión en m. Es decir, hemos demostrado que $\mathfrak{O}$ se satisface para todo elemento del dominio de $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$. $\square$

Usando ideas y procedimientos como los desarrollados hasta ahora, pueden demostrarse rutinariamente los corolarios siguientes.

Corolario 5. *Para todo $t \in \mathbb{Z}$, la sucesión $(-2)_{i=-\infty}^{t}$ satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio.*

Corolario 6 (Algunas sucesiones ultrarrecursivas)**.** ***1)*** *Para cualesquiera dos enteros $m, n \geq 0$, existe una sucesión ultrarrecursiva de la forma*

$$(\ldots, -2, -2, -2, -n, -m, 0, 0, 0, \ldots)$$

2) *$(0)_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión ultrarrecursiva.*

En el capítulo siguiente, los Lemas 1 y 3 de este capítulo nos permitirán construir sucesiones ultrarrecursivas más complejas que las que hemos desarrollado hasta ahora.

Lema 3. *Para toda sucesión $(D_i)_{i=s}^{t}$ tal que $t \in \mathbb{Z}$, $0 < D_t$ y $s \leq t + 1 - D_t$, existe* ***una y sólo una*** *extensión $(D_i)_{i=s}^{t+1}$ que satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en $t+1$. Con*

$$D_{t+1} = \xi((D_t), t, 1). \tag{17}$$

Demostración. Por hipótesis $\{t, t-1, \ldots, t-(|D_t|-1)\} \subseteq \{t, \ldots, t-(t-s)\}$, por lo que existe $\xi((D_t)_{\mathcal{Q}_t}, t, 1)$. Por definición, la extensión estará definida por $\mathfrak{O}$ en $t+1$ si y sólo si $D_{t+1} = \xi((D_t), t, 1)$. $\square$

5. Sucesión Π

Hemos encontrado algunas eigensucesiones de la transformación O, pero no estamos calculando valores con una fórmula explícita. En cambio, estamos *descubriendo* valores que satisfacen nuestras definiciones.

Sin embargo, existen sucesiones que satisfacen la recursión $\mathfrak{O}$ en todo su dominio y que son periódicas, es el caso de la sucesión $(-2)_{k\in\mathbb{Z}^-}$. Por el Lema 4.2, sabemos que podemos extender esta sucesión con cualquier $c \in \mathbb{R}$ en la posición 0, de modo que la recursión se sigue satisfaciendo en todo el dominio.

Ya exploramos lo que sucede si c es cero o un entero negativo. El siguiente paso natural es investigar lo que sucede si se trata de un entero positivo. Por el Lema 4.3, si c es un entero mayor a cero, podemos volver a extender la sucesión con **un** nuevo valor a la derecha… y repetir este proceso siempre que el último elemento generado sea positivo.

$$\begin{pmatrix}
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{1} & 2 & 5 & 9 & 16 & 27 & 45 & 74 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{2} & 2 & 6 & 10 & 18 & 30 & 50 & 82 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{3} & 2 & 7 & 11 & 20 & 33 & 55 & 90 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{4} & 2 & 8 & 12 & 22 & 36 & 60 & 98 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{5} & 2 & 9 & 13 & 24 & 39 & 65 & 106 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{6} & 2 & 10 & 14 & 26 & 42 & 70 & 114 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{7} & 2 & 11 & 15 & 28 & 45 & 75 & 122 & \dots \\
\dots & -2 & -2 & -2 & \mathbf{8} & 2 & 12 & 16 & 30 & 48 & 80 & 130 & \dots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Esta matriz representa las sucesiones que emergen de cada elección de $c \in \mathbb{Z}^+$. La primera fila representa la sucesión para $c = 1$, la segunda para $c = 2$ y así sucesivamente. Los elementos a la derecha de todo c —el número en **negrita**— se pueden generar por el Lema 4.3 y con cualquiera de las expresiones de $\xi((a_i), n, \mathbf{1})$.

Si bien todos los valores que se generaron son positivos, y eso posibilita usar nuevamente el lema mencionado, aún no contamos con la certeza de que siempre se generarán valores positivos; eventualmente demostraremos esto y otras propiedades.

Nociones generales

Definición 1. La sucesión de sucesiones $\mathbf{\Pi} = ((\pi_{m,i})_{i\in\mathcal{A}_m})_{m\in\mathbb{Z}^+}$ —con dominio en los enteros positivos— tiene como elementos a las sucesiones $(\pi_{m,i})_{i\in\mathcal{A}_m}$ con dominio en $\mathcal{A}_m \supset \mathbb{Z}^-$. Tal que $(\pi_{m,j})_{j\in\mathbb{Z}^-} = (-2)_{j\in\mathbb{Z}^-}$ (la subsucesión con dominio en los negativos contiene elementos que son todos -2), $\pi_{m,0} = m$ y para todo natural $n \in \mathcal{A}_m$: $(n+1 \in \mathcal{A}_m \iff \pi_{m,n} > 0) \wedge \pi_{m,n+1} = \xi((\pi_{m,i}), n, 1)$.

Note que se han definido implícitamente los conjuntos $\mathcal{A}_m$, y que cualquier sucesión $(\pi_{m,i})$ *muere* si existe algún entero positivo t tal que $\pi_{m,t} \leq 0$. De hecho, si este es el caso, el conjunto A_m sería igual a $\mathbb{Z}^- \cup \{0, \ldots, t\}$. Nuestra intención es demostrar que $\mathcal{A}_m = \mathbb{Z}$ para toda m y, consecuentemente, que $\mathbf{\Pi}$ es una familia de sucesiones ultrarrecursivas.

Observación. Toda sucesión $(\pi_{m,i})$ satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio. Se sabe (Corolario 4.5) que $(\pi_{m,j})_{j\in\mathbb{Z}^-}$ satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio y que todos los elementos $\pi_{m,t}$ con $t \geq 0$ satisfacen también la recursión: $\pi_{m,0}$ porque su antecesor es -2 y el resto por definición.

Definición 2. Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$ y todo $n \in \mathcal{A}_m$, la suma de los primeros n sucesores de $\pi_{m,-1}$ se denota como

$$\sigma_n^m \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \pi_{m,i}.$$

Teorema 1. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, $\mathcal{A}_m = \mathbb{Z}$ y para todo entero positivo $n+1$ se cumple:*

$$\pi_{m,n+1} = 2 + \sum_{i=0}^{n-1} (\pi_{m,i}) = \sigma_n^m + 2n + 2. \tag{1}$$

Demostración. Para todo m, si existe $t \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathbf{1)}\ 0 \leq t < \pi_{m,t} \quad \text{y} \quad \mathbf{2)}\ 0 \leq \sigma_t^m,$$

entonces, por la Def. 1 y la Ec. (4.11), esto implica que **0)** existe $t+1 \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\pi_{m,t+1} = \xi((\pi_{m,i}), t, 1) = 2 + \sum_{i=t+1-\pi_{m,t}}^{t-1} (\pi_{m,i}+2) = 2 + \sum_{i=t+1-\pi_{m,t}}^{-1} (\pi_{m,i}+2) + \sum_{i=0}^{t-1} (\pi_{m,i}+2)$$

Por definición, $\pi_{m,i} = -2$ si $i < 0$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \pi_{m,t+1} &= 2 + \sum_{i=t+1-\pi_{m,t}}^{-1} (-2+2) + \sum_{i=0}^{t-1} (\pi_{m,i}+2) \\ &= 2 + 0 + \sum_{i=0}^{t-1} (\pi_{m,i}+2) \end{aligned}$$

Esto último es igual a $= 2 + 2t + \sum_{i=0}^{t-1} \pi_{m,i}$. Luego $t+1$ cumple la siguiente recursión

$$\mathbf{(*)}\ \pi_{m,t+1} = 2 + \sum_{i=0}^{t-1} (\pi_{m,i}+2) = \sigma_t^m + 2n + 2.$$

Y $t+1$ cumple también las dos condiciones iniciales **1)** $0 \leq t+1 < \sigma_t^m + 2t + 2 = \pi_{m,t+1}$, y **2)** $\sigma_{t+1}^m = \sigma_t^m + \pi_t \implies 0 \leq \sigma_{t+1}^m$. Es decir

$$t \text{ cumple } \mathbf{1)} \text{ y } \mathbf{2)} \quad \implies \quad t+1 \text{ cumple } \mathbf{0)}, \mathbf{1)}, \mathbf{2)} \text{ y } \mathbf{(*)}$$

Por inducción, todo número $t+n+1$ con $n \in \mathbb{N}$ cumplirá **0)**, **1)**, **2)** y **(*)**.

Veamos que $t = 0$ satisface: **1)** $0 \leq 0 < \pi_{m,0} = m$, **2)** $0 \leq \sigma_0^m = 0$. Por lo tanto, todo entero positivo $n+1$ pertenece a $\mathcal{A}$ y satisface **(*)**, como se quería demostrar. □

Corolario 1. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, existe la sucesión ultrarrecursiva $(\pi_{m,k})_{k \in \mathbb{Z}}$. Sus primeros elementos en el dominio de los naturales son*

$$\pi_{m,0} = m, \quad \pi_{m,1} = 2, \quad \pi_{m,2} = m+4, \quad \pi_{m,3} = m+8, \quad \pi_{m,4} = 2m+14, \ldots$$

Esto explica algunos aspectos del comportamiento de los números que observábamos en la matriz que representa $\mathbf{\Pi}$. Y da cuenta de otros, por ejemplo, que en las expresiones de arriba cada $\pi_{m,n}$ es '$m \cdot F_{m-1}$ más *cierta* constante', donde F_i es el término i-ésimo de la sucesión de Fibonacci $(F_k) = (\ldots, 1, 0[= F_0], 1, 1, 2, \ldots)$.

Propiedades de $(\pi_{m,n})$

Vamos a estudiar la parte interesante de las sucesiones ultrarrecursivas que acabamos de encontrar: la parte derecha, o bien, la subsucesión $(\pi_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Pero antes demostraremos el siguiente teorema, que nos dice que casi todo el dominio de $(\pi_{m,k})$ cumple una relación recursiva tradicional; si bien ya se había demostrado que en $\mathbb{Z}^+$, la misma sucesión satisface la recursión de la Ecuación (1), ésta no es de orden k, como la que veremos a continuación.

Teorema 2. *En $(\pi_{m,k})$, para toda $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ se satisface la siguiente recursión*

$$\pi_{m,p} = \pi_{m,p-1} + \pi_{m,p-2} + 2. \tag{2}$$

Demostración. Para $p < 0$, la prueba se sigue inmediatamente de las definiciones:

$$\pi_{m,p} = -2 = (-2) + (-2) + 2 = \pi_{m,p-1} + \pi_{m,p-2} + 2.$$

Para $p = n + 1 > 1$, emplearemos el Teorema 1 como sigue:

$$\begin{aligned}
\pi_{m,n+1} &= \sigma_n^m + 2n + 2 = (\sigma_{n-1}^m + \pi_{m,n-1}) + 2n + 2 \\
&= (\sigma_{n-1}^m + 2(n-1) + 2) + \pi_{m,n-1} + 2 \\
&= \pi_{m,n} + \pi_{m,n-1} + 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos mostrado que la Ecuación (2) se cumple para todo $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. El despeje anterior no es válido si $n + 1 = 0$, pues $\pi_{m,n+1} \neq \sigma_n^m + 2n + 2 = 0$; y para $n + 1 = 1$, $\pi_{m,n+1} = \sigma_n^m + 2n + 2 = 2 \iff \pi_{m,0} = 2 \iff m = 2$. $\square$

La primera diferencia de $(\pi_{m,n})$

Corolario 2. *Sea $(\Delta\pi_{m,k})$ la primera diferencia de la sucesión $(\pi_{m,k})$ (Definición 2.1). Dicha sucesión satisface la recursión $\mathfrak{F}$ en todo $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$.*

Demostración. Veamos que para todo $p \in \mathbb{Z}$,

$$\Delta\pi_{m,p-2} + \Delta\pi_{m,p-1} = (\pi_{m,p-1} - \pi_{m,p-2}) + (\pi_{m,p} - \pi_{m,p-1}).$$

Si $p, p+1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, entonces:

$$\begin{aligned}\Delta\pi_{m,p-2} + \Delta\pi_{m,p-1} &= (\pi_{m,p-1} + \pi_{m,p}) - (\pi_{m,p-2} + \pi_{m,p-1}) \\ &= (\pi_{m,p-1} + \pi_{m,p} + 2) - (\pi_{m,p-2} + \pi_{m,p-1} + 2) \\ &= \pi_{m,p+1} - \pi_{m,p} = \Delta\pi_{m,p}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Delta\pi_{m,k}$ cumple la recursión $\mathfrak{F}$ en p siempre que $p, p+1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, es decir, siempre que $p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. $\square$

Este corolario es importante, pues nos lleva a una recursión ya muy conocida y estudiada, desde la cual se podrá estudiar a $(\pi_{m,n})$ por medio al Corolario 2.1, que nos dice:

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,0} + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta\pi_{m,i} \tag{3}$$

Considerando la primera fórmula del Teorema 1.7, la ecuación anterior lleva a lo siguiente (porque $(\Delta\pi_{m,n})$ satisface $\mathfrak{F}$):

$$\pi_{m,n} = \pi_{m,0} - \Delta\pi_{m,1} + \Delta\pi_{m,n+1} = \pi_{m,0} + \pi_{m,1} - \pi_{m,2} + \Delta\pi_{m,n+1}.$$

Pero $\pi_{m,2} = \pi_{m,1} + \pi_{m,0} + 2$, luego

$$\pi_{m,n} = \Delta\pi_{m,n+1} - 2. \tag{4}$$

Por lo tanto, para cualquier ecuación satisfecha por $\Delta\pi_{m,n+1}$, existirá una para $\pi_{m,n}$. Ej.: si $\Delta\pi_{m,n+1} = \cdots$, entonces $\pi_{m,n} = \cdots - 2$.

En otras palabras, $(\Delta\pi_{m,n})$ tiene las propiedades de cualquiera otra sucesión recursiva definida por $\mathfrak{F}$ en el dominio de los enteros. Y, de acuerdo la Ecuación (4), por cada una de esas propiedades habrá una equivalente para $(\pi_{m,n})$.

De modo que el estudio de $\mathbf{\Pi}$ se reduce al estudio de una familia de sucesiones definidas por la recursión $\mathfrak{F}$. Sin embargo, vamos a mencionar algunas de las propiedades especiales de esta familia, como se hizo en [46].

Corolario 3. *La solución de* $(\Delta\pi_{m,n})$ *es*

$$\Delta\pi_{m,n+1} = B_m\varphi^n + C_m\psi^n. \tag{5}$$

O, con $b_m = \sqrt{5}B_m$ *y* $c_m = \sqrt{5}C_m$*:*

$$\Delta\pi_{m,n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(b_m\varphi^n + c_m\psi^n). \tag{6}$$

Donde para toda $m \in \mathbb{Z}^+$*, las constantes* b_m *y* b_m *son las siguientes*

$$\begin{aligned} b_m &\equiv (m+2)\varphi + 2 - m = (m+2)(\varphi - 1) + 4 \\ c_m &\equiv (m+2)\varphi - 4 = b_m + m - 6 \end{aligned} \tag{7}$$

Demostración. Esto se prueba resolviendo $\alpha \equiv b_m$ y $\beta \equiv c_m$ en la Ecuación (0.8),' para las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} A_0 &\equiv \Delta\pi_{m,1} = \pi_{m,2} - \pi_{m,1} = (m+4) - 2 = m+2 \\ A_1 &\equiv \Delta\pi_{m,2} = \pi_{m,3} - \pi_{m,2} = (m+8) - (m+4) = 4. \end{aligned}$$

En donde se han usado los primeros valores de $(\pi_{m,n})$, según el Corolario 1. □

La familia de sucesiones $\mathbf{\Pi}$ es la primera que conocemos que contiene sucesiones invariantes a la transformación O. Resulta interesante que este nuevo tipo de recursión mantenga relación con la proporción áurea y la sucesión de Fibonacci. Más tarde veremos que la transformación O está relacionada también con la sucesión de Hofstadter (Véase el Capítulo 8. SOBRE LA TRANSFORMACIÓN O).

Relación con otras sucesiones

Teorema 3 (Relación entre el término n-ésimo de (m_n) y la sucesión de Fibonacci)**.** *En toda sucesión* $(\pi_{m,k})$*, el término* n*-ésimo, con* $n \in \mathbb{N}$*, satisface lo siguiente:*

$$\pi_{m,n} = mF_{n-1} + 2F_{n+2} - 2 \tag{8}$$

Demostración. Del Lema 1.1, sabemos que

$$\Delta\pi_{m,n+1} = [F_n, F_{n+1}] = F_n\Delta\pi_{m,0} + F_{n+1}\Delta\pi_{m,1}.$$

Considerando los primeros valores de toda $(\pi_{m,n})$, se tiene:

$$\begin{aligned}\Delta\pi_{m,n+1} &= F_n(2-m) + F_{n+1}(m+2) = m(F_{n+1} - F_n) + 2(F_n + F_{n+1})\\ &= mF_{n-1} + 2F_{n+2}.\end{aligned}$$

Por lo establecido en la Ecuación (4), lo anterior lleva directamente a (8). □

Corolario 4 (La relación entre dos sucesiones de $\mathbf{\Pi}$ vía Fibonacci)**.** *Para cualesquiera* $m, t \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, se cumple la siguiente relación:*

$$\pi_{m,n} = \pi_{t,n} + (m-t)F_{n-1} \tag{9}$$

La Ecuación (9) se puede visualizar en la matriz de $\mathbf{\Pi}$, al comparar los elementos de una misma columna.

Teorema 4. *Algunas relaciones entre las primeras diferencias de algunas sucesiones de* $\mathbf{\Pi}$ *y sucesiones bien conocidas. Para todo* $n \in \mathbb{N}\ldots$

$$\textbf{1)}\ \Delta\pi_{1,n} = L_{n+1} \quad \textbf{2)}\ \Delta\pi_{2,n} = 4F_n \quad \textbf{3)}\ \Delta\pi_{6,n} = 4L_{n-1}$$

Donde L_i *es el término* i*-ésimo de los números de Lucas.*

Demostración. La primera parte del teorema se comprueba al notar que $\Delta\pi_{1,0} = 2-1 = 1 = L_1$ y $\Delta\pi_{1,1} = 5-2 = 3 = L_2$. Por el Corolario 0.4 y la invariancia ante la traslación de la recursión $\mathfrak{F}$, se puede decir que la sucesión $(\Delta\pi_{1,n})$ es una traslación de la sucesión de Lucas.

Las partes restantes se comprueban de manera similar, o bien, al analizar las constantes b_m y c_m, de la Ecuación (7). Para $m = 2$, estas constantes son $b_2 = 4\varphi$ y $c_2 = 4(\varphi - 1) = -4\psi$, por lo que la parte derecha de la Ecuación (6) es 4 veces un número de Fibonacci. Para $m = 6$, $b_m = 8\varphi - 4 = 4(2\varphi - 1) = 4\sqrt{5} \implies B_m = 4$ y $c_m = b_m + 6 - 6 = b_m \implies C_m = B_m$, por lo que en este caso la parte derecha de la Ecuación (5) es 4 veces un número de Lucas. $\square$

Una sucesión ultrarrecursiva diferente

Consideremos una subsucesión de $(\pi_{1,k})$:

$$(q_i)_{i=-5}^{2} = (-2, -2, -2, -2, -2, 1, 2, 5)$$

Podemos comprobar manualmente que esta sucesión satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en el subconjunto de su dominio $\{-4, -3, \ldots, 2\}$. O podemos generalizar las condiciones bajo las cuales la recursión $\mathfrak{O}$ es invariante ante la restricción[1]:

Teorema 5. *Sea una sucesión ultrarrecursiva (u_k). Para todo conjunto de enteros $\mathcal{Q}$, la subsucesión $(u_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en $n+1$ si*

$$\textbf{1)}\ n+1 \in \mathcal{Q} \quad \text{y} \quad \textbf{2)} \begin{cases} \{n+1-|u_n|, \ldots, n\} \subseteq \mathcal{Q} & \text{si } u_n > 0 \\ \{n, \ldots, n-1+|u_n|\} \subseteq \mathcal{Q} & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

Corolario 5. *El Teorema 3 implica que toda subsucesión $(u_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ (esto es cuando $\mathcal{Q}$ es un conjunto de enteros consecutivos) satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en todo $n+1$ si existe n y si $\alpha \le n - (|a_n| - 1)\cdot \operatorname{sgn} a_n \le \beta$, es decir, si*

$$\alpha \le n - a_n + \operatorname{sgn} a_n \le \beta.$$

[1]La reestricción de una función se explica en la Definición 3.5.

El teorema se demuestra en los Apéndices. En palabras, lo que significa su corolario es que toda subsucesión $(u_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en la posición $n+1$ si existe un elemento '$|u_n|$' lugares a su izquierda (cuando $u_n > 0$) o si existe un elemento '$|u_n| - 2$' lugares a su derecha (cuando $u_n < 0$).

De modo que la sucesión (q_i) de arriba satisface $\mathfrak{F}$ en todo su dominio menos la posición -5, pues no tiene un valor anterior. Nótese que la suma de todos los elementos a la derecha de esta posición es cero $\sum_{i=-4}^{2} q_i = 4(-2) + 1 + 2 + 5 = 0$.

De acuerdo al Lema 4.1, existe una expansión hacia la izquierda $(q_i)_{i=\mathbf{-6}}^{2}$ con $q_{-6} = -6 - (2) - 1 = -9$. Y de acuerdo al Lema 4.3, existe una y sólo una expansión hacia la derehca $(q_i)_{i=-6}^{\mathbf{3}}$ con $q_3 = \xi((q_i), 2, 1) = |5| + 5 + 2 + 1 - 2 - 2 = 9$; esto da lugar a la siguiente extensión

$$(q_i)_{i=-6}^{3}(\mathbf{-9}, -2, -2, -2, -2, -2, 1, 2, 5, \mathbf{9})$$

Esta sucesión satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en todos sus elementos menos en el primero. Debido a que el último elemento tiene un valor de 9 y hay más de nueve elementos en la sucesión, puede aplicarse nuevamente el Lema 4.3 y volver a extender a la derecha con

$$q_4 = 2 \cdot 9 + \sum_{i=-5}^{2} q_i = 18 + q_{-5} + \sum_{i=-4}^{2} = 18 + (-2) + (0) = 16.$$

Donde se ha usado ξ según la Ecuación (4.10).

No es posible volver a extender a la derecha, pues la sucesión tiene menos de 16 elementos. En términos del Lema 4.3, $-6 \not\leq 5 - 16$, es decir, no existe el elemento $q_{5-16} = q_{-11}$. Sin embargo, siempre es posible extender a la izquierda con -2 (como dice el Lema 4.2). Por lo tanto, para todo entero $-n < -6$ hay una extensión que denotaremos como

$$(q_i)_{i=-n}^{4} = (-2_{-n}\rangle - 9_{-6}\rangle - 2_{-1}, 1, 2, 5, 9, 16)$$

Donde '-2_{-n}' simboliza que $q_{-n} = -2$ —y en general 'A_j' denotará $q_j = A$— y el símbolo '$\rangle$' en '$-2_{-n}\rangle - 9_{-6}$' simboliza que $q_i = -2$ para todo $-n < i < -6$ —y en general '$A_j\rangle B_k$' dará a entender que $q_i = -2$ para $j < i < k$.

Sabemos que toda extensión de este tipo satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio menos en $-n$ (a partir de ahora, dejaremos de mencionar en qué dominio se satisface $\mathfrak{O}$, sabiendo que todas nuestras extensiones tienen el propósito de crear sucesiones ultrarrecursivas). Y sabemos que la elección $n = 11$ nos permitirá extender la sucesión a la derecha; pero queremos volver a generar las condiciones de antes: que la suma de todos los elementos a la derecha de la posición $-n$ sea cero $\sum_{i=-n+1}^{4} q_i = 0$. Calculando...

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-n+1}^{4} q_i &= \sum_{i=-n+1}^{-5} q_i + \sum_{i=-4}^{2} q_i + \sum_{i=3}^{4} q_i = \sum_{i=-n+1}^{-5} q_i + 0 + \sum_{i=3}^{4} q_i \\
&= \sum_{i=-n+1}^{-7} q_i + (-9) + (-2) + 9 + 16 = \sum_{i=-n+1}^{-7} (-2) + 14 \\
&= (-2)(-7 + 1 - (-n + 1)) + 14 = -2n + 28
\end{aligned}$$

Llegamos a la conclusión de que esto sucede para $n = 14$. Por lo tanto, la sucesión $(q_i)_{i=-14}^{4}$ puede extenderse a la derecha y a la izquierda usando los mismos lemas y algunos equivalentes de la función ξ:

$$\begin{aligned}
q_{-15} &= -15 - 4 - 1 = -20 \\
q_5 &= 2 \cdot q_4 + \sum_{i=-11}^{3} q_i = q_4 - q_{-12} - q_{-13} + \sum_{i=-13}^{4} q_i \\
&= 16 - (-2) - (-2) = 20
\end{aligned}$$

De modo que se ha generado la extensión $(q_i)_{i=-15}^{5}$. Puede el lector comprobar que repetir este proceso de extensión unas veces más da lugar a la siguiente sucesión:

$$(\ldots, -86_{-77}\rangle - 42_{-35}\rangle - 20_{-15}, \rangle - 9_{-6}, \rangle - 2_{-1}, 1, 2, 5, 9, 16, 20, 38, 42, 82, 86, \ldots)$$

De donde se pueden reconocer una serie de patrones.

- ($\star$) Todos los elementos negativos de la sucesión tienen un equivalente con magnitud positiva. De hecho, se observa lo siguiente $-A_{-B} \implies q_{A-B} = A$. Por ejemplo: $-9_{-6} \implies q_{9-6} = q_3 = 9$, $-20_{-15} \implies q_{20-15} = q_5 = 20$.

- ($\star$) Los valores positivos q_{2n+1} (con $n > 0$) cumplen la recursión $q_{2n+1} = q_{2n} + 4$. Ej. $q_3 = 9 = 5 + 4 = q_2 + 4$.

- Relacionado con lo anterior: si $-A_{-B}$, entonces $A - B$ siempre es un impar. Ej. $-2_{-1} \implies 2 - 1 = \mathbf{1}$, $-9_{-6} \implies 9 - 6 = \mathbf{3}$, $-20_{-15} \implies 20 - 15 = \mathbf{5}$, etc. Por lo tanto, todos los valores positivos q_{2n} no aparecen como negativos: $q_0 = 1$, $q_2 = 5$, $q_4 = 16$, $q_5 = 38$ y así sucesivamente.

- ($\star$) Para todo número par $p > 0$, $p - q_p = K + 3$, donde K es tal que $q_K = -q_{p+1}$. Los primeros ejemplos:

$$2 - q_2 = 2 - 5 = -3 = \mathbf{-6} + 3 \implies q_{-6} = -q_3 = -9$$
$$4 - q_4 = 4 - 16 = -12 = \mathbf{-15} + 3 \implies q_{-15} = -q_5 = -20$$
$$6 - q_6 = 6 - 38 = -32 = \mathbf{-35} + 3 \implies q_{-35} = -q_7 = -42$$

  Este patrón es quizá el más sutil de todos los que mencionaremos, pero eventualmente será clave en las demostraciones.

- Los valores positivos q_{2n} (con $n > 0$) cumplen la recursión $q_{2n} = q_{2n-1} + q_{2n-2} + 2$. Ej. $q_4 = 16 = 9 + 5 + 2 = q_3 + q_2 + 2$.

- Los dos puntos anteriores implican que para $n > 1$: $q_{2n} = 2q_{2n-1} - 2$. Por ejemplo: $q_4 = 16 = 18 - 2 = 2q_3 - 2$.

- Sea el valor negativo $-A_{-B}$, el valor negativo a su izquierda es $(-2A - 2)_{-A-B}$. Esto se cumple de -9_{-6} a la izquierda:

$$-9_{-6} \implies -18 - 2_{-9-6} = -20_{-15} \implies -40 - 2_{-20-15} = -42_{-35} \cdots .$$

Observación. [La relación entre los subíndices y los elementos] Sea (a_i) una sucesión que satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio (excepto quizá en el primer elemento) y se cumple $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_m < 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}^-$. Si $a_m \neq -2$, entonces existe una relación entre $|a_m|$ y su subíndice m: La cantidad positiva $\delta =$

$|a_m| + m - 1$ es tal que $\sum_{i=m+2}^{\delta} a_i = 0$, o bien, es el índice del último elemento de esa suma: $a_{m+2} + \cdots + a_\delta = 0$. La sucesión (q_i) cumple todas las condiciones que mencionamos y $|a_m|+m$ siempre es un número impar (empezando por 3), significando que $q_{m+2} + \cdots + q_2 = 0$, $q_{m'+2} + \cdots + q_4 = 0$, $q_{m''+2} + \cdots + q_6 = 0$, etc.

El por qué no existe un m^* tal que $q_{m^*+2}+\cdots+q_1 = 0$ (o bien, $q_{m^*+2}+\cdots+q_{2n+1} = 0$) se explicará después. Ahora extenderemos las subsucesiones $(\pi_{2,i})_{i=-6}^{\mathbf{2}}$ y $(\pi_{3,i})_{i=-7}^{2}$ de una manera análoga a la anterior[2]:

$$(\ldots, -94_{-85}\rangle - 46_{-39}\rangle - 22_{-17}, \rangle - 10_{-7}, \rangle - 2_{-1}, 2, 2, 6, 10, 18, 22, 42, 46, 90, 94, \ldots)$$

$$(\ldots, -102_{-93}\rangle - 50_{-43}\rangle - 24_{-19}, \rangle - 11_{-8}, \rangle - 2_{-1}, 3, 2, 7, 11, 20, 24, 46, 50, 98, 102, \ldots)$$

Note que cumplen todos los patrones que señalábamos de (q_i). No hay indicios de que en algún momento estas sucesiones vayan a comportarse de manera diferente, lo que nos da una idea de que estos patrones pueden dar lugar a sucesiones ultrarrecursivas (es decir, podemos extender en todo el dominio de los enteros).

En la siguiente subsección, vamos a comprobar que sin importar la subsucesión inicial $(\pi_{m,i})_{i=-m-4}^{2}$, al extender de la misma manera se llegan a sucesiones con los mismos patrones. Pero nuestro principal interés es entender los mecanismos que permiten la existencia de estas sucesiones, por lo que primero se darán teoremas muy generales.

Generalización

Teorema 6. *Para cualquier sucesión $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ que tenga dos elementos consecutivos que satisfacen $0 < a_n < a_{n+1}$, si de la sucesión transformada $(a_i^o)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv \mathrm{O} \circ (a_i)$ existen a_{n+2}^o y a_{n+1}^o, entonces*

$$a_{n+2}^o = a_{n+1}^o + a_n + 2 + R \tag{10}$$

Donde $R \equiv \sum_{i=n+2-a_{n+1}}^{n-a_n} (a_i + 2)$.

[2]Todos los elementos de estas extensiones se calcularon manualmente, no siguiendo los patrones señalados.

Lema 1. *Para toda sucesión* $(b_i)_{i\in\mathcal{P}}$*, si* $0 < b_n < b_{n+1} \,|b_n, b_{n+1} \in \mathbb{Z}$ *y se tiene* $\{n+1-b_{n+1}, \dots, n-b_n\} \subseteq \mathcal{P}$*,* $n+2-b_{n+2} \in \mathcal{P}$ *entonces:*

$$\sum_{i=n+2-b_{n+1}}^{n-b_n} b_i = (b_{n+1} - b_n - 1)(-2) + R \tag{11}$$

si y sólo si $R = \sum_{i=n+2-b_{n+1}}^{n-b_n}(b_i+2)$.

Demostración. **Caso** $b_n + 1 < b_{n+1}$**.** Para demostrar este caso, hace falta notar que la cantidad de elementos que contiene la suma es justamente $(n-b_n)+1-(n+2-b_{n+1}) = b_{n+1} - b_n - 1$ (Teorema A.6), por lo tanto:

$$\text{Ec. (11)} \iff R = \sum_{i=n+2-b_{n+1}}^{n-b_n} b_i + 2(b_{n+1} - b_n - 1) = \sum_{i=n+2-b_{n+1}}^{n-b_n} (b_i + 2)$$

Caso $b_n + 1 = b_{n+1}$**.** En este caso, $\beta \equiv n - b_n < n + 2 - b_{n+1} \equiv \alpha$, y por la definición de suma: $\sum_{i=\alpha}^{\beta} b_i = 0$. Esto implica también que $R = \sum_{i=\alpha}^{\beta}(b_i + 2) = 0$, por lo que la Ecuación (11) se cumple:

$$(b_{n+1} - b_n - 1)(-2) + R = (0)(-2) + (0) = 0 = \sum_{i=\alpha}^{\beta} b_i.$$

Nota: $b_n{+}1 = b_{n+1}$ es el motivo por el que no se escribió sólo $\{n{+}1{-}b_{n+1}, \dots, n{-}b_n\} \subseteq \mathcal{P}$ en el planteamiento del lema. Pues, en caso $n + 2 - b_{n+2} = n + 1 - b_n$ queda fuera de ese conjunto. Estos resultados serán de ayuda para demostrar el teorema.

Por hipótesis, $0 < a_n < a_{n+1}$ y existen a^o_{n+2} y a^o_{n+1}, es decir, existe $\xi((a_i), n+1, 1)$ y $\xi((a_i), n, 1)$: esto implica $a_{n+1}, a_n \in \mathbb{N}$ y lo siguiente:

$$\exists \xi((a_i), n+1, 1) \implies \{n + 1 - a_{n+1}, \dots, n\} \subseteq \mathcal{Q},$$

Debido a que $a_n \geq 1$ y $a_{n+1} \geq 2$, se puede decir lo siguiente:

$$\mathcal{A} \equiv \{n + 1 - a_{n+1}, \dots, n - a_n, \dots n\} \subseteq \mathcal{Q} \quad \wedge \quad n + 2 - a_{n+2} \in \mathcal{A}$$

Por lo tanto, se cumplen todos los requisitos para usar el lema. Desarrollemos a^o_{n+2} con una de las expresiones de ξ:[3]

$$\begin{aligned}
a^o_{n+2} &= \xi((a_i), n+1, 1) = 2a_{n+1} + \sum_{i=n+2-a_{n+1}}^{n} a_i \\
&= 2a_{n+1} + \left(\sum_{i=n+2-a_{n+1}}^{n-a_n} a_i \right) + \left(\sum_{i=n+1-a_n}^{n} a_i \right) \\
&= 2a_{n+1} + \Big((a_{n+1} - a_n - 1)(-2) + R \Big) - a_n + \left(2a_n + \sum_{i=n+1-a_n}^{n-1} a_i \right) \\
&= a_n + 2 + R + (\xi((a_i), n, 1)) = a_n + 2 + R + (a^o_{n+1})
\end{aligned}$$

Como queríamos demostrar. □

Corolario 6. *Sea (a_i) una sucesión que satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en $n+1$ y $n+2$, entonces se satisface la ecuación*

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2 + R. \tag{12}$$

Donde $R \equiv \sum_{i=n+2-a_{n+1}}^{n-a_n} (a_i + 2)$.

Este corolario es consecuencia directa del teorema anterior. Con él puede demostrarse, por ejemplo, que en toda sucesión $(\pi_{m,k})$ se cumple $\pi_{m,n} = \pi_{m,n-1} + \pi_{m,n-2} + 2$ para todo $n > 1$, pues en su 'R' todos los sumandos son $\pi_{m,i} + 2 = -2 + 2 = 0$.

Pero la verdadera utilidad de este corolario es que nos facilitará demostrar los teoremas siguientes.

[3] Se ha empleado la Ecuación (4.10) y la propiedad $\sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = \sum_{i=\gamma}^{\beta} f(i) + \sum_{i=\alpha}^{\gamma-1} f(i)$ —válida siempre que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$— demostrada en Teorema A.6. Para seguir plenamente éste y muchos otros desarrollos, se recomienda consultar la sección *Sumas, multiplicaciones y otros artificios* del capítulo *Notas importantes* de los Apéndices.

Teorema 7. *Para toda sucesión* $(D_i)_{i=\alpha+1}^{\beta}$ *que satisface*

$$\textbf{\textit{1)}}\ \ 0 < D_\beta, \quad \textbf{\textit{2)}}\ \ \alpha+1 \le \beta - D_\beta, \quad \textbf{\textit{3)}}\ \textstyle\sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = 0.$$

A) *Existe una extensión* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ *con los valores*

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \alpha - \beta - 1 \\ D_{\beta+1} &= D_\beta + C \end{aligned} \tag{13}$$

Donde $C = -\sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i$.

B) *Si esta extensión es tal que* ***4)*** $D_\beta < D_{\beta+1}$ *y* $\alpha \le \beta + 1 - D_{\beta+1}$. *Es decir, si* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ *también satisface las condiciones* ***1)*** *y* ***2)***. *Se puede hacer una nueva extensión* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+2}$ *a la derecha, con*

$$D_{\beta+2} = D_{\beta+1} + D_\beta + 2 + R \tag{14}$$

Donde $R = \displaystyle\sum_{i=\beta+2-D_{\beta+1}}^{\beta-D_\beta} (D_i + 2)$.

C) *Si* ***5)*** *el siguiente es un número entero menor a* α

$$\gamma = \alpha - \frac{1}{2}(D_\alpha + D_{\alpha+1} + D_{\beta+1} + D_{\beta+2} + 4), \tag{15}$$

entonces se puede extender también hacia la izquierda $(D_i)_{i=\gamma+1}^{\beta+2}$ *de modo que se cumple* $\sum_{i=\gamma+2}^{\beta+2} D_i = 0$ *(la condición* ***3)****). Donde*

$$\gamma < i < \alpha \implies D_i = -2.$$

La demostración de este teorema se encuentra en los apéndices. El único punto que necesitó un *truco nuevo* para ser demostrado fue **C)**, que en palabras nos especifica *cuánto tenemos que extender para que vuelva a suceder* $\sum D_i = 0$, *y sea posible extender hacia la izquierda con un número distinto a* -2.

Ahora aplicaremos estos resultados en sucesiones que tengan características parecidas a las de (q_i). El siguiente caso particular está inspirado en los enunciados que antes señalamos con '($\star$)'.

Teorema 8 (Caso particular)**.** *Para toda sucesión* $(D_i)_{i=\alpha+1}^{\beta}$ *que satisface* ***1), 2)*** *y* ***3)****, si su sucesión extendida* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ *(como se define en el teorema anterior) satisface*

$$\textbf{\textit{(*)}}\ \alpha+3=\beta-D_\beta, \quad D_{\alpha+1}=D_{\alpha+2}=\cdots=D_{\beta-D_\beta}=-2,$$
$$D_{\beta+1}=D_\beta+4 \quad y \quad D_{\beta+1}=-D_\alpha,$$

entonces también satisface ***4)*** *y* ***5)****. Y la extensión siguiente* $(D_i)_{i=\gamma+1}^{\beta+2}$ *es tal que*

$$\begin{gathered} D_{\beta+2}=2D_{\beta+1}-2 \\ \gamma=\alpha+D_\alpha \end{gathered} \tag{16}$$

D) *La extensión* $(D_i)_{i=\gamma}^{\beta+3}$ *también satisface* ***1), 2), 3)*** *y* ***(*)****. Es decir, si denotamos* $\beta'=\beta+2$*, y* $\alpha'=\gamma=\alpha+D_\alpha$*, se cumple:*

$$\textbf{\textit{1)}}\ 0<D_{\beta'}, \quad \textbf{\textit{2)*}}\ \alpha'+3=\beta'-D_{\beta'}, \quad \textbf{\textit{3)}}\ \textstyle\sum_{i=\alpha'+2}^{\beta'} D_i=0$$
$$y\ \textbf{\textit{(*)}}\ D_{\beta'+1}=D_{\beta'}+4, \quad D_{\alpha'+1}=\cdots=D_{\beta'-D_{\beta'}}=-2, \quad D_{\beta'+1}=-D_{\alpha'}.$$

Demostración. Demostremos primero que **(*)** $\Longrightarrow$ **(4)**.

i) $D_{\beta+1}=D_\beta+4 \implies \boldsymbol{0<D_\beta<D_{\beta+1}}$

ii) $\alpha+3=\beta-D_\beta \implies \alpha=\beta-3-D_\beta \implies \alpha\le\beta-3-D_\beta$

iii) $D_{\beta+1}=D_\beta+4 \implies \boldsymbol{\alpha\le\beta+1-D_{\beta+1}}$

Y, por el punto **B)** del teorema anterior:

$$D_{\beta+2}=D_{\beta+1}+D_\beta+2+R=D_{\beta+1}+(D_{\beta+1}-4)+2+R=2D_{\beta+1}-2+R$$

Por **iii)**, sabemos que $\alpha<\beta+3-D_{\beta+1}$, luego $\alpha-1\le\beta+2-D_{\beta+1}$ y por hipótesis ($\alpha<i\le D_{\beta-D_\beta} \implies D_i=-2$) se tiene:

$$R=\sum_{i=\beta+2-D_{\beta+1}}^{\beta-D_\beta}(D_i+2)=\sum_{i=\beta+2-D_{\beta+1}}^{\beta-D_\beta}(-2+2)=0 \implies D_{\beta+2}=2D_{\beta+1}-2. \tag{X}$$

Ahora mostremos que **(*)** $\implies$ **(5)**.

$$\begin{aligned}
\gamma &= \alpha - \frac{1}{2}(D_\alpha + D_{\alpha+1} + D_{\beta+1} + D_{\beta+2} + 4) \\
&= \alpha - \frac{1}{2}(-D_{\beta+1} - 2 + D_{\beta+1} + (2D_{\beta+1} - 2) + 4) \\
&= \alpha - D_{\beta+1} = \alpha + D_\alpha
\end{aligned}$$

De modo que γ es un número entero y $0 < D_{\beta+1} \implies \gamma = \alpha - D_{\beta+1} < \boldsymbol{\alpha}$. Finalmente, calculemos los términos de la última extensión:

$$\begin{aligned}
D_\gamma &= \gamma - (\beta+2) - 1 = \gamma - \beta - 3 = \alpha - \beta - 1 + D_\alpha - 2 = 2D_\alpha - 2 \\
D_{\beta+3} &= D_{\beta+2} + D_{\beta+1} + 2 + R'
\end{aligned} \tag{Y}$$

Se usará (X), la propiedad $\alpha + 3 = \beta - D_\beta = \beta + 4 - D_{\beta+1}$ y el Corolario 4) para desarrollar R':

$$R' = \sum_{i=\beta+3-D_{\beta+2}}^{\beta+1-D_{\beta+1}} (D_i + 2) = \sum_{i=\alpha+4-D_{\beta+1}}^{\alpha} (D_i + 2) = \sum_{i=\alpha+4-D_{\beta+1}}^{\alpha-1} (D_i + 2) + D_\alpha + 2$$

Pero $\alpha + 4 - D_{\beta+1} = \gamma + 4 > \gamma$, luego $R = \sum(-2+2) + D_\alpha + 2$. Por lo tanto:

$$\boldsymbol{D_{\beta+3}} = D_{\beta+2} + D_{\beta+1} + 2 + (D_\alpha + 2) = D_{\beta+2} + D_{\beta+1} + 2 - D_{\beta+1} + 2 = \boldsymbol{D_{\beta+2} + 4}$$

Y $D_{\beta+2} + 4 = 2D_{\beta+1} + 2 = -(2D_\alpha - 2) \implies \boldsymbol{D_\gamma = -D_{\beta+3}}$. Esto prueba dos de las hipótesis de **D)**. Ofrecemos otra basados en (Y):

$$\boldsymbol{\gamma + 3} = D_\gamma + \beta + 6 = -D_{\beta+2} - 4 + \beta + 6 = \boldsymbol{(\beta + 2) - D_{\beta+2}}$$

El resto de las hipótesis de **D)** se siguen de las definiciones. $\square$

Corolario 7. *Por el Principio de Inducción: para toda* $n \in \mathbb{N}$, *existe la extensión* $(D_i)_{i=\alpha_n}^{\beta_n+1}$ *definida por* $\mathfrak{D}$ *en* $\{\alpha_n + 1, \ldots, \alpha + 1\} \cup \{\beta + 1, \ldots, \beta_n + 1\}$ *tal que*

- $\beta_0 \equiv \beta$ *y, para toda* $0 < m \leq n$, $\beta_m = \beta_{m-1} + 2$.
- *Para todo* m, $D_{\beta_m+1} = D_{\beta_m} + 4$. *Para todo* $0 \leq m < n$, $D_{\beta_m+2} = 2D_{\beta_m+1} - 2$.

- *$\alpha_0 \equiv \alpha$ y, para toda $0 \leq m < n$, $\alpha_{m+1} = \alpha_m + D_{\alpha_m}$.*

- *Para toda m, $D_{\alpha_m} = -D_{\beta_m+1}$. Por hipótesis $D_{\alpha+1} = \cdots = D_{\beta - D_\beta} = -2$ y para todo $m > 0$:*

$$\alpha_m < i < \alpha_{m-1} \implies D_i = -2.$$

Estos resultados pueden usarse para extender cualquier sucesión que satisfaga todas las condiciones establecidas. Las condiciones del Teorema 8 pueden parecer arbitrarias, pero fueron inspiradas precisamente en el comportamiento de las sucesiones que desarrollamos hace unas páginas.

Vamos a darle nombre a sucesiones que cumplan estos patrones en **todo** el dominio entero; posteriormente demostraremos que estas sucesiones son ultrarrecursivas.

Definición 3. La sucesión de sucesiones $\mathbf{\Psi} \equiv ((\psi_{m,k})_{k\in\mathbb{Z}})_{m\in\mathbb{Z}^+}$ tiene como elementos a las sucesiones $(\psi_{m,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ con valores iniciales

$$\psi_{m,i} = -2 | -m-4 \leq i < 0, \quad \psi_{m,0} = m, \quad \psi_{m,1} = 2, \quad \text{y} \quad \psi_{m,2} = m+4.$$

Y que satisfacen las siguientes recursiones en todo $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\begin{aligned} \psi_{m,2n+1} &= \psi_{m,2n} + 4 \\ \psi_{m,2n+2} &= 2\psi_{m,2n+1} - 2 \end{aligned} \tag{17}$$

Por otro lado, para todo $i \in \{2n+1 | n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{aligned} \psi_{m,j} &= -\psi_{m,i} \iff j+3 = i - \psi_{m,i} \\ \psi_{m,j} &= -2 \qquad \Longleftarrow i - 1 - \psi_{m,i+2} < j < i - 3 - \psi_{m,i} \end{aligned} \tag{18}$$

Proposición 3. *Las sucesiones de $\mathbf{\Psi}$ tienen las mismas características que la sucesión (q_i) que construímos hace unas páginas. Con su definición, pueden demostrarse que se cumplen todos los aspectos que habíamos enlistado:*

- *Sus primeros elementos en el dominio natural son números de $(\pi_{m,k})$: $\psi_{m,0} = \pi_{m,0} = m$, $\psi_{m,1} = \pi_{m,1} = 2$ y $\psi_{m,2} = \psi_{m,2} = m+4$*

- *$\psi_{m,-n} \neq -2$ implica que $n - \psi_{m,-n}$ es impar.*
- *Se cumple la recursión $\psi_{m,2n} = \psi_{m,2n-1} + \psi_{2n-2} + 2$.*
- *$\psi_{m,-n} \neq -2$ implica que $\psi_{m,j} \neq -2$ con $j = \psi_{m,-n} - n$ y $\psi_{m,j} = 2\psi_{m,-n} - 2$.*

Teorema 9. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, la sucesión $(\psi_{m,k})$ es ultrarrecursiva.*

Demostración. La estrategia de esta demostración es probar:
i) Que toda subsucesión $(\psi_{m,i})_{i=-\psi_{m,2}}^{2} \equiv (D_i)_{\alpha+1}^{\beta}$ cumple las condiciones **1)**, **2)** y **3)** del Teorema 6.
ii) Que la extensión $(D_i)_{\alpha}^{\beta+1}$ cumple el conjunto de condiciones **(*)** y es igual a la subsucesión $(\psi_{m,i})_{i=-1-\psi_{m,2}}^{3}$.
Por el Corolario 7 y la Definición 3, si los dos puntos anteriores se cumplen, significa que toda extensión $(D_i)_{i=\alpha_n}^{\beta_n+1}$ es igual a la subsucesión $(\psi_{m,i})_{i=\alpha_n}^{\beta_n+1}$, lo que implica que esta subsucesión satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en

$$\{2n - 1 - \psi_{m,2n+2}, \ldots, 2n - 1 - \psi_{m,2n}\} \cup \{2n + 1, 2n + 2, 2n + 3\}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}^+$. Es decir, en todo el conjunto

$$\{a | a \leq 2 - 1 - \psi_{m,2}\} \cup \{b | 2 \leq b\} = \mathbb{Z} \setminus \{-m - 3, -m - 2, \ldots, 2\}$$

Pero $(\psi_{m,i})_{i=-m-4}^{2}$, por su definición, es igual a la subsucesión $(\pi_{m,i})_{i=-m-4}^{2}$ y para todo $-m - 4 < i \leq 1$, no es difícil comprobar que

$$-m - 4 \leq i - \psi_{m,i} + \operatorname{sgn} \psi_{m,i} \leq 2$$

Luego, por el Corolario 5, $(\psi_{m,i})_{i=-m-4}^{2}$ también satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en $\{-m - 3, -m - 2, \ldots, 2\}$. Por lo tanto, su extensión $(\psi_{m,k})$ satisface la recursión en

$$\mathbb{Z} \setminus \{-m - 3, -m - 2, \ldots, 2\} \cup \{-m - 3, -m - 2, \ldots, 2\} = \mathbb{Z}$$

Es decir, $(\psi_{m,k})$ es ultrarrecursiva.

Demostremos **i)**, denotando

$$\alpha \equiv -1 - \psi_{m,2} = -1 - (m+4), \quad \beta \equiv 2 \quad \text{y} \quad (D_i)_{i=\alpha+1}^{\beta} \equiv (\psi_{m,i})_{i=\alpha+1}^{\beta}.$$

1) Por definición, $0 < \psi_{m,2n} = D_\beta$ para todo $n > 0$;

2) $\boldsymbol{\alpha + 1} = -\psi_{m,2} < 2 - \psi_{m,2} = \beta - 2 - D_\beta \leq \boldsymbol{\beta - D_\beta}$.

3)

$$\begin{aligned}\sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = \sum_{i=-m-3}^{2} \psi_{m,i} &= \sum_{i=-m-3}^{-1} \psi_{m,i} + (m) + (2) + (m+4) \\ &= (-2)(m+3) + 2m + 6 = 0\end{aligned}$$

ii) Por el Teorema 7, la extensión $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ tiene los elementos

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \alpha - \beta - 1 = -4 - \psi_{m,2} = -\psi_{m,3} \\ D_{\beta+1} &= D_\beta + C = D_\beta - \sum_{i=\alpha+2}^{\beta - D_\beta} D_i \\ &= \psi_{m,2} - (\beta + 1 - \alpha - D_\beta - 2)(-2) \\ &= \psi_{m,n} + (\psi_{m,3} - \psi_{m,2} - 2)(2) = \psi_{m,2} + 4 = \psi_{m,3} \end{aligned}$$

Luego, $-D_\alpha = D_{\beta+1} = \psi_{m,3}$ y la extensión es igual a $(\psi_{m,i})_{i=\alpha}^{\beta+1}$. Esta sucesión satisface muchas de las condiciones **(*)** por definición; la menos evidente de todas es $\alpha + 3 = \beta - D_\beta$, que se demuestra a continuación:

$$\alpha + 3 = \beta - D_\beta \iff \boldsymbol{\alpha - \beta - 1} = -4 - D_\beta = \boldsymbol{-4 - \psi_{m,2}}$$

Y esta última igualdad es equivalente a $D_\alpha = -\psi_{m,3}$, que ya demostramos arriba. $\square$

Teorema 10. *Para toda sucesión* $(\psi_{m,k})$*, se cumple lo siguiente*

$$\psi_{m,2n+2} = 2^n(m+10) - 6 \tag{19}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$*. Y existe la siguiente solución para todo* $i = 2n + k$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *y*

$k \in \{2,3\}$:

$$\psi_{m,i} = 2^n(m+10) - 4 - 2(-1)^k \tag{20}$$

Demostración. Por las relaciones de recursión que cumple todo $(\psi_{m,n})$ —las Ecuaciones (17)— se llega a la siguiente

$$\begin{aligned}\psi_{m,2n+2} &= 2\psi_{m,2n+1} - 2 = 2(\psi_{m,2n} + 4) - 2 \\ &= 2\psi_{m,2n} + 6\end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Y, recursivamente, podemos realizar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\psi_{m,2n+2} &= 2(2\psi_{m,2n-2} + 6) + 6 = 2(2(2\psi_{m,2n-4} + 6) + 6) + 6 = \cdots \\ &= 2^{k+1}\psi_{m,2n-2k} + 6 + 2 \cdot 6 + 2^2 \cdot 6 + \ldots + 2^k 6 \\ &= 2^{k+1}\psi_{m,2n-2k} + 6\sum_{i=1}^{k} 2^i = 2^{k+1}\psi_{m,2n-2k} + 6(2^{k+1} - 1) \\ &= 2^{k+1}(\psi_{m,2n-2k} + 6) - 6\end{aligned}$$

Para todo $2n - 2k \geq 2$. Tomemos el caso $2n - 2k = 2 \implies k = n - 1$:

$$\psi_{m,2n+2} = 2^n(\psi_{m,2} + 6) - 6 = 2^n(m + 4 + 6) - 6 = 2^n(m+10) - 4 - 2(-1)^2$$

Finalmente, el segundo caso de la ecuación (20) se sigue de

$$\psi_{m,2n+3} = \psi_{m,2n+2} + 4 = 2^n(m+10) - 2 = 2^n(m+10) - 4 - 2(-1)^3 \qquad \square$$

Hemos encontrado una familia nueva de sucesiones ultrarrecursivas y su función explícita (en el dominio de los enteros mayores a 2). Específicamente, lo que hicimos fue encontrar un patrón que funcionaba (el de la sucesión (p_k)) y demostrar que el tratamiento equivalente de cualquier otra subsucesión $(\pi_{m,i})_{i=-m-4}^{2}$ funciona.

Pero el Teorema 7, como ya se mencionó, es mucho más general y no nos habla solamente de las sucesiones $(\psi_{m,k})$. Consideremos la siguiente subsucesión $(\pi_{2,i})_{i=-2}^{0}$:

$$(-2, -2, 2)$$

Ésta sucesión satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en 0 y -1. Y puede ser expandida hacia la derecha e izquierda usando los mismos métodos del Teorema 7; ello da lugar a lo siguiente:

$$(-4,-2,-2,2,2)$$

Denotemos como $(p_i)_{i=-3}^{1}$ a esta nueva sucesión. Notemos que una vez más la suma de ciertos términos consecutivos es cero $\sum_{i=-2}^{1} p_i = -2-2+2+2=0$, por lo que podemos nuevamente extender esta sucesión en ambos lados:

$$(-6,-4,-2,-2,2,2,6)$$

Esta vez no hay una nueva suma nula de elementos consecutivos, pero sí se puede volver a extender a la izquierda pues hay más de 6 elementos en la sucesión, que es justo lo que "pide" el último elemento.

$$(-6,-4,-2,-2,2,2,6,8)$$

Tras calcular algunas extensiones nuevas con asistencia computacional, se llega a lo siguiente:

$$(\ldots,-54_{-46}\rangle-26_{-8}\rangle-12_{-8}\rangle-6_{-4}\rangle-4_{-3}\rangle-2_{-1},2,2,6,8,12,22,26,50,54,106,\ldots)$$

En esta sucesión, como en cualquiera de la forma $(\psi_{2n+1,k})$, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{-\epsilon}^{\beta} D_i = 0 \iff D_{-\epsilon-2} \neq -2$$

Que quiere decir

Hay un número distinto de -2 siempre que existe la posibilidad.

Veamos que esto no se cumple en la sucesión $(\psi_{2,k})$

$$(\ldots,-2,-2,-2,\underset{\bigstar}{-10},-2,\boxed{-2,\underset{\bigstar}{-2},\underset{\bigstar}{-2},\boxed{-2,\boxed{-2,\ 2,}\ 2,}\ 6,}\ 10,\ 18,\ldots)$$

Los elementos encerrados son aquellos cuya suma es nula. Las estrellas simbolizan los lugares en los que pudo existir un elemento distinto a -2: sólo una de estas oportunidades es aprovechada. La siguientes que se presentan son éstas:

$$(\ldots, \underset{\bigstar}{-22}, -2, \boxed{-2_{-15}\rangle - 10_{-7}\rangle - 2_{-1},\ 2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 18,}\ 22, \ldots)$$

$$(\ldots, \underset{\bigstar}{-46}, -2, \boxed{-2_{-37}\rangle - 22_{-17}\rangle - 10_{-7}\rangle - 2_{-1},\ 2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 18,\ 22, 42,} 46, \ldots)$$

Y así sucesivamente, no hay más oportunidades *desperdiciadas*. Es de notar que se *ha saltado al* 22: ninguna caja lo encerró en un extremo, esto significa que no existe un ϵ tal que $\sum_{j=-\epsilon}^{5} \psi_{m,j} = 0$ y se explica considerando la existencia del $\mathbf{-22}$. De la misma manera no existen $\sum_{j=-\epsilon}^{i} \psi_{m,i} = 0$ para todo número i impar; esto también sucede en (p_i) y en general en todo $(\psi_{m,k})$. Veamos las condiciones iniciales de toda sucesión $(\pi_{m,k})$:

$$(\pi_{m,2n+1}) = (\ldots, -2_{-1},\ m,\ \ 2,\ \ m+4, \ldots)$$

Cuando m es un número impar, no existe ningún número natural ϵ tal que

$$\sum_{i=-\epsilon}^{0} \psi_{m,i} = (-2) \cdot \epsilon + m = 0.$$

Pues nunca es cierto que la suma de un par y un impar es cero. Similarmente:

$$\nexists \epsilon \mid \sum_{i=-\epsilon}^{1} \psi_{m,i} = (-2) \cdot \epsilon + (m) + (2) = 0.$$

Es sólo hasta

$$\sum_{i=-\epsilon}^{2} \psi_{m,i} = (-2) \cdot \epsilon + (m) + (2) + (m+4) = (-2) \cdot \epsilon + 2m + 6$$

que existe $\epsilon = m + 3$. Por lo que en la posición $-\epsilon - 2$ puede existir el elemento $\psi_{m,-\epsilon-2} = (-\epsilon - 2) - 3 = -m - 8 = -\psi_{m,4}$.[4] Por otro lado, si m es un par, siempre

[4] Si parece extraño por qué epsilon debe tener este valor, consultar el Lema 4.1. En este caso

existe el entero $\epsilon = \frac{m}{2}$ tal que

$$\sum_{i=-\epsilon}^{0} \psi_{m,i} = (-2) \cdot \epsilon + m = -2 \cdot \frac{m}{2} + m = 0.$$

Tomar esta oportunidad desde "el inicio" cuando $m = 2$, conduce a la sucesión (p_i) que escribimos arriba.[5] Note el hecho de que no estamos escribiendo '(p_k)', con subíndice 'k', pues esa notación la reservamos para todas las sucesiones que están definidas en el conjunto de los enteros. Aunque es cierto que la sucesión (p_i) parece cumplir patrones muy similares (¡no todos!) a los que satisfacen las sucesiones $(\psi_{m,k})$, no hemos demostrado que dichos patrones van a conservarse si seguimos extendiendo la sucesión.

La decadencia de una sucesión

En esta sección veremos los resultados de expandir la sucesión $(-2_{-m-1}\rangle -2_{-1}, 2m)$ donde $2m \neq 2$ es un par positivo. Para $2m = 4$, la siguiente sucesión resulta de tomar todas las oportunidades en las que se puede extender con un número negativo distinto a -2:

$$(-74_{-65}\rangle - 50_{-42}\rangle - 25_{-19}\rangle - 11_{-7}\rangle - 7_{-5}\rangle - 5_{-4}\rangle - 2_{-1}, 4, 2, 8, 4, 22, 11, 44, 25, 94, -22)$$

Se puede comprobar que todos los elementos a_{n+1} (excepto el que está en la posición -65) satisfacen la recursión $\mathfrak{O}$:

$$a_{n+1} = |a_n| + \sum_{i=0}^{|a_n|-1} a_{n-i\operatorname{sgn}\, a_n}$$

particular, se puede explicar con palabras: la magnitud de $\psi_{m,-\epsilon-2}$ tiene que ser igual a la cantidad de elementos negativos $(-\epsilon - 2)$ y la de números positivos (3).

[5]Está encomillado porque a estas estructuras les es indiferente nuestro sentido temporal. Todas las sucesiones ultrarrecursivas que pueden existir **ya** existen desde su definición, nosotros sólo estamos encontrando algunas en el camino.

Lo interesante es que en esta sucesión aparece un número negativo a la derecha; teniendo en cuenta que anteriormente todas nuestras extensiones a la derecha nos entregaban números positivos. Esto puede representar una especie de "muerte" para la sucesión —haciendo alusión a las sucesiones tipo Meta-Fibonacci, que tienen un proceso de muerte— pues no es posible expandir nuevamente a la derecha como lo hemos hecho hasta ahora (empleando el Lema 4.3).

Esta sucesión también representa el final de nuestras aspiraciones de encontrar una nueva familia de sucesiones ultrarrecursivas como (p_i) (donde se toman todas las oportunidades de extender con un negativo distinto a -2).

Definición 4. Para toda subsucesión $(\pi_{m,i})_{i=\alpha}^{\beta}$ (con $\alpha = -1 - \lceil \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\beta} \pi_{m,i} \rceil$ y β mayor o igual a 0), definimos como **extensión fuerte** a la extensión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ definida por $\mathfrak{D}$ en $\mathcal{Q} \setminus \{k+1\}$ donde k es el mayor número entero negativo que no pertenece a $\mathcal{Q}$[6] tal que para todo $n+1 > 0$:

$$n + 1 \in \mathcal{Q} \iff (n \in \mathcal{Q} \wedge D_n > 0).$$

Y para todo $-n < \alpha$ (en todo lo que se dice abajo, t y $t+1$ son naturales pertenecientes a $\mathcal{Q}$):

$$-n \in \mathcal{Q} \iff [t + 1 - D_t \leq -n \vee (D_{t+1} \leq 0 \wedge \Sigma_{i=-n+1}^{t} D_i > 0)].$$

Tal que D_{-n} puede tomar los siguientes valores (δ es un número natural)

$$D_{-n} = -n - 1 - \delta \iff \left(\delta + 1 \in \mathcal{Q} \wedge \sum_{i=-n+2}^{\delta} D_i = 0\right)$$
$$D_{-n} = -2 \iff \nexists \delta \in \mathcal{Q} | \sum_{i=-n+2}^{\delta} D_i = 0$$

Proposición 4. *Toda sucesión $(\psi_{m,k})$ es la extensión fuerte de $(\pi_{m,i})_{i=\alpha}^{2}$.*

[6] Puede o no existir. Si no existe, D_i está definida por $\mathfrak{D}$ en todo $\mathcal{Q} \setminus \varnothing = \mathcal{Q}$.

Conjeturas. En un estudio asistido por computadora, se encontraron los siguientes resultados acerca de las extensiones fuertes de $(\psi_{m,i})_{i=\alpha}^{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. En cada punto se omite la escritura del subíndice '$i = \alpha$', entendiéndose que existe un límite inferior con un valor particular (Def. 4).

- La extensión de $(\pi_{2,i})^1$ es la única extensión fuerte de una sucesión de tipo $(\pi_{2m,i})^n$ (con $n \neq 3$) que no muere, o bien, que da lugar a una sucesión ultrarrecursiva.

- Para todo $n \leq 5$, la extensión fuerte de toda sucesión de tipo $(\pi_{2m+1,i})^n$ es ultrarrecursiva.

- Para todo $K \in \mathbb{Z}^+$, si $6K \leq n \leq 6K + 2$, todas las extensiones fuertes de $(\pi_{m,i})^n$ mueren. Si $6K + 3 \leq n \leq 6k + 5$, las extensiones fuertes de $(\pi_{2m+1,i})^n$ son ultrarrecursivas.

Naturalmente, estas extensiones nacen y mueren con cierto orden y regularidad. Siendo la extensión fuerte de $(\pi_{2,i})^1$ la excepción a toda regla.

Nuestra definición de extensión fuerte continúa con esta actitud de *dictar una regla que decida por nosotros en cada ocasión.* Claro que puede decidirse no hacer la extensión hacia la izquierda que "mataría" a la sucesión. Puede averiguarse qué sucede si se toman sólo la mitad de las oportunidades de extender a la izquierda (una sí y la siguiente no). Se puede jugar de maneras incontables con estas estructuras. [47]

"Crea una forma bella, porque una idea más bella todavía vendrá a alojarse en ella"

6. Sucesiones ultrarrecursivas periódicas

"Descubierto un extremo se fija el otro;
el germen de ayer encierra las flores de mañana"

—Ignacio Ramírez

Considere el caso de la extensión fuerte de $(\pi_{6,i})^0$ y su descenso prematuro:

$$(-6, \quad -2, \quad -2, \quad -2, \quad -2, \quad 6, \quad -2)$$

Esta extensión es la única de su tipo cuyo último término es -2, como consecuencia del lema siguiente, cuya demostración se encuentra en los Apéndices.

Lema 1. *Sea (D_i) la extensión fuerte de $(\pi_{2n,i})^0$, entonces:*
i) *$D_1 = 2$ si $0 < n < 3$.*
ii) *$D_1 = 1 - n$ si $n \geq 3$.*

Por otro lado, sabemos (Lema 4.2) que si el último elemento de una sucesión es $a_n = -2$, esto representa la oportunidad de extender la sucesión a la derecha con cualquier número (con la certeza de que $\mathfrak{O}$ se cumple en $n + 1$). Por lo tanto, la sucesión de arriba puede ser *revivida.* Demos un nombre a todas las sucesiones que cumplen las condiciones necesarias para ser extendidas a la derecha.

Definición 1. Decimos que una sucesión $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ es una sucesión libre si satisface las siguientes condiciones:

1) (D_i) satisface la recursión $\mathfrak{O}$ en todo su dominio, excepto en el primer elemento del dominio (si éste existe).

2) $a_\beta = -2$.

Definición 2. Sean $(a_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ y $(b_i)_{i=\gamma}^{\delta}$ dos sucesiones tal que $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Definimos y denotamos dos posibles conjunciones de éstas como sigue:

$$((a_i) \triangleright (b_i)) \equiv (a_i) \cup [\mathrm{T}_{\beta+1-\gamma} \circ (b_i)]$$

$$((a_i) \triangleleft (b_i)) \equiv [\mathrm{T}_{\gamma-1-\beta} \circ (a_i)] \cup (b_i)$$

Lema 2. *Sean $(a_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ y $(b_i)_{i=\gamma}^{\delta}$ dos sucesiones libres tal que $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, sus conjunciones $((a_i) \triangleright (b_i))$ y $((a_i) \triangleleft (b_i))$ también lo son.*

Corolario 1. *Sea $(a_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ una sucesión libre tal que $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Y sea $(A_i)_{i=\gamma}^{\delta}$ el resultado de $n \in \mathbb{Z}^+$ conjunciones de (a_i) consigo misma, (A_i) es libre.*

Corolario 2. *Sea $(P_i)_{i=1}^{7} = (-6, -2, -2, -2, -2, 6, -2)$ y sea $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que $Q_i = P_{\rho_7(i)}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ —donde $\rho_n(x)$ es la función residuo (Definición A.33)—. (Q_k) es ultrarrecursiva.*

La demostración del lema se encuentra en los Apéndices. Los dos corolarios usan exactamente las mismas ideas y procedimientos que fueron usados durante el Teorema 4.3 y el Lema 4.2 para demostrar que $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$ es ultrarrecursiva y que $(-2)_{i=s}^{t}$ satisface $\mathfrak{D}$ en todo $i \neq s$.[1] Irónicamente, ese teorema es un caso particular de este primer corolario.

El segundo corolario nos dice que la sucesión periódica

$$(\ldots, -6, -2, -2, -2, -2, 6, -2, -6, -2, -2, -2, -2, 6, -2, \ldots)$$

también es ultrarrecursiva. Resulta interesante considerar que todas las siguientes son sucesiones libres (aunque no provienen de una extensión fuerte)

$$(-2, -6, -2, -2, -2, 6, -2) \qquad (-2, -2, -6, -2, -2, 6, -2, -2)$$

[1]Básicamente (Q_k) es ultrarrecursiva porque para todo $k \in \mathbb{Z}$, existe una subsucesión $(Q_i)_{i=\gamma}^{\alpha}$ (donde $\gamma < k < \alpha$) que es libre. Por lo tanto, k cumple la recursión en la subsucesión, implicando que la cumple en la extensión (Q_k).

Y, evidentemente, pueden dar lugar a sucesiones ultrarrecursivas. Sin embargo, se puede hacer una **unión estricta** —y no una conjunción— y economizar espacio para dar lugar a las siguientes sucesiones:

$$(\ldots, -2, -6, -2, -2, -2, -6, -2, -6, -2, -2, -2, 6, -2, -6, \ldots)$$
$$(\ldots, -2, -2, -6, -2, -2, 6, -2, -2, -6, -2, -2, 6, -2, -2, -6, \ldots)$$

Que a todas luces cumplen todos los requisitos para ser ultrarrecursivas (se pueden agrupar elementos consecutivos para formar las sucesiones libres de arriba).

Es posible identificar las condiciones que permiten la existencia de estas sucesiones ultrarrecursivas periódicas y generalizar este comportamiento. Para ello es conveniente contar con la siguiente definición, que ayudará a independizarnos de la función residuo y de la conjunción.

Definición 3. Sea una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ con periodo $p \in \mathbb{Z}^+$, definimos y denotamos a su sucesión unitaria como la sucesión $(\dot{a}_n)_{n=1}^{p}$ que contiene p elementos consecutivos de la sucesión.

Por definición, existen p distintas sucesiones unitarias (una por cada elemento inicial). Según el contexto, se convendrá usar alguna en específico. La definición cuenta con la suficiente generalidad para redactar el siguiente teorema.

Teorema 1. *Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe una sucesión ultrarrecursiva (τ_k) con periodo $4m+2$ tal que su sucesión unitaria contiene 'm' elementos con valor $-4m-2$, 'm' con valor $2m+2$ y los restantes tienen valor igual a -2. Y se cumple $\tau_k \neq -2 \implies \tau_{k-1} = -2$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Debido a que (τ_k) es periódica, la suma de cualesquiera $4m+2$ elementos consecutivos es

$$\sum_{i=1}^{4m+2} \dot{\tau}_i = m(-4m-2) + m(4m+2) + (2m+2)(-2) = -4m-4.$$

Si $\tau_k \neq -2$, sabemos que su antecesor $\tau_{k-1} = -2$ lo genera sin importar su valor. Si $\tau_k = -2$, mostremos que si su antecesor es $\tau_{k-1} = \pm(4m+2)$, también lo genera.

$\xi((\tau_k), k, \pm 1)$ es igual al valor absoluto de τ_{k-1} más la suma de '$|\tau_{k-1}|$' elementos consecutivos de la sucesión: aunque estos elementos consecutivos pueden ser antecesores o sucesores, $|\tau_{k-1}| = 4m+2$ es exactamente el número de elementos que tiene la sucesión unitaria, luego:

$$\xi((\tau_k), k, \pm 1) = |\tau_{k-1}| + \sum_{i=1}^{4m+2} \dot{\tau}_i = 4m + 2 + (-4m - 4) = -2$$

Por lo tanto $\tau_{k-1} = \pm(4m+2) \implies \tau_k = -2$ y la prueba está completa. $\square$

Algo a notar de este teorema, es que no depende de la posición en la que se encuentren los elementos con respecto a los demás. Lo único que pide es que todos los elementos "especiales" estén precedidos por un -2. Esto implica que las dos sucesiones de las que hablábamos arriba cumplen con todos los requisitos: son casos del teorema cuando $n = 1$: en cualquier sucesión unitaria que se tome hay 1 elemento con valor $4+2$, 1 con valor $-4-2$ y los restantes son -2, pero lo más importante es que **nunca están juntos** 6 **y** -6.

Familias caóticas de sucesiones

En esta sección se responde la pregunta

¿Qué pasa si extendemos la siguiente sucesión con un número positivo?

$$(\ldots, -2, 6, -2, -6, -2, -2, -2, 6, -2)$$

Y la pregunta más general ¿Qué sucede si extendemos "la mitad de una sucesión" como las que describe el Teorema 1? La respuesta **no** es: *encontramos otra sucesión muy ordenada, con una solución explícita*. Hacer esto resulta en familias de sucesiones con comportamientos muy sensibles a las condiciones iniciales.

Como ya es costumbre: antes de plantear estas preguntas y responderlas, daremos un par de definiciones.

Definición 4. Para toda sucesión (a_k) con periodo p, denotamos como $(\breve{a}_j)_{j=-\infty}^{\beta}$ a la subsucesión infinita de (a_k) cuyo último elemento es $a_\beta = \dot{a}_p$ el último elemento de la sucesión unitaria. También se denotará a la misma sucesión sólo como $(\breve{a}_j)^\beta$ o $(\breve{a}_j)$.

Consideremos la sucesión (τ_k) con sucesión unitaria $(-6, -2, -2, -2, 6, -2)$. Sabemos que la sucesión $(\breve{\tau}_j)^{-1}$ es una sucesión libre, infinita hacia la izquierda, dispuesta a recibir cualquier número hacia la derecha. La siguiente matriz representa las sucesiones que emergen de cada elección de ese valor inicial.

$$\begin{pmatrix}
(\breve{\tau}_j) & 1 & 2 & 5 & 17 & 24 & 47 & 93 & 174 & 321 & \dots \\
(\breve{\tau}_j) & 2 & 2 & 6 & 18 & 34 & 62 & 118 & 218 & 398 & \dots \\
(\breve{\tau}_j) & 3 & 10 & 19 & 35 & 60 & 113 & 215 & 398 & 731 & \dots \\
(\breve{\tau}_j) & 4 & 10 & 20 & 36 & 70 & 128 & 240 & 442 & 820 & \dots \\
(\breve{\tau}_j) & 5 & 10 & 21 & \mathbf{33} & 68 & 127 & 229 & 426 & 793 & \dots \\
(\breve{\tau}_j) & 6 & 10 & 22 & 34 & 66 & 122 & 234 & 430 & 798 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Lo primero que salta a la vista es que, a diferencia de las familias de sucesiones $\mathbf{\Pi}$ y $\mathbf{\Psi}$, no siempre se cumple que los elementos crecen de arriba hacia abajo en una misma columna $(\pi_{m+1,i} > \pi_{m,i})$ y las primeras diferencias no son estrictamente crecientes $(\Delta\pi_{m,i+1} > \Delta\pi_{m,i}$, esto se viola en la primera fila).

El siguiente teorema describe el crecimiento de ésta y cualquiera otra sucesión que haya sido construida usando una sucesión del Teorema 1.

Teorema 2. *Sea (a_i) una sucesión periódica a la izquierda con una sucesión de tipo $(\breve{\tau}_j)^{-1}$ de periodo $4m+2$. Si esta sucesión satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio, dados dos elementos $0 < n < a_n < a_{n+1}$, el siguiente es*

$$a_{n+2} = a_{n+1}\mu_m + a_n(2-\mu_m) + (3-\mu_m) + \Delta Y_n \tag{1}$$

Donde $\mu_m = \frac{4m+1}{2m+1}$ *y la sucesión* (Y_i) *es dependiente de la sucesión* (R_i)*, con valores:*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{R_n} (\dot{\tau}_{4m+3-i} + 3 - \mu_m) \qquad R_n = \rho_{4m+2}(a_n - n - 1) \tag{2}$$

La demostración se encuentra en los Apéndices. Lo que más resalta de este resultado es que la sucesión (R_n) no parece tener ningún orden para la elección de cualquier $(\tau_j)^{-1}$ con periodo mayor a 2. Al final del capítulo se muestran los valores de (R_n) cuando $(\dot{\tau}_j) = (-6, -2, -2, -2, 6, -2)$ y $a_0 = m$ con $m \in \mathbb{Z}^+$. El caso cuando el periodo es exactamente 2, representa una sucesión muy conocida por nosotros, aquella en donde la sucesión infinita y periódica que va a la izquierda es $(\dot{\tau}_j) = (-2, -2)$. Cuando este es el caso,

$$\mu_0 = \frac{4 \cdot 0 + 1}{2 \cdot 0 + 1} = 1 \implies Y_n = \sum (\dot{\tau}_{3-i} + 2) = 0$$

y el teorema anterior nos reitera una expresión que ya habíamos demostrado:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2.$$

Es posible demostrar que la familia de la página anterior contiene sucesiones ultrarrecursivas. Puede hacerse demostrando que en la Ecuación (1), cada nuevo valor es mayor al anterior, por lo que siempre se generarán nuevos enteros positivos a la derecha.

Nuestra intención es encontrar nuevas familias de sucesiones ultrarrecursivas, empleando más sucesiones periódicas como las que predice el Teorema 1. A continuación, daremos ejemplos de como construir dichas sucesiones usando las siguientes sucesiones periódicas hacia la izquierda

$$\begin{aligned}(A_j)^{-1} =& (\ldots, -10, -2, \mathbf{-10}, -2, -2, 10, -2, -2, 10, -2, \ldots)\\(B_j)^{-1} =& (\ldots, -14, -2, \mathbf{-14}, -2, -2, \mathbf{-14}, -2, 14, -2, -2, 14, -2, 14, -2)\end{aligned}$$

De acuerdo al Teorema 1 y al Corolario 5.7, estas sucesiones satisfacen $\mathfrak{O}$ en todo su dominio menos en los elementos que están a la derecha de los números escritos en negrita: estos valores no alcanzan a generar a su sucesor, pues no hay suficientes elementos a la derecha.

Es necesario que la sucesión libre que conjuntemos a la derecha de éstas sucesiones tenga las siguientes propiedades, respectivamente:

i) Que la suma de sus primeros 2 elementos sea -12.

ii) Que la suma de sus primeros 2 elementos sea -16 y que la suma de sus primeros 5 elementos sea -34.

Esto se puede verificar sumando los elementos que están a la izquierda de los números en negrita.

Sorprendentemente, se pueden hallar sucesiones con estas especificaciones a partir de la misma sucesión *muerta* con la que empezó este capítulo: la extensión fuerte de $(\pi_{6,i})^0$: $(-6, \quad -2, \quad -2, \quad -2, \quad -2, \quad 6, \quad -2)$.

Al final del capítulo, se muestran las familias de sucesiones generadas usando (A_j), (B_j) y dos de las sucesiones libres que ofrece el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea la sucesión $(\chi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, cuyos elementos distintos de -2 son $\chi_{2n+1} = -\chi_{-2n} = 4n+2$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.*

$$(\ldots, -14, -2, -10, -2, -6, -2, -2, -2, -2,\ 6, -2,\ 10, -2,\ 14, \ldots)$$

Esta sucesión es ultrarrecursiva. Y toda subsucesión $(\chi_i)_{i=-2n}^{2n+2}$ es libre.

Demostración. Asumamos que para algún natural m, la subsucesión $(\chi_i)_{i=-2m}^{2m+2}$ es libre y la suma de sus elementos es $\sum_{i=-2m}^{2m+2} \chi_i = -4m - 6$ (compruebe que esto se cumple para $m = 1$). La tarea es mostrar que esto implica que la subsucesión $(\chi_i)_{i=-2m-2}^{2m+4}$ también es libre y que la suma de sus elementos es $-4(m+1) - 6$.

Debemos probar que en la subsucesión

$$(\chi_i)_{i=-2m-2}^{2m+4} = (-4m - 6, -2, \ldots, 4m + 6, -2)$$

todos los elementos (excepto el primero) son generados por su antecesor mediante $\mathfrak{O}$.

Por hipótesis, esto es así para todos los elementos que se representan con '. . .' y es trivial para todos los sucesores de -2, por lo que sólo debemos probar que $\chi_{-2m-2} = -4m-6$ produce a su sucesor $\chi_{-2m-1} = -2$ y lo mismo para $\chi_{2m+3} = 4m+6$.

Podemos hacer esto usando la notación sigma y calculando las funciones ξ correspondientes, o podemos notar que en $(\chi_{-2m-2}, \ldots, \chi_{2m+3})$ hay exactamente $4m+6$ elementos. Las funciones $\xi((\chi_i), -2m-2, -1)$ y $\xi((\chi_i), 2m+3, 1)$ son la suma de los valores absolutos de $|\chi_{-2m-2}|$ y $|\chi_{2m+3}|$ junto con otros '$4m+6$' elementos. Por hipótesis, '$4m+3$' de estos elementos suman $-4m-6$ y los tres restantes son los mismos χ_{-2m-2}, χ_{2m+3} (que son inversos aditivos) y $\chi_{-2m-1} = -2$. Por lo que las dos funciones dan como resultado

$$|\chi_{-2m-2}|+(-2)+(-4m-6) = |\chi_{2m+3}|+(-2)+(-4m-8) = 4m+4+(-4m-6) = -2.$$

Observe que la suma de todos los elementos de esta subsucesión es la suma anterior más -4. Luego, por el Principio de Inducción, todas las subsucesiones $(\chi_i)_{i=-2n}^{2n+2}$ con $n \in \mathbb{Z}$ son libres y la suma de sus elementos es $-4n-6$. $\square$

Sé que no se nos permite tener favoritas, pero la sucesión (χ_k) es la que mejor expresa una naturaleza ultrarrecursiva. Es sencilla, predecible, pero no precisamente periódica. Cada elemento positivo se conjuga con su equivalente negativo para "generar ese -2 a su derecha" y viceversa. Más allá, cada elemento de mayor magnitud se beneficia del trabajo que hicieron sus predecesores o sucesores.

El pequeño comportamiento local que se presenta en la extensión fuerte de $(\pi_{6,i})^0$, es efectivo lo suficiente para ser imitado a gran escala. Esto nos da la lección de que cualquier forma de organización que encuentra la manera de cumplir sus ciclos de manera regular, está destinada a prevalecer. [48]

"The past, the future, dwelling there, like space, inseparable together"

$$\begin{pmatrix}
0&0&2&1&1&5&2&4&0&4&0&2&1&4&4&3&1&5&2&3&0&1&3&5&4&3&5&5&3&1&2&0&1&5&\dots\\
1&0&3&2&5&2&3&0&0&1&1&0&1&0&1&0&5&4&5&2&0&3&1&0&5&4&4&5&1&0&2&1&5&4&\dots\\
2&2&4&1&1&5&4&0&3&0&2&4&3&5&5&0&0&0&3&3&3&0&2&0&3&5&3&4&2&2&1&0&0&3&\dots\\
3&2&5&2&5&2&5&2&1&4&5&0&0&1&1&0&5&2&4&5&4&1&2&1&4&3&1&2&5&2&1&4&0&3&\dots\\
4&2&0&0&4&2&1&0&0&5&5&1&2&3&2&1&3&1&2&4&1&4&4&0&5&4&4&3&5&1&4&2&2&3&\dots\\
5&2&1&0&2&3&0&3&4&1&3&2&4&3&3&0&1&0&3&2&3&2&1&4&4&1&2&1&2&5&5&0&4&1&\dots\\
0&5&5&2&2&0&5&1&4&1&3&5&4&0&0&1&1&1&4&4&4&1&3&1&4&0&4&5&3&3&2&1&1&4&\dots\\
1&4&5&2&5&2&5&2&1&4&5&0&0&1&1&0&5&2&4&5&4&1&2&1&4&3&1&2&5&2&1&4&0&3&\dots\\
2&0&1&3&1&5&4&2&5&2&2&0&5&3&2&5&1&1&4&5&4&5&1&3&4&2&4&5&5&1&0&5&3&2&\dots\\
3&0&2&3&4&3&0&1&1&0&1&4&3&2&2&3&3&4&4&1&2&5&3&4&3&0&4&1&3&0&5&4&3&0&\dots\\
4&0&3&0&4&0&1&4&4&3&5&5&0&2&3&5&1&3&0&2&4&2&0&0&5&2&2&1&3&1&0&1&4&5&\dots\\
5&0&4&1&3&2&2&1&2&1&0&5&2&3&1&2&5&4&2&3&0&3&2&3&0&1&2&1&0&5&3&0&0&3&\dots\\
0&3&3&2&4&0&5&3&5&0&2&2&3&3&3&0&0&0&1&0&4&5&5&3&2&1&3&3&1&3&0&2&2&1&\dots\\
1&2&3&2&1&2&3&0&2&1&5&0&3&0&5&2&2&3&3&0&1&4&4&3&0&3&2&1&0&1&4&1&2&3&\dots\\
2&4&2&3&5&1&4&0&3&0&0&2&5&5&5&2&0&0&5&3&1&5&5&3&2&5&5&4&2&2&1&3&4&4&\dots\\
3&4&3&4&1&0&4&3&0&5&4&1&5&4&1&2&4&3&1&2&5&0&3&0&5&0&5&2&3&0&1&0&3&2&\dots\\
4&4&4&5&3&5&2&0&3&2&4&2&5&3&3&2&2&4&5&3&1&3&5&5&4&4&0&5&1&3&2&1&3&5&\dots
\end{pmatrix}$$

Con $(\dot{\tau}_j) = (-6, -2, -2, -2, 6, -2)$, la fila m-ésima representa la sucesión (R_n) cuando $a_0 = m$.

$$
\begin{pmatrix}
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 1 & 2 & 5 & 21 & 48 & 83 & 169 & 302 & 589 & 1121 & 2128 & 4075 & 7753 & 14770 & 28149 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 2 & 2 & 6 & 22 & 50 & 86 & 166 & 318 & 606 & 1166 & 2222 & 4214 & 8030 & 15318 & 29170 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 3 & 14 & 15 & 31 & 80 & 141 & 271 & 518 & 987 & 1891 & 3584 & 6841 & 13031 & 24834 & 47299 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 4 & 14 & 16 & 44 & 82 & 168 & 300 & 586 & 1124 & 2132 & 4054 & 7736 & 14736 & 28074 & 53480 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 5 & 22 & 33 & 65 & 116 & 223 & 445 & 846 & 1613 & 3065 & 5840 & 11127 & 21197 & 40382 & 76937 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 6 & 22 & 34 & 58 & 122 & 242 & 462 & 870 & 1650 & 3146 & 6014 & 11446 & 21806 & 41542 & 79146 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 7 & 22 & 35 & 59 & 124 & 237 & 443 & 866 & 1647 & 3139 & 5972 & 11369 & 21679 & 41298 & 78663 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 8 & 22 & 36 & 72 & 146 & 260 & 508 & 958 & 1836 & 3508 & 6682 & 12712 & 24228 & 46154 & 87924 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 9 & 22 & 37 & 73 & 140 & 267 & 501 & 966 & 1849 & 3513 & 6696 & 12755 & 24301 & 46302 & 88205 & \dots \\
(A_j) & (\chi_i)_{i=-4}^{5} & 10 & 18 & 46 & 78 & 150 & 286 & 546 & 1042 & 1986 & 3794 & 7218 & 13762 & 26206 & 49926 & 95098 & \dots
\end{pmatrix}
$$

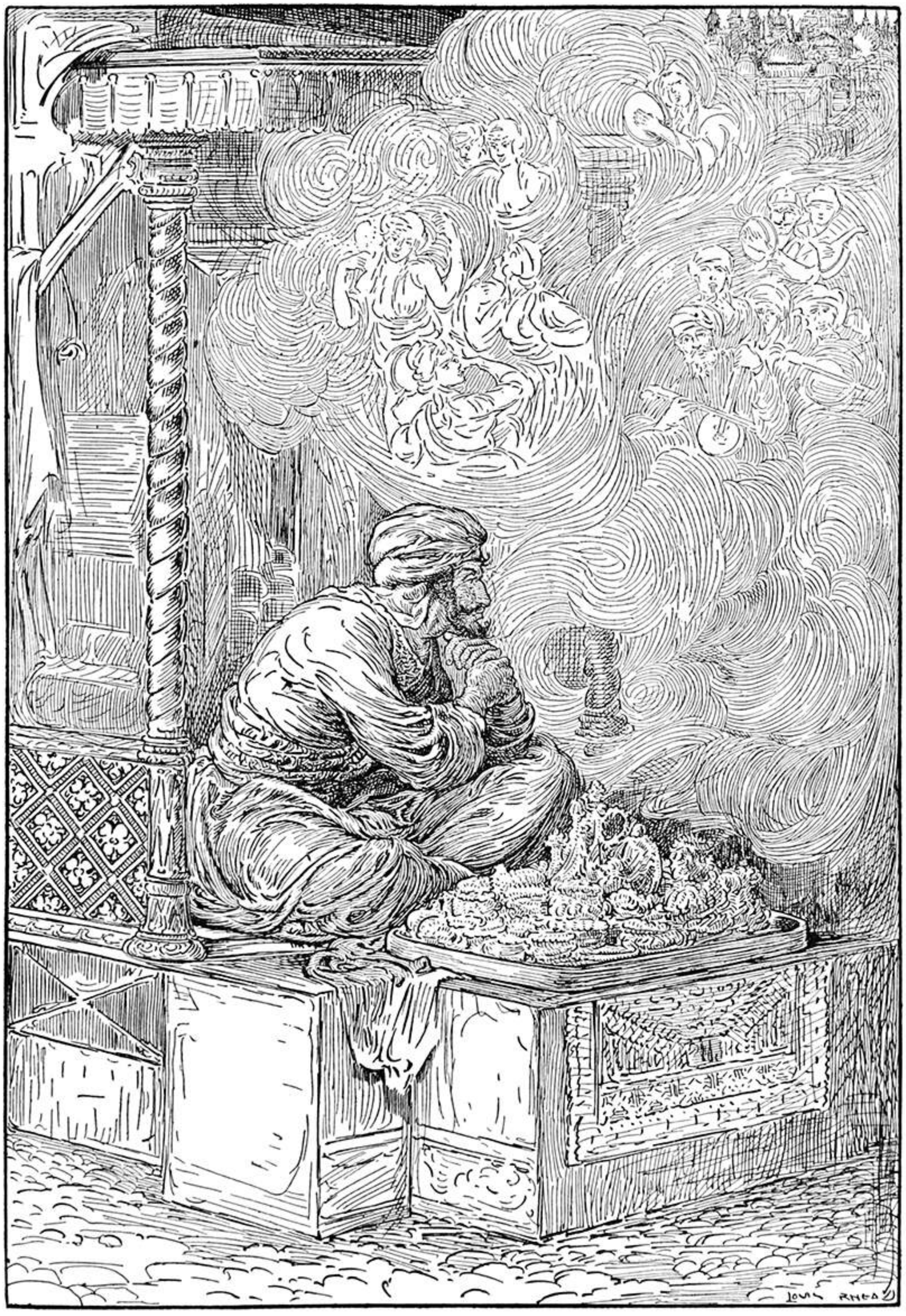
Familia 1. Donde se ha empleado la sucesión libre $(\chi_i)_{i=-4}^{5}$, que satisface todos los requerimentos para conjuntarse con (A_j).

$$
\begin{pmatrix}
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 1 & 2 & 5 & 25 & 60 & 103 & 201 & 402 & 749 & 1477 & 2852 & 5495 & 10641 & 20506 & 39633 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 2 & 2 & 6 & 26 & 78 & 122 & 238 & 474 & 902 & 1758 & 3394 & 6570 & 12674 & 24478 & 47270 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 3 & 18 & 19 & 39 & 104 & 173 & 351 & 706 & 1347 & 2619 & 5044 & 9741 & 18799 & 36318 & 70107 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 4 & 18 & 20 & 56 & 122 & 236 & 456 & 854 & 1680 & 3244 & 6250 & 12100 & 23352 & 45070 & 87052 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 5 & 30 & 45 & 89 & 160 & 311 & 629 & 1214 & 2317 & 4505 & 8672 & 16791 & 32409 & 62574 & 120869 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 6 & 30 & 46 & 78 & 166 & 334 & 646 & 1262 & 2438 & 4694 & 9082 & 17510 & 33830 & 65330 & 126162 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 7 & 38 & 83 & 147 & 272 & 513 & 1007 & 1958 & 3767 & 7291 & 14052 & 27153 & 52463 & 101298 & 195635 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 8 & 38 & 84 & 148 & 274 & 532 & 1056 & 2010 & 3884 & 7516 & 14486 & 27992 & 54084 & 104414 & 201624 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 9 & 38 & 85 & 149 & 292 & 563 & 1089 & 2090 & 4053 & 7825 & 15100 & 29175 & 56313 & 108778 & 210061 & \dots \\
(B_j) & (\chi_i)_{i=-6}^{7} & 10 & 38 & 86 & 138 & 298 & 546 & 1086 & 2054 & 3970 & 7682 & 14834 & 28662 & 55350 & 106902 & 206426 & \dots
\end{pmatrix}
$$

Familia 2. Donde se ha usado la sucesión libre $(\chi_i)_{i=-6}^{7}$. Es posible demostrar que ésta y pasada son familias de sucesiones ultrarrecursivas; sin embargo, una pregunta abierta es cuáles son las condiciones que debe cumplir la sucesión libre que se ha de conjuntar para dar lugar a una sucesión ultrarrecursiva. Véase el Capítulo 9. CONSIDERACIONES FINALES.

Parte III

ARGUMENTATIO



Un hombre sentado con las piernas cruzadas, meditando y observando las figuras translúcidas que emergen del humo para bailar y tocar música.

7. Transformaciones de sucesiones

Hemos estudiado las relaciones de recursión como una propiedad que se presenta en cierta parte del dominio de una sucesión. Y hemos hablado de las sucesiones como funciones cuyo dominio no necesariamente es el conjunto de los naturales.

Esto nos permitió llegar a resultados nuevos y significativos. Ahora sabemos, por ejemplo, que si la sucesión de Hofstadter está bien definida, ello implica la existencia de una familia infinita de sucesiones que satisfacen relaciones de recursión análogas.

Otros resultados de capítulos pasados nos dan el siguiente mensaje:

Si una sucesión satisface una relación de recursión en alguna parte de su dominio, existen transformaciones de sucesiones que "dejan tranquila" a la recursión.

Muchas otras transformaciones alteran por completo la sucesión y su recursión, pero lo más común es que una imagen del dominio recursivo albergue nuevas relaciones. Por ello puede ser motivador estudiar lo que sucede con cualquier sucesión tras la aplicación de todo tipo de transformaciones.

Las transformaciones de sucesiones pueden entenderse como el ambiente al que está sometida una sucesión: Sea (S_i) una sucesión cuyos elementos no conservan ninguna relación aparente, pueden estar aleatoriamente distribuidos y definidos. Sea Z una transformación de sucesiones con sus respectivas eigensucesiones; es claro que, por el carácter aleatorio de (S_i), difícilmente será una de esas eigensucesiones... nuestra intuición nos dice que:

$$\mathrm{Z} \circ (S_i) \neq (S_i)$$

Pero los primeros capítulos de este trabajo son evidencia de que aún en las condiciones iniciales más arbitrarias, algunas funciones, transformaciones (o condiciones que se repiten de manera periódica) llevan a lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Z}^n \circ (S_i) = (E_i) \colon \mathrm{Z} \circ (E_i) = (E_i)$$

Es decir, después de una larga serie de transformaciones, la sucesión (S_i) puede convertirse en una eigensucesión (E_i) de la transformación en cuestión. Este tipo de mecanismos están presentes en la naturaleza y ello se puede expresar de maneras diversas:

- (E_i) es similar a sí mismo, visto desde el espejo de Z.
- Una vez que $\mathrm{Z}^n \circ (A_i) \equiv (B_i)$ adquiere cierta identidad bajo el acompasamiento de Z —es decir, una vez que $\mathrm{Z} \circ (B_i) \approx (B_i)$—, no puede abandonar su individualidad si todo lo que lo afecta es Z.
- (E_i) es un atractor o nada resiste la acción moldeadora de Z.

Ante una serie de transformaciones que ocurren de manera periódica, los elementos sometidos a ella pueden desarrollar otras estrategias para conservarse a sí mismos. La siguiente es un ejemplo:

$$\mathrm{Z} \circ (D_i) = (G_i) \colon \quad \mathrm{Z} \circ (G_i) = (D_i)$$

Transformación de Lucas

Una sucesión de Lucas se define como una sucesión de números enteros que satisface una recursión como la siguiente

$$A_n = P \cdot A_{n-1} + Q \cdot A_{n-2}. \tag{1}$$

Donde P y Q también son números enteros. Por lo tanto, dicha sucesión permanece invariante ante la transformación de Lucas:

$$\mathrm{G} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i\in\mathcal{P}} \colon (n \in \mathcal{P} \iff n-1, n-2 \in \mathcal{Q}) \wedge B_n = PD_{n-1} + QD_{n-2} \quad (2)$$

Teorema 1. *Sea* $(A_k^{(r)}) \equiv \mathrm{G}^n \circ (A_k)$*. Su término n-ésimo puede escribirse como sigue*

$$A_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} P^{r-i} Q^i A_{n-r-i} \quad (3)$$

Donde $\binom{r}{i} = \frac{r!}{(r-i)!i!}$.

Demostración. En los Apéndices se demuestra por inducción. Para ello es necesario tener en cuenta los siguientes hechos:

i $\binom{t}{0} = \binom{t}{t} = \binom{s}{s} = \binom{s}{0} = 1$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{N}$.

ii) $\binom{t}{i} + \binom{t}{i+1} = \binom{t+1}{i+1}$. □

Corolario 1. *La sucesión* $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *es invariante ante la transformación* G^r *si y sólo si satisface la siguiente recusión en todo su dominio:*

$$A_n = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} P^{r-i} Q^i A_{n-r-i} \quad (4)$$

Desde luego, la sucesión de Fibonacci es un caso particular de las sucesiones de Lucas. Su transformación característica es la siguiente (se omiten todos los detalles que sí se escriben en (2)):

$$\mathrm{F} \circ (D_i) \equiv (B_i) \colon B_n = D_{n-1} + D_{n-2}$$

Si deseamos construir una sucesión que sea invariante ante la aplicación F^r, el corolario anterior nos da la "receta": hacen falta $2r$ valores iniciales y el resto se genera recursivamente. Construyamos una sucesión $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ invariante a F^2 y con valores iniciales $C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 3$. Empleando la Ecuación (3) para este caso particular, $C_n = C_{n-2} + 2C_{n-3} + C_{n-4}$, generamos todos los sucesores:

$$(0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 8,\quad 12,\quad 19,\quad 32,\quad 51,\quad 82,\quad 134,\quad 216,\quad 349,\quad \ldots)$$

Y despejando $C_{n-4} = C_n - C_{n-2} - 2C_{n-3}$, podemos calcular los antecesores:

$$(\ldots,\quad 133,\quad -82,\quad 51,\quad -32,\quad 20,\quad -12,\quad 7,\quad -4,\quad 3,\quad -2,\quad 2,\quad 0,\quad \ldots)$$

Ahora apliquemos la transformación $\mathrm{F}^2 = \mathrm{F} \circ \mathrm{F}$ de manera secuenciada para mostrar que (C_k) es su eigensucesión:

$$\begin{aligned}
(C_k) &= (\ldots, -32, 20, -12, 7, -4, 3, -2, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 19, 32, \ldots) \\
\mathrm{F}^1 \circ (C_k) &= (\ldots, -31, 19, -12, 8, -5, 3, -1, 1, 0, 2, 1, 3, 5, 7, 12, 20, 31, \ldots) \neq (C_k) \\
\mathrm{F}^2 \circ (C_k) &= (\ldots, -32, 20, -12, 7, -4, 3, -2, 2, 0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 19, 32, \ldots) = (C_k)
\end{aligned}$$

Esta serie de pasos puede emplearse para la construcción de cualquier eigensucesión de T^r. Para $r = 3$, construyamos la sucesión (U_k) con valores iniciales $(0, -1, 2, -3, 4, 5)$:[1]

$$(U_k) = (\ldots, -135, 81, -42, 17, -4, \mathbf{0}, -1, 2, -3, 4, -5, 0, 0, 0, -6, \ldots)$$

Sabemos, por definición, que $\mathrm{F}^3(U_k) = (U_k)$. Lo que vamos a mostrar ahora es lo que sucede si sumamos $(C_k) + (U_k) \equiv (V_k)$ y después aplicamos la transformación.

$$\begin{aligned}
(V_k) &= (\ldots, 192, -128, 77, -39, 15, -2, \mathbf{0}, 0, 4, 0, 8, 3, 12, 19, 32, 45, \ldots) \\
\mathrm{F}^1 \circ (V_k) &= (\ldots, -183, 112, -80, 64, -51, 38, -24, \mathbf{13}, -2, 0, 4, 4, 8, 11, 15, 31, 51, \ldots) \\
\mathrm{F}^2 \circ (V_k) &= (\ldots, -274, 147, -71, 32, -16, 13, -13, \mathbf{14}, -11, 11, -2, 4, 8, 12, 19, 26, 46, \ldots) \\
\mathrm{F}^3 \circ (V_k) &= (\ldots, -273, 192, -127, 76, -39, 16, -3, \mathbf{0}, 1, 3, 0, 9, 2, 12, 20, 31, 45, \ldots)
\end{aligned}$$

Parece que esta nueva sucesión ha perdido el carácter invariante de sus compo-

[1]La recursión característica es, en este caso, $U_n = U_{n-3} + 3U_{n-4} + 3U_{n-5} + U_{n-6}$. Todas estas sucesiones y sus operaciones fueron generadas con ayuda de un ordenador.

nentes. Sin embargo, lo siguiente sucede tras aplicar nuevamente la transformación F múltiples veces:

$$\mathrm{F}^4 \circ (V_k) = (\ldots, -182, 112, -81, 65, -51, 37, -23, \mathbf{13}, -3, 1, 4, 3, 9, 11, 14, 32, 51, \ldots)$$
$$\mathrm{F}^5 \circ (V_k) = (\ldots, -275, 147, -70, 31, -16, 14, -14, \mathbf{14}, -10, 10, -2, 5, 7, 12, 20, 25, 46, \ldots)$$
$$\mathrm{F}^6 \circ (V_k) = (\ldots, 192, -128, 77, -39, 15, -2, \mathbf{0}, 0, 4, 0, 8, 3, 12, 19, 32, 45, \ldots) = (V_k)$$

Desde luego que no es una casualidad que la suma de una sucesión invariante a F^2 y una invariante a F^3 dé como resultado una eigensucesión de F^6. Teniendo esto en cuenta, ¿qué se puede esperar al sumar una sucesión invariante a F^2 y otra a F^4?

Definición 1. Una transformación de sucesiones T es distributiva sobre la suma si cumple lo siguiente:

$$\mathrm{T} \circ ((A_i) + (B_i)) = \mathrm{T} \circ (A_i) + \mathrm{T} \circ (B_i) \tag{5}$$

Teorema 2. *Sea* T *una transformación distributiva sobre la suma. Sea* (A_i) *una eigensucesión de* T^s *y* (B_i) *una eigensucesión de* T^t *(donde* $s, t \in \mathbb{Z}$*). La sucesión* $(C_i) = (A_i) + (B_i)$ *es una eigensucesión de* T^r*, donde* r *es el mínimo común múltiplo de* s *y* t*.*

Lema 1. *Sea* T *una transformación distributiva sobre la suma,* T^n *también lo es para todo* $n \in \mathbb{Z}^+$*.*

Demostración. Asumiendo el lema, el teorema se demuestra desarrollando $\mathrm{T}^r \circ (C_i)$ según su propiedad distributiva:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^r \circ (C_i) &= \mathrm{T}^r \circ (A_i) + \mathrm{T}^r (B_i) = \mathrm{T}^s \circ \cdots \circ \mathrm{T}^s \circ (A_i) + \mathrm{T}^t \circ \cdots \circ \mathrm{T}^t \circ (B_i) \\ &= (A_i) + (B_i) = (C_i)\end{aligned}$$

El lema se puede demuestra de manera rutinaria por inducción. □

Desde luego, puede probarse que la transformación G es distributiva bajo la suma de sucesiones y con ello se puede dar una respuesta a la última interrogante: la que nos da el Teorema 2, F[4].

Sin embargo, la transformación O no presenta esta propiedad. Para mostrarlo, sólo hace falta un contraejemplo:

- Sea la sucesión ultrarrecursiva $(-2)_{k\in\mathbb{Z}}$, sabemos que $\mathrm{O} \circ (-2)_k = (-2)_k$.

- Sea la sucesión $(-4)_k = (-2)_k + (-2)_k$, no es cierto que $\mathrm{O} \circ (-4)_k = (-4)_k$:

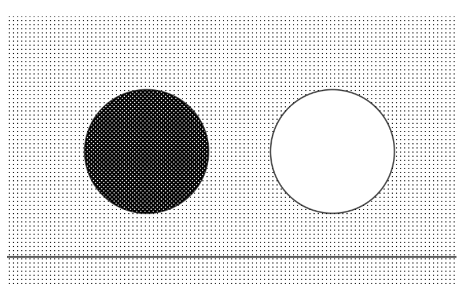
$$\xi((-4)_k, n, -1) = |-4| + \sum_{i=0}^{|-4|-1} (-4) = -12 \implies \xi((-4)_k, n, -1) \neq -4 \forall n \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, ninguno de los resultados de esta sección nos da alguna dirección para encontrar eigensucesiones de O^n. Por el contrario, nos da el mensaje de que debemos dejar de buscar respuestas (mas no inspiración) en el comportamiento de las recursiones tradicionales y enfocarnos en las características propias de las sucesiones ultrarrecursivas.

Una de estas características propias es la periodicidad[2], que ¡no está presente en ninguna sucesión (interesante) definida por la recursión $\mathfrak{F}$!

Proposición 1. *Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ una sucesión definida en todo su dominio por $\mathfrak{F}$. (A_k) es periódica si y sólo si $A_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Esto se puede demostrar usando el Teorema 1.5 y su Lema 1.1. $\square$



[2]Ya sea en todo su dominio o en un subconjunto de él, algunas veces viene acompañada de orden y otras tantas de caos. Véase el Capítulo 6. Sucesiones ultrarrecursivas periódicas.

8. Sobre la transformación O

Eigensucesiones periódicas de O^n

Se han encontrado bastantes ejemplos de eigensucesiones de la transformación O. En esta sección discutimos brevemente algunas sucesiones que permanecen invariantes ante la aplicación de n veces la transformación O, o bien, eigensucesiones de O^n.

La manera más sencilla de buscar tales sucesiones es suponer que son periódicas y que la transformación O tiene el mismo efecto sobre ellas que la traslación T_1:

$$\mathrm{T}_1 \circ (A_k)_{k\in\mathbb{Z}} \equiv (B_k)_{k\in\mathbb{Z}} \colon \forall n \in \mathbb{Z}(B_{n+1} = A_n) \tag{1}$$

Lema 1. *Si (A_k) es una sucesión con periodo r, entonces $\mathrm{T}_1^r \circ (A_k) = (A_k)$.*

Demostración. Mostremos que $\mathrm{T}_1^m \circ (A_k) \equiv T_m \circ (A_k) \implies T_1^{m+1} \circ (A_k) \equiv T_{m+1} \circ (A_k)$. Denotemos $(C_k) = T_m \circ (A_k)$

$$T_1^{m+1} \circ (A_k) = T_1^1 \circ (T_1^m \circ (A_k)) = T_1 \circ (C_k) \equiv (D_k) | D_{n+1} = C_n$$

Pero $C_n = A_{n-m}$, por lo tanto $D_{n+1} = A_{n-m}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $(D_k) = T_{m+1} \circ (A_k)$. Para $m = 1$, es cierto que $\mathrm{T}_1^m \circ (A_k) \equiv T_m \circ (A_k)$ y, por inducción, es cierto para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Ahora demostraremos el lema como sigue:

$$T_1^r \circ (A_k) = T_r \circ (A_k) \equiv (B_k) | B_{k+r} = A_k$$

Pero A_k es igual a A_{k+r} para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, $(B_k) = (A_k)$. $\square$

La traslación T_1 tiene el mismo efecto que O si y sólo si:

$$A_n = A^o_{n+1} = |A_n| + \sum_{i=0}^{|A_n|-1} A_{n-i\operatorname{sgn} A_n}$$

Es decir, estas dos transformaciones serán equivalentes si y sólo si la sucesión (A_k) cumple la siguiente recursión en todo su dominio[1]:

$$|A_n| = -\sum_{i=1}^{|A_n|-1} A_{n-i\operatorname{sgn} A_n} \tag{2}$$

Aprovechemos el hecho de que (A_k) tiene periodo r. Podemos escribir $|A_n|-1 = rn+k$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq k < n$.[2] La ecuación anterior es equivalente a la siguiente:

$$|A_n| = -n\sum_{i=0}^{r} \dot{A}_i - \sum_{i=1}^{k} A_{n-i\operatorname{sgn} A_n} \tag{3}$$

Con estas herramientas, podemos demostrar el teorema siguiente.

Teorema 1. *Sea una sucesión (A_k) con periodo r tal que*

$$|A_n| \neq 0 \implies |A_n| = r+1 \ y \ |A_n| \neq r+1 \implies |A_n| = 0.$$

Si $\sum_{i=1}^{r} \dot{A}_i = -(r+1)$, entonces (A_k) es una eigensucesión de O^r.

Demostración. Si $|A| = 0$, entonces la recursión (2) se satisface por la definición de suma.[3] Mostremos que también se satisface si $|A_n| = r+1$; de la Ecuación (3):

$$|A_n| = r+1 = -1 \cdot (-r-1) + 0 = -\sum_{i=1}^{r} \dot{A}_i - \sum_{i=1}^{k=0} A_{n-i\operatorname{sgn} A_n} \qquad \square$$

[1]Se llega a esta nueva expresión extrayendo el elemento $i = 0$ de la suma.

[2]Esto sólo es cierto si $|A_n| \geq 1$.

[3]Un $A_n = 0$ en la sucesión garantiza que la recursión se cumple. Esto otorga cierta libertad para proponer sucesiones invariantes a O^r. Ninguna de las sucesiones que plantea el Corolario 1 emplea este "comodín"; quizá sea posible usarlo y desarrollar sucesiones más complejas que las que aquí se muestran, como sucedió cuando se empleó el número -2 para generar sucesiones ultrarrecursivas no triviales. Véase el Capítulo 5. Sucesión II.

Corolario 1. *Para todo $m \in \mathbb{Z}^+$, existe una eigensucesión de* O^{2m+1} *con periodo* $2m+1$ *tal que* m *elementos tienen un valor de* $2m+2$ *y* $m+1$ *elementos tienen valor* $-2m-2$.

La relación de O con Q

La última propiedad que mencionaremos acerca de la transformación O, es lo que sucede si transformamos la sucesión de Fibonacci con ella.

Sea $(F_k^o) = \mathrm{O} \circ (F_k)$. Calculemos los elementos de esta sucesión. Si $n+1 \in \mathbb{Z}^+$:

$$F_{n+1}^o = \xi((F_k), n, 1) = 2F_n + \sum_{i=n+1-F_n}^{n-1} F_n$$

Por el Teorema 1.7:

$$F_{n+1}^o = 2F_n + F_{n+1} - F_{n+2-F_n} \tag{4}$$

Esta sucesión presenta propiedades interesantes como las siguientes:

$$\varphi^n F_{n-1}^o |F_n^o| \approx \varphi F_{n+1}^o \tag{5}$$

Que es equivalente a:

$$2\log_a |F_{n+1}^o| - \log_a |F_{n-1}^o| + 1 \approx \log_a |F_{n+2}^o| \tag{6}$$

Para todo $a \in \mathbb{Z}^+$.

Pero lo verdaderamente interesante resulta al aplicar la transformación característica de la recursión de Hofstadter a la sucesión de Fibonacci.

Sea la transformación de Hofstadter

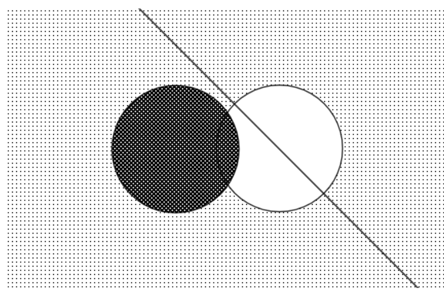
$$\begin{aligned} \mathrm{Q} \circ (A_i)_{i \in \mathcal{Q}} \equiv (B_i)_{i \in \mathcal{P}} \colon (n+1 \in \mathcal{P} \iff n+1-A_n, n+1-A_{n-1} \in \mathcal{Q}) \\ \wedge B_n = A_{n+1-A_n} + A_{n+1-A_{n-1}} \end{aligned}$$

Denotemos $(F_k^{\bullet}) = \mathrm{Q} \circ (F_k)$. Y calculemos para $n+1 \in \mathbb{Z}^+$:

$$F_{n+1}^{\bullet} = F_{n+1-F_n} + F_{n+1-F_{n-1}} \tag{7}$$

Esta sucesión también satisface las recursiones de las Ecuaciones (5) y (6). Pero lo más significativo es que conforme $n \to \infty$...

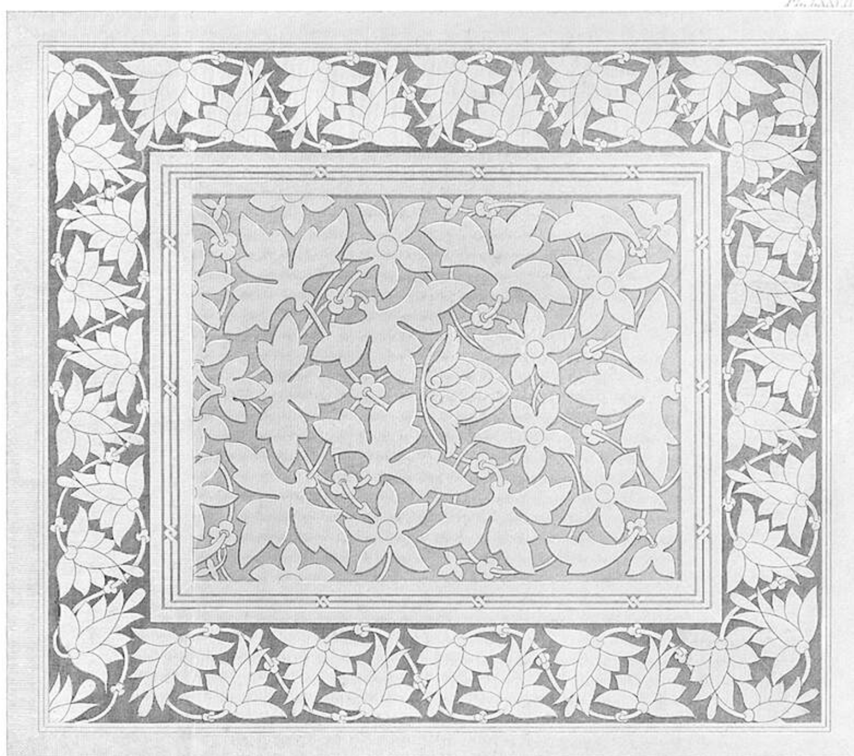
$$\frac{F_n^{\bullet}}{F_n^{o}} \to \varphi. \tag{8}$$

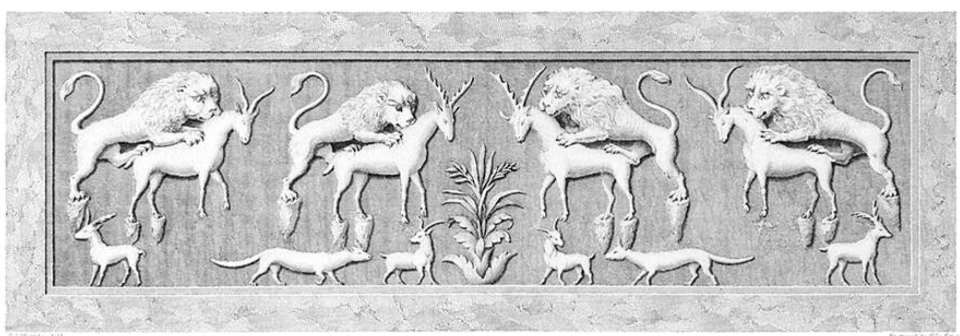


Parte IV

PERORATIO

Pl. LXXVIII.





"Is an elegant arabesque, copied from the side of a square fountain, placed against a wall in the Alhamrā near the Torre de la Velha. The animals are lions, fawns, and badgers, executed in stucco, and in a style highly honourable to the Arabian artist"

9. Consideraciones finales

"Who holds duly his or her triune proportion of realism, spiritualism,
and of the æsthetic or intellectual
Who having consider'd the body finds all its organs and parts good
Who, out of the theory of the earth and of his or her body
understands by subtle analogies all other theories"

—Walt Whitman, *Kosmos*

La ultrarrecursividad es un concepto que no comienza ni termina con los objetos matemáticos que se estudiaron en este trabajo. Ha formado parte de la cosmogonía de algunos individuos a lo largo de la historia, quienes proponían que la naturaleza manifiesta más que causalidad en su proceder.

En expresiones artísticas diversas, este concepto también se ha visto representado: en la literatura, la pintura y cada vez con más frecuencia en el cine, en las decisiones creativas que algunos guionistas asumen para contar sus historias.

Los resultados obtenidos en esta tesis, son muestra de que puede existir belleza, lo mismo que orden y caos en sucesiones definidas por este tipo de recursión. Si bien es cierto que las relaciones de recursión que se introdujeron no generan sucesiones completas a partir de un conjunto finito de valores iniciales, fue gracias a algunas definiciones y métodos nuevos que pudimos encontrar dichas sucesiones.

Algunas de estas definiciones son las versiones que aquí se ofrecen de *sucesión*, *relación de recursión* y *clases de recursión*. Respectos a los métodos, se usó principalmente la *extensión de sucesiones* y, similar a lo reportado en [36], se emplearon sucesiones periódicas.

El cálculo por computadora y la inducción matemática jugaron un papel crucial. El primero ayudó a identificar patrones que de otra manera pudieron pasar inadvertidos y la segunda nos permitió muchas veces demostrar que el “aparente comportamiento” era una verdad matemática.

En algunos capítulos se exploran ejemplos puntuales de familias de sucesiones ultrarrecursivas, y se deja claro que muchas otras familias pueden ser descubiertas, propuestas o incluso generadas con los mismos métodos que aquí se describen.

Desde luego, existen preguntas abiertas acerca de estas sucesiones, por ejemplo:

- Si son ciertas las conjeturas acerca de las extensiones fuertes de $(\pi_{m,i})$.
- Establecer condiciones universales para determinar si una extensión fuerte muere o se convierte en sucesión ultrarrecursiva.
- Si hay más familias de sucesiones libres que puedan ser usadas para extender una sucesión de tipo $(\breve{\tau})$. Y cuáles son las condiciones para que éstas den lugar a una sucesión ultrarrecursiva.
- Si existe algún elemento de la naturaleza que se comporte como estas sucesiones (Véase el PRÓLOGO).
- Si existe algún patrón, regularidad o periodicidad en alguna sucesión (R_n).
- Ante qué tipo de transformaciones permanece invariante la recursión $\mathfrak{O}$.

Considerando que los resultados sobresalientes de este trabajo surgieron de estudiar sólo **una** de todas las posibles relaciones de recursión que permite nuestra definición, se puede decir que aún queda mucho por explorar acerca de este tipo de sucesiones. Nuevos patrones, vínculos con otras áreas de las matemáticas y el desarrollo de una perspectiva lateral acerca de las relaciones causales, le esperan a quien decida continuar explorando la ultrarrecursividad.

Bibliografía

[1] FULLER, S. M. (1845). Frontispicio de su libro *Woman in the Nineteenth Century*. Imagen de dominio público.

[2] RHEAD, L. (1916). Ilustraciones *Carried Me up to Its Nest*, *He Began to Meditate*, *He Saw a Genie Appear* y *He Roasted Him* para el libro *The Arabian Nights' entertainments* de autor anónimo. New York: Harper and Brothers. Distribuidas bajo la licencia CC-BY-NC-SA 4.0.

[3] MURPHY, J. C. (1813). Ilustración *Panel Ornament and Arabesque*. Distribuida bajo la licencia CC-BY-NC-SA 4.0.

[4] CONWAY, J. H. y SMITH, D. A. (2003). *On Quaternions and Octonions: Their Geomtetry, Arithmetic and Symmetry*. Natick, Mass: AK Peters.

[5] BRAWLEY, J. V. y SCHNIBBEN, G. E. (1985). *Infinite Algebraic Extensions of Finite Fields*. Rhode Island: American Mathematical Society, *Contemporary Mathematics*.

[6] ANTONOCKIJ, M. Y., CHUDNOVSKY, D. V., CHUDNOVSKY, G. V. y HEWITT, E. (1981). *Rings of real-valued continuous functions. II*. Math. Z., **176**, págs. 151-186.

[7] GOLDBLATT, R. (1998). *Lectures on the Hyperreals: An Introduction to Nonstandard Analysis*. New York: Springer, *Graduate Texts on Mathematics*.

[8] KNUTH, D. E. (1974). *Surreal Numbers*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

[9] MacLANE, S. y BIRKHOFF, G. (1988). *Algebra 3.ª ed.* New York: Chelsea Publishing Company.

[10] RUSSELL, B. (1912). *The Problems of Philosophy, Chapter VII: On our knowledge of general principles.*

[11] LEONG, Y. K. (1979). Transcripción de su plática *Reductio ad absurdum*, ocurrida en Anglo-Chinese Junior College. National University of Singapore.

[12] HARDY, G. H. (1940). Ensayo *A Mathematician's Apology.* Publicado por University of Alberta Mathematical Sciences Society. Disponible en: `http://www.math.ualberta.ca/mss/`

[13] TAL, M. vs. KOBLENTZ, A. (1961). Partida de ajedrez jugada en Riga. Recuperada de `www.chessgames.com`

[14] HUND, G. (1961) Fotografía *Mikhail Tal, European Championship 1961 at Oberhausen.* Distribuida bajo la licencia CC BY-SA 3.0.

[15] GARCÍA, L. (1998). Documental *La pasión del ajedrez.* Capítulo 14: *el ajedrez femenino.* Sección *Partidas inmortales: Bobby Fischer – Mijaíl Tal (Olimpiada celebrada en Leipzig, 1960).* España: Salvat Editores.

[16] SCHAACK, H. (2007). *Un juego mágico – Mikhail Tal (2.ª parte)*, adaptado por MAYER, F. y revisado por ARIAS J. Barcelona: TablaDeFlandes. Sitio web: `http://www.tabladeflandes.com`

[17] SCHAEFFER, J. et álii. (2007). *Checkers Is Solved.* Science. DOI: 10.1126/science.1144079.

[18] McKAY, A. (2015). Película *The Big Short.* Hollywood, California: Paramount Pictures.

[19] REMESLENNIKOV, V. N. (2011). Artículo *Viète theorem.* Springer, Encyclopedia of Mathematics. Recuperado de: `https://bit.ly/2Gs0z3v`

[20] HAASER, N. B., LaSALLE, J. P. y SULLIVAN, J. A. (1990). *Análisis matemático: curso de introducción 2.ª ed.* México: Trillas.

[21] HILBERT, D. (2010). *Fundamentos de las Matemáticas 2.ª ed.* México: UNAM, Colección MATHEMA.

[22] KANAMORI, A. (2008). *Cohen and set theory.* The Bulletin of Symbolic Logic, **14** (3).

[23] GREENBERG, M. J. (1994). *Euclidean and non-euclidean geometries: Development and History 3rd ed.* New York: W. H. Freeman and Company.

[24] SILVER, D., HUBERT, T., SCHRITTWIESER, J. et álii. (2018). *A general reinforcement learning algorithm that masters chess, shogi, and Go through self-play.* Science **362**, págs. 1140-1144.

[25] TURNBULL, H. W. *The Greatest Mathematicians, 4th ed.* Recuperado del libro NEWMAN, J. R. (1956). *The World of Mathematics Vol. 1.* New York: Simon and Schuster.

[26] HOHENWARTER, M. (2002). *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene.* Salzburg, Austria: Paris Lodron University. [Imagen generada con Geogebra].

[27] MIOTTE, P. (1645). Frontispicio del libro KIRCHER, A., *Ars Magna Lucis et Umbrae.* Imagen de dominio público.

[28] GANGUI, A. *Exégesis de un frontis.* Recuperado del libro MÍGUEZ, G. I. (2013). *Lecturas del cielo: Libros de astronomía en la Biblioteca Nacional.* Science.

[29] ALCÁNTARA, J. y MENÉNDEZ, A. (1987). *Hombre y sociedad: guía didáctica.* Santo Domingo: INTEC.

[30] HACKMATH. Calculadora de fracciones con pasos. Disponible en `https://www.hackmath.net/en/calculator/fraction`

[31] ALLMAN, G. J. (1889). *Greek Geometry From Thales to Euclid.* Dublin: Hodges, Figgis & Co., pág. 26.

[32] PICKOVER, C. A. (2009). *The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics.* London: Sterling.

[33] HOFSTADTER, D. (1979). *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid.* New York: Basic Books. ISBN: 0465026567.

[34] ISGUR, A., LECH, R., MOORE, S., TANNY, S., VERBERNE, Y. y ZHANG, Y. (2016). *Constructing new families of nested recursions with slow solutions*. SIAM Journal of Discrete Mathematics, **30**:2, págs. 1128-1147.

[35] PINN, K. (1998). *Order and Chaos in Hofstadter's $Q(n)$ Sequence*. Complexity, **4**:3.

[36] RUSKEY, F. (2011). *Fibonacci meets Hofstadter*. The Fibonacci Quarterly, **49**:3, págs. 227-230.

[37] CONWAY, J. H. (1988). *Some Crazy Sequences*, video de la plática en AT&T Bell Labs.

[38] KUBO, T. y VAKIL, R. (1996). *On Conway's recursive sequence*. Discrete Math, **152**, págs. 225-252.

[39] TANNY, S. M. (1992). *A well-behaved cousin of the Hofstadter sequence*. Discrete Math, **105**:1-3, págs 227-239.

[40] PINN, K. (1999) *A chaotic cousin of Conway's Recursive Sequence*. Experimental Mathematics, **9**:1, págs. 55-66

[41] BALAMOHAN, B. KUZNETSOV, A y TANNY, S. (2007). *On the Behavior of a Variant of Hofstadter's Q-Sequence*. Journal of Integer Sequences, **10**.

[42] GOLOMB, S. W. (1991). *Discrete Chaos: Sequences Satisfying "Strange" Recursions*. Manuscrito no publicado.

[43] HOFSTADTER, D. y HUBER, G. (2000) Seminario en la Universidad de Toronto.

[44] FOX, N. (2009). *Linear Recurrent Subsequences of Meta-Fibonacci Sequences*.

[45] CARTER, H. V. GRAY, H. (∼1858). Ilustración *Transverse section of the trachea, just above its bifurcation, with a bird's-eye view of the interior.* para el libro *Anatomy of the Human Body* de GRAY, H. Distribuida bajo la licencia CC-BY-NC-SA 4.0 en `https://www.bartleby.com/107/`.

[46] RAM. RAMÍREZ, Ó. A. (2019). *Ultra-recursive sequences.* `https://arxiv.org/pdf/1902.01820.pdf`

[47] Imagen de dominio público distribuida bajo la licencia CC0 1.0 por `https://svgsilh.com`

[48] *Orange b. bumblebee*, de autor desconocido. (1894). Popular Science Montly Vol. 45.

[49] HRBACEK, K. y JECH, T. (1999). *Introduction to set theory 3rd ed.* New York: Marcel Dekker.

[50] ORTEGA, J. Material didáctico para el curso de Introducción al Análisis Real: *Capítulo 1: Los Números Reales*. Consultado en `https://www.cimat.mx/∼jortega/AnReal.html`

[51] ARRONDO, E. (2012). *Apuntes de teoría de conjuntos*. Consultado en `http://www.mat.ucm.es/∼arrondo/conjuntos.pdf`

[52] SIERPIǸSKI, W. (1964). *Elementary Theory of Numbers*. Poland: Warszawa.

[53] NIVEN, I., ZUCKERMAN, H. S. y MONTGOMERY, H. L. (1991). *An Introduction to the Theory of Numbers 5th ed.* New York: Wiley.

[54] BERNSTEIN, M. y SLOANE, N. J. A. (2002). *Some Canonical Sequences of Integers*

[55] SHAW, I. (2000). *The Oxford History of the Ancient Egypt*. New York: Oxford University Press Inc.

[56] AHMOSE. *The Rhind Mathematical Papyrus. The British Museum.* Distribuido bajo la licencia CC BY-NC-SA 4.0.

[57] KOSHY, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Aplications*. New York: Wiley.

[58] BALLOT, C. (2017). *On Functions Expressible as Words on a Pair of Beatty Sequences*. Journal of Integer Sequences, **20**.

[59] SLOANE, N. J. A. *The Online Encyclopedia of Integer Sequences*. Publicado electrónicamente en `http://oeis.org`

[60] VÁZQUEZ, C. (2016). *Sé verlas al revés, dijo el palindromista*. Letras Libres, disponible en `https://www.letraslibres.com/`

[61] GAMERO, A. (2012). *El arte del palíndromo*. La piedra de Sísifo, disponible en `http://lapiedradesisifo.com/`

ADDENDA

Un monstruo con un único ojo, orejas enormes y colmillos sonríe cuando se sienta frente a una fogata para asar a un hombre.

Índice

Índice de símbolos

Símbolo	Uso	Significado	Página
()	$(a_n)_{n=1}^{\infty}$	(a_n) es una sucesión cuyo dominio son los enteros mayores o iguales a 1	14
	$(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$	(a_i) es una sucesión con dominio en $\mathcal{Q}$	32
$\approx$	$a \approx b$	a es aproximadamente b	14
:	$f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$	La función f que va de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{S}$	17
	$A\colon B$	A tal que B	27
$\setminus$	$\mathcal{A} \setminus \mathcal{S}$	La diferencia de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$	17
$\circ$	$F \circ G$	La composición de F y G $(F \circ G)(x) = F(G(x))$	17
$\times$	$a \times b$	a multiplicada por b	18
	$\mathcal{A} \times \mathcal{S}$	Producto cartesiano de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$	68
$\leq$	$a \leq b$	a es menor o igual a b	19
$\geq$	$a \geq b$	a es mayor o igual a b	19
sup	$\sup \mathcal{S}$	El supremo del conjunto $\mathcal{S}$	20
ínf	ínf $\mathcal{S}$	El ínfimo del conjunto $\mathcal{S}$	21
∞	∞	Infinito	24
!	$a!$	El factorial del número natural a	24
lím	$\text{lím}_{a\to b}$	El límite cuando a tiende a b	25
$\vert\vert$	$\vert a\vert$	El valor absoluto del número real a	25
	$\vert\mathcal{S}\vert$	La cardinalidad o número de elementos del conjunto $\mathcal{S}$	68
$\forall$	$\forall x$	Para todo x	26
$\subseteq$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$	32
$\subset$	$\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{S}$	110
$\pm$	$\pm a$	Más/menos a (se usa para hablar de ambos casos simultáneamente)	34

Símbolo	Uso	Significado	Página
$\mp$	$\mp a$	Menos/más a	34
$[\,]$	$[a]$	El redondeo a	38
$\cap$	$\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$	La intersección de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$	68
$\cup$	$\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$	La unión de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$	68
$\varnothing$	$\varnothing$	El conjunto vacío	68
$\bullet$	$\mathrm{U} \bullet \mathcal{A}$	La imagen de $\mathcal{A}$ respecto a la función característica de U	80
$\rightarrow$	$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{S}$	La función f mapea $\mathcal{A}$ a $\mathcal{S}$	68
$\exists$	$\exists \mathcal{A}$	Existe el objeto $\mathcal{A}$	91
$\lceil\,\rceil$	$\lceil a \rceil$	El techo de a	97
$\lfloor\,\rfloor$	$\lfloor a \rfloor$	El piso de a	97
sgn	sgn a	El signo de a	98
Δ	Δa_n	Primera diferencia $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$	113
$\nexists$	$\nexists \mathcal{A}$	No existe el objeto $\mathcal{A}$	131

Letras con un significado asignado	Significado
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales
$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales $\{0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros $\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+$	El conjunto de los números enteros positivos $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^-$	El conjunto de los números enteros negativos $\{-1, -2, \ldots\}$
φ	La proporción áurea
ψ	El inverso aditivo del inverso multiplicativo de φ (i. e. $\psi = -\varphi^{-1} = 1 - \varphi$)

Prontuario

UNA SUCESIÓN $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida por una relación de recursión lineal de orden k si cualesquiera $k+1$ términos consecutivos satisfacen una ecuación de la forma

$$a_n = +c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \cdots + c_{k-1}(n)a_{n-k+1} + c_k(n)a_{n-k} + F(n) \qquad (1)$$

donde $c_j(n)$ y $F(n)$ son funciones de n. Cuando toda $c_j(n)$ es una función constante y $F(n) = 0$, se dice que la relación es de coeficientes constantes y homogénea. De modo que para cualquier $n > k$, existe una dependencia del n-ésimo término con los k elementos anteriores, y la ecuación (1) puede reescribirse de la manera siguiente:

$$a_n = \sum_{i=1}^{k} c_i a_{n-i}. \qquad (2)$$

Luego, la sucesión queda completamente definida si se determinan los k valores iniciales. Es decir, podrá obtenerse cualquier elemento a_n con $n > k$ si se conocen los k valores anteriores.

Por otra parte, pueden encontrarse funciones no recursivas que entregan el n-ésimo término de la sucesión sin calcular ningún valor anterior; estas soluciones pueden hallarse junto con las raíces del polinomio característico de la relación de recursión:

$$x^n - \sum_{i=1}^{k} c_i x^{n-i}. \qquad (3)$$

La solución tiene la forma

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n) x_i^n \tag{4}$$

donde x_i es una raíz de multiplicidad m_i y $P_i(n)$ un polinomio de orden $m_i - 1$. De modo que un método general para resolver una recursión de este tipo consiste en hallar las raíces del polinomio correspondiente y determinar los coeficientes de cada uno de los polinomios $P_i(n)$, lo cual se hará en función de los k valores iniciales de la sucesión (o de cualesquiera k valores conocidos, como se detalla en el texto).

Por ejemplo, la sucesión de Fibonacci definida por la recursión $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ y con condiciones iniciales $F_1 = F_2 = 1$ tiene la siguiente solución:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) \tag{5}$$

donde φ y ψ son las raíces del polinomio correspondiente. Como esta sucesión, cualquiera otra de orden menor o igual a cuatro puede ser resuelta de manera algorítmica, usando el procedimiento mencionado, pues se conocen soluciones generales para los polinomios de cuarto o menor grado.

Otro tipo de recursión es el que se presenta en la sucesión de Hofstadter

$$Q_n = Q_{n-Q_{n-1}} + Q_{n-Q_{n-2}}. \tag{6}$$

Como en la sucesión de Fibonacci, sus valores iniciales son $Q_1 = Q_2 = 1$. También como sucede con la sucesión de Fibonacci, cada elemento es la suma de dos anteriores, pero no los dos inmediatamente anteriores. El comportamiento de esta sucesión es más bien desconocido y ha causado intriga en cierta parte de la comunidad matemática. Desde su publicación en 1979, la sucesión Q de Hofstadter ha inspirado el estudio de otras sucesiones, como la sucesión de Conway, que está definida por la recursión

$$C_n = C_{C_{n-1}} + C_{n-C_{n-1}} \tag{7}$$

y también con valores iniciales $C_1 = C_2 = 1$. A estas últimas dos, se les conoce como recursiones anidadas o recursiones extrañas, porque no son de coeficientes constantes, porque no se han encontrado funciones que modelen exactamente su comportamiento y porque hay muchas cuestiones aún desconocidas acerca de ellas.

En este trabajo, se ha pretendido ampliar el concepto de recursión, pues se han definido sucesiones en las que cada elemento es dependiente tanto de elementos anteriores como de elementos posteriores de la sucesión. Por ejemplo, la recursión

$$a_n = a_{n+a_n} - a_{n-a_n} \tag{8}$$

expresa a todo $a_n \neq 0$ como dependiente de la diferencia entre un elemento pasado y uno futuro. Inmediatamente se distingue de las sucesiones anteriores puesto que pueden existir dos sucesiones distintas con los mismos primeros elementos 'iniciales' $a_0 = 0$ y $a_1 = a_2 = 1$:

$$(G_n) = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \mathbf{8}, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, \ldots)$$
$$(G'_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, \mathbf{9}, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 13 \ldots)$$

En ambas sucesiones, todos los elementos cumplen la recursión. Note que cualquier elemento G_m que está antes del ocho en **negrita** es igual al que está 'G_m' lugares hacia su derecha menos el que está 'G_m' lugares hacia su izquierda. Lo mismo sucede todos los elementos G'_m que están antes del nueve en negrita. En estas sucesiones, puede decirse que cada elemento es generado por otros dos elementos con instrucciones que él mismo se ha dado. Por ejemplo, $G_1 = G_{1+G_1} - G_{1-G_1}$ pero $G_1 = 1$, por lo tanto $G_1 = G_{1+1} - G_{1-1} = G_2 - G_0 = 1 - 0 = 1$.

La recursión que con mayor interés estudiamos es la siguiente:

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{|a_n|-1} (a_{n-i\cdot \mathrm{sgn}\ a_n} + 1) = |a_n| + \sum_{i=0}^{|a_n|-1} a_{n-\mathrm{sgn}\ a_n} \tag{9}$$

donde sgn r es la función signo igual a 1 si $r > 0$, -1 si $r < 0$ y 0 si $r = 0$. Esta recursión puede expresarse en palabras como sigue: Cada elemento a_{n+1} es la suma de tantos elementos como indique su antecesor: si a_n es positivo, entonces a_{n+1} es igual a a_n más los 'a_n' elementos anteriores a a_{n+1}; si a_n es negativo, a_{n+1} será igual a $|a_n|$ más los 'a_n' elementos posteriores a a_{n-1}. A cualquier sucesión que cumpla esta recursión en todo el dominio de los enteros la llamaremos *ultrarrecursiva*.

La siguiente es una sucesión que cumple la recursión previamente enunciada:

$$(b_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (\ldots, -2, -2, -2, -2, -2, 1, 2, 5, 9, 16, 27, 45, 74, 121, 197, \ldots)$$

Denotemos $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ y así sucesivamente, similarmente $b_{-1} = -2$, $b_{-2} = -2$ y así sucesivamente (aunque la sucesión será recursiva en el sentido que buscamos independientemente de la notación). Un aspecto interesante es que $b_n - b_{n-1} \to \varphi^n$ conforme $n \to \infty$. También se presenta que para $n \neq 0, 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2$, es decir, casi todos los términos satisfacen una relación de recursión en el sentido tradicional.

En la sucesión anterior, el elemento $b_0 = 1$ actúa como el valor inicial, puesto que se puede colocar en esa posición cualquier otro número entero positivo y obtener una sucesión ultrarrecursiva. La siguiente matriz representa a esa familia de sucesiones, cada fila es una sucesión distinta:

$$\begin{pmatrix}
\ldots & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 & 5 & 9 & 16 & 27 & 45 & 74 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 6 & 10 & 18 & 30 & 50 & 82 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 3 & 2 & 7 & 11 & 20 & 33 & 55 & 90 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 4 & 2 & 8 & 12 & 22 & 36 & 60 & 98 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 5 & 2 & 9 & 13 & 24 & 39 & 65 & 106 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 6 & 2 & 10 & 14 & 26 & 42 & 70 & 114 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 7 & 2 & 11 & 15 & 28 & 45 & 75 & 122 & \ldots \\
\ldots & -2 & -2 & -2 & 8 & 2 & 12 & 16 & 30 & 48 & 80 & 130 & \ldots \\
\iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

Algunas de estas sucesiones están relacionadas con la sucesión de Fibonacci y los números de Lucas. También se ha demostrado que existe una solución o una función real que entrega el n-ésimo término (con $n > 1$) de cada sucesión de esta familia.

Por otra parte, se han encontrado cuatro sucesiones de periodo 6 —una de ellas es un caso trivial— que satisfacen la relación de recursión (se entiende que todos los términos mostrados se seguirán repitiendo a la izquierda y a la derecha):

$$\begin{array}{c|c} (\ldots,-2,-2,-2,-2,-2,-2,\ldots) & (\ldots,-6,-2,6,-2,-2,-2,\ldots) \\ \hline (\ldots,-6,-2,-2,6,-2,-2,\ldots) & (\ldots,-6,-2,-2,-2,6,-2,\ldots) \end{array}$$

Si 'cortamos a la mitad' cualquiera de estas sucesiones, pueden construirse otras familias de sucesiones ultrarrecursivas no periódicas como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \ldots & -6 & -2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 1 & 2 & 5 & 17 & 24 & 47 & 93 & 174 & 321 & \ldots \\ \ldots & -6 & -2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 2 & 2 & 6 & 18 & 34 & 62 & 118 & 218 & 398 & \ldots \\ \ldots & -6 & -2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 3 & 10 & 19 & 35 & 60 & 113 & 215 & 398 & 731 & \ldots \\ \ldots & -6 & -2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 4 & 10 & 20 & 36 & 70 & 128 & 240 & 442 & 820 & \ldots \\ \ldots & -6 & -2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 5 & 10 & 21 & \mathbf{33} & 68 & 127 & 229 & 426 & 793 & \ldots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

En donde se ha roto una regla implícita de la primera familia de sucesiones: los valores incrementan junto con las columnas (se rompe por primera vez en el 33 escrito con **negrita**). No se ha encontrado una función no recursiva que modele fielmente el comportamiento de alguna sucesión de esta familia.

Por otra parte, se ha demostrado la existencia de sucesiones no triviales de periodos más largos:

$$(c_k) = (\ldots,-10,-2,-10,-2,10,-2,10,-2,-2,-2,\ldots)$$

$$(d_k) = (\ldots,-14,-2,-14,-2,-2,-14,-2,14,-2,-2,14,-2,14,\ldots)$$

que también permiten conformar una sucesión infinita 'hacia la izquierda' (que por el momento denotaremos como (c'_n) y (d'_n)) para generar nuevas sucesiones ultrarrecursivas no periódicas. A continuación se muestra un ejemplo de cada una: las sucesiones con valor inicial igual a 1.

$$((c'_n), 1, 2, 5, 21, 48, 83, 169, 302, 589, 1121, 2128, 4075, 7753, \ldots)$$

$$((d'_n), 1, 2, 5, 25, 60, 103, 201, 402, 749, 1477, 2852, 5495, 10641, \ldots)$$

Hasta este momento, únicamente es posible aproximar el valor del n-ésimo elemento de las sucesiones similares a estas últimas, por lo que se dice que son caóticas. Se han encontrado sucesiones ultrarrecursivas periódicas no triviales para un número infinito de periodos (en particular, de cualquier periodo $4n + 2$) pero no se ha encontrado la manera de usar todas ellas para generar nuevas familias de sucesiones ultrarrecursivas.

A lo largo del texto, se enfatiza la utilidad de redefinir los conceptos de sucesión y recursión, de modo que pueden entenderse las sucesiones recursivas como sucesiones que permanecen invariantes ante cierta transformación, o bien, eigensucesiones de ciertas transformaciones. En este nuevo tipo de recursión, en donde los elementos de una sucesión pueden tener influencia sobre sus antecesores, se rompe la causalidad que parecía gobernar el comportamiento de todas las sucesiones recursivas.

Notas importantes

ESTE CAPÍTULO ESTÁ DEDICADO a la exposición formal de los siete elementos más esenciales que se emplean a lo largo del discurso. Este capítulo nace para fundamentar las demostraciones que se hacen en el Capítulo 1, y crece para ser el marco teórico de todo lo que se desarrolla en los siguientes capítulos del cuerpo del texto. Los temas a tratar son:

Se recomienda al lector sólo prestar atención a aquellos temas que no resulten familiares y pasar de largo aquéllos que ya domine. En todas las secciones y capítulos, antes de realizar cualquier demostración, se dirá de manera explícita cuando un teorema de este apartado se haya empleado como fundamento. Por ejemplo, en cualquier parte del texto se referencia como Teorema A.2, al Teorema 2 de este capítulo y como Definición A.1 a la Definición 1 de este apartado.

De modo que este capítulo puede usarse como una guía para cuando se desee profundizar o recordar algún tema particular.

1. Conjuntos, relaciones, funciones, sucesiones y límites

Las siguientes definiciones fueron adaptadas de tres distintas fuentes: [9,20,49]. El propósito es decir de manera explícita a qué nos referimos por *conjunto* y *funciones*. También se presentan algunos teoremas importantes sobre las funciones y los límites.

Conjuntos

De manera intuitiva, podemos entender un 'conjunto' como cualquier colección de objetos; a cada objeto se le llama elemento del conjunto, $s \in \mathcal{S}$ significa que s es un elemento del conjunto $\mathcal{S}$. En la mayoría de los casos, describiremos por primera vez un conjunto por las propiedades que comparten cada uno de sus elementos (ej. $\mathcal{S} = \{s | s \in \mathbb{R} \text{ y } s > 2\}$ es el conjunto de los reales mayores a dos), después nos referiremos a ese conjunto sólo con la letra mayúscula que lo representa ('$\mathcal{S}$', en nuestro ejemplo).

Definición 1. El **conjunto vacío**, denotado como $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

En diversos tratamientos de la teoría de conjuntos, la existencia del conjunto vacío es uno de los primeros axiomas. Aquí no ofrecemos mas que una presentación intuitiva de esta teoría, tan claramente definida como es necesario para que nos sea de utilidad.

Definición 2. Decimos que dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ son **iguales** si cada elemento de $\mathcal{A}$ es también elemento de $\mathcal{S}$ y viceversa:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S} \iff (\forall x, x \in \mathcal{A} \iff x \in \mathcal{S})$$

Definición 3. Un conjunto $\mathcal{A}$ es un **subconjunto** de $\mathcal{S}$, que se denota como $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$, si todo elemento de $\mathcal{A}$ es también elemento de $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S} \iff (\forall x, x \in \mathcal{A} \implies x \in \mathcal{S})$$

Definición 4. Un conjunto $\mathcal{A}$ es un **subconjunto propio** de $\mathcal{S}$, que se denota como $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, si todo elemento de $\mathcal{A}$ es también elemento de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A} \neq \mathcal{S}$.

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{S} \iff [(\forall x, x \in \mathcal{A} \implies x \in \mathcal{S}) \wedge \exists y \in \mathcal{S} | y \notin \mathcal{A}]$$

De lo anterior podemos concluir que $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ si y sólo si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Parecido a lo que ocurre con los números reales, los conjuntos tienen algunas definiciones que asemejan las operaciones de 'sumar' y 'restar'.

Definición 5. La **unión** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$, denotada por $\mathcal{A} \cup \mathcal{S}$, es el conjunto de elementos que están en $\mathcal{A}$, en $\mathcal{S}$ o en ambos.

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{S} = \{x | x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{S}\}$$

Definición 6. La **intersección** de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$, denotada por $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$, es el conjunto de elementos que están en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{S}$.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{x | x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{S}\}$$

Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$, debe existir un conjunto $\mathcal{A}'$ tal que $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}' = \mathcal{S}$. A este último conjunto lo llamamos complemento de $\mathcal{A}$.

Definición 7. Si $\mathcal{A}$ es un subconjunto de $\mathcal{S}$, se dice que el **complemento** $\mathcal{A}^c$ de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{S}$ es el conjunto de los elementos de este último que no pertenecen a $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A}^c = \{x | x \in \mathcal{S} \wedge x \notin \mathcal{A}\}$$

Definición 8 (Operaciones con conjuntos)**.** La diferencia de dos conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$ se define y se denota como sigue:

$$\mathcal{A} \setminus \mathcal{S} = \{a | a \in \mathcal{A} \wedge a \notin \mathcal{S}\}$$

Sea $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ un conjunto de conjuntos, se denota la unión y la intersección de todos ellos como sigue:

$$\bigcup_{\mathcal{A}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}} A = \{a|\exists \mathcal{S}\in \boldsymbol{\mathcal{X}}: a\in\mathcal{S}\} \qquad \bigcap_{\mathcal{A}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}} A = \{a|\forall \mathcal{S}\in \boldsymbol{\mathcal{X}}, a\in\mathcal{S}\}$$

Pares ordenados y relaciones

Observemos que el conjunto $\{a, b\}$ no es distinto del conjunto $\{b, a\}$, porque tanto a como b son los únicos elementos de ambos conjuntos; luego, se dice que $\{a, b\}$ es un par desordenado. Es posible definir un par ordenado de tal manera que si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$.

Definición 9 (El par ordenado)**.** $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Observemos que $\{a\} \in (a, b)$ pero $\{a\} \notin (b, a)$. Por lo tanto, $(a, b) \neq (b, a)$. Es posible usar esta misma definición para hacer conjuntos ordenados de mayores cantidades de elementos. Por ejemplo, el triplete ordenado: $(a, b, c) = ((a, b), c)$.

Definición 10. El **producto cartesiano** de dos conjuntos, denotado como $\mathcal{A} \times \mathcal{S}$, es el conjunto de los pares ordenados (a, s) de elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{S}$, respectivamente.

$$\mathcal{A} \times \mathcal{S} = \{(a, s)|a \in \mathcal{A}, s \in \mathcal{S}\}$$

Definición 11. Un conjunto $\mathcal{R}$ es una **relación binaria** si $\mathcal{R}$ es un subconjunto de $\mathcal{A} \times \mathcal{S}$, es decir, si cada uno de sus elementos es un par ordenado. Por lo tanto $(a, s) \in \mathcal{R}$ puede ser escrito como $a\mathcal{R}s$, como en '$a < s$'.

El conjunto de todos los x que están en relación $\mathcal{R}$ con cierto y, se llama **dominio** de $\mathcal{R}$, y se denota como $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$, de modo que $\mathcal{D}_{\mathcal{R}} = \{x|\text{existe un } y \text{ tal que } x\mathcal{R}y\}$.

Por otro lado, el conjunto de todos los y tal que cierto x está en relación $\mathcal{R}$ con ellos, se llama **codominio** de $\mathcal{R}$, y se denota como $\mathcal{C}_{\mathcal{R}}$, de modo que $\mathcal{C}_{\mathcal{R}} = \{y|\text{existe un } x \text{ tal que } x\mathcal{R}y\}$.

Funciones

Definición 12. Una relación binaria F es llamada **función** (mapeo, correspondencia o transformación) si aFs_1 y aFs_2 implica que $s_1 = s_2$ para todo a, s_1 y s_2. La función F asigna a cada elemento a de un conjunto $\mathcal{A}$ un elemento $F(a)$ de $\mathcal{S}$. Esto se indica con la notación

$$a \mapsto F(a)$$

El elemento $F(a)$ puede ser escrito como Fa o bien F_a. El conjunto $\mathcal{A}$ es llamado dominio de F y el $\mathcal{S}$ es el codominio, para indicar esto se usan las notaciones:

$$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S} \qquad \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{S}$$

Definición 13. Para cualquier conjunto $\mathcal{S}$, la **función identidad** $I_{\mathcal{S}}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es la función $s \mapsto s$ que mapea a cada elemento de $\mathcal{S}$ hacia sí mismo.

Definición 14. Sea una función $F : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, su elemento propio o **eigenelemento** es cualquier elemento de su dominio $a \in \mathcal{A}$ que satisface $F(a) = a$.
Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de sucesiones, cualquier elemento propio de F será llamado una **eigensucesión**.

Definición 15. El **compuesto** $F \circ G = FG$ de dos funciones es la función que se obtiene de aplicar ambas funciones en ese orden: primero G y después F. Sean las funciones

$$G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \qquad F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$$

su composición es la función $F \circ G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{S}$ con valores

$$[F \circ G](b) = F(G(b))$$

Definición 16 (Algunas propiedades de las funciones)**. Ley asociativa**: La composición de funciones obedece

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$

Siempre que $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$.

Bajo la composición, toda función $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ obedece la **ley de identidad**:

$$F \circ I_{\mathcal{A}} = F = I_{\mathcal{S}} \circ F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}.$$

Es decir, toda función tiene una *inversa izquierda* y una *inversa derecha*.

Una función $F_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ se dice que es una **restricción** de la función $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ y se cumple $F_{\mathcal{B}}(b) = F(b)$ para todo $b \in \mathcal{B}$. También se dice que F es una extensión de $F_{\mathcal{B}}$.

Definición 17 (Tipos especiales de funciones)**.** Una función $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es **inyectiva** cuando $a_1 \neq a_2$ implica que $F(a_1) \neq F(a_2)$, es decir, cuando F mapea cada elemento del dominio a un elemento distinto del codominio.

Una función $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es **suprayectiva** si para cada $s \in \mathcal{S}$, existe al menos un a en $\mathcal{A}$ tal que $F(a) = s$, es decir, cuando F mapea sobre todo el conjunto del codominio.

Una función $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es **biyectiva** si es a la vez inyectiva y suprayectiva.

Teorema 1. *Una función con un dominio no vacío es inyectiva si y sólo si tiene una inversa izquierda. Una función es suprayectiva si y sólo si tiene una inversa derecha.*

Demostración. Deben demostrarse cuatro cosas: 1) Si $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es inyectiva, entonces existe un $G\colon \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ tal que $G \circ F = I_{\mathcal{A}}$. Como F es inyectiva, entonces para cada $s \in S$ existe a lo más un a tal que $s = F(a)$, luego podemos definir a G como

$$\begin{aligned} G(s) &= a \text{ si existe } a \in \mathcal{A} \text{ tal que } F(a) = s \\ &= a_o \text{ en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

De modo que la función G manda a $F(a)$ de vuelta a de donde provino, $G(F(a)) = a$, es decir, $G \circ F = I_{\mathcal{A}}$. Es de notar que si F, no es una biyección, existen múltiples inversas izquierdas para F, por todos los valores que puede tomar a_o.

2) Sea G una inversa izquierda de F, entonces F es inyectiva. Si $F(a_1) = F(a_2)$, entonces $G(F(a_1)) = G(F(a_2)) \implies a_1 = a_2$.

3) Si $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ es suprayectiva, entonces existe un $G\colon \mathcal{S} \to \mathcal{A}$ tal que $F \circ G = I_{\mathcal{S}}$: sabemos que para todo $s \in \mathcal{S}$, existe al menos un elemento $a \in \mathcal{A}$ tal que $F(a) = s$, es decir, existe un conjunto no vacío de elementos $\mathcal{Q}_s = \{a | a \in \mathcal{A}, F(a) = s\}$. Por lo tanto, podemos generar una función G con dominio en $\mathcal{S}$ tal que para todo s elegimos un elemento a_i del conjunto $\mathcal{Q}_s$ tal que $G(s) = a_i$, luego $F(G(s)) = F(a_i) = s$.

4) Si F tiene una inversa derecha G, entonces F es suprayectiva: Sabemos que $F \circ G = I_{\mathcal{S}}$, luego para cada $s \in S$, $F(G(s)) = s$. $\square$

Las definiciones anteriores son más generales que las de aquellas funciones que tienen como dominio un conjunto de números. A continuación se hablará de algunas definiciones de funciones de variable real, que se distinguirán con la notación empleando letras minúsculas.

Definición 18 (Adición y multiplicación de funciones)**.** Si f y g son funciones reales con dominios $\mathcal{D}_f$ y $\mathcal{D}_g$ respectivamente, entonces $f + g$ y $f \cdot g$ son funciones con dominio $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ y reglas de correspondencia:

$$[f + g](x) = f(x) + g(x)$$
$$[f \cdot g] = f(x) \cdot g(x)$$

Por otro lado, se denota $-[f]$ por $-[f(x)] = (-1) \cdot f(x) \equiv -f(x)$, $[f]^2$ significa $f(x) \cdot f(x) = (f(x))^2$ —siempre entre corchetes, para distinguir de f^2, que representa $f^2(x) = f(f(x))$— luego está $[f]^{-1}(x) \equiv [f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ (entre corchetes para distinguir del inverso de una función sobre la composición).

Límites

Definición 19. El número L se dice que es **el límite de una función** f en x_o si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que siempre que x esté en el dominio de f y

$$0 < |x - x_o| < \delta$$

entonces

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

Las notaciones

$$\lim_{x_o} f = L \ \text{ y } \ \lim_{x \to x_o} f(x) = L$$

se usan para denotar que L es el límite de f en x_o.

Definición 20. Un número L se dice que es **el límite de una función** f en ∞ (o cuando x aumenta indefinidamente), lo que se escribe

$$\lim_{\infty} f = L \ \text{ ó } \ \lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número N tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

siempre que $x \in \mathcal{D}_f$ y $x > N$.

Definición 21. La función f es **continua en el punto** x_o en $\mathcal{D}_f$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$$

siempre que $x \in \mathcal{D}_f$ y $|x - x_o| < \delta$.

Será **continua sobre un conjunto** $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}_f$ si la función restringida $f_{\mathcal{S}}$ es continua en cada punto de $\mathcal{S}$.

Teorema 2 (Algunos teoremas sobre funciones continuas)**.** ***1)*** *Si las funciones f y g son continuas en x_o, entonces $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_o y $\frac{f}{g}$ es continua siempre que $g(x_o) \neq 0$.*

2) *Todas las funciones polinomiales $f = \sum_{k=0}^{n} a_k [I]^k$ son continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Donde I es la función identidad de los números reales y $[I]^k \colon [I(x)]^k = x^k$.*

3) *Si* f *es continua en* x_o, $\lim\limits_{t_o} g = x_o$ *y* t_o *es un punto de acumulación del dominio de* $f \circ g$, *entonces*

$$\lim_{t_o}[f \circ g] = f(x_o)$$

Las demostraciones de los distintos puntos de este teorema pueden consultarse en el libro [20].

2. Principio de Inducción

El principio de inducción matemática representa una herramienta de una utilidad difícil de exagerar: permite demostrar un conjunto importante de teoremas de todo tipo. Las definiciones que aquí se ofrecen para introducir dicho principio fueron adaptadas de [49–51].

Definición 22. Un conjunto $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ se dice que es un **conjunto inductivo** si se cumple:
1) $0 \in \mathcal{S}$,
2) $s \in \mathcal{S} \implies s+1 \in \mathcal{S}$

Por ejemplo, nuestros axiomas sobre la adición muestran que $\mathbb{R}$ es por sí mismo un conjunto inductivo: $1 \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R} \implies a+1 \in \mathbb{R}$.

Lema 1. *Si existe un conjunto inductivo $\mathcal{S}$, el conjunto de los números naturales*

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathcal{S} | n \textit{ está en todos los conjuntos inductivos}\}$$

es un conjunto inductivo. Además si $\mathcal{S}'$ es otro conjunto inductivo, también se cumple que $\mathbb{N} = \{n \in \mathcal{S}' | n \textit{ está en todos los conjuntos inductivos}\}$.

Demostración. Es claro que $0 \in \mathbb{N}$, pues 0 está en todos los conjuntos inductivos, por definición. Por otra parte, si s está en $\mathbb{N}$, entonces $s+1$ está en todos los conjuntos inductivos (especialmente en $\mathcal{S}$), por lo que también está en $\mathbb{N}$. Ahora, si existe otro conjunto $\mathcal{S}'$, entonces por definición $\mathbb{N} \subseteq \mathcal{S}'$, luego $N = \{n \in \mathcal{S}' | n$ está en todos los conjuntos inductivos$\}$. □

Definición 23. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ puede ser definido como

$$\mathbb{N} = \bigcap_{\mathcal{S} \in \mathcal{I}} \mathcal{S}$$

donde $\bigcap$ denota la intersección de todos los conjuntos en $\mathcal{I}$, que es la familia de los conjuntos inductivos de $\mathbb{R}$.

Teorema 3 (Principio de Inducción). *Si* $P(x)$ *es una propiedad con* $x \in \mathbb{N}$ *y se tiene que:*

1. $P(0)$ *cumple la propiedad y*

2. $P(n)$ *la cumple implica que* $P(n+1)$ *la cumple también,*

entonces todos los números naturales cumplen la propiedad.

Demostración. Consideremos el conjunto de números $\mathcal{A}$ que cumplen la propiedad. Sabemos que es un subconjunto de los números naturales, por hipótesis, $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N}$; se conoce que $0 \in \mathcal{A}$ y $n \in \mathcal{A} \implies n+1 \in \mathcal{A}$, por lo tanto $\mathcal{A}$ es un conjunto inductivo y por el Lema 1 y la Definición de los números naturales, $N \subseteq \mathcal{A}$. Luego $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 4. *Sea* $\mathcal{K}$ *un conjunto de números reales, si* $P(y)$ *es una propiedad con* $y \in \mathbb{R}$ *y se tiene que:*

1. Todo elemento del conjunto $\{P(a+k)|k \in \mathcal{K}\}$ *cumple la propiedad y*

2. $\{P(b+k)|k \in \mathcal{K}\}$ *la cumple implica que* $\{P(b+r+k)|k \in \mathcal{K}\}$ *la cumple también, con* $a, r \in \mathbb{R}$*, entonces el conjunto* $\{a+k+rm|m \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{K}\}$ *cumple la propiedad.*

Demostración. Definamos la propiedad $P'(x)$ con $x \in \mathbb{N}$ como la propiedad del conjunto $\{P(y'+k)|k \in \mathcal{K}\}$ cuando y' es el número $a+rx$. Veamos que las hipótesis pueden ser entendidas en términos de $P(x)$ como:

1^*. $P'(0)$ cumple la propiedad y

2^*. $P'(n)$ la cumple implica que $P'(n+1)$ la cumple también[1]

las cuales son justo las hipótesis del Teorema 3. Por lo tanto, todos los naturales cumplen la propiedad $P'(x)$, lo cual implica que todos los números de la forma $\{a+k+rm\}$ con $k \in \mathcal{K}$ y $m \in \mathbb{N}$ cumplen la propiedad $P(y)$. $\square$

Ahora mostramos dos corolarios que son una consecuencia directa de este teorema y que resultan de utilidad en algunas partes del trabajo. El primero es el caso particular cuando $\mathcal{K} = 0$ y $r = 1$, el segundo es el caso $\mathcal{K} = 0, 1$ y $r = 1$.

[1] 2^* no es equivalente a la hipótesis 2 del corolario, sin embargo es consecuencia de ella. En 2, $b+k$ representa a cualquier número real; mientras que en 2^*, n representa a cualquier número de la forma $a+k+rn$ con $n \in \mathbb{N}$.

Corolario 1. *Si $P(x)$ es una propiedad con $x \in \mathbb{Z}$ y se tiene que:*

1. $P(a)$ cumple la propiedad y

2. $P(n)$ la cumple implica que $P(n+1)$ la cumple también,

entonces todos los enteros mayores o iguales a a cumplen la propiedad. Si además se tiene que

3. $P(n)$ la cumple implica que $P(n-1)$ la cumple también,

entonces todos los números enteros cumplen la propiedad.

Corolario 2. *Si P(x) es una propiedad con $x \in \mathbb{Z}$ y se tiene que:*

1. $P(a)$ y $P(a+1)$ cumplen la propiedad y

2. $P(n)$, $P(n+1)$ la cumplen implica que $P(n+2)$ la cumple también,

entonces todos los enteros mayores o iguales a a cumplen la propiedad. Si además se tiene que

3. $P(n)$, $P(n+1)$ la cumple implica que $P(n-1)$ la cumple también,

entonces todos los números enteros cumplen la propiedad.

Demostración. Por hipótesis, $P(n)$, $P(n+1)$ la cumplen implica también que $P(n+1)$, $P(n+2)$ la cumplen. Esto es el Teorema 4 con $\{P(n+k)|k \in \{0,1\}\}$ y $r = 1$. Similarmente, por la segunda hipótesis: $P(n)$, $P(n+1)$ la cumplen implica también que $P(n-1)$, $P(n)$, que es Teorema 4 con $\{P(n+k)|k \in \{0,1\}\}$ y $r = -1$.

Ahora bien, el conjunto $\mathcal{A} = \{a+k+m|k \in \{0,1\}, m \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto del conjunto $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq a\}$, pues cualquier número de la forma $a+k+m$ es un entero mayor o igual a a. Por otra parte, $\{x|x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq a\} = \{a+0+m|m \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a+k+m|k \in \{0,1\}, m \in \mathbb{N}\}$. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es también el conjunto de todos los enteros mayores a a, y en este dominio se cumplirá la propiedad si se satisfacen las primeras dos hipótesis.

Similarmente, $\mathcal{B} = \{a+k-m|k \in \{0,1\}, m \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de todos los enteros menores o iguales a a. Luego, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathbb{Z}$, es el dominio en donde se cumple la propiedad si se satisfacen las tres hipótesis. $\square$

Existe un principio que es equivalente al Principio de Inducción, se trata del Principio del buen orden, que para su correcta formulación se necesita definir el ordenamiento de los conjuntos.

Definición 24. Una relación binaria $\mathcal{R}$ de $\mathcal{A}$ se dice que es:

1. Reflexiva si para todo $a \in \mathcal{A}$, $a\mathcal{R}a$.
2. Simétrica si para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $a\mathcal{R}b$ implica $b\mathcal{R}a$.
3. Transitiva si para todo $a, b, c \in \mathcal{A}$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ implican $a\mathcal{R}c$.
4. Antisimétrica si para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ implica que $a = b$

Definición 25. Una relación binaria $\mathcal{R}$ que es reflexiva, antisimétrica y transitiva es llamada **ordenamiento parcial** de $\mathcal{A}$.

Definición 26. Un ordenamiento $\leq$ (o $<$) de $\mathcal{A}$ se dice que es **lineal** si para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ siempre se cumple $a \leq b$ ó $b \leq a$. Se conoce como **mínimo** al elemento c de $\mathcal{A}$ que cumpla $c \leq x$ para todo $x \in \mathcal{A}$.

Definición 27. Sea $\prec$ una relación lineal de un conjunto $\mathcal{A}$ se dice que es un **buen orden** si cada subconjunto no vacío de $\mathcal{A}$ tiene un elemento mínimo. El conjunto ordenado $(\mathcal{A}, \prec)$ es llamado **un conjunto bien ordenado**.

Teorema 5 (Principio de buena ordenación)**.** *Cualquier subconjunto de los números naturales tiene un mínimo. O bien, el conjunto* $(\mathbb{N}, <)$ *está bien ordenado.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto no vacío que no tiene un elemento mínimo. Consideremos el conjunto $\mathbb{N} - \mathcal{S}$; es claro que $0 \in \mathbb{N} - \mathcal{S}$, pues si cero estuviera en $\mathcal{S}$, éste sería su elemento mínimo, también que si $q \in \mathbb{N} - \mathcal{S}$, su sucesor también cumple $q + 1 \in \mathbb{N} - \mathcal{S}$, pues de no ser así $q + 1$ sería el mínimo de $\mathcal{S}$. Luego, por el Principio de Inducción $\mathbb{N} - \mathcal{S} = \mathbb{N}$, contradiciendo nuestra hipótesis de que $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Por lo tanto, si $\mathcal{S}$ no es un conjunto vacío, siempre tiene un mínimo. $\square$

3. Sumas, multiplicaciones y otros artificios

Suma

Definición 28. La **suma** de un conjunto de números $\mathcal{Q} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ puede representarse de la siguiente manera:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_m.$$

Si, en cambio, se busca sumar únicamente los elementos a_j de $\mathcal{Q}$ donde j es un par, esto puede escribirse de distintas maneras

$$\sum_{i \leq \frac{m}{2}} a_{2i} = \sum_{i=0}^{\frac{m-\rho_2(m)}{2}} a_{2i} = \sum_{i \leq m, i \text{ es par}} a_i = a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + (a_m \text{ ó } a_{m-1})$$

Donde $\rho_2(m) = 0$ si m es par y $\rho_2(m) = 1$ si es impar. En el primer caso, se usó una condición para el subíndice i (ser menor o igual a $m/2$); en el segundo se definió una función conveniente, $\rho_2 \colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$, para establecer el conjunto de números consecutivos que necesitamos; mientras que en el tercer caso se establecieron las condiciones explícitas de las i que participarán en la suma. Es claro que todas esas expresiones son equivalentes y en algunos casos una de ellas es más oportuna o conveniente que las otras.

Existen distintas maneras de definir la suma usando la notación sigma, por ejemplo, la suma de los elementos de cualquier conjunto $\mathcal{Q} = \{x, y, \ldots, z\}$ de números reales: $\sum_{q \in \mathcal{Q}} q$. Para nuestros propósitos es conveniente pensar en ese conjunto dentro de la imagen de una función $f \colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, es decir

$$f(a) = x,\ f(a') = y,\ \ldots,\ f(a'') = z$$

donde $\{a, a', \ldots, a''\} = \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Veamos que

$$\sum_{i \in \mathcal{A}'} f(i)$$

manifiesta satisfactoriamente lo que se desea hacer. El motivo por el que aquí definimos la suma empleando el concepto de *función* y no el de *relación* es precisamente porque una función es un conjunto de pares ordenados tal que $(a, b_1) = (a, b_2)$ implica que $b_1 = b_2$, es decir, en nuestra expresión anterior $f(i)$ representa **a un sólo número**.

Definición 29. Sea $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ donde $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$, la suma

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} f(i)$$

existe si $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}' = \varnothing$, la suma es nula. Si además se tiene que $\mathcal{A}'$ consiste de un conjunto de números consecutivos, entonces alguna de las cuatro afirmaciones es cierta:

- $\mathcal{A}'$ tiene un elemento menor α y uno mayor β, por lo que

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} f(i) \equiv \sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = f(\alpha) + f(\alpha+1) + \ldots + f(\beta).$$

- $\mathcal{A}'$ no tiene un elemento menor pero sí uno mayor β, por lo que

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} f(i) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\beta} f(i) = \ldots + f(\beta-1) + f(\beta).$$

- $\mathcal{A}'$ tiene un elemento menor α pero no uno mayor. Luego,

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} f(i) \equiv \sum_{i=\alpha}^{\infty} f(i) = f(\alpha) + f(\alpha+1) + \ldots$$

- $\mathcal{A}'$ no tiene un elemento menor ni uno mayor, lo cual se representa de la siguiente manera

$$\sum_{i\in\mathcal{A}'} f(i) \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i) = \ldots + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + \ldots$$

Teorema 6 (Algunos teoremas sobre las sumas)**.** ***1)*** *Sobre el cambio de variable de i a i' tal que $i = i' + k$ con $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = \sum_{i'=\alpha-k}^{\beta-k} f(i'+k) = \sum_{i=\alpha-k}^{\beta-k} f(i+k).$$

2) *Sobre el cambio de variable de i a i' tal que $i = -i'$:*

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = \sum_{i'=-\beta}^{-\alpha} f(-i') = \sum_{i=-\beta}^{-\alpha} f(-i)$$

3) *Si f es una función constante, es decir, si $f(i) = c$ para todo i en el dominio de f, entonces*

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = \sum_{i=\alpha}^{\beta} c = (\beta + 1 - \alpha)c.$$

4) *Si $\alpha < \gamma < \beta$, entonces la suma $\sum\limits_{i=\alpha}^{\beta} f(i)$ puede descomponerse en dos sumas:*

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} f(i) = \sum_{i=\gamma}^{\beta} f(i) + \sum_{i=\alpha}^{\gamma-1} f(i) = \sum_{i=\gamma+1}^{\beta} f(i) + \sum_{i=\alpha}^{\gamma} f(i)$$

En general, si definimos $\sum\limits_{i=\alpha}^{\beta} f(i) \equiv 0$ cuando $\beta < \alpha$, entonces para todo $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ puede hacerse cualquiera de las descomposiciones anteriores.

Demostración. Para demostrar la primera parte, basta con considerar que el n-ésimo elemento de ambas sumas siempre es el mismo: $f(i) = f(i'+k)$ cuando $i = \alpha+(n-1)$ e $i' = \alpha - k + (n-1)$. Por lo tanto, ambas sumas representan la adición de los mismos elementos, significando que son iguales.

Se observa que el primer sumando está dado por $i = \alpha + (1-1) = \alpha$, el segundo por $i = \alpha + (2-1) = \alpha + 2$ y el sumando número $(\beta + 1 - \alpha)$ es el último: $i = \alpha + (\beta + 1 - \alpha - 1) = \beta$. Esto quiere decir que el número de sumandos siempre es $\beta + 1 - \alpha$, lo que prueba la tercera parte.

Para demostrar la segunda parte, podemos observar que el primer elemento de la primera suma $f(\alpha)$ es igual al último de la segunda $f(-(-\alpha))$, el segundo de la primera suma $f(\alpha+1)$ es el penúltimo de la segunda suma $f(-(-\alpha-1))$ y así sucesivamente. $\square$

Teorema 7. *La suma de n potencias consecutivas de cualquier número real $a \neq 1$ es:*

$$\sum_{i=k}^{n+k-1} a^i = \frac{a^{n+k} - a^k}{a-1}.$$

Demostración.

$$(a-1)\sum_{i=k}^{n+k-1} a^i = \sum_{i=k+1}^{n+k} a^i - \sum_{i=k}^{n+k-1} a^i = \left(a^{n+k} + \sum_{i=k+1}^{n+k-1} a^i\right) - \left(\sum_{i=k+1}^{n+k-1} a^i + a^k\right) = a^{n+k} - a^k$$

Es decir, $(a-1)\sum_{i=k}^{n+k-1} a^i = a^{n+k} - a^k$. Si despejamos la suma, damos con la fórmula que deseamos demostrar. $\square$

Teorema 8. *Sobre el límite de la suma de las potencias de un número menor a 1.*

$$\forall |a| < 1, \lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{n+k-1} a^i = \frac{a^k}{1-a}$$

Demostración. Nos preguntamos por el límite de $\frac{a^{n+k}-a^k}{a-1}$ cuando $n \to \infty$, lo cual será $\frac{a^k}{1-a}$ si para $0 < |a| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Consideremos el conjunto $\mathcal{Q} = \{|a|^n : n \in \mathbb{N}\}$, claramente está acotado inferiormente por 0 ($0 < |a| \implies |a| \cdot 0 < |a|^2$ y en general $0 < |a|^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$), luego $\mathcal{Q}$ tiene un ínfimo. Supongamos que su ínfimo $0 < \delta$, es decir, que para toda n se cumple

$$|a|^{n+1} > \delta$$

lo cual implica que para toda n, $|a|^n > \frac{\delta}{|a|}$, es decir, $\frac{\delta}{|a|}$ es una cota inferior de $\mathcal{Q}$, pero $\frac{\delta}{|a|} > \delta \iff \delta > \delta \cdot |a| \iff 1 > |a|$, lo cual es una contradicción a la hipótesis de que δ es el ínfimo de $\mathcal{Q}$, por lo tanto, si no hay ninguna cota inferior mayor a 0, entonces 0 es el ínfimo de $\mathcal{Q}$. Siendo cero el ínfimo de $\mathcal{Q}$, entonces para cualquier

$\varepsilon > 0$ puede encontrarse una N tal que

$$|a|^N < |a^N - 0| < \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ y la prueba está completa. $\square$

Multiplicaciones

Similar a la manera en que definimos una suma, haremos con el concepto de multiplicación.

Definición 30. Sea un conjunto de números $\mathcal{Q} = \{x, y, \ldots, z\}$ que están en la imagen de una función real $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{S}$, es decir, $f(a) = x, f(a') = y, \ldots, f(a'') = z$ tal que $\{a, a', \ldots, a''\} = \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, entonces su **multiplicación o producto** se denota de cualquiera de las siguientes dos maneras:

$$\prod_{q\in\mathcal{Q}'} q = \prod_{i\in\mathcal{A}'} f(i).$$

Adoptaremos también las mismas convenciones de los subíndices para productos de infinitos números. $\prod_{i=-\infty}^{\infty} f(i)$, $\prod_{i=\alpha}^{\infty} f(i)$, etc.

Algunas funciones necesarias

Definición 31. La **función signo** $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ asigna a cualquier número negativo el valor -1, a cualquier número positivo el valor 1 y a cero lo deja igual: $n \in \mathbb{R}^- \implies \operatorname{sgn} n = -1$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $n \in \mathbb{R}^+ \implies \operatorname{sgn} n = 1$. A diferencia de las funciones anteriores, es conveniente usar esta función sin paréntesis: $\operatorname{sgn} 0$ en lugar de $\operatorname{sgn}(0)$, similar a la manera en que se usan las funciones $\sin x$ y $\cos x$, excepto cuando se aplican sobre un número representado por muchos símbolos, como en $\sin(2\pi x)$.

Definición 32. Las siguientes son **funciones de parte entera** $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ que mapean cualquier número real a un número entero *cercano*:

La función piso $\lfloor x \rfloor = y\colon y \leq x < y + 1$ entrega el máximo entero menor o igual a x.

La función techo $\lceil x \rceil = y\colon y - 1 < x \leq y$ entrega el mínimo entero mayor o igual a x. La función redondeo

$$[x] = \begin{cases} \lfloor x \rfloor \iff |x - \lfloor x \rfloor| < |x - \lceil x \rceil| \\ \lceil x \rceil \iff |x - \lceil x \rceil| \leq |x - \lfloor x \rfloor| \end{cases}$$

entrega el *entero más cercano* a x, o $\lceil x \rceil = n + 1$ si $x = n + 0.5$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 33. La **función residuo** $\rho_n\colon \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, n-1\}$ para $n > 1$, es la función aplicada a cualquier $x \in \mathbb{Z}$ que entrega el número natural $y < n$ tal que $(x - y)$ es múltiplo de n:

$$\rho_n(x) = y = x - n \cdot \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

Observe que $x - y = n \cdot \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ es el mayor múltiplo de n que es menor o igual a x.

Los enteros módulo m

De la función residuo ρ_2, notamos que $\rho_2(x) = 0$ si x par y $\rho_2(x) = 1$ en el caso contrario. Es posible ir más allá y preguntarnos por el resultado de aplicar ρ_2 a la suma de dos números cualesquiera: $\rho_2(a+b)$ o a la multiplicación de ellos $\rho_2(ab)$; para contestar esto es necesario que considerar que cada uno de estos números sólo puede ser par (en cuyo caso denotaremos como e) o impar (que denotaremos como o), y podemos intuir las siguientes reglas:

$$e \oplus e = o \oplus o = e$$
$$o \oplus e = e \oplus o = o$$

Donde '$\oplus$' representa la acción de sumar; *un par más un par, al igual que un impar más un impar, da como resultado un par*, significaría la primera línea. Respecto a la multiplicación, sabemos que:

$$e \otimes e = e \otimes o = o \otimes e = e$$
$$o \otimes o = o$$

Definamos formalmente $a \oplus b \equiv \rho_2(a+b)$, así como $a \otimes b = \rho_2(ab)$. Considerando que $\rho_2(e) = 0$ y $\rho_2(o) = 1$, los hechos anteriores pueden representarse como sigue

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

Este sistema se conoce como enteros módulo 2 y únicamente cuenta con dos elementos. Similarmente, puede construirse el sistema de enteros módulo 7 considerando todas las operaciones que es posible hacer con un par de los siete elementos:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Es de notar que en la operación de multiplicación, para cada elemento $x \neq 0$, existe un y sólo un elemento y tal que $x \otimes y = 1$; a este y, se le conoce como el inverso multiplicativo de x ($y = x^{-1}$) en el sistema y todo sistema de enteros módulo n tendrá esta característica si n es un número primo. En cuanto a la suma, cada elemento x está asociado con un z tal que $x + z = 0$, esto sucederá en cualquier sistema de enteros módulo n y z es conocido como el inverso aditivo en el sistema: $z = -x = \rho_n((-1)x) = (n-1) \otimes x$.

Este sistema permite dar a preguntas del tipo

Si hoy es jueves (el día cuatro de la semana), ¿qué día será dentro de cien días?

respuestas como la siguiente

Cien días son catorce semanas más dos días, por lo tanto, será el día seis: sábado.

Donde se pudo usar la tabla anterior para comprobar que $\rho_7(4+100) = \rho_7(4) \oplus \rho_7(100) = 4 \oplus 2 = 6$. La pregunta

Hoy es lunes y cada tres días ahorro diez pesos, ¿qué día será cuando tenga cien?

suponiendo que lunes es el día uno y que empiezo con cero pesos, puede plantearse de la siguiente manera: $\rho_7(1+3\cdot 10) = \rho_7(1) \oplus \rho_7(3\cdot 10) = 1 \oplus (3 \otimes 3)$. Consultando la tabla, la respuesta parece ser: $1 \oplus (2) = 3$, *será el día miércoles.*

El hecho de que $\rho_7(2) = \rho_7(9) = \rho_7(100) = 2$ y, en general, que $\rho_m(p) = \rho_m(q)$ no implique que $p = q$ da lugar a la siguiente definición.

Definición 34 (La relación binaria congruencia módulo m)**.** Si un entero $m \neq 0$ divide a $a-b$, decimos que a es congruente con b módulo m, y se escribe $a \equiv b \pmod m$. En caso contrario, escribimos $a \not\equiv b \pmod m$.

Con esta definición podemos exponer los siguientes resultados, tomados principalmente de [52, 53].

Teorema 9 (Propiedades de la relación congruencia módulo m)**.** *La relación congruencia módulo m es reflexiva, simétrica y transitiva:*

$$\begin{aligned}
&a \equiv a \ (mod\ m)\\
&a \equiv b \ (mod\ m) \implies b \equiv a \ (mod\ m)\\
&a \equiv b \ (mod\ m), b \equiv c \ (mod\ m) \implies a \equiv c \ (mod\ m)
\end{aligned}$$

Demostración. $a - a = 0$ es siempre divisible por $m \neq 0$, lo que prueba el primer resultado. $b - a = -(a-b)$, luego, si b es el entero que resulta de $\frac{a-b}{m}$, entonces $\frac{-(a-b)}{m} = (-1)\frac{a-b}{m} = -b$ (si m divide a $a-b$, también divide a $b-a$). Finalmente, veamos que si m divide a x y a y, también divide a $x+y$, por lo tanto, si divide a $a-b$ y a $b-c$, también divide a $a-c = (a-b)+(b-c)$. $\square$

4. Teoremas fundamentales

Ahora demostraremos el más famoso teorema aritmético, como se hizo en [53], donde usaremos el hecho de que todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo. Aquí se entiende que los números primos son aquellos números positivos que sólo son divisibles entre sí mismos y entre uno: $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

Teorema 10 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *La factorización de cualquier entero $a > 1$ en primos es única, aparte del orden de los factores primos. De manera que podemos representarlo como*

$$a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\beta(p)}$$

donde p es cualquier primo y $\beta(p)$ su exponente, que ha de ser cero si el primo en cuestión no es factor de a.

Demostración. Supongamos que existe un número natural a que es el mínimo que tiene más de una representación por primos

$$a = p_1^{j_i} p_2^{j_2} \ldots p_r^{j_r} = q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s}$$

Es claro que r y s son mayores a 1 (en caso contrario, a sería un número primo). Los primos $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \ldots p_r^{j_r}$ no tienen algún factor común β con $q_1^{k_1} q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s}$ pues, de ser así, habría un número menor a a con dos representaciones distintas, $\frac{a}{\beta}$, contradiciendo nuestra hipótesis.

No se pierde generalidad si asumimos que $p_1^{j_1} < q_1^{k_1}$, y con ello definimos al natural b como sigue:

$$b = (q_1^{k_1} - p_1^{j_1}) q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s} = p_1^{j_1} (p_2^{j_2} \ldots p_r^{j_r} - q_2^{k_2} \ldots q_s^{k_s}).$$

Es evidente que $b < a$, pero $p_1 \nmid (q_1 - p_1)$, por lo que la ecuación anterior nos da dos factorizaciones de b, una involucrando a p_1 y otra sin él, llevándonos a una contradicción. Por lo tanto, si $a > 1$, a tiene una única representación por primos. $\square$

Teorema 11 (Teorema Fundamental del Álgebra)**.** *Todo polinomio $P(x)$ de coeficientes complejos de grado $n \geq 1$, tiene n raíces contando sus multiplicidades. Llamemos $\mathcal{R}$ al conjunto de sus raíces $\{r_1, r_2, \ldots r_n\}$, donde cualesquiera dos o más elementos pueden ser iguales, dependiendo la multiplicidad. Luego, $P(x)$ se puede expresar como múltiplo del producto de n binomios.*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n \prod_{r \in \mathcal{R}} (x - r)$$

Este teorema se encuentra posicionado entre los más bellos, lo mismo que entre los más importantes y los más útiles que es posible encontrar en cualquier rama de las matemáticas. Su primera demostración suele atribuirse a Karl Gauss durante su disertación doctoral en el año de 1799; muchas demostraciones alternativas se han hecho desde entonces, todas ellas emplean conceptos ajenos al álgebra y es por eso que aquí no mostraremos ninguna de ellas. [9, 20]

Para los propósitos de esta tesis, el Teorema Algebraico será adoptado como un *axioma* más, en el sentido de que no hay intención alguna de demostrar su veracidad a partir de los resultados o axiomas enunciados previamente.

5. Viète

Teorema 12 (Teorema de Viète)**.** *Sea el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, donde sus coeficientes pueden ser complejos o reales, se tiene que sus n raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ satisfacen las siguientes fórmulas*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad \sum_{i_2>i_1} r_{i_2} r_{i_1} = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{i_3>i_2>i_1} r_{i_3} r_{i_2} r_{i_1} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

En general, para $0 < m \leq n$, se cumple: $\displaystyle\sum_{i_m>\ldots>i_1} r_{i_m} r_{i_{m-1}} \ldots r_{i_1} = (-1)^m \frac{a_{n-m}}{a_n}$.

Demostración. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que $P(x)$ puede escribirse como $a_n(x-r_1)(x-r_2)\ldots r(x-r_n)$. Luego, al desarrollar esta multiplicación de binomios obtenemos:

$$P(x) = a_n(x^n - (r_1+r_2+\ldots+r_n)x^{n-1} + (r_1r_2+r_1r_3+\ldots+r_2r_3+\ldots+r_{n-1}r_n)x^{n-2} - \ldots)$$

Lo cual nos da un indicio de que el teorema debe ser correcto, pues generar cada nuevo coeficiente parece ser equivalente a realizar las fórmulas presentadas. Supongamos que para cualquier polinomio de un grado m, se cumple que:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = a_m \left(x^m + x^{m-1}(-1)^1 \sum_{i}^{m} r_i + \ldots + (-1)^m \sum_{i_m>\ldots>i_1}^{m} r_{i_m} \ldots r_{i_1} \right)$$

Llamemos β_k a $\frac{a_{m-k}}{a_m}$, el k-ésimo coeficiente de la parte derecha de la ecuación, que es $(-1)^k \sum\limits_{i_k>\ldots>i_1}^{m} r_{i_k} \ldots r_1$ si $k > 0$ y 1 si $k = 0$:

$$P(x) = a_m \cdot \sum_{i=0}^{m} \beta_i x^{m-i}$$

Luego, si multiplicamos al polinomio $P(x)$ por $(x - r_{m+1})$, obtenemos uno de un grado superior al primero:

$$\begin{aligned}
P'(x) &= (x - r_{m+1}) \cdot P(x) = a_m \cdot (x - r_{m+1}) \left(\sum_{i=0}^{m} \beta_i x^{m-i} \right) \\
&= a_m(\beta_0 x^{m+1} + (\beta_1 - r_{m+1}\beta_0)x^m + (\beta_2 - r_{m+1}\beta_1)x^{m-1} + \ldots - r_{m+1}\beta_m) \\
&= a_m \sum_{i=0}^{m+1} \beta_i' x^{m+1-i}
\end{aligned}$$

es claro que $\beta_0' = \beta_0 = 1$. Veamos lo que conforma a su k-ésimo coeficiente para $0 < k \leq m$:

$$\begin{aligned}
\beta_k' &= \beta_k - r_{m+1} \cdot \beta_{k-1} \\
&= \left((-1)^k \sum_{i_k > \ldots > i_1}^{m} r_{i_k} \ldots r_{i_1} \right) - r_{m+1} \cdot \left((-1)^{k-1} \sum_{i_{k-1} \ldots i_1}^{m} r_{i_{k-1}} \ldots r_{i_1} \right) \\
&= (-1)^k \sum_{i_k > \ldots > i_1}^{m+1} r_{i_k} \ldots r_{i_1}
\end{aligned}$$

El coeficiente número $m + 1$ estará dado por

$$\beta_{m+1}' = -r_{m+1} \cdot (-1)^m \sum_{i_m > \ldots > i_1}^{m} r_{i_m} \ldots r_{i_1} = (-1)^{m+1} \sum_{i_{m+1} > \ldots > i_1}^{m+1} r_{i_{m+1}} \ldots r_{i_1}$$

Luego, se ha verificado que

$$\begin{aligned}
P'(x) = a_m \Bigg(& x^{m+1} + x^m (-1)^1 + \sum_{i}^{m+1} r_i + x^{m-1} (-1)^2 \sum_{i_2 > i_1}^{m+1} r_{i_2} r_{i_1} \\
& + \ldots + (-1)^{m+1} \sum_{i_{m+1} > \ldots > i_1}^{m+1} r_{i_{m+1}} \ldots r_{i_1} \Bigg).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si los polinomios de grado m cumplen nuestro teorema, ello implica que lo cumplirán los de grado $m+1$. Es sencillo verificar que se cumple para $m = 1$, luego, por Principio de Inducción, lo cumplirán todos los polinomios de grado $n > 0$. $\square$

6. Sucesiones

Sucesiones y transformaciones de sucesiones

Definición 35. Una **sucesión** es una función cuyo dominio es un subconjunto de los números enteros.

Se denota como $(a_i)_{i=\alpha}^{\beta}$ a una sucesión cuyo dominio es $\{n|n \in \mathbb{N}, \alpha \leq n \leq \beta\}$ y como $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ a una sucesión cuyo dominio es $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{Z}$. Por ejemplo, $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión con dominio en los números naturales y $(a_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ a una sucesión cuyo dominio son todos los enteros: la primera se dice una sucesión infinita y la segunda una sucesión bi-infinita.

Cuando hablemos de sucesiones, únicamente la primera vez que se les mencione se indicará su dominio, después sólo se le representará entre paréntesis. Para señalar los elementos de una sucesión siempre se empleará uno de los cuatro casos siguientes:

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots)$$
$$(a_i)_{i\in\mathcal{Q}} = (\ldots, a_{q_1}, a_{q_2}, a_{q_3}, \ldots) \colon q_n \in \mathcal{Q}$$
$$(a_j)_{j=-\infty}^{-1} = (\ldots, a_{-6}, a_{-5}, a_{-4}, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1})$$
$$(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} = (\ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

Cuando hablemos de sucesiones que son infinitas a la derecha, siempre se usará el subíndice 'n', en cambio, se usará 'j' para las sucesiones que son infinitas a la izquierda y 'k' para las sucesiones que son bi-infinitas. Se usará 'i' cuando el dominio de la sucesión no es necesariamente un conjunto de enteros consecutivos y no necesariamente es un conjunto infinito, o bien, cuando se trata de un conjunto que está por definirse.

Respecto al codominio, lo más común es tratar con sucesiones cuyo codominio es también un subconjunto de $\mathbb{Z}$ (aunque su definición admite que otros objetos como números reales o incluso otras sucesiones pueden estar en su codominio). Por ejemplo, las siguientes sucesiones

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon a_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.[2]
- $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}}\colon b_n = -2n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

son sucesiones con dominio y codominio en los naturales y los enteros, respectivamente. Por el momento, representaremos las sucesiones como matrices de dos filas, donde los elementos de una misma columna son n y el n-ésimo término de la sucesión; en otras palabras, la primera fila es el dominio de la sucesión y la segunda fila el codominio (los valores de la sucesión)

$$(a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \dots \end{pmatrix}, \qquad (b_k) = \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 4 & 2 & 0 & -2 & -4 & \dots \end{pmatrix}$$

Así, por ejemplo, el elemento a_5 es igual a 25 y $b_{-2} = 4$.

Definición 36. La **transformación de una sucesión** es una función que mapea una sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ a otra $(D'_i)_{i\in\mathcal{Q}'}$ mediante ciertas reglas. Dichas reglas indicarán el dominio $\mathcal{Q}'$ de (D'_i), que puede ser igual a $\mathcal{Q}$, un subconjunto de él o no tener una relación tan obvia con él. Una transformación T generalmente se definirá de la siguiente manera:[3]

$$\mathrm{T} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i\in\mathcal{Q}'}\colon (f(n) \in \mathcal{Q}' \iff P(n)) \wedge \forall f(n) \in \mathcal{Q}'(D'_{f(n)} = g((D_i), n))$$

En lo posterior, se omitirá la escritura total de la definición de una transformación, entendiendo que el dominio de la sucesión transformada depende de ciertas condiciones.

La **composición** de transformaciones de sucesiones se expresará exactamente igual que la composición de cualquier otra función: $[\mathrm{A} \circ \mathrm{B}]((D_i)) \equiv [\mathrm{A} \circ \mathrm{B}] \circ (D_i)$, también se define $\mathrm{A}^2 \equiv \mathrm{A} \circ \mathrm{A}$ y, en general, $\mathrm{A}^n \equiv \mathrm{A} \circ \mathrm{A}^{n-1}$ para $n > 1$.

[2] No confundir la sucesión (a_n) con su n-ésimo elemento a_n.

[3] Debido a que las sucesiones son funciones representadas con paréntesis, es conveniente denotar la transformación de una sucesión como una composición, es decir, $\mathrm{A} \circ (D_i)$ en lugar de $\mathrm{A}((D_i))$. Como se observa, las transformaciones de sucesiones siempre serán representadas con letras mayúsculas ordinarias: A, B, C, D, …, O, P, Q, R, …

Por ejemplo, consideremos la transformación

$$\mathrm{A} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i\in\mathcal{Q}} \colon D'_n = D_n + 2 \text{ para todo } n \in \mathcal{Q}$$

ésta mapea una sucesión con dominio en $\mathcal{Q}$ a otra con el mismo dominio. Para esta transformación, el codominio generalmente no es el mismo en (D_i) y (D'_i); veamos lo que ocurre tras aplicar A a las sucesiones del ejemplo anterior:

$$\mathrm{A} \circ (a_n) \equiv (a'_n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ 3 & 6 & 11 & 18 & 27 & 38 & \dots \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{A} \circ (b_k) \equiv (b'_k) = \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 6 & 4 & 2 & 0 & -2 & \dots \end{pmatrix}$$

Observemos que el codominio de (b_k) es exactamente igual al de (b'_k), y se cumple que $b'_{n+1} = b_n = -2n \ \forall n \in \mathbb{Z}$. Para (b_k), aplicar la transformación A es equivalente a aplicar la transformación R que se define como

$$\mathrm{R} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i=Q'} \colon D'_{n+1} = D_n \ \forall n \in \mathcal{Q}$$

Es decir, R mapea a cualquier sucesión a otra sucesión con los mismos valores pero con diferentes subíndices: $D_{q_n} = D'_{q_n+1}$, o bien si la primera sucesión mapea $q_0 \mapsto D_{q_0}$, la segunda sucesión mapea $q_0 + 1 \mapsto D_{q_0}$.

Esta transformación está inspirada en el operador R que definen en [54], que consiste en recorrer 'a la derecha' cualquier sucesión infinita, o con dominio en un subconjunto infinito de los naturales. Veamos el caso de la transformación R en $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ cuando $\mathcal{Q}$ representa los primeros m números naturales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 & \dots & D_m \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & m+1 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 & \dots & D_m \end{pmatrix}$$

Y si $\mathcal{Q}$ representa todos los números enteros, como era el caso del dominio de (b_k), aplicar R en $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ resulta en

$$\begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_1 & D_2 & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & D_{-3} & D_{-2} & D_{-1} & D_0 & D_1 & \dots \end{pmatrix}$$

La transformación R es importante porque si existe una sucesión doblemente infinita (d_k) que consista en la repetición de los mismos m elementos

$$(d_k) = (\dots, \boldsymbol{d_1, d_2, d_3, \dots, d_m}, d_1, d_2, \dots, d_m, d_1, d_2, \dots, d_m, \dots)$$

donde $d_{n+m\cdot j} = d_n$ para cualquier $j \in \mathbb{Z}$. Entonces, la transformación R^t tiene el siguiente efecto sobre (D_k):

$$\begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & d_{m-1} & d_m & d_1 & d_2 & \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots & -1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & d_{m-1-t} & d_{m-t} & d_{1-t} & d_{2-t} & \dots \end{pmatrix}$$

Pero $d_{m+c-t} = d_{m+c}$ cuando t es un múltiplo de m, luego $\mathrm{R}^m \circ (d_k) = (d_k)$, $\mathrm{R}^{2m} \circ (d_k) = (d_k)$ y en general $\mathrm{R}^{n\cdot m} \circ (d_k) = (d_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que (d_k) es una sucesión propia o una eigensucesión de la transformación R^m.

Definición 37. Se conoce como **sucesión periódica** a toda sucesión infinita o bi-infinita (D_j) si existe un número mínimo $m \neq 0$ tal que para cualquier elemento D_n se cumpla $D_n = D_{n+m}$. Se dice también que (D_j) tiene un **periodo** m.

Definición 38. La **eigensucesión de una transformación** A es una sucesión que permanece invariante ante dicha transformación: $\mathrm{A} \circ (D_i) = (D_i)$. Por ejemplo, todas las sucesiones son invariantes ante la transformación

$$\mathrm{I} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D_i')\colon D_n' = D_n \ \forall n \in \mathcal{Q}$$

Luego, I se conoce como la transformación identidad de sucesiones, ella es equivalente a aplicar n veces la misma transformación: $\mathrm{I} \circ (D_i) = \mathrm{I}^n \circ (D_i) = (D_i)$.

Definición 39 (Algunas transformaciones de sucesiones)**.** Definamos las siguientes transformaciones de sucesiones

$$\mathrm{R} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i\in\mathcal{Q}'} \colon D'_{n+1} = D_n \ \forall n \in \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{L} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i\in\mathcal{Q}'} \colon D'_{n-1} = D_n \ \forall n \in \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{N} \circ (D_i)_{i\in\mathcal{Q}} \equiv (D'_i)_{i\in\mathcal{Q}'} \colon D'_{n} = -D_n \ \forall n \in \mathcal{Q}$$

$$\mathrm{V}_j \circ (D_k)_{k\in\mathbb{Z}} \equiv (D'_k) \colon D'_{j+n} = D_{j-n} \ \forall n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } j \in \mathbb{Z}$$

Donde R recorre una sucesión 'a la derecha', L la recorre a la izquierda y N invierte los signos de cada elemento. La transformación V_j, voltea toda la sucesión en torno a la posición j, es decir

$$(\ldots, D_{j-2}, D_{j-1}, D_j, D_{j+1}, D_{j+2}, \ldots) \mapsto (\ldots, D_{j+2}, D_{j+1}, \boldsymbol{D'_j[= D_j]}, D_{j-1}, D_{j-2}, \ldots)$$

Donde hemos dejado a un lado la representación de las sucesiones con matrices de dos filas y hemos agregado $D'_j[= D_j]$ para indicar que ése es el j-ésimo elemento de la nueva sucesión (D'_j), y cuyo valor es exactamente el mismo que el de D_j; el valor que está a la izquierda de D'_j es el elemento D'_{j-1}, que resulta ser igual al elemento D_{j+1}: no se ha escrito $D'_{j-1}[= D_{j+1}]$, pues sólo basta con indicar la posición de un elemento cuando se ha adoptado la convención *los elementos a la izquierda son los antecesores y los de la derecha los sucesores*. Denotaremos como V a V_j cuando $j = 0$, es decir $\mathrm{V} \equiv \mathrm{V}_0$.

Definición 40 (Suma de elementos de una sucesión)**.** Naturalmente, nos es posible sumar los elementos de una sucesión, que es un tipo de función. Por ejemplo, si se tiene una sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{Q}}$, existirá $\sum\limits_{j\in\mathcal{Q}'} D_j$ si $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$.

Definición 41. Una **sucesión de sucesiones** es una sucesión cuyos elementos son sucesiones. Se denota por $((D_{i,i'})_{i'\in\mathcal{Q}'})_{i\in\mathcal{Q}}$ a la sucesión más general, cuyo n-ésimo elemento es la sucesión $(D_{n,i'})_{i'\in\mathcal{Q}'}$, el m-ésimo elemento de esta última es $D_{n,m}$.

Ampliando algunas convenciones anteriores, denotaremos como $((D_{m,n})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ a una sucesión con dominio en los enteros, que tiene como elementos sucesiones con dominio en los enteros.

$$((D_{m,n})) = ((D_{0,n}), (D_{1,n}), (D_{2,n}), (D_{3,n}), (D_{4,n}), \ldots)$$

Donde

$$\begin{aligned}
(D_{0,n}) &= (D_{0,0}, D_{0,1}, D_{0,2}, D_{0,3}, D_{0,4}, \ldots) \\
(D_{1,n}) &= (D_{1,0}, D_{1,1}, D_{1,2}, D_{1,3}, D_{1,4}, \ldots) \\
(D_{2,n}) &= (D_{2,0}, D_{2,1}, D_{2,2}, D_{2,3}, D_{2,4}, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Para agilizar la representación de una sucesión de sucesiones previamente definida, la representaremos sólo con una letra **negrita**: $((D_{m,n})) \equiv \boldsymbol{D}$. También podemos representar una sucesión de sucesiones con una matriz:

$$((D_{m,n})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}} = \boldsymbol{D} \equiv \begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} & D_{0,3} & D_{0,4} & D_{0,5} & \ldots \\ D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & D_{1,4} & D_{1,5} & \ldots \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & D_{2,4} & D_{2,5} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Similarmente, los subíndices 'm' y 'k' siempre representarán una sucesión con dominio en los naturales, que tiene como elementos a sucesiones con dominio en los enteros: $((D_{m,k})_{k\in\mathbb{Z}})_{m\in\mathbb{N}}$. Que puede representarse con la siguiente matriz:

$$((D_{m,k})_{k\in\mathbb{Z}})_{m\in\mathbb{N}} = \boldsymbol{D} \equiv \begin{pmatrix} \ldots & D_{0,-2} & D_{0,-1} & D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} & \ldots \\ \ldots & D_{1,-2} & D_{1,-1} & D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} & \ldots \\ \ldots & D_{2,-2} & D_{2,-1} & D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & \ldots \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definición 42. La **transformación de una sucesión de sucesiones** se define de manera análoga a la transformación de sucesiones. Pero se denotará con letras negritas: por ejemplo, la transformación $\mathbf{N}$ definida en función de la transformación de sucesiones N

$$\mathbf{N} \circ ((D_{i,i'})_{i' \in \mathcal{Q}'})_{i \in \mathcal{Q}} \equiv ((D'_{i,i'}))\colon (D'_{m,i'}) = \mathrm{N} \circ (D_{m,i'}) \ \forall m \in \mathbb{N}$$

tiene el siguiente efecto la sucesión $((D_{m,n}))$

$$\begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} & D_{0,2} & D_{0,3} & \dots \\ D_{1,0} & D_{1,1} & D_{1,2} & D_{1,3} & \dots \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & D_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D'_{0,0}[= -D_{0,0}] & -D_{0,1} & -D_{0,2} & -D_{0,3} & \dots \\ -D_{1,0} & -D_{1,1} & -D_{1,2} & -D_{1,3} & \dots \\ -D_{2,0} & -D_{2,1} & -D_{2,2} & -D_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

7. Recursión

La definición que aquí adoptamos de *relación de recursión* es la siguiente:

Definición 43. Una relación de recursión es una ecuación que expresa el elemento de una sucesión $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}}$ como dependiente de ciertos elementos de la misma. Esta ecuación tiene la forma

$$a_n = \zeta((a_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}, n) \tag{10}$$

donde $\mathcal{Q}_n$ es un conjunto de enteros que está en función de n y ζ es una función de $n \in \mathcal{Q}$ y la sucesión $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}$. De modo que $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}$ puede[4] ser una subsucesión de $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}}$ con dominio en $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q}$

Si existe un n tal que a_n y $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}$ solucionan la Ecuación (10), decimos que $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}}$ satisface la relación de recursión en n.

Nuestra definición dista de todas las que se encuentran en la literatura puesto que para nosotros la recursión **no es** una instrucción suficiente para generar un conjunto de elementos (o bien, una sucesión). En cambio, en este trabajo se habla de una relación de recursión como una ecuación o una igualdad condicional que será cierta sólo bajo ciertos elementos $\mathcal{Q}_n$, $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}}$, a_n y n.

[4]Si no lo es, es decir si $\mathcal{Q}_n \nsubseteq \mathcal{Q}$, la sucesión $(a_i)_{i \in \mathcal{Q}_n}$ no está definida y la igualdad no se satisface.

Demostraciones

Capítulo 0. Preludio matemático

Teorema 1. *Sea la función* $A(x) = 1 + \frac{1}{x}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y* $x \neq 0$*, cuyos eigenelementos son* ω*, raíz positiva de* $\Omega(x) = x^2 - x - 1$ *y* α*, la raíz negativa, se tiene que:*
1) *Si* $x > \omega$*, entonces* $0 < A(x) < \omega$*, así como* $\omega < A^2(x)$*.*
2) *Si* $x > \omega$*, el supremo del conjunto de números* $\{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ *es igual al ínfimo de* $\{A^{2n}(x)|n \in \mathbb{N}\}$*, que es igual a* ω*:*

$$\sup\ \{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{2n}(x)|n > 0\} = \omega$$

3) *Si* $0 < y < \omega$*,* $A(y) > \omega$*, luego:* $\sup\ \{A^{2n}(y)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{2n+1}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \omega$*.*

Demostración. Ya mostramos que $\Omega(x)$ tiene dos raíces distintas y de diferente signo, decidimos nombrar a ω como la raíz positiva. Mostremos que $\omega < x \implies A(x) < \omega$. Sea $x = \omega + \delta$ con $\delta > 0$, entonces $A(x) = 1 + \frac{1}{\omega+\delta} > 0$. Luego

$$1 + \frac{1}{\omega + \delta} < \omega \iff \omega + \delta + 1 < \omega^2 + \omega \cdot \delta = \omega + 1 + \omega \cdot \delta \iff \delta < \omega \cdot \delta \iff 1 < \omega$$

Lo cual es necesariamente cierto, dado que si $\omega < 1$, entonces α, la raíz negativa de $\Omega(x)$, sería $\alpha = -\frac{1}{\omega} < -1$ y la ecuación $\alpha + 1 = \alpha^2$ no podría satisfacerse: $\alpha < -1$ implica $\alpha + 1 < 0$, pero $0 < \alpha^2$, luego: $\alpha + 1 < 0 < \alpha^2$.
Por lo tanto $1 < \omega$, luego $\omega < x \implies A(x) < \omega$.

Sea $A(x) = \omega - \delta$ con $0 < \delta < \omega$, mostremos que $\omega < A^2(x)$:

$$\begin{aligned}\omega < A^2(x) = A(A(x)) &\iff \omega < 1 + \frac{1}{\omega - \delta} \iff \omega^2 - \omega \cdot \delta < \omega - \delta + 1 \\ &\iff \omega + 1 - \omega \cdot \delta < \omega - \delta + 1 \iff -\omega \cdot \delta < -\delta \\ &\iff -\omega \cdot \delta \cdot \Big(-\frac{1}{\delta}\Big) > -\delta \cdot \Big(-\frac{1}{\delta}\Big) \iff \omega > 1\end{aligned}$$

Y ya sabemos que $\omega > 1$, por lo tanto $0 < x < \omega \implies \omega < A^2(x)$.[1] Note que este desarrollo usa las mismas ideas y procedimientos que el anterior; pronto haremos un desarrollo empleando los signos $\pm$ y $\lesseqgtr$, ej. $0 \lesseqgtr \pm 1$, que permiten hablar de dos cuestiones simultáneamente, de modo que en algún momento se llegue a la misma desigualdad, ej. $0 \lesseqgtr \pm 1 \implies 0 < \pm 1 \cdot (\pm 1)$.

Por lo demostrado anteriormente, el Principio de Inducción (Teorema A.3) nos dice que si $\omega < x$, entonces $A^{2n+1}(x) < \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que ω representa una cota superior para este conjunto de números. Por argumentos equivalentes, sabemos que ω es una cota inferior del conjunto de números $A^{2n}(x)$.

Este hecho por sí solo es importante, pues hemos encontrado una cota inferior de $\{A^{2n}(x) | n \in \mathbb{N}\}$, que es superior a todas las cotas inferiores que nos brinda el Lema 0.2 (los números de la forma A^{2m+1}); también encontramos una cota superior a $\{A^{2n+1} | n \in \mathbb{N}\}$. Ello nos lleva a sospechar que ω debe ser también el ínfimo y el supremo de estos conjuntos, respectivamente; pero esto no es un hecho obvio ni de demostración inmediata, pues aún no podemos negar la existencia de otro número c ligeramente menor a ω que sea el ínfimo de A^{2n}, por ejemplo.

Lo que queremos demostrar es que, como nos sugiere la gráfica de la Figura 0.4, los valores de $A^{2n}(x)$ se acercan cada vez más a un valor: ω; es decir, si $A^{2n}(x)$ está a cierta 'distancia' de ω, esa distancia disminuye en cierta proporción en A^{2n+2}. Y lo más natural es suponer que esa distancia ha disminuido a menos de la **mitad** de su valor.

[1] En el desarrollo mostrado, se cambia de '$>$' a '$<$' sucede porque si $a > b$, entonces para todo $c < 0$, se tiene que $-ac > -bc$ (por los axiomas de orden), luego $-ac + (ac + bc) > -bc + (ac + bc)$, es decir, $bc > ac$ o bien $ac < bc$. Conclusión: si $c < 0$, $a > b \implies ac < bc$.

Principio de cercanía. La distancia de $A^n(x)$ a ω tiende a disminuir.

1) Mostremos bajo qué condiciones $|x-\omega| > |A(x)-\omega|$. Sea $x = \omega \pm \delta > 0$:

$$|x-\omega| > |A(x)-\omega| \iff \delta > \left|1 + \frac{1}{\omega \pm \delta} - \omega\right| \iff \delta > \left|\frac{\omega \pm \delta + 1 - (\omega+1) \mp \omega\delta}{\omega \pm \delta}\right|$$
$$\iff \delta(\omega \pm \delta) > |\pm\delta(1-\omega)| \iff x > \omega - 1$$

2) Sea $x = \omega \pm \delta > 0$ donde δ es la distancia de x a ω. Demostremos que la distancia de $A^2(x)$ a ω disminuye a menos de la mitad, es decir: $|A^2(x)-\omega| < \delta/2$.
Mostraremos que $A^2(\omega+\delta) - \omega < \delta/2$ y por otra parte $-(A^2(\omega-\delta)-\omega) < \delta/2$. Ambos casos pueden manifestarse en una única expresión $A^2(\omega \pm \delta) \lesseqgtr \omega \pm \frac{\delta}{2}$.

$$A^2(x) \lesseqgtr \omega \pm \frac{\delta}{2} \iff 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\omega\pm\delta}} \lesseqgtr \omega \pm \frac{\delta}{2} \iff 2 + \frac{1}{\omega \pm \delta} \lesseqgtr \Big(\omega \pm \frac{\delta}{2}\Big)\Big(1 + \frac{1}{\omega \pm \delta}\Big)$$
$$\iff 2(\omega \pm \delta) + 1 \lesseqgtr \Big(\omega \pm \frac{\delta}{2}\Big)(\omega \pm \delta + 1) = \omega^2 \pm \frac{3}{2}\omega\delta + \frac{\delta^2}{2} + \omega \pm \frac{\delta}{2}$$
$$\iff 2(\omega \pm \delta) + 1 \lesseqgtr 2\omega + 1 + (\delta \pm 3\omega \pm 1)\frac{\delta}{2} \iff \pm 2\delta \lesseqgtr (\delta \pm 3\omega \pm 1)\frac{\delta}{2}$$
$$\iff \pm 2\delta \cdot \Big(\pm\frac{1}{\delta}\Big) < (\delta \pm 3\omega \pm 1)\frac{\delta}{2} \cdot \Big(\pm\frac{1}{\delta}\Big) \iff 4 < 3\omega + 1 \pm \delta$$

Pero ω es mayor a 1, luego $4 < 3\omega + 1 + \delta$ y por tanto $A^2(\omega+\delta) < \omega + \frac{\delta}{2}$.
Por otro lado, $0 < \omega - \delta \implies \delta < \omega$, consecuentemente $3\omega + 1 - \delta > 3\omega + 1 - \omega = 2\omega + 1$.
Ahora bien $4 < 2\omega + 1 \iff \frac{3}{2} < \omega$. Mostremos esto evaluando A^2 en el número uno (sabemos que $1 < \omega \implies A^2(1) < \omega$):

$$A(A(1)) = A\Big(1 + \frac{1}{1}\Big) = A(2) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Por lo tanto $4 < 3\omega + 1 - \omega < 3\omega + 1 - \delta$ lo que implica que $A^2(\omega-\delta) > \omega - \frac{\delta}{2}$. Esto completa la demostración del principio.

Finalmente, observemos que ningún número c mayor a cero y menor a uno puede ser el supremo del conjunto $\mathcal{Q} \equiv \{A^{2n+1}(\omega+\delta) | n \in \mathbb{N} \ y \ \delta > 0\}$, pues $A(x) = 1 + \frac{1}{\omega+\delta}$ es siempre mayor a uno. Por lo tanto c: $1 \leq c \leq \omega$; veamos que c es el supremo de $\mathcal{Q}$

sólo si todo

$$A^{2n+1}(\omega+\delta) = A^{2n}(A(\omega+\delta)) \equiv A^{2n}(\omega-\delta') \equiv \omega-\delta''$$

(con $0<\delta',\delta''<\omega$ por hipótesis), es tal que $-\delta''/2 < c-\omega$.

Si $-\delta''/2 \geq c-\omega$, el principio de cercanía nos indica que

$$A^{2n+3}(\omega+\delta) = A^2(\omega-\delta'') > \omega-\delta''/2,$$

y se tendría a la vez que $A^{2n+3} > \omega+(c-\omega)=c$, es decir, si $-\delta''/2 \geq c-\omega$, existirá en $\mathcal{Q}$ un elemento superior al supremo.

Por lo tanto, $-\delta''/2 < c-\omega$. Ello nos lleva a lo siguiente

$$\omega-\delta'' < 2c-\omega \implies A^{2n+1}(\omega+\delta) < 2c-\omega$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Es decir todos los elementos de $\mathcal{Q}$ son menores a $2c-\omega$. Pero $c\leq\omega \implies 2c-\omega\leq c$ y ninguna cota superior es menor a c, luego $2c-\omega=\omega \implies \omega=\sup\,\mathcal{Q}$. Por argumentos similares, se demuestra que

$$\omega = \text{ínf}\,\{A^{2n}(\omega+\delta)|n\in\mathbb{N}\ y\ \delta>0\}.$$

La tercera parte del teorema es una consecuencia directa de las primeras dos. Pueden usarse métodos anteriores para demostrar que $0<y<\omega \implies \omega<A(y)$. Y ya se mostró que el supremo de $(A^{2n+1}(x))$ —siempre que $\omega<x$— es precisamente ω; luego $\sup\,\{A^{2n+1}(A(y))|n\in\mathbb{N}\} = \sup\,\{A^{2n}(y)|n\in\mathbb{N}\}=\omega$. Análogamente, se comprueba que $\sup\,\{A^{2n}(A(y))|n\in\mathbb{N}\} = \sup\,\{A^{2n+1}(y)|n\in\mathbb{N}\}=\omega$. $\square$

Capítulo 1. En un principio era el signo

Teorema 2. *Si $x < \psi$, el supremo del conjunto de números $\{A^{-2n}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ es igual al ínfimo de $\{A^{-2n-1}(x)|n > 0\}$, que es igual a ψ:*

$$\sup\ \{A^{-2n}(x)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{-2n-1}(x)|n > 0\} = \psi$$

Similarmente, si $\psi < y < 0$, entonces $A(y) < \psi$ y:

$$\sup\ \{A^{-2n-1}(y)|n \in \mathbb{N}\} = \text{ínf}\ \{A^{-2n}(x)|n > 0\} = \psi$$

.

Demostración. Veamos que se cumple el principio de cercanía, similar al Teorema 1:

$$\begin{aligned}
A^{-2}(\psi{\pm}\delta) \lesseqgtr \psi \pm \frac{\delta}{2} &\iff \frac{1}{\frac{1}{\psi\pm\delta-1} - 1} \lesseqgtr \psi \pm \frac{\delta}{2} \\
&\iff 1 \gtreqless \Big(\frac{1}{\psi \pm \delta - 1} - 1\Big)\Big(\psi \pm \tfrac{\delta}{2}\Big) \\
&\iff \psi \pm \delta - 1 \lesseqgtr (1 - \psi \mp \delta + 1)\Big(\psi \pm \frac{\delta}{2}\Big) = (2 - \psi \mp \delta)\Big(\psi \pm \frac{\delta}{2}\Big) \\
&\iff \psi \pm \delta - 1 \lesseqgtr 2\psi \pm \delta - \psi^2 \mp \frac{\psi\delta}{2} \mp \delta\psi - \frac{\delta^2}{2} \\
&\iff -1 \lesseqgtr \psi - \psi^2 - \frac{\delta}{2}(\pm 3\psi + \delta) = -1 - \frac{\delta}{2}(\pm 3\psi + \delta) \\
&\iff 0 \gtreqless \pm 3\psi + \delta \colon \begin{cases} 0 > 3\psi + \delta \implies (A^{-2}(\psi + \delta) < \psi + \delta/2) \\[2ex] 0 < -3\psi + \delta \implies (A^{-2}(\psi - \delta) > \psi - \delta/2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Si $3\psi + \delta$ es negativo, entonces se cumple el principio de cercanía: veamos que se cumple debido a que $\psi < 0$ y por hipótesis $\psi + \delta < 0$. Por otra parte, $-3\psi + d$ siempre es positivo, por lo que el principio de cercanía se cumple para todo $x < 0$ con $x \neq \psi$.

Sea c una cota superior del conjunto de números $\mathcal{Q} \equiv \{A^{-2n}(\psi{-}\delta)|n \in \mathbb{N} \text{ y } \delta > 0\}$, demostremos que para todo n, el número $A^{-2n}(\psi{-}\delta) \equiv \psi{-}\delta'$ es tal que $-\delta'/2 < c{-}\psi$. Si no fuera así, se tendría que $A^{-2n-2}(\psi{-}\delta) = A^{-2}(\psi{-}\delta') > \psi{-}\delta'/2 > \psi{+}(c{-}\psi) = c$, es decir, $A^{-2n-2}(\psi-\delta) > c$, contradiciendo la hipótesis de que c es una cota superior de $\mathcal{Q}$. Por lo tanto, es necesario que $c-\psi > -\delta/2$ para toda $\delta > 0$, o bien, que $c-\psi$ sea mayor a cualquier número negativo, es decir, $c-\psi \geq 0$, implicando que $c \geq \psi$: la menor cota superior es $c=\psi$, por lo tanto, ψ es el supremo de $\mathcal{Q}$. De manera similar, se demuestra que ψ es el ínfimo de $\{A^{-2n-1}(\psi-\delta) | n \in \mathbb{N} \text{ y } \delta > 0\}$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, basta con mostrar que $A^{-1}(\psi+\delta) < \psi$:

$$A^{-1}(\psi+\delta) = \frac{1}{\psi+\delta-1} < \psi \iff 1 > \psi^2 + \psi\delta - \psi = 1 + \psi\delta \iff 0 > \psi\delta$$

Lo cual es siempre cierto pues ψ es negativo y δ positivo. Luego, ψ es el supremo del conjunto de números de la forma $A^{-2n}(A^{-1}(\psi+\delta)) = A^{-2n-1}(\psi+\delta)$; similarmente, ψ es el ínfimo de los números $A^{-2n-1}(A^{-1}(\psi+\delta)) = A^{-2n-2}(\psi+\delta)$. □

Teorema 5. *Sea $(a_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ una sucesión cuyo dominio es un conjunto de dos o más enteros consecutivos tal que se satisface la recursión $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{Q}}$, donde $\mathcal{V}$ se define:*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{K}} = \{m, m+1 | m \in \mathcal{K} \wedge \forall i \in \mathcal{K}(m \leq i)\}$$

como el conjunto que contiene los dos elementos menores —si existen— de todo conjunto $\mathcal{K}$ de enteros consecutivos. Entonces, para todo conjunto de enteros consecutivos $\mathcal{P}$: $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, existe una y sólo una extensión $(b_i)_{i\in\mathcal{P}}$ tal que $\forall i \in \mathcal{Q}(b_i = a_i)$ y se encuentra definida por $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{P} \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{P}}$.

Lema 1. *Para cualesquiera $p, p+1, n \in \mathcal{P}$, el miembro n-ésimo de (b_n) puede escribirse como*

$$b_n = F_{n-p-1} \cdot b_p + F_{n-p} \cdot b_{p+1} \equiv [F_{n-p-1}, F_{n-p}]_p, \tag{*}$$

donde F_j es el término j-ésimo de la sucesión de Fibonacci extendida.

Demostración. Llamemos a la Ecuación (*) la propiedad Q. Supongamos que existen dos enteros m y $m+1$ que cumplen la propiedad, entonces

$$\begin{aligned} b_{m+2} &= b_m + b_{m+1} = [F_{m-p-1}, F_{m-p}]_p + [F_{m-p}, F_{m-p+1}]_p \\ &= (F_{m-p-1} + F_{m-p}) \cdot b_p + (F_{m-p} + F_{m-p+1}) \cdot b_{p+1} = F_{m-p+1} \cdot b_p + F_{m-p+2} \cdot b_{p+1} \\ &= [F_{m-p+1}, F_{m-p+2}]_p = [F_{m+2-p-1}, F_{m+2-p}]_p \end{aligned}$$

Es decir, $m+2$ cumple Q si y sólo si existe $m+2 \in \mathcal{P}$, que por hipótesis satisface $\mathfrak{F}$. Por otra parte:

$$\begin{aligned} b_{m-1} &= -b_m + b_{m+1} = -[F_{m-p-1}, F_{m-p}]_p + [F_{m-p}, F_{m-p+1}]_p \\ &= [F_{m-p} - F_{m-p-1}, F_{m-p+1} - F_{m-p}]_p = [F_{m-p-2}, F_{m-p-1}]_p \\ &= [F_{m-1-p-1}, F_{m-1-p}]_p \end{aligned}$$

O sea $m-1$ cumple Q si y sólo $m-1 \in \mathcal{P}$.[1] Mostremos que p y $p+1$ son dos enteros que cumplen la propiedad:

$$\begin{aligned} b_p &= 1 \cdot b_p + 0 \cdot b_{p+1} = F_{p-p-1} \cdot b_p + F_{p-p} \cdot b_{p+1} = [F_{p-p-1}, F_{p-p}]_p \\ b_{p+1} &= 0 \cdot b_p + 1 \cdot b_{p+1} = F_{p+1-p-1} \cdot b_p + F_{p+1-p} \cdot b_{p+1} = [F_{p+1-p-1}, F_{p+1-p}]_p \end{aligned}$$

Luego, dicha propiedad va a ser satisfecha por todos los números en $\mathcal{P}$ que puedan escribirse como $p+c$, donde $c \in \mathbb{Z}$. Para todo $q \in \mathcal{P}$, $c = q - p$ es un número entero, por lo tanto la propiedad se satisface en todo $\mathcal{P}$ y el lema está demostrado.

Usemos dos valores $t, t+1 \in \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ para demostrar que *dos* extensiones de (a_i) en el dominio $\mathcal{P}$ son la misma. Sean $(b'_i)_{i\in\mathcal{P}}$ y $(b''_i)_{i\in\mathcal{P}}$, para todo $n \in \mathcal{P}$, se ha demostrado

$$\begin{aligned} b'_n &= [F_{n-t-1}, F_{n-t}]_t = F_{n-t-1} \cdot b'_t + F_{n-t} \cdot b'_{t+1} = F_{n-t-1} \cdot a_t + F_{n-t} \cdot a_{t+1}, \\ b''_n &= [F_{n-t-1}, F_{n-t}]_t = F_{n-t-1} \cdot b''_t + F_{n-t} \cdot b''_{t+1} = F_{n-t-1} \cdot a_t + F_{n-t} \cdot a_{t+1}, \\ &\implies \forall n \in \mathcal{P}(b'_n = b''_n) \implies (b'_i)_{i\in\mathcal{P}} = (b''_i)_{i\in\mathcal{P}} \end{aligned}$$

[1] En éste y los siguientes despejes, se ha asumido la propiedad $m[a,b]_p + n[c,d]_p = [ma+nc, mb+nd]$, que no es difícil de comprobar.

Finalmente, veamos que

$$[F_{n-1-p-1}, F_{n-1-p}] + [F_{n-2-p-1}, F_{n-2-p}] = [F_{n-1-p-1} + F_{n-2-p-1}, F_{n-1-p} + F_{n-2-p}]$$
$$= [F_{n-p-1}, F_{n-p}] = b_n$$

Por lo tanto, si $n-1$ y $n-2$ pertenecen a $\mathcal{P}$, los resultados anteriores nos dicen que

$$b_{n-1} + b_{n-2} = b_n,$$

o bien, que n satisface la recursión $\mathfrak{F}$. En otras palabras, $\mathfrak{F}$ se satisface en todo $\mathcal{P}$ excepto quizá en sus dos elementos menores. $\square$

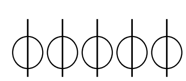
Teorema 7. *Sea una sucesión $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida por $\mathfrak{F}$ en todo su dominio. Se tienen las siguientes propiedades:*

$$\sum_{i=0}^{n} A_{m+i} = A_{m+n+2} - A_{m+1},$$
$$\sum_{i=0}^{n} A_{m+2i} = A_{m+2n+1} - A_{m-1},$$
$$2\sum_{i=0}^{n} A_{m+3i} = A_{m+3n+2} - A_{m-1},$$
$$5\sum_{i=0}^{n} A_{m+4i} = (A_{m+4n+3} + A_{m+4n+1}) - (A_{m-1} + A_{m-3})$$

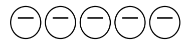
Y, en general, para $K \geq 2$, con $N = F_K + 2F_{K-1} - ((-1)^K + 1)$, $r = F_{K-2} + (-1)^K$ y $s = F_{K-1} - (-1)^K$, donde F_n es el n-ésimo elemento de la sucesión de Fibonacci, existe la solución:

$$N\sum_{i=0}^{n} A_{m+Ki} = r(A_{m+Kn+1} - A_{m-K+1}) + s(A_{m+Kn+2} - A_{m-K+2})$$

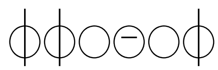
Demostración. Veamos la siguiente notación que permite hablar de sumas de números consecutivos de cualquier sucesión (D_i). La suma de cinco números consecutivos se representa como:



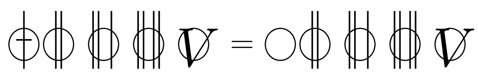
La resta de cinco números consecutivos se representa de esta manera:



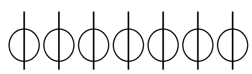
La suma $D_n + D_{n+1} - D_{n+3} + D_{n+5}$ se representa como sigue:



La suma $D_n - D_n + 2D_{n+1} + 3D_{n+2} + 4D_{n+3} + 5D_{n+4}$ tiene las siguientes representaciones equivalentes:



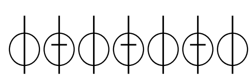
Lo interesante de esta notación es que permite manipular las ecuaciones en una sola linea o bien hacer operaciones en el mismo dibujo. Por ejemplo, supongamos que tenemos la expresión

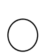
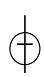
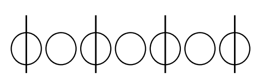
$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 + D_7 \equiv$$  ,

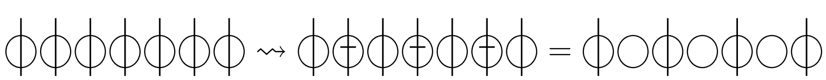
y queremos sumar

$$-D_2 - D_4 - D_6 \equiv$$  ,

esto se puede hacer sin dibujar más círculos, únicamente sobreponiendo los símbolos de elementos negativos:



que por la propiedad  $=$  resulta igual a . Este proceso de 'sobreponer' lo representaremos con $\rightsquigarrow$:



Pero sin duda lo más interesante emerge cuando consideramos la suma de los elementos de una sucesión (A_i) definida por la recursión $\mathfrak{F}$, pues tenemos las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
A_{n+2} = A_{n+1} + A_n &\equiv \bigcirc\bigcirc\phi = \phi\phi\bigcirc \\
A_{n+1} = A_{n+2} - A_n &\equiv \bigcirc\phi\bigcirc = \ominus\bigcirc\phi \\
A_n = A_{n+2} - A_{n+1} &\equiv \phi\bigcirc\bigcirc = \bigcirc\ominus\phi
\end{aligned}
$$

Veamos cómo podemos llegar a las últimas dos expresiones usando únicamente la primera $\phi\phi\bigcirc \leadsto \oplus\oplus\phi = \bigcirc\bigcirc\phi$

$$
\begin{aligned}
\bigcirc\phi\bigcirc \leadsto \oplus\phi\bigcirc \leadsto \overline{\oplus}\oplus\phi = \ominus\bigcirc\phi \\
\phi\bigcirc\bigcirc \leadsto \phi\oplus\bigcirc \leadsto \oplus\overline{\oplus}\phi = \bigcirc\ominus\phi
\end{aligned}
$$

Aquí se ha empleado la famosa técnica de "sumar un cero conveniente".

Pasemos a demostrar el segundo enunciado del teorema. Consideremos la siguiente secuencia de símbolos:

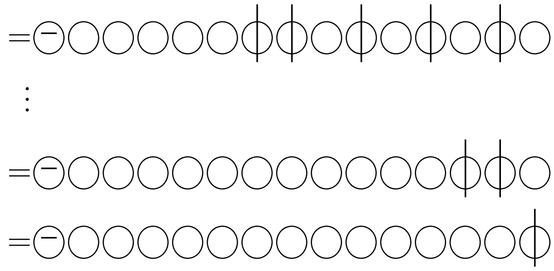
$$
\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc
$$

que representan la suma de términos de una sucesión separados por un elemento. Si se trata de la sucesión recursiva (A_i), podemos realizar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc \\
\leadsto&\ominus\oplus\phi\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc \\
=&\ominus\bigcirc\phi\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc \\
\leadsto&\ominus\bigcirc\oplus\oplus\phi\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc \\
=&\ominus\bigcirc\bigcirc\bigcirc\phi\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc\phi\bigcirc
\end{aligned}
$$

Donde se han sumado *ceros convenientes* para hacer que el dibujo evolucione y se vuelva *más sencillo*. Específicamente, se ha sumado $\ominus\ominus\phi = \bigcirc\bigcirc\bigcirc$.

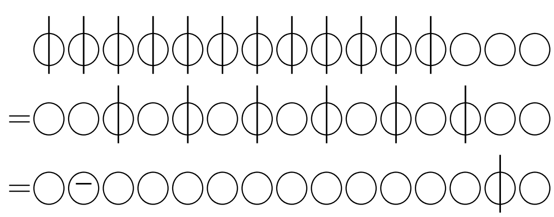
A partir de ahora dejará de usarse el símbolo $\leadsto$ y únicamente se anotará el resultado de sumar esos neutros aditivos:



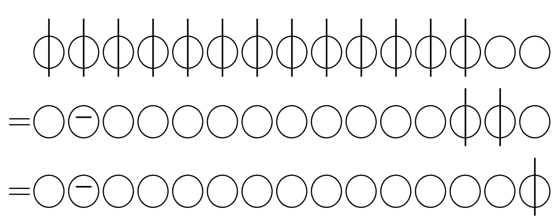
Es decir, sumar el primer patrón de términos separados por un elementos es equivalente a sumar el sucesor del extremo derecho y restar el antecesor del extremo izquierdo. Pero, como se intuye por el símbolo '⋮', este resultado no depende de la cantidad de términos sumados, ni de la posición del primer elemento, luego:

$$\sum_{i=0}^{n} A_{m+2i} = A_{m+2n+1} - A_{m-1}.$$

Podemos usar el resultado anterior para demostrar que la suma de n términos consecutivos es el sucesor del extremo derecho menos el sucesor del extremo izquierdo $\sum_{i=0}^{n} A_{m+i} = A_{m+n+2} - A_{m+1}$. Primero comprobemos para la suma de $2n$ términos consecutivos:



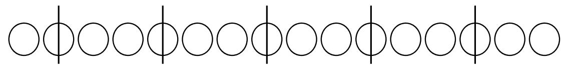
Luego, la suma de $2n+1$ términos consecutivos:



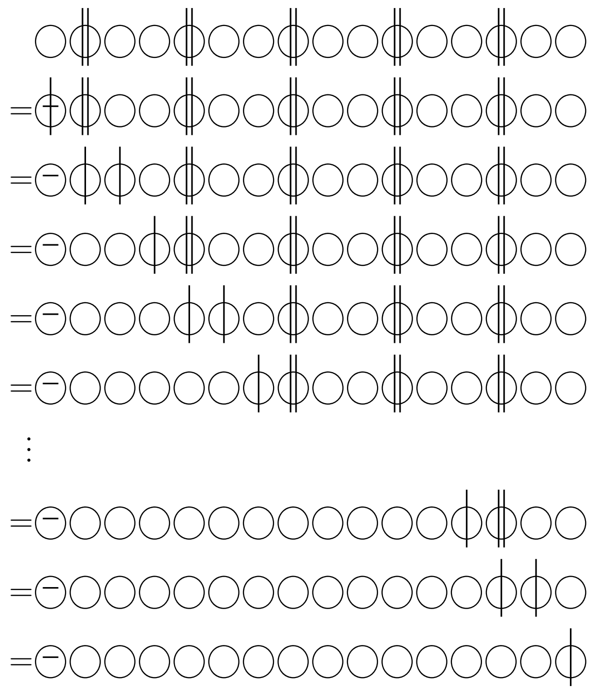
Luego:

$$\sum_{i=0}^{n} A_{m+i} = A_{m+n+2} - A_{m+1}.$$

Nuestra siguiente tarea es encontrar una expresión que agilice la siguiente suma:



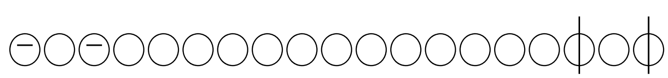
Para ello, emplearemos la técnica que se dice usó el joven Gauss cuando se le pidió sumar del 1 hasta el 100: ahorrar energía haciendo el doble de trabajo.



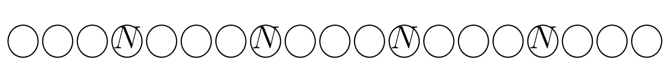
Por lo tanto:

$$2\sum_{i=0}^{n} A_{m+3i} = A_{m+3n+2} - A_{m-1}$$

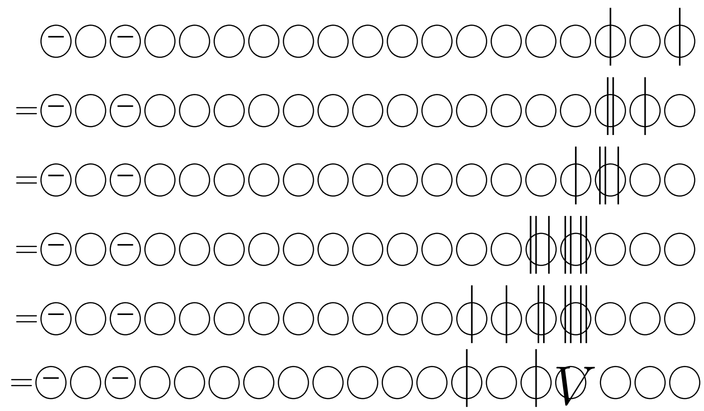
La siguiente demostración es diferente a las anteriores, puesto que no es constructiva, es decir, no se parte de la suma que queremos realizar y se llega a una expresión más sencilla, en cambio, se empieza con algo muy particular

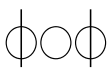


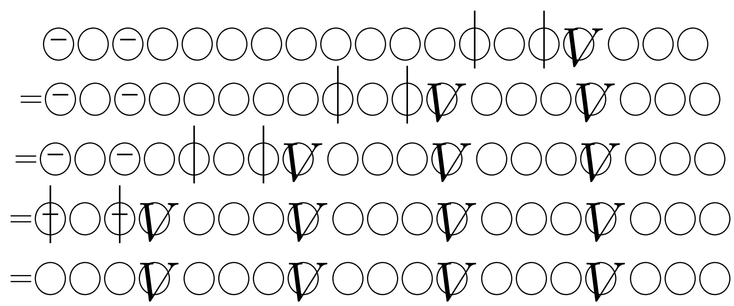
y ello se transforma mediante la suma de ceros a la expresión que buscamos



Donde N es algún entero. Lo que implica que sumar miembros de la sucesión separados por tres elementos es equivalente a la primera expresión. El proceso es el siguiente:



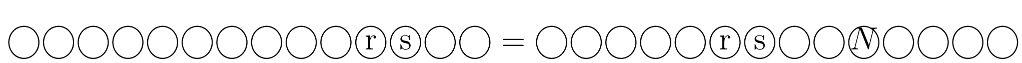
De modo que volvemos a encontrarnos el mismo patrón con el que comenzamos a trabajar: , por lo tanto:



Luego,

$$5\sum_{i=0}^{n} A_{m+4i} = (A_{m+4n+3} + A_{m+4n+1}) - (A_{m-1} + A_{m-3})$$

La fórmula $\sum_{i=0}^{n} A_{m+5i}$ se genera buscando los números r y s tal que



para cierta N. Que daría lugar a la siguiente fórmula

$$N\sum_{i=0}^{n} A_{m+5i} = r(A_{m+5n+1} - A_{m-4}) + s(A_{m+5n+2} - A_{m-3}).$$

Si definimos $\binom{n}{m} \equiv Q$ donde $Q = nr + ms$, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{1}{0}\binom{0}{1}\bigcirc\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{1}{0}\binom{0}{1}\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{a_1}{a_2}\binom{b_1}{b_2}\bigcirc\bigcirc$$

Que, usando el Lema 1.1, equivale a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&[r, s] = [a_1 r + a_2 s, b_1 r + b_2 s] + [F_{-6} r, F_{-5} r] + [F_{-5} s, F_{-4} s] \\
&\Longrightarrow a_1 r + a_2 s + F_{-6} r + F_{-5} s = r \ \wedge \ b_1 r + b_2 s + F_{-5} r + F_{-4} s = s
\end{aligned}$$

Resolvemos con $a_1 = 1 - F_{-6}$, $b_1 = -F_{-5}$, $a_2 = -F_{-5}$ y $b_2 = 1 - F_{-4}$. Por lo tanto, es necesario que $(a_1 r + a_2 s) = -(b_1 r + b_2 s)$ para que se pueda hacer la siguiente operación:

$$\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{1}{0}\binom{0}{1}\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{a_1}{a_2}\binom{b_1}{b_2}\bigcirc\bigcirc = \bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\binom{1}{0}\binom{0}{1}\bigcirc\bigcirc\binom{b_1}{b_2}\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

La condición anterior se traduce en $(1 - F_{-6})r - F_{-5}s = F_{-5}r + (F_{-4} - 1)s$, es decir, en la ecuación:

$$(1 - F_{-4})r + (1 - F_{-3})s = 0$$

Que se cumplirá, por ejemplo, si $r = F_3 - 1 = 1$ y $s = F_4 + 1 = 4$. Luego, el número N será igual a $b_1 r + b_2 s$, es decir:

$$\begin{aligned}
N &= -F_5(F_3 - 1) + (1 + F_4)(F_4 + 1) = F_5 + 2F_4 + [(F_4^2 - F_3 F_5) + 1] \\
&= F_5 + 2F_4 + (-1 + 1) = F_5 + 2F_4 = 5 + 2 \cdot 3 = 11
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula para $K = 5$ resulta ser la siguiente:

$$11 \sum_{i=0}^{n} A_{m+5i} = (A_{m+5n+1} - A_{m-4}) + 4(A_{m+5n+2} - A_{m-3})$$

Al intentar resolver la fórmula general para $K \geq 2$

$$N \sum_{i=0}^{n} A_{m+Ki} = r(A_{m+Kn+1} - A_{m-K+1}) + s(A_{m+Kn+2} - A_{m-K+2})$$

por un método análogo al empleado anteriormente, se llega a la siguiente condición:

$$(1 - F_{-K+1})r + (1 - F_{-K+2})s = [1 - (-1)^K F_{K-1}]r + [1 + (-1)^K F_{K-2}]s = 0$$

que se satisface con $r = F_{K-2} + (-1)^K$ y $s = F_{K-1} - (-1)^K$. Y el número N estaría determinado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N = b_1 r + b_2 s = (-F_{-K})r + (1 - F_{-K+1})s &= (-1)^K F_K r + [1 - (-1)^K F_{K-1}]s \\ &= (-1)^K F_K [F_{K-2} + (-1)^K] + [1 - (-1)^K F_{K-1}][F_{K-1} - (-1)^K] \\ &= F_K + 2F_{K-1} - (-1)^K [1 + (F_{K-1}^2 - F_K F_{K-2})] \\ &= F_K + 2F_{K-1} - [(-1)^K + 1] \end{aligned}$$

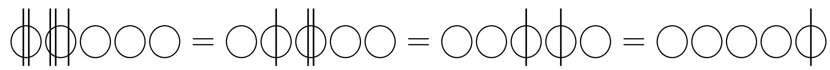
De modo que la solución para cualquier $K \geq 2$ queda determinada por los tres números r, s, N. Veamos las primeras soluciones:

K	Condición $f(r,s) = 0$	Ecuación de N	r	s	N	r'	s'	N'
2	$0r + s$	$r + 0s$	1	0	1	1	0	1
3	$2r + 0s$	$-2r + 2s$	0	2	4	0	1	2
4	$-r + 2s$	$3r - s$	2	1	5	2	1	5
5	$4r - s$	$-5r + 4s$	1	4	11	1	4	11
6	$-4r + 4s$	$8r - 4s$	4	4	16	1	1	4
7	$9r - 4s$	$-13r + 9s$	4	9	29	4	9	29
8	$-12r + 9s$	$21r - 12s$	9	12	45	3	4	15
9	$22r - 12s$	$-34r + 22s$	12	22	76	6	11	38
10	$-33r + 22s$	$55r - 33s$	22	33	121	2	3	11
11	$56r - 33s$	$-89r + 56s$	33	56	199	33	56	199

Donde los coeficientes primados son aquéllos que permiten expresar de manera más simple la misma ecuación. Es de notar que para $K = 10$ se presenta la ecuación:

$$11 \sum_{i=0}^{n} A_{m+10i} = 2(A_{m+10n+1} - A_{m-10+1}) + 3(A_{m+10n+2} - A_{m-10+2})$$

que puede simplificarse aún más considerando que



Por lo tanto:

$$11\sum_{i=0}^{n} A_{m+10i} = A_{m+10n+5} - A_{m-5}$$

Por otro lado, se observa que para $K \geq 3$:

$$f_K = f_{K-1} - (-1)^K(F_K r - F_{K-1}s)$$

$$N_K = N_{K-1} + (-1)^K(F_{K-1}r - F_{K-2}s).$$

Por otra parte, para $K \geq 4$, se observa la siguientes relaciones de recursión

$$r_K = r_{K-1} + r_{K-2} + (-1)^K, \quad s_K = s_{K-1} + s_{K-2} - (-1)^K.$$

Que se pueden traducir a la relaciones de recursión homogéneas para $K > 6$:

$$r_K = 2r_{K-2} + r_{K-3}, \quad s_K = 2s_{K-2} + s_{K-3}.$$

Para $K = 4$ y $K = 5$, se cumple que $s_K = r_{K+1}$, por lo que también se cumplirá para $K > 5$ (considerando que a ambos números los define la misma recursión). Para $n > 2$, se presentan las siguientes relaciones:

$$N_{2n} = N_{2n-1} + N_{2n-2}, \quad N_{2n+1} = N_{2n} + N_{2n-1} + 2$$

que se pueden generalizar a la siguiente recursión para $K > 7$:

$$N_K = N_{K-1} + 2N_{K-2} - N_{K-3} - N_{K-4}. \qquad \square$$

Capítulo 2. Sucesiones recursivas inusuales

Teorema 2. *Sea (m_n) la sucesión bien definida por la recursión $\mathfrak{R}$, con valores iniciales $m_0 = 0$ y $m_1 = 1$ y cumpliendo el principio "cualquier valor no definido por los valores anteriores es igual a su antecesor". Se tienen los siguientes hechos:*
1) *La diferencia entre cualesquiera dos elementos consecutivos de la sucesión (m_n) es 0 ó 1. Es decir, para todo n en el dominio de (Δm_n), se tiene $\Delta m_n \in \{0, 1\}$.*
2) *Esta sucesión está bien definida en todos los naturales: $(m_n)_{n=0}^{\infty}$.*

Demostración. Supongamos que para algún $r < p$, la sucesión $(0, 1, \ldots, m_r, \ldots, m_p)$ tiene elementos que cumplen $\Delta m_n \in \{0, 1\}$ para todo n natural menor a p, sus primeros $r+1$ elementos cumplen la recursión $\mathfrak{R}$ y $r + m_r = p$, es decir, el elemento m_p fue definido por m_r, lo que implica $m_p = m_r + m_{r-m_r}$.

Queremos extender la sucesión calculando el valor que será definido por m_{r+1}: si queremos que la sucesión satisfaga $\mathfrak{R}$ en $r+1$, entonces $m_{r+1+m_{r+1}} = m_{r+1} + m_{r+1-m_{r+1}}$. Denotemos a dicho elemento como $m_q \equiv m_{r+1+m_{r+1}}$.
Caso 1. $\boldsymbol{m_{r+1} = m_r}$**.** Primeramente, observemos que en este caso

$$q = r + 1 + m_{r+1} = r + 1 + m_r = p + 1,$$

por lo tanto el valor que crea m_r es antecesor del que generará m_{r+1}. Similarmente,

$$r + 1 - m_{r+1} = r + 1 - m_r > r - m_r,$$

es decir, el elemento $m_{r+1-m_{r+1}}$ existe (no es de la forma m_{-n} con $n > 0$) y es sucesor de m_{r-m_r}. Por todo lo anterior, el valor que genera m_{r+1} será:

$$\begin{aligned} m_q = m_{p+1} = m_{r+1} + m_{r+1-m_{r+1}} &= m_r + m_{r-m_r+1} = m_r + m_{r+m_r} + \Delta m_{r-m_r} \\ &= m_p + \Delta m_{r-m_r} \end{aligned}$$

Y sabemos por hipótesis que $\Delta m_{r-m_r} \in \{0,1\}$, lo cual implica que $\Delta m_p \in \{0,1\}$.

Caso 2. $\boldsymbol{m_{r+1} = m_r + 1}$. En este caso, se tiene que:

$$q = r + 1 + m_{r+1} = r + 1 + m_r + 1 = p + 2, \quad \text{y}$$

$$r + 1 - m_{r+1} = r + 1 - m_r - 1 = r - m_r.$$

por lo tanto, el elemento $m_{r+1-m_{r+1}}$ es exactamente el mismo que m_{r-m_r}. Por lo tanto, el valor que genera m_{r+1} será:

$$\begin{aligned} m_q = m_{p+2} &= m_{r+1} + m_{r+1-m_{r+1}} = m_r + 1 + m_{r+m_r} \\ &= m_p + 1 \end{aligned}$$

Observamos que en este proceso no queda explícitamente definido m_{p+1}, pero si seguimos el principio enunciado previamente, éste sería igual a m_p, por lo tanto $\Delta m_p = 0$ y $\Delta m_{p+1} = 1$.

Cualquiera que sea el caso, al expandir la sucesión se llega a las mismas condiciones iniciales: nombremos $r' = r + 1$ y $p' = (q + 1 \text{ ó } q + 2)$ y nuevamente tenemos $r' < p'$ y la sucesión

$$(0, 1, \ldots, m_{r'}, \ldots, m_{p'})$$

donde para todo n natural menor a p' se cumple $\Delta m_n \in \{0,1\}$, sus primeros $r' + 1$ elementos cumplen la recursión $\mathfrak{R}$ y $r' + m_{r'} = p'$. Luego, si una sucesión cumple las condiciones de la hipótesis, ésta puede extenderse tanto como se desee o bien, por el Principio de Inducción, existe una sucesión bien definida (en todo el dominio de los naturales) generada de esta manera.

Para los primeros valores de $(m_n) = (0, 1, 1)$ se cuenta con un $r = 1$ y un $p = 2$ que concuerdan con las hipótesis, por lo tanto, (m_n) está bien definida. $\square$

Capítulo 3. Observaciones

Lema 2. *Son de clase α:*

1) Las relaciones de recursión lineales, de orden k, coeficientes constantes y homogéneas.

2) Las relaciones de recursión tipo Meta-Fibonacci.

3) La recursión $\mathfrak{R}$.

Demostración. Definamos sus respectivas funciones f, g_j y su conjunto $\mathcal{J}_n$:

	$((R_i), n) \mapsto$	$(R_{h_j}, n) \mapsto$	$\mathcal{J}_n =$
Lineal de orden k	$\{n - j \mid j \in \mathcal{J}_n\}$	$c_j R_{h_j}$	$\{1, \ldots, k\}$
Tipo Meta-Fibonacci	$\{n - R_{n-j} \mid j \in \mathcal{J}_n\}$	$c_j R_{h_j}$	$\{1, \ldots, k\}$
Recursión $\mathfrak{R}$	$\{n + (-1)^{j+1} R_n \mid j \in \mathcal{J}_n\}$	$(-1)^{j+1} R_{h_j}$	$\{1, 2\}$

Notamos que en todos los casos $\mathcal{J}_n$ es un conjunto fijo que no depende de (R_i), ni de su dominio. Es decir, $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_m$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto, sea (T_i) una extensión de la sucesión (R_i): al reemplazar '(R_i)' por '(T_i)' y 'R_{h_j}' por 'T_{h_j}' en todos los elementos enlistados arriba, no se alterarán si (R_i) satisface la recursión en n. Ej.: De las sucesiones tipo Meta-Fibonacci $n - R_{n-j} = n - T_{n-j}$, $c_j R_{h_j} = c_j T_{h_j}$ y $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}'_n$. $\square$

Teorema 5. *Sea $r > 1$, la sucesión $(m_{r,n})$ como fue definida previamente es tal que*

$$m_{r,rn} = m_{r,rn+1} = \cdots = m_{r,rn+(r-1)} = rm_n$$

donde m_n es el n-ésimo elemento de la sucesión (m_n). Es decir, $(m_{r,n})$ es la unión (T_i) de todas las sucesiones de la forma $(m^r_{k,n})$ con $k \in \{0, \ldots, r-1\}$ y, por lo tanto, está definida por $\mathfrak{R}$ en todo $\mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos que la subsucesión $(m_{r,n})_{n=0}^{rp}$ con $p > 1$ es tal que

$$m_{r,rt} = m_{r,rt+1} = \cdots = m_{r,rt+(r-1)} = rm_t$$

para todo $t < p$ y $m_{r,rp} = rm_p$. Observemos que $(m_{r,n})_{n=0}^{rp} = (T_i)_{n=0}^{rp}$, y demostremos que ello implica que extender la subsucesión por la regla "*cada nuevo valor indefinido es igual al valor anterior*" da como resultado otra subsucesión de (T_i).

Asumamos que existe un s tal que $s+m_s = p$. Por lo tanto, el elemento m_s genera a m_p mediante la recursión $\mathfrak{R}$; por otro lado, $rs + m_{r,rs} = r(s + m_s) = rp$, por lo tanto, el elemento $m_{r,rs}$ genera a $m_{r,rp}$. El siguiente valor a definir en $(m_{r,n})$ está en la posición $qr = r(s + 1) + m_{r,r(s+1)} = r(s + 1 + m_{s+1})$, que será igual a

$$\begin{aligned} m_{r,rq} =& m_{r,r(s+1)} + m_{r,r(s+1)-m_{r,r(s+1)}} = rm_{s+1} + m_{r,r(s+1)-rm_{s+1}} \\ =& rm_{s+1} + rm_{s+1-m_{s+1}} = r(m_{s+1} + m_{s+1-m_{s+1}}) \\ =& r(m_{s+1+m_{s+1}}) = r(m_q) \end{aligned}$$

Por definición, $T_t = rm_p$ para todo $t \in \{rp, \dots, r(p + 1) - 1\}$ y $T_{rq} = rm_q$. Por otro lado, $m_{r,rq} = rm_q$ y todos los valores $m_{r,t}$ tal que $rp < t < rq$ están indefinidos; usando la regla mencionada, $m_{r,rp+1} \equiv m_{r,rp} = rm_p$, $m_{r,rp+2} \equiv m_{r,rp+1} = rm_p$ y así sucesivamente. Por lo tanto $(m_{r,n})_{n=0}^{rq} = (T_i)_{i=0}^{rq}$, como se quería demostrar.

Observemos que los valores iniciales de $(m_{r,n})$ son $(0, \dots, 0, r)$, el siguiente elemento definido está en la posición $r+m_{r,r} = 2r$ y tiene valor $m_{r,r}+m_{r,r-m_{r,r}} = r+m_{r,0} = r$. Luego, $m_{r,t} = m_{r,r} = r$ para todo $r < t < 2r$. Ahora contamos con una subsucesión $(m_{r,n})_{n=0}^{2r}$ que cumple los requerimientos que imponíamos al inicio de la demostración: una subsucesión de (T_i) en donde existe un $s = 1$ y $p = 2$.

Por lo tanto, la sucesión $(m_{r,n})$ es idéntica a (T_i), que está bien definida por $\mathfrak{R}$ en

$$\bigcup_{k\in\{0,\dots,r-1\}} \{k + rn|n \in \mathbb{N}\} = \{rk + n|k \in \{0, \dots, r - 1\} \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

Considerando que todo número natural t puede escribirse como $t = rn + k$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y $k \in \{0, \dots, r - 1\}$, sabemos que $(m_{r,n})$ está bien definida en todos los naturales. $\square$

Teorema 9 (De las relaciones de recursión a las transformaciones)**.** *Sea la recursión* $\mathfrak{L}$: $a_n = \varrho((a_i)_{i\in\mathcal{Q}_n}, n)$. *Sea la sucesión* $(A_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *y la sucesión* $(B_i)_{i\in\mathcal{P}} = \mathrm{U}_\varrho \circ (A_i)$, *entonces* $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{P}$ *y* $\forall i \in \mathcal{Q}'(B_i = A_i)$ *si y sólo si* (A_i) *satisface* $\mathfrak{L}$ *en* $\mathcal{Q}'$.

Demostración. Por definición de las transformación U_ϱ: si (A_i) satisface $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$, ello implica que $B_i = A_i$ para todo $i \in \mathcal{Q}'$:

$$A_i = \varrho((A_i)_{\mathcal{Q}_n}, i) \implies (\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{Q} \wedge B_i \equiv \varrho((A_i), i))$$

Luego, $B_i = A_i$ para todo $i \in \mathcal{Q}'$.

Similarmente, de las definiciones se sigue que $B_i = A_i$ para todo $i \in \mathcal{Q}'$ implica que $A_i = \varrho((A_i), i)$, es decir, que (A_i) está definida por $\mathfrak{L}$ en $\mathcal{Q}'$. $\square$

Capítulo 4. Sucesiones ultrarrecursivas

Proposición 1. *Sea* (A_k) *una sucesión con dominio en los enteros tal que* $A_k = 2^k$ *para todo* k. *Esta sucesión cumple la recursión*

$$S_{n+j} = \left[\sum_{i=0}^{|S_n|-1} (S_{n-isgn\ S_n} + \delta_n) \right] \tag{*}$$

Donde los corchetes grandes simbolizan la función redondeo (Definición A.32), $j > 1$, $\delta_n = (2^{j\text{sgn } S_n} - 2)\text{sgn } S_n$ *y* sgn *es la función signo (Definición A.31).*

Esta recursión es de clase α *(invariante ante la extensión), de clase* β *(invariante ante cualquier traslación) e invariante ante el escalamiento* E_{-1}. *Para* $|n| >> 1$, *esta recursión es invariante ante cualquier multiplicación o transformación* M_m.

Demostración. Probaremos la primera parte. Debido a que en (A_k) todos sus elementos son positivos, la parte derecha de la Ecuación (*) es en ese caso:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=0}^{A_n-1} (A_{n-i} + (2^j - 2)) \right] &= (2^j - 2)2^n + \left[\sum_{i=0}^{A_n-1} (2^{n-i}) \right] \\ &= 2^{n+j} - 2^{n+1} + [2^{n+1} - 2^{n+1-A_n}] \end{aligned}$$

Si $n + 1 - A_n = n + 1 - 2^n < 0$, es decir si $n > 1$, entonces $[2^{n+1} - 2^{n+1-A_n}] = 2^{n+1}$ y la ecuación anterior es igual a $2^{n+j} = A_{n+j}$ siempre que $j \geq 1$. Que la recursión sea de clase α y clase β puede demostrarse de manera análoga a muchos resultados del capítulo 3. Veamos bajo qué condiciones es invariante ante el escalamiento E_{-1}: denotemos $(A^*_k) \equiv \mathrm{E}_{-1} \circ (A_k)$.

$$\begin{aligned} A^*_{-n+j} = -A_{n-j} = -\left[\sum_{i=0}^{A_n-1} (A_{n-i} + (2^{-j} - 2)) \right] &= \left[\sum_{i=0}^{A_n-1} (-A_{n-i} - (2^{-j} - 2)) \right] \\ = \left[\sum_{i=0}^{-A^*_{-n}-1} (A^*_{-n+i} + (2 - 2^{-j})) \right] &= \left[\sum_{i=0}^{|A^*_{-n}|-1} (A^*_{-n-i\text{sgn } A^*_{-n}} + (2 - 2^{-j})) \right] \end{aligned}$$

El único paso condicionado de este despeje es $-[x] = [-x]$, que es válido sólo cuando $x \neq n + 0.5$ con $n \in \mathbb{Z}$. □

Capítulo 5. Sucesión Π

Teorema 3. *Sea una sucesión ultrarrecursiva* (u_k)*. Para todo conjunto de enteros* $\mathcal{Q}$*, la subsucesión* $(u_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ *satisface la recursión* $\mathfrak{O}$ *en* $n+1$ *si*

$$\mathbf{1)}\ n+1\in\mathcal{Q} \quad \text{y} \quad \mathbf{2)} \begin{cases} \{n+1-|u_n|,\ldots,n\}\subseteq\mathcal{Q} & \text{si } u_n>0 \\ \{n,\ldots,n-1+|u_n|\}\subseteq\mathcal{Q} & \text{si } u_n<0 \end{cases}$$

Demostración. Por hipótesis, $u_{n+1}=\xi((u_i),n,\text{sgn } u_n)=|a_n|+\sum_{i=0}^{|a_n|-1}u_{n-i\text{sgn } u_n}$. O bien

$$u_{n+1}=\sum_{j\in\mathcal{J}_n}u_j|\ \mathcal{J}_n=\{n-i\text{sgn } u_n|0\leq 0<|u_n|\}$$

Donde podemos especificar los tres posibles casos siguientes:

$$J_n=\begin{cases} J_n^+\equiv\{n+1-|u_n|,\ldots,n\} & \text{si } u_n>0 \\ \varnothing \ \text{ si } u_n=0 \\ J_n^-\equiv\{n,\ldots,n-1+|u_n|\} & \text{si } u_n<0 \end{cases}$$

Denotemos $(b_i)_{i\in\mathcal{Q}}\equiv(u_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ y veamos que **2)** implica lo siguiente:

$$u_{n+1}=\sum_{j\in\mathcal{J}_n}u_j=\sum_{j\in\mathcal{J}_n}b_j=\xi((b_i),n,\text{sgn } b_n).$$

Para todo $\mathcal{J}_n$ (incluyendo el caso $\mathcal{J}_n=\varnothing$, pues el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos). Ahora bien, **1)** implica que

$$b_{n+1}=u_{n+1}=\xi((b_i),n,\text{sgn } b_n).$$

Es decir, **1)** y **2)** implican que $(b_i)=(u_i)_{i\in\mathcal{Q}}$ satisface $\mathfrak{O}$ en $n+1$. $\square$

Teorema 5. *Para toda sucesión* $(D_i)_{i=\alpha+1}^{\beta}$ *que satisface*

1) $0 < D_\beta$, ***2)*** $\alpha + 1 \leq \beta - D_\beta$, ***3)*** $\sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = 0$.

A) *Existe una extensión* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ *con los valores*

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \alpha - \beta - 1 \\ D_{\beta+1} &= D_\beta + C \end{aligned} \tag{*}$$

Donde $C = -\sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i$.

B) *Si esta extensión es tal que* ***4)*** $D_\beta < D_{\beta+1}$ *y* $\alpha \leq \beta + 1 - D_{\beta+1}$. *Es decir, si* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+1}$ *también satisface las condiciones* ***1)*** *y* ***2)***. *Se puede hacer una nueva extensión* $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+2}$ *a la derecha, con*

$$D_{\beta+2} = D_{\beta+1} + D_\beta + 2 + R \tag{**}$$

Donde $R = \displaystyle\sum_{i=\beta+2-D_{\beta+1}}^{\beta-D_\beta} (D_i + 2)$.

C) *Si* ***5)*** *el siguiente es un número entero menor a* α

$$\gamma = \alpha - \frac{1}{2}(D_\alpha + D_{\alpha+1} + D_{\beta+1} + D_{\beta+2} + 4), \tag{$\star$}$$

entonces se puede extender también hacia la izquierda $(D_i)_{i=\gamma+1}^{\beta+2}$ *de modo que se cumple* $\sum_{i=\gamma+2}^{\beta+2} D_i = 0$ *(la condición* ***3)****). Donde*

$$\gamma < i < \alpha \implies D_i = -2.$$

Demostración. **A)** La primera expresión de (*) es consecuencia directa del Lema 4.1 (que habla extensiones hacia la izquierda). La segunda se demuestra con el Lema 4.3:

$$D_{\beta+1} = \xi((D_i), \beta, 1) = D_\beta + \sum_{i=\beta+1-D_\beta}^{\beta} D_i$$

Por hipótesis $\alpha+1 \leq \beta - D_\beta \implies \alpha+2 \leq \beta+1-D_\beta$. Luego:[1]

$$\begin{aligned} D_{\beta+1} &= D_\beta - \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i + \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i + \sum_{i=\beta+1-D_\beta}^{\beta} D_i \\ &= D_\beta - \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i + \sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i \\ &= D_\beta - \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i + 0 = D_\beta + C \end{aligned}$$

B) Si se cumple **4)**, se cumplen todas las condiciones para extender a la derecha nuevamente: $(D_i)_{i=\alpha}^{\beta+2}$. Sabemos que esta sucesión satisface la recursión en $\mathfrak{O}$ al menos en $\alpha+1$, $\beta+1$ y $\beta+2$, por el Corolario 4.6:

$$D_{\beta+2} = D_{\beta+1} + D_\beta + 2 + R$$

Con $R = \sum\limits_{i=\beta+2-D_{\beta+1}}^{\beta-D_\beta} (D_i+2)$.

C) Demostremos que la definición de γ conduce a $\sum_{i=\gamma+2}^{\beta+2} D_i = 0$.[2]

$$\begin{aligned} \sum_{i=\gamma+2}^{\beta+2} D_i &= \sum_{i=\gamma+2}^{\alpha-1} D_i + \sum_{i=\alpha}^{\alpha+1} D_i + \sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i + \sum_{i=\beta+1}^{\beta+2} D_i \\ &= \Big(\sum_{i=\gamma+2}^{\alpha-1} (-2)\Big) + (D_\alpha + D_{\alpha+1}) + (0) + \Big(D_{\beta+1} + D_{\beta+2}\Big) \\ &= ((\alpha-1)+1-(\gamma+2))(-2) + D_\alpha + D_{\alpha+1} + D_{\beta+1} + D_{\beta+2} \\ &= 2(\gamma+2-\alpha) + D_\alpha + D_{\alpha+1} + D_{\beta+1} + D_{\beta+2} \end{aligned}$$

Esto es cero si y sólo si γ es un entero y equivale a lo que está escrito en $(\star)$. $\square$

[1] Hay una detalle sutil aquí: si $\alpha+2 = \beta+1-D_\beta$, entonces $C = \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i = 0$ por la definición de suma. Y $\sum_{i=\beta+1-D_\beta}^{\beta} D_i = \sum_{i=\alpha+2}^{\beta} D_i = 0$, por lo tanto $D_{\beta+1} = D_\beta + 0 = D + C$. Si $\alpha+2 < \beta+1-D_\beta$, puede seguirse el despeje… que lleva a la misma expresión: $D_{\beta+1} = D + C$, pero esta vez $C = \sum_{i=\alpha+2}^{\beta-D_\beta} D_i$ no es necesariamente cero.

[2] Para seguir un desarrollo de este tipo, ayuda comprobar que todos los límites de las sumas son números consecutivos, y que "no se pierde el límite menor y el mayor" pues ambos aparecen también del lado derecho de la ecuación: nada se pierde.

Capítulo 6. Sucesiones ultrarrecursivas periódicas

Lema 1. *Sea* (D_i) *la extensión fuerte de* $(\pi_{2n,i})^0$*, entonces:*

i) $D_1 = 2$ *si* $0 < n < 3$.

ii) $D_1 = 1 - n$ *si* $n \geq 3$.

Demostración. De la Def. 4, $(\pi_{2n,i})^0_{i=\alpha}$ con $\alpha = -1-n$. Luego, se tiene que $\sum_{i=-n}^{0} D_i = \sum_{i=-n}^{-1} D_i + 2n = (n)(-2) + 2n = 0$. Por lo tanto:

$$D_{-n-2} = (-n-2) - 1 - 0 = -n - 3.$$

i) Si $-2n+1 > -n-2$, la definición de extensión fuerte nos dice que $D_i = -2$ si $-2n+1 \leq i < 0$. Luego

$$D_1 = \xi((D_i), 0, 1) = \sum_{i=-2n+1}^{0} D_i = 4n + \sum_{i=-2n+1}^{-1} D_i = 4n + (2n-1)(-2) = 2.$$

ii) Si $-2n+1 \leq -n-2$, $D_i = -2$ para todo $i \neq -n-2$ tal que $-2n+1 \leq i < 0$ y $D_{-n-2} = -n-3$. Luego

$$D_1 = 4n + \sum_{i=-2n+1}^{-1} D_i = 4n + (2n-2)(-2) + D_{n-2} = 1 - n.$$

i) ocurre cuando n es 1 o 2, mientras que **ii** se cumple cuando $n \geq 3$. □

Lema 2. *Sean* $(a_i)^{\beta}_{i=\alpha}$ *y* $(b_i)^{\delta}_{i=\gamma}$ *dos sucesiones libres tal que* $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$*, sus conjunciones* $((a_i) \triangleright (b_i))$ *y* $((a_i) \triangleleft (b_i))$ *también lo son.*

Demostración. Una conjunción es traslación de la otra, por lo que sólo hace falta probar que una de ellas es libre (la recursión $\mathfrak{O}$ es de clase β). La sucesión $(D_i)^{\epsilon}_{i=\alpha} \equiv (a_i) \cup (\mathrm{T}_{\beta+1-\gamma} \circ (b_i))$ (donde $\epsilon = \beta + 1 - \delta$) es una extensión de ambas sucesiones, por lo que cumple sigue cumpliendo la recursión $\mathfrak{O}$ en todos los elementos de *antes*. Específicamente, en

$$\{\alpha+1, \ldots, \beta\} \cup \mathrm{T}_{\beta+1-\gamma} \bullet \{\gamma+1, \ldots, \delta\} = \{\alpha+1, \ldots, \beta\} \cup \{\beta+2, \ldots, \epsilon\}.$$

Veamos que ahora también cumple la recursión en el elemento que anteriormente era el "primer elemento de (b_i)". Éste ahora está denotado como $D_{\beta+1}$; por el Corolario 4.4, $D_\beta = -2$ implica que $\mathfrak{O}$ se cumple en $\beta + 1$ también. Luego, $\mathfrak{O}$ se satisface en $\{\alpha + 1, \ldots, \epsilon\}$ y (D_i) (con $D_\epsilon = -2$, por hipótesis) es una sucesión libre. $\square$

Teorema 2. *Sea (a_i) una sucesión periódica a la izquierda con una sucesión de tipo $(\breve{\tau}_j)^{-1}$ de periodo $4m+2$. Si esta sucesión satisface $\mathfrak{O}$ en todo su dominio, dados dos elementos $0 < n < a_n < a_{n+1}$, el siguiente es*

$$a_{n+2} = a_{n+1}\mu_m + a_n(2 - \mu_m) + (3 - \mu_m) + \Delta Y_n \qquad (*)$$

Donde $\mu_m = \frac{4m+1}{2m+1}$ y la sucesión (Y_i) es dependiente de la sucesión (R_i), con valores:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{R_n} (\dot{\tau}_{4m+3-i} + 3 - \mu_m) \qquad R_n = \rho_{4m+2}(a_n - n - 1)$$

Demostración.

Lema. *Sea un elemento $0 < m < a_m$ de la misma sucesión, su sucesor es:*

$$a_{n+1} = a_n(\mu_m - 1) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i + (n+1)(3 - \mu_m) + Y_n. \qquad (**)$$

Tal que $X_m = \frac{2m}{2m+1}$.

Asumiendo el lema, veamos que si $0 < n < a_n < a_{n+1}$, se tiene lo siguiente (la primera expresión es un reacomodo de la ecuación que deseamos probar):

$$\begin{aligned}(*) =& a_{n+1} + (a_{n+1} - a_n)(\mu_m - 1) + a_n + (3 - \mu_m) + \Delta Y_n \\ &= a_{n+1}(\mu_m) + \sum_{i=0}^{n} a_i + (n+2)(3 - \mu_m) + Y_{n+1} = a_{n+2}\end{aligned}$$

La demostración del lema se sigue de la función ξ:

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} = \xi((a_i), n, 1) = 2 + \sum_{i=n+1-a_n}^{n-1} (a_i + 2) \\
= 2 + \sum_{i=n+1-a_n}^{-1} (a_i + 2) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + 2) \\
= 2(n+1) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=n+1-a_n}^{-1} (\tau_i + 2)
\end{aligned}
$$

El *truco* consiste en descomponer la última suma en un conjunto de sumas con una cantidad de elementos equivalente al periodo de (τ_j). La cantidad de elementos de la suma mayor es $a_n - n - 1$, si le restamos $R_n \equiv \rho_{4m+2}(a_n - n - 1)$, obtenemos un múltiplo de $4m + 2$. Luego:

$$
\begin{aligned}
a_n - n - 1 &= (a_n - n - 1 - F_n) + F_n \\
\implies \sum_{i=n+1-a_n}^{-1} (\tau_i + 2) &= \frac{a_n - n - 1 - F_n}{4m+2} \sum_{i=1}^{4m+2} (\dot{\tau}_i + 2) + \sum_{i=1}^{F_n} (\dot{\tau}_{2m+3-i} + 2) \\
&= (a_n - n - 1 - F_n) \frac{2m}{2m+1} + \sum_{i=1}^{F_n} (\dot{\tau}_{2m+3-i} + 2) \\
&= (a_n - n - 1)(\mu_m - 1) + \sum_{i=1}^{F_n} (\dot{\tau}_{2m+3-i} + 3 - \mu_m)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo la suma en la ecuación de arriba lleva directo a (**). $\square$

Capítulo 7. Transformaciones de sucesiones

Teorema 1. *Sea* $(A_k^{(r)}) \equiv \mathrm{G}^n \circ (A_k)$. *Su término n-ésimo puede escribirse como sigue*

$$A_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} P^{r-i} Q^i A_{n-r-i} \tag{*}$$

Demostración. Recordemos que $\binom{r}{i} = \frac{r!}{(r-i)!i!}$. Vamos a demostrar por inducción. Necesitamos tener en cuenta los siguientes hechos:

i $\binom{t}{0} = \binom{t}{t} = \binom{s}{s} = \binom{s}{0} = 1$ para cualesquiera $t, s \in \mathbb{N}$.[1]

ii) $\binom{t}{i} + \binom{t}{i+1} = t!(\frac{i+1}{i+1}\frac{1}{(t-i)!i!} + \frac{t-i}{t-i}\frac{1}{(t-1-i)!(i+1)!}) = \frac{(t+1)!}{(t+1-(i+1)!(i+1)!)} = \binom{t+1}{i+1}$.

Asumamos que para algún natural $r = m$, se satisface la Ecuación (*) (se satisface para $m = 0$, por la definición de la transformación de Lucas). Mostremos que eso implica que también se satisface para $r = m + 1$.

$$\begin{aligned}
A_n^{(m+1)} = PA_{n-1}^m + QA_{n-2}^m &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i} + \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} P^{m-i} Q^{i+1} A_{n-m-2-i} \\
&= \binom{m}{0} P^{m+1} A_{n-m-1} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m}{i} P^{m-i} Q^{i+1} A_{n-m-2-i} + \binom{m}{m} Q^{m+1} A_{n-m-2} \\
&= \binom{m}{0} P^{m+1} A_{n-m-1} + \binom{m}{m} Q^{m+1} A_{n-m-2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i} \\
&= \binom{m+1}{0} P^{m+1} A_{n-m-1} + \binom{m+1}{m+1} Q^{m+1} A_{n-m-2} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m} \left[\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right] P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} P^{m+1-i} Q^i A_{n-m-1-i}
\end{aligned}$$

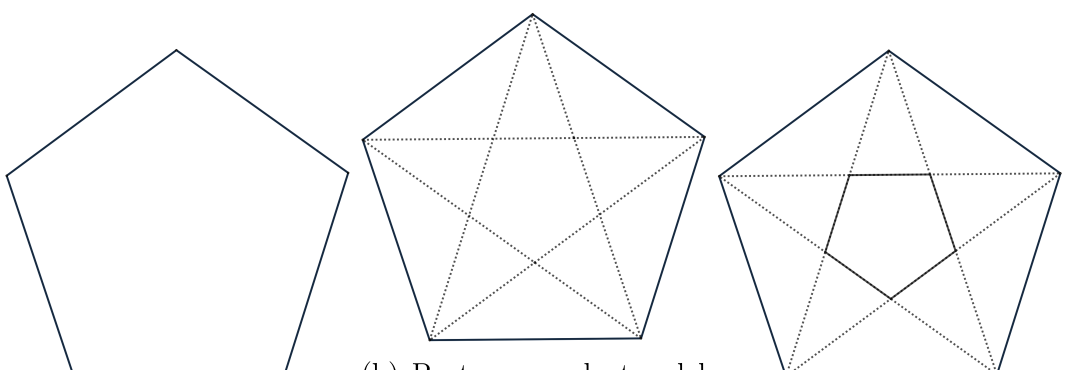
□

[1] Se comprueba desarrollando y tomando en cuenta que $0! = 1$

Agregados

La proporción áurea y el pentágono

Históricamente, una de las primeras ocasiones en que un fractal tomó lugar fue cuando la Orden Pitagórica observó las propiedades del pentagrama (Figura 1b). [25] Para dibujar esa estrella de cinco puntas —si únicamente se tiene a la mano lápices, reglas no graduadas y un compás— hace falta dibujar una circunferencia, dividirla en cinco partes iguales y dibujar un pentágono, después trazar todos los segmentos que unen dos vértices (las diagonales). En el pentágono, esto último puede hacerse sin separar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por un mismo segmento.



(a) Pentágono | (b) Pentagrama dentro del pentágono | (c) Nuevo pentágono

Figura 1: Construcción de un pentagrama: (a) se empieza con un pentágono, (b) después se unen los vértices. Se observa en (c) que en el centro del pentagrama se ha formado un nuevo pentágono. [26]

Una vez que el pentagrama ha sido dibujado, se obtiene en su centro un nuevo pentágono de menor tamaño que el primero,[1] lo que hace posible repetir nuevamente

[1] ¿Cuál es la relación o la proporción entre los lados de ambos pentágonos?

el proceso de construcción del pentagrama… y repetir este proceso indefinidamente.

Es de notar que el *nuevo pentágono* está inclinado con respecto al primero, como si se hubiera sufrido una rotación. Como se observa en la Figura 2, el tercer pentágono generado vuelve a estar alineado con el primero. De modo que ese tercer pentágono contiene a toda la imagen completa.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}$$

Patrón de ϕ y de $A^{\infty}(x)$.

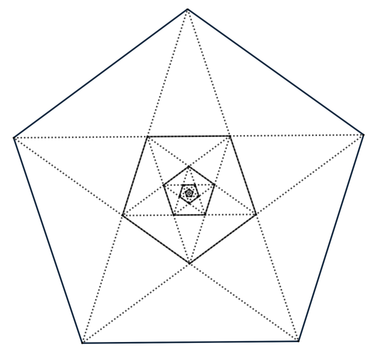


Figura 2: *Representación.* Construcción de infinitos pentágonos y pentagramas. [26]

Aunque para nosotros no resulta extraordinario dibujar un pentágono, esto no siempre fue así de sencillo. Se tiene registro de que los sacerdotes del Antiguo Egipto ya tenían conocimiento de cómo lograr esto e incluso les era posible dividir una circunferencia también en cuatro, seis y siete partes iguales. Se cree que de las enseñanzas matemáticas egipcias, adquirió conocimiento un comerciante curioso que venía de Mileto y cuyo nombre era Tales, quien para la verdad histórica sería el primer filósofo de Occidente y una figura importante del pensamiento científico. [25, 55]

Muchos sabios de la grecia antigua otorgaban no modestos méritos a los antiguos maestros egipcios: Aristóteles, por ejemplo, decía que la matemática se había originado debido a que los sacerdotes egipcios habían gozado del tiempo libre que demanda su estudio; hecho que acaso ha sido corroborado por el hallazgo de un papiro que suele atribuirse a Ahmose (a veces escrito Ahmes), que se piensa en realidad fue el copista de este trabajo de autores aún desconocidos: se trata del Papiro de Rhind[2], considerado la fuente de información más valiosa en lo que respecta a las matemáticas del Antiguo Egipto. [25, 32]

[2] Nombrado así en honor al abogado y egiptólogo Alexander Henry Rhind, quien adquirió el material en un mercado de Lúxor en el año 1858.

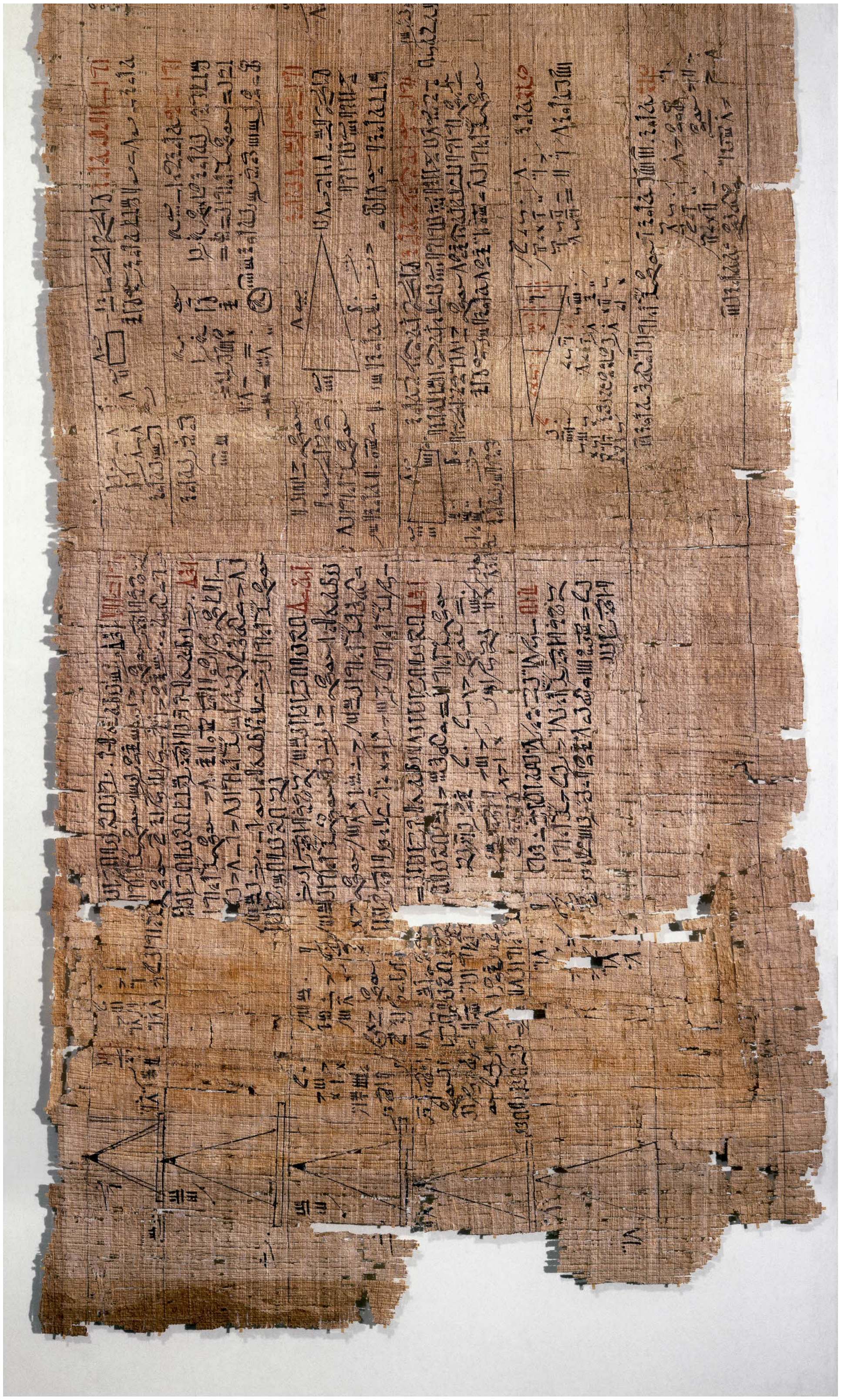


Figura 3: Papiro de Rhind, escrito por Ahmose aproximadamente en el año 1650 a. e. c. [56]

Este documento que, según se estima, data del año 1650 a. e. c., fue titulado

Direcciones para conocer los secretos, misterios y todas las cosas oscuras

y es un compendio de problemas de geometría y aritmética. Por ejemplo, bastante esfuerzo es invertido en reducir fracciones del tipo $\frac{2}{2n+1}$, donde $2n+1$ es un número impar, de la siguiente manera:

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

Mostremos que nuestra **fracción continua** —en donde *la fracción completa aparece en cada denominador*— y el pentagrama pitagórico nos llevan al mismo número: la proporción áurea.

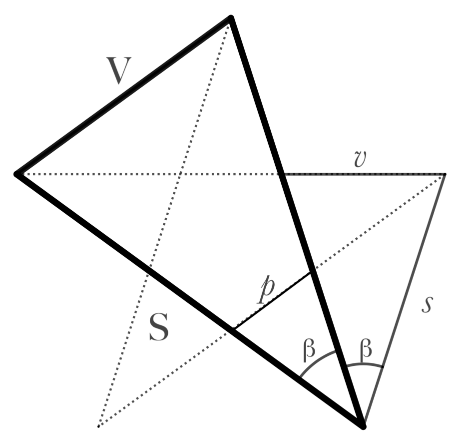


Figura 4: Construcción de tres triángulos semejantes en el pentagrama.

De la Figura 4, se dice que los dos triángulos más grandes son semejantes, pues ambos tienen los mismos ángulos: son isósceles y comparten el ángulo β. Cuando dos triángulos son semejantes, conservan las proporciones de sus lados, en este caso $\frac{S}{V} = \frac{s}{v} = c$; además puede observarse que $s = V$ y que $v = S - V = (c-1)V$. luego:

$$c = \frac{V}{(c-1)V} \iff c = \frac{1}{c-1}$$

Sabemos que el número positivo que resuelve esta última ecuación es la proporción áurea, luego: $\frac{S}{V} = \frac{s}{v} = \varphi$, o bien $S = \varphi V$. Por construcciones similares, puede demostrarse que $v = \varphi p$, o bien, que $V = \varphi^2 p$, lo cual nos dice que la proporción entre el lado del nuevo pentágono y el más grande es φ^2.

ϕ y las sumas infinitas

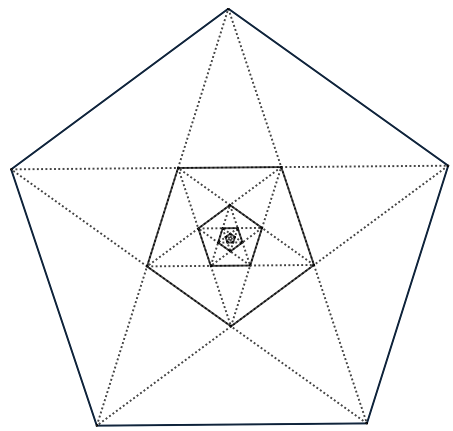


Figura 5: Sobre la construcción de un pentágono y el trazo de sus diagonales, que da lugar a un pentagrama. Si el lado del pentágono mayor es l, las diagonales tendrán una longitud de ϕl y el lado del nuevo pentágono será $\varphi^{-2}l$. [26]

Antes decíamos que nos era imposible dibujar un patrón infinito como el de la Figura 5 con la tinta de las impresoras. ¿Esto es debido a que ellas no pueden imprimir detalles tan pequeños o porque se necesitaría infinita tinta?

Supongamos que tenemos un pentágono con un lado arbitrario l. Ya mostramos que la distancia entre un vértice y otro opuesto es φl. Es decir, tras el primer pentágono, con perímetro $5l$, se pueden dibujar cinco diagonales para generar un pentagrama con perímetro $5\varphi l$.

Al dibujar dicho pentagrama, automáticamente se genera el nuevo pentágono de lado $l_1 = \varphi^{-2}l$. Por lo tanto, si queremos realizar n nuevos pentágonos tenemos que repetir esos pasos n veces: trazando cinco diagonales durante cada iteración: primero se trazarán segmentos que suman $5\varphi l_1$, luego $5\varphi l_2$ y así sucesivamente.

Notamos que $l_{n+1} = \varphi^{-2} l_n$ para $n > 0$ o bien $l_n = l \cdot (\varphi)^{-2n}$.

Empleando el Teorema A.7, podemos calcular cuánto sumarían las medidas de todas diagonales trazadas:

$$5\varphi\sum_{i=1}^{n} l_i = 5\varphi\sum_{i=1}^{n}(l\cdot(\varphi^{-2})^i) = 5l\varphi\sum_{i=1}^{n}(\varphi^{-2})^i = 5l\varphi\frac{\varphi^{-2n-2}-\varphi^{-2}}{\varphi^{-2}-1}$$

Si se hicieran no n iteraciones sino infinitas iteraciones, el Teorema A.8 nos dice que la suma de dichas medidas sería:

$$\lim_{n\to\infty} 5\varphi\sum_{i=1}^{n} l_i = \lim_{n\to\infty} 5l\varphi\frac{\varphi^{-2n-2}-\varphi^{-2}}{\varphi^{-2}-1} = 5l\varphi\frac{\varphi^{-2}}{1-\varphi^{-2}} = 5l\frac{\varphi^{-1}}{\varphi^{-1}} = 5l$$

Este resultado es impresionante por distintos motivos: en primera instancia, porque nos dice que la suma de las infinitas líneas trazadas es algo finito. Después, porque esa suma es exactamente igual al perímetro del primer pentágono y por último ¡porque ese número no está relacionado con φ!

La suma de infinitos números irracionales puede ser un número entero.

$$\lim_{n\to\infty}\varphi\sum_{i=1}^{n}(\varphi^{-2})^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi^{-2i+1} = \varphi^{-1}+\varphi^{-3}+\varphi^{-5}+\varphi^{-7}+\cdots = 1$$

Y, de acuerdo al Teorema 1.3:

$$\frac{L_{-1}+F_{-1}\sqrt{5}}{2}+\frac{L_{-3}+F_{-3}\sqrt{5}}{2}+\frac{L_{-3}+F_{-3}\sqrt{5}}{2}+\frac{L_{-5}+F_{-5}\sqrt{5}}{2}+\cdots = 1$$
$$\implies \sum_{i\in\mathbb{N}} L_{-2i-1}+\sqrt{5}\sum_{i\in\mathbb{N}} F_{-2i-1} = 2 \implies \sqrt{5} = \frac{2-\sum_{i\in\mathbb{N}} L_{-2i-1}}{\sum_{i\in\mathbb{N}} F_{-2i-1}}$$

Para continuar desarrollando esta expresión, hace falta extender la sucesión de Fibonacci y los números de Lucas. Es decir, hace falta definir L_n y F_n cuando n es un entero negativo.

Comentario sobre la función A

Algunos resultados anteriores nos indican que la función A está indefinida únicamente para el número 0, los deseos de aplicar infinitamente dicha función hicieron nacer al conjunto $\{\alpha_i | i \in \mathbb{N}\} = \{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \ldots\}$, de todos los números que no pueden pertenecer al dominio de A^∞, que en su mayoría son negativos pero no son *todos los negativos*.

Respecto al dominio de $A^{-\infty}$, podemos concluir de la expresión $A^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ que $1 \notin \mathcal{D}_{A^{-1}}$, lo que implica que $1, A(1) \notin \mathcal{D}_{A^{-2}}$ y en general

$$\{1, A(1), A^2(1), \ldots, A^{m-1}(1)\} \cap \mathcal{D}_{A^{-m}} = \varnothing$$

Observemos que $1 = -(\alpha_1)^{-1}$, $A(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2 = -(\alpha_2)^{-1}$, y general $A^{n+1}(1) = -(\alpha_n)^{-1}$, debido a que

$$\begin{aligned} A^m(1) = -(\alpha_{m+1})^{-1} &\implies A^{m+1}(1) = A(A^m(1)) = A(-1/\alpha_m) = 1 - \alpha_m \\ &\implies A^{m+1}(1) = -\Big(\frac{1}{\alpha_m - 1}\Big)^{-1} = A^{-1}(\alpha_m) \\ &\implies A^{m+1}(1) = -(\alpha_{m+1})^{-1} \end{aligned}$$

Y para $m = 0$, se cumple $A^m(1) = A^0(1) = 1 = -(\alpha_1)^{-1} = -(\alpha_{m+1})^{-1}$, por lo que lo cumplirán todos los naturales, por el Principio de Inducción.

Por lo tanto, se tiene lo siguiente para toda $m \in \mathbb{Z}^+$:

$$\mathcal{D}_{A^m} = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{m-1}\} \implies \mathcal{D}_{A^\infty} = \mathbb{R} \setminus \{\alpha_i | i \in \mathbb{N}\}$$
$$\mathcal{D}_{A^{-m}} = \mathbb{R} \setminus \Big\{\frac{-1}{\alpha_1}, \frac{-1}{\alpha_2}, \frac{-1}{\alpha_3}, \frac{-1}{\alpha_4}, \ldots, \frac{-1}{\alpha_m}\Big\} \implies \mathcal{D}_{A^{-\infty}} = \mathbb{R} \setminus \{-s^{-1} | s \in \{\alpha_i | i \in \mathbb{Z}^+\}\}$$

Luego, es posible definir la función $\dot{A}(x) = 1 + \frac{1}{x}$ con dominio igual a

$$\mathcal{D}_{\dot{A}} = \mathcal{D}_{A^\infty} \cap \mathcal{D}_{A^{-\infty}} = \mathbb{R} \setminus \Big\{\ldots, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots\Big\}$$

de modo que $\dot{A}(x) \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$ para toda $x \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$, por lo que es posible aplicar nuevamente la función: $\dot{A}(\dot{A}(x)) = \dot{A}^2(x)$, y aplicarla tantas veces como se desee $\dot{A}^n(x) \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$. Si también definimos $\dot{A}^0 \equiv I_{\mathcal{D}_{\dot{A}}}$ y $\dot{A}^{-1} = \frac{1}{x-1}$, notamos que $\dot{A}^{-1}(x) \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$ para todo $x \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$, por lo tanto también existe $\dot{A}^{-n} = (\dot{A}^{-1})^n$.

La siguiente proposición resume todo lo que es posible conocer y que es relevante para nosotros acerca de las funciones $\dot{A}^n$.

Proposición. ***i)*** *El conjunto de funciones*

$$\{\dot{A}^n | n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \dot{A}^{-2}, \dot{A}^{-1}, \dot{A}^0, \dot{A}^1, \dot{A}^2, \ldots\},$$

con dominio en $\mathcal{D}_{\dot{A}} = \mathcal{D}_{A^\infty} \cap \mathcal{D}_{A^{-\infty}}$*, forma un grupo bajo la composición.*
ii) *Para cualquier función del conjunto distinta de* $\dot{A}^0$*,* φ *y* ψ *son sus únicos eigenelementos.*
iii) *Para todo* $x \in \mathcal{D}_{\dot{A}}$ *tal que* $x \neq \varphi, \psi$*, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \dot{A}^n(x) = \varphi \quad \text{y} \quad \lim_{n\to-\infty} \dot{A}^n(x) = \psi.$$

Así como la función $\dot{A}(x) = 1 + \frac{1}{x}$ nace de un equivalente de la ecuación $x^2 = x + 1$, es decir $x = A(x)$, hay otros equivalentes que pueden encontrarse, o bien, hay otras maneras de despejar a x de la ecuación, por ejemplo $x = \sqrt{1+x}$ que permite definir a x (la raíz positiva) de una manera recursiva:

x es igual a la raíz cuadrada de 1 más x

Si definimos $B(x) = \sqrt{1+x}$, no es difícil comprobar que $B(\varphi) = \varphi$, luego $\varphi = B^n(\varphi)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}$$

Luego, φ es un eigenvalor de la función B. Sin importar qué tan grande sea x, podemos intuir que al sumarle uno y sacar la raíz cuadrada, nos dará como resultado un número menor $B(x)$, que dará un resultado aún menor si repetimos el proceso $B(B(x))$, si repetimos este proceso muchas veces, no es extraño imaginar que nos estaremos acercando a phi: $B^n(x) \approx \varphi$, justo como pasaba con la función A.

Hipótesis. *Para todo* $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} B^n(x) = \varphi$.

Ejemplo: $B^7(1650) = 1.62077506962 \approx \varphi + 0.02$.

Todo parece indicar que B también es una función que nos permite aproximar el valor de φ, aunque con operaciones más complicadas que las de suma y división. Una cuestión a analizar es ¿Qué tan rápido nos aproximamos al valor de φ usando las funciones A y B?

El siguiente ejemplo ilustra que estos análisis no sólo están relacionados con el proceso de encontrar las raíces de un polinomio, sino que pueden tener conexiones inesperadas con otras áreas de las matemáticas.

Consideremos la "segunda ecuación de segundo grado más sencilla": $x^2 = x+2$. Se verifica fácilmente que sus raíces son 2 y -1. Ahora bien, esa expresión es equivalente a $x = \sqrt{2+x}$ para la raíz positiva. Definamos $V(x) = \sqrt{2+x}$, luego $V(2) = 2$.

Podemos plantear una hipótesis equivalente a la de la función B, es decir, que para cualquier $x \geq 0$, es cierto que $\lim_{n\to\infty} V^n(x) = 2$. Pero nuestro interés aquí no es *buscar una forma de aproximar* el eigenelemento de V, que es el número dos; lo que queremos es saber "qué tan rápido" la función V nos lleva a ese número. Definamos la siguiente función que depende de la diferencia entre $2 = V^\infty(0)$ y la aproximación con $V^n(0)$:

$$f(n) = \sqrt{2 - V^n(0)} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + V^{n-1}(0)}}$$

Por hipótesis, $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$. La función conjugada $f^*(n) = \sqrt{2 + V^n(0)} = V^{n+1}(0)$ nos permite llegar al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f^*(n) \cdot f(n) &= \sqrt{4 - (V^n(0))^2} = \sqrt{4 - (2 + V^{n-1}(0))} \\ &= \sqrt{2 - V^{n-1}(0)} = f(n-1) \end{aligned}$$

Lo cual implica que $f^*(n-1)f^*(n)f(n) = f(n-2)$ y si $k \leq n$ se tiene que $f^*(n-k+1)\cdots f^*(n)f(n) = f(n-k)$, para $k = n$:

$$\begin{aligned}
\Big(\prod_{i=0}^{n-1} f^*(n-i)\Big)f(n) = f(n-n) = f(0)& \\
\implies f(n) &= f(0)\cdot\frac{1}{f^*(1)}\cdot\frac{1}{f^*(2)}\cdots\frac{1}{f^*(n)} \\
&= \sqrt{2}\cdot\frac{1}{V^2(0)}\cdot\frac{1}{V^3(0)}\cdots\frac{1}{V^{n+1}(0)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots
\end{aligned}$$

Sabemos también que $f(n+1) = f(n)\cdot\frac{1}{f^*(n+1)} = f(n)\cdot\frac{1}{V^{n+2}(0)}$ y es cierto que $V^m(0) \geq \sqrt{2}$ para todo $m > 0$, de modo que $f(n+1) \leq f(n)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, o bien:

$$2 - V^{n+1}(0) \leq (2 - V^n(0))\cdot\frac{1}{2}$$

lo cual significa que con la función V, cada nueva aproximación reduce a menos de la mitad el 'error'. Para n muy grande, sabemos que $V^{n+2}(0) \approx 2$, por lo que

$$2 - V^{n+1}(0) \approx (2 - V^n(0))\cdot\frac{1}{4},$$

en síntesis: cada nueva aproximación tiene menos de la mitad de error pero no menos de un cuarto, por lo que V ha mostrado ser una herramienta útil (?) para aproximar el número 2.

Finalmente, veamos que dado $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, sólo existe un número b tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)b^n = c$ con c finita y distinta de cero. Eso será posible si

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} f(n)b^n = \lim_{n\to\infty} f(n+1)b^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(f(n)\cdot b^n)\frac{b}{V^{n+2}(0)} \\
\implies \lim_{n\to\infty}\frac{b}{V^{n+2}(0)} = 1 \implies b = \lim_{n\to\infty} V^{n+2}(0) = 2
\end{gathered}$$

Sabemos ahora que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)2^n = c$, pero desconocemos el valor de c. La inesperada respuesta a esta cuestión se conoce como la fórmula de Viète

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n)2^n &= \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2_{_0}-\sqrt{2_{_1}+\sqrt{2_{_2}+\cdots+\sqrt{2_{_n}}}}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

donde π es el número que representa la proporción entre la circuferencia y el diámetro de cualquier círculo. No demostraremos este hecho, sino que únicamente contemplaremos lo que representa: la composición de una función definida recursivamente, como $V^n(x) = \sqrt{2+V^{n-1}(x)}$, no sólo permite acercarse a la respuesta de un problema (como aproximar la raíz de un polinomio), sino que puede llevar al descubrimiento de constantes muy importantes en otras áreas de las matemáticas, y acaso permitir una conexión entre las distintas áreas.

Todo lo anterior nos motiva a averiguar un poco más acerca de las funciones y las sucesiones recursivas: *¿qué otras propiedades interesantes existen?*, *¿cuáles son las recursiones extrañas?* y ultimadamente *¿qué otros tipos de recursión pueden existir?*

Fibonacci en la naturaleza

Veamos algunos ejemplos tomados de [57], en donde se observa que la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ aparece en la naturaleza. Ambos ejemplos son muestra de que sistemas sencillos pueden dar lugar a una sucesión recursiva.

Fibonacci y las abejas

Consideremos la Figura 1, que es un arreglo hexagonal de dos filas, donde cada casilla está enumerada. Supongamos que en un momento determinado, la abeja sólo puede estar en una casilla, aunque puede **caminar** hacia cualquier casilla adyacente.

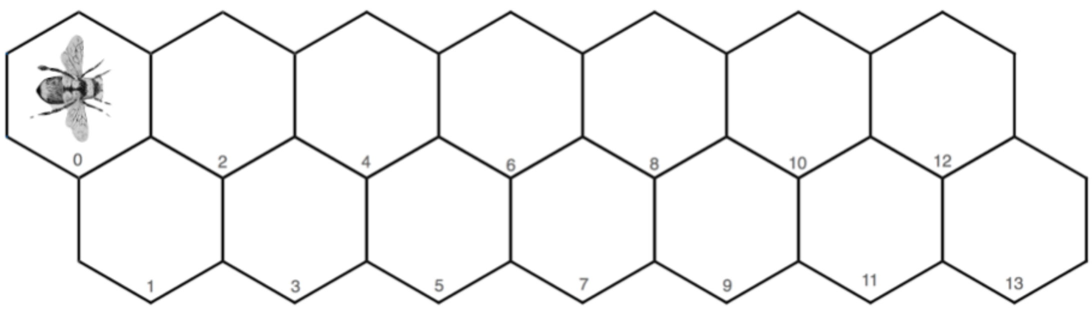


Figura 1: Arreglo de los distintos sitios en los que puede estar una abeja.

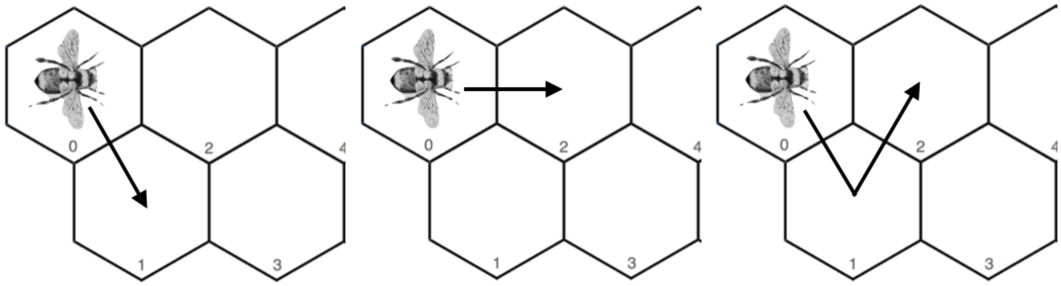
La pregunta es

¿De cuántas maneras distintas puede pasar de la casilla 0 *a la* n*?*

Esto sin caminar de un sitio a otro de menor numeración. El caso más sencillo es cuando $n = 1$ (Figura 2a), pues sólo hay una manera de pasar de la casilla 0 a la casilla 1, o bien, un sólo camino a la casilla 1.

Para $n = 2$, existen dos caminos distintos, como se muestra en la Figura 2, mientras que para $n = 3$ existen tres caminos distintos, que se muestran en la Figura 3.

El primer impulso puede ser suponer que para $n = 4$ deben existir cuatro distintos caminos. Ya que, si denotamos $C(n)$ al número de caminos que llevan a n, hasta ahora se han presentado los números $C(1) = 1$, $C(2) = 2$ y $C(3) = 3$.



(a) Único camino a 1 (b) Primer camino a 2 (c) Segundo camino a 2

Figura 2: Soluciones para $n = 1$ y $n = 2$: hay una sola manera de pasar de 0 a 1, y dos maneras de llegar a 2.

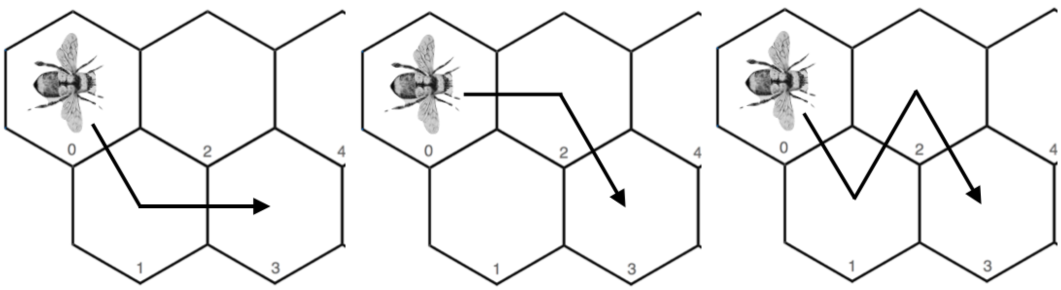


Figura 3: Soluciones para $n = 3$

Veamos que para llegar a la cuarta casilla, antes se tiene que pasar por 2 o por 3 (Figura 4). Por lo tanto, puede decirse que $C(4)$ debe ser igual a $C(3)$ más $C(2)$, es decir $C(4) = 3 + 2 = 5$.

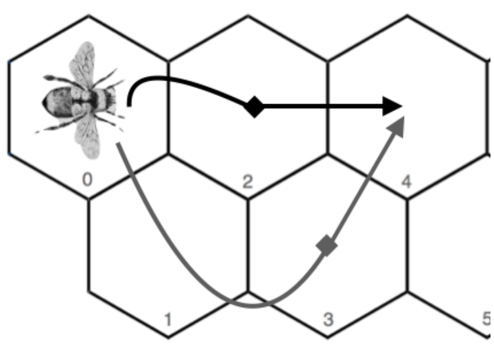


Figura 4: Soluciones para para $n = 4$.

Similarmente, para llegar a $n = 5$, antes tenemos que llegar a 3 o 4, por lo que $C(5) = C(4) + C(3) = 5 + 3 = 8$, y generalizando para todo $n \geq 3$:

$$C(n) = C(n-1) + C(n-2)$$

Luego, la función $C(n)$ cumple una relación de recursión que para nosotros es familiar. Debido a que las condiciones iniciales $C(1) = 1$, $C(2) = 2$ son dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci: $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, la función puede expresarse como sigue: $C(n) = F_{n+1}$ para todo $n > 0$.

Fibonacci y las abejas macho

Los machos provienen de huevos no fertilizados, por lo tanto un macho tiene madre pero no tiene padre; por otro lado, las hembras nacen de huevos fertilizados, por lo que ellas tienen padre y madre. Veamos el siguiente esquema que representa las generaciones descendientes de una abeja macho.

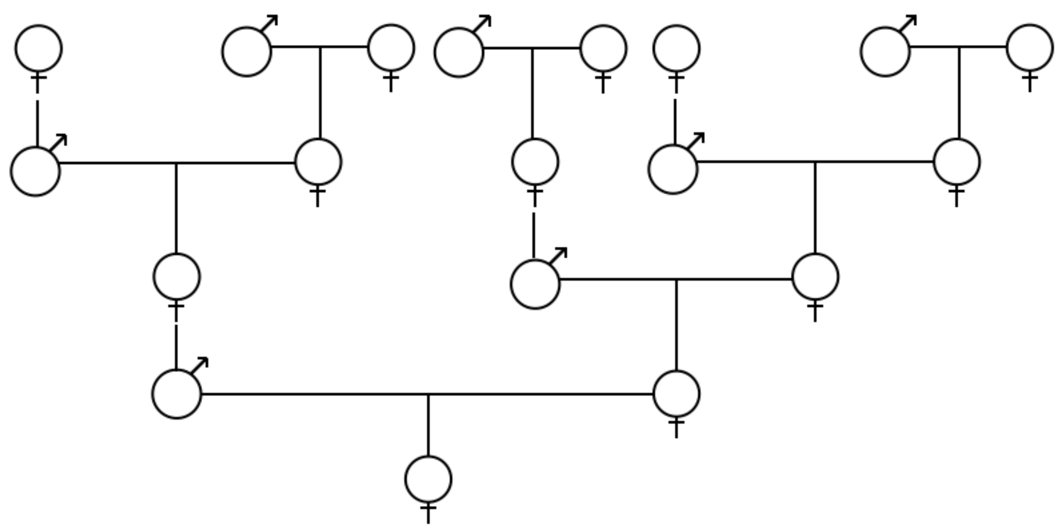


Figura 5: Árbol familiar de la abeja macho. El símbolo Venus ♀ representa una hembra y el símbolo Marte ♂ representa un macho.

Un aspecto aspecto interesante a considerar es que si se dibujara el árbol familiar para **infinitas generaciones**, se volvería a presentar un fractal: cada ramificación de la descendencia de una hembra contendría a la imagen completa.

Si contamos la cantidad de elementos de cada generación, o bien la cantidad de abejas en cada fila, notamos que son números de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8. La primera generación, únicamente integrada por la abeja macho, no aparece en la figura, la segunda generación consiste únicamente en una abeja hembra... contemos todos los distintos elementos en cada generación:

Generación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Número de abejas hembra	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Número de abejas macho	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Total	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Se observa que en las tres filas de la tabla anterior cada elemento es suma de los dos anteriores, es decir, parece cumplirse una relación de recursión. Para demostrar que esto ha de cumplirse siempre (para la n-ésima generación), puede argumentarse lo siguiente para $n \geq 3$:

- La cantidad de machos de la n-ésima generación M_n, depende de la cantidad de hembras de la generación anterior:

$$M_n = H_{n-1}.$$

- La cantidad de hembras depende de las cantidad de hembras y machos de la generación anterior:

$$H_n = H_{n-1} + M_{n-1} \implies H_n = H_{n-1} + H_{n-2}.$$

  Por lo que la cantidad de machos y de hembras cumple una relación de recursión.

Respecto a la cantidad total de abejas en la n-ésima generación, se tiene que $T_n = M_n + H_n$. El Teorema 1.6 nos dice que (T_n) satisfacerá la misma recursión.

Ahora que sabemos que todas las filas de la tabla representan una sucesión definida por $\mathfrak{F}$, sólo hace falta verificar que los dos valores iniciales son dos números de Fibonacci consecutivos.

De este sistema, pueden surgir preguntas como las siguientes:

1. *¿Cuántas abejas habrán existido en total tras el nacimiento de la generación n?*
2. *¿Cuántas abejas habrán nacido en una generación par tras el nacimiento de la generación $2n$?*

3. *¿Cuántas abejas habrán nacido en una generación impar tras el nacimiento de la generación* $2n+1$*?*

Éstas y muchas otras preguntas pueden responderse con los resultados del Teorema 1.7.

Ahora bien, empleando el siguiente resultado (demostrado en la sección *La proporción áurea y el pentágono*):

$$\sqrt{5} = \frac{2 - \sum_{i\in\mathbb{N}} L_{-2i-1}}{\sum_{i\in\mathbb{N}} F_{-2i-1}},$$

el Corolario 1.3 y el Teorema 1.7, se tiene que:

$$\sqrt{5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + L_1 + L_3 + \cdots + L_{2n+1}}{0 + F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + (L_{2n+2} - L_0)}{F_{2n+2} - F_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{2n+2}}{F_{2n+2}}.$$

El hombre de los tres siglos

Esta historia comienza con la definición del complemento de una sucesión. Sea la sucesión de Fibonacci $(F_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$, su complemento es

$$(F_n^c) = (4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, \ldots)$$

la sucesión cuyos elementos **no son números de Fibonacci** o bien los números que no aparecen en (F_n).

Definición. El complemento de una sucesión $(D_i)_{i\in\mathcal{P}}$ es la sucesión $(D_i^c)_{i\in\{0,1,\ldots\}=\mathcal{Q}}$ de todos los naturales que no aparecen en (D_i), es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $i, i+1 \in \mathcal{Q}$:

$$k \notin \{D_i | i \in \mathcal{P}\} \iff k \in \{D_i^c | i \in \mathcal{Q}\} \ \wedge \ D_i < D_{i+1}$$

La sucesión de Fibonacci es tal que $F_n + M$ es siempre un elemento de (F_n^c) donde M es cualquier número positivo menor a F_{n+1}. Es decir, existe una ecuación sencilla que nos permite generar (F_n^c). No cualquier sucesión cuenta con estas “ecuaciones sencillas” para generar su complemento y hay otras que tienen “ecuaciones extrañas”.

Se denota como (B_n^x) a la sucesión en torno a x definida por

$$B_n^x \equiv \lfloor n \cdot x \rfloor \ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\lfloor r \rfloor$ es la función que devuelve el entero menor o igual a $r \in \mathbb{R}$ (Def. A.32). Consideremos la sucesión en torno a $x = 1.5$:

$$\begin{aligned}(B_n^{1.5}) &= (\lfloor 0 \rfloor, \lfloor 1.5 \rfloor, \lfloor 3 \rfloor, \lfloor 4.5 \rfloor, \lfloor 6 \rfloor, \lfloor 7.5 \rfloor, \lfloor 9 \rfloor, \lfloor 10.5 \rfloor, \lfloor 12 \rfloor, \ldots) \\ &= (0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, \ldots)\end{aligned}$$

Su complemento es la sucesión $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \ldots)$, donde el n-ésimo elemento parece ser igual a $3n + 2$. Para cualquier número irracional x, la sucesión (B_n^x) se conoce como sucesión de Beatty. Veamos lo que ocurre si calculamos la sucesión de

Beatty en torno al número irracional que tanto hemos estudiado, *phi*:

$$
\begin{aligned}
(B_n^{\varphi}) &= (\lfloor 0\cdot\varphi\rfloor, \lfloor 1\cdot\varphi\rfloor, \lfloor 2\cdot\varphi\rfloor, \lfloor 3\cdot\varphi\rfloor, \lfloor 4\cdot\varphi\rfloor, \lfloor 5\cdot\varphi\rfloor, \ldots)\\
&= (\lfloor 0\rfloor, \lfloor 1.61\ldots\rfloor, \lfloor 3.23\ldots\rfloor, \lfloor 4.85\ldots\rfloor, \lfloor 6.47\ldots\rfloor, \lfloor 8.09\ldots\rfloor, \ldots)\\
&= (0, 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, \ldots)
\end{aligned}
$$

La siguiente tabla muestra que $B_{B_n^{\varphi}}^{\varphi} + 1$ es el n-ésimo término del complemento de la sucesión. La secuencia de símbolos '$B_{B_n^{\varphi}}^{\varphi}$' puede parecer confusa, lo que ella indica es el B_n^{φ}-ésimo número de la sucesión (B_n^{φ}): por ejemplo, para $n = 1$, $B_1^{\varphi} = 1$, por lo que $B_{B_1^{\varphi}}^{\varphi}$ es igual a $B_1^{\varphi} = 1$, para $n = 2$, $B_n^{\varphi} = 3$, por lo que se tiene el siguiente despeje $B_{B_2^{\varphi}}^{\varphi} = B_3^{\varphi} = 4$. Dicho con palabras, *el n-ésimo término nos dice qué término seleccionar.* [58]

n	B_n^{φ}	$B_{B_n^{\varphi}}^{\varphi}$	$B_{B_n^{\varphi}}^{\varphi} + 1$
1	1	1	2
2	3	4	5
3	4	6	7
4	6	9	10
5	8	12	13
6	9	14	15
7	11	17	18

Comprobamos que ningún elemento de la última columna es un elemento de (B_n^{φ}). Esta sucesión es conocida como la sucesión de Lower Wythoff y se sabe que es la única que cumple la relación $a_n^c = a_{a_n} + 1$ para todo $n > 0$. [59] Aquí nos interesa la sucesión (J_n) que se construye a partir de B_n^{φ} con la siguiente instrucción

$$J_n = B_n^{\varphi} + B_{n+2}^{\varphi} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Sus primeros elementos son $J_0 = 0+3$, $J_1 = 1+4$, $J_2 = 3+6$, y tras calcular algunos de los elementos siguientes damos con los valores

$$(J_n) = (3, 5, 9, 12, 15, 19, 21, 25, 28, 31, 35, 38, \ldots)$$

Ahora bien, si sumamos el tercer número de Fibonacci, el quinto, el noveno y así hasta el séptimo número de (J_n), $F_{J_7} = F_{25}$, obtenemos un agradable número primo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\mathbf{7}} F_{J_i} &= F_{J_0} + F_{J_1} + \cdots + F_{J_7} \\ &= F_3 + F_5 + F_9 + F_{12} + F_{15} + F_{19} + F_{21} + F_{25} \\ &= 2 + 5 + 34 + 144 + 610 + 4181 + 10946 + 75025 \\ &= \mathbf{90947}\end{aligned}$$

Usemos tres veces todos los dígitos de 90947 para construir otro número[1]

$$\frac{90947}{(9-7+0)^{9-4} \times (\sqrt{9}+\sqrt{4})^{7-9^0}} = \mathbf{0.181894}$$

El 1-8-1894 fue un día tercero de la semana que vio nacer al argentino y cordobés **J**uan **F**illoy, hijo de un padre gallego y una madre francesa. Todos estos datos han sobrevivido hasta nuestros días debido a que ese hombre fue un juez y sobretodo un influyente hombre de letras y palabras que escribió cerca de 55 libros, más de 8000 palíndromos, es decir, enunciados que 'se leen igual' de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Por ejemplo, el que escribió a través de un personaje de su libro *¡Estafen!*:

Saco pesado te doy yo, de todas épocas.

Se dice que en este libro, Filloy (que se pronuncia como 'Fiyoy' a decir de él mismo) alcanzó el récord en cuanto a la creación de palíndromos en la lengua castellana, el campeón anterior fue un emperador de oriente, León VI. Por este motivo, no fue extraño que él y muchos otros escritores consideraran que el español es el idioma más 'palíndromo', aunque todo indica que en realidad lo es el finlandés.[2]

[1] Otro número que tiene —exactamente y en el mismo orden— todos los dígitos del primer múltiplo de 90947. Es decir: 90947+90947=181894. Otro hecho interesante es que la secuencia de números '90947' aparece **siete** veces en el primer millón de dígitos de π.

[2] La palabra palíndroma que tiene el récord Guinness por ser la más larga es la palabra finlandesa *saippuakauppias*, que significa *fabricante de lejías*.

Otras obras famosas del cordobés son *Caterva*, *La purga*, *Tal cual* y *Zodiaco*. No es una coicidencia que todos los títulos mencionados tengan exactamente siete letras, fue intención de Filloy escribir los títulos de todas sus obras de esta manera. La única excepción a esta regla fue el cuento titulado *Los Ochoa*.

A pesar de que fue un escritor muy prolífico, Juan Filloy nunca se preocupó por promocionar sus textos mas que entre sus amigos cercanos; abarcó todos los géneros, desde novela hasta artículo y poesía. Otras curiosidades del escritor es que tiene al menos un título con cada una de las letras del alfabeto y su afición por los megasonetos (14 series de 14 sonetos)[3], de los cuales escribió más de 800. Lo anterior y mucho más de lo que se ha alcanzado a mencionar, fue el fruto del trabajo literario de Don Juan Φlloy, que tan apasionadamente escribió durante los casi 106 años que vivió. [60, 61]

Esta historia puede llevarnos a muchas preguntas matemáticas como "*¿Cuántos títulos de siete letras pueden existir?*" o usando más combinatoria "*¿Cuántos títulos de siete letras pueden existir tal que su primera letra sea A?*", *¿Cuántos títulos palíndromos de siete letras pueden existir?*", entre otras cuestiones. Aquí nos haremos la pregunta: ¿Puede una ecuación ser palíndroma de alguna manera?

La suma permite ecuaciones palíndromas como:

$$46 + 53 = 35 + 64$$

Y el *séptimo número de Juan Filloy*, $J_7 = 25$, permite la siguiente igualdad:

$$25 = 5^2$$

Esta ecuación se puede considerar palíndroma debido a que tiene los mismos símbolos de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Otros ejemplos son las ecuaciones palíndromas que permite la escritura con números romanos, verifíquese la siguiente identidad:

$$\mathrm{IV} + \mathrm{XI} = \mathrm{IX} + \mathrm{VI}$$

[3]Los sonetos tienen catorce versos, por lo que el megasoneto tiene un total de 14^3 versos.

Que no sólo es palíndroma sino que también es equivalente a su representación especular, es decir, se ve idéntica si se le mira a través de un espejo colocado por el lado izquierdo y derecho. ¡Otras ecuaciones palíndromas también son las mismas si colocamos el espejo del lado izquierdo, derecho, arriba o abajo!, como la siguiente ecuación relacionada con el número XIV:

$$\mathrm{XX} + (\mathrm{IX} - \mathrm{XI})\mathrm{III} = \mathrm{III}(\mathrm{IX} - \mathrm{XI}) + \mathrm{XX}$$

Escrita con números indoarábicos, la expresión anterior es más aburrida y no posee ninguna propiedad interesante mas que la de ser verdadera

$$20 + (9 - 11) \cdot 3 = 3 \cdot (9 - 11) + 20.$$

Es natural preguntarse si hay ecuaciones más complejas que sean palíndromas o que presenten algunas de las simetrías anteriormente demostradas; veamos cómo el número *phi* representado como ϕ permite escribir una expresión capicúa:[4]

$$\textstyle\sum(\imath\phi^{\imath}) = ({}_{\imath}\phi\imath)^{3}$$

Que es una manera conveniente y un poco abusiva de escribir $\sum(i\phi^i) = (i\phi i)^3$, donde i representa la variable de la suma en la parte izquierda de la ecuación mientras que en la parte derecha representa el número imaginario $i = \sqrt{-1}$. No está claro si esta expresión es una ecuación, es decir, si alberga una verdad matemática. Demostremos que ése es el caso cuando el límite inferior es $-\infty$ y el límite superior es cero:

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{0} i\phi^i = (i\phi i)^3 \iff \sum_{i=0}^{\infty} -i\phi^{-i} = (-\phi)^3 \iff \sum_{i=0}^{\infty} i\phi^{-i} = \phi^3 \\ \iff \frac{0}{\phi^0} + \frac{1}{\phi} + \frac{2}{\phi^2} + \frac{3}{\phi^3} + \frac{4}{\phi^4} + \frac{5}{\phi^5} + \cdots = \phi^3\end{aligned}$$

[4] Una capicúa es un número que tiene la misma forma si se le mira de abajo hacia arriba, es decir girando la página 180 grados; por ejemplo: 1,2,5,8,11, etc. Por lo tanto, una expresión capicúa es una que mantiene esta misma cualidad.

A primera vista, no es sencillo determinar si esto último es verdadero o falso, pues no es una expresión trivial o siquiera finita, como las otras ecuaciones palíndromas, capicúas y especulares. Sin embargo, la expresión es una igualdad, como demostraremos a continuación:

Demostración. De acuerdo a los Teoremas A.7 y A.8, para toda $a \neq 1$ y $a \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} ia^{-i} &= \sum_{i=1}^{m} ia^{-i} = \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=2}^{m} (i-1)a^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=2}^{m} a^{-i} + \sum_{i=3}^{m} (i-2)a^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=2}^{m} a^{-i} + \sum_{i=3}^{m} a^{-i} + \sum_{i=4}^{m} (i-3)a^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=2}^{m} a^{-i} + \sum_{i=3}^{m} a^{-i} + \sum_{i=4}^{m} a^{-i} + \sum_{i=5}^{m} (i-4)a^{-i} \\
&= \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=2}^{m} a^{-i} + \sum_{i=3}^{m} a^{-i} + \sum_{i=4}^{m} a^{-i} + \cdots + \sum_{i=m-1}^{m} a^{-i} + \sum_{i=m}^{m} (i-m+1)a^{-i} \\
&\vdots \\
&= 1 \cdot \sum_{i=1}^{m} a^{-i} + a^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{m-1} a^{-i} + a^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{m-2} a^{-i} + \cdots + a^{-m+2} \sum_{i=1}^{2} a^{-i} + a^{-m} \\
&= \frac{a^{-m-1} - a^{-1}}{a^{-1} - 1} + \frac{a^{-m-1} - a^{-2}}{a^{-1} - 1} + \frac{a^{-m-1} - a^{-3}}{a^{-1} - 1} + \cdots + \frac{a^{-m-1} - a^{-m+1}}{a^{-1} - 1} + a^{-m}
\end{aligned}
$$

Pero $a^{-m} = \frac{a^{-m-1} - a^{-m}}{a^{-1} - 1}$, luego:

$$
\sum_{i=0}^{m} ia^{-i} = \frac{1}{a^{-1} - 1} \Big(ma^{-m-1} - \sum_{i=1}^{m} a^{-i} \Big) = \frac{a}{a-1} \Big(\sum_{i=1}^{m} a^{-i} - ma^{-m-1} \Big)
$$

Daremos por hecho que si $a > 1$, $ma^{-m} \to 0$ conforme $m \to \infty$,[5] lo que nos lleva a la

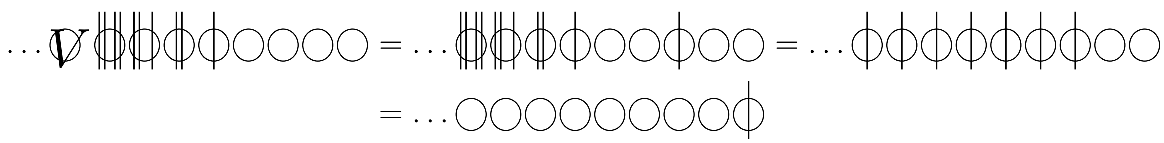
[5] El ínfimo de $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}^+\}$ es mayor o igual a 0, pues 0 es una cota inferior. Si el ínfimo es $\delta > 0$ entonces existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\delta < \frac{1}{n} < 2\delta \implies \frac{1}{2n} < \delta$, contradiciendo nuestra hipótesis; por lo tanto el ínfimo es 0. Esto implica que para todo $a > 1$ existe un $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{k+1}{k} < a$, luego considerando que $\frac{k+2}{k+1} < \frac{k+1}{k}$, es cierto que $\frac{m}{a^m} = (\frac{m}{(m-1)\cdot a} \cdot \frac{m-1}{(m-2)\cdot a} \cdots \frac{k+2}{(k+1)\cdot a} \cdot \frac{k+1}{k \cdot a}) \frac{k}{a^k} \leq (\frac{k+1}{k \cdot a})^{m-k} \frac{k}{a^k}$ para todo $m > k$. Por lo tanto $(\frac{k+1}{k \cdot a})^{m-k} \to 0$ conforme $m \to \infty$ implica que $\frac{m}{a^m} \to 0$.

demostración:

$$\sum_{i=0}^{\infty} ia^{-i} = \frac{a}{a-1} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a^{-i} = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a^{-1}}{1-a^{-1}} = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{1}{a-1} = \frac{a}{(a-1)^2}$$

Para $a = \phi$, se sabe que $(a-1)^2 = (\phi^{-1})^2$, por lo tanto $\sum_{i=0}^{\infty} i\phi^{-i} = \frac{\phi}{(\phi-1)^2} = \phi^3$.

También se puede usar la notación presentada en la demostración del Teorema 1.7 para intentar demostrar lo mismo en pocas líneas.



Aunque es necesario formalizar algunos procedimientos empleados. Como que el límite de $\ldots\phi\phi\phi\phi\bigcirc\bigcirc$ —la suma continúa *por siempre* hacia la izquierda— tiende a $\ldots\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\phi$ si los elementos de la izquierda tienden a cero, que es el caso cuando la sucesión $(D_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es tal que $D_n = \phi^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Finalmente, mencionaremos que el primer número negativo de la extensión fuerte de $(\pi_{m,i})_{i=0}^{7}$ (con $m = 90947$) es -181910. El día 1-8-1910, Juan Filloy cumplía 2^{2^2} años.

Más allá de la recursión

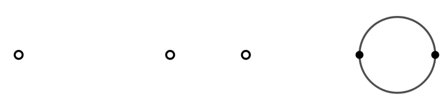
En esta sección hablaremos de un conjunto de sucesiones que satisfacen cierta condición que **no** es una relación de recursión.

Definición. Para toda $m \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{\Lambda}_m$ es un conjunto de sucesiones cuyo dominio son los primeros m números naturales tal que se satisface lo siguiente:

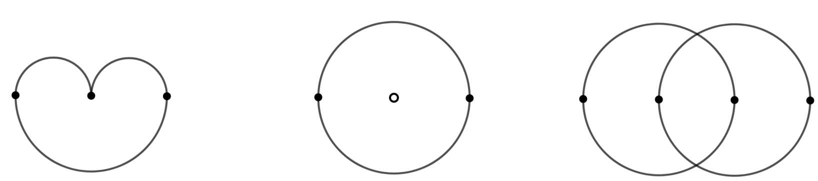
$$(\lambda_n)_{n=1}^{m} \in \mathbf{\Lambda}_m \iff \forall \lambda_j \; \exists \; k \in \{1, \ldots, m\} \colon \lambda_j = \lambda_{k+\lambda_k}$$

Proposición. Los siguientes enunciados son verdaderos para todo $\mathbf{\Lambda}_m$:

- $\mathbf{\Lambda}_m$ contiene $m!$ elementos.
- Para $m = 1$, se tiene la sucesión (0). Para $m = 2$, existen las sucesiones $(0, 0)$ y $(-1, -1)$. Todas las mencionadas pueden representarse mediante los diagramas siguientes, respectivamente:

  Donde cada punto representa un elemento de la sucesión y las líneas que unen dos puntos representan las relaciones de las posiciones k y j de la definición. Por ejemplo: $A_{1+A_1} = A_2$, por lo tanto se ha colocado una línea por arriba; por otro lado $A_{2+A_2} = A_1$ y se ha colocado una línea por debajo.
- Para $m = 3$ existen, por ejemplo, las sucesiones $(1, 1, -2)$ y $(2, 0, -2)$. Para $m = 4$ existe, por ejemplo, $(2, 2, -2, -2)$.[1] Todas estas se pueden representar con los diagramas siguientes, respectivamente.

[1] Es interesante considerar que aunque sólo las sucesiones conformadas únicamente por ceros son capicúas, los diagramas pueden ser simétricos con respecto a algún eje.

- Para toda $(\lambda_n)_{n=1}^m \in \mathbf{\Lambda}_m$, se cumple

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0$$

- Para todo número natural t, se tiene el siguiente promedio sobre todas las sucesiones de $\mathbf{\Lambda}_m$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{2t+1} \right\rangle = 0$$

Donde λ_i^{2t+1} es una potencia del elemento λ_i.

- Sea la función $\mathcal{L}$ sobre cualquier sucesión $(B_i)_{i\in\mathcal{P}}$ tal que para cualquiera B_k de sus elementos

$$(\mathcal{L}(B_k) \equiv B_{k+B_k} \iff k + B_k \in \mathcal{P}) \not\Longleftrightarrow (\mathcal{L}(B_k) \equiv B_k \iff k + B_k \notin \mathcal{P})$$

Es posible demostrar que para cualquier elemento λ_k de una sucesión $(\lambda_n)_{n=1}^m \in \mathbf{\Lambda}_m$, $\mathcal{L}(\lambda_k) = \lambda_{k+\lambda_k} = \lambda_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Sea $\dot{\mathbf{\Lambda}}_m$ el subconjunto de $\mathbf{\Lambda}_m$ donde todas las sucesiones $(\lambda_n) \in \dot{\mathbf{\Lambda}}_m$ son tal que $p = m$ es el menor número entero positivo que cumple $\mathcal{L}^p(\lambda_k) = \lambda_k$ para toda $k \in \{1, \ldots, m\}$. Se tiene el siguiente promedio sobre todas las sucesiones de $\dot{\mathbf{\Lambda}}_m$:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{m} \dot{\lambda}_i^2 \right\rangle = \frac{m^2(m+1)}{6}$$

"He sanovat, että se on viimeinen kappale

He eivät tunne meitä, näet

Se on vain viimeinen kappale

Jos annamme sen"