Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Teoría de Extensiones de Operadores Simétricos en Espacios de Hilbert

T E S I S

que para obtener el título de:

matemático

presenta:

Manuel Antonio Aguilar Rivera

director del trabajo:

Dr. Luis Octavio Silva Pereyra

CIUDAD DE MÉXICO 2019

HOJA DE DATOS DEL JURADO

1. Datos del Alumno
   Aguilar
   Rivera
   Manuel Antonio
   (+52) 55 28891560
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   412053111

2. Datos del Tutor
   Dr.
   Luis Octavio
   Silva
   Pereyra

3. Datos del Sinodal 1
   Dr.
   Miguel Arturo
   Ballesteros
   Montero

4. Datos del Sinodal 2
   Dr.
   Rafael René
   del Rio
   Castillo

5. Datos del Sinodal 3
   Dra.
   Carmen
   Martínez
   Adame

6. Datos del Sinodal 4
   Dr.
   Francisco Javier
   Torres
   Ayala

7. Datos del Trabajo Escrito
   Teoría de Extensiones de Operadores Simétricos en Espacios de Hilbert
   93 pp.
   2019

A MI FAMILIA.

Índice general

Introducción

Uno de los principales problemas matemáticos dentro de la mecánica cuántica, es el siguiente: dada una expresión (diferencial, en diferencias o integro-diferencial) a la que se le puede asociar un operador simétrico bien definido sobre algún dominio en un espacio de Hilbert, probar, ya sea que se trata de un operador esencialmente autoadjunto o encontrar sus posibles extensiones autoadjuntas. Esto se debe a que los sistemas en mecánica cuántica son descritos por operadores y vectores en espacios de Hilbert separables. En los cuales hay un estado físico que corresponde a cada vector de norma uno, y un operador autoadjunto que corresponde a cada observable. Como explican Reed y Simon en [7] Secc. VIII.11.

En el presente trabajo se expone de manera detallada la teoría de extensiones de operadores simétricos en espacios de Hilbert, visto desde el enfoque clásico de la teoría de Von Neumann, así como desde la teoría de los tripletes de frontera. Esta última teoría en particular ha tenido una notable actividad y ha atraído el interés de los especialistas en los últimos años, debido a que la teoría de los tripletes relaciona de manera directa condiciones en la frontera (las cuales pueden contar con una interpretación física) con sus respectivas extensiones. Lo anterior es importante en la física matemática porque las condiciones en la frontera están determinadas por el arreglo experimental o las particularidades del fenómeno físico. A través de ejemplos sencillos, se busca ilustrar la utilidad que tienen ambas teorías y divisar cómo es que éstas se comparan.

Para ello, en el Capítulo I introducimos a los operadores acotados y algunas de sus propiedades básicas. Después proseguimos con el estudio de formas sesquilineales y formas cuadráticas, donde el teorema que caracteriza a las formas sesquilineales hermitianas en torno a su forma cuadrática nos será de utilidad más adelante en la caracterización de operadores simétricos. Siguiendo con el estudio de operadores elementales, y utilizando el concepto de gráfica de un operador, introducimos al adjunto de un operador, no necesariamente acotado, y realizamos un amplio estudio de sus propiedades. Terminamos así presentando otro de los conceptos que será de vital importancia en el desarrollo de la teoría de extensiones, para ello introducimos la noción de índice de defecto de un operador, el cual dará lugar al concepto de índice de deficiencia. Detallaremos cómo es que éste se comporta dentro de las componentes conexas del conjunto de puntos cuasiregulares o de tipo regular de nuestro operador.

El Capítulo II gira al rededor del estudio de operadores simétricos e isométricos, y se basa en el análisis de sus relaciones con respecto al concepto de índices de deficiencia con ayuda de la transformada de Cayley. Ahí se aborda por primera vez en el texto el problema de la extensión de operadores simétricos, en el caso general de extensiones a operadores simétricos cerrados. Aquí, las fórmulas de Von Neumann para la descripción del dominio del adjunto de un operador simétrico resultan ser de gran utilidad. Además, se exhibe la intrínseca relación que hay entre la clase de operadores simétricos densamente definidos y la clase de operadores isométricos V tales que el rango $R(V-I)$ es denso en H, con I la identidad en H. El hecho de ser densamente definido se justifica observando que ésta es una propiedad necesaria para la existencia de una extensión adjunta única dentro del mismo espacio. De igual manera, la condición de ser cerrable resulta ser necesaria. Se prueba además que el operador cerradura resulta ser una extensión simétrica cerrada de nuestro operador original, y que está contenido en el operador adjunto, lo cual exhibe el hecho de que generalmente en la teoría se parta de operadores simétricos cerrados densamente definidos.

Es así como se desarrolla todo el material necesario para una completa caracterización de las extensiones autoadjuntas de un operador simétrico cerrable densamente definido. Principalmente basándonos en el enfoque dado por Birman y Solomjak en [3], además de resultados clásicos en la teoría de operadores. En el tercer capítulo se presentan y demuestran los principales resultados de la teoría de Von Neumann para el estudio de las extensiones de operadores simétricos e isométricos. Es aquí donde se hace evidente el hecho de que el problema de encontrar extensiones simétricas cerradas de un operador simétrico, se vuelve mucho más sencillo al transformar el problema al de encontrar extensiones isométricas cerradas de operadores isométricos. De igual manera, el problema de encontrar extensiones autoadjuntas de operadores simétricos se traduce al problema de encontrar extensiones unitarias de operadores isométricos, el cual es considerablemente más sencillo. Haciendo uso de la transformada de Cayley y de las fórmulas de Von Neumann se establece así la importante relación entre ambas familias de operadores.

Terminamos el tercer capitulo con la aplicación de esta teoría desarrollada a dos ejemplos clásicos, tal como lo son el encontrar las extensiones autoadjuntas de los operadores derivada y Laplaciano dentro de los espacios de Hilbert $L^2(a,b)$ y $L^2(0,\infty)$. Además se propone un ejemplo no clásico, como lo es el problema de encontrar las extenciones autoadjuntas del operador de Jacobi en el espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$.

Finalmente, en la primera parte del Capítulo IV, se aborda este mismo problema clásico, pero a través del estudio de la teoría de tripletes de frontera. Al igual que lo hace Schmüdgen en [9], se comienza introduciendo el concepto de relaciones lineales, y se desarrolla una teoría similar a la que se tenía con los operadores lineales, adaptando conceptos como los de operador adjunto y autoadjunto, así como el de un análogo de la transformada de Cayley en este nuevo contexto. En la segunda parte, se desarrollan los resultados que conforman el corazón de la teoría de tripletes, y terminamos aplicándolos a los ejemplos estudiados en el Capítulo III, lo cual nos permite vislumbrar cómo es que se pueden comparar ambas teorías.

Preliminares

Definición 0.1. *Decimos que un conjunto X es un* ***espacio lineal****, si éste viene acompañado de un campo $\mathbb{K}$ y además cuenta con dos operaciones llamadas suma de vectores $+ : X \times X \to X$ y multiplicación por escalar $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$. Las cuales satisfacen para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ lo siguiente:*
(EL1) $(X, +)$ *es un grupo abeliano.*
(EL2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.
(EL3) $1x = x$. *Donde* 1 *es el neutro multiplicativo del campo* $\mathbb{K}$.
(EL4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
(EL5) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

Definición 0.2. *Sea $\mathbb{K}$ un campo. Un conjunto L con dos operaciones $+ : L \times L \to L$ y $\cdot : \mathbb{K} \times L \to L$ es un* ***conjunto lineal****, si para cualesquiera $x, y \in L$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda x + y \in L$.*

Observemos que todo conjunto lineal, con las operaciones heredadas de un espacio lineal, es a su vez un espacio lineal.

Definición 0.3. *Un* ***operador lineal*** *$T : D \to X$ es una función entre dos espacios lineales D y X (sobre un mismo campo $\mathbb{K}$) que satisface para cualesquiera $x, y \in D$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, las siguiente propiedades:*
(OL1) $T(x + y) = Tx + Ty$.
(OL2) $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

En adelante utilizaremos el término "operador" como sinónimo de "operador lineal". Notemos que toda restricción de un operador T a un subconjunto lineal de D sigue satisfaciendo las propiedades (OL1) y (OL2). Se sigue entonces que las restricciones de un operador lineal a cualquier subconjunto lineal del dominio, son también operadores lineales.

Definición 0.4. *Si $T : D \to X$ es un operador, denotamos*
$D(T) := D$ ***Dominio*** *de T.*
$R(T) := \{y \in X \mid \exists x \in D\,(Tx = y)\}$ ***Rango*** *de T.*
$N(T) := \{x \in D \mid Tx = 0\}$ ***Núcleo*** *o* ***Kernel*** *de T.*

Es fácil verificar que $R(T)$ y $N(T)$ son conjuntos lineales. $\{0\} \subseteq N(T)$, además el operador T es invertible si y sólo si $N(T) = \{0\}$. La inversa T^{-1}, si existe, es también un operador lineal y $D(T^{-1}) = R(T)$, $R(T^{-1}) = D(T)$.

Definición 0.5. *Sea $T : D \to X$ un operador lineal entre dos espacios lineales D y X (sobre un mismo campo $\mathbb{K}$). Si T resulta ser biyectivo, decimos entonces que es un* ***isomorfismo lineal*** *entre D y X.*

Recordemos que todo campo es un espacio lineal sobre sí mismo. A las funciones que van de un espacio lineal a su campo se les conoce como **funcionales**. Si una funcional resulta ser un operador lineal, se le llama **funcional lineal**.

Definición 0.6. *Sea X un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{K}$. Una* ***norma*** *para X es una funcional $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisface para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ lo siguiente:*
(N1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
A la pareja $(X, \|\cdot\|)$ se le llama ***espacio normado****.*

Definición 0.7. *Un isomorfismo lineal entre dos espacios normados $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ es una* ***isometría*** *si para toda $x \in X$ se tiene que*

$$\|x\|_X = \|Tx\|_Y.$$

Definición 0.8. *Sea X un espacio lineal. Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son* ***equivalentes*** *si existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $x \in X$*

$$\|x\|_1 \leq c_2\|x\|_2 \qquad y \qquad \|x\|_2 \leq c_1\|x\|_1.$$

Recordemos que dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos la **bola abierta** con centro en x y radio ε como el conjunto de vectores

$$B(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Definición 0.9. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un subconjunto $D \subseteq X$ es* ***denso*** *en X si para cualesquiera $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe un $d \in D$ tal que $d \in B(x, \varepsilon)$. Es decir $D \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.*

Definición 0.10. *Decimos que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es* ***separable*** *si contiene un subconjunto denso de cardinalidad numerable.*

Definición 0.11. *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$* ***converge*** *a $x \in X$ si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

para cada $n \geq N$.

Lo anterior suele denotarse con $x_n \to x$. También cuando esto ocurre, decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una **sucesión convergente**.

Definición 0.12. *Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es una* ***sucesión de Cauchy*** *si para toda $\varepsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

para cualesquiera $n, m \geq N$.

Definición 0.13. *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy en X es una sucesión convergente en X.*

Definición 0.14. *Decimos que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un* ***espacio de Banach****, si éste es completo con la norma $\|\cdot\|$.*

Afirmación 0.15. *Todo espacio normado se puede completar. Es decir, dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|_X)$ se pueden construir un espacio de Banach $(Z, \|\cdot\|_Z)$ y un operador lineal $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Z, \|\cdot\|_Z)$ tal que T es inyectivo, $T[X]$ es denso en Z y para toda $x \in X$ se cumple que $\|x\|_X = \|Tx\|_Z$.*

En matemáticas, siempre que hablamos de un **subespacio** nos referimos a un subconjunto del espacio que hereda completamente la estructura del espacio original. Por ejemplo, si X es un espacio lineal, un subespacio de X es un subconjunto que resulta ser también un espacio lineal con las operaciones heredadas de X. De igual manera, si X es un espacio de Banach, un subespacio de X es un subconjunto que es también un espacio de Banach con las operaciones y la norma heredadas de X. Utilizaremos esta terminología a lo largo de este texto, incluyendo el caso de los espacios de Hilbert.

Lema 0.16. *Todo subespacio de un espacio de Banach es cerrado.*

Esta afirmación es evidente pues, de conformidad con el párrafo anterior, el subespacio en cuestión es un espacio de Banach en sí mismo.

Definición 0.17. *Si H es un espacio lineal sobre un campo $\mathbb{K}$. Un* ***producto interno*** *para H es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ tal que para cualesquiera $x, y, z \in H$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene:*
(PI1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
(PI2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
(PI3) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
(PI4) $\langle x, x\rangle \geq 0$.
(PI5) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.
A la pareja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se le llama ***espacio pre-Hilbert*** *o* ***espacio lineal con producto interno****.*

Recordemos que el producto interno definido anteriormente induce una norma para H, basta definir

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

para todo $x \in H$.

Afirmación 0.18. **[Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz]** *Sea H un espacio pre-Hilbert. Para cualesquiera $x, y \in H$ se tiene que*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Definición 0.19. *Decimos que un espacio lineal con producto interno $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un* ***espacio de Hilbert*** *si H es un espacio de Banach con la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Definición 0.20. *Dos elementos en un espacio pre-Hilbert $x, y \in H$ son* ***ortogonales*** *si $\langle x, y\rangle = 0$. Lo cual se suele denotar con $x \perp y$. Además, dado cualquier subconjunto $A \subseteq H$, denotamos*

$$A^{\perp} := \{y \in H \mid \forall x \in A \ \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Las siguientes afirmaciones se demuestran directamente de las definiciones, véase [5] Secc. 3.3, pág. 142.

Lema 0.21. *Sea H un espacio pre-Hilbert y $x \in H$. Entonces $x = 0$ si y sólo si para todo $y \in H$ se tiene que $\langle x, y \rangle = 0$.*

Lema 0.22. *Sea X un conjunto lineal en un espacio de Hilbert H. Entonces*
(i) $X \cap X^{\perp} = \{0\}$.
(ii) $(X^{\perp})^{\perp} = \overline{X}$.
(iii) Si X es un conjunto lineal cerrado, entonces $H = X \oplus X^{\perp}$.

Lema 0.23. *Sea H un espacio de Hilbert. Un subconjunto lineal $D \subseteq H$ es denso en H si y sólo si $D^{\perp} = \{0\}$.*

De igual manera, la prueba del siguiente lema se puede consultar en [3] pág. 64.

Lema 0.24. *Si F y G son subespacios de un espacio de Hilbert H tales que $dim(F) < dim(G)$, entonces existe $y \in G$, $y \neq 0$ tal que $y \in F^{\perp}$.*

Sea H un espacio pre-Hilbert, definimos

$$H \oplus H := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f, g \in H \right\}.$$

Es fácil ver que $H \oplus H$ es un espacio lineal con la siguiente suma de vectores y producto por escalar:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \\ g_1 + g_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda f \\ \lambda g \end{pmatrix}.$$

Más aún, podemos definir un producto interno para $H \oplus H$ de la siguiente manera

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus H} := \langle f_1, f_2 \rangle + \langle g_1, g_2 \rangle.$$

Lo cual convierte a $H \oplus H$ en un espacio pre-Hilbert, y en consecuencia, en un espacio normado, métrico y además dotado de una topología. $H \oplus H$ es la suma ortogonal de los espacios lineales $H \oplus \{0\}$ y $\{0\} \oplus H$. Ya que además de ser su suma directa, para cualesquiera $f, g \in H$, se tiene que $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}$.

Lema 0.25. *$H \oplus H$ con el producto interno anterior es un espacio de Hilbert si H es a su vez un espacio de Hilbert.*

Definición 0.26. *Sea (X, d) un espacio métrico. Una **separación** de X es una pareja U, V de abiertos ajenos no vacíos cuya unión es X. Decimos que X es **conexo** si no existe una separación de X.*

Definición 0.27. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es una **componente conexa** si satisface*
(i) A es conexo.
(ii) Cualquier conjunto $B \subseteq X$ que contiene propiamente a A es disconexo.

Definición 0.28. *Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **conexo por trayectorias** si para cualesquiera $x, y \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \to A$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.*

Lema 0.29. *Sea A un subconjunto abierto del plano complejo. Entonces A es conexo si y sólo si es conexo por trayectorias.*

Definición 0.30. *Una función f en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ es **absolutamente continua** si y sólo si existe una función $h \in L^1(a, b)$ tal que para toda $x \in [a, b]$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)dt. \tag{1}$$

El conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $[a, b]$ es denotado con $AC[a, b]$.

Observación 0.31. *Si $f \in AC[a, b]$, entonces $f \in C[a, b]$. Además f es diferenciable casi en todas partes (c.t.p.) con $f'(x) = h(x)$ c.t.p. en $[a, b]$. Donde f y h están relacionadas como en (1).*

A lo largo de este texto consideraremos a los espacios de Hilbert definidos sobre el campo de los complejos.

Capítulo I

Operadores Lineales en Espacios de Hilbert.

Comenzaremos por introducir y probar algunas propiedades básicas de ciertos tipos de operadores lineales en espacios de Hilbert.

1.1. Operadores Acotados.

Definición 1.1. *Sea $T : D \subseteq X \to X$ un operador lineal en un espacio normado X. Se dice que T es un **operador acotado** si existe una constante $M > 0$ tal que para toda $x \in D$ se tiene que*

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

La norma de T se define entonces como

$$\|T\| := \text{ínf}\{\, M > 0 \mid \forall x \in D\,(\,\|Tx\| \leq M\|x\|\,)\,\}.$$

Observación 1.2. *Para los operadores lineales, el concepto de continuidad y el de ser acotado son equivalentes.*

Notación 1.3. *Sea H un espacio de Hilbert, denotamos con*

$$\mathcal{B}(H) := \{T : H \longrightarrow H \mid T \text{ es un operador acotado}\}.$$

Notemos que en $\mathcal{B}(H)$ están únicamente los operadores acotados cuyo dominio es todo H.

En general, a lo largo de este texto, cuando hablemos de un operador, no necesariamente lo consideraremos acotado. Salvo en los casos donde se especifique lo contrario, H siempre denotará a un espacio de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cuya norma inducida por su producto interno es $\| \cdot \|$.

Teorema 1.4. *Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. Entonces T tiene una inversa acotada si y sólo si existe $c > 0$ tal que para toda $x \in D(T)$,*

$$\|x\|c \leq \|Tx\|. \tag{1.1}$$

Demostración. Supongamos que se satisface (1.1). Notemos que entonces si $x \in N(T)$ se sigue que $x = 0$. Por lo tanto la inversa T^{-1} existe. Además, para toda $y \in D(T^{-1}) = R(T)$ con $y = Tx$ se obtiene sustituyendo en (1.1) que

$$\|T^{-1}y\|c \leq \|y\|$$

Es decir,

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$$

Por lo tanto T^{-1} es un operador acotado. Supongamos ahora que T tiene una inversa acotada, es decir, para toda $y \in D(T^{-1}) = R(T)$ con $y = Tx$ se tiene que

$$\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\| \, \|y\|.$$

Tomando $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|+1}$, tenemos

$$\|x\| \, c = \|T^{-1}y\| \, c \ \leq \ c \, \|T^{-1}\| \, \|y\| \ \leq \ \|y\| = \|Tx\|.$$

Esto concluye la demostración. ∎

1.2. Formas Sesquilineales, Formas Cuadráticas.

Definición 1.5. *Una función $\Phi : H \times H \to \mathbb{C}$ es llamada **forma sesquilineal** en H, si es lineal en su primer entrada y antilineal en la segunda. Es decir, si para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x, y, z \in H$ se cumple que*
(SL1) $\Phi(\alpha x + y, z) = \alpha\Phi(x, z) + \Phi(y, z)$.
(SL2) $\Phi(x, \alpha y + z) = \bar{\alpha}\Phi(x, y) + \Phi(x, z)$.

Si además existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in H$ se cumple que

$$|\Phi(x, y)| \leq C \, \|x\| \, \|y\|,$$

*se dice que Φ es una **forma sesquilineal acotada** (o **forma sesquilineal continua**).*

Ejemplo 1.6. *Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$. Las siguientes son ejemplos de formas sesquilineales continuas.*

$$\Phi_1(x, y) = \langle Tx, y\rangle \qquad y \qquad \Phi_2(x, y) = \langle x, Sy\rangle.$$

Demostración. Sean $x, y \in H$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y que T es un operador acotado, tenemos que

$$|\Phi_1(x, y)| = |\langle Tx, y\rangle| \leq \|Tx\| \, \|y\| \leq \|T\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

De donde $\Phi_1(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ es es una forma sesquilineal continua. De manera completamente análoga se verifica que $\Phi_2(x, y) = \langle x, Sy\rangle$ también es una forma sesquilineal continua. ■

Ejemplo 1.7. *En particular, en el ejemplo anterior, si $T = I$ se tiene que el producto interno $\Phi(x, y) = \langle x, y\rangle$ es una forma sesquilineal continua.*

Una forma sesquilineal Φ es llamada **hermitiana** si $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$. La funcional $\Phi(x) := \Phi(x, x)$ es llamada la **forma cuadrática** asociada a la forma sesquilineal $\Phi(x, y)$.

Lema 1.8. [Identidad de Polarización]
Si $\Phi : H \times H \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal en H. Entonces para cualesquiera $x, y \in H$ se tiene que

$$4\Phi(x, y) = \Phi(x + y) - \Phi(x - y) + i\Phi(x + iy) - i\Phi(x - iy). \tag{1.2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} 4\Phi(x,y) = &+ \Phi(x,x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) + \Phi(y,y) \\ &- \Phi(x,x) + \Phi(x,y) + \Phi(y,x) - \Phi(y,y) \\ &+ i\Phi(x,x) + \Phi(x,y) - \Phi(y,x) + i\Phi(y,y) \\ &- i\Phi(x,x) + \Phi(x,y) - \Phi(y,x) - i\Phi(y,y) \\ = &\ \Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x+iy) - i\Phi(x-iy). \end{aligned}$$

∎

El siguiente teorema nos será de gran utilidad al trabajar con operadores simétricos más adelante.

Teorema 1.9. *Una forma sesquilineal es hermitiana si y sólo si su forma cuadrática es real.*

Demostración. Sea Φ una forma sesquilineal. Si Φ es hermitiana, claramente su forma cuadrática es real, pues

$$\Phi(x) = \Phi(x,x) = \overline{\Phi(x,x)} = \overline{\Phi(x)}.$$

Supongamos ahora que la forma cuadrática de Φ es real. Tomemos $x, y \in H$ arbitrarios. Usando (1.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{4\Phi(x,y)} &= \overline{\Phi(x+y) - \Phi(x-y) + i\Phi(x+iy) - i\Phi(x-iy)} \\ &= \overline{\Phi(x+y)} - \overline{\Phi(x-y)} + \overline{i\Phi(x+iy)} - \overline{i\Phi(x-iy)} \\ &= \overline{\Phi(x+y)} - \overline{\Phi(x-y)} - i\overline{\Phi(x+iy)} + i\overline{\Phi(x-iy)} \\ &= \Phi(x+y) - \Phi(x-y) - i\Phi(x+iy) + i\Phi(x-iy) \\ &= \Phi(y+x) - \Phi(y-x) - i\Phi(-ix+y) + i\Phi(ix+y) \\ &= 4\Phi(y,x). \end{aligned}$$

De donde concluimos que $\Phi(y,x) = \overline{\Phi(x,y)}$. ∎

1.3. Gráfica de un Operador.

El concepto de gráfica de un operador nos permitirá poder introducir de manera sencilla a dos tipos de operadores, los cerrados y los adjuntos, así como probar algunas de sus propiedades.

Definición 1.10. *Sea H un espacio de Hilbert y $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. Definimos la **gráfica de** T como el conjunto*

$$G(T) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \oplus H : x \in D(T), y = Tx \right\}.$$

Notemos que la gráfica de cualquier operador lineal sobre H es un subconjunto lineal de $H \oplus H$.

El conjunto $D(T)$ puede verse como un espacio pre-Hilbert con el producto interno heredado de H. Sin embargo, también es común considerarlo un espacio pre-Hilbert con el producto interno

$$\langle x, y \rangle_T := \left\langle \begin{pmatrix} x \\ Tx \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ Ty \end{pmatrix} \right\rangle_{H \oplus H} \qquad x, y \in D(T) \subseteq H.$$

Para ser explícitos, cuando éste sea el caso, denotaremos a $D(T)$ con este producto interno como H_T. A la norma inducida por el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ se le conoce como T**-norma** y es denotada con $\| \cdot \|_T$.

Lema 1.11. *T es un operador acotado si y sólo si la T-norma $\| \cdot \|_T$ es equivalente a la norma $\| \cdot \|$ en $D(T)$.*

Demostración. Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal.
Supongamos que T es un operador acotado. Es decir, que existe una constante $M > 0$ tal que para toda $x \in D(T)$ se tiene que

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

Tomemos $x \in D(T)$ arbitrario. Tenemos entonces por lo anterior que

$$\begin{aligned} \|x\|_T^2 &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + M^2\|x\|^2 = (M^2 + 1)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\|x\|^2 \leq \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|x\|_T^2$$

Por lo tanto las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_T$ son equivalentes en $D(T)$. Supongamos ahora que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_T$ son normas equivalentes en $D(T)$. Es decir, que existen constantes $c, k > 0$ tales que para toda $x \in D(T)$,

$$\|x\| \leq c\|x\|_T \qquad \text{y} \qquad \|x\|_T \leq k\|x\|.$$

Para probar que T es acotada, basta tomar un $x \in D(T)$ y ver que

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 = \|x\|_T^2 - \|x\|^2 &\leq k^2\|x\|^2 - \|x\|^2 \\ &\leq M\|x\|^2 - \|x\|^2 \\ &= (M-1)\|x\|^2. \end{aligned}$$

Con $M = \text{máx}\{2, k^2\}$. Es decir, para toda $x \in D(T)$ se tiene que

$$\|Tx\| \leq \sqrt{M-1} \cdot \|x\|.$$

Por lo tanto T es un operador acotado. ■

Recordemos que las **proyecciones canónicas** $\pi_1, \pi_2 : H \oplus H \to H$ son operadores lineales continuos tales que para cualesquiera $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \oplus H$,

$$\pi_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y.$$

El siguiente teorema nos permite dar una caracterización de los subconjuntos de $H \oplus H$ que resultan ser la gráfica de algún operador lineal en H.

Teorema 1.12. *Un conjunto $L \subseteq H \oplus H$ es la gráfica de algún operador lineal si y sólo si es un subconjunto lineal de $H \oplus H$ y satisface*

$$N(\pi_1 \restriction L) = \{0\}. \tag{1.3}$$

Demostración. Claramente si L es la gráfica de un operador lineal, ambas condiciones se satisfacen. Supongamos ahora que $L \subseteq H \oplus H$ es un subconjunto lineal y que $N(\pi_1 \restriction L) = \{0\}$. Como la restricción de un operador lineal a un subconjunto lineal sigue siendo un operador lineal y $N(\pi_1 \restriction L) = \{0\}$, existe el operador inverso $[\pi_1 \restriction L]^{-1} : \pi_1[L] \to L \subseteq H \oplus H$. Basta entonces tomar $T := \pi_2 \circ [\pi_1 \restriction L]^{-1}$. ■

En otras palabras, el resultado anterior nos dice que $L \subseteq H \oplus H$ es la gráfica de algún un operador si y sólo si es un conjunto lineal y para cualquier $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L$ se tiene que si $x = 0$, entonces $y = 0$.

Los siguientes operadores nos serán de gran utilidad en lo que sigue.

Sea H un espacio de Hilbert. Definimos los operadores lineales $U, W : H \oplus H \to H \oplus H$ como

$$U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad W \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Notemos que ambos operadores mapean isométricamente a $H \oplus H$ en sí mismo. Además satisfacen

$$U^2 = -W^2 = I \qquad \text{y} \qquad UW = -WU. \tag{1.4}$$

Observemos que si T es un operador lineal sobre H con inversa T^{-1}, entonces $G(T^{-1}) = U[G(T)]$.

Teorema 1.13. *Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. El conjunto $(W[G(T)])^{\perp} \subseteq H \oplus H$ es la gráfica de un operador lineal si y sólo si $\overline{D(T)} = H$.*

Demostración. Consideremos el siguiente conjunto

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in (D(T))^{\perp} \right\} \subseteq (W[G(T)])^{\perp}.$$

Notemos que todo vector de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in H \oplus H$ cumple $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \in (W[G(T)])^{\perp}$ si y sólo si $y \in D(T)^{\perp}$. Pero entonces $N(\pi_1 \upharpoonright (W[G(T)])^{\perp}) = N(\pi_1 \upharpoonright M) = \{0\}$ si y sólo si $D(T)^{\perp} = \{0\}$. Es decir, por el teorema anterior y por el Lema 0.23, $(W[G(T)])^{\perp}$ es la gráfica de un operador lineal si y sólo si $\overline{D(T)} = H$. ∎

Definición 1.14. *Sean $T : D(T) \subseteq H \to H$ y $S : D(S) \subseteq H \to H$ dos operadores lineales. Se dice que S es una **extensión** de T si y sólo si $G(T) \subseteq G(S)$. Lo cual se suele denotar con $T \subseteq S$.*

Notemos que lo anterior es equivalente a que $D(T) \subseteq D(S)$ y para toda $x \in D(T)$, $Sx = Tx$. Además $T = S$ si y sólo si $D(T) = D(S)$ y para toda $x \in D(T) \cap D(S)$, $Sx = Tx$.

1.4. Operadores Cerrados.

Otro tipo elemental de operadores en espacios de Hilbert, son los operadores cerrados.

Definición 1.15. *Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. Decimos que T es un **operador cerrado** si y sólo si su gráfica $G(T)$ es un conjunto cerrado en $H \oplus H$.*

Teorema 1.16. *Son equivalentes:*

(a) T es un operador cerrado.

(b) H_T es completo.

(c) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$, entonces $x \in D(T)$ y además $y = Tx$.

Demostración.
(a) $\Leftrightarrow$ (b)
Basta notar que la función $\phi : H_T = (D(T), \|\cdot\|_T) \to G(T) \subset H \oplus H$ con $\phi(x) = (x, Tx)$ es una isometría. Entonces H_T es completo si y sólo si $G(T)$ es completa, es decir, si y sólo si $G(T)$ es cerrada en $H \oplus H$.
(a) $\Leftrightarrow$ (c)
El inciso (c) no es más que el inciso (a) escrito en términos de sucesiones. ∎

Observación 1.17. *Si el operador T tiene una inversa, entonces T y T^{-1} son cerrados simultáneamente.*

Teorema 1.18. *Un operador acotado T es cerrado si y sólo si $D(T)$ es cerrado en H.*

Demostración. Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador acotado. Sabemos por el Lema 1.11 que entonces las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_T$ son equivalentes. Usando el Teorema 1.16, tenemos que T es un operador cerrado si y sólo si H_T es completo. Lo cual, por la equivalencia de las normas, pasa si y sólo si $D(T)$ es completo en H. Esto último a su vez, sucede si y sólo si $D(T)$ es cerrado en H. ∎

Corolario 1.19. *Todo operador en $\mathcal{B}(H)$ es cerrado.*

Corolario 1.20. *Si T es un operador cerrado y existe $c > 0$ tal que para toda $x \in D(T)$,*

$$\|x\|c \leq \|Tx\|.$$

Entonces $R(T)$ es cerrado. Más aún, si T no es cerrado, entonces $R(T)$ no es cerrado.

Demostración. Del Teorema 1.4 tenemos que T^{-1} existe y es acotada. Como T es cerrado, T^{-1} también es cerrado. Entonces por lo probado en el Teorema 1.18, esto sucede si y sólo si $D(T^{-1}) = R(T)$ es cerrado. De igual manera, si $R(T)$ es cerrado, entonces T^{-1} es cerrado, lo cual a su vez implicaría que T lo es. ∎

Teorema 1.21. *Sea T un operador cerrado y $S \in \mathcal{B}(H)$. Entonces $T + S$ es un operador cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 1.16 sabemos que un operador T es cerrado si y sólo si H_T es completo. De aquí que basta probar que las normas $\|\cdot\|_T$ y $\|\cdot\|_{T+S}$ son equivalentes, pues entonces H_{T+S} sería completo. Como $S \in \mathcal{B}(H)$, existe $k > 0$ tal que para toda $x \in D(T) = D(T+S)$, $\|Sx\| \leq k\|x\|$. Usando esto tenemos que para toda $x \in D(T+S)$,

$$\begin{aligned}
\|x\|_{T+S}^2 &= \|x\|^2 + \|(T+S)x\|^2 \leq \|x\|^2 + (\|Tx\| + \|Sx\|)^2 \\
&= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 + \|Sx\|^2 + 2\,\|Tx\|\,\|Sx\| \\
&\leq \|x\|_T^2 + \|Sx\|^2 + \|Tx\|^2 + \|Sx\|^2 \\
&\leq \|x\|_T^2 + 2k^2\|x\|^2 + \|Tx\|^2 \\
&\leq \|x\|_T^2 + M(\|x\|^2 + \|Tx\|^2) \\
&= (M+1)\|x\|_T^2.
\end{aligned}$$

Donde $M = \max\{1, 2k^2\}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|x\|_T^2 &= \|x\|^2 + \|Tx\|^2 = \|x\|^2 + \|(T+S)x + (-Sx)\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + (\|(T+S)x\| + \|Sx\|)^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2(\|(T+S)x\|^2 + \|Sx\|^2) \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,\|(T+S)x\|^2 + 2k^2\|x\|^2 \\
&= (1+2k^2)\|x\|^2 + 2\,\|(T+S)x\|^2 \\
&\leq M(\|x\|^2 + \|(T+S)x\|^2) \\
&= N\|x\|_{T+S}^2.
\end{aligned}$$

Donde $N = \text{máx}\{2, 1+2k^2\}$. Por lo tanto $\|\cdot\|_T$ y $\|\cdot\|_{T+S}$ son normas equivalentes. ■

Corolario 1.22. *Si T es un operador cerrado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $T - \lambda I$ es un operador cerrado.*

Demostración. Basta ver que para toda $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que $-\lambda I \in B(H)$, y aplicar el teorema anterior. ■

Teorema 1.23. *Si T es cerrado entonces $N(T)$ es un subespacio de H.*

Demostración. Basta probar que $N(T)$ es un conjunto cerrado en H.
Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $N(T) \subset D(T)$ tal que $x_n \to x$. Como $Tx_n = 0$ para toda $x_n \in N(T)$, tenemos que $Tx_n \to y = 0$. Por ser T cerrado, el inciso (c) del Teorema 1.16 nos dice que $x \in D(T)$ y que $y = Tx$. Es decir, $Tx = 0$ y por lo tanto $x \in N(T)$. ■

Teorema 1.24. *Sean T_0, S y T operadores tales que $T_0 \subseteq S \subseteq T$, T_0 y T son cerrados, y*

$$\dim\Big(D(T)/D(T_0)\Big) < \infty.$$

Entonces S es un operador cerrado.

Demostración. Primero probaremos que si F y K son subespacios de H, entonces $F + K = F \oplus P_{F^\perp}K$. Para ello notemos que la suma del lado derecho es ortogonal y que $K = (P_F + P_{F^\perp})K \subset F + P_{F^\perp}K$, de donde $F + K \subset F + P_{F^\perp}K$. Además $F + P_{F^\perp}K \subset (I - P_F)K \subset K + P_F K \subset K + F$. Más aún, de esto se tiene que $F + K$ es un subespacio de H si y sólo si $P_{F^\perp}K$ es un subespacio.

Segundo, veamos que si F es un subespacio tal que $\dim F^\perp < \infty$, y K un conjunto lineal tal que $F \subset K \subset H$. Entonces K es un subespacio de H. Para ello notemos que $K = F + K = F + P_{F^\perp}K$. Y como $\dim P_{F^\perp}K \leq \dim F^\perp < \infty$, por lo dicho arriba, se tiene que K es un subespacio de H.

Por último, procedamos a demostrar nuestro teorema. Como T_0 es cerrado y $T_0 \subset T$, se sigue que H_{T_0} es un subespacio del espacio de Hilbert H_T. Al ser $\dim[D(T)/D(T_0)] < \infty$, tenemos que $\dim(H_S)^\perp \leq \dim(H_{T_0})^\perp < \infty$. Por lo mancionado arriba, H_S es entonces un subespacio de H_T y por lo tanto S es cerrado. ■

Teorema 1.25. [Teorema de la Gráfica Cerrada]
Sean X y Y espacios normados y $T : D(T) \subseteq X \to Y$ un operador cerrado. Si $D(T)$ es cerrado en X, entonces el operador T es acotado.

El anterior es un resultado clásico dentro del análisis funcional. Su demostración se puede consultar en [5] pág. 295.

Corolario 1.26. *Si T es un operador cerrado, con inversa y $R(T)$ es cerrado. Entonces T^{-1} es acotado.*

Demostración. Si T es cerrado, T^{-1} también lo es. Y como $D(T^{-1}) = R(T)$ es cerrado, por el Teorema de la Gráfica Cerrada tenemos que T^{-1} es acotado. ■

Si T no es un operador cerrado, por definición, eso significa que $G(T)$ no es un conjunto cerrado en $H \oplus H$. Se puede considerar entonces a su cerradura $\overline{G(T)}$ en $H \oplus H$. Si $\overline{G(T)}$ cumple la propiedad (1.3), es decir, si es la gráfica de algún operador lineal, a tal operador se le conoce como la **cerradura** del operador T (o el **operador cerradura** de T) y es denotado con $\overline{T}$. También se dice que el operador T es **cerrable**. Observemos que $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Todo esto es equivalente a la siguiente definición.

Definición 1.27. *Un operador T es **cerrable** si y sólo si existe un operador S cerrado tal que $T \subseteq S$.*

Basta ver que si $G(T) \subseteq G(S)$ con S un operador cerrado, entonces $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$. Ya que la cerradura de $G(T)$ es el mínimo conjunto cerrado que contiene a $G(T)$. Además, como $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$, se tiene que $\overline{G(T)}$ es la gráfica de un operador.

La siguiente caracterización de los operadores cerrables también suele ser de utilidad.

Proposición 1.28. *Un operador lineal T es cerrable si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $D(T)$ tal que $x_n \to 0$ y $Tx_n \to y$, se tiene que $y = 0$.*

Demostración. Supongamos que T es cerrable. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \to 0$ y $Tx_n \to y$. Notemos que $(x_n, Tx_n) \subseteq G(T)$ y que $(x_n, Tx_n) \to (0, y)$. Por ser T cerrable, $\overline{G(T)}$ es la gráfica de un operador y además $(0, y) \in \overline{G(T)} = G(\overline{T})$. De donde se tiene que $y = 0$.

Para la otra implicación, observemos primero que por las propiedades del límite y por ser T un operador lineal, tenemos que $\overline{G(T)} \subseteq H \oplus H$ es un conjunto lineal. Usaremos el Teorema 1.12 para concluir que $\overline{G(T)}$ es la gráfica de algún operador. Sea $(x, y) \in \overline{G(T)}$, es decir que existen sucesiones tales que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$. De ahí que si $x = 0$, por hipótesis, tendríamos que $y = 0$. Por lo tanto T es cerrable.

■

Corolario 1.29. *Todo operador acotado es cerrable.*

Demostración. Se sigue directamente de la caracterización de la continuidad en términos de sucesiones y de la proposición anterior. ■

1.5. Operadores Adjuntos.

Los operadores adjuntos son un tipo especial de operadores que generalizan el concepto de la transpuesta conjugada de una matriz cuadrada, a espacios de (posiblemente) dimensión infinita. Estudiaremos algunas de sus propiedades, que nos serán de utilidad en el siguiente capítulo cuando intentemos dar extensiones autoadjuntas de operadores simétricos.

Teorema 1.30. [Teorema de Representación de Riesz]
Para todo funcional lineal acotado $l : H \to \mathbb{C}$ existe un único $z \in H$ tal que

$$l(x) = \langle x, z\rangle \qquad \forall x \in H.$$

Además

$$\|l\| = \|z\|.$$

Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. Dada una $y \in H$ consideremos la funcional lineal dada por $l_y(x) = \langle Tx, y\rangle$. Para algunas $y \in H$ esta funcional puede ser continua, y por el Teorema de Representación de Riesz, admitiría una representación $l_y(x) = \langle x, h\rangle$ con $h \in H$. La representación es única siempre que $\overline{D(T)} = H$. Ver [3] pp. 32 y 68. Todo esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.31. *Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal tal que $\overline{D(T)} = H$. Se dice que un elemento $y \in H$ pertenece al dominio $D(T^*)$ del* ***operador adjunto*** *T^* si existe un $h \in H$ tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, h\rangle. \tag{1.5}$$

En tal caso, se define $T^*y := h$. De aquí que se cumpla la siguiente relación

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad \forall x \in D(T) \;\; \forall y \in D(T^*). \tag{1.6}$$

Notemos que si $T \in \mathcal{B}(H)$, la igualdad anterior se cumple para cualesquiera $x, y \in H$.

Si $\overline{D(T)} \neq H$, entonces el elemento $h \in H$ que satisface (1.5) no es único. De ahí que no se suela dar la definición de operador adjunto para operadores cuyo dominio no es denso.

Sea W el operador definido en (1.4). Consideremos el subespacio $(W[G(T)])^{\perp}$ de $H \oplus H$. Si T está densamente definido, entonces por el Teorema 1.13, $(W[G(T)])^{\perp}$ es la gráfica de algún operador lineal. El siguiente teorema nos dice que de hecho, es la gráfica del operador adjunto de T.

Teorema 1.32. *Si T es un operador densamente definido. Entonces*

$$(W[G(T)])^{\perp} = G(T^*). \tag{1.7}$$

Demostración. Basta notar que $\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} \in (W[G(T)])^{\perp}$ si y sólo si, para cada $x \in D(T)$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -Tx \\ x \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \langle -Tx, y\rangle + \langle x, h\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, h\rangle \Leftrightarrow y \in D(T^*),\ \ T^*y = h \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ T^*y \end{pmatrix} \in G(T^*). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.33. *Si T es un operador densamente definido. Entonces su adjunto T^* es un operador lineal cerrado.*

Demostración. En el Teorema 1.13 probamos que $G(T^*) = (W[G(T)])^{\perp}$ es la gráfica de un operador lineal si y sólo si T está densamente definido. De la expresión (1.7) del teorema anterior tenemos que la gráfica es un conjunto cerrado, por lo cual T^* es cerrado. ■

Teorema 1.34. *Si T es un operador cerrable densamente definido. Entonces $(\overline{T})^* = T^*$*

Demostración. Utilizando la expresión (1.7), obtenemos

$$\begin{aligned} G((\overline{T})^*) &= (W[G(\overline{T})])^{\perp} = (W[\overline{G(T)}])^{\perp} \\ &= (\overline{W[G(T)]})^{\perp} = (W[G(T)])^{\perp} \\ &= G(T^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\overline{T})^* = T^*$. ■

Teorema 1.35. *Si T es un operador cerrable densamente definido. Entonces $\overline{T} = (T^*)^* := T^{**}$.*

Demostración. Como T, es densamente definido, existe el operador T^*. Consideremos su gráfica. Como $-W^2$ es la identidad en $H \oplus H$, usando el Teorema 1.32 tenemos

$$\begin{aligned} W[G(T^*)] &= W[(W[G(T)])^\perp] = (W^2[G(T)])^\perp \\ &= (G(T))^\perp. \end{aligned}$$

De ahí que $(W[G(T^*)])^\perp = \overline{G(T)} = G(\overline{T})$. Como T es cerrable, esto quiere decir que $(W[G(T^*)])^\perp$ es la gráfica de un operador, lo cual por el Teorema 1.13 pasa si y sólo si $\overline{D(T^*)} = H$. Esto quiere decir que T^{**} existe, y por el Teorema 1.32

$$(W[G(T^*)])^\perp = G(T^{**}).$$

Por lo tanto $G(\overline{T}) = G(T^{**})$. Es decir, $\overline{T} = T^{**}$. ■

Teorema 1.36. *Sea T un operador densamente definido. Entonces los subespacios $\overline{R(T)}$ y $N(T^*)$ son ortogonales en H y*

$$H = \overline{R(T)} \oplus N(T^*).$$

Demostración. Notemos que $y \in N(T^*)$ si y sólo si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0$ para cada $x \in D(T)$. Lo cual significa que $y \in R(T)^\perp$, lo que a su vez sucede si y sólo si $y \in \overline{R(T)}^\perp$. Es decir, $\overline{R(T)}$ y $N(T^*)$ son subespacios ortogonales en H. Como $\overline{R(T)}$ es cerrado, tenemos que $H = \overline{R(T)} \oplus \overline{R(T)}^\perp = \overline{R(T)} \oplus N(T^*)$. ■

Lema 1.37. *Sea T un operador lineal con inversa y tal que $\overline{D(T)} = H = \overline{R(T)}$. Entonces su operador adjunto T^* también tiene inversa y*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Demostración. Como $\overline{R(T)} = H$, por el teorema anterior tenemos que $N(T^*) = \{0\}$. Por lo que existe el operador inverso $(T^*)^{-1}$. Además el operador adjunto $(T^{-1})^*$ también existe pues $R(T) = D(T^{-1})$ es denso. Usando que U conmuta con el complemento ortogonal y que $UW = -WU$ obtenemos

$$\begin{aligned} G((T^*)^{-1}) &= U[G(T^*)] = U[(W[G(T)])^\perp] \\ &= (UW[G(T)])^\perp = (-WU[G(T)])^\perp \\ &= (WU[G(T)])^\perp = (W[G(T^{-1})])^\perp \\ &= G((T^{-1})^*). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. ■

Teorema 1.38. *Sea T un operador densamente definido y S un operador lineal.*

(a) Si $S \in \mathcal{B}(H)$ entonces $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(b) Si $S, S^{-1} \in \mathcal{B}(H)$, entonces $(TS)^* = S^*T^*$ y $(ST)^* = T^*S^*$.

Demostración.

(a) Como $S \in \mathcal{B}(H)$, tenemos que $D(T+S) = D(T) = D(T) \cap D(S)$ y $D((T+S)^*) = D(T^*) = D(T^*) \cap D(S^*) = D(T^* + S^*)$. Sea $y \in D((T+S)^*)$ y $x \in D(T+S)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle x, (T+S)^* y\rangle &= \langle (T+S)x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle \\ &= \langle x, T^* y\rangle + \langle x, S^* y\rangle = \langle x, (T^* + S^*)y\rangle.\end{aligned}$$

Por lo que $(T+S)^* \subseteq T^* + S^*$. Análogamente, tomando $y \in D(T^*+S^*)$ y $x \in D(T+S)$, obtenemos la otra contención. Por lo que $(T+S)^* = T^* + S^*$.

(b) Supongamos que $S, S^{-1} \in \mathcal{B}(H)$. Para la primer igualdad notemos que $D(TS) = S^{-1}[D(T)]$ y $D(S^*T^*) = D(T^*)$. De donde se tiene que si $Sx \in D(T)$ y $y \in D(T^*)$, entonces

$$\langle (TS)x, y\rangle = \langle Sx, T^* y\rangle = \langle x, (S^*T^*)y\rangle.$$

Por lo que $S^*T^* \subseteq (TS)^*$.

Por otro lado, sea $y \in D((TS)^*)$. Entonces para toda $x \in D(T)$ se tiene que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle (TSS^{-1})x, y\rangle = \langle S^{-1}x, (TS)^* y\rangle = \langle x, (S^{-1})^*(TS)^* y\rangle.$$

Por lo que $y \in D(T^*)$ y $T^*y = (S^{-1})^*(TS)^*y$. Usando el lema anterior tenemos $T^*y = (S^*)^{-1}(TS)^*y$, es decir, $(S^*T^*)y = (TS)^*y$. De donde $(TS)^* \subseteq (S^*T^*)$. Por lo tanto $(TS)^* = (S^*T^*)$.

Ahora, para probar que $(ST)^* = T^*S^*$, tomemos $y \in D((ST)^*)$ y $x \in D(ST) = D(T)$. Entonces por lo recien demostrado

$$\begin{aligned}
\langle x, (ST)^*y\rangle &= \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle && (1.8)\\
&= \langle (TS^{-1})Sx, S^*y\rangle = \langle Sx, (TS^{-1})^*S^*y\rangle && (1.9)\\
&= \langle Sx, (S^{-1})^*T^*S^*y\rangle = \langle Sx, (S^*)^{-1}T^*S^*y\rangle && (1.10)\\
&= \langle x, S^*(S^*)^{-1}T^*S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle. && (1.11)
\end{aligned}$$

Por lo que $y \in D(T^*S^*)$ y además $(ST)^* \subseteq T^*S^*$. De manera similar, si tomamos $y \in D(T^*S^*)$. Es decir, tal que $S^*y \in D(T^*)$. Y $x \in D(T) = D(ST)$. Obtenemos

$$\langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle.$$

Por lo que $y \in D((ST)^*)$ y entonces $T^*S^* \subseteq (ST)^*$. Por lo tanto $(ST)^* = T^*S^*$.

■

1.6. Espectro de un Operador.

Definición 1.39. *Sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ un operador lineal. Se define el **defecto** del operador T, el cual se denota con d_T, como la dimensión del complemento ortogonal de $\overline{R(T)}$, es decir*

$$d_T := \dim \overline{R(T)}^{\perp}.$$

Si $D(T)$ es denso en H, podemos calcular a d_T en términos del operador adjunto T^* usando el Teorema 1.36, de donde obtenemos que

$$d_T = \dim N(T^*).$$

Dado un operador T, podemos asociar a éste con la familia de operadores $\{T - \lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$ donde cada uno de estos depende de lo que se conoce como un parámetro espectral λ. El defecto de $T - \lambda I$ es denotado con $d_T(\lambda)$ y es llamado el **defecto de T en λ**. Tenemos así que entonces por definición

$$d_T(\lambda) := d_{T-\lambda I}.$$

Si $T-\lambda I$ tiene una inversa continua en $R(T-\lambda I)$ entonces llamamos a λ un punto **cuasiregular** para T. Al conjunto de todos los puntos cuasiregulares para T es llamado el **conjunto cuasiregular** de T y se denota con $\hat{\rho}(T)$.

Notemos que si $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, esto significa que $(T-\lambda I)^{-1}$ existe y es continua, de donde tenemos que existe alguna constante $k > 0$ tal que

$$\|(T-\lambda I)^{-1}y\| \leq k\|y\|$$

para toda $y \in R(T-\lambda I) = D((T-\lambda I)^{-1})$. Lo cual es equivalente a que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|x\|c \leq \|(T-\lambda I)x\| \tag{1.12}$$

para toda $x \in D(T)$. Tomando $x = (T-\lambda I)^{-1}y$ y $c = \frac{1}{k}$.

Recordemos que por el Teorema 1.4, un operador T tiene una inversa acotada si y sólo si existe $c > 0$ tal que para toda $x \in D(T)$,

$$\|x\|c \leq \|Tx\|. \tag{1.13}$$

Lema 1.40. *Sea T un operador y $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) T *es cerrado.*

(b) $T-\lambda I$ *es un operador cerrado.*

(c) $(T-\lambda I)^{-1}$ *es un operador cerrado.*

(d) $R(T-\lambda I)$ *es cerrado.*

Demostración. Este Lema no es más que el resultado de combinar el Corolario 1.22 con la Observación 1.17 y el Teorema 1.18. ■

Por la manera en que fue definida la T-norma, ésta satisface la igualdad

$$\|x\|_T^2 = \|x\|^2 + \|Tx\|^2.$$

Pero notemos que también podemos definir una norma, que denotamos $|||\cdot|||_T$, mediante la relación

$$|||x|||_T := \|x\| + \|Tx\|.$$

Más aún, ambas son equivalentes, pues satisfacen

$$\|x\|_T \leq |||x|||_T \leq \sqrt{2}\, \|x\|_T.$$

Ésta norma nos será de utilidad para enunciar el siguiente resultado.

Lema 1.41. *Sea T un operador cerrado. Si S es una* ***contracción****, es decir, es un operador tal que $D(T) \subseteq D(S)$ y para toda $x \in D(T)$,*

$$\|Sx\| \leq \alpha \|Tx\| \qquad \textit{con} \quad 0 \leq \alpha < 1. \tag{1.14}$$

Entonces el operador $T + S$ definido sobre $D(T)$ es cerrado.

Demostración. Claramente el resultado se cumple si $\alpha = 0$, pues en este caso $T + S \equiv T$ sobre $D(T)$. Supongamos ahora que $0 < \alpha < 1$. Probaremos que $(1-\alpha)\, |||x|||_T \leq |||x|||_{T+S} \leq (1+\alpha)\, |||x|||_T$. Para ello notemos que,

$$\begin{aligned} |||x|||_{T+S} &= \|x\| + \|(T+S)x\| \leq \|x\| + \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq \|x\| + \|Tx\| + \alpha\|Tx\| \leq \|x\|_T + \alpha\|Tx\| + \alpha\|x\| \\ &= (1+\alpha)\, |||x|||_T\,. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\, |||x|||_T &= (1-\alpha)\|x\| + \|Tx\| - \alpha\|Tx\| \\ &\leq (1-\alpha)\|x\| + \|Tx\| - \|Sx\| \\ &\leq (1-\alpha)\|x\| + \|Tx + Sx\| \\ &\leq \|x\| + \|(T+S)x\| \\ &= |||x|||_{T+S}\,. \end{aligned}$$

Como T es cerrado, $D(T)$ es completo con respecto a la norma $\|\cdot\|_T$, y por la equivalencia entre las normas $|||\cdot|||_T$ y $|||\cdot|||_{T+S}$, también es completo con respecto a $\|\cdot\|_{T+S}$. Es decir, $T + S$ es un operador cerrado sobre $D(T)$, por el Teorema 1.16. ■

Teorema 1.42. *Sea T un operador cerrado que satisface la propiedad (1.13). Si S es un operador tal que $D(T) \subseteq D(S)$ y para toda $x \in D(T)$,*

$$\|Sx\| \leq \alpha \|Tx\| \qquad \text{con} \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Entonces el operador $T + S$ es cerrado en $D(T)$ y satisface (1.13) con $c_1 = (1-\alpha)c$. Más aún,

$$d_{T+S} = d_T.$$

Demostración. $T+S$ es cerrado por el lema anterior. Además, usando nuestra hipótesis y el hecho de que T satisface (1.13) tenemos que

$$\begin{aligned}\|(T+S)x\| &\geq \|Tx\| - \|Sx\| \geq (1-\alpha)\|Tx\| \\ &\geq (1-\alpha)c\|x\|.\end{aligned}$$

Por lo que del Corolario 1.20 se tiene que tanto $R(T+S)$ como $R(T)$ son cerrados. Ahora procedemos a probar que $d_{T+S} = d_T$. Supongamos que $d_{T+S} < d_T$, es decir, que

$$\dim(R(T+S)^{\perp}) = \dim(\overline{R(T+S)}^{\perp}) < \dim(\overline{R(T)}^{\perp}) = \dim(R(T)^{\perp}).$$

Por el Lema 0.24 sabemos que existe $y \in R(T)^{\perp}$, $y \neq 0$, tal que $y \in R(T+S)$. De donde $y = (T+S)x$ para algún $x \in D(T+S) = D(T)$. Como $y \in R(T)^{\perp}$, tenemos que $\langle y, Tx \rangle = 0$ para toda $x \in D(T)$, de aquí que

$$0 = \langle y, Tx \rangle = \langle (T+S)x, Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Sx, Tx \rangle.$$

De donde

$$\langle Tx, Tx \rangle = \langle -Sx, Tx \rangle.$$

De manera similar, si $d_{T+S} > d_T$, por el Lema 0.24 sabemos que existe $y \in R(T+S)^{\perp}$, $y \neq 0$, tal que $y \in R(T)$. De donde $y = Tx$ para algún $x \in D(T)$. Y como $y \in R(T+S)^{\perp}$, $\langle y, (T+S)x \rangle = 0$ para toda $x \in D(T+S) = D(T)$, de aquí que

$$0 = \langle (T+S)x, y \rangle = \langle (T+S)x, Tx \rangle = \langle Tx, Tx \rangle + \langle Sx, Tx \rangle$$

Por lo que en ambos casos obtenemos

$$\langle Tx, Tx \rangle = \langle -Sx, Tx \rangle.$$

Pero esto significaría que

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2 = \langle -Sx, Tx \rangle &\leq \|-Sx\|\|Tx\| = \|Sx\|\|Tx\| \\ &\leq \alpha\|Tx\|^2.\end{aligned}$$

Lo cual no es posible pues $\alpha < 1$. Por lo tanto $d_{T+S} = d_T$. ■

Corolario 1.43. *Sea T un operador cerrado que satisface la propiedad (1.13), es decir, tal que existe $c > 0$ con*

$$\|x\|\, c \leq \|Tx\|,$$

y sea $S \in \mathcal{B}(H)$, con $\|S\| < c$. Entonces $T + S$ es cerrado en $D(T)$ y $d_{T+S} = d_T$.

Demostración. Claramente $D(T) \subseteq D(S) = H$. Además para toda $x \in D(T)$,

$$\|Sx\| \leq \|S\|\, \|x\| \leq \|S\|\, \frac{1}{c}\, \|Tx\|.$$

Así que basta tomar $\alpha := \frac{\|S\|}{c} < 1$ y aplicar el teorema anterior. ■

Corolario 1.44. *Sea T un operador cerrado que satisface la propiedad (1.12), es decir, que para un $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo existe $c > 0$ tal que para cada $x \in D(T)$*

$$\|x\| c \leq \|(T - \lambda I)x\|.$$

Entonces el disco $|\lambda - \lambda_0| < c$ está contenido en $\hat{\rho}(T)$ y $d_T(\lambda)$ es constante en este disco.

Demostración. Notemos que

$$T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) + (\lambda_0 - \lambda)I.$$

Tomando $S = (\lambda_0 - \lambda)I$, el cual cumple que $\|S\| = |\lambda_0 - \lambda| < c$, y aplicando el corolario anterior, tenemos que $d_T(\lambda) = d_T(\lambda_0)$. ■

Teorema 1.45. *El conjunto de puntos cuasiregulares $\hat{\rho}(T)$ es abierto y la función $d_T(\lambda)$ es constante en cada componente conexa de $\hat{\rho}(T)$.*

Demostración. $\hat{\rho}(T)$ es abierto por el corolario anterior. Sean λ_0 y λ_0' dos escalares de una misma componente conexa de $\hat{\rho}(T)$. Como están en una misma componente conexa de $\hat{\rho}(T)$ en el plano, existe una trayectoria desde λ_0 hasta λ_0' que se queda contenida dentro de la componente conexa. Observemos que dicha trayectoria es compacta, pues nos encontramos en un espacio métrico. Para cada λ dentro de esa trayectoria, podemos tomar el disco con centro en λ y radio $c_\lambda > 0$. Uniendo todos estos discos obtenemos una cubierta abierta de la trayectoria. La cual por ser compacta debe tener una subcubierta finita. A su vez, por el teorema anterior, la función $d_T(\lambda)$ es constante en cada uno de los discos de la subcubierta finita. De donde concluimos que $d_T(\lambda)$ es constante en cualesquiera dos escalares de una misma componente conexa. ■

Si $d_T(\lambda) = 0$ con $\lambda \in \hat{\rho}(T)$, λ es llamado un **punto regular** de T. Notemos que si λ es un punto regular, entonces el operador $(T-\lambda I)^{-1}$ es acotado. El conjunto de todos los puntos regulares de T es llamado el **conjunto resolvente** de T y es denotado con $\rho(T)$. Por lo demostrado anteriormente sabemos que el conjunto $\rho(T)$ es abierto y que consiste de todas las componentes de $\hat{\rho}(T)$ donde $d_T(\lambda) = 0$.

El complemento de $\rho(T)$ es llamado el **espectro** de T y es denotado por $\sigma(T)$.

El complemento de $\hat{\rho}(T)$ es llamado el **núcleo del espectro** de T y es denotado por $\hat{\sigma}(T)$.

Es decir,

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T) \quad \text{ y } \quad \hat{\sigma}(T) := \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T).$$

Observemos que $\sigma(T)$ y $\hat{\sigma}(T)$ son conjuntos cerrados pues $\rho(T)$ y $\hat{\rho}(T)$ son abiertos. Claramente $\hat{\sigma}(T) \subset \sigma(T)$.

Ahora consideremos los siguientes conjuntos

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : N(T - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(T - \lambda I) \neq \overline{R(T - \lambda I)}\}.$$

El conjunto $\sigma_p(T)$ es llamado el **espectro puntual** de T, el cual consiste de todos los eigenvalores de T y $N(T - \lambda I)$ corresponde a los eigenespacios de T. El conjunto $\sigma_c(T)$ es llamado el **espectro continuo** de T. Notemos que si T es un operador cerrado, $\sigma_p(T) \subset \hat{\sigma}(T)$ y que $\sigma_c(T) \subset \hat{\sigma}(T)$.

Teorema 1.46. *Para todo operador cerrado T se tiene que*

$$\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \hat{\sigma}(T).$$

Demostración. Como $\hat{\sigma}(T) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(T)$. Lo anterior es equivalente a probar que

$$(\mathbb{C} \setminus \sigma_p(T)) \cap (\mathbb{C} \setminus \sigma_c(T)) = \hat{\rho}(T).$$

Pero $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_p(T) \Leftrightarrow N(T - \lambda I) = \{0\} \iff (T - \lambda I)^{-1}$ existe. Por otro lado, por ser T cerrado, $T - \lambda I$ también lo es. Por el corolario 1.26 tenemos entonces que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_c(T) \Leftrightarrow R(T - \lambda I)$ es cerrado $\Leftrightarrow (T - \lambda I)^{-1}$ es continua. ∎

Capítulo II

Operadores Simétricos e Isométricos.

2.1. Operadores Simétricos.

Definición 2.1. *Sea $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operador lineal en un espacio de Hilbert H. Decimos que A es un operador* ***simétrico*** *si para cualesquiera $x, y \in D(A)$ se tiene que*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle.$$

Teorema 2.2. *Un operador $A : D(A) \subseteq H \to H$ sobre un espacio de Hilbert H es simétrico si y sólo si su forma cuadrática $\langle Ax, x\rangle$ es real.*

Demostración. Supongamos que A es un operador simétrico, entonces

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}.$$

Por lo que su forma cuadrática $\langle Ax, x\rangle$ es real. Por otro lado, si la forma cuadrática $\langle Ax, x\rangle$ es real, por el Teorema 1.9 tenemos que la forma sesquilineal $\Phi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ es hermitiana. Es decir, para cualesquiera $x, y \in D(A)$ se tiene que

$$\langle Ax, y\rangle = \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)} = \overline{\langle Ay, x\rangle} = \langle x, Ay\rangle.$$

De donde A es un operador simétrico. ■

Definición 2.3. *Decimos que T es un* ***operador autoadjunto*** *si $T = T^*$.*

Notemos que todo operador autoadjunto es simétrico. Además, todo operador simétrico A densamente definido está contenido en su adjunto A^* y por lo tanto es cerrable.

Lema 2.4. *Sea A un operador simétrico densamente definido. Si $\tilde{A}$ es una extensión simétrica de A, entonces*

$$A \subseteq \tilde{A} \subseteq (\tilde{A})^* \subseteq A^*.$$

Demostración. Por definición, todo operador simétrico está contenido en su adjunto, si este existe, es decir si el operador está densamente definido. Así que sólo necesitamos probar que $(\tilde{A})^* \subseteq A^*$. Usando el Teorema 1.32 tenemos que

$$\begin{aligned} A \subseteq \tilde{A} &\Rightarrow G(A) \subseteq G(\tilde{A}) \\ &\Rightarrow W[G(A)] \subseteq W[G(\tilde{A})] \\ &\Rightarrow (W[G(\tilde{A})])^{\perp} \subseteq (W[G(A)])^{\perp} \\ &\Rightarrow G\left((\tilde{A})^*\right) \subseteq G(A^*) \\ &\Rightarrow (\tilde{A})^* \subseteq A^*. \end{aligned}$$

■

Lema 2.5. *Sea A un operador simétrico cerrable. Entonces su cerradura $\overline{A}$ también es un operador simétrico.*

Demostración. Por la caracterización de operadores simétricos del Teorema 2.2, basta probar que su forma cuadrática $\langle \overline{A}x, y\rangle$ es real. Sea $x \in D(\overline{A})$, entonces $(x, \overline{A}x) \in G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$, por lo cual existe una sucesión $((x_n, Ax_n))_{n=1}^{\infty} \subset G(A)$ tal que $(x_n, Ax_n) \to (x, \overline{A}x)$. Observemos que entonces $x_n \to x$ y $Ax_n \to \overline{A}x$. Además, por ser A simétrica, se tiene que para cada natural $n \geq 1$, $\langle x_n, Ax_n\rangle = \langle Ax_n, x_n\rangle$. Usando esto y la continuidad del producto interno, tenemos que

$$\langle x, \overline{A}x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ax_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n\rangle = \langle \overline{A}x, x\rangle.$$

Por lo tanto $\overline{A}$ es un operador simétrico. ■

Corolario 2.6. *Si A es un operador simétrico cerrable densamente definido, entonces*

$$A \subseteq \overline{A} \subseteq (\overline{A})^* = A^*.$$

Los conceptos de operador simétrico y operador autoadjunto coinciden en el caso de operadores acotados definidos en todo H, es decir, en $\mathcal{B}(H)$. Sin embargo, ambos conceptos no son equivalentes cuando se trata de operadores no acotados. Es decir, si A es un operador simétrico no acotado, no necesariamente se tiene que $A = A^*$.

2.2. Índices de deficiencia.

Como consecuencia del Lema 2.4, tenemos que una condición necesaria para la existencia de extensiones autoadjuntas es que nuestro operador esté densamente definido. Por lo cual, en adelante, supondremos que A es precisamente un operador densamente definido.

Teorema 2.7. *Sea A un operador simétrico. Entonces los semiplanos superior e inferior de $\mathbb{C}$ están contenidos en $\hat{\rho}(A)$.*

Demostración. Sea $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(A-\lambda I)x\|^2 &= \|(A-\alpha I)x - i\beta x\|^2 \\
&= \|(A-\alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 + 2Re\langle (A-\alpha I)x, i\beta x\rangle \\
&= \|(A-\alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \\
&\geq \beta^2\|x\|^2.
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\|(A-\lambda I)x\| \geq |Im(\lambda)| \cdot \|x\|$$

Por lo tanto, si $|Im(\lambda)| \neq 0$ entonces $|Im(\lambda)| > 0$ y concluimos que $\lambda \in \hat{\rho}(A)$.

Notemos que usamos el hecho de que A es un operador simétrico, para ver que

$$\langle (A-\alpha I)x, i\beta x\rangle = i\langle Ax - \alpha x, \beta x\rangle = i\left(\beta\langle Ax, x\rangle - \alpha\beta\langle x, x\rangle\right)$$

es un imaginario puro. ■

Corolario 2.8. *El defecto de un operador simétrico cerrado $d_A(\lambda)$ es constante en cada uno de los semiplanos de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Se sigue del Teorema 1.45 y del teorema anterior. ■

Los valores de $d_A(\lambda)$ en los planos superior e inferior son denotados con $d_+(A)$ y $d_-(A)$ respectivamente, a éstos los llamamos **índices de deficiencia** del operador A. Recordemos que por el Teorema 1.36 podemos expresar a los índices de deficiencia en términos del operador adjunto. Usando el que $(A - \lambda I)^* = (A^* - \bar{\lambda} I)$ obtenemos la siguiente expresión que nos será útil más adelante

$$\dim N(A^* - \lambda I) = \begin{cases} d_-(A) & \text{si } Im(\lambda) > 0, \\ d_+(A) & \text{si } Im(\lambda) < 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si A no es un operador cerrado, se definen $d_\pm(A) = d_\pm(\overline{A})$.

Corolario 2.9. *El núcleo del espectro de un operador simétrico cerrado $\hat{\sigma}(A)$ está contenido en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $\hat{\sigma}(A) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(A)$. ■

Corolario 2.10. *Si un operador simétrico cerrado A tiene al menos un punto cuasi-regular λ_0 en $\mathbb{R}$, entonces $d_+(A) = d_-(A) = d_A(\lambda_0)$.*

Demostración. Basta recordar que probamos que $d_A(\lambda)$ es constante en componentes conexas. ■

Lema 2.11. *Si un operador simétrico A es autoadjunto, entonces $\hat{\rho}(A) = \rho(A)$ y por lo tanto $\hat{\sigma}(A) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Demostración. Como A es autoadjunto, $A = A^*$.
Notemos además que como $\rho(A) \subseteq \hat{\rho}(A)$, basta probar que $\hat{\rho}(A) \subseteq \rho(A)$. Si $Im(\lambda) \neq 0$ y $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, tenemos que $N(A^* - \bar{\lambda} I) = N(A - \bar{\lambda} I) = \{0\}$ por lo probado en el Teorema 2.7. De esta manera, de la expresión (2.1) se obtiene que $d_+(A) = d_-(A) = 0$. De ahí que todos los puntos en los semiplanos superior e inferior sean regulares. Ahora, si $Im(\lambda) = 0$ y $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ entonces

$$d_A(\lambda) = \dim N(A^* - \bar{\lambda} I) = \dim N(A^* - \lambda I) = \dim N(A - \lambda I) = 0,$$

de donde $\lambda \in \rho(A)$. ■

Teorema 2.12. *Un operador simétrico cerrado A es autoadjunto si y sólo si $d_+(A) = d_-(A) = 0$.*

Demostración. Una de las implicaciones quedó demostrada en el lema anterior. Para la otra parte, supongamos que A es un operador simétrico tal que $d_+(A) = d_-(A) = 0$. Entonces, en particular tenemos que $R(A - iI) = R(A + iI) = H$. Como $A \subseteq A^*$, basta probar que $D(A^*) \subseteq D(A)$. Para ello tomemos una $y \in D(A^*)$ arbitraria. Sea $h = (A^* + iI)y$. Por ser $A + iI$ suprayectiva, sabemos que existe una $y_0 \in D(A)$ tal que $(A + iI)y_0 = h$. De todo esto, tenemos que para cada $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}\langle (A - iI)x, y\rangle &= \langle x, (A^* + iI)y\rangle = \langle x, (A + iI)y_0\rangle \\ &= \langle x, Ay_0\rangle - i\langle x, y_0\rangle = \langle Ax, y_0\rangle - i\langle x, y_0\rangle \\ &= \langle (A - iI)x, y_0\rangle.\end{aligned}$$

Lo cual equivale a que para cada $x \in D(A)$, $\langle (A - iI)x, y - y_0\rangle = 0$. Como $A - iI$ es suprayectiva sobre H, esto implica que $y - y_0 = 0$. Es decir $y = y_0 \in D(A)$. ■

Corolario 2.13. *Si un operador simétrico tiene un punto regular en $\mathbb{R}$, entonces es autoadjunto.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y del Corolario 2.10. ■

2.3. Operadores Isométricos.

En esta sección abordaremos ciertas analogías entre los operadores isométricos y los operadores simétricos discutidos en la sección anterior.

Definición 2.14. *Un operador lineal $V : D(V) \subseteq H \to H$ sobre un espacio de Hilbert H es llamado* ***operador isométrico****, si para cualesquiera $x, y \in H$ se cumple que $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$.*

Lo anterior implica que para cada $x \in H$

$$\|Vx\| = \|x\|,$$

lo cual motiva el uso del término isométrico para el operador V.

Se sigue de inmediato de la definición que si V es un operador isométrico, entonces $\|V\| = 1$. Además la inversa V^{-1} existe y es isométrica.

Teorema 2.15. *Sea V un operador isométrico. Entonces si se cumple alguna de las siguientes condiciones, se cumplen las otras dos:*
(a) $D(V)$ es cerrado.
(b) $R(V)$ es cerrado.
(c) $G(V)$ es cerrada.

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 1.18 y del hecho de que tanto V como V^{-1} son operadores acotados. ■

Teorema 2.16. *Sea V un operador isométrico. Entonces el interior y el exterior de la circunferencia unitaria están contenidos en $\hat{\rho}(V)$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \|(V - zI)f\| = \|Vf - zf\| &\geq \Big| \|Vf\| - \|zf\| \Big| = \Big| \|Vf\| - |z| \, \|f\| \Big| \\ &= \Big| \|f\| - |z| \, \|f\| \Big| \\ &= \Big| 1 - |z| \Big| \, \|f\|. \end{aligned}$$

Lo cual implica que cualquier $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \neq 1$ es un punto cuasi-regular de V. ■

Corolario 2.17. *El defecto $d_V(z)$ de un operador isométrico cerrado V es constante en cada una de las componentes interior y exterior de la circunferencia unitaria.*

Demostración. Nuevamente se sigue del Teorema 1.45 y del teorema anterior. ■

Corolario 2.18. *El núcleo del espectro $\hat{\sigma}(V)$ de un operador isométrico cerrado V está contenido en la circunferencia unitaria.*

Demostración. Como en el caso de los operadores simétricos, se sigue de que $\hat{\sigma}(V) = \mathbb{C} \setminus \hat{\rho}(V)$. ■

De manera análoga a la de operadores simétricos, los valores de $d_V(z)$ en el interior y el exterior de la circunferencia unitaria son denotados con $d^i(V)$ y $d^e(V)$ respectivamente, y también son llamados índices de deficiencia del operador isométrico V.

Corolario 2.19. *Dado un operador isométrico cerrado V. Si la circunferencia unitaria contiene un punto cuasi-regular $z_0 \in \hat{\rho}(V)$, entonces $d^i(V) = d^e(V) = d_V(z_0)$.*

Teorema 2.20. *Si V es un operador isométrico cerrado, entonces*

$$d^i(V) = \dim R(V)^\perp \qquad y \qquad d^e(V) = \dim D(V)^\perp.$$

Demostración. Observemos que por ser V cerrado, tenemos que $\overline{R(V)} = R(V)$ y $\overline{R(V - zI)} = R(V - zI)$. Para la primer igualdad basta ver que $d^i(V) = d_V(0) = \dim \overline{R(V - 0I)}^\perp = \dim \overline{R(V)}^\perp = \dim R(V)^\perp$. En el caso de la segunda igualdad, sea $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > 1$, es decir tal que $0 < |z^{-1}| < 1$. Como $(V^{-1} - z^{-1}I)Vx = (I - z^{-1}V)x = -z^{-1}(V - zI)x$ para cada $x \in D(V)$, esto quiere decir que $R(V^{-1} - z^{-1}I) = R(V - zI)$. De donde

$$\begin{aligned} d^e(V) &= \dim \overline{R(V - zI)}^\perp = \dim R(V - zI)^\perp \\ &= \dim R(V^{-1} - z^{-1}I)^\perp = d^i(V^{-1}) = \dim R(V^{-1})^\perp \\ &= \dim D(V)^\perp. \end{aligned}$$

■

Lema 2.21. *Si V es un operador isométrico en H y $R(V-I)$ es denso en H, entonces $N(V-I)=\{0\}$.*

Demostración. Sea $x \in N(V-I)$, es decir, $x \in D(V)$ con $V(x)=x$. Probaremos que $x=0$. Para ello notemos que para toda $y \in D(V)$,

$$\begin{aligned}\langle (V-I)y, x\rangle &= \langle Vy - y, x\rangle = \langle Vy, x\rangle - \langle y, x\rangle \\ &= \langle Vy, Vx\rangle - \langle y, x\rangle = 0.\end{aligned}$$

Es decir, $x \in R(V-I)^{\perp}$. Pero $R(V-I)$ es denso, lo cual es equivalente a que $R(V-I)^{\perp}=\{0\}$. Por lo tanto $x=0$. ■

Definición 2.22. *Un operador isométrico V es llamado **operador unitario** si $D(V)=R(V)=H$.*

Claramente los operadores V y V^{-1} son unitarios simultáneamente. Se sigue del Teorema 2.20 que un operador isométrico V es unitario si y sólo si

$$d^i(V) = d^e(V) = 0.$$

2.4. Transformada de Cayley.

Recordemos que dada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) > 0$, la transformación de Möbius

$$z \mapsto T(z) = \frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}} = (z-\lambda)(z-\bar{\lambda})^{-1}$$

mapea a la recta real en la circunferencia unitaria. Y a los semiplanos superior e inferior, al interior y exterior de la circunferencia unitaria respectivamente.

No es desatinado preguntarse entonces, por lo estudiado al inicio de este capítulo, si la relación

$$A \mapsto V_A = (A-\lambda I)(A-\bar{\lambda} I)^{-1} \tag{2.2}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) > 0$, es una transformación que lleva operadores simétricos A en operadores isométricos V_A. La respuesta resulta ser positiva como veremos a continuación.

Notemos que del Teorema 2.7 tendríamos que λ y $\bar{\lambda}$ están contenidas en $\hat{\rho}(A)$. Por lo tanto $A - \bar{\lambda} I$ es invertible. Así que el operador $V_A = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1}$ con dominio $D(V_A) = R(A - \bar{\lambda} I)$ está bien definido. Además V_A queda parametrizado por $D(A)$ como sigue:

$$V_A\left((A-\bar{\lambda} I)x\right) = (A-\lambda I)x \quad \forall x \in D(A).$$

De aquí que $R(V_A) = R(A - \lambda I)$. Al operador V_A se le conoce como la **transformada de Cayley** del operador simétrico A. Procederemos a probar que V_A resulta ser un operador isométrico.

Teorema 2.23. *Si A es un operador simétrico, entonces su transformada de Cayley V_A es un operador isométrico, con $D(V_A) = R(A - \bar{\lambda} I)$ y $R(V_A) = R(A - \lambda I)$.*

Demostración. Por lo antes mencionado, sólo nos falta verificar que V_A es un operador isométrico. Tomando la forma paramétrica de la transformada de Cayley tenemos que para cada $x \in D(A)$

$$V_A(y) = (A-\lambda I)x \quad \text{donde} \quad y = (A-\bar{\lambda} I)x. \tag{2.3}$$

Sea $\lambda = \alpha + i\beta$, de manera similar a lo hecho en el Teorema 2.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \|V_A(y)\|^2 &= \|(A-\lambda I)x\|^2 = \|(A-\alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \\ \|y\|^2 &= \|(A-\bar{\lambda} I)x\|^2 = \|(A-\alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2. \end{aligned}$$

De aquí que $\|V_A(y)\| = \|y\|$ para toda $y \in D(V_A)$. Por lo tanto V_A es un operador isométrico. ∎

Teorema 2.24. *Sea A un operador simétrico. Entonces A es cerrado si y sólo si su transformada de Cayley V_A es un operador cerrado.*

Demostración. Por estar $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, usando el Lema 1.40 tenemos que A es cerrado si y sólo si $R(A - \lambda I) = R(V_A)$ es cerrado, lo cual por el Teorema 2.15 sucede si y sólo si V_A es cerrado. ∎

Teorema 2.25. *Si S y T son operadores simétricos tales que $T \subseteq S$, entonces $V_T \subseteq V_S$.*

Demostración. Como $T \subseteq S$, tenemos $R(T - \bar{\lambda} I) \subseteq R(S - \bar{\lambda} I)$, de donde $D(V_T) \subseteq D(V_S)$. Además, ambos operadores están dados por la relación (2.3). Por lo tanto $V_T \subseteq V_S$. ∎

Teorema 2.26. *Sea A un operador simétrico densamente definido con transformada de Cayley V_A. Entonces $R(V_A - I) = D(A)$ y $A = (\bar{\lambda} V_A - \lambda I)(V_A - I)^{-1}$.*

Demostración. Notemos que por ser $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) > 0$, $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$. Además de (2.3) tenemos que

$$V_A(y) = Ax - \lambda x \quad , \quad y = Ax - \bar{\lambda} x \quad \forall x \in D(A) \tag{2.4}$$

de donde

$$(V_A - I)y = (\bar{\lambda} - \lambda)x. \tag{2.5}$$

Recordemos que de (2.3) teníamos que al variar x en todo $D(A)$ obteníamos todos los y en $D(V_A)$. Y como $\lambda - \bar{\lambda} \neq 0$ al variar x en todo $D(A)$ en la expresión (2.5), obtenemos todos los x en $D(A)$. Por lo tanto $R(V_A - I) = D(A)$. Además, como A es densamente definido, $R(V_A - I)$ es denso en H, de aquí que $N(V_A - I) = \{0\}$ por el Lema 2.21. Entonces se puede definir el operador $(\bar{\lambda} V_A - \lambda I)(V_A - I)^{-1} : R(V_A - I) \to H$ con

$$A\tilde{x} = (\bar{\lambda} V_A - \lambda I)y \quad \text{donde} \quad \tilde{x} = (V_A - I)y \quad \forall y \in R(V_A - I).$$

Además de (2.4) se tiene

$$\bar{\lambda} V_A(y) = \bar{\lambda} Ax - |\lambda|^2 x \qquad \lambda y = \lambda Ax - |\lambda|^2 x$$

$$(\bar{\lambda} V_A - \lambda I)y = \bar{\lambda} Ax - \lambda Ax = A\left((\lambda - \bar{\lambda})x\right) = A\left((V_A - I)y\right).$$

De ahí que para toda $\tilde{x} \in D(A)$, $A\tilde{x} = (\bar{\lambda} V_A - \lambda I)(V_A - I)^{-1}\tilde{x}$. Por lo tanto $A = (\bar{\lambda} V_A - \lambda I)(V_A - I)^{-1}$. ∎

Observemos que si A es un operador simétrico densamente definido, entonces su transformada de Cayley V_A cumple que $R(V_A - I)$ es denso en H.

Al operador $A_V := (\bar{\lambda}V - \lambda I)(V - I)^{-1} : R(V - I) \to R(\bar{\lambda}V - \lambda I)$ con $Im(\lambda) > 0$, se le conoce como la **anti transformada de Cayley** del operador V. Notemos que $D(A_V) = R(V - I)$ y que este operador queda parametrizado como

$$A_V(x) = (\bar{\lambda}V - \lambda I)y \quad \text{donde} \quad x = (V - I)y \quad \text{con} \quad y \in D(V). \tag{2.6}$$

Notemos además que para definir la anti transformada de Cayley sólo se necesita que el operador isométrico V sea tal que $N(V - I) = \{0\}$. En este caso, el correspondiente operador simétrico $A = (\bar{\lambda}A - \lambda I)(V - I)^{-1}$ no necesariamente está densamente definido y A^* es una relación.

Teorema 2.27. *Sea V un operador isométrico tal que $R(V - I)$ es denso. Entonces A_V es un operador simétrico densamente definido cuya transformada de Cayley es V.*

Demostración. Sea $x \in D(A_V) = R(V - I)$, entonces $x = (V - I)y$ para alguna $y \in D(V)$. Usando que V es isométrico tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \langle A_V((V - I)y), (V - I)y\rangle = \langle(\bar{\lambda}V - \lambda I)y, (V - I)y\rangle \\
&= \langle\bar{\lambda}Vy - \lambda y, Vy - y\rangle \\
&= \bar{\lambda}\|Vy\|^2 + \lambda\|y\|^2 - \lambda\langle y, Vy\rangle - \bar{\lambda}\langle Vy, y\rangle \\
&= (\bar{\lambda} + \lambda)\|y\|^2 - Re\left(\lambda\langle y, Vy\rangle\right) \\
&= Re(\lambda)\|y\|^2 - Re\left(\lambda\langle y, Vy\rangle\right).
\end{aligned}$$

Es decir, $\langle A_V x, x\rangle$ es real, por lo tanto A_V es simétrica. Además, como $D(A_V) = R(V - I)$, A_V está densamente definida. Por último, consideremos la transformada de Cayley de A_V, la cual está dada por $(A_V - \lambda I)(A_V - \bar{\lambda}I)^{-1}$. De (2.6) tenemos que para toda $y \in D(V)$,

$$A_V x = \bar{\lambda}Vy - \lambda y \qquad x = Vy - y$$

$$A_V x - \bar{\lambda}x = \bar{\lambda}y - \lambda y \qquad A_V x - \lambda x = \bar{\lambda}Vy - \lambda Vy$$

$$(A_V - \bar{\lambda}I)x = (\bar{\lambda} - \lambda)y \qquad (A_V - \lambda I)x = (\bar{\lambda} - \lambda)Vy = V\big((\bar{\lambda} - \lambda)y\big).$$

De lo anterior tenemos que $D(V) = R(A_V - \bar{\lambda}I)$ y $V\tilde{y} = (A_V - \lambda I)(A_V - \bar{\lambda}I)^{-1}\tilde{y}$. Por lo tanto $V = (A_V - \lambda I)(A_V - \bar{\lambda}I)^{-1}$. ∎

Corolario 2.28. *La transformada de Cayley* $A \mapsto V_A = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda} I)^{-1}$ *es un mapeo biyectivo entre el conjunto de los operadores simétricos densamente definidos en* H *y el conjunto de todos los operadores isométricos* V *en* H *tales que* $R(V - I)$ *es denso. Su inversa es la anti transformada de Cayley* $V \mapsto A_V = (\bar{\lambda} V - \lambda I)(V - I)^{-1}$.

Corolario 2.29. *Sea* A *un operador simétrico densamente definido con transformada de Cayley* V. *Si* $\tilde{V}$ *es una extensión isométrica de* V. *Entonces* $A_{\tilde{V}}$ *es una extensión simétrica de* A.

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de que

$$D(A) = R(V - I) \subseteq R(\tilde{V} - I) = D(A_{\tilde{V}}).$$

Además de que para toda $x \in D(A)$,

$$Ax = (\bar{\lambda} V - \lambda I)(V - I)^{-1} x = (\bar{\lambda} \tilde{V} - \lambda I)(\tilde{V} - I)^{-1} x = A_{\tilde{V}} x.$$

Por lo tanto $A \subseteq A_{\tilde{V}}$. ∎

Corolario 2.30. *Sea* A *un operador simétrico cerrado densamente definido y sea* V *su transformada de Cayley. Entonces sus índices de deficiencia están relacionados como sigue*

$$d_+(A) = d^i(V) \quad \text{y} \quad d_-(A) = d^e(V).$$

Demostración. Como V es la transformada de Cayley de A tenemos que $R(V) = R(A - \lambda I)$ y $D(V) = R(A - \bar{\lambda} I)$. Con $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Im(\lambda) > 0$. Consideremos primero $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) > 0$ y $|\lambda| > 1$. Entonces por el 2.20 tenemos que

$$d^i(V) = \dim R(V)^\perp = \dim \overline{R(V)}^\perp = \dim \overline{R(A - \lambda I)}^\perp = d_A(\lambda) = d_+(A).$$

Por último consideremos ahora a $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Im(\lambda) > 0$ y $1 > |\lambda| > 0$. Nuevamente por el 2.20 obtenemos

$$d^e(V) = \dim D(V)^\perp = \dim \overline{D(V)}^\perp = \dim \overline{R(A - \bar{\lambda} I)}^\perp = d_A(\bar{\lambda}) = d_-(A).$$

∎

Corolario 2.31. *Un operador simétrico* A *es autoadjunto si y sólo si su transformada de Cayley* V_A *es un operador unitario.*

Corolario 2.32. *Un operador unitario* V *es la transformada de Cayley de un operador autoadjunto si y sólo si* $\overline{R(V - I)} = H$.

Capítulo III

Teoría de extensión de Operadores Simétricos e Isométricos.

3.1. Extensiones de operadores Isométricos.

Sea $V : D(V) \subseteq H \to H$ un operador isométrico cerrado. Sean $D_0 \subseteq D(V)^{\perp}$ y $R_0 \subseteq R(V)^{\perp}$ conjuntos lineales cerrados tales que

$$\dim D_0 = n_0 = \dim R_0. \tag{3.1}$$

Esta condición sobre la dimensión es necesaria para poder tomar un operador isométrico entre D_0 y R_0:

$$V_0 : D_0 \longrightarrow R_0.$$

Consideremos entonces al operador

$$\tilde{V} := V \oplus_{H \oplus H} V_0.$$

El cual tiene como dominio a $D(\tilde{V}) = D(V) \oplus D_0$. Y para el cual, si $x = y + z \in D(\tilde{V})$ con $y \in D(V)$, $z \in D_0$, se tiene que $\tilde{V}x = \tilde{V}(y+z) := Vy + V_0 z$. Claramente $R(\tilde{V}) = R(V) \oplus R_0$.

Observación 3.1. *$\tilde{V}$ es un operador isométrico.*

Para verificar que es isométrico basta tomar $x \in D(\tilde{V})$, donde $x = y + z$ con $y \in D(V)$, $z \in D_0$, y notar que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{V}x\|^2 &= \langle \tilde{V}x, \tilde{V}x \rangle = \langle Vy + V_0 z, Vy + V_0 z \rangle \\
&= \langle Vy, Vy \rangle + \langle V_0 z, V_0 z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2 \\
&= \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Afirmación 3.2. *Toda extensión isométrica cerrada de un operador isométrico cerrado V puede verse de esta manera.*

Demostración. Sea $V : D(V) \subseteq H \to H$ un operador isométrico cerrado y $\tilde{V} : D(\tilde{V}) \subseteq H \to H$ una extensión isométrica cerrada de V. Esto quiere decir que $D(V) \subseteq D(\tilde{V})$ y que $R(V) \subseteq R(\tilde{V})$. Además, por ser todos conjuntos cerrados, tenemos que $D(V)$ es un subespacio cerrado de $D(\tilde{V})$ y $R(V)$ es un subespacio cerrado de $R(\tilde{V})$. Basta entonces tomar $D_0 := D(\tilde{V}) \ominus D(V)$, $R_0 := R(\tilde{V}) \ominus R(V)$ y definir el operador $V_0 : D_0 \to R_0$ tal que para toda $z \in D_0$, donde $z = x - y$ con $x \in D(\tilde{V})$, $y \in D(V)$ se tenga que

$$V_0 z = \tilde{V}x - Vy.$$

Es claro que V_0 es un operador lineal biyectivo, así que sólo falta verificar que

$$\begin{aligned}
\|V_0 z\|^2 &= \|V_0 z\|^2 + \|Vy\|^2 - \|Vy\|^2 = \|V_0 z + Vy\|^2 - \|Vy\|^2 \\
&= \|\tilde{V}x\|^2 - \|Vy\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|z + y\|^2 - \|y\|^2 \\
&= \|z\|^2 + \|y\|^2 - \|y\|^2 \\
&= \|z\|^2.
\end{aligned}$$

Lo cual termina la prueba. ■

La condición (3.1) es muy importante pues, junto con la afirmación anterior, nos dice que V no tiene extensiones isométricas cerradas propias si alguno de los siguientes índices de deficiencia son cero:

$$d^e(V) = \dim D(V)^{\perp} \quad \text{y} \quad d^i(V) = \dim R(V)^{\perp}.$$

3.2. Fórmulas de Von Neumann.

Usando la Transformada de Cayley podemos intentar describir todas las extensiones simétricas de un operador simétrico, cerrado y densamente definido A. Una forma de hacer esto, es a través de las fórmulas de Von Neumann. Como toda extensión simétrica $\tilde{A}$ está contenida en A^*, nos será de gran ayuda primero describir al operador adjunto A^*, para lo cual probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Sea $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operador simétrico cerrado densamente definido. Entonces el dominio de A^* está dado por*

$$D(A^*) = D(A) \dotplus N(A^* - \lambda I) \dotplus N(A^* - \bar{\lambda} I). \tag{3.2}$$

Donde λ es cualquier complejo tal que $Im(\lambda) \neq 0$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Im(\lambda) \neq 0$. Entonces $\lambda \in \hat{\rho}(A)$, y por ser A un operador cerrado, $R(A - \lambda I)$ es cerrado.

Como A es simétrico, $D(A) \subseteq D(A^*)$. Así que la suma de espacios de la derecha está contenida en $D(A^*)$. Para probar la otra contención, sea $\tilde{y} \in D(A^*)$, por el Teorema 1.36

$$H = \overline{R(A - \lambda I)} \oplus N\left((A - \lambda I)^*\right) = R(A - \lambda I) \oplus N(A^* - \bar{\lambda} I). \tag{3.3}$$

Entonces podemos escribir a $(A^* - \lambda I)\tilde{y} \in H$ de la forma

$$(A^* - \lambda I)\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{u}. \tag{3.4}$$

Con $\tilde{x} \in R(A - \lambda I)$, es decir $\tilde{x} = (A - \lambda I)x$ con $x \in D(A)$, y $\tilde{u} \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$. Como $\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$, podemos tomar el vector $\tilde{u}_2 := (\bar{\lambda} - \lambda)^{-1}\tilde{u}$, el cual también pertenece a $N(A^* - \bar{\lambda} I)$ y que satisface $\tilde{u} = (\bar{\lambda} - \lambda)\tilde{u}_2$. Con lo cual podemos reescribir la ecuación (3.4) como

$$(A^* - \lambda I)\tilde{y} = (A - \lambda I)x + (\bar{\lambda} - \lambda)\tilde{u}_2. \tag{3.5}$$

Pero notemos que por ser $x \in D(A) \subseteq D(A^*)$, tenemos que $(A - \lambda I)x = (A^* - \lambda I)x$. Además, como $\tilde{u}_2 \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$, $A^*\tilde{u}_2 = \bar{\lambda}\tilde{u}_2$. De esto último obtenemos que $(\bar{\lambda} - \lambda)\tilde{u}_2 = \bar{\lambda}\tilde{u}_2 - \lambda\tilde{u}_2 = A^*\tilde{u}_2 - \lambda\tilde{u}_2 = (A^* - \lambda I)\tilde{u}_2$. Así, la ecuación (3.4) se convierte en

$$(A^* - \lambda I)\tilde{y} = (A^* - \lambda I)x + (A^* - \lambda I)\tilde{u}_2.$$

Lo anterior implica que $(A^* - \lambda I)(\tilde{y} - x - \tilde{u}_2) = 0$, es decir que $\tilde{u}_1 := \tilde{y} - x - \tilde{u}_2 \in N(A^* - \lambda I)$. Con lo cual pudimos escribir a $\tilde{y}$ como

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= x + (\tilde{y} - x - \tilde{u}_2) + \tilde{u}_2 \\ &= x + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2.\end{aligned}$$

Donde $x \in D(A)$, $\tilde{u}_1 \in N(A^* - \lambda I)$ y $\tilde{u}_2 \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$.

Por último, para probar que la suma es directa, tomemos una combinación lineal $x + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 0$ con $x \in D(A)$, $\tilde{u}_1 \in N(A^* - \lambda I)$ y $\tilde{u}_2 \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}0 &= (A^* - \lambda I)(x + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) \\ &= (A^* - \lambda I)x + (A^* - \lambda I)\tilde{u}_2 \\ &= (A - \lambda I)x + A^*\tilde{u}_2 - \lambda\tilde{u}_2 \\ &= (A - \lambda I)x + (\bar{\lambda} - \lambda)\tilde{u}_2.\end{aligned}$$

Pero de (3.3) se tiene entonces que $(\bar{\lambda} - \lambda)\tilde{u}_2 = 0$ y $(A - \lambda I)x = 0$. Pero $\bar{\lambda} - \lambda \neq 0$ y $N(A - \lambda I) = \{0\}$ por ser $\lambda \in \hat{\rho}(A)$. Entonces $\tilde{u}_2 = 0$ y $x = 0$, por lo tanto $\tilde{u}_2 = 0$.

■

Una vez que se tiene la descomposición (3.2), el operador A^* queda completamente determinado. De hecho, A^* actúa sobre los sumandos en (3.2) como A, λI y $\bar{\lambda} I$ respectivamente. Pues dada $\tilde{y} \in D(A^*)$ con $\tilde{y} = x + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2$, donde $x \in D(A)$, $\tilde{u}_1 \in N(A^* - \lambda I)$ y $\tilde{u}_2 \in N(A^* - \bar{\lambda} I)$, se tiene

$$\begin{aligned}A^*\tilde{y} &= A^*(x + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2) \\ &= A^*x + A^*\tilde{u}_1 + A^*\tilde{u}_2 \\ &= Ax + \lambda\tilde{u}_1 + \bar{\lambda}\tilde{u}_2.\end{aligned}$$

Además, del teorema anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\dim\Big(D(A^*) \setminus D(A)\Big) &= \dim\Big(N(A^* - \lambda I) \dotplus N(A^* - \bar{\lambda} I)\Big) \\ &= \dim N(A^* - \lambda I) + \dim N(A^* - \bar{\lambda} I) \\ &= d_-(A) + d_+(A).\end{aligned}$$

Lo cual nuevamente nos deja ver que los índices $d_-(A)$ y $d_+(A)$ son independientes del valor de λ que tomemos en $\hat{\rho}(A)$.

Teorema 3.4. *Sea A un operador simétrico cerrado densamente definido. Sean $D_0 \subseteq N(A^* - \lambda I)$ y $R_0 \subseteq N(A^* - \bar{\lambda} I)$, con $Im(\lambda) > 0$, conjuntos lineales cerrados tales que $\dim D_0 = \dim R_0 = n_0$. Sea V_0 un mapeo isométrico arbitrario de D_0 en R_0. Entonces*

$$D(\tilde{A}) = D(A) \dot{+} (V_0 - I)D_0 \tag{3.6}$$

define el dominio de alguna extensión simétrica cerrada del operador A. Más aún, cada una de estas extensiones tiene una descomposición de la forma (3.6). Además, $d_+(A) = d_+(\tilde{A}) + n_0$ y $d_-(A) = d_-(\tilde{A}) + n_0$.

Demostración. Si A es un operador simétrico y densamente definido, podemos tomar su transformada de Cayley V. Por lo probado en los Teoremas 1.36 y 2.23, tenemos que

$$D_0 \subseteq N(A^* - \lambda I) = R(A - \bar{\lambda} I)^{\perp} = D(V)^{\perp}.$$

Y

$$R_0 \subseteq N(A^* - \bar{\lambda} I) = R(A - \lambda I)^{\perp} = R(V)^{\perp}.$$

Así que por la Afirmación 3.2, $\tilde{V} = V \oplus V_0$ es una extensión isométrica cerrada de V. Como $R(V - I)$ es denso en H y $R(V - I) \subset R(\tilde{V} - I)$, tenemos que $R(\tilde{V} - I)$ también es denso en H, por lo que $\tilde{V}$ tiene anti transformada de Cayley $\tilde{A}$. La cual por el Corolario 2.29, es una extensión simétrica de A, y es cerrada, ya que $\tilde{V}$ es cerrado. Además, como $D(\tilde{A}) = R(\tilde{V} - I)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
D(\tilde{A}) &= R(\tilde{V} - I) \\
&= (\tilde{V} - I)D(\tilde{V}) \\
&= (\tilde{V} - I)(D(V) \oplus D_0) \\
&= (\tilde{V} - I)D(V) \dot{+} (\tilde{V} - I)D_0 \\
&= (V - I)D(V) \dot{+} (V_0 - I)D_0 \\
&= R(V - I) \dot{+} (V_0 - I)D_0 \\
&= D(A) \dot{+} (V_0 - I)D_0.
\end{aligned}$$

Donde en la igualdad $(\tilde{V}-I)(D(V)\oplus D_0)=(\tilde{V}-I)D(V)\dot{+}(\tilde{V}-I)D_0$ se pasa de suma ortogonal a suma directa debido a que $\tilde{V}-I$ no necesariamente es un operador isométrico.

Por otro lado, si $\tilde{A}$ es una extensión simétrica cerrada de A. Por el Teorema 2.25, $V_{\tilde{A}}$ es una extensión isométrica cerrada de V_A. Así que nuevamente por la Afirmación 3.2 existe un operador isométrico $V_0 : D_0 \to R_0$. Con

$$D_0 \subseteq D(V)^{\perp} = R(A-\bar{\lambda}I)^{\perp} = N(A^*-\lambda I).$$

Y

$$R_0 \subseteq R(V)^{\perp} = R(A-\lambda I) = N(A^*-\bar{\lambda}I).$$

Tal que $\tilde{V} = V \oplus V_0$. Repitiendo el cálculo de arriba, obtenemos que todas las extensiones simétricas cerradas de A se pueden escribir de la forma $D(\tilde{A}) = D(A)\dot{+}(V_0-I)D_0$.

Por último, como $D(\tilde{V}) = D(V)\oplus D_0$, tenemos que

$$D(V)^{\perp} = D(\tilde{V})^{\perp}\oplus D_0. \tag{3.7}$$

Pues $D(\tilde{V})^{\perp}\oplus D_0 \subseteq D(V)^{\perp}$ y si $w \in D(V)^{\perp} = R(A-\bar{\lambda}I)^{\perp} = N(A^*-\lambda I) = D_0 \oplus [N(A^*-\lambda I)\ominus D_0]$, entonces podemos escribir $w = x+y$ con $x \in D_0$, $y \in N(A^*-\lambda I)\ominus D_0 \subseteq N(A^*-\lambda I) = D(V)^{\perp}$, pero $y \in {D_0}^{\perp}$, de ahí que $y \in D(\tilde{V})^{\perp}$ y por lo tanto $w \in D(\tilde{V})^{\perp}\oplus D_0$. Tenemos de (3.7) que entonces

$$\dim D(V)^{\perp} = \dim D(\tilde{V})^{\perp} + \dim D_0$$

Es decir,

$$d_-(A) = d_-(\tilde{A}) + n_0.$$

Similarmente $d_+(A) = d_+(\tilde{A}) + n_0$. ∎

Teorema 3.5. *Sea A un operador simétrico cerrado tal que $d_-(A)+d_+(A) < \infty$. Entonces cada una de sus extensiones simétricas es cerrada.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Teorema 1.24 y del hecho de que

$$\dim\Big(D(A^*)/D(A)\Big) = d_-(A)+d_+(A) < \infty.$$

∎

Teorema 3.6. *Un operador simétrico densamente definido A en H tiene una extensión autoadjunta si y sólo si $d_+(A) = d_-(A)$.*

Si $d_+(A) = d_-(A)$, entonces todas las extensiones autoadjuntas de A están dadas por los operadores A_V, donde V es un operador isométrico que va de $N(A^* - \lambda I)$ a $N(A^* - \bar{\lambda} I)$ y

$$D(A_V) = D(\overline{A}) \dot{+} (V - I)N(A^* - \lambda I),$$
$$A_V(x + (V - I)y) = \overline{A}x + \bar{\lambda} V y - \lambda y$$

para $x \in D(\overline{A})$, $y \in N(A^* - \lambda I)$.

Demostración. Por el Corolario 2.31 un operador $\tilde{A}$ como en (3.6) es autoadjunto si y sólo si su transformada de Cayley es unitaria, o equivalentemente si $D_0 = N(A^* - \lambda I)$ y $R_0 = N(A^* - \bar{\lambda} I)$ en el Teorema 3.4.

Como $d_-(A) = \dim N(A^* - \lambda I)$, $d_+(A) = \dim N(A^* - \bar{\lambda} I)$ y un operador isométrico entre dos subespacios cerrados existe si y sólo si ambos subespacios tienen la misma dimensión, entonces existe una isometría entre $N(A^* - \lambda I)$ y $N(A^* - \bar{\lambda} I)$, es decir, A cuenta con una extensión autoadjunta. ∎

3.3. Extensiones de operadores Simétricos. Ejemplos.

Recordemos que $AC[a, b]$ denota al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en el intervalo $[a, b]$. Además, $L^2(a, b)$ denota al espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables en el intervalo $[a, b]$, con el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \qquad \forall f, g \in L^2(a, b).$$

Definición 3.7. *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, definimos los siguientes conjuntos lineales en el espacio de Hilbert $L^2(a, b)$,*

$$H^1(a, b) := \{f \in AC[a, b] \mid f' \in L^2(a, b)\}.$$
$$H^2(a, b) := \{f \in C^1[a, b] \mid f' \in H^1(a, b)\}.$$
$$H_0^1(a, b) := \{f \in H^1(a, b) \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$
$$H_0^2(a, b) := \{f \in H^2(a, b) \mid f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0\}.$$

Usando integración por partes se tiene que para cualesquiera $f, g \in H^1(a,b)$,

$$\langle f', g\rangle + \langle f, g'\rangle = f\bar{g}|_a^b = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}. \tag{3.8}$$

Y para cualesquiera $f, g \in H^2(a,b)$,

$$\langle f'', g\rangle - \langle f, g''\rangle = [f'\bar{g} - f\overline{g'}]|_a^b$$

Es decir,

$$\langle f'', g\rangle - \langle f, g''\rangle = f'(b)\overline{g(b)} - f(b)\overline{g'(b)} - f'(a)\overline{g(a)} + f(a)\overline{g'(a)}. \tag{3.9}$$

3.3.1. Operador $-i\frac{d}{dx}$ en $H_0^1(a,b) \subset L^2(a,b)$.

Tomemos un intervalo real $[a,b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$, y sea $T : D(T) \subseteq H \to H$ el operador lineal definido en el espacio de Hilbert $H = L^2(a,b)$, con $D(T) = H_0^1(a,b)$ y dado por $Tf = -if'$.

Afirmación 3.8. *$D(T) = H_0^1(a,b)$ es denso en $L^2(a,b)$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $C_0^\infty(a,b)$ es denso en $L^2(a,b)$, ver [4] pág. 109, y que $C_0^\infty(a,b) \subset H_0^1(a,b)$. ■

Afirmación 3.9. *$R(T)^\perp = \{h \in L^2(a,b) \mid h(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Demostración. Sea $S = \{h \in L^2(a,b) \mid h(x) = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$. Probaremos primero que $R(T)^\perp \subseteq S$. Notemos que por ser S un conjunto cerrado en $L^2(a,b)$, basta probar que $S^\perp \subseteq R(T)$, pues entonces tendríamos $R(T)^\perp \subseteq (S^\perp)^\perp = S$. Sea $h \in S^\perp$. Definamos en $[a,b]$ la función

$$k(x) := \int_a^x h(t)dt.$$

Como $h \in L^2(a,b) \subseteq L^1(a,b)$, tenemos que $k \in H^1(a,b)$ con $k' = h$. Claramente $k(a) = 0$ y $k(b) = \langle h, 1\rangle = 0$. Entonces $k \in D(T) = H_0^1(a,b)$. Así que $ik \in D(T)$, por lo tanto $T(ik) = iTk = i(-i)k' = k' = h \in R(T)$.

Ahora, para probar que $S \subseteq R(T)^\perp$, tomemos $h \in S$ con $h(x) = \lambda$ para toda $x \in [a,b]$, y $k_0 \in R(T)$ arbitraria, con $k_0 = -ih_0'$, donde $h_0 \in D(T) = H_0^1(a,b)$. Notemos que entonces

$$\begin{aligned}\langle k_0, h\rangle &= \int_a^b k_0(t)\bar{\lambda}dt = \bar{\lambda}\int_a^b k_0(t)dt = \bar{\lambda}\int_a^b (-i)h_0'(t)dt \\ &= -i\bar{\lambda}h_0(t)|_a^b = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $h \in R(T)^\perp$ ■

Afirmación 3.10. *$D(T^*) = H^1(a,b)$ y $T^*g = -ig'$ para toda $g \in D(T^*)$.*

Demostración. Probemos primero que $H^1(a,b) \subseteq D(T^*)$. Para ello tomemos $g \in H^1(a,b)$ y sea $f \in D(T) = H_0^1(a,b)$. Como $f(a) = f(b) = 0$, usando la identidad (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\langle Tf, g\rangle &= \langle -if', g\rangle = -i\langle f', g\rangle = i\langle f, g'\rangle \\ &= \langle f, -ig'\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, por definición de T^* se sigue que $g \in D(T^*)$ y $T^*g = -ig'$.

Por otro lado, para probar que $D(T^*) \subseteq H^1(a,b)$, sea $g \in D(T^*)$. Definamos $h := T^*g$ y

$$k(x) := \int_a^x h(t)dt.$$

De ahí que $k' = h$. Ahora, tomemos $f \in D(T) = H_0^1(a,b)$. Como $f(a) = f(b) = 0$ se sigue de la identidad (3.8) que

$$-\langle f', k\rangle = \langle f, k'\rangle = \langle f, h\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \langle Tf, g\rangle = \langle -if', g\rangle.$$

De donde $\langle -if', g - ik\rangle = 0$, es decir $g - ik \in R(T)^\perp = S$, por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $g(x) - ik(x) = \lambda$. Por lo que podemos escribir $g(x) = ik(x) + \lambda$, pero $\lambda \in H^1(a,b)$ y $k \in H^1(a,b)$. Por lo tanto $g \in H^1(a,b)$. ■

De la afirmación anterior se tiene entonces que $T \subseteq T^*$, de donde T es cerrable. De hecho se cumple lo siguiente.

Afirmación 3.11. *$T = T^{**}$.*

Demostración. Como se cumple que $T \subseteq T^{**}$, basta probar que $T^{**} \subseteq T$. Sea $g \in D(T^{**})$, como $T \subseteq T^*$, por la afirmación anterior, $T^{**} \subseteq T \subseteq T^*$, de ahí que $g \in D(T^*) = H^1(a,b)$ y $T^{**}g = T^*g = -ig'$. Para $f \in D(T^*)$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned}0 = \langle T^*f, g\rangle - \langle f, T^{**}g\rangle &= \langle -if', g\rangle - \langle f, -ig'\rangle \\ &= -i\langle f', g\rangle - i\langle f, g'\rangle = -i[\langle f', g\rangle - \langle f, g'\rangle] \\ &= -i[f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}].\end{aligned}$$

Como los valores de $f(a)$ y $f(b)$ son arbitrarios, se sigue que $g(a) = 0 = g(b)$. Por lo tanto $g \in H_0^1(a,b) = D(T)$. De donde $T^{**} \subseteq T$. ■

De lo anterior se tiene que T es un operador cerrado y simétrico. Por lo tanto para cualesquiera $f, g \in D(T)$ se tiene que

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle.$$

Como T es un operador simétrico, cerrado y densamente definido, podemos utilizar la teoría de Von Neumann para encontrar todas sus extensiones autoadjuntas.

Afirmación 3.12. *$N(T^* - iI) = \{\lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ y $N(T^* + iI) = \{\lambda e^{x} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Demostración. Notemos que $g \in N(T^* - \lambda I)$ si y sólo si $g \in D(T^*)$ y $T^*g - \lambda g = 0$. En nuestro caso, como $T^*g = -ig'$, se debe cumplir que $-ig' - \lambda g = 0$. Es decir, g es de la forma $g(x) = \alpha e^{i\lambda x}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$. En particular, tomando $\lambda = i$ y $\lambda = -i$, tenemos que

$$N(T^* - iI) = \{\lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

$$N(T^* + iI) = \{\lambda e^{x} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

De aquí que $d_+(T) = d_-(T) = 1$. ■

Tomemos un intervalo real $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$. Para toda $z \in \mathbb{C}$ definimos el operador lineal S_z en el espacio de Hilbert $L^2(a, b)$. Dado por $S_z f = -if'$ con $f \in D(S_z)$, donde

$$D(S_z) := \{f \in H^1(a, b) \mid f(b) = zf(a)\}.$$

Además definimos

$$D(S_\infty) := \{f \in H^1(a, b) \mid f(a) = 0\}.$$

Lema 3.13. *Para toda $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se tiene que $(S_z)^* = S_{\bar{z}^{-1}}$. Donde $\bar{0}^{-1} := \infty$ y $\overline{\infty}^{-1} := 0$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para $f \in D(S_z)$ y $g \in H^1(a, b)$ podemos usar la identidad (3.8) y obtener

$$\begin{aligned}
\langle S_z f, g\rangle - \langle f, -ig'\rangle = \langle -if', g\rangle - \langle f, -ig'\rangle &= -i[\langle f', g\rangle - \langle f, g'\rangle] \\
&= -i[f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}] \\
&= -if(a)[z\overline{g(b)} - \overline{g(a)}].
\end{aligned}$$

Si $g \in D(S_{\bar{z}^{-1}})$, entonces $\bar{z}g(b) = g(a)$, lo cual hace que el último término se anule y por lo tanto $g \in D((S_z)^*)$ y $(S_z)^*g = -ig'$.

Ahora tomemos $g \in D((S_z)^*)$. Escojamos $\lambda \in \mathbb{C}$ de tal manera que $e^{\lambda(b-a)} = z$. Entonces $f(x) := e^{\lambda x}$ es un elemento de $D(S_z)$. Como $T \subseteq S_z$ y por lo tanto, $(S_z)^* \subseteq T^*$, tenemos que $g \in H^1(a, b)$ y $(S_z)^*g = -ig'$ por lo dicho anteriormente, así que el término $\langle S_z f, g\rangle - \langle f, -ig'\rangle$ se anula. Como

$f(a) \neq 0$, esto implica que $\bar{z}g(b) = g(a)$, de donde $g \in D(S_{\bar{z}^{-1}})$.

De manera similar, si $z = 0$, para $f \in D(S_0)$ y $g \in H^1(a,b)$ se tiene que

$$\langle S_0 f, g\rangle - \langle f, -ig'\rangle = if(a)\overline{g(a)}. \tag{3.10}$$

Si $g \in D(S_\infty)$, entonces $g(a) = 0$, lo cual hace que el último término se anule y por lo tanto $g \in D((S_0)^*)$ y $(S_0)^* g = -ig'$.

Consideremos la función $f(x) = x - b$, notemos que $f \in D(S_0)$. Como $T \subseteq S_0$, $(S_0)^* \subseteq T^*$, tenemos entonces que $g \in H^1(a,b)$ y $(S_0)^* g = -ig'$. Como $f(a) \neq 0$, de (3.10) se tiene que $g(a) = 0$, por lo tanto $g \in D(S_\infty)$.

Por último, si $z = \infty$, para $f \in D(S_\infty)$ y $g \in H^1(a,b)$ se tiene que

$$\langle S_\infty f, g\rangle - \langle f, -ig'\rangle = -if(b)\overline{g(b)}. \tag{3.11}$$

Si $g \in D(S_0)$, entonces $g(b) = 0$, lo cual hace que el último término se anule y por lo tanto $g \in D((S_\infty)^*)$ y $(S_\infty)^* g = -ig'$.

Consideremos la función $f(x) = x - a$, notemos que $f \in D(S_\infty)$. Como $T \subseteq S_\infty$, $(S_\infty)^* \subseteq T^*$, tenemos entonces que $g \in H^1(a,b)$ y $(S_\infty)^* g = -ig'$. Como $f(b) \neq 0$, de (3.11) se tiene que $g(b) = 0$, por lo tanto $g \in D(S_0)$. ∎

Corolario 3.14. *El operador S_z es autoadjunto si y sólo si $|z| = 1$.*

Teorema 3.15. *Los operadores S_z con $z \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, agotan todas las posibles extensiones autoadjuntas de T en $L^2(a,b)$.*

Demostración. Denotemos con $N_i := N(T^* - iI)$ y $N_{-i} := N(T^* + iI)$. Como T es un operador simétrico densamente definido y $d_+(T) = d_-(T)$, podemos usar el Teorema 3.6 con $\lambda = i$.

Notemos que las funciones $e^{a+b-x} \in N_i$ y $e^x \in N_{-i}$ tienen la misma norma en $L^2(a,b)$, pues

$$\begin{aligned}\langle e^{a+b-x}, e^{a+b-x}\rangle &= \int_a^b e^{2a+2b-2x}dx = e^{2a+2b}\int_a^b e^{-2x}dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{2a+2b}e^{-2x}|_a^b = \frac{1}{2}[e^{2b} - e^{2a}].\end{aligned}$$

Mientras que

$$\langle e^x, e^x \rangle = \int_a^b e^{2x} dx = \frac{1}{2}[e^{2b} - e^{2a}].$$

De lo anterior, y por ser N_i y N_{-i} unidimensionales, tenemos que toda isometría entre N_i y N_{-i} está parametrizada por $w \in \mathbb{T}$ y determinada por $V_w(e^{a+b-x}) = we^x$. Denotemos con A_w a A_{V_w}. Por el Teorema 3.6, cada $f \in D(A_w) = D(T_{A_w})$ se puede ver de la forma $f(x) = f_0(x) + (V_w - I)\alpha e^{a+b-x}$. Donde $f_0 \in D(T) = H_0^1(a,b)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Notemos que entonces $f \in H^1(a,b)$. Por otro lado, como

$$f(b) = f_0(b) + \alpha(V_w - I)e^{a+b-b} = 0 + \alpha(V_w(e^{a+b-b}) - e^a) = \alpha(we^b - e^a).$$

Y

$$f(a) = f_0(a) + \alpha(V_w - I)e^{a+b-a} = 0 + \alpha(V_w(e^{a+b-a}) - e^b) = \alpha(we^a - e^b).$$

Tenemos que f satisface la siguiente condición de frontera:

$$f(b) = z(w)f(a) \quad \text{donde } z(w) := (we^b - e^a)(we^a - e^b)^{-1}. \tag{3.12}$$

Por otro lado, si $f \in H^1(a,b)$ satisface (3.12), definiendo $\alpha := f(b)(we^b - e^a)^{-1}$ y $f_0(x) := f(x) - (V_w - I)\alpha e^{a+b-x}$, obtenemos que

$$f_0(b) = f(b) - (V_w - I)\alpha e^{a+b-b} = f(b) - \alpha(we^b - e^a) = f(b) - f(b) = 0.$$

Y

$$f_0(a) = f(a) - (V_w - I)\alpha e^{a+b-a} = f(a) - \alpha(we^a - e^b) = f(a) - \frac{f(b)}{z(w)} = 0.$$

De aquí que $f \in D(A_w)$. Con lo cual hemos probado que

$$D(A_w) = \{f \in H^1(a,b) \mid f(a) = z(w)f(a)\}.$$

Notemos que $z : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es una biyección. De ahí que $w \in \mathbb{T}$, implica que $z(w) \in \mathbb{T}$. Y entonces por lo visto en el lema anterior, $A_w = S_{z(w)}$ es un operador autoadjunto. Más aún, toda S_y se puede obtener de esta forma tomando $w = z^{-1}(y)$. $\blacksquare$

3.3.2. Operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ en $H_0^2(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$.

Comenzaremos por estudiar primero el comportamiento del operador $T : D(T) \subseteq H \to H$ definido en el espacio de Hilbert $H = L^2(a,b)$, con $D(T) = H_0^2(a,b)$ y dado por $T(f) = -f''$.

Afirmación 3.16. *$H_0^2(a,b)$ es denso en $L^2(a,b)$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que $C_0^\infty(a,b)$ es denso en $L^2(a,b)$ y que $C_0^\infty(a,b) \subset H_0^2(a,b)$. ∎

Afirmación 3.17. *$R(T)^\perp \subseteq \{h \in L^2(a,b) \mid h(x) = \lambda_1 x + \lambda_0\}$.*

Demostración. Sea $A = \{h \in L^2(a,b) \mid h(x) = \lambda_1 x + \lambda_0\}$. Notemos que por ser A un conjunto cerrado en $L^2(a,b)$, basta probar que $A^\perp \subseteq R(T)$, pues entonces $R(T)^\perp \subseteq (A^\perp)^\perp = A$. Sea $h \in A^\perp$. Definamos en $[a,b]$ la función

$$k(x) = \int_a^x \left(\int_a^t h(s)ds \right) dt. \tag{3.13}$$

Como $h \in L^2(a,b)$, tenemos entonces que $k \in H^2(a,b)$ y $k'' = h$. Claramente $k(a) = k'(a) = 0$ y $k(b) = \langle h, 1\rangle = 0$. Entonces $k \in D(T) = H_0^2(a,b)$, así que $ik \in D(T)$, por lo tanto $T(-k) = -Tk = -(-k'') = k'' = h \in R(T)$. ∎

Afirmación 3.18. *$D(T^*) = H^2(a,b)$ y $T^*g = -g''$ para toda $g \in D(T^*)$.*

Demostración. Probemos primero que $H^2(a,b) \subseteq D(T^*)$. Para ello tomemos $g \in H^2(a,b)$ y sea $f \in D(T) = H_0^2(a,b)$. Como $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, usando la identidad (3.9), obtenemos

$$\langle Tf, g\rangle = \langle -f'', g\rangle = -\langle f'', g\rangle = -\langle f, g''\rangle = \langle f, -g''\rangle.$$

Entonces por definición de T^*, se sigue que $g \in D(T^*)$ y $T^*g = -g''$. Por otro lado, para probar que $D(T^*) \subseteq H^2(a,b)$, sean $g \in D(T^*)$, $k(x)$ definida como en (3.13) y definamos $h := T^*g$. De donde $k'' = h$. Ahora, tomemos $f \in D(T) = H_0^2(a,b)$. Como $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, se sigue de (3.9) que

$$\langle f'', k\rangle = \langle f, k''\rangle = \langle f, h\rangle = \langle f, T^*g\rangle = \langle Tf, g\rangle = \langle -f'', g\rangle.$$

De ahí que $\langle -f'', k+g\rangle = 0$, es decir, $k+g \in R(T)^\perp = A$. Por lo tanto existen $\lambda_1, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ tales que $k(x) + g(x) = \lambda_1 x + \lambda_0$. Como $g(x) = -k(x) + \lambda_1 x + \lambda_0$ y $k \in H^2(a,b)$, $\lambda_1 x + \lambda_0 \in H^2(a,b)$, tenemos que $g \in H^2(a,b)$. ∎

De lo anterior se tiene que T es un operador simétrico densamente definido. Más aún, se puede verificar que sus índices de deficiencia son $d_-(T) = 2 = d_+(T)$ y por lo tanto cuenta con extensiones autoadjuntas, como se demuestra al final del siguiente capítulo.

Definición 3.19.

$H^1(0,\infty) := \{f \in L^2(0,\infty) \mid f' \in L^2(0,\infty) \quad y \quad f \in AC[a,b] \quad \forall [a,b] \subset [0,\infty)\}.$
$H_0^1(0,\infty) := \{f \in H^1(0,\infty) \mid f(0) = 0\}.$
$H^2(0,\infty) := \{f \in L^2(0,\infty) \mid f \in C^1[0,\infty) \quad y \quad f' \in H^1(0,\infty)\}.$
$H_0^2(0,\infty) := \{f \in H^2(0,\infty) \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$

Ahora consideremos un nuevo operador $T : D(T) \subseteq H \to H$ definido en el espacio de Hilbert $H = L^2(0,\infty)$, con $D(T) = H_0^2(0,\infty)$ y dado por $Tf = -f''$. Nótese que $D(T) = H_0^2(0,\infty)$ es denso, pues $C_0^\infty(0,\infty) \subset H_0^2(0,\infty)$ y $C_0^\infty(0,\infty)$ es denso en $L^2(0,\infty)$.

Lema 3.20. *Si $f \in H^2(0,\infty)$, entonces*

(a) $\lim_{b\to\infty} f'(b) = 0.$

(b) $\lim_{b\to\infty} f(b) = 0.$

Demostración.

(a) Como $f \in H^2(0,\infty)$, $f' := h \in H^1(0,\infty)$. Por (3.8) tenemos entonces que
$$\int_0^b h(t)\overline{h'(t)} + h'(t)\overline{h(t)}dt = |h(b)|^2 - |h(0)|^2, \tag{3.14}$$
para toda $b > 0$. Por definición de $H^1(0,\infty)$, $h, h' \in L^2(0,\infty)$, entonces $h'\overline{h} \in L^1(0,\infty)$. Por lo que el lado izquierdo en (3.14) converge a la integral sobre $[0,\infty)$ cuando $b \to \infty$. De aquí que el límite $\lim_{b\to\infty} |h(b)|^2$ exista. Como $h \in L^2(0,\infty)$ este límite tiene que ser 0.

(b) Por (3.9) tenemos que
$$\begin{aligned}
&\int_0^b \left(\int_0^t [f''(s)\overline{f(s)} - f(s)\overline{f''(s)}]ds\right)dt \\
&= \int_0^b \left(f'(t)\overline{f(t)} - f(t)\overline{f'(t)} - f'(0)\overline{f(0)} + f(0)\overline{f'(0)}\right)dt \\
&= |f(b)|^2 - |f(0)|^2 + 2b\mathrm{Im}\left(f(0)\overline{f'(0)}\right),
\end{aligned}$$

para toda $b > 0$. Por definición de $H^2(0,\infty)$, se tiene que $f, f'' \in L^2(0,\infty)$, entonces $f''\overline{f} \in L^1(0,\infty)$. Por lo que la primera de las expresiones anteriores converge a la integral sobre $[0,\infty)$ cuando $b \to \infty$. De aquí que el límite $\lim_{b\to\infty} |f(b)|^2$ exista. Como $f \in L^2(0,\infty)$ este límite tiene que ser 0.

■

Corolario 3.21.

$$\langle f'', g\rangle - \langle f, g''\rangle = -f'(0)\overline{g(0)} + f(0)\overline{g'(0)}.$$

Demostración. Basta tomar el límite cuando $b \to \infty$ en la expresión (3.8) con $a = 0$ y usar el lema anterior. ■

Afirmación 3.22. *$D(T^*) = H^2(0,\infty)$ y $T^*g = -g''$ para toda $g \in D(T^*)$.*

Demostración. Sea $g \in H^2(0,\infty)$ y sea $f \in D(T) = H_0^2(0,\infty)$. Como $f(0) = f'(0) = 0$, del Lema 3.21 obtenemos

$$\langle Tf, g\rangle = \langle -f'', g\rangle = -\langle f'', g\rangle = -\langle f, g''\rangle = \langle f, -g''\rangle.$$

Entonces, por definición de T^*, se sigue que $g \in D(T^*)$ y $T^*g = -g''$. Ahora, sea $g \in D(T^*)$. Denotemos con T^b al operador en $L^2(0,b)$ que resulta de restringir a T en

$$D(T^b) := \{f \restriction_{[0,b]} \mid f \in H_0^2(0,\infty)\}.$$

Y denotemos con T_b al operador en $L^2(0,b)$ que resulta de restringir a T en

$$D(T_b) = H_0^2(0,b).$$

De la Afirmación 3.18 tenemos que $g \in H^2(0,b)$ y $(T_b)^*g = -g''$ en $[0,b]$. Notemos que para toda $x \in [0,b]$, con $b > 0$, se tiene que $\big((T^b)^*g\big)\,x = -g''(x) = (T^*g)x$. De ahí que $T^*g = -g''$ en todo $[0,\infty)$. Además, como $g, g', g'' \in L^2(0,\infty)$, tenemos que $g \in H^2(0,\infty)$. ■

Afirmación 3.23. $d_+(T) = d_-(T) = 1$.

Demostración. Por definición $d_-(T) = \dim N(T^* - iI)$. Notemos que $g \in N(T^* - iI)$ si y sólo si $g \in D(T^*) = H^2(0,\infty)$ y $T^*g - ig = 0 \Leftrightarrow g'' + ig = 0$. Entonces sabemos que g es de la forma

$$g(x) = \alpha e^{-\sqrt{-i}x} + \beta e^{\sqrt{-i}x}.$$

Como $g \in D(T^*) = H^2(0,\infty)$, tenemos que $g \in L^2(0,\infty)$, de donde se tiene que en realidad

$$g(x) = \alpha e^{-\sqrt{-i}x}.$$

Por lo tanto $d_-(T) = 1$. Análogamente, tenemos que $g \in N(T^* + iI)$ si y sólo si $g'' - ig = 0$. Es decir, g es de la forma

$$g(x) = \alpha e^{-\sqrt{i}x} + \beta e^{\sqrt{i}x}.$$

Y como $g \in L^2(0,\infty)$, en realidad se tiene que

$$g(x) = \alpha e^{-\sqrt{i}x}.$$

De donde $d_+(T) = 1$. $\blacksquare$

Como T es un operador simétrico cerrable densamente definido, podemos usar el Teorema 3.6 para describir todas las extensiones autoadjuntas de T. Para ello notemos que basta con encontrar dos vectores $f \in N_i$ y $g \in N_{-i}$ tales que $\|f\| = \|g\|$ para que toda isometría $V : N_i \to N_{-i}$, quede parametrizada por $\mathbb{T}$. Veamos entonces que $e^{-\sqrt{-i}x} \in N_i$ y que

$$\begin{aligned}
\langle e^{-\sqrt{-i}x}, e^{-\sqrt{-i}x}\rangle &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{-i}x} \cdot \overline{e^{-\sqrt{-i}x}} dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{-i}x} \cdot e^{\overline{-\sqrt{-i}x}} dx \\
&= \int_0^\infty e^{2Re\left(-\sqrt{-i}x\right)} dx = \int_0^\infty e^{2Re\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}ix\right)} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}x} dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, $e^{-\sqrt{i}x} \in N_{-i}$ y

$$\begin{aligned}
\langle e^{-\sqrt{i}x}, e^{-\sqrt{i}x}\rangle &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{i}x} \cdot \overline{e^{-\sqrt{i}x}} dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{i}x} \cdot e^{\overline{-\sqrt{i}x}} dx \\
&= \int_0^\infty e^{2Re\left(-\sqrt{i}x\right)} dx = \int_0^\infty e^{2Re\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}ix\right)} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}x} dx = \int_0^\infty e^{-\sqrt{2}x} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que todos los operadores isométricos de N_i en N_{-i} son de la forma

$$\begin{aligned} V : N(T^* - iI) &\to N(T^* + iI) \\ \alpha e^{-\sqrt{-i}x} &\mapsto \alpha\omega e^{-\sqrt{i}x} \qquad \text{con} \quad \omega \in \mathbb{T}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.6, todas las extensiones autoadjuntas $\tilde{T}$ de T están determinadas por la restricción de $D(T^*)$ en

$$D(\tilde{T}) = D(T) + (V - I)N_i$$

Donde

$$\tilde{T}(x + (V - I)z) = Tx - iVz - iz,$$

con $x \in D(T)$ y $z \in N_i$. Es decir,

$$\begin{aligned} y = x + (V - I)z &= x + Vz - z \\ &= h + \alpha\omega e^{-\sqrt{i}x} - \alpha e^{-\sqrt{-i}x}. \end{aligned}$$

$$\tilde{T}(h + (V - I)f) = Th - i\alpha\omega e^{-\sqrt{i}x} - i\alpha e^{-\sqrt{-i}x}$$

Evaluando $y(0)$ y $y'(0)$ obtenemos lo siguiente

$$y(0) = h(0) + \alpha\omega - \alpha = \alpha\omega - \alpha = \alpha(\omega - 1).$$

De donde

$$\alpha = (\omega - 1)^{-1} f(0)$$

$$\begin{aligned} y'(0) &= h(0) + (-\sqrt{i})\alpha\omega - (-\sqrt{-i})\alpha \\ &= \alpha(-\sqrt{i}\omega + \sqrt{-i}) \\ &= (\omega - 1)^{-1}(-\sqrt{i}\omega + \sqrt{-i}) f(0) \\ &= \frac{\sqrt{-i} - \omega\sqrt{i}}{\omega - 1} f(0). \end{aligned}$$

Si definimos

$$B := \frac{\sqrt{-i} - \omega\sqrt{i}}{\omega - 1},$$

lo anterior queda como

$$y'(0) = Bf(0).$$

Notemos que para toda $\omega \in \mathbb{T}$, B es un número real. Más aún, $\omega \mapsto \frac{\sqrt{-i}-\omega\sqrt{i}}{\omega-1}$ define una biyección entre $\mathbb{T}$ y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Hemos probado así que todas las extensiones autoadjuntas de T se obtienen simplemente imponiendo la condición de frontera $f'(0) = Bf(0)$, con $B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a familias de funciones en $H^2(0, \infty)$.

3.3.3. Operador de Jacobi.

Consideremos un espacio de Hilbert separable H. Sea $A : D(A) \subseteq H \to H$ un operador simétrico cerrado tal que $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset D(A)$, donde $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H. Nótese que entonces A es un operador densamente definido. Definimos la **matriz de representación** del operador A con respecto a la base ortonormal $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ como la matriz $[c_{jk}]$ tal que

$$c_{jk} = \langle Au_j, u_k \rangle.$$

Como A es un operador simétrico, observemos que para cualesquiera naturales $j, k \geq 1$ se tiene que $c_{kj} = \overline{c_{jk}}$ y $c_{jj} \in \mathbb{R}$.

Notemos además que diferentes operadores pueden tener la misma matriz de representación con respecto a una base ortonormal dada.

Ahora pensemos que, en lugar de partir de un operador simétrico cerrado y una base ortonormal contenida en su dominio, partimos de una matriz de representación $[c_{jk}]$ obtenida con respecto a una base ortonormal $(u_k)_{k=1}^{\infty}$. Como ya dijimos, pueden haber varios operadores simétricos cerrados asociados a dicha matriz de representación y dicha base ortonormal. Sin embargo, se puede determinar de manera unívoca un operador simétrico cerrado de la siguiente manera.

Sea $B : D(B) \subseteq H \to H$ el operador simétrico definido en el espacio lineal $D(B)$ generado por los elementos de la base ortonormal $(u_k)_{k=1}^{\infty}$. De tal forma que $Bu_k = Au_k$, para toda $k \geq 1$, y que se obtiene al extender linealmente los valores de la base a todo el espacio $D(B)$. Al ser B simétrico y densamente definido, se tiene que es cerrable, por lo que su operador cerradura $\overline{B}$ es un operador simétrico, cerrado y densamente definido cuya matriz de representación es $[c_{jk}]$. Además es minimal con respecto a esta propiedad.

Sea H un espacio de Hilbert separable. Consideremos una base ortonormal $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ de H y una matriz de representación $[c_{jk}]$ con respecto a esta base, de tal forma que

$$[c_{jk}] = \begin{pmatrix} q_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & q_2 & b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & q_3 & b_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & q_4 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & q_5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

con $q_n \in \mathbb{R}$ y $b_n > 0$ para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

La demostración del siguiente teorema se puede consultar en [2] pág. 99.

Teorema 3.24. *El dominio de A^* está dado por*

$$D(A^*) = \Big\{ f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} f_k \Big|^2 < \infty \Big\}.$$

Procedamos entonces a intentar caracterizar a las extensiones autoadjuntas del operador A. Para ello primero tenemos que calcular sus índices de deficiencia $d_-(A) = \dim N(A^* - \lambda I)$ y $d_+(A) = \dim N(A^* - \bar{\lambda} I)$.

Sea $f \in N(A^* - \lambda I)$. Recordemos que $f \in N(A^* - \lambda I)$ si y sólo si $f \in D(A^*)$ y $A^* f = \lambda f$. Como $f \in D(A^*) \subseteq H$ y $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ es una base ortonormal para H, f tiene una representación de la forma $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k$. De aquí que $f \in N(A^* - \lambda I)$ si y sólo si se cumple el siguiente sistema de ecuaciones dado por $A^* f = \lambda f$.

$$\begin{array}{ccccccc} q_1 f_1 & + & b_1 f_2 & & & = & \lambda f_1 \\ b_1 f_1 & + & q_2 f_2 & + & b_2 f_3 & = & \lambda f_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} f_{n-1} & + & q_n f_n & + & b_n f_{n+1} & = & \lambda f_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array} \tag{3.16}$$

Observemos que podemos encontrar una solución particular al sistema de ecuaciones anterior con el simple hecho de asignarle un valor a f_1. Pues esto automáticamente determina el resto de los valores f_n. Por ejemplo, haciendo

$f_1 = 1$. Podemos despejar f_2 de la primer ecuación y obtener $f_2 = \frac{\lambda - q_1}{b_1}$, y en general de manera recursiva obtener el resto de los coeficientes

$$f_{k+1} = \frac{\lambda - q_k}{b_k} f_k - \frac{b_{k-1}}{b_k} f_{k-1}.$$

Nótese que con esta elección de $f_1 = 1$, cada f_k es un polinomio de grado $k-1$ en la variable λ. Nombremos $P_{k-1}(\lambda) := f_k$ a cada uno de los polinomios que se obtienen tomando $f_1 = 1$. Tenemos entonces que

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\lambda) u_k$$

es una solución al sistema. Más aún, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.25. *La función f es una solución al sistema de ecuaciones anterior si y sólo si f es un múltiplo de h, es decir, si $f = \alpha h$ para alguna constante $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Demostración. De la linealidad de A se tiene que si h es solución, entonces αh es solución para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$. Ahora, para la otra implicación procedemos por inducción. Si $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k$ es solución, definamos $\alpha := f_1$ y notemos que $f_1 = \alpha \cdot 1 = \alpha P_0(\lambda)$, además

$$f_2 = \frac{\lambda - q_1}{b_1} f_1 = \frac{\lambda - q_1}{b_1} \alpha P_0(\lambda) = \alpha P_1(\lambda).$$

Ahora, para el paso inductivo, supongamos que para los primeros k coeficientes se cumple que $f_k = \alpha P_{k-1}(\lambda)$. Entonces

$$f_{k+1} = \frac{\lambda - q_k}{b_k} f_k - \frac{b_{k-1}}{b_k} f_{k-1} = \frac{\lambda - q_k}{b_k} \alpha P_{k-1}(\lambda) - \frac{b_{k-1}}{b_k} \alpha P_{k-2}(\lambda) = \alpha P_k(\lambda).$$

Por lo tanto $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha P_{k-1}(\lambda) u_k = \alpha h$. ∎

Sin embargo, para que $h \in N(A^* - \lambda I)$ aún tendría que cumplirse que $h \in D(A^*)$. Es decir, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(\lambda)|^2 < \infty.$$

Como consecuencia de lo anterior tenemos entonces dos casos. Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(\lambda)|^2 < \infty, \text{ entonces } d_+(A) = d_-(A) = 1.$$

Comentario 3.26. *En [1] se demuestra que si esto tiene lugar, entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(z)|^2 < \infty$ *para toda* $z \in \mathbb{C}$.

Y si

$$\sum_{k=1}^{\infty} |P_{k-1}(\lambda)|^2 = \text{“}+\infty\text{”}, \text{ entonces } d_+(A) = d_-(A) = 0.$$

En el caso en que $d_+(A) = d_-(A) = 0$, tenemos que A no tiene extensiones autoadjuntas en H.

En el caso en que $d_+(A) = d_-(A) = 1$, podemos dar una parametrización de todas sus extensiones simétricas en H con ayuda de la teoría de Von Neumann como sigue.

Por el Teorema 3.6, sabemos que todas las extensiones autoadjuntas de A se agotan tomando isometrías $V : N(A^* - \lambda I) \to N(A^* - \bar{\lambda} I)$. Recordemos que

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\lambda) u_k \in N(A^* - \lambda I).$$

Y de manera completamente análoga se puede ver que

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\bar{\lambda}) u_k \in N(A^* - \bar{\lambda} I).$$

Más aún, h y $\frac{\|h\|}{\|g\|} g$ tienen la misma norma. De ahí que podamos parametrizar todas las isometrías de $N(A^* - \lambda I)$ en $N(A^* - \bar{\lambda} I)$ con $w \in \mathbb{T}$, simplemente haciendo $V_w(h) = w \frac{\|h\|}{\|g\|} g$. De esta forma, considerando $w = e^{i\gamma}$, con $\gamma \in [0, 2\pi)$, tenemos que

$$D(A_{V_w}) = D(A) \dot{+} (V_w - I) N(A^* - \lambda I).$$

Donde

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} \left\langle \{ \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\lambda) u_k \} \right\rangle \dot{+} \left\langle \{ \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(\bar{\lambda}) u_k \} \right\rangle,$$

caracteriza a todas las extensiones autoadjuntas del operador de Jacobi A.

Capítulo IV

Tripletes de frontera.

4.1. Relaciones lineales.

Definición 4.1. *Una **relación lineal** en H, es un conjunto lineal T contenido en $H \oplus H$.*

De manera similar al caso de los operadores lineales, definimos el dominio, rango y el núcleo de una relación lineal como

$$\begin{aligned} D(T) &= \{x \in H \mid (x, y) \in T\}, \\ R(T) &= \{y \in H \mid (x, y) \in T\}, \\ N(T) &= \{x \in H \mid (x, 0) \in T\}. \end{aligned}$$

Además, definimos la **parte multivaluada** de T como el conjunto

$$M(T) = \{y \in H \mid (0, y) \in T\}.$$

La cerradura $\overline{T}$ de una relación lineal T no es más que su cerradura en el espacio $H \oplus H$. Se dice que T es una relación lineal cerrada si $T = \overline{T}$.

Por otro lado, definimos la inversa y el adjunto de T respectivamente como

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \{(y, x) \mid (x, y) \in T\}, \\ T^{*} &= \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \langle y, \tilde{x} \rangle = \langle x, \tilde{y} \rangle \text{ para cualesquiera } (x, y) \in T\}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que si T es un operador lineal, estos conjuntos coinciden con los definidos previamente, siempre que existan. Sin embargo, a diferencia de los operadores lineales, la inversa, cerradura y adjunto de una relación lineal siempre existen, y son también relaciones lineales.

Teorema 4.2. *Si T es una relación lineal, entonces*

(a) $(T^*)^* = \overline{T}$.

(b) $D(T)^\perp = M(T^*)$.

(c) $D(T^*)^\perp = M(\overline{T})$.

Demostración.

(a) La demostración del Teorema 1.32 para el caso de relaciones lineales, es análoga. Por lo cual la podemos usar la misma demostración que en el Teorema 1.35.

(b) Sea $\tilde{y} \in D(T)^\perp$, por definición, esto quiere decir que para toda $x \in D(T)$ se tiene que $\langle x, \tilde{y}\rangle = 0$. Lo anterior, a su vez, sucede si y sólo si para cualesquiera $(x, y) \in T$ se cumple que $\langle y, 0\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle$, pues siempre se tiene que $\langle y, 0\rangle = 0$. Esto último es equivalente a que $(0, \tilde{y}) \in T^*$, lo cual, por definición significa que $\tilde{y} \in M(T^*)$.

(c) Combinando los dos incisos anteriores tenemos que

$$D(T^*)^\perp = M((T^*)^*) = M(\overline{T}).$$

■

Dada $x \in D(T)$ se define $T(x) := \{y \in H \mid (x, y) \in T\}$. Notemos que $T(0) = \{0\}$ si y sólo si T es un operador lineal.

Además, si T es un operador que no está densamente definido, $D(T)^\perp \neq \{0\}$. Entonces por el inciso (b) del teorema anterior, $M(T^*) = D(T)^\perp \neq \{0\}$. Por lo cual T^* no puede ser un operador lineal.

Definición 4.3. *Sea T una relación lineal cerrada, definimos*

$$T_S := (\{0\} \oplus M(T))^\perp .$$

Notemos que si $(0, y) \in T_S$, entonces $y = 0$. Por lo tanto por el Teorema 1.12, T_S es un operador lineal. De hecho es un operador cerrado por ser un complemento ortogonal. A T_S se le conoce como la **parte operador de** T. De lo anterior se tiene que

$$T = T_S \oplus (\{0\} \oplus M(T)) .$$

Definición 4.4. *Sea T una relación lineal sobre un espacio de Hilbert H. Se define su **conjunto resolvente** $\rho(T)$ como el conjunto de todas las $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $(T - \lambda I)^{-1}$ tiene la misma gráfica que algún elemento en $\mathcal{B}(H)$. A este último se le conoce como el **operador resolvente** de T en λ. El espectro de T es el conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.*

Nótese que en la definición anterior $T - \lambda I$ con $\lambda \in \rho(T)$ es una relación lineal, pero no necesariamente tiene que ser un operador lineal. Por ejemplo, si $T = \{0\} \oplus H$, entonces T^{-1} es el operador nulo y $0 \in \rho(T)$.

Definición 4.5. *Una relación lineal T en un espacio de Hilbert H es una **relación simétrica** si $T \subseteq T^*$. Lo cual es equivalente a que para cualesquiera $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ se tiene que $\langle y, \tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle$.*

Definición 4.6. *Una relación lineal T en H es llamada **relación autoadjunta** si y sólo si $T = T^*$. Lo cual es equivalente a que se cumplan simultáneamente*

1. *$[T \subseteq T^*]$ Para cualesquiera $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$ se tiene que $\langle y, \tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle$.*

2. *$[T^* \subseteq T]$ Sea $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in H \oplus H$. Si para cualesquiera $(x, y) \in T$, se tiene que $\langle y, \tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{y}\rangle$. Entonces $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in T$.*

Denotemos con $\mathcal{S}(H)$ al conjunto de todos los operadores autoadjuntos $B : D(B) \subseteq H_B \to H$, con H_B conjunto lineal cerrado de H. Notemos que por definición de autoadjunto, $R(B) \subseteq H_B$ para todo $B \in \mathcal{S}(H)$. Denotemos con P_B a la proyección de H sobre H_B.

Teorema 4.7. *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de operadores $B \in \mathcal{S}(H)$ y las relaciones autoadjuntas $\mathcal{B}$ en H dadas por*

$$\mathcal{B} = B \oplus \big(\{0\} \oplus (H_B)^{\perp}\big) = \{(x, Bx + y) \mid x \in D(B), y \in (H_B)^{\perp}\} \qquad (4.1)$$

donde B es la parte operador $\mathcal{B}_S$ y $(H_B)^{\perp}$ es la parte multivaluada $M(\mathcal{B})$ de $\mathcal{B}$.

Demostración. Sea $B \in \mathcal{S}(H)$. Veamos que la relación $\mathcal{B}$ que se obtiene de (4.1) es una relación autoadjunta. Para ello primero tomemos dos elementos $(x, Bx + y), (\tilde{x}, B\tilde{x} + \tilde{y}) \in B \oplus \big(\{0\} \oplus (H_B)^{\perp}\big)$ y notemos que

$$\begin{aligned} \langle Bx + y, \tilde{x}\rangle &= \langle Bx, \tilde{x}\rangle + \langle y, \tilde{x}\rangle = \langle Bx, \tilde{x}\rangle = \langle x, B\tilde{x}\rangle \\ &= \langle x, B\tilde{x}\rangle + \langle x, \tilde{y}\rangle = \langle x, B\tilde{x} + \tilde{y}\rangle. \end{aligned}$$

Sea $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{B}^*$, es decir, que cumple que para cualesquiera $(x, Bx + y) \in \mathcal{B}$,

$$\langle Bx + y, \tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{z}\rangle.$$

En particular para $y = 0$, $\langle Bx, \tilde{x}\rangle = \langle x, \tilde{z}\rangle$ y por ser B autoadjunta, tenemos que entonces $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in B$, es decir, $\tilde{x} \in D(B)$ y $\tilde{z} = B\tilde{x}$. De ahí que $(\tilde{x}, \tilde{z}) = (\tilde{x}, B\tilde{x}) \in \mathcal{B}$.

Ahora, sea $\mathcal{B}$ una relación autoadjunta. Del Teorema 4.2 inciso (b) tenemos que $D(\mathcal{B})^{\perp} = M(\mathcal{B}^*) = M(\mathcal{B})$. Definamos $B := \mathcal{B}_S$ y $H_B := M(\mathcal{B})^{\perp}$. Entonces $D(B)^{\perp\perp} = D(\mathcal{B})^{\perp\perp} = M(\mathcal{B}^*)^{\perp} = M(\mathcal{B})^{\perp} = H_B$. De ahí que $D(B)$ sea un subespacio denso de H_B. Como $B = \mathcal{B}_S \perp \big(\{0\} \oplus M(\mathcal{B})^{\perp}\big)$, $R(B) \subseteq M(\mathcal{B})^{\perp} = H_B$. Por lo tanto B es un operador densamente definido en H_B. Por último, para ver que B es autoadjunto basta notar que para cualesquiera $x, \tilde{x} \in D(B) = D(\mathcal{B}_S) = D(\mathcal{B})$, se tiene que que $(x, Bx), (\tilde{x}, B\tilde{x}) \in \mathcal{B}$ y por ser $\mathcal{B}$ autoadjunto, $\langle B\tilde{x}, x\rangle = \langle \tilde{x}, Bx\rangle$. ∎

Observación 4.8. *Notemos que $D(B) = D(\mathcal{B})$.*

El siguiente resultado extiende la transformada de Cayley a las relaciones lineales autoadjuntas.

Teorema 4.9. *Una relación lineal $\mathcal{B}$ en H es autoadjunta si y sólo si existe un operador unitario V sobre H tal que*

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in H \oplus H \mid (V - I)y = -i(V + I)x\}. \tag{4.2}$$

El operador V queda unívocamente determinado por $\mathcal{B}$ y es llamado la transformada de Cayley de la relación lineal $\mathcal{B}$. Todo operador unitario es la transformada de Cayley de alguna relación autoadjunta $\mathcal{B}$ sobre H.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una relación autoadjunta, y sea $B = \mathcal{B}_S$ su correspondiente operador autoadjunto obtenido como en (4.1). Por el Corolario 2.31 su transformada de Cayley $V_B = (B - iI)(B + iI)^{-1}$ es un operador unitario en $H_B = D(V_B) = R(B + iI)$. Entonces el operador $V : H \to H$ tal que $Vx := (I - P_B)x + V_B P_B x$, con P_B la proyección de H sobre H_B, define un operador unitario en H. Pues coincide con el operador unitario V_B en H_B, y este último es denso. Además, por el teorema anterior, cualesquiera $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{B}$ se pueden escribir como $\tilde{x} = x \in D(B) = R(V_B - I)$ y $\tilde{y} = Bx + y$ con $y \in (H_B)^{\perp}$. Como $x \in D(B)$, éste se puede escribir de la forma $x = (V_B - I)x_0$ con $x_0 \in D(V_B) = H_B$, de donde $Bx = -i(V_B + I)x_0$. De todo esto se obtiene que

$$\begin{aligned}
(V - I)\tilde{y} &= (V_B - I)P_B\tilde{y} = (V_B - I)Bx = (V_B - I)(-i(V_B + I)x_0) \\
&= (V_B - I)(-iV_B x_0 - ix_0) = -iV_B V_B x_0 - iV_B x_0 + iV_B x_0 + ix_0 \\
&= -iV_B V_B x_0 + ix_0. \\
-i(V + I)\tilde{x} &= -iVx - ix = -iV_B x - iV_B x_0 + ix_0 \\
&= -iV_B(V_B x_0 - x_0) - iV_B x_0 + ix_0 \\
&= -iV_B V_B x_0 + iV_B x_0 - iV_B x_0 + ix_0 \\
&= -iV_B V_B x_0 + ix_0.
\end{aligned}$$

Por lo que (4.2) se satisface.

De igual manera, notemos que cada operador V que satisface (4.2) actúa como la identidad en $R(I - P_B)$ y como la transformada de Cayley V_B en H_B. Por lo que V queda unívocamente determinado por $\mathcal{B}$.

Ahora, sea V un operador unitario en H. Consideremos el subespacio $H_B := N(V - I)^{\perp}$, y sea $V_0 = V \restriction_{H_B}$. Notemos que $N(V_0 - I) = \{0\}$, por el Corolario 2.32, V_0 es la transformada de Cayley de un operador autoadjunto $B = -i(V_0 + I)(V_0 - I)^{-1}$. Entonces la relación lineal $\mathcal{B}$ definida en (4.1) es autoadjunta por el Teorema 4.7. Por lo tanto se obtiene (4.2). ■

4.2. Tripletes de Frontera para Adjuntos de Operadores Simétricos.

A lo largo de toda esta sección, T denota a un operador simétrico densamente definido en un espacio de Hilbert H. Además, dada $\lambda \in \mathbb{C}$, denotaremos con N_λ al conjunto

$$N_\lambda = N(T^* - \lambda I).$$

Definición 4.10. *Un* ***triplete de frontera*** *para T^* es una terna ordenada (K, Γ_0, Γ_1) que consiste de un espacio de Hilbert $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ y dos funciones $\Gamma_0, \Gamma_1 : D(T^*) \subseteq H \to K$, tales que para cualesquiera $x, y \in D(T^*)$*

(I) $[x, y]_{T^*} \equiv \langle T^*x, y\rangle - \langle x, T^*y\rangle = \langle \Gamma_1 x, \Gamma_0 y\rangle_K - \langle \Gamma_0 x, \Gamma_1 y\rangle_K$

(II) El mapeo de $D(T^*) \subseteq H$ en $K \oplus K$, tal que $x \mapsto (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$, es suprayectivo.

Definamos $\Gamma_+ := \Gamma_1 + i\Gamma_0$ y $\Gamma_- := \Gamma_1 - i\Gamma_0$. Entonces la primera condición de la definición anterior es equivalente a que para cualesquiera $x, y \in D(T^*)$,

$$2i[x, y]_{T^*} = \langle \Gamma_- x, \Gamma_- y\rangle_K - \langle \Gamma_+ x, \Gamma_+ y\rangle_K. \tag{4.3}$$

Algunas veces es conveniente usar la siguiente reformulación de la Definición 4.10.

Definición 4.11. *Si Γ_+ y Γ_- son mapeos lineales de $D(T^*)$ a un espacio de Hilbert $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ tales que (4.3) se satisface y el mapeo de $D(T^*)$ en $K \oplus K$, con $x \mapsto (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$, es suprayectivo. Entonces (K, Γ_0, Γ_1) es un triplete de frontera para T^*. Donde*

$$\Gamma_1 := (\Gamma_+ + \Gamma_-)/2 \quad y \quad \Gamma_0 := (\Gamma_+ - \Gamma_-)/2i \tag{4.4}$$

En este caso también llamaremos a (K, Γ_+, Γ_-) un triplete de frontera para T^*.

Ejemplo 4.12. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *y sea* $T = -i\frac{d}{dx}$ *un operador simétrico con* $D(T) = H_0^1(a, b)$.

Usando integración por partes tenemos que

$$i[f, g]_{T^*} = f(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g(a)}. \tag{4.5}$$

O equivalentemente

$$2i[f, g]_{T^*} = 2f(b)\overline{g(b)} - 2f(a)\overline{g(a)}. \tag{4.6}$$

Por lo tanto el triplete

$$K = \mathbb{C}, \qquad \Gamma_+ f = \sqrt{2}\, f(a), \qquad \Gamma_- f = \sqrt{2}\, f(b)$$

es un triplete de frontera para T^*. La segunda condición en la Definición 4.10 claramente se satisface, ya que $D(T^*) = H^1(a, b)$. Lo cual implica que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ podemos encontrar $h \in D(T^*) = H^1(a, b)$ tal que $h(a) = \alpha$ y $h(b) = \beta$.

Definición 4.13. *Un operador cerrado* S *en* H *es una* ***extensión propia*** *de* T *si*

$$T \subseteq S \subseteq T^*.$$

Supongamos que (K, Γ_0, Γ_1) es un triplete de frontera para T^*. Probaremos que éste da lugar a una parametrización natural del conjunto de extensiones propias de T en términos de relaciones lineales cerradas $\mathcal{B}$ en K. En particular, las extensiones autoadjuntas del operador simétrico T en H podrán ser descritas en términos de las relaciones autoadjuntas en K.

Sea $\mathcal{B}$ una relación lineal en K, es decir, $\mathcal{B}$ es un subconjunto lineal de $K \oplus K$. Denotamos con $T_{\mathcal{B}}$ a las restricción de T^* al dominio

$$D(T_{\mathcal{B}}) := \{x \in D(T^*) \mid (\Gamma_0\, x, \Gamma_1\, x) \in \mathcal{B}\} \subseteq D(T^*). \tag{4.7}$$

Si $\mathcal{B}$ es la gráfica de un operador B en K, entonces el requisito $(\Gamma_0\, x, \Gamma_1\, x) \in \mathcal{B}$ se convierte en que $\Gamma_1\, x = B\Gamma_0\, x$, es decir, $\Gamma_1\, x - B\Gamma_0\, x = 0$, y entonces

$$D(T_{\mathcal{B}}) = N(\Gamma_1 - B\Gamma_0). \tag{4.8}$$

Si S es un operador lineal tal que $T \subseteq S \subseteq T^*$, definimos su **espacio frontera** como

$$\mathcal{F}(S) = \{(\Gamma_0\, x, \Gamma_1\, x) \in K \oplus K \mid x \in D(S)\} \subseteq K \oplus K. \tag{4.9}$$

De la segunda condición en la definición 4.10, se sigue que $\mathcal{F}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ para cualquier relación lineal $\mathcal{B}$ en K. También notemos que si $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$, entonces $T_{\mathcal{B}_1} = T_{\mathcal{B}_2}$ y que $S \subseteq T_{\mathcal{F}(S)}$.

Lema 4.14. *Sea $\mathcal{B}$ una relación lineal en K, y sea S un operador lineal en H tal que $T \subseteq S \subseteq T^*$ y $\mathcal{F}(S) = \mathcal{B}$. Entonces se cumple que:*

(a) $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$.

(b) $\overline{S} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$.

(c) Si S es cerrado, entonces $\mathcal{F}(S) = \mathcal{B}$ es cerrado.

(d) $\overline{T} = T_{\{(0,0)\}}$, *es decir,* $D(\overline{T}) = \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0\, x = \Gamma_1\, x = 0\}$.

Demostración.

(a) Notemos que $T \subseteq S \subseteq T^*$ implica que $\overline{T} = T^{**} \subseteq S^* \subseteq T^*$. Entonces un vector $y \in D(T^*)$ está en $D(S^*)$ si y sólo si para cada $x \in D(S) \subseteq D(S^*) \subseteq D(T^*)$ se tiene que

$$\langle T^* x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle.$$

O de manera equivalente, de la Definición 4.10 (i)

$$\langle \Gamma_0\, x, \Gamma_1\, y\rangle = \langle \Gamma_1\, x, \Gamma_0\, y\rangle$$

para toda $x \in D(S)$. Es decir, $\langle \tilde{x}, \Gamma_1\, y\rangle = \langle \tilde{y}, \Gamma_0\, y\rangle$ para cualquier $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{F}(S) = \mathcal{B}$. Por definición de relación autoadjunta, esto último es equivalente a que $(\Gamma_0\, y, \Gamma_1\, y) \in \mathcal{B}^*$, y por lo tanto por el Teorema 4.2 inciso (c) se tiene $y \in D(T_{\mathcal{B}^*})$. Entonces hemos probado que $D(S^*) = D(T_{\mathcal{B}^*})$ y como ambos operadores son restricciones de T^* tenemos que $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$.

(b) Por el inciso anterior tenemos que $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$. Entonces $\mathcal{F}(S^*) = \mathcal{T}_{\mathcal{B}^*} = \mathcal{B}^*$. Nuevamente aplicando el inciso anterior a S^* y $\mathcal{B}^*$, tenemos que $S^{**} = T_{\mathcal{B}^{**}}$. Usando el que $\mathcal{B}^{**} = \overline{\mathcal{B}}$, concluimos que $\overline{S} = S^{**} = T_{\mathcal{B}^{**}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$.

(c) Supongamos que S es cerrado. Entonces usando el inciso anterior tenemos que $S \subseteq T_{\mathcal{F}(S)} = T_{\mathcal{B}} \subseteq T_{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{S} = S$. Así que $T_{\mathcal{B}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$. Por la Definición 4.10 (ii) y por (4.7), tenemos que $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$.

(d) Definamos $\mathcal{B} := K \oplus K$. Entonces $\mathcal{B}^* = \{(0,0)\}$ y $T_{\mathcal{B}} = T^*$. De la Definición 4.10 (ii) tenemos que $\mathcal{F}(T^*) = \mathcal{B}$, y como $\mathcal{F}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{F}(T^*)$, por el inciso (a) se obtiene

$$\overline{T} = T^{**} = (T_{\mathcal{B}})^* = T_{\mathcal{B}^*} = T_{\{(0,0)\}}.$$

■

Proposición 4.15. *Existe una correspondencia uno a uno entre la colección de todas las relaciones lineales cerradas $\mathcal{B}$ en K y la colección de todas las extensiones propias S de T, la cual está dada por $\mathcal{B} \leftrightarrow T_{\mathcal{B}}$. Más aún, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$ son relaciones cerradas en K, se tiene que*

(a) $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \Leftrightarrow T_{\mathcal{B}_0} \subseteq T_{\mathcal{B}_1}$.

(b) $T_{\mathcal{B}}$ *es simétrica* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ *es simétrica.*

(c) $T_{\mathcal{B}}$ *es autoadjunta* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ *es autoadjunta.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una relación cerrada, entonces $T_{\mathcal{B}}$ es cerrado por el Lema 4.14 inciso (b) aplicado a $S = T_{\mathcal{B}}$. Pues se tendría que

$$\overline{T_{\mathcal{B}}} = T_{\overline{\mathcal{B}}} = T_{\mathcal{B}}.$$

Si S es un operador cerrado y $T \subseteq S \subseteq T^*$, entonces $\mathcal{F}(S)$ es cerrado y $S = \overline{S} = T_{\overline{\mathcal{F}(S)}} = T_{\mathcal{F}(S)}$ por el Lema 4.14 incisos (b) y (c) respectivamente. Lo cual nos asegura la correspondencia uno a uno.

(a) Se sigue de (4.7) y del hecho de que $\mathcal{F}(T_{\mathcal{B}_0}) = \mathcal{B}_0$ y $\mathcal{F}(T_{\mathcal{B}_1}) = \mathcal{B}_1$.

(b) Claramente $T_{\mathcal{B}}$ es simétrico si y sólo si $T_{\mathcal{B}} \subseteq (T_{\mathcal{B}})^* = T_{\mathcal{B}^*}$ por el Lema 4.14 inciso (a). O equivalentemente por el inciso anterior, si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$, es decir, si $\mathcal{B}$ es simétrico.

(c) $T_{\mathcal{B}}$ es autoadjunto si y sólo si $T_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}^*}$, es decir, si y sólo si $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, por el inciso (a).

■

Todo triplete de frontera determina dos extensiones autoadjuntas distinguidas de T.

Corolario 4.16. *Si* (K, Γ_0, Γ_1) *es un triplete de frontera para* T^**, entonces existen extensiones autoadjuntas* T_0 *y* T_1 *del operador simétrico* T *en* H *definidas por* $D(T_0) = N(\Gamma_0)$ *y* $D(T_1) = N(\Gamma_1)$*.*

Demostración. Claramente $\mathcal{B}_0 = \{0\} \oplus K$ y $\mathcal{B}_1 = K \oplus \{0\}$ son relaciones autoadjuntas. De ahí que $T_0 = T_{\mathcal{B}_0}$ y $T_1 = T_{\mathcal{B}_1}$ son operadores autoadjuntos por la Proposición 4.15 inciso (c). Pero $D(T_1) = D(T_{\mathcal{B}_1}) = N(\Gamma_1 - B\,\Gamma_0) = N(\Gamma_1)$. Y de manera similar, $D(T_0) = N(\Gamma_0)$. ■

Recordemos que $\mathcal{S}(K)$ denota al conjunto de todos los operadores autoadjuntos B que actúan en un subespacio cerrado K_B en K, y P_B es la proyección ortogonal sobre K_B.

Motivados por lo discutido a lo largo de este capítulo, para cada $B \in \mathcal{S}(K)$, podemos definir a T_B como la restricción de T^* al dominio

$$D(T_B) := \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0\, x \in D(B) \text{ y } B\,\Gamma_0\, x = P_B\,\Gamma_1\, x\}. \tag{4.10}$$

Es decir, un vector $x \in D(T^*)$ está en $D(T_B)$ si y sólo si existen vectores $u \in D(B)$ y $v \in (K_B)^\perp$ tales que $\Gamma_0\, x = u$ y $\Gamma_1\, x = Bu + v$.

Si $\mathcal{B}$ es una relación autoadjunta con parte operador $\mathcal{B}_S = B$ y parte multivaluada $M(\mathcal{B}) = (K_B)^\perp$, por el Teorema 4.7, podemos concluir que $T_B = T_{\mathcal{B}}$ al comparar las definiciones (4.7) y (4.10). Este hecho será usado frecuentemente en lo que sigue.

La Proposición 4.15 da una descripción completa de las extensiones autoadjuntas de T en términos de las relaciones autoadjuntas en K, o equivalentemente, de operadores de $\mathcal{S}(K)$.

Ahora desarrollaremos otra parametrización de extensiones autoadjuntas basada en operadores unitarios.

Definición 4.17. *Si* V *es un operador unitario en* K*, denotemos con* T^V *a la restricción de* T^* *al siguiente conjunto*

$$D(T^V) := \{x \in D(T^*) \mid V\,\Gamma_+\, x = \Gamma_-\, x\} \subseteq D(T^*). \tag{4.11}$$

Por el Lema 4.14 inciso (d), los operadores T^V y $T_B = T_{\mathcal{B}}$ definidos en (4.7) y (4.10), son extensiones de $\overline{T}$.

Teorema 4.18. *Supongamos que* (K, Γ_0, Γ_1) *es un triplete de frontera para* T^**. Para cualquier operador* S *en* H*, son equivalentes:*

(I) *S es una extensión autoadjunta de T en H.*

(II) *Existe una relación lineal autoadjunta $\mathcal{B}$ en K tal que $S = T_{\mathcal{B}}$ (o equivalentemente, existe un operador $B \in \mathcal{S}(K)$ tal que $S = T_B$).*

(III) *Existe un operador unitario V en K tal que $S = T^V$.*

La relación $\mathcal{B}$ y los operadores V y B quedan unívocamente determinados por S.

Demostración.

(I) $\Leftrightarrow$ (II)
Esta equivalencia nos la da la Proposición 4.15. Recordemos que $\mathcal{B}$ está unívocamente determinado por el operador $T_{\mathcal{B}}$, ya que $\mathcal{F}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$.

(II) $\Rightarrow$ (III)
Sea $\mathcal{B}$ una relación autoadjunta, y sea $V_{\mathcal{B}}$ su transformada de Cayley, como en el Teorema 4.9. Usando las fórmulas (4.4), (4.2) y (4.11) uno puede verificar que cualquier vector $x \in D(T^*)$ satisface $(\Gamma_0\, x, \Gamma_1\, x) \in \mathcal{B}$ si y sólo si $V_{\mathcal{B}} \Gamma_+ \, x = \Gamma_- \, x$. Por lo tanto $T_{\mathcal{B}} = T^{V_{\mathcal{B}}}$.

(III) $\Rightarrow$ (II)
Sea V un operador unitario en K. Por el Teorema 4.9 existe una relación autoadjunta $\mathcal{B}$ con transformada de Cayley V. De la implicación anterior tenemos que $T_{\mathcal{B}} = T^V$. De (4.11) y la Definición 4.10 (ii) se sigue que el operador V queda unívocamente determinado por S.

■

Lema 4.19. *Sea* (K, Γ_0, Γ_1) *un triplete de frontera para* T^**. Sean* T_0 *la extensión autoadjunta de* T *determinada por* $D(T_0) = N(\Gamma_0)$ *y* $N_\lambda = N(T^* - \lambda I)$*. Entonces:*

(a) *$\Gamma_0, \Gamma_1 : D(T^*) \to K$ son mapeos continuos.*

(b) *Para cada $\lambda \in \rho(T_0)$, Γ_0 es un mapeo biyectivo continuo de N_λ en K.*

Demostración.

(a) Por el Teorema de la Gráfica Cerrada es suficiente probar que el mapeo (Γ_0, Γ_1) del espacio de Hilbert $(D(T^*), \|\cdot\|_{T^*})$ en el espacio de Hilbert $K \oplus K$ es cerrado.

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge al vector 0 en $(D(T^*), \|\cdot\|_{T^*})$, tal que la sucesión $((\Gamma_0\, x_n, \Gamma_1\, x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge en $K \oplus K$, es decir $\lim_{n\to\infty} (\Gamma_0\, x_n, \Gamma_1\, x_n) = (u, v)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\langle v, \Gamma_0\, y\rangle_K - \langle u, \Gamma_1\, y\rangle_K &= \lim_{n\to\infty} [\langle \Gamma_1\, x_n, \Gamma_0\, y\rangle_K - \langle \Gamma_0\, x_n, \Gamma_1\, y\rangle_K] \\ &= \lim_{n\to\infty} [\langle T^* x_n, y\rangle - \langle x_n, T^* y\rangle] = 0.\end{aligned}$$

De ahí que $\langle v, \Gamma_0\, y\rangle_K = \langle u, \Gamma_1\, y\rangle_K$ para toda $y \in D(T^*)$. Por la Definición 4.10 (ii), existen vectores $y_0, y_1 \in D(T^*)$ tales que $\Gamma_0\, y_0 = v$, $\Gamma_1\, y_0 = 0$ y $\Gamma_1\, y_1 = u$. Al agregar esos elementos, concluimos que $u = v = 0$. Por lo tanto (Γ_0, Γ_1) es cerrado.

(b) Recordemos que $D(T^*) = D(T_0) \dotplus N_\lambda$, como consecuencia de los Teoremas 3.4 y 3.6. Como $\Gamma_0(D(T^*)) = K$ por la Definición 4.10 (ii), y $\Gamma_0(D(T_0)) = \{0\}$ por la definición de T_0, Γ_0 mapea a N_λ en K. Si $x \in N_\lambda$ y $\Gamma_0\, x = 0$, entonces $x \in D(T_0) \cap N_\lambda$ y $x = 0$, ya que $D(T_0) \dotplus N_\lambda$ es una suma directa. Lo anterior prueba que $\Gamma_0 : N_\lambda \to K$ es biyectiva. Para ver que es continua, notemos que en N_λ la norma $\|\cdot\|_{T^*}$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|$ del espacio de Hilbert H. De aquí que, por el inciso anterior, el mapeo biyectivo $\Gamma_0 : N_\lambda \to K$ es continuo.

■

El siguiente teorema nos dice cuándo se puede garantizar la existencia de un triplete de frontera para T^*.

Teorema 4.20. *Existe un triplete de frontera para T^* si y sólo si el operador simétrico T tiene índices de deficiencia iguales. En tal caso $d_+(T) = \dim(K) = d_-(T)$.*

Demostración. Sea (K, Γ_0, Γ_1) un triplete de frontera para T^*. Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$. De esta forma, por el Lema 4.19, Γ_0 es un isomorfismo topológico de N_λ en K (también lo es de $N_{\bar{\lambda}}$ en K). Entonces $d_+(T) = \dim K = d_-(T)$.

Por otro lado, si T un operador simétrico con índices de deficiencia $d_+(T) = d_-(T)$. Por el Teorema 3.3, todo elemento $x \in D(T^*)$ se puede ver como $x = x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}$ donde $x_0 \in D(\bar{T})$, $x_\lambda \in N_\lambda$ y $x_{\bar{\lambda}} \in N_{\bar{\lambda}}$ están unívocamente determinadas por x. Definamos los operadores $Q_\lambda(x) := x_\lambda$ y $Q_{\bar{\lambda}}(x) := x_{\bar{\lambda}}$. Como $d_+(T) = d_-(T)$, existe un mapeo isométrico W de N_λ en $N_{\bar{\lambda}}$. Definamos

$$K := N_{\bar{\lambda}} \quad \Gamma_+ = 2\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, W Q_\lambda \quad \Gamma_- = 2\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, Q_{\bar{\lambda}}.$$

Probaremos que (K, Γ_+, Γ_-) es un triplete de frontera para T^*. Para ello sean $x = x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}$ y $y = y_0 + y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}$ vectores en $D(T^*)$, donde $x_0, y_0 \in D(\bar{T})$; $x_\lambda, y_\lambda \in N_\lambda$ y $x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}} \in N_{\bar{\lambda}}$. Notemos entonces que

$$[x_0 + x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}, y_0 + y_\lambda + y_{\bar{\lambda}}]_{T^*} = 2\operatorname{Im}(\lambda) i\, \langle x_\lambda, y_\lambda \rangle - 2\operatorname{Im}(\lambda) i\, \langle x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}} \rangle.$$

Usando esto, y el hecho de que W es isométrico, obtenemos

$$\begin{aligned} 2i[x,y]_{T^*} &= 4\operatorname{Im}(\lambda)\langle x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}\rangle - 4\operatorname{Im}(\lambda)\langle x_\lambda, y_\lambda\rangle \\ &= 4\operatorname{Im}(\lambda)\langle x_{\bar{\lambda}}, y_{\bar{\lambda}}\rangle - 4\operatorname{Im}(\lambda)\langle W x_\lambda, W y_\lambda\rangle \\ &= \langle \Gamma_- x, \Gamma_- y\rangle_K - \langle \Gamma_+ x, \Gamma_+ y\rangle_K. \end{aligned}$$

Es decir, se satisface (4.3). Dadas $z_1, z_2 \in K$, hagamos $x = z_1 + W^{-1} z_2$. Entonces $\Gamma_+ x = 2\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, z_2$ y $\Gamma_- x = 2\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, z_1$, de donde se obtiene la condición de suprayectividad. ■

Si V es un operador unitario en K, entonces $U := -VW$ es una isometría de N_λ en $N_{\bar{\lambda}}$, y el operador T^V definido en (4.11) es simplemente el operador T_V del Teorema 3.6. Éso significa, por ejemplo, que la equivalencia (I) $\Leftrightarrow$ (III) en el Teorema 4.18 es sólo una reformulación del Teorema 3.6.

De igual forma, si $\tilde{W}$ denota a un mapeo isométrico de $N_{\bar{\lambda}}$ en N_λ, entonces el triplete

$$K = N_\lambda, \quad \Gamma_+ = 2\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, Q_\lambda, \quad \Gamma_- = 2\tilde{W}\sqrt{\operatorname{Im}(\lambda)}\, Q_{\bar{\lambda}},$$

es un triplete de frontera para T^*.

Si los índices de deficiencia son iguales a $d \in \mathbb{N}$ finito, entonces por el Teorema 4.20, existe un triplete de frontera, y el producto interior de la Definición 4.10 (I) se puede ver de la forma que se describe a continuación.

Existen funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_d, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_d$ con $d \in \mathbb{N}$ definidos sobre $D(T^*)$ tales que para cualesquiera $x, y \in D(T^*)$

$$[x, y]_{T^*} = \sum_{k=1}^{d} \left(\psi_k(x)\overline{\varphi_k(y)} - \varphi_k(x)\overline{\psi_k(y)} \right) \tag{4.12}$$

y

$$\{(\varphi(x), \psi(x)) \mid x \in D(T^*)\} = \mathbb{C}^{2d}, \tag{4.13}$$

donde $\varphi(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_d(x))$ y $\psi(x) := (\psi_1(x), \ldots, \psi_d(x))$.

Claramente existe un triplete de frontera (K, Γ_0, Γ_1) para T^* definido por

$$K = \mathbb{C}^d, \qquad \Gamma_0\, x = \varphi(x), \qquad \Gamma_1\, x = \psi(x). \tag{4.14}$$

Sea $B \in \mathcal{S}(K)$. Tomemos una base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de K_B y una base $\{\tilde{e}_{n+1}, \ldots, \tilde{e}_d\}$ del espacio $(K_B)^{\perp}$. Como B es un operador autoadjunto en K_B, existe una matriz hermitiana $B = [b_{kl}]$ de $n \times n$, tal que $Be_l = \sum_{k=1}^{n} b_{kl}\, e_k$.

Obviamente $P_B\, \Gamma_1\, x = \sum_{k=1}^{n} \langle \Gamma_1\, x, e_k \rangle e_k$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno estándar de $\mathbb{C}^d$. Si $\Gamma_0\, x \in K_B$ entonces tenemos

$$B\, \Gamma_0\, x = \sum_{l} \langle \Gamma_0\, x, e_l \rangle B e_l = \sum_{k,l} \langle \Gamma_0\, x, e_l \rangle b_{kl}\, e_k.$$

Recordemos que por el Teorema 4.10, un vector $x \in D(T^*)$ está en $D(T_B)$ si y sólo si $\Gamma_0\, x \in D(B)$ y $P_B \Gamma_1\, x = B\Gamma_1\, x$. Por lo tanto $x \in D(T^*)$ está en $D(T_B)$ si y sólo si

$$\langle \Gamma_0\, x, \tilde{e}_j \rangle = 0 \qquad j \in \{n+1, \ldots, d\},$$

$$\langle \Gamma_1\, x, \tilde{e}_k \rangle = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} \langle \Gamma_0\, x\,, e_l \rangle \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Esto da una descripción explícita de los vectores del dominio $D(T_B)$ con d ecuaciones lineales. Discutiremos dos de los casos más simples, que son cuando $d = 1$ y $d = 2$.

Ejemplo 4.21. $(d = 1)$

Primero, sea $n = 1$. Una matriz Hermitiana de 1×1 es simplemente un número real B, y el operador T_B está determinado por la condición de frontera $B\,\Gamma_0\, x = \Gamma_1\, x$. Si $n = 0$, entonces B actúa en el espacio $\{0\}$, y de aquí que T_B esté definida por la condición $\Gamma_0\, x = 0$. Si interpretamos esto último como $B\,\Gamma_0\, x = \Gamma_1\, x$ en el caso $B = \infty$, entonces los dominios de todas las extensiones autoadjuntas T_B de T en H están caracterizadas por las condiciones de frontera

$$B\,\Gamma_0\, x = \Gamma_1\, x, \qquad B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Escribiendo $B = \cot(\alpha)$, podemos obtener otra parametrización útil de las extensiones autoadjuntas de T, la cual está dada por

$$\Gamma_0\, x\, \cos(\alpha) = \Gamma_1\, x\, \operatorname{sen}(\alpha), \qquad \alpha \in [0, \pi).$$

Ejemplo 4.22. $(d = 2)$

Sea $B \in \mathcal{S}(K)$. El operador B puede actuar en un subespacio de dimensión 2, 1 o 0 en el espacio de Hilbert $K = \mathbb{C}^2$. Es decir, tenemos los siguientes tres posibles casos.

Caso 1 $(K_B = K)$**.**
Aquí B corresponde a una matriz Hermitiana de 2×2, así que la relación $P_B\,\Gamma_1\, x = B\,\Gamma_0\, x$ nos dice que

$$\psi_1(x) = b_1\varphi_1(x) + c\varphi_2(x), \qquad \psi_2(x) = \bar{c}\varphi_1(x) + b_2\varphi_2(x), \tag{4.15}$$

con parámetros $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$.

Caso 2 $(\dim K_B = 1)$**.**
Sea $P_B = e \otimes e$ con $e = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ un vector unitario. Entonces $\Gamma_0\, x \in D(B) = \mathbb{C} \cdot e$ es equivalente a $\Gamma_0\, x \perp (\beta, -\alpha)$, es decir, $\varphi_1(x)\beta = \varphi_2(x)\alpha$. Más aún, la relación $P_B\,\Gamma_1 x = B\,\Gamma_0 x$ significa que

$$\psi_1(x)\bar{\alpha}\alpha + \psi_2(x)\bar{\beta}\alpha = B\varphi_1(x), \qquad \psi_1(x)\bar{\alpha}\beta + \psi_2(x)\bar{\beta}\beta = B\varphi_2(x).$$

Tomando $c := \beta\alpha^{-1}$ y $b_1 := B|\alpha|^{-2}$ si $\alpha \neq 0$ y $b_1 := B$ si $\alpha = 0$. En ambos casos las ecuaciones anteriores son equivalentes a

$$\psi_1(x) = b_1\varphi(x) - \bar{c}\psi_2(x), \qquad \varphi_2(x) = c\varphi_1(x), \tag{4.16}$$

$$\psi_2(x) = b_1\varphi_2(x) \qquad \varphi_1(x) = 0, \tag{4.17}$$

respectivamente.

Caso 3 $(\dim K_B = \{0\})$**.**
Entonces el dominio de T_B está definido por la condición $\Gamma_0\, x = 0$, es decir,

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0. \tag{4.18}$$

Por el Teorema 4.18, las extensiones autoadjuntas de T son los operadores T_B con $B \in \mathcal{S}(K)$. Como $T_B \subseteq T^*$, basta describir los dominios de esos operadores.

En resumen, los dominios de todas las extensiones autoadjuntas del operador T son los conformados por todas aquellas $x \in D(T^*)$ que satisfacen alguna de las condiciones de frontera (4.15) - (4.18), donde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$ son fijos. Aquí, parámetros y condiciones de frontera diferentes corresponden a extensiones autoadjuntas diferentes.

La subclase de las extensiones autoadjuntas de T donde $c = 0$ en la ecuaciones anteriores, se puede describir como

$$\psi_1(x) = \beta_1\varphi_1(x), \qquad \psi_2(x) = \beta_2\varphi_2(x), \qquad \text{donde} \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Al igual que en el Ejemplo 4.21, la relación $\psi_j(x) = \beta_j\varphi_j(x)$ con $\beta_j = \infty$ significa que $\varphi_j(x) = 0$. Esta subclase también se puede parametrizar con $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi)$ y las ecuaciones

$$\varphi_1(x)\cos(\alpha_1) = \psi_1(x)\,\mathrm{sen}(\alpha_1), \quad \varphi_2(x)\cos(\alpha_2) = -\psi_2(x)\,\mathrm{sen}(\alpha_2). \tag{4.19}$$

Ejemplos.

4.2.1. Operador $-i\frac{d}{dx}$ en $H_0^1(a,b) \subset L^2(a,b)$.

Retomemos el ejemplo 4.12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y sea $T = -i\frac{d}{dx}$ un operador simétrico con $D(T) = H_0^1(a,b)$. Por el Teorema 4.18 tenemos que las extensiones autoadjuntas del operador $T = -i\frac{d}{dx}$ en $D(T) = H_0^1(a,b)$ son los operadores $T^V = -i\frac{d}{dx}$ con dominios

$$D(T^V) = \{f \in H^1(a,b) : f(b) = zf(a)\},$$

donde $z \in \mathbb{T}$.

4.2.2. Operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ en $H_0^2(a,b) \subset L^2(a,b)$.

Sea $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ un operador simétrico en $D(T) = H_0^2(a,b)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Usando integración por partes tenemos que

$$[f,g]_{T^*} = f(b)\overline{g'(b)} - f'(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g'(a)} + f'(a)\overline{g(a)}. \tag{4.20}$$

Por lo que se puede definir un triplete de frontera para T^* por

$$K = \mathbb{C}^2 \qquad \Gamma_0 f = (f(a), f(b)) \qquad \Gamma_1 f = (f'(a), -f'(b)).$$

Entonces las condiciones (4.12) y (4.13) se satisfacen, y el triplete de frontera arriba mencionado es de la forma (4.14), donde

$$d = 2, \quad \varphi_1(f) = f(a), \quad \varphi_2(f) = f(b), \quad \psi_1(f) = f'(a), \quad \psi_2(f) = -f'(b).$$

Como se vió anteriormente el conjunto de todas las extensiones autoadjuntas de T es descrito por las siguientes cuatro familias de condiciones de frontera:

$$f'(a) = b_1 f(a) + cf(b), \qquad f'(b) = -\bar{c}f(a) - b_2 f(b). \tag{4.21}$$

$$f'(a) = b_1 f(a) + \bar{c}f'(b), \qquad f(b) = cf(a). \tag{4.22}$$

$$f'(b) = -b_1 f(b), \qquad f(a) = 0. \tag{4.23}$$

$$f(a) = f(b) = 0. \tag{4.24}$$

Donde $c \in \mathbb{C}$ y $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ son parámetros arbitrarios.

Las extensiones autoadjuntas T_0 y T_1 definidas por el Corolario 4.16 están dadas por las condiciones de frontera $f(a) = f(b) = 0$ y las condiciones de frontera $f'(a) = f'(b) = 0$ respectivamente.

En este ejemplo la subclase de extensiones autoadjuntas está caracterizada por las condiciones de frontera:

$$f(a)\cos(\alpha_1) = f'(a)\operatorname{sen}(\alpha_1), \qquad f(b)\cos(\alpha_2) = f'(b)\operatorname{sen}(\alpha_2).$$

Donde $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \pi)$.

4.2.3. Operador $-\frac{d^2}{dx^2}$ en $H_0^2(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$.

Consideremos el operador simétrico $T = -\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $D(T) = H_0^2(0,\infty)$ en $H = L^2(0,\infty)$.

Usando integración por partes tenemos que

$$[f, g]_{T^*} = -f(0)\overline{g'(0)} + f'(0)\overline{g(0)}.$$

Entonces lo explicado en la última sección se satisface con $d = 1$, $\varphi(f) = f(0)$ y $\psi(f) = f'(0)$, así que existe un triplete de frontera para el operador T^*, dado por

$$K = \mathbb{C}, \qquad \Gamma_0 f = f(0), \qquad \Gamma_1 f = f'(0).$$

Por el Ejemplo 4.21, las extensiones autoadjuntas de T están parametrizadas por $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, y el correspondiente operador T_B está definido por la condición de frontera

$$Bf(0) = f'(0), \qquad B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \tag{4.25}$$

El caso $B = \infty$ genera la extensión T_0 de T, la cual está dada por la condición $\Gamma_0 f = f(0) = 0$.

De igual manera, se pudo haber tomado $\varphi(f) = -f'(0)$ y $\psi(f) = f(0)$. En este caso se obtiene la extensión T_1 de T.

4.2.4. Operador de Jacobi.

Retomando el Operador de Jacobi A del Ejemplo 3.3.3, asociado a la matriz (3.15). Teníamos que si $d_+(A) = 0 = d_-(A)$, entonces A no tenía extensiones autoadjuntas.

En el caso en que $d_+(A) = 1 = d_-(A)$, podemos aplicar la teoría de tripletes de frontera. Para ello, definamos los polinomios de primer y segundo género asociados a la matriz de Jacobi (3.15). Consideremos las ecuaciones en recurrencia

$$q_1\varphi_1 + b_1\varphi_2 = z\varphi_1, \tag{4.26}$$

$$b_{n-1}\varphi_{n-1} + q_n\varphi_n + b_n\varphi_{n+1} = z\varphi_n. \tag{4.27}$$

Notemos que al elegir φ_1 y φ_2 el resto de los valores para las φ_k quedan determinados, ya que de (4.27) se tiene que

$$\varphi_{n+1} = \frac{(z-q_n)\varphi_n - b_{n-1}\varphi_{n-1}}{b_n}$$

Si consideramos las condiciones iniciales $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \frac{z-q_1}{b_1}$, entonces tenemos que cada $P_{k-1}(z) := \varphi_k$ es un polinomio en z de grado $k-1$, al cual se le conoce como polinomio de primer género. Llamamos $p(z)$ a la sucesión formada con dichos polinomios, es decir

$$p(z) := (P_{k-1}(z))_{k=1}^{\infty}.$$

De manera análoga, al considerar las condiciones iniciales $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{1}{b_1}$, tenemos que cada $Q_{k-1}(z) := \varphi_k$ es un polinomio en z de grado $k-2$, al cual se le conoce como polinomio de segundo género. Al igual que en el caso anterior, llamamos $q(z)$ a la sucesión formada con tales polinomios, es decir

$$q(z) := (Q_{k-1}(z))_{k=1}^{\infty}.$$

Dadas dos sucesiones $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$, definimos el **Wronskiano** de las ecuaciones en diferencias correspondiente al operador de Jacobi (3.15) como

$$W_n(x, y) := b_n(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}).$$

Notemos que el Wronskiano es constante para cualesquiera soluciones de la ecuación (4.27).

Además, observemos que

$$\begin{array}{cccccc} & +q_1x_1\bar{y}_1 & +b_1x_2\bar{y}_2 & & -q_1x_1\bar{y}_1 & -b_1x_1\bar{y}_2 \\ b_1x_1\bar{y}_2 & +q_2x_2\bar{y}_2 & +b_2x_3\bar{y}_2 & -b_1x_2\bar{y}_1 & -q_2x_2\bar{y}_2 & -b_2x_2\bar{y}_3 \\ b_2x_2\bar{y}_3 & +q_3x_3\bar{y}_3 & +b_3x_4\bar{y}_3 & -b_2x_3\bar{y}_2 & -q_3x_3\bar{y}_3 & -b_3x_3\bar{y}_4 \end{array}$$

$$= b_3x_4\bar{y}_3 - b_3x_3\bar{y}_4 = b_3(x_4\bar{y}_3 - x_3\bar{y}_4) = W_3(x,\bar{y}) \tag{4.28}$$

En general,

$$\begin{array}{cccccc} & +q_1x_1\bar{y}_1 & +b_1x_2\bar{y}_2 & & -q_1x_1\bar{y}_1 & -b_1x_1\bar{y}_2 \\ b_1x_1\bar{y}_2 & +q_2x_2\bar{y}_2 & +b_2x_3\bar{y}_2 & -b_1x_2\bar{y}_1 & -q_2x_2\bar{y}_2 & -b_2x_2\bar{y}_3 \\ b_2x_2\bar{y}_3 & +q_3x_3\bar{y}_3 & +b_3x_4\bar{y}_3 & -b_2x_3\bar{y}_2 & -q_3x_3\bar{y}_3 & -b_3x_3\bar{y}_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1}x_{n-1}\bar{y}_n & +q_nx_n\bar{y}_n & +b_nx_{n+1}\bar{y}_n & -b_{n-1}x_n\bar{y}_{n-1} & -q_nx_n\bar{y}_n & -b_nx_n\bar{y}_{n+1} \end{array}$$

$$= b_nx_{n+1}\bar{y}_n - b_nx_n\bar{y}_{n+1} = b_n(x_{n+1}\bar{y}_n - x_n\bar{y}_{n+1}) = W_n(x,\bar{y}) \tag{4.29}$$

De manera que si $x, y \in D(A^*)$, se obtiene el siguiente análogo de la fórmula de Green

$$\langle A^*x, y\rangle - \langle x, A^*y\rangle = W_\infty(x,\bar{y}), \tag{4.30}$$

donde

$$W_\infty(x,y) := \lim_{n\to\infty} W_n(x,y).$$

Nótese que el límite de la expresión (4.30) existe, porque en el lado izquierdo ambos límites existen, ya que $x, y \in D(A^*)$.

En el dominio de A^* hay sucesiones v, w tales que

$$W_\infty(v,w) \neq 0.$$

En efecto, si tomamos $v = p(0)$ y $w = p(0)$, que claramente son elementos del dominio de A^* por el Comentario 3.26, entonces $W_\infty(p(0), q(0)) \neq 0$, puesto que $p(0)$ y $q(0)$ son linealmente independientes y son soluciones de la ecuación en recurrencias (4.27).

Afirmación 4.23. *Sean $v, w \in D(A^*)$ tales que $W_\infty(v,w) \neq 0$. Entonces*

$$\langle A^*x, y\rangle - \langle x, A^*y\rangle = \Gamma_1 x\overline{\Gamma_0 y} - \Gamma_0 x\overline{\Gamma_1 y},$$

donde

$$\Gamma_0 = \frac{W_\infty(v,\cdot)}{W_\infty(v,w)} \qquad\qquad \Gamma_1 = W_\infty(\cdot, w)$$

Demostración. Mediante la identidad de Plücker se puede verificar que

$$W_\infty(x,\bar{y}) = \frac{W_\infty(v,\bar{y})W_\infty(x,w)}{W_\infty(v,w)} - \frac{W_\infty(v,x)W_\infty(\bar{y},w)}{W_\infty(v,w)}.$$

■

Elijamos por simplicidad $v = p(0)$ y $w = q(0)$. Observemos que, en este caso,

$$W_n(p(0), q(0)) = W_\infty(p(0), q(0)) = 1.$$

Esto se sigue del análogo a la fórmula de Liouville-Ostrogradskii (véase [1], pág. 9).

Si tomamos $K = \mathbb{C}$, $\Gamma_0 = W_\infty(p(0),\cdot)$ y $\Gamma_1 = W_\infty(\cdot, q(0))$, hemos obtenido un triplete de frontera (K, Γ_0, Γ_1) para A^*. Sólo nos falta verificar que el mapeo $x \mapsto (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$ es suprayectivo. Para ello, notemos primero que

$$\begin{aligned} W_n(x,y) &= b_n(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) \\ &= -b_n(x_n y_{n+1} - x_{n+1}y_n) \\ &= -W_n(y,x). \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que el Wronskiano es lineal, pues

$$\begin{aligned} W_n(x, \alpha y + z) &= b_n(x_{n+1}(\alpha y_n + z_n) - x_n(\alpha y_{n+1} + z_{n+1})) \\ &= \alpha b_n(x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}) + b_n(x_{n+1}z_n - x_n z_{n+1}) \\ &= \alpha W_n(x,y) + W_n(x,z). \end{aligned}$$

De lo anterior se tiene que si el mapeo $x \mapsto (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$ no fuera suprayectivo, entonces existirían $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tales que para toda $x \in D(A^*)$ se tiene que $(\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \perp (\alpha, \beta)$. Es decir existen $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tales que para toda $x \in D(A^*)$,

$$\bar{\alpha}\Gamma_0 x + \bar{\beta}\Gamma_1 x = \bar{\alpha}W_\infty(p(0),x) + \bar{\beta}W_\infty(x,q(0)) = 0.$$

Lo cual equivale a que

$$\bar{\alpha}W_\infty(p(0), x) - \bar{\beta}W_\infty(q(0), x) = 0,$$

o lo que es lo mismo, a que para toda $x \in D(A^*)$

$$W_\infty(\bar{\alpha}p(0) - \bar{\beta}q(0), x) = 0.$$

Pero claramente existen elementos en $D(A^*)$ para los cuales la expresión anterior no es cero, por ejemplo $x = -\beta p(0) + \alpha q(0)$. De ahí que se cumpla la condición de suprayectividad.

Por lo tato (K, Γ_0, Γ_1) es un triplete de frontera para A^*. Y podemos construir extensiones autoadjuntas de A como en el Ejemplo 4.21. Las cuales están caracterizadas por las condiciones de frontera

$$B\,\Gamma_0\,x = \Gamma_1\,x, \qquad B \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Bibliografía

[1] N. I. Akhiezer. *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*. Oliver & Boyd, 1965.

[2] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover, 1993.

[3] M. S. Birman, M. Z. Solomjak. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. D. Reidel, 1987.

[4] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 2010.

[5] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.

[6] J. Munkres. *Topology, Second Edition*. Prentice Hall, 2000.

[7] M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press, 2007.

[8] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, 1987.

[9] K. Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer, 2012.

[10] G. Teschl. *Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices*. American Mathematical Society, 1999.

[11] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer, 1980.