Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS, SOLUCIONES FUERTES y PROCESO DE BESSEL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

ULISES PÉREZ CENDEJAS

TUTORA

DRA. MARÍA EMILIA CABALLERO ACOSTA

Ciudad Universitaria, Cd Mx., 2019

1.Datos del alumno
Pérez
Cendejas
Ulises
46 21 98 11 78
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Actuaría
41506999-5

2. Datos del tutor
Dra.
María Emilia
Caballero
Acosta

3. Datos del sinodal 1
Dr.
Adrián
Gonzalez Casanova
Soberón

4. Datos del sinodal 2
Dra.
María Clara
Fittipaldi

5. Datos del sinodal 3
M. en C.
Alejandro
Santoyo
Cano

6. Datos del sinodal 4
Mat.
Gerardo
Pérez
Suárez

7.Datos del trabajo escrito.
Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Soluciones Fuertes y Proceso de Bessel
76 págs
2019

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, Soluciones Fuertes y Proceso de Bessel

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a:

Mis padres, Coralia y Antonio, por ser los principales promotores de mis sueños, gracias a ellos por cada día confiar y creer en mí y en mis expectativas. A mi hermano, Antonio, por siempre ser un gran ejemplo para mí.

A mi asesora la Dra. María Emilia por su inmensa paciencia para conmigo, por todo su tiempo invertido, por su valiosa instrucción, porque sin ella no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

A mis sinodales: Adrián, Clara, Alejandro y Gerardo, por haberse tomado el tiempo de leer este trabajo y sus comentarios. Así también a Alejandro Rosales por sus comentarios.

A toda la gente que conocí en la Facultad de Ciencias, a Palomino y Cynthia por compartir su amistad conmigo, por sus consejos y todos esos buenos momentos. Gracias a Jenny por permitirme compartir su vida conmigo.

A Juan Ruiz de Chávez, por tan desinteresadamente regalarme su libro.

Al pueblo mexicano, porque día a día paga por la educación.

A Aquel que Es, que Era y que ha de venir.

Índice general

Introducción

El Movimiento Browniano (o Proceso de Wiener) es el proceso estocástico más importante en la teoría de procesos estocásticos. A partir del Movimiento Browniano 1-dimensional se puede extender su definición para obtener un Movimiento Browniano d-dimensional con $d \in \mathbb{N}$. El proceso de Bessel de dimensión d es la distancia de un Movimiento Browniano d-dimensional al origen, es decir, es el proceso $(\rho_t)_{t\geq 0}$ dado por

$$\rho_t := \left[(B_t^{(1)})^2 + \cdots + (B_t^{(d)})^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

El proceso de Bessel Cuadrado de dimensión $d \in \mathbb{N}$ se define con base en el proceso de Bessel como $Z_t := (\rho_t)^2,\ t \geq 0$.

En esta tesis estudiaremos estos dos procesos definidos de una manera más general, lo cual se realiza mediante el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para estudiar a las ecuaciones diferenciales estocásticas se requiere de una amplia base teórica de Procesos Estocásticos. En el capítulo 1 de este trabajo presentamos lo indispensable de esta teoría, en particular damos una idea de la construcción de la integral estocástica, presentamos la fórmula de Itô y el teorema de caracterización de Lévy, para esto nos hemos basado en *Introduction to Stochastic Integration* de M.E. Caballero. Finalmente presentamos dos teoremas de Yamada y Watanabe; damos la prueba de uno de ellos y del otro sólo la idea de la demostración. Todo esto lo hacemos con el fin de presentar la ecuación diferencial estocástica cuya solución define al Proceso de Bessel cuadrado. Esta ecuación es la siguiente

$$Z_t = Z_0 + \delta t + 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|}\, dB_s, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Se define el proceso de Bessel Cuadrado $(Z_t)_{t\geq 0}$ de dimensión $\delta \geq 0$ como la única solución a la ecuación (2) (se prueba que existe y es positiva). Y con base en este definimos el Proceso de Bessel $(\rho_t)_{t\geq 0}$ de dimensión $\delta \geq 0$ como $\rho_t := \sqrt{Z_t}$ para todo $t \geq 0$. Se demuestra que si el Proceso de Bessel es de dimensión $\delta > 1$, entonces satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot \rho_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Veremos cómo las soluciones de (2) y (3) se relacionan con la primera definición que dimos del proceso de Bessel y del proceso de Bessel cuadrado de dimensión entera $d \in \mathbb{N}$ mediante la ecuación (1).

En el capítulo 2, hacemos una pequeña digresión en el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas para presentar las distintas versiones del lema de Doob-Dynkin, donde en particular nos será de interés el Teorema 2.4.1. Este resultado es poco conocido, aunque resulta ser muy útil para encontrar soluciones fuertes a ecuaciones diferenciales estocásticas. Para la primera parte de estos lemas nos hemos basado en *Optimal Learning from Doob-Dynkin Lemma* [10] de G. Taraldesn y para el lema de Doob-Dynkin para procesos estocásticos en el artículo de A.S. Cherny (Teorema 2.1 de [6]) y mostramos varios ejemplos donde fue posible encontrar explícitamente la función subyacente a este teorema.

En el capítulo 3, procedemos a estudiar las dos ecuaciones diferenciales estocásticas anteriores. En particular probamos que el Proceso de Bessel Cuadrado de dimensión entera $d \in \mathbb{N}$ satisface la ecuación (2) para todo $d \geq 1$ y que el Proceso de Bessel de dimensión entera $d \in \mathbb{N}$ satisface la ecuación (3) para todo $d \geq 2$. Para esto hemos seguido la prueba que se da en *Brownian Motion and Stochastic Calculus* [12] y simplemente hemos intentado dar más detalles. Posteriormente se calculan las probabilidades de transición del proceso definido por (2); esto esta basado en el capítulo XI del libro de D. Revuz y M. Yor *Continuous Martingales and Brownian Motion* [22]. Con lo que finalmente extendemos la demostración que aparece en [12] para probar que el Proceso de Bessel de dimensión $\delta > 1$ (es decir, $\rho_t = \sqrt{Z_t}$ donde $(Z_t)_{t\geq 0}$ es solución de (2)) satisface la ecuación (3).

Lo principal de esta tesis es el estudio de las soluciones que tiene la ecuación (3) que está basado en el artículo *On the Strong and Weak Solutions of Stochastic Differential Equations Governing Bessel Processes* de A.S. Cherny [6]. En el capítulo 4, hemos trabajado para desarrollar en detalle este artículo donde se prueba el siguiente teorema:

> ***Theorem 3.2*** *(i) The δ-dimensional Bessel processes ($\delta > 1$) is the unique (with fixed X_0 and B) nonnegative solution of (4)*[1]*. Moreover, it is a strong solution.*
> *(ii) If $\delta \geq 2$ and $X_0 \neq 0$ then pathwise uniqueness holds for (4).*
> *(iii) If $1 < \delta < 2$ or $X_0 = 0$, then*
> *(a) there exist other strong solutions (with the same X_0 and B);*
> *(b) there exist weak solutions;*
> *(c) the uniqueness in law does not hold for (4).*

La principal técnica que se utiliza para encontrar soluciones es el Teorema 2.4.1 que se encuentra en el capítulo 2. Este teorema nada nos dice en el caso $\delta \in [0, 1)$. Para estudiar este caso fue que se introdujo el concepto de tiempo local $(L_t^0)_{t\geq 0}$. En el desarrollo de este artículo, se pudo dar otra demostración de que el tiempo local del proceso de Bessel (cuando $\delta > 1$) es cero. La demostración usual se puede consultar en [3]. Más aún, que toda solución de (3) tiene tiempo local nulo. Con ello se comprueba de manera muy simple que no existen soluciones para (3) en el caso en que $\delta \in [0, 1)$.

[1] Esta ecuación es $X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2X_s} I(X_s \neq 0)\, ds + B_t$ para $t \geq 0$.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

En este capítulo, como en el resto del trabajo, estudiaremos procesos estocásticos $(X_t)_{t\geq 0}$ a tiempo continuo que toman valores en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ o $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

En la Sección 1.1, damos la definición de un proceso estocástico. En particular, la de proceso de Wiener (o Movimiento Browniano) respecto a una filtración. Presentamos el espacio de Wiener y la medida de Wiener.

En la Sección 1.2, introducimos el concepto de integral estocástica de Itô y damos una idea de su construcción. Además, damos la definición de lo que es un proceso de Itô y la fórmula de Itô para estos procesos. Por último, utilizando la fórmula de Itô, damos una prueba del teorema de Caracterización de Lévy.

En la Sección 1.3, damos la definición de una ecuación diferencial estocástica, se define lo que es una solución débil y una solución fuerte. Definimos los dos tipos de unicidad que se suelen presentar en una ecuación diferencial estocástica que son: unicidad en ley y unicidad trayectorial.

Toda esta primera parte esta basada en *Introduction to Stochastic Integration* [5] donde se pueden consultar detalles de los conceptos definidos aquí, así como algunas de las pruebas que hemos omitido.

En la Sección 1.4, presentamos los resultados clásicos de Itô sobre existencia y unicidad, esto es, cuando se tienen coeficientes Lipchitz continuos. Debido a que éstos teoremas no son suficientemente fuertes para analizar la existencia y la unicidad en el caso de la ecuación del proceso de Bessel Cuadrado, también presentamos los dos teoremas principales de Yamada y Watanabe y únicamente damos la prueba de uno de ellos.

1.1. Procesos Estocásticos

Definición 1.1.1. *(Proceso Estocástico)* Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un proceso estocástico a tiempo continuo es un conjunto de variables aleatorias X_t, indexadas por el parámetro t en $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ y lo denotaremos por $(X_t)_{t\geq 0}$.

Ejemplo 1.1.1. (*Caminata aleatoria a tiempo continuo*) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(\xi_n)_{n\geq 1}$ independientes tales que $\mathbb{P}[\xi_n = 1] = \mathbb{P}[\xi_n = -1] = \frac{1}{2}$. Definimos $X_0(\omega) := 0$ para todo $\omega \in \Omega$, $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_n$ para $n \geq 1$. Entonces el proceso dado por

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{[n,n+1)}(t) \cdot \big[(n+1-t)X_n + (t-n)X_{n+1}\big], \quad t \geq 0$$

es la trayectoria de la caminata aleatoria simétrica extrapolada por linealidad a todo $\mathbb{R}^+$.

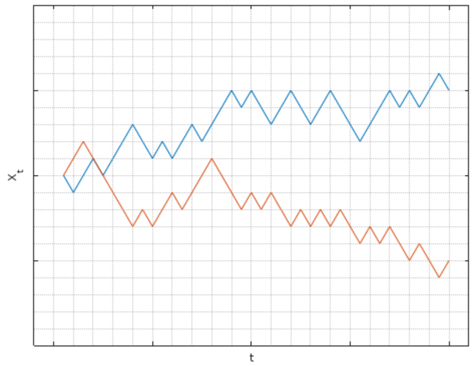

Figura 1.1: Trayectoria de dos caminatas aleatorias.

Hay varias maneras de definir igualdades entre procesos estocásticos.

Definición 1.1.2. Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ dos procesos definidos en el mismo espacio de probabilidad. Decimos que:

a) $(X_t)_{t\geq 0}$ es una *modificación* (o *versión*) de $(Y_t)_{t\geq 0}$ si para todo $t \geq 0$, $\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1$,

b) $(X_t)_{t\geq 0}$ es *indistinguible* de $(Y_t)_{t\geq 0}$ si $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \text{para todo } t \geq 0] = 1$. Esto es que casi seguramente tienen las mismas trayectorias.

Definición 1.1.3. (*distribuciones finito dimensionales*) Las *Distribuciones finito dimensionales* de un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es la familia de probabilidades

$$\mathbb{P}[X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_k} \in B_k]$$

con $k \in \mathbb{N}$, $t_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definición 1.1.4. (*Procesos equivalentes*) Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ dos procesos estocásticos definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ respectivavente. Decimos que son *equivalentes* si tienen la misma familia de distribuciones finito dimensionales. Es decir, si

$$\mathbb{P}[X_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_k} \in B_k] = \mathbb{P}'[Y_{t_1} \in B_1, \cdots, Y_{t_k} \in B_k]$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $t_i \geq 0$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Claramente, si $(X_t)_{t\geq 0}$ es indistinguible de $(Y_t)_{t\geq 0}$, entonces uno es modificación del otro y por lo tanto son equivalentes. Sin embargo, en general las recíprocas implicaciones no son ciertas.

Ejemplo 1.1.2. (*Procesos equivalentes que no son modificación uno del otro*) Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ como en el Ejemplo 1.1.1, entonces el proceso $(Y_t)_{t\geq 0}$ definido como $Y_t := -X_t$ para todo $t \geq 0$, es una modificación de $(X_t)_{t\geq 0}$, pues $\mathbb{P}[X_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_k} \in B_k] = \mathbb{P}[X_{t_1} \in N_1, \cdots, X_{t_k} \in N_k]$ donde los N_i tienen un número finito de elementos, con lo que $\mathbb{P}[X_{t_1} \in B_1, \cdots, X_{t_k} \in B_k] = \mathbb{P}[(\xi_1, \cdots, \xi_{n_k}) \in N] = \mathbb{P}[(-\xi_1, \cdots, -\xi_{n_k}) \in N] = \mathbb{P}[-X_{t_1} \in N_1, \cdots, -X_{t_k} \in N_k] = \mathbb{P}[-X_{t_1} \in B_1, \cdots, -X_{t_k} \in B_k]$. Sin embargo, por ejemplo $X_n \neq Y_n$ para todo n impar.

Ejemplo 1.1.3. (*Procesos que son modificación uno del otro pero no son indistinguibles*) Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ como en el ejemplo anterior y ξ una variable aleatoria continua (que toma valores sobre los reales positivos). Definimos el proceso $(Z_t)_{t\geq 0}$ como $Z_t := X_t + \mathbb{1}_{\{\xi = t\}}$, se verifica $\mathbb{P}[X_t = Z_t] = \mathbb{P}[\xi \neq t] = 1$, por otro lado todas las trayectorias son distintas para los dos procesos.

Definición 1.1.5. *(Filtración)* Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una *filtración* es una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ de Ω contenidas en $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ para $s \leq t$.

Ejemplo 1.1.4. (*Filtración canónica*) Intuitivamente, entenderemos que para cada $t \geq 0$ el elemento $\mathcal{F}_t$ de una σ-álgebra $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ es la información que se tiene hasta el tiempo t en algún contexto. Así, por ejemplo, dado un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ se define su *filtración canónica* como la σ-álgebra que tiene como elementos $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \leq t)$ para $t \geq 0$, que es la mínima σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{X_s\}_{s\leq t}$, se interpreta que $\mathcal{F}_t^X$ contiene toda la información del proceso X_s hasta el tiempo t y solamente esa; así a priori no se tiene información en $\mathcal{F}_t^X$ de lo que pasa con el proceso después del tiempo t. Sin embargo, suele ser necesario trabajar con filtraciones más grandes que la canónica; por esta razón introduciremos la siguiente definición.

Definición 1.1.6. (*Proceso adaptado*) Decimos que el proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es *adaptado* con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible, para cada $t \geq 0$.

Observación. Todo proceso estocástico es adaptado con respecto a su filtración canónica.

1.1.1. El movimiento Browniano

El modelo matemático del Movimiento Browniano está inspirado en un fenómeno físico. A continuación presentaremos una breve reseña histórica de este fenómeno que hemos tomado del libro de Eliezer Braun, *Un Movimiento en Zig Zag* [4].

El movimiento Browniano, el cual es nombrado así en honor al botánico escosés Robert Brown, quien a partir de una investigación en 1827, observó que era posible apreciar microscópicamente un movimiento errático (que cambian de dirección permanentemente) de partículas de polen suspendidas en agua. Brown se dio cuenta de que esto no dependía del polen en particular (sucedía con todo tipo de partículas pequeñas), ni de los flujos en el fluido; tampoco lo causaba la evaporación del líquido. En décadas posteriores se intentó dar distintas explicaciones a este movimiento, entre ellas se propusó que se debía a la diferencia de temperaturas o, también, a la capilaridad creada por el recipiente: ambas fueron desechadas [4]. No fue hasta 1905 cuando Albert Einstein [8], tomando en cuenta la independencia del movimiento en intervalos de tiempo y haciendo uso de la recién fórmulada teoría cinética (basada en suposiciones atómicas), obtiene que la distribución del desplazamiento resultante al tiempo t estaría dada por:

$$f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-x^2/4Dt}}{\sqrt{t}},$$

en donde n es el número de párticulas y D un coeficiente de difusión. Con esto, Einstein obtuvo predicciones cuantitativas, con las cuales el físico Jean Perrin, con ayuda de su discípulo M. Chaudesaigues, bajo una serie de ingeniosos experimentos comprobó empíricamente las predicciones de Einstein entre 1908 y 1911.

Louis Bachelier, en 1900, consiguió llegar a un “proceso” con las mismas características sobre el precio de una acción, tomando en cuenta supuestos económicos. Dejando de un lado los aspectos físicos del movimiento Browniano, no fue hasta 1923 que el matemático estadounidense Norbert Wiener, dio una construcción rigurosa y bastante complicada de este proceso.

Una de las propiedades de la partícula Browniana es que su desplazamiento es independiente para intervalos disjuntos en el tiempo. Es posible escribir esta propiedad en términos de la σ-álgebra generada por el proceso y es lo que haremos en seguida.

Proposición 1.1.1. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico para el cual las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes para todo entero $n \geq 1$ e índices $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$. Entonces $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^X$ para $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq s < t$.

Demostración. Es obvio que $\Omega \in \mathcal{D}$. Sean $A, C \in \mathcal{D}$ que satisfacen $A \subseteq C$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[(X_t - X_s \in B) \cap (C \setminus A)] &= \mathbb{P}[C \cap (X_t - X_s \in B \setminus A) \cap (X_t - X_s \in B)] \\
&= \mathbb{P}[C \cap (X_t - X_s \in B)] - \mathbb{P}[A \cap (X_t - X_s \in B)] \\
&= \mathbb{P}[X_t - X_s \in B](\mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A]) \\
&= \mathbb{P}[X_t - X_s \in B] \cdot \mathbb{P}[C \setminus A],
\end{aligned}$$

con lo que se concluye que $C \setminus A \in \mathcal{D}$. Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de eventos crecientes en $\mathcal{D}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[\textstyle\bigcup_n A_n \cap (X_t - X_s \in B)\big] &= \lim_n \mathbb{P}[A_n \cap (X_t - X_s \in B)] \\
&= \lim_n \mathbb{P}[A_n] \cdot \mathbb{P}[X_t - X_s \in B] \\
&= \mathbb{P}\big[\textstyle\bigcup_n A_n\big] \cdot \mathbb{P}[X_t - X_s \in B],
\end{aligned}$$

por lo que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$, es decir, $\mathcal{D}$ es un sistema de Dynkin. Sea $\mathcal{C}$ la imagen inversa del conjunto de cilindros de $\mathbb{R}^\infty := \{(x_1, x_2, \cdots) : x_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{N}\}$, es decir:

$$\mathcal{C} := \{X_{t_0} \in I_0, \cdots, X_{t_n} \in I_n : n \in \mathbb{N}\},$$

donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos abiertos y $0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq s$ es evidente que $\mathcal{C}$ es un sistema π además $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, esto se puede ver ya que cualquier elemento de $\mathcal{C}$ se puede reescribir de la forma $(X_{t_0} \in J_0, X_{t_1} - X_{t_0} \in J_1, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \in J_n)$ de manera que se puede concluir por el teorema de clases monótonas. ■

Con esto nos permitiremos dar la siguiente definición para el movimiento Browniano de la siguiente manera.

Definición 1.1.7. *(Movimiento Browniano)* Dado un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, un *movimiento Browniano* respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástco $(B_t)_{t\geq 0}$ adaptado a la filtración que satisface:

1. $B_0 = 0$ c.s.
2. $B_t - B_s \perp \mathcal{F}_s$ para $s, t \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq s < t$.
3. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ para $s, t \in \mathbb{R}^+$ tales que $s < t$.
4. Tiene trayectorias continuas, es decir, la función $t \to B_t(\omega)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$.

Dar una demostración rigurosa de la existencia del movimiento Browniano como proceso estocástico, es algo no trivial y no se hará aquí (se puede consultar [12]). Únicamente se mencionarán los resultados con los cuales es posible llegar a esto.

Teorema 1.1.1. *(Extensión de Kolmogorov) Sea $\{\mathbb{P}_\tau\}_{\tau\in T}$ una familia consistente de distribuciones finito dimensionales. Entonces existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ en $\big(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})\big)$ tal que:*

$$\mathbb{P}\left(\pi_\tau^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}_\tau(A)\ \ \forall\ \tau \in T$$

en donde π_τ es la proyección de las coordenadas τ de $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ sobre $\mathbb{R}^{|\tau|}$, es decir, si $\tau = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ entonces $\pi_\tau : \mathbb{R}^{[0,\infty)} \to \mathbb{R}^n$ y $\pi_\tau(x) = (x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_n))$.

Teorema 1.1.2. *(Continuidad de Kolmogorov) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ definido en él. Si existen $\alpha, \beta, c > 0$ tales que:*

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^\alpha\right] \leq c|t-s|^{1+\beta}, \quad s, t \in \mathbb{R}_+,$$

entonces X tiene una modificación Y, tal que para todo $\omega \in \Omega$ y $0 < \gamma < \frac{\beta}{\alpha}$, la trayectoria $t \mapsto Y_t(\omega)$ es locamente γ-Holder continua, o sea $\forall\ t_0 \in \mathbb{R}^+$ existen $\varepsilon_{t_0}, C_{t_0} > 0$ tal que si $|t-t_0|, |s-t_0| < \varepsilon_{t_0}$, entonces $|Y_t(\omega) - Y_s(\omega)| \leq C_{t_0}|t-s|^\gamma$. En particular todas las trayectorias del proceso Y son continuas.

Una vez que se tiene un movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, es posible construir una medida de probabilidad W en el espacio (medible) de las funciones continuas $\big(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{B}\left(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\right)\big)$ como $W(A) := \mathbb{P} \circ B^{-1}(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}\left(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\right)$.

Proposición 1.1.2. Existe una única medida de probabilidad W en $\mathcal{B}\left(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\right)$, para la cual el proceso coordenado es un movimiento Browniano. A esta medida se le conoce como la *medida de Wiener* y al espacio de probabilidad $\big(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{B}\left(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})\right), W\big)$ se le nombra *espacio de Wiener*.

1.1.2. Variación Cuadrática del Movimiento Browniano

El hecho que hace posible definir la integral de Riemann-Stieltjes $\displaystyle\int_0^t f(s)\, d\alpha(s)$ para una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continua, es que $\alpha(t)$ sea de variación acotada. Sin embargo, las trayectorias del movimiento Browniano no satisfacen esta propiedad. De hecho sus trayectorias son de variación infinita con probabilidad uno. Por lo cual, resulta infructuoso definir la integral respecto al movimiento Browniano de la misma manera que en el caso de la integral de Rieman-Stieltjes.

Para construir la integral de Itô es necesario adoptar un enfoque más probabilísta; para ello comenzaremos con el concepto de *p-variación* de un proceso estocástico.

Definición 1.1.8. (*p-Variación*) Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias continuas. Definimos su p-variación sobre $[a,b] \subset [0,\infty)$ como el límite en probabilidad cuando $||\pi_n|| \to 0$ (siempre y cuando exista) de

$$Q_{n,p}[a,b] := \sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}} - X_{t^n_k}|^p,$$

en donde $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de particiones del intervalo $[a,b]$ de la forma $\pi_n := \{a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{m_n}^{(n)} = b\}$ tales que $\lim_n ||\pi_n|| = 0$. Cuando $p = 2$ se le conoce como *variación cuadrática* de $(X_t)_{t\geq 0}$ y para $p = 1$ se le llama *variación total* de $(X_t)_{t\geq 0}$ en $[a,b]$.

Observación. Recordamos que la norma de una partición es $||\pi_n|| = \max_k\{|t^n_{k+1} - t^n_k|\}$.

Ahora, calcularemos la variación cuadrática del movimiento Browniano. Adoptaremos la siguiente notación: $\Delta B^2_{t^n_k} := (B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k})^2$ y $\Delta t^n_k := t^n_{k+1} - t^n_k$.

Proposición 1.1.3. (*Variación cuadrática del M.B.*) La variación cuadrática sobre $[0,t]$ de un movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es igual a t y es denotada como $\langle X, X\rangle_t$, es decir:

$$P-\lim_{n\to\infty} Q_{n,2}[0,t] = t, \quad t \geq 0$$

Demostración. Sea $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de particiones como en la Definición 1.1.8, veamos que:

$$\mathbb{E}\left[\big(Q_n - (b-a)\big)^2\right] = \mathbb{E}\left[\Big(\sum_{\pi_n} \Delta B^2_{t^n_k} - \Delta t^n_k)\Big)^2\right] = \sum_{\pi_n} \mathrm{Var}\left(\Delta B^2_{t^n_k} - \Delta t^n_k\right)$$

La última igualdad se da debido a que $\mathbb{E}\left[\sum_{\pi_n} \Delta B^2_{t^n_k} - \Delta t^n_k\right] = 0$, a su vez estos sumandos son indepenedientes, por lo que la varianza de la suma es la suma de las varianzas. Usando el hecho que $\mathrm{Var}\big(\Delta B^2_{t^n_k}\big) = 2\big(\Delta t^n_k\big)^2$, obtenemos

$$\mathbb{E}\left[\big(Q_n - (b-a)\big)^2\right] = 2\sum_{\pi_n} \left(\Delta t^n_k\right)^2 \leq 2 \cdot ||\pi_n|| \cdot (b-a).$$

Haciendo $||\pi_n|| \to 0$, tomando $(a,b) = (0,t)$ y ya que la convergencia en L_2 implica la convergencia en probabilidad se obtiene el resultado deseado. ∎

Posteriormente, nos encontraremos solo con dos tipos de procesos: los que tienen variación cuadrática finita y los que tienen variación total finita. Un resultado que relaciona la variación de este tipo de procesos es el siguiente:

Proposición 1.1.4. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con trayectorias continuas definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, de variación total finita. Entonces, existe su variación cuadrática y además es cero.

Demostración. Sean $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de particiones como en la Definición 1.1.8, y $\{\pi'_n : n \in \mathbb{N}\}$ otra familia de particiones sobre el mismo intervalo tal que $\pi_n \subseteq \pi'_n$ y $\pi'_n \subseteq \pi'_{n+1}$. Notemos que $P\!-\lim_n \sum_{\pi'_n} |X_{t^n_{k+1}} - X_{t^n_k}| < \infty$ ya que $||\pi_n|| \to 0$. Ahora, sea $\{\pi''_n : n \in \mathbb{N}\} := \{\pi'_{n_k} : \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}\}$ tal que $\lim_n \sum_{\pi''_n} |X_{t^n_{k+1}} - X_{t^n_k}| < \infty$ casi seguramente. Observemos que $\pi_n \subseteq \pi'_n \subseteq \pi''_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De la desigualdad:

$$\sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|^2 \leq \sup_{\pi''_n}\{|X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|\} \cdot \sum_{\pi''_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|$$

es claro que $\lim_n \sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|^2 = 0$ casi seguramente, pues $\lim_n \sup_{\pi''_n}\{|X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|\} = 0$, ya que el proceso tiene trayectorias continuas. ∎

Ejemplo 1.1.5. En particular, los procesos estocásticos de la forma $\left(\int_0^t b(s, X_s)\, ds\right)_{t\geq 0}$, con $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles e integrables son de variación cuadrática cero. Es decir,

$$\left\langle \int_0^\cdot b(s, X_s)\, ds, \int_0^\cdot b(s, X_s)\, ds \right\rangle_t = 0\,, \quad t \geq 0,$$

pues al ser derivables casi en toda la recta real, son de variación total finita; de hecho su variación a tiempo $t \geq 0$ no es otra cosa que $\displaystyle\int_0^t |b(s, X_s)|\, ds.$

Proposición 1.1.5. Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico continuo con variación cuadrática finita y $(Y_t)_{t\geq 0}$ un proceso continuo de variación total finita. Entonces $\langle X+Y, X+Y\rangle_t = \langle X, X\rangle_t$, para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea $\{\pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de particiones como en la Definición 1.1.8. Llamemos $(*)$ a la suma $\sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) + Y_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega) - Y_{t^n_{k+1}}(\omega)|^2$, entonces

$$(*) = \sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)|^2 + 2\sum_{\pi_n} \big(X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)\big) \cdot \big(Y_{t^n_{k+1}}(\omega) - Y_{t^n_k}(\omega)\big) + \sum_{\pi_n} |Y_{t^n_{k+1}}(\omega) - Y_{t^n_k}(\omega)|^2$$

con un argumento similiar al de la proposición anterior se prueba $\lim_n \sum_{\pi_n} |X_{t^n_{k+1}}(\omega) - X_{t^n_k}(\omega)| \cdot |Y_{t^n_{k+1}}(\omega) - Y_{t^n_k}(\omega)| = 0$, por lo que el segundo término también se va a cero conforme $||\pi_n|| \to 0$. Debido a que $\lim_n \sum_{\pi_n} |Y_{t^n_{k+1}}(\omega) - Y_{t^n_k}(\omega)|^2 = 0$, pues $(Y_t)_{t\geq 0}$ es de variación total finita, se puede concluir. ■

1.2. Integral Estocástica de Itô

La razón que se tuvo para construir la integral estocástica fue motivada por la teoría de procesos de markov, que estuvo bastante influenciada por los trabajos de A.N. Kolmogorov en 1931 (dos años antes de que diera la axiomatización de la teoría de la probabilidad por medio de la teoría de la medida desarrollada en ese momento). Kolmogorov probó que las funciones de densidad $f(s, x, t, y)$ de los procesos de Markov continuos, pueden ser descritas por medio de dos parámetros: $A(s, x)$ es el diferencial (tasa de cambio en tiempos infinitamente pequeños) de la media cuando el proceso se encuentra en x al tiempo s y, con la misma idea, $B(s, x)$ es la varianza diferencial. Por medio de una ecuación diferencial parcial del siguiente estilo:

$$\frac{\partial}{\partial s} f(s, x, t, y) = -A(s, x)\frac{\partial}{\partial x} f(s, x, t, y) - B^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, x, t, y).$$

La intención incial de Itô era estudiar las trayectorias de los procesos de Markov, estos al estar determinados por de medio esos diferenciales homogéneos, entonces se da cuenta de que esto sería posible por medio de ecuaciones diferenciales estocásticas, de la siguiente forma:

$$dX_t = \sigma(X_t)\, dW_t + \mu(X_t)\, dt$$

En 1944, le da un significado a $\sigma(X_t)dW_s$ por medio de la definición de una integral estocástica, lo cual hace posible plantear ecuaciones diferenciales estocásticas cuyas soluciones sean procesos de Markov y, bajo ciertas condiciones en los coeficientes σ y μ, prueba la existencia de soluciones. Es en 1951 cuando prueba, la que hoy en día conocemos como fórmula de Itô:

$$f(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dt.$$

Mediante la cual le fue posible conectar este enfoque con el de Kolmogorov, al recuperar por medio de la fórmula de Itô las ecuaciones diferenciales parciales planteadas por él.

En aras de dar un significado a $\int_0^t X(s, \omega)\, dB(s, \omega)$, es necesario indagar para cuáles integrandos tendrá sentido la expresión anterior. Puesto que la finalidad de este trabajo es obtener ecuaciones diferenciales estocásticas, sería sumamente conveniente que si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico también lo fueran expresiones como $Y(t, \omega) := \int_0^t X(s, \omega)\, ds$, para lo cual son necesarias ciertas condiciones sobre $(X_t)_{t\geq 0}$ que se especifican en la Definición 1.2.1.

1.2.1. Construcción de la Integral Estocástica

En esta sección construiremos la integral estocástica con respecto a un movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ y daremos sus principales propiedades. Para esto nos hemos basado en *Introduction to Stochastic Integration* [5].

Definición 1.2.1. *(Proceso progresivamente medible)* Se dice que el proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es *progresivamente medible* con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si para todo $t \in \mathbb{R}^+$ el mapeo

$$\begin{aligned} [0,t] \times \Omega &\longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (s,\omega) &\longrightarrow X(s,\omega) \end{aligned}$$

es medible con respecto a la σ-álgebra $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

En primera instancia que un proceso sea *progresivamente medible* será de extrema utilidad. Gracias al teorema de Fubini se puede asegurar que la función definida por $t \to \mathbb{E}[X_t]$ es medible en el espacio de probabilidad que se éste trabajando y además permite intercambiar el orden de integración, lo cual también será utilizado repetidas veces a lo largo de este texto.

Por otro lado, todo proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ progresivamente medible con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a esta filtración. El recíproco de la afirmación anterior en general no es cierto, sin embargo tenemos la siguiente relación:

Proposición 1.2.1. Si el proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtracion $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y cada una de sus trayectoria es continua por la derecha o continua por la izquierda, entonces es *progresivamente medible* con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. Haremos la prueba para el caso en que X tenga trayectorias continuas por la izquierda (el otro caso es análogo). Definimos:

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)\mathbb{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{k=1}^{2^n} X_{kt/2^n}(\omega) \cdot \mathbb{1}_{\{(k-1)t/2^n < s \leq kt/2^n\}}, \quad s \geq 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

De la definición de la σ-álgebra producto es claro que $(s,\omega) \to X_{kt/2^n}$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-medible, para $k \geq 0$, lo mismo sucede con cada función indicadora. Por lo que $X_s^{(n)}$ es $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-medible para cada $n \geq 0$. De la continuidad por la izquierda de $(X_t)_{t\geq 0}$ se tiene que si $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$, entonces $\lim_n X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$. Ya que la medibilidad se conserva bajo límite, se puede concluir. ∎

La siguiente definición provee de condiciones suficientes para la integrabilidad de procesos estocásticos.

Definición 1.2.2. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $0 \leq a < b \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{L}^2[a,b]$ a la clase de las funciones $X(t,\omega) : [0,\infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

a) El proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

b) $\mathbb{E}\left[\int_a^b X^2(t,\omega)dt\right] < \infty$.

Observación. Notemos que $\mathbb{E}\left[\int_a^b X^2(s,\omega)\,ds\right]$ es la norma del proceso $\{X_t : t \in [a,b]\}$ en $L^2([a,b]\times\Omega)$.

Ejemplo 1.2.1. Dado una espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$, sucede que

a) $(B_t)_{t\geq 0}$,

b) $(|B_t|)_{t\geq 0}$,

c) $\big(\mathrm{sgn}(B_t)\big)_{t\geq 0}$,

están en $\mathcal{L}^2[a,b]$ para cualesquiera $0 \leq a < b \in \mathbb{R}$. Los primeros dos procesos son progresivamente medibles, pues son adaptados y tienen trayectorias continuas (Proposición 1.2.1) además la esperanza del inciso b) de la Definición 1.2.2 en ambos casos $\mathbb{E}\int_a^b B_t^2\,dt = \int_a^b \mathbb{E}(B_t^2)\,dt = \int_a^b t\,dt = (b^2-a^2)/2$. Para asegurar que el proceso del inciso c) es progresivamente medible basta ver que es el límite de procesos progresivamente medibles. Ya que $\mathrm{sgn}(x)$ es medible existe una sucesión $\{f_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ de funciones continuas tales que $f_n(x) \to \mathrm{sgn}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces se satisface $\lim_n f_n(B_t(\omega)) \to \mathrm{sgn}(B_t(\omega))$ para todo $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$. La condición b) es clara pues $\mathrm{sgn}^2(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

En el argumento anterior, para demostrar que $(\mathrm{sgn}(B_t))_{t\geq 0}$ es progresivamente medible, solamente se utiliza que la función $\mathrm{sgn}(x)$ es medible, y que $(B_t)_{t\geq 0}$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado y tiene trayectorias continuas. De hecho, este mismo razonamiento prueba la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ con trayectorias continuas y $\sigma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función medible. Entonces el proceso estocástico $(\sigma(X_t))_{t\geq 0}$ es progresivamente medible con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Definición 1.2.3. *(Procesos elementales)* Un proceso estocástico $(X_t)_{t\geq 0}$ en $\mathcal{L}^2[0,T]$ que tiene la siguiente forma

$$X(t,\omega) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\omega)\cdot \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t), \quad t \geq 0,$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = T$, es llamado *proceso elemental*. La clase de todos los procesos elementales se denota por $\mathcal{E}^2[0,T]$.

Observación. A partir de esta definición vemos que $\mathbb{E}(\xi_i^2) < \infty$ y que ξ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Lo segundo es consecuencia de que $(X_t)_{t\geq 0}$ sea adaptado, pues es progresivamente medible.

Por otra parte, la manera más natural de definir $\int_0^t X(s,\omega)\,dB(s,\omega)$ para esta clase de procesos es la siguiente.

Definición 1.2.4. *(Integral de Itô para procesos elementales)* La *integral de Itô* (o *integral estocástica*) de un proceso elemental $(X_t)_{t\geq 0}$ con respecto de un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es

$$(X\cdot B)_t(\omega) := \int_0^t X(s,\omega)\; dB(s,\omega) := \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}\wedge t}(\omega) - B_{t_i\wedge t}(\omega)\right), \quad t \leq T.$$

Observación. Entendemos que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ del movimiento Browniano es la subaycente en la definición de $\mathcal{L}^2[0,T]$.

Con esta primera manera de definir la Integral de Itô se verifican las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.3. (*Propiedades de la integral de Itô*) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano, y $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ procesos elementales. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $(X \cdot B)_0 = 0$ c.s..
2. $\mathbb{E}[(X \cdot B)_t | \mathcal{F}_s] = (X \cdot B)_s$, para $0 \leq s \leq t \leq T$.
3. $\mathbb{E}[(X \cdot B)_t^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2\, ds\right]$ *(Isometría de Itô)*, para $0 \leq s \leq t \leq T$.
4. $\big((\alpha X + Y) \cdot B\big)_t = \alpha (X \cdot B)_t + (Y \cdot B)_t$, para $0 \leq t \leq T$.
5. $\big((X \cdot B)_t\big)_{t\geq 0}$ es un proceso con trayectorias continuas.

Es decir, el proceso $((X \cdot B)_t)_{t\geq 0}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala continua cuadrado integrable.

Se esperaría poder dar un significado a expresiones del tipo $\int_0^t B(s,\omega)\, dB(s,\omega)$, lo cual es factible ya que se puede definir la integral para los elementos de $\mathcal{L}^2[0,T]$. La manera de hacerlo es la siguiente.

Definición 1.2.5. (*Integral de Itô*) Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ en la cerradura de $\mathcal{E}^2[0,T]$ con respecto de la norma dada por b) de la Definición 1.2.2. Definimos la *integral estocástica* (o *integral de Itô*) de $(X_t)_{t\geq 0}$ con respecto al $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ como

$$(X \cdot B)_t := \int_0^t X_s\, dB_s = L_2\text{–} \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)}\, dB_s, \quad t \in [0,T]$$

donde $\left\{\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es una sucesión de procesos en $\mathcal{E}^2[0,T]$ que aproxima a $(X_t)_{t\geq 0}$.

Observación. Debemos comprobar que la integral de Itô está bien definida, es decir, el límite L_2-$\lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)}\, dB_s$ existe, no depende de la sucesión y coincide casi seguramente con la definición la integral de la Definicón 1.2.4. Esto último es consecuencia de que el límite no dependa de la sucesión. Veamos que el límite existe.

Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ y $\left\{\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0} : n \in \mathbb{N}\right\}$ en $\mathcal{E}^2[0,T]$ tales que $\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ converge a $(X_t)_{t\geq 0}$ en $L_2([0,T] \times \Omega)$. Entonces es de Cauchy, es decir, si $t \in [0,T]$, entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_s^{(n)} - X_s^{(m)}\right)^2 ds\right] = \lim_{m,n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s^{(n)}\, dB_s - \int_0^t X_s^{(m)}\, dB_s\right)^2\right] = 0,$$

la última igualdad se sigue de las propiedades 3 y 4 de la Proposición 1.2.3. Por lo que $\displaystyle\int_0^t X_s^{(n)}\, dB_s$ es de Cauchy en $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, debido a que éste es completo se sigue entonces que el límite existe.

Ahora verificaremos que el límite no depende de la sucesión que se tome. Sean $\left\{\left(Y_t^{(n)}\right)_{t\geq 0} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $\left\{\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0} : n \in \mathbb{N}\right\}$ como en la Definción 1.2.5, tales que

$$(X \cdot B)_t := L_2\text{–} \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^{(n)}\, dB_s, \quad (Y \cdot B)_t = L_2\text{–} \lim_{n\to\infty} \int_0^t Y_s^{(n)}\, dB_s.$$

Denotemos por $||\cdot||_{L_2}$ y $||\cdot||_{L_2([0,t]\times\Omega)}$ las normas de los espacios $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y $L_2([0,t]\times\Omega,\mathcal{B}[0,t]\otimes\mathcal{F},\lambda_t\otimes\mathbb{P})$ respectivamente, donde λ_t es la medida de Lebesgue restringida al intervalo $[0,t]$. Al emplear la desigualdad del triángulo obtenemos que

$$\begin{aligned}||(X\cdot B)_t-(Y\cdot B)_t||_{L_2}\leq{}& ||(X\cdot B)_t-(X^{(n)}\cdot B)_t||_{L_2}+||(Y^{(n)}\cdot B)_t-(Y\cdot B)_t||_{L_2}\\ &+||(X^{(n)}\cdot B)_t-(Y^{(n)}\cdot B)_t||_{L_2}.\end{aligned}$$

De la isometría de Itô y de la linealidad de la integral para procesos elementales se tiene la siguiente igualdad

$$||(X^{(n)}\cdot B)_t-(Y^{(n)}\cdot B)_t||_{L_2}=||(X_t^{(n)})_{t\geq0}-(Y_t^{(n)})_{t\geq0}||_{L_2([0,t]\times\Omega)},$$

por lo que al volver a emplear la desigualdad del trinagulo resulta que

$$\begin{aligned}||(X\cdot B)_t-(Y\cdot B)_t||_{L_2}\leq{}& ||(X\cdot B)_t-(X^{(n)}\cdot B)_t||_{L_2}+||(Y^{(n)}\cdot B)_t-(Y\cdot B)_t||_{L_2}\\ &+||(X_t^{(n)})_{t\geq0}-(X_t)_{t\geq0}||_{L_2}+||(Y_t^{(n)})_{t\geq0}-(X_t)_{t\geq0}||_{L_2}.\end{aligned}$$

El lado derecho de la desigualdad se va 0 cuando $n\to\infty$, por lo que $\mathbb{E}[((X\cdot B)_t^2-(Y\cdot B)_t)^2]=0$. De este modo $(X\cdot B)_t=(Y\cdot B)_t$ casi seguramente, como se quería demostar.

Además, se comprueba que el proceso $((X\cdot B)_t)_{t\geq0}$ sigue cumpliendo las propiedades enumeradas en la Proposición 1.2.3. La prueba se basa en la definición de la integral estocástica y en que se satisfacen esas mismas propiedades para los procesos elementales. Sin embargo, no es claro es que la integral estocástica sea un proceso continuo.

Teorema 1.2.1. *Sea $(X_t)_{t\geq0}\in\mathcal{L}^2[0,T]$. El proceso definido por*

$$(t,\omega)\to\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s,\quad t\in[0,T]$$

admite una versión continua.

Demostración. Sea $\left\{\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq0}:n\in\mathbb{N}\right\}$ una sucesión de procesos que aproxima a $(X_t)_{t\geq0}$ como en la definición 1.2.5. Por la desigualdad maximal de Doob

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t X_s^{(n)}dB_s-\int_0^t X_s\,dB_s\right|>\varepsilon\right]\leq\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T X_s^{(n)}dB_s-\int_0^T X_s\,dB_s\right|^2\right],\quad\varepsilon>0.$$

El lado derecho de la igualdad es cero cuando $n\to\infty$. Entonces, podemos encontrar un subsucesión $(n_k)_{k=1}^\infty$ tal que la serie

$$\sum_{k=1}^\infty\left(2^k\right)^2\cdot\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T X_s^{(n_k)}dB_s-\int_0^T X_s\,dB_s\right|^2\right]$$

converge. Por ejemplo, si $\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T X_s^{(n_k)}dB_s-\int_0^T X_s\,dB_s\right|^2\right]\leq(2^{-k})^3$ obtenemos que

$$\mathbb{P}(A_k):=\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t X_s^{(n_k)}dB_s-\int_0^t X_s\,dB_s\right|>\frac{1}{2^k}\right]\leq 2^{-k}.$$

Y por el lema de Borel Cantelli

$$\mathbb{P}\big[\limsup_k A_k\big]=0.$$

Esto significa que, para casi todo $\omega \in \Omega$ existe K_ω tal que

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t X_s^{(n_k)}dB_s - \int_0^t X_s\, dB_s\right| \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq K_\omega.$$

Es decir, $\int_0^t X_s^{(n_k)}dB_s$ converge uniformemente a $\int_0^t X_s\, dB_s$ casi seguramente. Ya que $t \to \int_0^t X_s^{(n_k)}dB_s$ es continua, tambien $t \to \int_0^t X_s dB_s$ es continua c.s.. ■

Ahora, vamos a demostrar que podemos tomar como integrandos los procesos de $\mathcal{L}^2[0,T]$ para la integral de la integral estocástica. Es simplemente probar que la cerradura de $\mathcal{E}^2[0,T]$ es $\mathcal{L}^2[0,T]$. Con este fin necesitaremos del siguiente lema.

Lema 1.2.1. (*Lema determinista*) En el espacio $L^2[0,T]$ de funciones $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos el operador $P_n : L^2[0,T] \longrightarrow L^2[0,T]$ como:

$$P_n f(t) := \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j \cdot \mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t), \quad \text{con} \quad \xi_j := \frac{n}{T}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f(s)\, ds,$$

donde $(t_j)_{j=0}^n$ es la partición uniforme del intervalo $[0,T]$. Entonces

1. Si $\phi \in L^2[0,T]$ y es escalonada, $\lim_n ||P_n\phi - \phi||_2 = 0$.
2. El conjunto de funciones escalonadas es un subconjunto denso de $L^2[0,T]$.
3. Si $\psi \in L^2[0,T]$, entonces $\lim_n ||P_n\psi - \psi||_2 = 0$.

Teorema 1.2.2. *La cerradura de $\mathcal{E}^2[0,T]$ con respecto de la norma en el espacio producto $L_2([0,T]\times\Omega)$ es $\mathcal{L}^2[0,T]$.*

Demostración. Dado un proceso $(X_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{L}^2[0,T]$ (supongamos que es acotado utilizando el método de truncación, ya que los acotados son densos en $\mathcal{L}^2[0,T]$), para cada $\omega \in \Omega$ podemos construir $P_nX(t,\omega)$ que es un proceso elemental (pues $\xi_j(\omega) = \frac{n}{T}\int_{t_{j-1}}^{t_j} X(s,\omega)\, ds$ es $\mathcal{F}_{t_j}$-medible gracias a que $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible y $\mathbb{E}[\xi_j^2] \leq \mathbb{E}[\int_{t_{j-1}}^{t_j} X_s^2\, ds] < \infty$), además converge en $L_2[0,T]$, es decir,

$$\lim_n \int_0^T |P_nX(s,\omega) - X(s,\omega)|^2\, ds = 0$$

Por el teorema de convergencia dominada, también es cierto cuando se toma la esperanza, es decir:

$$\mathbb{E}\left[\lim_n \int_0^T |P_nX(s,\omega) - X(s,\omega)|^2\, ds\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[\int_0^T |P_nX(s,\omega) - X(s,\omega)|^2\, ds\right] = 0,$$

la secuencia que aproxima a $X(t,\omega)$ un elemento acotado es $P_nX(t,\omega)$. ■

1.2.2. Procesos de Itô

La integral de Itô nos permite construir una gran cantidad de procesos estocásticos con buenas propiedades (i.e., procesos con trayectorias continuas y que son martingalas cuadrado integrables) a partir de un movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$, la siguiente definición extiende esta idea.

Definición 1.2.6. *(Proceso de Itô)* Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Un *proceso de Itô* es un proceso estocástico de la forma:

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\ ds + \int_0^t v(s,\omega)\ dB_s(\omega), \qquad t \geq 0,$$

en donde $v(s,\omega) \in \mathcal{L}^2[0,T]$, $T \geq 0$, $u(t,\omega)$ es un proceso progresivamente medible e integrable. A los coeficientes $u(s,\omega)$ se les conoce como *deriva* y a $v(s,\omega)$ como coeficiente de *difusión*.

Observemos que un proceso de Itô es adaptado y continuo. Además es una *semimartingala*, ya que es la suma de una martingala continua $\left(\int_0^t v(s,\omega)\, dB_s\right)_{t\geq 0}$ y un proceso adaptado continuo de variación acotada $\left(\int_0^t u(s,\omega)\, ds\right)_{t\geq 0}$.

1.2.3. Fórmula de Itô y Fórmula de Integración por Partes.

Calcular integrales estocásticas a partir de la Definición 1.2.5 no resulta ser sencillo. Esto mismo sucede en el caso de la integral Riemman, sin embargo el teorema fundamental del cálculo hace posible calcular un gran número de integrales. La fórmula de Itô también tiene como aplicación el hacer posible el cálculo de diversas integrales. Pero más que eso es la principal herramienta para el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 1.2.3. *(Fórmula de Itô) Si $f(t,x) \in C^{(1,2)}$ y $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô. Entonces $(f(t,X_t))_{t\geq 0}$ vuelve a ser un proceso de Itô. Más aún, se da la siguiente igualdad c.s.:*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)\ ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s) u(s,\omega)\ ds \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s) v(s,\omega)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s) v^2(s,\omega)\ ds \quad \forall\ t \geq 0. \end{aligned}$$

esto se suele escribir de una forma más compacta como (véase el Corolario 1.2.1):

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)\ ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\, d\left\langle X,X\right\rangle_s$$

Para la demostración de este resultado referimos al lector a consultar [5].

Ejemplo 1.2.2. Claramente un movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô, al aplicar la fórmula de Itô con $f(x) := x^2$ a $(B_t)_{t\geq 0}$ obtenemos

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s\, dB_s + t, \quad t \geq 0,$$

al despejar se obtiene

$$\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}, \quad t \geq 0.$$

De la identidad $xy = (1/4)\big((x+y)^2 - (x-y)^2\big)$ y al aplicar la fórmula de Itô para $f(x) = x^2$ es posible obtener la siguiente fórmula.

Teorema 1.2.4. *(Fórmula de integración por partes) Sean* $(X_t)_{t\geq 0}$ *y* $(Y_t)_{t\geq 0}$ *dos procesos de Itô de la forma*

$$\begin{aligned} X_t^{(1)} =& X_0^{(1)} + \int_0^t u^{(1)}(s,\omega)\,ds + \int_0^t v^{(1)}(s,\omega)\,dB_s, \quad t \geq 0, \\ X_t^{(2)} =& X_0^{(1)} + \int_0^t u^{(2)}(s,\omega)\,ds + \int_0^t v^{(2)}(s,\omega)\,dB_s, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

entonces se satisface

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = X_0^{(1)} \cdot X_0^{(2)} + \int_0^t X_s^{(1)}\,dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)}\,dX_s^{(1)} + \int_0^t v^{(1)}(s,\omega) \cdot v^{(2)}(s,\omega)\,ds, \quad t \geq 0.$$

Esto se puede escribir de una forma más compacta como (veáse la Proposición 1.2.4):

$$X_t^{(1)} \cdot X_t^{(2)} = X_0^{(1)} \cdot X_0^{(2)} + \int_0^t X_s^{(1)}\,dX_s^{(2)} + \int_0^t X_s^{(2)}\,dX_s^{(1)} + \left\langle X^{(1)}, X^{(2)} \right\rangle_t, \quad t \geq 0,$$

Observación. Los procesos de Itô con deriva $u(s,\omega) = 0$ c.s. para todo $s \geq 0$ son martingalas continuas cuadrado integrables.

Definición 1.2.7. Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala continua cuadrado integrable con $M_0 = 0$, decimos que el proceso $(A_t)_{t\geq 0}$ con $A_0 = 0$ es el *compensador* de $(M_t)_{t\geq 0}$ si $(M_t^2 - A_t)_{t\geq 0}$ es martingala.

Ejemplo 1.2.3. El compensador del Movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ es $A_t = t$ para todo $t \geq 0$, pues se sabe que $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es martingala.

Se puede probar que tal proceso siempre existe. Pero más que eso si $(A_t)_{t\geq 0}$ es la variación cuadrática de $(M_t)_{t\geq 0}$, es decir $A_t = \langle M, M \rangle_t$, entonces se satisface la propiedad anterior y es el único proceso (en el sentido que cualquier otro es indistinguible a éste) que satisface eso. Probar esta afirmación escapa de nuestras posibilidades, sin embargo para los procesos de Itô que son martingalas cuadrado integrables (es decir, que su deriva se anula) esto es posible.

Corolario 1.2.1. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô con deriva $u(s,\omega) = 0$ para todo $s \geq 0$, existe un único proceso $(A_t)_{t\geq 0}$ adaptado creciente con $A_0 = 0$ tal que $X_t^2 - A_t$ es martingala. Más aún, este proceso es la variación cuadrática de $(X_t)_{t\geq 0}$ y se satisface:

$$A_t = \langle X, X \rangle_t = \int_0^t v^2(s,\omega)\,ds, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

Demostración. Basta aplicar la fórmula de Itô para $f(x) = x^2$, con lo que obtenemos

$$X_t^2 - \int_0^t v^2(s,\omega)\,ds = 2\int_0^t X(s,\omega)v(s,\omega)\,dB_s + X_0^2, \quad t \geq 0,$$

de la misma manera al aplicar la fórmula de Itô a $X_{t_{i+1}} - X_{t_i}$ nuevamente con $f(x) = x^2$ donde los $\{t_i\}_{i=0}^n$ son un partición del intervalo $[0,t]$, obtenemos

$$|X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v^2(s,\omega)\,ds, \quad i \in \{0, 1, \cdots, n\},$$

despues de sumar sobre cualquier partición se tiene que $\sum_{\pi_n} |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|^2 = \int_0^t v^2(s,\omega)\,ds$. ■

Observación. En virtud de la Proposición 1.1.5 la igualdad (1.1) se sigue preservando aún cuando la deriva $u(s,\omega)$ no se anule, sin embargo ya no es posible garantizar que $\big(X_t^2 - \langle X,X\rangle_t\big)_{t\geq 0}$ sea una martingala.

Definición 1.2.8. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ son dos procesos de Itô definimos su covariación como

$$\langle X,Y\rangle_t := \frac{1}{4}\cdot\Big(\langle X+Y,X+Y\rangle_t - \langle X,X\rangle_t - \langle Y,Y\rangle_t\Big), \quad t\geq 0.$$

Proposición 1.2.4. Si $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$ son dos procesos de Itô con deriva nula existe un único proceso adaptado $(A_t)_{t\geq 0}$ de variación acotada con $A_0 = 0$ tal que $(X_tY_t - A_t)_{t\geq 0}$ es martingala. Más aún, se satisface

$$A_t = \langle X,Y\rangle_t = \int_0^t v^{(1)}(s,\omega)\cdot v^{(2)}(s,\omega)\,ds, \quad t\geq 0. \tag{1.2}$$

Observación. La demostración de este hecho es similar a la del corolario anterior utilizando la fórmula de integración por partes para procesos de Itô por lo cual la omitiremos.

1.2.4. Una Aplicación de la Fórmula de Itô, Teorema de Caracterización de Lévy.

Una caracterización del movimiento Browniano que primeramente fue observada por Paul Lévy es la siguiente: el movimiento Browniano es la única *martingala local* $(M_t)_{t\geq 0}$ continua, $M_0 = 0$, cuadrado integrable y *variación cuadrática* $\langle M,M\rangle_t = t$. Una aplicación de la fórmula de Itô, la cual fue descubierta por Kunita y Watanabe [13] es que se puede dar un prueba bastante elegante de este resultado. Una demostración más parecida a la idea de Lévy y con los conceptos que se conocían hasta ese entonces se puede encontrar en el famoso libro de Doob [7].

Teorema 1.2.5. *(Caracterización de Lévy) Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala continua cuadrado integrable tal que: $B_t = 0$ y $\langle B,B\rangle_t = t$. Entonces B_t es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano.*

Demostración. (*Para procesos de Itô*) Aplicamos la fórmula de Itô para $f(x) = e^{iux}$, lo cual es aplicar la fórmula de Itô para las funciones $f_1(x) = \cos(ux)$ y $f_2(x) = \sin(ux)$ y después sumar $f_1(B_t) + \mathrm{i}f_2(B_t)$. Si $0\leq r < t$ tenemos que:

$$\exp\big(iuB_t\big) = 1 + iu\int_0^t \exp\big(iuB_s\big)\,dB_s - \frac{1}{2}u^2\int_0^t \exp\big(iuB_s\big)\,ds, \quad t\geq 0,$$
$$\exp\big(iuB_r\big) = 1 + iu\int_0^r \exp\big(iuB_s\big)\,dB_s - \frac{1}{2}u^2\int_0^r \exp\big(iuB_s\big)\,ds, \quad t > r\geq 0,$$

restando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$\exp(iuB_t) = \exp\big(iuB_r\big) + iu\int_r^t \exp\big(iuB_s\big)\,dB_s - \frac{1}{2}u^2\int_r^t \exp\big(iuB_s\big)\,ds, \quad t > r\geq 0,$$

Sea $A\in\mathcal{F}_r$ y multiplicamos la última ecuación por $e^{-iuB_r}\cdot\mathbb{1}_A$, tendríamos que:

$$\begin{aligned}\exp\big(iu(B_t - B_r)\big)\cdot\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A + iu\cdot\mathbb{1}_A\int_r^t \exp\big(iu(B_s - B_r)\big)\,dB_s \\ - \frac{1}{2}u^2\int_r^t \exp\big(iu(B_s - B_r)\big)\cdot\mathbb{1}_A\,ds, \quad t > r\geq 0,\end{aligned}$$

Después de tomar esperanza y del hecho de que la integral estocástica es martingala, tenemos

$$\mathbb{E}\left[e^{iu(B_t-B_r)}\cdot \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{P}(A) - \frac{1}{2}u^2\int_r^t \mathbb{E}\left[e^{iu(B_s-B_r)}\cdot \mathbb{1}_A\right]\, ds, \quad t > r \geq 0.$$

Si vemos $t \mapsto \mathbb{E}\left[e^{iu(B_t-B_s)}\cdot \mathbb{1}_A\right]$ como una función continua esto es una ecuación diferencial ordinaria conocida, tendríamos:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu(B_t-B_r)\right)\cdot \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{P}(A)\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^2(t-r)\right), \quad t > r \geq 0,$$

como esto es para todo $A \in \mathcal{F}_r$ con lo que podemos concluir

$$\mathbb{E}\left[e^{iu(B_t-B_r)} \mid \mathcal{F}_r\right] = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-r)}, \quad t > r \geq 0,$$

por lo tanto $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano. ■

1.3. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Una vez que se hubo construido el concepto de de integral estocástica es posible el plantearse ecuaciones integrales sobre procesos estocásticos. Por ejemplo, nos podríamos preguntar cuáles son los procesos estocásticos que satisfacen la ecuación:

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t X(s,\omega)\, dB(s,\omega), \qquad t \geq 0.$$

Sin embargo, es necesario aclarar varios detalles. Procederemos estableciendo lo que es una ecuación diferencial estocástica y lo que es una solución a la misma.

Definición 1.3.1. (*Ecuación diferencial estocástica*) Sean $b,\ \sigma : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Una *ecuación diferencial estocástica* es una ecuación de la forma:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\, dB_s, \qquad t \geq 0, \tag{1.3}$$

siempre que las integrales existan.

Observación. Escribiremos la ecuación (1.3) en su forma diferencial como

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t,\\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

1.3.1. Tipos de Soluciones para una Ecuación Diferencial Estocástica.

Una de las principales diferencias entre las ecuaciones integrales y las ecuaciones diferenciales estocásticas es que éstas últimas depende del espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ y del movimiento browniano $(B_t)_{t\geq 0}$ con el que se éste trabajando. Entonces a priori podría suceder que cierta ecuación tuviese solución en algún espacio de probabilidad y que en otro no tuviese solución. O que si se tienen dos movimientos brownianos definidos en el mismo espacio de probabilidad, que para un movimiento browniano exista solución y que para el otro no.

Definición 1.3.2. *(Solución Débil)* Dado un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ una *solución débil* (en este espacio) para la ecuación (1.3) es un par procesos $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$, tales que:

I) $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, con trayectorias continuas que satisface la ecuación diferencial estocástica (1.3) casi seguramente.

II) $\left(\int_0^t |b(s, X_s)|\ ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\ ds\right) < \infty$,casi seguramente para $t \in [0, \infty)$.

III) $(B_t)_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano.

Observación. Usualmente se suele referirse a una solución débil simplemente como una solución de la ecuación diferencial estocástica.

Definición 1.3.3. *(Solución fuerte)* Dado un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ una *solución fuerte* para la ecuación (1.3) es un par procesos $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$, tales que:

I) $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ es una solución débil para la ecuación (1.3).

II) El proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\overline{\mathcal{F}}_t^B := \sigma(\mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{N})$ donde $\mathcal{N}$ son los conjuntos nulos.

1.3.2. Tipos de Unicidad para una Ecuación Diferencial Estocástica.

Debido a que hay distintas maneras de definir igualdad entre procesos estocásticos, también existen distintos tipos de definir unicidad sobre las soluciones de una ecuación diferencial estocástica.

Definición 1.3.4. *(Unicidad en ley)* Se dice que en la ecuación diferencial estocástica (1.3) hay *unicidad en ley*, si cada vez que se tengan dos soluciones débiles $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ (las cuales pudiesen estar definidas en diferentes espacios de probabilidad) con $X_0 = \widetilde{X}_0$, entonces la ley de probabilidad de $(X_t)_{t\geq 0}$ coincide con la ley de $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$.

Observación. Por el teorema de unicidad de probabilidades, que la ley de estos dos procesos sea la misma, simplemente es que los procesos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ sean equivalentes.

Definición 1.3.5. *(Unicidad trayectorial)* Se dice que en la ecuación diferencial estocástica (1.3) hay *unicidad trayectorial* si cada vez que se tengan dos soluciones débiles $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ y $(X_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ para la ecuación (1.3) (en el mismo espacio de probabilidad) con $X_0 = \widetilde{X}_0$, entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles.

1.3.3. Tiempo Local del Movimiento Browniano

Haremos una pequeña digresión para introducir un nuevo concepto que es el de tiempo local del movimiento Browniano, que resultará ser de suma importancia pues con éste es posible generalizar la fórmula de Itô no solamente para funciones $f \in C^2$ si no también para funciones convexas (más aún suma de convexas). Primeramente trataremos de ver cuál es el tiempo de estancia del movimiento Browniano en el origen, es decir por cada trayectoria del movimiento browniano nos fijaremos en los puntos donde permanece en el origen, con lo cual tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.6. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano en una espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Dado $\omega \in \Omega$ definimos la *estancia en el origen del movimiento Browniano en* ω como el conjunto

$$\mathcal{L}(\omega) := \{\, 0 \leq t < \infty \,:\, B_t(\omega) = 0\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Observación. Primeramente el conjunto antes definido es medible, esto se puede ver ya que $\mathcal{L} := \{(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega \;:\; B(t,\omega) = 0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}$, esto pues $B(t,\omega)$ es medible con lo cual la ω-sección de B es medible, es decir, $B_\omega^{-1}(\{0\}) = \mathcal{L}(\omega) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Una vez que sabemos que este conjunto es medible, lo más sensato sería calcular su medida de Lebesgue, con lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.1. El conjunto $\mathcal{L}(\omega)$ tiene medida de Lebesgue cero $\mathbb{P}$-casi seguramente.

Demostración. Por el teorema de Fubini se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\lambda\left(\mathcal{L}(\omega)\right)\right] = \lambda \otimes \mathbb{P}\left(\mathcal{L}(\omega)\right) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left[B_t = 0\right] dt = 0,$$

ya que $\lambda\left(\mathcal{L}(\omega)\right) \geq 0$ se puede concluir que $\lambda\left(\mathcal{L}(\omega)\right) = 0$ $\mathbb{P}$-casi seguramente. ■

Es decir, de esta manera no se puede obtener información del tiempo que permanece el movimiento browniano en el origen, sin embargo existe otra manera de medir la estancia en el origen (y en general en cualquier punto) del movimiento browniano la cual fue propuesta por Paul Lévy en 1939 (antes de conocer los resultados de Itô) que es

$$L_t^0(\omega) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \lambda\, \{0 \leq s \leq t \;:\; |B_s(\omega)| \leq \varepsilon\} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}(0 \leq |B_s(\omega)| \leq \varepsilon)\; ds$$

y además dió otras equivalencias de esta definición, probó que este límite existe en un cierto sentido, es finito pero no es cero. A estos tipo procesos son a los que llamaremos *tiempos locales.*

Veremos como es que aparece el tiempo local de una manera muy natural al intentar de calcular el valor absoluto al movimiento Browniano.

1.3.4. Fórmula de Tanaka.

Ejemplo 1.3.1. (*Fórmula de Tanaka*) Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano, entonces si definimos

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}) & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

derivando obtenemos entonces que

$$g'_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq \varepsilon, \\ -1 & \text{si } x \leq -\varepsilon, \\ \frac{x}{\varepsilon} & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}$$

veamos que g_ε es C^1 y que $|g''_\varepsilon(x)| \leq 1$ tiene dos puntos de discontinuidades en $\pm\varepsilon$. Con lo cual aplicando la fórmula de Itô al movimiento Browniano B_t tenemos que

$$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(B_0) + \int_0^t g'_\varepsilon(B_s) ds + L_t^0, \quad t \geq 0,$$

y ya que $g_\varepsilon(x) \to |x|$ uniformemente, $g'_\varepsilon(x) \to \operatorname{sgn}(x)$, entonces:

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\; ds + L_t^0, \quad t \geq 0.$$

1.3.5. Ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

En esta parte, presentaremos seis ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas en todos ellos exhibiremos al menos una solución y verificaremos si es solución fuerte o no. Únicamente en tres de ellos hay unicidad trayectorial, sin embargo no seremos capaces de demostrar esto si no hasta la siguiente sección.

Ejemplo 1.3.2. (*Ecuación exponencial*) Nos propondremos a encontrar una solución para la ecuación diferencial estocástica (en su forma diferencial)

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \; dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Supongamos que existe una solución para la ecuación anterior y que ésta siempre es distinta de cero (tal y como se hace en cálculo para resolver la ecuación $dx_t = x_t \; dt$). Al aplicar la fórmula de Itô, al proceso de Itô $X_t = 1 + \int_0^t X_s dB_s$, con la función $f(x) = \log(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \log(X_t) &= \log(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} \; dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t -\frac{1}{X_s^2} \, d\left\langle X, X \right\rangle_s \\ &= \int_0^t \frac{X_s}{X_s} dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{X_s^2}{X_s^2} \; ds \\ &= B_t - t/2 \end{aligned}$$

Finalmente, al volver a aplicar la fórmula de Itô, al movimiento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$, con la función $f(x) = \exp\{x - t/2\}$, podemos ver que en efecto $X_t = \exp\{B_t - t/2\}$ es una solución fuerte de la ecuación, pues claramente para cualquier movimiento Browniano $(B_t)_{t \geq 0}$ el proceso $(\exp\{B_t - t/2\})_{t \geq 0}$ es $\overline{\mathcal{F}}_t^B$-adaptado.

Ejemplo 1.3.3. *(Puente Browniano)* Sea $y(t) = a(1-t) + bt$, es decir, $y(t)$ interpola los puntos $(0, a)$ y $(1, b)$ en $\mathbb{R}^2$, además $y'(t) = b - a$. Esto nos permite escribir:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{b - y(t)}{1 - t}, \qquad t \in [0, 1), \\ y(0) &= a. \end{aligned}$$

En analogía con la ecuación anterior, podemos preguntarnos si existe un proceso que satisfaga la ecuación diferencial estocástica

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t, \qquad t \in [0, 1).$$

Podemos intentar resolver la ecuación de la misma forma que en el ejemplo anterior, es decir, intentar encontrar una función $f(x, t) \in \mathcal{C}^{(2,1)}$ tal que podamos despejar Y_t en términos de B_t, después de haber aplicado la fórmula de Itô. Al aplicarla se tendría que:

$$\begin{aligned} f(Y_t, t) = f(Y_0, 0) &+ \int_0^t f_t(Y_s, s) \; ds + \int_0^t f_x(Y_s, s) \cdot \frac{b - Y_s}{1 - s} \; ds \\ &+ \int_0^t f_x(Y_s, s) \; dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(Y_s, s) \; ds. \end{aligned}$$

Una forma en que se podría conseguir despejar Y_t en términos de B_t, es que el lado derecho de la ecuación anterior ya no dependiese de Y_t, esto es:

$$\begin{aligned}\kappa_1(s) &= f_x(x,s),\\ \kappa_2(s) &= f_t(x,s) + f_x(x,s)\cdot\frac{b-x}{1-s} + \frac{1}{2}f_{xx}(x,s),\end{aligned}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Resolviendo, se puede ver que $f(x,s) = x/(1-s)$ satisface dichas ecuaciones y entonces $\kappa_1(s) = 1/(1-s)$ y $\kappa_2(x) = b/(1-s)^2$. Al aplicar la fórmula de Itô para esta función e integrar por partes se llega a que:

$$\begin{aligned}\frac{Y_t}{1-t} &= a + \int_0^t \frac{b}{(1-s)^2}\,ds + \int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s, && t\in[0,1)\\ \Rightarrow\ Y_t &= a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, && t\in[0,1)\\ &= a(1-t) + bt + B_t - (1-t)\int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2}\,ds, && t\in[0,1).\end{aligned}$$

Finalmente, faltaría comprobar que en efecto el proceso Y_t, definido de esta última manera, es solución de dicha ecuación, lo que se puede lograr al sustituir directamente en la ecuación, esto es:

$$\begin{aligned}Y_0 + \int_0^t \frac{b-Y_t}{1-s}\,ds + B_t &= a + t(b-a) + B_t - \int_0^t\int_0^s \frac{B_u}{(1-u)^2}du\,ds + \int_0^t \frac{B_s}{1-s}\,ds\\ &= a(1-t) + bt + B_t + \int_0^t\left(-\int_0^s \frac{B_u}{(1-u)^2}du + \frac{B_s}{1-s}\right)ds\\ &= a(1-t) + bt + B_t + \int_0^t\left(\int_0^s \frac{1}{1-u}dB_u\right)ds\\ &= a(1-t) + bt + B_t + (1-t)\int_0^t \frac{B_s}{(1-s)^2}\,ds\\ &= Y_t.\end{aligned}$$

Al final se utilizó el hecho de que $(1-t)\int_0^t B_s/(1-s)^2\,ds = \int_0^t\int_0^s 1/(1-u)\,dB_u$. Para probar esta igualdad basta notar que al derivar el lado derecho se obtiene: $-\int_0^t B_s/(1-s)^2 ds + B_t/(1-t)$ y la derivada de el lado izquierdo es $\int_0^t 1/(1-s)dB_s$, estas dos son iguales por la fórmula de integración por partes, es decir, si $\alpha(s) = 1/(1-s)$ se tiene que $\int_0^t \alpha(s)dB_s + \int_0^t B_s\,d\alpha(s) = B_t\alpha(t) - \alpha(0)B_0$. Además, sucede que $L_2 - \lim_{t\uparrow 1}(1-t)\int_0^t 1/(1-s)\,dB_s = 0$, entonces $\lim_{t\uparrow 1} Y_t = b$, es decir este proceso empieza en $a\in\mathbb{R}$ al tiempo $t=0$, termina en $b\in\mathbb{R}$ a tiempo $t=1$ y $\mathbb{E}[Y_t] = at + (1-t)b$. De la misma manera que en el ejemplo anterior ésta es una solución fuerte.

Observemos que en estos dos ejemplos las soluciones encontradas están expresadas en términos del Movimiento Browniano de la ecuación. Es decir, en la primera ecuación, para conocer el valor al tiempo t de la solución, es necesario conocer el valor del Movimiento Browniano únicamente en el tiempo t. Para la segunda ecuación sucede algo parecido, es decir, para conocer el valor de la solución al tiempo t, es necesario conocer el valor del Movimiento Browniano en todo el intervalo $[0,t]$. Esto sucede debido a que son soluciones fuertes (veáse el teorema 2.4.1) . En seguida presentaremos la famosa ecuación de Tanaka la cual no tiene ninguna solución fuerte, a pesar de ello existen soluciones débiles y hay unicidad en ley.

Se define la función signo como $\mathrm{sgn}(x) := \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}}$, es decir, es la derivada por la izquierda de la función $x \to |x|$.

Ejemplo 1.3.4. (*Ecuación de Tanaka*) A continuación estudiaremos la ecuación de Tanaka

$$X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\ dB_s, \quad t \geq 0. \tag{1.4}$$

Sin embargo, hay unicidad en ley ya que $\langle X, X\rangle_t = \int_0^t \big(\mathrm{sgn}(X_s)\big)^2 ds = t$ para todo $t \geq 0$, es decir, cualquier solución es una martingala continua, cuadrado integrable con variación cuadrática igual a t. Por lo cual es un movimiento Browniano (teorema de caracterización de Lévy) y por tanto su ley siempre es la misma.

Ahora veremos que no hay unicidad trayectorial para esta ecuación. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano, entonces el par $(X_t, W_t) := (B_t, \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\ dB_s)$ es solución de (1.4) pues

$$X_t = B_t = \int_0^t \mathrm{X}_s\, dW_s = \int_0^t \big(\mathrm{sgn}(B_s)\big)^2\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Ahora sea $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ una solución (por ejemplo la que acabamos de presentar), debido a que $\int_0^t \mathbb{1}(X_s = 0)\, dB_s = 0$ para todo $t \geq 0$, pues $\mathbb{E}(\int_0^t \mathbb{1}(X_s = 0) dB_s)^2 = \int_0^t \mathbb{P}(X_s = 0)\, ds = 0$, entonces

$$-X_t = -\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\ dB_s = \int_0^t -\mathrm{sgn}(X_s)\ dB_s - 2\int_0^t \mathbb{1}(X_s = 0) dB_s = \int_0^t \mathrm{sgn}(-X_s)\ dB_s,$$

para todo $t \geq 0$. Es decir, $(-X_t, B_t)_{t\geq 0}$ también sería una solución.

Más aún, si $\tau_\theta = \inf\{t \geq \theta : X_t = 0\}$ y definimos $X_t^{(\theta)} = \int_0^t \mathbb{1}(\tau_\theta \leq s) - \mathbb{1}(\tau_\theta > s)\, dX_s$ se verifica que $(X_t^{(\theta)}, B_t)_{t\geq 0}$ también es solución (1.4). Esto pues

$$X_t^{(\theta)} = X_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\, dB_s = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s^{(\theta)})\, dB_s, \quad t \leq \tau_\theta,$$

y también se satisfacen la siguientes igualdades

$$\begin{aligned} X_t^{(\theta)} - X_{\tau_\theta}^{(\theta)} &= \int_{\tau_\theta}^t \mathbb{1}(\tau_\theta \leq s) - \mathbb{1}(\tau_\theta > s)\, dX_s = -X_t + X_{\tau_\theta} & t > \tau_\theta, \\ &= -\int_{\tau_\theta}^t \mathrm{sgn}(X_s)\, dB_s = \int_{\tau_\theta}^t \mathrm{sgn}(-X_s)\, dB_s = \int_{\tau_\theta}^t \mathrm{sgn}\big(X_s^{(\theta)}\big)\, dB_s, & t > \tau_\theta. \end{aligned}$$

Por lo que $(X_t^{(\theta)}, B_t)_{t\geq 0}$ también es solución (1.4).

Ahora probaremos que no hay unicidad trayectorial. Al aplicar la la fórmula de Tanaka a la ecuación diferencial estocástica (1.4) obtenemos

$$|X_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)\, dX_s + L_t^0(X), \quad t \geq 0,$$

en donde $L_t^0(X) = P - \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{1}{2\varepsilon} \displaystyle\int_0^t \mathbb{1}(|X_s| < \varepsilon)\ ds$, entonces

$$B_t = |X_t| - \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}(|X_s| < \varepsilon)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Por esta última igualdad, $(B_t)_{t\geq 0}$ es adaptado a la filtración $\left(\overline{\mathcal{F}}_t^{|X|}\right)_{t\geq 0}$ ya que si $0 \leq s \leq t$ entonces $\mathbb{1}(|X_s| < \varepsilon)$ es $\mathcal{F}_t^{|X|}$-progresivamente medible, de donde (por el teorema de Tonelli) se sigue que también lo es $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbb{1}(|X_s| < \varepsilon)\, ds$. Es decir, B_t es igual (casi seguramente) a un proceso $\mathcal{F}_t^{|X|}$-medible, entonces podemos concluir que:

$$\overline{\mathcal{F}}_t^{B} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_t^{|X|}, \quad t \geq 0.$$

Si $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ fuese una solución fuerte, tendríamos que X_t es adaptado a $\overline{\mathcal{F}}_t^{B}$ con lo cual también se tendría que

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{F}}_t^{X} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_t^{B}, \quad t \geq 0,\\ \Rightarrow\ &\overline{\mathcal{F}}_t^{X} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_t^{|X|}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

Y como también sucede que $\overline{\mathcal{F}}_t^{|X|} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_t^{X}$, entonces se obtendría $\overline{\mathcal{F}}_t^{|X|} = \overline{\mathcal{F}}_t^{X}$ lo cual no es cierto pues $(X_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano.

Ahora veremos qué pasa al elevar al cuadrado la ecuación de Tanaka. Ésta será la primera vez que aparezca esta ecuación que es un caso particular de las ecuaciones que estudiaremos más adelante.

Ejemplo 1.3.5. (*Ecuación del proceso de Bessel cuadrado*) Al aplicar la fórmula de Itô para $f(x) = x^2$ a la ecuación de Tanaka (1.4) obtenemos

$$X_t^2 = 2\int_0^t X_s\, dX_s + \int_0^t \operatorname{sgn}^2(X_s)\, ds = t + 2\int_0^t |X_s|\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variabldе $X_t^2 = Y_t$, la ecuación anterior la podemos reescribir como

$$Y_t = t + 2\int_0^t \sqrt{|Y_s|}\, dB_s, \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

Es decir que $\left(B_t^2, \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s\right)_{t\geq 0}$ es solución de (1.5), en efecto podemos comprobar que

$$\begin{aligned} t + 2\int_0^t \sqrt{|Y_s|} dB_s &= t + 2\int_0^t |B_s| \cdot \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s, && t \geq 0,\\ &= t + 2\int_0^t B_s\, dB_s = t + 2\left(\frac{B_t^2 - t}{2}\right), && t \geq 0,\\ &= B_t^2 = Y_t, && t \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo demostrado anteriormente, podemos concluir que $(B_t)_{t\geq 0}$ no es adaptado a la filtración canónica completada del proceso $\left(\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s\right)_{t\geq 0}$. Sin embargo, sucede que $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sí lo es, como lo veremos a continuación, para ello necesitaremos el siguiente lema de Skorokhod el cual lo tomamos de [9].

Lema 1.3.1. (*Skorokhod*) Sea y una función continua real valuada con dominio $[0, \infty)$ tal que $y(0) \geq 0$. Entonces existe un único par (z, a) de funciones con dominio $[0, \infty)$ tales que

1. Se satisface $z = y + a$.

2. La función z es positiva definida.

3. La función a es creciente, continua, se anula en cero y $\int_0^t z(s)da(s) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Más aún la función a esta dada por $a(t) = \sup_{s\leq t}\{-y(s) \vee 0\}$, para todo $t \geq 0$.

Demostración. Notemos que si t es un punto de crecimiento de la función a, entonces $a(t) = -y(t)$, pues de lo contrario, si $a(t) = -y(s)$ con $s < t$, entonces $a(s) = -y(s)$, por lo cual $\int_0^t a(s)da(s) = \int_0^t -y(s)da(s) \;\Rightarrow \int_0^t z(s)\; da(s) = 0$; es fácil comprobar que a definida de esta manera cumple todo lo demás. Ahora supongamos que existe otro par $(\tilde{z}, \tilde{a})$ ya que $z-\tilde{z} = a-\tilde{a}$ es diferencia de dos funciones crecientes entonces es de variación acotada y utilizando la fórmula de integración por partes y 3 obtenemos que:

$$0 \leq (z-\tilde{z})^2 = 2\int_0^t z(s) - \tilde{z}(s)\; d(a(s)-\tilde{a}(s)) = -2\int_0^t \tilde{z}(s)da(s) - 2\int_0^t z(s)d\tilde{a}(s) \leq 0,$$

de donde deducimos la unicidad. ■

La relevancia de este lema es que es aplicable a la fórmula de Tanaka (véase el ejemplo 1.3.1)

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + L_t^0(B), \quad t \geq 0, \quad \text{donde } L_t^0(B) := P - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{\{|B_s|<\varepsilon\}}\, ds.$$

Tomando $z(t) := |B_t|$, $y(t) := \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$ y $a(t) := L_t^0(B)$. Claramente $t \to L_t^0(B)$ es creciente, continuo y se anula en 0. Sin embargo, probar que el tiempo local satisface la última propiedad del inciso 3 va más allá de lo desarrollado en este trabajo pero se puede consultar la prueba de esto en [22].

Al aplicar el lema de Skorokhod al tiempo local se obtiene que

$$L_t^0(B) = \sup_{s\leq t}\left\{-\int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)dB_s\right\}, \quad t \geq 0,$$

con lo que si $\beta_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)dB_s$ y por lo visto en el ejemplo anterior entonces $\overline{\mathcal{F}}_t^{|B|} = \overline{\mathcal{F}}_t^{\beta}$ y como también $\overline{\mathcal{F}}_t^{B^2} = \overline{\mathcal{F}}_t^{|B|}$, entonces tenemos que la solución a esta ecuación es fuerte.

Otra manera de encontrar soluciones dado un movimiento Browniano $(W_t)_{t\geq 0}$ es definir $Z_t := \left(W_t + \sup_{s\leq t}\{-W_s\}\right)^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sqrt{Z_s}\; dW_s &= \int_0^t \left(W_s + \sup_{u\leq s}\{-W_u\}\right) dW_s \\
&= \frac{W_t^2 - t}{2} + \int_0^t \sup_{u\leq s}\{-W_u\}\, dW_s \\
&= \frac{W_t^2 - t}{2} + W_t \cdot \sup_{s\leq t}\{-W_s\} + \int_0^t -W_s\; d\sup_{u\leq s}\{-W_u\} \\
&= \frac{W_t^2 - t}{2} + W_t \cdot \sup_{s\leq t}\{-W_s\} + \int_0^t \sup_{u\leq s}\{-W_u\}\;\; d\sup_{u\leq s}\{-W_u\} \\
&= \frac{W_t^2 - t}{2} + W_t \cdot \sup_{s\leq t}\{-W_s\} + \frac{\left(\sup_{s\leq t}\{-W_s\}\right)^2}{2} \\
&= \frac{Z_t - t}{2}.
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo es bastante artificial. Su importancia está en que esta ecuación tiene soluciones débiles y fuertes. Además no hay unicidad en ley ni unicidad trayectorial.

Ejemplo 1.3.6. (*Coeficiente* $\sigma = \mathbb{1}(x \neq 0)$) En la siguiente ecuación sucede que no hay unicidad trayectorial y tampoco hay unicidad en ley;

$$X_t = \int_0^t \mathbb{1}(X_s \neq 0)\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Esto ya que, si $(B_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano, tanto $(B_t, B_t)_{t\geq 0}$ como $(0, B_t)_{t\geq 0}$ son soluciones. Ahora estas dos soluciones son fuertes, pero se puede construir una que no lo sea. Sea ξ una variable aleatoria independiente de $(B_t)_{t\geq 0}$ tal que $\mathbb{P}(\xi = 1) = \mathbb{P}(\xi = -1) = 1/2$. Definimos el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ como $X_t := \mathbb{1}_{\{\xi=1\}} B_t$ para todo $t \geq 0$, entonces $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ es una solución donde X_t no es adaptado a $\overline{\mathcal{F}}_t^B$.

Otro ejemplo donde también sucede esto, pero donde los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica son continuos es el siguiente

Ejemplo 1.3.7. (*Itô & Watanabe*) La siguiente ecuación diferencial estocástica

$$X_t = 3\int_0^t \sqrt[3]{X_s}\, ds + 3\int_0^t \sqrt[3]{X_s^2}\, dB_s, \quad t \geq 0,$$

tiene una cantidad no numerable de soluciones de la forma

$$X_t^{(\theta)}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < \tau_\theta, \\ \\ B_t^3(\omega) & \text{si} \quad \tau_\theta < t < \infty, \end{cases}$$

en donde $0 \leq \theta \leq \infty$ y $\tau_\theta(\omega) := \inf\{s \geq \theta : B_s(\omega) = 0\}$ esto se puede ver utilizando la fórmula de Itô con la función $f(x) = x^3$ aplicada a B_t, con la cual se obtiene $B_t^3 = 3\int_0^t B_s\, ds + 3\int_0^t B_s^2\, dB_s$, por lo cual $B_t^3 = 3\int_{\tau_\theta}^t B_s\, ds + 3\int_{\tau_\theta}^t B_s^2\, dB_s$, es decir,

$$X_t^{(\theta)} = 3\int_{\tau_\theta}^t \sqrt[3]{X_s^{(\theta)}}\, ds + 3\int_{\tau_\theta}^t \sqrt[3]{(X_s^{(\theta)})^2}\, dB_s, \quad t > \tau_\theta$$

si $t \leq \tau_\theta$, sucede que $X_t^{(\theta)} = 0$ entonces

$$X_t^{(\theta)} = 3\int_0^t \sqrt[3]{X_s^{(\theta)}}\, ds + 3\int_0^t \sqrt[3]{(X_s^{(\theta)})^2}\, dB_s, \quad t \leq \tau_\theta$$

por lo que no hay unicidad en ley ni en trayectorias. Claramente estas soluciones son fuertes y utilizando el mismo método que en el ejemplo anterior podemos construir soluciones débiles.

1.4. Teoremas sobre Existencia y Unicidad de Soluciones.

En esta sección presentamos el teorema de existencia y unicidad de Itô y los teoremas de unicidad de Yamada & Watanabe de los cuales únicamente damos la demostración de uno de ellos.

1.4.1. Teorema de Existencia y Unicidad de Itô.

Teorema 1.4.1. *(Existencia y unicidad, Itô) Sean* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un movimiento Browniano. Si los coeficientes* $b(t,x)$ *y* $\sigma(t,x)$ *de la ecuación (1.3) satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Existe una constante* $L > 0$ *tal que para todo* $t \geq 0$*;*

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq L|x-y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

2. *Existe* $K > 0$ *tal que para todo* $t \geq 0$ *se tiene:*

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K\big(1 + |x|^2\big), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces existe un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ *que es solución fuerte de (1.3).*

Ahora, existen condiciones suficientes sobre los coeficientes (σ, b) de la ecuación (1) que garantizan unicidad trayectorial. El primer teorema necesita que los coeficientes sean derivables y que su derivada este localmente acotada o lo que es lo mismo que los coeficientes sean localmente Lipschitz, el teorema es el siguiente:

Teorema 1.4.2. *Supóngase que los coeficientes* $b(t,x)$ *y* $\sigma(t,x)$ *son localmente Lipschitz, es decir, para cada entero* $n \geq 1$ *existe* $K_n > 0$ *tal que para todo* $t \geq 0$*,* $|x| \leq n$ *y* $|y| \leq n$*:*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K_n\,|x-y|\,,$$

y además se satisface la condición de crecimiento:

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L\big(1 + |x|^2\big), \quad x \in \mathbb{R},$$

Entonces hay unicidad trayectorial para la ecuación (1.3) y existe una solución débil.

Demostración. Sean $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$, $(\tilde{X}_t, B_t)_{t\geq 0}$ dos soluciones para la ecuación (1.3), S_n el primer momento en que $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\tilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dejan la bola $B(0,n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Al restar las ecuaciones que satisfacen estos procesos obtenemos

$$X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} b(s, X_s^{S_n}) - b(s, \tilde{X}_s^{S_n}) ds + \int_0^{t\wedge S_n} \sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, \tilde{X}_s^{S_n})\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Aplicamos la fórmula de Itô con la función $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}(X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n})^2 = 2&\int_0^{t\wedge S_n} (X_s^{S_n} - \tilde{X}_s^{S_n})\big(b(s, X_s^{S_n}) - b(s, \tilde{X}_s^{S_n})\big)\, ds \\ &+ 2\int_0^{t\wedge S_n} (X_s^{S_n} - \tilde{X}_s^{S_n})\big(\sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, \tilde{X}_s^{S_n})\big)\, dB_s \\ &+ \int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, \tilde{X}_s^{S_n})\big)^2\, ds,\end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$. Al tomar la esperanza de ambos lados de la igualdad y utilizar la condición local de Lipchitz de los coeficientes

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n}\right|^2\right] \leq C_n \int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^{S_n} - \tilde{X}_s^{S_n}\right|^2\right] ds, \quad t \geq 0,$$

donde $C_n := 3 \cdot K_n^2$. Finalmente por la desigualdad de Gronwall se concluye que

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n}\right|^2\right] = 0, \quad t \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente, de la continuidad de los procesos $(X_t^{S_n})_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t^{S_n})_{t\geq 0}$ tenemos que son indistinguibles, por lo que los procesos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ son indistinguibles.

(*Existencia*) Definamos el conjunto de funciones $g_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$g_N(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq N \\ N+1-|x| & \text{si} \quad N < |x| \leq N+1 \\ 0 & \text{si} \ N+1 < |x| \end{cases}$$

Definimos $b^N(s,x) := g_N(x) \cdot b(s,x)$ y $\sigma^N(s,x) := g_N(x) \cdot \sigma(s,x)$, notemos que para todo $x \in \mathbb{R}$ excepto para un conjunto N de medida de Lebesgue cero se tiene:

$$\frac{d}{dx} b^N(s,x) = g_N'(x) b(s,x) + g_N(x) b'(s,x) \leq \sup_{[0,T]\times[N,N+1]} \{|b(s,x)|\} + K_{N+1}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash N,$$

de esto se sigue que $b^N(s,x)$ es Lipchitz continua en la variable x, es decir, satisface la condición 1 del Teorema 1.4.1. Lo mismo sucede con σ. Además, claramente:

$$|b^N(s,x)|^2 + |\sigma^N(s,x)|^2 \leq |b(s,x)|^2 + |\sigma(s,x)|^2 \leq L(1+|x|^2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, que la ecuación diferencial estocástica con coeficientes $b^N(s,x)$, $\sigma^N(s,x)$ tiene una única solución, digamos que es $(X_t^N)_{t\geq 0}$ el proceso que satisface:

$$X_t^N = X_0 + \int_0^t b^N(s, X_s^N)\, ds + \int_0^t \sigma^N(s, X_s^N)\, dB_s, \quad t \in [0,T],$$

para algún movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$. Después de tomar valor absoluto, utilizar la desigualdad del triángulo y tomar el supremo tenemos:

$$\sup_{t\in[0,T]} \{|X_t^N|\} \leq |X_0| + \int_0^T \left|b^N(s, X_s^N)\right| ds + \sup_{t\in[0,T]} \left\{\left|\int_0^t \sigma^N(s, X_s^N)\, dB_s\right|\right\} \quad \mathbb{P}-c.s.$$

Después de elevar al cuadrado, de utilizar las desigualdades de Jensen, Cauchy-Schwarz y la de Doob ($\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^p] \leq (p/(1-p))^p \mathbb{E}[|M_T|^p]$) para $p=2$ tenemos que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \{|X_t^N|^2\}\Big] \leq 3\left(X_0^2 + T\int_0^T \mathbb{E}\Big[\left|b^N(s, X_s^N)\right|^2\Big]\, ds + 4\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \sigma^N(s, X_s^N)\, dB_s\right)^2\right]\right),$$

y al utilizar la condición de crecimiento obtenemos que podemos encontrar un $L_1 > 0$, que depende de T, X_0, L (pero no de N) de tal forma que:

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \{|X_t^N|^2\}\Big] \leq L_1\left(X_0^2 + \int_0^T \mathbb{E}\big[\sup_{u\in[0,s]} \{|X_u^N|^2\}\big]\, ds\right).$$

Por la desigualdad de Gronwall tenemos que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} \{|X_t^N|^2\}\Big] \leq X_0^2 \cdot L_1 \exp\{T \cdot L_1\}.$$

A esta nueva constante la nombraremos $L_2 := L_1 \exp\{TL_1\}$, por la desigualdad de Markov tenemos entonces:

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^N|^2\} > C\Big] \leq \frac{X_0^2 \cdot L_2}{C}, \quad C > 0.$$

Después de tomar el supremo sobre N y hacer tender $C \to \infty$, llegamos a lo siguiente:

$$\lim_{C\to\infty} \sup_N \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^N|^2\} > C\Big] = 0.$$

Podemos tomar una sucesión de enteros crecientes de tal forma que $\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^N|^2\} > N_k\Big] \leq \dfrac{1}{k^2}$ para toda $N \geq N_k$. Ahora notemos que si $N' > N$ y las dos soluciones son tales que $\sup_{t\in[0,T]} |X_t^N| < N$ y $\sup_{t\in[0,T]} |X_t^{N'}| < N$, entonces X_t^N es indistinguible de $X_t^{N'}$. Entonces

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^N - X_t^{N'}|\} > 0\Big] \leq \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^{N'}|\} > N\Big] + \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^N|\} > N\Big], \quad N' > N,$$

aplicando estas desigualdades a la nuestra sucesión $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^{N_k} - X_t^{N_{k+1}}|\} > 0\Big] &\leq \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^{N_{k+1}}|\} > N_k\Big] + \mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^{N_k}|\} > N_k\Big]\\ &\leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{2}{k^2}, \qquad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Por el lema de Borel Cantelli, tendríamos que existe $M \in \mathbb{N}$, de tal forma que:

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{t\in[0,T]}\{|X_t^{N_k} - X_t^M|\} = 0\Big], \quad k \geq M,$$

en efecto, sustituyendo en la primera ecuación y si además $k \geq M$, observamos que:

$$X_t^M = X_0 + \int_0^t b^{N_k}(s, X_s^M)\, ds + \int_0^t \sigma^{N_k}(s, X_s^M)\, dB_s \quad t \in [0,T],$$

es posible ver gracias a la condición de crecimiento que $\sigma^{N_k}(s, X_s^M)$ converge en probabilidad a $\sigma(s, X_s^M)$ y ésta además está acotada uniformemente, por lo que después de tomar el límite se puede concluir. ■

Que los coeficientes $\sigma(x)$ y $b(x)$ de una ecuación diferencial estocástica sean continuos no es suficiente para garantizar que hay unicidad trayectorial. Esto lo hace notar el Ejemplo 1.3.7. Yamada y Watanabe encontraron que imponiendo ciertas condiciones sobre el módulo de continuidad de cada uno de los coeficientes involucrados en la ecuación se puede garantizar que hay unicidad trayectorial.

1.4.2. Teoremas de Yamada & Watanabe.

En su trabajo [21] Yamada y Watanabe mencionan que una vez que Skorokhod [19] obtiene condiciones bastante fuertes para la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas, entonces cobró importancia determinar cuándo hay unicidad, por ello distinguen entre la unicidad trayectorial y la unicidad en ley. Demuestran que bajo ciertas condiciones sobre el módulo de continuidad de los coeficientes es posible asegurar que hay unicidad trayectorial y que ésta es más fuerte que la unicidad en ley. Precisaremos estos resultados más adelante.

Teorema 1.4.3. *(Yamada y Watanabe) Supóngase que los coeficientes de la ecuación (1.3) satisfacen:*

1. *Existe una constante $K > 0$ tal que para todo $t \geq 0$:*
$$|b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$
2. *Existe una función $\rho : [0,\infty) \to [0,\infty)$ estrictamente creciente con $\rho(0) = 0$ tal que para todo $t \geq 0$:*
$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq \rho(|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R},$$
y $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{du}{\rho^2(u)} = \infty$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

Entonces hay unicidad trayectorial para la ecuación (1.3).

La idea de la prueba es la misma que la del Teorema 1.4.2, obtener la desigualdad de Gronwall con la función $\alpha(t) := \mathbb{E}\big[|X_t - \tilde{X}_t|^2\big]$ para concluir que $\mathbb{E}\big[|X_t - \tilde{X}_t|^2\big] = 0$. Se procederá de la misma manera, es decir, se tratará de obtener la desigualdad de Gronwall pero con la función $\beta(t) := \mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|]$. La dificultad de esto proviene de que la función $f(x) = |x|$ no es $\mathcal{C}^2$, por lo que no es posible aplicar la fórmula de Itô directamente a esa diferencia para poder obtener una ecuación integral y después llegar a la desigualdad de Gronwall. En general el que no podamos aplicar la fórmula de Itô por no ser la función que se quiere utilizar de clase $\mathcal{C}^2$, es un problema frecuente con el que nos encontraremos en el presente texto. La manera en que se puede solucionar esto es encontrar una sucesión de funciones $\psi_n(x)$ que sean $\mathcal{C}^2$ aproximen a la función.

Demostración. Dadas las condiciones impuesta al módulo de continuidad de $\sigma(t,x)$, es posible encontrar una sucesión decreciente $\{a_n\} \subset (0,1]$ tal que $a_0 = 1$, $a_n \to 0$ y que $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho^{-2}(u)du = n$, para todo $n \geq 1$. También es posible encontrar para cada $n \geq 1$ una función ρ_n continua en $\mathbb{R}$ tal que: tenga soporte en (a_n, a_{n-1}), $0 \leq \rho_n(x) \leq 2/(n\rho^2(x))$ para $x > 0$ y que $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(x)dx = 1$. Definimos cada función del conjunto $\{\psi_n(x) : n \geq 1\}$ como
$$\psi_n(x) := \int_0^{|x|} \int_0^y \rho_n(u)\ du\ dy, \quad n \geq 1.$$
Entonces ψ_n satisface:

1. $\psi_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es de clase $\mathcal{C}^2$.
2. $\psi_n(x) \uparrow |x|$, ya que $\int_{a_n}^{a_{n-1}} \rho_n(x)dx = 1$ entonces claramente se tiene $\psi_n(x) \leq |x|$, también ya que $\rho_{n+1}(u) \geq \rho_n(u) = 0$ para $u \in [0, a_n]$ con lo cual $\int_0^y \rho_{n+1}(u)du \geq \int_0^y \rho_n(u)du = 0$ si $y \in [0, a_n]$ y finalmente ya que $1 = \int_0^y \rho_{n+1}(u)du \geq \int_0^y \rho_n(u)du$ para $y > a_n$ se puede concluir que ψ_n es monótona creciente, pero entonces ya que $\int_0^y \rho_n(u)du \uparrow 1$ para cada $y > 0$, nuevamente por el teorema de convergencia monótona se puede concluir.
3. $|\psi_n'(x)| \leq 1$, lo cual es claro ya que $\psi_n'(x) = \operatorname{sgn}(x) \int_0^{|x|} \rho_n(u)du$.
4. $0 \leq \psi_n''(x)\rho^2(x) \leq 2/n$, esto ya que $\psi_n''(x) = \rho_n(x)$.

Esta última observación es la que hace especial a la familia de funciones ψ_n, procediendo de la misma manera que en el teorema anterior tenemos que
$$X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} b(s, X_s^{S_n}) - b(s, \tilde{X}_s^{S_n})ds + \int_0^{t\wedge S_n} \sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, \tilde{X}_s^{S_n})\ dB_s, \quad t \geq 0,$$
Adoptaremos la siguiente notación:

1. $\Delta X_t := X_t^{S_n} - \tilde{X}_t^{S_n}$,
2. $b(\Delta X_t) := b(t, X_t^{S_n}) - b(t, \tilde{X}_t^{S_n})$,
3. $\sigma(\Delta X_t) := \sigma(t, X_t^{S_n}) - \sigma(t, \tilde{X}_t^{S_n})$,
4. $t_n := t \wedge S_n$.

y al aplicar la fórmula de Itô para la función ψ_n se tiene que

$$\psi_n(\Delta X_t) = \int_0^{t_n} \psi_n'(\Delta X_t)\, b(\Delta X_t)\; ds + \int_0^{t_n} \psi_n'(\Delta X_t) b(\Delta X_t) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^{t_n} \psi_n''(\Delta X_t)\sigma(\Delta X_t)^2\; ds$$

tomando la esperanza y aplicando Fubini tenemos que:

$$\mathbb{E}\left[\psi_n(\Delta X_t)\right] = \int_0^{t_n} \mathbb{E}\left[\psi_n'(\Delta X_t)\, b(\Delta X_t)\ \right] ds + \frac{1}{2}\int_0^{t_n} \mathbb{E}\left[\psi_n''(\Delta X_t)\sigma(\Delta X_t)^2\ \right] ds$$

De las hipótesis sobre el módulo de continuidad sobre los coeficientes, las desigualdades 3 y 4 que se obtuvieron sobre ψ_n' y ψ_n'' y y de que $t_n \le t$ se llega a que

$$\mathbb{E}\left[\psi_n(\Delta X_t)\right] \le K\int_0^t \mathbb{E}\left[|\Delta X_t|\right] ds + \frac{t}{n}, \quad t \ge 0.$$

Al hacer $n \to \infty$ finalmente se obtiene que

$$\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|] \le K\int_0^t \mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|]\; ds, \quad t \ge 0.$$

Por el lema de Gronwall se puede concluir que uno es modificación del otro y de que $(X_t)_{t\ge 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\ge 0}$ tienen trayectorias continuas se puede concluir que son indistinguibles. ■

Ejemplo 1.4.1. El Teorema 1.4.2 nos asegura que hay unicidad trayectorial para la ecuación:

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha\, dB_s, \quad t \ge 0, \tag{1.6}$$

para $\alpha \ge 1$, debido a que la condición que $\sigma(x) := |x|^\alpha$ sea localmente Lipchitz es equivalente a que $\sigma(x)$ sea derivable excepto para conjunto de medida de Lebesgue cero y que su derivada sea localmente acotada. Esto último se comprueba pues $|\sigma'(x)| \le \alpha|x|^{\alpha-1}$, con lo que $\sigma'(x)$ es localmente acotada, es decir, ya que $|\sigma'(x)| \le \alpha|n|^{\alpha-1}$ si $|x| \le n$ y $\alpha \ge 1$, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$\big||x|^\alpha - |y|^\alpha\big| = |\sigma(x) - \sigma(y)| \le \int_{[x,y]} |\sigma'(s)|\, ds \le \alpha|n|^{\alpha-1}|x-y|, \quad |x|, |y| \le n.$$

Con lo anterior podemos asegurar que hay unicidad trayectorial para la ecuación (1.6), por lo tanto toda solución es la constante 0. Sin embargo, este argumento no funciona para $\alpha < 1$, aun así es cierto que si $1 \ge \alpha \ge 1/2$, entonces hay unicidad trayectorial para la ecuación 1.6. Esto se puede comprobar por el Teorema 1.4.3, ya que si $\rho(x) := x^\alpha$ es concava, entonces

$$\big||x|^\alpha - |y|^\alpha\big| \le |x-y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R},\ \alpha \in [1/2, 1],$$

y además $\int_0^\varepsilon (1/x)^{2\alpha}\, dx \ge \int_0^{1\wedge\varepsilon} 1/x\, dx = \infty$, es decir, se cumplen las hipótesis del Teorema de Yamada-Watanabe y por lo tanto hay unicidad trayectorial y toda solución vuelve a ser la constante 0.

La ecuación de Tanaka (veáse el Ejemplo 1.3.4) muestra que aun cuando hay unicidad en ley para una ecuación diferencial estocástica, esto no asegura que exista unicidad trayectorial. Sin embargo, el recíproco es cierto: si hay unicidad trayectorial entonces hay unicidad en ley. Esto es lo que es lo que afirma el siguente teorema de Yamada-Watanabe [21].

Teorema 1.4.4. *(Yamada & Watanabe) Si hay unicidad trayectorial para la ecuación (1.3) entonces:*

1. *Hay unicidad en ley para la ecuación (1.3).*
2. *Para toda solución $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ existe Ψ*

$$\Psi : (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))) \longrightarrow (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})))$$

medible tal que $X(\omega) = \Psi(B(\omega))$ c.s. En particular toda solución es solución fuerte.

La idea de la demostración del teorema anterior consiste en que dadas dos soluciones $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ en dos espacios de probabilidad distintos, se puede construir una medida de probabilidad Q en el espacio $\big(W \times W \times W, \mathcal{B}(W) \otimes \mathcal{B}(W) \otimes \mathcal{B}(W)\big)$ de tal manera que al definir los procesos estocásticos coordenados $\big(w_t^{(i)}\big)_{t\geq 0}$, para $i = 1, 2, 3$ (con regla de correspondencia dada por $w_t^{(i)}(v) = v_i(t)$ donde $v := (v_1, v_2, v_3) \in W \times W \times W$) se cumple que $(X_t, B_t)_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (w_t^{(1)}, w_t^{(3)})_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (w_t^{(2)}, w_t^{(3)})_{t\geq 0}$ por lo que la Proposición 2.3.2 garantiza que $(w_t^{(1)}, w_t^{(3)})_{t\geq 0}$ y $(w_t^{(2)}, w_t^{(3)})_{t\geq 0}$ satisfacen la misma ecuación diferencial estocástica, por lo que al haber unicidad trayectorial se tiene que $(w_t^{(1)})_{t\geq 0}$ y $(w_t^{(2)})_{t\geq 0}$ son indistinguibles y por lo tanto tienen la misma ley de esto que $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ sean equivalentes.

Sin embargo, se necesita de un amplio conocimiento de la teoría de probabilidad para la construcción de la medida Q del cual no disponemos, por lo cual omitiremos la prueba.

Capítulo 2

Lemas de Doob-Dynkin

Este capítulo tiene como finalidad demostrar el Teorema 2.4.1, que nos da condiciones necesarias para que ciertos procesos sean soluciones fuertes de ecuaciones diferenciales estocásticas y es una especie de recíprco del Teorema 1.4.4. Este resultado corresponde al Teorema 2.1 del artículo de A.S. Cherny [6] y será fundamental para encontrar soluciones fuertes en ecuaciones diferenciales estocásticas. Cherny no lo demuestra en detalle en su artículo y es por eso que se buscó hacer un estudio a partir de otras referencias de manera que el teorema quede demostrado en mayor detalle.

En la Sección 2.1, damos la definición de un espacio de Borel, un isomorfismo de Borel esto para enunciar el teorema de isomorfismo de Borel, del cual no presentaremos una demostración.

En la Sección 2.2, enunciamos y damos la prueba de los lemas de Doob-Dynkin, así como su generalización en espacios de Borel.

En la Sección 2.3, presentamos algunos resultados sobre convergencia en probabilidad y distribución con lo que probamos un resultado auxiliar concerniente a la distribución de la integral estocástica.

En la Sección 2.4, se hace uso de los resultados desarollados en las secciones anteriores para finalmente prensentar la prueba del Teorema 2.4.1.

En la Sección 2.5, damos algunos ejemplos de la función medible que se obtiene del teorema de Doob-Dynkin para procesos estocásticos en donde los procesos son soluciones fuertes de ecuaciones diferencial es estocásticas (E.D.E.).

2.1. Espacios de Borel

Recordemos que la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ está definida como $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\})$. Ahora, si $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ es la topología usual para el conjunto de los reales, debido a que a esta topología es *segundo numerable* (existe una base numerable para esta topología) es posible probar que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. En analogía a lo anterior, para cualquier espacio topológico $(E, \mathcal{T}_E)$ su σ-álgebra de Borel es la σ-álgebra generada por la topología $\mathcal{T}_E$ y se denota por $\mathcal{B}_E := \sigma(\mathcal{T}_E)$. De esta manera, al par $(E, \mathcal{B}_E)$ se le conoce como *espacio de Borel* y a los elementos de esta σ-álgebra los llamaremos *conjuntos de Borel* o simplemente *Borelianos*.

Así por ejemplo, un espacio de particular interés es $\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))\big)$, donde $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ es la σ-álgebra inducida por $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$, es decir $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})) := C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)})$. Por otro lado, el espacio $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ dotado con la topología $\mathcal{T}_d$ generada por la métrica

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x,y)}{2^n} \quad \text{con} \quad d_n(x,y) := \text{mín}\{\sup_{0\leq t\leq n}\{|x(t)-y(t)|\}, 1\}.$$

es completo y separable. Además, la σ-álgebra de Borel del espacio $(C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}), \mathcal{T}_d)$ coincide con la σ-álgebra anterior, es decir, que $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})) = \mathcal{B}_{C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})}$.

En general, si tenemos dos espacios medibles digamos $\mathcal{E} = (E, \mathcal{B}_E)$ y $\mathcal{D} = (D, \mathcal{B}_D)$, nos interesa saber cuando en "esencia" estamos hablando del mismo espacio, por lo que viene natural la siguiente definición.

Definición 2.1.1. *(Isomorfismo de Borel)* Sean $\mathcal{E} = (E, \mathcal{B}_E)$ y $\mathcal{D} = (D, \mathcal{B}_D)$ espacios de Borel. Se dice que $f : E \to D$ es un *isomorfismo de Borel* si f es biyectiva, f es $\mathcal{B}_E/\mathcal{B}_D$ medible y f^{-1} es $\mathcal{B}_D/\mathcal{B}_E$ medible.

Por ejemplo, si $\Pi := (-\pi/2, \pi/2)$, $\mathcal{E} := (\Pi, \mathcal{B}_\Pi)$ y $\mathcal{D} := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, la función $\tan : \Pi \longrightarrow \mathbb{R}$ es un isomorfismo de Borel, más aún es un homeomorfismo. También resulta ser cierto que $\overline{\Pi} = [-\pi/2, \pi/2]$ es isomorfo (en el sentido de Borel) a $\mathbb{R}$. Sin embargo, es bien sabido que estos dos espacios no son homeomorfos, es decir, en cierto sentido la definición de isomorfismo de Borel es menos restrictiva que la de homeomorfismo.

La siguiente definición es esencial para enunciar el teorema de isomorfismos de Borel.

Definición 2.1.2. *(Espacio estándar de Borel)* Se dice que un espacio medible $(E, \mathcal{B})$ es un *espacio de Borel estándar* si existe un isomorfismo de Borel entre $(E, \mathcal{B})$ y un espacio de Borel Polaco.

Observación. Recordemos que un espacio topológico es polaco si es metrizable, segundo numerable y completo.

Es claro que $\overline{\Pi}$ es un espacio de estándar de Borel, pues es métrico, segundo numerable, completo e isomorfo a sí mismo. A pesar de que el espacio Π que con su métrica usual no es completo, es un espacio estándar de Borel, aunque no con el isomorfismo trivial como es en el caso de $\overline{\Pi}$, sí lo es con el isomorfismo antes mencionado. Una vez establecido estos conceptos estamos preparados para enunciar el siguiente teorema del cual su demostración se puede consultar en [20].

Teorema 2.1.1. *(Teorema de isomorfismo de Borel) Sean $(E, \mathcal{E})$ y $(D, \mathcal{D})$ dos espacios de Borel estándar. Entonces hay un isomorfismo de Borel si y solamente si $|E| = |D|$ ($|A|$ denota la cardinalidad de A). En particular cualesquiera dos espacios estándar no-numerables son isomorfos en el sentido de Borel.*

En particular el teorema anterior nos asegura que existe un isomorfismo de Borel entre los espacios $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ y $\big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))\big)$.

2.2. Primeros Lemas de Doob-Dynkin.

Para esta parte nos hemos basado en *Optional Learning from Doob-Dynkin Lemma* [10] en donde se dan distintas versiones de los lemas de Doob-Dynkin.

Lema 2.2.1. *(Doob-Dynkin, Medible)* Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X, Y dos variables aleatorias en él y $\sigma(Y)$ la σ-álgebra generada por Y. Entonces X es $\sigma(Y)$-medible si y solamente si existe una función medible, $\phi : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que

$X(\omega) = \phi(Y(\omega))$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \sigma(Y)) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"'] & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\
(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Si X es de la forma $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$ y es $\sigma(Y)$ medible entonces $A = X^{-1}(\{1\}) = Y^{-1}(B)$ para algún $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, es decir, $X(\omega) = \mathbb{1}_B(Y(\omega)) = \phi(Y(\omega))$ en donde $\phi(x) := \mathbb{1}_B(x)$, así se puede extender esto para X simple, luego positiva y después para cualquier variable aleatoria. El recíproco es inmediato. ■

Lema 2.2.2. *(Doob-Dynkin, Esperanza condicional)* Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria no negativa e integrable, $Y : \Omega \to (E, \mathcal{E})$ y $\mathcal{E}_Y = Y^{-1}(\mathcal{E})$ la σ-álgebra generada por Y. Entonces existe una función medible, $\phi : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}_Y](\omega) = \phi(Y(\omega))$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{E}_Y) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "{\mathbb{E}[X|\mathcal{E}_Y]}"'] & (E, \mathcal{E}) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\
(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el teorema de Radon-Nikodym existe ϕ tal que $\int_{(Y\in A)} X d\mathbb{P} = \int_A \phi(y)\mathbb{P}_Y(dy)$ para todo A Borel-medible, luego por el teorema general de cambio de variable se tiene que $\int_{(Y\in A)} X\, \mathbb{P}(d\omega) = \int_{(Y\in A)} \phi(Y)\, \mathbb{P}(d\omega)$, por lo cual se tiene que $\mathbb{E}[X|\mathcal{E}_Y] = \phi(Y)$. ■

Lema 2.2.3. *(Doob-Dynkin, casi seguramente)* Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $X : \Omega \to (E, \mathcal{E})$, $Y : \Omega \to (D, \mathcal{D})$ y $\mathcal{D}_Y := Y^{-1}(\mathcal{D})$. Si $X(\Omega)$ está contenido en un espacio estándar de Borel y X es $\mathcal{D}_Y/\mathcal{E}$-medible, entonces existe una función medible $\phi : (D, \mathcal{D}) \to (E, \mathcal{E})$ tal que $X(\omega) = \phi(Y(\omega))$ $\mathbb{P}$-casi seguramente, es decir, el siguiente diagrama conmuta casi seguramente

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{D}_Y) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"'] & (D, \mathcal{D}) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\
(E, \mathcal{E}) &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el teorema de isomorfismo de Borel sabemos que existe un isomorfismo $\Phi : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, al aplicar el teorema anterior a $\Phi(X) : (\Omega, \mathcal{D}_Y) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, obtenemos que $\Phi(X) \overset{c.s.}{=} \mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{E}_Y] = \phi(Y)$ con lo cual $X \overset{c.s.}{=} \Phi^{-1}(\phi(Y))$. En forma de diagramas se ve de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{D}_Y) \arrow[r, "Y"] \arrow[d, "X"] \arrow[dd, bend right=60, "{\Phi(X)=\mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{D}_Y]}"'] & (D, \mathcal{D}) \arrow[ddl, dashed, "\phi"] \\
(E, \mathcal{E}) \arrow[d, "\Phi"] & \\
(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) &
\end{tikzcd}$$

■

Lema 2.2.4. *(Completación)* Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra, entonces

$$\overline{\mathcal{G}} = \{A \subseteq \Omega : (\exists\, B \in \mathcal{G})\ A \triangle B \in \mathcal{N}\}$$

en donde $\mathcal{N}$ son los conjuntos $\mathbb{P}$-*nulos con respecto de* $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{N} := \{N \subseteq \Omega : (\exists\, F \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(F) = 0)\ N \subseteq F\}$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{G}^* := \{A \subseteq \Omega : (\exists\, B \in \mathcal{F})\ A \triangle B \in \mathcal{N}\}$ y sea $A \in \mathcal{G}^*$, dado que $A \backslash B$, $B \backslash A \subseteq A \triangle B$, se sigue que $A \backslash B$, $B \backslash A \in \mathcal{N} \subseteq \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$, con lo que $A \cup B = B \cup (A \backslash B) \in \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N})$ y finalmente $A = (A \cup B) \backslash (B \backslash A) \in \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N}) = \overline{\mathcal{G}}$. Es decir $\mathcal{G}^* \subseteq \overline{\mathcal{G}}$. Claramente $\mathcal{G}$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{G}^*$, verificar que $\mathcal{G}^*$ es una σ-álgebra se vuelve un ejercicio de rutina y lo omitiremos. Con ello se obtiene que $\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{G}^*$. ∎

Proposición 2.2.1. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sub-σ-álgebra y $(E, \mathcal{E})$ un espacio de Borel estándar. Entonces $\overline{X} : (\Omega, \overline{\mathcal{G}}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ es medible si y solamente si existe $X : (\Omega, \mathcal{G}) \longrightarrow (E, \mathcal{E})$ medible tal que se satisface que $X = \overline{X}$ $\mathbb{P}$-casi seguramente.

Demostración. Empezaremos suponiendo que $(E, \mathcal{E}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1])$ y además $\overline{X} = \mathbb{1}_A$. Al tomar B como en el Lema 2.2.4 definimos $X := \mathbb{1}_B$, entonces $\mathbb{E}[(X - \overline{X})^2] = \mathbb{E}[(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A \triangle B}] = \mathbb{P}[A \triangle B] = 0$. Ahora, si $\overline{X}$ es $\overline{\mathcal{G}}/\mathcal{B}[0,1]$ medible, sabemos que existe una sucesión $(\overline{X}_n)_{n \geq 0}$ que también es $\overline{\mathcal{G}}/\mathcal{B}[0,1]$ medible de funciones simples, tal que $0 \leq \overline{X}_n \uparrow \overline{X}$ y por lo demostrado anteriormente se puede obtener un sucesión $(X_n)_{n \geq 0}$ satisfaciendo $X_n(\omega) = \overline{X}_n(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega_n$, con $\mathbb{P}[\Omega_n] = 1$. Con lo que finalmente, tomando $X := \limsup_n X_n$, entonces se verifican las siguientes igualdades $X(\omega) = \limsup_n X_n(\omega) = \lim_n \overline{X}_n(\omega) = \overline{X}(\omega)$ para todo $\omega \in \bigcup_n \Omega_n$. Asimismo se cumple $\mathbb{P}[\bigcup_n \Omega_n] = 1$. Por último, sean $(E, \mathcal{E})$ un espacio de Borel estándar y $\overline{X}$ una función $\overline{\mathcal{G}}/\mathcal{E}$ medible. Es válido aplicar el teorema de isomorfismo de Borel con lo que obtenemos $\overline{X} \circ \Phi$ una función $\overline{\mathcal{G}}/\mathcal{B}[0,1]$ medible. Por el resultado anterior existe ξ siendo $\mathcal{G}/\mathcal{B}[0,1]$ medible tal que $\overline{X} \circ \Phi = \xi$ $\mathbb{P}$-casi seguramente, de esta manera $X := \Phi^{-1} \circ \xi = \overline{X}$ $\mathbb{P}$-casi seguramente. ∎

2.3. Convergencia en probabilidad y distribución

Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $(E, \mathcal{E})$ un espacio de Borel, una *función aleatoria* $X : \Omega \to E$ es una función $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-medible. A continuación diremos cuándo una sucesión de funciones aleatorias $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ *converge en probababilidad* y en *distribución* a otra función aleatoria X. Un estudio detallado sobre estos tipos de convergencia se puede encontrar en [2]. Sin embargo, para los fines de este trabajo nos es suficiente el hecho que la convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución y que los límites de estas convergencias son únicos.

Definición 2.3.1. (*Convergencia en probabilidad*) Sean X, $(X_n)_{n \geq 0}$ funciones aleatorias de $X : \Omega \to (E, \mathcal{E})$, donde $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel con métrica ρ. Decimos que X_n converge a X en probabilidad y lo denotamos por $X_n \xrightarrow{P} X$ si

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[\rho(X_n, X) > \varepsilon\right] = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Observación. En principio no es obvio que esta definición sea independiente de la elección de la métrica ρ y que únicamente dependa de la topología de E. Aun así esta afirmación es cierta esto se puede consultar [11].

Definición 2.3.2. (*Convergencia débil*) Sean $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ medidas en probabilidad en un espacio de Borel $(E, \mathcal{E})$. Decimos que μ_n *converge débilmente* a μ si

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\, \mu_n(dx) = \int_E f(x)\, \mu(dx), \quad f \in \mathcal{C}^b(E),$$

donde $\mathcal{C}^b(E) := \{f : (E, \mathcal{T}_E) \to \mathbb{R} \mid f \,\text{es continua y acotada}\}$. Y lo denotamos por $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Definición 2.3.3. (*Convergencia en distribución*) Sean X, $(X_n)_{n\geq 0}$ funciones aleatorias de Ω a $(E, \mathcal{E})$, donde $(E, \mathcal{E})$ es un espacio de Borel. Decimos que X_n *converge en distribución* a X y lo denotamos por $X_n \overset{d}{\to} X$ si

$$\mathcal{L}(X_n) \Rightarrow \mathcal{L}(X), \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}(X_n)$ es la ley de probabilidad inducida por X_n y análogamente con X.

Observación. Por el teorema de cambio de variable la condición (2.1) de la definición anterior es simplemente que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)], \quad f \in \mathcal{C}^b(E).$$

Las medidas en un espacio de métrico (E, ρ) quedan únicamente determinadas por las integrales de las funciones en $\mathcal{C}^b(E)$, en el sentido de que si P yQ son dos medidas de probabilidad tales que $\int_E f(\omega)\, dP(d\omega) = \int_E f(\omega)\, dQ(d\omega)$ para toda función $f \in \mathcal{C}^b(E)$, entonces $P = Q$ (para la demostración de este resultado puede consultarse [2]). Si tenemos que $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, $\widetilde{\mu}_n \xrightarrow{d} \widetilde{\mu}$ y además $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$, entonces $\mu = \widetilde{\mu}$. Nos será de utilidad el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. (*Convergencia en probabilidad y distribución*) Sean $X, X_1, X_2, \cdots$ funciones aleatorias en un espacio de Borel $(E, \mathcal{T}_E)$ con métrica ρ. Entonces $X_n \xrightarrow{P} X$ implica que $X_n \xrightarrow{d} X$.

La siguiente proposición, la cual se encuentra en [22], será de suma utilidad para probar el Teorema 2.4.1, que como mencionamos es uno de los resultados principales del presente trabajo.

Proposición 2.3.2. Sean $(B_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ movimientos Brownianos definidos en espacios de probabilidad filtrados $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \widetilde{\mathbb{P}})$ respectivamente. Sean $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ dos procesos, definidos en los espacios anteriores respectivamente, que cumplen las hipotésis de la Definición 1.2.2 tales que $(X_t, B_t)_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$. Entonces, también se
satisface que $\big((X \cdot B)_t, X_t, B_t\big)_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} \big((\widetilde{X} \cdot \widetilde{B})_t, \widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t\big)_{t\geq 0}$.

Demostración. Empezaremos suponiendo que los integrandos son procesos elementales. Existe una sucesión $\{t_i\}_{i=0}^{n+1} \in \mathbb{R}$ con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$, de tal forma que es posible darles a $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$ las siguientes representaciones

$$X(s, \omega) = \sum_{i=0}^{n} \xi_i(\omega) \cdot \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s), \quad \widetilde{X}(s, \widetilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{\xi}_i(\widetilde{\omega}) \cdot \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(s), \quad s \geq 0.$$

Definimos el conjunto de funciones $f_n : \mathbb{R}^{2n+3} \to \mathbb{R}$ como $f_n(x_0, \cdots, x_n, b_0, \cdots, b_{n+1}) := \sum_{i=0}^{n} x_i(b_{i+1} - b_i)$ que claramente es continua en $\mathbb{R}^{2n+3}$, por lo tanto medible en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n+3})$.

Sea $t \geq 0$, entonces $t_n \leq t$ o existe un único $k \in \{1, \cdots, n\}$ de tal forma que $t_{k-1} \leq t < t_k$; de esta forma $X_t(\omega) = \xi_{k\wedge n}(\omega)$ y $\widetilde{X}_t(\widetilde{\omega}) = \widetilde{\xi}_{k\wedge n}(\widetilde{\omega})$. En particular $X_{t_i} = \xi_i$ y $\widetilde{X}_{t_i} = \widetilde{\xi}_i$. Definimos los siguientes vectores aleatorios $\mathbf{X}_t := (X_{t_0}, X_{t_1}, \cdots, X_{t_{k-1}}, X_t)$ y $\mathbf{B}_t := (B_{t_0}, B_{t_1}, \cdots, B_{t_{k-1}}, B_{t\wedge t_k})$, entonces

$$f_k(\mathbf{X}_t, \mathbf{B}_t) = \sum_{i=0}^{k} X_{t_i} \cdot (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i}) = \sum_{i=0}^{k} \xi_i \cdot (B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i}) := \int_0^t X_s \, dB_s,$$

y de manera análoga:

$$f_k(\widetilde{\mathbf{X}}_t, \widetilde{\mathbf{B}}_t) = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{X}_{t_i} \cdot (\widetilde{B}_{t_{i+1}\wedge t} - \widetilde{B}_{t_i}) = \sum_{i=0}^{k} \widetilde{\xi}_i \cdot (\widetilde{B}_{t_{i+1}\wedge t} - \widetilde{B}_{t_i}) := \int_0^t \widetilde{X}_s \, d\widetilde{B}_s.$$

Denotamos a la terna de la integral, integrando e integrador en el tiempo t por $\mathbb{X}_t := (\int_0^t X_s \, dB_s, X_t, B_t)$ y de forma similar $\widetilde{\mathbb{X}}_t := (\int_0^t \widetilde{X}_s \, d\widetilde{B}_s, \widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)$. Ahora consideramos la función $F_t : \mathbb{R}^{2k+5} \to \mathbb{R}^3$ definida con regla de correspondencia $F_t(\mathbf{x}, x, b) := (f_k(\mathbf{x}), x, b)$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2k+3}$, que claramente es medible. Si B es un Boreliano de $\mathbb{R}^3$ entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\, \mathbb{X}_t \in B \,] &= \mathbb{P}[\, (X_0, \cdots, X_t, B_0, \cdots, B_{t\wedge t_n}, X_t, B_t) \in F^{-1}(B) \,] \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}[\, (\widetilde{X}_0, \cdots, \widetilde{X}_t, \widetilde{B}_0, \cdots, \widetilde{B}_{t\wedge t_n}, \widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t) \in F^{-1}(B) \,] \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}[\, \widetilde{\mathbb{X}}_t \in B \,],
\end{aligned}$$

Mas aún, si $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$ es una sucesión de reales no negativos, definimos $F : (\mathbb{R}^{2k+5})^m \to (\mathbb{R}^3)^m$ la función definida por $F := (F_{s_1}, F_{s_2}, \cdots, F_{s_m})$ (que vuelve a ser medible), una sucesión $B_1, B_2, \cdots, B_m$ de Borelianos de $\mathbb{R}^3$, el conjunto de vectores aleatorios $\mathbf{Y}_t : \Omega \to \mathbb{R}^{2k+5}$ (donde k depende de t) como $\mathbf{Y}_t := (\mathbf{X}_t, \mathbf{B}_t, X_t, B_t)$ y de manera análoga se define $\widetilde{\mathbf{Y}}_t$, para $t \geq 0$, siendo así:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\mathbb{X}_{s_1} \in B_1, \cdots, \mathbb{X}_{s_m} \in B_m\right] &= \mathbb{P}\left[(\mathbf{Y}_{s_1}, \cdots, \mathbf{Y}_{s_m}) \in F^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m)\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}\left[(\widetilde{\mathbf{Y}}_{s_1}, \cdots, \widetilde{\mathbf{Y}}_{s_m}) \in F^{-1}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m)\right] \\
&= \widetilde{\mathbb{P}}\left[\widetilde{\mathbb{X}}_{s_1} \in B_1, \cdots \widetilde{\mathbb{X}}_{s_m} \in B_m\right].
\end{aligned}$$

Es decir, $(\mathbb{X})_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{\mathbb{X}})_{t\geq 0}$ son equivalentes por lo que $(\mathbb{X})_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (\widetilde{\mathbb{X}})_{t\geq 0}$. Ahora, si $(X_t)_{t\geq 0}$ es acotado, también lo es $(\widetilde{X}_t)_{t\geq 0}$. De la definicón dada en el Lema 1.2.1 es claro que $P_n X$ es un proceso elemental con la misma distribución que $P_n \widetilde{X}$ para todo intervalo $[0, T]$. Si $s_0 < s_1 < \cdots < s_m$ es una sucesión de reales no negativos, denotemos por $\mathbb{X}_n^{(k)} := ((P_n X \cdot B)_{t_k}, X_{t_k}, B_{t_k})$ para $k \in \{0, 1, \cdots, m\}$ de manera análoga se define $\widetilde{X}^{(k)}$ y $\mathbb{X}_n := ((P_n X \cdot B), X, B)$ de manera similar definimos $\widetilde{\mathbb{X}}_n$ de lo probado anterior mente estos dos procesos tienen las mismas distribuciones finito dimensionales. Es posible comprobar que

$$\left(\mathbb{X}_n^{(0)}, \mathbb{X}_n^{(1)}, \cdots, \mathbb{X}_n^{(m)}\right) \xrightarrow{P} (\mathbb{X}_{s_0}, \mathbb{X}_{s_1}, \cdots, \mathbb{X}_{s_m}).$$

Si ρ es la métrica usual en $\mathbb{R}^{3(m+1)}$, y tomamos que $\mathbb{Y}_n = \left(\mathbb{X}_n^{(0)}, \mathbb{X}_n^{(1)}, \cdots, \mathbb{X}_n^{(m)}\right)$, $\mathbb{Z} := (\mathbb{X}_{s_0}, \mathbb{X}_{s_1}, \cdots, \mathbb{X}_{s_m})$ obtenemos que:

$$\rho\left(\mathbb{Y}_n, \mathbb{Z}\right) = \sqrt{\sum_{k=0}^{m} \left(\int_0^{s_k} P_n X \, dB_s - \int_0^{s_k} X_s \, dB_s\right)^2}$$

Del hecho de que $L_2 - \text{lím}_n(P_nX \cdot B)_t = (X \cdot B)_t$, $t \geq 0$ y por la desigualdad de Markov

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[\rho(\mathbb{Y}_n, \mathbb{Z}) > \varepsilon\right] &\leq \frac{\mathbb{E}[\rho(\mathbb{Y}_n, \mathbb{Z})^2]}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{m}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{s_k} P_nX\, dB_s - \int_0^{s_k} X_s\, dB_s\right)^2\right]\end{aligned}$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\rho(\mathbb{Y}_n, \mathbb{Z}) > \varepsilon\right] = 0, \quad \varepsilon > 0.$$

De manera análoga se puede comprobar que

$$\left(\widetilde{\mathbb{X}}_n^{(0)}, \widetilde{\mathbb{X}}_n^{(1)}, \cdots, \widetilde{\mathbb{X}}_n^{(m)}\right) \xrightarrow{P} \left(\widetilde{\mathbb{X}}_{s_0}, \widetilde{\mathbb{X}}_{s_1}, \cdots, \widetilde{\mathbb{X}}_{s_m}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo demostrado anteriormente para procesos elementales tenemos que:

$$\left(\mathbb{X}_n^{(0)}, \mathbb{X}_n^{(1)}, \cdots, \mathbb{X}_n^{(m)}\right) \stackrel{(d)}{=} \left(\widetilde{\mathbb{X}}_n^{(0)}, \widetilde{\mathbb{X}}_n^{(1)}, \cdots, \widetilde{\mathbb{X}}_n^{(m)}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, por la unicidad se tiene que:

$$\left(\mathbb{X}_{s_0}, \mathbb{X}_{s_1}, \cdots, \mathbb{X}_{s_m}\right) \stackrel{(d)}{=} \left(\widetilde{\mathbb{X}}_{s_0}, \widetilde{\mathbb{X}}_{s_1}, \cdots, \widetilde{\mathbb{X}}_{s_m}\right).$$

Es decir, las distribuciones finito dimensionales son la mismas. Se procede de manera análoga utilizando el método de truncación para procesos no acotados y entonces se obtiene que $\mathbb{X} \stackrel{(d)}{=} \widetilde{\mathbb{X}}$. ■

2.4. Lema de Doob-Dynkin para Procesos Estocásticos

La primera parte del siguiente teorema es un lema de Doob-Dynkin para procesos estocásticos, de hecho para su demostración solo es necesario que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ sea adaptado $\overline{\mathcal{F}}_t^B$. La segunda parte del teorema es la que es de utilidad para encontrar otras soluciones fuertes.

Teorema 2.4.1. *Sea $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ una solución fuerte para (1.3). Entonces:*

1. *Existe una función medible:*

$$\Psi : (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))) \longrightarrow (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})))$$

   tal que $X(\omega) = \Psi(B(\omega))$ $\mathbb{P}$-c.s..

2. *Si $\widetilde{B}$ es un movimiento Browniano en el espacio de probabilidad filtrado $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}_t, \widetilde{\mathbb{P}})$ y $\widetilde{Z} := \Psi(\widetilde{B})$, entonces $(\widetilde{Z}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ es una solución fuerte para (1.3).*

Demostración. Sea $(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})), W)$ el espacio de Wiener y $(x_t)_{t\geq 0}$ el proceso coordenado, es decir, $x_t : C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donde $x_t(\omega) = \omega(t)$, $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ los conjuntos nulos de W y $\mathbb{P}$ en las σ-álgebras $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$ y $\mathcal{F}$ respectivamente, $\mathcal{G}_t^0 := \sigma(x_s : s \leq t)$, $\mathcal{G}_t := \sigma(\mathcal{G}_t^0 \cup \mathcal{N})$. Primeramente, observemos que $B^{-1}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{M}$ (si $N \subseteq A$ con $W(A) = 0$, se sigue que $B^{-1}(N) \subseteq B^{-1}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B^{-1}(A)) = W(A) = 0$, lo cual implica que $B^{-1}(N) \in \mathcal{M}$). Ahora, notemos que para cada $q \in \mathbb{Q}^+$, se satisface:

$$\begin{aligned}B^{-1}(\mathcal{G}_q^0) = B^{-1}\left(\sigma\left(\textstyle\bigcup_{s\leq q} x_s^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)\right) &= \sigma\left(\textstyle\bigcup_{s\leq q} B^{-1}\left(x_s^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right)\right) \\ \subseteq \sigma\left(\textstyle\bigcup_{s\leq q} (x_s \circ B)^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) &= \sigma\left(\textstyle\bigcup_{s\leq q} B_s^{-1}\mathcal{B}(\mathbb{R})\right) = \mathcal{F}_q^B\end{aligned}$$

Al ser $(X_t)_{t\geq 0}$ solución fuerte, en particular X_q es $\overline{\mathcal{F}}_q^B/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible, por el Lema 2.2.1 existe $\widetilde{X}_q$ que es $\mathcal{F}_q^B/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible con $\widetilde{X}_q = X_q$ casi seguramente. Entonces en el siguiente diagrama todas las funciones son medibles, así pues, al aplicar el Lema 2.2.1 es posible completar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\Omega, \mathcal{F}_q^B) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\widetilde{X}_q"'] & (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{G}_q^0) \arrow[dl, dashed, "\xi_q"] \\
(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $\widetilde{X}(\omega)_q = \xi_q(B(\omega))$ y además $X_q = \xi_q(B)$ $\mathbb{P}$-casi seguramente, definimos

$$A := \{x \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) : (\exists\, \tilde{x} \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))\; \widetilde{x}_q = \xi_q(x)\; \forall\, q \in \mathbb{Q}^+\},$$

Si $\Omega_q := \{\omega \in \Omega : X_q(\omega) = \xi_q(B(\omega))\; \forall\, q \in \mathbb{Q}_+\}$, ya que X tiene trayectorias continuas sucede que $B\big(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \Omega_q\big) \subseteq A$, por lo tanto $\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \Omega_q \subseteq B^{-1}\big(B\big(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \Omega_q\big)\big) \subseteq B^{-1}(A)$ y entonces $1 = \mathbb{P}[\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \Omega_q] \leq \mathbb{P}[B^{-1}\big(B\big(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_+} \Omega_q\big)\big)] \leq \mathbb{P}[B^{-1}(A)] = W(A)$. Es decir, que $A \in \mathcal{G}_0$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, el proceso $\Psi_t^{(n)} : (C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \mathcal{G}_t) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, definido como

$$\Psi_t^{(n)}(x) := \xi_0(x)\mathbb{1}_{\{t=0\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{k/2^n}(x)\mathbb{1}_{\{k/2^n < t \leq (k+1)/2^n\}}$$

es progresivamente medible. Por lo tanto

$$\Psi_t(x) = \mathbb{1}_{\{x\in A\}} \cdot \limsup_{n\to\infty} \Psi_t^{(n)}(x)$$

sigue siendo progresivamente medible y continuo para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$. Si $\mathcal{G} := \overline{\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))} = \sigma(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \cup \mathcal{N})$, entonces Ψ es $\mathcal{G}/\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$-medible. Por la Proposición 2.2.1 existe Φ que es $\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})/\mathcal{B}(C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$-medible y tal que $\Phi(x) = \Psi(x)$ W- casi seguramente. Con lo que $\Psi(B(\omega)) = \Phi(B(\omega))$ $\mathbb{P}$-c.s, pero ya que también $X_q(\omega) = \xi_q(\omega) = \Psi_q(\omega)$ $\mathbb{P}$-c.s. Si $q_n \in \mathbb{Q}_+$ es tal que $q_n \to t \in \mathbb{R}^+$ entonces $X_t(\omega) = \lim_n X_{q_n}(\omega) = \lim_n \Psi_{q_n} = \Psi_t(\omega) = \Phi_t(\omega)$ $\mathbb{P}$-c.s.

La segunda parte del teorema es evidente de la Proposición 2.3.2 pues $(\Psi(B), B) = (X, B) \overset{(d)}{=} (\widetilde{X}, \widetilde{B}) = (\Psi(\widetilde{B}), \widetilde{B})$ por lo que $(X \cdot B, X, B) \overset{(d)}{=} (\widetilde{X} \cdot \widetilde{B}, \widetilde{X}, \widetilde{B})$ entonces

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dB_s \quad \mathbb{P}\text{−c.s.}$$

si y solamente si

$$\widetilde{X}_t = \widetilde{X}_0 + \int_0^t b(\widetilde{X}_s)\, ds + \int_0^t \sigma(\widetilde{X}_s)\, d\widetilde{B}_s \quad \widetilde{\mathbb{P}}\text{−c.s.}$$

■

2.5. Algunos Ejemplos

Ejemplo 2.5.1. (*Ejemplos de* Ψ) En seguida recopilamos la Ψ que fue posible encontrar en cada uno de los ejemplos anteriores. En el caso de que no existe unicidad trayectorial o no existe dicha función o no es única.

Ecuación Diferencial Estocástica	Unicidad Trayectorial	$\Psi_t(x)$
$X_t = 1 + \int_0^t X_s \, dB_s$	✓	$\exp\{x_t - t/2\}$
$Y_t = a + \int_0^t \frac{b-Y_s}{1-s} \, ds + B_t$	✓	$a(1-t) + bt + x_t + (1-t)\int_0^t \frac{x_s}{(1-s)^2} \, ds$
$X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s) \, dB_s$	×	No existe
$Y_t = t + 2\int_0^t \sqrt{\lvert Y_s \rvert} \, dB_s$	✓	$(x_t + \sup_{s \le t}\{-x_s\})^2$
$X_t = \int_0^t \mathbb{1}(X_s \neq 0) \, dB_s$	×	x_t
$X_t = 3\int_0 \sqrt[3]{X_s} \, ds + 3\int_0^t \sqrt[3]{X_s^2} \, dB_s$	×	$\mathbb{1}_{\{\tau_\theta < t\}} x_t^3$

Tabla 2.1: Ejemplos.

En la primera ecuación diferencia estocástica $X_t = 1 + \int_0^t X_s \, dB_s$, que se vió en el Ejemplo 1.3.2 tiene una solución fuerte $X_t = \exp\{B_t - t/2\}$. Resulta interesante que la solución a tiempo t puede expresarse solamente en términos de del movimiento Browniano al tiempo t es decir no es necesario conocer el movimiento Browniano en todo el intervalo $[0, t)$. Por lo que, las conclusiones sobre la función Ψ del teorema 2.4.1 para esta ecuación son menos restrictivas, es decir, la función $\Psi_t(B)$ más que ser $\sigma(B_s : s \le t)$-medible simplemente es $\sigma(B_t)$-medible. Por otro lado, un ejemplo donde no sucede esto es en la ecuación:

$$Y_t = t + 2\int_0^t \sqrt{|Y_s|} \, dB_s, \quad t \ge 0, \tag{2.2}$$

que por el Teorema 1.4.3 hay unicidad trayectorial por lo tanto toda solución es fuerte. Como vimos en el Ejemplo 1.3.5 una manera rápida de encontrar soluciones para la ecuación anterior es proponer

$$Y_t = W_t^2, \qquad B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) \, dW_s, \quad t \ge 0.$$

A la luz del punto uno del Teorema 2.4.1 sabemos entonces que W_t^2 se puede escribir en "términos" de $\int_0^t \operatorname{sgn}(W_s) \, dW_s$, esto se logró conseguir en el Ejemplo 1.3.5 con ayuda del Lema de Skorokhod (Lema 1.3.1). Por el inciso dos del Teorema anterior también es inmediato que

$$Y_t = (W_t + \sup_{\{s \le t\}} \{-W_s\})^2, \qquad B_t = W_t, \quad t \ge 0,$$

siempre es solución para la ecuación (2.2) para todo movimiento Browniano $(W_t)_{t \ge 0}$. Es decir, que a luz de este teorema las últimas cuentas del Ejemplo 1.3.5 están de más. Por otra parte, $\Psi_t(B) = (B_t + \sup_{s \le t}\{-B_s\})^2$ es en efecto $\sigma(B_s : s \le t)$-medible y no solamente $\sigma(B_t)$-medible. Más adelante mostraremos que una solución fuerte para

$$Z_t = t \cdot d + 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|} \, dB_s, \quad t \ge 0,$$

está dada por

$$Z_t = \left(B_t^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(B_t^{(d)}\right)^2, \quad B_t = \int_0^t \frac{B_s^{(1)}}{\sqrt{Z_s}} \, dB_s^{(1)} + \cdots + \int_0^t \frac{B_s^{(d)}}{\sqrt{Z_s}} \, dB_s^{(d)}, \quad t \ge 0.$$

Encontrar Ψ_t de tal forma que

$$\Psi_t\left(\int_0^{\cdot} \frac{B_s^{(1)}}{\sqrt{Z_s}}\, dB_s^{(1)} + \cdots + \int_0^{\cdot} \frac{B_s^{(d)}}{\sqrt{Z_s}}\, dB_s^{(d)}\right) = \left(B_t^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(B_t^{(d)}\right)^2, \quad t \geq 0.$$

parece ser bastante más complicado por tal razón es importante tener un resultado de existencia.

Capítulo 3

El Proceso Bessel Cuadrado y el Proceso de Bessel.

Este capítulo tiene como finalidad presentar a los procesos de Bessel y a los procesos Bessel Cuadrado, primeramente de dimensión d entera positiva, para después extender su definición por medio de ecuaciones diferenciales estocásticas a cualquier dimensión $\delta \geq 0$.

En la Sección 3.1, nos limitamos a dar la definición de un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano d-dimensional, con el fin de construir el proceso Bessel Cuadrado de dimensión d y al proceso de Bessel d-dimensional.

En la Sección 3.2, definimos con base en el movimiento Browniano d-dimensional el proceso Bessel Cuadrado de dimensión d y el proceso de Bessel de dimensión d. Probamos que si $d \geq 1$ el proceso Bessel Cuadrado es solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica. Por otro lado, probamos que si $d \geq 2$ entonces el proceso de Bessel de igual manera es solución fuerte de otra ecuación diferencial estocástica.

En la Sección 3.3, se generaliza la definición de proceso Bessel Cuadrado para dimensión $\delta \geq 0$, por medio de una ecuación diferencial estocástica. Se calcula la densidad para el proceso Bessel Cuadrado con lo que es posible demostrar que si $\delta > 1$ entonces el proceso de Bessel de dimensión $\delta > 1$ también satisface una ecuación diferencial estocástica. Finalmente, vemos que el proceso de Bessel no es un proceso de Itô para $\delta < 1$.

En la Sección 3.4, presentamos la fórmula de Itô-Tanaka.

3.1. Movimiento Browniano d-Dimensional

Definición 3.1.1. (*Movimiento Browniano d-dimensional*) Sea d un entero positivo y $(W_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, que toma valores en $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$, definido en algún espacio de probabilidad. A este proceso lo llamaremos *$\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano d-dimensional* centrado en $x \in \mathbb{R}^d$ si:

1. $W_0 = x$ c.s.

2. $W_t - W_s$ tiene distribución normal con media cero y matriz de covarianza $(t-s)\mathbb{I}_d$, donde $\mathbb{I}_d$ es la matriz identidad de $d \times d$ y además $0 \leq s < t$

3. $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s$, para $0 \leq s < t$

4. $(W_t)_{t\geq 0}$ tiene trayectorias continuas

Proposición 3.1.1. Si $(W_t)_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano d-dimensional, donde $W_t = \big(W_t^{(1)}, \cdots, W_t^{(d)}\big)$, entonces

I.- $(W_t^{(i)})_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano, para $1 \leq i \leq d$.

II.- $\langle W_t^{(i)}, W_t^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \cdot t$, para $1 \leq i, j \leq d$.

Demostración. (I) De que $\sigma(W_t^{(i)} - W_s^{(i)}) \subseteq \sigma(W_t - W_s)$ para $0 \leq s < t$, se tiene que es $(W_t^{(i)})_{t\geq 0}$ es $\mathcal{F}_t$-adaptado y que $W_t^{(i)} - W_s^{(i)}$ es independiente a $\mathcal{F}_s$. Que $W_t^{(i)} - W_s^{(i)}$ tiene distribución $N(0, t-s)$ se sigue del inciso 3. Para probar II basta ver que si $i \neq j$, entonces $W_t^{(i)} \cdot W_t^{(j)}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala, esto pues si adoptamos la notación $\Delta X_t := X_t - X_s$, sucede que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\big[W_t^{(i)} W_t^{(j)} | \mathcal{F}_s\big] &= \mathbb{E}\big[\Delta W_t^{(i)} \Delta W_t^{(j)} | \mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[\Delta W_t^{(i)} W_s^{(j)} | \mathcal{F}_s\big] \\ &+ \mathbb{E}\big[\Delta W_t^{(j)} W_s^{(i)} | \mathcal{F}_s\big] + \mathbb{E}\big[W_s^{(i)} W_s^{(j)} | \mathcal{F}_s\big] \\ &= W_s^{(i)} W_s^{(j)}. \end{aligned}$$

■

3.2. Los Procesos de Bessel y Bessel Cuadrado de Dimensión Entera Positiva.

La manera en que introduciremos el proceso Bessel Cuadrado es la siguiente. Consideremos un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano $(W_t)_{t\geq 0}$ d-dimensional con $d \geq 1$ tal que $W_0 = x \in \mathbb{R}^d$ *c.s.*. Ahora fijémonos en la distancia de este movimiento Browniano al origen, es decir, en el proceso estocástico

$$\rho_t := ||W_t||_2 = \Big[\big(W_t^{(1)}\big)^2 + \ \cdots + \ \big(W_t^{(d)}\big)^2\Big]^{1/2}, \quad t \geq 0,$$

y definimos $(Z_t)_{t\geq 0}$ como el proceso $Z_t := \rho_t^2$, para todo $t \geq 0$, estos son respectivamente el proceso de Bessel y el proceso de Bessel Cuadrado de dimensión $d \in \mathbb{N}$.

Definición 3.2.1. *(Proceso Cuadrado de Bessel)* Al proceso $(Z_t)_{t\geq 0}$ lo llamaremos proceso de Cuadrado Bessel de dimensión d centrado en x y lo denotaremos como $BESQ(x, d)$.

Definición 3.2.2. *(Proceso de Bessel)* Al proceso $(\rho_t)_{t\geq 0}$ lo llamaremos proceso de Bessel de dimensión d centrado en x y lo denotaremos como $BES(x, d)$.

Observación. Cada uno de estos procesos es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ del movimiento Browniano d-dimensional, ya que cada $W_t^{(i)}$ es adaptado a esta filtración para todo $i \in \{1, 2, \cdots, d\}$.

3.2.1. Ecuación Diferencial Estocástica del Proceso Bessel Cuadrado de Dimensión Entera.

En seguida nos enfocaremos en demostrar que el proceso Bessel Cuadrado de dimensión d, donde d es un entero mayor o igual que 1, es solución fuerte de una ecuación diferencial estocástica.

Proposición 3.2.1. (*E.D.E del Proceso Bessel Cuadrado d-dimensional.*) El proceso Bessel Cuadrado de dimensión $d \geq 1$ satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$Z_t = Z_0 + t \cdot d + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, dB_s, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

para algún $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano $(B_t)_{t\geq 0}$.

Demostración. Aplicamos la fórmula de Itô con $f(x) := x^2$ para cada coordenada del movimiento Browniano, es decir a cada $\left(W_t^{(i)}\right)_{t\geq 0}$ en donde $1 \leq i \leq d$. Se tiene que

$$\left(W_t^{(i)}\right)^2 = \left(W_0^{(i)}\right)^2 + t + 2\int_0^t W_s^{(i)}\, dW_s^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Luego, sumamos estas ecuaciones sobre $i = 1, \cdots, d$, y obtenemos que:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0 + t \cdot d + 2\sum_{i=1}^{d} \int_0^t W_s^{(i)}\; dW_s^{(i)} \\ &= Z_0 + t \cdot d + 2\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \sqrt{Z_s} \cdot \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\; dW_s^{(i)} \\ &= Z_0 + t \cdot d + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\; dB_s \end{aligned}$$

en donde $B_t := \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}} dW_s^{(i)}$. Solamente falta comprobar que $(B_t)_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano, esto pues $(B_t)_{t\geq 0}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala continua, esto ya que cada sumando $\displaystyle\int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}} dW_s^{(i)}$ es una $\mathcal{F}_t$-martingala continua. Veamos que $(B_t)_{t\geq 0}$ es cuadrado integrable.

$$\mathbb{E}\left[B_t^2\right] = \sum_{i,j=1}^{d} \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{W_s^{(i)} W_s^{(j)}}{Z_s} d\langle W_s^{(i)}, W_s^{(j)}\rangle_s\right] = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{\left(W_s^{(i)}\right)^2}{Z_s} ds\right] = d \cdot t.$$

La primera igualdad se da al aplicar la fórmula de integración por partes a los procesos $(W_t^{(i)})_{t\geq 0}$ y $(W_t^{(j)})_{t\geq 0}$ para $i, j \in \{1, 2 \cdots, d\}$ y después tomar la esperanza. La segunda igualdad es consecuencia de la Proposición 3.1.1. Ahora, calculemos la variación cuadrática de $(B_t)_{t\geq 0}$:

$$\langle B, B\rangle_t = \sum_{i,j=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)} W_s^{(j)}}{Z_s} d\langle W_s^{(i)}, W_s^{(j)}\rangle_s = \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{\left(W_s^{(i)}\right)^2}{Z_s} ds = \int_0^t \frac{Z_s}{Z_s}\, ds = t.$$

Por lo tanto $(B_t)_{t\geq 0}$ es un $\mathcal{F}_t$-Movimiento Browniano. Es decir, una solución para (3.1) es el par

$$(Z_t, B_t) = \left(\sum_{i=1}^{d} \left(W_t^{(i)}\right)^2, \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\, dW_s^{(i)}\right), \quad t \geq 0.$$

De los resultados de Yamada & Watanabe, se sigue que hay unicidad trayectorial, por lo cual esta solución es fuerte. ∎

3.2.2. Ecuacion Diferencial Estocástica del Proceso de Bessel de Dimensión Entera.

Ahora demostraremos que el proceso de Bessel, de dimensión entera $d \geq 2$, es solución fuerte de cierta ecuación diferencial estocástica.

La primera referencia que se tiene acerca de este hecho se encuentra en uno de los trabajos de McKean [17] de 1960, en donde demuestra que el proceso de Bessel, de dimensión entera $d \geq 2$, satisface la ecuación

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{d-1}{2 \cdot \rho_s} ds + \widetilde{B}_t, \quad t \geq 0,$$

para algún movimiento Browniano $(\widetilde{B}_t)_{t \geq 0}$. Sin embargo, por la manera en que McKean probó esto no le fue posible encontrar un relación directa entre este movimiento Browniano $(\widetilde{B}_t)_{t \geq 0}$ y el movimiento Browniano d-dimensional subyacente en la definición del proceso de Bessel.

La demostración de que el proceso de Bessel satisface la ecuación anterior la hemos tomado de [12].

Proposición 3.2.2. (*Ecuación estocástica del proceso de Bessel de dimensión entera*) El proceso de Bessel $(\rho_t)_{t \geq 0}$ de dimensión entera $d \geq 2$ satisface la siguiente ecuación estocástica

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{d-1}{2 \cdot \rho_s} ds + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\rho_s} dW_s^{(i)}, \quad t \geq 0$$

Demostración. Como la función $x \to \sqrt{x}$ no es $\mathcal{C}^2$ debemos aproximar por la siguiente familia de funciones $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y para cada $\varepsilon > 0$ definiremos $g_\varepsilon(y) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$g(y) := \sqrt{y}, \qquad g_\varepsilon(y) := \begin{cases} \dfrac{3\sqrt{\varepsilon}}{8} + \dfrac{3y}{4\sqrt{\varepsilon}} - \dfrac{y^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} & \text{si } y < \varepsilon, \\ \sqrt{y} & \text{si } y \geq \varepsilon, \end{cases}$$

ésta última es continua y así también

$$g'_\varepsilon(y) = \left(\frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{y}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{y<\varepsilon\}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{y \geq \varepsilon\}}$$
$$g''_\varepsilon(y) = \left(-\frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{y<\varepsilon\}} - \left(\frac{1}{4y\sqrt{y}} \right) \cdot \mathbb{1}_{\{y \geq \varepsilon\}},$$

Es decir, $g_\varepsilon(y)$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y además es claro que $g_\varepsilon(y) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} g(y)$. Siendo así podemos aplicar la fórmula de Itô al proceso Z_t, viéndolo como un proceso de Itô de la forma:

$$dZ_t = d \cdot dt + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\delta} W_t^{(i)} \, dW_t^{(i)}.$$

Con lo que también tendríamos $\langle Z, Z \rangle_t = 4 \int_0^t Z_s \, ds$ o en forma diferencial $(dZ_t)^2 = 4Z_t \, dt$. Después de aplicar la fórmula de Itô para $g_\varepsilon(y)$, obtenemos que

$$g_\varepsilon(Z_t) = g_\varepsilon(Z_0) + \int_0^t g'_\varepsilon(Z_s) \, dZ_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''_\varepsilon(Z_t) \, d \left\langle Z, Z \right\rangle_s, \quad t \geq 0,$$

entonces después de "sustituir"los diferenciales dZ_s, $\left\langle Z, Z \right\rangle_s$ en la ecuación anterior

$$g_\varepsilon(Z_t) = g_\varepsilon(Z_0) + \int_0^t \Big(d \cdot g'_\varepsilon(Z_s) + 2Z_s \cdot g''_\varepsilon(Z_s) \Big) \, ds + 2 \cdot \sum_{i=1}^{d} \int_0^t g'_\varepsilon(Z_s) \cdot W_s^{(i)} \, dW_s^{(i)}, \quad t \geq 0.$$

Empezaremos analizando el segundo sumando del lado derecho de la ecuación anterior, desarrollando tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^t d\cdot g'_\varepsilon(Z_s)+2Z_s\cdot g''_\varepsilon(Z_s)\,ds &= \int_0^t \left(\frac{3d}{4\sqrt{\varepsilon}}-\frac{Z_s\cdot d}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}+\left(\frac{d}{2\sqrt{Z_s}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\,ds\\ &+\int_0^t\left(-\frac{Z_s}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}-\left(\frac{Z_s}{2Z_s\sqrt{Z_s}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\\ &=\int_0^t\left(\frac{3d}{4\sqrt{\varepsilon}}-\frac{Z_s}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)(d+2)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}+\int_0^t\frac{d-1}{2\sqrt{Z_s}}\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\,ds,\end{aligned}$$

una vez desarrollado este cálculo, vemos que la expresión con la que empezamos es

$$\begin{aligned}g'_\varepsilon(Z_t)=g'_\varepsilon(Z_0)+&\int_0^t\frac{d-1}{2\sqrt{Z_s}}\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\,ds+2\cdot\sum_{i=1}^d\int_0^t g'_\varepsilon(Z_s)\cdot W_s^{(i)}\,dW_s^{(i)}\\ &+\int_0^t\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3d-\frac{Z_s}{\varepsilon}(d+2)\right)\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\,ds,\quad t\geq 0.\end{aligned}$$

Una vez que hemos simplificado este cálculo, ya estamos en posibilidad de determinar en dónde se da la convergencia de cada uno de los términos anteriores y a qué convergen. Para esto convendremos adoptar la siguiente notación

$$\begin{aligned}I_t^{(i)}(\varepsilon)&:=\int_0^t 2\cdot g'_\varepsilon(Z_s)\cdot W_s^{(i)}\,dW_s^{(i)}, && t\geq 0,\\ J_t(\varepsilon)&:=\int_0^t\frac{d-1}{2\sqrt{Z_s}}\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\,ds, && t\geq 0,\\ K_t(\varepsilon)&:=\int_0^t\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3d-\frac{Z_s}{\varepsilon}(d+2)\right)\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\,ds, && t\geq 0.\end{aligned}$$

Ahora analizaremos el segundo término que es quizá el más fácil, por el teorema de convergencia monótona tenemos que

$$J_t(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{c.s}\int_0^t\frac{d-1}{2\sqrt{Z_s}}\,ds,\quad t\geq 0,.$$

En seguida veremos que es posible acotar el integrando de $K_t(\varepsilon)$, esto debido a que en particular sabemos $d\geq 1$, entonces es fácil comprobar que se cumplen la siguiente serie de desigualdades:

$$0\leq\left(\frac{2d-2}{4\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\leq\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3d-\frac{Z_s}{\varepsilon}(d+2)\right)\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\leq\frac{3d}{4\sqrt{\varepsilon}}\cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}.$$

Ya que el proceso Z_s es medible, entonces $\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}$ es medible en el σ-álgebra del producto y no negativa, lo mismo sucede para cada término que aparece en las desigualdades anteriores. Por el teorema de Tonelli y las cotas obtenidas previamente, queda que:

$$0\leq\mathbb{E}\big[K_t(\varepsilon)\big]\leq\left(\int_0^t\mathbb{P}[Z_s<\varepsilon]\,ds\right)\left(\frac{3d}{4\sqrt{\varepsilon}}\right),\quad t\geq 0.$$

Hasta este momento no hemos utilizado la condición $d\geq 2$, en lo siguiente se verá la relevancia de esta condición. Notemos que

$$\mathbb{P}\big[Z_s<\varepsilon\big]=\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^d\big(W_s^{(i)}\big)^2<\varepsilon\right]\leq\mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^2\big(W_s^{(i)}\big)^2<\varepsilon\right]=\mathbb{P}\left[\left(\frac{W_s^{(1)}}{\sqrt{s}}\right)^2+\left(\frac{W_s^{(2)}}{\sqrt{s}}\right)^2<\frac{\varepsilon}{s}\right].$$

Entonces, como $\left(\frac{W_s^{(1)}}{\sqrt{s}}\right)^2 + \left(\frac{W_s^{(2)}}{\sqrt{s}}\right)^2 \sim \chi^2_{(2)}$, tenemos que $\mathbb{P}\big[Z_s < \varepsilon\big] \leq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\varepsilon/s} e^{-x/2}\,dx$, para $s > 0$. Haciendo el cambio de variable $x = \rho^2/s$ tendríamos que

$$\mathbb{P}\big[Z_s < \varepsilon\big] \leq \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\rho^2/2s}(\rho/s)\,d\rho,$$

después de integrar sobre $[0,t]$ y aplicar Fubini

$$\int_0^t \mathbb{P}\big[Z_s < \varepsilon\big]\,ds \leq \int_0^t\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\rho^2/2s}(\rho/s)\,d\rho\,ds = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \rho\left(\int_0^t \frac{e^{-\rho^2/2s}}{s}\,ds\right)d\rho, \quad t \geq 0.$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \rho/\sqrt{s}$, nos queda que

$$\int_0^t \mathbb{P}[Z_s < \varepsilon]\,ds \leq 2\cdot\int_0^{\sqrt{\varepsilon}} \rho\left(\int_{\rho/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\xi}\,e^{-\xi^2/2}\,d\xi\right)d\rho, \quad t \geq 0.$$

Es decir, de esta forma es claro como aplicar el primer teorema fundamental del cálculo, con lo que se tendría aplicando además la regla de L'Hôpital

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\displaystyle\int_0^t \mathbb{P}[Z_s<\varepsilon]\,ds}{\sqrt{\varepsilon}} &\leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{2\cdot\displaystyle\int_0^{\sqrt{\varepsilon}}\rho\left(\int_{\rho/\sqrt{t}}^{\infty}\frac{1}{\xi}\,e^{-\xi^2/2}\,d\xi\right)d\rho}{\sqrt{\varepsilon}} \\ = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} 2\sqrt{\varepsilon}\int_{\sqrt{\varepsilon/t}}^{\infty}\frac{1}{\xi}\,e^{-\xi^2/2}\,d\xi &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{2\displaystyle\int_{\sqrt{\varepsilon/t}}^{\infty}\frac{1}{\xi}\,e^{-\xi^2/2}\,d\xi}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} -\sqrt{t}\cdot\varepsilon\cdot e^{-\varepsilon/2t} = 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\int_0^t \mathbb{P}[Z_s < \varepsilon]\,ds$ es de orden $o(\sqrt{\varepsilon})$, para toda $t \geq 0$ y puesto que:

$$0 \leq \mathbb{E}\big[K_t(\varepsilon)\big] \leq \left(\int_0^t \mathbb{P}\big[Z_s < \varepsilon\big]\,ds\right)\left(\frac{3\cdot d}{4\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

una vez hecho estos cálculos es inmediato que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}[K_t(\varepsilon)] = 0$. Ahora sólo queda por analizar el sumando $I_t^{(i)}(\varepsilon)$, veamos que después de desarrollar obtenemos

$$I_t^{(i)}(\varepsilon) = \int_0^t\left[\left(\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{Z_s}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right)\cdot\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} + \frac{1}{\sqrt{Z_S}}\mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\right]W_s^{(i)}\,dW_s^{(i)}, \quad t \geq 0$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(I_t^{(i)}(\varepsilon) - \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\,dW_s^{(i)}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left(\frac{3}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{Z_s}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{\sqrt{Z_s}}\right)W_s^{(i)}\cdot\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\,dW_s^{(i)}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\left(-1 + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\left(3\sqrt{Z_s} - \frac{Z_s\sqrt{Z_s}}{\varepsilon}\right)\right)\frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\,dW_s^{(i)}\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t\left(-1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_s}{\varepsilon}}\left(3 - \frac{Z_s}{\varepsilon}\right)\right)^2\cdot\frac{(W_s^{(i)})^2}{Z_s}\mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\,ds\right], \end{aligned}$$

Es claro que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_s}{\varepsilon}}\left(3-\frac{Z_s}{\varepsilon}\right) \geq 0$ cuando $Z_s < \varepsilon$, entonces se comprueba lo siguiente:

$$\left(-1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_s}{\varepsilon}}\left(3-\frac{Z_s}{\varepsilon}\right)\right)^2 \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} \leq \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}, \quad s \geq 0$$

y como también $\dfrac{(W_s^{(i)})^2}{Z_s} \leq 1$, entonces hemos podido acotar ese último integrando por algo ya conocido. Nuevamente por el teorema de Tonelli

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t^{(i)}(\varepsilon) - \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\, dW_s^{(i)}\right)^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\right] ds = \int_0^t \mathbb{P}\left(Z_s < \varepsilon\right) ds, \quad t \geq 0,$$

pero ya habíamos demostrado que $\displaystyle\int_0^t \mathbb{P}\left(Z_s < \varepsilon\right) ds$ es de orden $o(\sqrt{\varepsilon})$ es inmediato que $I_t^{(i)}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{L_2} \displaystyle\int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_S}}\, dW_s^{(i)}$. Recapitulado hemos probado lo siguiente

$$\begin{aligned}
I_t^{(i)}(\varepsilon) &\xrightarrow[L_2]{\varepsilon\to 0} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\sqrt{Z_s}}\, dW_s^{(i)}, && t \geq 0,\ i \in \{1,\cdots,d\},\\
K_t(\varepsilon) &\xrightarrow[L_1]{\varepsilon\to 0} 0, && t \geq 0,\\
J_t(\varepsilon) &\xrightarrow[\text{c.s.}]{\varepsilon\to 0} \int_0^t \frac{d-1}{2\sqrt{Z_s}}\, ds && t \geq 0,\\
g_\varepsilon(Z_t) &\xrightarrow[\text{c.s.}]{\varepsilon\to 0} \sqrt{Z_t} && t \geq 0,
\end{aligned}$$

por lo cual también convergen en probabilidad y por lo tanto es posible concluir. ■

Corolario 3.2.1. (*E.D.E del proceso de Bessel de dimensión entera*) El proceso de Bessel $(\rho_t)_{t\geq 0}$, de dimensión entera $d \geq 2$ es solución fuerte de la ecuación diferencial estocástica

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{d-1}{2\cdot\rho_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0, \tag{3.2}$$

en donde $B_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{W_s^{(i)}}{\rho_s} dW_s^{(i)}$.

Demostración. Es inmediato de la Proposición 3.2.1 y de la 3.2.2. ■

Observación. Es claro que si $d = 1$, entonces $\rho_t = |W_t^{(1)}|$ no es solución de (3.2), pues $B_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(W_s^{(1)})\, dW_s^{(1)}$. Por lo que si fuese solución se tendría que el tiempo local en cero de $W_t^{(1)}$ sería cero, lo cual no es cierto.

3.2.3. Unicidad Trayectorial de la Ecuación del Proceso de Bessel.

Es interesante observar que en la ecuación que satisface el proceso Cuadrado de Bessel hay unicidad trayectorial. Esto se deduce de los teoremas de Yamada-Watanabe. A diferencia de la ecuación que satisface el proceso de Bessel donde no hay algún resultado en la teoría que garantice esto mismo. Sin embargo, cuando se está trabajando con soluciones positivas se puede garantizar que hay unicidad trayectorial.

Proposición 3.2.3. (*McKean*) Hay unicidad trayectorial para las soluciones positivas de la ecuación diferencial estocástica:

$$\rho_t = \rho_0 + B_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t \rho_s^{-1}\, ds, \quad t \geq 0, \tag{3.3}$$

cuando $d > 1$ (El caso en el que $d = 1$ es trivial).

Demostración. Sean $\left(\rho_t^{(i)}, B_t\right)_{t\geq 0}$, con $i = 1, 2$, dos soluciones positivas para la ecuación (3.3) definidas en el mismo espacio de probabilidad, entonces notemos que

$$\rho_t^{(1)} - \rho_t^{(2)} = \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{\rho_s^{(1)} - \rho_s^{(2)}}{\rho_s^{(1)} \cdot \rho_s^{(2)}}\, ds, \quad t \geq 0,$$

adoptaremos la notación $\Delta_t := \rho_t^{(2)} - \rho_t^{(1)}$. Del hecho que $|\Delta_t| \leq \rho_t^{(1)} + \rho_t^{(2)}$ tenemos:

$$\rho_t^{(1)} - \rho_t^{(2)} \leq \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{|\Delta_t|}{\rho_s^{(1)} \cdot \rho_s^{(2)}}\, ds \leq \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{1}{\rho_s^{(1)}} + \frac{1}{\rho_s^{(2)}}\, ds < \infty, \quad t \geq 0,$$

de esto y de la primera expresión tenemos que Δ_t es derivable de lo que se sigue:

$$\frac{d}{dt}\Delta_t^2 = 2\Delta_t \cdot \Delta_t' = -(d-1)\frac{\Delta_t^2}{\rho_t^{(1)} \cdot \rho_t^{(2)}} \leq 0, \quad t \geq 0,$$

después de integrar de sobre $[0, t]$ se obtiene que $\Delta_t^2 \leq 0$. Por lo que al cumplirse las igualdades anteriores en un conjunto con probabilidad 1, tendríamos que:

$$\mathbb{P}\big[\rho_t^{(1)} = \rho_t^{(2)}\big] = 1, \quad t \geq 0,$$

de la continuidad de los procesos se deduce que son indistinguibles. ■

Cherny, en su artículo [6], también da una prueba de este mismo hecho tomando un enfoque más probabilista.

3.3. El Proceso Bessel Cuadrado y el Proceso de Bessel

Ahora, extenderemos la definición del Proceso Bessel Cuadrado en donde la dimensión la consideraremos como un real $\delta \geq 0$. Lo definiremos como la única solución a la E.D.E

$$Z_t = Z_0 + \delta t + 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|}\, dB_s, \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

La existencia de soluciones positivas de esta ecuación se demuestra en [16], donde se toma la idea de Skorohod [19] de aproximar por el método de diferencias finitas. Luego por los teoremas de Yamada & Watanabe, ya que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, podemos asegurar que hay unicidad trayectorial por lo cual toda solución a (3.4) es solución fuerte.

3.3.1. Proceso Bessel Cuadrado.

Para el desarrollo de esta parte nos hemos basado principalmente en el Capítulo XI de [22].

Definición 3.3.1. (*Proceso Bessel Cuadrado*) Sean $\delta \geq 0$ y $Z_0 = z_0 \geq 0$. A la única solución fuerte de la ecuación (3.4) la llamaremos el proceso *Bessel Cuadrado* de dimensión δ y centrado en z_0. A la ley de este proceso la denotaremos por $Q_{z_0}^{\delta}$.

Sean $d, \tilde{d}$ dos enteros no negativos, $x, \tilde{x}$ reales mayores iguales que cero y $(Z_t)_{t\geq 0}, (\tilde{Z}_t)_{t\geq 0}$ dos procesos Bessel Cuadrado de dimensión $d, \tilde{d}$, y centrados en $x, \tilde{x}$ respectivamente. Además supongamos que sus correspondientes $d, \tilde{d}$-movimientos Brownianos son independientes. Entonces $BESQ(x,d) + BESQ(\tilde{x},\tilde{d}) = BESQ(x+\tilde{x}, d+\tilde{d})$, esto pues

$$\begin{aligned} Z_t + \widetilde{Z}_t &= \Big[\big(W_t^{(1)}\big)^2 + \ \cdots + \ \big(W_t^{(d)}\big)^2\Big] + \Big[\big(\widetilde{W}_t^{(1)}\big)^2 + \ \cdots + \ \big(\widetilde{W}_t^{(\tilde{d})}\big)^2\Big], \quad t\geq 0, \\ Z_0 + \widetilde{Z}_0 &= x + \widetilde{x} \end{aligned}$$

y los $d+\widetilde{d}$ sumandos del lado derecho de la primera ecuación son movimientos Brownianos independientes. Es decir, que la suma de dos procesos de Bessel Cuadrado vuelve a ser un proceso de Bessel Cuadrado. Ahora veremos que esto también se cumple para $\delta \geq 0$ no necesariamente entero.

Proposición 3.3.1. (*Invarianza aditiva del proceso Bessel cuadrado*) Sean $(Z_t, B_t)_{t\geq 0}$, $(\widetilde{Z}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ dos procesos de Bessel Cuadrados de dimensión δ, $\widetilde{\delta}$ no negativa, centrados en Z_0 y $\widetilde{Z}_0$, respectivamente definidos en el mismo espacio de probabilidad, donde además $(B_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ son independientes, entonces se cumple lo siguiente

I) $(Z_t + \widetilde{Z}_t, \beta_t)_{t\geq 0}$ es un $BESQ(Z_0 + \widetilde{Z}_0, \delta + \widetilde{\delta})$, donde $X_t = Z_t + \widetilde{Z}_t$, para todo $t \geq 0$ y

$$\beta_t := \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\frac{\sqrt{Z_s}}{\sqrt{X_s}}\, dB_s + \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\frac{\sqrt{\widetilde{Z}_s}}{\sqrt{X_s}}\, d\widetilde{B}_s + \int_0^t \mathbb{1}_{\{0\}}(X_s) d\widehat{B}_s, \quad t\geq 0,$$

siendo $\big(\widehat{B}_t\big)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano independiente a los dos anteriores.

II) Las leyes de probabilidad de estos procesos satisfacen

$$Q_{z_0}^{\delta} * Q_{\widetilde{z}_0}^{\widetilde{\delta}} = Q_{z_0+\widetilde{z}_0}^{\delta+\widetilde{\delta}},$$

con $z_0, \widetilde{z}_0 \geq 0$ y $\delta, \widetilde{\delta} \geq 0$.

Demostración. Al sumar las E.D.E de ambos procesos obtenemos las siguiente ecuación

$$X_t := Z_t + \widetilde{Z}_t = (Z_0 + \widetilde{Z}_0) + (\delta + \widetilde{\delta})\cdot t + 2\cdot \int_0^t \sqrt{Z_s}\, dB_s + 2\cdot \int_0^t \sqrt{\widetilde{Z}_s}\, d\widetilde{B}_s, \quad t\geq 0.$$

Por la independencia de los movimientos Brownianos la variación cuadrática de β_t es

$$\begin{aligned} \langle \beta, \beta\rangle_t &= \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\frac{Z_s}{X_s}\, ds + \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\frac{\widetilde{Z}_s}{X_s} ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\{0\}}(X_s)\, ds \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\, ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\{0\}}(X_s)\, ds \\ &= t. \end{aligned}$$

Se comprueba que $\mathbb{E}\big[\beta_t^2\big] \leq 3t$, para todo $t \geq 0$, entonces por el teorema de caracterización de Lévy el proceso estocástico $(\beta_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned} \int_0^t \sqrt{X_s}\, d\beta_s &= \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\sqrt{Z_s}\, dB_s + \int_0^t \mathbb{1}_{(0,\infty)}(X_s)\sqrt{\widetilde{Z}_s}\, d\widetilde{B}_s + \int_0^t \mathbb{1}_{\{0\}}(X_s)\cdot X_s\, d\widehat{B}_s \\ &= \int_0^t \sqrt{Z_s}\, dB_s + \int_0^t \sqrt{\widetilde{Z}_s}\, d\widetilde{B}_s, \quad t\geq 0. \end{aligned}$$

Al sustituir en la primera ecuación que obtuvimos al sumar los procesos $(Z_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{Z}_t)_{t\geq 0}$, llegamos a que

$$(Z_t + \widetilde{Z}_t) = (Z_0 + \widetilde{Z}_0) + (\delta + \widetilde{\delta}) \cdot t + 2 \cdot \int_0^t \sqrt{Z_s + \widetilde{Z}_s}\, d\beta_s, \quad t \geq 0,$$

de la uncidad en ley de la ecuación (3.4) y de la independencia de los procesos $(Z_t)_{t\geq 0}$ y $(\widetilde{Z}_t)_{t\geq 0}$ es claro II. ■

La utilidad de la proposición anterior radica en que nos será de ayuda para encontrar la función de densidad del proceso Bessel Cuadrado.

Proposición 3.3.2. Existen dos números $A_{\lambda,t}$ y $B_{\lambda,t}$ tales que

$$\mathbb{E}\big[\exp\big\{-\lambda \cdot Z_t\big\}\big] = \big(A_{\lambda,t}\big)^{z_0} \cdot \big(B_{\lambda,t}\big)^{\delta},$$

donde $(Z_t)_{t\geq 0}$ es el proceso Bessel Cuadrado de dimensión δ y centrado en $Z_0 = z_0$.

Demostración. Sea $\phi_t(z_0, \delta) := \mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda \cdot Z_t\}\right]$, por la desigualdad de Jensen

$$\phi_t(z_0, \delta) = \mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda \cdot Z_t\}\right] \geq \exp\{\mathbb{E}\left[-\lambda \cdot Z_t\right]\} = \exp\{-\lambda(z_0 + \delta t)\} > 0, \quad \delta, z_0 \geq 0.$$

Si Z y $\widetilde{Z}$ son como la proposición anterior, pero están centrados en x y y, respectivamente, entonces:

$$\phi_t(x + y, \delta + \widetilde{\delta}) = \mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda \cdot X_t\}\right] = \mathbb{E}\Big[\exp\{-\lambda \cdot Z_t\}\Big]\mathbb{E}\left[\exp\{-\lambda \cdot \widetilde{Z}_t\}\right] = \phi_t\big(x, \delta\big)\phi_t\big(y, \widetilde{\delta}\big),$$

esto para todas las condiciones iniciales $x, y \geq 0$ y cualquier dimensión $\delta, \widetilde{\delta} \geq 0$. Ahora, veamos que:

1. $\phi_t(0, 0) = 1$, esto a consecuencia de que al evaluar $x = y = \delta = \widetilde{\delta} = 0$ en la expresión obtenida anteriormente se tiene que $\phi_t(0, 0) = \phi_t(0, 0)^2$, debido a que $\phi_t(z_0, \delta)$ es positivo $\phi_t(0, 0) = 1$.

2. $\phi_t(\cdot, 0)$ y $\phi_t(0, \cdot)$ son decrecientes, ya que, al tomar (Z, B) y $(\widetilde{Z}, B)$ dos procesos de Bessel Cuadrado de dimensión $\delta = 0$ con condiciones iniciales tales que $z_0 \leq \widetilde{z}_0$ por el teorema de comparación se tiene $\mathbb{P}[Z_t \leq \widetilde{Z}_t,\ t \geq 0] = 1$ entonces con lo cual: $\exp\{-\lambda \cdot \widetilde{Z}_t\} \leq \exp\{-\lambda \cdot Z_t\}$ y en consecuencia $\phi_t(\widetilde{z}_0, 0) = \mathbb{E}[\exp\{-\lambda \cdot \widetilde{Z}_t\}] \leq \mathbb{E}[\exp\{-\lambda \cdot Z_t\}] = \phi_t(z_0, 0)$. El otro caso es totalmente análgo.

3. $\phi_t(x, 0), \phi_t(0, x) \in C^1$ con respecto a x Notemos que si $\widetilde{\delta} = \delta = 0$, entonces $\phi_t(x, 0) = \phi_t(x, 0) \cdot \phi_t(y, 0)$. Como $\phi_t(x, 0)$ es monótona decreciente, entonces es diferenciable (teorema de diferenciabilidad de Lebesgue) casi en todas partes, pero ya que

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi_t(x, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\phi_t(x + h, 0) - \phi_t(x, 0)}{h} = \left(\lim_{h \to 0} \frac{\phi_t(y + h, 0) - \phi_t(y, 0)}{h}\right)\phi_t(x - y, 0)$$

tomado y suficientemente pequeño, en donde $\phi_t(y, 0)$ sea derivable y $x - y > 0$ (la manera más rigurosa de probar lo anterior es con un argumento $\varepsilon{-}\delta$, que lo omitiremos). Podemos concluir que $\phi_t(x, 0) \in C^1$. El otro caso es análogo.

Es bien conocido que estas tres propiedades caracterizan a la función $\phi_t(\cdot, 0)$ (de manera análoga estas propiedades también caracterizan a la función $\phi_t(0, \cdot)$). Podemos concluir $\phi_t(x, 0) = A^x_{\lambda,t}$ y $\phi_t(0, \delta) = B^{\delta}_{\lambda,t}$ y como $\phi_t(x, \delta) = \phi_t(x, 0) \cdot \phi_t(0, \delta)$ de esta manera obtenemos el resultado deseado. ■

Corolario 3.3.1. (*Transformada de Laplace del BESQ*) La transformada de Laplace de la función de densidad del Bessel Cuadrado está dada por

$$\mathbb{E}_{x_0}[\exp\{-\lambda \cdot Z_t\}] = \left(\frac{1}{1+2\lambda t}\right)^{\delta/2} \cdot \exp\left\{\frac{-\lambda x_0}{1+2\lambda t}\right\}, \quad t \geq 0,$$

donde $(Z_t)_{t\geq 0}$ tiene condición inicial $Z_0 = x_0$.

Demostración. Si $\delta = 1$ entonces $Z_t = B_t^2$ y si $B_0 = x_0$ entonces

$$\mathbb{E}_{x_0}[\exp\{-\lambda \cdot B_t^2\}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\lambda x^2\right\} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{2t}\right\} dx.$$

Observando que

$$-\lambda x^2 - \frac{(x-x_0)^2}{2t} = -\frac{\big(x - x_0/(1+2t\lambda)\big)^2}{2t/\big(1+2t\lambda\big)} - \frac{\lambda x_0^2}{1+2t\lambda}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x_0}[\exp\{-\lambda \cdot B_t^2\}] &= \frac{\exp\left\{-\frac{\lambda x_0^2}{1+2t\lambda}\right\}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\big(x - x_0/(1+2t\lambda)\big)^2}{2t/\big(1+2t\lambda\big)}\right\} dx \\
&= \frac{\exp\left\{-\frac{\lambda x_0^2}{1+2t\lambda}\right\}}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \sqrt{\frac{2t\pi}{1+2t\lambda}} = \left(\frac{1}{1+2\lambda t}\right)^{1/2} \cdot \exp\left\{\frac{-\lambda x_0}{1+2\lambda t}\right\},
\end{aligned}$$

por la proposición anterior es fácil concluir. ■

Proposición 3.3.3. (*Función de densidad del BESQ*) La densidad del proceso Bessel Cuadrado a tiempo $t > 0$ y de parámetro $\nu := \delta/2 - 1$ está dada por

$$q_t^{(\nu)}(x_0, x) := \begin{cases} (2t)^{-(\nu+1)}\Gamma(\delta/2)^{-1} x^{\nu} e^{-x/2t} & \text{si } Z_0 = 0, \\ \dfrac{1}{2t}\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\nu/2} e^{-(x_0+x)/2t}\ I_\nu(\sqrt{x_0 x}/t) & \text{si } Z_0 = x_0, \end{cases}$$

donde $I_\nu(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \cdot \Gamma(\nu+k+1)}$ es la función de Bessel modificada.

Un estudio detallado de esta familia de funciones se encuentra en [15].

Demostración. Sean $\gamma \sim \text{Gamma}(\nu + K + 1, 1)$, y supongamos que $K \sim \text{Poisson}(x)$ con $x, \nu + 1 > 0$. Sea $d_x^{(\nu)}$ la función de γ condicionada a K, es decir:

$$\begin{aligned}
d_x^{(\nu)}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_{\gamma\,|\,K=k}(y|k) \cdot \mathbb{P}\big[K = k\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{\nu+k} e^{-y}}{\Gamma(\nu+k+1)} \cdot \frac{e^{-x} x^k}{k!} \\
&= e^{-(x+y)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^{\nu/2+k}}{k! \cdot \Gamma(\nu+k+1)} = e^{-(x+y)} \left(\frac{y}{x}\right)^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{xy}),
\end{aligned}$$

esto es posible hacerlo debido a la convergencia uniforme de la serie. Después de sustituir x por $x/2t$ y $y/2t$ (y multiplicar por $1/2t$), tendríamos que:

$$q_t^{(\nu)}(x, y) := \frac{1}{2t} d_{x/2t}^{(\nu)}(y/2t) = \frac{1}{2t}\left(\frac{x}{y}\right)^{\nu/2} e^{-(x+y)/2t}\ I_\nu(\sqrt{xy}/2t),$$

también una función de densidad. Ahora, calcularemos la transformada de Laplace de la función de densidad $d_x^{(\nu)}(y)$, haciendo uso del hecho de que la tranformada de Laplace de de la densidad de una $\Gamma(k,1)$ es $(\lambda+1)^{-k}$, entonces si $\widetilde{\gamma}$ es la variable aleatoria con función de densidad $d_x^{(\nu)}(y)$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[e^{-\lambda\widetilde{\gamma}}\big] &= \int_0^\infty d_x^{(\nu)}(u)e^{-\lambda u}du = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda+1)^{-(\nu+k+1)}\cdot\frac{e^{-x}x^k}{k!}\\ &= \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\nu+1}\exp\{-x\}\exp\left\{\frac{x}{\lambda+1}\right\} = \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\nu+1}\exp\left\{\frac{\lambda x}{1+\lambda}\right\}.\end{aligned}$$

Ahora, sí calcularemos la transformada de Laplace que nos interesa, haciendo el cambio de variable $u = y/2t$, dentro de la integral, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty q_t^{(\nu)}(x,y)e^{-\lambda y}dy &= \int_0^\infty (1/2t)\cdot d_{x/2t}^{(\nu)}(y/2t)e^{-\lambda y}dy = \int_0^\infty d_{x/2t}^{(\nu)}(u)e^{-2\lambda ut}du\\ &= \left(\frac{1}{2\lambda t+1}\right)^{\nu+1}\exp\left\{\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right\},\end{aligned}$$

el caso cuando $x = 0$, se hace con el mismo procedimiento por lo cual lo omitiremos. ■

La siguiente proposición será de gran utilidad para cálculos posteriores.

Proposición 3.3.4. Si $\delta > 1$ $(\nu > -1/2)$, entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1/2}\cdot q_t^{(\nu)}(x_0,\varepsilon) = 0.$$

Demostración. Analizaremos los dos casos por separado $X_0 = 0$ y $X_0 \neq 0$. Empezamos con $X_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot q_t^{(\nu)}(x_0,\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot(2t)^{-(\nu+1)}\Gamma(\delta/2)^{-1}\varepsilon^{\nu}e^{-\varepsilon/2t}\\ &= (2t)^{-(\nu+1)}\Gamma(\delta/2)^{-1}\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\nu+1/2}e^{-\varepsilon/2t}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Veamos que lo mismo se cumple cuando $X_0 \neq 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot q_t^{(\nu)}(x_0,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot\frac{1}{2t}\Big(\frac{\varepsilon}{x_0}\Big)^{\nu/2}e^{-(x_0+\varepsilon)/2}\,I_\nu\big(\sqrt{x_0\cdot\varepsilon}/t\big).$$

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{(\nu+1)/2}\cdot I_\nu\big(\sqrt{x_0\cdot\varepsilon}/t\big) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{(\nu+1)/2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{x_0\cdot\varepsilon}/2\big)^{2k+\nu}}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{x_0}/2\big)^{2k+\nu}\cdot\varepsilon^{k+\nu/2}\cdot\varepsilon^{(\nu+1)/2}}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{x_0}/2\big)^{2k+\nu}\cdot\varepsilon^{k+\nu+1/2}}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}.\end{aligned}$$

Nuevamente ya que $k+\nu+1/2>0$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y por la convergencia uniforme de la serie entonces se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{(\nu+1)/2}\cdot I_\nu\big(\sqrt{x_0\cdot\varepsilon}/t\big)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(\sqrt{x_0}/2\big)^{2k+\nu}\cdot\Big(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{k+\nu+1/2}\Big)}{k!\cdot\Gamma(k+\nu+1)}=0.$$

Finalmente con lo cual tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot q_t^{(\nu)}(x_0,\varepsilon)&=\Big[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{e^{-(x_0+\varepsilon)/2}}{2t\cdot x_0^{\nu/2}}\Big]\cdot\Big[\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{1/2}\cdot I_\nu\big(\sqrt{x_0\cdot\varepsilon}/t\big)\Big]\\&=\frac{e^{-x_0/2}}{2t\cdot x_0^{\nu/2}}\cdot 0=0.\end{aligned}$$

■

El siguiente lema lo hemos tomado de [14] en donde se puede consultar la demostración.

Lema 3.3.1. (*Cota para I_ν*) Para un real ν, sea $I_\nu(x)$ la función de Bessel modificada. Se satisfacen las siguientes desigualdades

$$e^{y-x}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu>\frac{I_\nu(x)}{I_\nu(y)}>e^{x-y}\left(\frac{x}{y}\right)^\nu,\quad \nu>-(1/2),\quad 0<x<y.$$

Observación. El lema anterior establece que la función $x\to e^{-x}x^{-\nu}I_\nu(x)$ es estrictamente decreciente y que $x\to x^{-\nu}I_\nu(x)$ es estrictamente creciente en $(0,\infty)$ para $\nu+1/2>0$. Recordando cómo definimos ν, esta condición simplemente es $\delta>1$.

Corolario 3.3.2. La convergencia de la Proposición 3.3.4 es uniforme en cualquier intervalo $[0,t]$ para todo $t>0$.

Demostración. Abordaremos primero el caso cuando $x_0=0$, para esto vemos que

$$\frac{d}{dt}\varepsilon^{1/2}q_t^{(\nu)}(0,x)=2^{-\nu-1}t^{-\nu-3}e^{-x/2t}\Gamma(\delta/2)^{-1}x^{\nu+1/2}[x-2t(\nu+1)],\quad t>0.$$

Por otro lado veamos que $\lim_{t\to 0}\varepsilon^{1/2}q_t^{(\nu)}(0,x)=0$ y también $\lim_{t\to\infty}\varepsilon^{1/2}q_t^{(\nu)}(0,x)=0$. Por lo que, cualquier máximo local de $\varepsilon^{1/2}q_t^{(\nu)}(0,x)$ es máximo global y del cálculo anterior éste se alcanza cuando $t=\dfrac{x}{2(\nu+1)}$. Entonces

$$\sup_{s\in[0,t]}\left|\varepsilon^{1/2}q_s^{(\nu)}(0,x)\right|\le x^{2\nu+3/2}\Gamma(\delta/2)^{-1}(\nu+1)^{-\nu-1}e^{-\nu-1},\quad t>0.$$

Como $2\nu+3/2>0$, entonces $\varepsilon^{1/2}q_s^{(\nu)}(0,x)$ converge uniformemente a 0 en cualquier intervalo $[0,t]$. Ahora analizaremos el caso cuando $x_0>0$. Sea $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sucesión decreciente tal que $\varepsilon_n>0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y que $\varepsilon_n\to 0$. Definimos

$$f_n(t):=\frac{t^\nu}{x_0^{\nu/2}\cdot\varepsilon_n^{\nu/2}}\cdot I_\nu\left(\frac{\sqrt{x_0\cdot\varepsilon_n}}{t}\right),\quad t>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Por el Lema 3.3.1 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones monótonas decrecientes fuera del cero. Definamos $g_n(t):=e^{-\varepsilon_n/2t}\cdot f_n(t)$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $g_n(t)$ sigue siendo monótona decreciente, pero además $\lim_{t\to 0} g_n(t) = 0$. Es decir, podemos extender de manera continua a $g_n(t)$ al definir $g_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el teorema de Dini $g_n(t)$ converge uniformemente en cualquier compacto. Definamos

$$h_n(t) := \frac{\varepsilon_n^{\nu+1/2}}{2t^{\nu+1}} \exp\left\{-\frac{x_0}{2t}\right\}, \quad t > 0,\, n \in \mathbb{N}.$$

Podemos comprobar de la misma manera que al inicio de la prueba que la sucesión de funciones $\{h_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Por lo que $h_n(t) \cdot g_n(t) = \varepsilon_n^{1/2} q_t^{(\nu)}(x_0, x)$ converge uniformemente a 0. ■

3.3.2. Ecuación Diferencial Estocástica del Proceso de Bessel

Una vez que conocemos las funciones de densidad del Proceso Bessel Cuadrado, estamos en posibilidad de probar que el Proceso de Bessel de dimensión $\delta > 1$ satisface la ecuación (3.2).

Proposición 3.3.5. (*E.D.E del Proceso de Bessel*) Si $\delta > 1$ ($\nu + 1/2 > 0$), entonces el proceso de Bessel es solución fuerte de

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot X_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0. \tag{3.5}$$

Demostración. Procederemos de la misma manera como se hizo en la Proposición 3.2.2. Sea $(Z_t)_{t\geq 0}$ un proceso cuadrado de Bessel, es decir una solución fuerte de

$$Z_t = Z_0 + \delta t + 2 \cdot \int_0^t \sqrt{Z_s}\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Tomemos $g_\varepsilon(t)$ así como se definió anteriormente, por la fórmula de Itô tenemos que

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(Z_t) = g_\varepsilon(Z_0) &+ \int_0^t \left(\frac{3\delta}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{Z_s \cdot \delta}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} + \left(\frac{\delta}{2\sqrt{Z_s}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\, ds \\ &+ \int_0^t \left(\left(\frac{3}{4\sqrt{\varepsilon}} - \frac{Z_s\cdot}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{Z_s}}\right) \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\right) \cdot 2\sqrt{Z_s}\, dB_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(-\frac{1}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} - \frac{1}{4Z_s\sqrt{Z_s}} \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\right) \cdot 4Z_s\, ds. \end{aligned}$$

Simplificando queda que:

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(Z_t) = g_\varepsilon(Z_0) &+ \int_0^t \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3\delta - \frac{Z_s}{\varepsilon}(\delta+2)\right) \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\, ds + \int_0^t \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Z_s}{\varepsilon}}\left(3 - \frac{Z_s}{\varepsilon}\right) \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} dB_s \\ &+ \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\sqrt{Z_s}} \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\, ds + \int_0^t \mathbb{1}_{\{Z_s\geq\varepsilon\}}\, dB_s \end{aligned}$$

Analizaremos el segundo sumando. De que $\delta > 1$ y se puede comprobar que se satisfacen las siguientes desigualdades:

$$0 \leq \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3\delta - \frac{Z_s}{\varepsilon}(\delta+2)\right) \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}} \leq \frac{3\delta}{4\sqrt{\varepsilon}} \cdot \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}, \quad s \in [0, t],$$

esta misma desigualdad apareció en la proposición 3.2.2. Al tomar esperanza a cada término obtenemos

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}\left(3\delta - \frac{Z_s}{\varepsilon}(\delta+2)\right) \mathbb{1}_{\{Z_s<\varepsilon\}}\, ds\right] \leq \int_0^t \frac{3\delta}{4\sqrt{\varepsilon}} \cdot \mathbb{P}[Z_s < \varepsilon]\, ds, \quad t \geq 0.$$

Probaremos que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \frac{3\delta}{4\sqrt{\varepsilon}}\cdot\mathbb{P}[Z_s<\varepsilon]\,ds=0$. Esto pues

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^t \mathbb{P}(Z_s\leq\varepsilon)\ ds}{\sqrt{\varepsilon}} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^t\int_0^\varepsilon q_s^{(\nu)}(x_0,x)\,dx\,ds}{\sqrt{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_0^\varepsilon\int_0^t q_s^{(\nu)}(x_0,x)\,ds\,dx}{\sqrt{\varepsilon}}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t q_s^{(\nu)}(x_0,\varepsilon)\,ds = 2\cdot\int_0^t \lim_{\varepsilon\to 0^+}\sqrt{\varepsilon}\cdot q_s^{(\nu)}(x_0,\varepsilon)\,ds\\
&= 2\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

La segunda igualdad se da al aplicar Fubini, y la tercera iguald por la regla de L'Hopital. permutar el límite con la integral fue posible gracias al corolario 3.3.2. La prueba se sigue de la misma manera que en la Proposición 3.2.2. ■

Observación. La prueba depende profundamente de la Proposición 3.3.4, es importante observar que si $\delta<1$, entonces ya no se satisface la convergencia de esta proposición. Es decir, nuestra prueba no permite extender este resultado para el proceso de Bessel Cuadrado con dimensión δ menor o igual que 1.

3.3.3. El Proceso de Bessel como Procceso de Itô.

Proposición 3.3.6. Sea $(\rho_t,B_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Bessel, entonces $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô (semi-martingala) si y solamente si $\delta\geq 1$.

Demostración. Supongamos que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô (semi-martingala). Entonces se satisfacen las siguientes igualdades

$$\int_0^t \rho_s d\rho_s=\frac{\rho_t^2-\langle\rho,\rho\rangle_t-\rho_0^2}{2};\qquad \int_0^t\rho_s dB_s=\frac{\rho_t^2-\delta t-\rho_0^2}{2},\quad t\geq 0,$$

de donde podemos obtener que

$$\left\langle\int_0^\cdot \rho_s d\rho_s,\int_0^\cdot\rho_s d\rho_s\right\rangle_t=\int_0^t\rho_s^2\,d\langle\rho,\rho\rangle_s=\frac14\left\langle\rho^2,\rho^2\right\rangle_t=\int_0^t\rho_s^2\,ds=\left\langle\int_0^\cdot\rho_s dB_s,\int_0^\cdot\rho_s dB_s\right\rangle_t.$$

Además, utilizando el teorema del valor medio para la integral de Stieltjes tenemos que:

$$\frac{\int_x^y\rho_s^2\ d\langle\rho,\rho\rangle_s}{y-x}=\frac{\rho_\xi^2(\langle\rho,\rho\rangle_y-\langle\rho,\rho\rangle_x)}{y-x}\quad\text{en donde }\ \xi\in[x,y],$$

ya que ρ es continua. Tomando el límite cuando $x\to y$ tenemos que

$$\rho_y^2\cdot\frac{d}{dy}\langle\rho,\rho\rangle_y=\rho_y^2,$$

donde la igualdad anterior se da para todo $y\in\mathbb{R}$ excepto en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Además se prueba en [22] que si $\delta>0$ la medida de Lebesgue del tiempo que ρ_t permanece en el origen es cero con lo cual es fácil concluir que $\langle\rho,\rho\rangle_t=t$. Ahora fijémonos en lo siguiente

$$\left\langle\int_0^\cdot\rho_s d\rho_s,\int_0^\cdot\rho_s dB_s\right\rangle_t=\int_0^t\rho_s^2\ d\langle\rho,B\rangle_s=\frac14\left\langle\rho^2,\rho^2\right\rangle_t=\int_0^t\rho_s^2\ ds,\quad t\geq 0.$$

De esta última serie de igualdades obtenemos tenemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^t \rho_s^2\, d\left\langle \rho - B, \rho - B\right\rangle_s &= \int_0^t \rho_s^2\, d\left\langle \rho, \rho\right\rangle_s - \int_0^t \rho_s^2\, d\left\langle \rho, B\right\rangle_s - \int_0^t \rho_s^2\, d\left\langle B, \rho\right\rangle_s + \int_0^t \rho_s^2\, d\left\langle B, B\right\rangle_s \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ya que $\left\langle \rho - B, \rho - B\right\rangle_t$ es no decreciente, integrar con respecto a este proceso de variación acotada es integrar con respecto a la medida de Radón asociada a éste, ya que ésta es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y del hecho que ρ_t^2 se anula solamente en un conjunto de medida de Lebesgue cero, entonces tenemos que $\left\langle \rho - B, \rho - B\right\rangle_t = 0$ para $t \geq 0$ casi seguramente. Recordando que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Itô (semi-martingala) entonces $\rho_t = \rho_0 + B_t + A_t$ donde A_t es adaptado, continuo y de variación acotada. Entonces, se satisface que:

$$\rho_t^2 = \rho_0^2 + t + \int_0^t \rho_s d\rho_s = \rho_0^2 + t + 2\int_0^t \rho_s\, dA_s + 2\int_0^t \rho_s\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Recordando que también se satisface $\rho_t^2 = \rho_0^2 + \delta t + 2\int_0^t \rho_s\, dB_s$, para todo $t \geq 0$, al restar estas dos igualdades se obtendría que

$$t + 2\int_0^t \rho_s\, dA_s = \delta t, \quad t \geq 0,$$

de donde también tenemos que

$$A_t = \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\rho_s}\, ds, \quad t \geq 0,$$

es decir, que si el proceso $(\rho_t)_{t\geq 0}$ fuese un proceso de Itô (semi-martingala) de hecho tendría que satisfacer (¡La ecuación del proceso de Bessel!):

$$\rho_t = \rho_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\rho_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0.$$

De esta última desigualdad se satisface que $\rho_t \leq \rho_0 + B_t$ para $t \geq 0$. Con lo que

$$0 \leq \liminf \rho_t \leq \rho_0 + \liminf B_t = -\infty,$$

lo cual es una clara contradicción. ■

Notemos que si tuviésemos una manera de saber si un proceso es o no de Itô (es una semi-martingala) conociendo su densidad tendríamos otra prueba de la Proposición 3.3.5 en principio más sencilla.

3.4. Una generalización de la Fórmula de Tanaka

Ahora procederemos a enunciar el teorema con el cual es posible generalizar la fórmula de Itô, ya que en éste si se tiene un proceso de Itô (semi-martingala) X_t continuo y una función $f \in \mathcal{C}^2$, sabemos que $f(X_t)$ sigue siendo proceso de Itô (semimartingala) y más aún se satisface $f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\ \left\langle X, X\right\rangle_s$, esto se sigue cumpliendo para funciones convexas es decir $f(X_t)$ permanece siendo proceso de Itô (semimartingala) si X lo es.

Teorema 3.4.1. *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *es un proceso de Itô (semi-martingala),* f *una función convexa, entonces existe un proceso creciente* $\left(A_t^f\right)_{t\geq 0}$ *tal que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'_-(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}A_t^f, \quad t \geq 0,$$

donde f'_- *es la derivada por la izquierda de* f*.*

Demostración. El caso en el que f es de clase $\mathcal{C}^2$, es trivial pues al ser convexa entonces $f'' \geq 0$ por lo que lo anterior nos es más que la fórmula de Itô para $A_t^f = \int_0^t f''(X_s)\, d\langle X, X\rangle_s$ que es claramente creciente. Ahora sea j una función positiva, de clase $\mathcal{C}^\infty$ con soporte compacto en $(-\infty, 0]$ y tal que $\int_{-\infty}^0 j(y)\, dy = 1$. Por ejemplo, la función definida como $j^*(y) := e^{-1/(1-y^2)}$ dentro del intervalo $[-1,1]$ y 0 fuera de él, es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y es integrable, por lo que $j(y) := j^*(y-1)/\int_{-1}^1 j^*(y)\, dy$ satisface las condiciones anteriores. Definimos

$$f_n(x) := n\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot j\big(n(x-y)\big)\, dy = \int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{y}{n}\right)\cdot j(y)\, dy,$$

del hecho que las funciones convexas real valuadas son continuas en cualquier intervalo acotado, la expresión anterior está bien definida. Además la diferenciabilidad de f_n (que sea $\mathcal{C}^\infty$) la hereda de j, es decir, también es $\mathcal{C}^\infty$ (no es más que la regla de derivación de Leibniz veáse [1]) y de la misma manera de la segunda igualdad también se puede apreciar que f_n hereda la convexidad de f. Al ser f convexa entonces la derivada por la izquierda y por la derecha existen excepto para un conjunto de medida de Lebesgue cero, además son iguales salvo en una cantidad numerable de puntos, además, se satisface que $f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y)$, con $x < y$. Para la demostración de estos hechos se puede consultar [18], con lo que se verifica utilizando el teorema de convergencia dominada que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{z}{n}\right)\cdot j(y)\, dy = \lim_{z\uparrow x} f(z)\int_{-\infty}^0 j(y)\, dy = f(x),$$

de la misma manera podemos comprobar que:

$$(f_n)'_-(x) = \int_{-\infty}^0 f'_-\left(x - \frac{y}{n}\right)\cdot j(y)\, dy = \int_{-\infty}^0 f'_+\left(x - \frac{y}{n}\right)\cdot j(y)\, dy = (f_n)'_+(x),$$

por lo que, la derivada es decreciente conforme n se va a ∞. Más aún:

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \lim_{z\uparrow x} f'_-(z) = \lim_{z\uparrow x} f'_+(z) = f'_-(x).$$

Utilizando el método de localización, es decir, parando el proceso en $S_m := T_m \wedge T_{-m}$, donde $T_m := \inf\{t \geq 0 : X_t = m\}$ y análogamente se define T_{-m}. Aplicamos la fórmula de Itô al proceso X_t obtenemos que:

$$f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int_0^t (f_n)'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2}A_t^{f_n},$$

y en efecto se tiene que el proceso $A_t^{f_n}$ es creciente, pues f_n es convexa. Notemos entonces del hecho f'_n decrezca a f y ambas son continuas, el teorema de Dini asegura que en cualquier intervalo compacto la convergencia se da uniformemente. Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{t\wedge S_m} \mathbb{E}\left|(f_n)'_-(X_s) - f'_-(X_s)\right|^2 d\langle X, X\rangle_s = 0,$$

que por la isometría de Itô para semi-martingalas esto es equivalente que $\int_0^{t\wedge S_m}(f_n)'_-(X_s)dX_s \xrightarrow{L_2} \int_0^{t\wedge S_m} f'_-(X_s)dX_s$ por lo cual también

$$\int_0^{t\wedge S_m}(f_n)'_-(X_s)dX_s \xrightarrow{P} \int_0^{t\wedge S_m} f'_-(X_s)dX_s.$$

De igual forma, sucede que $f_n(X_{t\wedge S_m}) - f_n(X_0) \xrightarrow{c.s} f(X_{t\wedge S_m}) - f(X_0)$ por lo que también

$$f_n(X_{t\wedge S_m}) - f_n(X_0) \xrightarrow{P} f(X_{t\wedge S_m}) - f(X_0).$$

En consecuencia $A^{f_n}_{t\wedge S_m}$ converge en probabilidad a un proceso $A_{t\wedge S_m}$, (debido a que converge en probabilidad existe un subsucesión que converge casi seguramente de forma que el proceso $A^f_{t\wedge S_m}$ hereda la monotonía de $A^{f_n}_{t\wedge S_m}$). Es decir se satisface que

$$f(X_{t\wedge S_m}) = f(X_0) + \int_0^{t\wedge S_m} f'_-(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}A^f_{t\wedge S_m}, \quad \text{c.s.}$$

Finalmente haciendo $m \to \infty$ se concluye. ■

Una vez teniendo el teorema anterior y las mismas hipótesis no es difícil comprobar los siguiente

Teorema 3.4.2. *(Fórmula de Tanaka) Para cualquier real a existe un proceso creciente L^a al cual llamaremos tiempo local de X tal que*

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\, dX_s + L^a_t(X), \quad t \geq 0$$

Demostración. Simplemente basta aplicar el teorema anterior. ■

Capítulo 4

La Ecuación Diferencial Estocástica del Proceso de Bessel.

Este último capítulo tiene como principal objetivo el estudio de las soluciones de la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot X_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

y ésta basado en el artículo de A.S Cherny *On the strong and weak solutions of stochastic differential equations governing Bessel proccesses* [6], donde se estudia el caso en que $\delta > 1$, hemos agregado el caso en que $\delta \in [0, 1)$.

En la Sección 4.1, se estudia el caso en que $\delta \in [0, 1)$ encontrando que no hay soluciones.
En la Sección 4.2, se analiza el caso en el $\delta \geq 2$ y $\delta > 1$ donde se encuentra que hay uncidad trayectorial para la ecuación (4.1) y que toda solución positiva de la ecuación (4.1) es el proceso de Bessel.
En la Sección 4.3, se estudia el caso en el que $\delta \in (1, 2)$ en la ecuación (4.1) encontrando otras soluciones fuertes y débiles para esta ecuación.

4.1. El caso en el que $\delta \in [0, 1)$

A continuación estudiaremos el caso en que $\delta \in [0, 1)$. Para ello calcularemos el tiempo local de los procesos que satisfacen la ecuación (4.1). La idea es la misma que se usa en el Ejemplo 1.3.1.

Proposición 4.1.1. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-movimiento Browniano que satisfacen la siguiente ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot X_s}\, ds + B_t, \quad t \geq 0,$$

con $\delta \geq 0$, entonces se cumple que

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s + \delta \cdot L_t^0(X), \quad t \geq 0,$$

donde $L_t^0\big(X\big) = P - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{2\varepsilon} \displaystyle\int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\, ds$ con $t \geq 0$.

Demostración. Aplicando la fórmula de Itô con la misma función g_ε, del Ejemplo 1.3.1, para este nuevo proceso se tiene entonces que

$$g_\varepsilon(X_t) = g_\varepsilon(X_0) + \int_0^t g'_\varepsilon(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''_\varepsilon(X_s)\ d\langle X, X\rangle_t,$$

desarrollando la expresión anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(X_t) &= g_\varepsilon(X_0) + \int_0^t \left\{ \widetilde{\operatorname{sgn}}\big(X_s\big) \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(\,|X_s|\,\big) + \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big) \right\} dX_s + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ ds \\ &= g_\varepsilon(X_0) + \int_0^t \left\{ \operatorname{sgn}\big(X_s\big) \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(\,|X_s|\,\big) + \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big) \right\} dB_s + \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ ds \\ &\quad + \int_0^t \left\{ \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|} \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(X_s\big) + \frac{\delta-1}{2\cdot\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big) \right\} ds. \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(X_t) = g_\varepsilon(X_0) &+ \int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big) \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(\,|X_s|\,\big)\ dB_s + \int_0^t \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ dB_s \\ &+ \int_0^t \frac{\delta}{2\cdot\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ ds + \int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|} \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(X_s\big)\ ds. \end{aligned}$$

Ahora solamente falta establecer en dónde se da la convergencia de cada término y determinar a qué converge.

I) Observamos que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \big|g_\varepsilon(x) - |x|\big| = \varepsilon/2$, con lo que $\mathbb{E}\big|g_\varepsilon(X_t) - |X_t|\big|^2 \le (\varepsilon/2^2)$. Es decir, se satisface lo siguiente:

$$g_\varepsilon(X_t)\ \rightrightarrows\ |X_t|\ \Rightarrow\ g_\varepsilon(X_t) \xrightarrow{L_2} |x|\ \Rightarrow\ g_\varepsilon(X_t) \xrightarrow{P} |X_t|.$$

II) Vemos que claramente $\frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|} \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}(X_s) \le \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|}$ para $\varepsilon > 0$, y de que el término de la izquierda de la igualdad anterior es creciente respecto a ε, entonces por el teorema de convergencia monótona se satisface:

$$\int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|} \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}(X_s)\ ds \xrightarrow{\text{c.s}} \int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|}\ ds,$$

por lo que también se satisface que

$$\int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|} \cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}(X_s)\ ds \xrightarrow{P} \int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|}\ ds.$$

III) De la isometría de Itô obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ dB_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{X_s^2}{\varepsilon^2} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big) ds\right] \\ &\le \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\varepsilon)}\big(|X_s|\big) ds\right]. \end{aligned}$$

Por el teorema de convergencia dominada es fácil ver que éste último término se va a cero conforme $\varepsilon \to 0$. Es decir, $\int_0^t \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ dB_s \xrightarrow{L_2} 0$, por lo que también:

$$\int_0^t \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ dB_s \xrightarrow{L_2} 0\ \Rightarrow \int_0^t \frac{X_s}{\varepsilon} \cdot \mathbb{1}_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\big(X_s\big)\ dB_s \xrightarrow{P} 0.$$

IV) De manera análoga al inciso anterior, utilizando lo isometría de Itô y por el teorema de convergencia dominada es posible establecer que:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(|X_s|\big) - \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\ dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \Big(1-\mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(|X_s|\big)\Big)^2\ ds\right] \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Con lo que tendríamos que $\int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(|X_s|\big)\ dB_s \xrightarrow{L_2} \int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\ dB_s$ por ende también se cumple que

$$\int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\cdot \mathbb{1}_{[\varepsilon,\infty)}\big(|X_s|\big)\ dB_s \xrightarrow{P} \int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\ dB_s.$$

Hemos comprobado que todos los términos de nuestra expresión inicial convergen en probabilidad, con lo cual finalmente haciendo $\varepsilon \to 0^+$ llegamos a que

$$P\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \delta\cdot L_t^0\big(X\big) = \big|X_t\big| - \big|X_0\big| - \int_0^t \operatorname{sgn}\big(X_s\big)\, dX_s.$$

■

En seguida refinaremos el resultado anterior comparando el cálculo anterior con el que se tiene de la fórmula de Itô-Tanaka.

Proposición 4.1.2. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso en un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0},\mathbb{P})$ y $(B_t)_{t\geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$-movimiento Borwniano que satisfacen la siguiente ecuación

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot X_s}\ ds + B_t,\quad t\geq 0, \tag{4.2}$$

entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} |X_t| &= |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\ dX_s,\quad t\geq 0,\\ &= |X_0| + \int_0^t \frac{\delta-1}{2\cdot|X_s|}\, ds + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s,\quad t\geq 0. \end{aligned}$$

Es decir, que si $(X_t,B_t)_{t\geq 0}$ es solución de (4.2) entonces también lo es $\big(|X_t|,\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s\big)_{t\geq 0}$.

Demostración. Tanto del último teorema como de la última proposición tenemos que se satisface que:

$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\ dX_s + \delta\cdot L_t^0(X),\quad t\geq 0,$$
$$|X_t| = |X_0| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\ dX_s + L_t^0(X),\quad t\geq 0,$$

restando estas igualdades se llega que entonces

$$\delta\cdot L_t^0(X) = L_t^0(X),\quad t\geq 0,$$

por lo que si $\delta\neq 1$, entonces se tiene que $L_t^0(X)=0$ con lo que se puede concluir. ■

Después intentando corroborar este cálculo con otras referencias se encontró que existen otras maneras mucho más "simples" de llegar a que $L_t^0(X) = 0$ para dos procesos que satisface la ecuación anterior, por ejemplo en [3] por una proposición de [22] esto se vuelve obvio del hecho de que $\int_0^t \frac{1}{X_s}\, ds < \infty$.

Proposición 4.1.3. Si $\delta \in [0,1)$, no existe solución para (4.1).

Demostración. Supongamos que existe una solución $(X_t, B_t)_{t\geq 0}$ para (4.1). De la proposición anterior se tiene que $(\widetilde{X}_t, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ con $\widetilde{X}_t = |X_t|$ y $\widetilde{B} = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s$ también es solución de (4.1), es decir, a partir de cualquier solución se puede construir una solución postiva; por el mismo argumento que en la Proposición 3.3.6 se puede concluir que tal solución no puede existir . ■

4.2. El caso en el que $\delta \geq 2$.

En seguida veremos que la única solución no negativa para (4.1) es el proceso de Bessel y que cuando $\delta \geq 2$ y la condición incial es distinta de cero entonces hay unicidad trayectorial.

Teorema 4.2.1. *Dados X_0 y $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano el proceso de Bessel de dimensión $\delta > 1$ es la única solución no negativa de*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot X_s} \cdot \mathbb{1}_{\{X_s \neq 0\}}\, ds + B_t, \quad t \geq 0 \tag{4.3}$$

Más aún es una solución fuerte. Además si $\delta \geq 2$ y $X_0 \neq 0$ hay unicidad trayectorial para (4.3).

Demostración. Sea $(\widetilde{\rho}_t, B_t)_{t\geq 0}$ una solución no negativa de (4.3), al elevar al cuadrado por la fórmula de Itô obtenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_s^2 &= \widetilde{\rho}_0^2 + 2 \cdot \int_0^t \widetilde{\rho}_s\, d\widetilde{\rho}_s + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t 2\, d\left\langle \widetilde{\rho}, \widetilde{\rho} \right\rangle_s = \widetilde{\rho}_0^2 + (\delta - 1) \int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{\rho}_s \neq 0\}}\, ds + 2 \int_0^t \widetilde{\rho}_s dB_s + t \\ &= \widetilde{\rho}_0^2 + \delta t + 2 \int_0^t \widetilde{\rho}_s\, dB_s + (\delta - 1) \int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{\rho}_s = 0\}} ds, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Por la fórmula de ocupación del tiempo local se tiene que

$$\int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{\rho}_s = 0\}}\, ds = \int_0^t \mathbb{1}_{\{\widetilde{\rho}_s = 0\}}\, d\left\langle \widetilde{\rho}, \widetilde{\rho} \right\rangle_s = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x=0\}} L_t^x(\widetilde{\rho})\, dx = 0, \quad t \geq 0,$$

ya que $\widetilde{\rho}_t = |\widetilde{\rho}_t|$ para $t \geq 0$ y por esta última igualdad se tiene que

$$\widetilde{\rho}_t^2 = \widetilde{\rho}_0^2 + \delta t + 2 \cdot \int_0^t |\widetilde{\rho}_s|\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Entonces $(\widetilde{\rho}_t^2, B_t)_{t\geq 0}$ es una solución a la ecuación del proceso Bessel Cuadrado por la unicidad trayectorial de ésta, si tuviésemos otra solución $(\rho_t, B_t)_{t\geq 0}$ de (4.3) entonces los procesos $(\widetilde{\rho}_t^2)_{t\geq 0}$ y $(\rho_t^2)_{t\geq 0}$ serían indistinguibles, es decir:

$$\mathbb{P}\left[\rho_t^2 = \widetilde{\rho}_t^2 : t \geq 0\right] = 1,$$

como son no negativos se sigue que $(\widetilde{\rho})_{t\geq 0}$ y $(\rho_t)_{t\geq 0}$ serán indistinguibles. Ya que la ecuación del proceso de Bessel Cuadrado sólo posee soluciones fuertes (debido a la unicidad trayectorial) entonces $(\widetilde{\rho}_t, B_t)_{t\geq 0}$ también es una solución fuerte.

Supongamos nuevamente que $(\widetilde{\rho}_t, B_t)_{t\geq 0}$ es solución de (4.3) y que $\widetilde{\rho}_0 > 0$ y haciendo

$$\widetilde{B}_t := \int_0^t \operatorname{sgn}(\widetilde{\rho}_s)\; dB_s, \quad t \geq 0,$$

ya que $\langle \widetilde{B}, \widetilde{B}\rangle_t = t$, en efecto $(\widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano. Elevando al cuadrado como anteriormente se hizo obtenemos

$$\widetilde{\rho}_t^2 = \widetilde{\rho}_0^2 + \delta t + 2 \cdot \int_0^t \widetilde{\rho}_s \, dB_s = \widetilde{\rho}_t^2 + \widetilde{\rho}_0^2 + \delta t + 2 \cdot \int_0^t |\widetilde{\rho}_s| \; d\widetilde{B}_s, \quad t \geq 0$$

Es decir, $(\widetilde{\rho}_t^2, \widetilde{B}_t)_{t\geq 0}$ es solución de la ecuación del proceso Bessel Cuadrado. Como $(\widetilde{\rho}_t^2)_{t\geq 0}$ tienen la misma ley de probabilidad que el proceso de Bessel Cuadrado (nuevamente debido a que hay unicidad trayectorial). Recordando que el proceso Bessel Cuadrado $(\rho_t)_{t\geq 0}$ cumple que

$$\mathbb{P}\left[\rho_t > 0, \ \forall\, t \geq 0\right] = 1, \quad \text{para } \delta \geq 2, \ \rho_0 > 0,$$

así, también sucede que $\mathbb{P}\left[\widetilde{\rho}_t^2 > 0, \ \forall\, t \geq 0\right] = 1$ esto pues $\widetilde{\rho}_0 > 0$ y por la continuidad de la solución entonces $\mathbb{P}\left[\widetilde{\rho}_t > 0, \ \forall\, t \geq 0\right] = 1$ ya que $\widetilde{\rho}_0 > 0$. Con lo cual $\operatorname{sgn}(\widetilde{\rho}_s) = 1$ y entonces $\widetilde{B}_t = B_t$ por lo que $(\widetilde{\rho}_t^2, B_t)_{t\geq 0}$ es una solucioń de la ecuación del proceso Bessel Cuadrado por la unicidad trayectorial de éste, $\widetilde{\rho}^2$ y ρ^2 son indistinguibles al ser ambos positivos $\widetilde{\rho}$ y ρ también lo son. El mismo argumento prueba que si $\widetilde{\rho}_0 < 0$ entonces entonces $\mathbb{P}[\rho_t < 0, \forall t \geq 0] = 1$ y que

$$\widetilde{\rho}_t^2 = \widetilde{\rho}_t^2 + \widetilde{\rho}_0^2 + \delta t - 2 \cdot \int_0^t |\widetilde{\rho}_s| \; dB_s, \quad t \geq 0.$$

Y como también hay unicidad trayectorial para la ecuación $Z_t = Z_0 + \delta t - 2\int_0^t \sqrt{|Z_s|}\, dB_s$ se sigue que $\rho_t = -\sqrt{Z_t}$. ■

4.3. El caso en el que $\boldsymbol{\delta \in (1,2)}$

A continuación analizaremos el caso en el que $\delta \in (1,2)$. Presentaremos la manera en que Cherny consigue encontrar otras soluciones además del proceso de Bessel para esta ecuación.

Teorema 4.3.1. *(Cherny) Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un movimiento Browniano. Si $1 < \delta < 2$, entonces en la E.D.E*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2 \cdot X_s} \cdot \mathbb{1}_{\{X_s \neq 0\}}\; ds + B_t, \quad t \geq 0, \tag{4.4}$$

se tiene que:
a) Existen otras soluciones fuertes además del proceso de Bessel. (con la misma condición inicial y el mismo movimiento Browniano)
b) Existen soluciones débiles;
c) No hay unicidad en ley para (4.4).

Demostración. a) Por lo visto previamente ya que el proceso de Bessel $(\rho_t)_{t\geq 0}$ de dimensión $\delta > 1$ es una solución fuerte de (4.4) entonces existe $\Phi : C(\mathbb{R}_+) \to C(\mathbb{R}_+)$ tal que $\rho = \Phi(B)$ c.s. Entonces podemos reescribir esta ecuación como

$$\Phi_t\left(B_s(\omega)\right) = \Phi_0\left(B_s(\omega)\right) + \int_0^t \frac{\delta - 1}{2\Phi_s\left(B_s(\omega)\right)} \mathbb{1}_{\{\Phi_s(B_s(\omega))\neq 0\}}\; ds + B_t, \quad t \geq 0.$$

Si $X_0 = 0$, sea $\widetilde{B}(\omega) = -B(\omega)$ con lo que $\Phi(\widetilde{B})$ vuelve a ser una solución fuerte con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \Phi_t\left(-B_s(\omega)\right) &= \int_0^t \frac{\delta-1}{2\Phi_s\left(-B_s(\omega)\right)} \mathbb{1}_{\{\Phi_s(-B_s(\omega))\neq 0\}} ds - B_t, \quad t \geq 0, \\ \Rightarrow \quad -\Phi_t\left(-B_s(\omega)\right) &= \int_0^t \frac{\delta-1}{-2\Phi_s\left(-B_s(\omega)\right)} \mathbb{1}_{\{-\Phi_s(-B_s(\omega))\neq 0\}} ds + B_t, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Esto es que $(\widetilde{\rho}_t, B_t)_{t\geq 0}$ es una solución fuerte donde $\widetilde{\rho}(\omega) = -\Phi(-B(\omega))$. Como $(\rho_t, B_t)_{t\geq 0}$ también es una solución fuerte en donde $\widetilde{\rho}_0 = \rho_0$ sin embargo son distintas pues ρ es positiva mientras que $\widetilde{\rho}$ es negativa.

Ahora supongamos $X_0 > 0$, sea ρ un proceso de Bessel de dimensión $1 < \delta < 2$. Sea $\tau(\omega) := \inf\{t \geq : \ \rho_t(\omega) = 0\}$ entonces $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$. Definamos:

$$\begin{aligned} \widetilde{B}_t &= \int_0^t \left(\mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}} - \mathbb{1}_{\{s>\tau\}}\right) dB_s, \quad t \geq 0, \\ \widetilde{\rho}_t(\omega) &= \begin{cases} \Phi_t(B(\omega)) & \text{s}i \quad t \leq \tau(\omega), \\ -\Phi_t(\widetilde{B}(\omega)) & \text{si} \quad t > \tau(\omega), \end{cases} \end{aligned}$$

Si $t < \tau$, notemos coinciden $(\widetilde{\rho}_t, \widetilde{B}_t)$ con (ρ_t, B_t), entonces:

$$\widetilde{\rho}_t = \widetilde{\rho}_0 + \int_0^t \frac{\delta-1}{2\widetilde{\rho}_s} ds + B_t, \quad t \leq \tau; \tag{4.5}$$

si $t > \tau$, tenemos que

$$\Phi_t(\widetilde{B}) - \Phi_\tau(\widetilde{B}) = \int_\tau^t \frac{\delta-1}{-2\Phi_s(\widetilde{B})} ds + \widetilde{B}_t - \widetilde{B}_\tau = \int_\tau^t \frac{\delta-1}{-2\Phi_s(\widetilde{B})} ds + \int_\tau^t \left(\mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}} - \mathbb{1}_{\{s>\tau\}}\right) dB_s$$

De donde tendríamos que

$$\widetilde{\rho}_t = \int_\tau^t \frac{\delta-1}{2\cdot\widetilde{\rho}_s} ds + B_t - B_\tau, \quad t > \tau.$$

Con esto y junto con la ecuación (4.5) es posible comprobar que $(\widetilde{\rho}_t, B_t)_{t\geq 0}$ también es solución fuerte de (4.4). Comprobar que no hay unicidad en ley se puede comprobar con el mismo método que en el Ejemplo 1.3.6. ∎

Bibliografía

[1] Bartle, Robert G, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, First Edition, Wiley Classical Edition, 1995. pág **44**

[2] Billingsley, Patrick, *Convergence of Probability Measures*, Second Edition, Wiley Series in Probability and Statistics, pág **8**.

[3] Blei, Stefan. *On symmetric and skew Bessel processes.* Recuperado de: `https://core.ac.uk/download/pdf/82791303.pdf`

[4] Braun, Eliezer, *Un movimiento en Zigzag*, Segunda Edición, Fondo de Cultura Económica, 1997. Recuperado de: `http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/html/fisica.html`

[5] Caballero, María Emilia, *Introduction to Stochastic Integration* Mongolian Mathematical Journal (2016) 73-127.

[6] Cherny, A.S. *On the strong and weak solutions of Stochastic Differential Equations Governing Bessel Processes*, Stochastics and Stochastic Reports, 70:3-4, 213-219, DOI: 10.1080/17442500008834252 Recuperado de: `http://www.alexandercherny.com/sde.pdf`

[7] Doob, J.L, *Stochastic Processes*, New York, 1953.

[8] Einstein, Albert, *Uber die von der molekularkinetischen Theorie der Warme geforderte Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teilchen*, 1905. Recuperado de: `https://onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.1002/andp.19053220806`

[9] García Corte, Julio César y Ruiz de Chavez Somoza, Juan, *Tiempos Locales y Excursiones del Movimiento Browniano*, Primera Edición, Syg Editores, 2002.

[10] Gunnar, Taraldsen *Optimal Learning from the Doob-Dynkin lemma.* Recuperado de: `https://arxiv.org/pdf/1801.00974.pdf`

[11] Kallenberg, Olav Foundtions of Modern Probability, First Edition, Springer-Verlag, New York, U.U.S.S.

[12] Karatzas, Ioannis y Steven E, Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, U.U.S.S, 1991.

[13] Kunita, H y Watanabe, *On Square-Integrable Martingales.* Nagoya J. Math. 36, 1967.

[14] LAFORGIA, ANDREA, *Bounds for modified Bessel functions*, Journal of Computational and Applied Mathematics 34 (1991). Recuperado de: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037704279190087Z

[15] LEBEDEV, N.N..

Special functions and their applications., First Edition,

[16] MATA LOPEZ, DANTE. *Difusiones: el proceso de Cox-Ingersoll-Ross y modelos de tasas de interés*, http://132.248.9.195/ptd2016/agosto/0749020/Index.html

[17] MCKEAN, HENRY P. JR *The Bessel motion and a singular integral equation*, Memoirs of the college of science, University of Kyoto, Series A Vol. XXXIII, Mathematics No. 2, 1960. Recuperado de: https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.kjm/1250775917

[18] NICULESCU, CONSTANTIN P. y LARS, -ERIK PERSSON, Convex Functions and Their Applications: *A Contemporary Approach*, Springer-Verlag, First Edition, 2006.

[19] SKOROHOD, ANATOLI V, *Studies in the Theory of Random Process*, Addison-Wisley (Originally published in Kiev) 1965.

[20] SRIVASTAVA, S.M., *A Course on Borel Sets*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, U.U.S.S, 1998. pág **82**

[21] YAMADA, T y WATANABE , SHINZO, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ, **11**, 155-167, 1991.

[22] YOR, MARC y REVUZ, DANIEL, Continuous Martingales and Brownian Motion, Third Edition, Springer-Verlag, New York, U.U.S.S, 1999. pág **175**