Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

El método de los $\mathcal{D}$-operadores para generar ejemplos de polinomios ortogonales de tipo Krall

T E S I S

que para obtener el título de:

Matemático

P R E S E N T A :

José Francisco Fernández Arcos

TUTOR

Dr. Manuel Domínguez de la Iglesia

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2019

Introducción

Una familia de polinomios ortogonales es una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ donde el grado de $p_n(x)$ es n y $p_0(x) \neq 0$, que cumple con

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = K_n\delta_{mn} \quad con \quad K_n \neq 0.$$

Donde $w(x)$ es una función positiva sobre el intervalo (a, b).

Encontrar familias de polinomios ortogonales $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfacen ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\sum_{l=1}^{k} f_l(x)p_n^{(l)}(x) = \lambda_n p_n(x), \tag{0.0.1}$$

para el caso continuo, o ecuaciones en diferencias del tipo:

$$\sum_{l=s}^{r} f_l(x)p_n(x+l) = \lambda_n p_n(x), \quad s \leq r, \tag{0.0.2}$$

para el caso discreto, donde cada f_l es un polinomio, es un problema con más de dos siglos. Aunque los primeros ejemplos aparecieron a finales del siglo XVIII, no fue hasta el siglo XX cuando se demostraron los resultados más importantes. Uno de estos resultados se debe a Salomon Bochner, que en 1929 [3] clasificó todas las familias de polinomios que satisfacen (0.0.1), cuando $k = 2$. Determinó que las únicas familias ortogonales con respecto a una medida positiva sobre la recta real son las familias clásicas de *Hermite*, *Laguerre* y *Jacobi*. Luego, en 1940 [16], H. L. Krall clasificó todas las ecuaciones de la forma (0.0.1), con $k = 4$, que tienen como solución una familia de polinomios ortogonales. Aunque posteriormente se descubrieron otros ejemplos de polinomios ortogonales que satisfacen (0.0.1) con $k \geq 6$, la clasificación completa todavía es un problema abierto. Una técnica común que se usó para generar estos ejemplos fue añadir deltas de Dirac a los extremos del soporte de la medida de ortogonalidad de las familias clásicas continuas.

Para ecuaciones en diferencias de la forma (0.0.2) O. E. Lancaster en 1941 [22], clasificó todas las familias de polinomios ortogonales que las satisfacen, cuando el orden es 2; es decir con $s = -1$ y $r = 1$. Encontró que las únicas familias ortogonales con respecto a una medida positiva sobre los enteros son las familias clásicas de *Charlier*, *Krawtchouk*, *Meixner* y *Hahn*. Sin embargo, no fue hasta 2012 [6] que Antonio J. Durán encontró los primeros ejemplos de polinomios discretos que satisfacen (0.0.2) con orden mayor o igual a 4.

La dificultad de hallar estos nuevos ejemplos se debe a que lo que se conoce para el caso continuo ha sido de muy poca ayuda. El agregar deltas de Dirac a pesos asociados a las familias clásicas discretas parece no funcionar. Respondiendo a la pregunta planteada por R. Askey en 1991, H. Bavinck, H. Van Haering y R. Koekoek [1] [2] estudiaron polinomios ortogonales con respecto a los pesos de *Charlier* y *Meixner* junto con una delta de Dirac en 0 y encontraron que estos satisfacen ecuaciones en diferencias de orden infinito. Es por ello que durante muchos años estas nuevas familias fueron desconocidas.

El propósito de este trabajo es presentar un método para construir sucesiones de polinomios ortogonales que satisfacen ecuaciones diferenciales o en diferencias de orden superior. Este método fue introducido en 2013 por A. J. Durán [7] y está basado en el concepto de $\mathcal{D}$-operador asociado a un álgebra de operadores $\mathcal{A}$ y a una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Usando esta herramienta, a partir de una familia de polinomios ortogonales $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ se construye una nueva sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ como una combinación lineal de dos polinomios consecutvios $p_n(x)$; $q_n(x) = p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x)$, $\beta_n \in \mathbb{R}$. Éstos serán eigenfunciones de operadores en diferencias o diferenciales de orden mayor a 2 y ortogonales con respecto a cierta medida

El texto está dividido en dos capítulos. En el primer capítulo se definen las sucesiones de polinomios que son ortogonales con respecto a un producto interior ponderado por una función peso positiva. Se abarcan las nociones más básicas de la teoría general de estos polinomios: relación de recurrencia, su expresión como determinantes, etc. A continuación se clasifican las familias de polinomios ortogonales que satisfacen (0.0.1) para orden 2. Éstas se conocen como las familias clásicas de variable continua: *Hermite*, *Laguerre* y *Jacobi*. También en este primer capítulo se da una clasificación de todas las familias de polinomios ortogonales discretos que satisfacen una ecuación en diferencias de segundo orden de la forma (0.0.2). Estas familias se conocen como las familias clásicas de variable discreta y son cuatro: *Charlier*, *Krawtchouk*, *Meixner* y *Hahn*.

El segundo capítulo comienza con una revisión histórica que refleja el problema de hallar familias de polinomios ortogonales que sean eigenfunciones del operador diferencial (0.0.1) y su análogo discreto (0.0.2). En esta parte también se enuncian los resultados más importantes, demostrados en el siglo pasado, que han resuelto parte del problema. También se presentan algunas de las técnicas usadas para construir sucesiones de polinomios ortogonales que satisfacen (0.0.1).

A continuación, se introduce el concepto de $\mathcal{D}$-operador asociado a una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y un álgebra $\mathcal{A}$ de operadores, que actúan sobre el espacio vectorial de los polinomios $\mathcal{P}$. El objetivo es mostrar que este concepto es una valiosa y novedosa herramienta para generar familias de polinomios que son eigenfunciones de operadores diferenciales o en diferencias de orden mayor que 2. Este método consiste en lo siguiente: se inicia con una familia de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, de variable discreta o continua, y un álgebra $\mathcal{A}$ de operadores, cuyo dominio es el espacio vectorial de los polinomios $\mathcal{P}$. Se asume que los polinomios, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, son eigenfunciones de cierto operador $D_p \in \mathcal{A}$. Se denota como $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de eigenvalores, es decir $D_p(p_n(x)) = \theta_n p_n(x)$, $n \geq 0$.

Usando el concepto de $\mathcal{D}$-operador y con la ayuda de cierto polinomio arbitrario P_2 - ver Lema 2.2.1 y Lema 2.2.2 - se construye una sucesión de números $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y se define una nueva sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ como: $q_0(x) = 1$ y

$$q_n(x) = p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Para cada elección de P_2 este método proporciona un nuevo operador, $D_q \in \mathcal{A}$ de orden mayor que 2, para el cual los polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones. Aunque en principio la sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene por qué ser ortogonal con respecto a una medida, para cierta elección de P_2, existe una medida respecto a la cual los polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ van a ser ortogonales.

El capítulo 2 se completa aplicando este método de los $\mathcal{D}$-operadores, primero a los polinomios clásicos de variable discreta -*Charlier, Meixner, Krawtchouk* y *Hahn*- y luego a los de variable continua -*Laguerre* y *Jacobi*-.

Índice general

Capítulo 1

Polinomios ortogonales clásicos

En este capítulo se definen los polinomios ortogonales y se presentan diferentes maneras de construirlos. También se introducen las familias de polinomios ortogonales clásicos, tanto de variable continua como de variable discreta. Dichas familias surgen como las eigenfunciones polinómicas de operadores diferenciales o en diferencias de segundo orden, que son simétricos con respecto a cierto producto interior.

1.1. Preliminares

Una sucesión de polinomios $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ donde el grado de $P_n(x)$ es n y $P_0(x) \neq 0$, se dice *ortogonal* sobre un intervalo (a, b) con respecto a una función peso $w(x) > 0$ si

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0 \quad para \quad m \neq n$$

y

$$\int_a^b P_n^2(x)\, w(x) dx \neq 0.$$

En caso en que el intervalo (a, b) sea no acotado, además pediremos que se cumpla que los *momentos*

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx \quad para \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1.1}$$

sean todos finitos. Consideremos ahora el espacio vectorial L_w^2, el conjunto de las funciones que cumplen con

$$\int_a^b |f\,(x)|^2 w(x)dx < \infty.$$

Sobre éste se define el siguiente producto interior:

$$(f, g) = (f, g)_w = \int_a^b f(x)\, g(x)\, w(x)\, dx.$$

De aquí en adelante, para referirnos a una "sucesión de polinomios ortogonales" simplemente escribiremos SPO. Si $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una SPO que cumple que para toda n, $(P_n, P_n) = 1$, decimos que la sucesión de polinomios es ortonormal y para este caso tenemos que

$$(P_n, P_m) = \delta_{mn}.$$

Para el caso general se cumple

$$(P_n, P_m) = K_n \delta_{mn} \text{ donde } K_n \neq 0,$$

donde δ_{mn} es la *delta de Kronecker.*

Teorema 1.1.1. *Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios, entonces las siguientes son equivalentes*

a) $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *es una SPO.*

b) $(\pi\,(x)\,, P_n(x)) = 0$ *para todo polinomio* $\pi(x)$ *con grado* $m < n$ *mientras que* $(\pi(x)\,, P_n(x)) \neq 0$ *si* $m = n$.

c) $(x^m, P_n(x)) = K_n \delta_{mn}$ *donde* $K_n \neq 0$, $m = 0, 1, \ldots, n$.

Demostración. Sea $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una SPO. Como cada $P_k(x)$ es de grado k tenemos que el conjunto $\{P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)\}$ forma una base para el subespacio de polinomios de grado a lo más m. Luego, como $\pi(x)$ es de grado m, entonces existen escalares c_k tales que

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k P_k(x) \quad \textit{con} \quad c_m \neq 0.$$

Aplicando producto interior con $P_n(x)$ tenemos que

$$(\pi(x)\,,P_n(x)) = \sum_{k=0}^{m} c_k\,(P_m(x)\,,P_n(x)) = 0 \quad si \quad m<n,$$

$$(\pi\,(x)\,,P_n(x)) = \sum_{k=0}^{m} c_k\,(P_m(x)\,,P_n(x)) = c_n\,(P_n,P_n) \quad si \quad m=n.$$

Así $a) \Rightarrow b)$, ahora $b) \Rightarrow c)$ es inmediato y por último como $\{1,x,\ldots,x^m\}$ es una base para el espacio de los polinomios de grado menor igual que m, de la linealidad del producto interior se sigue que $c) \Rightarrow a)$. $\square$

Como consecuencia, toda SPO $(P_n\,(x))_{n=0}^{\infty}$ está unívocamente determinada salvo constantes multiplicativas distintas de 0, es decir si $(Q_n\,(x))_{n=0}^{\infty}$ es otra SPO que es ortogonal con respecto a w, entonces existen constantes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distintas de 0 tales que

$$P_n(x) = c_n Q_n(x), \quad para \quad n \geq 0.$$

A continuación presentamos una forma de contruir una SPO asociados a un peso $w(x)$. Consideremos los siguientes determinantes

$$\Delta_n = \det\,(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{-1} = 1. \tag{1.1.2}$$

Ahora tenemos que la forma cuadrática asociada a la matriz $(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n}$ cumple la siguiente relación

$$q\left((a_0,a_1,...,a_n)\right) = \sum_{j,k=0}^{n} \mu_{j+k} a_j a_k = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right]^2 w(x)\,dx,$$

por lo tanto q es definida positiva, así $\Delta_n > 0$.

El polinomio

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \tag{1.1.3}$$

cumple lo siguiente

$$(Q_n(x)\,, x^m) = 0 \quad si \quad m < n.$$

Mientras que

$$(Q_n(x)\,, x^n) = \Delta_n.$$

Para ver que la relación anterior se cumple, expandimos (1.1.3) a lo largo de la última columna y hacemos producto interior con x^m para $m = 0, 1, \ldots, n$. Si $m < n$ tenemos que el resultado es un determinante en el cual la última columna del determinante (1.1.3) ha sido reemplazada por la columna $m+1$ del mismo determinante. Así, si $m < n$, tenemos un determinante donde se repite una columna, mientras que si $m = n$ nos da Δ_n. Ahora notemos que

$$Q_n(x) = \Delta_{n-1}x^n + \mathcal{O}(x^{n-1}).$$

Así

$$(Q_n, Q_n) = (Q_n, \Delta_{n-1}x^n) = \Delta_{n-1}\Delta_n.$$

Entonces los polinomios

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-1}}}Q_n(x)$$

son ortonormales, donde el coeficiente principal de P_n es $h_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$.

Notemos que como $xP_n\,(x)$ tiene grado $n+1$, entonces se puede escribir como

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} r_{nk}P_k(x)\,.$$

Los coeficientes r_{nk} vienen dados por:

$$r_{nk} = \frac{(xP_n(x)\,, P_k(x))}{(P_k(x)\,, P_k(x))}.$$

Entonces como $(P_n\,(x))_{n=0}^{\infty}$ es SPO se sigue que existen constantes a_n, b_n y c_n tales que

$$xP_n(x) = a_nP_{n+1}(x) + b_nP_n(x) + c_nP_{n-1}(x)\,, \tag{1.1.4}$$

esta igualdad se conoce como *relación de recurrencia a tres términos* .

Comparando los coeficientes de x^{n+1} tenemos que $a_n = {}^{h_n}\!/_{h_{n-1}}$. Por otro lado tomando producto interior con P_{n-1} se tiene que

$$c_n = (xP_n, P_{n-1}) = (P_n, xP_{n-1}) = \frac{h_{n-1}}{h_n} = a_{n-1}.$$

Por lo tanto (1.1.4) se reduce a

$$xP_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + a_{n-1} P_{n-1}(x)\,.$$

1.2. Polinomios ortogonales de variable continua

A lo largo de toda esta sección supondremos que todas las funciones mencionadas son de clase $\mathcal{C}^2(I)$, donde $I = (a, b)$ es cierto intervalo real.

La ecuación diferencial general de segundo orden sobre I es

$$p(x)\, u''(x) + q(x)\, u'(x) + r(x)\, u(x) = f(x)\,. \tag{1.2.1}$$

Así, la ecuación homogénea asociada es

$$p(x)\, u''(x) + q(x)\, u'(x) + r(x)\, u(x) = 0.$$

El operador diferencial asociado se define como

$$L = p(x)\,\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\,\frac{d}{dx} + r(x)\,. \tag{1.2.2}$$

Una tranformación *gauge* (también conocida como transformación de norma) asociada a (1.2.1) es una tranformación de la forma

$$u(x) = \varphi(x)\, v(x)\,, \quad \varphi(x) \neq 0.$$

Ahora la función u satisface (1.2.1) si y sólo si v cumple

$$\begin{aligned} &p(x)\, v''(x) + \left[2p(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + q(x)\right] v'(x) \\ &+ \left[p(x)\,\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + q(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + r(x)\right] v(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

El correspondiente operador asociado es

$$\begin{aligned} L_{\varphi} = p(x)\,\frac{d^2}{dx^2} + \left[2p(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + q(x)\right]\frac{d}{dx} \\ + \left[p(x)\,\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + q(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + r(x)\right]. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

La utilidad de la transformación *gauge* viene del hecho de que la ecuación diferencial

$$\varphi'(x) = h(x)\,\varphi(x)\,,$$

tiene como solución

$$\varphi\,(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} h\,(y)\,dy\right),$$

donde x_0 es algún punto sobre I. Notemos que una tranformación *gauge* puede ser usada para eliminar el término de primer orden qu' de (1.2.3) si se toma φ tal que $\varphi'/\varphi = -\,q/2p$. Un segundo uso será hacer simétrico el operador (1.2.2). Recordemos que sobre L^2_w se definió el siguiente producto interior

$$(f,g) = (f,g)_w = \int_a^b f(x)\,g(x)w(x)\,dx.$$

Un operador L, como en (1.2.2), se dice *simétrico* con respecto a una función peso w si cumple que

$$(Lu,v) = (u,Lv)$$

para cada par de funciones u y v de clase $\mathcal{C}^\infty(I)$ de soporte compacto contenido en I a la que denotaremos por $\mathcal{C}^\infty_0(I)$ (basta definirlo sobre esta clase funciones pues éstas son densas en L^2_w). Presentamos algunos resultados que caracterizan a los operadores simétricos en L^2_w.

Teorema 1.2.1. *El operador L definido en* (1.2.2) *es simétrico respecto a una función peso w si y sólo si tiene la forma*

$$\begin{aligned} L &= p(x)\,\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(p(x)\,w(x))'}{w(x)}\,\frac{d}{dx} + r(x) \\ &= \frac{1}{w(x)}\,\frac{d}{dx}\left(p(x)\,w(x)\,\frac{d}{dx}\right) + r(x)\,. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Demostración. Si L es simétrico entonces se debe cumplir que

$$0 = (Lu, v) - (u, Lv) = \int_a^b \left[p\left(u''v - v''u\right)\right] w + \int_a^b \left[q\left(u'v - v'u\right)\right] w,$$

donde para el primer sumando tenemos lo siguiente

$$\int_a^b \left[p\left(u''v - v''u\right)\right] w = \int_a^b \left[p\left(u'v - v'u\right)'\right] w$$
$$= pw\left(u'v - v'u\right)\Big|_a^b - \int_a^b \left(u'v - v'u\right)(pw)' = -\int_a^b \left(u'v - v'u\right)(pw)',$$

donde la última igualdad se da ya que los soportes de u y v son compactos y están contenidos en I. Por lo tanto tenemos que

$$0 = (Lu, v) - (u, Lv) = \int_a^b \left(u'v - v'u\right)(qw - (pw)'). \tag{1.2.6}$$

En particular si tomamos $u = 1$ en (1.2.6) tenemos que para $v \neq 0$ se sigue que

$$0 = -\int_a^b v'(qw - (pw)') = \int_a^b v\left[qw - (pw)'\right]',$$

donde la última igualdad se sigue de aplicar integración por partes. Como lo anterior se cumple para todas las funciones v en $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ se sigue que $\left[qw - (pw)'\right]' = 0$, es decir $qw - (pw)' = c$.

Ahora si escogemos $u(x) = x$ tenemos que siempre que $v \neq 0$ se cumple que

$$0 = c\int_a^b v - xv' = 2c\int_a^b v,$$

para toda v en $\mathcal{C}_o^\infty$, por lo tanto $c = 0$, así $qw = (pw)'$. Por otro lado si tenemos que $q = {(pw)'}/{w}$ entonces se cumple lo siguiente

$$(Lu, v) - (Lv, u) = \int_a^b pw\left(u''v - v''u\right) + \int_a^b (pw)'\left(u'v - v'u\right)$$
$$= \int_a^b pw\left(u'v - v'u\right)' + \int_a^b (pw)'\left(u'v - v'u\right) = 0,$$

donde la última igualdad se sigue de la formúla de integración por partes. $\square$

Trataremos de extender la condición de simetría de L a la clase de funciones más "grande" posible. En general esto requiere imponer condiciones de frontera.

Suponga que I es un intervalo acotado (a, b) y además que w, w', p, p', q y r tienen una extensión continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$. Suponga también que u y v son de clase $\mathcal{C}^2$ sobre (a, b), pertenecen a L_w^2, y suponga que u, u',v y v' son continuas sobre el intervalo cerrado. Si L es simétrico se cumple, por el Teorema 1.2.1 y la fórmula de integración por partes, que

$$
\begin{aligned}
&(Lu, w) - (u, Lv) = \int_a^b pw\big(u'v - v'u\big)' + \int_a^b (pw)' \left(u'v - v'u\right) \\
&= \left(\left(u'v - v'u\right) pw\big|_a^b - \int_a^b (pw)' \left(u'v - v'u\right) \right) \\
&+ \int_a^b (pw)' \left(u'v - v'u\right) = \left(u'v - v'u\right) pw\big|_a^b.
\end{aligned}
$$

Si pw se anula en los puntos extremos entonces no necesitaríamos imponer condiciones adicionales sobre la frontera; de otra forma tendríamos que imponer condiciones adicionales sobre u y v.

Supongamos que tenemos condiciones de simetría para la clase más "grande" de funciones posible. Una función $u \neq 0$ es una eigenfunción para L con eigenvalor $-\lambda$ si $Lu + \lambda u = 0$. Si u_1 y u_2 son eigenfunciones con eigenvalores distintos $-\lambda_1$ y $-\lambda_2$ entonces

$$
-\lambda_1 \left(u_1, u_2\right) = \left(Lu_1, u_2\right) = \left(u_1, Lu_2\right) = -\lambda_2 \left(u_1, u_2\right).
$$

Por lo tanto $(u_1, u_2) = 0$, es decir, u_1 y u_2 son ortogonales. Nos preguntamos ahora bajo qué condiciones el conjunto de las eigenfunciones de L incluye a los polinomios de grado 0, 1 y 2. Si los polinomios de grado 0, 1 y 2 son eigenfunciones de L entonces el espacio de los polinomios de grado $\leq k$ está contenido en el dominio de L y éste lo mapea en sí mismo, para $k = 0$, 1, 2. En particular, las constantes estarían contenidas en L_w^2, así

$$
\int_a^b w\left(x\right) dx < \infty. \tag{1.2.7}
$$

Aplicando L a la función constante $u_0\left(x\right) \equiv 1$ nos da que $Lu_0 = r$. Entonces por lo mencionado arriba, r debe ser constante. Luego, salvo trasladar los eigenvalores por $-r$, podemos tomar $r = 0$. Aplicando L a la función $u_1(x) = x$, obtenemos

$$Lu_1 = \frac{(pw)'}{w} = p' + p\frac{w'}{w}, \tag{1.2.8}$$

donde lo anterior se debe al suponer que L es simétrico. Además la expresión anterior debería ser un polinomio de grado a lo más 1. Si ahora tomamos $u_2(x) = {}^{x^2}/_2$.

$$Lu_2 = p + x\left(p' + p\frac{w'}{w}\right).$$

Como Lu_2 debe ser un polinomio de grado a lo más 2, se sigue que p debe ser un polinomio de grado no mayor que 2.

Por lo tanto para que un operador diferencial L de la forma (1.2.2) sea simétrico y posea una familia de polinomios como eigenfunciones debe ocurrir que $r = 0$, q y p sean polinomios de grado a lo sumo 1 y 2 y que $(pw)' = qw$.

Veamos todos los posibles casos acorde al grado del polinomio p.

Caso I

El polinomio p constante. Tomando $p(x) = 1$ se sigue de (1.2.8) que ${}^{w'}/_{w}$ tiene grado no mayor a 1, entonces w debe ser de la forma $w = e^h$ donde h es un polinomio de grado menor igual a 2. Después de normalizar podemos tomar $w(x) = e^{-x}$ o $w(x) = e^{\pm x^2}$. Si se cumple que $w(x) = e^{-x}$, como se busca que $pw = w$ se anule en los extremos del intervalo $I = (a, b)$, I no puede ser acotado, pero si I no es acotado entonces (1.2.7) no se puede satisfacer. Por lo tanto $w(x) = e^{\pm x^2}$. Como pw se debe anular en los puntos extremos de I, entonces $I = (-\infty, \infty)$ y para satisfacer (1.2.7) tomamos $w(x) = e^{-x^2}$. Así el operador se reduce a

$$L = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}.$$

Este operador mapea el espacio de los polinomios de grado $\leq n$ en sí mismo, para cada n, así para cada n existe un polinomio ψ_n de grado n que es una eigenfunción. Si

$$\psi_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

tenemos que

$$L\psi_n(x) = -2na_n x^n - 2(n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

Por lo tanto el eigenvalor asociado a ψ_n es $-2n$. Así cada eigenvalor es distinto, por lo tanto los ψ_n son ortogonales con respecto a e^{-x^2}.
Salvo normalización, los polinomios ortogonales asociados ψ_n se conocen como los *polinomios de Hermite*.

Caso II.

El polinomio p lineal. Podemos asumir que $p(x) = x$ así (1.2.8) implica que $w'/w = b + a/x$. Por lo tanto w debe ser de la forma $w = x^a e^{bx}$. Buscamos que $pw = xw$ se anule en los puntos extremos de I. Así I debe ser de la forma $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$. Luego como (1.2.7) se debe cumplir entonces $b < 0$. Así $I = (0, \infty)$ y por lo tanto $pw = x^{a+1} e^{bx}$, $a > -1$. Podemos pensar además que $b = -1$, entonces L se reduce a

$$L = x\frac{d^2}{dx^2} + [(a+1) - x]\frac{d}{dx}.$$

Una vez más L mapea los polinomios de grado $\leq n$ en sí mismos. Entonces existe un polinomio ψ_n de grado n que es eigenfunción. Igualando término a término vemos que se cumple la siguiente relación

$$L\psi_n + n\psi_n = 0.$$

Entonces cada eigenvalor es distinto y por lo tanto los ψ_n son ortogonales respecto a $w(x) = x^a e^{-x}$. La sucesión ψ_n se conoce como los *polinomios de Laguerre.*

Caso III

El polinomio p cuadrático. Raíces reales distintas. Salvo normalización podemos tomar $p(x) = 1 - x^2$. Entonces usando (1.2.8) tenemos que

$$\frac{w'}{w} = \frac{b}{1+x} - \frac{a}{1-x}.$$

Por lo tanto w debe ser de la forma $w(x) = (1-x)^a (1+x)^b$. Una vez más la condición de los puntos extremos de I obligan a que este último sea $[-1, 1]$. Recordemos que también se debe cumplir la ecuación (1.2.7), por lo tanto $a, b > -1$. Así L se reduce a

$$L = \left(1 - x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} + [b - a - (a+b+2)x]\frac{d}{dx}.$$

Como arriba, los polinomios de grado $\leq n$ son mapeados en sí mismos. Existe un polinomio de grado n, ψ_n que es una eigenfunción. Como antes, igualando término a término tenemos que

$$L\psi_n + n(n+a+b+1)\psi_n = 0,$$

así la sucesión de ψ_n es ortogonal. Estos son conocidos como los *polinomios de Jacobi*.

Caso IV

El polinomio p cuadrático. Raíces complejas distintas. Si normalizamos a x^2+1 tenemos que como $w>0$ y debe cumplir con (1.2.8) w debe ser de la forma $w(x) = \left(1+x^2\right)^a$. La condición de los puntos extremos obliga a que I sea no acotado, pero si I es no acotado entonces existirían un número finito de momentos finitos, así este caso no puede suceder.

Caso V

El polinomio p cuadrático. Raíz doble. Ahora podemos tomar $p(x) = x^2$ y como arriba, (1.2.8) implica que w tiene la forma $w(x) = x^a e^{b/x}$. Luego como todos los momentos deberían de ser finitos entonces I debe ser acotado, pero si también queremos que se satisfaga la condición de que $pw = 0$ en los extremos de I entonces debería ser no acotado, por lo tanto este caso tampoco puede suceder.

Hemos probado el siguiente resultado:

Teorema 1.2.2. *Salvo normalización, (transformaciones afines, multiplicación del operador la función peso y/o los polinomios por constantes) los polinomios clásicos ortogonales (Hermite, Laguerre y Jacobi) son las únicas eigenfunciones polinómicas para un operador diferencial de segundo orden que es simétrico respecto a una función peso positiva.*

1.3. Propiedades de los polinomios ortogonales clásicos de variable continua

Hasta ahora hemos visto que existen 3 tipos de polinomios ortogonales que son solución sobre I para la ecuación

$$p(x)\,\psi_n''(x) + q(x)\,\psi_n'(x) + \lambda_n\psi_n = 0, \quad q = \frac{(pw)'}{w}. \tag{1.3.1}$$

Estos tres casos son:

$$
\begin{aligned}
&I=(-\infty,\infty)\,, \quad w(x)=e^{-x^2}, \quad p(x)=1, \quad q(x)=-2x,\\
&I=(0,\infty)\,, \quad w(x)=e^{-x}x^{\alpha}, \quad \alpha>-11, \quad p(x)=x, \quad q(x)=1-x+\alpha,\\
&I=(-1,1)\,, \quad w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad \alpha>-1, \quad \beta>-1,\\
&p(x)=1-x^2, \quad q(x)=\beta-\alpha-(\beta+\alpha+2)x.
\end{aligned}
$$

Ahora se mostrarán algunas identidades que nos facilitarán el manejo de estos polinomios.

Notemos que (1.3.1) se puede reescribir como

$$\big(pw\psi_n'\big)'+\lambda_n w\psi_n=0. \tag{1.3.2}$$

Ahora si derivamos (1.3.1) tenemos que ψ_n' satisface la siguiente ecuación

$$p(x)\left[\psi_n'(x)\right]''+(q(x)+p'(x))\left[\psi_n'(x)\right]'+(\lambda_n+q'(x))\psi_n(x)=0. \tag{1.3.3}$$

Como

$$q+p'=\frac{(pw)'}{w}+p'=\frac{p^2w'+2pp'w}{pw}=\frac{[p(pw)]'}{pw}$$

y en los tres casos $q'(x)$ es constante, tenemos que el operador definido como

$$\mathcal{T}=p\frac{d^2}{dx^2}+\frac{[p(pw)]'}{pw}\frac{d}{dx}$$

es del tipo (1.2.5). Así tenemos que éste es simétrico con respecto a pw (notemos que $pw>0$ en cada una de las tres SPO arriba enlistadas) y las ψ_n' son eigenfunciones de $\mathcal{T}$ con eigenvalores $-(\lambda_n+q')$. Por lo tanto tenemos que los polinomios ψ_n' son una SPO para pw. Análogamente ψ_n'' es una SPO respecto a p^2w, con eigenvalores

$$-(\lambda_n+q')-(q+p')'=-\lambda_n-2q'-p''.$$

Por inducción se sigue que para la m-ésima derivada se tiene que las $\psi_n^{(m)}$ son eigenfunciones, con eigenvalor asociado

$$-\lambda_n-mq'-\frac{1}{2}m(m-1)p''.$$

Como $\psi_n^{(n)}$ es constante, ya que es un polinomio de grado n, tenemos que

$$\lambda_n = -nq' - \frac{1}{2}n(n-1)p''.$$

Entonces para cada una de los casos arriba mencionados tenemos que

$$\lambda_n = 2n, \quad \lambda_n = n, \quad \lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1),$$

La ecuación (1.3.2) se puede escribir como

$$w\psi_n = -\lambda_n^{-1}(pw\psi_n')'. \tag{1.3.4}$$

También (1.3.3) se puede pensar como

$$pw\psi_n' = -(q'+\lambda_n)^{-1}(p^2w(\psi_n')'' + (p^2w)'\psi_n'').$$

Así

$$pw\psi_n' = -(q'+\lambda_n)^{-1}(p^2w\psi_n'')'.$$

Entonces si sustituimos en (1.3.4) tenemos que

$$w\psi_n = (\lambda_n(q'+\lambda_n))^{-1}(p^2w\psi_n'')',$$

y luego por inducción se cumple que

$$w\psi_n = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1}\left[\lambda_n + mq' + \frac{1}{2}m(m-1)p''\right]^{-1}(p^2w\psi_n^{(n)})^{(n)} \tag{1.3.5}$$

como $\psi_n^{(n)}$ es constante, podemos normalizar tomando

$$\psi_n(x) = w^{-1}(x)\frac{d^n}{dx^n}[p^n(x)\,w(x)]. \tag{1.3.6}$$

Esta igualdad se conoce como la *fórmula de Rodrigues*. Si se sustituye (1.3.6) en (1.3.5) tenemos que

$$\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1}\left[\lambda_n + mq' + \frac{1}{2}m(m-1)p''\right].$$

Así tenemos que

$$\psi_n(x) = a_n x^n + \mathcal{O}(x^{n-1}),$$

donde

$$n! a_n = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} \left[\lambda_n + mq' + \frac{1}{2} m(m-1)p'' \right]. \tag{1.3.7}$$

En nuestros 3 casos el lado derecho de (1.3.7) es, respectivamente

$$(-2)^n n!, \quad (-1)^n n!, \quad (-1)^n n! (\alpha + \beta + n + 1)_n,$$

donde $(z)_n$ es el *símbolo de Pochhamer*, que se define como

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)...(z+n-1), \quad n \geq 1. \tag{1.3.8}$$

Luego, recordemos que si

$$(f, \psi_n)_w = (f, \psi_n) = \int_a^b f(x) \psi_n(x) w(x) \, dx$$

entonces como en los tres casos pw se anula en los extremos de I tenemos que también lo hace $p^n w$. Así, si f tiene las suficientes condiciones de diferenciabilidad, podemos integrar por partes n veces sin adquirir términos de frontera para obtener que

$$\int_a^b f(x) \psi_n(x) w(x) \, dx = (-1)^n \int_a^b p(x)^n f^{(n)}(x) w(x) \, dx.$$

Así

$$\begin{aligned} ||\psi_n||^2 &= \int_a^b \psi_n^2(x) w(x) \, dx = (-1)^n \int_a^b p(x)^n \psi_n^{(n)}(x) w(x) \, dx \\ &= \prod_{m=0}^{n-1} \left[\lambda_n + mq' + \frac{1}{2} m(m-1)p'' \right] \int_a^b p(x)^n w(x) \, dx. \end{aligned}$$

Para nuestros tres casos tenemos que $\int_a^b p(x)^n w(x) \, dx$ se reduce a lo siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = \Gamma(n + \alpha + 1),$$

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} = 2^{2n+\alpha+\beta+1}\int_{0}^{1} s^{n+\alpha}(1-s)^{n+\beta}ds$$
$$= 2^{2n+\alpha+\beta+1}B\left(n+\alpha+1, n+\beta+1\right),$$

donde $\Gamma(z)$ es la *función gamma* definida como

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{\infty} x^{z-1}e^{-x}dx, \quad Re\, z > 0$$

y $B\left(a,b\right)$ denota la *función beta*, que se define como

$$B\left(a,b\right) = \int_{0}^{1} s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds, \quad Re\, a, \quad Re\, b > 0.$$

Por lo tanto tenemos que el cuadrado de la norma de ψ_n en L_w^2 es respectivamente

$$||\psi_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi},$$
$$||\psi_n||^2 = n!\Gamma(n+\alpha+1),$$
$$||\psi_n||^2 = 2^{2n+\alpha+\beta+1}n!\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)},$$

donde la última igualdad se sigue de las identidades

$$B\left(a,b\right) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (z)_{n+1}\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1).$$

La fórmula de Rodrigues permite dar una descripción explícita de los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi, nuestros tres casos arriba descritos. Estos son respectivamente

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}), \tag{1.3.9}$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha}), \tag{1.3.10}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}((1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}), \tag{1.3.11}$$

donde en las últimas dos identidades fueron agregadas algunas constantes, con el fin de normalizar. También las normas se reducen a

$$||H_n||^2 = 2^n n!\sqrt{\pi},$$

$$||L_n^{(\alpha)}||^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!},$$

$$||P_n^{(\alpha,\beta)}||^2 = 2^{\alpha+\beta+1} n! \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+1)n!}.$$

En el capítulo 2 se verán algunas propiedades adicionales de estos polinomios, en particular para los de Laguerre y Jacobi.

1.4. Polinomios ortogonales de variable discreta

Supongamos que tenemos una sucesión $w = \{w_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de números no negativos. Para dos sucesiones de números reales $f = (f(n))_{n=-\infty}^{\infty}$ y $g = (g(n))_{n=-\infty}^{\infty}$ definimos el producto interior $(f,g)_w$ como

$$(f,g)_w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m)g(m)w_m.$$

Se sigue de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$|(f,g)_w| \leq ||f||_w ||g||_w.$$

Con lo cual $(f,g)_w$ está bien definido siempre que $||f||_w$ y $||g||_w$ sean finitas. Por lo tanto tenemos que la norma y el producto interior dependen sólo de los valores que toman las funciones sobre los enteros, aunque nosotros sólo trabajaremos con polinomios definidos sobre la recta real. Ahora, los polinomios tienen norma finita si y sólo si sus momentos pares son finitos, es decir, si y sólo si para todo n en los naturales

$$\mu_{2n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m^{2n} w_m < \infty$$

es finito. Al igual que en el caso continuo, se puede construir una SPO a partir de la sucesión de momentos $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ y los determiantes (1.1.2), siempre que éstos sean distintos de cero. Existe un resultado más general para este problema, cuya demostración puede consultarse en [4] , el resultado establece lo siguiente: dada una sucesión de números complejos $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ existe una SPO si y sólo si los determinantes (1.1.2) son distintos de cero.

Frecuentemente w se normaliza de tal modo que defina una *función de probabilidad*, es decir

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = 1.$$

Para los polinomios definidos sobre los enteros, la noción de diferenciabilidad puede ser reemplazada por los operadores en diferencias *forward* o *backward* definidos respectivamente como

$$\Delta_+ f(m) = f(m+1) - f(m)\,, \quad \Delta_- f(m) = f(m) - f(m-1)\,.$$

Cada uno de estos operadores mapean los polinomios de grado n en los polinomios de grado $n-1$, entonces su producto

$$[\Delta_+ \Delta_-]\, f(m) = [\Delta_- \Delta_+]\, f(m) = f(m+1) + f(m-1) - 2f(m)$$

reduce el grado de un polinomio en dos y juega el rol de una segunda derivada. Es conveniente expresar estos operadores en términos de los operadores *shift* definidos como:

$$S_\pm f(m) = f(m \pm 1)\,.$$

Así

$$\Delta_+ = S_+ - I, \quad \Delta_- = I - S_-.$$

Por lo tanto

$$\Delta_+ \Delta_- = S_+ + S_- - 2I = \Delta_+ - \Delta_-. \tag{1.4.1}$$

Entonces la forma general de un operador en diferencias de segundo orden es

$$L = p_+ S_+ + p_- S_- + r,$$

donde p_+, p_- y r son funciones con valores en los reales. Ahora bajo la convención de que si w es una sucesión, $w(m) = w_m$, tenemos que para que L sea simétrico respecto a w se debe cumplir que

$$0 = (Lf, g) - (f, Lg) = (p_+ S_+ f, g) - (f, p_- S_- g) + (p_- S_- f, g) - (f, p_+ S_+ g)\,.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
&(p_+S_+f,g)-(f,p_-S_-g)\\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}p_+(m)\,f(m+1)\,g(m)\,w_m-\sum_{m=-\infty}^{\infty}p_-(m)\,f(m)\,g(m-1)\,w_m\\
&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[p_+(m)\,w_m-p_-(m+1)\,w_{m+1}]f(m+1)\,g(m).
\end{aligned}$$

Notemos que

$$p_+(m)\,w_m-p_-(m+1)\,w_{m+1}$$

se puede escribir como

$$[p_+w-S_+\,(p_-w)](m)$$

donde $w\,(m)=w_m$. Por lo tanto

$$(p_+S_+f,g)-(f,p_-S_-g)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[p_+w-S_+\,(p_-w)](m)\,f(m+1)\,g(m).$$

Análogamente

$$(p_-S_-f,g)-(f,p_+S_+g)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[p_-w-S_-\,(p_+w)](m)\,f(m-1)\,g(m).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
0=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}[p_-w-S_-\,(p_+w)]\,(m)\,f(m-1)\,g(m)\\
&+\sum_{m=-\infty}^{\infty}[p_+w-S_+\,(p_-w)](m)\,f(m+1)\,g(m).
\end{aligned}$$

Si escogemos g de tal manera que se anule en todos los enteros excepto para un valor m y f que se anule en todos los enteros salvo $m+1$ o $m-1$, concluimos que la condición de simetría es equivalente a

$$p_-w=S_-\,(p_+w)\,,\quad p_+w=S_+\,(p_-w)\,. \tag{1.4.2}$$

Como en el caso continuo, la simetría de L implica que las eigenfunciones con eigenvalores distintos sean ortogonales.

Como antes nos preguntamos: ¿cuándo las eigenfunciones de L incluyen los polinomios de grado 0, 1 y 2?

Si suponemos que $w_m > 0$ para todos los enteros en un cierto intervalo que puede ser infinito o tener $N+1$ puntos, y ser cero fuera de él, normalizando se reduce a tres casos:

a) $w_m > 0$ si $0 \leq m \leq N$.

b) $w_m > 0$ si $m \geq 0$.

c) $w_m > 0$ para todo m.

De (1.4.2) se sigue que $p_-(0)\, w_0 = p_+(-1)w_{-1}$ por lo tanto $p_-(0) = 0$ en los casos a) y b). Además como se cumple que $p_-(N+1)\, w_{N+1} = p_+(N)w_N$ se sigue que para el caso a) que $p_+(N) = 0$. Con un cambio de notación para los términos de orden 0, L se puede reescribir como

$$L = p_+\Delta_+ - p_-\Delta_- + s. \tag{1.4.3}$$

Así $L(1) = s$ debe ser una constante, por lo tanto podemos suponer que $s = 0$. También como $\Delta_\pm(x) = 1$ tenemos que

$$L(x) = p_+ - p_-.$$

Como buscamos que los polinomios de grado 1 sean eigenfunciones para L se sigue entonces que $p_+ - p_-$ debe ser un polinomio de grado 1. Por último como $\Delta_\pm(x^2) = 2x \pm 1$, entonces

$$L(x^2) = 2x(p_+ - p_-) + (p_+ + p_-).$$

Por lo tanto se sigue que $p_+ + p_-$, es un polinomio de grado a lo más 2. Así p_+ y p_- son polinomios de a lo más grado 2, y donde al menos uno de ellos es de grado positivo. Además como $p_+ - p_-$ es de grado 1, si uno de ellos es de grado 2 entonces el otro lo es y ambos tienen el mismo coeficiente principal. La condición (1.4.2) implica que

$$w_{m+1} = \frac{p_+(m)}{p_-(m+1)} w_m = \varphi(m)\, w_m. \tag{1.4.4}$$

Existen 4 casos, dependiendo de los grados de p_+ ó p_-.

Caso I

El polinomio p_+ o p_- de grado 0. Como $p_+ - p_-$ es de grado 1, se sigue que uno debe ser de grado 1. Además por la condición de momentos finitos tenemos que w debe cumplir que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w_m = \sum_{m=-\infty}^{0} w_m + \sum_{m=0}^{\infty} w_m < \infty.$$

Así w debe satisfacer las condiciones siguientes

$$\lim_{m\to\infty} w_m = 0, \quad \lim_{m\to-\infty} w_m = 0 \tag{1.4.5}$$

Supongamos sin perder generalidad que p_+ es de grado 1 y p_- tiene grado 0. Tomando p_+ mónico, entonces $p_+(m) = m + b$ y $p_-(m) = c$ con $c > 0$. Así si ocurriera c) de (1.4.4) se seguiría que

$$w_{m+1} = \frac{p_+(m)p_+(m-1)\cdots p_+(0)}{c^{m+1}} w_0,$$

$$w_{-m-1} = \frac{p_-(-m)}{p_+(-m-1)} w_{-m} = \frac{w_0 c^{m+1}}{p_+(-m-1)p_+(-m)\cdots p_+(-1)}.$$

Entonces por (1.4.5) se tendría que

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{p_+(i)}{c^{i+1}} \to 0, \quad m \to \infty$$

y

$$\prod_{i=1}^{m+1} \frac{c^i}{p_+(-i)} \to 0, \quad m \to \infty$$

que son condiciones mutuamente excluyentes, ya que si

$$a_m = \prod_{i=0}^{m} \frac{p_+(i)}{c^{i+1}} \quad y \quad b_m = \prod_{i=1}^{m+1} \frac{c^i}{p_+(-i)}$$

entonces $a_n \to 0$ y $|b_n| \to 0$ pero para m suficientemente grande se tiene que

$$|b_m| \approx \left|\frac{c^m}{(-1)^m m!}\right| = \frac{c^m}{m!} \approx \frac{1}{a_m},$$

y como w_m son positivos entonces los a_m también lo son. Así la identidad anterior nos llevaría a una contradicción. Por lo tanto $c)$ no puede ocurrir.
Como en $a)$ y en $b)$ $p_-(0) = 0$ se sigue en estos casos que p_- es de grado 1 y p_+ es constante, pero para el caso $a)$ observamos arriba que $p_+(N) = 0$ por lo tanto el caso $a)$ tampoco puede ocurrir.
Así sólo el caso $b)$ es posible. Entonces si normalizamos podemos tomar $p_+(x) = 1$ y $p_-(x) = x/a$ con $a > 0$. Entonces

$$\frac{p_+(m)}{p_-(m+1)} = \frac{a}{m+1}.$$

Para normalizar w introducimos el factor e^{-a}. Por lo tanto

$$w_m = e^{-a}\frac{a^m}{m!} \quad m \geq 0.$$

Esta se conoce como la función de *distribución Poisson* y los polinomios asociados son los *polinomios de Charlier* también llamados *polinomios de Poisson-Charlier*.

Caso II

Los polinomios p_+ y p_- de grado 1. Como mencionamos arriba $p_+ - p_-$ debe ser de grado 1. Por lo tanto los coeficientes principales no pueden ser iguales. Tomando $p_+(m) = m + b$ y $p_-(m) = am + c$, si sucediera $c)$ de (1.4.4) se seguiría que para todo m natural

$$w_{m+1} = \frac{(m+b)\cdots(1+b)w_0}{((m+1)a+c)\cdots(a+c)} = \frac{(b)_{m+1}w_0}{((m+1)a+c)\cdots(a+c)}.$$

y

$$\begin{aligned} w_{-m-1} &= \frac{(-ma+c)((-m+1)a+c)\cdots cw_0}{(-m-1+b)(-m+b)\cdots(-1+b)} \\ &= \frac{(-1)^m(ma-c)((m-1)a-c)\cdots cw_0}{(-1)^{m+1}(1-b)_{m+1}} \\ &= -\frac{(ma-c)((m-1)a-c)\cdots cw_0}{(1-b)_{m+1}}. \end{aligned}$$

Entonces argumentando como arriba vemos que estas condiciones son mutuamente excluyentes, por lo tanto $c)$ queda descartada. Si en el caso $a)$

normalizamos para tomar $p_+(x) = p(N-x)$ y $p_-(x) = qx$ donde p y q son constantes positivas tales que $p+q=1$ y N un entero no negativo tenemos que

$$w_m = \binom{N}{m} p^m q^{N-m} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

Esta es la *distribución binomial* y los polinomios asociados a ella se conocen como *polinomios de Krawtchouk*.

Caso III

Los polinomios p_+ y p_- de grado 1. Supongamos ahora que sucede el caso b). Podemos normalizar para tomar $p_-(x) = x$ y $p_+(x) = c(x+b)$. Ahora de (1.4.4) tenemos que $w_1 = cbw_0$. Por lo tanto $cb > 0$. Sin perder generalidad los supondremos positivos. Además como deseamos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} w_m < \infty$$

es suficiente pedir que $\lim_{m\to\infty} {}^{w_{m+1}}/_{w_m} < 1$. Ahora como

$$w_n = \frac{c^n (b)_n w_0}{n!}$$

entonces

$$\frac{w_{m+1}}{w_m} = \frac{c(b+m)}{m+1}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} \frac{w_{m+1}}{w_m} = c.$$

Así también supondremos que $c < 1$ y normalizando w tenemos que

$$w_m = (1-c)^b \frac{(b)_m}{m!} c^m.$$

Y los polinomios asociados de conocen como los *polinomios de Meixner*.

Caso IV

Los polinomios p_+ y p_- de grado 2. Como se mencionó antes ambos tienen el mismo coeficiente principal. Entonces $p_+(m) = m^2 + am + b$ y

$p_-(m) = m^2 + cm + d$. Como se cumple para todo natural que

$$w_{m+1} = \frac{p_+(m)}{p_-(m+1)} w_m = \frac{p_+(m)p_+(m-1)\cdots p_+(0)}{p_-(m+1)p_-(m)\cdots p_-(1)} w_0$$

y

$$w_{-m-1} = \frac{p_-(-m)}{p_+(-m-1)} w_{-m} = \frac{p_-(-m)p_-(-m+1)\cdots p_-(0)}{p_+(-m-1)p_+(-m)\cdots p_+(-1)} w_0$$

argumentando como antes, se sigue que el caso *c*) no puede ocurrir. Ahora notemos que para m suficientemente grande tenemos que

$$\frac{p_+(m)}{p_-(m+1)} = \frac{1 + am^{-1} + bm^{-2}}{1 + cm^{-1} + dm^{-2}} = 1 + \frac{a-c}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Usando (1.4.4) como arriba, m suficientemente grande, tenemos que $w_m \geq 1$. Por lo tanto (1.4.5) no se puede satisfacer. Así *b*) no puede ocurrir. Para el caso *a*) teníamos que $p_-(0) = 0 = p_+(N)$ y dos casos que pueden ser reducidos a

$$p_-(x) = x(N+1+\beta-x), \quad p_+(x) = (N-x)(x+\alpha+1), \quad \alpha, \beta > -1$$

o

$$p_-(x) = x(x-N-1-\beta), \quad p_+(x) = (N-x)(-x-\alpha-1), \quad \alpha, \beta < -N.$$

Por conveniencia usaremos la primera fórmula. Entonces

$$w_m = C\frac{(N-m+1)_m(\alpha+1)_m}{m!(N+\beta+1-m)_m} = C\binom{N}{m}\frac{(\alpha+1)_m(\beta+1)_{N-m}}{(\beta+1)_N}$$

Los polinomios asociados son conocidos comúnmente como los *polinomios de Hahn*. Así hemos demostrado el siguiente teorema de clasificación:

Teorema 1.4.1. *Salvo normalización los polinomios de Charlier, Krawtchouk, Meixner y Hahn son las únicas eigenfunciones polinómicas de un operador en diferencias de segundo orden que es simétrico respecto a una función peso positiva.*

1.5. Propiedades de los polinomios ortogonales clásicos de variable discreta

A continuación se deducen el análogo discretro de las formúlas presentadas en la sección 1.3: fórmula de Rodrigues, coeficiente principal y norma.

Supongamos que w es una función peso definida sobre los enteros y L es simétrico respecto a w. Si ψ_n es un polinomio de grado n que es eigenfunción con valor propio λ_n entonces se debe cumplir que

$$p_+\Delta_+ - p_-\Delta_- + \lambda_n\psi_n = 0. \tag{1.5.1}$$

Ahora, si aplicamos la *identidad de Leibniz* para el caso discreto

$$\Delta_+(fg) = (S_+f)\Delta_+g + g\Delta_+f,$$

de (1.5.1) tenemos que

$$p_+^{(1)}\Delta_+\psi_n^{(1)} - p_-^{(1)}\Delta_-\psi_n^{(1)} + \lambda_n^{(1)}\psi_n^{(1)} = 0,$$

donde

$$p_+^{(1)} = S_+p_+, \quad p_-^{(1)} = p_-, \quad \lambda_n^{(1)} = \lambda_n + \Delta_+(p_+ - p_-), \quad \psi_n^{(1)} = \Delta_+\psi_n.$$

El nuevo operador es simétrico con respecto al peso $w^{(1)} = p_+w$ ya que

$$S_+(w^{(1)}p_-^{(1)}) = S_+(p_+)S_+(wp_-) = p_+^{(1)}wp_+ = w^{(1)}p_+^{(1)},$$

donde la penúltima desigualdad se sigue de (1.4.2). Iterando, vemos que $\psi_n^{(k)} = (\Delta_+)^k\psi_n$ satisface la igualdad

$$p_+^{(k)}\Delta_+\psi_n^{(k)} - p_-^{(k)}\Delta_-\psi_n^{(k)} + \lambda_n^{(k)}\psi_n^{(k)} = 0$$

con

$$\lambda_n^{(k)} = \lambda_n + (I + S_+ + \cdots + S_+^{k-1})\Delta_+p_+ - k\Delta_+p_-p_+^{(k)} = S_+^kp_+$$

y el correspondiente operador es simétrico respecto a la función peso

$$w^{(k)} = w\prod_{j=0}^{k-1} S_+^jp_+.$$

Ahora como $\psi_n^{(k)}$ tiene grado $n-k$ en particular $\psi_n^{(n)}$ es una constante, entonces $\lambda_n^{(n)} = 0$. Así

$$\lambda_n = -(I + S_+ + \cdots + S_+^{(k)})\Delta_+p_+ + n\Delta_+p_-,$$

que se puede reescribir como

$$\lambda_n = n\Delta_+(p_- - p_+) + \sum_{j=1}^{n-1}(I - S_+^j)\Delta_+ p_+. \qquad (1.5.2)$$

Ahora vamos a reescribir el operador L usando (1.4.2) y la identidad $S_-\Delta_+ = \Delta_-$. Entonces

$$\begin{aligned} wL &= wp_+\Delta_+ - S_-(wp_+)\Delta_- = wp_+\Delta_+ - S_-(wp_+\Delta_+) \\ &= \Delta_-(wp_+\Delta_+) = \Delta_-(w^{(1)}\Delta_+). \end{aligned}$$

Entonces en los puntos en que w es positiva la ecuación (1.5.1) puede ser reescrita como

$$\psi_n = -\frac{1}{\lambda_n w}\Delta_-(w^{(1)}\psi_n^{(1)}).$$

Si iteramos este proceso y tomamos a $\psi_n^{(n)}$ como la constante

$$\psi_n^{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1}\Big[\lambda_n + (S_+^k - I)p_+ - k\Delta_+ p_+\Big] = A_n,$$

obtenemos la *fórmula de Rodrigues* para el caso discreto

$$\psi_n^{(n)} = (-1)^n \frac{1}{w}\Delta_-^n(w^{(n)}), \quad w^{(n)} = w\prod_{j=0}^{n-1} S_+^j p_+. \qquad (1.5.3)$$

Ya que $\Delta_- = I - S_-$ podemos expandir $\Delta_-^n = (I - S_-)^n$ y escribir (1.5.3) como

$$\psi_n = \frac{1}{w}\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}S_-^k(w^{(n)}).$$

Como una aplicación podemos obtener una fórmula para la norma de ψ_n. Notemos primero que siempre que exista convergencia absoluta tenemos que

$$\sum_k \Delta_- f(k)g(k) = -\sum_k f(k)\Delta_+ g(k).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\lambda_n\|\psi_n\|_w^2 = -(L\psi_n,\psi_n)_w &= -\sum_k \left[\Delta_-(wp_+\psi_n^{(1)})\right](k)\psi_n(k)\\ &= \sum_k \left[wp_+\psi_n^{(1)}\right](k)\psi_n^{(1)}(k) = \left\|\psi_n^{(1)}\right\|_{w^{(1)}}^2.\end{aligned}$$

Iterando, obtenemos que

$$A_n\|\psi_n\|_w^2 = \left\|\psi_n^{(n)}\right\|_w^2 = A_n^2\|1\|_w.$$

Así se concluye que

$$\|\psi_n\|_w^2 = A_n\sum_k w^{(n)}(k).$$

Notemos que se sigue de (1.4.2) que

$$\frac{1}{w}\Delta_-(w^{(1)}f) = p_+f - \frac{S_-(p_+w)}{w}S_-f = p_+f - p_-S_-f.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}\Delta_-w^{(1)}\circ\frac{1}{w^{(1)}}\Delta_-w^{(2)} &= (p_+ - p_-S_-)\circ(p_+^{(1)} - p_-S_-)\\ &= p_+p_+^{(1)} - 2p_+p_- + p_-(S_-p_-)_+S_-^2,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de

$$\begin{aligned}&p_-S_-p_+^{(1)}(f(x)) = p_-S_-(p_+(x+1)f(x))\\ &= p_-(x)p_+(x)f(x-1) = p_-(x)p_+(x)S_-(f(x)).\end{aligned}$$

Así como

$$\frac{1}{w}\Delta_-^n w^{(n)} = \left(\frac{1}{w}\Delta_-w^{(1)}\right)\left(\frac{1}{w^{(1)}}\Delta_-w^{(2)}\right)\cdots\left(\frac{1}{w^{(n-1)}}\Delta_-w^{(n)}\right)$$

por inducción tenemos que

$$(-1)^n\frac{1}{w}\Delta_-^n w^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\prod_{j=0}^{n-k-1}p_+^{(j)}\prod_{j=0}^{k-1}p_-^{(j)}S_-^k,$$

donde $p_-^{(j)} = S_-^j p_-$. Aplicando este operador a la función constante 1 obtenemos que

$$\psi_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{n-k-1} (S_+^j p_+) \prod_{j=0}^{k-1} (S_-^j p_-).$$

Una segunda forma de calcular los polinomios ψ_n es usar el análogo a la expansión en series, con lo monomios x^k remplazados por los polinomios

$$e_k(x) = (x-k+1)_k = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1) = (-1)^k(-x)_k.$$

Entonces

$$\Delta_+ e_k(x) = k e_{k-1}(x), \quad x\Delta_- e_k(x) k e_k(x), \quad x e_k = e_{k+1} + k e_k.$$

En cada uno de nuestros casos, $p_-(x)$ es divisible por x. Entonces si aplicamos el operador $L = p_+(x)\Delta_+ - p_-(x)\Delta_-$ a la expansión

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} e_k(x)$$

esto conduce a expresar los coeficientes $a_{n,k}$ como un cierto múltiplo de $a_{n,k-1}$.

En el capítulo 2 se verán algunas propiedades adicionales de los polinomios de Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn.

Capítulo 2

Operadores de orden superior

Este capítulo comienza con un recuento histórico del problema de encontrar polinomios ortogonales que son eigenfunciones de operadores diferenciales o en diferencias. Se enuncian algunos de los resultados más importantes que han ayudado a resolver parte del problema. Después, se introduce el concepto de $\mathcal{D}$-operador asociado a una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y un álgebra $\mathcal{A}$ de operadores. Este concepto es una valiosa herramienta, ya que de él se deduce un método que permite construir, a partir de las familias clásicas ortogonales, nuevas sucesiones de polinomios ortogonales las cuales satisfacen ecuaciones diferenciales o en diferencias de orden superior. En la última parte, este método se aplica a la familias clásicas ortogonales tanto discretas como continuas.

2.1. Antecedentes

El problema de hallar polinomios ortogonales $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que son eigenfunciones de un operador diferencial

$$D = \sum_{l=1}^{k} f_l \frac{d^l}{dx^l}$$

donde f_l, $l = 1, 2, \ldots, k$ son polinomios, tiene una historia de dos siglos.

El primer ejemplo de una familia ortogonal de polinomios que satisfacen una ecuación del tipo

$$\sum_{l=1}^{k} f_l p_n^{(l)} = \lambda_n p_n, \tag{2.1.1}$$

con $k = 2$, es decir una ecuación diferencial de segundo orden, apareció a finales del siglo XVIII. Se conocen como los *polinomios de Legendre*. A lo largo del siglo XIX aparecieron nuevos ejemplos que satisfacían ecuaciones diferenciales de segundo orden y fueron bautizados con los nombres de *Jacobi, Hermite y Laguerre.*

Como vimos en el capítulo anterior las únicas familias de polinomios ortogonales que satisfacen (2.1.1), con $k = 2$, son las familias clásicas de polinomios de *Hermite, Laguerre y Jacobi*. Este resultado fue demostrado por Salomon Bochner en 1929 [3] aunque E. Routh, en 1884, había planteado y resuelto parcialmente este resultado.

Como resultado del trabajo de Bochner, es natural buscar familias de polinomios ortogonales que son solución a ecuaciones del tipo (2.1.1) cuando $k > 2$. De 1938 a 1940 H.L. Krall hizo exactamente esto y obtuvo algunos resultados muy importantes. En 1938 demostró el siguiente teorema [15].

Teorema 2.1.1. *Suponga que $p_m(x)$, es un polinomio sobre los reales de grado m. Entonces $(p_m(x))_{m=0}^{\infty}$ es una SPO y $p_m(x)$ cumple*

$$\sum_{i=1}^{r} f_i(x) p_m^{(i)} = \lambda_m p_m(x)$$

donde

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{i} l_{i,j} x^j \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{2.1.2}$$

y $\lambda_m = ml_{11} + m(m-1)l_{22} + \cdots + m(m-1)\cdots(m-r+1)l_{rr}$ si y sólo si los momentos $(\mu_m)_{m=0}^{\infty}$, definidos en (1.1.1), cumplen

(i)

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_m \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{2m} \end{vmatrix} \neq 0, \quad m = 0, 1, \ldots$$

(ii)

$$S_k(m) = \sum_{i=2k+1}^{r} \sum_{u=0}^{i} \binom{i-k-1}{k} (m-i+1)_{i-2k-1} l_{i,i-u} \mu_{m-u} = 0 \tag{2.1.3}$$

donde $2k+1 \leq r$, $m = 2k+1,\ 2k+2,\ \ldots$ *Además* r *es necesariamente par. Es decir, si* r *es el orden más pequeño de una ecuación diferencial del tipo* (2.1.1) *que tiene a* $(p_m(x))_{m=0}^{\infty}$ *como solución, entonces* r *es par.*

La ecuación (2.1.2), se debe a que la prueba de Bochner reveló que si la ecuación (2.1.1), tiene como solución un polinomio de grado m, $m = 0, 1, \ldots, r$ entonces f_l es necesariamente un polinomio de grado menor o igual a l.

La identidad dada en (ii) se conoce como la *ecuación de momentos* de $(p_m(x))_{m=0}^{\infty}$. Además como r es de la forma $r = 2n$ para algún $n \geq 1$, entonces hay n ecuaciones de momentos $S_k(m) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

En [15], Krall construyó el primer ejemplo de una SPO que es solución de una ecuación diferencial de cuarto orden. La ecuación encontrada es

$$\begin{aligned} \left(x^2-1\right)^2 y_m^{(4)}(x) + 8x\left(x^2-1\right) y_m^{(3)}(x) + (4\alpha+12)\left(x^2-1\right) y_m''(x) + \\ 8\alpha x y_m'(x) = m(m+1)(m^2+m+4\alpha-2) y_m(x). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Los polinomios que satisfacen (2.1.4) se conocen como los polinomios de *tipo Legendre* y fueron estudiados posteriormente por A.M. Krall en [17]. Al resolver la ecuación de momentos obtenemos

$$\mu_{2m+1} = 0 \quad y \quad \mu_{2m} = \frac{2m+1+\alpha}{(1+\alpha)(2m+1)} \mu_0.$$

H.L. Krall entonces construyó la función peso asociada a esta familia de polinomios al observar que

$$\mu_{2m} = \left(1 + \frac{\alpha}{2m+1}\right) \frac{\mu_0}{1+\alpha} = \frac{\mu_0}{1+\alpha} \int_{-1}^{1} x^{2m} d\mu(x)$$

donde

$$\mu(x) = \begin{cases} -\frac{1+\alpha}{2} & x = -1, \\ \frac{\alpha x}{2} & -1 < x < 1, \\ \frac{1+\alpha}{2} & x = 1. \end{cases}$$

Así, la función peso asociada es

$$d\mu(x) = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\delta(x+1) + \frac{1}{2}\delta(x-1)\right) dx. \tag{2.1.5}$$

En 1940 H.L. Krall completó la clasificación de todas las ecuaciones de cuarto orden que tienen como solución familias de polinomios ortogonales [16]. Encontró otras dos ecuaciones diferenciales que tienen una SPO como solución. En 1978, A. M. Krall y R.D. Morton [19] encontraron las otras dos funciones peso mediante un novedoso método. Primero encontraron los momentos usando (2.1.3), después construyeron la distribución

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n \delta^{(n)}(x)}{n!}, \tag{2.1.6}$$

donde $\delta^{(n)}(x)$ es la n-ésima derivada, en sentido distribucional, de la delta de Dirac. Usando la transformada de Fourier y su inversa pudieron dar a $w(x)$ una representación del tipo (2.1.5). Ilustramos el método encontrando la función peso para la SPO que son solución a la ecuación,

$$\begin{gathered} x^2 y_m^{(4)}(x) - (2x^2-4x)y_m^{(3)}(x) + (x^2-(2R+6)x)y_m''(x) + \\ ((2R+2)x-2R)y_m'(x) = m(2R+1+m)y_m(x). \end{gathered} \tag{2.1.7}$$

Usando (2.1.3) tenemos que los momentos estan dados por

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{R} \quad \mu_m = m!, \quad m \geq 1,$$

si sustituimos en (2.1.6) obtenemos

$$w(x) = \frac{1}{R}\delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \delta^{(n)}(x),$$

así la transformada de Fourier de $w(x)$ es

$$\widehat{w}(t) = \frac{1}{R\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{(1+it)\sqrt{2\pi}},$$

ya que la transformada de Fourier de

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \delta^{(n)}(x)$$

es
$$\sum_{n=1}^{k} a_n (it)^n.$$
La inversa de la transformada de Fourier para $\widehat{w}\,(t)$ es $w(x) = (1/R)\,\delta(x) + H(x)e^{-x}$ donde $H(x)$ es la *función de Heaviside*. Así sobre $[0, \infty)$ obtenemos
$$w(x) = \frac{1}{R}\delta(x) + e^{-x}. \tag{2.1.8}$$

Los polinomios asociados a esta función peso se conocen como polinomios de *tipo Laguerre*. Análogamente A. M. Krall y R. D. Morton mostraron que la SPO que es solución a la ecuación
$$\begin{aligned}
&\left(x^2 - x\right)^2 y_m^{(4)}(x) + 2x(x-1)((\alpha+4)x-2)y_m^{(3)}(x)\\
&+ x\left(\left(\alpha^2 + 9\alpha + 14 + 2M\right)x - (6\alpha + 12 + 2M)\right) y_m''(x)\\
&+ ((\alpha+2)\,(2\alpha+2+M)x - 2M)\,y_m'(x)\\
&= [(\alpha+2)\,(2\alpha+2+2M)\,m + \left(\alpha^2 + 9 + 14 + 2M\right) m(m-1)\\
&+ 2(\alpha+4)m(m-1)(m-2) + m(m-1)(m-2)(m-3)]y_m(x)
\end{aligned}$$
tiene, sobre $[0, 1]$, la función peso asociada
$$w(x) = (1-x)^\alpha + \frac{1}{M}\delta(x).$$

Estos son llamados los polinomios de *tipo Jacobi*. Hay que observar que estas nuevas funciones peso se obtuvieron de agregar una delta de Dirac, a los pesos de las familias clásicas de polinomios ortogonales de *Jacobi y Laguerre* .

En 1981, Littlejohn encontró una ecuación diferencial de orden seis que tenía como solución una SPO. Bautizó a estos polinomios, como *polinomios de Krall* [23]. La ecuación hallada es
$$\begin{aligned}
&\left(x^2-1\right)^3 y_m^{(6)} + 18x\left(x^2-1\right)^2 y_m^{(5)} +\\
&\left([3AC+3BC+96]\,x^4 - [6AC+6BC+132]\,x^2 + [3AC+3BC+36]\right) y_m^{(4)}\\
&\quad + \left([24AC+24BC+168]\,x^3 - [24AC+24BC+168]\,x\right) y_m^{(3)}\\
&\quad + \left(\left[12ABC^2 + 42AC + 42BC + 72\right] x^2 + [12BC - 12AC]x\right) y_m^{(\prime\prime)} -\\
&\left(12ABC^2 + 30AC + 30BC + 72\right) y_m^{(\prime\prime)} + \left(\left[24ABC^2 + 12AC + 12BC\right] x\right) y_m^{(\prime)}\\
&\quad + (12BC - 12AC)y_m^{(\prime)} = \lambda_m y_m,
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_m = &\left[24ABC^2+12AC+12BC\right]m\\&+\left[12ABC^2+42AC+42BC+72\right]m(m-1)\\&+\left[24AC+24BC+168\right]m(m-1)(m-2)\\&+\left[3AC+3BC+96\right]m(m-1)(m-2)(m-3)\\&+18m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\\&+m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5).\end{aligned}$$

Para construir (2.1.9) Littlejohn partió de la función peso asociada a los polinomios de *tipo Legendre* (2.1.5). Como $\mu(x)$ tiene "saltos" iguales en $x=\pm1$, Littlejohn pensó en una función que tuviera "saltos" distintos en estos puntos. Entonces tomó la función peso

$$w(x)=\frac{1}{A}\delta(x+1)+\frac{1}{B}\delta(x-1)+C,\quad -1\leq x\leq 1. \tag{2.1.10}$$

Más recientemente, en 1984, T.H. Koornwinder generalizó el trabajo de Littlejohn y A.M. Krall [14]. Encontró polinomios ortogonales respecto a los pesos generalizados de tipo *Laguerre* y *Jacobi*

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}+M\delta(x+1)+N\delta(x-1),\quad -1\leq x\leq 1,\quad \alpha,\beta>-1, \tag{2.1.11}$$

$$x^{\alpha}e^{-x}+M\delta(x),\quad 0\leq x<\infty\quad \alpha>-1. \tag{2.1.12}$$

También A.M. Krall y L.L. Littlejohn hicieron parte del trabajo de clasificar las ecuaciones del tipo (2.1.1) que tienen como solución familias de polinomios ortogonales para varios valores de $k\geq 6$ [18] [24]. Sin embargo el caso general de este problema aún no tiene solución.

J. Koekoek y R. Koekoek mostraron, en 1991, que los polinomios ortogonales respecto a los pesos (2.1.12) satisfacen ecuaciones diferenciales de orden infinito, excepto para aquellos valores enteros no negativos de α para los cuales el orden se reduce a $2\alpha+4$ [13]. Resultados análogos fueron probados por R. Koekoek para los polinomios de Koornwinder que son ortogonales respecto a (2.1.11) con $\alpha=\beta$ y $M=N$ [11], por A. Zhedanov cuando $N=0$ y β un entero no negativo [25] y más tarde por R. y J. Koekoek para el caso $M,N>0$ [12]. Además K.H. Kwon y D.W. Lee mostraron que cuando consideramos polinomios ortogonales con respecto a una función peso, con soporte compacto que satisface ecuaciones diferenciales de orden superior, éstos tienen que ser ortogonales con respecto a (2.1.11) o (2.1.12) [21] [20]. F.A. Grünbaum y L. Haine demostraron que los polinomios que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden cuarto o superior pueden ser construidos aplicando la *transformada de Darboux* discreta a ciertas instancias de los polinomios clásicos ortogonales [8][9].

Como en el caso continuo, el problema de los polinomios ortogonales que son eigenfunciones de operadores en diferencias, tiene una larga historia. Se remonta al menos a un siglo y medio atrás. El primer ejemplo lo introdujo Chebyshev en 1858. En las primeras décadas del siglo XX aparecieron las familias clásicas discretas de *Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn.*

En el capítulo anterior pudimos clasificar todos los polinomios sobre la recta real que satisfacen la ecuación

$$p_+\Delta_+p_n - p_-\Delta_-p_n = \lambda_n p_n,$$

donde, p_+ y p_- son polinomios de grado a lo más 2. Vimos que las únicas soluciones son las familias clásicas discretas. Sin embargo, no ha sido hasta muy recientemente que se han hecho avances para encontrar familias de polinomios ortogonales discretos que son eigenfunciones de operadores del tipo

$$D = \sum_{l=s}^{r} f_l S_l, \tag{2.1.13}$$

donde, $S_l(g(x)) = g(x+l)$, con l un entero y f_l un polinomio. El *orden* de D se define como $r-s$ con *género* (r, s). Lo que se sabe para el caso continuo ha sido de muy poca ayuda, pues el agregar deltas de Dirac a los pesos asociados a las familias clásicas parece no funcionar. Ciertamente, respondiendo a la pregunta planteada por R. Askey en 1991, H. Bavinck. H. van Haeringen y R. Koekoek [1] [2] estudiaron polinomios ortogonales respecto a los pesos de Charlier y Meixner junto con una delta de Dirac en 0 y hallaron que éstos satisfacen ciertos tipos de ecuaciones en diferencias de orden infinito.

En 2012, A.J. Durán demostró que los polinomios ortogonales respecto a una medida positiva pueden ser funciones propias solamente de operadores de grado par [5]. También dio los primeros ejemplos de familias ortogonales, distintas de las familias clásicas discretas, que satisfacen ecuaciones en diferencias de orden superior. A continuación daremos un resumen de la técnica usada por este autor, también enlistaremos algunos de estos ejemplos. Los detalles de las pruebas pueden consultarse en el artículo [5].

Los resultados clave para construir estos ejemplos son los siguientes.

Teorema 2.1.2. *Sea μ una medida no degenerada y $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$ una familia de polinomios ortogonales con respecto a μ y D un operador del tipo* (2.1.13) *que satisface que para cualquier polinomio p, $D(p)$ es un polinomio con grado a lo más el grado de p. Entonces D es simétrico con respecto a μ si y sólo si $D(p_n) = \lambda_n p_n$ para una cierta sucesión de números reales $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

Entendemos por una *medida no degenerada*, una medida que tiene una sucesión de polinomios ortogonales asociada, es decir una sucesión $(p_n(x))_{n=0}^{\infty}$ que cumple lo siguiente

$$\int p_n(x)p_m(x)d\mu = K_n\delta_{mn}.$$

La simetría de D, con $r = -s$, queda garantizada a través del siguiente Teorema.

Teorema 2.1.3. *Sea μ una medida discreta, con soporte en $X \subset \mathbb{R}$ y X numerable. Considere un operador en diferencias D de la forma $D = \sum_{l=-r}^{r} f_l S_l$. Suponga que μ y los coeficientes f_l, $l = -r, \ldots, r$ de D satisfacen las siguientes ecuaciones en diferencias*

$$f_l(x-l)\mu(x-l) = f_{-l}(x)\mu(x), \quad x \in (l+X)\cap X,$$

y las condiciones de frontera

$$f_l(x-l) = 0, \quad x \in [(l+X) - X],$$

$$f_{-l}(x) = 0, \quad x \in [X - (X+l)].$$

Entonces D es simétrico con respecto a μ. (Para un conjunto de números A y un número b, denotamos por $A+b$ al conjunto $A+b = \{a+b \mid a \in A\}$).

La condición $r = -s$ impuesta sobre el operador D es necesaria, ya que en [2] se prueba que si un operador en diferencias del tipo (2.1.13), es simétrico con respecto a una medida no degenerada y satisface que para cualquier polinomio p, $D(p)$ es un polinomio de grado a lo más el grado p, entonces $r = -s$.

Con los resultados anteriores podemos encontrar medidas cuyos polinomios ortogonales satisfacen ecuaciones en diferencias de orden mayor a 2. Esto se logra multiplicando los pesos de las familias clásicas discretas de *Charlier, Meixner, Krawtchouk y Hahn* por un polinomio del tipo

$$\mathfrak{P}_F(x) = \prod_{k\in F}(x-k),$$

donde, F es un conjunto de enteros positivos. Esta transformación se conoce como la *transformada de Christoffel*. Así para $F=\{1\}$ tenemos los siguientes ejemplos.

1. Tipo Charlier,

$$\mu = -\delta_0 + \sum_{x=2}^{\infty}\frac{a^x}{x(x-2)!}\delta_x,$$

con el operador simétrico de orden cuatro

$$x(x-3)S_{-2} - 2x(x-2)S_{-1} + x(x+2a-1)S_0 + a^2S_2.$$

2. Tipo Meixner,

$$\mu = -\Gamma(c)\delta_0 + \sum_{x=2}^{\infty}\frac{c^x\Gamma(x+b)}{x(x-2)!}\delta_x, \quad 0<b \quad y \quad 0<c<1,$$

con el operador en diferencias de orden cuatro

$$x(x-3)S_{-2} - 2(c+1)x(x-2)S_{-1} + x([(c+1)^2+2c](x-1)+2bc)S_0 \\ - 2c(c+1)x(x+b)S_1 + 2c^2\binom{x+b+1}{2}S_2.$$

3. Tipo Krawtchouk,

$$\mu = -\frac{1}{\Gamma(N)}\delta_0 + \sum_{x=2}^{N-1}\frac{a^x}{x(x-2)!\Gamma(N-x)}\delta_x, \quad 0<a=\frac{p}{q}$$

y el operador

$$x(x-3)S_{-2} - 2(a+1)x(x-2)S_{-1} + x([(a+1)^2(x-1) - 2a(x-N)]S_0 \\ - 2a(a-1)x(x-N+1)S_1 + 2a^2\binom{x-N+2}{2}S_2.$$

4. Tipo Hahn,

$$\mu = -\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+N+1)}{\Gamma(N)}\delta_0 + \sum_{x=2}^{N-1}\frac{\Gamma(\beta+N+1-x)\Gamma(\alpha+1+x)}{x(x-2)!\Gamma(N-x)}\delta_x$$

y el operador

$$\begin{aligned}
&2x(x-3)\binom{\beta+2+N-x}{2}S_{-2}\\
&-2x(x-2)(\beta+1+N-x)(\beta+2N-\alpha-2x)S_{-1}+\\
&\ f_0S_0 - 2x(x+\alpha+1)(N-x-1)(2N+\beta-\alpha-2-2x)S_1\\
&\ +4\binom{x+\alpha+2}{2}\binom{x-N+2}{2}S_2,
\end{aligned}$$

con $f_0 = -\sum_{i=-2,i\neq 0}^{2} f_i$.

2.2. El método de los $\mathcal{D}$-operadores

Con el propósito de generar sucesiones de polinomios ortogonales las cuáles son eigenfunciones de operadores diferenciales y en diferencias de orden superior, se va a introducir un nuevo método estudiado por A.J. Durán en [7]. El método se basa en el concepto de $\mathcal{D}$-operador asociado a una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y un álgebra $\mathcal{A}$ de operadores que actúan sobre el espacio vectorial de los polinomios $\mathcal{P}$.

A lo largo de este trabajo consideraremos dos álgebras. Cuando la sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una de las familias clásicas discretas, es decir Charlier, Meixner, Krawtchouk o Hahn, tomaremos el álgebra $\mathcal{A}$ formada por todos los operadores en diferencias de orden finito.

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{j=s}^{r} f_jS_j : j = s,\dots,r, \quad s\leq r\right\}, \tag{2.2.1}$$

donde f_j es un polinomio. Cuando la sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es la de Laguerre o Jacobi consideraremos $\mathcal{A}$ de operadores diferenciales de orden finito

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{j=1}^{k} f_j\left(\frac{d}{dx}\right)^j : j = 0,\dots,k \quad k\in\mathbb{N}\right\}, \tag{2.2.2}$$

con f_j un polinomio y $deg(f_j) \leq j$. Dependiendo del contexto usaremos una álgebra u otra.

Dada una sucesión de números $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathcal{D}$-operador de tipo 1 asociado a un álgebra $\mathcal{A}$ y una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ se define como sigue. Primero considere el operador $\zeta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definido sobre la base $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ como $\zeta(p_n) = \varepsilon_n p_{n-1}$. Ahora definimos $\mathcal{D}$ como sigue

$$\mathcal{D} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$\mathcal{D}(p) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \zeta^j(p). \tag{2.2.3}$$

Decimos que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador si $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$.

Toscamente hablando, el método consiste en lo siguiente. Además de los polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$, tenemos un operador $D_p \in \mathcal{A}$ para el cual los polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones. Denotamos $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de eigenvalores, $D_p(p_n) = \theta_n p_n$. Suponga también que hemos identificado una sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cual define un $\mathcal{D}$-operador para la sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$. Podemos construir toda una clase de familias de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que son eigenfunciones de operadores en el álgebra $\mathcal{A}$ como sigue. Se toma un polinomio Q tal que $Q(\theta_n) \neq 0$ y se define la sucesión de números β_n como

$$\beta_n = \varepsilon_n \frac{Q(\theta_n)}{Q(\theta_{n-1})}.$$

Después se define la sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ como $q_0 = 1$ y

$$q_n = p_n + \beta_n p_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Resulta que los polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones para el operador $D_q = P(D_p) + \mathcal{D}Q(D_p)$, donde el polinomio P cumple que $P(\theta_n) - P(\theta_{n-1}) = Q(\theta_{n-1})$. Como $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador y $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, entonces $D_q \in \mathcal{A}$ también. Los detalles se incluyen en el siguiente lema.

Lema 2.2.1. *Sean $\mathcal{A}$ y $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, un álgebra de operadores que actúan sobre el espacio vectorial de los polinomios, y una sucesión de polinomios, p_n de grado n. Suponga que $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones de un operador $D_p \in \mathcal{A}$, es decir existen números θ_n tal que $D_p(p_n) = \theta_n p_n$,*

$n \geq 0$. *Suponga además que existe una sucesión de números* $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la cual define un* $\mathcal{D}$*-operador de tipo 1 para* $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\mathcal{A}$. *Para un polinomio arbitrario* P_2 *tal que* $P_2(\theta_n) \neq 0$, *definimos las sucesiones de números* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como*

$$\gamma_{n+1} = P_2(\theta_n)\,, \quad n \geq 0 \tag{2.2.4}$$

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \gamma_n, \quad n \geq 1 \tag{2.2.5}$$

y suponga que existe un polinomio P_1 *tal que* $P_1(\theta_n) = \lambda_n$. *Finalmente definimos la sucesión de polinomios* $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *como* $q_0(x) = 1$ *y*

$$q_n = p_n + \beta_n p_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.2.6}$$

donde los números β_n *están dados por*

$$\beta_n = \varepsilon_n \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1. \tag{2.2.7}$$

Entonces $D_q(q_n) = \lambda_n q_n$ *donde* D_q *se define como*

$$D_q = P_1(D_p) + \mathcal{D}P_2(D_p)\,. \tag{2.2.8}$$

Más aún, $D_q \in \mathcal{A}$.

Demostración. Como $D_p(p_n) = \theta_n p_n$ tenemos que

$$P_1(D_p)(p_n) = P_1(\theta_n)\,p_n = \lambda_n p_n,$$

$$P_2(D_p)(p_n) = P_2(\theta_n)p_n = \gamma_{n+1}p_n.$$

De la definición de D_q se sigue que

$$D_q(p_n) = \lambda_n p_n + \gamma_{n+1}\mathcal{D}(p_n)\,.$$

Usando la definición de $\mathcal{D}$-operador (2.2.3) tenemos que

$$\begin{aligned} D_q(p_n) &= \lambda_n p_n + \gamma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\zeta^j(p_n) \\ &= \lambda_n p_n + \gamma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\varepsilon_n\cdots\varepsilon_{n+1-j}p_{n-j}. \end{aligned}$$

Aplicando lo anterior a q_n obtenemos que

$$\begin{aligned}
D_q(q_n) &= D_q(p_n) + \beta_n D_q(p_{n-1}) \\
&= \lambda_n p_n + \gamma_{n+1}\varepsilon_n p_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} \gamma_{n+1}(-1)^{j+1}\varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n+1-j} p_{n-j} \\
&+ \beta_n \lambda_{n-1} p_{n-1} + \beta_n \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_n (-1)^{j+1} \varepsilon_{n-1} \cdots \varepsilon_{n-j} p_{n-j-1} \\
&= \lambda_n p_n + (\gamma_{n+1}\varepsilon_n + \beta_n \lambda_{n-1})\, p_{n-1} + \sum_{j=2}^{n} a_{n,j} p_{n-j},
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

donde

$$a_{n,j} = (-1)^{j+1} \left(\gamma_{n+1}\varepsilon_n \cdots \varepsilon_{n+1-j} - \beta_n \gamma_n \varepsilon_{n-1} \cdots \varepsilon_{n+1-j}\right), \quad 2 \le j \le n.$$

Ahora usando (2.2.5) y (2.2.7) tenemos que

$$\beta_n \lambda_n - \beta_n \lambda_{n-1} - \gamma_{n+1}\varepsilon_n = 0,$$

y usando (2.2.7) se sigue que

$$a_{n,j} = 0, \quad 2 \le j \le n.$$

Así de (2.2.9) se sigue que $D_q(q_n) = \lambda_n p_n + \lambda_n \beta_n p_{n-1} = \lambda_n q_n$.

Como $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$, entonces $D_q \in \mathcal{A}$ también. $\square$

Aplicaremos la versión del método expuesto en el Lema 2.2.1 cuando los eigenvalores $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de los polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto al operador D_p sean lineales en n. Por ejemplo si $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos, son cuadráticos en n las hipótesis del Lema anterior no se pueden satisfacer. Ciertamente, si γ_{n+1} es un polinomio en θ_n y θ_n es cuadrático en n, entonces γ_n es un polinomio en n de grado par, y la sucesion λ_n, definida por $\lambda_n - \lambda_{n-1} = \gamma_n$ es un polinomio en n de grado impar. Entonces, no puede existir un polinomio para la sucesión cuadrática θ_n.

Para arreglar esta situación necesitamos introducir una versión modificada del $\mathcal{D}$-operador definido en (2.2.3). Partimos ahora con dos sucesiones de números $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Un $\mathcal{D}$-operador de tipo 2 asociado al álgebra $\mathcal{A}$ y a la sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ se define como sigue. Como antes consideramos el operador $\zeta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ definido sobre la base $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ como $\zeta(p_n) = \varepsilon_n p_{n-1}$. Ahora definimos el operador $\mathcal{D}$ de nuevo sobre la base como

$$\mathcal{D}(p_n) = -\frac{1}{2}\sigma_{n+1}p_n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sigma_{n+1-j}\zeta^j(p_n). \tag{2.2.10}$$

Decimos que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador si $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$.

Ahora podemos enunciar la versión del método para $\mathcal{D}$-operadores de tipo 2.

Lema 2.2.2. *Sean $\mathcal{A}$ y $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente, un álgebra de operadores que actúan sobre el espacio vectorial de los polinomios, y una sucesión de polinomios, p_n de grado n. Supongamos que $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones de un operador $D_p \in \mathcal{A}$, es decir existen números θ_n tal que $D_p(p_n) = \theta_n p_n$, $n \geq 0$. También se tienen dos sucesiones de números $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ las cuales definen un $\mathcal{D}$-operador de tipo 2 para $\mathcal{A}$ y $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Para un polinomio arbitrario P_2 con $P_2(\theta_n) \neq 0$, $n \geq 0$, se definen las sucesiones de números $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como*

$$\gamma_{n+1} = P_2(\theta_n), \quad n \geq 0, \tag{2.2.11}$$

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \sigma_n\gamma_n, \quad n \geq 1. \tag{2.2.12}$$

Suponga además que existe un polinomio P_1 tal que $\lambda_{n+1} + \lambda_n = P_1(\theta_n)$. Finalmente definimos la sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ por $q_0 = 1$ y

$$q_n = p_n + \beta_n p_{n-1}, \quad n \geq 1, \tag{2.2.13}$$

donde los números β_n, $n \geq 0$, están dados por

$$\beta_n = \varepsilon_n\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1. \tag{2.2.14}$$

Entonces $D_q(q_n) = \lambda_n q_n$, donde el operador D_q se define como

$$D_q = \frac{1}{2}P_1(D_p) + \mathcal{D}P_2(D_p). \tag{2.2.15}$$

Más aún, $D_q \in \mathcal{A}$.

Demostración. Ya que $D_p(p_n) = \theta_n p_n$, tenemos que

$$P_1(D_p)(p_n) = P_1(\theta_n)p_n = (\lambda_{n+1} + \lambda_n)\, p_n$$
$$P_2(D_p)(p_n) = P_2(\theta_n)p_n = \gamma_{n+1}p_n$$

y de la definición (2.2.15) se sigue que

$$D_q(p_n) = \frac{1}{2}\,(\lambda_{n+1} + \lambda_n)\, p_n + \gamma_{n+1}\mathcal{D}\,(p_n)\,.$$

Usando la definición de $\mathcal{D}$-operador (2.2.10), tenemos

$$\begin{aligned} D_q(p_n) &= \frac{1}{2}\,(\lambda_{n+1}+\lambda_n)\, p_n + \gamma_{n+1}\left(-\frac{1}{2}\sigma_{n+1}p_n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sigma_{n+1-j}\zeta^j(p_n)\right) \\ &= (\lambda_{n+1} + \lambda_n - \gamma_{n+1}\sigma_{n+1})\,\frac{p_n}{2} \\ &\quad + \gamma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sigma_{n+1-j}\varepsilon_n\cdots\varepsilon_{n+1-j}p_{n-j}. \end{aligned}$$

Así para q_n tenemos

$$\begin{aligned} &D_q(q_n) = D_q(p_n) + \beta_n D_q(p_{n-1}) \\ &= (\lambda_{n+1} + \lambda_n - \gamma_{n+1}\sigma_{n+1})\,\frac{p_n}{2} + \gamma_{n+1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\sigma_{n+1-j}\varepsilon_n\cdots\varepsilon_{n+1-j}p_{n-j} \\ &+ \beta_n\,(\lambda_n + \lambda_{n-1} - \gamma_n\sigma_n)\,\frac{p_{n-1}}{2} + \gamma_n\beta_n\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}\sigma_{n-j}\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_{n-j}p_{n-1-j} \end{aligned}$$

que después de agrupar términos se reduce a

$$\begin{aligned}
&D_q(q_n) = D_q(p_n) + \beta_n D_q(p_{n-1}) = \\
&\left(\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n-\gamma_{n+1}\sigma_{n+1}}{2}\right)p_{n-1}+\left(\gamma_{n+1}\sigma_n\varepsilon_n+\frac{\beta_n\left(\lambda_n+\lambda_{n-1}-\gamma_n\sigma_n\right)}{2}\right)p_{n-1} \\
&+\gamma_{n+1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}\sigma_{n+1-j}\varepsilon_n\cdots\varepsilon_{n+1-j}p_{n-j} \\
&+\gamma_n\beta_n\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}\sigma_{n-j}\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_{n-j}p_{n-1-j} = \\
&\left(\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n-\gamma_{n+1}\sigma_{n+1}}{2}\right)p_{n-1}+\left(\gamma_{n+1}\sigma_n\varepsilon_n+\frac{\beta_n\left(\lambda_n+\lambda_{n-1}-\gamma_n\sigma_n\right)}{2}\right)p_{n-1} \\
&+\sum_{j=2}^{n} b_{n,j}p_{n-j}
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

con

$$b_{n,j}=(-1)^{j+1}\left(\gamma_{n+1}\sigma_{n+1-j}\varepsilon_n\cdots\varepsilon_{n+1-j}-\gamma_n\beta_n\sigma_{n+1-j}\varepsilon_{n-1}\cdots\varepsilon_{n+1-j}\right)p_{n-j}$$

donde $2\le j\le n$. Ahora resolviendo para λ_{n+1} en (2.2.12) tenemos que

$$\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n-\gamma_{n+1}\sigma_{n+1}}{2}=\frac{\lambda_n+\gamma_{n+1}\sigma_{n+1}+\lambda_n-\gamma_{n+1}\sigma_{n+1}}{2}=\lambda_n.$$

Además si resolvemos para $\varepsilon_n\gamma_{n+1}$ en (2.2.14) y después para λ_n en (2.2.12) tenemos

$$\gamma_{n+1}\sigma_n\varepsilon_n+\frac{\beta_n\left(\lambda_n+\lambda_{n-1}-\gamma_n\sigma_n\right)}{2}=\beta_n\left(\frac{2\gamma_n\sigma_n+\lambda_n+\lambda_{n-1}-\gamma_n\sigma_n}{2}\right)=\beta_n\lambda_n.$$

Finalmente resolviendo para $\gamma_n\beta_n$ en (2.2.14) tenemos que $b_{n,j}=0$ para $j\ge 2$. Así de (2.2.16) tenemos que

$$D_q(q_n)=D_q(p_n)+\beta_n D_q(p_{n-1})=\lambda_n p_n+\beta_n\lambda_n p_{n-1}=\lambda_n q_n.$$

Como $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios $(p_n(x))_{n\in N}$ y el álgebra $\mathcal{A}$, tenemos que $\mathcal{D}\in\mathcal{A}$, entonces $D_q\in\mathcal{A}$ también. □

Hay que recalcar que si un operador $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$, entonces también es un $\mathcal{D}$-operador para la sucesión de polinomios $\widetilde{p}_n = a_n p_n$ siempre que $a_n \neq 0$, $n \geq 0$. Ciertamente, si $\mathcal{D}$ se define a partir de $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ por la sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ entonces $\mathcal{D}$ se define a partir $(\widetilde{p}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ con la sucesión

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}\varepsilon_n.$$

Usando este hecho, podemos asociar $\mathcal{D}$-operadores a una medida que tenga familias de polinomios ortogonales. Decimos que $\mathcal{D}$ es un $\mathcal{D}$-operador *para una medida* μ si es un $\mathcal{D}$-operador para una sucesión de polinomios $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ que son ortogonales respecto a μ. Señalamos que dada una medida μ el correspondiente conjunto de $\mathcal{D}$-operadores depende sólo de la medida μ y no de la normalización de los polinomios ortogonales, pero la sucesión de números $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sí depende de la normalización.

En las siguientes secciones, vamos a mostrar un $\mathcal{D}$-operador de tipo 1 para los polinomios de Charlier y Laguerre, dos $\mathcal{D}$-operadores de tipo 1 para los polinomios de Meixner y Krawtchouk, cuatro $\mathcal{D}$-operadores de tipo 2 para los polinomios de Hahn y dos $\mathcal{D}$-operadores de tipo 2 para los polinomios de Jacobi.

2.3. Caso Charlier

Para $a \neq 0$ escribimos $(c_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ para la sucesión de polinomios de Charlier definida por

$$c_n^a(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-a)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{x}{j}j!. \tag{2.3.1}$$

Los polinomios de Charlier son ortogonales con respecto a la medida

$$\rho_a = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x}{x!}\delta_x, \quad a \neq 0.$$

La fórmula de recurrencia para $(c_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ es $(c_{-1}^a = 0)$

$$xc_n = (n+1)c_{n+1} + (n+a)c_n + ac_{n-1}, \quad n \geq 0. \tag{2.3.2}$$

(Para simplificar la notación omitimos algunos parámetros en algunas fórmulas). Son eigenfunciones del siguiente operador en diferencias de segundo orden

$$D_a = xS_{-1} - (x+a)S_0 + aS_1, \quad D_a(c_n^a) = -nc_n^a, \quad n \geq 0. \tag{2.3.3}$$

Recordemos que S_l, $l \in \mathbb{Z}$ se define como

$$S_l(f) = f(x+l).$$

También satisfacen la siguiente relación

$$\Delta\left(c_n\right) = c_{n-1}, \tag{2.3.4}$$

donde recordemos que

$$\Delta(f) = f(x+1) - f(x)\,, \quad \nabla(f) = f(x) - f(x-1)\,.$$

Primero encontremos un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios de Charlier.

Lema 2.3.1. *Para $a \neq 0$ el operador $\mathcal{D}$ definido en* (2.2.3) *con la sucesión $\varepsilon_n = 1$, $n \geq 0$ es un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios de Charlier* (2.3.1) *y el álgebra $\mathcal{A}$* (2.2.1) *de operadores en diferencias con coeficientes polinomiales. Más precisamente $\mathcal{D} = \nabla$.*

Demostración. Primero notemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\binom{x}{m} &= \binom{x+1}{m} - \binom{x}{m} = \frac{x!}{m!\,(x-m)!}\left[\frac{x+1}{x+1-m} - 1\right] \\
&= \frac{x!}{m!\,(x-m)!}\frac{m}{x+1-m} = \binom{x}{m-1}.
\end{aligned}$$

Por (2.3.4) se tiene que para $m \geq 1$

$$\mathcal{D}\binom{x}{m} = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\Delta^j\binom{x}{m} = \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\binom{x}{m-j}.$$

Ahora como

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\binom{x}{m-j} = \sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{x}{m-j} - \binom{x}{m},$$

entonces

$$\mathcal{D}\binom{x}{m} = \binom{x}{m} - \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{x}{m-j} = \binom{x}{m} - \binom{x-1}{m}.$$

La última igualdad se sigue de la identidad

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^m \binom{x-1}{m}.$$

Para mostrar ésta, notemos que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{x+k}{k} = \binom{x}{0} + \binom{x+1}{1} + \cdots + \binom{x+m}{m} = \binom{x+m+1}{m}.$$

Además notemos que

$$x(x-1)...(x-k+1) = (-1)^k(-x)(1-x)\cdots(k-1-x).$$

Así

$$\binom{x}{k} = (-1)^k \binom{k-x-1}{k}.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{x}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k-x-1}{k} = \binom{-x+m}{m} = (-1)^m \binom{x-1}{m}.$$

Esto nos permite concluir que $\mathcal{D} = \nabla \in \mathcal{A}$. □

El Lema 2.2.1 y el $\mathcal{D}$-operador para los polinomios de Charlier automáticamente produce una clase muy grande de polinomios que satisfacen ecuaciones en diferencias de orden superior como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.2. *Sea P_1 un polinomio de grado $k+1$ con $k \geq 1$ y escriba $P_2(x) = P_1(x-1) - P_1(x)$ (entonces P_2 es un polinomio de grado k). Suponga que $P_2(-n) \neq 0$ con $n \geq 0$, y defina*

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= P_2(-n), \quad n \geq 0, \\ \lambda_n &= P_1(-n), \quad n \geq 0, \\ \beta_n &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

y la sucesión de polinomios $q_0 = 1$ *y para* $n \geq 1$

$$q_n(x) = c_n^a(x) + \beta_n c_{n-1}^a(x)\,. \tag{2.3.5}$$

Considere el operador en diferencias D_a (2.3.3). *Finalmente defina* D *como el operador en diferencias de orden* $2k+2$ *y género* $(-k-1, k+1)$

$$D = P_1(D_a) + \nabla P_2\,(D_a)\,.$$

Entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$.

Demostración. El teorema es una consecuencia directa del Lema 2.2.1.
Si escribimos $\varepsilon_n = 1$, el Lema 2.3.1 nos da que la sucesión $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ define un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios de Charlier y que $\mathcal{D} = \nabla$.
Los eigenvalores de $(c_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto a D_a son $\theta_n = -n$. Entonces de la definición de $(\gamma_n)_{n\in N}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y la relación entre los polinomios P_1 y P_2 automáticamente tenemos que

$$\lambda_n - \lambda_{n-1} = \gamma_n.$$

El Lema 2.2.1 muestra que los polinomios q_n definidos en (2.3.5) son eigenfunciones del operador en diferencias $D = P_1(D_a) + \nabla P_2(D_a)$ con eigenvalores λ_n.

Como P_1 y P_2 son polinomios de grados $k+1$ y k, respectivamente, y D_a tiene género $(-1, 1)$, los operadores $P_1(D_a)$ y $P_2(D_a)$ tienen orden $2k+2$ y $2k$ con género $(-k-1, k+1)$ y $(-k, k)$, respectivamente. Escribimos ahora $f_{-1} = x$ y $f_1 = a$ para los coeficientes de S_{-1} y S_1 en D_a, y u_1, u_2 para los coeficientes principales de los polinomios P_1 y P_2, respectivamente. Por inducción tenemos que los coeficientes de S_{-k-1} y S_{k+1} en el operador D son $f_{-1}(x-1)\cdots f_{-1}(x-k)\,(u_1 f_{-1}(x) - u_2)$ y $u_1 f_1(x)\cdots f_1(x+k)$, respectivamente. Podemos ver que estos son distintos de cero. Esto muestra que D tiene orden $2k+2$ y género $(-k-1, k+1)$. $\square$

El método de los $\mathcal{D}$-operadores proporciona un operador en diferencias (o diferencial) de orden mayor a 2 para el cual los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son eigenfunciones, pero $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no son nesariamente ortogonales.* A continuación encontramos una elección particular de P_2 para la cual la sucesión de polinomios $(q_n(x))_{n\in N}$ (2.3.5) es ortogonal con respecto a una medida.

Para k un entero positivo, sea $\widetilde{\rho}_{k,a}$ la medida definida por ($a \neq 0$)

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_{k,a} &= (x+1)\cdots(x+k)\rho_a(x+k+1)\\ &= (-1)^k k!\delta_{-k-1} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^{x+k+1}}{x!(x+k+1)}\delta_x. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Para simplificar la notación a veces simplemente escribiremos $\widetilde{\rho}_{k,a} = \widetilde{\rho}$.

Para encontrar los polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a}$ necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.3.3. *Para un entero positivo k y un número real $a \neq 0$, tenemos que:*

$$\langle \widetilde{\rho}_{k,a}, c_n^a \rangle = (-1)^n e^a k! c_k^{-a}(-n-1).$$

Demostración. Escribimos

$$\xi_n = \langle \widetilde{\rho}_{k,a}, c_n^a \rangle, \quad n \geq 0,$$

$$\zeta_n = (-1)^n e^a k! c_k^{-a}(-n-1), \quad n \geq 0.$$

Ahora para $n \geq 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle (k+1+x)\widetilde{\rho}_{k,a}, c_n^a \rangle &= (-1)^k k! \langle (k+1+x)\delta_{-k-1}, c_n^a \rangle + a^{k+1} \langle \rho_a, c_n^a \rangle\\ &= (-1)^k k! \langle \delta_{-k-1}, (k+1+x)c_n^a \rangle + 0 = 0, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

y como $c_0^a = 1$ entonces para $n = 0$ se cumple que

$$\begin{aligned}&\langle (k+1+x)\widetilde{\rho}_{k,a}, c_0^a \rangle \\ &= (-1)^k k! \langle (k+1+x)\delta_{-k-1}, c_n^a \rangle + a^{k+1} \langle \rho_a, c_n^a \rangle\\ &= (-1)^k k! \langle \delta_{-k-1}, (k+1+x)c_0^a \rangle + a^{k+1} \langle \rho_a, c_0^a \rangle\\ &= 0 + a^{k+1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x}{x!} = a^{k+1} e^a. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Así usando la relación de recurrencia (2.3.2), (2.3.7) y (2.3.8) tenemos

$$\xi_1 + (a+k+1)\xi_0 - a^{k+1}e^a = 0, \tag{2.3.9}$$

$$(n+1)\xi_{n+1} + (n+a+k+1)\xi_n + a\xi_{n-1} = 0. \tag{2.3.10}$$

Ahora probaremos también que $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen las mismas relaciones de recurrencia (2.3.9) y (2.3.10). Ciertamente, para $n \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}&(n+1)\zeta_{n+1} + (n+a+k+1)\zeta_n + a\zeta_{n-1}\\ =&(-1)^{n+1}k!e^a\big[(n+1)c_k^{-a}(-n-2) - (n+a+1)c_k^{-a}(-n-1) - ac_k^{-a}(-n)\big].\end{aligned}$$

Entonces, si escribimos $x = -n-1$ en la ecuación en diferencias de segundo orden (2.3.3) para los polinomios de Charlier $(c_n^{-a})_{n\in\mathbb{N}}$, concluimos que

$$(n+1)\zeta_{n+1} + (n+a+k+1)\zeta_n + a\zeta_{n-1} = 0.$$

Ahora como

$$\begin{aligned}&\zeta_1 + (a+k+1)\zeta_0 - a^{k+1}e^a\\ =&\, k!e^a\left[-c_k^{-a}(-2) + (a+k+1)c_k^{-a}(-1) - \frac{a^{k+1}}{k!}\right]\end{aligned}$$

usando nuevamente (2.3.3) para los polinomios de Charlier $(c_n^{-a})_{n\in\mathbb{N}}$ con $x = -1$ y tomando en cuenta que $c_k^{-a}(0) = {}^{a^k}\!/_{k!}$ concluimos lo que afirmamos.

Como las sucesiones $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumplen la misma relación de recurrencia es suficiente probar que $\xi_0 = \zeta_0$. Escribimos entonces

$$\eta_0 = \langle \rho_a(x+1), 1\rangle = e^a,$$

$$\eta_k = \langle \rho_a(x+k+1), (x+1)\cdots(x+k)\rangle\,, \quad k \geq 1.$$

De la definición de $\widetilde{\rho}_{k,a}$, tenemos que $\eta_k = \xi_0$. Usando que $x\rho_a(x) = a\rho_a(x-1)$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\langle \rho_a(x+k), x(x+1)\cdots(x+k-1)\rangle + k\,\langle \rho_a(x+k), (x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\\ &= \langle (x+k)\rho_a(x+k), (x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\\ &= \langle a\rho_a(x+k-1), (x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\,.\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}\eta_k &= \langle \rho_a(x+k+1), (x+1)\cdots(x+k)\rangle = \langle \rho_a(x+k), x(x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\\ &= \langle a\rho_a(x+k-1), (x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\\ &\quad - k\,\langle \rho_a(x+k), (x+1)\cdots(x+k-1)\rangle\\ &= a^k\,\langle \rho_a(x), 1\rangle - k\eta_{k-1} = a^k e^a - k\eta_{k-1}.\end{aligned}$$

Esto significa que la sucesión $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está caracterizada por la relación

$$\eta_k + k\eta_{k-1} = a^k e^a, \quad k \geq 1$$

con condición inicial $\eta_0 = e^a$. La prueba estará completa si mostramos que también la sucesión $\left(e^a k! c_k^{-a}(-1)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ cumple la misma relación. Entonces si usamos (2.3.2) con $x = -1$ y $k = n+1$ para la sucesión $(c_n^{-a})_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos

$$c_k^{-a}(-1) + c_{k-1}^{-a}(-1) = \frac{a}{k}\left[c_{k-1}^{-a}(-1) + c_{k-2}^{-a}(-1)\right].$$

Aplicando lo anterior $k-1$ veces obtenemos

$$c_k^{-a}(-1) + c_{k-1}^{-a}(-1) = \frac{a^{k-1}}{k!}\left[c_1^{-a}(-1) + c_0^{-a}(-1)\right] = \frac{a^k}{k!}.$$

$\square$

Ahora probaremos un lema que nos ayudará a demostrar que los polinomios definidos en (2.3.5) son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a}$.

Lema 2.3.4. *Para una medida ν y un número real λ definimos la medida μ como $\mu = (x-\lambda)\upsilon$. Suponga que tenemos una sucesión de polinomios ortogonales $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ respecto a μ y escribimos $\alpha_n = \int p_n d\upsilon$. Para un número real M definimos $\widetilde{\rho} = \upsilon + M\delta_\lambda$ y los números*

$$\beta_n = -\frac{\alpha_n + Mp_n(\lambda)}{\alpha_{n-1} + Mp_{n-1}(\lambda)}, \quad n \geq 1. \tag{2.3.11}$$

(Estamos suponiendo que $\alpha_{n-1} + Mp_{n-1}(\lambda) \neq 0$, $n \geq 1$). Entonces los polinomios definidos por $q_0 = 1$ y

$$q_n(x) = p_n(x) + \beta_n p_{n-1}(x)$$

son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}$.

Demostración. Gracias al Teorema 1.1.1 basta probar que $\int (x-\lambda)^j q_n d\widetilde{\rho} = 0$, $j = 0, \ldots, n-1$ y $\int (x-\lambda)^n q_n d\widetilde{\rho} \neq 0$.

De la ortogonalidad de $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto a $\upsilon = {}^{\mu}\!/_{x-\lambda} + C\delta_\lambda$ y la definición de $\widetilde{\rho}$, automáticamente, se tiene para $j = 1, \ldots, n-1$ y β_n con

$n \geq 1$ que

$$\int (x-\lambda)^j q_n d\widetilde{\rho} = \int (x-\lambda)^{j-1} q_n d\mu + M(\lambda-\lambda)^j q_n$$
$$= \int (x-\lambda)^{j-1} p_n d\mu + \beta_n \int (x-\lambda)^{j-1} p_{n-1} d\mu = 0.$$

Para $j=0$ usando (2.3.11) tenemos

$$\int q_n d\widetilde{\rho} = \int (p_n + \beta_n p_{n-1})\, dv + M p_n(\lambda) + \beta_n M p_{n-1}(\lambda)$$
$$= \alpha_n + \beta_n \alpha_{n-1} + M p_n(\lambda) + \beta_n M p_{n-1}(\lambda) = 0.$$

Por último para $j=n$ tenemos

$$\int (x-\lambda)^n q_n d\widetilde{\rho} = \beta_n \int (x-\lambda)^{n-1} p_{n-1} d\mu \neq 0.$$

□

Finalmente estamos listos para probar que los polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a}$ son un caso particular del Teorema 2.3.2.

Teorema 2.3.5. *Para $k \geq 1$, sea a un número real no nulo que cumple que $c_k^{-a}(-n) \neq 0$, $n \geq 1$, donde c_k^{-a}, $k \geq 1$, son los polinomios de Charlier. Definimos la sucesiones de números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ como*

$$\lambda_n = -c_{k+1}^{-a}(-n), \tag{2.3.12}$$

$$\gamma_n = c_k^{-a}(-n), \tag{2.3.13}$$

$$\beta_n = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \tag{2.3.14}$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $q_0 = 1$ y

$$q_n(x) = c_n^a(x) + \beta_n c_{n-1}^a(x)\,, n \geq 1.$$

Entonces los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ortogonales con respecto a la medida $\widetilde{\rho}_{k,a}$ (2.3.6). Además si consideramos el operador en diferencias de orden $2k+2$ y género $(-k-1, k+1)$ definido como

$$D = P_1(D_a) + \nabla P_2(D_a)\,,$$

donde D_a es el operador en diferencias de segundo orden (2.3.3) *y P_1, P_2 son polinomios de grado $k+1$ y k, respectivamente, definidos como*

$$P_1(x) = -c_{k+1}^{-a}(x),$$
$$P_2(x) = -c_k^{-a}(x-1),$$

entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$

Demostración. En la notación del Lema 2.3.4 tenemos que $\lambda = -k-1$, $\upsilon = \widetilde{\rho}_{k,a}$, $\mu = a^{k+1}\rho_a$, $p_n = c_n^a$ y $M = 0$. Del Lema 2.3.3 sabemos que $\alpha_n = \langle \upsilon, p_n \rangle = (-1)^n e^a k! c_k^{-a}(-n-1)$. La ortogonalidad de los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a}$ es ahora una consecuencia del Lema 2.3.4, (2.3.13) y (2.3.14).

La segunda parte del teorema es una consecuencia directa del Teorema 2.3.2. Sólo tenemos que checar que $P_2(x) = P_1(x-1) - P_1(x)$:

$$\begin{aligned} P_1(x-1) - P_1(x) &= c_{k+1}^{-a}(x) - c_{k+1}^{-a}(x-1) \\ &= \Delta\left(c_{k+1}^{-a}(x-1)\right) = c_k^{-a}(x-1) = P_2(x). \end{aligned}$$

□

2.4. Caso Meixner

Para $a \neq 0$ escribimos $(m_n^{a,c})_{n\in\mathbb{N}}$ para la sucesión de polinomios de Meixner definidos por

$$m_n^{a,c}(x) = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} a^{-j} \binom{x}{j} \binom{-x-c}{n-j}. \tag{2.4.1}$$

Los polinomios de Meixner son eigenfunciones del siguiente operador en diferencias de segundo orden

$$\begin{aligned} &D_{a,c} = xS_{-1} - \left[(1+a)x + ac\right] S_0 + a(x+c)S_1, \\ &D_{a,c}(m_n^{a,c}) = n(a-1)m_n^{a,c} \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Cuando $a \neq 0,1$ satisfacen la siguiente fórmula de recurrencia ($m_{-1} = 0$)

$$xm_n = \frac{a(n+1)}{a-1} m_{n+1} - \frac{(a+1)n + ac}{a-1} m_n + \frac{n+c-1}{a-1} m_{n-1}, \quad n \geq 0, \tag{2.4.3}$$

(para simplificar la notación omitiremos algunos parámetros en algunas fórmulas). Entonces, para $a \neq 0{,}1$ y $c \neq 0, -1, -2, \dots$, estos polinomios son ortogonales respecto a $\rho_{a,c}$ la cual normalizamos tomando $\langle \rho_{a,c}, 1 \rangle = \Gamma(c)$. Con $0 < |a| < 1$ y $c \neq 0, -1, -2, \dots$, tenemos

$$\rho_{a,c} = (1-a)^c \sum_{x=0}^{\infty} \frac{a^x \Gamma(x+c)}{x!} \delta_x. \tag{2.4.4}$$

$\rho_{a,c}$ define una medida positiva sólo cuando $0 < a < 1$ y $c > 0$. Los polinomios de Meixner satisfacen también las siguientes identidades

$$\Delta\left(m_n^{a,c}\right) = \frac{a-1}{a} m_{n-1}^{a,c+1}, \tag{2.4.5}$$

$$m_n^{a,c+1}(x-1) = \sum_{j=0}^{n} a^{-j} m_{n-j}^{a,c}(x), \tag{2.4.6}$$

$$m_n^{a,c+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} m_{n-j}^{a,c}(x), \tag{2.4.7}$$

$$\frac{1}{a} m_{n-1}^{a,c}(x) = m_n^{a,c}(x) - m_n^{a,c-1}(x+1). \tag{2.4.8}$$

Para los polinomios de Meixner encontramos dos $\mathcal{D}$-operadores distintos.

Lema 2.4.1. *Para $a \neq 0, 1$ considere los polinomios de Meixner $(m_n^{a,c})_{n\in\mathbb{N}}$ definidos en (2.4.1). Los operadores $\mathcal{D}_i$ definidos en (2.2.3) mediante las sucesiones*

$$\varepsilon_{n,1} = -1,$$

$$\varepsilon_{n,2} = -\frac{1}{a},$$

son $\mathcal{D}$-operadores para $(m_n^{a,c})_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$ (2.2.1) de operadores en diferencias con coeficientes polinomiales. En efecto se tiene que

$$\mathcal{D}_1 = \frac{a}{1-a} \Delta,$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{1}{1-a} \nabla.$$

Demostración. Si usamos la definición (2.2.3) tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1(m_n^{a,c}) &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\zeta^j\left(m_n^{a,c}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(-1)^j m_{n-j}^{a,c} = m_n^{a,c} - \sum_{j=0}^{n} m_{n-j}^{a,c}.\end{aligned}$$

Entonces si usamos (2.4.7) tenemos que

$$\mathcal{D}_1(m_n^{a,c}) = m_n^{a,c} - m_n^{a,c+1}.$$

Si después usamos (2.4.8) tenemos

$$\mathcal{D}_1(m_n^{a,c}) = m_n^{a,c}(x) - m_n^{a,c+1}(x) = m_n^{a,c}(x) - \frac{1}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x) - m_n^{a,c}(x+1).$$

Finalmente usando (2.4.5)

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_1(m_n^{a,c}) = -\Delta\left(m_n^{a,c}(x)\right) - \frac{1}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x)\\ &= \frac{1-a}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x) - \frac{1}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x) = \frac{a}{1-a}\Delta\left(m_n^{a,c}(x)\right).\end{aligned}$$

Para $\mathcal{D}_2$ procedemos de manera análoga

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2(m_n^{a,c}) &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\zeta^j\left(m_n^{a,c}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(-1)^j\frac{1}{a^j}m_{n-j}^{a,c} = m_n^{a,c} - \sum_{j=0}^{n} a^{-j} m_{n-j}^{a,c}.\end{aligned}$$

Ahora, si usamos (2.4.6) lo anterior se reduce a

$$\mathcal{D}_2(m_n^{a,c}) = m_n^{a,c}(x) - m_n^{a,c}(x-1).$$

Después, de (2.4.8) se sigue que

$$\mathcal{D}_2(m_n^{a,c}) = m_n^{a,c}(x) - \frac{1}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x-1) - m_n^{a,c}(x) = -\frac{1}{a}m_{n-1}^{a,c+1}(x-1).$$

Usando (2.4.5) llegamos a

$$\frac{1}{1-a}\left[m_n^{a,c}(x) - m_n^{a,c}(x-1)\right] = -\frac{1}{a} m_{n-1}^{a,c+1}(x-1),$$

es decir

$$\mathcal{D}_2(m_n^{a,c}) = -\frac{1}{a} m_{n-1}^{a,c+1}(x-1) = \frac{1}{1-a} \nabla \left(m_n^{a,c}\right).$$

□

Cada uno de los $\mathcal{D}$-operadores mostrados en el lema anterior junto con el Lema 2.2.1 producen la correspondiente clase de polinomios que satisfacen ecuaciones en diferencias de orden superior, como muestra el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.2. *Sea P_1 un polinomio de grado $k+1$, $k \geq 1$, y definimos $P_2(x) = P_1(x+a-1) - P_1(x)$ (entonces P_2 es un polinomio de grado k). Supongamos que $P_2(n(a-1)) \neq 0$, $n \geq 0$, y definimos las sucesiones de números*

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= P_2(n(a-1)), \quad n \geq 0, \\ \lambda_n &= P_1(n(a-1)), \quad n \geq 0, \\ \beta_{n,1} &= -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1. \\ \beta_{n,2} &= -\frac{1}{a}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

y la sucesión de polinomios $q_{0,i} = 1$ y para $n \geq 1$

$$q_{n,i}(x) = m_n^{a,c}(x) + \beta_{n,i} m_{n-1}^{a,c}(x), \quad i = 1, 2$$

donde $m_n^{a,c}$ son los polinomios de Meixner definidos en (2.4.1) *($a \neq 0, 1$). Consideremos el operador en diferencias de segundo orden $D_{a,c}$ definido en* (2.4.2) *respecto al cual los polinomios de Meixner son eigenfunciones. Finalmente escribimos D_i, $i = 1, 2$ para el operador en diferencias de orden $2k+2$ y género (-k-1,k+1)*

$$\begin{aligned} D_1 &= P_1(D_{a,c}) + \frac{a}{1-a} \Delta P_2(D_{a,c}), \\ D_2 &= P_1(D_{a,c}) + \frac{1}{1-a} \nabla P_2(D_{a,c}). \end{aligned}$$

Entonces $D_i(q_{n,i}) = \lambda_n q_{n,i}$, $n \geq 0$, $i = 1, 2$.

Demostración. La demostración es análoga al Teorema 2.3.2. basta usar el Lema 2.3.1 y los $\mathcal{D}$-operadores del Lema 2.4.1 □

2.4.1. Meixner I

Para una elección adecuada del polinomio P_1, los polinomios $(q_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ en el teorema anterior resultan ser ortogonales respecto a una medida. Ciertamente para k un entero positivo, $a\neq 0,1$ y $c\neq k+1,k,k-1,\dots$, consideremos la medida

$$\widetilde{\rho}_{k,a,c}=(x+c-1)\cdots(x+c-k)\rho_{a,c-k-1}.$$

Así para $0<|a|<1$ y $c\neq k+1,k,k\dots$ se tiene que

$$\widetilde{\rho}_{k,a,c}=(1-a)^{c-k-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^x\Gamma(x+c)}{(x+c-k-1)x!}\delta_x. \tag{2.4.10}$$

Para simplificar la notación algunas veces omitiremos la dependencia de a, c y k y escribiremos $\widetilde{\rho}_{k,a,c}=\widetilde{\rho}$.

El siguiente lema será necesario para encontrar los polinomios que son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$.

Lema 2.4.3. *Para $a\neq 0,1$, $c\neq k+1,k,\dots$ y $n\geq 0$ tenemos*

$$\langle\widetilde{\rho}_{k,a,c},m_n^{a,c}\rangle=\frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)m_k^{1/a,-c+2}(-n-1)}{(1-a)^k}.$$

Demostración. Procedemos de la misma manera que en el Lema 2.3.3. Definimos

$$\xi_n=\langle\widetilde{\rho}_{k,a,c},m_n^{a,c}\rangle,\quad n\geq 0,\quad \xi_{-1}=\frac{\Gamma(c-1)}{(1-a)^k},$$

$$\zeta_n=\frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)m_k^{1/a,-c+2}(-n-1)}{(1-a)^k},\quad n\geq -1.$$

Ahora notemos que para $n\geq 1$ tenemos que

$$\langle(c-k-1+x)\widetilde{\rho}_{k,a,c},m_n^{a,c}\rangle=(1-a)^{-k-1}\langle\rho_{k,a,c},m_n^{a,c}\rangle=0 \tag{2.4.11}$$

y como $m_0^{a,c}=1$ para $n=0$ se sigue que

$$\begin{aligned}\langle(c-k-1+x)\widetilde{\rho}_{k,a,c},m_0^{a,c}\rangle&=(1-a)^{-k-1}\langle\rho_{k,a,c},1\rangle\\&=\frac{\Gamma(c)}{(1-a)^{k+1}}=\frac{(c-1)\Gamma(c-1)}{(1-a)^{k+1}}.\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Usando la ecuación (2.4.3) tenemos para $n \geq 1$ que

$$a_n \xi_{n+1} + b_n \xi_n - \langle x \widetilde{\rho}_{k,a,c}, m_n \rangle + c_n \xi_{n-1} = 0,$$

donde

$$a_n = \frac{a(n+1)}{a-1}, \quad b_n = -\frac{(a+1)n + ac}{a-1} \quad y \quad c_n = \frac{n+c-1}{a-1}.$$

Luego usando la igualdad (2.4.11) tenemos que se cumple que

$$a_n \xi_{n+1} + (b_n + c - k - 1)\, \xi_n + c_n \xi_{n-1} = 0. \tag{2.4.13}$$

La ecuación (2.4.13) también se cumple para $n = 0$ usando (2.4.3) y (2.4.12). Ahora probaremos que $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también verifica la ecuación (2.4.13). Tomando en cuenta la definición de ζ_n, basta probar

$$\begin{aligned} & a(n+1) m_k^{1/a,-c+2}(-n-2) \\ & -((a+1)(n+1) - k(1-a) + c - 2) m_k^{1/a,-c+2}(-n-1) \\ & + (n+c-1) m_k^{1/a,-c+2}(-n) = 0, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

pero esto se obtiene directamente aplicando (2.4.2) a los polinomios $\left(m_k^{1/a,-c+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ y escribiendo $x = -n-1$.

Como las sucesiones $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen la misma relación de recurrencia (2.4.13) es suficiente probar que $\zeta_{-1} = \xi_{-1}$ y $\zeta_0 = \xi_0$. Así como $m_k^{1/a,-c+2}(0) = (-1)^k \binom{c-2}{k}$ entonces

$$\zeta_{-1} = \frac{(-1)^k k! \Gamma(c-k-1) m_k^{1/a,-c+2}(0)}{(1-a)^k} = \frac{\Gamma(c-k-1)(c-2)!}{(1-a)^k (c-2-k)!} = \xi_{-1}.$$

Para probar que $\xi_0 = \zeta_0$, se procede como sigue. Escribimos

$$\eta_{k,c} = \langle \rho_{a,c-k-1}, (x+c-1)\cdots(x+c-k) \rangle .$$

De la definición de $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ tenemos que $\eta_{k,c} = \xi_0$. Usando que

$$\langle (x+c)\rho_{a,c}, \cdot \rangle = (1-a)^{-1} \langle \rho_{a,c+1}, \cdot \rangle ,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\eta_{k,c} &= \langle \rho_{a,c-k-1}, (x+c-1)\cdots(x+c-k)\rangle \\
&= \frac{\langle \rho_{a,c-k}, (x+c-2)\cdots(x+c-k)\rangle}{1-a} \\
&+ k\,\langle \rho_{a,c-k-1}, (x+c-2)\cdots(x+c-k)\rangle \\
&= \frac{(\rho_{a,c-1}, 1)}{(1-a)^k} + k\eta_{k-1,c-1} = \frac{\Gamma(c-1)}{(1-a)^k} + k\eta_{k-1,c-1}.
\end{aligned}$$

.

Por otro lado, si escribimos

$$\tau_{k,c} = \zeta_0 = \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1) m_k^{1/a,-c+2}(-1)}{(1-a)^k}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\tau_{k,c} - k\tau_{k-1,c-1} &= \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)}{(1-a)^k}\left[m_k^{1/a,-c+2}(-1) + (1-a)m_{k-1}^{1/a,-c+3}(-1)\right] \\
&= \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)}{(1-a)^k}\left[m_k^{1/a,-c+2}(0)\right] = \frac{\Gamma(c-1)}{(1-a)^k},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de (2.4.5) aplicado a $\left(m_k^{1/a,-c+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$

$$m_k^{1/a,-c+2}(x+1) + (1-a)m_k^{1/a,-c+2}(x) = [1-a]m_{k-1}^{1/a,-c+3}(x).$$

Luego haciendo inducción sobre k se puede probar que $\tau_{k,c} = \eta_{k,c}$ y así $\zeta_0 = \xi_0$ $\square$

Ahora estamos listos para probar que los polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ son un caso particular del Teorema 2.4.2.

Teorema 2.4.4. *Para $k \geq 1$, sean a y c números reales que satisfacen que $a \neq 0, 1$, $c \neq k+1, k, k-1, \ldots$ y $m_k^{1/a,-c+2}(-n) \neq 0$, $n \geq 1$, donde $m_k^{1/a,-c+2}$, $k \geq 1$, son los polinomios de Meixner(2.4.1). Definimos las sucesiones de números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$como*

$$\lambda_n = \frac{1}{a-1} m_{k+1}^{1/a,-c+1}(-n),$$

$$\gamma_n = m_k^{1/a,-c+2}(-n), \tag{2.4.14}$$

$$\beta_n = -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \tag{2.4.15}$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *con* $q_0 = 1$ *y*

$$q_n(x) = m_n^{a,c}(x) + \beta_n m_{n-1}^{a,c}(x), \quad n \geq 1. \tag{2.4.16}$$

Entonces los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son ortogonales respecto a la medida* $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ (2.4.10)*. Más aún, considere el operador en diferencias de orden* $2k+2$ *y género* $(-k-1, k+1)$ *definido por*

$$D = P_1(D_{a,c}) + \frac{a}{1-a}\nabla P_2(D_{a,c})\,.$$

Donde, $D_{a,c}$ *es el operador en diferencias de segundo orden* (2.4.2) *y* P_1 *y* P_2 *son polinomios de grado* $k+1$ *y* k*, respectivamente, definidos por*

$$P_1(x) = \frac{1}{a-1} m_{k+1}^{1/a,-c+1}\left(-\frac{x}{a-1}\right),$$

$$P_2(x) = m_k^{1/a,-c+2}\left(-\frac{x}{a-1} - 1\right).$$

Entonces $D\,(q_n) = \lambda_n q_n$.

Demostración. Usando la notación del Lema 2.3.4, tenemos que $\lambda = -c + k + 1$, $\upsilon = \widetilde{\rho}_{k,a,c}$, $\mu = \rho_{a,c}/(1-a)^{k+1}$ y $M = 0$. Del Lema 2.4.3. tenemos que

$$\langle \widetilde{\rho}_{k,a,c}, m_n^{a,c}\rangle = \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1) m_k^{1/a,-c+2}(-n-1)}{(1-a)^k}.$$

Así la ortogonalidad de los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ es consecuencia directa del Lema 2.3.4 y las igualdades (2.4.14) y (2.4.15).

Para la segunda parte del Teorema, por el Teorema 2.4.2 sólo hay que comprobar que $P_2(x) = P_1(x+a-1) - P_1(x)$. En efecto

$$\begin{aligned} P_1(x+a-1) - P_1(x) &= \frac{1}{a-1}\left[m_{k+1}^{1/a,-c+1}\left(\frac{-x}{a-1} - 1\right) - m_{k+1}^{1/a,-c+1}\left(\frac{-x}{a-1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{1-a}\Delta m_{k+1}^{1/a,-c+1}\left(\frac{-x}{a-1} - 1\right) = m_k^{1/a,-c+2}\left(\frac{-x}{a-1}\right) = P_2(x) \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de (2.4.5) $\square$

2.4.2. Meixner II

Hay otra elección del polinomio P_1 para el cual los polinomios $(q_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ del Teorema 2.4.2 también son ortogonales respecto a una medida. Ciertamente, para k un entero positivo, $a \neq 0, 1$ y $c \neq k+1, k, \dots$ sea $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ la medida definida por

$$\widetilde{\rho}_{k,a,c} = (x+1)\cdots(x+k)\rho_{a,c-k-1}(x+k+1). \tag{2.4.17}$$

En particular, para $0 < |a| < 1$ y $c \neq k+1, k, \dots,$ $\widetilde{\rho}_{k,a,c}$ se puede escribir como

$$\widetilde{\rho}_{k,a,c} = (1-a)^{c-k-1}\left((-1)^k k!\Gamma(c-k-1)\delta_{-k-1} + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{a^{x+k+1}\Gamma(x+c)}{(x+k+1)x!}\delta_x\right). \tag{2.4.18}$$

Como antes, para simplificar la notación omitiremos la dependencia de a, c y k y escribiremos $\widetilde{\rho}_{k,a,c} = \widetilde{\rho}$.

Lema 2.4.5. *Para $a \neq 0, 1$, $c \neq k+1, k, \dots$ y $n \geq 0$, tenemos*

$$\langle \widetilde{\rho}_{k,a,c}, m_n^{a,c}\rangle = \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)m_k^{a,-c+2}(-n-1)}{a^{n-k}(1-a)^k}.$$

Demostración. Procedemos como antes. Definimos

$$\xi_n = \langle \widetilde{\rho}_{k,a,c}, m_n^{a,c}\rangle, \quad n \geq 0, \quad \xi_{-1} = \frac{\Gamma(c-1)a^{k+1}}{(1-a)^k},$$

$$\zeta_n = \frac{(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)m_k^{a,-c+2}(-n-1)}{a^{n-k}(1-a)^k}, \quad n \geq -1.$$

Para $n \geq 1$ se cumple que

$$\begin{aligned}
&\left\langle (k+1+x)\widetilde{\rho}_{k,a,c}, m_n^{a,c}\right\rangle \\
&= (1-a)^{c-k-1}(-1)^k \\
&k!\Gamma(c-k-1)\left\langle (x+k+1)\delta_{-k-1}, m_n^{a,c}\right\rangle \\
&+ (1-a)^{-k-1}a^{k+1}\left\langle \rho_{k,a,c}, m_n^{a,c}\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Para $n = 0$ como $m_0^{a,c}(x) = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned}
&\left\langle (k+1+x)\widetilde{\rho}_{k,a,c}, 1\right\rangle \\
&= (1-a)^{c-k-1}(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)\left\langle (x+k+1)\delta_{-k-1}, 1\right\rangle \\
&+ (1-a)^{-k-1}a^{k+1}\left\langle \rho_{k,a,c}, 1\right\rangle = 0 + \frac{a^{k+1}\Gamma(c)}{(1-a)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Así usando (2.4.3) y las dos igualdades anteriores se sigue que

$$a_n\xi_{n+1} + (b_n + k + 1)\xi_n + c_n\xi_{n-1} = 0, \quad n \geq 0. \tag{2.4.19}$$

Ahora mostraremos que $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también verifica la relación de recurrencia (2.4.19) para eso basta mostrar que

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)}{a}m_k^{a,-c+2}(-n-2) + \frac{(k+1)(a-1)-[(a+1)n+ac]}{a}m_k^{a,-c+2}(-n-1)& \\
+(n+c-1)m_k^{a,-c+2}(-n) = 0.&
\end{aligned}$$

Pero la anterior se obtiene aplicando (2.4.2) a los polinomios $\left(m_k^{a,-c+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, tomando $x = -n-1$ y multiplicando ambos lados de la ecuación por $-1/a$. Como las sucesiones $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen la misma relación de recurrencia (2.4.19) basta mostrar que $\xi_0 = \zeta_0$ y $\xi_{-1} = \zeta_{-1}$.

De la definición de ζ_n se sigue que $\xi_{-1} = \zeta_{-1}$. Para mostrar que $\xi_0 = \zeta_0$ definimos

$$\tau_{k,c} = \zeta_0 = \frac{a^k(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)m_k^{a,-c+2}(-1)}{(1-a)^k}.$$

Así

$$\begin{aligned}
&\tau_{k,c} - k\tau_{k-1,c-1} \\
&= \frac{a^k(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)}{(1-a)^k}\left[m_k^{a,-c+2}(-1) - \frac{(1-a)}{a}m_{k-1}^{a,-c+3}(-1)\right] \\
&= \frac{a^k(-1)^k k!\Gamma(c-k-1)}{(1-a)^k}m_k^{a,-c+2}(0) = \frac{a^k\Gamma(c-1)}{(1-a)^k},
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad se sigue de (2.4.5). También definimos

$$\eta_{k,c} = \xi_0 = \left\langle \rho_{a,c-k-1}(x+k+1), (x+1)\cdots(x+k)\right\rangle,$$

de manera análoga a como se probó en el Lema 2.3.3 tenemos que

$$\eta_{k,c} = k\eta_{k-1,c-1} + \frac{a^k\Gamma(c-1)}{(1-a)^k}.$$

Haciendo inducción sobre k se puede probar que $\tau_{k,c} = \eta_{k,c}$ y así $\zeta_0 = \xi_0$. □

Teorema 2.4.6. *Para $k \geq 1$, sean a y c números reales que cumplen que $a \neq 0$, $c \neq k+1, k, k-1, \ldots$, y $m_k^{a,-c+2}(-n) \neq 0$ con $n \geq 1$, donde $m_k^{a,-c+2}$, $k \geq 1$, son los polinomios de Meixner.*
Definimos las sucesiones $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ como

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\frac{a}{a-1} m_{k+1}^{a,-c+1}(-n), \\ \gamma_n &= m_{k+1}^{a,-c+2}(-n), \\ \beta_n &= -\frac{1}{a}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}. \end{aligned}$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $q_0 = 1$ y

$$q_n(x) = m_n^{a,c}(x) + \beta_n m_{n-1}^{a,c}(x), \quad n \geq 1.$$

Entonces los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}$ (2.4.17). Más aún, si consideramos el operador en diferencias de orden $2k+2$ y género $(-k-1, k+1)$ definido por

$$D = P_1(D_{a,c}) + \frac{1}{1-a}\nabla P_2(D_{a,c}),$$

$$D = P_1(D_{a,c}) + \frac{1}{1-a}\nabla P_2(D_{a,c}),$$

donde $D_{a,c}$ es el operador en diferencias de segundo orden (2.4.2) y P_1 y P_2 son polinomios de grado $k+1$ y k, respectivamente, definidos por

$$\begin{aligned} P_1(x) &= -\frac{a}{a-1} m_{k+1}^{a,-c+1}\left(-\frac{x}{a-1}\right), \\ P_2(x) &= m_k^{a,-c+2}\left(-\frac{x}{a-1} - 1\right), \end{aligned}$$

entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$.

Demostración. La prueba es análoga al Teorema 2.4.4. □

2.5. Caso Krawtchouk

Para $a \neq 0, -1$, escribimos $\left(k_n^{a,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para los polinomios de Krawtchouk definidos como

$$k_n^{a,N}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\frac{(1+a)^{j-n}}{a^{j-n}}\frac{(-n)_j(-x)_j(N-n)_{n-j}}{j!}. \qquad (2.5.1)$$

Los polinomios de Krawtchouk son eigenfunciones del siguiente operador en diferencias de segundo orden

$$\begin{aligned} D_{a,N} = xS_{-1} - (x - a(x-N+1))S_0 - a(x-N+1)S_1, \\ D_{a,N}\left(k_n^{a,N}\right) = -n(1+a)k_n^{a,N}. \end{aligned} \qquad (2.5.2)$$

Para $a \neq 0, -1$ y $N \neq 1, 2, \ldots$, éstos son siempre ortogonales con respecto a la medida $\rho_{a,N}$ la cual se normaliza tomando $\langle \rho_{a,N}, 1\rangle = 1$. Cuando N es un entero positivo y $a > 0$, los primeros N polinomios son ortogonales con respecto a la medida positiva

$$\rho_{a,N} = \frac{\Gamma(N)}{(1+a)^{N-1}}\sum_{x=0}^{N-1}\frac{a^x}{\Gamma(N-x)x!}\delta_x. \qquad (2.5.3)$$

Procediendo como antes, construiremos dos $\mathcal{D}$-operadores para los polinomios de Krawtchouk. Las pruebas son análogas a las de las secciones anteriores, así que se omitirán.

Lema 2.5.1. *Para $a \neq 0, 1$ y $N \in \mathbb{R}$ considere los polinomios de Krawtchouk $\left(k_n^{a,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.5.1). Entonces los operadores $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2$, definidos en (2.2.3) mediante las sucesiones ($n \geq 0$)*

$$\varepsilon_{n,1} = \frac{1}{1+a},$$
$$\varepsilon_{n,2} = \frac{-a}{1+a},$$

son $\mathcal{D}$-operadores para $\left(k_n^{a,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$ (2.2.1) de operadores en diferencias con coeficientes polinomiales. Más precisamente

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{1+a}\nabla,$$
$$\mathcal{D}_2 = -\frac{a}{1+a}\Delta.$$

Cada uno de los $\mathcal{D}$-operadores expuestos en el lema anterior junto con el Lema 2.2.1 nos da la correspondiente clase de polinomios que satisfacen una ecuación en diferencias de orden superior. Vamos a proceder sólo con el primer $\mathcal{D}$-operador pues gracias a la simetría de los polinomios de Krawtchouk, los ejemplos generados por el segundo $\mathcal{D}$-operador son esencialmente los mismos: si escribimos $q^{(1)}_{n,a,N}$, $q^{(2)}_{n,a,N}$, respectivamente, para los polinomios definidos en (2.5.4) para el primer y segundo $\mathcal{D}$-operador enunciado arriba, no es tan difícil ver (si usamos que $k_n^{a,N}(x) = (-1)^n k_n^{1/a,N}(N-1-x)$) que

$$q^{(1)}_{n,a,N}(x) = (-1)^n q^{(2)}_{n,1/a,N}(-x+N-1).$$

Teorema 2.5.2. *Sea P_1 un polinomio de grado $k+1$ con $k \geq 1$, y escribimos $P_2(x) = P_1(x-1-a) - P_1(x)$ (entonces P_2 es un polinomio de grado k). Supongamos que $P_2(-n(1+a)) \neq 0$, $n \geq 0$, y definimos las sucesiones de números*

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= P_2(-n(1+a)), \quad n \geq 0, \\ \lambda_n &= P_1(-n(1+a)), \quad n \geq 0, \\ \beta_n &= \frac{1}{1+a}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

y la sucesión de polinomios $q_0 = 1$, y para $n \geq 1$

$$q_n(x) = k_n^{a,N}(x) + \beta_n k_{n-1}^{a,N}(x), \tag{2.5.4}$$

donde $k_n^{a,N}$ son los polinomios de Krawtchouk (2.5.1) *($a \neq 0, -1$). Considere el operador en diferencias de segundo orden $D_{a,N}$* (2.5.2) *respecto al cual los polinomios de Krawtchouk son eigenfunciones. Escribimos finalmente D para el operador en diferencias de orden $2k+2$ y género $(-k, 1, k+1)$*

$$D = P_1(D_{a,N}) + \frac{1}{1+a}\nabla P_2(D_{a,N}).$$

Entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$, $n \geq 0$.

Para una elección adecuada del polinomio P_1, los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ del teorema anterior resultan ser ortogonales con respecto a una medida. Ciertamente, para k un entero positivo con $a \neq 0, -1$ y $N \neq 0, -1, \ldots, -k$ sea $\widetilde{\rho}_{k,a,N}$ la medida definida por

$$\widetilde{\rho}_{k,a,N} = (x+1)\cdots(x+k)\rho_{a,N+k+1}(x+k+1)$$

donde $\rho_{a,N}$ fue definida en (2.5.3).

Para N un entero positivo, tenemos que

$$\widetilde{\rho}_{k,a,N} = \frac{1}{(1+a)^{N+k}}\left((-1)^k k!\delta_{-k-1} + \sum_{x=0}^{N-1} \frac{\Gamma(N+k+1)a^{x+k+1}}{(x+k+1)\Gamma(N-1)x!}\delta_x\right).$$

Para simplificar la notación omitimos los parámetros a, N y k y escribimos $\widetilde{\rho}_{k,a,N} = \widetilde{\rho}$.

Lema 2.5.3. *Para $k \geq 1$, $a \neq 0, 1$ con $N \in \mathbb{R}$ y $n \geq 0$, tenemos*

$$\left\langle \widetilde{\rho}_{k,a,N}, k_n^{a,N} \right\rangle = \frac{(-1)^n k! k_k^{a,-N}(-n-1)}{(1+a)^n}.$$

Teorema 2.5.4. *Para $k \geq 1$, sea a y N números reales que satisfacen que $a \neq 0, -1$ y $k_k^{a,-N}(-n) \neq 0$ con $n \geq 1$, donde $k_k^{a,-N}$, $k \geq 1$ son los polinomios de Krawtchouk. Definimos las sucesiones $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ como*

$$\lambda_n = -k_{k+1}^{a,-N+1}(-n),$$

$$\gamma_n = k_k^{a,-N+1}(-n),$$

$$\beta_n = \frac{n}{1+a}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n},$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $q_0 = 1$, y

$$q_n(x) = k_n^{a,N} + \beta_n k_{n-1}^{a,N}, \quad n \geq 1.$$

Además, considere el operador en diferencias de orden $2k+2$ y género $(-k-1, k+1)$ definido como

$$D = P_1(D_{a,N}) + \frac{1}{1+a}\nabla P_2(D_{a,N}),$$

donde $D_{a,N}$ es el operador en diferencias (2.5.2), y P_1 y P_2 son polinomios de grado $k+1$ y k, respectivamente, definidos como

$$P_1(x) = -k_{k+1}^{a,-N+1}\left(\frac{x}{1+a}\right),$$

$$P_2(x) = k_k^{a,-N}\left(\frac{x}{1+a} - 1\right).$$

Entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$

2.6. Caso Hahn

Para $\alpha + c - N \neq -1, -2, \ldots$ escribimos $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ para la sucesión de polinomios de Hahn definida como

$$h_n^{\alpha,c,N}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(-x)_j(1-N+j)_{n-j}(c+j)_{n-j}}{(n+\alpha+c-N+j)_{n-j}j!}. \tag{2.6.1}$$

Los polinomios de Hahn pueden ser definidos usando la *función hipergeométrica* ${}_3F_2$

$$\begin{aligned} h_n^{\alpha,c,N}(x) &= \frac{(c)_n(1-N)_n}{(n+\alpha+c-N)_n} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j(-x)_j(n+\alpha+c-N)_j}{j!(1-N)_j(c)_j} \\ &= \frac{(c)_n(1-N)_n}{(n+\alpha+c-N)_n} {}_3F_2\left[\begin{matrix} -n, -x, n+\alpha+c-N \\ c, 1-N \end{matrix} ; 1\right]. \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Los polinomios de Hahn son eigenfunciones del siguiente operador en diferencias

$$\begin{aligned} D_{\alpha,c,N} =& x(x-\alpha)S_{-1} + (x+c)(x-N+1)S_1 \\ &+ \left[-2x^2 + (\alpha - c + N - 1)x + \alpha + N(c-1) - 1\right] S_0, \\ D_{\alpha,c,N}\left(h_n^{\alpha,c,N}\right) &= (n+1)(n+\alpha+c-N-1)h_n^{\alpha,c,N}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de recurrencia ($h_{-1}^{\alpha,c,N} = 0$)

$$xh_n = h_{n+1} + b_n h_n + c_n h_{n-1}, \quad n \geq 0, \tag{2.6.4}$$

donde

$$b_n = \frac{c(N-1)(\alpha+c-N-1) + n(\alpha-c+N-1)(n+\alpha+c-N)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N+1)},$$

$$c_n = \frac{n(N-n)(n+\alpha+c-N-1)(n+\alpha-N)(n+c-1)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-2)(2n+\alpha+c-N+1)^2(2n+\alpha+c-N)},$$

(para simplificar la notación omitimos algunos parámetros en las fórmulas).

Suponga que $\alpha + c - N + 1$, $\alpha - N + 1$, $\alpha + c$, $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ Si además N es un entero positivo, entonces los primeros N polinomios de Hahn son ortogonales con respecto a la medida

$$\rho_{\alpha,c,N} = \Gamma(N) \sum_{x=0}^{N-1} \frac{\Gamma(\alpha - x)\Gamma(x + c)}{\Gamma(N - x)x!} \delta_x, \tag{2.6.5}$$

(que es positiva cuando $\alpha > N - 1$ y $c > 0$) la cual normalizamos tomando

$$\langle \rho_{\alpha,c,N}, 1 \rangle = \frac{\Gamma(\alpha + 1 - N)\Gamma(c)\Gamma(\alpha + c)}{\Gamma(\alpha + c + 1 - N)}.$$

Abajo necesitaremos el siguiente lema técnico.

Lema 2.6.1. *Sea u un número real. Consideremos los polinomios $s_{0,u} = 1$ y para $j \geq 1$*

$$s_{j,u}(x) = (-1)^j \prod_{i=0}^{j-1} [x + i(u - i)]. \tag{2.6.6}$$

Entonces para $j \geq 0$, $s_{j,u}(x(x - u)) = (-x)_j (x - u)_j$.

Demostración. Si expandimos $(-x)_j (x - u)_j$, tenemos

$$(-x)_j (x - u)_j = (-1)^j x(x - j + 1)(x - u) \cdots (x - u + j - 1).$$

Multiplicando el *(i+1)*-ésimo y el *(j+i+1)*-ésimo en el producto anterior $(0 \leq i \leq j - 1)$, tenemos

$$(x - i)(x - u + i) = x(x - u) + i(u - i).$$

Esto nos da para $(-x)_j (x - u)_j$ la fórmula

$$(-x)_j (x - u)_j = (-1)^j \prod_{i=0}^{j-1} [x(x - u) + i(u - i)] = s_{j,u}(x(x - u)).$$

$\square$

También necesitamos los llamados *polinomios duales* (mónicos) de Hahn.

$$h_k^{*,\alpha,c,N}(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j (1 - N + j)_{k-j} (c + j)_{k-j}}{j!} s_{j,N-\alpha-c}(x), \tag{2.6.7}$$

donde $s_{j,N-\alpha-c}$ con $j \geq 0$ son los polinomios definidos en (2.6.6). Usando el Lema 2.6.1 podemos escribir también los polinomios duales de Hahn en términos de la función hipergeométrica ${}_3F_2$

$$\begin{aligned} h_k^{*,\alpha,c,N}(x(x+\alpha+c-N)) &= (c)_k(1-N)_k \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j(-x)_j(x+\alpha+c-N)_j}{j!(1-N)_j(c)_j} \\ &= (c)_k(1-N)_k {}_3F_2\left[\begin{matrix} -k,-x,x+\alpha+c-N \\ c,1-N \end{matrix};1\right]. \end{aligned} \tag{2.6.8}$$

De (2.6.8) y (2.6.2) se sigue la relación que existe entre los polinomios de Hahn y los polinomios duales de Hahn con respecto a las sucesiones n y $n(n+\alpha+c-N)$, esto es, para $k,n \geq 0$

$$\begin{aligned} &(c)_n(1-N)_n h_k^{*,\alpha,c,N}(n(n+\alpha+c-N)) \\ &= (c)_k(1-N)_k(n+a+c-N)_n h_n^{\alpha,c,N}(k). \end{aligned}$$

Los cálculos involucrados en el caso de los polinomios de Hahn resultan ser más complicados ya que la sucesión de valores propios $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidos en (2.6.3) son cuadráticos en n. Primero introducimos algo de notación.

Escribimos $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las sucesiones

$$\theta_n = (n+1)(n+\alpha+c-N-1), \tag{2.6.9}$$

$$\sigma_n = 2n+\alpha+c-N-2. \tag{2.6.10}$$

Para $j \geq 0$, también consideramos las sucesiones

$$u_j(n) = (n)_j(-n-\alpha-c+N+2)_j$$

y los polinomios $r_0 = 1$ y para $j \geq 1$

$$r_j(x) = (-1)^j \prod_{i=0}^{j-1} [x + i(\alpha+c-N-2-i)]. \tag{2.6.11}$$

Como el polinomio r_j es justo de grado j, todos los polinomios $P \in \mathbb{P}$ pueden ser escritos como

$$P(x) = \sum_{j=0}^{grad(P)} w_j r_j(x),$$

para ciertos números w_j, $j = 0, \dots, grad(P)$.

Haremos uso del siguiente lema técnico.

Lema 2.6.2. *Sea $\alpha, c, N \in \mathbb{R}$. Entonces para $j, n \geq 0$*

$$u_j(n) = r_j\left(\theta_{n-1}\right), \tag{2.6.12}$$

$$\begin{aligned}\sigma_n u_j(n) + \sigma_{n+1} u_j(n+1) = {} & -2\frac{u_{j+1}(n+1) - u_{j+1}(n)}{j+1} \\ & + (-\alpha - c + N + 2(j+1))(u_j(n+1) - u_j(n)).\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Demostración. (2.6.12) se obtiene del Lema 2.6.1. tomando $x = -n$ y $\alpha + c - N - 2$. La identidad (2.6.13) se comprueba con un cálculo directo. $\square$

Procediendo como en las secciones anteriores, existen ahora cuatro $\mathcal{D}$-operadores de tipo 2 para los polinomios de Hahn.

Lema 2.6.3. *Para α, c, N que satisfacen $\alpha + c - N \neq -1, -2, \dots$, considere los polinomios de Hahn $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.6.1). Entonces los operadores $\mathcal{D}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ definidos en (2.2.10) mediante las sucesiones ($n \geq 0$)*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,1} &= \frac{n(N-n)(n+\alpha-N)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \\
\sigma_{n,1} &= 2n+\alpha+c-N-2, \\
\varepsilon_{n,2} &= \frac{n(n+\alpha-N)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \\
\sigma_{n,2} &= -(2n+\alpha+c-N-2), \\
\varepsilon_{n,3} &= \frac{-n(N-n)(n+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \\
\sigma_{n,3} &= -(2n+\alpha+c-N-2), \\
\varepsilon_{n,4} &= \frac{-n(n+c-1)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \\
\sigma_{n,4} &= 2n+\alpha+c-N-2,
\end{aligned}$$

son $\mathcal{D}$-operadores para $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y el álgebra $\mathcal{A}$ (2.2.1) de operadores en *diferencias con coeficientes polinomiales. Más precisamente.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 &= (-x+N-1)\Delta - \frac{\alpha+c-N}{2}I,\\
\mathcal{D}_2 &= (x-\alpha)\nabla - \frac{\alpha+c-N}{2}I,\\
\mathcal{D}_3 &= x\nabla - \frac{\alpha+c-N}{2}I,\\
\mathcal{D}_4 &= -(x+c)\Delta - \frac{\alpha+c-N}{2}I.
\end{aligned}$$

De cada uno de los $\mathcal{D}$-operadores expuestos en el lema anterior junto con el Lema 2.2.2 surge la correspondiente clase de polinomios que satisfacen ecuaciones en diferencias de orden superior. Utilizaremos sólo el primer y segundo de los $\mathcal{D}$-operadores debido a la simetría de los polinomios de Hahn, los ejemplos generados a partir del tercero y primero de los $\mathcal{D}$-operadores son el esencialmente el mismo, así como los ejemplos generados a partir del segundo y cuarto.

Teorema 2.6.4. *Sean α, c, N números reales que satisfacen que $\alpha+c-N \neq -1, -2, \dots$. Sea P_2 un polinomio arbitrario de grado $k \geq 1$ el cual escribimos como*

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{k} w_j r_j(x),$$

para ciertos números $w_j = 0, \dots, k$. Considere también el polinomio P_1 de grado $k+1$ definido por

$$P_1(x) = (\alpha+c-N)P_2(x) + 2(x-\alpha-c+N+1)\sum_{j=0}^{k} \frac{w_j}{j+1} r_j(x).$$

Considere las siguientes sucesiones de números $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{k} w_j u_j(n), \quad n \geq 0,$$

$$\beta_{n,1} = \frac{n(N-n)(n+\alpha-N)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1,$$

$$\beta_{n,2} = \frac{n(n+\alpha-N)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1,$$

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n\gamma_n + P_1(\theta_{n-1})}{2}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_0 = \frac{P_1(\theta_0) - \sigma_1 P_2(\theta_0)}{2}.$$

Donde, $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *están definidas en* (2.6.9) *y* (2.6.10) *respectivamente e implícitamente suponemos que* $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 0$. *Finalmente definimos las sucesiones de polinomios* $q_{0,i} = 1$ *y para* $n \geq 1$

$$q_{n,i} = h_n^{\alpha,c,N} + \beta_{n,i} h_{n-1}^{\alpha,c,N}, \quad i = 1, 2.$$

Considere el operador en diferencias de segundo orden $D_{\alpha,c,N}$ (2.6.2) *respecto al cual los polinomios de Hahn son eigenfunciones. Finalmente escribimos* D_i, $i = 1, 2$ *para los operadores en diferencias de orden* $2k+2$ *y género* $(-k-1, k+1)$

$$D_1 = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha,c,N}) + \left(-\frac{\alpha+c-N}{2} + (-x+N-1)\Delta\right) P_2(D_{\alpha,c,N}),$$

$$D_2 = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha,c,N}) - \left(\frac{\alpha+c-N}{2} + (x-\alpha)\nabla\right) P_2(D_{\alpha,c,N}).$$

Entonces $D_i(q_{n,i}) = \lambda_n q_{n,i}$, $n \geq 0$, $i = 1, 2$.

Demostración. El Teorema es una consecuencia directa del Lema 2.2.2. Sólo tenemos que identificar cual es cada parámetro en este ejemplo.

$$\varepsilon_{n,1} = \frac{n(N-n)(n+\alpha-N)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \quad \sigma_{n,1} = \sigma_n,$$
$$\varepsilon_{n,2} = \frac{n(n+\alpha-N)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}, \quad \sigma_{n,2} = -\sigma_n$$

El Lema 2.6.3 nos da que las sucesiones $(\varepsilon_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\sigma_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, definen dos $\mathcal{D}$-operadores del tipo 2 para los polinomios $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in}$, además

$$\mathcal{D}_1 = -\frac{\alpha+c-N}{2}I + (-x+N-1)\Delta,$$
$$\mathcal{D}_2 = \frac{\alpha+c-N}{2}I + (x-\alpha)\nabla.$$

Considere ahora el polinomio

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{k} w_j\left(\frac{-2}{j+1}r_{j+1}(x)+(-\alpha-c+N+2(j+1))r_j(x)\right). \quad (2.6.14)$$

Un cálculo directo usando (2.6.11) nos da que $Q=P_1$. De acuerdo al Lemma 2.2.2. sólo tenemos que comprobar que

(1) $\gamma_{n+1}=P_2(\theta_n), \quad n\geq 0.$

(2) $\lambda_n-\lambda_{n-1}=\sigma_n\gamma_n, \quad n\geq 1.$

(3) $\lambda_n+\lambda_{n-1}=P_1(\theta_{n-1}), \quad n\geq 1$, donde θ_n son los valores propios de $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in}$ con respecto a $D_{a,c,N}$.

La identidad (1) es una consecuencia directa de (2.6.12) del Lema 2.6.2.

Usando la definición de λ_n, podemos ver que para $n\geq 2$ los incisos (2) y (3) son equivalentes a

$$\frac{P_1(\theta_n)-P_1(\theta_{n-1})}{2}=\frac{\sigma_n\gamma_n+\sigma_{n+1}\gamma_{n+1}}{2}.$$

Pero ésta es una consecuencia directa de (2.6.12) en el Lema 2.6.2 y la fórmula (2.6.14) para P_1.
Las identidades (2) y (3) para $n=1$ se pueden comprobar con un cálculo directo. □

2.6.1. Hahn I

Para una elección adecuada del polinomio P_2, los polinomios $(q_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ del Teorema 2.6.4 resultan ser ortogonales con respecto a una medida. Para identificar ese polinomio P_2, necesitaremos de la familia dual de los polinomios de Hahn $h^*_{1,k}=h_k^{*,N+c-1,2-c,\alpha+c-1}$. Usando (2.6.7) y (2.6.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
h^*_{1,k}(x)&=\sum_{j=0}^{k}\frac{(-k)_j(2-\alpha-c+j)_{k-j}(2-c+j)_{k-j}}{j!}r_j(x),\\
h_{1,k}\left(x(x+2+N-\alpha-c)\right)&=(2-\alpha-c)_k(2-c)_k\times\\
{}_3F_2&\left[\begin{matrix}-k,-x,x+2+N-\alpha-c\\ 2-\alpha-c,2-c\end{matrix};1\right].
\end{aligned} \quad (2.6.15)$$

Éstos satisfacen la siguiente ecuación en diferencias.

$$r\left(x\right)\widetilde{S}_{-1}\left(h_{1,k}^{*}\right)-\left(r\left(x\right)+s\left(x\right)\right)\widetilde{S}_{0}\left(h_{1,k}^{*}\right)+s\left(x\right)\widetilde{S}_{1}\left(h_{1,k}^{*}\right)=ku\left(x\right)\widetilde{S}_{0}\left(h_{1,k}^{*}\right), \tag{2.6.16}$$

donde $\widetilde{S}_l(p)=p\left(\left(x+l\right)\left(x+l+2+N-\alpha-c\right)\right)$, $l\in\mathbb{Z}$, y

$$\begin{aligned} r(x)&=-x\left(x+N\right)\left(x-\alpha+N\right)\left(2x-\alpha-c+N+3\right),\\ s(x)&=(x-\alpha-c+N+2)(x-\alpha-c+2)(x-c+2)(2x-\alpha-c+N+1),\\ u(x)&=\left(2x-\alpha-c+N+1\right)\left(2x-\alpha-c+N+2\right)\left(2x-\alpha-c+N+3\right). \end{aligned} \tag{2.6.17}$$

Además éstos también satisfacen la siguiente ecuación en diferencias de primer orden. Si escribimos $\widetilde{\Delta}=\widetilde{S}_1-\widetilde{S}_0$, entonces

$$\widetilde{\Delta}\left(h_{1,k}^{*,c}\right)=k\left(2x-\alpha-c++N+3\right)h_{1,k-1}^{*,c-1}\left(x\left(x+3+N-\alpha-c\right)\right). \tag{2.6.18}$$

Para k un entero positivo, y $\alpha,c,N\in\mathbb{R}$ que satisfacen

$$\alpha+c-N+1,\alpha-N+1,\alpha+c-k-1,c-k-1\neq 0,-1,-2,\ldots, \tag{2.6.19}$$

sea $\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}$ la medida definida como

$$\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}=(x+c-1)\cdots(x+c-k)\rho_{\alpha,c-k-1,N}$$

donde $\rho_{\alpha,c,N}$ está definida en (2.6.5). Cuando N es un entero positivo tenemos que

$$\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}=\Gamma(N)\sum_{x=0}^{N-1}\frac{\Gamma(\alpha-x)\Gamma(x+c)}{(x+c-k-1)\Gamma(N-x)x!}\delta_x. \tag{2.6.20}$$

Para simplificar la notación omitimos la dependencia de α,c,N y k y escribimos $\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}=\widetilde{\rho}$.

Para encontrar una familia de polinomios ortogonales respecto a $\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}$, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.6.5. *Para k un entero positivo, sean α,c,N números reales que cumplen* (2.6.19). *Entonces se cumple que*

$$\left\langle\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N},h_n^{\alpha,c,N}\right\rangle=$$
$$\frac{(-1)^n n!(N-n)_n\Gamma(c-k-1)\Gamma(\alpha+n-N++1)\Gamma(\alpha+c-k-1)h_{1,k}^{*}\left(\theta_n\right)}{\Gamma(\alpha+c-N+2n)},$$

donde $\left(\theta_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida en (2.6.9).

Demostración. Procedemos como en las secciones anteriores. Para $n \geq 0$ tomamos

$$\zeta_n = \frac{(-1)^n n!(N-n)_n \Gamma(c-k-1)\Gamma(\alpha+n-N++1)\Gamma(\alpha+c-k-1)h_{1,k}^*(\theta_n)}{\Gamma(\alpha+c-N+2n)},$$

$$\xi_n = \left\langle \widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}, h_n^{\alpha,c,N} \right\rangle.$$

La relación de recurrencia (2.6.4) para $\left(h_n^{\alpha,c,N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ y la normalización que tomamos para $\rho_{\alpha,c,N}$ nos da

$$\xi_1 + (b_0 + c - k - 1)\xi_0 - \frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha+1-N)\Gamma(\alpha+c)}{\Gamma(\alpha+c+1-N)} = 0, \qquad (2.6.21)$$

$$\xi_{n+1} + (b_n + c - k - 1)\xi_n + c_n \xi_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \qquad (2.6.22)$$

donde b_n y c_n son los coeficientes de la relación de recurrencia para los polinomios de Hahn (2.6.4) .

Ahora probaremos que $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica también las relaciones (2.6.21) y (2.6.22). Después de algunos cálculos y tomando en cuenta la definición de ζ_n, (2.6.22) es equivalente a

$$\begin{aligned} r(-n-1)h_{1,k}^*(\theta_{n+1}) - (r(-n-1) + s(-n-1) \\ + ku(-n-1))h_{1,k}^*(\theta_n) + s(-n-1)\, h_{1,k}^*(\theta_{n-1}) = 0, \end{aligned}$$

donde los polinomios r, s y u fueron definidos en (2.6.17). Pero esto se sigue sólo de tomar $x = -n-1$ en la ecuación en diferencias de segundo orden (2.6.16) para los polinomios duales de Hahn $\left(h_{1,k}^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$. (2.6.21) se prueba de manera análoga.

Como las sucesiones $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfacen la misma relación de recurrencia, es suficiente probar que $\xi_0 = \zeta_0$. Si escribimos

$$\eta_{k,c} = \xi_0 = \langle \widetilde{\rho}, 1 \rangle = \langle \rho_{\alpha,c,N}, (x+c-1)\cdots(x+c-k) \rangle,$$

y procedemos como en el Lema 2.4.3, encontramos que

$$\eta_{k,c} - k\eta_{k-1,c-1} = \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(\alpha-N+1)\Gamma(\alpha+c-1)}{\Gamma(\alpha+c-N)}.$$

Por otro lado, si escribimos

$$\tau_{k,c} = \zeta_0 = \frac{\Gamma(c-k-1)\Gamma(\alpha-N+1)\Gamma(\alpha+c-k-k)h_{1,k}^{*,c}(\alpha+c-N-1)}{\Gamma(\alpha+c-N)},$$

un cálculo directo usando (2.6.18) nos da

$$\tau_{k,c} - k\tau_{k-1,c-1} = \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(\alpha-N+1)\Gamma(\alpha+c-1)}{\Gamma(\alpha+c-N)}.$$

Se sigue por inducción que $\zeta_0 = \xi_0$. $\square$

Ahora estamos listos para probar que los polinomios ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}_{k,a,c,N}$ (2.6.20) son un caso particular del Teorema 2.6.4.

Teorema 2.6.6. *Para $k \geq 1$, sean α, c, N números reales que satisfacen* (2.6.19) *y $h_{1,k}^*(n(n-2-N+a+c)) \neq 0$, $n \geq 0$, donde $h_{1,k}^*$ con $k \geq 1$ son los polinomios duales de Hahn* (2.6.15). *Definimos los polinomios P_1 y P_2, de grados k y $k+1$, respectivamente, como*

$$P_2(x) = h_{1,k}^*(x),$$

$$\begin{aligned} P_1(x) =&(\alpha+c-N)h_{1,k}^*(x) + 2(x-\alpha-c+N+1) \\ &\times \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j(2-\alpha-c+j)_{k-j}(2-c+j)_{k-j}}{(j+1)!} r_j(x). \end{aligned}$$

También definimos las sucesiones de números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ como

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n\gamma_n + P_1(\theta_{n-1})}{2}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_0 = \frac{P_1(\theta_0) - \sigma_1 P_2(\theta_0)}{2},$$

$$\gamma_n = h_{1,k}^*(n(n-2-N+a+c)),$$

$$\beta_n = \frac{n(N-n)(n+\alpha-N)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n},$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $q_0 = 1$, y

$$q_n(x) = h_n^{a,c,N}(x) + \beta_n h_{n-1}^{a,c,N}(x), \quad n \geq 1,$$

donde $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son definidos por (2.6.9) *y* (2.6.10). *Si N es un entero positivo, entonces los polinomios $(q_n)_{0\leq n\leq N}$ son ortogonales con respecto* *a la medida* $\widetilde{\rho}$ (2.6.20). *Mas aún, si consideremos el operador en diferencias de orden* $2k+2$ *y género* $(-k-1, k+1)$ *definido por*

$$D = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha,c,N}) + \left(-\frac{\alpha+c-N}{2} + (-x+N-1)\Delta\right) P_2(D_{\alpha,c,N}),$$

donde $D_{\alpha,c,N}$ *es el operador en diferencias de segundo para los polinomios de Hahn* (2.6.3), *entonces* $D(q_n) = \lambda_n q_n$.

Demostración. La primera parte del teorema se puede probar de manera análoga a como se hizo en el Teorema 2.3.5.
La segunda parte es un caso particular del Teorema 2.6.4 para $i = 1$ y

$$w_j = \frac{(-k)_j (2-\alpha-c+j)_{k-j} (2-c+j)_{k-j}}{j!}.$$

□

2.6.2. Hahn II

Existe otra elección del polinomio P_2 para el cual los polinomios $(q_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ del Teorema 2.6.4 también son ortogonales con respecto a una medida. Ciertamente, escribimos $\left(h^*_{2,k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ para la familia dual de los polinomios de Hahn $h^*_{2,k} = h_k^{*,-\alpha,2-c,-N}$. Usando (2.6.7) y (2.6.8) obtenemos

$$h^*_{2,k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-k)_j (2-c+j)_{k-j} (N+1+j)_{k-j}}{j!} r_j(x), \tag{2.6.23}$$

$$\begin{aligned} h_{2,k}\left(x\left(x+2+N-\alpha-c\right)\right) =& (2-c)_k (N+1)_k \\ & \times {}_3F_2\left[\begin{matrix} -k, -x, x+2+N-\alpha-c+ \\ 2-c, N+1 \end{matrix}; 1\right]. \end{aligned}$$

Para k un entero positivo, y $\alpha, c, N \in \mathbb{R}$ que cumplen

$$\alpha+c-N+1, \alpha-N+1, \alpha+c, c-k-1 \neq 0, -1, -2, \ldots, \tag{2.6.24}$$

sea $\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}$ la medida definida como

$$\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N} = (x+1)\cdots(x+k)\rho_{\alpha+k+1,c-k-1-N+k+1}(x+k+1).$$

Cuando N es un entero positivo tenemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N} =&(-1)^k k!\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(c-k-1)\delta_{-k-1}\\&+\Gamma(N+k+1)\sum_{x=0}^{N-1}\frac{\Gamma(\alpha-x)\Gamma(x+c)}{(x+k+1)\Gamma(N-x)x!}\delta_x\end{aligned} \tag{2.6.25}$$

Para simplificar la notación simplemente escribiremos $\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}=\widetilde{\rho}$.

Las pruebas de los siguientes teoremas son similares a las de la sección anterior.

Lema 2.6.7. *Para k un entero positivo, sea α, c, N números reales que cumplen* (2.6.24). *Entonces, tenemos*

$$\begin{aligned}&\left\langle\widetilde{\rho}_{k,\alpha,c,N}, h_n^{\alpha,c,N}\right\rangle\\&=\frac{(-1)^{n+k}n!\Gamma(c-k-1)\Gamma(\alpha+c+n)\Gamma(\alpha+1+n-N)h^*_{2,k}(\theta_n)}{\Gamma(\alpha+c-N+2n)},\end{aligned}$$

donde $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión definida en (2.6.9).

Teorema 2.6.8. *Para $k\geq 1$, sea α, c, N números reales que satisfacen* (2.6.24) *y $h^*_{2,k}(n(n-2-N+a+c))\neq 0$ con $n\geq 0$, donde $h^*_{2,k}$, $k\geq 1$, son los polinomios duales de Hahn* (2.6.23). *Entonces definimos los polinomios P_2 y P_1, de grados k y $k+1$, respectivamente, como*

$$P_2(x)=h^*_{2,k}(x),$$

$$\begin{aligned}P_1(x)=&(\alpha+c-N)h^*_{2,k}(x)+2(x-\alpha-c+N+1)\\&\times\sum_{j=0}^{k}\frac{(-k)_j(2-c+j)_{k-j}(N+1+j)_{k-j}}{(j+1)!}r_j(x).\end{aligned}$$

También definimos las sucesiones de números $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ como

$$\lambda_n=\frac{\sigma_n\gamma_n-P_1(\theta_{n-1})}{2},\quad n\geq 1,\quad \lambda_0=\frac{P_1(\theta_0)-\sigma_1P_2(\theta_0)}{2},$$

$$\gamma_n=h^*_{2,k}(n(n-2-N+a+c)),$$

$$\beta_n=\frac{n(n+\alpha-N)(n+\alpha+c-1)}{(2n+\alpha+c-N-1)(2n+\alpha+c-N-2)}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n},$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como* $q_0 = 1$ *y*

$$q_n(x) = h_n^{a,c,N}(x) + \beta_n h_{n-1}^{a,c,N}(x), \quad n \geq 1,$$

donde $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son definidas en* (2.6.9) *y* (2.6.10). *Si* N *es un entero positivo, entonces los polinomios* $(q_n)_{0\leq n\leq N}$ *son ortogonales con respecto a* $\widetilde{\rho}$ (2.6.25). *Más aún, si consideramos el operador en diferencias de orden* $2k+2$ *y género* $(-k-1, k+1)$ *definido por*

$$D = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha,c,N}) - \left(\frac{\alpha + c - N}{2} - (x-\alpha)\nabla\right) P_2(D_{\alpha,c,N}),$$

donde $D_{\alpha,c,N}$ *es el operador en diferencias de segundo orden para los polinomios de Hahn* (2.6.3)*, entonces* $D_{\alpha,c,N}(q_n) = \lambda_n q_n$.

2.7. Caso Laguerre

Para $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen los polinomios de Laguerre $(L_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-x)^j}{j!}\binom{n+\alpha}{n-j}. \tag{2.7.1}$$

Cuando $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, éstos son ortogonales respecto a la medida $\mu_\alpha = \mu_\alpha(x)dx$

$$\mu_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad x > 0 \tag{2.7.2}$$

la cual es positiva solo cuando $\alpha > -1$.

Los polinomios de Laguerre son eigenfunciones del siguiente operador diferencial de segundo orden

$$D_\alpha = x\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (\alpha + 1 - x)\frac{d}{dx}, \quad D_\alpha(L_n^\alpha) = -nL_n^\alpha, \quad n \geq 0. \tag{2.7.3}$$

Primero encontraremos un $\mathcal{D}$-operador para los polinomios de Laguerre.

Lema 2.7.1. *Para* $\alpha \in \mathbb{R}$*, sea* $p_n = L_n^\alpha$*,* $n \geq 0$*, los polinomios de Laguerre* (2.7.1). *Entonces el operador* $\mathcal{D}$ *definido en* (2.2.3) *mediante la sucesión* $\varepsilon_n = -1$*,* $n \geq 0$ *es un* $\mathcal{D}$*-operador para los polinomios de Laguerre y el álgebra* $\mathcal{A}$ (2.2.2). *Más aún* $\mathcal{D} = {}^{d}\!/\!{}_{dx}$.

Demostración. Usando las fórmulas $(L_n^\alpha)' = -L_{n-1}^{\alpha+1}$, $L_n^{\alpha+1} = \sum_{j=0}^n L_{n-j}^\alpha$ y la definición de $\mathcal{D}$-operador tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(L_n^\alpha\right) &= \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\zeta^j\left(L_n^\alpha\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(-1)^j L_{n-j}^\alpha \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} L_{n-k-1} = -L_{n-1}^{\alpha+1} = \frac{d}{dx}\left(L_n^\alpha\right).\end{aligned}$$

Así $\mathcal{D} = \frac{d}{dx}$. □

Del lema anterior y el Lema 2.2.1 se obtienen las correspondientes familias de polinomios que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden superior.

Teorema 2.7.2. *Sea P_1 un polinomio de grado $k+1$, $k \geq 1$ y escribimos $P_2(x) = P_1(x-1) - P_1(x)$ (entonces P_2 es un polinomio de grado k). Supongamos que $P_2(-n) \neq 0$, $n \geq 0$ y definimos las sucesiones*

$$\gamma_{n+1} = P_2(-n), \quad n \geq 0,$$

$$\lambda_n = P_1(-n), \quad n \geq 0,$$

$$\beta_n = -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1.$$

y la sucesión de polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidos por $q_0 = 1$

$$q_n = L_n^\alpha + \beta_n L_{n-1}^\alpha, \quad n \geq 1,$$

donde L_n^α es el n-ésimo polinomio de Laguerre (2.7.1). *Escribimos a D como el operador diferencial de orden $2k+2$*

$$D = P_1(D_\alpha) + \frac{d}{dx}P_2(D_\alpha),$$

donde D_α es el operador diferencial de segundo orden (2.7.2).
Entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$.

Para $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ y $M \neq -\Gamma(n)/\Gamma(n+\alpha)$, tomemos la medida $\widetilde{\rho}_{\alpha,M}$ definida como

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,M} = \alpha\Gamma^2(\alpha)M\delta_0 + \mu_\alpha(x)dx, \quad x > 0. \tag{2.7.4}$$

Cuando $\alpha > 0$ y $M > 0$, la medida $\widetilde{\rho}_{\alpha,M}$ se conoce como la medida de Krall-Laguerre-Koornwinder

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,M} = \alpha\Gamma^2(\alpha)M\delta_0 + x^{\alpha-1}e^{-x}, \quad x > 0.$$

Para simplificar la notación escribiremos simplemente $\widetilde{\rho}_{\alpha,M} = \widetilde{\rho}$.

Usando el Lema 2.3.4 encontramos una sucesión de polinomios que son ortogonales respecto a $\widetilde{\rho}$.

Lema 2.7.3. *Sean $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ y $(\beta_n)_{n\geq 1}$ las sucesiones de números definidas por*

$$\gamma_n = 1 + K\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}, \tag{2.7.5}$$

$$\beta_n = -\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1. \tag{2.7.6}$$

Entonces los polinomios definidos por $q_0 = 1$ y

$$q_n = L_n^\alpha + \beta_n L_{n-1}^\alpha, \quad n \geq 1, \tag{2.7.7}$$

son ortogonales respecto a $\widetilde{\rho}$ (2.7.4).

Demostración. En notación del Lema 2.3.4 tenemos que $\lambda = 0$, $\nu = \mu_{\alpha-1}(x)dx$ y $\mu = \mu_\alpha(x)dx$. Ahora como $L_n^{\alpha+1} = \sum_{j=0}^n L_{n-j}^\alpha$ se sigue que $\alpha_n = \Gamma(\alpha)$. Entonces

$$\beta_n = -\frac{\Gamma(\alpha) + Mp_n(0)}{\Gamma(\alpha) + Mp_{n-1}(0)} = -\frac{\Gamma(\alpha) + M\binom{n+\alpha}{n}}{\Gamma(\alpha) + M\binom{n+\alpha-1}{n-1}}$$

$$= -\frac{\Gamma(\alpha) + M\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}}{\Gamma(\alpha) + M\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)}} = -\frac{1 + M\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}}{1 + M\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n)\Gamma(\alpha)}},$$

que coincide con (2.7.6) si tomamos $K = {}^{M}/_{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}$. □

Cuando α es un entero, la sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.7.5) es un polinomio en n y entonces el Teorema 2.5.2 nos da la ecuación diferencial de orden $2\alpha + 2$ que los polinomios (2.7.7) satisfacen.

Teorema 2.7.4. *Sea* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la sucesión de polinomios* (2.7.7) *que son ortogonales respecto a la medida* $\widetilde{\rho}$ (2.7.4). *Suponga que* α *es un entero positivo. Defina la sucesión* λ_n *como*

$$\lambda_n = n + \frac{M}{\alpha+1} n(n+1)\cdots(n+\alpha)$$

y los polinomios P_1 *y* P_2*, de grados* $\alpha+1$ *y* α *respectivamente, como*

$$\begin{aligned} P_1(x) &= -x + \frac{K}{\alpha+1}(-x)(-x+1)\cdots(-x+\alpha), \\ P_2(x) &= 1 + K(-x+1)(-x+2)\cdots(-x+\alpha). \end{aligned}$$

Considere el operador diferencial de orden $2\alpha+2$ *definido como*

$$D = P_1\left(D_\alpha\right) + \frac{d}{dx} P_2\left(D_\alpha\right),$$

donde D_α *es el operador diferencial de segundo orden* (2.7.3).
Entonces $D\left(q_n\right) = \lambda_n q_n$.

Demostración. Es suficiente observar que $P_2(x) = P_1(x-1) - P_1(x)$ y concluir con el Teorema 2.7.2. □

Cuando α no es un entero positivo, o el polinomio P_2 no es como en el Teorema 2.7.4, los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.7.7) no parecen ser ortogonales respecto a una medida (existe evidencia computacional que muestra que no satisfacen una relación de recurrencia a tres términos). De cualquier manera poseen cierta propiedad de ortogonalidad. Ciertamente, cuando $P_2(1) \neq 0$, como P_2 es un polinomio de grado k, podemos tomar números w_j, $j = 1, \ldots, k$ tales que

$$P_2(-x) = P_2(1)\left(1 + \sum_{j=1}^{k} w_j \binom{x+j}{j}\right).$$

Por otro lado, si $P_2(1) = 0$, podemos tomar números w_j, $j = 1, \ldots, k$ tales que

$$P_2(-x) = 1 + \sum_{j=0}^{k} w_j \binom{x+j}{j}.$$

(en particular $w_0 = -1$).

Definimos el polinomio Q como

$$Q(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} (\alpha - j)_j w_j x^{k-j} & si \quad P_2(1) \neq 0, \\ \sum_{j=0}^{k} (\alpha - j)_j w_j x^{k-j} & si \quad P_2(1) = 0. \end{cases} \tag{2.7.8}$$

Notemos que el polinomio Q tiene grado a lo más $k-1$ para $P_2(1) \neq 0$ y k para $P_2(1) = 0$.

Lema 2.7.5. *Sea P_2 un polinomio arbitrario de orden k que satisface que $P_2(-n) \neq 0$, $n \geq 0$. Para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k, k-1, \dots\}$, considere los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.7.7). Si definimos*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)\, g(x)\, \mu_{\alpha-1}(x) dx + g(0) \int_0^\infty f(x)\, Q(x) \mu_{\alpha-k-1}(x) dx,$$

donde Q es el polinomio definido en (2.7.8), entonces

1. $\langle q_n, q_j \rangle = 0$, $j = 0, \dots, n-1$,
2. $\langle q_n, q_n \rangle \neq 0$,
3. $\langle x^{k+1} q_n, q_j \rangle = 0$, $n \geq k+2$ *y* $j = 0, \dots, n-k-2$.

Demostración. Es suficiente mostrar que $\langle q_n, x^j \rangle = 0$, $j = 0, \dots, n-1$, $\langle q_n, x^n \rangle \neq 0$ y $\langle x^{k+1} q_n, x^j \rangle = 0$ para $n \geq k+2$ y $j = 0, \dots, n-k-2$.

Como q_n es una combinación lineal de L_n^α y L_{n-1}^α, automáticamente tenemos que

$$\langle q_n, x^j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n-1,$$
$$\left\langle x^{k+1} q_n, x^j \right\rangle = 0, \quad n \geq k+2 \quad y \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ahora, para $n \geq 1$, como

$$\left\| L_{n-1}^\alpha \right\|^2 = \int_0^\infty \left(L_{n-1}^\alpha \right)^2 \mu_\alpha = \int_0^\infty L_{n-1}^\alpha \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-x)^j}{j!} \binom{n+\alpha-1}{n-j} \mu_\alpha$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty L_{n-1}^\alpha x^{n-1} \mu_\alpha.$$

Entonces

$$\langle q_n, x^n \rangle = \beta_n \int_0^\infty L_{n-1}^\alpha x^{n-1} \mu_\alpha = (-1)^{n-1}(n-1)!\beta_n \left\| L_{n-1}^\alpha \right\|^2 \neq 0.$$

Si usamos la identidad

$$L_n^\alpha = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha-\beta)_j}{j!} L_{n-j}^\beta$$

con $\beta = \alpha - l$ y $l \geq 1$, para $j = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\int L_n^\alpha \mu_{\alpha-l}(x)dx &= \int \sum_{j=0}^{n} \frac{(l)_j}{j!} L_{n-j}^{\alpha-l} \mu_{\alpha-l}(x)dx \\
= \frac{(l)_n}{n!} \int L_0^\alpha \mu_{\alpha-l}(x)dx &= \Gamma(\alpha-l+1)\binom{n+l-1}{l-1}.
\end{aligned}$$

Primero probaremos el lema cuando $P_2(1) \neq 0$. Usando la definición de Q (2.7.8) y usando la igualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle q_n, 1 \rangle &= \int_0^\infty q_n(x)\mu_{\alpha-1}(x)dx + \int_0^\infty q_n(x)Q(x)\mu_{\alpha-k-1}(x)dx \\
&= \Gamma(\alpha) + \beta_n\Gamma(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} (\alpha-j)_j w_j \int_0^\infty q_n(x)\mu_{\alpha-j-1}(x)dx \\
&= \Gamma(\alpha) + \beta_n\Gamma(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} (\alpha-j)_j w_j \Gamma(\alpha-j)\binom{n+j}{j} \\
&+ \beta_n \sum_{j=1}^{k} (\alpha-j)_j w_j \Gamma(\alpha-j)\binom{n+j-1}{j} \\
&= \Gamma(\alpha)\left((1+\beta_n) + \sum_{j=1}^{k} w_j \left[\binom{n+j}{j} + \beta_n\binom{n+j-1}{j}\right]\right).
\end{aligned}$$

Como $\langle q_n, 1 \rangle = 0$, si resolvemos para β_n tenemos que

$$\beta_n = -\frac{1 + \sum_{j=1}^{k} w_j \binom{n+j}{j}}{1 + \sum_{j=1}^{k} w_j \binom{n+j-1}{j}} = -\frac{P_2(-n)}{P_2(-(n-1))},$$

que coincide con la expresión para β_n dada en el Teorema 2.5.2.

Finalmente tenemos

$$\langle 1,1\rangle = \Gamma(\alpha)\left(1+\sum_{j=1}^{k} w_j\right) = \Gamma(\alpha)\frac{P_2(0)}{P_2(1)} \neq 0.$$

Cuando $P_2(1)=0$ la prueba es análoga. $\square$

Las propiedades arriba descritas para los polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ implica que estos satisfacen una relación de recurencia de $2k+3$ términos.

Corolario 2.7.5.1. *Suponga que $\alpha \neq k, k-1, \dots$ entonces los polinomios $(q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ definidos en el Teorema 2.5.2. satisfacen una relación de recurrencia de la forma*

$$x^{k+1}q_n(x) = \sum_{j=-k-1}^{k+1} c_{n,j}q_{n+j}(x).$$

Demostración. Como $x^{k+1}q_n\left(x\right)$ es un polinomio de grado $n+k+1$ entonces éste, se puede escribir como $x^{k+1}q_n\left(x\right) = \sum_{j=-n}^{k+1} c_{n,j}q_{n+j}(x)$. Entonces de la tercera implicación del Lema 2.7.5 se sigue que

$$0 = \left\langle x^{k+1}q_n\left(x\right), q_0\right\rangle = c_{n,-n}\left\langle q_0, q_0\right\rangle,$$

ahora usando 2 del Lema anterior se sigue que $c_{n,-n}=0$. Procedemos ahora por inducción sobre m. Suponga que $c_{n,-n+j}=0$ con $j=0,\dots,m$ y $m<n-k-2$. Si procedemos como antes, tenemos

$$0 = \left\langle x^{k+1}q_n\left(x\right), q_{-n+m+1}\right\rangle = c_{n,-n+m+1}\left\langle q_{-n+m+1}, q_{-n+m+1}\right\rangle,$$

de donde se sigue también que $c_{n,-n+m+1}=0$. $\square$

2.8. Caso Jacobi

Para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ con $\alpha+\beta\neq -1,-2,\dots$ usamos la definición estándar de los polinomios de Jacobi $\left(P_n^{\alpha,\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = 2^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+\alpha}{j}\binom{n+\beta}{n-j}(x-1)^{n-j}(x+1)^j. \tag{2.8.1}$$

Para α, β donde $\alpha+\beta \neq -1, -2, \dots$ éstos son ortogonales con respecto a la medida $\mu_{\alpha,\beta} = \mu_{\alpha,\beta}(x)dx$, la cual es positiva únicamente cuando $\alpha, \beta > -1$

$$\mu_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \quad -1 < x < 1. \tag{2.8.2}$$

Estos polinomios son eigenfunciones del siguiente operador diferencial de segundo orden

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta} &= (1-x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + (\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x)\frac{d}{dx}, \\ D_{\alpha,\beta}\left(P_n^{\alpha,\beta}\right) &= -n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{\alpha,\beta}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Primero construiremos dos $\mathcal{D}$-operadores para los polinomios de Jacobi.

Lema 2.8.1. *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que satisfacen que $\alpha+\beta \neq -1, -2, \dots$, sea $p_n = P_n^{\alpha,\beta}$, $n \geq 0$, los polinomios de Jacobi definidos en* (2.8.1). *Entonces los operadores $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$ definidos por* (2.2.10) *mediante las sucesiones*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,1} &= \frac{n+\alpha}{n+\alpha+\beta}, \quad \sigma_{n,1} = 2n+\alpha+\beta-1, \\ \varepsilon_{n,2} &= -\frac{n+\beta}{n+\alpha+\beta}, \quad \sigma_{n,2} = -(2n+\alpha+\beta-1), \end{aligned}$$

son dos $\mathcal{D}$-operadores para los polinomios de Jacobi y el álgebra $\mathcal{A}$ (2.2.2). *Más aún*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= -\frac{\alpha+\beta+1}{2}I + (1-x)\frac{d}{dx}, \\ \mathcal{D}_2 &= \frac{\alpha+\beta+1}{2}I + (1+x)\frac{d}{dx}. \end{aligned}$$

Las pruebas en esta sección son análogas a las de sección anterior, es por esto que se omitirán.

Para enunciar los resultados principales en esta sección necesitamos algo de notación.

Escribimos $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para las sucesiones

$$\begin{aligned} \theta_n &= -n(n+\alpha+\beta+1), \\ \sigma_n &= 2n+\alpha+\beta-1. \end{aligned}$$

Recordemos que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son los eigenvalores de la sucesión de polinomios de Jacobi. También consideremos la sucesión

$$u_j(n) = (n+\alpha)_j (n+\beta-j)_j,$$

y los polinomios $r_0 = 1$ y para $j \geq 1$

$$r_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} [-x + (\alpha+i+1)(\beta-i)].$$

Como el polinomio r_j, tiene justo grado j, todos los polinomios $P \in \mathbb{P}$ (donde $\mathbb{P}$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado n) pueden ser escritos como $P(x) = \sum_{j=0}^{grad(P)} w_j r_j(x)$ para ciertos número w_j, $j = 0, \ldots, grad(P)$.

El Lema 2.2.2. y los dos $\mathcal{D}$-operadores para los polinomios de Jacobi encontrados en el Lema 2.8.1 automáticamente producen una clase de polinomios que satisfacen ecuaciones diferenciales de orden superior.

Utilizaremos únicamente el primer $\mathcal{D}$-operador, debido a la simetría de los polinomios de Jacobi respecto a los parámetros α y β y los extremos de su soporte $x = 1$ y $x = -1$.

Teorema 2.8.2. *Sea P_2 un polinomio arbitrario de grado $k \geq 1$ el cual escribimos como*

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{k} w_j r_j(x),$$

para ciertos números w_j, $j = 0, \ldots, k$. Considere también el polinomio P_1 de grado $k+1$ definido por

$$P_2(x) = \sum_{j=0}^{k} w_j r_j(x).$$

Considere las siguientes sucesiones de números $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidos como

$$\gamma_n = \sum_{j=0}^{k} w_j u_j(n), \quad n \geq 0,$$

$$\beta_n = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+\beta} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1,$$

$$\lambda_n = \frac{\sigma_n \gamma_n + P_1(\theta_{n-1})}{2}, \quad n \geq 1, \quad \lambda_0 = \frac{P_1(0) - (\alpha+\beta+1)P_2(0)}{2}.$$

Donde, se asume que $\gamma_n \neq 0$, para $n \geq 0$. Definimos finalmente la sucesión de polinomios $q_0 = 1$, y para $n \geq 1$

$$q_n = P_n^{\alpha,\beta} + \beta_n P_{n-1}^{\alpha,\beta},$$

donde $P_n^{\alpha,\beta}$ son los polinomios de Jacobi dados en (2.8.1). Por último escribimos D para el operador diferencial de orden $2k+2$

$$D = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha.\beta}) + \left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2} + (1-x)\frac{d}{dx}\right)P_2(D_{\alpha,\beta}),$$

donde $D_{\alpha,\beta}$ es el operador diferencial de segundo orden (2.8.3).
Entonces $D(q_n) = \lambda_n q_n$, $n \geq 0$.

Ahora consideraremos un importante caso particular del teorema anterior.

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\alpha + \beta \neq -1, -1, \ldots$ y $\Gamma(n)$, considere la medida $\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta,M}$ definida como

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta,M} = 2^{\alpha+\beta}\beta\Gamma^2(\beta)M\delta_{-1} + \mu_{\alpha,\beta-1}(x)dx, \tag{2.8.4}$$

donde $\mu_{\alpha,\beta}(x)dx$ está definida en (2.8.2). Cuando $\alpha > -1$, $\beta > 0$ y $M > 0$, la medida $\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta,M}$ es conocida como la medida de Krall-Jacobi-Koornwinder

$$\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta,M} = 2^{\alpha+\beta}\beta\Gamma^2(\beta)M\delta_{-1} + (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad -1 < x < 1.$$

Para simplificar la notación omitiremos los parámetros α, β y M y escribiremos $\widetilde{\rho}_{\alpha,\beta,M} = \widetilde{\rho}$.

Usando el Lema 2.3.4 encontramos una sucesión de polinomios que son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}$.

Lema 2.8.3. *Sea $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ la sucesión definida por*

$$\gamma_n = 1 + M\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha)}\frac{\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n)}. \tag{2.8.5}$$

Definimos

$$\beta_n = \frac{n+\alpha}{n+\alpha+\beta}\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}, \quad n \geq 1.$$

Entonces los polinomios $q_0 = 1$ y

$$q_n = P_n^{\alpha,\beta} + \beta_n P_{n-1}^{\alpha,\beta}, \quad n \geq 1, \tag{2.8.6}$$

son ortogonales con respecto a $\widetilde{\rho}$ (2.8.4).

Cuando β es un entero positivo, la sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2.8.5) es un polinomio en n y entonces el Teorema 2.7.2. nos da una ecuación de grado $2\alpha+2$ que los polinomios de Krall-Jacobi-Koornwinder (2.8.6) satisfacen.

Teorema 2.8.4. *Sea $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios (2.8.6) ortogonales con respecto a la medida $\widetilde{\rho}$ (2.8.4). Suponga que β es un entero positivo. Defina la sucesión de números λ_n como*

$$\lambda_n = (n+\alpha+\beta)\left(n + M(n+\alpha)_\beta (n)_\beta \left(1+\frac{n-1}{\beta+1}\right)\right) + \alpha\beta,$$

y los polinomios P_1 y P_2 de grados $\beta+1$ y β, respectivamente, como

$$\begin{aligned} P_1(x) =& \alpha\beta + (\alpha+1)(\beta+1) - 2x + M\left(-\frac{2x}{\beta+1} + \alpha+\beta+1\right) \\ & \times \prod_{i=0}^{\beta-1}\left[-x + (\alpha+i+1)(\beta-i)\right], \end{aligned}$$

$$P_2(x) = 1 + M\prod_{i=0}^{\beta-1}[-x+(\alpha+i+1)(\beta-i)].$$

Considere el operador diferencial de orden $2\beta+2$ definido como

$$D = \frac{1}{2}P_1(D_{\alpha,\beta}) + \left(-\frac{\alpha+\beta+1}{2} + (1-x)\frac{d}{dx}\right)P_2(D_{\alpha,\beta}),$$

donde $D_{\alpha,\beta}$ es el operador diferencial de segundo orden definido en (2.8.3). Entonces

$$D(q_n) = \lambda_n q_n.$$

Cuando β no es igual a k, los polinomios q_n parecen no ser ortogonales respecto a una medida. Si procedemos de la misma manera que en la sección anterior podemos ver que estos polinomios gozan de propiedades de ortogonalidad similares con respecto a la siguiente forma bilineal no simétrica

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,\mu_{\alpha,\beta-1}(x)dx + g(-1)\int_{-1}^{1} f(x)\,Q(x)\,\mu_{\alpha,\beta-k-1}(x)dx,$$

donde $\mu_{\alpha,\beta}$ es la medida de Jacobi. Q es cierto polinomio de grado a lo más $k-1$ ó k dependiendo de P_2. Estas propiedades de ortogonalidad para los polinomios $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implican que éstos satisfacen una relación de recurrencia de $2k+3$ términos de la forma

$$(1+x)^{k+1}q_n(x) = \sum_{j=-k-1}^{k+1} c_{n,j}q_{n+j}(x).$$

Referencias

[1] H. Bavinck, H. van Haeringen, *Difference equations for generalizations of Meixner polynomials*, J. Math. Anal. Appl, **184** (1994), pp.453-463.

[2] H. Bavinck, R. Koekoek, *On a difference equation for generalizations of Charlier polynomials*, J. Aprox. Theory, **81** (1995), pp. 195-206.

[3] S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme*, Math. Z., **29** (1929), pp. 730-736.

[4] T.S. Chihara, *An introduction to orthogonal polynomials*(1978), New York, Newyork, United States of America, Gordon and Breach Science Publishers.

[5] A.J. Durán, *The algebra of difference operators associated to a family of orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **164** (2012), pp.586-610.

[6] A.J. Durán,, *Orthogonal polynomials satisfying higher order difference equations*, Constr. Approx., **36** (2012), pp. 459-486.

[7] A.J. Durán, *Using $\mathcal{D}-$operators to construct orthogonal polynomials satisfying higher order difference or differential equations*, J. Approx Theory, **174**(1) (2013), pp. 10-53.

[8] F.A. Grünbaum, L. Haine, *Orthogonal polynomials satisfying differential equations: the role of the Darboux transformation, in: "Symmetries and Integrability of Difference Equations"D. Levi, L. Vinet and P. Winternitz, eds*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 9, Am. Math. Soc., Providence, (1996), pp. 143-154.

[9] F.A. Grünbaum, L. Haine, E. Horozov, *Some functions that generalize the Krall-Laguerre polynomials*, J. Comput. Appl. Math, **106** (1999), pp. 271-297.

[10] F.A. Grünbaum, M. Yakimov, *Discrete bispectral Darboux tranformations from Jacobi operators*, Pac. J. Math, **204** (2002), pp. 395-431.

[11] R. Koekoek, *Differential equations for symmetric generalized ultraspherical polynomials*, Trans. Am. Math. Soc, **345** (1994), pp. 47-72.

[12] J. Koekoek, R. Koekoek, *Differential equations for generalized Jacobi polynomials*, J. Comput. Appl. Math, **112** (1991), pp. 1045-1054.

[13] J. Koekoek, R. Koekoek, *On a differential equation for Koornwinder's generalized Laguerre polynomials*, Proc. Am. Soc, **112** (1991), pp. 1045-1054.

[14] T.H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials with weight function* $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, Canad. Math. Bull, **27** (2) (1984), pp. 205-214.

[15] H.L. Krall, *Certain differential equations for Tchebycheff polynomials*, Duke Math. J., **4** (1939), pp. 705-718.

[16] A.M. Krall, *On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order equations*, The Pennsylvania State College Studies, No. 6, The Pennsylvania State College, State College, Pa., 1940.

[17] A.M. Krall, *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **87** (1981), pp. 271-288.

[18] A.M. Krall, L.L. Litlejohn, *On the classification of differential equations having orthogonal polynomial solution. II.* Ann. Mat. Pura Appl, **149**,(1987), pp.77-102.

[19] A.M. Krall, R.D. Morton, *Distributional weight functions for orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal., **9** (1978), pp. 604-626.

[20] K.H. Kwon, D.W Lee, *Characterizations of Bochner-Krall orthogonal polynomials of Jacobi type*, Constr. Approx, **19** (2003), pp. 599-619.

[21] K.H. Kwon, L.L. Littlejohn, G.J. Yoon , *Orthogonal polynomial solutions of spectral type differential equations: Magnus' conjecture*, J. Approx. Theory, **112** (2001), pp.189-215.

[22] O.T. Lancaster, *Orthogonal polynomials defined by difference equations* , American Journal of Mathematics, **63**(1) (1941), pp.185-207.

[23] L.L. Littlejohn, *The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials*, Quaestiones Math., **5** (1982), pp. 255-265.

[24] L.L. Litlejohn, *On the classification of differential equations having orthogonal polynomial solution.* Ann. Mat. Pura Appl, **93** (1984), pp. 33-55.

[25] A. Zhedanov, *A method of constructing Krall's polynomials*, J. Comput. Appl. Math, **107** (1999), pp. 1-20.