UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ZARAGOZA

CARRERA DE PSICOLOGÍA

APLICACIÓN DE RECURSOS SEMIÓTICOS PARA LA COMPRENSIÓN DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN PSICOLOGÍA

PRESENTA:

RAÚL RUIZ ROCHA

JURADO DE EXAMEN

DIRECTOR: DR. EDUARDO ALEJANDRO ESCOTTO CÓRDOVA

COMITÉ: DR. JOSÉ GABRIEL SÁNCHEZ RUIZ

DRA. ANA MARÍA BALTAZAR RAMOS

MTRO. JOSÉ SÁNCHEZ BARRERA

DRA. GABRIELA ORDAZ VILLEGAS

CIUDAD DE MÉXICO AGOSTO 2019

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, por su apoyo incondicional en mi vida personal, académica y profesional. Este solo es un paso de muchos más.

Al Dr. Eduardo Alejandro Escotto Córdova, por todos los conocimientos que me ha compartido sobre la vida y las ciencias.

Al Dr. José Gabriel Sánchez Ruiz y a la Dra. Ana María Baltazar Ramos, por sus observaciones para la mejora de este trabajo.

Al Laboratorio de Psicología y Neurociencias, que me permitió acercarme al área de la psicología que más me interesa.

A mis compañeros integrantes del proyecto de investigación, por sus recomendaciones para el desarrollo de los contenidos de este trabajo.

Al proyecto PAPIME PE302915, por el financiamiento de esta tesis.

RAÚL RUIZ ROCHA

ÍNDICE

APLICACIÓN DE RECURSOS SEMIÓTICOS PARA LA COMPRENSIÓN DE MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Raúl Ruiz Rocha

Resumen

Se evaluaron cualitativa y cuantitativamente los recursos multimedia elaborados y planeados con diversos apoyos semióticos para enseñar nociones estadísticas básicas de las medidas de tendencia central. El objetivo es conocer su efecto facilitador en la comprensión de los temas de estadística en diferentes sujetos de diferente escolaridad. El fundamento psicológico está basado en la teoría de la formación de acciones mentales concebido por Galperin. **Método**. La investigación es descriptiva, con una perspectiva mixta: se evaluó la comprensión y opinión sobre los temas de medidas de tendencia central con el método de análisis de discurso y se utilizó el Cuestionario de Evaluación de los Recursos Semióticos (CERS). **Participantes.** Tres grupos conformaron el estudio: el primero se integró por 11 estudiantes universitarios, 5 hombres y 6 mujeres de con edad 18 a 26; el segundo por una pareja de estudiantes femeninas, técnico superior y medio superior, ambas de 18 años; el tercero por 9 participantes, 3 mujeres y 6 hombres, con diferente escolaridad desde secundaria hasta licenciatura y un rango de edad de 13 a 23. **Resultados**. Los recursos semióticos usados permitieron la comprensión de los temas de medidas de tendencia central en los tres grupos. Los principales errores de los participantes fueron: mencionar definiciones y ejemplos inadecuados, confusión de conceptos y aplicar procedimientos y cálculos incorrectos. Además, se recopiló información acerca de la experiencia de los participantes que incluye: opiniones y sugerencias. Los participantes evaluaron positivamente el tipo de recursos semióticos usados. **Discusión**. Usar varios recursos semióticos facilita el aprendizaje de los temas estadísticos, pero no es el único factor. Otro elemento importante que puede explicar el desempeño de los participantes son sus condiciones de desarrollo cultural. **Conclusiones.** Se sugiere utilizar una mayor cantidad de recursos semióticos no formales para la enseñanza de las matemáticas apoyándose en la tecnología.

Palabras clave: Recursos semióticos, medidas de tendencia central, objetos matemáticos, formación de imágenes mentales.

Abstract

Multimedia resources elaborated and planned with various semiotic supports were evaluated qualitatively and quantitatively to teach the basic statistical notions of the central tendency measures, the objective is to know their facilitating effect in the understanding of the subjects of statistics in different subjects of different schooling. The psychological foundation is based on the theory of the formation of mental actions conceived by Galperin. **Method.** A descriptive investigation was carried out, with a mixed perspective: comprehension and opinion on the subjects of measures of central tendency were evaluated with the discourse analysis method and the Semiotic Resources Evaluation Questionnaire (SREQ) was used. **Participants.** Three groups formed the study: the first was integrated by 11 university students, 5 men and 6 women from age 18 to 26; the second by a couple of female students, senior technician and upper middle school, both 18 years old; the third one by 9 participants, 3 women and 6 men, with different schooling from secondary to undergraduate and an age range of 13 to 23. **Results.** The semiotic resources used allowed the understanding of the themes of measures of central tendency in the three groups. The main mistakes of the participants were: to mention inadequate definitions and examples, confusion of concepts and to apply incorrect procedures and calculations. In addition, information was gathered about the participants' experience, which includes: opinions and suggestions. The participants positively evaluated the type of semiotic resources used. **Discussion.** Using several semiotic resources facilitates the learning of statistical topics, but it is not the only factor. Another important element that can explain the performance of the participants is their conditions of cultural development. **Conclusions.** It is suggested to use the greatest amount of non-formal semiotic resources for the teaching of mathematics, relying on technology.

Keywords: Semiotic resources, measures of central tendency, mathematical objects, mental image formation.

CAPÍTULO 1.

1.1 El uso del lenguaje natural para la enseñanza del lenguaje de la estadística como línea de investigación.

El proyecto *El uso del lenguaje natural para la enseñanza de lenguaje formal de la estadística en la carrera de Psicología*, con clave PE302111, auspiciado por la Dirección General de Asuntos del Personal de la Universidad Nacional Autónoma de México (DGAPA-UNAM) es parte de una línea de investigación dentro del campo de la matemática educativa. Dicha línea de investigación se ha ocupado en otros proyectos apoyados por la UNAM de variados aspectos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas. Las primeras etapas de esta línea se enfocaron a justificar la importancia de las matemáticas para las ciencias del comportamiento y para el proceso de socialización. También se estudió el papel de factores neuropsicológicos, afectivos y sociales que contribuyen a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Sánchez y Escotto, 2013). En una etapa posterior se centró en el análisis de los factores psicopedagógicos y en los métodos de enseñanza de los profesores (Escotto y Sánchez, 2014).

En esta última investigación se exploraron los recursos semióticos usados por el profesor en su discurso docente (González, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016). Al respecto se ha reportado que los recursos semióticos del profesor se relacionan con el rendimiento académico (Corona, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016) y que ciertas características en el uso de dichos recursos en el proceso de enseñanza facilitan la comprensión de los conceptos y los contenidos de las clases de estadística (Velázquez, Escotto, Sánchez y Baltazar, 2016). Actualmente se continúan generando propuestas concretas en esta línea (Salinas-Hernández y Trouche, 2018), este trabajo aspira a ser una de ellas, caracterizadas por emplear recursos semióticos en formato multimedia para la enseñanza de la estadística. Se pretende que constituyan un apoyo para cursos introductorios de estadística para los alumnos de nuevo ingreso de la carrera de Psicología de la Facultad de Estudios Superiores Zaragoza (FES-Z) de la UNAM, y como material didáctico de apoyo para cualquiera que deseé introducirse en la estadística[1].

1.2 Matemáticas en México y obstáculos para su aprendizaje.

En México se realiza el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) el cual tiene como objetivo conocer la medida en que los estudiantes logran el dominio de un conjunto de aprendizajes esenciales en diferentes momentos de la educación obligatoria (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2015). En matemáticas el 66.2% de los estudiantes de Educación Media Superior se encuentran en el Nivel I en habilidad matemática. Esto significa que el alumno tiene dificultades para realizar operaciones con fracciones y operaciones que combinen variables representadas con letras, así como establecer y analizar relaciones entre dos variables (Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2017). La prueba PLANEA hace énfasis en el uso del lenguaje matemático en diferentes niveles.

[1]Los materiales multimedia se encuentran disponibles en el siguiente enlace: https://www.zaragoza.unam.mx/psicologia-herramientas-para-el-aprendizaje/. En él se encuentran disponibles las presentaciones de moda, mediana, media, rango, varianza, prueba t e Student y correlación de Pearson, que en conjunto constituyen un curso introductorio de estadística.

El bajo rendimiento en matemáticas, en el nivel medio superior se manifiesta en la reprobación de los estudiantes en materias relacionadas con estadística. En la licenciatura de Psicología de la FES-Z de la UNAM, los índices de reprobación de estadística de la primera generación del nuevo plan de estudios fueron los siguientes: en estadística descriptiva, de un total de 548 alumnos reprobaron 108 (19.7%); y en estadística inferencial reprobaron 215 (29.3%), siendo la materia de más alta reprobación (Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz y Baltazar-Ramos, 2014). Hay evidencia de que el fenómeno de la reprobación de materias relacionadas con las matemáticas no solo se manifiesta en la carrera de Psicología de la FES-Z UNAM, ya que también entre los alumnos de las carreras de Ingeniería Química y Química Farmacéutica Biológica, de la misma facultad, se han observado altos índices de reprobación en materias como: Matemáticas I (75%) y Fisicoquímica I (44%) (Martínez, Vivaldo, Navarro, González y Jerónimo, 1998). En un estudio más reciente en la carrera de Química Farmacéutica Biológica una de las materias con mayor índice de reprobación es Fisicoquímica II y las materias con bajo rendimiento académico son Bioestadística, Fisicoquímica I y II, y Matemáticas I y II (Cruz, Aguilar, García y González, 2009).

Un problema en la enseñanza de la estadística y de las matemáticas en general se deriva de la formalidad en su lenguaje (Puga, Rodríguez y Toledo, 2016). Esta formalidad no sigue las etapas de aprendizaje recomendables que abarcan desde la parte instruccional (externo) hasta la asimilación de los contenidos de los objetos matemáticos por parte del aprendiz (interno). Lo que es un factor, más no el único, que influye en los altos niveles de reprobación en materias relacionadas con matemáticas en diferentes niveles educativos. Palarea y Socas (1994) identificaron tres obstáculos o dificultades en el aprendizaje del álgebra:

a) **Obstáculos cognitivos:** son identificados como conocimientos que han sido satisfactorios para la resolución de ciertos problemas durante un tiempo, se fijan en la mente y, posteriormente, resultan inadecuados y de difícil adaptación al tenerse que enfrentar el alumno a problemas diferentes.
b) **Dificultades en el álgebra debidos a errores en la aritmética:** son problemas que persiste y que no se corrigen en el aprendizaje de la aritmética (fracciones, paréntesis, potencias).
c) **Dificultades debidas a las características del lenguaje algebraico:** en el lenguaje algebraico no se especifican los significados precisos de los signos que conforman las fórmulas y tampoco las relaciones entre ellos.

Cabe destacar que, en otros trabajos, también centrados en las dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales del álgebra, se ha aportado evidencia acerca de las implicaciones de estas dificultades en el aprendizaje de otros temas matemáticos, por ejemplo, el cálculo (Neira, 2013).

1.3 Actividad matemática y semiótica.

Las matemáticas son una práctica histórica-cultural porque es resultado de la actividad de grupos culturales concretos, ubicados en una sociedad y en un periodo de tiempo determinado (Blanco, 2011), con un carácter semiótico, mediada por signos y significados (Bartolini & Mariotti, 2008). La semiótica es la ciencia que estudia los sistemas de signos en general. Tradicionalmente se entiende por signo todo aquello que representa a otra cosa (Beuchot, 2004). Un acercamiento semiótico permite entender al álgebra como un sistema de representación que se ocupa del significado de los objetos matemáticos. En el álgebra los signos son instrumentos específicos para la actividad matemática de los estudiantes (Palarea, 1999).

1.3.1 Objetos matemáticos.

Ahora bien, por medio de la aplicación de diferentes signos es posible representar un objeto matemático (OM) (D'Amore, 2006), la forma en que se representa el OM es esencial para su aprendizaje ya que los signos son la entidad mediante la cual el aprendiz asimila las nociones matemáticas.

Los OM son un conjunto de relaciones que surgen de la caracterización del mundo físico y sensible. Los OM cumplen la función de organizar e interpretar el contexto, tienen una existencia real pero no material. Los OM pueden ser cualidades que se abstraen para interpretar el contexto, por ejemplo, la representación del mundo físico por medio de *figuras geométricas*. En otros casos, el OM pueden ser una acción o proceso que organiza el contexto, por ejemplo, los *conjuntos* para clasificar las características de una población. La comprensión de un objeto matemático es la percepción de la función que representa el objeto y la expresión de esta funcionalidad en un contexto. El aprendizaje de los objetos matemáticos parte de sus representaciones, que permiten su expresión y deben ser el medio para observar la función que representa el objeto. El objeto se debe de identificar con sus representaciones, con la actividad que se realiza con ellas y con su uso en situaciones diversas (Pecharromán, 2013). Los OM son indicadores de los elementos necesarios para la representación de conceptos matemáticos, como las medidas de tendencia central, que son acciones o procesos que resumen y describen las características de grupos o poblaciones.

Se pueden agrupar los objetos matemáticos en categorías o tipo de entidades, basándose en los diversos papeles o funciones desempeñadas por estas entidades en el trabajo matemático: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, propiedades y argumentaciones, son entidades primarias que forman la base de entidades secundarias complejas. A continuación, se indica la clasificación de los OM y los elementos de cada categoría, se destaca que estos elementos se incluyeron en los materiales didácticos en formato multimedia que se elaboraron en este trabajo:

1. **Lenguaje**: Términos, expresiones, notaciones, así como gráficos. En las presentaciones viene dado de forma escrita y oral.
2. **Situaciones**: Problemas, aplicaciones no formales o formales de las matemáticas, ejercicios; son tareas que induce la actividad matemática.
3. **Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas:** Operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos.
4. **Conceptos**: Dados mediante definiciones o descripciones (adición, división, redondeo, jerarquía de las operaciones, etc.)
5. **Propiedades o atributos de los objetos**: Suelen darse como enunciados y proposiciones.
6. **Argumentaciones:** Se usan para validar y explicar las proposiciones sean deductivas o inductivas (Godino, 2002).

Las matemáticas se distinguen de otras áreas de conocimiento en que el único acceso a ellas es de naturaleza semiótica, vía la representación, porque los objetos matemáticos no son accesibles perceptiva o instrumentalmente. Cada representación no presenta las mismas propiedades o características del objeto y recíprocamente, ninguna representación es completa y adecuada al objeto.

Toda representación comporta dos dimensiones semánticas: la del contenido y la del objeto que representa, que es independiente del registro que se moviliza. El lenguaje simbólico implica una traducción semántica y sintáctica directa del lenguaje natural al formal y viceversa. Se ha planteado que lo más importante para la enseñanza de las matemáticas es lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos, propiciar la articulación de los registros, trabajar en su conversión y favorecer el tránsito entre unas y otras, reconocer el mismo objeto en ellas (Neira, 2013).

1.3.2 Lenguaje y aprendizaje.

El lenguaje juega un papel fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, y de cualquier disciplina, porque propicia la construcción de significados compartidos, permite representar lingüísticamente el conocimiento construido, y es el principal medio de comunicación entre docentes y alumnos (Camargo y Hederich, 2010). El lenguaje se entiende como "la capacidad de significar, la función de atribuir significados a signos que, al duplicar al mundo, nos permiten operar con un mundo ausente y regular nuestra actividad mediante él" (Escotto, 2007, p.15). El lenguaje tiene una doble función: representativa y comunicativa. La primera es la función de representar nuestros propios conocimientos y dar sentido a nuestra experiencia. La segunda función consiste en compartir dichos conocimientos y experiencias con otros (Coll y Onrubia, 2001).

El lenguaje se posiciona como un recurso semiótico en el contexto de aprendizaje de las matemáticas, pero su uso no agota la variedad de recursos semióticos que van desde la interacción entre docentes y alumnos, la comunicación no verbal y el uso de la tecnología. Algunas investigaciones han reportado que el uso de medios tecnológicos, como apoyo o mediador, facilita la compresión y aplicación de los conceptos matemáticos, siempre y cuando, se haga en un contexto de aprendizaje y guiados por un profesor (Aragón, Castro, Gómez y González, 2009; Castro y Pardo, 2005; Gamboa, 2007).

1.3.3 Recursos semióticos.

El rango de recursos semióticos utilizados en la enseñanza de las matemáticas se amplía desde la consideración del lenguaje oral, gestual y escrito hacia la inclusión de dibujos, fotos, mapas, tablas, gráficos, entre otros (Manghi, 2010; Salinas-Hernández y Trouche, 2018). Los recursos semióticos son diversos signos (grafismos, gestos, objetos, dibujos, gráficas, colores, palabras orales, etc.) que se utilizan para representar algo. Se caracterizan porque pueden, o no, regirse por un conjunto de reglas para representar diferentes significados. (Arzarello, Paola, Ornella & Sabena, 2008). Por su parte, González et al. (2016) menciona tres categorías en las que se pueden agrupar los diferentes recursos semióticos:

- **Recursos semióticos formales**: son palabras u oraciones que hacen referencia al lenguaje matemático conformado por números, fórmulas y operaciones aritméticas.
- **Recursos semióticos no formales**: son signos basados en el lenguaje natural que no involucran lenguaje matemático; son utilizados de manera cotidiana en la comunicación, pueden ser ejemplos, palabras y frases coloquiales que complementan las explicaciones formales.

- **Recursos semióticos diversos**: son signos que acompañan a los significados del discurso verbal, como tablas, gráficas, dibujos, esquemas u objetos para representar o complementar el componente formal de la enseñanza.

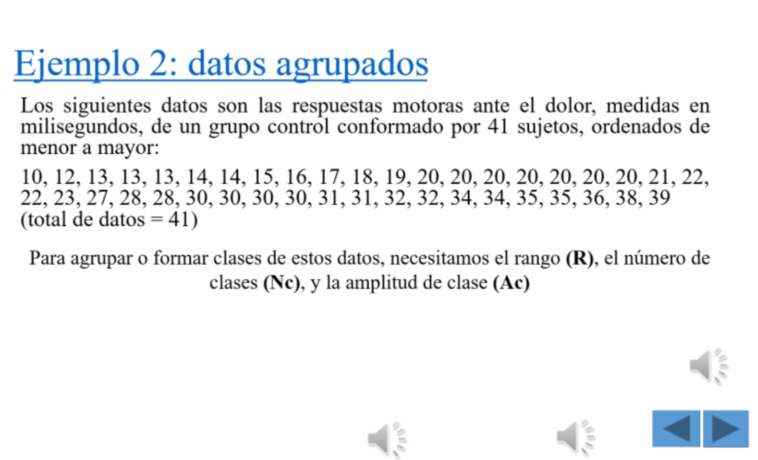
1.3.4 Funciones de los recursos semióticos.

Cada recurso semiótico cumple diferentes funciones de acuerdo a su naturaleza, nos basamos en la clasificación de Gonzalez et al. (2016) para poder explicar la función de los recursos semióticos formales, no formales y diversos usados en el curso introductorio de estadística. Los recursos formales incluyen números, fórmulas y operaciones aritméticas; los recursos semióticos no formales incluyen ejemplos, palabras y frases coloquiales que complementan el lenguaje formal; los recursos semióticos diversos incluyen tablas, gráficas, dibujos, esquemas y objetos. Todos los tipos de recursos semióticos están presentes en diferentes momentos de las presentaciones del curso.

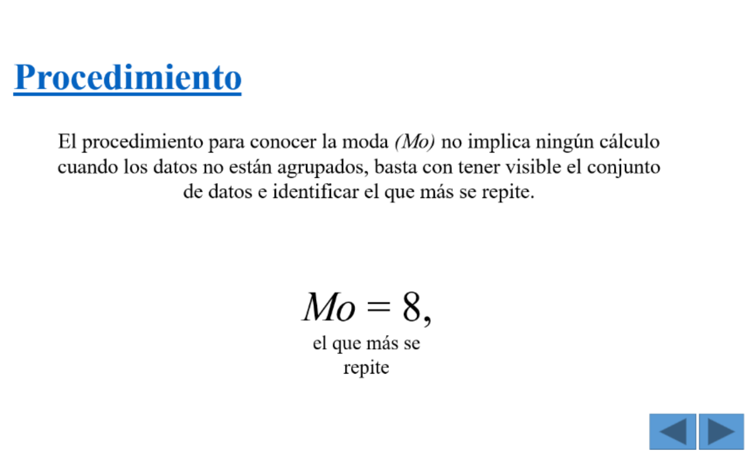
1.3.4.1 Recursos semióticos formales.

Los recursos semióticos formales cumplen la función de conformar el lenguaje matemático. Las funciones de los números como recurso semiótico formal son las siguientes:

- Proporcionar el conjunto de datos que conforman los ejemplos o problemas.



- Representar valores. En los ejemplos los números representan el valor de moda, media, ansiedad, número de clases, límites reales de clase superiores e inferiores.



El resultado es el puntaje promedio ($\bar{x}$) de memoria de trabajo. Ahora el investigador puede comparar la media previa a la estimulación cognitiva versus la media tras la intervención y así comprobar si hubo cambios significativos.

$\bar{x} = \underline{6.83 = 7}$

Ans1= 22.6, Ans2=25.8 y *Ans3=27.9*
Como en todos los casos el decimal es >5 (mayor que cinco) le sumamos 1 al número entero:
Ans1= 23, Ans2=26 y *Ans3=28*

- Formar clases útiles para la agrupación de los datos, es un paso necesario para el cálculo de la moda y mediana. En el ejemplo se señalan los miembros de la clase con rectángulos y números rojos.

Los datos obtenidos de mediciones se pueden agrupar, por ejemplo, un grupo de edades que se encuentran entre 20 y 25 años, las que están entre 26 y 30, 31 y 35, etc. Un grupo se llama técnicamente una clase.

Lo primero que se hace es ordenar de menor a mayor todos los datos.

La fórmulas para calcular los **límites reales de clase (Lri y Lrs)** para la Clase 1, son las siguientes:

Lri (límite real inferior)= 10 - 0.5=**9.5**

Lrs (límite real superior)= 14 + 0.5=**14.5**

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14	**9.5**	**14.5**	
2	15	19			
3	20	24			
4	25	29			
5	30	34			
6	35	39			

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

Y así sucesivamente para las clases posteriores…

Lri (límite real inferior)= Li-0.5

Lrs (límite real superior)= Ls+0.5

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*F*
1	10	14	9.5	14.5	
2	15	19	14.5	19.5	
3	20	24	19.5	24.5	
4	25	29	24.5	29.5	
5	30	34	29.5	34.5	
6	35	39	34.5	39.5	

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

La **frecuencia de clase (F)** son el número de datos que quedan incluidos en cada clase.

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*F*
1	10	14	9.5	14.5	7
2	15	19	14.5	19.5	5
3	20	24	19.5	24.5	11
4	25	29	24.5	29.5	3
5	30	34	29.5	34.5	10
6	35	39	34.5	39.5	5

7 **5** **11**

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

3 **10** **5**

- Sustituir los signos por valores en las fórmulas, en el ejemplo los datos se extraen de la tabla y se ubican dentro de la fórmula.

Paso 1: Ubicar los datos en la tabla y sustituirlos en la fórmula

Clase	Límites de clase		Límites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14	9.5	14.5	7
2	15	19	14.5	19.5	5
3	20	24	19.5	24.5	11
4	25	29	24.5	29.5	3
5	30	34	29.5	34.5	10
6	35	39	34.5	39.5	5

$$\boxed{Mo = Lri_{Mo} + \mathrm{Ac}\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)}$$

Ac es la amplitud de clase. Ac = 5

Clase	Límites de clase		Límites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14	9.5	14.5	7
2	15	19	14.5	19.5	**5**
3	20	24	**19.5**	24.5	**11**
4	25	29	24.5	29.5	**3**
5	30	34	29.5	34.5	10
6	35	39	34.5	39.5	5

$$Mo = 19.5 + 5\left(\frac{6}{6+8}\right)$$

Las fórmulas, como recursos semióticos formales, determinan las relaciones entre las variables que intervienen en un objeto matemático y cumple las siguientes funciones:

- Relacionar las variables de un objeto matemático que intervienen en los ejemplos o problemas. En la tabla del ejemplo se muestran los componentes que incluye la fórmula como el límite real inferior de clase, la amplitud de clase modal, la resta de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente y siguiente.

Moda para datos agrupados

$$Mo = Lri_{Mo} + Ac\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Donde:	Lenguaje natural	Expresión formal
Mo	Valor más observado en la muestra	Moda
Lri_{Mo}	El primer valor real de la clase con mayor frecuencia	Límite real inferior de la clase modal
Ac	Elementos dentro de la clase	Amplitud de la clase modal
d_1	Diferencia (sin considerar el signo) entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente	Resta de la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente
d_2	Diferencia (sin considerar el signo) entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.	Resta de la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente

- Establecer la jerarquía de las operaciones aritméticas, se aplican de manera generalizada en el álgebra.

Orden de operaciones:
1. Se realizan las operaciones dentro de los signos de agrupación (paréntesis, corchetes y llaves).
2. Se realizan las potencias y raíces.
3. Se realizan las multiplicaciones y divisiones.
4. Se realizan las sumas y las restas.

(Vitual, 2017)

- Cada signo de la fórmula determina el valor que interviene en el cálculo. En los ejemplos el rango, número y amplitud de clase y el límite real inferior y superior son valores diferentes que intervienen en el cálculo.

Ejemplo 2: datos agrupados

Los siguientes datos son las respuestas motoras ante el dolor, medidas en milisegundos, de un grupo control conformado por 41 sujetos, ordenados de menor a mayor:

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39
(total de datos = 41)

Para agrupar o formar clases de estos datos, necesitamos el rango **(R)**, el número de clases **(Nc)**, y la amplitud de clase **(Ac)**

Rango:
R= Xmax – Xmin
R= 39 – 10= 29
R= 29

Número de clases:
Nc= $\sqrt{n}$ (total de datos)
Nc= $\sqrt{41}$= 6.40
Nc= 6

Amplitud de clase:
Ac= $\frac{R}{Nc}$
Ac= $\frac{29}{6}$= 4.83
Ac= 5

La fórmulas para calcular los **límites reales de clase (Lri y Lrs)** para la Clase 1, son las siguientes:
Lri (límite real inferior)= Li (límite inferior) - 0.5
Lrs (límite real superior)= Ls (límite superior) + 0.5

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14			
2	15	19			
3	20	24			
4	25	29			
5	30	34			
6	35	39			

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

- Indican el procedimiento para obtener el resultado o cociente, en el ejemplo la fórmula se señala con un rectángulo rojo, la fórmula también indica que valores de la tabla se tienen que considerar para el cálculo. El procedimiento se desglosa en seis pasos.

Paso 1: Ubicar los datos en la tabla y sustituirlos en la fórmula

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14	9.5	14.5	7
2	15	19	14.5	19.5	5
3	20	24	19.5	24.5	11
4	25	29	24.5	29.5	3
5	30	34	29.5	34.5	10
6	35	39	34.5	39.5	5

$$\boxed{Me = Lri_M + \frac{Ac}{f_M}\left(\frac{n+1}{2} - fa_M\right)}$$

Paso 2: Sumar 41+1=42 y el resultado dividirlo entre dos: 42÷2=21

$\frac{41+1}{2}$=21

$$Me = 19.5 + \frac{5}{11}\left(\frac{41+1}{2} - 12\right)$$

Paso 3: Restar 21-12=9

$$Me = 19.5 + \frac{5}{11}\,(9)$$

Paso 4: Dividir $5 \div 11 = 0.5$

$$Me = 19.5 + 0.5\,(9)$$

Paso 5: Multiplicar 0.5 x 9 = 4.5

$$Me = 19.5 + 4.5$$

Paso 6: Sumar 19.5+4.5= 24

$$Me = 24\ milisegundos$$

- Ubicar los datos en el problema.

Ubiquemos los datos en la fórmula…

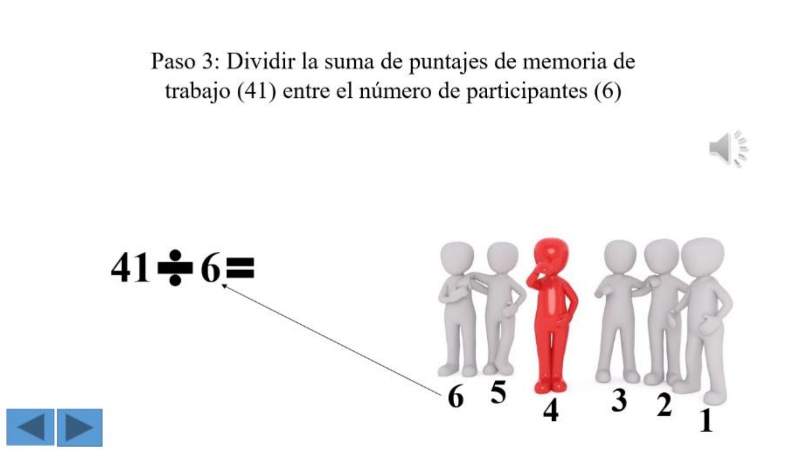
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \quad \Longrightarrow \quad \overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$$

Donde:

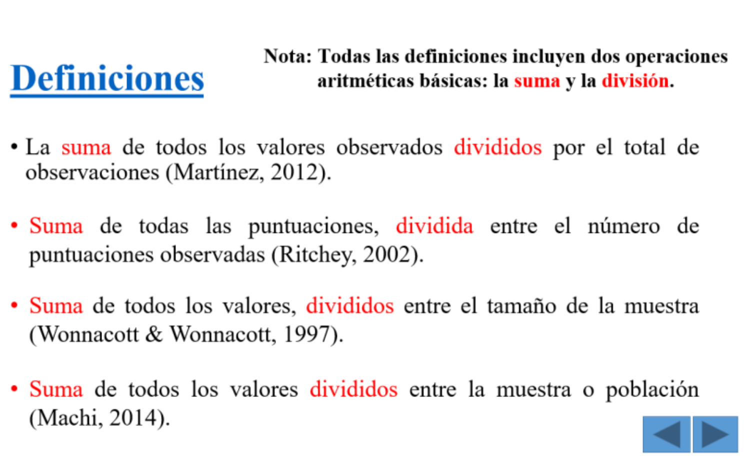
- $\overline{x}$ = Media de memoria de trabajo= 6.83 = 7
- Xi = Puntajes de memoria trabajo= 7, 6, 9, 8, 5, 6
- $\sum$ = Sumatoria de Xi (suma de puntajes) = 41
- N ó n = Número de participantes = 6

Las operaciones aritméticas son los componentes del cálculo y tienen diferentes funciones, por ejemplo:

- Relacionar las variables que intervienen en el problema, en el ejemplo se relaciona memoria de trabajo (41) con el número de participantes (6) mediante una operación aritmética como la división.

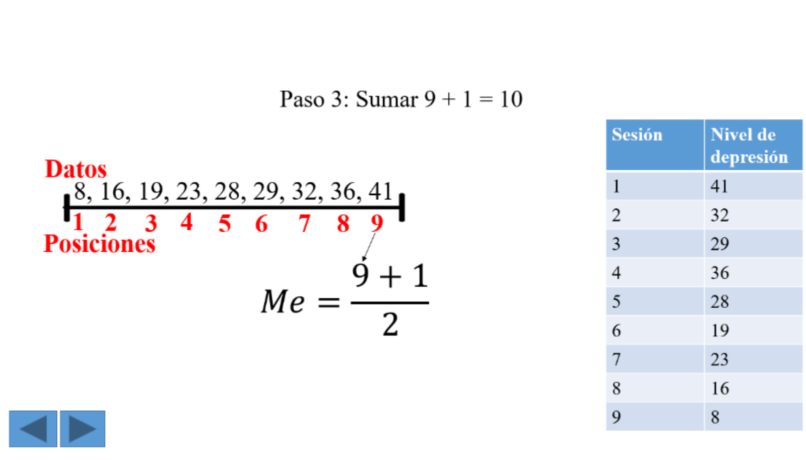


- Forman parte de la definición de los conceptos, en el ejemplo la suma y la división conforman la definición de media aritmética.

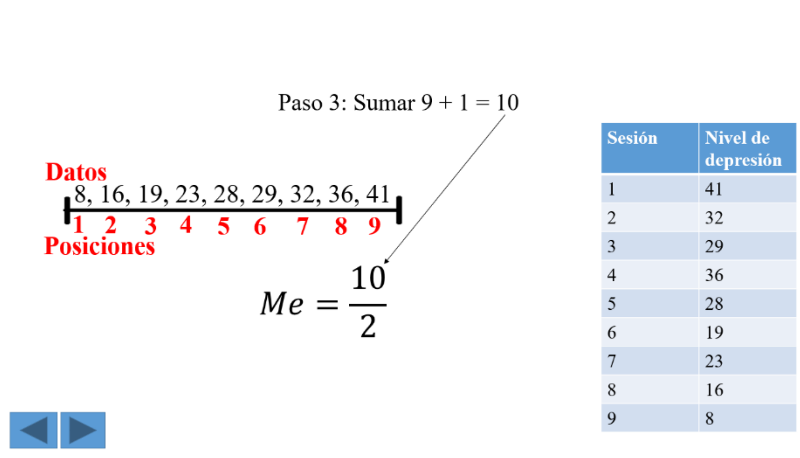


- En el caso de la adición tiene la función de sumar las mediciones o cualidades que intervienen en el problema.

- Simplifican la fórmula. En el ejemplo mediante la suma o adición se reducen los valores que intervienen en la fórmula.

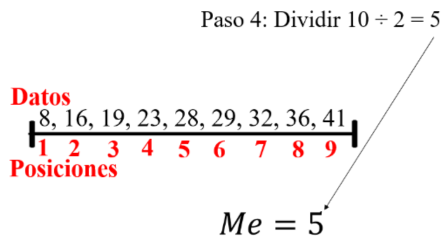


Sesión	Nivel de depresión
1	41
2	32
3	29
4	36
5	28
6	19
7	23
8	16
9	8



Sesión	Nivel de depresión
1	41
2	32
3	29
4	36
5	28
6	19
7	23
8	16
9	8

- Generan un resultado o cociente. Tras la aplicación de una división se obtiene el cociente de la mediana.



Sesión	Nivel de depresión
1	41
2	32
3	29
4	36
5	28
6	19
7	23
8	16
9	8

1.3.4.2 Recursos semióticos no formales.

Los recursos semióticos no formales son signos basados en el lenguaje natural, como ejemplos y frases, su función principal es complementar las explicaciones formales. Los ejemplos, como recurso semiótico no formal, tienen las siguientes funciones:

- Señala el atributo que se debe identificar. En el ejemplo lo que se resalta es el color rojo, que a su vez representa el valor de la moda.

Moda en el lenguaje natural

Cuando algo es "la moda" es lo que más frecuentemente se ve (Bologna, 2011).

Por ejemplo, en la imagen lo que más frecuentemente se ve es el color rojo, por tanto es la moda *(Mo)*

***Mo* = Rojo**

Ejemplo 1

En la cooperativa de una escuela primaria se manejan los siguientes precios por producto

Producto	Precio
Refresco	10
Papas	8
Tortas	10
Palomitas	7
Tacos	10

Un terapeuta realiza un registro de los niveles de depresión en cada sesión con su paciente. Desea saber cual es la mediana en los niveles de depresión de su paciente

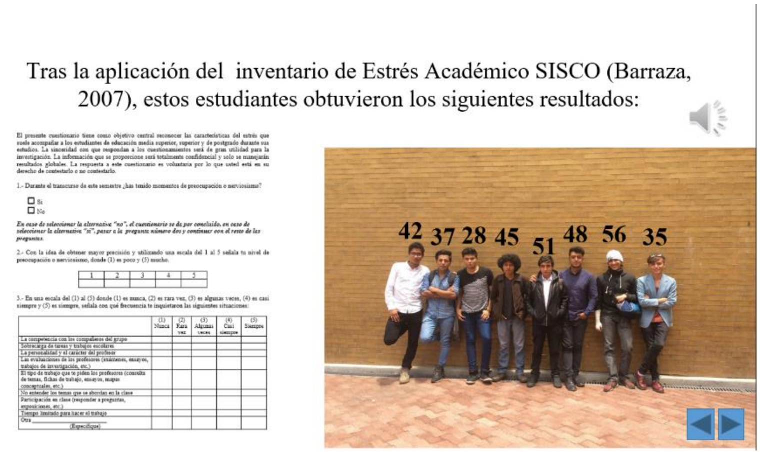
Sesión	Nivel de depresión
1	41
2	32
3	29
4	36
5	28
6	19
7	23
8	16
9	8

Ejemplo 3

Los siguientes datos son las respuestas motoras ante el dolor, medidas en milisegundos, de un grupo control conformado por 41 sujetos, ordenados de menor a mayor:

10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

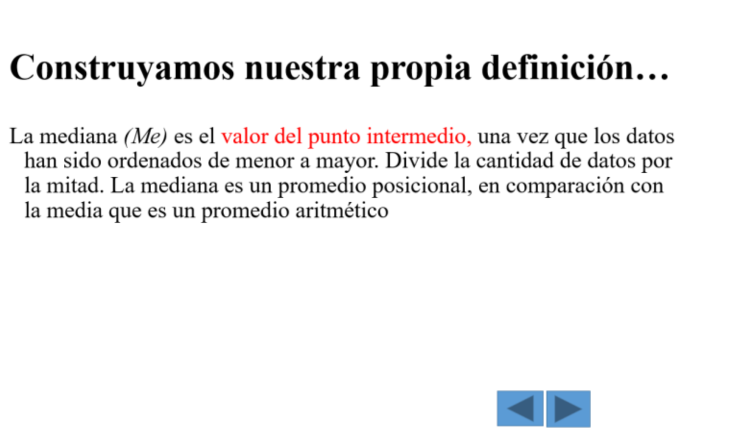
- Muestran los campos de aplicación del concepto. Los ejemplos se aplican a variables como precio, depresión, respuestas motoras ante el dolor, estrés, entre otros.



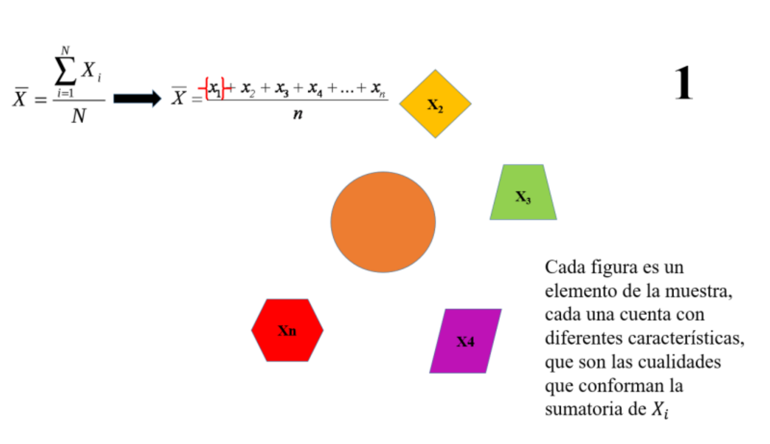
El uso de las frases, como recurso semiótico no formal, es muy diverso ya que se aplica en todos los momentos del tema, desde la introducción, pasando por la definición y hasta el cálculo matemático. Las funciones de las frases son las siguientes:

- Conforman la introducción al tema. En el ejemplo el primer párrafo es la introducción al tema de moda.

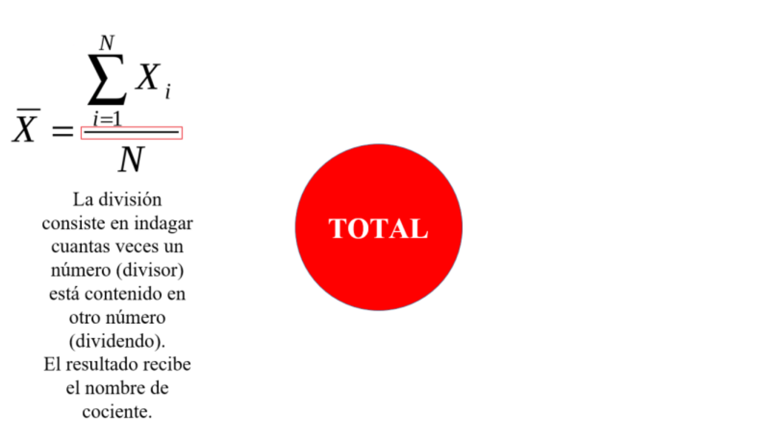
- Agrupa las definiciones en un párrafo.



- Relaciona significados. En el ejemplo la frase relaciona las figuras con la formula desglosada.

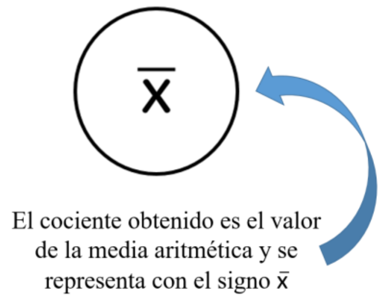


- Define las operaciones aritméticas que se tiene que realizar.



- Detallan el significado de los signos. En el ejemplo la frase de la parte inferior de la imagen especifica la representación de la media aritmética

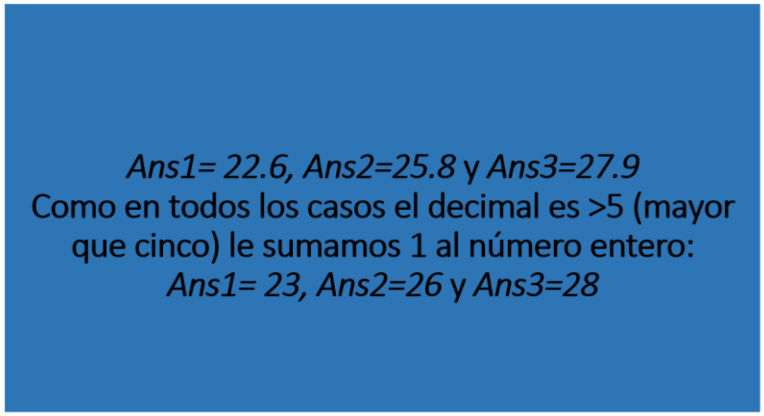
$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$



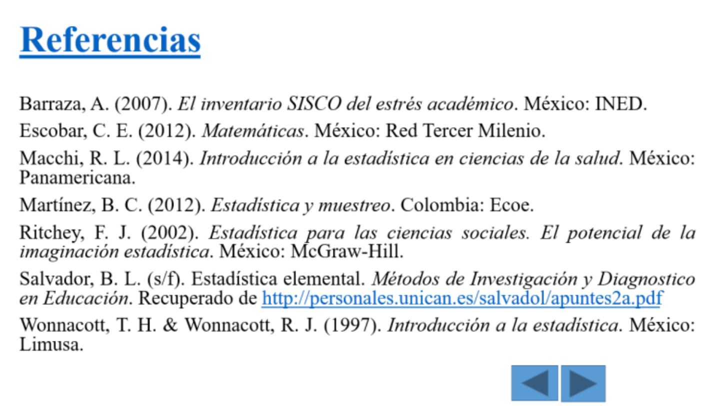
- Menciona los elementos adicionales que se deben de considerar para el cálculo aunque estos no se incluyan en la fórmula.

Debemos tener en cuenta el *redondeo* y aplicarlos a los decimales de los resultados de cualquier cálculo

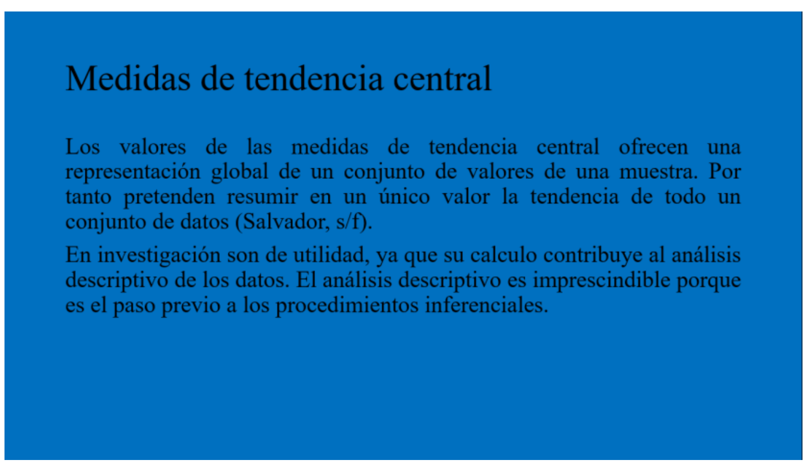
- Muestran la aplicación de los conceptos relacionados como el redondeo.



- Cita las referencias bibliográficas que conforman el contenido del curso.



- Plasma la utilidad de los conceptos.



1.3.4.3 Recursos semióticos diversos.

Los recursos semióticos diversos son signos que especifican los significados del discurso formal, a lo largo del curso introductorio de estadística se utilizan colores, tablas, dibujos, esquemas, objetos y figuras para representar los conceptos de medidas de tendencia central, complementan a los recursos semióticos formales y no formales, su uso es simultáneo y cumplen diferentes funciones.

La principal utilidad de las tablas, como recurso semiótico diverso, es la organización de la información y se centra en diferentes aspectos del objeto matemático, por ejemplo:

- Especificar los componentes de las fórmulas. En los ejemplos cada tabla detalla los componentes de la fórmula de la mediana y moda.

Moda para datos agrupados

$$Mo = Lri_{Mo} + Ac\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Donde:	Lenguaje natural	Expresión formal
Mo	Valor más observado en la muestra	Moda
Lri_{Mo}	El primer valor real de la clase con mayor frecuencia	Límite real inferior de la clase modal
Ac	Elementos dentro de la clase	Amplitud de la clase modal
d_1	Diferencia (sin considerar el signo) entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente	Resta de la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase precedente
d_2	Diferencia (sin considerar el signo) entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente.	Resta de la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase siguiente

$$Me = Lri_M + \frac{Ac}{f_M}\left(\frac{n+1}{2} - fa_M\right)$$

Donde:	Lenguaje natural	Expresión formal
Me	Punto central, valor central	Mediana
$\frac{n+1}{2}$	La expresión indica que al tamaño de la muestra (n) se le suma 1 y posteriormente se divide entre 2.	Tamaño de la muestra
Lri_M	Se obtiene restando 0.5 al limite inferior de la clase mediana	Límite real inferior de la clase mediana
Ac	Número de unidades que abarca el intervalo	Amplitud de clase mediana
f_M	Número de elementos dentro de la clase mediana	Frecuencia de la clase mediana
fa_M	Número de elementos acumulados en las clases anteriores a la clase mediana	Frecuencia acumulada de la clase que se encuentra antes de la clase mediana

- Organizar los datos que intervienen en el problema.

Un terapeuta realiza un registro de los niveles de depresión en cada sesión con su paciente. Desea saber cual es la mediana en los niveles de depresión de su paciente

Sesión	Nivel de depresión
1	41
2	32
3	29
4	36
5	28
6	19
7	23
8	16
9	8

- Contienen los datos que sustituyen los signos en la fórmula.

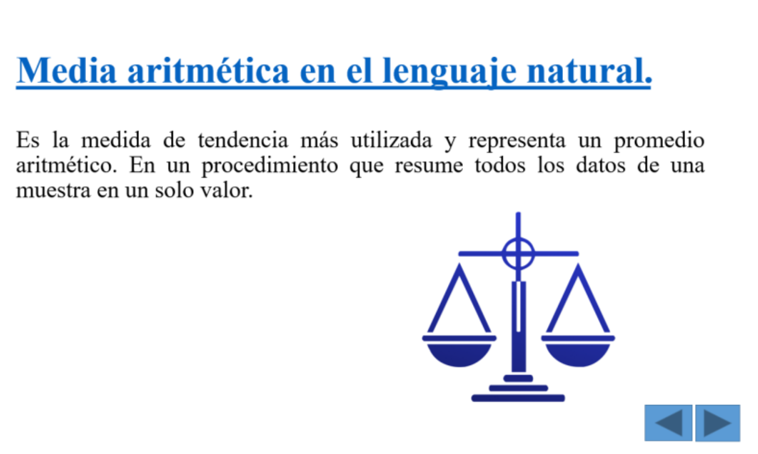
Paso 1: Ubicar los datos en la tabla y sustituirlos en la fórmula

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14	9.5	14.5	7
2	15	19	14.5	19.5	5
3	20	24	**19.5**	24.5	11
4	25	29	24.5	29.5	3
5	30	34	29.5	34.5	10
6	35	39	34.5	39.5	5

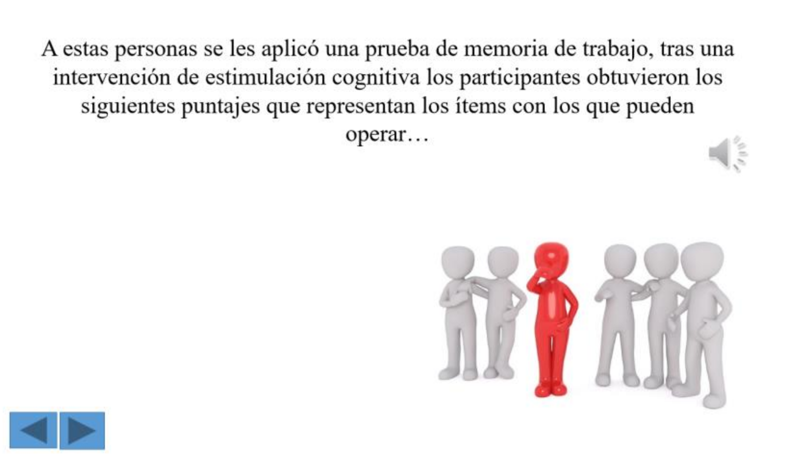
$$Me = Lri_M + \frac{Ac}{f_M}\left(\frac{n+1}{2} - fa_M\right)$$

La función primordial de los dibujos es la representación de variables, por ejemplo:

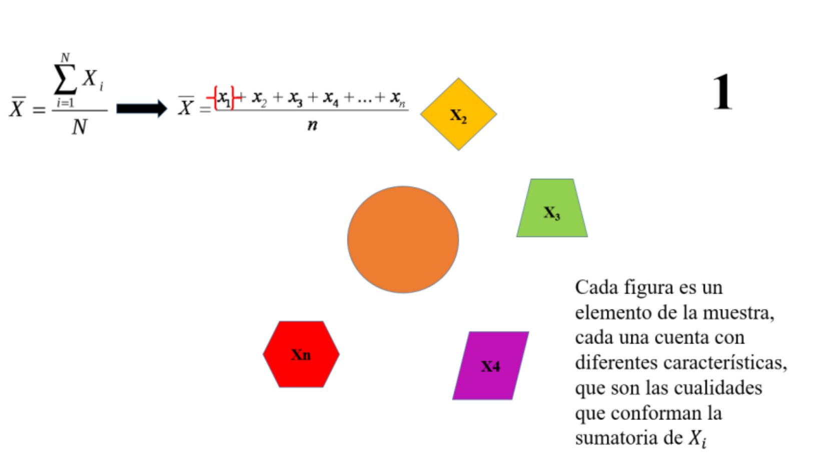
- Representan gráficamente un la definición, explicaciones y ejemplos.



- Representan gráficamente los sujetos que intervienen en el problema.

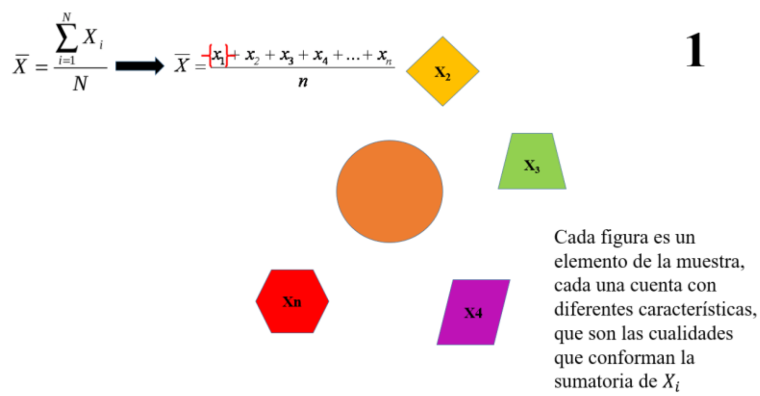


Los esquemas relacionan el significado de la fórmula con las figuras en movimiento.

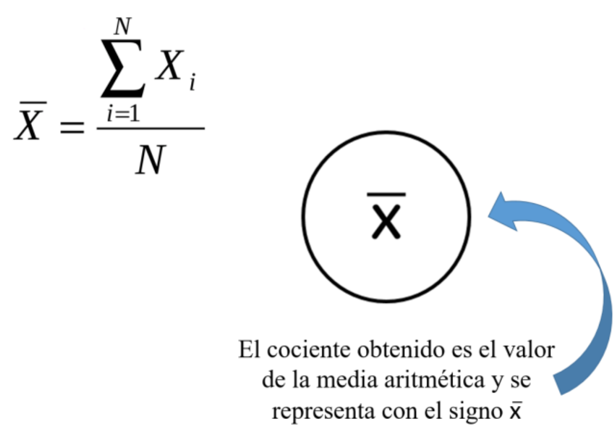


Las figuras son un recurso semiótico de usos muy diversos, por ejemplo:

- Las figuras representan gráficamente las fórmulas. En el ejemplo las figuras representan las características que se suman para promediar, en este caso en número de lados por figura.



- Representan gráficamente los conceptos. En el ejemplo el círculo representa la media aritmética.



La función principal del color es resaltar o señalar aspectos preponderantes dentro de los temas de medidas de tendencia central, por ejemplo:

- Resalta la idea principal en las definiciones.

Definiciones de mediana

- Es el valor de la variable que no supera a no más de la mitad de las observaciones (Martínez, 2012).
- Es el número que se encuentra en el centro o punto medio (valor central), una vez que los datos han sido ordenados de manera creciente (García, 2012).
- El valor de la variable que deja por debajo la mitad del total de observaciones. La mediana deja la misma cantidad de casos por debajo y por encima de ella (Bologna, 2011).

- Resalta el valor que se debe considerar para el cálculo, dentro de la tabla hay valores resaltados en color rojo, mismos que conforman el cálculo.

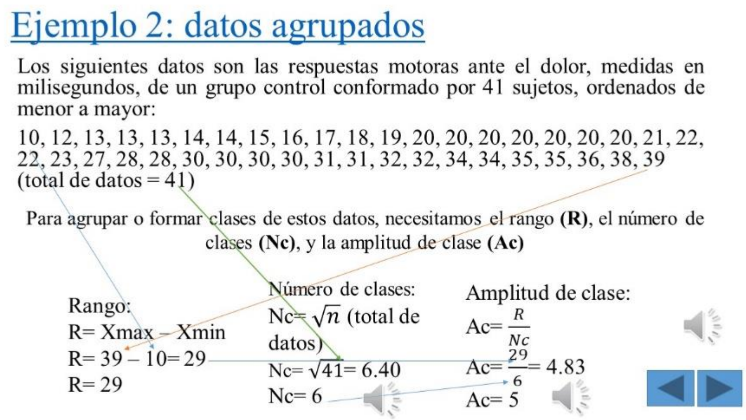
La amplitud de clase define el ***límite inferior (Li)*** y el ***límite superior (Ls)*** de cada clase, se debe considerar la serie numérica seguida en vez de el número de datos. Ac=5 → **20 a 24**

Clase	Limites de clase		Limites reales de clase		Frecuencia
	Li	*Ls*	*Lri*	*Lrs*	*f*
1	10	14			
2	15	19			
3	**20**	**24**			
4					
5					
6					

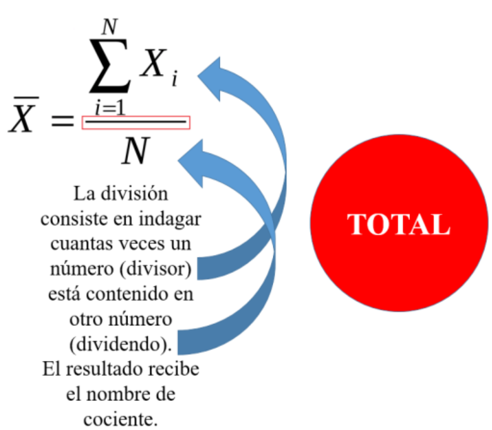
10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 27, 28, 28, 30, 30, 30, 30, 31, 31, 32, 32, 34, 34, 35, 35, 36, 38, 39

Los objetos, en el caso particular de las flechas, cumplen la función de señalar o especificar aspectos importantes dentro de los temas de medidas de tendencia central, por ejemplo:

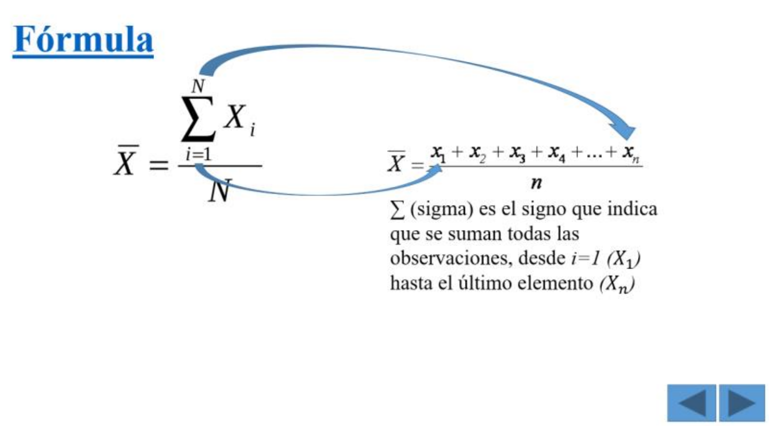
- Señalan los datos o valores necesarios para el cálculo del rango, número y amplitud de clase.



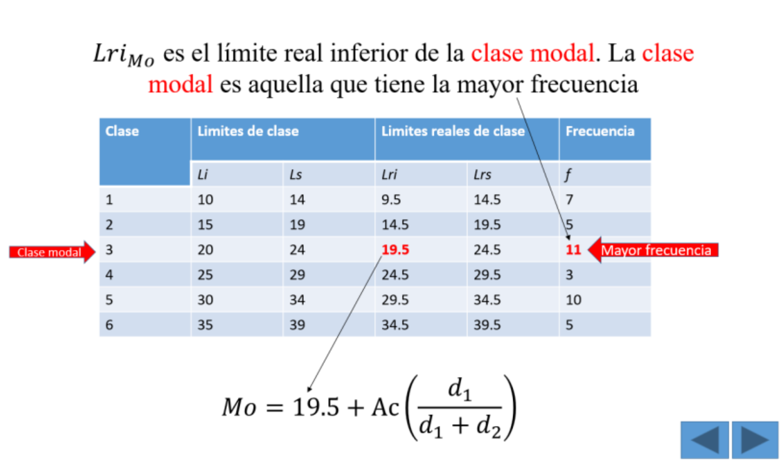
- Señalan las partes de la fórmula que intervienen en la operación.



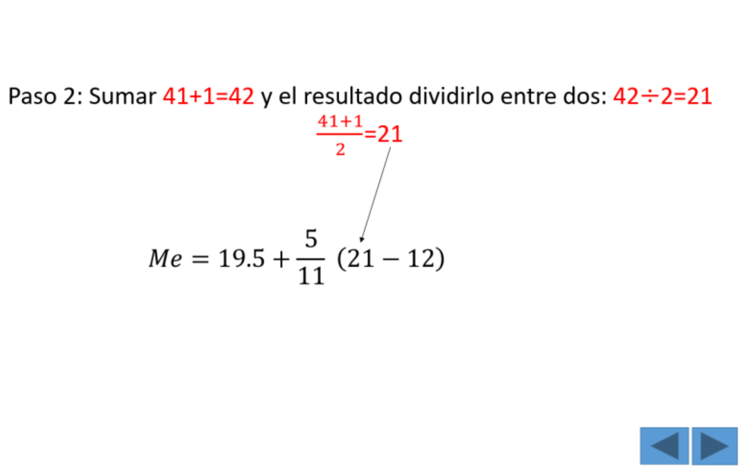
- Señalan el intervalo de datos a considerar a considerar en la fórmula.



- Señalan la clase modal y la mayor frecuencia dentro de la tabla y a su vez el valor que se sustituye por el signo dentro de la fórmula.



- Señala el valor resultante, dentro de la fórmula, tras aplicar la suma y la división.



3.6 Etapas de formación de imágenes mentales.

El aprendizaje humano es un proceso que transcurre a partir de la formación de imágenes mentales, es decir, de la capacidad de realizar mentalmente una acción objetiva. La interacción del sujeto con el objeto forma representaciones que son acciones mentales para la formación de conceptos. Galperin (citado en Escotto-Córdova, Sánchez-Ruiz y

Baltazar-Ramos, 2014) sistematiza la teoría sobre la formación de acciones mentales con base en las tesis de L. S. Vigotski sobre la ley genética de desarrollo cultural (LGDC) y la zona de desarrollo próximo (ZDP). La LGDC postula que el desarrollo cultural de las funciones psicológicas aparece primero en el plano social (externo) y después en el plano psicológico (interno), es decir, al principio el desarrollo es mediado por otros y después autorregulado por el sujeto. La tesis de la ZDP se refiere a la distancia que existe entre lo que un sujeto puede hacer por sí solo y lo que puede llegar a hacer con ayuda de otros. El modelo de formación de acciones mentales se conforma de cuatro etapas:

1. **La base orientadora de la acción (BOA)**: se refiere al tipo de orientación conceptual que se le da al sujeto, o genera el mismo sujeto, en torno al qué del nuevo aprendizaje. La BOA significa que al sujeto se le explica que va a aprender, cuál es el objetivo y en qué condiciones de aprendizaje estará.
2. **La etapa de formación del aspecto material de la acción (FAMA)**: hace referencia a que toda acción se expresa inicialmente en forma externa, material, y que esta forma es la condición de su asimilación, en esta etapa el aprendizaje pasa por operar directamente con las cosas o su representación material. El paso por esta etapa se divide en dos procesos, primero se generaliza al destacar los rasgos generales de la acción y en la medida que se domina la acción, se automatiza. Talizina (2000) hace la diferenciación entre la forma material y materializada, en la forma material se opera directamente con los objetos de la acción (mesa, libro, etcétera); en la forma materializada se opera con las representaciones o modelos de los objetos (modelos geométricos, gráficos, etcétera). Su diferencia es el nivel de abstracción en que se apoyan, el

aspecto material hace referencia a un objeto de la realidad y la forma materializada es una representación de la realidad.

3. **La etapa de formación del plano verbal- lingüístico (FPVL)**: significa que la acción se describe verbalmente, esto es, se dice oralmente lo que hay que hacer antes de hacerlo, liberándose así de la dependencia directa de los objetos. Esto implica tres cambios fundamentales: a) la acción no solo se describe, sino que se comunica a otros, subordinándose a la comprensión y el sentido que para los otros tenga la narración de la acción, concienciándose verbalmente. La acción se realiza en el plano verbal; b) a partir de ello, el concepto se constituye en la base de la acción, el concepto regula la acción; c) a partir del dominio de esta fase, la forma verbal tiende a abreviarse y estereotiparse.
4. **La etapa de formación de la acción como acto mental (FAAM)**: es la interiorización, es decir, la expresión mediante lenguaje interno. Esta etapa no se centra en la comunicación con otros, sino en el diálogo interno (habla para sí) y se da la transformación del objeto para un mejor análisis.

Por todo lo anterior, en este trabajo se siguen estas etapas con el fin de facilitar la comprensión de las medidas de tendencia central, partiendo de los objetos matemáticos primarios representados por recursos semióticos (formales, no formales y diversos).

Considerando lo anterior, el objetivo de la presente investigación es probar el uso de materiales multimedia construidos con fundamento semiótico para la enseñanza de las medidas de tendencia central y evaluar su impacto en la comprensión de este tema estadístico en diferentes participantes, los grupos no son homogéneos porque se pretende conocer si los materiales multimedia tienen el mismo efecto facilitador para la comprensión de los temas estadísticos en poblaciones diversas.

Bajo este marco surge el siguiente planteamiento de pregunta de investigación ¿Cuál es el efecto de la aplicación de diversos recursos semióticos vertidos en tecnología multimedia en la comprensión de los conceptos de moda, mediana y media en personas con diferente grado de escolaridad? Se evaluaron los recursos semióticos en claridad, secuencia y como facilitadores del aprendizaje, hay dos parámetros: primero, la explicación verbal y el Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos (CERS), y segundo, la comprensión de los temas estadísticos.

CAPÍTULO 2.

2.1 Método.

En este trabajo se parte de una revisión de las características del lenguaje formal de la estadística para la comprensión de medidas de tendencia central por medio del lenguaje natural y de otros recursos semióticos. Se realizó una investigación transversal, de tipo descriptiva con un muestreo no probabilístico e intencional. Se empleó una metodología mixta (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), para la parte cualitativa se evaluó el efecto facilitador de los recursos semióticos multimedia en la comprensión de los temas de medidas de tendencia central con el método de análisis de discurso (Urra, Muñoz, Peña, 2013) y para la parte cuantitativa se utilizó el Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos para conocer la opinión de los participantes respecto a las presentaciones multimedia.

2.2 Definición de variables.

Los *recursos semióticos* se definen como cualquier cosa que represente a otra, en algún aspecto o cualidad, se caracterizan por conformarse por un conjunto de signos, con reglas entre ellos y que engloban una estructura de significados (Arzarello, Paola, Ornella y Sabena, 2008). La *comprensión* de un objeto matemático es la percepción de la funcionalidad que representa el objeto y la expresión de esta funcionalidad en un contexto (Pecharromán, 2013), y se define como la capacidad del aprendiz para definir el concepto, citar ejemplos y resolver ejercicios prácticos.

Se tomaron en cuenta las siguientes definiciones de las medidas de tendencia central como referente para la evaluación de las definiciones y ejemplos de los participantes:

Moda:

- Valor que más veces se repite en una muestra (García, 2012).
- Categoría que tiene la mayor frecuencia (Bologna, 2011).

Mediana:

- Es el número que se encuentra en el centro o punto medio (valor central), una vez que los datos han sido ordenados de manera creciente (García, 2012).
- Es el valor de la variable que no supera a más de la mitad de las observaciones (Martínez, 2012).

Media:

- Suma de todas las puntuaciones, dividida entre el número de puntuaciones observadas (Ritchey, 2002).
- Suma de todos los valores, divididos entre el tamaño de la muestra (Wonnacott & Wonnacott, 1997).

2.3 Participantes.

Hubo tres grupos de participantes en el estudio: el grupo 1 (G1) estuvo integrado por 11 estudiantes (6 mujeres y 5 hombres) de la carrera de Psicología de la FES-Z UNAM, de primer semestre, todos habían tomado un curso de estadística descriptiva, con un intervalo de edad de 18 a 26 años, la edad media del grupo fue de 19 años, su última calificación promedio en estadística fue 7.3.

El segundo grupo (G2) se conformó por dos participantes femeninas de 18 años: una era estudiante de la carrera técnica superior en Administración de Capital Humano, su última calificación en matemáticas fue 8, se consideró una alumna regular en matemáticas; la participante 2 era una estudiante de bachillerato del área de contabilidad, su última calificación en estadística fue 6 y se consideró una alumna mala en matemáticas.

En el tercer grupo (G3) había 9 participantes, 3 mujeres y 6 hombres, de diferente escolaridad: 2 de secundaria, ambos de

13 años y su última calificación obtenida en matemáticas fue 10; 4 de preparatoria con edades de 18 a 22 años, la última calificación promedio en matemáticas de estos participantes fue 8; 2 técnico superior de 19 y 20 años, ambos obtuvieron 8 en su última evaluación en matemáticas; una participante de licenciatura de 18 que obtuvo 9 en su última calificación en estadística.

2.4 Instrumentos y materiales.

El material que se generó en esta investigación pretende superar los obstáculos en el aprendizaje del álgebra. Las presentaciones hacen énfasis en los significados, tanto de los conceptos como de los signos, y de las relaciones entre ellos; despliegan paso por paso el procedimiento, los temas se representaron con fórmulas, tablas y figuras, y contienen distintos ejemplos.

1. Presentaciones multimedia sobre las medidas de tendencia central (moda, mediana, media) realizadas con el programa Power Point versión 2013. Las presentaciones fueron diseñadas con apoyo de recursos semióticos variados: definiciones formales y coloquiales, fórmulas, gráficos e imágenes, procedimientos desplegados, figuras, colores, flechas, ejemplos, tablas, animaciones, entre otros. Los materiales multimedia aparecen en el apartado *3.5 Funciones de los recursos semióticos* de este trabajo.
2. El Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos (CERS) diseñado por los autores de este trabajo en formato tipo Likert de 20 reactivos (ver Anexo 1). Evalúa cada uno de los recursos utilizados (definiciones, fórmulas, ejemplos, tablas, imágenes, animaciones, flechas, figuras, colores). Se validó por un comité conformado por dos expertos en psicometría, que revisaron la coherencia entre ítems y los

objetivos, y la complejidad de los ítems (Urrutia, Barrios, Gutiérrez y Mayorga, 2015).

3. Ejercicios de evaluación correspondientes a cada tema de las presentaciones multimedia. Los ejercicios implican acciones del aprendiz ante los atributos del objeto, por ejemplo, aplicar el cálculo para conseguir un valor concreto (ver Anexo 2).

Materiales:

1. Computadoras personales, computadores de escritorio para la aplicación grupal y computadora portátil para la aplicación individual.
2. Videocámara marca Sony modelo HDRCx 405 para la grabación de la discusión de grupal.
3. Grabadora de voz para registrar en audio las charlas individuales, se instaló en un dispositivo móvil la aplicación Voice Record+ disponible para el sistema operativo IOS.

2.5 Procedimiento.

Primero se les explicó a los participantes el objetivo y las condiciones de aprendizaje (base orientadora de la acción). Después se utilizaron presentaciones multimedia, realizadas con diferentes recursos semióticos, para la enseñanza de las medidas de tendencia central (etapa materializada de la acción). Al terminar lo anterior, se evaluaron en los sujetos los conceptos mostrados en las presentaciones multimedia solicitándoles oralmente definiciones, ejemplos y su utilidad (etapa verbalizada de la acción). Se espera que tras la visualización reiterada de las presentaciones los aprendices definan, ejemplifiquen y que puedan resolver ejercicios del objeto matemático por medio del lenguaje interno, esta etapa se completa cuando el aprendiz es capaz de desplegar los procedimientos mentalmente y reportar o identificar el resultado (etapa del lenguaje interno). El criterio para cambiar de una etapa a la otra radica en el dominio que el sujeto tenga de la etapa previa, esto se manifiesta porque la acción se estereotipa, se automatiza y se abrevia.

El G1 revisó las presentaciones multimedia en computadora personal, posteriormente contestaron el CERS y para la evaluación de la comprensión de las medidas de tendencia se realizó un grupo de discusión donde los participantes definieron los conceptos abordados (media, mediana y moda) y citarón ejemplos. En la discusión se abordó la experiencia de los participantes, se les preguntó acerca de sus opiniones y sugerencias respecto a las presentaciones multimedia. La duración de la sesión fue de 80 minutos.

El G2 siguió el mismo procedimiento del G1, pero la duración de la sesión fue de 91 minutos. Además, se agregaron los ejercicios de evaluación porque en primera instancia se solicitó a los participantes que mencionaran o identificaran diferentes objetos (cálculos, procedimientos) que se consideraron para la evaluación (definiciones, ejemplos). Cada ejercicio de evaluación correspondió a un tema y tras la revisión de cada presentación multimedia se les pidió que resolvieran el ejercicio de evaluación correspondiente.

Dentro del G3, cuatro participantes siguieron el mismo procedimiento del G1: con la diferencia de que la discusión fue individual en la que se abordaron definiciones, ejemplos, opiniones y sugerencias. Los cinco participantes restantes siguieron el mismo procedimiento del G2. La sesión tuvo una duración media de 73 minutos.

La información recabada en el grupo de discusión y en las charlas individuales se transcribieron y por medio de la metodología de análisis del discurso (Urra, Muñoz, Peña, 2013) se evaluó la comprensión de las definiciones y ejemplos, así como las opiniones y sugerencias obtenidas de los participantes. Las respuestas recopiladas mediante el CERS se analizaron descriptivamente por grupos, individual y grupal, las respuestas de la pareja de participantes se analizaron junto con la aplicación individual.

CAPÍTULO 3.

Resultados.

3.1 Análisis de definiciones, ejemplos y experiencia de los participantes.

3.1.1 Respuestas del Grupo 1 (G1).

En este grupo se definió y ejemplificó correctamente el concepto de moda, la definición se hizo mediante los conceptos de repetitividad y visibilidad, y se refieren a las características más observadas, por ejemplo, sexo y enfermedad. Los ejemplos se centraron en las variables sexo, usuarios de lentes y no usuarios de lentes. El concepto de mediana se definió correctamente, el ejemplo se aplicó a la variable edad y se describió el procedimiento correctamente. La media se definió recurriendo al concepto de promedio y los ejemplos se aplicaron a las variables, estatura y edad.

3.1.1.1 Definiciones correctas observadas en el G1.

Moda:

"Es el dato que se repite más veces".

"es algo que se ve a simple vista… que va a tener mayor número de sujetos".

"Por ejemplo, el sexo de los que estamos aquí. Se puede ver fácilmente que la mayoría son mujeres".

"Pues las personas que traemos lentes y las que no".

Mediana:

"valor intermedio de toda una muestra y que significa que todos los datos que están arriba o abajo es el mismo número."

Media:

“Podría ser el promedio de un grupo de datos”

3.1.1.2 Ejemplos correctos observados en el G1.

Moda*:*

“Por ejemplo, el sexo de los que estamos aquí. Se puede ver fácilmente que la mayoría son mujeres”.

“Pues las personas que traemos lentes y las que no”.

Mediana*:*

“quien tenga 18 años con 2 meses, 18 con 6 y 18 con 9*. La mediana sería el 18 con 6 meses”*.

Media*:*

“hacerlo con estaturas… se tendrían que sumar todas las estaturas y luego dividirlas entre el número total de datos”.

“*el promedio de edades a las que entran a la carrera”*.

3.1.1.3 Experiencia del G1

El G1 señaló que los conceptos pueden ser útiles en la investigación. Opinó que las presentaciones *explican detalladamente los temas*, y que son un recurso que *puede ayudar como introducción a la estadística*. Una integrante del G1 opinó que *el manejo de tablas permitió ubicar los valores dentro de la fórmula*. Otra-participante del G1 consideró que *se generó un aprendizaje significativo*, y que *se usan las modalidades visual y auditiva*. Calificaron el material como *entretenido* y se rescató el uso simultáneo de diferentes recursos, específicamente, imágenes y animaciones. El G1 consideró que puede ser un material de apoyo para realizar tareas. El G1 reportó conocer fórmulas diferentes para el cálculo y que ya conocían los temas de medidas de tendencia central antes de ver las presentaciones. Un participante no consideró útil la animación con figuras en la presentación de media y recomendó incorporar recursos disponibles en internet.

3.1.2 Respuestas del Grupo 2 (G2).

Una participante de este grupo, identificada como Participante 1, definió correctamente el concepto de moda y el ejemplo lo aplicó a la variable música; el concepto de mediana no lo pudo definir por sí sola, tomó como referencia la definición de otra participante, identificada como Participante 2, para definir el concepto, además, tuvo dificultades para construir un ejemplo, recordó la recta que se usa para explicar el concepto en la presentación y con ayuda del investigador identificó que el valor del punto medio en la recta representa la mediana; no se definió el concepto de media aritmética y el ejemplo fue incorrecto, se analizará posteriormente).

La Participante 2 definió correctamente el concepto de moda y el ejemplo lo aplicó correctamente a la variable ropa; en el concepto de mediana se identifica la noción de posición, la definición y el ejemplo, no adecuados, se analizarán posteriormente; en el concepto de media aritmética se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo.

3.1.2.1 Definiciones correctas observadas en el G2.

Moda:

"es lo que más se utiliza, lo que mas vez a diario, cotidiano, todo lo que usamos".

Mediana:

"Por lo que dijo ella [participante 2], es la mitad de algo que tenemos".

Media:

No se definió.

3.1.2.2 Ejemplos correctos observados en el G2.

Moda:

"el tipo de música ahorita está muy de moda el reggaetón".

Mediana:

"lo estabas graficando con una recta… el número de personas que había… los que estaban calificados. La mitad… de la recta era la mediana".

Media:

Ejemplo incorrecto.

3.1.2.3 Experiencia del G2.

La participante 1 considera que las presentaciones son *aburridas, sobresaturadas de texto y gráficas*. Los factores que influyen en su aprendizaje son: *distracciones en clase, no entrar a la misma y atender el celular en clase*. Se recomendaron más audios y reportó que los conceptos pueden ser útiles: *"podemos encontrar el valor de las cosas para que no, nos hagan fraudes"*. La participante 2 reporta que los ejemplos de mediana son *difíciles*. Considera las presentaciones *aburridas* por el uso predominante del texto, le resultan *tediosas*, menciona que solo aprende lo necesario para aprobar.

En él G2, una de las participantes definió el concepto de media aritmética mediante las operaciones necesarias para el cálculo (adición y división), pero no se señalaron las variables sobre las cuales se puede aplicar el concepto. Mencionó un ejemplo incorrecto porque aplica un procedimiento perteneciente al tema "*agrupación de datos"* de los temas moda o mediana. Confunde "*media aritmética*" con "*frecuencia*". El investigador hace uso de la ZDP aclarando la confusión y haciendo preguntas pertinentes para generar un ejemplo correcto e identificar el concepto:

Investigador*: ¿Recuerdas alguna definición de media?*

Participante*: Solo se dividía y se sumaba, no me acuerdo de la definición.*

Investigador *¿Algún ejemplo?*

Participante*: Tienes números de 7 que no son pares, 7, 9, 15… entonces los tienes que ir juntando y encontrar del 7 al 10 el número que está entre esos ¿no?*

Investigador*: Ese procedimiento es para la agrupación de datos. Se tenía que realizar previo al cálculo del tema anterior que era mediana, pero para este que es media, la última presentación ¿recuerdas algún ejemplo?*

Participante*: Aquí se sumaban las calificaciones que tenían.*

Investigador*: ¿Y luego que se hacían con esas calificaciones?*

Participante*: Pues ya se dividían entre el número de personas que había.*

Investigador*: ¿y ese valor que era?*

Participante*: Era la media.*

En él G2, la participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media cuando intentó construir un ejemplo. La participante 2 señalo que ese procedimiento corresponde al concepto de media aritmética:

"fue el ejemplo de los que tenían depresión eran 9… tenías que medir el que tan depresivos estaban, unos tenían 37, 40 y tantos, algo así. Y se sumaban… y se dividía".

Cuando se le pidió un ejemplo a la participante 2 y no lo pudo generar, la participante 1 fue capaz de generar un ejemplo aplicado a un contexto escolar, pese a que anteriormente, se mostró incapaz de desarrollar un ejemplo:

“En las calificaciones… Sumas lo que sacaste, por ejemplo: si sacaste en matemáticas 8, en ciencias 9 y todo eso, las sumas y las divides entre el número de materias que hay… [sirve] para encontrar un promedio general”.

3.1.3 Respuestas del Grupo 3 (G3).

Los participantes no tuvieron dificultades para definir y ejemplificar el concepto de moda, los ejemplos se aplicaron a diferentes variables como: pan, canciones, ropa, colores, marcas, calificaciones y rating; en el concepto de mediana hubo menos variedad de definiciones correctas y solo se obtuvo un ejemplo correcto que se aplicó a la variable *“estatura”*; en media solo se obtuvieron dos definiciones correctas y el ejemplo se aplicó a las variables, calificaciones y embarazos al año. Solo 5 participantes resolvieron los ejercicios de evaluación, las respuestas fueron como sigue: tres participantes contestaron correctamente todos los ejercicios, 1 participante resolvió correctamente los ejercicios de moda y mediana, y 1 participante solo resolvió correctamente el ejercicio que corresponde a moda.

3.1.3.1 Definiciones correctas observadas en el G3.

Moda:

“lo que se ve más, lo que aparece más, lo que está más repetitivo”.

“Es la variable que más se repetía”.

“Es lo que más se repite, como en un grupo es lo que más se repite, lo que más predomina”.

“Es lo que más se repetía en un cierto grupo”.

“la mayor cantidad de un producto o de un conjunto… es lo que más llama tu atención… es el conjunto de lo más

predominante en una sociedad, en una persona, en un grupo de amigos".

"Moda es… el elemento que más se repite en una sucesión… Lo que más se usa".

"es el valor más frecuente dentro de un conjunto de datos".

Mediana:

"Pues era como la mitad ¿no? De muchos datos la mitad".

"era el elemento que se encontraba a la mitad de todos, acomodándolos de mayor a menor o al revés".

Media:

"se suman cantidades y se dividen entre las mismas".

3.1.3.1 Ejemplos correctos observados en el G3.

***Moda*:**

"me dedico a la venta de pan y, por ejemplo: lo más comercial son las conchas, es lo que más hay y es lo que más se vende… las conchas serían la moda".

"con las canciones que más escucho… en mi celular tengo una lista de reproducción y me pone la más reproducida, o la más sonada… en mi ejemplo sería la canción que más reproduzco".

"Yendo a los colores. Está de moda el color rosa y ya vez a muchas niñas con suéter rosa".

"tenemos 10 camisas y 7 son de color azul, y las otras son 2 negras y 1 blanca. Entonces la moda es la de color azul, porque es la que más se repite".

"En el 2017 la moda es la marca Adidas".

“Tal vez las calificaciones de un grupo, de los alumnos… tal vez la mayor sea 8 que es lo que más sacan los alumnos en esa clase”.

“para medir la frecuencia, en que temas hay más rating o qué temas le interesan a nuestro público… dividirlo en secciones. En base en eso tomar tres días diferentes para dividirlo en esas tres secciones y ver en qué día hay más rating”.

***Mediana*:**

“en las estaturas de algunos niños… acomodándolos de menor a mayor, el niño que se encuentre a la mitad de todos”.

***Media*:**

“mis calificaciones, por ejemplo, cuando estábamos en la secundaria nos ponían a sacar el promedio. Teníamos que sumar las cantidades y al último tenemos que dividirlas por el número de materias”.

“las mujeres que se embarazan en promedio al año”.

3.1.3.3 Experiencia del G3.

El 78% de los participantes opinaron que los temas fueron fáciles de comprender y el 22% reportaron frustración principalmente porque hay demasiada lectura. Un participante considera que para la asimilación de los conceptos *necesita más tiempo*. En este grupo la fórmula que causó más confusión fue la de la media aritmética.

Un participante opinó que *las presentaciones enseñan algo útil a largo plazo*. Se reportó que es un método de enseñanza *entretenido y variado*. Las presentaciones exigían retroceder para conseguir la comprensión de los temas y eso las volvió *tediosas*. Las recomendaciones que hizo el G3 fueron del siguiente tipo: *más explicaciones verbales, más señalamientos, ejemplos con pocos datos, diapositivas sin* *textos largos, otros formatos para la explicación como un video, sustituir palabras complejas con sinónimos más coloquiales y una sección de ayuda basada en preguntas*. Un participante considera que las razones de su reprobación son: *falta de profesionalismo del profesor y desatención de su parte*. Otra participante expresó que *su comprensión depende del método instruccional del profesor*. Se recomendó incorporar otros recursos como figuras o mapas, porque permiten centrar los conceptos y palabras clave para acortar la lectura en los temas.

3.2 Errores en la comprensión de las medidas de tendencia central.

3.2.1 En el Grupo 1 (G1).

En este grupo no se presentaron errores en la comprensión de las medidas de tendencia central, los conceptos se definieron correctamente y se citaron ejemplos pertinentes para cada concepto.

3.2.2 En el Grupo 2 (G2).

A continuación, se describen los errores en los conceptos de mediana y media aritmética. En el concepto de mediana se identifica la noción de posición y no se ubica el concepto dentro de una muestra. En ocasiones se confunde el concepto de mediana con el de media, en el concepto de media se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo. Cuando la participante 2 no fue capaz de generar un ejemplo, la participante 1 generó un ejemplo adecuado para un contexto escolar.

3.2.2.1 Definiciones y ejemplos con errores observados en el G2.

Mediana.

Definición: "podríamos decir que mediana es como el intervalo entre… si tenemos un rango…es la mitad… por ejemplo, del 1 al 10 podría ser 5".

Ejemplo: *"sí somos 10 alumnos y nos piden hacer equipos con partes iguales, podríamos seleccionar 5 y 5"*

Descripción del error: Se menciona correctamente la noción de ***posición*** y el concepto de ***intervalo*** lo equiparó con el de ***conjunto de datos*****.**

El ejemplo señaló correctamente que la mediana divide en dos el conjunto de datos, pero su función principal no es dividir el conjunto de datos, sino el señalar el valor del punto medio en el conjunto.

Media.

*Definición**:*** No se generó ninguna definición.

Ejemplo: *"el ejemplo de los que tenían depresión eran 9… tenías que medir el que tan depresivos estaban, unos tenían 37, 40…algo así…se sumaba [y] se dividía".*

Descripción del error: La participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media cuando intentó construir un ejemplo. Solo se mencionaron las operaciones necesarias para el cálculo.

Con la ayuda del investigador la participante 1 recordó un ejemplo de las presentaciones sobre calificaciones. Cuando se le pidió un ejemplo a la participante 2, la participante 1 fue capaz de aplicar el concepto a un contexto escolar.

3.2.3 En el Grupo 3 (G3).

Los errores también se presentaron en los conceptos de mediana y media aritmética. En las definiciones y ejemplos, los principales errores fueron los siguientes: confundir los conceptos de mediana y moda, definiciones redundantes, procedimientos inadecuados o incompletos, no se sitúan los conceptos dentro de una muestra o un conjunto de datos, se intercambia el concepto de ***"datos ordenados"*** por el de "***adición (suma)"*** o el concepto de ***"observaciones"*** por el de ***"frecuencias"***, se generaron definiciones que no representan los conceptos o se redujeron los conceptos a procedimientos más simples.

3.2.3.1 Definiciones y ejemplos con errores observados en el G3.

Mediana.

Definición: "es exactamente el punto medio".

Ejemplo: "la mediana es… el producto básico… es lo que más piden".

Descripción del error: No se identificó la definición con la pregunta *¿recuerdas alguna definición de mediana?* La definición se identificó cuando se le preguntó *¿cómo le hiciste para calcular la mediana?*

En el ejemplo aplica de manera indistinta el concepto de mediana y moda.

Definición: "Es el valor que se encuentra a la mitad de todo el valor medio de algunas cantidades".

Ejemplo: "Son 6 dígitos y están: 1, 2, 3, 4, 5, 6. La mediana va ser 3 porque es la que está a la mitad del 1 y del 6".

"Podría ser el número de materia… tengo 9 y la mitad va ser 4 porque no se puede poner decimal. Entonces como es 4.5 creo el decimal tiene que subir a 5 porque está superando el .5".

Descripción del error: Se identificó la noción de posición dentro del concepto y la definición es redundante.

En los ejemplos se identificó correctamente la noción de posición, pero no se aplicó el procedimiento correcto. Cuando se le pidió un ejemplo diferente, aplicado a su vida cotidiana o su vida escolar, el participante aplicó erróneamente el concepto.

Definición: "La mediana es, pues digamos que el punto medio de un valor total".

Ejemplo: "a mí me dan en un porcentaje del precio real del producto… el porcentaje es el 40%, entonces la mediana de todos mis productos pues es el 40% porque de ahí parto…es el porcentaje hacia el vendedor y el porcentaje hacia el proveedor".

Descripción del error: Se identificó correctamente la noción de punto medio, pero se cometió el error de situarlo en un solo valor, lo correcto es situarlo dentro de un conjunto de datos.

En el ejemplo se identificó la mediana incorrectamente por medio del concepto de porcentaje, aplicó el concepto de moda para el tema de mediana.

Definición: "es el dato numérico… de en medio de todos los demás".

Ejemplo 1: "el ejemplo de la cooperativa en la primaria…dije al parecer que niños preferían de paletas 3, papas 8 y 5 de refresco. Si los sumamos serían, bueno en este caso son 10 niños ¿no? Y podría ser, bueno sumar todos serian 8, 5, 13 y 3, 16…serían el 8 y el 9, entonces aplicaríamos la fórmula para datos agrupados, pero con números pares".

Ejemplo 2: "enfocado a mi carrera igual basándonos en el rating, no sé, que 1000 personas escuchen chismes, 500 en música, y 300, no sé, en deportes. Entonces igual sería sumar 1000+500+ creo que dije 300. Igual sería 1800 y seria 800 y 900 los números medios".

Descripción del error: En los ejemplos 1 y 2, la noción de "***ordenar los datos"*** se intercambia por la de *"**adición (suma)"*** de los datos. Los procedimientos son incompletos porque no se calcula el punto medio a partir de los valores centrales.

Media:

Definición: "La mediana se centraba a la mitad… era la parte de en medio de todo el ejercicio, de todo el problema".

Ejemplo: "En este caso eran las personas que medianamente utilizaban el uso de su celular"

Descripción del error: Se identificó la noción de punto medio, esta noción no la ubicó dentro de un conjunto de datos por lo que a definición es incorrecta.

El ejemplo se basó en el ejercicio de evaluación, pero señaló incorrectamente lo que representa el resultado, en este caso el punto medio representa el número de horas que una persona usa el celular, este valor se ubica a la mitad del conjunto de datos. El participante se mostró incapaz para construir un ejemplo diferente.

Definición: "sería como que un poco más justo… tomas el total del valor, digamos el total del esfuerzo de los participantes y los dividimos entre los participantes, para que te quede una parte justa".

Ejemplo: "en el trabajo en equipo… sabemos que no siempre se hacen partes exactamente iguales … lo justo es que queden partes iguales [para] todos los participantes".

Descripción del error: Equiparó media aritmética con la noción de *"**justicia**"*, redujo el concepto a la *"**repartición equitativa**"*, en este caso, del trabajo en un grupo de personas.

El ejemplo referente a media aritmética es correcto, aunque no se detalló el procedimiento a seguir.

Definición: "Es el número total de tus frecuencias entre el número de datos".

Ejemplo: "cuando estás en el periódico igual lo dividen en secciones, entonces, podrías hacer diferentes periódicos, de diferentes temas: uno de deportes, uno de chismes, y otro de política… para sacar tu promedio igual sumas todas las unidades que vendiste y las divides entre las 3 secciones y de ahí sacas tu media"

Descripción del error: En la definición se intercambió la noción de *"**observaciones**"* o *"**puntuaciones**"* por el de *"**frecuencia**"*, que hace referencia al número de elementos que se acumulan en cada clase cuando los datos están agrupados.

El procedimiento del ejemplo fue incorrecto, la relación del número de unidades vendidas entre las secciones del periódico no refleja la media aritmética.

3.3 Análisis cuantitativo descriptivo de la evaluación de los recursos semióticos.

Los participantes del G1 están de acuerdo en que los recursos semióticos fueron útiles para la comprensión de los temas de medidas de tendencia central, la calificación promedio en el

Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos de $\bar{X}$ = 4.25, DE = 0.41, simetría = 1.52 y curtosis = -1.579, esto es: los datos tienden a distribuirse normalmente concentrándose por encima del puntaje medio de los datos (Figura 1).

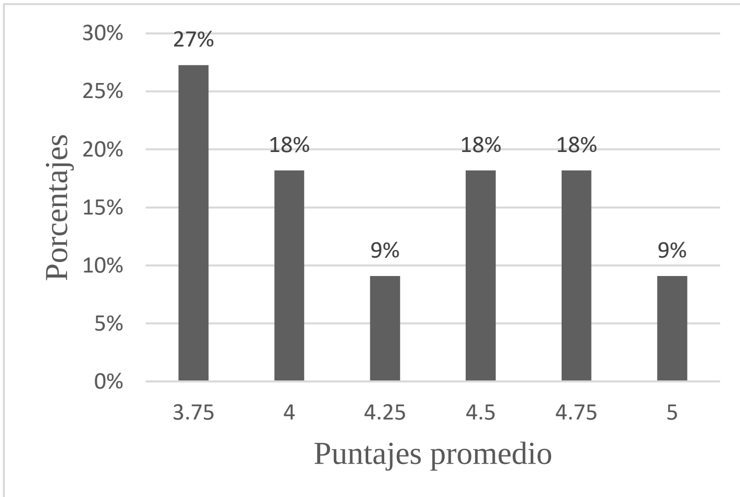


Figura 1. Puntajes promedio de los datos obtenidos en el Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos en el G1.

Se consideró el G2 y G3 como uno solo para analizar los datos obtenidos mediante el CERS. Los participantes calificaron los materiales multimedia como comprensibles y claros, reflejando una calificación promedio en el CERS fue $\bar{X}$ = 3.21, DE = 0.92, simetría = 0.492 y curtosis = -4.18 esto es: los datos tienden a distribuirse normalmente concentrándose por encima del puntaje medio de los datos (Figura 2).

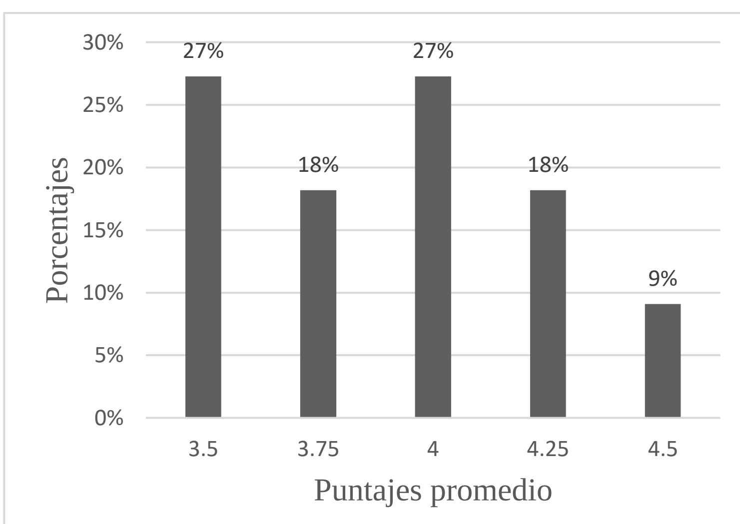


Figura 2. Puntajes promedio del Cuestionario de Evaluación de Recursos Semióticos (aplicación individual).

CAPÍTULO 4.

Discusión.

Los resultados indican que los tres grupos comprendieron las medidas de tendencia central con el apoyo de varios recursos semióticos, este hecho confirma la naturaleza de la actividad matemática como una práctica histórica-cultural mediada por signos y significados (Bartolini y Marioti, 2008). Además, los materiales didácticos permitieron superar los obstáculos cognitivos, los errores la aritmética y las dificultades debidas a las características del lenguaje algebraico, que son los tres principales problemas en el aprendizaje del álgebra (Palarea y Socas, 1994).

Se puede decir que el aprendizaje se beneficia con pares porque los contenidos se aclaran y se refuerzan. Los aprendices pueden obtener una base de conocimientos de sus pares cuando el método de enseñanza no fue adecuado para ellos, esto sucede cuando el aprendiz toma como referencia las acciones acertadas o los errores de los compañeros para asimilar el objeto de aprendizaje. Esto se observó en el G2 cuando la participante 1 confundió el concepto de mediana con el de media y la participante dos aclaró que el procedimiento descrito correspondía al concepto de media aritmética. Posterior al primer ejemplo correcto la Participante 1 desarrolló un ejemplo correcto aplicado a un contexto escolar.

Esta investigación demostró la eficacia del uso de los recursos semióticos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en particular de temas de estadística, específicamente de las medidas de tendencia central, lo que concuerda con diferentes investigaciones que hablan de los recursos semióticos como herramientas que optimizan la enseñanza por parte de los docentes y potencian el aprendizaje en los alumnos (Arzarello et al. 2008; Coll y Onrubia, 2001; Corona et al. 2016; González et al. 2016; Manghi, 2010; Velázquez et al. 2016).

Los materiales didácticos fueron evaluados de diferentes maneras: por una parte, *como útiles* y *comprensibles*. Otros participantes evaluaron los materiales como *aburridos* o *tediosos*. Las respuestas en el CERS fueron, en general, positivas. Pese a las diferentes evaluaciones que recibieron las presentaciones, permitieron la comprensión de temas de medidas de tendencia central: moda, mediana y media.

Las diferencias que presentaron los participantes se deben a que su desempeño está condicionado por su medio cultural (nivel socioeconómico, grado de estudios, estilo de vida, ocupación, etc.) que determina las condiciones particulares para la formación de capacidades o aptitudes (Leontiev, 1967). Los aprendices deben exponerse a las condiciones culturales que propicien la formación de aptitudes matemáticas y de otros conocimientos básicos como la lecto-escritura. Esto conduce al desarrollo, individual y de la sociedad, que debe ser potenciado por la influencia de otros agentes culturales.

¿Cómo atender las dificultades que siguen presentes en la comprensión de tópicos matemáticos? Resulta pertinente la aplicación de métodos de la neuropsicología porque tienen un carácter educativo y psicopedagógico, la ZDP próximo no es el único método cualitativo para la formación de imágenes mentales. La Variación Sistémica de la Actividad (VSA) se entiende como la modificación sistemática de las condiciones de regulación de la actividad de las tareas evaluadas: lenguaje (oral, escrito, leído, mímico), en un contexto comunicativo o sin él, dibujar, realizar operaciones aritméticas, series inversas, tareas de identificación, comprensión de definiciones, etcétera

(Escotto, 2014). La aplicación de la VSA permite la regulación consciente de la actividad por medio del lenguaje, lo que hace posible identificar y modificar los errores que se presenten en el proceso de aprendizaje.

Se aplicó la VSA a un participante del G3 que no definió correctamente los temas de mediana y media, pero resolvió correctamente los ejercicios de evaluación. Mediante la modificación de las preguntas y centrándose en la acción que realizó correctamente (resolución de ejercicios) se ejemplificó el concepto de media aritmética y se definió mediana, en la descripción del procedimiento se intercambió el concepto de ***"conteo"*** por el de ***"suma"***, a continuación, se presenta parte de las preguntas y respuestas…

Investigador*: ¿Recuerdas cómo se calcula la media?*

Participante*: ¡Sí! En mí caso, se suma todo lo que vendo y se divide entre el número de piezas que son.*

Investigador*: ¿Cómo le hiciste para calcular la mediana?*

Participante*: ¿La mediana? Es exactamente el punto medio. Ahora sí que solo sumé a los participantes y dividí entre dos y ya me salió el punto medio. Es el paso más fácil.*

El desempeño del participante demostró la importancia de la regulación consciente de la actividad, este participante no definió y ejemplificó correctamente los conceptos de mediana y media, pero resolvió correctamente los ejercicios de evaluación, al parecer participante no es consciente de los conocimientos con los que cuenta. Esto indica que para la evaluación de los tópicos matemáticos se debe de considerar el objeto matemático en todas sus formas o tipos posibles, no solo el procedimiento, definición o representación gráfica en aislado, sino, los objetos enunciados más el contexto, su función y su significado.

Los objetos matemáticos siguen la misma trayectoria de la zona de desarrollo próximo (ZDP) porque se vuelven más complejos en la medida que el aprendiz los comprende y los utiliza para aprender nuevos objetos para lo que es necesario el conocimiento previo. Desde el principio los objetos matemáticos se conforman por unidades más básicas que se denominan objetos primarios, que necesitan una asimilación previa, el objeto matemático conformado puede convertirse en un objeto primario perteneciente a un objeto más complejo, por ejemplo: para la asimilación de la media (objeto matemático) se necesita asimilar definiciones, expresiones, situaciones, acciones, notaciones (objetos primarios), la media puede convertirse en un objeto primario de objetos más complejos como la desviación estándar, la prueba *t* de Student, análisis de varianza o correlación. La trayectoria de la zona de desarrollo próximo (ZDP) es similar porque sigue un patrón de complejidad ascendente, en primer lugar, se parte de una Zona de Desarrollo Real (ZDR) que es lo que puede hacer el sujeto de manera independiente, la ZDP es lo que puede hacer el sujeto con la ayuda de los otros y es el medio para arribar a la Zona de Desarrollo Potencial (ZDP) que es cuando la persona consigue el aprendizaje. La ZDP puede convertirse en una ZDR para seguir ascendiendo en términos de complejidad (Figura 3).

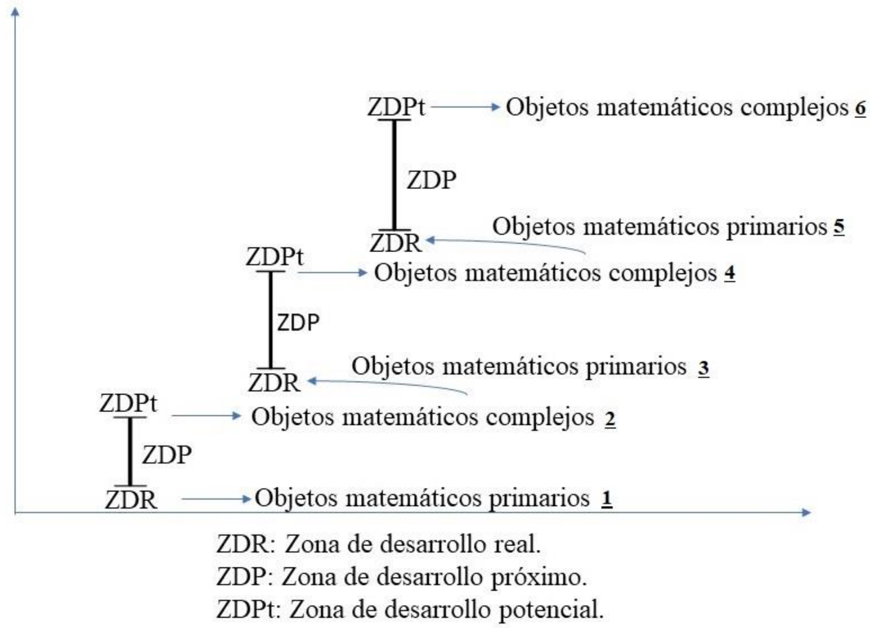


Figura 3. Trayectoria de la ZDP y los Objetos Matemáticos.

CAPÍTULO 5.

Conclusiones.

Los materiales didácticos basados en diferentes recursos semióticos permitieron la comprensión de las medidas de tendencia central. Concretamente, los siguientes recursos fueron considerados útiles para la comprensión de los temas: tablas, gráficas, signos, flechas, la estructuración de las presentaciones, las explicaciones detalladas y el uso simultaneo de figuras, colores y animaciones, el lenguaje natural y esquemas. Los materiales didácticos fueron evaluados como útiles, entretenidos, variados, detallados y significativos y se rescató como una ventaja que el aprendiz lleve su propio ritmo de aprendizaje; otros participantes los evaluaron como aburridos, difíciles y tediosos.

Los resultados permiten plantear que es necesario vincular los conceptos que se pretenden enseñar con la realidad de las personas, como en el concepto de moda que fue el que se definió y ejemplificó sin ninguna dificultad. Solo vinculando los objetos matemáticos con la actividad humana se puede ubicar la funcionalidad de los objetos de aprendizaje, en este caso las medidas de tendencia central. Según Pecharromán (2013) la percepción de la funcionalidad y su expresión en un contexto son los requisitos para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Hoy en día el uso de la tecnología permite la materialización de diferentes contenidos, este trabajo partió de la base orientadora de la acción porque se les explicó a los participantes lo que van aprender, su objetivo y las condiciones de aprendizaje. Las presentaciones son representaciones materializadas de los entes con los que interactúan los objetos matemáticos (medidas de tendencia central), no es posible materializar un objeto matemático por su naturaleza abstracta, en este caso, lo que es susceptible de representar de manera materializada son las variables con las que operan los objetos (edad, estatura, calificaciones, sexo, preferencias, puntajes de un test).

Existen diferentes ejemplos del uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas. Uno de ellos son los juegos educativos PIPO CLUB, algunos de ellos están disponibles en internet, este conjunto de juegos enseña a los niños temas como: números romanos, series numéricas, geometría y aritmética[2]. Otro ejemplo del uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas es la propuesta del libro *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera* (Nagle, Saff & Snider, 2005), este libro viene acompañado de un CD ROM interactivo que contiene un software para el cálculo numérico y visualización gráfica de ecuaciones diferenciales.

Un ejemplo del uso de la tecnología, pero para la enseñanza de la lectura, es la aplicación interactiva *"Leer bien"* basada en la propuesta del libro *Enseñanza de la lectura* (Solovieva y Quintanar, 2014), esta aplicación interactiva permite la asimilación de la lecto-escritura, partiendo del análisis fonemático. El método puede ser útil para niños, adolescentes y adultos cuya lengua materna no sea el español, en personas con problemas de aprendizaje o daño cerebral. Esto demuestra las diversas aplicaciones de la tecnología para la enseñanza de diferentes habilidades.

[2] Los juegos educativos de PIPO CLUB se encuentran disponibles en la siguiente página web: http://www.pipoclub.com/matematicas-primaria/index-imprimir.html

Referencias.

Aragón, E., Castro, C., Gómez, B., y González, R. (2009). Objetos de aprendizaje como recursos didácticos para la enseñanza de matemáticas. *Apertura*, *9*(11), 100–111.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Bartolini B. M. G., & Mariotti, M. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Coord.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746–783). New York: Routledge.

Beuchot, M. (2004). *La semiótica. Teorías del signo y el lenguaje en la historia*. México: Fondo de Cultura Económica.

Blanco-Álvarez, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación Y Pedagogía*, *23*(59), 59–66.

Bologna, E. (2011). *Estadística para psicología y educación*. Argentina: Brujas.

Camargo, Á., y Hederich, C. (2010). La relación lenguaje y conocimiento y su aplicación al aprendizaje escolar. *Folios*, (31), 105–122.

Castro, W. y Pardo, H. (2005). El computador en la clase de matemáticas: desde lo dinámico y lo semiótico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 727–731.

Coll, C., y Onrubia, J. (2001). Estrategias discursivas y recursos semióticos en la construcción de sistemas de significados compartidos entre profesor y alumnos. *Investigación En La Escuela*, (45), 21–31.

Corona, G., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, *6(11)*, 15-33.

Cruz, M. M., Aguilar S. L., García, V. A, y González, M. R. (2009). Rendimiento académico en la carrera de química farmacéutico biológica de la FES Zaragoza (2002-2008). *Bioquimia*, *34*(1), 75.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime*, *9* (1), 177–195.

Escotto, A. (2007). El estudio del lenguaje: lingüística y neuropsicología. En A. Escotto, M. Pérez y Sánchez C. N. (Coord.), *Lingüística, Neuropsicología y Neurociencias Ante los Trastornos del Desarrollo Infantil.* (pp. 3-49). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto, A. y Sánchez, J. (2014). *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el aprendizaje de las matemáticas.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Escotto-Córdova, E. A. (2014). La variación sistémica de la actividad y la zona de desarrollo próximo: dos estrategias para el diagnóstico y la intervención neuropsicológica. En M. Pérez, A. Escotto, J. Arango, L. Quintanar (Coord), *Rehabilitación Neuropsicológica. Estrategias en trastornos de la infancia y del adulto* (pp. 33-48). México: Manual Moderno.

Escotto-Cordova, E. A., Sánchez-Ruiz, J. G., Baltazar-Ramos, A. M. (2014). El método de Galperin de la formación de las imágenes mentales y su importancia para la enseñanza de las matemáticas. En A. Escotto y J. Sánchez (Coord.), *Estrategias de intervención-rehabilitación en las dificultades con el* *aprendizaje de las matemáticas* (pp. 3–17). México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw- Hill.

Gamboa, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *3*(2), 11–44.

García, U. L. (2012). *Estadística y probabilidad*. México: Competencias Matemáticas.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2.3), 237–284.

González, V., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM, 6(12)*, 45-63.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2015). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): Documento rector.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (2017). Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA): Resultados nacionales 2017. Educación media superior.

Leontiev, N. (1967). *El hombre y la cultura. Problemas teóricos sobre educación*. México: Grijalbo.

Nagle, R. K., Saff, E. B. & Snider, A. D. (2005). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Pearson.

Neira, S. (2013). Representaciones, lenguaje, conversión, símbolos, semiótica, narrativas simbólicas... ¿qué tienen que ver con la comprensión de las matemáticas? *Revista Científica (Edición especial)*, 378–382.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios Pedagógicos*, *36* (2), 99–115.

Martínez, B. C. (2012). *Estadística y muestreo*. Colombia: Ecoe.

Martínez, M. M. L., Vivaldo, L. J., Navarro, Padilha M. G., Gonzales, F. M. V., y Jerónimo, M. J. A. (1998). Análisis multirreferencial del fenómeno de la reprobación en estudiantes universitarios mexicanos. *Psicologia Escolar E Educacional*, *2*(2), 161–174.

Palarea, M. M. y Socas R. M. M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del álgebra. *Revista Suma*, *16*, 91–98.

Palarea, M. M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *Números*, *40*, 3–28.

Pecharromán, G. C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Depósito Digital de Documentos de la UAB*, *3*, 121–134.

Puga, P. L. A., Rodríguez, O. J. M. y Toledo, D. A. M. (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, Colección de Filosofía de la Educación*, *20*, 197-220.

Ritchey, F. J. (2002). *Estadística para las ciencias sociales. El potencial de la imaginación estadística.* México: McGraw-Hill.

Salinas-hernández, U. A., y Trouche, L. (2018). Uso de gestos -como recurso- mediador- por un profesor de bachillerato para enfrentar un desafío didáctico no previsto por él. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (54), 6–24.

Sánchez, J. y Escotto, A. (2013). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: Factores neuropsicológicos y socioepistemológicos*. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Solovieva, Y. y Quintanar, L. (2014). *Enseñanza de la lectura*. México: Trillas.

Talizina, N. F. (2000). *Manual de psicología pedagógica*. México: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Urra, E., Muñoz, A., y Peña, J. (2013). El análisis del discurso como perspectiva metodológica para investigadores de salud. *Enfermería Universitaria*, *10*(2), 50–57.

Urrutia E., M., Barrios A., S., Gutiérrez N., M., y Mayorga C., M. (2015). Métodos óptimos para determinar validez de contenido. *Revista Cubana de Educación Médica Superior*, *28*(3), 547–558.

Velásquez, J., Escotto, A., Sánchez, J. y Baltazar, A. (2016). Recursos semióticos en la estadística: Alternancias de lenguaje en el discurso docente, estudio de caso. *Revista Electrónica de Psicología de la FES Zaragoza-UNAM*, *6(11)*, 33-57.

Wonnacott, T. H. & Wonnacott, R. J. (1997). *Introducción a la estadística*. México: Limusa.

Apéndices.

Apéndice A.

Cuestionario de evaluación de Recursos Semióticos

Introducción

Éste es un cuestionario para evaluar de los recursos semióticos utilizados en las presentaciones, la intención es obtener tu opinión acerca del tipo de recursos semióticos (colores, figuras, gráficas, flechas, movimiento, voz, etc.) utilizados para explicar cada tema de estadística.

Instrucciones: Lee cuidadosamente cada pregunta, responde lo que se te pide y marca la opción de respuesta que más se acomode a tu experiencia durante las presentaciones de Power Point.

Edad: Sexo: Ocupación:

Última calificación en estadística o matemáticas: Fecha:

¿Conocías los temas antes de ver las presentaciones? (SI) (NO)

	Totalmente en desacuerdo	Desacuerdo	Ni de acuerdo, ni en desacuerdo	De acuerdo	Totalmente de acuerdo
Mi comprensión de las clases de estadística o matemáticas es buena	1	2	3	4	5
El resultado en mi última evaluación en estadística o matemáticas fue bueno	1	2	3	4	5

Las diapositivas son comprensibles	1	2	3	4	5
La secuencia de las diapositivas es comprensible	1	2	3	4	5
El procedimiento de las fórmulas es comprensible	1	2	3	4	5
El procedimiento desglosa claramente las fórmulas	1	2	3	4	5
Los ejemplos son útiles para entender las fórmulas	1	2	3	4	5
Entendí todos los temas a pesar de no conocerlos	1	2	3	4	5
Las definiciones son comprensibles	1	2	3	4	5
Las explicaciones ayudan a entender la información	1	2	3	4	5
El apoyo visual permite entender las fórmulas a pesar de no conocerlas	1	2	3	4	5

Las imágenes ilustran suficiente al texto	1	2	3	4	5
Las imágenes ayudan al mejor entendimiento de la fórmula	1	2	3	4	5
Las figuras describen las fórmulas	1	2	3	4	5
Los colores ayudan a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
El movimiento ayuda a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
El audio ayuda a la comprensión de la fórmula	1	2	3	4	5
Las tablas ayudan a entender los temas	1	2	3	4	5
Las flechas asocian bien el texto con las imágenes	1	2	3	4	5
Después de ver las presentaciones de Power Point puedo dar ejemplos	1	2	3	4	5

Apéndice B.

Ejercicios de evaluación.

Estas son el número de horas de uso de celular durante el día de una muestra de personas…

1, 1, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12

¿Cuál es la **moda, mediana y media** en este conjunto de datos?

Moda =

Mediana =

Media =