



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Programa de Posgrado en Astrofísica

Instituto de Radioastronomía y Astrofísica

MOMENTO ANGULAR EN FLUJOS BIPOLARES

Tesis para optar por el grado de
Doctor en Ciencias (Astrofísica)

Presenta:

Jesús Alejandro López Vázquez

Tutores:

Dra. Estela Susana Lizano Soberón
Instituto de Radioastronomía y Astrofísica

Dr. Jorge Cantó Illa
Instituto de Astronomía

Morelia, Michoacán. Julio de 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre y mis hermanos.

Agradecimientos

Un agradecimiento muy especial a mis asesores, la Dra. Susana Lizano y el Dr. Jorge Cantó, por sus conocimientos impartidos, la gran paciencia mostrada, su motivación ante los momentos difíciles y su experiencia aportada a este trabajo. Mi total gratitud a su amabilidad y calidad humana, sin ellos este proyecto no hubiese llegado a su culminación.

Al Dr. Luis Zapata por su colaboración en la parte observacional del proyecto. A la Dra. Jane Arthur, por sus consejos y ayuda en la parte numérica.

A los sinodales, los Drs. Ricardo González, Luis Felipe Rodríguez, Pablo Velázquez, José María Torrelles y Guillem Anglada. Gracias por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a mejorar este trabajo.

Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación (PAPIIT) con números de referencia IN011418 y IG 100218 y al proyecto CONACyT 23863.

A mis compañeros del Instituto, que en mayor o menor medida hicieron cada día una experiencia más que agradable, y volvieron mi estancia en esta ciudad única.

A mis amigos Anibal, Leidy, Aurora, Rebeca, Palmira, Natalia, Osmar, Miguel, Vianey y Alba Fernández, por cada momento compartido y el apoyo incondicional que siempre mostraron.

Mis dos familias morelianas, Alba Lumbreras, Fernando, Carlos, Enrique y Rubén, por su paciencia, apoyo, consejos y siempre estar a mi lado sin importar las circunstancias.

Mi agradecimiento infinito a mi familia, que a pesar de la distancia nunca me dejaron solo. Pero especialmente, mi mayor agradecimiento a mi madre, ya que sin ella nada hubiese sido posible.

Finalmente, gracias a todas las personas que de alguna manera han estado a mi lado y me han ayudado a crecer.

A todos ellos, muchas gracias.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Vientos magnetocentrífugos	7
1.2. Modelos de flujos moleculares	8
1.3. Rotación en flujos moleculares	10
1.4. Modelos de cáscara delgada	12
2. Formulación general	15
2.1. Ecuaciones de la cáscara	15
2.2. Vientos estelares y flujos de acreción	18
2.2.1. Viento estelar	19
2.2.2. Flujo de acreción	19
3. Inestabilidad de un modelo estático	23
3.1. Ecuaciones del modelo	23
3.1.1. Integrales del flujo de masa y momento en la dirección azimutal	24
3.2. Solución de las ecuaciones	25
3.2.1. Ecuaciones adimensionales	25
3.2.2. Condiciones de frontera en el polo	27
3.2.3. Análisis de parámetros libres	28
3.2.4. Análisis de estabilidad	30
3.3. Resultados	32
3.4. Discusión	36
4. Evolución dinámica de una cáscara	37
4.1. Ecuaciones del modelo	37
4.2. Solución de las ecuaciones	38
4.2.1. Ecuaciones adimensionales	38
4.2.2. Condiciones de frontera en el polo	40
4.2.3. Condiciones de frontera en el ecuador	41
4.3. Resultados	42
4.4. Discusión	47
5. Comparación con el flujo molecular de la Fuente I de Orion	49
5.1. Observaciones	49
5.2. Resultados	50
5.2.1. Resultados observacionales	50
5.2.2. Comparación con el modelo dinámico	52
5.3. Discusión	55

6. Discusión, conclusiones y trabajo a futuro	59
6.1. Discusión general	59
6.2. Conclusiones	60
6.3. Trabajo a futuro	60
A. Expansiones alrededor del polo	63
A.1. Flujo de acreción y viento estelar	63
A.2. Flujo de masa, flujos de momento y radio para un modelo estático	63
A.3. Flujo de masa, flujos de momento y radio para un modelo dinámico	65
B. Expansiones alrededor del ecuador	71
C. Comparación del modelo dinámico con los modelos de Wilkin & Stahler	81
D. Angular momentum in bipolar outflows: dynamical evolutionary model	83

Índice de figuras

1.1.	Imagen ilustrativa de los principales componentes de un flujo protoestelar.	6
1.2.	Diagrama esquemático de las componentes de un disco de acreción.	8
1.3.	Morfologías de un flujo molecular para los diferentes modelos de arrastre.	9
1.4.	Diagrama esquemático de un flujo molecular observado producido por vientos de disco.	10
1.5.	Mapa del momento 1 del flujo molecular CB 26.	11
1.6.	Forma de una cáscara formada por la colisión de dos vientos estelares esféricos. .	13
2.1.	Diagrama de integración para una cáscara delgada de radio $R_s(\theta, t)$ y ancho δ . .	16
2.2.	Isocontornos de densidad del viento estelar anisotrópico	18
2.3.	Trayectorias de las partículas del flujo de acreción de Ulrich desde el borde de la nube hasta la estrella central.	20
2.4.	Líneas de flujo del flujo de acreción proyectadas sobre un plano.	21
2.5.	Densidad del flujo de acreción como función de la coordenada radial para distintos ángulos polares θ	22
3.1.	Cociente entre las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β como función del radio en el polo.	29
3.2.	Cociente $f_a/f_{a,crit}$ como función del radio de la cáscara en el polo.	32
3.3.	Forma de la cáscara para el parámetro $\alpha = 0.1$ y diferentes valores del parámetro β	32
3.4.	Campo de velocidades de la cáscara como función de θ	33
3.5.	Densidad superficial de la cáscara como función de θ	34
3.6.	Flujo de momento angular específico en la dirección- z como función de θ	34
3.7.	Diagrama esquemático de un flujo molecular con un ángulo de inclinación $i \neq 0^\circ$ con respecto al plano del cielo.	35
3.8.	Velocidad sobre la línea de visión v_{los} para diferentes ángulos de inclinación i . . .	35
3.9.	Diagramas posición-velocidad con cortes perpendiculares al eje de rotación de la nube para diferentes alturas sobre el plano medio del disco.	36
4.1.	Forma de la cáscara para diferentes tiempos.	43
4.2.	Campo de velocidades de la cáscara como función de θ	43
4.3.	Densidad superficial de masa de la cáscara como función de θ	44
4.4.	Masa total de la cáscara como función del tiempo.	45
4.5.	Momento angular total de la cáscara como función del tiempo.	45
4.6.	Velocidad sobre la línea de visión v_{los} para diferentes tiempos y un ángulo de inclinación $i = 5^\circ$	46
4.7.	Diagramas posición-velocidad con cortes perpendiculares al eje de rotación de la nube.	46
4.8.	Forma de la cáscara para diferentes modelos de anisotropía	47

4.9.	Colimación de la cáscara C como función de B y n	48
5.1.	Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$ del flujo molecular.	51
5.2.	Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$ del flujo molecular.	52
5.3.	Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$ del flujo molecular.	53
5.4.	Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$	53
5.5.	Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$	54
5.6.	Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$	54
5.7.	Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco a una altura $z = -80$ AU.	54
5.8.	Diagrama esquemático de un flujo molecular.	56
5.9.	Parámetros físicos del flujo derivados de los diagramas posición-velocidad.	57
A.1.	Evolución del radio de la cáscara R_s en el polo para un viento estelar isotrópico ($B = 0$) y dos distintos valores de β	67
A.2.	Radio de la cáscara en el polo $\theta = 0$ como función del tiempo.	68
A.3.	Velocidad radial de la cáscara en el polo $\theta = 0$ como función del tiempo.	68
B.1.	Radio normalizado en el ecuador ($\eta = 0$) como función del tiempo.	79
B.2.	Campo de velocidades de la cáscara en el ecuador ($\eta = 0$) como función del tiempo.	79
C.1.	Comparación de la forma de la cáscara para los mismos parámetros y mismos pasos de tiempo en ambos modelos.	82

Índice de tablas

1.1. Parámetros observacionales de las fuentes con flujos moleculares con rotación. . .	12
3.1. Valores del radio, el cociente de las tasas de momento del viento estelar y flujo de acreción β y la densidad superficial para distintos valores del parámetro α	29
3.2. Comparación entre β_{\min} y β_{crit} para distintos valores del parámetro α y para el radio mínimo $r_{s0\min}$ correspondiente.	31
5.1. Líneas moleculares observadas.	50
A.1. Valores de β_{crit} para diferentes valores de α y del radio inicial $r_{s0}(0)$	67

Resumen

En este documento, se presenta un modelo teórico para explicar la formación y evolución de flujos moleculares asociados a estrellas en formación. Se asume que este flujo es una cáscara delgada formada por la interacción de un viento estelar rápido y una nube en colapso gravitacional con rotación; a este proceso, se le conoce como el escenario de arrastre de material. Tomando en cuenta lo anterior, se presenta un modelo general de la interacción de estos dos fluidos. Para ello, se integraron las ecuaciones de la hidrodinámica y se obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en el tiempo y en el espacio, que describen las propiedades físicas de la cáscara, que incluyen, los flujos de masa y momento y el radio de la cáscara. El modelo se presenta de forma general, es decir, se pueden usar envolventes y vientos estelares isotrópicos o anisotrópicos, con o sin rotación. En este trabajo, se hizo un estudio de la interacción de la envoltura con rotación estudiada por Ulrich (1976), y un viento estelar sin rotación. El análisis se realizó desde el punto de vista estático (sin dependencia temporal) y dinámico (con dependencia temporal), y para vientos estelares isotrópicos y anisotrópicos. Debido a que se espera que el viento estelar tenga momento angular, en un trabajo a futuro, se explorará la interacción dinámica de dos fluidos con rotación, un viento estelar y una envoltura en colapso gravitacional.

Para un análisis estático, el modelo general presentado, se reduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, dependientes de la coordenada polar θ , las cuales se resuelven numéricamente (se consideró únicamente un viento estelar isotrópico). Como resultado de la integración, se obtuvo la forma de la cáscara, la densidad superficial, el campo de velocidades, y el momento angular específico de la cáscara. Se encontró que la elongación de las cáscaras tiene una fuerte dependencia con el cociente β de las tasas de momentos del viento estelar y del flujo de acreción, es decir, para valores de β chicos (vientos estelares débiles) se tienen cáscaras esféricas, mientras que para valores grandes de β (vientos estelares fuertes) se tienen cáscaras elongadas en la dirección del eje de rotación. Por otra parte, las velocidades de rotación del flujo molecular obtenidas son un factor de 5 - 10 veces menores, $0.1 - 0.2 \text{ km s}^{-1}$, que las medidas observacionalmente. Finalmente, se encontró que este modelo es inestable ante perturbaciones radiales en la región del polo, es decir, si se aplica una fuerza radial en dirección de la estrella central, estas cáscaras colapsarán hasta la superficie estelar, mientras, si se aplica una fuerza en dirección opuesta, esta cáscara se expandirá hasta infinito.

Para el caso del modelo dinámico, se resolvieron numéricamente el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales en el tiempo y en el espacio, y se obtuvo, al igual que en el modelo estático, la forma de la cáscara, la densidad superficial, el campo de velocidades, y el momento angular del material dentro de la cáscara. Se encontró que se tiene un valor crítico del cociente de las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción, β , que permite que la cáscara se expanda. Para el caso de la región ecuatorial, para un valor dado de β , la cáscara se expande rápidamente y se estanca en una región cercana al radio centrífugo, esto se debe a que la densidad del flujo de acreción diverge en esta región. Como se espera, la elongación de las cáscaras incrementa con la anisotropía del viento estelar. En estos modelos, la velocidad de rotación del flujo molecular

es del orden de $0.1 - 0.2 \text{ km s}^{-1}$, un factor de 5 - 10 veces menor que los valores medidos observacionalmente. Adicionalmente, se compararon estos modelos con los de Wilkin & Stahler para tiempos de evolución tempranos, y se encontró que nuestras cáscaras tienen el mismo tamaño en el polo, a pesar de que se usaron diferentes condiciones de frontera en el ecuador.

Finalmente, se hizo una comparación del modelo de evolución dinámica con datos observacionales de la Fuente I de Orion de las líneas moleculares de ^{29}SiO (J=8-7) $\nu = 0$, SiS (J=19-18) $\nu = 0$, y SiO (J=8-7) $\nu = 1$ obtenidas del *Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array* (ALMA). Por medio de diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco, hechos a distintas alturas, se obtuvo que, tanto el radio externo como la velocidad de expansión del flujo aumentan con la distancia al disco. Por otra parte, la velocidad de rotación y el ángulo de apertura decrecen con la distancia al disco. Como resultado de la comparación entre el modelo teórico y el análisis observacional, se encontró que el modelo reproduce muy bien el radio externo, la velocidad de expansión y el ángulo de apertura, es decir, el comportamiento de los datos observacionales y los valores teóricos son consistentes. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, las velocidades de rotación provenientes del modelo están por debajo de las medidas observacionalmente hasta en un factor de diez, adicionalmente, se encontró que estos resultados no sólo difieren en valor, sino que, su comportamiento es distinto. Por un lado, los valores de la velocidad de rotación medidos observacionalmente decrecen suavemente conforme aumenta la distancia al disco de acreción, mientras que los obtenidos teóricamente decrecen abruptamente con la distancia.

Por medio del análisis de los resultados del modelo y la comparación con los datos observacionales, se fortalece la idea de que un flujo molecular se forma por el arrastre de material de la nube. Finalmente, el origen del momento angular del flujo molecular, sigue estando en debate, pues aún no queda claro si su contribución proviene del viento estelar, de la nube molecular, una combinación de ambos o inclusive del disco de acreción (si se considera que el arrastre de material se debe a un viento eyectado del disco de acreción). Para poder discernir si el origen del momento angular en flujos moleculares proviene del viento estelar o del flujo de acreción, teóricamente es necesario explorar la interacción de un flujo de acreción con rotación y un viento estelar con rotación, o de ser necesario, la interacción de este flujo de acreción con un viento de disco. Por otra parte, observacionalmente, haría falta encontrar más fuentes que presenten rotación, esto para poder tener una mejor estadística en la comparación entre teoría y observaciones.

Summary

In this thesis, we present a theoretical model in order to explain the formation and the evolution of the molecular outflows associated to protostars. We assume that the molecular outflow is a thin shell formed by the interaction between a fast stellar wind and a rotating cloud envelope in gravitational collapse; this process is known as the entrainment scenario. We present a general interaction model of these two fluids. The hydrodynamics equations are integrated and we obtain a set of partial differential equations, these equations are space and time dependent, and describe the physical properties of the shell, e.g., the mass and momentum fluxes and the radius. We have formulated the problem in such a way that we can consider an accretion flow and a stellar wind with general velocity fields (collimated or not collimated and with or without rotation) provided that they have axial symmetry. In this work, we have done a study of the interaction between the rotating envelope studied by Ulrich (1976), and a stellar wind without rotation. We show an analysis from the static and dynamic standpoint and we consider both isotropic and anisotropic stellar winds. Initially, we expected that the stellar wind has angular momentum, in a future work, we will explore the dynamic interaction between two fluids with rotation.

In the static analysis, the general model presented in this document is reduced to a set of ordinary differential equations. These equations only depend on the polar coordinate θ . We solve numerically these equations, for a isotropic stellar wind, and we obtain the shape of the shell, the surface density, the velocity field, and the specific angular momentum of the shell. We find that the elongation depends on the ratio between the wind and the accretion flow momentum rates β , i.e., for small values of β (weak stellar winds) we have a spherical shell, while, for large values of β (strong stellar winds) we have elongated shells in the direction of the rotational axis of the cloud. On the other hand, the rotation velocities of the molecular outflows are $0.1 - 0.2 \text{ km s}^{-1}$, a factor of 5 - 10 lower than the values measured in several sources. Finally, this model is unstable for any radial disturbance at the pole, if we apply a radial force in the direction of the star, the shell collapses back to the stellar surface, on the other hand, if we apply a radial force in the opposite direction of the star, the shell expands to infinity.

For the dynamical model, we consider spherical and anisotropic stellar winds, and we solve numerically a set of partial differential equations in space and time, and obtain the shape of the shell, the mass surface density, the velocity field, and the angular momentum of the material into the shell. We find that there is a critical value of the ratio between the wind and the accretion flow momentum rates β that allows the shell to expand. As expected, the elongation of the shells increases with the stellar wind anisotropy. In our models, the rotation velocity of the shell is of the order of $0.1 - 0.2 \text{ km s}^{-1}$, a factor of 5-10 lower than the values measured in several sources. We compare our models with those of Wilkin & Stahler for early evolutionary times and find that our shells have the same sizes at the pole, although we use different boundary conditions at the equator.

We made a comparison between the dynamical model and ^{29}SiO (J=87) $\nu = 0$, SiS (J=1918) $\nu = 0$, and SiO (J=87) $\nu = 1$ molecular line observations made with the Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array (ALMA) of the molecular outflow associated with the young

star of Orion Source I. The observational results show velocity asymmetries about the flow axis, these asymmetries can be interpreted as rotation. The rotation velocity at different distances respect to the accretion disk is of the order of $\sim 5 \text{ km s}^{-1}$, and decreases if the distance increases. Also, from the observational data, we measured the outer radius, the expansion velocity, and the opening angle. The outer radius and the expansion velocity increase with the distance respect to the accretion disk, and the opening angle decreases with the distance. As a result of the comparison with the theoretical model, we find that the values of the outer radius, the expansion velocity, and the opening angle are consistent, also, these quantities have the same behavior. However, the rotation velocity of the model is lower than the observed in the range of 3 - 10 times lower.

Finally, we conclude that the discrepancy between the observed and theoretical angular momentum of the molecular outflow may be resolved, if that the stellar wind has angular momentum, or the parent cloud has more angular momentum than the Ulrich's flow, or with a combination of both mechanisms. Also, with the comparison of the dynamical model with the observational data, the idea that the molecular outflow is formed by the entrainment material of the molecular cloud is strengthened.

Capítulo 1

Introducción

En el modelo estándar de formación estelar, se propone que las estrellas de baja masa son el resultado del colapso gravitacional de núcleos moleculares densos (Shu et al. 1987). Las diferentes fases evolutivas de los objetos estelares en formación (objetos protoestelares) pueden clasificarse de acuerdo a su distribución espectral de energía (SED). La SED de los objetos protoestelares se clasifica en cuatro fases evolutivas (Adams et al. 1987, Lada 1987 y André et al. 1993), las cuales se resumen a continuación:

- Clase 0: Tienen una edad estimada $\leq 10^4$ yr (André et al. 1993). Su emisión es muy débil en óptico e infrarrojo, sin embargo, tienen una luminosidad significativa a longitudes de onda submilimétricas. Su SED es muy similar a la de un cuerpo negro de baja temperatura ($\sim 10 - 30$ K).
- Clase I: Sus edades son del orden de $\sim 10^5$ yr (Kenyon & Hartmann 1995). Su emisión es dominante a longitudes de onda infrarrojas y milimétricas. Su SED es más ancha que la de un cuerpo negro, con un exceso en el infrarrojo, asociada a grandes cantidades de polvo.
- Clase II: Tienen una edad $\sim 10^6$ yr (Cohen & Kuhl 1979). Presentan fuerte emisión a longitudes de onda ópticas e infrarrojas. Su SED se caracteriza por tener dos partes dominantes, una parte óptica, asociada a la estrella central, y una parte infrarroja asociada a un disco de acreción.
- Clase III: La edad estimada de estas fuentes es $\sim 10^7$ yr (Walter 1986). Se caracterizan por una emisión en óptico. Su SED es similar a la de un cuerpo negro con una temperatura única, consistente con la de una fotosfera de una estrella joven.

El modelo anteriormente mencionado explica la formación de estrellas de baja masa, sin embargo, aplicar este modelo a la formación de estrellas de alta masa ($M_* > 8 M_\odot$) es discutible. Esto se debe al hecho que la formación de estas estrellas ocurre en escalas de tiempo mucho más cortas con respecto a la estrellas de baja masa. Adicionalmente, inician la quema de hidrógeno y alcanzan la secuencia principal antes de terminar la etapa de acreción de la envoltura, por lo tanto, la presencia de discos de acreción, flujos moleculares y jets protoestelares no está claro (Garay & Lizano 1999). Sin embargo, Patel et al. (2005) en Cepheus A HW2 y Carrasco-González et al. (2010) y Girart et al. (2018) en HH 80-81, mostraron la presencia de un disco de acreción y un jet protoestelar en una estrella masiva en formación.

En las etapas más tempranas de la evolución estelar (Clase 0), se genera un viento altamente colimado y con altas velocidades de expansión ($100 - 200 \text{ km s}^{-1}$) a lo largo del eje de rotación de la nube, a este viento se le conoce como jet protoestelar. El jet protoestelar acelera y arrastra el gas de la nube progenitora creando así un flujo molecular (Arce et al. 2007). Por lo tanto, un

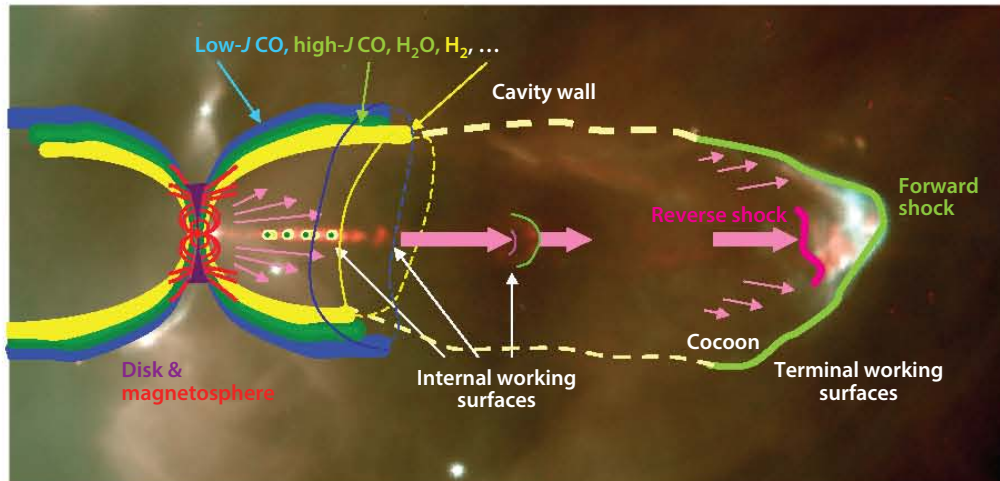


Figura 1.1: Imagen ilustrativa de los principales componentes de un flujo protoestelar. El tamaño del disco (púrpura), la componente poloidal del disco, el campo magnético estelar (líneas rojas) y el flujo molecular se han exagerado. El choque delantero se muestra en color verde claro y el choque reverso en color magenta, al igual que las superficies de trabajo de los choques internos. Las bajas transiciones de CO se muestran en azul, mientras que las altas transiciones de CO se muestran en verde. El color amarillo muestra la emisión de H_2 . La línea amarilla discontinua muestra la pared de la cavidad del flujo. La imagen muestra el objeto HH 34 y la emisión de H_α (cian) y [SII] (rojo) del jet. Imagen tomada de Bally (2016).

flujo molecular puede entenderse como el material de la envoltura arrastrado por un viento, ya sea en forma de jet protoestelar o de viento con un amplio ángulo de apertura.

Existe evidencia observacional de que, durante la etapa de acreción, en las fases tempranas de la formación estelar existe una etapa de eyección de material del objeto protoestelar, asociadas a jets protoestelares, flujos moleculares y objetos Herbig-Haro (HH). Se cree que los objetos HH (Herbig 1951 y Haro 1952) se forman cuando los jets protoestelares chocan con el material de la envoltura generando ondas de choque que ionizan y calientan el gas (e.g., Reipurth & Bally 2001), o por fluctuaciones en la velocidad de eyección del jet (e.g., Raga et al. 1990). Por lo tanto, se puede definir como un flujo protoestelar el material eyectado del sistema protoestelar que contiene el jet protoestelar, un viento estelar de ángulo amplio, el flujo molecular y los objetos HH.

Las morfologías, tamaños y velocidades de los flujos protoestelares dependen específicamente del trazador usado; de la luminosidad, masa, etapa evolutiva y edad del objeto protoestelar; así como, de las propiedades del ambiente en el que este flujo se está moviendo. Los flujos moleculares jóvenes, son pequeños y mejor trazados por las moléculas de CO, SiO, H_2O y H_2 , además, son compactos, consistentes con cáscaras impulsadas por el jet protoestelar, estas cáscaras contienen las moléculas arrastradas. Por otra parte, los flujos moleculares más evolucionados, pueden crecer hasta escalas de parsecs y son mejor trazados por iones y átomos excitados por choques, tales como las líneas prohibidas [SII] y [OII], y son bien trazados por los objetos Herbig-Haro (HH) (Bally 2016).

En la Figura 1.1 se muestra un diagrama ilustrativo de un flujo protoestelar típico. Las cáscaras externas del flujo rodean las cavidades de baja densidad llenadas por el viento de ángulo amplio y por el material chocado del jet protoestelar. En ausencia de vientos de ángulo amplio, estas cavidades pueden formarse por el movimiento lateral del material chocado por el jet protoestelar, producido por variaciones en la velocidad de eyección. Los choques excitan los átomos y las moléculas del flujo protoestelar. En ausencia de radiación externa, la emisión del

medio chocado hace que el jet protoestelar sea visible. La expansión supersónica de la cáscara barrida en el medio, puede producir choques de baja velocidad que evaporan el H_2O de los granos y excitan las transiciones de H_2 , CO , y otras moléculas. La radiación ultravioleta del objeto protoestelar, puede disociar el H_2O para producir OH y excitar altas transiciones de CO (Bally 2016). Los flujos de cizallamiento a lo largo de la pared de la cavidad pueden producir vórtices y choques (Mottram et al. 2014).

El borde frontal del flujo protoestelar (Figura 1.1), forma una superficie de trabajo donde el material del ambiente es barrido como una cáscara chocada y comprimida, a este proceso se le llama arrastre rápido. Las variaciones en la velocidad del jet protoestelar son responsables de las estructuras complejas de los choques internos, donde las velocidades del choque generalmente son más bajas que el movimiento del jet protoestelar mismo. El cizallamiento entre el viento de ángulo amplio y las cáscaras externas del flujo protoestelar pueden provocar inestabilidades Kelvin-Helmholtz y un mezclado turbulento, transfiriendo el momento del flujo al medio ambiente, a este proceso se le conoce como arrastre continuo (Bally 2016).

El estudio de los flujos moleculares y los jets protoestelares es de fundamental importancia para entender el proceso de formación estelar. Los flujos moleculares probablemente limitan la masa del sistema disco-protoestrella (Shu et al. 1993) y pueden inducir cambios en la composición química de la nube progenitora, esto debido al arrastre de las moléculas desde la envoltura de la protoestrella hasta el exterior de la nube (Bachiller 1996). Lo anterior, se debe a que el flujo molecular es una mezcla del material arrastrado de la nube molecular y el viento estelar eyectado (Snell et al. 1980).

Los flujos moleculares están presentes durante gran parte del proceso de formación estelar, y parecen ser más fuertes y colimados durante las fases más tempranas (Bontemps et al. 1996). Mientras casi todos los objetos protoestelares Clase 0 tienen asociado un flujo molecular, un *survey* óptico y de flujos moleculares en la nube Taurus-Auriga (Gomez et al. 1997), encontró una tasa de incidencia del 60% en objetos Clase I, pero sólo el 10% en objetos Clase II, y ninguno en objetos Clase III.

Los primeros flujos moleculares bipolares fueron descubiertos por Snell et al. (1980) en la nube L1551 de Taurus-Auriga y por Rodríguez et al. (1980) en Cepheus A. Desde entonces, alrededor de 1000 flujos han sido descubiertos (Wu et al. 2004 y Li et al. 2019). Los flujos moleculares típicamente presentan bajas velocidades ($\leq 25 \text{ km s}^{-1}$) y lóbulos colimados, con cocientes largo-ancho entre 3 - 10 (Bontemps et al. 1996).

Los flujos moleculares producidos por objetos protoestelares de baja masa ($M_* \leq 1 M_\odot$), presentan tasas de pérdida de masa entre 10^{-7} - $10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ y tasas de momento de $10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1} \text{ km s}^{-1}$ (e.g., Bontemps et al. 1996; Ellerbroek et al. 2013). Por otra parte, los flujos provenientes de protoestrellas OB ($M_* > 8 M_\odot$), tienen tasas de pérdida de masa entre 10^{-5} - $10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ y tasas de momento entre 10^{-4} - $10^{-2} M_\odot \text{ yr}^{-1} \text{ km s}^{-1}$ (e.g., Greenhill et al. 1998; Tafuya et al. 2004; Maud et al. 2015).

1.1. Vientos magnetocentrífugos

El mecanismo magnetocentrífugo (Blandford & Payne 1982), es considerado el principal candidato para producir jets protoestelares y vientos de estrellas jóvenes (ver *reviews* de Königl & Pudritz 2000 y Shu et al. 2000). En este mecanismo, el campo magnético anclado al sistema disco-estrella, es el responsable de la aceleración y colimación del jet (ver también Pudritz et al. 2007 y Shang et al. 2007). Sin embargo, al día de hoy, se debate donde están anclados estos campos magnéticos en el disco: podrían estar anclados a una región cercana al radio de truncamiento R_x del disco por la magnetósfera estelar (vientos-X, e.g., Shu et al. 1994) o en un rango más amplio de radios (vientos de disco, e.g., Pudritz & Norman 1983). En la Figura 1.2

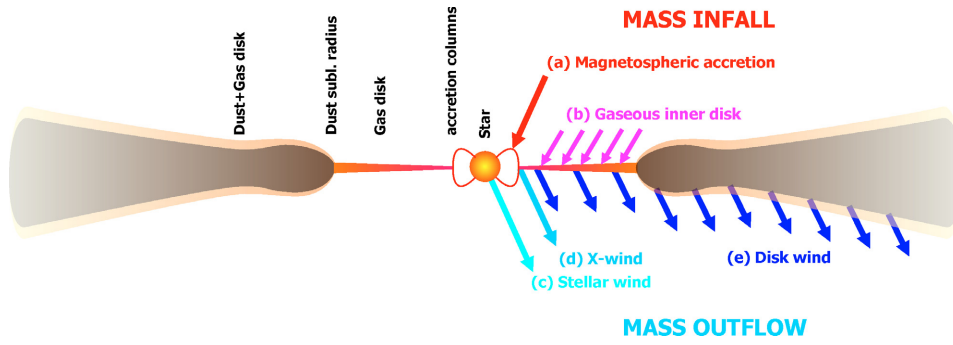


Figura 1.2: Diagrama esquemático de las componentes de un disco de acreción. Figura tomada de Kraus et al. (2008).

se muestra un diagrama esquemático donde se puede observar que los vientos-X son eyectados desde la parte interna del disco, mientras que los vientos de disco se eyectan de un radio mayor al radio R_x .

Los modelos magnetohidrodinámicos predicen que el material eyectado del disco por el mecanismo magnetocentrífugo tiene una componente toroidal de momento angular, relacionada a la rotación en el radio de lanzamiento del disco. Por lo tanto, la velocidad de rotación observada en el jet puede dar información acerca de su radio de origen en el disco (Anderson et al. 2003). Bajo la consideración que los vientos magnetocentrífugos probablemente son rápidos, en el sentido de que necesitan suficiente energía cinética para escapar del potencial de la estrella central, Anderson et al. (2003) encontraron una relación para calcular el radio de lanzamiento de estos vientos ϖ_0 , conociendo la distancia al eje de rotación ϖ_∞ y la masa de la estrella central M_* . Para ello, consideraron que la componente de la velocidad en la dirección poloidal del viento $v_{p,\infty}$, es mucho mayor que la componente de velocidad en la dirección toroidal $v_{\phi,\infty}$ ($v_{p,\infty} \gg v_{\phi,\infty}$). Dicha relación es

$$\varpi_0 \approx 0.7 \text{ AU} \left(\frac{\varpi_\infty}{10 \text{ AU}} \right)^{2/3} \left(\frac{v_{\phi,\infty}}{10 \text{ km s}^{-1}} \right)^{2/3} \left(\frac{v_{p,\infty}}{100 \text{ km s}^{-1}} \right)^{-4/3} \left(\frac{M_*}{1 M_\odot} \right)^{1/3}. \quad (1.1)$$

Por ejemplo, Lee et al. (2009) y Lee et al. (2017), usando la ecuación anterior, encontraron que los jets protoestelares HH 211 y HH 212, respectivamente, son eyectados desde un radio muy pequeño, entre 0.014 - 0.05 AU para el caso de HH211 y 0.03 - 0.1 AU para HH 212. Estos radios son consistentes con el modelo de vientos-X. Por otra parte, Estalella et al. (2012) para el jet protoestelar asociado a la fuente HH 30, encontraron un radio de lanzamiento que oscila entre 0.07 - 0.6 AU, este rango de radios posibles apoya la teoría de vientos de disco, ya que no se tiene único radio de lanzamiento, si no que el jet puede ser lanzado simultáneamente de distintos radios, lo cual es necesario para explicar las asimetrías en la velocidad poloidal del jet, las cuales reportan entre 100 - 300 km s⁻¹.

1.2. Modelos de flujos moleculares

Existen dos escenarios propuestos para la formación de flujos moleculares (Matsushita et al. 2019): el de arrastre de material de la nube o envoltente por vientos estelares rápidos y el de vientos de disco. En el primer caso, los vientos estelares rápidos colisionan con la nube progenitora acelerando y arrastrando el material (ver Arce et al. 2007 y Bally 2016). En el último caso, los flujos moleculares son eyectados directamente del disco de acreción (e.g., Pudritz & Norman 1986).

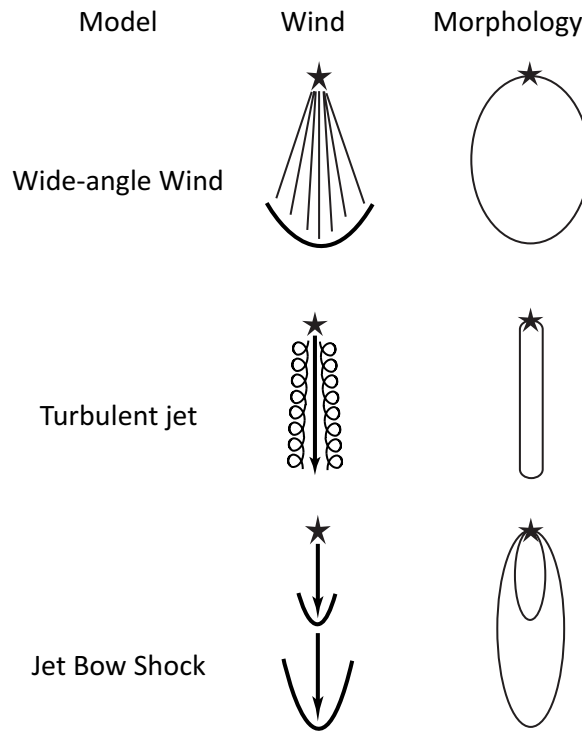


Figura 1.3: Morfologías de un flujo molecular para los diferentes modelos de arrastre. Figura tomada de Arce & Goodman (2002).

Para explicar un flujo molecular producido por el arrastre de material por un viento estelar, existen tres modelos propuestos en la literatura: modelos de cáscara impulsada por un viento con un ángulo de apertura amplio; modelo de jet protoestelar turbulento; modelo de choque de proa producido por un jet protoestelar. En la Figura 1.3 se muestra la morfología tanto del viento que impulsa el material arrastrado como del flujo molecular producido por los tres modelos de arrastre de material.

En los modelos de cáscara impulsada por un viento con un ángulo de apertura amplio, se considera que un viento radial entra en contacto con un medio ambiente estratificado, formando una cáscara delgada, la cual se asume que es el flujo molecular (e.g., Shu et al. 1991; Matzner & McKee 1999; Cantó et al. 2006). Esta clase de modelos es usada para explicar flujos moleculares evolucionados de gran tamaño y poca colimación.

En el modelo de jet turbulento, las inestabilidades Kelvin-Helmholtz a lo largo de la frontera entre el jet y el medio ambiente conducen a la formación de una capa de mezcla turbulenta y viscosa, a través de la cual se arrastra el material de la nube molecular (Cantó & Raga 1991; Raga et al. 1993; Stahler 1994). La capa de mezcla crece tanto en el medio ambiente como en el jet y eventualmente todo el flujo se vuelve turbulento.

En el modelo de un choque de proa producido por un jet, un jet altamente colimado se propaga a través del material circundante produciendo una cáscara delgada alrededor del jet (Raga & Cabrit 1993; Masson & Chernin 1993). A medida que el jet impacta el material del ambiente, se forman un par de choques en la cabeza del jet, un *jet shock* y un choque de proa. El gas de alta presión entre ambos choques se expulsa lateralmente e interactúa con el medio ambiente no perturbado, lo que produce un flujo similar a una cáscara alrededor del jet. En este modelo, debido a la variación episódica en la velocidad del jet y en la tasa de pérdida de masa, se puede producir una cadena de choques a lo largo del eje del jet.

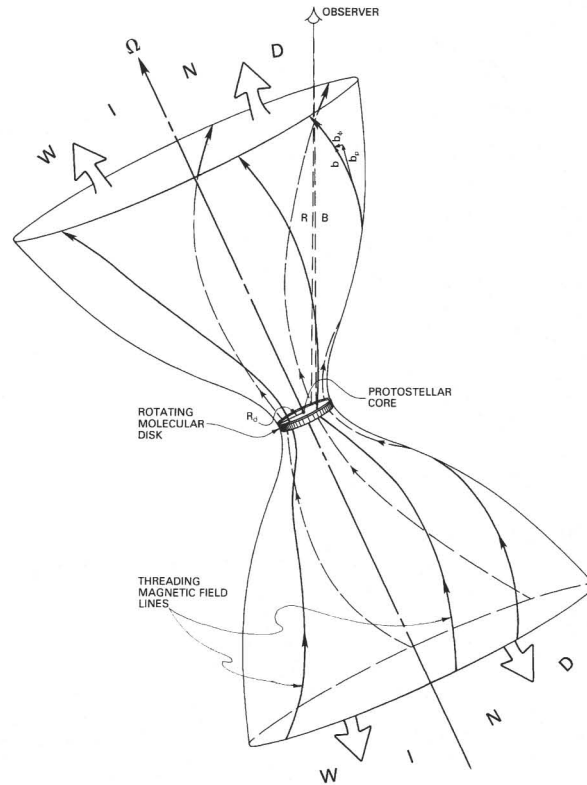


Figura 1.4: Diagrama esquemático de un flujo molecular observado producido por vientos de disco. En la imagen se muestra como el gas del flujo molecular acelerado se origina a un radio r en el disco. El campo magnético anclado al disco a un radio r es lo suficientemente fuerte como para forzar a que el gas corrote con el disco hasta el radio de Alfvén r_A . Esta corrotación es la que acelera el gas para formar un flujo molecular. Figura tomada de Pudritz & Norman (1986).

En el escenario de un flujo molecular eyectado directamente del disco de acreción, se supone que estos flujos moleculares son eyectados centrífugamente por el campo magnético del disco (Pudritz & Norman 1983). El principal soporte de este modelo es que los vientos de rotadores magnéticos son extremadamente eficientes en la extracción de momento angular y energía rotacional de un cuerpo magnetizado con rotación. El gas es acelerado debido a que el campo magnético impone una corrotación con el disco a distancias relativamente grandes, por lo tanto, se crean flujos fríos con alta velocidad terminal. Los discos son una atractiva fuente de viento, debido a que su gravedad es mucho menor que la del objeto protoestelar. En la figura 1.4, se muestra un diagrama esquemático de la formación de un flujo molecular eyectado directamente del disco. Una prueba observacional que caracteriza a los mecanismos magneto-centrífugos como impulsores de vientos de disco, es buscar asimetrías del gas en el flujo molecular, es decir, corrimientos al rojo o al azul del gas, una característica de rotación (Pudritz & Norman 1986).

1.3. Rotación en flujos moleculares

La primera evidencia de rotación encontrada en un jet fue presentada por Davis et al. (2000) para la fuente HH 212 en observaciones infrarrojas. Encontraron evidencia de rotación de unos pocos km s^{-1} . Sin embargo, la primera evidencia de rotación en un flujo molecular fue reportada por Launhardt et al. (2009), en el flujo de CB 26: en este objeto, se reporta una diferencia de velocidades de 1.1 km s^{-1} a una distancia de 100 AU del eje de rotación del flujo y a una altura

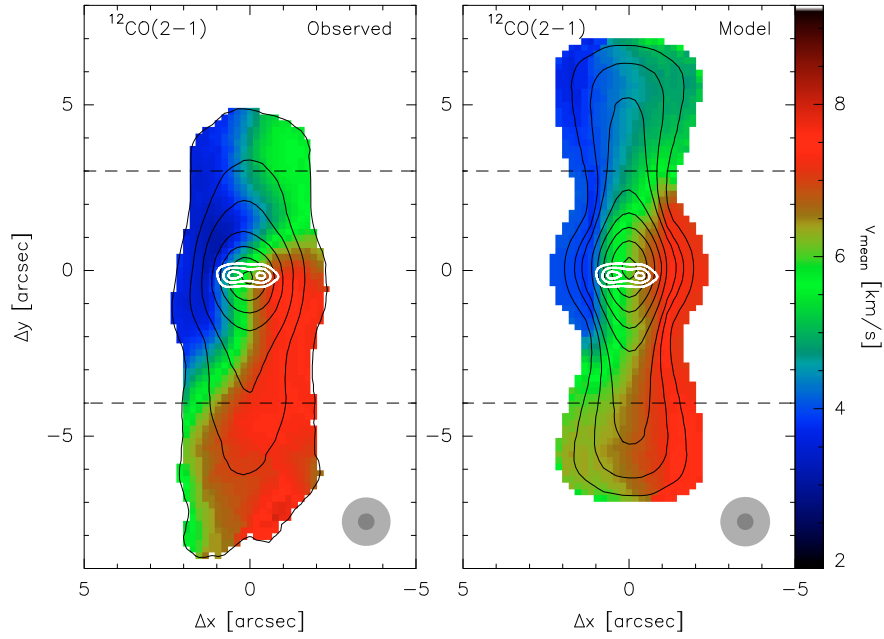


Figura 1.5: Mapa del momento 1 del flujo molecular CB 26 (Launhardt et al. 2009) girado 30° . Los contornos en negro representan la intensidad integrada de ^{12}CO . Los contornos blancos indican la emisión continua del polvo a 1.1 mm del disco observada con el *Submillimeter Array* (SMA). Panel izquierdo: observaciones. Panel derecho: mejor modelo para la emisión ^{12}CO (2-1). Las líneas punteadas representan la altura a la que los autores realizaron los diagramas posición-velocidad.

sobre el plano medio del disco de 420 AU. En la Figura 1.5 se muestra el mapa del momento 1 de la emisión de la molécula de ^{12}CO ($J=2-1$) del flujo CB 26. En esta figura se puede observar claramente una diferencia de velocidades, es decir, la parte izquierda del flujo está corrida al azul, lo cual indica que se acerca al observador, mientras que la parte derecha del flujo presenta un corrimiento al rojo, lo que indica que se está alejando. El panel derecho muestra el modelo de la observación presentado por dichos autores en el que suponen que es un viento de disco.

En años recientes, se ha observado rotación en otros flujos moleculares, los cuales también están casi sobre el plano del cielo. Estas fuentes son: Ori-S6 (Zapata et al. 2010), HH 797 (Pech et al. 2012), DG Tau B (Zapata et al. 2015), Orion Source I (Hirota et al. 2017), HH 30 (Louvet et al. 2018) y NGC 1333 IRAS 4C (Zhang et al. 2018). En la Tabla 1.1, se presentan las principales características de estas fuentes. En la primera columna se muestra el nombre de la fuente central a la cual está asociada el flujo molecular, la segunda columna da las líneas moleculares observadas, la tercer columna indica la masa de la estrella central M_* , la cuarta columna muestra la diferencia de velocidades a través del flujo (velocidad de rotación) Δv_ϕ , la quinta columna es la distancia al eje de rotación Δr , y finalmente, la sexta columna indica la altura sobre el plano medio del disco z_{cut} del corte.

En estos trabajos, algunos autores, han asumido que el flujo molecular es eyectado directamente del disco. Así que, desde la velocidad de rotación observada han obtenido radios de lanzamiento entre 10 - 50 AU (e.g., Launhardt et al. 2009; Pech et al. 2012). Sin embargo, Zapata et al. (2015), mostró que los vientos magneto-centrífugos y fotoevaporados del disco no tienen suficiente momento lineal o angular para explicar las tasas de momento lineal y angular observadas en el flujo de DG Tau B. Encontraron que las tasas observadas son más grandes en un factor de 100 debido a que los vientos de disco no son suficientemente masivos. Flujos moleculares con una gran cantidad de masa pueden ser explicados, si estos no son eyectados del

Tabla 1.1: Parámetros observacionales de las fuentes con flujos moleculares con rotación.

Fuente	Observaciones	M_* (M_\odot)	Δv_φ (km s^{-1})	Δr (AU)	z_{cut} (AU)
CB26	HCO^+ (J=1-0) y ^{13}CO (J=2-1)	0.5	1.1	100	560
Ori-S6	SO (J=6-5 y J=5-4) y ^{12}CO (J=2-1)	2.0	2.0	1000	1200
HH 797	^{12}CO (J=2-1)	1.0	2.0	1000	7500
DG Tau B	^{12}CO (J=2-1)	0.5	1.0	150	450
Orion Source I	Si^{18}O y H_2O	8.7	5.0	80	150
HH 30	^{12}CO (J=2-1) y ^{13}CO (J=2-1)	0.45	0.4	150	200
NGC 1333 IRAS 4C	CCH	0.18	0.4	470	700

disco, sino que son formados principalmente por el material arrastrado de la nube progenitora.

Una explicación alternativa a la interpretación de una diferencia de velocidades como rotación es propuesta por De Colle et al. (2016). Ellos demostraron que tales diferencias pueden deberse a choques asimétricos, producidos por la interacción del viento estelar con el medio ambiente o por asimetrías en la velocidad de eyección del sistema disco-estrella.

1.4. Modelos de cáscara delgada

Considerando el escenario de un flujo molecular producido por el arrastre de material, se pueden modelar estos flujos como una cáscara impulsada por el viento y formada por la interacción entre un viento estelar radial y la nube del ambiente. La nube también puede ser una envolvente en acreción. Si se considera un flujo molecular como una cáscara formada por dicha interacción, se puede asumir que la rotación observada en los flujos moleculares, se debe al momento angular transportado, ya sea del viento estelar o de la nube en colapso. El problema de la interacción de dos fluidos es de gran interés y ha sido estudiado detalladamente en el pasado. Los primeros análisis de este problema fueron llevados a cabo por Huang & Weigert (1982) y por Girard & Willson (1987).

Considerando la interacción de un viento estelar con un flujo plano paralelo, Wilkin (1996) presentó un formalismo considerando conservación del flujo de masa y del flujo de momento lineal para encontrar la forma de una cáscara delgada. Mostró que una cáscara puede describirse totalmente por tres cantidades: el radio, la densidad superficial, y la velocidad tangencial del material chocado a lo largo de la cáscara. Este formalismo, describe la forma de la cáscara por medio de una ecuación diferencial con solución analítica, y el resultado puede ser usado para comparaciones con fuentes observadas y choques de proa.

Por otra parte, Cantó et al. (1996), retomó el problema de Wilkin (1996), y por medio de un análisis de conservación de masa, momento lineal y momento angular a lo largo de la cáscara, encontró la forma de ésta para dos casos: una interacción entre un viento estelar esférico y un flujo plano paralelo y dos vientos estelares esféricos. Para el primer caso, encontraron una solución algebraica de la forma de la cáscara, la cual es consistente con la de Wilkin (1996). Mientras que, para el caso de una cáscara formada por la colisión de dos vientos estelares esféricos, el radio de la cáscara depende de la distancia entra ambas fuentes, de la posición angular de donde estos vientos son lanzados, así como del cociente de tasa de momento de los dos vientos. En la Figura 1.6, se muestra la forma de la cáscara formada por la colisión de dos vientos estelares esféricos para diferentes valores del cociente de las tasas de momento de ambos vientos. Esta formulación, puede ser de gran interés para el estudio de flujos moleculares, debido a que se podría encontrar la forma de estos objetos conociendo las propiedades del medio ambiente y del viento estelar y

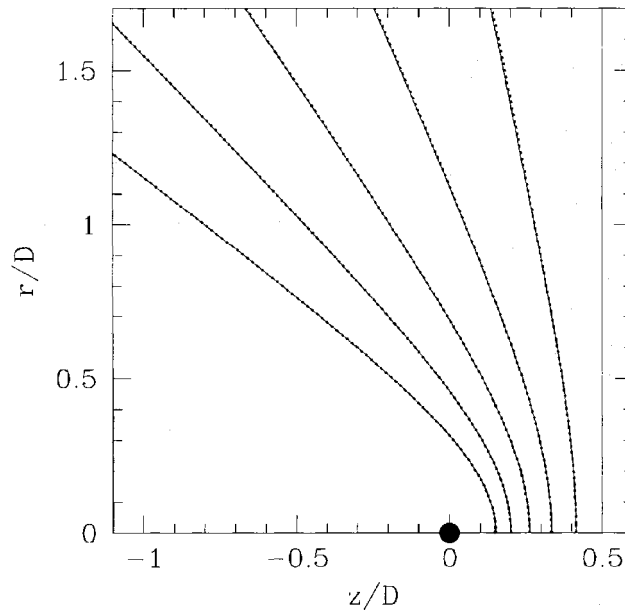


Figura 1.6: Forma de una cáscara formada por la colisión de dos vientos estelares esféricos. La línea sólida indica la solución exacta del radio de la cáscara, mientras que, la línea punteada muestra la aproximación algebraica. Se muestran cáscaras para distintos valores del cociente de las tasas de momento de ambos vientos: 1 (línea vertical), 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125 (cáscara más interna y curvada). La primera fuente se localiza en el origen, mientras que la segunda está localizada en $z/D = 1$, a la derecha del gráfico. Imagen tomada de Cantó et al. (1996).

poder comparar con fuentes observadas.

Wilkin & Stahler (1998), obtuvieron la secuencia evolutiva de una cáscara formada por la colisión de un viento estelar esférico y una nube en colapso gravitacional con rotación, bajo la suposición de una cáscara cuasi-estática, es decir, la expansión o contracción de la cáscara es más lenta en comparación con las velocidades del viento o del flujo de acreción. Estos autores, encuentran que para tiempos tempranos de la evolución, las cáscaras son esféricas y se van elongando, en dirección del eje de rotación de la nube, conforme aumenta el tiempo. Adicionalmente, encuentran que la principal fuerza que confina estas cáscaras no es la presión hidrodinámica, sino la gravedad.

Por otra parte, Wilkin & Stahler (2003), estudiaron la dinámica de una cáscara formada por la colisión de los fluidos mencionados anteriormente. En su estudio, totalmente dependiente del tiempo, únicamente consideraron etapas muy tempranas de la evolución de la cáscara, donde encontraron que para estos tiempos, el viento estelar no sólo debe contrarrestar la presión hidrodinámica asociada al material en colapso, sino también el peso de la cáscara debido a la gravedad de la estrella, por lo tanto, para que exista expansión de estas cáscaras, no sólo es necesario la presión hidrodinámica del viento estelar, sino que dicho viento debe tener suficiente energía cinética. Estos autores reportaron que la colimación de las cáscaras no es consistente con la que presentan las fuentes observadas. Adicionalmente, mostraron que un estudio cuasi-estático de este problema, produce cáscaras inestables ante perturbaciones radiales. Tanto en este modelo, como en el de Wilkin & Stahler (1998), los autores tomaron en cuenta la gravedad que ejerce la estrella central sobre la cáscara y los efectos centrífugos sobre la misma.

Finalmente, Mendoza et al. (2004), estudiaron la evolución de una cáscara delgada formada por la interacción hidrodinámica entre un flujo de acreción con rotación y un viento estelar isotrópico. Sin embargo, no consideran la fuerza gravitacional que ejerce la estrella central sobre

el gas de la cáscara ni los términos centrífugos en la ecuación de equilibrio. Bajo las consideraciones anteriormente descritas, estos autores encuentran que para valores grandes del cociente de tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción, la cáscara formada se expande hasta infinito y la consideración de cáscara delgada se rompe. Por otra parte, para valores pequeños de este cociente ($< 1/2$), es posible que la cáscara alcance un valor estable (la presión hidrodinámica del flujo de acreción y del viento son comparables).

En este documento se presenta el estudio de una cáscara formada por la interacción de un viento estelar y una nube en colapso gravitacional con rotación. Se considera que un flujo molecular es una cáscara delgada empujada por un viento estelar rápido, la cual gana masa tanto del viento estelar como del flujo de acreción. En nuestros modelos se consideran tanto la atracción gravitacional ejercida por la estrella central, como los efectos centrífugos sobre el material dentro de la cáscara. Se hace un estudio estático y dinámico. Para el último caso, se sigue la evolución de la cáscara desde la superficie estelar hasta grandes distancias de la estrella central. Se asumen flujos moleculares producidos tanto por vientos estelares isotrópicos y axisimétricos como vientos con una dependencia angular. Adicionalmente, se hace una comparación del modelo dinámico con datos observacionales de la Fuente I de Orion.

Este documento está organizado de la siguiente manera:

1. Capítulo 2: se presenta la formulación general del modelo de cáscara delgada, adicionalmente, se describen las propiedades físicas del viento estelar y del flujo de acreción.
2. Capítulo 3: se muestra un análisis de una cáscara delgada desde el punto de vista estático. Además, se hace un análisis de estabilidad radial.
3. Capítulo 4: se describe dinámicamente el comportamiento de una cáscara y se hace una comparación con el flujo molecular observado de CB 26 (Launhardt et al. 2009). El contenido de este capítulo se muestra en el artículo aceptado en *The Astrophysical Journal: "Angular Momentum in Bipolar Outflows: Dynamical Evolutionary Model"*. Autores: J. A. López-Vázquez, J. Cantó, y S. Lizano, Volume 879, Issue 1, article id. 42, 18 pp. (2019).
4. Capítulo 5: por medio de datos observacionales de la Fuente I de Orion, se hace una comparación del modelo dinámico con observaciones de las líneas moleculares de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$, SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$, y $\text{SiO}(J=8-7)$ $\nu = 1$. El contenido de este capítulo se hizo en colaboración con el Dr. Luis Zapata y se muestra en el artículo en preparación para *The Astrophysical Journal: "ALMA Observations and Modeling of the Rotating Outflow in Orion Source I"*. Autores: J. A. López-Vázquez y L. A. Zapata.
5. Capítulo 6: discusión, conclusiones y trabajo a futuro.

Capítulo 2

Formulación general

Se considera que un flujo molecular se forma por la colisión entre un viento estelar y un flujo de acreción. Esta colisión forma un frente de choque interno y otro externo. Se asume que el enfriamiento detrás de estos choques es relativamente eficiente, esto se debe a que se espera que la velocidad del choque sea menor que 100 km s^{-1} (Hartigan et al. 1987). Por lo tanto, la región intrachoque se puede describir como una cáscara fría y delgada. Dentro de la cáscara, dos fluidos con diferente densidad y velocidad entran en contacto, produciendo capas internas de cizallamiento, las cuales presentan inestabilidad Kelvin-Helmholtz, lo que conduce a un mezclado turbulento. Considerando un mezclado eficiente, se describe la cáscara como un solo fluido (e.g., Wilkin & Stahler 2003).

La evolución de la cáscara se rige por la contribución de los flujos de masa y momento del viento estelar y del flujo de acreción, por la atracción gravitacional que ejerce la estrella central y por los efectos centrífugos.

2.1. Ecuaciones de la cáscara

Con la finalidad de derivar las ecuaciones que describen la evolución temporal de la cáscara, se usa un sistema de coordenadas esféricas, r , θ y ϕ , para las coordenadas radial, polar y azimutal, respectivamente. El sistema de coordenadas está centrado en la estrella y se asume simetría cilíndrica. La cáscara tiene un radio R_s , una densidad superficial σ y componentes de velocidad U_r , U_θ y U_ϕ . Todas estas variables son funciones del tiempo t y del ángulo θ , por simplicidad se omite esta dependencia.

Se considera que el flujo de acreción y el viento estelar son axisimétricos y que varían a una escala de tiempo mucho más grande que la evolución de la cáscara. Por lo tanto, estas propiedades únicamente dependen de las coordenadas r y θ . El flujo de acreción tiene una densidad volumétrica ρ_a y componentes de velocidad U_{ar} , $U_{a\theta}$ y $U_{a\phi}$. Mientras que el viento estelar tiene una densidad volumétrica ρ_w y componentes de velocidad U_{wr} , $U_{w\theta}$ y $U_{w\phi}$.

La ecuación de continuidad en coordenadas esféricas está dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.1)$$

donde ρ es la densidad volumétrica y v_r , v_θ y v_ϕ son las velocidades del fluido. Se asume simetría con respecto al eje ϕ y se multiplica la ecuación anterior por $r^2 \sin \theta$. Por lo tanto, la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$\frac{\partial(\rho r^2 \sin \theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (2.2)$$

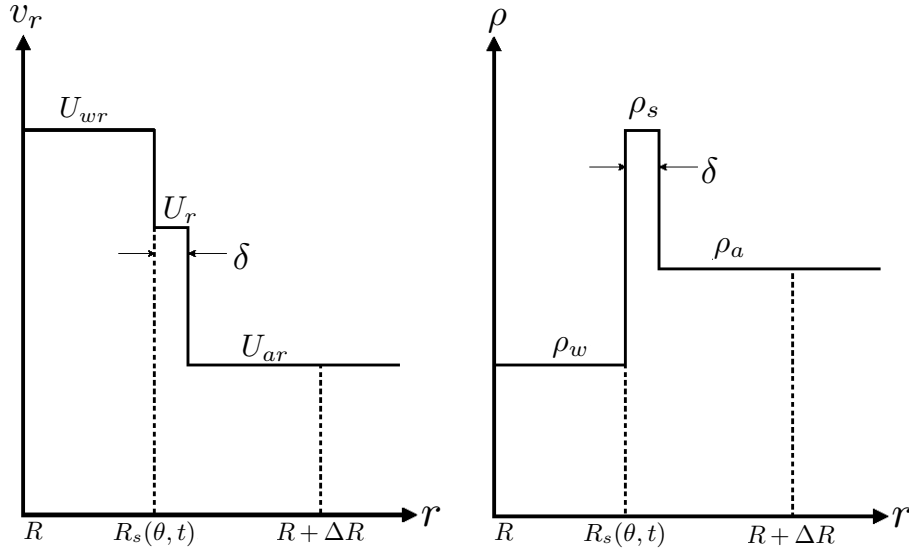


Figura 2.1: Diagrama de integración para una cáscara delgada de radio $R_s(\theta, t)$ y ancho δ . Panel izquierdo: estructura de la velocidad radial alrededor de la cáscara. Panel derecho: estructura de la densidad volumétrica alrededor de la cáscara. U_r y ρ_s denotan la velocidad radial y la densidad volumétrica de la cáscara. U_{wr} y ρ_w representan la velocidad y densidad volumétrica del viento estelar cercanos a la cáscara. U_{ar} y ρ_a son los valores de la velocidad y la densidad volumétrica del flujo de acreción cercanos a la cáscara. R y ΔR son fijos en el tiempo tal que $\delta \ll \Delta R \ll R \simeq R_s(\theta, t)$.

La figura 2.1 muestra el diagrama de integración para una cáscara delgada de radio $R_s(\theta, t)$ y ancho δ , contenida entre R y $R + \Delta R$ fijos en el tiempo. Suponiendo $\delta \ll \Delta R \ll R \simeq R_s(\theta, t)$, se integra la ec. (2.2) en la dirección radial desde R hasta $R + \Delta R$ para θ fija. La ecuación de continuidad finalmente está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a (U_{ar} - U_r) - \rho_w (U_{wr} - U_r)] = 0. \quad (2.3)$$

En esta ecuación, la densidad superficial en la dirección radial está definida como $\sigma = \rho_s \delta$.

La ecuación de momento del fluido en la dirección radial está dada por

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \rho \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = F_g, \quad (2.4)$$

donde el lado derecho de la ecuación anterior se debe a la fuerza gravitacional por unidad de volumen, $F_g = -GM_* \rho / r^2$, donde G es la constante de gravitación universal y M_* es la masa de la estrella central.

Multiplicando la ec. (2.1) por v_r se tiene

$$v_r \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_r}{r^2} \frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{v_r}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.5)$$

Sumando la ec. (2.4) con la ec. (2.5), multiplicando el resultado por $r^2 \sin \theta$ y considerando geometría axisimétrica se tiene que

$$\frac{\partial (\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_r^2 r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho v_r v_\theta r^2 \sin \theta)}{\partial \theta} - \rho r \sin \theta (v_\theta^2 + v_\phi^2) + GM_* \rho \sin \theta = 0. \quad (2.6)$$

Finalmente, integrando la ecuación anterior para una cáscara delgada en la dirección radial desde R hasta $R + \Delta R$, se tiene que la ecuación de momento en la dirección radial está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_r U_\theta) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{ar} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{wr} (U_{wr} - U_r)] \\ - R_s \sin \theta \sigma (U_\theta^2 + U_\phi^2) + GM_* \sin \theta \sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Las ecuaciones de momento del fluido en la dirección polar y azimutal están dadas por

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \rho \frac{v_r v_\theta}{r} - \rho \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = 0, \quad (2.8)$$

y

$$\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{v_r v_\phi}{r} + \rho \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} = 0. \quad (2.9)$$

Siguiendo el mismo formalismo usado para la ecuación de momento en la dirección radial, se multiplica la ec. (2.1) por v_θ y v_ϕ , y se obtiene que

$$v_\theta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r^2} \frac{\partial (\rho v_\theta r^2)}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (2.10)$$

y

$$v_\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_\phi}{r^2} \frac{\partial (\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (2.11)$$

Sumando las ecs. (2.8) y (2.9) con las ecs. (2.10) y (2.11), respectivamente, multiplicando el resultado por $r^2 \sin \theta$, considerando simetría axial e integrando cada ecuación para una cáscara delgada en la dirección radial desde R hasta $R + \Delta R$, se obtienen las ecuaciones de momento de la cáscara en la dirección polar y azimutal, las cuales están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta^2) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{a\theta} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{w\theta} (U_{wr} - U_r)] \\ + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\theta - U_\phi^2 \cot \theta) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta U_\phi) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{a\phi} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{w\phi} (U_{wr} - U_r)] \\ + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\phi + U_\theta U_\phi \cot \theta) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Para obtener la evolución del radio de la cáscara, se puede escribir

$$\begin{aligned} U_r = \frac{dR_s}{dt} &= \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{\partial R_s}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta} R_s \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{U_\theta}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Por lo tanto, la evolución del radio de la cáscara está dado por

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = U_r - \frac{U_\theta}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}. \quad (2.15)$$

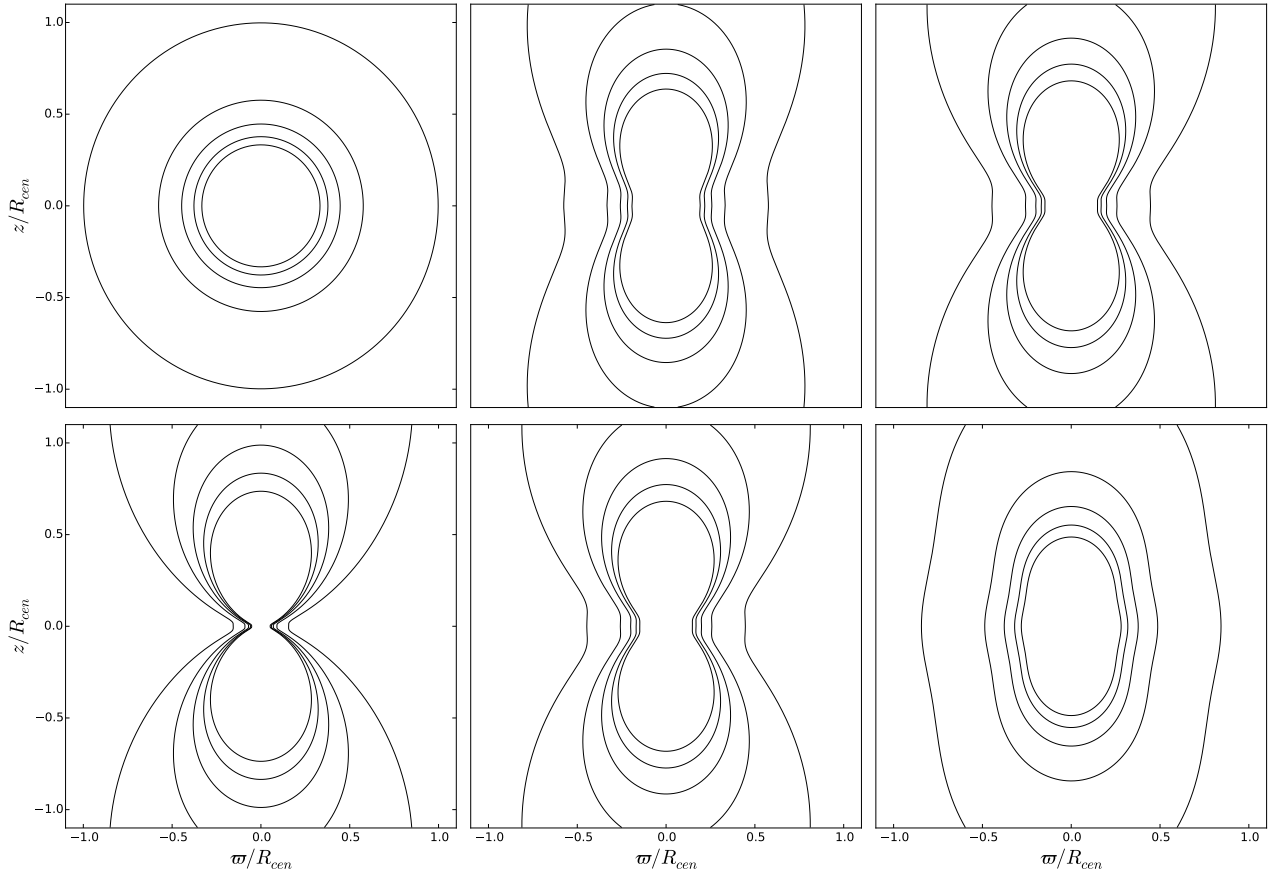


Figura 2.2: Paneles superiores: isocontornos de densidad del viento estelar para un valor del parámetro de anisotropía $A = 1$, un valor del exponente $n = 2$ y distintos valores del parámetro de anisotropía $B = 0$ (panel izquierdo), $B = 10$ (panel medio) y $B = 20$ (panel derecho), ver ec. (2.17). Paneles inferiores: isocontornos de densidad para un viento estelar anisotrópico con un valor del parámetro de anisotropía $B = 20$, un valor del exponente $n = 2$ y distintos valores del parámetro de anisotropía $A = 0.1$ (panel izquierdo), $A = 1$ (panel medio) y $A = 10$ (panel derecho), ver ec. (2.17). Las coordenadas φ y z están normalizadas al radio centrífugo R_{cen} .

Las ecs. (2.3), (2.7), (2.12), (2.13) y (2.15) describen la evolución de una cáscara formada por la colisión de un viento estelar y un flujo de acreción. Para resolver estas ecuaciones, es necesario especificar las propiedades de ambos flujos. Este modelo permite un viento estelar y un flujo de acreción con un campo de velocidades general. La única restricción es que ambos flujos deben presentar geometría axisimétrica.

Se puede observar que la formulación presentada difiere de la de Wilkin & Stahler (2003), ya que en nuestro modelo, los vectores son expresados en coordenadas esféricas, mientras, que en el modelo de Wilkin & Stahler (2003) los vectores se descomponen en las direcciones ortogonal y paralela a la cáscara.

2.2. Vientos estelares y flujos de acreción

En la sección anterior se presentó un modelo general que describe la evolución dinámica de una cáscara. En este modelo se puede considerar un viento estelar y un flujo de acreción con un campo de velocidades de forma general, por ejemplo, isotrópicos, anisotrópicos, con o sin rotación, con la restricción de que ambos fluidos presenten geometría axial.

Con la finalidad de resolver las ecs. (2.3), (2.7), (2.12), (2.13) y (2.15), las cuales describen la evolución de una cáscara, es necesario especificar las propiedades del viento estelar y del flujo de acreción. En este trabajo, se explorará las propiedades de una cáscara formada por la colisión de un viento estelar con dependencia angular sin rotación y un flujo de acreción dado por una nube en colapso gravitacional con rotación (Ulrich 1976).

2.2.1. Viento estelar

Se considera un viento estelar anisotrópico en dirección preferencial hacia el polo, con una tasa de pérdida de masa \dot{M}_w , y sólo componente radial de velocidad $v_w = U_{wr}$, la cual se asume constante. La densidad de este viento está dada por

$$\rho_w = \frac{\dot{M}_w}{4\pi r^2 v_w} f(\theta), \quad (2.16)$$

donde $f(\theta)$ es la función de anisotropía dada por

$$f(\theta) = \frac{A + B \cos^{2n} \theta}{A + B/(2n + 1)}. \quad (2.17)$$

Las constantes de anisotropía son $A \geq 0$ y $B \geq 0$ para el exponente n entero. En el caso de $B = 0$ o $n = 0$, se obtiene un viento estelar isotrópico, mientras que, para $B > 0$ y $n > 0$, el perfil de densidad del viento estelar es anisotrópico. Esta función es normalizada de tal manera que la integral del flujo de masa alrededor de la estrella recupera la tasa de pérdida total de masa, es decir,

$$\dot{M}_w = 2\pi \int_0^\pi \rho_w v_w r^2 \sin \theta d\theta. \quad (2.18)$$

En los paneles superiores de la Figura 2.2 se muestran isocontornos de la densidad del viento estelar para diferentes valores del parámetro de anisotropía B y un valor de $A = 1$ y un exponente $n = 2$. En el panel derecho de esta figura se muestran los contornos para un viento estelar isotrópico ($B = 0$) y los paneles medio e izquierdo muestran un viento estelar anisotrópico ($B = 10$ y $B = 20$, respectivamente). En los paneles inferiores de la Figura 2.2 se muestran isocontornos de densidad del viento estelar para diferentes valores del parámetro de anisotropía A y un valor de $B = 1$ y un exponente $n = 2$. En esta figura, los valores de densidad están normalizados a $\rho_{w0} = \dot{M}_w / (4\pi R_{cen}^2 v_w)$, donde R_{cen} representa el radio centrífugo, que es el punto donde existe un balance entre la fuerza gravitacional y centrífuga y se puede definir como $R_{cen} = j^2 / GM_*$, donde j es el momento angular específico, siendo éste el momento angular por unidad de masa. Las coordenadas cilíndricas se normalizan al radio centrífugo R_{cen} . En esta figura, se muestra que conforme aumenta el valor del parámetro de anisotropía B o disminuye el valor de A , el viento estelar eyecta mayor cantidad de material por la región cercana al polo ($\theta = 0$) que por el ecuador ($\theta = \pi/2$).

2.2.2. Flujo de acreción

El flujo de acreción está dado por una nube en colapso gravitacional con rotación, descrita por Ulrich (1976). En este modelo, las partículas del fluido tienen rotación uniforme a grandes distancias, y colapsan al centro conservando momento angular específico j . Se considera que durante el colapso, los efectos de presión son despreciables, por lo tanto, las órbitas de las partículas son balísticas (ver figura 2.3). Esta suposición es válida cuando el flujo es supersónico, y los efectos de calentamiento por radiación y viscosidad son despreciables. La energía total de

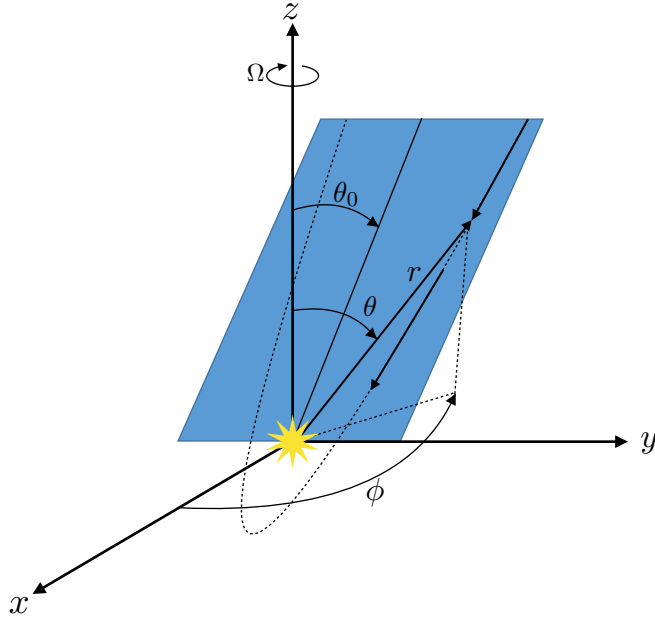


Figura 2.3: Trayectorias de las partículas del flujo de acreción de Ulrich desde el borde de la nube hasta la estrella central. Estas partículas siguen trayectorias parabólicas cerca del objeto central. Lejos de la estrella, las partículas del flujo de Ulrich giran como cuerpo sólido a velocidad angular constante Ω .

las partículas en colapso es cero, por lo tanto, las trayectorias son parábolas. El gas en colapso choca en el plano medio y alcanza una barrera centrífuga.

Se define la variable radial adimensional como

$$\zeta \equiv \frac{R_{\text{cen}}}{r}. \quad (2.19)$$

Entonces, el campo de velocidades y el perfil de densidad del flujo de acreción están dados por

$$U_{ar} = -v_0 \zeta^{1/2} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (2.20)$$

$$U_{a\theta} = v_0 \zeta^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (2.21)$$

$$U_{a\phi} = -v_0 \zeta^{1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (2.22)$$

$$\rho_a = -\frac{\dot{M}_a \zeta^2}{4\pi R_{\text{cen}}^2 U_{ar}} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]^{-1}, \quad (2.23)$$

donde θ_0 es el ángulo polar inicial de la órbita de un elemento de fluido al comienzo del colapso hacia el centro de la nube. La variable v_0 es la velocidad dada por

$$v_0 = \left(\frac{GM_*}{R_{\text{cen}}} \right)^{1/2}, \quad (2.24)$$

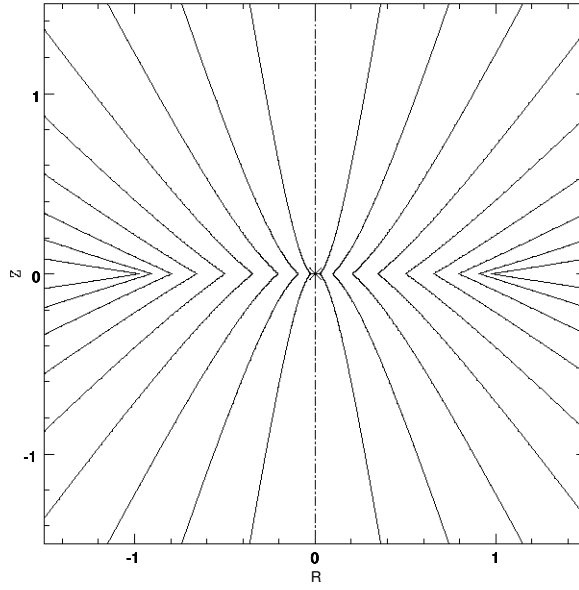


Figura 2.4: Líneas de flujo del flujo de acreción proyectadas sobre un plano. Cada línea representa un ángulo θ_0 , el ángulo inicial con el que una partícula comienza su acreción hasta la estrella. Las componentes cilíndricas R y z están normalizadas al radio centrífugo R_{cen} . Imagen tomada de Mendoza et al. (2004).

donde \dot{M}_a es la tasa de acreción y el polinomio de Legendre es $P_2(\cos \theta_0) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta_0 - 1)$. El ángulo θ_0 está dado implícitamente en términos de las variables θ y ζ como

$$\zeta = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}. \quad (2.25)$$

La ecuación anterior puede reescribirse como

$$\cos^3 \theta_0 + \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) \cos \theta_0 - \frac{1}{\zeta} \cos \theta = 0. \quad (2.26)$$

Se puede notar que la ecuación anterior es una función cúbica de $\cos \theta_0$, cuya solución analítica en términos de ζ y θ está dada por Mendoza et al. (2004) como

$$\cos \theta_0 = \begin{cases} (\cos \theta)^{1/3} & \text{para } \frac{1}{\zeta} = 1, \\ 2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{1/2} \sinh \left[\frac{1}{3} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{\frac{1}{\zeta} \cos \theta}{2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{3/2}} \right) \right] & \text{para } \frac{1}{\zeta} > 1, \\ 2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{1/2} \cosh \left[\frac{1}{3} \operatorname{arccosh} \left(\frac{\frac{1}{\zeta} \cos \theta}{2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{3/2}} \right) \right] & \text{para } \frac{1}{\zeta} < 1 \text{ y } \left(\frac{\frac{1}{\zeta} \cos \theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^3 > 0, \\ 2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{1/2} \cos \left[\frac{1}{3} \operatorname{arccos} \left(\frac{\frac{1}{\zeta} \cos \theta}{2 \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^{3/2}} \right) \right] & \text{para } \frac{1}{\zeta} < 1 \text{ y } \left(\frac{\frac{1}{\zeta} \cos \theta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\frac{1}{\zeta}}{3}\right)^3 < 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

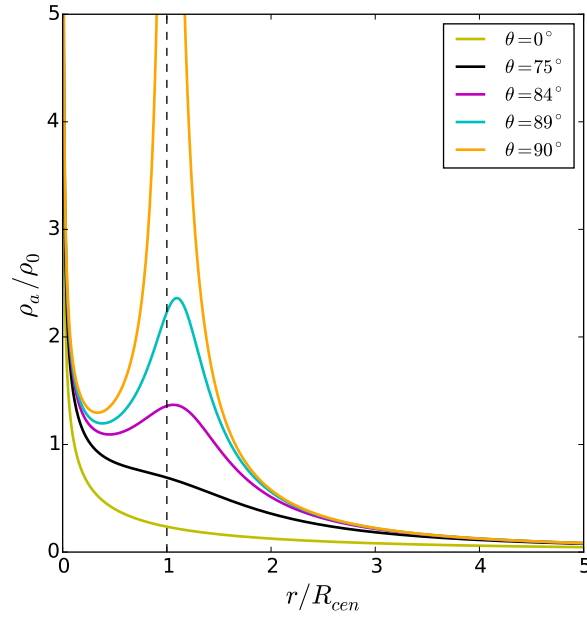


Figura 2.5: Densidad del flujo de acreción como función de la coordenada radial para distintos ángulos polares θ . Tanto la densidad, como la coordenada radial están normalizadas a ρ_0 y al radio centrífugo R_{cen} , respectivamente (ver el texto). La línea negra punteada muestra el borde del disco de acreción, es decir, $r = R_{cen}$.

Las ecs. (2.20) - (2.23) y la ec. (2.27) describen el campo de velocidades y el perfil de densidad del flujo de acreción como función del ángulo polar θ y la coordenada radial r .

En la Figura 2.4 se muestran las líneas de flujo proyectadas sobre un plano para velocidad angular constante Ω . El ángulo θ_0 indica una línea de flujo particular. Para cada θ_0 se tiene sólo una línea de flujo, debido a que estas no pueden intersectarse. Este efecto se puede ver claramente en el campo de velocidades, cuando $\theta_0 \rightarrow 0$, las componentes polar y azimutal de la velocidad se vuelven cero, por lo tanto, las líneas de flujo se vuelven parábolas cerradas cercanas al eje de rotación.

En el borde del disco, $r = R_{cen}$ y $\theta = \pi/2$, la densidad del flujo de acreción diverge, esto se debe a la acumulación de material en esta región. En la Figura 2.5 se puede observar este efecto. En esta figura se muestra la densidad del flujo de acreción en unidades de $\rho_0 = \dot{M}_a / (4\pi R_{cen}^2 v_0)$, como función de la coordenada radial r en unidades del radio centrífugo R_{cen} .

Capítulo 3

Inestabilidad de un modelo estático

En el capítulo 2, se desarrolló detalladamente las ecuaciones que describen la evolución de una cáscara formada por la interacción de un viento estelar y un flujo de acreción. Basándonos en este formalismo, es posible estudiar una cáscara estática, resultado de la interacción de un viento estelar isotrópico, descrito en la sección 2.2.1 con un valor de la constante de anisotropía $B = 0$ (ver ec. [2.17]), y el flujo de acreción de Ulrich (ver sección 2.2.2).

3.1. Ecuaciones del modelo

Para el caso de una cáscara estática, no se considera la dependencia temporal de las ecs. (2.3), (2.7), (2.12), (2.13) y (2.15). Tomando en cuenta estas consideraciones, se tiene que la ecuación de continuidad se reduce a

$$\frac{d}{d\theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta) + R_s^2 \sin \theta (\rho_a U_{ar} - \rho_w U_{wr}) = 0. \quad (3.1)$$

Mientras, que las ecuaciones de momento en la dirección radial, polar y azimutal, respectivamente, son

$$\frac{d}{d\theta} (R_s \sin \theta \sigma U_r U_\theta) + R_s^2 \sin \theta (\rho_a U_{ar}^2 - \rho_w U_{wr}^2) - R_s \sin \theta \sigma (U_\theta^2 + U_\phi^2) + GM_* \sin \theta \sigma = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{d\theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta^2) + R_s^2 \sin \theta (\rho_a U_{a\theta} U_{ar} - \rho_w U_{w\theta} U_{wr}) + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\theta - U_\phi^2 \cot \theta) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{d\theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta U_\phi) + R_s^2 \sin \theta (\rho_a U_{a\phi} U_{ar} - \rho_w U_{w\phi} U_{wr}) + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\phi + U_\theta U_\phi \cot \theta) = 0 \quad (3.4)$$

y

$$\frac{dR_s}{d\theta} = R_s \frac{U_r}{U_\theta}. \quad (3.5)$$

Se puede notar que las ecuaciones descritas anteriormente son un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, esto debido a que perdieron su dependencia temporal. Por lo tanto, el radio de la cáscara R_s , la densidad superficial σ , y las componentes de la velocidad U_r , U_θ y U_ϕ , son únicamente funciones de la coordenada polar θ .

Las ecs. (3.1) - (3.5) pueden ser escritas en una manera más compacta en términos del flujo de masa

$$F_m = R_s \sin \theta \sigma U_\theta, \quad (3.6)$$

y los flujos de momento

$$\begin{aligned} F_r &= R_s \sin \theta \sigma U_r U_\theta \equiv F_m U_r, \\ F_\theta &= R_s \sin \theta \sigma U_\theta^2 \equiv F_m U_\theta, \\ F_\phi &= R_s \sin \theta \sigma U_\phi U_\theta \equiv F_m U_\phi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Estos flujos se deben al material desplazándose dentro de la cáscara.

Sustituyendo las ecs. (3.6) y (3.7) en las ecs. (3.1) - (3.5), se tiene que el flujo de masa a través de la cáscara es

$$\frac{dF_m}{d\theta} = R_s^2 \sin \theta (\rho_w v_w - \rho_a U_{ar}), \quad (3.8)$$

donde el lado derecho de la ecuación muestra la contribución a la masa de la cáscara tanto del viento estelar como del flujo de acreción.

El flujo de momento radial está dado por

$$\frac{dF_r}{d\theta} = \frac{F_\theta^2 + F_\phi^2}{F_\theta} - \frac{GM_* F_m^2}{R_s F_\theta} + R_s^2 \sin \theta (\rho_w v_w^2 - \rho_a U_{ar}^2). \quad (3.9)$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación corresponde a los efectos centrífugos, el segundo es debido al peso de la cáscara, finalmente, el último término del lado derecho corresponde a la contribución tanto del viento estelar como del flujo de acreción.

Los flujos de momento en la dirección polar y azimutal, respectivamente, son

$$\frac{dF_\theta}{d\theta} = \frac{F_\phi^2 \cot \theta - F_r F_\theta}{F_\theta} - R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{ar} U_{a\theta}, \quad (3.10)$$

y

$$\frac{dF_\phi}{d\theta} = -\frac{F_r F_\phi + F_\theta F_\phi \cot \theta}{F_\theta} - R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{ar} U_{a\phi}. \quad (3.11)$$

En estas dos ecuaciones, el primer término del lado derecho son los efectos centrífugos sobre la cáscara, mientras, que el último término del lado derecho sólo es la contribución del flujo de acreción en estas direcciones.

Finalmente, el radio de la cáscara en términos de los flujos de momento es

$$\frac{dR_s}{d\theta} = R_s \frac{F_r}{F_\theta}. \quad (3.12)$$

3.1.1. Integrales del flujo de masa y momento en la dirección azimutal

Las ecs. (3.8) y (3.11) tienen soluciones analíticas, debido a que ambas ecuaciones hacen referencia a cantidades, flujo de masa y flujo de momento angular, que se conservan tanto en el viento estelar como en el flujo de acreción.

Sustituyendo el perfil de densidad del viento estelar dado en la ec. (2.16) para el caso isotrópico ($B = 0$ en ec. [2.17]), el perfil de densidad del flujo de acreción (ec. [2.23]), y la velocidad del flujo de acreción en la dirección radial (ec. [2.20]), en la ec. (3.8), e integrando en la dirección polar, se obtiene que el flujo de masa a través de la cáscara es

$$F_m = \frac{\dot{M}_a}{4\pi} [\alpha (1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta_0)], \quad (3.13)$$

donde se define el cociente entre la tasa de pérdida de masa del viento y la tasa de acreción como

$$\alpha = \frac{\dot{M}_w}{\dot{M}_a}. \quad (3.14)$$

El flujo de momento angular, definido en la ec. (3.11), puede reescribirse como

$$\frac{d(R_s \sin \theta F_\phi)}{d\theta} = -R_s^3 \sin^2 \theta \rho_a U_{ar} U_{a\phi}. \quad (3.15)$$

Sustituyendo las ecs. (2.20), (2.22) y (2.23) en la ecuación anterior, e integrando en la dirección polar, el flujo de momento angular es

$$\dot{J}_z \equiv R_s \sin \theta F_\phi = -\frac{\dot{M}_a R_{cen} v_0}{4\pi} \left(\frac{4}{3}\right) (2 + \cos \theta_0) \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2}\right). \quad (3.16)$$

3.2. Solución de las ecuaciones

3.2.1. Ecuaciones adimensionales

Para resolver las ecuaciones (3.9), (3.10), (3.12), (3.13), y (3.16) se definen las siguientes variables adimensionales: el radio

$$r_s = \frac{R_s}{R_{cen}}, \quad (3.17)$$

el flujo de masa

$$f_m = \frac{4\pi}{\dot{M}_a} F_m, \quad (3.18)$$

los flujos de momento

$$f_r = \frac{4\pi}{\dot{M}_a v_0} F_r, \quad (3.19)$$

$$f_\theta = \frac{4\pi}{\dot{M}_a v_0} F_\theta, \quad (3.20)$$

$$f_\phi = \frac{4\pi}{\dot{M}_a v_0} F_\phi. \quad (3.21)$$

La densidad superficial de forma adimensional es

$$s = \frac{4\pi R_{cen} v_0}{\dot{M}_a} \sigma \equiv \frac{f_m^2}{r_s \sin \theta f_\theta}. \quad (3.22)$$

Las velocidades adimensionales del flujo de acreción y del viento estelar son

$$u_{ar} = \frac{U_{ar}}{v_0}, \quad (3.23)$$

$$u_{a\theta} = \frac{U_{a\theta}}{v_0}, \quad (3.24)$$

$$u_{a\phi} = \frac{U_{a\phi}}{v_0}, \quad (3.25)$$

y

$$u_{wr} = \frac{v_w}{v_0}. \quad (3.26)$$

También se define la razón entre la tasa de momento del viento estelar y la tasa del flujo de acreción en el radio centrífugo (de aquí en adelante, tasa del flujo de acreción) como

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_a v_0} \equiv \alpha u_{wr}. \quad (3.27)$$

Finalmente, las densidades volumétricas adimensionales del flujo de acreción y del viento estelar están dadas por

$$\rho'_a = \frac{4\pi R_{cen}^2}{\dot{M}_a} \rho_a \equiv -\frac{\zeta^2}{u_{ar}} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]^{-1}, \quad (3.28)$$

y

$$\rho'_w = \frac{4\pi R_{cen}^2}{\dot{M}_a} \rho_w \equiv \frac{\alpha}{r_s^2 u_{wr}} f(\theta). \quad (3.29)$$

En términos de las nuevas variables, las ecuaciones (3.13), (3.9), (3.10), (3.16) y (3.12), respectivamente, para un viento estelar isotrópico ($B = 0$) pueden escribirse como

$$f_m = \alpha (1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta_0), \quad (3.30)$$

$$\frac{df_r}{d\theta} = \frac{f_\theta^2 + f_\phi^2}{f_\theta} - \frac{f_m^2}{r_s f_\theta} + \sin \theta \left(\beta + \frac{u_{ar}}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \right), \quad (3.31)$$

$$\frac{df_\theta}{d\theta} = \frac{f_\phi^2 \cot \theta - f_r f_\theta}{f_\theta} + \frac{u_{a\theta} \sin \theta}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)}, \quad (3.32)$$

$$f_\phi = -\frac{4}{3} \left(\frac{2 + \cos \theta_0}{r_s \sin \theta} \right) \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right), \quad (3.33)$$

$$\frac{dr_s}{d\theta} = r_s \frac{f_r}{f_\theta}. \quad (3.34)$$

Las ecuaciones (3.31), (3.32) y (3.34) muestran un sistema de tres ecuaciones diferenciales en función de θ que describen el radio r_s , el flujo de momento en la dirección radial f_r , y el flujo de momento en la dirección polar f_θ , de una cáscara formada por la colisión de un viento estelar isotrópico sin rotación y un flujo de acreción con rotación. Estas ecuaciones son complementarias a las soluciones algebraicas para el flujo de masa f_m (eq. [3.30]) y el flujo de momento en la dirección azimutal f_ϕ (eq. [3.33]).

3.2.2. Condiciones de frontera en el polo

Las ecuaciones (3.30) - (3.34) describen las propiedades físicas de una cáscara estática, tales como su masa, estructura y su campo de velocidades. Para conocer estas propiedades, se integran numéricamente las ecuaciones anteriormente mencionadas a través de todo el ángulo. Para ello, es necesario establecer condiciones de frontera tanto de los flujos de masa y momento, como del radio en el polo ($\theta = 0$).

En esta sección, se expanden los flujos de masa y momento de la cáscara alrededor del polo como series de potencia de θ , con la finalidad de establecer las condiciones de frontera en esta región.

Para $\theta \ll 1$, los flujos de masa y momento están dados por

$$f_m = a_{m2}\theta^2, \quad (3.35)$$

$$f_r = a_{r4}\theta^4, \quad (3.36)$$

$$f_\theta = a_{\theta3}\theta^3, \quad (3.37)$$

y

$$f_\phi = a_{\phi3}\theta^3. \quad (3.38)$$

Mientras que el radio y la densidad superficial de la cáscara en el polo son

$$r_s = r_{s0} + r_{s2}\theta^2, \quad (3.39)$$

y

$$s = s_0. \quad (3.40)$$

Los coeficientes a_{m2} , a_{r4} , $a_{\theta3}$, $a_{\phi3}$, r_{s0} , r_{s2} y s_0 son los únicos coeficientes distintos a cero en una expansión en series de potencia a cuarto orden, donde el número en el subíndice de estos coeficientes indica el orden del exponente de θ . Estos coeficientes son funciones algebraicas determinadas por el cociente de la tasa de pérdida de masa del viento estelar y la tasa de acreción α , el radio de la cáscara y la densidad superficial en el polo, r_{s0} y s_0 , respectivamente. En el Apéndice A se muestra detalladamente la deducción de estos coeficientes. Las soluciones algebraicas para a_{m2} , a_{r4} , $a_{\theta3}$, y $a_{\phi3}$ son

$$a_{m2} = \frac{\alpha (r_{s0} + 2) + r_{s0}}{2 (r_{s0} + 2)}, \quad (3.41)$$

$$a_{r4} = \frac{1}{4} \left(a_{\theta3} + \frac{a_{\phi3}^2}{a_{\theta3}} \right), \quad (3.42)$$

$$a_{\theta3} = \frac{[\alpha (r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2}{4r_{s0}s_0 (r_{s0} + 2)^2}, \quad (3.43)$$

y

$$a_{\phi 3} = -\frac{r_{s0}}{4(r_{s0} + 2)^2}. \quad (3.44)$$

Mientras que el coeficiente r_{s2} es

$$r_{s2} = \frac{a_{r4}}{2a_{\theta 3}}. \quad (3.45)$$

Las ecuaciones anteriores nos brindan la condición de frontera en el polo para los flujos de masa y momento, así como para el radio de la cáscara.

3.2.3. Análisis de parámetros libres

Se puede notar que las condiciones de frontera de este modelo tienen dependencia en el radio en el polo r_{s0} , la densidad superficial en el polo s_0 y el cociente de la tasa de pérdida de masa del viento y el flujo de acreción α . En esta sección se presenta un análisis de las ecuaciones de momento con la finalidad de establecer una relación entre estos parámetros.

Usando las expansiones para el flujo de acreción definidas en la sección A.1 del Apéndice A y las ecs. (3.35), (3.37), y (3.38) en la ec. (3.31) y despreciando los términos de orden superior a θ^3 , usando los términos asociados a θ^3 , se tiene una ecuación cuadrática para la densidad superficial en el polo, s_0 , la cual está dada por

$$r_{s0}^4 s_0^2 + 4(2r_{s0})^{1/2} r_{s0} [\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}] s_0 - 3[\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2 = 0, \quad (3.46)$$

cuya solución es

$$s_0 = \frac{2(2r_{s0})^{1/2}}{r_{s0}^3} [\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2 \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{8}r_{s0}} \right). \quad (3.47)$$

La densidad superficial sólo tiene una solución física posible para la raíz positiva de la ecuación anterior.

Usando el término asociado a θ de la expansión de la ec. (3.31) mencionada anteriormente, se tiene que

$$\frac{f_m^2}{r_s f_\theta} = \sin \theta \left(\beta + \frac{u_{ar}}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \right). \quad (3.48)$$

Sustituyendo la ec. (3.22) y usando las expansiones alrededor del polo para u_{ar} y ρ'_a descritas en las ecs. (A.2) y (A.5), se encuentra que el cociente de tasas de momento del flujo de acreción y el viento estelar está dado por

$$\beta = s_0 + \frac{(2r_{s0})^{1/2}}{r_{s0} + 2}. \quad (3.49)$$

Se puede notar que esta ecuación y la ec. (3.47) nos dan una relación directa entre los parámetros libres del modelo, es decir, para valores dados del cociente de las tasas de pérdida de masa del viento y el flujo de acreción α y el radio inicial r_{s0} , se encuentra la densidad superficial del modelo alrededor del polo s_0 y el valor del cociente de las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β .

En la Figura 3.1 se grafica β como función del radio en el polo r_{s0} , para un valor del parámetro $\alpha = 0.1$. En esta figura, se puede notar que para un valor de β dado, el radio en el polo puede

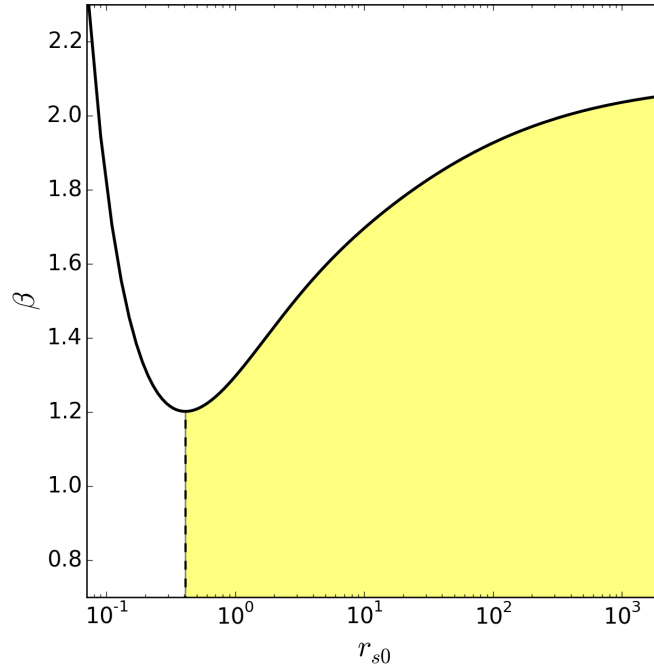


Figura 3.1: Cociente entre las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β como función del radio en el polo, $\theta = 0$, para un valor del parámetro $\alpha = 0.1$. La zona sombreada muestra la región con solución físicamente posible del modelo (ver el texto).

tener hasta dos valores posibles. La solución físicamente aceptable, es la que nos da un r_{s0} mayor. También, en esta figura se observa que se tiene un valor mínimo de β y se puede ver que si $\beta < \beta_{\min}$ no hay una solución posible para r_{s0} . Por otra parte, en el límite cuando $r_{s0} \rightarrow \infty$ se tiene que

$$\beta_{\infty} = \lim_{r_{s0} \rightarrow \infty} \beta = \sqrt{3}(\alpha + 1)^2. \quad (3.50)$$

Por lo tanto, si $\beta > \beta_{\infty}$ tampoco se tiene un valor físicamente posible para el radio en el polo r_{s0} . Así que, si $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\infty}$ el radio de la cáscara tiene una solución física, para $\beta < \beta_{\min}$ la cáscara colapsa, mientras que, para $\beta > \beta_{\infty}$ la cáscara se expande hasta infinito.

En la tabla 3.1 se presentan los valores de β_{\min} para distintos valores de α . La primera columna muestra diferentes valores del parámetro α , en la segunda columna se presenta el valor del radio cuando β es mínima $r_{s0\min}$, la tercer columna muestra el valor de β_{\min} , en la cuarta columna se da el valor de β cuando el radio tiende a infinito β_{∞} , por último, en la quinta columna se da el valor de la densidad superficial en el polo para $r_{s0\min}$ y β_{\min} , $s_0(r_{s0\min})$.

Tabla 3.1: Valores del radio, el cociente de las tasas de momento del viento estelar y flujo de acreción β y la densidad superficial para distintos valores del parámetro α .

α	$r_{s0\min}$	β_{\min}	β_{∞}	$s_0(r_{s0\min})$
0.01	0.034	0.377	1.767	0.250
0.05	0.182	0.846	1.910	0.569
0.10	0.409	1.201	2.096	0.826
0.50	4.025	2.988	3.897	2.517

La ec. (3.49) puede ser reescrita como

$$\frac{(2r_{s0})^{1/2}}{r_{s0} + 2} + \frac{2(2r_{s0})^{1/2}}{r_{s0}^3} [\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2 \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{3}{8}r_{s0}} \right) - \beta = 0. \quad (3.51)$$

Resolviendo la ecuación anterior, se puede encontrar el radio en el polo r_{s0} para un valor de los parámetros α y β dados.

Por medio del análisis anteriormente descrito, se puede concluir que para un valor del cociente de las tasas de pérdida de masa del viento estelar y del flujo de acreción α , se tiene un rango de valores físicamente posibles del cociente de tasas de momento $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\infty}$. Con valores definidos de α y β , se pueden encontrar las condiciones de frontera del flujo de masa, los flujos de momento, el radio y la densidad superficial.

3.2.4. Análisis de estabilidad

Antes de mostrar los resultados numéricos de un modelo estático, se hace un estudio analítico de las cáscaras en la dirección polar. Esto, debido a que la gravedad que ejerce la estrella central sobre la cáscara formada juega un papel importante.

Siguiendo el formalismo de Wilkin & Stahler (2003), se hace un análisis radial de estabilidad en la región cercana al polo. Para ello (de la ec. 3.31) se define la fuerza adimensional radial total por unidad de área como

$$f_{\text{rad}} = \sin \theta \left(\beta + \frac{u_{ar}}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \right) - \frac{f_m^2}{r_s f_\theta}, \quad (3.52)$$

en la expresión anterior se desprecia el efecto de los términos centrífugos sobre la cáscara, ya que estos contribuyen muy poco en la región cercana en el polo.

La condición de balance en la fuerza es que $f_{\text{rad}}(r_{s0}) = 0$, donde r_{s0} es el radio en equilibrio de la cáscara en el polo. Se aplica una perturbación a la cáscara en esta región y se examina el resultado para la fuerza radial. Para ello, se considera una perturbación en la densidad superficial alrededor del polo como $s = s_0(r_{s0}/r_s)^2$, donde s_0 es el valor de la densidad superficial en equilibrio en el polo. Suponiendo la perturbación anteriormente mencionada se tiene que la ec. (3.52) alrededor del polo (usando las expansiones definidas en el Apéndice A) es

$$\frac{f_{\text{rad}}}{\sin \theta} = \beta - \left(\frac{2}{r_s} \right)^{1/2} \left(\frac{r_s}{r_s + 2} \right) - s_0 \left(\frac{r_{s0}}{r_s} \right)^2. \quad (3.53)$$

Dividiendo la ecuación anterior por β se tiene que

$$f'_{\text{rad}} = \frac{f_{\text{rad}}}{\beta \sin \theta} \equiv 1 - f_a \left(\frac{r_s}{r_{s0}} \right)^{1/2} \left(\frac{r_{s0} + 2}{r_s + 2} \right) - f_g \left(\frac{r_{s0}}{r_s} \right)^2, \quad (3.54)$$

donde las variables f_a y f_g representan la contribución del flujo de acreción y de la fuerza gravitacional en el polo a la fuerza radial, respectivamente, en la posición de equilibrio. Estas fuerzas están dadas por

$$f_a = \frac{(2r_{s0})^{1/2}}{\beta (r_{s0} + 2)}, \quad (3.55)$$

y

$$f_g = \frac{s_0}{\beta}. \quad (3.56)$$

El requisito para que la cáscara esté en equilibrio en el polo $r_s = r_{s0}$, es que $f'_{\text{rad}} = 0$, esto implica que $f_g = 1 - f_a$. Por lo tanto, se puede sustituir la relación anterior en la ec. (3.54) y eliminar f_g . Adicionalmente, se considera una perturbación en el radio en equilibrio como $r_s/r_{s0} = 1 + \delta$, siendo δ una pequeña oscilación de la posición de equilibrio. Finalmente, linealizando la fuerza radial en el polo en δ se tiene que

$$f'_{\text{rad}} = \left[2 - \frac{f_a}{2} \left(\frac{3r_{s0} + 10}{r_{s0} + 2} \right) \right] \delta \equiv 2 \left(1 - \frac{f_a}{f_{a,\text{crit}}} \right) \delta, \quad (3.57)$$

donde en $f'_{\text{rad}} = 0$,

$$f_{a,\text{crit}} = \frac{4(r_{s0} + 2)}{3r_{s0} + 10}. \quad (3.58)$$

Si $f_a > f_{a,\text{crit}}$, la fuerza radial es opuesta al movimiento de la cáscara y es estable, esto significa que si se aplica una perturbación a la cáscara, ésta eventualmente volverá a su posición de equilibrio. Mientras que si $f_a < f_{a,\text{crit}}$ implica inestabilidad dinámica, es decir, la fuerza radial está en la dirección del movimiento, por lo que si se aplica una perturbación, provocará que la cáscara se colapse o se expanda indefinidamente.

Sustituyendo la ec. (3.47) en la ec. (3.49), se tiene un valor para β . Posteriormente sustituyendo el resultado en la ec. (3.55), se encuentra que f_a es

$$f_a = \left[1 + \frac{3(r_{s0} + 2) [\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2}{4r_{s0}^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{3}{8}r_{s0}} \right)} \right]^{-1}. \quad (3.59)$$

El hecho que una cáscara estática siempre es inestable ante perturbaciones radiales se confirma en la Figura 3.2, donde se muestra el cociente de $f_a/f_{a,\text{crit}}$ como función del radio para distintos valores del parámetro α , este cociente siempre es menor a la unidad, lo que implica que $f_a < f_{a,\text{crit}}$, lo que conduce a una inestabilidad radial.

Si se considera que $f_a = f_{a,\text{crit}}$ y se sustituye la ec. (3.58) en la ec. (3.55), se encuentra el valor de β_{crit} para una cáscara estable, el cual está dado por

$$\beta_{\text{crit}} = \frac{(2r_{s0})^{1/2} (3r_{s0} + 10)}{4(r_{s0} + 2)^2}. \quad (3.60)$$

En la Tabla 3.2 se muestran los valores de β_{crit} para distintos valores del cociente de las tasas de pérdida de masa del viento estelar y del flujo de acreción α y el valor del radio mínimo en el polo $r_{s0,\text{min}}$. En esta tabla se puede notar que los valores de β_{crit} siempre son menores al valor de β_{min} , lo que implica que una cáscara estática formada por un viento estelar isotrópico y un flujo de acreción siempre es inestable.

Tabla 3.2: Comparación entre β_{min} y β_{crit} para distintos valores del parámetro α y para el radio mínimo $r_{s0\text{min}}$ correspondiente.

α	$r_{s0\text{min}}$	β_{min}	β_{crit}
0.01	0.034	0.377	0.158
0.05	0.182	0.846	0.334
0.10	0.409	1.201	0.437
0.50	4.025	2.988	0.431

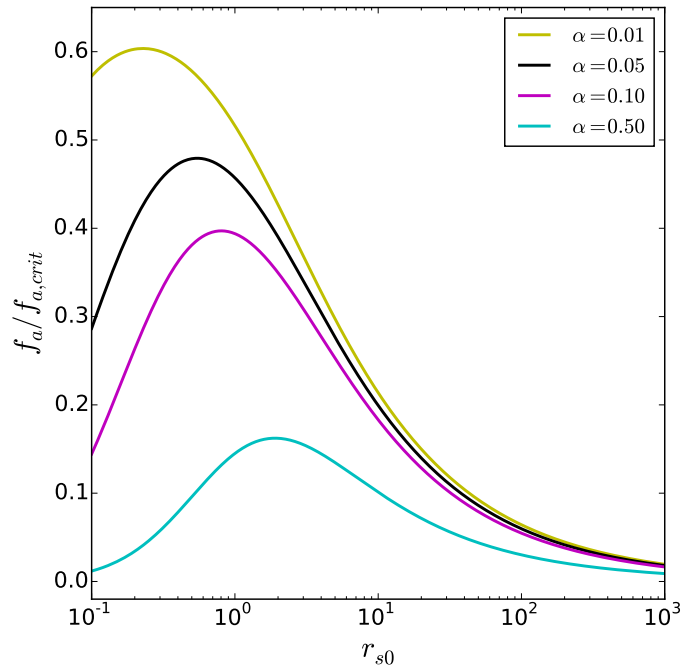


Figura 3.2: Cociente $f_a/f_{a,crit}$ como función del radio de la cáscara en el polo para distintos valores del parámetro α .

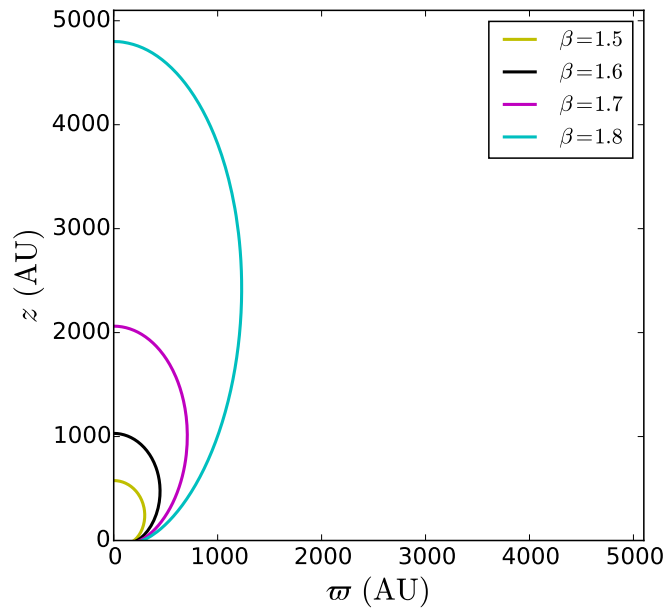


Figura 3.3: Forma de la cáscara para el parámetro $\alpha = 0.1$ y diferentes valores del parámetro β .

3.3. Resultados

Las ecs. (3.30) - (3.34) describen las propiedades físicas de la cáscara. Las ecuaciones adimensionales para los flujos de momento en la dirección radial y polar, y para el radio se resuelven numéricamente y se complementan con las soluciones algebraicas para el flujo de masa y el flujo de momento en la dirección azimutal.

La integración numérica se hace para un valor del cociente de la tasa de pérdida de masa

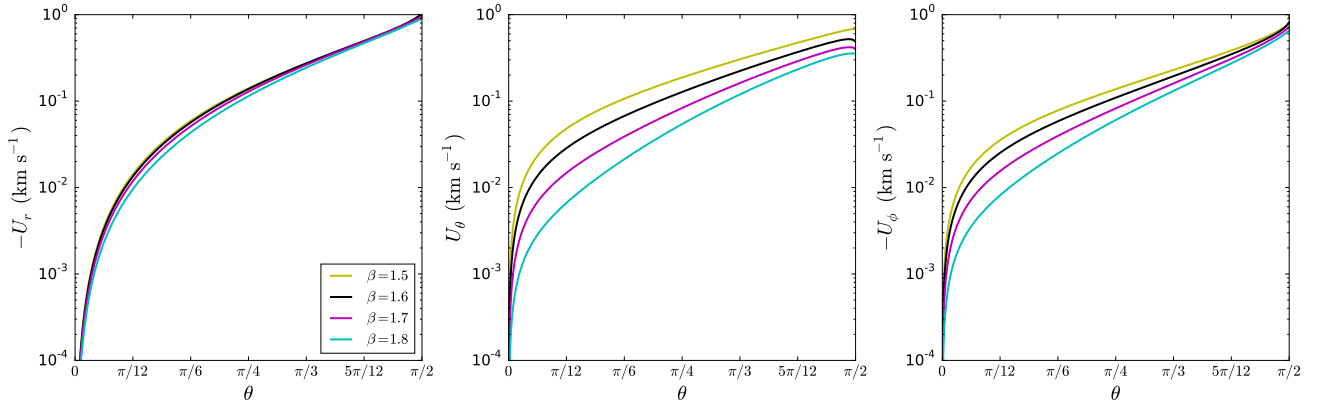


Figura 3.4: Campo de velocidades de la cáscara como función de θ y los mismos parámetros α y β de la figura 3.3. Panel izquierdo: velocidad radial. Panel medio: velocidad θ . Panel derecho: velocidad azimutal.

del viento estelar y la tasa de acreción $\alpha = 0.1$, un valor típico para flujos moleculares (e.g., ver figura 14 de Ellerbroek et al. 2013). Adicionalmente, se hace la integración para distintos valores del cociente de las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β , los cuales están dentro del rango $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\infty}$ (ver tabla 3.1). Una vez establecidos los valores de los parámetros α y β , se calculan las condiciones de frontera en el polo descritas en las secciones 3.2.2 y 3.2.3. Finalmente, la integración numérica inicia en un ángulo de 10^{-3} radianes.

Con la finalidad de recuperar unidades físicas, se consideran los parámetros de la estrella central del flujo molecular CB 26 (Launhardt et al. 2009), los cuales son una masa estelar de $M_* = 0.5 M_{\odot}$ y un radio centrífugo de 200 AU (Launhardt & Sargent 2001). Con estos datos se obtiene una velocidad v_0 (ver eq. [2.24]) de 1.5 km s^{-1} .

La figura 3.3 muestra la forma de la cáscara para valores de $\beta = 1.5, 1.6, 1.7$ y 1.8 . Se puede notar que para vientos estelares débiles, valores de β pequeños, se tienen cáscaras esféricas. Mientras que, para vientos estelares fuertes, valores de β grandes, se obtienen cáscaras elongadas en la dirección del eje de rotación de la nube.

El campo de velocidades de la cáscara se muestra en la Figura 3.4. Las velocidades de la cáscara se obtienen de las ecs. (3.7), donde $U_r = F_r/F_m$, $U_{\theta} = F_{\theta}/F_m$, y $U_{\phi} = F_{\phi}/F_m$. En esta figura se puede observar que la velocidad radial (panel izquierdo), aumenta con el ángulo polar θ y se mantiene constante conforme aumenta el parámetro β . La velocidad θ (panel medio), disminuye conforme aumenta el parámetro β y aumenta con el ángulo. El hecho de que esta velocidad es positiva, indica que el material de la cáscara se desliza desde el polo hasta el ecuador y se acumula en esta región. Por último, en el panel derecho se muestra la velocidad azimutal (velocidad de rotación), esta velocidad disminuye conforme aumenta el parámetro β e incrementa con el ángulo. Se puede notar, que la velocidad de rotación es máxima en el ecuador debido a que las órbitas del flujo de acreción en este punto tienen mayor momento angular con respecto a la región del polo.

La densidad superficial de la cáscara a lo largo de la dirección radial se obtiene de la ec. (3.22) y se grafica en la Figura 3.5. En esta figura se muestra que la densidad superficial aumenta con el parámetro β . Mientras que, para ángulos cercanos a la región del polo, esta densidad se mantiene prácticamente constante, en regiones cercanas al ecuador, la densidad superficial aumenta considerablemente.

El momento angular específico de la cáscara en la dirección z es

$$j_z = U_{\phi} R_s \sin \theta. \quad (3.61)$$

La Figura 3.6 muestra el momento angular específico como función del ángulo θ . Se puede notar

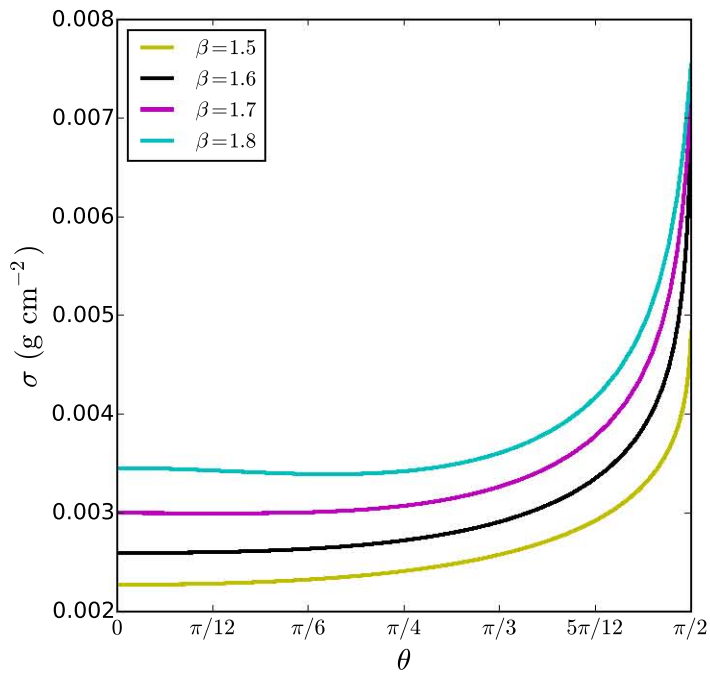


Figura 3.5: Densidad superficial de la cáscara como función de θ para los mismos parámetros α y β de la figura 3.3.

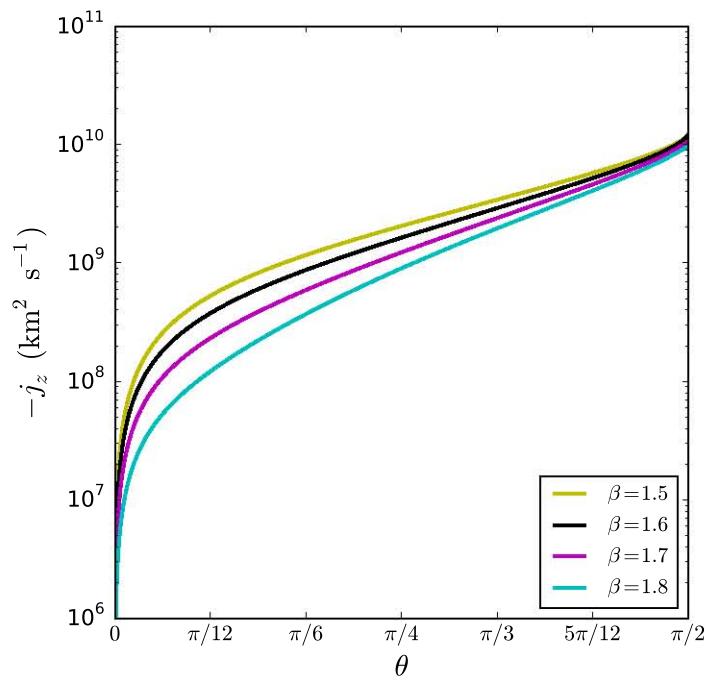


Figura 3.6: Flujo de momento angular específico en la dirección z como función de θ para los mismos parámetros α y β de la figura 3.3.

que el momento angular específico aumenta con el ángulo y con el parámetro β .

Con la finalidad de comparar el flujo molecular modelado con las velocidades de rotación observadas, se proyecta el campo de velocidades a lo largo de la línea de visión para dos distintos ángulos de inclinación, en la Figura 3.7 se muestra un diagrama esquemático de un flujo molecular

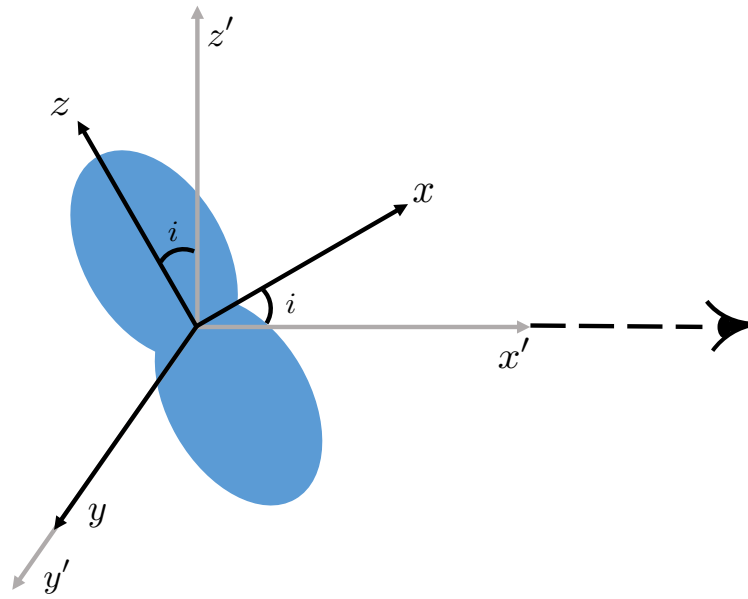


Figura 3.7: Diagrama esquemático de un flujo molecular con un ángulo de inclinación $i \neq 0^\circ$ con respecto al plano del cielo. El flujo molecular se encuentra en un sistema de coordenadas x , y y z . Mientras que el observador, se encuentra en un sistema de coordenadas x' , y' y z' . El plano del cielo está definido por el plano y' - z' . Mientras que se considera que la línea de visión esta sobre el eje x' .

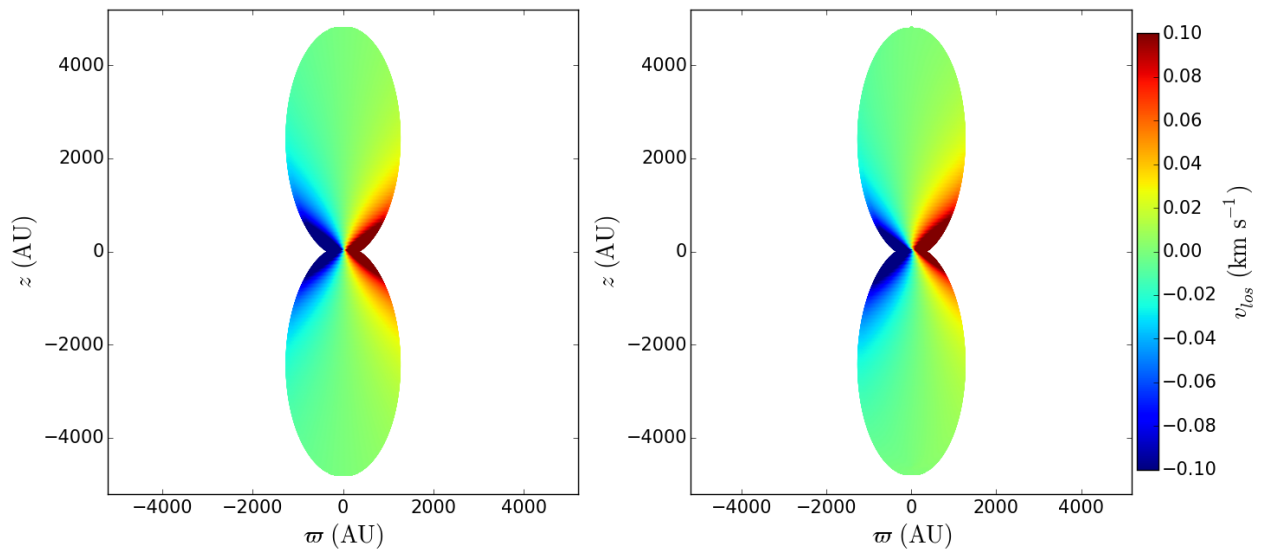


Figura 3.8: Velocidad sobre la línea de visión v_{los} para diferentes ángulos de inclinación i para los parámetros $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1.8$. Panel izquierdo: velocidad v_{los} para un ángulo de inclinación sobre el plano del cielo $i = 0^\circ$. Panel derecho: velocidad v_{los} para un ángulo de inclinación sobre el plano del cielo $i = 5^\circ$.

con un ángulo de inclinación $i \neq 0^\circ$. Para hacer la comparación mencionada anteriormente, se consideran ángulos de inclinación con respecto al plano del cielo de $i = 0^\circ$ e $i = 5^\circ$. La velocidad sobre la línea de visión v_{los} , se muestra en la Figura 3.8. El panel izquierdo muestra un flujo molecular para los parámetros $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1.8$ para un ángulo de inclinación $i = 0^\circ$. Mientras que el panel derecho muestra un flujo con los mismos parámetros α y β que el panel anterior, pero con un ángulo de inclinación $i = 5^\circ$. Se puede observar que para un flujo con un ángulo

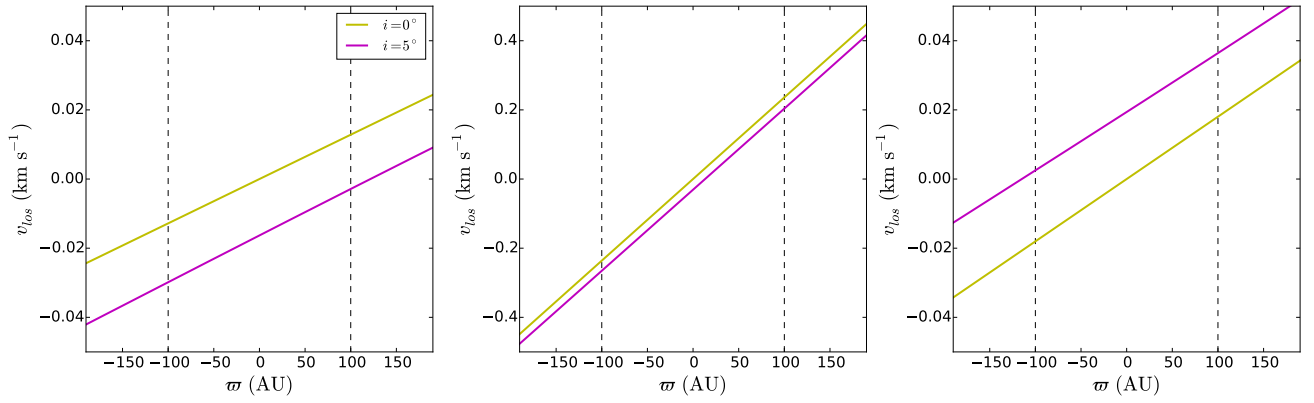


Figura 3.9: Diagramas posición-velocidad con cortes perpendiculares al eje de rotación de la nube para diferentes alturas sobre el plano medio del disco para un ángulo de inclinación $i = 0^\circ$ (línea amarilla) e $i = 5^\circ$ (línea magenta) para los parámetros $\alpha = 0.1$ y $\beta = 1.8$. Panel izquierdo: velocidad sobre la línea de visión v_{los} para $z_{cut} = -560$ AU. Panel medio: velocidad v_{los} sobre el plano medio del disco. Panel derecho: velocidad v_{los} para $z_{cut} = 420$ AU.

$i = 0^\circ$, la velocidad sobre la línea de visión (velocidad de rotación) es únicamente la componente azimutal de la velocidad, mientras que para ángulos $i \neq 0^\circ$, la velocidad de rotación es una combinación de las componentes radial, polar y azimutal de la velocidad de la cáscara. La figura 3.9 muestra cortes a diferentes alturas z_{cut} de ambos mapas. En el panel izquierdo se muestra un diagrama posición-velocidad para $z_{cut} = -560$ AU. El panel medio y el panel derecho muestran cortes a $z_{cut} = 0$ y $z_{cut} = 420$ AU, respectivamente.

3.4. Discusión

Por medio del análisis de parámetros libres hecho en este modelo, se encontró que para un valor dado del cociente de la tasa de pérdida de masa del viento y la tasa de acreción α , el modelo se restringe a un rango de valores del cociente de tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β , en otras palabras $\beta_{\min} < \beta < \beta_{\infty}$. Esto ayuda a que el modelo sólo dependa de un parámetro libre.

Sin embargo, al hacer un análisis de estabilidad, se encontró que nuestras cáscaras son inestables ante cualquier perturbación radial. Es decir, si se aplica una fuerza externa en dirección a la estrella central, la cáscara colapsará hasta la superficie estelar. Mientras que, si se aplica una fuerza externa en dirección opuesta a la estrella central, la cáscara se expandirá hasta infinito.

A pesar de la inestabilidad del modelo, se resolvió numéricamente y se encontró que para vientos estelares fuertes (β grande), se obtienen cáscaras elongadas en dirección del eje de rotación de la nube. Por otro lado, para vientos estelares débiles (β pequeña), se encuentran cáscaras esféricas.

Las velocidades del material de la cáscara, tanto radiales (expansión) como azimutales (rotación), son relativamente pequeñas en comparación con las medidas observacionalmente. Por ejemplo, para el caso de HH 30 (Louvet et al. 2018), se reporta una velocidad de expansión de 5 km s^{-1} , mientras que teóricamente se encuentran velocidades de expansión del orden de 1 km s^{-1} . Por otra parte, este modelo predice velocidades de rotación del orden de 0.1 km s^{-1} , menores hasta en un orden de magnitud a las medidas observacionalmente (ver tabla 1.1). Para hacer esta comparación, se considera un flujo molecular con un ángulo de inclinación sobre el plano del cielo.

Capítulo 4

Evolución dinámica de una cáscara

El contenido de este capítulo se muestra en el artículo publicado en *The Astrophysical Journal*: “*Angular Momentum in Bipolar Outflows: Dynamical Evolutionary Model*”. Autores: J. A. López-Vázquez, J. Cantó, y S. Lizano, Volume 879, Issue 1, article id. 42, 18 pp. (2019). Este artículo se muestra en el Apéndice D.

En el capítulo anterior, se mostró un modelo estático para describir una cáscara formada por la colisión entre un viento estelar isotrópico y un flujo de acreción con rotación; sin embargo, se demostró analíticamente que estas cáscaras son inestables ante perturbaciones radiales. Por lo tanto, en este capítulo, se muestra un modelo de evolución dinámica con la finalidad de modelar a los flujos moleculares como cáscaras delgadas formadas por la colisión de vientos estelares y flujos de acreción.

4.1. Ecuaciones del modelo

En el capítulo 2, se desarrollaron detalladamente las ecuaciones que rigen la evolución de una cáscara desde su origen, cerca de la superficie estelar, hasta distancias de miles de unidades astronómicas de la estrella central. Con base en el formalismo presentado en el capítulo 2, se tiene que la evolución de esta cáscara está descrita por las ecs. (2.3), (2.7), (2.12), (2.13) y (2.15), las cuales representan la ecuación de continuidad, las ecuaciones de momento en la dirección radial, polar y azimutal, y el radio de la cáscara, respectivamente.

Para resolver estas ecuaciones, para la evolución del radio de la cáscara $R_s(\theta, t)$, es necesario especificar las propiedades del flujo de acreción y del viento estelar. Como se mencionó anteriormente, este modelo es general, es decir, puede ser utilizado para un flujo de acreción y un viento estelar con un campo general de velocidades, con la condición que ambos flujos sean axisimétricos. Para fines de este trabajo, tan solo se considera la interacción de un viento estelar anisotrópico, el cual se describe detalladamente en la sección 2.2.1 y del flujo de acreción de Ulrich (1976), descrito en la sección 2.2.2.

Las ecs. (2.3) - (2.15) para la evolución de una cáscara pueden escribirse en forma más compacta en términos del flujo de masa

$$P_m = R_s^2 \sin \theta \sigma, \quad (4.1)$$

y de los flujos de momento

$$\begin{aligned} P_r &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_r \equiv P_m U_r, \\ P_\theta &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_\theta \equiv P_m U_\theta, \\ P_\phi &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_\phi \equiv P_m U_\phi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A diferencia del capítulo 3, los flujos de masa y momento están asociados al término temporal de las ecuaciones de conservación.

Sustituyendo las ecs. (4.1) y (4.2) en la ec. (2.3), se tiene que la evolución del flujo de masa está dada por

$$\frac{\partial P_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\theta}{R_s} \right) = R_s^2 \sin \theta \left[\rho_a \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right) - \rho_w \left(\frac{P_r}{P_m} - v_w \right) \right], \quad (4.3)$$

donde el lado derecho muestra la contribución a la cáscara del viento estelar y el flujo de acreción.

En términos de los flujos de masa y momento, la evolución del flujo de momento radial está dada por

$$\frac{\partial P_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_r P_\theta}{R_s P_m} \right) - \frac{P_\theta^2 + P_\phi^2}{R_s P_m} + \frac{GM_* P_m}{R_s^2} = R_s^2 \sin \theta \left[\rho_a U_{ar} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right) - \rho_w v_w \left(\frac{P_r}{P_m} - v_w \right) \right] \quad (4.4)$$

El tercer término del lado izquierdo proviene de los efectos centrífugos, y el último término es debido al peso de la cáscara. El lado derecho considera la contribución del viento estelar y del flujo de acreción.

Los flujos de momento en la dirección polar y azimutal, respectivamente, están dados por

$$\frac{\partial P_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\theta^2}{R_s P_m} \right) + \frac{P_r P_\theta - P_\phi^2 \cot \theta}{R_s P_m} = R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{a\theta} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right), \quad (4.5)$$

y

$$\frac{\partial P_\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\phi P_\theta}{R_s P_m} \right) + \frac{P_\phi (P_r + P_\theta \cot \theta)}{R_s P_m} = R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{a\phi} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right). \quad (4.6)$$

En estas dos ecuaciones, el último término del lado izquierdo corresponde a los efectos centrífugos sobre la cáscara, mientras que el lado derecho es la contribución del flujo de acreción.

Finalmente, la evolución del radio de la cáscara puede escribirse como

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = \frac{P_r}{P_m} - \frac{1}{R_s} \frac{P_\theta}{P_m} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}, \quad (4.7)$$

donde el primer término del lado derecho corresponde a la velocidad radial y el segundo es la contribución del movimiento tangencial a lo largo de la cáscara.

4.2. Solución de las ecuaciones

4.2.1. Ecuaciones adimensionales

Para resolver las ecs. (4.3) - (4.7), se definen las siguientes variables adimensionales: el radio

$$r_s = \frac{R_s}{R_{\text{cen}}}, \quad (4.8)$$

el tiempo

$$\tau = \frac{v_0}{R_{\text{cen}}} t, \quad (4.9)$$

el flujo de masa

$$p_m = \frac{4\pi v_0}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_m, \quad (4.10)$$

y los flujos de momento

$$p_r = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_r, \quad (4.11)$$

$$p_\theta = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_\theta, \quad (4.12)$$

$$p_\phi = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_\phi. \quad (4.13)$$

Las velocidades del flujo de acreción y del viento estelar son

$$u_{ar} = \frac{U_{ar}}{v_0}, \quad (4.14)$$

$$u_{a\theta} = \frac{U_{a\theta}}{v_0}, \quad (4.15)$$

$$u_{a\phi} = \frac{U_{a\phi}}{v_0}, \quad (4.16)$$

y

$$u_{wr} = \frac{v_w}{v_0}. \quad (4.17)$$

Como en el capítulo 3, se define el cociente entre la tasa de pérdida de masa y la tasa de acreción

$$\alpha = \frac{\dot{M}_w}{\dot{M}_a}, \quad (4.18)$$

y el cociente entre las tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_a v_0} \equiv \alpha u_{wr}. \quad (4.19)$$

Finalmente, las densidades del flujo de acreción y del viento estelar están dadas por

$$\rho'_a = \frac{4\pi R_{\text{cen}}^2 v_0}{\dot{M}_a} \rho_a \equiv -\frac{\zeta^2}{u_{ar}} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]^{-1}, \quad (4.20)$$

y

$$\rho'_w = \frac{4\pi R_{\text{cen}}^2 v_0}{\dot{M}_a} \rho_w \equiv \frac{\alpha}{r_s^2 u_{wr}} f(\theta). \quad (4.21)$$

Por lo tanto, en términos de las nuevas variables, las ecs. (4.3) - (4.7) pueden escribirse como

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\theta}{r_s} \right) = \sin \theta \left[\frac{\left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right)}{u_{ar} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]} - \alpha f(\theta) \left(\frac{\alpha p_r}{\beta p_m} - 1 \right) \right], \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_r p_\theta}{r_s p_m} \right) - \frac{p_\theta^2 + p_\phi^2}{r_s p_m} + \frac{p_m}{r_s^2} = \sin \theta \left[\frac{\left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right)}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} - \beta f(\theta) \left(\frac{\alpha p_r}{\beta p_m} - 1 \right) \right], \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial p_\theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\theta^2}{r_s p_m} \right) + \frac{p_r p_\theta - p_\phi^2 \cot \theta}{r_s p_m} = \frac{\sin \theta}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \left(\frac{u_{a\theta}}{u_{ar}} \right) \left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right), \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial p_\phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\phi p_\theta}{r_s p_m} \right) + \frac{p_\phi (p_r + p_\theta \cot \theta)}{r_s p_m} = \frac{\sin \theta}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \left(\frac{u_{a\phi}}{u_{ar}} \right) \left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right), \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial r_s}{\partial \tau} = \frac{p_r}{p_m} - \frac{1}{r_s} \frac{p_\theta}{p_m} \frac{\partial r_s}{\partial \theta}, \quad (4.26)$$

donde $f(\theta)$ es la función de anisotropía del viento estelar definida en la ec. (2.17).

Estas ecuaciones necesitan condiciones iniciales en el tiempo y condiciones de frontera en el polo ($\theta = 0$) y en el ecuador ($\theta = \pi/2$). Para ello se expanden los flujos de masa y momento, así como el radio, en series de potencias de θ y se obtiene un conjunto de ecuaciones para la evolución de la cáscara en el polo y en el ecuador. Estas soluciones proporcionan condiciones de frontera para el sistema de ecuaciones diferenciales parciales (4.22) - (4.26).

4.2.2. Condiciones de frontera en el polo

Expandiendo los flujos de masa y momento y el radio de la cáscara a segundo orden en θ para $\theta \ll 1$, se tiene que

$$p_m \approx b_{m1} \theta, \quad (4.27)$$

$$p_r \approx b_{r1} \theta, \quad (4.28)$$

$$p_\theta \approx b_{\theta 2} \theta^2, \quad (4.29)$$

$$p_\phi \approx b_{\phi 2} \theta^2, \quad (4.30)$$

y

$$r_s \approx r_{s0}, \quad (4.31)$$

donde los coeficientes b_{m1} , b_{r1} , $b_{\theta 2}$, $b_{\phi 2}$ y r_{s0} son funciones del tiempo adimensional (τ), y cuya solución se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{aligned} \frac{db_{m1}}{d\tau} + \frac{2b_{\theta 2}}{r_{s0}} &= \alpha \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) \\ &+ \left(\frac{r_{s0}}{2+r_{s0}} \right) \left(\frac{r_{s0}}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{r1}}{d\tau} + \frac{2b_{r1}b_{\theta 2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{m1}}{r_{s0}^2} &= \beta \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) \\ &- \left(\frac{r_{s0}}{2+r_{s0}} \right) \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\frac{db_{\theta 2}}{d\tau} - \frac{b_{\phi 2}^2}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{r1}b_{\theta 2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{3b_{\theta 2}^2}{b_{m1}r_{s0}} - \frac{(2r_{s0})^{1/2}}{(2+r_{s0})^2} = \left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}}\right) \left[\frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2}\right], \quad (4.34)$$

$$\frac{db_{\phi 2}}{d\tau} + \frac{b_{\phi 2}b_{r1}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{4b_{\theta 2}b_{\phi 2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2} = -\left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}}\right) \left(\frac{r_{s0}}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2}\right], \quad (4.35)$$

y

$$\frac{dr_{s0}}{d\tau} = \frac{b_{r1}}{b_{m1}}. \quad (4.36)$$

La deducción de las ecuaciones anteriores se describe a detalle en el Apéndice A.

4.2.3. Condiciones de frontera en el ecuador

En el ecuador, la densidad del flujo de acreción en el radio centrífugo diverge (ver figura 2.5). Si la cáscara evoluciona en esta dirección, eventualmente se encontrará con una barrera de densidad infinita. En ese punto, la cáscara se estanca en el radio centrífugo.

Expandiendo los flujos de masa y momento y el radio alrededor del ecuador, se tiene que

$$p_m \approx q_{m0} + q_{m1}\Theta, \quad (4.37)$$

$$p_r \approx q_{r0} + q_{r1}\Theta, \quad (4.38)$$

$$p_\theta \approx q_{\theta 0} + q_{\theta 1}\Theta, \quad (4.39)$$

$$p_\phi \approx q_{\phi 0} + q_{\phi 1}\Theta, \quad (4.40)$$

y

$$r_s \approx q_{rs0} + q_{rs1}\Theta, \quad (4.41)$$

donde $\Theta = \left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) - \theta \ll 1$ y el ángulo η define una frontera física en la región ecuatorial (e.g. un disco).

Los coeficientes q_{m0} , q_{m1} , q_{r0} , q_{r1} , $q_{\theta 0}$, $q_{\theta 1}$, $q_{\phi 0}$, $q_{\phi 1}$, q_{rs0} y q_{rs1} son funciones del tiempo adimensional (τ) cuya solución está dada por el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido de sustituir las ecs. (4.37) - (4.41) en las ecs. (4.22) - (4.26):

$$\frac{dq_{m0}}{d\tau} + f_{m0,1} = f_{m0,2}, \quad (4.42)$$

$$\frac{dq_{m1}}{d\tau} + f_{m1,1} = f_{m1,2}. \quad (4.43)$$

$$\frac{dq_{r0}}{d\tau} + f_{r0,1} = f_{r0,2}, \quad (4.44)$$

$$\frac{dq_{r1}}{d\tau} + f_{r1,1} = f_{r1,2}, \quad (4.45)$$

$$\frac{dq_{\theta0}}{d\tau} + f_{\theta0,1} = f_{\theta0,2}, \quad (4.46)$$

$$\frac{dq_{\theta1}}{d\tau} + f_{\theta1,1} = f_{\theta1,2}, \quad (4.47)$$

$$\frac{dq_{\phi0}}{d\tau} + f_{\phi0,1} = f_{\phi0,2}, \quad (4.48)$$

$$\frac{dq_{\phi1}}{d\tau} + f_{\phi1,1} = f_{\phi1,2}, \quad (4.49)$$

$$\frac{dq_{rs0}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} + \frac{q_{\theta0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (4.50)$$

y

$$\frac{dq_{rs1}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} \left(\frac{q_{r1}}{q_{r0}} - \frac{q_{m1}}{q_{m0}} \right) - \frac{q_{\theta0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \left(\frac{q_{m1}}{q_{m0}} - \frac{q_{\theta1}}{q_{\theta0}} + \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \right), \quad (4.51)$$

donde las funciones $f_{ai,j}$ están definidas en el Apéndice B, donde también, se aborda más detalladamente la deducción de las ecuaciones anteriores.

4.3. Resultados

Las ecs. (4.22) - (4.26) describen la evolución de una cáscara. Las ecuaciones adimensionales son resueltas numéricamente, asumiendo inicialmente una cáscara esférica y sin masa, con un radio cercano a la superficie estelar. Se considera un radio adimensional inicial de $r_{s0} \simeq R_*/R_{cen} \simeq 10^{-4}$. Se asume también un cociente de la tasa de pérdida de masa del viento y la tasa de acreción de $\alpha = 0.1$, valor típico para flujos moleculares observados (ver figura 14 de Ellerbroek et al. 2013), así como $\beta = 21^1$. La integración fue hecha desde $t = 0$ hasta $t = 1000$ yr.

En esta sección se estudiará la evolución de una cáscara para diferentes modelos de viento estelar. Como ejemplo, se considera un flujo molecular producido por un viento estelar anisotrópico

¹La velocidad del viento estelar y la velocidad v_0 (ec. [2.24]) corresponden a los parámetros de la estrella central del flujo molecular CB 26 (Launhardt et al. 2009). Estos parámetros son: una masa estelar de $M_* = 0.5 M_\odot$ y un radio centrífugo de $R_{cen} = 200$ AU (Launhardt & Sargent 2001). También se considera un radio estelar $R_* = 2 R_\odot$. La velocidad del viento se considera como la velocidad de escape de la estrella central. Con estas suposiciones, la velocidad del viento estelar es de 309 km s^{-1} y una velocidad $v_0 = 1.5 \text{ km s}^{-1}$.

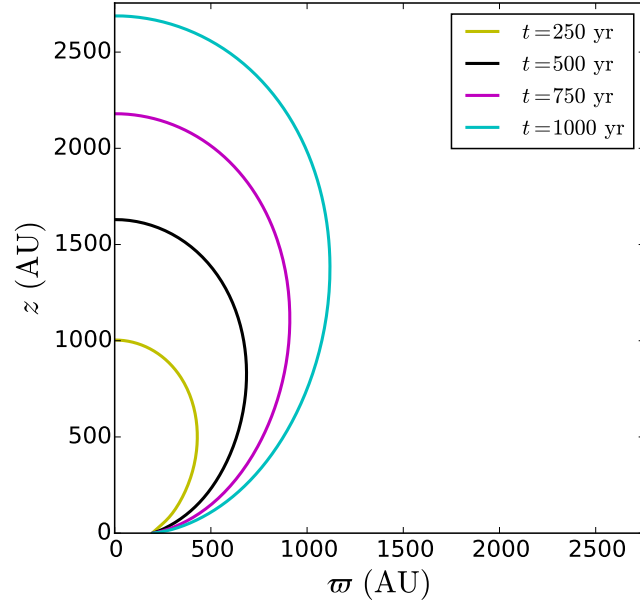


Figura 4.1: Forma de la cáscara para diferentes tiempos para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0} = 10^{-4}$, $A = 1$, $B = 20$ y $n = 2$.

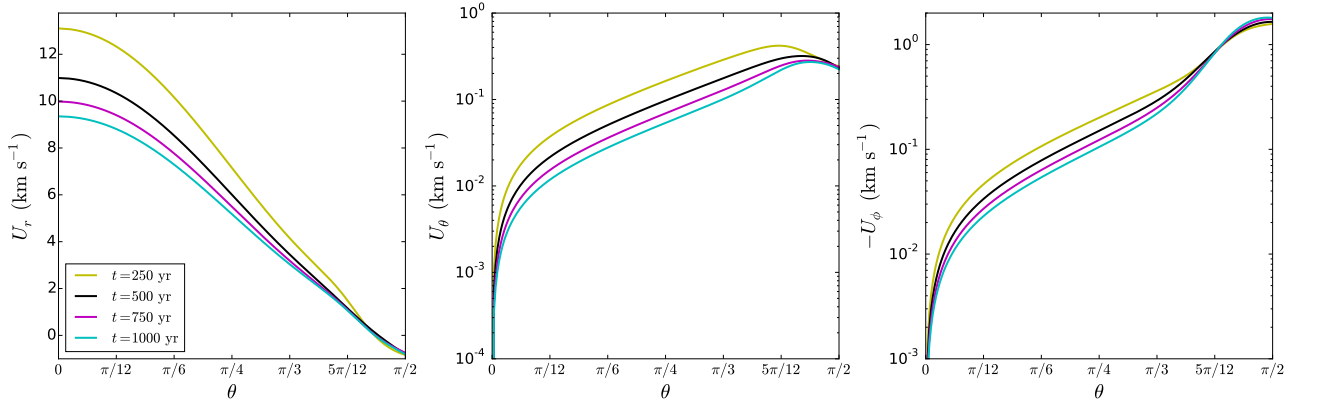


Figura 4.2: Campo de velocidades de la cáscara como función de θ para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1. Panel izquierdo: velocidad radial. Panel medio: velocidad U_θ . Panel derecho: velocidad azimutal.

con $A = 1$, $B = 20$ y $n = 2$. La Figura 4.1 muestra la forma de la cáscara $R_s(\theta, t)$ para diferentes tiempos desde $t = 250$ yr hasta $t = 1000$ yr. Las cáscaras son elongadas a lo largo del eje de rotación. Definiendo la colimación de la cáscara como el cociente

$$C = \frac{R_s(0, t)}{\varpi_{\max}(t)}, \quad (4.52)$$

donde $R_s(0, t)$ es el radio de la cáscara en el polo y $\varpi_{\max}(t)$ es el ancho máximo de la cáscara, este cociente mide la elongación de la cáscara. Durante la evolución, este modelo tiene una colimación $C \sim 2.5$, similar a los flujos observados CB 26 (Launhardt et al. 2009) y DG Tau B (Zapata et al. 2015).

La figura 4.2 muestra las velocidades radial, U_θ y azimutal como función del ángulo polar θ para este modelo a diferentes tiempos. Las velocidades de la cáscara son obtenidas de las ecs. (4.2). El panel izquierdo muestra la velocidad radial de la cáscara. Esta velocidad decrece con el

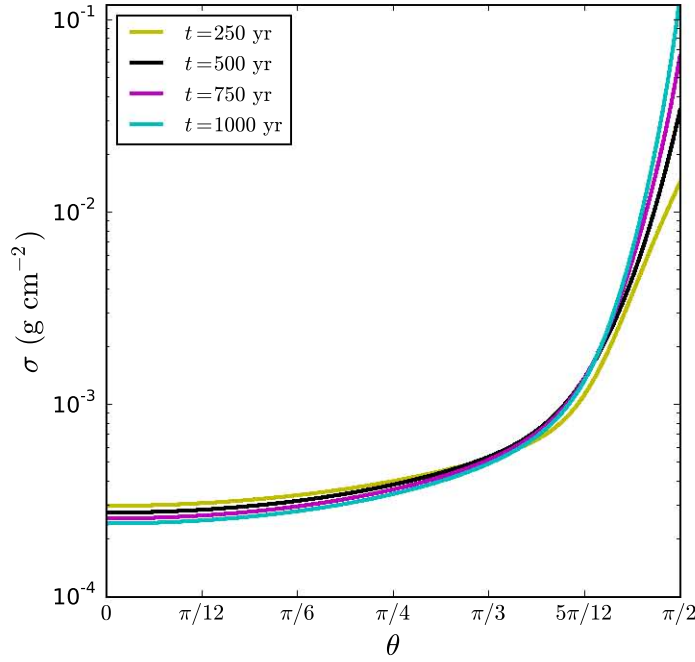


Figura 4.3: Densidad superficial de masa de la cáscara como función de θ para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1.

tiempo, es decir, la cáscara se está desacelerando. También, esta velocidad decrece con el ángulo tal que en el ecuador, $\theta = \pi/2$, esta velocidad tiende a cero debido a que la cáscara encuentra una barrera de densidad infinita en el radio centrífugo R_{cen} . El panel medio muestra la velocidad U_θ de la cáscara, la cual decrece con el tiempo, pero incrementa con el ángulo polar θ , debido a que el material se desliza desde el polo hasta el ecuador y alimenta al flujo de acreción dado que $U_\theta > 0$. El panel de la derecha muestra la velocidad azimutal. Esta velocidad de rotación decrece con el tiempo e incrementa con el ángulo: en el ecuador la rotación es máxima debido a que las órbitas del flujo de acreción que llegan a este punto tienen mayor momento angular con respecto al polo.

La densidad superficial de masa de la cáscara a lo largo de la dirección radial, obtenida de la ec. (4.1), se muestra en la Figura 4.3. En esta figura, se puede observar que, para ángulos cercanos al polo, la densidad superficial decrece con el tiempo, mientras que para ángulos cercanos al ecuador, la densidad superficial incrementa con el tiempo.

La masa total de la cáscara está dada por

$$M_{\text{shell}}(t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma dA = 4\pi \int_0^{\pi/2} P_m d\theta, \quad (4.53)$$

donde $dA = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$, y P_m está definida en la ec. (4.1). La figura 4.4 muestra que la masa de la cáscara aumenta con el tiempo.

El momento angular específico de la cáscara en la dirección z es

$$j_z(\theta, t) = U_\phi R_s \sin\theta, \quad (4.54)$$

y el momento angular total es

$$J_z(t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma j_z dA = 4\pi \int_0^{\pi/2} P_m j_z d\theta. \quad (4.55)$$

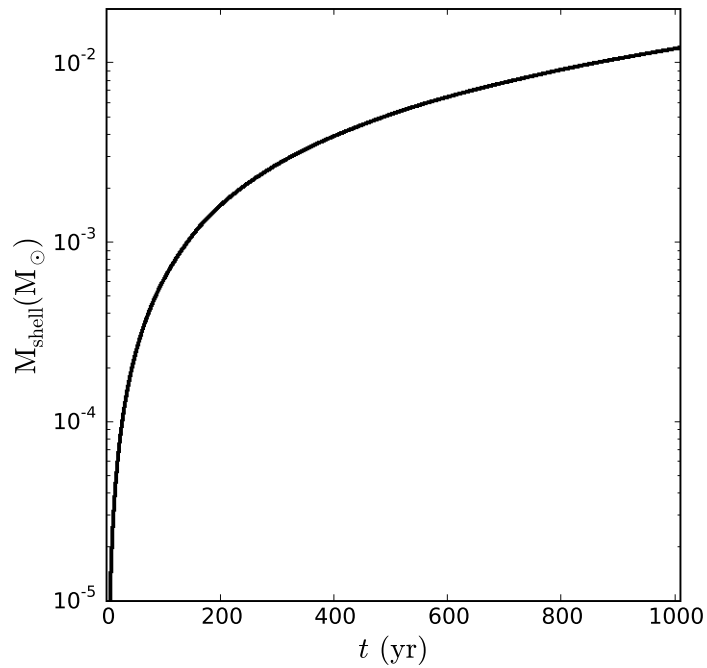


Figura 4.4: Masa total de la cáscara como función del tiempo para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1.

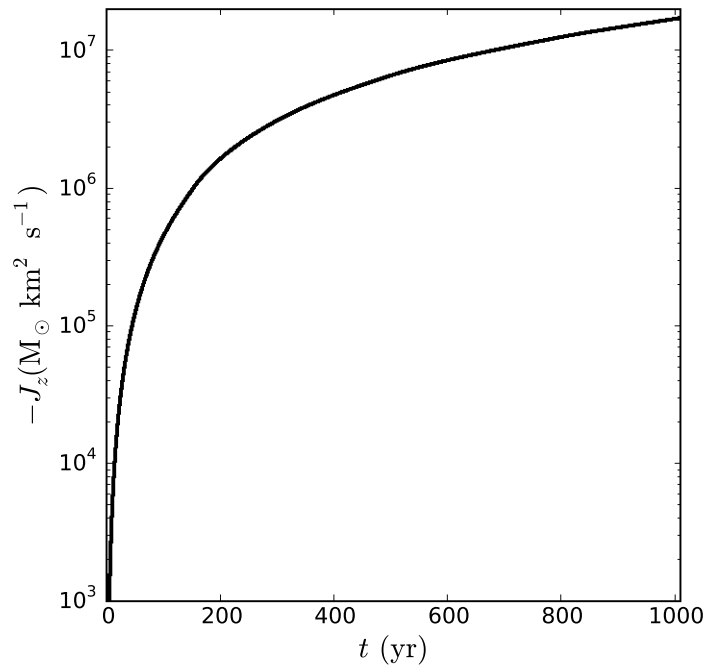


Figura 4.5: Momento angular total de la cáscara como función del tiempo para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1.

En la Figura 4.5 se muestra que el momento angular total de la cáscara incrementa con el tiempo.

Con la finalidad de comparar el flujo modelado con observaciones, se proyecta el campo de velocidades a lo largo de la línea de visión para un ángulo de inclinación $i = 5^\circ$ con respecto al plano del cielo. La velocidad sobre la línea de visión v_{los} se muestra en la Figura 4.6. Los

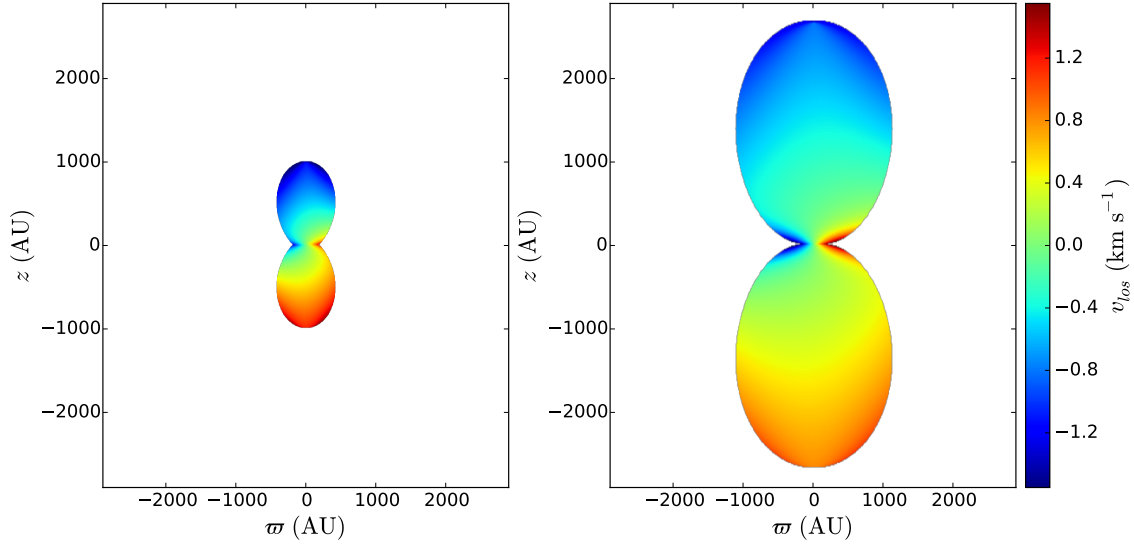


Figura 4.6: Velocidad sobre la línea de visión v_{los} para diferentes tiempos y un ángulo de inclinación $i = 5^\circ$. Panel izquierdo: velocidad v_{los} para un tiempo de $t = 250$ yr. Panel derecho: velocidad v_{los} para un tiempo de $t = 1000$ yr. Estas gráficas fueron hechas para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1.

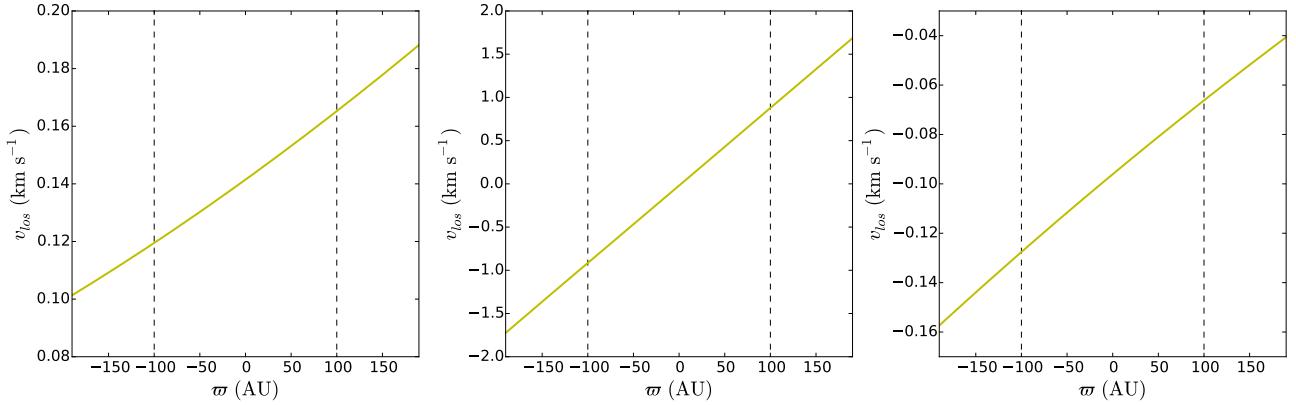


Figura 4.7: Diagramas posición-velocidad con cortes perpendiculares al eje de rotación de la nube, para diferentes alturas sobre el plano medio del disco, considerando un ángulo de inclinación $i = 5^\circ$ y un tiempo $t = 250$ yr. Panel izquierdo: velocidad sobre la línea de visión v_{los} para $z_{cut} = -560$ AU. Panel medio: velocidad v_{los} sobre el plano medio del disco. Panel derecho: velocidad v_{los} para $z_{cut} = 420$ AU. Estas gráficas fueron hechas para los mismos parámetros α , β , $r_{s0}(0)$, A , B y n de la Figura 4.1.

paneles izquierdo y derecho muestran la velocidad a 250 yr y 1000 yr, respectivamente. Para una inclinación mayor que 0° , la velocidad a lo largo de la línea de visión es una combinación de las velocidades radial y azimutal. La figura 4.7 muestra cortes a diferentes alturas z_{cut} del mapa con $t = 250$ yr. El panel izquierdo muestra un diagrama posición-velocidad para $z_{cut} = -560$ AU. El panel medio y el panel derecho muestran cortes a $z_{cut} = 0$ y $z_{cut} = 420$ AU, respectivamente.

Ahora se considera el efecto del grado de anisotropía del viento estelar sobre la forma de la cáscara. La Figura 4.8 muestra la forma de la cáscara para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0}(0) = 10^{-4}$ y un modelo de viento estelar con $A = 1$, un tiempo de 1000 yr, y con diferentes valores de los parámetros de anisotropía B y n . El panel izquierdo muestra la forma de la cáscara

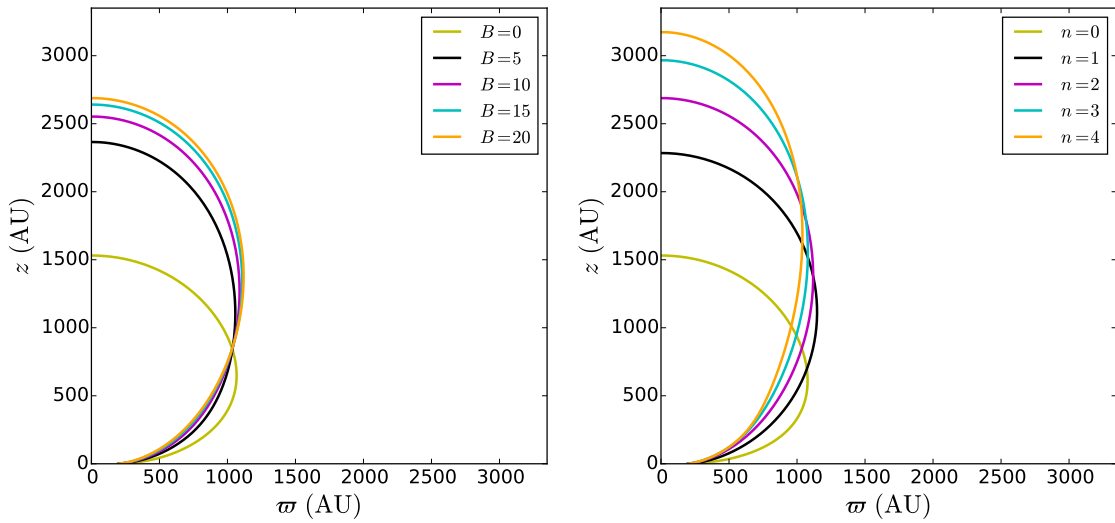


Figura 4.8: Forma de la cáscara para diferentes modelos a un tiempo $t = 1000$ yr y los mismos parámetros α , β y $r_{s0}(0)$ de la Figura 4.1. Panel izquierdo: vientos estelares con $A = 1$, $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía $B = 0, 5, 10, 15$ y 20 . Panel derecho: vientos estelares anisotrópicos con $A = 1$, $B = 20$ y diferentes exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

para $n = 2$ y diferentes valores de B . Se puede notar que conforme B incrementa, la cáscara se vuelve más elongada. El panel derecho muestra la forma de la cáscara para $B = 20$ y diferentes exponentes n . Se puede observar que conforme el exponente n incrementa, la cáscara se vuelve más elongada.

Finalmente, la Figura 4.9 muestra la colimación de la cáscara para un tiempo $t = 1000$ yr y para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0}(0) = 10^{-4}$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía B y del exponente n desde un viento estelar anisotrópico ($B = 0$), hasta vientos estelares muy anisotrópicos ($B = 20$ y $n = 4$). Como se observó en la Figura 4.8, la colimación incrementa tanto con B como con n .

4.4. Discusión

Se encuentra que en el polo, la cáscara colapsa tanto para vientos estelares isotrópicos como anisotrópicos si la razón entre las tasas de momento del flujo de acreción es menor al valor crítico, $\beta < \beta_{crit}$ (ver Apéndice A). Esto sucede porque la cáscara no tiene suficiente momento para escapar. En el ecuador, para un valor dado de β , la cáscara siempre se estancará cerca del radio centrífugo (ver Apéndice B). Esto sucede porque la densidad del flujo de acreción diverge en el radio centrífugo.

Adicionalmente, se hace una comparación de nuestro modelo con el de Wilkin & Stahler (2003). Para un viento estelar isotrópico y los mismos valores de α y β , se encuentra que las cáscaras producidas por nuestro modelo tienen el mismo tamaño en el polo. También el factor de colimación es el mismo que en su modelo $C \sim 1.6$ (ver Apéndice C). Las únicas diferencias se deben a la suposición de diferentes condiciones de frontera en la superficie del disco, cerca del ecuador.

La colimación de las cáscaras depende de la anisotropía del viento estelar y del flujo de acreción. En los modelos con un viento estelar anisotrópico y flujo de acreción de Ulrich, es difícil obtener factores de colimación C mucho mayores a 3 (figura 4.9), mientras que los factores de colimación en fuentes observadas tienen valores $\sim 3 - 10$, Bontemps et al. (1996).

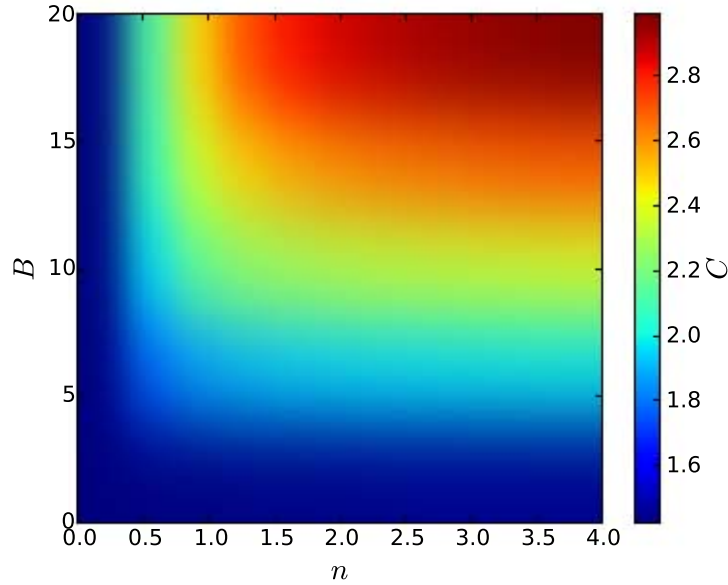


Figura 4.9: Colimación de la cáscara como C función de B y n para $A = 1$ y los mismos parámetros α , β y $r_{s0}(0)$ de la Figura 4.1.

Se comparó nuestro modelo con el flujo molecular de CB 26 (Launhardt et al. 2009), en un tiempo comparable donde, tanto el modelo como el flujo tienen el mismo tamaño en la dirección polar. Los resultados de esta comparación son:

1. El tiempo dinámico del modelo es de $t = 250$ yr, el cual es la mitad de la edad cinemática de la calculada con el tamaño observado y la velocidad actual. Esta discrepancia es debida al hecho que la cáscara se está desacelerando.
2. La velocidad radial del modelo, es del orden de 10 km s^{-1} , consistente con la velocidad de expansión observada (e.g., Lee et al. 2018).
3. El factor de colimación es similar al valor observado.
4. La masa de la cáscara en el modelo es de $2 \times 10^{-3} M_{\odot}$, dos veces el valor observado.
5. La velocidad de rotación del modelo es menor en un orden de magnitud que el valor observado (ver Tabla 1.1).
6. El momento angular total es menor al observado.

La baja rotación del modelo podría resolverse con un viento estelar con momento angular, con una nube molecular con más momento angular, o con una combinación de ambos mecanismos. Una dificultad del modelo es que la envolvente de acreción no tiene velocidades de rotación suficientemente grandes. Además, la cáscara del modelo tiene más masa que la observada con material que gira lentamente.

Como primer paso, en un futuro se espera abordar la interacción de un viento estelar con rotación y el flujo de acreción de Ulrich, para ello, se consideraría la contribución del viento estelar en el momento polar y azimutal de la cáscara, lo que implica una modificación a las ecs. (2.12) y (2.13) respectivamente, así como una modificación en las condiciones de frontera en el polo y en el ecuador, así como, un cambio en el código numérico hecho para la solución de este problema.

Capítulo 5

Comparación con el flujo molecular de la Fuente I de Orion

El contenido de este capítulo se hizo en colaboración con el Dr. Luis Zapata y se muestra en el artículo en preparación para *The Astrophysical Journal*: “ALMA Observations and Modeling of the Rotating Outflow in Orion Source I”. Autores: J. A. López-Vázquez y L. A. Zapata.

La Fuente I de Orion (de aquí en adelante Orion SrcI) se localiza en el centro de la nebulosa Kleinmann-Low, a una distancia de 415 pc (Kim et al. 2008), y es candidata a ser una estrella de alta masa, $M_* > 8 M_\odot$ (Hirota et al. 2014; Plambeck & Wright 2016; Hirota et al. 2017; Ginsburg et al. 2018). El objeto central de Orion SrcI tiene una luminosidad de $\sim 10^4 L_\odot$ (Menten & Reid 1995; Reid et al. 2007; Testi et al. 2010), y el flujo molecular asociado presenta baja velocidad ($\sim 18 \text{ km s}^{-1}$) a lo largo de la dirección noreste-suroeste, con un tamaño $\sim 1000 \text{ AU}$ (Plambeck et al. 2009; Zapata et al. 2012; Greenhill et al. 2013). Además, esta fuente tiene un disco de acreción asociado a la estrella central de un tamaño estimado de 21 - 47 AU (Hirota et al. 2017) y una velocidad local de reposo de 5.2 km s^{-1} (Ginsburg et al. 2018).

5.1. Observaciones

Las observaciones de archivo de Orion SrcI se llevaron a cabo con la banda 7 del *Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array* (ALMA), el 31 de octubre de 2016 y el 26 de julio de 2014 como parte de los programas 2016.1.00165.S (P.I. John Bally) y 2012.1.00123.S (P.I. Richard Plambeck), respectivamente. En ese momento, el arreglo contaba con 31 (2014) y 42 (2016) antenas con un diámetro de 12 m, produciendo líneas de base proyectadas con longitudes desde 33 hasta 820 m (41 – 1025 k λ) y desde 18 hasta 1100 m (22 – 1375 k λ), respectivamente. El *beam* primario a esta frecuencia tiene un ancho a potencia media (FWHM) de alrededor de $20''$, de modo que, en ambas observaciones, la emisión del flujo molecular de Orion SrcI cae en esta área.

El tiempo de integración sobre la fuente fue de 25 minutos y 32 minutos para la calibración de las observaciones del 2014, mientras que, para las observaciones del 2016 se usaron 13 minutos sobre la fuente y 37 minutos para la calibración. El correlador digital de ALMA fue configurado con cuatro ventanas espectrales centradas en 353.612 GHz (spw0), 355.482 GHz (spw1), 341.493 GHz (spw2), y 343.363 GHz (spw3) con 3840 canales y un separación entre los centros de los canales de 488.281 kHz o 0.4 km s^{-1} para las observaciones del 2014, y 344.990 GHz (spw0), 346.990 GHz (spw1), 334.882 GHz (spw2), y 332.990 GHz (spw3) con 1920 canales y una separación entre los centros de los canales de 976.562 kHz o 0.8 km s^{-1} para las observaciones del 2016. Las líneas espectrales reportadas en este estudio son en spw2 (^{29}SiO) de las observaciones

Tabla 5.1: Líneas moleculares observadas.

Línea molecular	Frecuencia en reposito [GHz]
SiS (J=19-18) $\nu = 0$	344.7794
SiO(J=8-7) $\nu = 1$	344.9162
^{29}SiO (J=8-7) $\nu = 0$	340.6119

del 2014, y spw0 (SiO y SiS) de las observaciones del 2016 (ver tabla 5.1).

Para ambas observaciones, las condiciones del clima fueron razonablemente buenas y estables para estas frecuencias. Las observaciones usaron los cuásares: 0510+1800, J0522–3627, J0527+0331, J0532–0307, J0607–0834, J0423–013 y J0541–0541 para amplitud, fase, paso de banda, apuntaje, radiómetro de vapor de agua y calibración de la atmósfera.

Los datos fueron calibrados, se obtuvieron imágenes y se analizaron usando *Common Astronomy Software Applications* (CASA) versión 5.1. Los ruidos resultantes de la imagen para las líneas espectrales fueron alrededor de 10 mJy Beam⁻¹ (SiO y SiS) con un haz sintetizado de 0.19'' × 0.14'' con una PA de -63°, y alrededor de 20 mJy Beam⁻¹ (^{29}SiO) con un haz sintetizado de 0.30'' × 0.24'' con una PA de +58°.

5.2. Resultados

5.2.1. Resultados observacionales

Las Figuras 5.1 - 5.3 presentan el momento 1 o la velocidad pesada por la intensidad de la emisión de las líneas moleculares de ^{29}SiO (J=8-7) $\nu = 0$, SiS (J=19-18) $\nu = 0$ y SiO (J=8-7) $\nu = 1$, respectivamente, del flujo molecular asociado a Orion SrcI. En estas figuras se observa la diferencia de velocidades del flujo, es decir, la parte derecha del objeto tiene un corrimiento al rojo, mientras que, la parte izquierda presenta un corrimiento al azul. Esta diferencia de velocidades puede interpretarse como rotación. También, estas figuras parecen indicar que el flujo molecular no se encuentra totalmente sobre el plano del cielo, es decir, tiene un ángulo de inclinación $i \neq 0^\circ$, esto se puede inducir, debido a que en la parte inferior de este flujo se tienen velocidades del orden de 12 km s⁻¹, mientras que la parte superior presenta velocidades del orden de 2 km s⁻¹, dichas velocidades son mayor y menor, respectivamente, que la velocidad del sistema, la cual es de 5.5 km s⁻¹. Esta diferencia de velocidad, tanto en la parte superior e inferior, puede explicarse como una combinación de las componentes radial y azimutal de la velocidad sobre la línea de visión. De las figuras 5.1 y 5.2 se puede ver que el tamaño del flujo molecular de Orion SrcI es ~ 1400 AU. Por último, la figura 5.3 muestra la emisión del flujo molecular de la parte más cercana al disco.

Diagramas posición-velocidad de la emisión de la línea molecular de ^{29}SiO (J=8-7) $\nu = 0$ son mostrados en la Figura 5.4. En esta figura se muestran cortes a diferentes alturas sobre el plano medio del disco, desde $z = 480$ AU hasta $z = -480$ AU, con intervalos de 80 AU (líneas punteadas de la figura 5.1). En esta figura, se puede observar como la molécula de ^{29}SiO (J=8-7) $\nu = 0$ en las regiones cercanas al disco está dispersa en todo el flujo molecular, incluyendo la parte interna. Sin embargo, conforme aumenta la distancia al disco de acreción, esta molécula muestra una estructura de cáscara en expansión, es decir, sólo muestra la parte externa del flujo. Adicionalmente, estos diagramas posición-velocidad muestran la cinemática del flujo, y revelan evidencia de rotación, la cual decrece conforme aumenta la distancia al disco, esta velocidad presenta valores que van desde 5 hasta 8 km s⁻¹, teniendo la mayor velocidad de rotación a una

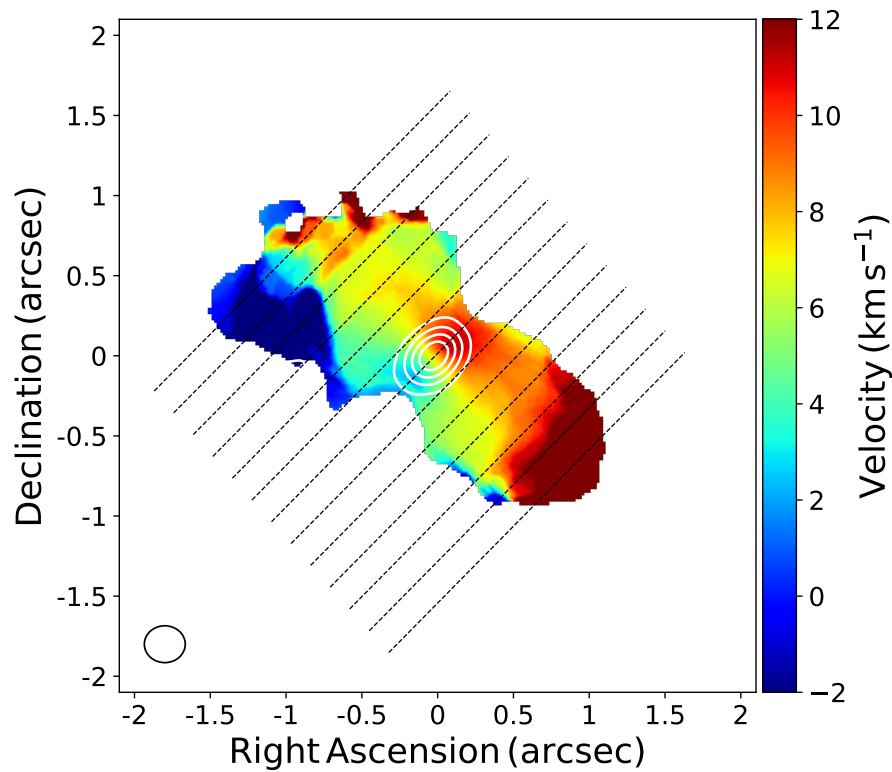


Figura 5.1: Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$ del flujo molecular con una dirección noreste-suroeste y un tamaño ~ 1400 AU. Los contornos en blanco muestran la emisión del continuo del disco. Las líneas diagonales punteadas indican donde se hicieron los diagramas posición-velocidad, los cuales fueron hechos paralelos al disco. La barra de color a la derecha de la figura muestra la velocidad LSR en km s^{-1} . El haz sintetizado se muestra en la esquina inferior izquierda.

distancia de $z = \pm 80$ AU (ver panel izquierdo de la Figura 5.7).

En la Figura 5.5 se hace un análisis similar al de la figura 5.4 para la molécula de SiS $\nu = 0$. Los diagramas posición-velocidad mostrados en esta figura, revelan una estructura de cáscara delgada donde la emisión de la molécula de SiS $\nu = 0$ es muy prominente. De esta molécula se puede deducir que, el flujo molecular se encuentra en expansión, esto debido a que la cáscara cada vez se vuelve más grande. Por otra parte, en estos diagramas se confirma la evidencia de un flujo molecular rotando, a una velocidad entre $5-8 \text{ km s}^{-1}$, la cual decrece con la distancia al disco. La velocidad de rotación mayor se da a una distancia de $z = \pm 80$ AU (ver panel central de la Figura 5.7).

En la Figura 5.6 se muestran diagramas posición-velocidad de la emisión de la molécula de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$ para las mismas distancias al disco de acreción de las figuras 5.4 y 5.5. En contraste con las dos líneas moleculares anteriores, esta línea no muestra una estructura de cáscara. Se puede ver que esta molécula confirma la presencia de rotación, dicha velocidad es menor que el medido por las líneas moleculares anteriores, entre $4-6 \text{ km s}^{-1}$, la velocidad mayor, al igual que en las líneas anteriores, es a una distancia de $z = \pm 80$ AU (ver panel derecho de la Figura 5.7). Finalmente, la falta de emisión de esta línea a alturas $z \geq 320$ AU, nos dice que esta molécula muestra sólo la parte interna del flujo molecular.

Por último, la presencia de rotación en el flujo molecular asociado a Orion SrcI se muestra claramente en la Figura 5.7, donde se hizo un acercamiento a los diagramas posición-velocidad para una distancia al plano medio del disco de $z = -80$ AU, mostrados en las figuras 5.4, 5.5 y 5.6, para las líneas moleculares de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$ (panel izquierdo), SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$

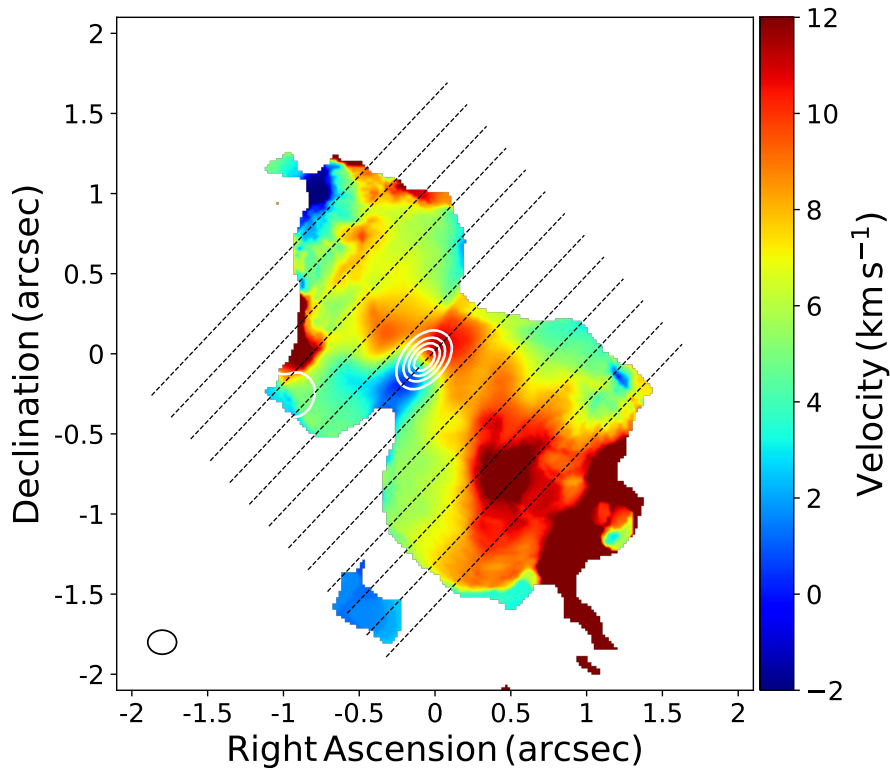


Figura 5.2: Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$ del flujo molecular, misma descripción de la Figura 5.1.

(panel central) y SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$ (panel derecho), respectivamente. En esta figura, se puede observar claramente el perfil de rotación del flujo (línea blanca sólida) y se puede medir una velocidad de rotación $\sim 8 \text{ km s}^{-1}$ para las dos primeras líneas moleculares y una velocidad de rotación $\sim 6 \text{ km s}^{-1}$ para la última línea. El hecho de que en estos diagramas se observe la emisión de estas moléculas como una elipse, indica la presencia de velocidades de expansión en la dirección radial.

5.2.2. Comparación con el modelo dinámico

Los diagramas posición-velocidad presentados en las figuras 5.4 - 5.6, muestran detalladamente la estructura del flujo como función de la distancia al plano medio del disco. De estos diagramas, se puede obtener información acerca de la cinemática y de las propiedades físicas del flujo, y comparar con los modelos dinámicos descritos en el capítulo 4.

Para nuestra comparación, se considera una masa estelar de $M_* = 8.7 M_\odot$ (Hirota et al. 2017) y un radio centrífugo de $R_{cen} = 40 \text{ AU}$ (en Hirota et al. 2017 se reporta un radio centrífugo entre 21 - 47 AU). Finalmente, se asume un radio estelar adimensional de $r_{s0}(0) \simeq R_*/R_{cen} \simeq 10^{-2}$. El modelo dinámico depende de dos cocientes asociados con las propiedades del viento estelar y el flujo de acreción. El primer parámetro es la razón entre las tasas de pérdida de masa del viento estelar y la tasa de acreción, α (ver ec. [4.18]), para este caso se considera un valor de $\alpha = 0.01$. El otro parámetro es el cociente de las tasas de momento del vientos estelar y el flujo de acreción $\beta = \dot{M}_w v_w / \dot{M}_a v_0$, (ver ec. [4.19]), el cual se considera un valor de $\beta = 4$. En la sección 2.2, se muestra que el viento estelar depende de los parámetros de anisotropía A , B , y n . Para este caso, se considera un valor de $A = 1$, $B = 20$, y $n = 4$. Con los parámetros mencionados anteriormente, se hace la integración numérica de las ecs. (4.22) - (4.26) para un

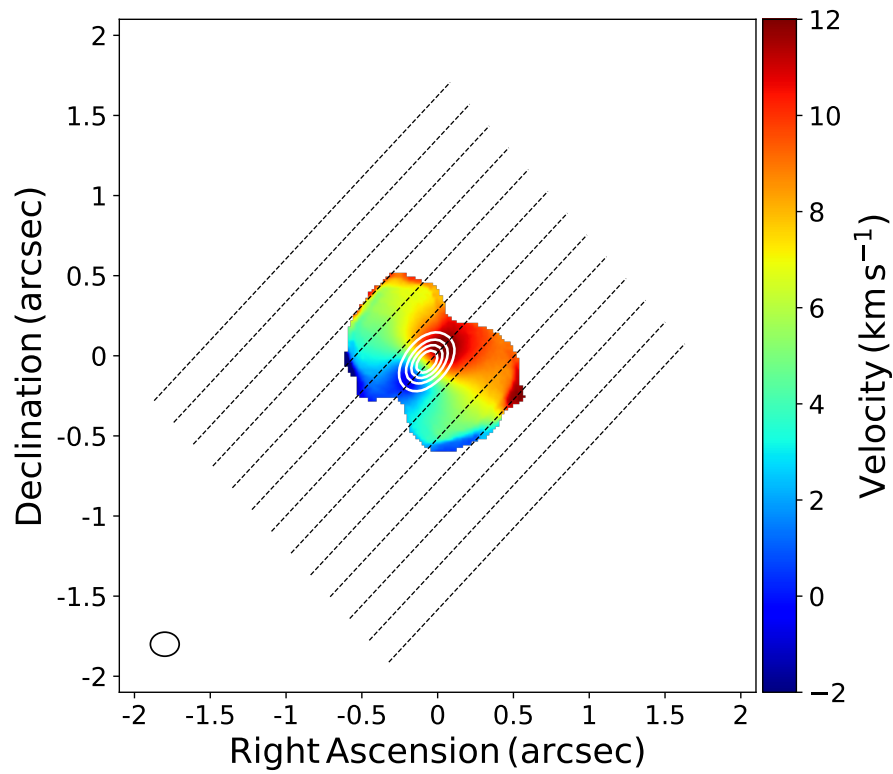


Figura 5.3: Momento 1 o velocidad pesada en intensidad de la emisión de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$ del flujo molecular, misma descripción de la Figura 5.1.

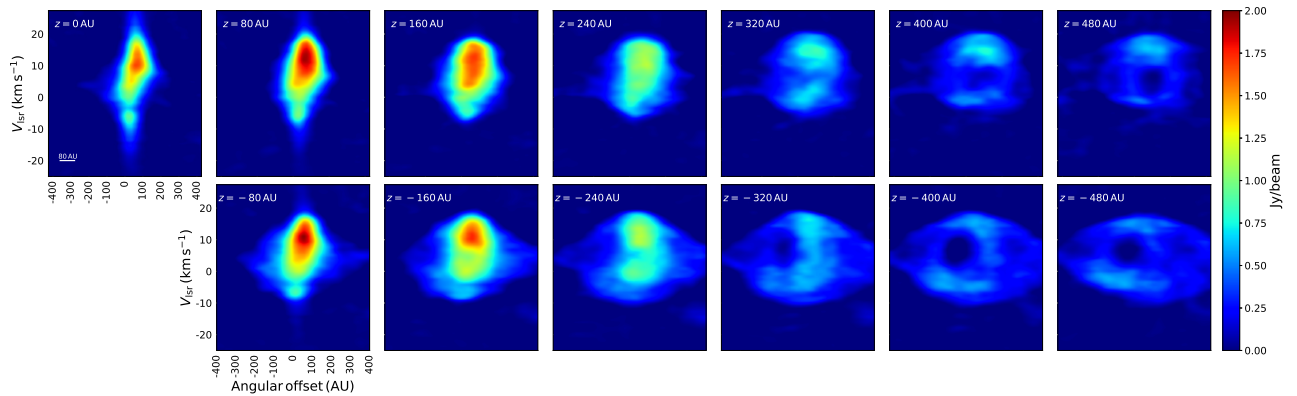


Figura 5.4: Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$ a diferentes alturas desde $z = 480$ AU hasta $z = -480$ AU con intervalos de 80 AU. El eje vertical representa la velocidad sobre la línea de visión. La barra a color del lado derecho muestra la intensidad en Jy/beam.

tiempo desde $t = 0$ hasta $t = 70$ yr (edad dinámica de Orion SrcI reportada por Hirota et al. 2017).

Las propiedades físicas a comparar son: radio externo R_{out} , velocidad de expansión v_{exp} , velocidad de rotación v_{rot} , y ángulo de apertura $\theta_{opening}$, dichas cantidades se muestran en las Figuras 5.8 y 5.9. Esta comparación se muestra en la Figura 5.9. El panel (a) de esta figura, muestra el radio externo obtenido de las tres líneas moleculares observadas y del modelo. El radio observado fue medido a la velocidad local de reposo V_{LSR} , que para Orion Src I es de 5.5 km s^{-1}

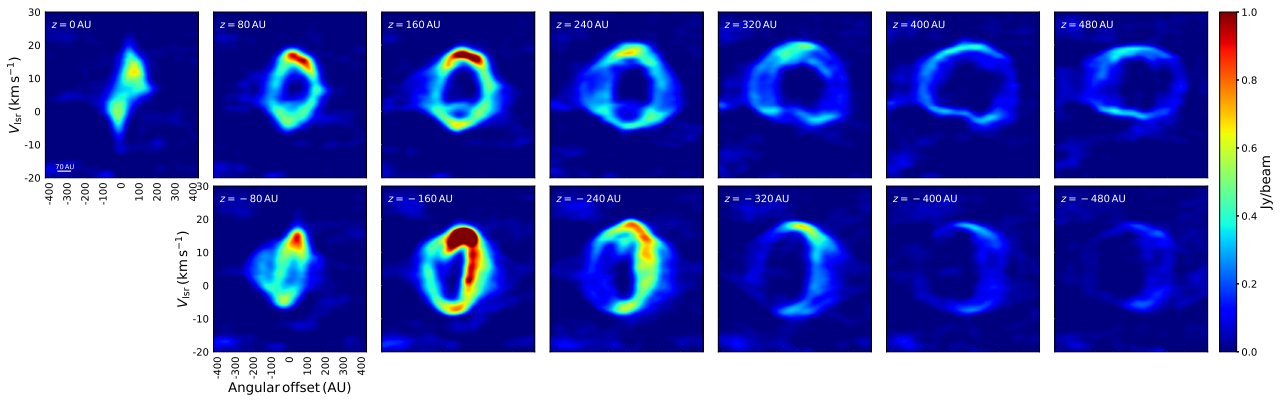


Figura 5.5: Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$ para las mismas alturas y la misma descripción que la figura 5.4.

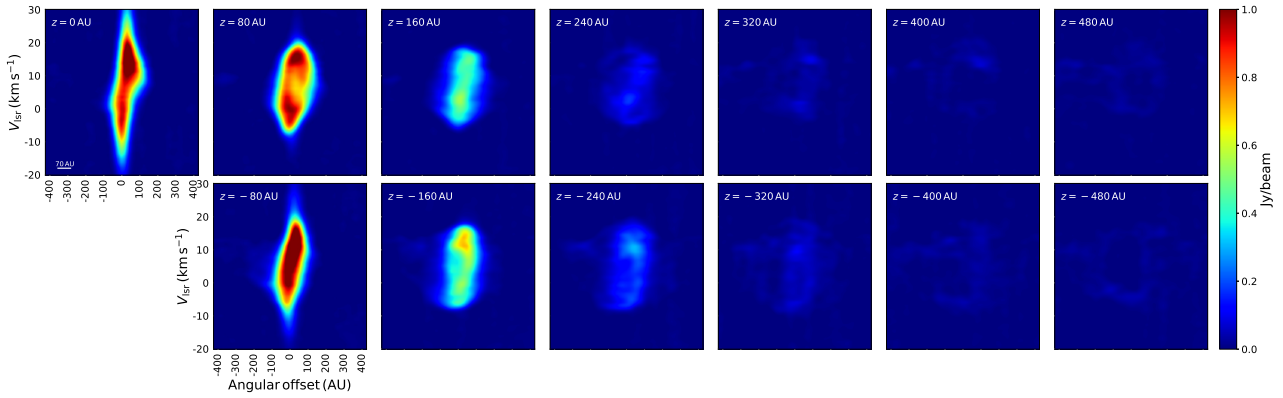


Figura 5.6: Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco de la emisión de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$ para las mismas alturas y la misma descripción que la figura 5.4.

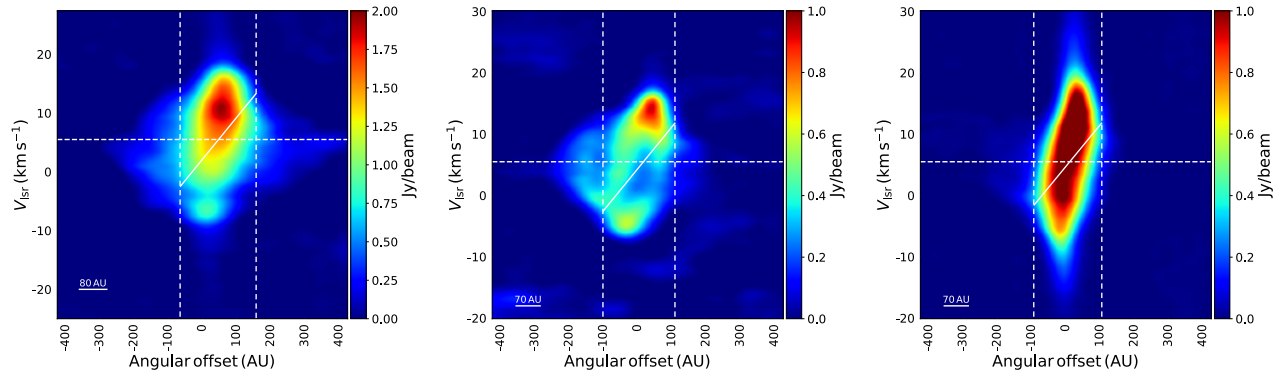


Figura 5.7: Diagramas posición-velocidad paralelos al plano medio del disco a una altura $z = -80$ AU. Panel izquierdo: emisión de la línea molecular de ^{29}SiO ($J=8-7$) $\nu = 0$. Panel medio: emisión de la línea molecular de SiS ($J=19-18$) $\nu = 0$. Panel derecho: emisión de la línea molecular de SiO ($J=8-7$) $\nu = 1$. La línea punteada horizontal muestra el valor de la velocidad local de reposo V_{LSR} de la fuente. Las líneas punteadas verticales muestran el radio externo R_{out} . La línea sólida inclinada muestra el perfil de rotación de la fuente.

(Hirota et al. 2016), de los diagramas posición-velocidad. Este radio fue medido con la diferencia entre las líneas verticales punteadas de la figura 5.7. El radio teórico, es el radio cilíndrico de

la cáscara $R_{out} = R_s \sin \theta$. Se puede observar, que el radio incrementa con la distancia al plano medio del disco, y que el modelo tiene el mismo comportamiento que los datos observacionales. Además, tanto los valores teóricos como observacionales, son consistentes.

El panel (b) de la figura 5.9 muestra la velocidad de expansión. Los valores observacionales de esta velocidad son medidos en el centro del flujo, mientras que los valores teóricos es la proyección de la velocidad radial sobre la línea de visión. Se puede notar que la velocidad incrementa con la distancia al plano medio, y tanto los valores observacionales como los teóricos son consistentes.

La velocidad de rotación se presenta en el panel (c) de la figura 5.9. Los valores obtenidos de las observaciones son medidos en el radio externo (panel [a] de esta figura), mientras que los valores teóricos son la proyección de la velocidad total sobre la línea de visión (considerando las componentes radial y azimutal de la velocidad). Esta velocidad decrece con la distancia al disco. Se puede notar que, los valores observacionales son mayores a los valores teóricos en un factor de 3 - 10. También, el comportamiento de los datos teóricos es diferente a los valores observacionales. La velocidad de rotación del modelo decrece rápidamente conforme la distancia al disco aumenta; por otra parte, la velocidad de rotación observada decrece suavemente con la distancia al plano medio del disco. Esta discrepancia, tanto de los valores de la velocidad de rotación como del comportamiento de la misma, se debe al hecho que en estos modelos teóricos, tanto estático (capítulo 3) como dinámico (capítulo 4), se considera que la rotación únicamente proviene del flujo de acreción, y para este trabajo, se consideró el flujo de acreción de Ulrich, el cual no presenta velocidades de rotación tan altas, además, dicha velocidad decrece rápidamente con la distancia al disco de acreción.

Finalmente, el ángulo de apertura se define como (ver Figura 5.8)

$$\theta_{opening} = \tan^{-1} \left(\frac{R_{out} - R_{cen}}{z} \right), \quad (5.1)$$

este ángulo decrece con la altura y se muestra en el panel (d) de la figura 5.9. Se puede notar que los valores teóricos son consistentes con los observacionales.

5.3. Discusión

En las figuras 5.4, 5.5, y 5.6 se muestra la estructura de Orion Src I. La línea molecular de SiO (J=8-7) $\nu = 1$ muestra sólo la parte más cercana a la estrella central del flujo, es decir, esta línea no tiene emisión a alturas $z \geq 320$ AU (Figuras 5.3 y 5.6). Además del panel (a) de la figura 5.9, se observa que los radios de expansión para esta línea molecular son los menores. Por otro lado, las líneas moleculares de $^{29}\text{SiO } \nu = 0$ y de SiS $\nu = 0$ muestran la parte externa del flujo, como se observa en las figuras 5.4, 5.5, y en panel (a) de la figura 5.9. Adicionalmente, de las observaciones de estas líneas se puede inferir que el flujo de Orion Src I es una cáscara delgada en expansión.

De la comparación del modelo dinámico de cáscara delgada con los datos observacionales, se encuentra que el modelo es capaz de reproducir el comportamiento tanto del radio de expansión, la velocidad de expansión y el ángulo de apertura. De estas figuras, se puede observar que los valores obtenidos de las observaciones y el comportamiento del modelo son consistentes. Adicionalmente, el hecho que el ángulo de apertura disminuya con la distancia al disco, es un indicativo que el flujo se está cerrando, es decir, parece indicar que tiene una forma de lóbulo como se muestra en la figura 5.8. Además, de este ángulo se puede inducir que los flujos moleculares son estructuras elongadas a lo largo del eje de rotación. Que el ángulo de apertura disminuya con la altura, indica que la altura del flujo molecular aumenta más rápido que su radio de expansión.

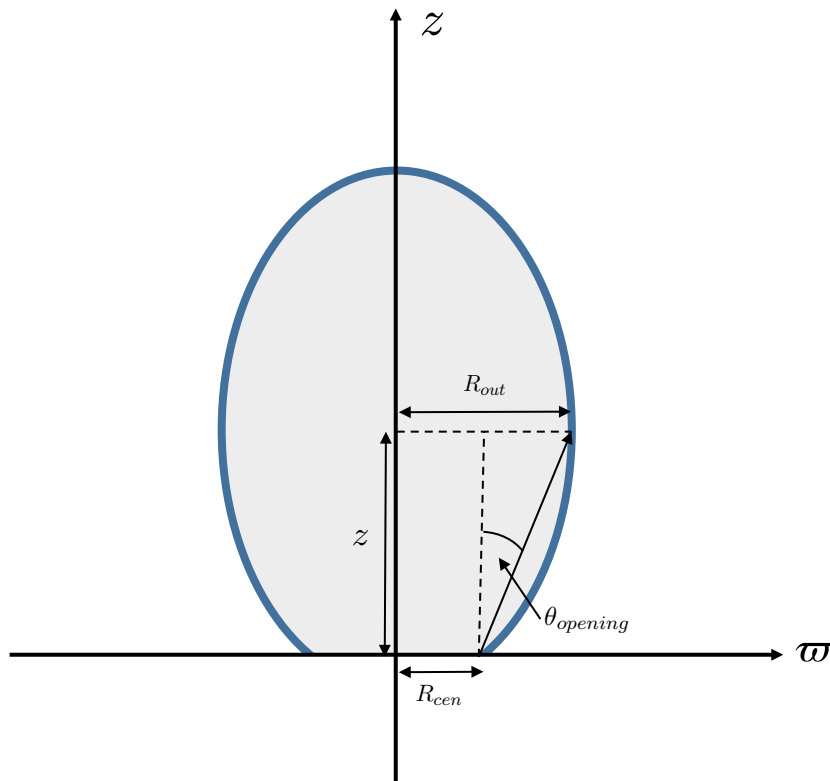


Figura 5.8: Diagrama esquemático de un flujo molecular. En este diagrama se muestra el ángulo de apertura del flujo $\theta_{opening}$, el radio externo R_{out} , el radio centrífugo R_{cen} y la altura z .

Sin embargo, la velocidad de rotación del flujo medida observacionalmente es mucho mayor que la que predice el modelo teórico, los valores de las velocidades observacionales son entre 3 - 10 veces más grandes que los valores teóricos. Adicionalmente, el perfil de la velocidad de rotación teórica, indica que una envolvente tipo Ulrich no puede explicar la rotación en flujos moleculares debido a que la velocidad de rotación de esta envolvente decrece rápidamente conforme la distancia vertical al disco de acreción aumenta, mientras que de las observaciones se tiene que la velocidad decrece suavemente con la distancia. Esto indicaría que para explicar la rotación observada, es necesario explorar una envolvente con mayor velocidad de rotación, considerar un viento estelar rotando, o la interacción de ambos. Debido al hecho que en el capítulo 2 se muestra un modelo general, donde se pueden considerar vientos estelares con o sin rotación, para incluir un viento estelar con rotación al modelo dinámico, mostrado en el capítulo 4, sería necesario hacer una modificación a las ecuaciones de momento en la dirección polar y azimutal, ecs. (2.12) y (2.13) respectivamente, considerando la contribución del viento estelar en estas direcciones. Posteriormente modificar las condiciones de frontera tanto en el polo como en el ecuador, así como, los códigos numéricos hechos para resolver el problema presentado en este documento. Para diferenciar si la rotación observada en los flujos moleculares se debe a la rotación del viento estelar o del flujo de acreción, sería necesario observar el perfil de rotación de ambos y hacer una comparación con datos obtenidos observacionalmente, como se muestra en el panel (c) de la Figura 5.9.

Esta comparación, es un buen indicador de que los flujos moleculares son una mezcla del material proveniente del viento estelar y de una nube en colapso gravitacional. Esto fortalece los escenarios de arrastre como posibles mecanismos para la formación de flujos moleculares.

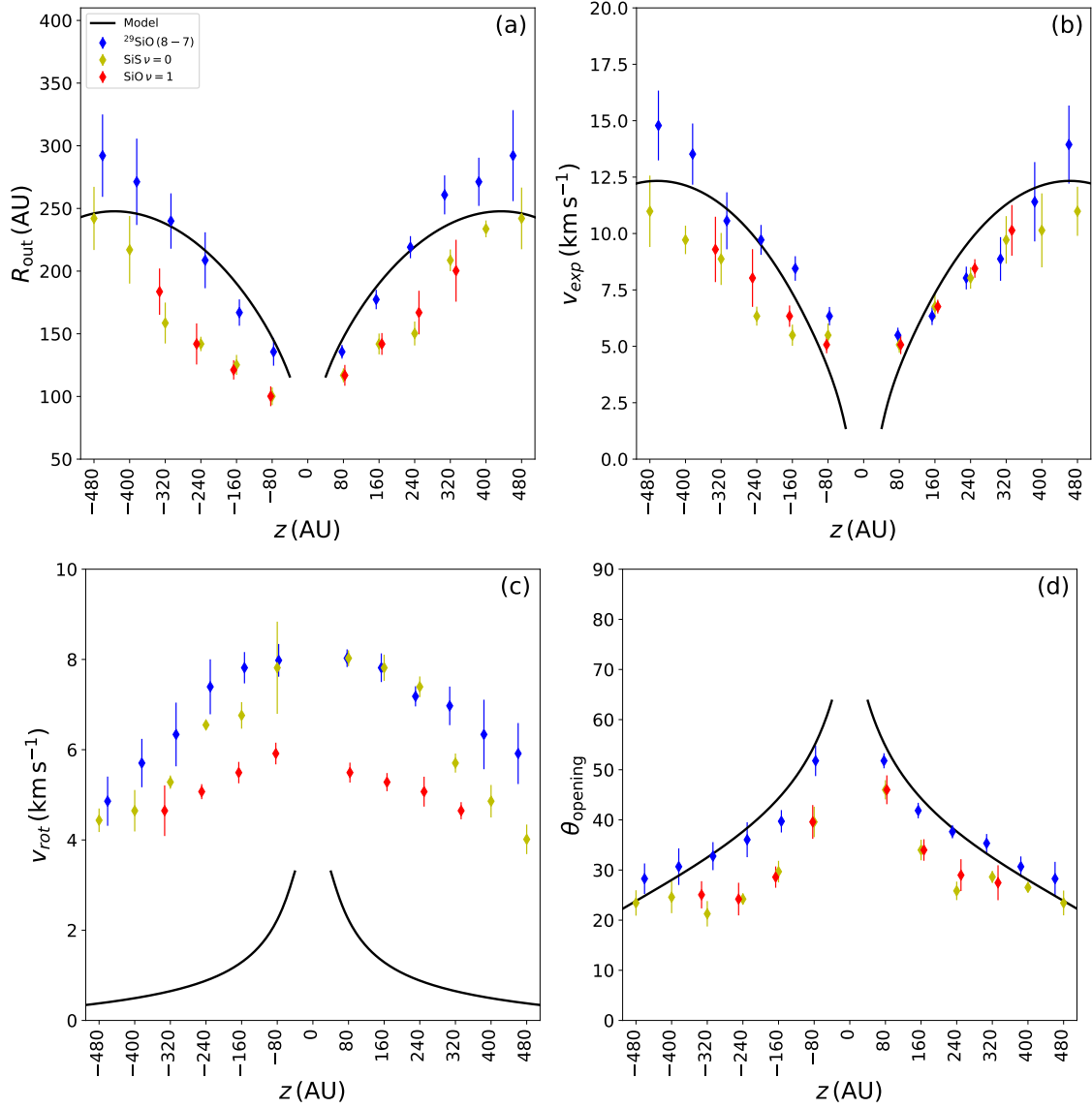


Figura 5.9: Parámetros del flujo derivados de los diagramas posición-velocidad presentados en las figuras 5.4, 5.5, and 5.6. (a) Radio externo, R_{out} . (b) Velocidad de expansión perpendicular al eje del flujo, v_{exp} . (c) Velocidad de rotación en el radio externo, v_{rot} . (d) Ángulo de apertura, $\theta_{opening}$. La línea negra muestra el mejor modelo para los parámetros $\alpha = 0.01$, $\beta = 4$, $r_{s0}(0) = 5 \times 10^{-2}$, $A = 1$, $B = 20$, y $n = 4$. La integración fue hecha hasta 70 yr. Las barras de error son derivadas de un ajuste gaussiano a los diagramas posición-velocidad.

Capítulo 6

Discusión, conclusiones y trabajo a futuro

6.1. Discusión general

En los modelos de cáscara delgada presentados en este documento, independientemente del análisis estático o dinámico, se encontró que la expansión de las cáscaras en el polo depende del cociente de tasas de momento del viento estelar y del flujo de acreción β , debido a que si β es menor a un valor crítico β_{crit} , la cáscara colapsará hasta la superficie estelar, es decir, que el momento del viento estelar no es suficiente para contrarrestar la presión hidrodinámica del flujo de acreción y la gravedad que ejerce la estrella central sobre la cáscara.

En la comparación de nuestro modelos con fuentes observadas, se encontró que ambos modelos no pueden reproducir la velocidad de rotación observada de las fuentes Δv_ϕ , ya que se encuentran velocidades de rotación del orden de 0.1 - 0.2 km s⁻¹, que son hasta diez veces menor que lo reportado por observaciones.

En este trabajo, se realizó una comparación del modelo dinámico con dos fuentes observadas: CB 26 y Orion Source I. Para el primer caso, se encontró que dicho modelo es capaz de reproducir la velocidad de expansión, el tamaño de la fuente y la colimación. Sin embargo, la masa de la cáscara es dos veces mayor que la medida observacionalmente. Por último, la velocidad de rotación, como se mencionó anteriormente es de 5 - 10 veces menor. Esto quiere decir, que estos modelos producen cáscaras más masivas y con una lenta rotación. Por otra parte, de la comparación con la Fuente I de Orion, se pudo reproducir el radio externo, la velocidad de expansión y el ángulo de apertura, sin embargo, al igual que en la fuente anterior, las velocidades de rotación son menores. Con ayuda del ángulo de apertura, se encontró que estas cáscaras se expanden mayormente en dirección del eje de rotación, lo que nos da lóbulos colimados.

Finalmente, se puede notar que para nuestros modelos de cáscara delgada, se ha considerado que los efectos de presión son despreciables. Los gradientes de presión no modifican la suposición de cáscara delgada. Que la cáscara sea delgada, sólo depende de los procesos de enfriamiento del gas. Por otro lado, los gradientes de presión dentro de la cáscara podrían cambiar la dinámica tangencial del gas, acelerando o desacelerando el flujo a lo largo de la cáscara. Sin embargo, no se espera que este efecto sea importante cuando el flujo es supersónico. Para nuestros modelos, la velocidad tangencial a lo largo de la cáscara, no es muy grande, por lo que sería necesario conocer la temperatura de estas para evaluar los efectos de presión, un problema que sería interesante para estudiar a futuro.

6.2. Conclusiones

Con la finalidad de entender la evolución y propiedades de los flujos moleculares, se desarrolló un modelo de interacción entre un viento estelar y un flujo de acreción que sigue la evolución de una cáscara que es impulsada por el viento y se alimenta con el material de ambos flujos. Se formuló el problema, de tal manera que se considera un viento estelar y un flujo de acreción con un campo de velocidades general (colimados o no colimados, con o sin rotación), siempre que tengan simetría axial.

En este trabajo, se consideraron vientos estelares isotrópicos y anisotrópicos, sólo con componente radial de velocidad. El flujo de acreción está dado por una nube molecular en colapso gravitacional con rotación (Ulrich 1976). La evolución del flujo se siguió desde el origen, cercano a la superficie estelar, hasta grandes distancias de la estrella central.

También se consideró un modelo estático de flujos moleculares formados por vientos estelares isotrópicos chocando con el flujo de acreción de Ulrich (1976). Desafortunadamente, se encontró que un análisis de este tipo, produce cáscaras inestables ante perturbaciones radiales, este resultado fue encontrado antes por Wilkin & Stahler (2003).

La evolución de la cáscara tiene una fuerte dependencia en los cocientes entre las tasas de masa y momento del viento estelar y el flujo de acreción, α y β , respectivamente. Con la finalidad de que las cáscaras de los flujos moleculares se expandan, es necesario que $\beta > \beta_{crit}$ para un valor dado de α . Si $\beta < \beta_{crit}$, la cáscara siempre colapsará hasta la superficie estelar.

La interacción de los flujos considerados en este trabajo, produce flujos moderadamente colimados ($C \sim 3$) y con baja rotación ($\Delta v_\phi \sim 0.1 \text{ km s}^{-1}$). Las velocidades de rotación son menores en un factor de 5 - 10 que los de las fuentes observadas de la Tabla 1.1.

De la comparación del modelo de evolución dinámica con los datos observacionales de la Fuente I de Orion, se puede concluir que este modelo es capaz de reproducir la estructura y cinemática de un flujo molecular real, como su radio de expansión, velocidad de expansión, y ángulo de apertura. Sin embargo, se mostró que la interacción de un viento estelar sin rotación con el flujo de Ulrich no reproduce las velocidades de rotación observadas, y por lo tanto, tampoco es capaz de reproducir el momento angular.

Con base en los modelos teóricos y las observaciones presentadas en este documento, se fortalece la idea de un flujo molecular formado por el arrastre de material de la nube molecular por un viento estelar rápido. Por otra parte, la masa total del flujo parece que es proveniente casi en su totalidad de la nube molecular, sin embargo, el origen del momento angular del objeto aún es incierto, podría provenir del viento estelar, de vientos eyectados directamente del disco, de una envoltente distinta a la presentada por Ulrich (1976), o ser una combinación tanto del viento eyectado como de la nube en colapso.

6.3. Trabajo a futuro

Dado que nuestros modelos dinámicos no son capaces de reproducir las velocidades de rotación observadas en los flujos moleculares, la siguiente etapa es explorar un flujo molecular formado por la interacción de dos fluidos con rotación, un viento estelar y un flujo de acreción.

En el capítulo 2 se mostró un modelo general de interacción de dos fluidos, que permite vientos estelares y flujos de acreción con un campo general de velocidades, lo que facilitará la inclusión de vientos estelares con rotación, e.g., vientos de disco (Pudritz & Norman 1983), e inclusive, de ser necesario, explorar otro tipo de envoltentes con mayor rotación. Con respecto a la comparación mostrada en el capítulo 5 de los parámetros del radio externo, la velocidad de expansión y el ángulo de apertura, se esperaría que debido a que estos modelos dependen de distintos parámetros asociados al viento estelar y al flujo de acreción, como el cociente de

tasas de pérdida de masa y el cociente de tasas de momento, sigan concordando con los datos observacionales.

Finalmente, se hará una comparación del nuevo modelo con los datos observacionales de la Fuente I de Orion, mostrados en el capítulo 5, y de ser posible, con otros flujos moleculares que presenten evidencia de rotación.

Apéndice A

Expansiones alrededor del polo

A.1. Flujo de acreción y viento estelar

Sustituyendo la ec. (3.39) en la ec. (2.25) y expandiendo el resultado en series de Taylor para $\theta \ll 1$ y $\theta_0 \ll 1$, se encuentra una relación entre el radio de la cáscara en el polo, el ángulo polar θ y el ángulo θ_0 ,

$$\theta_0 \approx \left(\frac{r_{s0}}{2 + r_{s0}} \right)^{1/2} \theta. \quad (\text{A.1})$$

Adicionalmente, se expanden el campo de velocidades y el perfil de densidad del flujo de acreción en series de Taylor a primer orden en θ . Usando la ecuación anterior para θ_0 se tiene que

$$u_{ar} \approx - \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

$$u_{a\theta} \approx \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \frac{1}{2 + r_{s0}} \theta, \quad (\text{A.3})$$

$$u_{a\phi} \approx - \frac{1}{2 + r_{s0}} \theta, \quad (\text{A.4})$$

$$\rho'_a \approx \left(\frac{1}{2r_{s0}} \right)^{1/2} \frac{1}{2 + r_{s0}}. \quad (\text{A.5})$$

Por último, el perfil de densidad del viento estelar para $\theta \ll 1$ está dado por

$$\rho'_w \approx \left[\frac{A + B}{A + B/(2n + 1)} \right] \left(\frac{\alpha}{r_{s0}^2 u_w} \right). \quad (\text{A.6})$$

A.2. Flujo de masa, flujos de momento y radio para un modelo estático

Alrededor del polo, los flujos de masa y momento, el radio de la cáscara y la densidad superficial pueden expandirse como series de potencia de θ a cuarto orden como

$$f_m = a_{m1}\theta + a_{m2}\theta^2 + a_{m3}\theta^3 + a_{m4}\theta^4, \quad (\text{A.7})$$

$$f_r = a_{r1}\theta + a_{r2}\theta^2 + a_{r3}\theta^3 + a_{r4}\theta^4, \quad (\text{A.8})$$

$$f_\theta = a_{\theta1}\theta + a_{\theta2}\theta^2 + a_{\theta3}\theta^3 + a_{\theta4}\theta^4, \quad (\text{A.9})$$

$$f_\phi = a_{\phi1}\theta + a_{\phi2}\theta^2 + a_{\phi3}\theta^3 + a_{\phi4}\theta^4, \quad (\text{A.10})$$

$$r_s = r_{s0} + r_{s1}\theta + r_{s2}\theta^2 + r_{s3}\theta^3 + r_{s4}\theta^4, \quad (\text{A.11})$$

y

$$s = s_0 + s_1\theta + s_2\theta^2 + s_3\theta^3 + s_4\theta^4. \quad (\text{A.12})$$

En las ecuaciones anteriores se puede notar que, tanto los flujos de masa como los de momento no tienen componente de orden cero, esto debido a que estos momentos son cero en $\theta = 0$.

Sustituyendo la ec. (A.7) en la ec. (3.30), expandiendo el resultado en serie de Taylor para $\theta \ll 1$ y $\theta_0 \ll 1$ y usando la ec. (A.1), se encuentra que el coeficiente a_{m2} está dado por

$$a_{m2} = \frac{\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}}{2(r_{s0} + 2)}. \quad (\text{A.13})$$

Por otra parte, al sustituir las ecs. (A.7), (A.9), (A.11) y (A.12) en la ec. (3.22) se tiene que el coeficiente $a_{\theta3}$ está dado por

$$a_{\theta3} = \frac{[\alpha(r_{s0} + 2) + r_{s0}]^2}{4r_{s0}s_0(r_{s0} + 2)^2}. \quad (\text{A.14})$$

Expandiendo en serie de Taylor la ec. (3.33) para $\theta \ll 1$ y $\theta_0 \ll 1$, y usando las ecs. (A.1) y (A.10) se tiene que el coeficiente $a_{\phi3}$ es

$$a_{\phi3} = -\frac{r_{s0}}{4(r_{s0} + 2)^2}. \quad (\text{A.15})$$

Sustituyendo las ecs. (A.7) - (A.12) en la ec. (3.31), se tiene que el coeficiente a_{r4} puede escribirse en términos de los coeficientes $a_{\theta3}$ y $a_{\phi3}$ como

$$a_{r4} = \frac{1}{4} \left(a_{\theta3} + \frac{a_{\phi3}^2}{a_{\theta3}} \right), \quad (\text{A.16})$$

Por último, reemplazando las ecs. (A.7), (A.9) y (A.11) en la ec. (3.34) se tiene que el coeficiente r_{s2} está dado por

$$r_{s2} = r_{s0} \frac{a_{r4}}{2a_{\theta3}}. \quad (\text{A.17})$$

Se puede notar que los coeficientes a_{m2} , a_{r4} , $a_{\theta3}$, $a_{\phi3}$ y r_{s0} son funciones algebraicas dadas en términos del radio en el polo r_{s0} , la densidad superficial s_0 y el cociente de la tasa de pérdida de masa del viento estelar y la tasa de acreción α . Especificando los valores de estos parámetros, es posible encontrar los valores iniciales de los flujos de masa y momento y el radio de la cáscara en el polo.

Finalmente, se encuentra que los coeficientes a para los flujos de masa y momento, al igual que los coeficientes para el radio r_{s1} , r_{s3} y r_{s4} y los coeficientes para la densidad superficial s_1 , s_2 , s_3 , s_4 no definidos en las ecuaciones anteriormente escritas, son cero.

A.3. Flujo de masa, flujos de momento y radio para un modelo dinámico

Alrededor del polo, los flujos de masa y momento y el radio pueden expandirse como series de potencia de θ a segundo orden como

$$p_m \approx b_{m1}\theta + b_{m2}\theta^2, \quad (\text{A.18})$$

$$p_r \approx b_{r1}\theta + b_{r2}\theta^2, \quad (\text{A.19})$$

$$p_\theta \approx b_{\theta1}\theta + b_{\theta2}\theta^2, \quad (\text{A.20})$$

$$p_\phi \approx b_{\phi1}\theta + b_{\phi2}\theta^2, \quad (\text{A.21})$$

y

$$r_s \approx r_{s0} + r_{s1}\theta + r_{s2}\theta^2. \quad (\text{A.22})$$

En las ecuaciones anteriores se puede notar que, los flujos de masa y momento no tienen componente de orden cero, debido a que estos momentos son cero en $\theta = 0$.

Sustituyendo las ecs. (A.1) - (A.6) y las ecs. (A.18) - (A.22) en las ecs. (4.22) - (4.26), se encuentra que los coeficientes $b_{m2}(\tau) = b_{r2}(\tau) = b_{\theta1}(\tau) = b_{\phi1}(\tau) = r_{s1}(\tau) = r_{s2}(\tau) = 0$. Adicionalmente, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones $b_{m1}(\tau)$, $b_{r1}(\tau)$, $b_{\theta2}(\tau)$, $b_{\phi2}(\tau)$ y $r_{s0}(\tau)$. Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{db_{m1}}{d\tau} + \frac{2b_{\theta2}}{r_{s0}} &= \alpha \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) + \left(\frac{r_{s0}}{2+r_{s0}} \right) \left(\frac{r_{s0}}{2} \right)^{1/2} \\ &\times \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \frac{db_{r1}}{d\tau} + \frac{2b_{r1}b_{\theta2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{m1}}{r_{s0}^2} &= \beta \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) - \left(\frac{r_{s0}}{2+r_{s0}} \right) \\ &\times \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{db_{\theta2}}{d\tau} - \frac{b_{\phi2}^2}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{r1}b_{\theta2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{3b_{\theta2}^2}{b_{m1}r_{s0}} - \frac{(2r_{s0})^{1/2}}{(2+r_{s0})^2} = \left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}} \right) \left[\frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2} \right], \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{db_{\phi2}}{d\tau} + \frac{b_{\phi2}b_{r1}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{4b_{\theta2}b_{\phi2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2} = - \left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}} \right) \left(\frac{r_{s0}}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{r_{s0}}{(2+r_{s0})^2} \right], \quad (\text{A.26})$$

y

$$\frac{dr_{s0}}{d\tau} = \frac{b_{r1}}{b_{m1}}. \quad (\text{A.27})$$

Los coeficientes $b_{m1}(\tau)$, $b_{r1}(\tau)$, $b_{\theta2}(\tau)$, $b_{\phi2}(\tau)$ y $r_{s0}(\tau)$ son funciones del tiempo (τ). A un tiempo $\tau = 0$, la cáscara tiene un radio inicial $r_{s0}(0)$, cercano a la superficie estelar. Debido a que inicialmente se considera un cáscara sin masa, $b_{m1}(0) = b_{r1}(0) = b_{\theta2}(0) = b_{\phi2}(0) = 0$. Dado que en las ecuaciones anteriores se encuentran cocientes de b_{r1}/b_{m1} , $b_{\theta2}/b_{m1}$ y $b_{\phi2}/b_{m1}$, es necesario expandir estos coeficientes a primer orden en τ para $\tau \ll 1$,

$$b_{m1} \approx c_m \tau, \quad (\text{A.28})$$

$$b_{r1} \approx c_r \tau, \quad (\text{A.29})$$

$$b_{\theta2} \approx c_\theta \tau, \quad (\text{A.30})$$

$$b_{\phi2} \approx c_\phi \tau, \quad (\text{A.31})$$

y

$$r_{s0} \approx r_{s0}(0) + c_{rs} \tau. \quad (\text{A.32})$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las ecs. (A.23) - (A.27), se obtienen c_m , c_r , c_θ , c_ϕ y c_{rs} en función del radio inicial $r_{s0}(0)$ y del cociente

$$\lambda = \frac{c_r}{c_m}. \quad (\text{A.33})$$

Por lo tanto,

$$c_m = -\alpha \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} \lambda - 1 \right) + Q_1 \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{A.34})$$

$$c_r = -\beta \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} \lambda - 1 \right) + Q_1 \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{A.35})$$

$$c_\theta = \frac{Q_1}{2+r_{s0}(0)} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{A.36})$$

$$c_\phi = -\frac{Q_1}{2+r_{s0}(0)} \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{A.37})$$

$$c_{rs} = \lambda, \quad (\text{A.38})$$

donde Q_1 está dado por

$$Q_1 = \frac{r_{s0}(0)}{2+r_{s0}(0)}. \quad (\text{A.39})$$

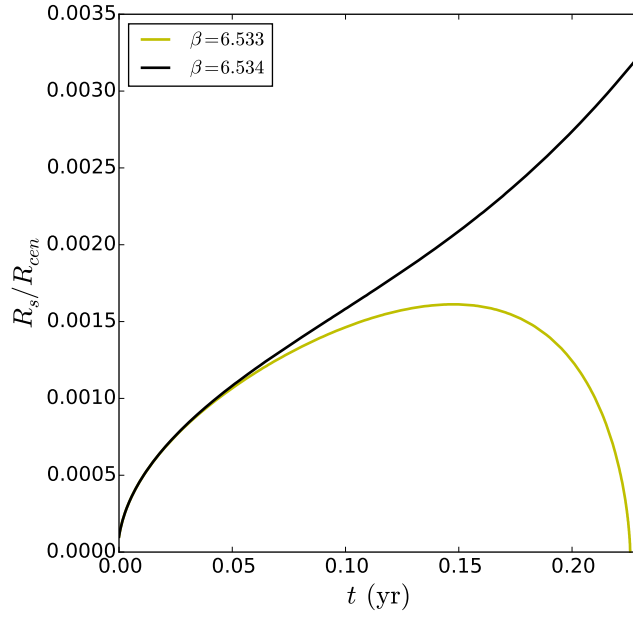


Figura A.1: Evolución del radio de la cáscara R_s en el polo para un viento estelar isotrópico ($B = 0$), el parámetro $\alpha = 0.1$ y un radio inicial $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. La cáscara se expande para $\beta_{crit} = 6.534$ (línea negra); y la cáscara se colapsa para $\beta < \beta_{crit}$, línea amarilla (ver Tabla A.1).

Tabla A.1: Valores de β_{crit} para diferentes valores de α y del radio inicial $r_{s0}(0)$.

$r_{s0}(0)$	10^{-5}	5×10^{-5}	10^{-4}
α			
0.01	2.061	0.972	0.900
0.10	20.084	9.140	6.534
0.50	99.732	45.085	32.023

Para el cociente λ , se obtiene una ecuación cuadrática sustituyendo las ecs. (A.34) y (A.35) en la ec. (A.33),

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta} \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) - \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} Q_1 \right] \lambda^2 - 2 \left[\alpha \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) + Q_1 \right] \lambda + \beta \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) - \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} Q_1 = 0. \quad (\text{A.40})$$

Las ecs. (A.23) - (A.27) se resuelven numéricamente para b_{m1} , b_{r1} , $b_{\theta2}$, $b_{\phi2}$ y r_{s0} . Las condiciones iniciales se obtienen de las ecs. (A.28) - (A.32) al ser evaluadas a un tiempo adimensional de $\tau = 10^{-9}$. De la solución de estas ecuaciones, se encuentran las condiciones de frontera en el polo para los flujos de masa y momento y el radio de la cáscara como función del tiempo.

Para el caso de un viento estelar isotrópico ($B = 0$ en la ec. [2.17]), se explora el valor crítico de β requerido para que la cáscara siempre esté en expansión. En la Tabla A.1 se muestran los valores críticos de β_{crit} para diferentes valores de α y del radio inicial $r_{s0}(0)$. La Figura A.1 muestra el radio de la cáscara en el polo para tiempos tempranos para un modelo con $\alpha = 0.1$, un radio inicial $r_{s0}(0) = 10^{-4}$ y para dos valores de β : $\beta = \beta_{crit}$ y $\beta < \beta_{crit}$. Para el primer caso, la cáscara siempre se expande; para el último caso la cáscara colapsa hasta la superficie estelar.

Al obtener β_{crit} , se toma en cuenta el peso de la cáscara, el cambio del momento radial en la dirección θ , y el momento que se añade a la cáscara tanto del viento estelar y del flujo de

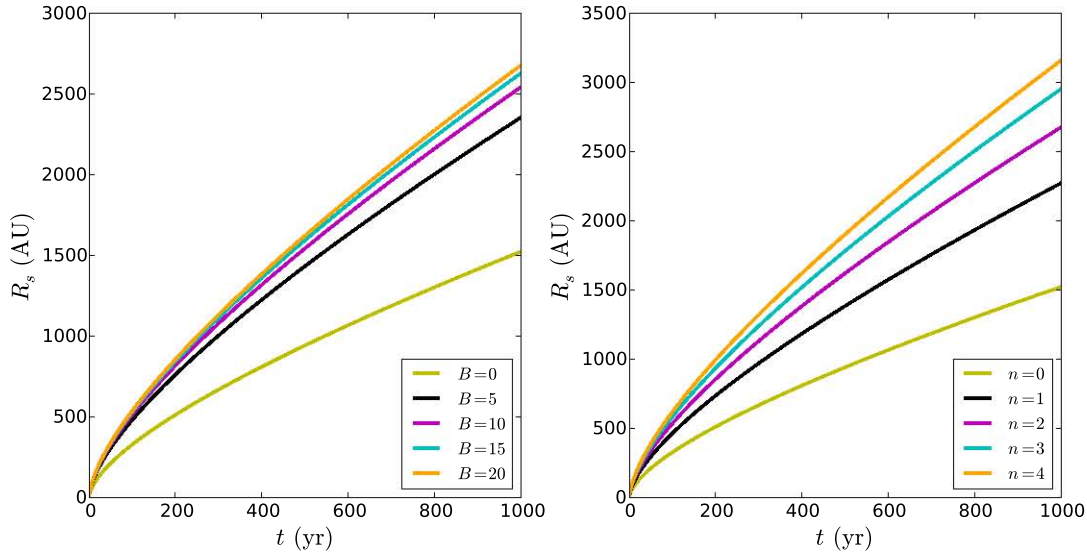


Figura A.2: Radio de la cáscara en el polo $\theta = 0$ como función del tiempo para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$ y $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Panel izquierdo: vientos estelares con $A = 1$, $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía $B = 0, 5, 10, 15$ y 20 . Panel derecho: vientos estelares anisotrópicos con $A = 1$, $B = 20$ y diferentes exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

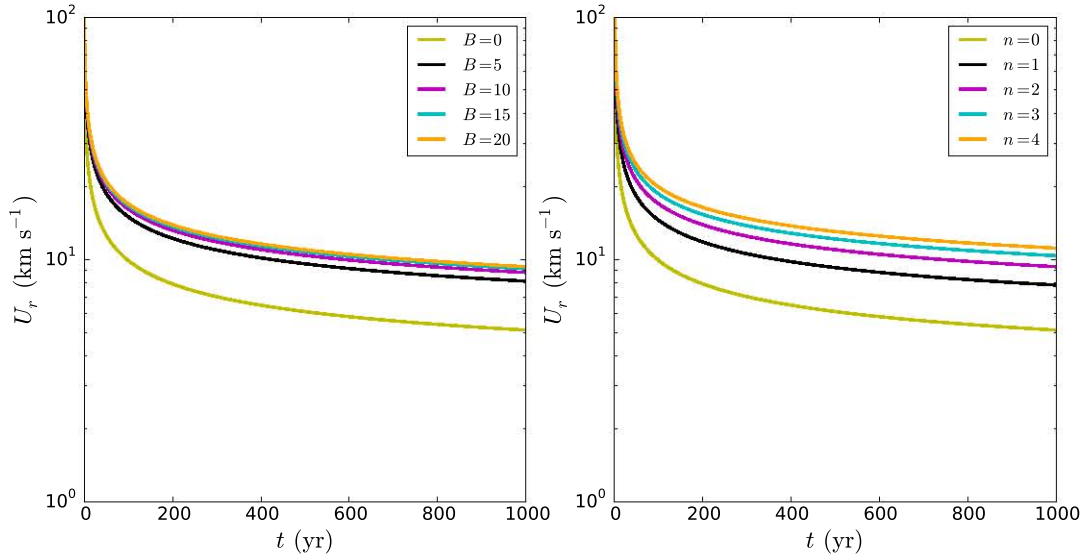


Figura A.3: Velocidad radial de la cáscara en el polo $\theta = 0$ como función del tiempo para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$ y $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Panel izquierdo: vientos estelares con $A = 1$, $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía $B = 0, 5, 10, 15$ y 20 . Panel derecho: vientos estelares anisotrópicos con $A = 1$, $B = 20$ y diferentes exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

acreción. Si se desprecia el peso de la cáscara para los modelos de la Tabla A.1, se obtiene que valores más pequeños de $\beta > 0.5$ son suficientes para que la cáscara se expanda.

Tomando $\alpha = 0.1$ y $\beta = 21$, en la Figura A.2 se muestra la evolución del radio de la cáscara para diferentes modelos con los parámetros $A = 1$ y $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía B (panel izquierdo), y para diferentes modelos con los parámetros $A = 1$ y $B = 20$ y diferentes valores del exponente n (panel derecho). En otras palabras, esta figura muestra que el radio de la cáscara incrementa con el parámetro de anisotropía B y con el exponente n . Para los

mismos modelos, la Figura A.3 muestra la velocidad radial en el polo (velocidad de expansión de la cáscara). La velocidad radial también incrementa con el parámetro B y con el exponente n y tiende a un valor constante a tiempos grandes. Las velocidades θ y azimutal en el polo son cero debido a que $v_\theta = (b_{\theta 2}/b_{m1})\theta$ y $v_\phi = (b_{\phi 2}/b_{m1})\theta$ son funciones lineales de θ .

Apéndice B

Expansiones alrededor del ecuador

Alrededor del ecuador, los flujos de masa y momento, y el radio de la cáscara se expanden como series de potencia alrededor del ángulo $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta$. Suponiendo $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta \ll 1$, estas expansiones son

$$p_m \approx q_{m0} + q_{m1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{B.1})$$

$$p_r \approx q_{r0} + q_{r1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{B.2})$$

$$p_\theta \approx q_{\theta0} + q_{\theta1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{B.3})$$

$$p_\phi \approx q_{\phi0} + q_{\phi1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{B.4})$$

y

$$r_s \approx q_{rs0} + q_{rs1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right]. \quad (\text{B.5})$$

Las expansiones en series de Taylor a primer orden alrededor del ángulo $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta$ del campo de velocidades y del perfil de densidad del flujo de acreción están dados por

$$u_{ar} \approx - \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{B.6})$$

$$u_{a\theta} \approx \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0 - \sin \eta}{\cos \eta} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$u_{a\phi} \approx - \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\sin \theta_0}{\cos \eta} \right), \quad (\text{B.8})$$

y

$$\rho'_a \approx \frac{1}{(q_{rs0} - 1 + 3 \cos^2 \theta_0) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}} \left(\frac{1}{q_{rs0}} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.9})$$

donde θ_0 es obtenida de la ec. (2.25).

La densidad del viento estelar es

$$\rho'_w \approx \left[\frac{A + B \sin^{2n} \eta}{A + B/(2n + 1)} \right] \frac{\alpha^2}{q_{rs0}^2 u_{wr}}. \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo las ecs. (B.1) - (B.5), el campo de velocidades y el perfil de densidad del flujo de acreción, y la densidad del viento estelar dados en las ecs. (B.6) - (B.10), en las ecs. (4.22) - (4.26), se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para los coeficientes q_{ai} dado por

$$\frac{dq_{m0}}{d\tau} + f_{m0,1} = f_{m0,2}, \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{dq_{m1}}{d\tau} + f_{m1,1} = f_{m1,2}. \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{dq_{r0}}{d\tau} + f_{r0,1} = f_{r0,2}, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{dq_{r1}}{d\tau} + f_{r1,1} = f_{r1,2}, \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{dq_{\theta 0}}{d\tau} + f_{\theta 0,1} = f_{\theta 0,2}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{dq_{\theta 1}}{d\tau} + f_{\theta 1,1} = f_{\theta 1,2}, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{dq_{\phi 0}}{d\tau} + f_{\phi 0,1} = f_{\phi 0,2}, \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{dq_{\phi 1}}{d\tau} + f_{\phi 1,1} = f_{\phi 1,2}, \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{dq_{rs0}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} + \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (\text{B.19})$$

y

$$\frac{dq_{rs1}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} \left(\frac{q_{r1}}{q_{r0}} - \frac{q_{m1}}{q_{m0}} \right) - \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \left(\frac{q_{m1}}{q_{m0}} - \frac{q_{\theta 1}}{q_{\theta 0}} + \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \right), \quad (\text{B.20})$$

donde las funciones $f_{ai,j}$ están dadas por

$$f_{m0,1} = P_2 T_3, \quad (\text{B.21})$$

$$f_{m0,2} = -\cos \eta \left[\alpha \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) - \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4}{\Gamma_2} \right], \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} f_{m1,1} = & q_{rs0} P_4 \cos \eta \left[\frac{q_{rs0}^{1/2}}{\Gamma_2} \left(\frac{T_1 \Gamma_2}{2q_{rs0}^{1/2}} + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_1 \Gamma_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{P_3}{2\Gamma_2} \left(-q_{rs0}^{1/2} T_1 - \frac{q_{rs0}^{1/2}}{\Gamma_1 \Gamma_2^2} \left(\frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1} - \cos \eta \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} f_{m1,2} = & -\cos \eta \left[\frac{\alpha}{A + B/(2n + 1)} \left(B \cos \eta \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} P_1 T_4 (B \sin \eta + 1) \right) \right. \\ & \left. + \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4^2}{\Gamma_2} (T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4) \right] + 2P_2 T_1 T_3 \\ & + \sin \eta \left[\alpha \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) - \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4}{\Gamma_2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$f_{r0,1} = \frac{q_{m0}}{q_{rs0}^2} - \frac{q_{\theta 0}^2 + q_{\phi 0}^2}{q_{m0} q_{rs0}} + P_1 P_2 (T_3 - T_4), \quad (\text{B.25})$$

$$f_{r0,2} = -\cos \eta \left[\beta \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \right], \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} f_{r1,1} = & \frac{q_{m0}}{q_{rs0}^2} (T_2 - 3T_1) + q_{r0} T_8 + 2P_1 P_2 T_3 T_5 \\ & + \frac{T_2 (q_{\theta 0}^2 + q_{\phi 0}^2) - 2(q_{\theta 0} q_{\theta 1} + q_{\phi 0} q_{\phi 1} + q_{r1} q_{\theta 1})}{q_{m0} q_{rs0}}, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} f_{r1,2} = & \cos \eta \left[-\frac{\beta}{1 + A/(2n + 1)} \left(A \cos \eta \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} P_1 T_4 (1 + A \sin \eta) \right) \right. \\ & \left. + q_{rs0} P_3 P_4^2 (T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4) \right] - \frac{q_{rs0}^{1/2} P_4 \cos \eta}{2} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) \\ & + \sin \eta \left[\beta \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \right], \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$f_{\theta 0,1} = P_2 \left(P_1 + \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} T_2 \right) - \frac{2q_{\theta 0} q_{\theta 1} + q_{\phi 0}^2 \tan \eta}{q_{m0} q_{rs0}}, \quad (\text{B.29})$$

$$f_{\theta 0,2} = (\Gamma_1 - \sin \eta) q_{rs0} P_3 P_4, \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned} f_{\theta 1,1} = & \frac{4q_{\theta 0} q_{\theta 1} T_2 - (2q_{\theta 1}^2 + q_{\phi 0}^2) + \tan \eta [q_{\phi 0}^2 (T_2 - \tan \eta) - 2q_{\phi 0} q_{\phi 1}]}{q_{m0} q_{rs0}} \\ & + q_{rs0} P_3 P_4^2 (\Gamma_1 - \sin \eta) [T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4], \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$f_{\theta 1,2} = P_1 P_2 (T_2 - T_5) - q_{\theta 0} T_8 - q_{rs0} P_4 [P_3 (\cos \eta - \Gamma_4) + \frac{\Gamma_1 - \sin \eta}{2q_{rs0}^{1/2}} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right)], \quad (\text{B.32})$$

$$f_{\phi 0,1} = q_{\phi 0} \left[\frac{P_1}{q_{rs0}} + \frac{P_2}{q_{m0}} (T_2 - T_7 + \tan \eta) \right], \quad (\text{B.33})$$

$$f_{\phi 0,2} = -\frac{q_{rs0} P_3 P_4 \Gamma_3 \sin \theta_0}{\Gamma_2}, \quad (\text{B.34})$$

$$f_{\phi 1,1} = q_{\phi 0} \left(T_8 + \frac{2P_2 T_2 T_7}{q_{m0}} \right) + \frac{q_{\theta 0} q_{\phi 0} - q_{r0} q_{\phi 0} (T_2 - T_6) - 2q_{\theta 1} q_{\phi 1}}{q_{m0} q_{rs0}} + \frac{q_{\phi 0} P_2 \tan \eta}{q_{m0}} (T_7 - T_2 + \tan \eta), \quad (\text{B.35})$$

y

$$f_{\phi 1,2} = \frac{q_{rs0} \sin \theta_0 P_3 P_4^2}{\Gamma_2} [T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4] + \frac{q_{rs0} \sin \theta_0 P_4 \Gamma_3}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_2} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - 2q_{rs0}^{1/2} P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4}{\sin \theta_0 \Gamma_2} - \frac{\sin \theta_0}{2\Gamma_1 \Gamma_2} \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_2^2} + \frac{1}{\Gamma_3} \right) \left(\frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1} - \cos \eta \right) \right]. \quad (\text{B.36})$$

En estas ecuaciones, las funciones Γ_i están definidas como,

$$\Gamma_1 = \cos \theta_0, \quad (\text{B.37})$$

$$\Gamma_2 = \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.38})$$

$$\Gamma_3 = \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.39})$$

y

$$\Gamma_4 = q_{rs1} \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r} - \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial \theta}. \quad (\text{B.40})$$

En la ecuación anterior, las derivadas parciales de $\cos \theta_0$ se obtienen reescribiendo la ec. (2.25) como

$$\cos^3 \theta_0 + \left(\frac{1}{\zeta} - 1 \right) \cos \theta_0 - \frac{1}{\zeta} \cos \theta = 0, \quad (\text{B.41})$$

con $\zeta = 1/r_s$, y están dadas por

$$\frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r_s} = \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\cos^2 \theta_0 + r_s - 1}, \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial \cos \theta_0}{\partial \theta} = -\frac{r_s \sin \theta}{3 \cos^2 \theta_0 + r_s - 1}. \quad (\text{B.43})$$

Las funciones P_i están dadas por

$$P_1 = \frac{qr_0}{q_{m0}}, \quad (\text{B.44})$$

$$P_2 = \frac{q\theta_0}{q_{rs0}}, \quad (\text{B.45})$$

$$P_3 = \frac{qr_0}{q_{m0}} + \frac{\Gamma_2}{q_{rs0}}, \quad (\text{B.46})$$

y

$$P_4 = \frac{1}{q_{rs0} - 1 + \Gamma_2}. \quad (\text{B.47})$$

Por último, las funciones T_i están definidas como

$$T_1 = \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (\text{B.48})$$

$$T_2 = \frac{qm_1}{q_{m0}} + \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (\text{B.49})$$

$$T_3 = \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} - \frac{q\theta_1}{q\theta_0}, \quad (\text{B.50})$$

$$T_4 = \frac{qr_1}{qr_0} - \frac{qm_1}{q_{m0}}, \quad (\text{B.51})$$

$$T_5 = \frac{qr_1}{qr_0} + \frac{q\theta_1}{q\theta_0}, \quad (\text{B.52})$$

$$T_6 = \frac{qr_1}{qr_0} + \frac{q\phi_1}{q\phi_0}, \quad (\text{B.53})$$

$$T_7 = \frac{q\theta_1}{q\theta_0} + \frac{q\phi_1}{q\phi_0}, \quad (\text{B.54})$$

$$T_8 = -\frac{2q\theta_0}{q_{m0}^3 q_{rs0}^3} (q_{m1}^2 q_{rs0}^2 + q_{m0} q_{m1} q_{rs0} q_{rs1} + q_{m1}^2 q_{rs1}^2). \quad (\text{B.55})$$

Los coeficientes $q_{m0}(\tau)$, $q_{m1}(\tau)$, $q_{r0}(\tau)$, $q_{r1}(\tau)$, $q\theta_0(\tau)$, $q\theta_1(\tau)$, $q\phi_0(\tau)$, $q\phi_1(\tau)$, $q_{rs0}(\tau)$ y $q_{rs1}(\tau)$ son funciones del tiempo (τ). A un $\tau = 0$, la cáscara tiene un radio ecuatorial $q_{rs0}(0) = r_{s0}(0)$,

cercano a la superficie estelar. Inicialmente la cáscara no tiene masa, por lo tanto $q_{m0}(0) = q_{m1}(0) = q_{r0}(0) = q_{r1}(0) = q_{\theta0}(0) = q_{\theta1}(0) = q_{\phi0}(0) = q_{\phi1}(0) = q_{rs1}(0) = 0$. Debido a que se tienen cocientes entre los coeficientes q_{ai} , estos se expanden para tiempos tempranos $\tau \ll 1$,

$$q_{m0} \approx e_{m0}\tau, \quad (\text{B.56})$$

$$q_{m1} \approx e_{m1}\tau, \quad (\text{B.57})$$

$$q_{r0} \approx e_{r0}\tau, \quad (\text{B.58})$$

$$q_{r1} \approx e_{r1}\tau, \quad (\text{B.59})$$

$$q_{\theta0} \approx e_{\theta0}\tau, \quad (\text{B.60})$$

$$q_{\theta1} \approx e_{\theta1}\tau, \quad (\text{B.61})$$

$$q_{\phi0} \approx e_{\phi0}\tau, \quad (\text{B.62})$$

$$q_{\phi1} \approx e_{\phi1}\tau, \quad (\text{B.63})$$

$$q_{rs0} \approx r_{s0}(0) + e_{rs0}\tau, \quad (\text{B.64})$$

y

$$q_{rs1} \approx e_{rs1}\tau. \quad (\text{B.65})$$

Sustituyendo estas ecuaciones en las ecs. (4.42) - (4.51), se obtiene

$$e_{m0} = -\cos \eta \left[\alpha \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \Lambda - 1 \right) - \frac{r_{s0}(0)^{3/2} Q_2}{\gamma_2} (\Lambda + Q_1) \right], \quad (\text{B.66})$$

$$e_{r0} = -\cos \eta \left[\beta \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \Lambda - 1 \right) + r_{s0}(0) Q_2 (\Lambda + Q_1) \right], \quad (\text{B.67})$$

$$e_{\theta0} = r_{s0}(0) Q_2 (\gamma_1 - \sin \eta) (\Lambda + Q_1), \quad (\text{B.68})$$

$$e_{\phi 0} = -\frac{r_{s0}(0) \sin \theta_0 \gamma_3 Q_2 (\Lambda + Q_1)}{\gamma_2}, \quad (\text{B.69})$$

$$e_{rs0} = \Lambda, \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} e_{m1} = & -\frac{r_{s0}(0)e_{m0}^2}{e_{\theta 0}^2} \left[\frac{e_{\theta 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda - \frac{2e_{\theta 0}e_{\theta 1} + e_{\phi 0}^2 \tan \eta}{e_{m0}r_{s0}(0)} + \frac{r_0^{1/2} Q_2}{2} \Lambda (\gamma_1 - \sin \eta) \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \right] \\ & + \Lambda Q_2 \left(\frac{r_{s0}(0)e_{m0}^2}{e_{\theta 0}^2} \right) (\Lambda + Q_1) [r_{s0}(0)\gamma_4 + Q_2 (\gamma_1 - \sin \eta) (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4)], \quad (\text{B.71}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{r1} = & \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \left[\frac{e_{\theta 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda - \frac{e_{\theta 0}^2 + e_{\phi 0}^2}{r_{s0}(0)e_{m0}} + \frac{e_{\theta 0}\Lambda}{r_{s0}(0)} \left(\frac{e_{m1}}{e_{m0}} - \frac{e_{\theta 1}}{e_{\theta 0}} \right) \right] + \cos \eta Q_2 \Lambda \left(\frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \right) \\ & \times \left[Q_2 (\Lambda + Q_1) (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) - \frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{2} \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\sin \eta \gamma_4}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \right], \quad (\text{B.72}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\theta 1} = & \frac{r_{s0}(0)Q_2\Lambda \cos \eta}{2} \left[1 + \frac{r_{s0}(0)\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} - (\Lambda + Q_1) \left(\frac{r_{s0}(0)^{3/2} \gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{\gamma_2} + \frac{2r_{s0}(0)^{1/2} Q_2}{\gamma_2} (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) \right) \right], \quad (\text{B.73}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{\phi 1} = & \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \left[\frac{e_{\phi 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda + \frac{e_{\theta 0}e_{\phi 0}}{r_{s0}(0)e_{m0}} \left(\frac{e_{m1}}{e_{m0}} - \frac{e_{\theta 1}}{e_{\theta 0}} \tan \eta \right) - \frac{r_{s0}(0)^{1/2} Q_2 \gamma_3 \Lambda \sin \theta_0}{2\gamma_2} \right. \\ & \times \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \left. + \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} (\Lambda + Q_1) \left[\frac{r_{s0}(0)Q_2\Lambda\gamma_4 \sin \theta_0 \sin \eta}{2\gamma_1^2 \gamma_3} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\gamma_2} \left(Q_2 \sin \theta_0 (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) - \frac{r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4}{\sin \theta_0} \right) \right] \right], \quad (\text{B.74}) \end{aligned}$$

$$e_{rs1} = \Lambda \left(\frac{e_{r1}}{e_{r0}} - \frac{e_{m1}}{e_{m0}} \right), \quad (\text{B.75})$$

donde

$$\Lambda \equiv \frac{e_{r0}}{e_{m0}}. \quad (\text{B.76})$$

Las funciones Q_1 , Q_2 y γ_i están dadas por

$$Q_1 = \frac{1}{r_{s0}(0)^{1/2}} \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.77})$$

$$Q_2 = \frac{1}{r_{s0}(0) - 1 + 3 \cos^2 \theta_0}, \quad (\text{B.78})$$

$$\gamma_1 = \cos \theta_0, \quad (\text{B.79})$$

$$\gamma_2 = \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (\text{B.80})$$

$$\gamma_3 = \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (\text{B.81})$$

y

$$\gamma_4 = \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r_s}. \quad (\text{B.82})$$

Sustituyendo las ecs. (B.66) y (B.67) en la ec. (B.76), se obtiene una ecuación cuadrática para Λ

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha^2}{\beta} \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right) - \frac{r_{s0}(0)^{3/2}}{\gamma_2} Q_2 \right] \Lambda^2 - \left[2\alpha \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right) \right. \\ & \left. + r_{s0}(0) Q_2 \left(\frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{\gamma_2} Q_1 + 1 \right) \right] \Lambda + \beta \left[\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n + 1)} \right] - r_{s0}(0) Q_1 Q_2 = 0. \quad (\text{B.83}) \end{aligned}$$

Resolviendo numéricamente las ecs. (B.11) - (B.20) con condiciones iniciales dadas por las ecs. (B.56) - (B.65) para τ pequeño ($\tau = 10^{-9}$), se encuentran los valores de q_{m0} , q_{m1} , q_{r0} , q_{r1} , $q_{\theta 0}$, $q_{\theta 1}$, $q_{\phi 0}$, $q_{\phi 1}$, q_{rs0} y q_{rs1} . Por lo tanto, se tienen condiciones de frontera en el ecuador para los flujos de masa y momento y el radio como funciones del tiempo.

Considerando $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$ y $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, la Figura B.1 muestra la evolución del radio de la cáscara normalizado al radio centrífugo para modelos con parámetros $A = 1$ y $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía B (panel izquierdo), y modelos con parámetros $A = 1$ y $B = 20$, y diferentes exponentes n (panel derecho). Esta figura muestra que los radios normalizados crecen hasta un punto de estancamiento cercano al radio centrífugo. Para los mismos modelos, en la Figura B.2 muestra de izquierda a derecha, la velocidad radial, θ y azimutal en el ecuador. Con pequeñas oscilaciones, las velocidades radial y θ tienden a un valor constante, mientras que la velocidad azimutal decrece con el tiempo.

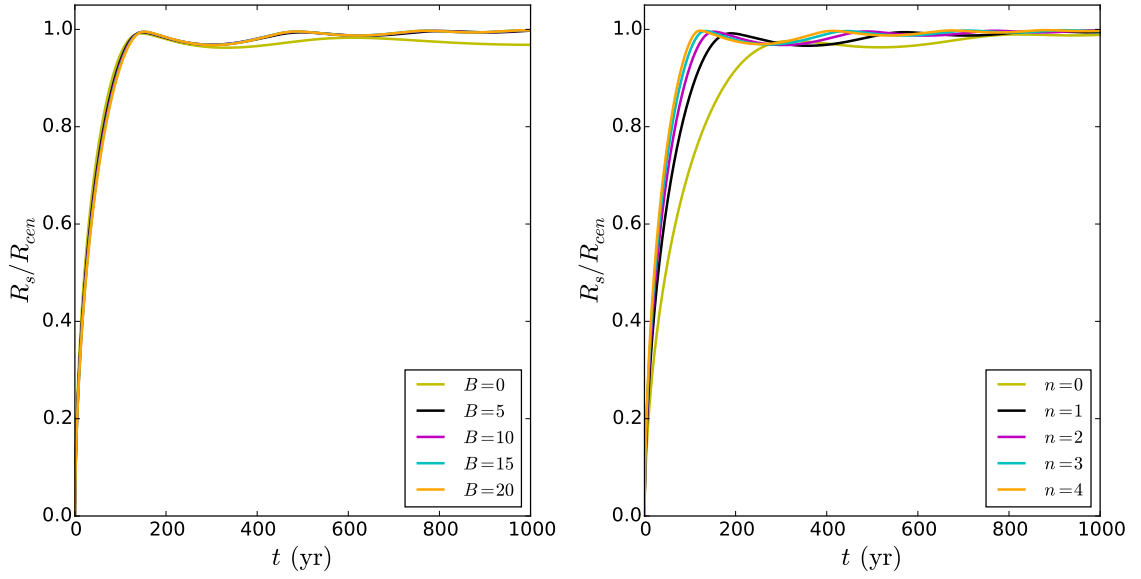


Figura B.1: Radio normalizado en el ecuador ($\eta = 0$) como función del tiempo para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$ y $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Panel izquierdo: modelos de vientos estelares con $A = 1$, $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía $B = 0, 5, 10, 15$ y 20 . Panel derecho: modelos de vientos estelares anisotrópicos con $A = 1$, $B = 20$ y diferentes exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

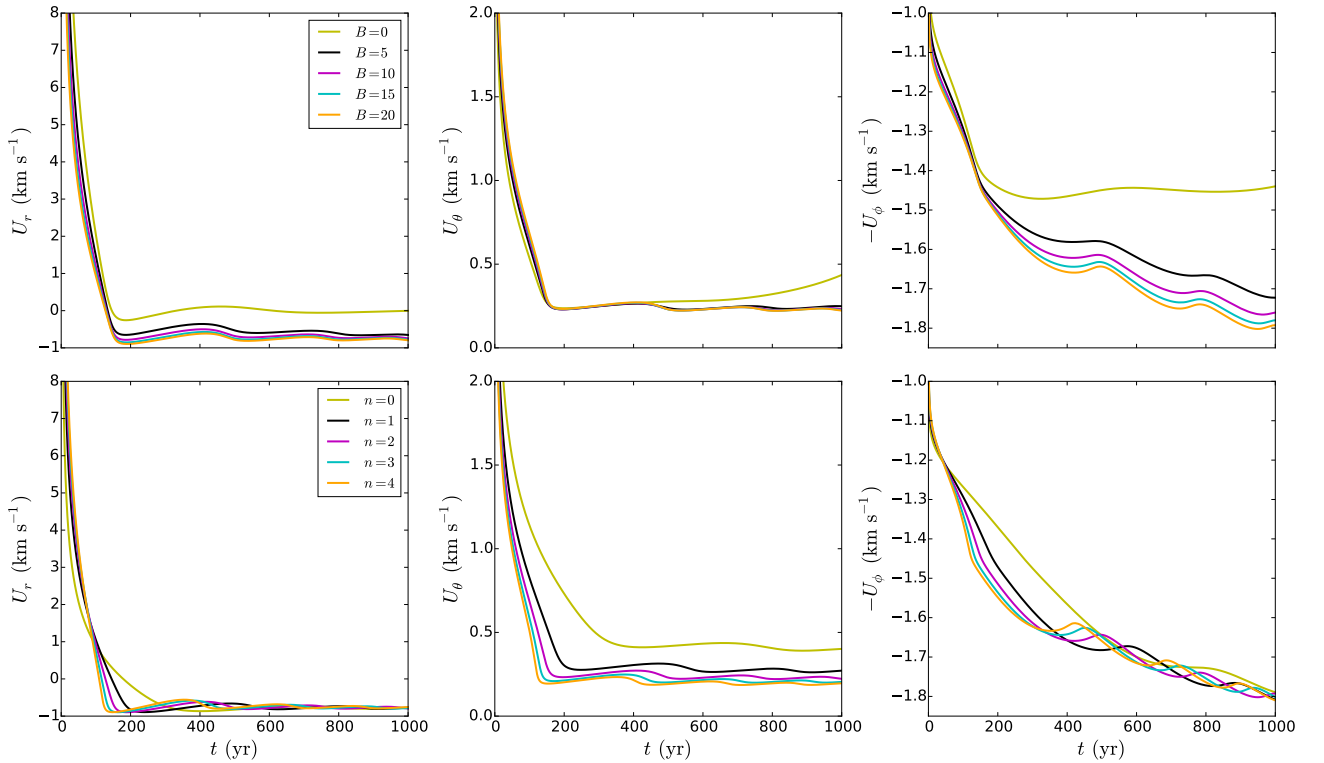


Figura B.2: Campo de velocidades de la cáscara en el ecuador ($\eta = 0$) como función del tiempo para los parámetros $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$ y $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Paneles superiores: velocidades radial (panel izquierdo), θ (panel medio) y azimutal (panel derecho) de la cáscara para vientos estelares con $A = 1$, $n = 2$ y diferentes valores del parámetro de anisotropía $B = 0, 5, 10, 15$ y 20 . Paneles inferiores: velocidades radial (panel izquierdo), θ (panel medio) y azimutal (panel derecho) de la cáscara para vientos estelares anisotrópicos con $A = 1$, $B = 20$ y diferentes exponentes $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

Apéndice C

Comparación del modelo dinámico con los modelos de Wilkin & Stahler

Se hace una comparación de nuestros modelos dinámicos con los modelos de flujo de Wilkin & Stahler (2003) para un viento estelar isotrópico ($B = 0$). Para ello, se consideran los parámetros de su Figura 5, los cuales son: una razón de la tasa de pérdida de masa de la estrella y el flujo de acreción $\alpha = 1/3$, una velocidad del viento $v_w = 159 \text{ km s}^{-1}$, un radio estelar $R_* = 3R_\odot$, una velocidad angular de la envoltura $\Omega = 2 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ y una velocidad del sonido $a_0 = 0.2 \text{ km s}^{-1}$.

Con la finalidad de calcular los parámetros de nuestro modelo, primero se toma su ec. [1] para obtener la tasa de acreción, la cual es

$$\dot{M}_a = \frac{m_0 a_0^3}{G}, \quad (\text{C.1})$$

donde la constante $m_0 = 0.975$ (Shu 1977) y G es la constante de gravitación universal. Usando el valor de la velocidad del sonido mencionada arriba, se obtiene una tasa de acreción $\dot{M}_a = 1.85 \times 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$.

La masa de la estrella central se obtiene usando su ec. [9],

$$M_* = \dot{M}_a \tau_*, \quad (\text{C.2})$$

donde τ_* es el tiempo desde la formación de la protoestrella. En Wilkin & Stahler (2003) se considera $\tau_* = 38000 \text{ yr}$, y obtienen una masa estelar $M_* = 0.07 M_\odot$.

El radio centrífugo del sistema se obtiene de su ec. [2],

$$R_{cen}(\text{AU}) = \frac{a_0}{0.2 \text{ km s}^{-1}} \left(\frac{\Omega}{2 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}} \right)^2 \left(\frac{\tau_*}{10^5 \text{ yr}} \right)^3. \quad (\text{C.3})$$

Con la velocidad del sonido, la velocidad angular y el tiempo mencionados anteriormente, se obtiene un radio centrífugo $R_{cen} = 0.055 \text{ AU}$.

La razón de tasas de momento del viento estelar y el flujo de acreción β está dado por $\beta = \alpha v_w / v_0 = 1.57$, donde $v_0 = (GM_*/R_{cen})^{1/2} = 33.8 \text{ km s}^{-1}$.

En el modelo de Wilkin & Stahler (2003), consideran pasos de tiempo de $\Delta t = 0.016 \text{ yr}$, usando la ec. (4.9) se tienen, para nuestro modelo, pasos de tiempo dados por

$$\Delta\tau = 2.03 \left(\frac{\Delta t}{0.016 \text{ yr}} \right). \quad (\text{C.4})$$

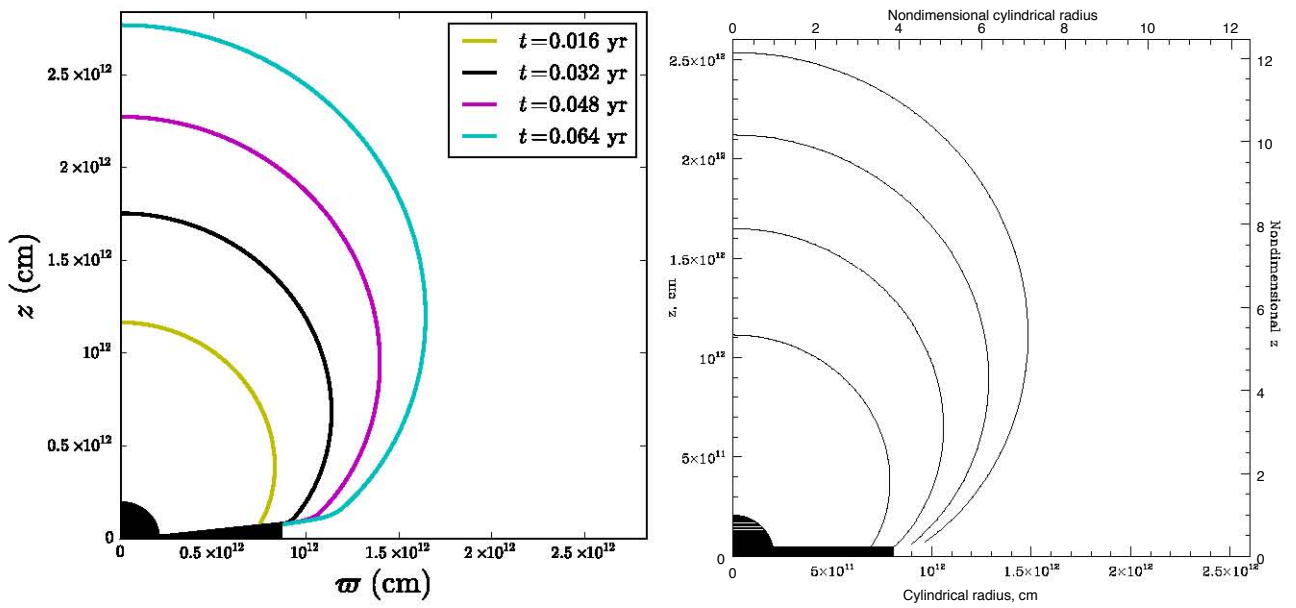


Figura C.1: Comparación de la forma de la cáscara para los mismos parámetros y mismos pasos de tiempo en ambos modelos. Panel izquierdo: nuestro modelo. Panel derecho: modelo de Wilkin & Stahler (2003).

Finalmente, se asume como condición de frontera en la región ecuatorial un disco con un ángulo $\eta = 5^\circ$.

Los resultados de esta integración son graficados en el panel izquierdo de la Figura C.1. Comparando nuestras cáscaras con las de Wilkin & Stahler (2003) (panel derecho), se puede observar que estas cáscaras tienen los mismos tamaños en el polo, sin embargo, las condiciones de frontera en ambos modelos son diferentes. En nuestro modelo, la condición de frontera es que el radio de la cáscara sobre la superficie del disco no puede ser mayor al radio centrífugo. En su modelo, la cáscara se expande continuamente más allá del radio centrífugo.

Apéndice D

Angular momentum in bipolar outflows: dynamical evolutionary model

ANGULAR MOMENTUM IN BIPOLAR OUTFLOWS: DYNAMICAL EVOLUTIONARY MODEL

J.A. LÓPEZ-VÁZQUEZ¹, J. CANTÓ², AND S. LIZANO¹

¹Instituto de Radioastronomía y Astrofísica, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 3-72, 58089 Morelia, Michoacán, México

²Instituto de Astronomía, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-264, 04510, CDMX, México

ABSTRACT

We model molecular outflows produced by the time-dependent interaction between a stellar wind and a rotating cloud envelope in gravitational collapse, studied by Ulrich. We consider spherical and anisotropic stellar winds. We assume that the bipolar outflow is a thin shocked shell, with axial symmetry around the cloud rotation axis, and obtain the mass and momentum fluxes into the shell. We solve numerically a set of partial differential equations in space and time and obtain the shape of the shell, the mass surface density, the velocity field, and the angular momentum of the material in the shell. We find that there is a critical value of the ratio between the wind and the accretion flow momentum rates β that allows the shell to expand. As expected, the elongation of the shells increases with the stellar wind anisotropy. In our models, the rotation velocity of the shell is in the range of $0.1 - 0.2 \text{ km s}^{-1}$, a factor of 5-10 lower than the values measured in several sources. We compare our models with those of Wilkin & Stahler for early evolutionary times and find that our shells have the same sizes at the pole, although we use different boundary conditions at the equator.

Keywords: hydrodynamics – stars: formation – stars: protostars – stars: winds, outflows

1. INTRODUCTION

The study of the molecular outflows and protostellar jets is fundamental to understanding the star formation process. Molecular outflows probably limit the mass of the star-disk system (e.g., Shu et al. 1993) and can induce changes in the chemical composition of their host cloud (e.g., Bachiller 1996) since they are a mixture of entrained material from the cloud and the outflowing stellar wind (e.g., Snell et al. 1980).

The magnetocentrifugal mechanism (Blandford & Payne 1982) is considered the principal candidate for producing the jets of young stars (see reviews by Königl & Pudritz 2000; Shu et al. 2000). In this mechanism the magnetic field, anchored to the star-disk system, is responsible for accelerating the jet. However, it is still under debate where these magnetic fields are anchored to the disk: it could be at a narrow region at the truncation radius R_x of the disk by a stellar magnetosphere (X-winds; e.g., Shu et al. 1994) or at a wider range of radii (disk winds; e.g., Pudritz & Norman 1983). Magneto-hydrodynamic models predict that the material ejected from the disk has a toroidal angular momentum component related to the rotation at the disk footprint. Therefore, the observed rotational velocity of the jet can give information about its origin on the disk (Anderson et al. 2003). For example, Lee et al. (2009) and Lee et al. (2017) found that the protostellar jets HH 211 and

HH 212, respectively, are ejected from very small radii, consistent with the X-wind model.

Molecular outflows have been explained as driven by fast stellar winds or as actual disk winds. In the former case, molecular outflows are produced when a fast stellar wind collides with the parent cloud accelerating and entraining cloud material (e.g., see reviews by Arce et al. 2007 and Bally 2016). In the latter case, the molecular outflow is ejected directly from the accretion disk (e.g., Pudritz & Norman 1986).

In recent years, rotation has been observed in a few molecular outflows, which are almost on the plane of the sky.¹ These sources are CB 26 (Launhardt et al. 2009), Ori-S6 (Zapata et al. 2010), HH 797 (Pech et al. 2012), DG Tau B (Zapata et al. 2015), Orion Source I (Hirota et al. 2017), HH 30 (Louvet et al. 2018), and NGC 1333 IRAS 4C (Zhang et al. 2018). Table 1 presents a summary of their characteristics.

From the observed rotation velocities, assuming that the outflows are disk winds, different authors find disk-launching radii between 10 and 50 AU (e.g., Launhardt

¹ As an alternative to the interpretation of a velocity difference as rotation, De Colle et al. (2016) showed that such differences can also be due to asymmetric shocks produced in the interaction of the stellar wind with the environment or by asymmetries in the ejection velocity of the disk-star system.

Table 1. Observational parameters of the molecular outflows with rotation.

Source	Molecular lines	M_* (M_\odot)	Δv_φ (km s^{-1})	Δr (AU)	z_{cut} (AU)
CB26	HCO ⁺ (1-0) and ¹³ CO (2-1)	0.5	1.1	100	560
Ori-S6	SO (6 ₅ -5 ₄) and ¹² CO (2-1)	2.0	2.0	1000	1200
HH 797	¹² CO (2-1)	1.0	2.0	1000	7500 ^a
DG Tau B	¹² CO (2-1)	0.5	1.0	150	450
Orion Source I	Si ¹⁸ O and H ₂ O	8.7	5.0	80	150
HH 30	¹² CO (2-1) and ¹³ CO (2-1)	0.45	0.4	150	200
NGC 1333 IRAS 4C	CCH	0.18	0.4	470	700

^aThe first column shows the source name, the second column gives the molecular lines observed, the third column indicates the mass of the central star M_* , the fourth column shows the velocity difference across the outflow lobe (rotation velocity) Δv_φ , and the fifth and sixth columns are the distance to the flow axis Δr , and the height above the disk z_{cut} , respectively.

et al. 2009; Pech et al. 2012). Nevertheless, Zapata et al. (2015), showed that magnetocentrifugal and photoevaporated disk winds do not have enough linear or angular momentum to account for the observed linear momentum and angular momentum rates in the molecular outflow of DG Tau B. They found that the observed rates are larger by a factor of 100, because the disk winds are not very massive. They pointed out that to account for the large masses of the observed molecular outflows they must be mainly entrained material from the parent cloud.

Several authors have modeled the molecular outflow as a wind-driven shell formed by the interaction between a radial stellar wind and the ambient cloud (e.g., Shu et al. 1991; Matzner & McKee 1999; Cantó et al. 2006). The ambient cloud can also be an accreting envelope. For example, Mendoza et al. (2004) described the hydrodynamical interaction between a rotating accretion flow and a spherically symmetric stellar wind. However, they did not consider either the gravitational pull from the central star or the centrifugal terms in the momentum equation. Later, Wilkin & Stahler (2003) took into account these effects but considered only the early evolution of the outflow.

Here we present a time-dependent model of the interaction between a rotating accretion flow and a fast radial stellar wind. The molecular outflow is a thin shell driven by the fast stellar wind, which gains mass from both the stellar wind and the accretion flow. In this model we consider the gravitational pull of the central star and the centrifugal terms in the momentum equations. Also, we follow the evolution of the shell from the stellar surface up to large distances from the central star. We consider the molecular outflows produced by both isotropic and axisymmetric stellar winds with a polar angle dependence.

This paper is organized in the following way: In section 2 we show the equations of the dynamic evolution of the shell. Section 3 presents the description of the

accretion flow and the stellar wind. The method of solution is presented in section 4, where we show the nondimensional equations and boundary conditions. In this section we also find semianalytic solutions for expansions around both the pole and the equator. Section 5 presents the results for different stellar winds. In section 6 we discuss our results. Finally, the conclusions are presented in section 7.

2. GENERAL FORMULATION

We assume that the molecular outflow is formed by the supersonic collision between a stellar wind and an accretion flow. This collision leads to the formation of both an inner and an outer shock front. We assume that the cooling behind these shocks is relatively efficient because the shock velocities are expected to be less than $< 100 \text{ km s}^{-1}$ (Hartigan et al. 1987). Thus, the region between the shocks is described by a cold and thin shell. Within the shell, two fluids with a different density and velocity come into contact, producing internal shearing layers that are subject to the Kelvin-Helmholtz instability, quickly leading to a turbulent mixing. Here we assume that the mixing is so efficient that one may describe the shell as a single fluid (e.g., Wilkin & Stahler 2003).

The evolution of the shell is governed by the fluxes of mass and momentum from the stellar wind and the accretion flow, by the gravitational influence of the central star, and by the centrifugal effects.

2.1. Shell equations

To derive the shell equations, we use spherical coordinates r , θ , and ϕ for the radial, the polar, and the azimuthal coordinates, respectively. The coordinate system is centered on the star, and we assume axial symmetry. The shell has a radius R_s , a mass surface density σ , and velocity components U_r , U_θ , and U_ϕ . All of these functions depend on θ and t , although, for simplicity, we will omit these dependences.

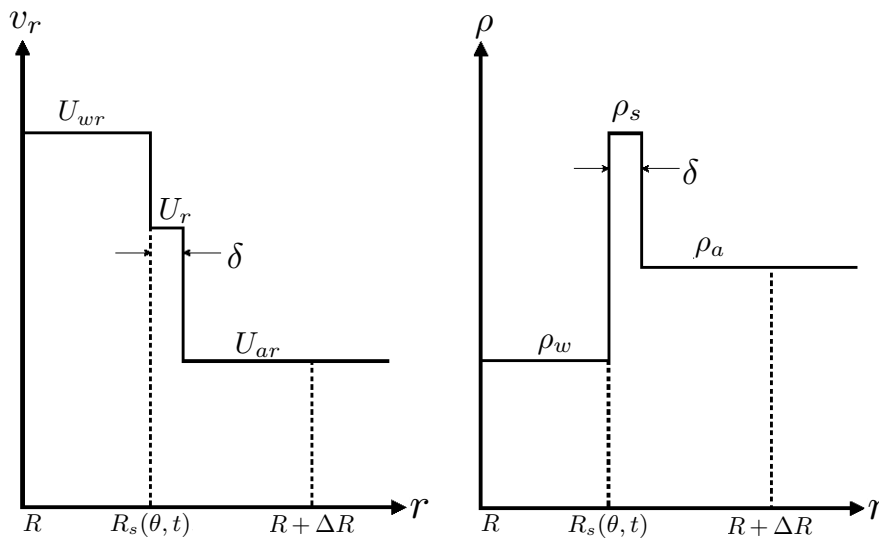


Figure 1. Schematic diagram of the model of a thin shell of thickness δ . Left panel: the radial velocity structure around the shell. Right panel: the mass volume density structure around the shell. U_r and ρ_s are the values of the radial velocity and the mass density of the shell and U_{wr} , U_{ar} , ρ_w , and ρ_a are the values of the fluid velocities and the mass density near the shell, which is at $R_s(\theta, t)$. We assume that $\delta \ll \Delta R \ll R \simeq R_s(\theta, t)$.

We assume that the accretion and wind flows are axisymmetric and that they vary in a timescale much longer than the shell evolution time. Therefore, their properties depend only on the coordinates r and θ . The accretion flow has a mass volume density ρ_a and velocity components U_{ar} , $U_{a\theta}$, and $U_{a\phi}$. The stellar wind has a mass volume density ρ_w and velocity components U_{wr} , $U_{w\theta}$, and $U_{w\phi}$. Figure 1 shows the outflow model where a thin shell is formed by the interaction of the stellar wind and the accretion flow.

In Appendix A, we show the derivation of the equations of the shell evolution in a general form. In order to write these equations in more compact form, we define the mass flux

$$P_m = R_s^2 \sin \theta \sigma, \quad (1)$$

and the momentum fluxes

$$\begin{aligned} P_r &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_r \equiv P_m U_r, \\ P_\theta &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_\theta \equiv P_m U_\theta, \\ P_\phi &= R_s^2 \sin \theta \sigma U_\phi \equiv P_m U_\phi. \end{aligned} \quad (2)$$

Also, we consider that the stellar wind has only a radial velocity component ($v_w = U_{wr}$).

Then, the continuity equation (eq. [A3]) can be written in terms of the mass and momentum fluxes as

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\theta}{R_s} \right) = \\ R_s^2 \sin \theta \left[\rho_a \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right) - \rho_w \left(\frac{P_r}{P_m} - v_w \right) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

where the right-hand side shows the contribution to the shell mass from the stellar wind and the accretion flow.

The equation of the momentum in radial direction (eq. [A7]) is given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_r P_\theta}{R_s P_m} \right) - \frac{P_\theta^2 + P_\phi^2}{R_s P_m} + \frac{GM_* P_m}{R_s^2} = R_s^2 \sin \theta \\ \times \left[\rho_a U_{ar} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right) - \rho_w v_w \left(\frac{P_r}{P_m} - v_w \right) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

where G is the gravitational constant and M_* is the stellar mass. The third term on the left-hand side comes from the centrifugal effect, and the last term is due to the weight of the shell. The right-hand side has the contribution from the stellar wind and the accretion flow.

The momenta in the θ and the azimuthal directions (eqns. [A8] and [A9]) in terms of the mass and momentum fluxes, respectively, can be written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\theta^2}{R_s P_m} \right) + \frac{P_r P_\theta - P_\phi^2 \cot \theta}{R_s P_m} = \\ R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{a\theta} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{P_\phi P_\theta}{R_s P_m} \right) + \frac{P_\phi (P_r + P_\theta \cot \theta)}{R_s P_m} = \\ R_s^2 \sin \theta \rho_a U_{a\phi} \left(\frac{P_r}{P_m} - U_{ar} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

In these two equations, the last terms on the left-hand side are due to the centrifugal effect on the shell, while on the right-hand side only the accretion flow contributes to the momentum fluxes in these directions.

Finally, the evolution of the shell radius can be written

as

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = \frac{P_r}{P_m} - \frac{1}{R_s} \frac{P_\theta}{P_m} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}, \quad (7)$$

where the first term in the right-hand side corresponds to the radial velocity and the second term is the contribution of the tangential motion along the shell.

To solve these equations for the evolution of the shell radius $R_s(\theta, t)$, one needs to specify the properties of the accretion flow and the stellar wind. This model allows an accretion flow and a stellar wind with a general velocity field. The only constraint is that they have to be axisymmetric. We note that our formulation of the equations is different from [Wilkin & Stahler \(2003\)](#). In our model, the vectors are expressed in spherical coordinates, while in the model of [Wilkin & Stahler \(2003\)](#) the vectors are decomposed in directions orthogonal and parallel to the shell.

3. ACCRETION FLOW AND STELLAR WIND

In this section we will apply our model to flows with specific properties in order to solve for the shell evolution.

3.1. The accretion flow

The accretion flow is given by the gravitational collapse of a rotating cloud described by [Ulrich \(1976\)](#). In this model, the fluid particles have a uniform rotation rate at large distances and fall to the center, conserving the specific angular momentum j . The collapse is assumed to be pressureless, and thus the orbits are ballistic. The latter assumption is true when the flow is supersonic, and heating by radiation and viscosity effects are negligible. The collapse of the gas reaches a centrifugal barrier at $R_{\text{cen}} = j^2/GM_*$.

In terms of the nondimensional radial variable

$$\zeta \equiv \frac{R_{\text{cen}}}{r}, \quad (8)$$

and the polar angle θ , the velocity field, and the density profile of the accretion flow are given by

$$U_{ar} = -v_0 \zeta^{1/2} \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$U_{a\theta} = v_0 \zeta^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \left(1 + \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

$$U_{a\phi} = -v_0 \zeta^{1/2} \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (11)$$

and

$$\rho_a = -\frac{\dot{M}_a \zeta^2}{4\pi R_{\text{cen}}^2 U_{ar}} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta)]^{-1}, \quad (12)$$

where θ_0 is the initial polar angle of the orbit of the fluid element at the beginning of the collapse towards the center, v_0 is the free fall velocity

$$v_0 = \left(\frac{GM_*}{R_{\text{cen}}} \right)^{1/2}, \quad (13)$$

\dot{M}_a is the mass accretion rate, and the Legendre polynomial is $P_2(\cos \theta_0) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_0 - 1)$. The angle θ_0 is given implicitly in terms of variables θ and ζ by

$$\zeta = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}. \quad (14)$$

Eq. (13) of [Mendoza et al. \(2004\)](#) gives an explicit solution of this equation.

Note that eq. (11) for the azimuthal velocity differs in sign from that given by [Ulrich \(1976\)](#). This only means that we consider the accretion flow to rotate with a negative angular momentum, as in Figure 1 of [Mendoza et al. \(2004\)](#).

3.2. The stellar wind

We assume an anisotropic stellar wind with a mass loss rate \dot{M}_w and only a radial velocity component $U_{wr} = v_w$, assumed to be constant. The density is given by

$$\rho_w = \frac{\dot{M}_w}{4\pi r^2 v_w} f(\theta), \quad (15)$$

where $f(\theta)$ is anisotropy function given by

$$f(\theta) = \frac{A + B \cos^{2n} \theta}{A + B/(2n + 1)}. \quad (16)$$

The constants are $A \geq 0$ and $B \geq 0$ and n is an integer. For $B = 0$ or $n = 0$ one recovers an isotropic stellar wind, while for $B > 0$ and $n > 0$, the density profile is anisotropic. This function is normalized such that the integral of the mass flux around the star recovers the total mass loss rate, $\dot{M}_w = 2\pi \int_0^\pi \rho_w v_w r^2 \sin \theta d\theta$.

4. SOLUTION OF THE EQUATIONS

4.1. Nondimensional equations

To solve the equations, we define the following nondimensional variables: the nondimensional radius

$$r_s = \frac{R_s}{R_{\text{cen}}}, \quad (17)$$

the nondimensional time

$$\tau = \frac{v_0}{R_{\text{cen}}} t, \quad (18)$$

the nondimensional mass flux

$$p_m = \frac{4\pi v_0}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_m, \quad (19)$$

and the nondimensional momentum fluxes

$$p_r = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{\text{cen}}} P_r, \quad (20)$$

$$p_\theta = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{cen}} P_\theta, \quad (21)$$

$$p_\phi = \frac{4\pi}{\dot{M}_a R_{cen}} P_\phi. \quad (22)$$

The nondimensional velocities of the accretion flow and the stellar wind are

$$u_{ar} = \frac{U_{ar}}{v_0}, \quad (23)$$

$$u_{a\theta} = \frac{U_{a\theta}}{v_0}, \quad (24)$$

$$u_{a\phi} = \frac{U_{a\phi}}{v_0}, \quad (25)$$

and

$$u_{wr} = \frac{v_w}{v_0}. \quad (26)$$

Also, we define the ratio of the wind mass-loss rate to the mass accretion rate

$$\alpha = \frac{\dot{M}_w}{\dot{M}_a} \quad (27)$$

and the ratio between the stellar wind and the accretion flow momentum rates

$$\beta = \frac{\dot{M}_w v_w}{\dot{M}_a v_0} \equiv \alpha u_{wr}. \quad (28)$$

Finally, the nondimensional densities of the accretion flow and the stellar wind are given by

$$\rho'_a = \frac{4\pi R_{cen}^2 v_0}{\dot{M}_a} \rho_a \equiv -\frac{\zeta^2}{u_{ar}} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]^{-1} \quad (29)$$

and

$$\rho'_w = \frac{4\pi R_{cen}^2 v_0}{\dot{M}_a} \rho_w \equiv \frac{\alpha}{r_s^2 u_{wr}} f(\theta). \quad (30)$$

In terms of the new variables, eqs. (3) - (7) can be written as

$$\frac{\partial p_m}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\theta}{r_s} \right) = \sin \theta \times \left[\frac{\left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right)}{u_{ar} [1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)]} - \alpha f(\theta) \left(\frac{\alpha p_r}{\beta p_m} - 1 \right) \right] \quad (31)$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_r p_\theta}{r_s p_m} \right) - \frac{p_\theta^2 + p_\phi^2}{r_s p_m} + \frac{p_m}{r_s^2} = \sin \theta \times \left[\frac{\left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right)}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} - \beta f(\theta) \left(\frac{\alpha p_r}{\beta p_m} - 1 \right) \right], \quad (32)$$

$$\frac{\partial p_\theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\theta^2}{r_s p_m} \right) + \frac{p_r p_\theta - p_\phi^2 \cot \theta}{r_s p_m} = \frac{\sin \theta}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \left(\frac{u_{a\theta}}{u_{ar}} \right) \left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right), \quad (33)$$

$$\frac{\partial p_\phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p_\phi p_\theta}{r_s p_m} \right) + \frac{p_\phi (p_r + p_\theta \cot \theta)}{r_s p_m} = \frac{\sin \theta}{1 + 2\zeta P_2(\cos \theta_0)} \left(\frac{u_{a\phi}}{u_{ar}} \right) \left(u_{ar} - \frac{p_r}{p_m} \right), \quad (34)$$

$$\frac{\partial r_s}{\partial \tau} = \frac{p_r}{p_m} - \frac{1}{r_s} \frac{p_\theta}{p_m} \frac{\partial r_s}{\partial \theta}, \quad (35)$$

where $f(\theta)$ is defined in eq. (16).

These equations need initial conditions to advance in time, and boundary conditions (BCs) at the pole ($\theta = 0$) and at the equator ($\theta = \pi/2$).

4.2. Boundary conditions

In the next section we expand the variables in powers of θ and obtain equations for their time evolution at the pole and at the equator. These solutions provide BCs for the partial differential equations (31) - (35).

4.2.1. Expansions around the pole

We expand in power series the mass and momentum fluxes, as well as the radius of the shell. The equations are expanded to second order in θ for $\theta \ll 1$, such that the variables are given by

$$p_m \approx b_{m1} \theta, \quad (36)$$

$$p_r \approx b_{r1} \theta, \quad (37)$$

$$p_\theta \approx b_{\theta2} \theta^2, \quad (38)$$

$$p_\phi \approx b_{\phi2} \theta^2, \quad (39)$$

and

$$r_s \approx r_{s0}, \quad (40)$$

where the coefficients b_{m1} , b_{r1} , $b_{\theta2}$, $b_{\phi2}$, and r_{s0} are functions of the nondimensional time (τ) given by the solution of the set of differential equations described in Appendix B.

4.2.2. Expansions around the equator

In the equator the density of the accretion flow at centrifugal radius diverges. If the shell evolves in this direction, eventually it is going to find a barrier of infinite density. At that point the shell will stagnate at R_{cen} .

We expand the variables around the equator as

$$p_m \approx q_{m0} + q_{m1} \Theta, \quad (41)$$

$$p_r \approx q_{r0} + q_{r1}\Theta, \quad (42)$$

$$p_\theta \approx q_{\theta0} + q_{\theta1}\Theta, \quad (43)$$

$$p_\phi \approx q_{\phi0} + q_{\phi1}\Theta, \quad (44)$$

and

$$r_s \approx q_{rs0} + q_{rs1}\Theta, \quad (45)$$

where $\Theta = (\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta \ll 1$ and the angle η defines a physical boundary in the equatorial region (e.g., a disk).

The coefficients q_{m0} , q_{m1} , q_{r0} , q_{r1} , $q_{\theta0}$, $q_{\theta1}$, $q_{\phi0}$, $q_{\phi1}$, q_{rs0} , and q_{rs1} are functions of the nondimensional time (τ) given by the solution of a set of differential equations described in Appendix C.

5. RESULTS

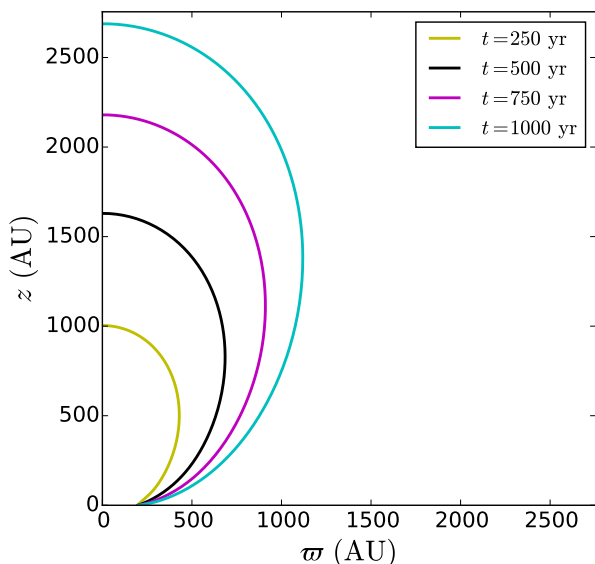


Figure 2. Shape of the shell for different times for the parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, $A = 1$, $B = 20$, and $n = 2$.

Eqns. (31) - (35) describe the evolution of the shell. The nondimensional equations are solved numerically. We assume that initially the shell is spherical and massless, with a radius close to the stellar surface. We assume an initial nondimensional radius of $r_{s0}(0) \simeq R_*/R_{cen} \simeq 10^{-4}$. We assume that the ratio of the wind mass-loss rate to the mass accretion rate is $\alpha = 0.1$, a typical value for molecular outflows (see, e.g., figure 14 of [Ellerbroek et al. 2013](#)). Also, we assume $\beta = 21^2$. The integration

² The stellar wind and the freefall velocities correspond to

is done from $t = 0$ to $t = 1000$ yr.

In this section we study the shell evolution for different stellar wind models. As an example, consider the molecular outflow produced by an anisotropic stellar wind with $A = 1$, $B = 20$, and $n = 2$. Figure 2 shows the shape of the shell $R_s(\theta, t)$ for different times from $t = 250$ yr to $t = 1000$ yr. The shells are elongated along the cloud rotational axis. We define the shell collimation as the ratio

$$C = \frac{R_s(0, t)}{\varpi_{\max}(t)}, \quad (46)$$

where $R_s(0, t)$ is the shell radius at the pole and $\varpi_{\max}(t)$ is the maximum width of the shell. This ratio measures the shell elongation. During the shell evolution, this model has a collimation $C \sim 2.5$, similar to the observed outflows CB 26 ([Launhardt et al. 2009](#)) and DG Tau B ([Zapata et al. 2015](#)).

Figure 3 shows the radial, the θ , and the azimuthal velocities as functions of θ for this model, for different times. The velocities of the shell are obtained from eqns. (2). The left panel shows the radial velocity of the shell. This velocity decreases with time, i.e., the shell is slowing down. It also decreases with the angle such that at the equator, $\theta = \pi/2$ this velocity tends to zero, because the shell finds a barrier at R_{cen} where the density is infinite. The middle panel shows the θ -velocity of the shell. This velocity decreases with time but increases with the polar angle θ , due to the material that slides from the pole to the equator; this material feeds the accretion disk $U_\theta > 0$. The right panel shows the azimuthal velocity. This rotation velocity decreases with the time and increases with angle: at the equator the rotation velocity is maximum because the orbits of the accretion flow that lands at this point have the largest angular momentum with respect to the pole.

The mass surface density of the shell along the radial direction, obtained from eq. (1), is plotted in Figure 4. In this figure, we observe that, for angles close to the pole, the surface density decreases with time, while for angles close to the equator, the surface density increases with time.

The total mass of the shell is given by

$$M_{\text{shell}}(t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma dA = 4\pi \int_0^{\pi/2} P_m d\theta, \quad (47)$$

where $dA = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$, and with P_m defined in eq.

parameters of the central star of the molecular outflow CB 26 ([Launhardt et al. 2009](#)). These parameters are a stellar mass $M_* = 0.5M_\odot$ and a centrifugal radius of $R_{cen} = 200$ AU ([Launhardt & Sargent 2001](#)). We also assumed a radius $R_* = 2 R_\odot$. The stellar wind velocity is taken as the escape velocity of the central star. With these assumptions, the stellar wind velocity of 309 km s^{-1} and freefall velocity of $v_0 = 1.5 \text{ km s}^{-1}$.

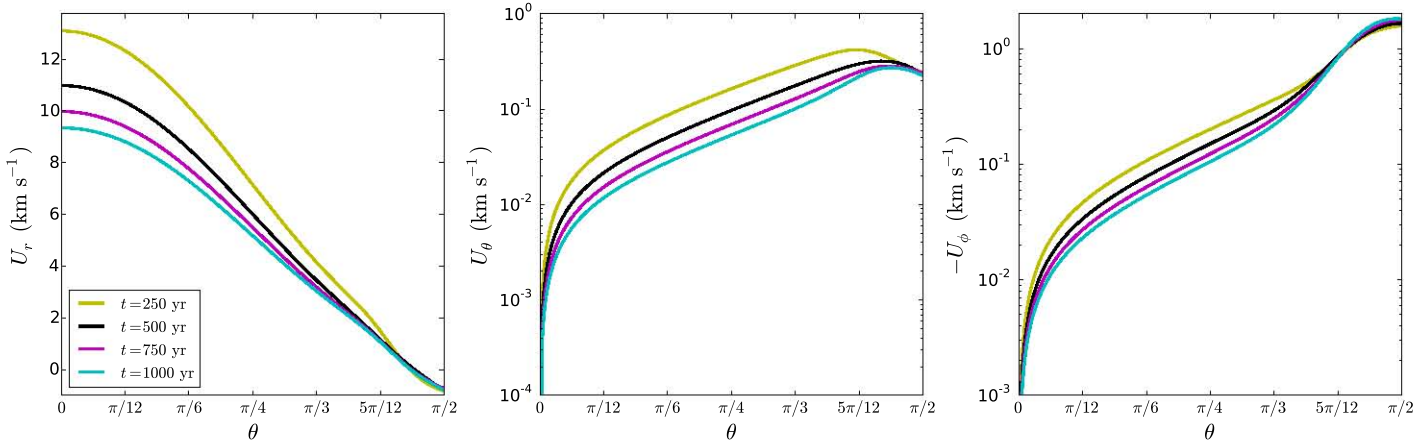


Figure 3. Velocity field of the shell as a function of θ for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2. Left panel: the radial velocity. Middle panel: the θ -velocity. Right panel: the azimuthal velocity.

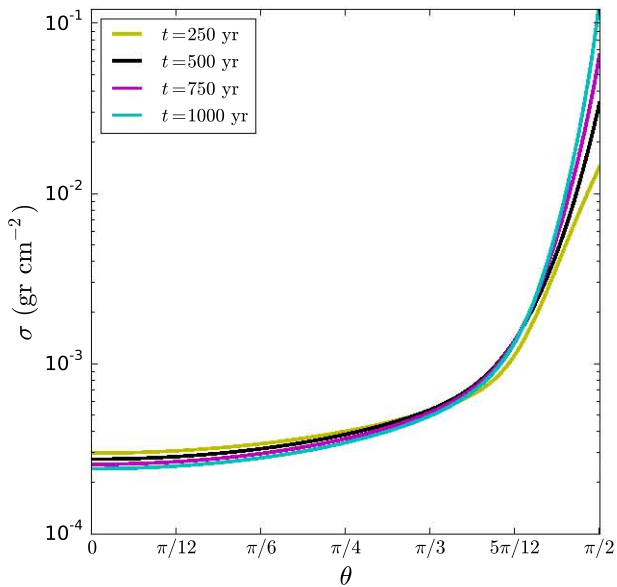


Figure 4. Mass surface density of the shell as a function of θ for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2.

(1). Figure 5 shows that the mass increases with time. The specific angular momentum of the shell in the z -direction is

$$j_z(\theta, t) = U_\phi R_s \sin \theta, \quad (48)$$

and the total angular momentum is

$$J_z(t) = 2 \int_0^{\pi/2} \sigma j_z dA = 4\pi \int_0^{\pi/2} P_m j_z d\theta. \quad (49)$$

Figure 6 shows the total angular momentum, which, increases with time.

In order to compare the outflow model with observations, we projected the velocity field of the shell along the line of sight for an inclination angle $i = 5^\circ$ with respect to the plane of the sky. The velocity of the line

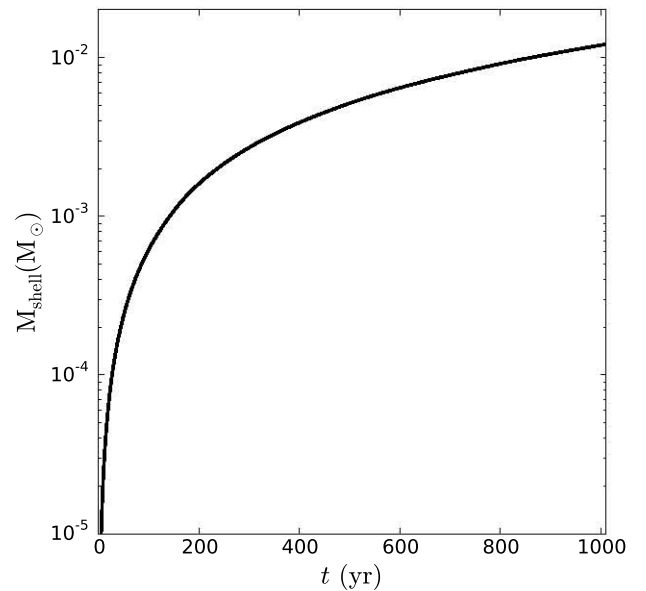


Figure 5. Total mass of the shell as a function of time for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2.

of sight v_{los} is shown in Figure 7. The left and right panels show the velocity at 250 yr and 1000 yr, respectively. For an inclination angle larger than 0° , the velocity along the line of sight is a combination of the radial and the θ velocities. Figure 8 shows cuts at different heights z_{cut} of the map at 250 yr. The left panel shows a position-velocity diagram for $z_{cut} = -560$ AU. The middle panel and right panel have cuts at $z_{cut} = 0$ and $z_{cut} = 420$, respectively.

Now we consider the effect of degree of anisotropy of the stellar wind on the shape of the shell. Figure 9 shows the shape of the shell for parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, and a stellar wind model with $A = 1$, and a time of $t = 1000$ yr, for different values of the anisotropy parameters B and n . The left panel shows

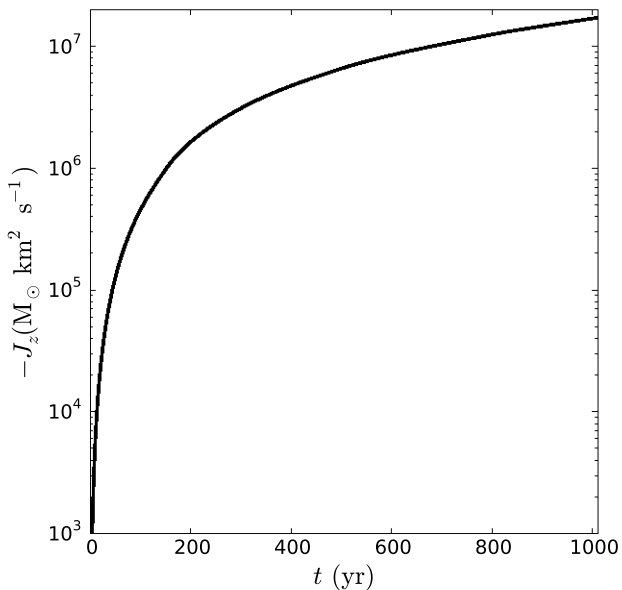


Figure 6. Total angular momentum of the shell as a function of time for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2.

the shape of the shells for $n = 2$: one can see that as B increases, the shell becomes more elongated. The right panel shows the shape of the shells for $B = 20$: as the exponent n increases, the shells are more elongated.

Figure 10 shows the collimation of the shell for parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, and different values of the anisotropy parameter B and different values of the exponent n from an isotropic stellar wind ($B = 0$) to very anisotropic stellar winds ($B = 20$ and $n = 4$). As expected, the collimation increases with both B and n .

6. DISCUSSION

We find that at the pole the shell collapses for isotropic and anisotropic stellar winds if the value of the ratio between the stellar wind and the accretion flow momentum rates is less than a critical value, $\beta < \beta_{\text{crit}}$ (see Table B1 in Appendix B). This happens because the shell does not have enough momentum to escape. At the equator, for a given value of β , the shell will always stagnate near the centrifugal radius (see Figure C4 in Appendix C). This happens because the density diverges at R_{cen} .

We have also compared the results of our model with those of Wilkin & Stahler (2003). For an isotropic wind and the same values of the parameters α and β , we find that our shells have the same sizes at the pole. Also, the collimation factor is the same as in their model $C \sim 1.6$ (see Figure D6 in Appendix D). The only differences are due to the assumption of different BCs at the disk surface, close to the equator.

The collimation of the shells depends on the anisotropy of the stellar wind and the accretion flow.

In the models with an anisotropic stellar wind and the Ulrich accretion flow, it is difficult to get collimation factors C much larger than 3 (figure 10), while the collimation factors of observed sources have values of $\sim 3 - 10$, (Bontemps et al. 1996).

We also compare our model with the molecular outflow CB 26 (Launhardt et al. 2009), at the time when they both have the same size in the polar direction. The result of this comparison is as follows

1. The dynamical time of the model is $t = 250$ yr which is half of the kinematic age calculated with the observed size and current velocity. This discrepancy is due to the fact that the shell is decelerating.
2. The radial velocity of the model is of the order of 10 km s^{-1} , consistent with the observed expansion velocity (e.g., Lee et al. 2018).
3. The collimation factor is similar to the observed value.
4. The shell mass in the model is $2 \times 10^{-3} M_{\odot}$, twice the observed value.
5. The rotation velocity of the model is lower by an order of magnitude than the observed value (see Table 1).
6. The total angular momentum is also lower than the observed value.

The low rotation of the model may be resolved, if that the stellar wind has angular momentum, or the parent cloud has more angular momentum than the Ulrich's flow, or with a combination of both mechanisms. Part of the problem is that the accreting envelope does not have large rotation velocities. In addition, the model shell has more mass than the observed shell, with slowly rotating material.

Finally, we note that in our thin-shell model we assume that the pressure effects are negligible. Pressure gradients will not affect the thin shell approximation, which depends on an efficient cooling of the shocked gas. On the other hand, pressure gradients inside the shell could change the gas tangential dynamics, accelerating or decelerating the flow along the shell. This effect is not expected to be important when the flow is supersonic. Thus, to evaluate the effect of the pressure, one has to calculate the temperature of the shell, which is out of the scope of this paper.

7. CONCLUSIONS

To understand the evolution and properties of molecular outflows we developed a model of the interaction

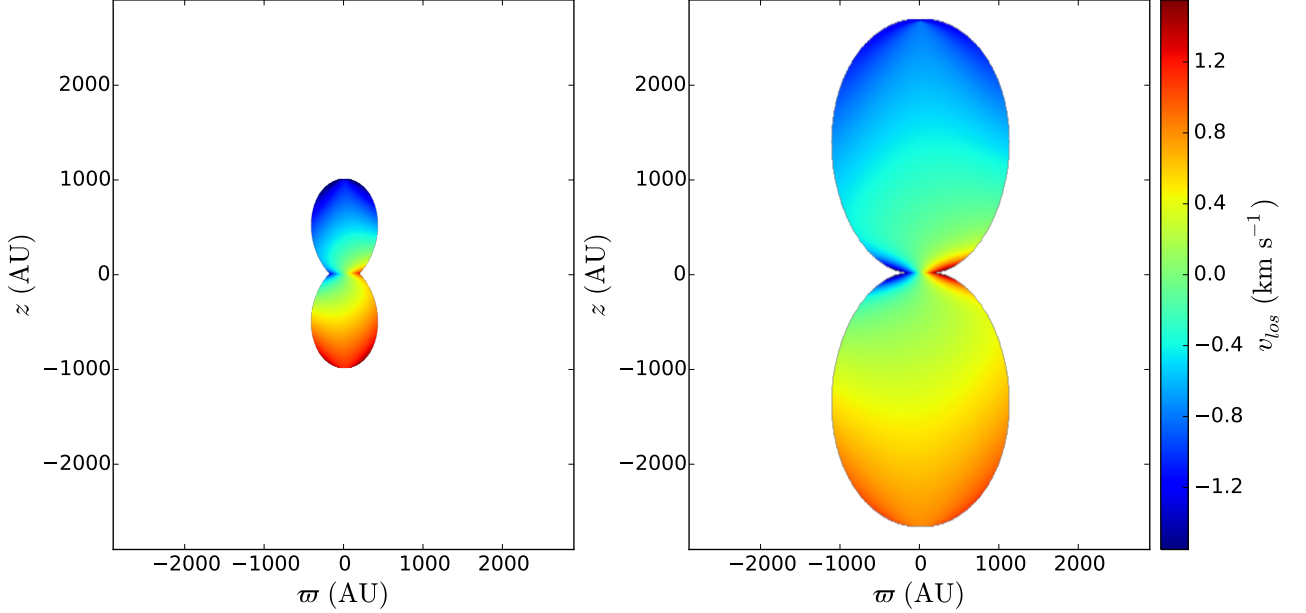


Figure 7. Velocity of the line of sight for different times and an inclination angle $i = 5^\circ$. Left panel: velocity of the line of sight for a time $t = 250$ yr. Right panel: velocity of the line of sight for a time $t = 1000$ yr. These plots were made for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2.

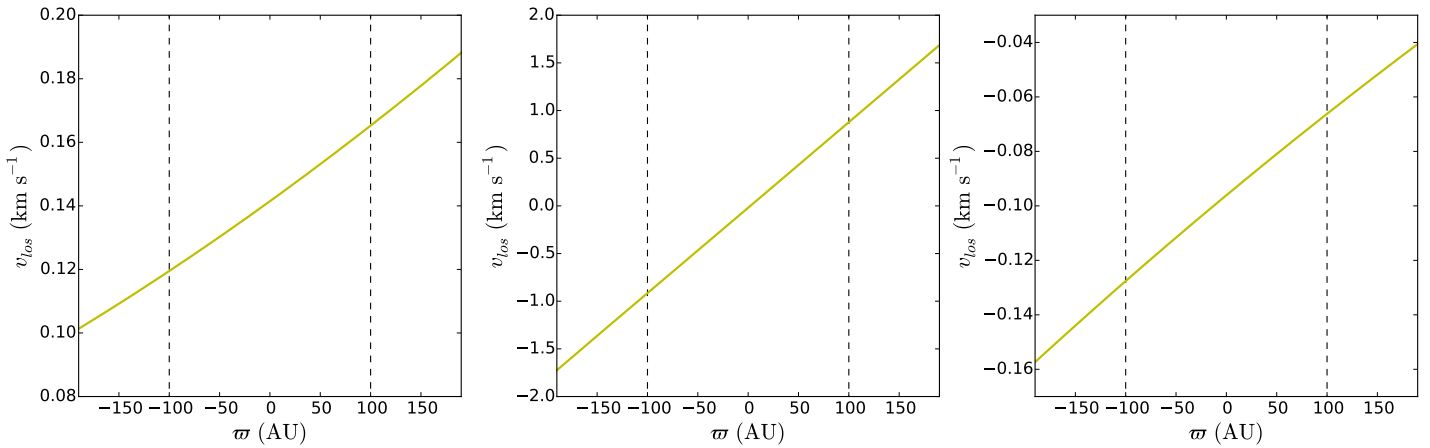


Figure 8. Position-velocity diagrams with perpendicular cuts to the cloud's rotational axis for different heights from the disk and an inclination angle $i = 5^\circ$. Left panel: velocity of the line of sight for $z_{cut} = -560$ AU. Middle panel: velocity of the line of sight for the disk midplane. Right panel: velocity of the line of sight for $z_{cut} = 420$ AU. These plots were made for the same parameters α , β , $r_{s0}(0)$, A , B , and n as in figure 2.

between a stellar wind and an accretion flow that follows the evolution of a thin shell that is pushed by and entrains material from both flows. We have formulated the problem in such a way that we can consider an accretion flow and a stellar wind with general velocity fields (collimated or not collimated and with or without rotation) provided that they have axial symmetry.

In the present paper we have considered isotropic and anisotropic stellar winds with only radial velocity. The accretion flow is given by the collapse of a slowly rotating molecular cloud from Ulrich (1976). The evolution of the outflow was followed from its origin, close to the stellar surface, to large distances from the central star.

The shell evolution has a strong dependence on the ratio between the wind and the accretion flow mass and momentum rates, α and β (eqns. [27] and [28]). In order

for the molecular outflow shells to expand, it is necessary that $\beta \geq \beta_{crit}$ for a given value of α . If $\beta < \beta_{crit}$, the whole shell collapses back to stellar surface.

The interacting flows considered in this work produce moderate outflow collimation ($C \sim 3$) and low rotation ($v_\phi \sim 0.1 \text{ km s}^{-1}$). These values are lower than observed in the sources in Table 1. It is left as future work to explore other physical collapsing envelopes and stellar winds to determine the outflow characteristics.

Acknowledgements. J. A. López-Vázquez and S. Lizano acknowledge support from PAPIIT-UNAM IN101418 and CONACyT 23863. J. Cantó acknowledges support from PAPIIT-UNAM-IG 100218. We thank an anonymous referee for useful suggestions that improved the presentation of this paper.

APPENDIX

A. DERIVATION OF THE EQUATIONS

In spherical coordinates the continuity equation is given by

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\rho v_\phi)}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{A1})$$

where ρ is the mass volume density and v_r , v_θ , and v_ϕ are the fluid velocities. We assume axisymmetry with respect to the ϕ direction and multiply the above equation by $r^2 \sin \theta$. Then, the continuity equation can be written as

$$\frac{\partial(\rho r^2 \sin \theta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r r^2 \sin \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\theta r \sin \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{A2})$$

Integrating the latter equation in the radial direction from R to $R + \Delta R$ for fixed θ (see Figure 1), the continuity equation of the shell can be written as

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a (U_{ar} - U_r) - \rho_w (U_{wr} - U_r)] = 0. \quad (\text{A3})$$

In this equation the mass surface density of the shell in the radial direction is $\sigma = \rho_s \delta$, and U_r and U_θ are the radial and θ velocity components of the shell material, respectively.

The equation of the fluid momentum in the radial direction is given by

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \rho \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} = F_g, \quad (\text{A4})$$

where $F_g = -GM_* \rho / r^2$ is the gravitational force per unit volume.

The equations of the fluid momentum in the θ and the azimuthal directions are given by

$$\rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \rho \frac{v_r v_\theta}{r} - \rho \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} = 0, \quad (\text{A5})$$

and

$$\rho \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{\rho v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{\rho v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \rho \frac{v_r v_\phi}{r} + \rho \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} = 0. \quad (\text{A6})$$

One multiplies eq. (A1) by v_r , v_θ , and v_ϕ , and add the result to eqns. (A4) - (A6), respectively. Then, one integrates each equation in the radial direction for a thin shell, considering the axial symmetry, and obtains the following equations for the momenta of the shell in the radial, the θ and the azimuthal directions:

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_r U_\theta) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{ar} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{wr} (U_{wr} - U_r)]$$

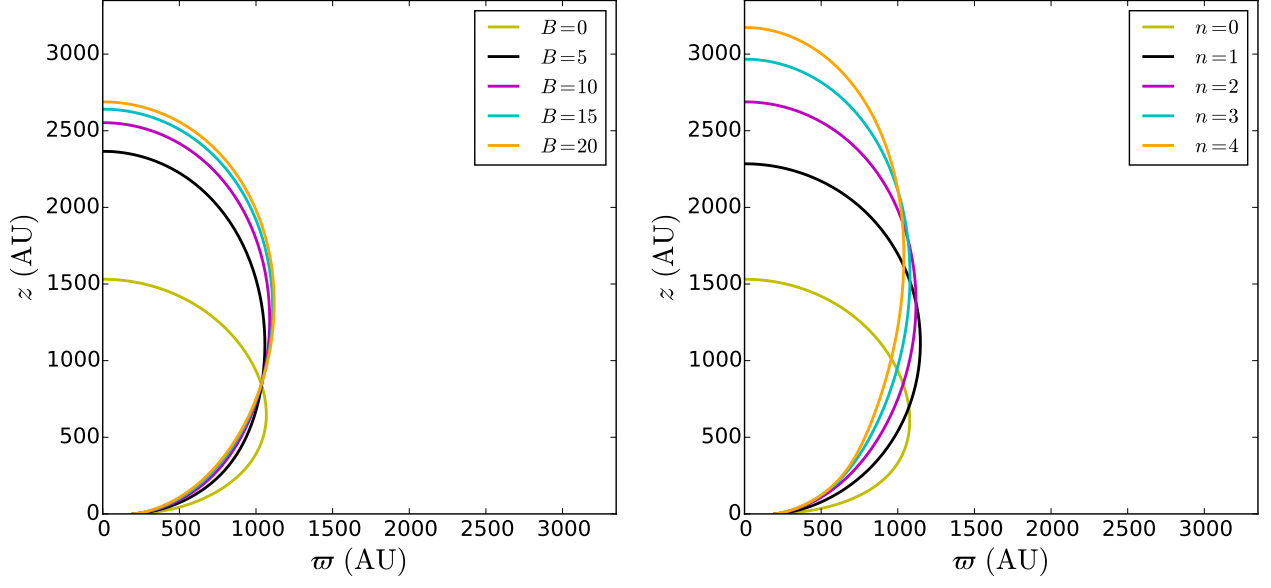


Figure 9. Shape of the shells for different models at $t = 1000$ yr and the same parameters α , β , and $r_{s0}(0)$ as in figure 2. Left panel: stellar wind model with $A = 1$, $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter $B = 0, 5, 10, 15$, and 20 . Right panel: anisotropic stellar wind with $A = 1$, $B = 20$, and different exponents $n = 0, 1, 2, 3$, and 4 .

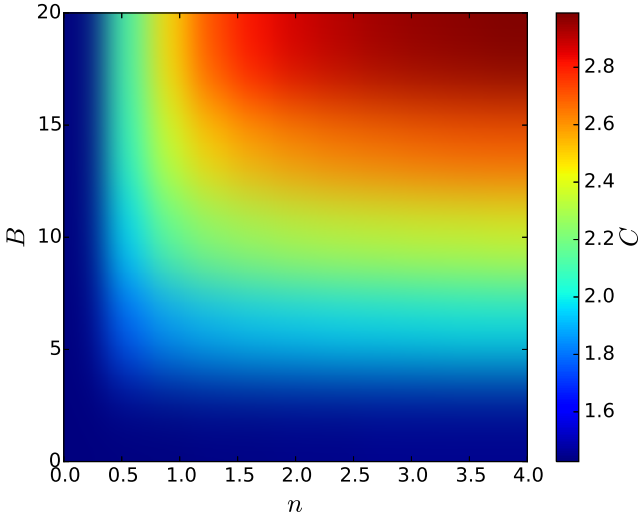


Figure 10. Collimation C as a function of B and n for $A = 1$ and the same parameters α , β , and $r_{s0}(0)$ as in figure 2.

$$-R_s \sin \theta \sigma (U_\theta^2 + U_\phi^2) + GM_* \sin \theta \sigma = 0, \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta^2) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{a\theta} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{w\theta} (U_{wr} - U_r)] \\ + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\theta - U_\phi^2 \cot \theta) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (R_s^2 \sin \theta \sigma U_\phi) + \frac{\partial}{\partial \theta} (R_s \sin \theta \sigma U_\theta U_\phi) + R_s^2 \sin \theta [\rho_a U_{a\phi} (U_{ar} - U_r) - \rho_w U_{w\phi} (U_{wr} - U_r)] \\ + R_s \sin \theta \sigma (U_r U_\phi + U_\theta U_\phi \cot \theta) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

where U_ϕ is the azimuthal velocity of the shell material.

To obtain the evolution of the shell radius, one can write

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{dR_s}{dt} = \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{\partial R_s}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta} R_s \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{\partial R_s}{\partial t} + \frac{U_\theta}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

Then, the evolution of the radius of the shell is given by

$$\frac{\partial R_s}{\partial t} = U_r - \frac{U_\theta}{R_s} \frac{\partial R_s}{\partial \theta}. \quad (\text{A11})$$

Eqns. (A3), (A7), (A8), (A9), and (A11) describe the evolution of the shell formed by the shock between a stellar wind and an accretion flow with a given velocity field. These equations can be written in the more compact form shown in the eqns. (3) - (7) in terms of the mass and momentum fluxes (eqns. [1] and [2]).

B. RADIUS AND VELOCITIES AROUND THE POLE

Around the pole, the mass and the momentum fluxes and the radius can be expanded as power series of θ to second order as

$$p_m \approx b_{m1}\theta + b_{m2}\theta^2, \quad (\text{B12})$$

$$p_r \approx b_{r1}\theta + b_{r2}\theta^2, \quad (\text{B13})$$

$$p_\theta \approx b_{\theta1}\theta + b_{\theta2}\theta^2, \quad (\text{B14})$$

$$p_\phi \approx b_{\phi1}\theta + b_{\phi2}\theta^2, \quad (\text{B15})$$

and

$$r_s \approx r_{s0} + r_{s1}\theta + r_{s2}\theta^2. \quad (\text{B16})$$

In the above equations, we can note that the mass and the momentum fluxes do not have components of order zero, since these momenta are zero at $\theta = 0$.

Substituting the eq. (40) into eq. (14) and expanding in Taylor's series for $\theta \ll 1$ and $\theta_0 \ll 1$, one finds the relation between the radius at the pole r_{s0} , the angle θ , and the angle θ_0 ,

$$\theta_0 \approx \left(\frac{r_{s0}}{2 + r_{s0}} \right)^{1/2} \theta. \quad (\text{B17})$$

In addition, the velocities and the density of the accretion flow are expanded in Taylor's series to first order in θ . Using the latter equation for θ_0 one obtains

$$u_{ar} \approx - \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2}, \quad (\text{B18})$$

$$u_{a\theta} \approx \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \frac{1}{2 + r_{s0}} \theta, \quad (\text{B19})$$

$$u_{a\phi} \approx - \frac{1}{2 + r_{s0}} \theta, \quad (\text{B20})$$

$$\rho'_a \approx \left(\frac{1}{2r_{s0}} \right)^{1/2} \frac{1}{2 + r_{s0}}. \quad (\text{B21})$$

Also, the expansion for the wind density gives

$$\rho'_w \approx \left[\frac{A + B}{A + B/(2n + 1)} \right] \left(\frac{\alpha}{r_{s0}^2 u_w} \right). \quad (\text{B22})$$

Substituting the eqns. (B12) - (B22) into eqns. (31) - (35), one finds that the coefficients $b_{m2}(\tau) = b_{r2}(\tau) = b_{\theta1}(\tau) = b_{\phi1}(\tau) = r_{s1}(\tau) = r_{s2}(\tau) = 0$. In addition, one obtains a set of ordinary differential equations for the functions $b_{m1}(\tau)$, $b_{r1}(\tau)$, $b_{\theta2}(\tau)$, $b_{\phi2}(\tau)$, and $r_{s0}(\tau)$. These equations are,

$$\frac{db_{m1}}{d\tau} + \frac{2b_{\theta2}}{r_{s0}} = \alpha \left[\frac{A + B}{A + B/(2n + 1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) + \left(\frac{r_{s0}}{2 + r_{s0}} \right) \left(\frac{r_{s0}}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B23})$$

$$\frac{db_{r1}}{d\tau} + \frac{2b_{r1}b_{\theta2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{m1}}{r_{s0}^2} = \beta \left[\frac{A + B}{A + B/(2n + 1)} \right] \left(1 - \frac{\alpha b_{r1}}{\beta b_{m1}} \right) - \left(\frac{r_{s0}}{2 + r_{s0}} \right) \left[\frac{b_{r1}}{b_{m1}} + \left(\frac{2}{r_{s0}} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B24})$$

$$\frac{db_{\theta2}}{d\tau} - \frac{b_{\phi2}^2}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{b_{r1}b_{\theta2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{3b_{\theta2}^2}{b_{m1}r_{s0}} - \frac{(2r_{s0})^{1/2}}{(2 + r_{s0})^2} = \left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}} \right) \left[\frac{r_{s0}}{(2 + r_{s0})^2} \right], \quad (\text{B25})$$

$$\frac{db_{\phi2}}{d\tau} + \frac{b_{\phi2}b_{r1}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{4b_{\theta2}b_{\phi2}}{b_{m1}r_{s0}} + \frac{r_{s0}}{(2 + r_{s0})^2} = - \left(\frac{b_{r1}}{b_{m1}} \right) \left(\frac{r_{s0}}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{r_{s0}}{(2 + r_{s0})^2} \right], \quad (\text{B26})$$

and

$$\frac{dr_{s0}}{d\tau} = \frac{b_{r1}}{b_{m1}}. \quad (\text{B27})$$

The coefficients $b_{m1}(\tau)$, $b_{r1}(\tau)$, $b_{\theta2}(\tau)$, $b_{\phi2}(\tau)$, and $r_{s0}(\tau)$ are functions of the time (τ). The shell starts at an initial radius $r_{s0}(0)$, close to the stellar radius. Because initially the shell is massless, $b_{m1}(0) = b_{r1}(0) = b_{\theta2}(0) = b_{\phi2}(0) = 0$. Thus, to find the ratios of b_{r1}/b_{m1} , $b_{\theta2}/b_{m1}$, and $b_{\phi2}/b_{m1}$, we expand the coefficients to first order in τ for $\tau \ll 1$,

$$b_{m1} \approx c_m \tau, \quad (\text{B28})$$

$$b_{r1} \approx c_r \tau, \quad (\text{B29})$$

$$b_{\theta2} \approx c_{\theta} \tau, \quad (\text{B30})$$

$$b_{\phi2} \approx c_{\phi} \tau, \quad (\text{B31})$$

and

$$r_{s0} \approx r_{s0}(0) + c_{rs} \tau. \quad (\text{B32})$$

Substituting these equations in eqns. (B23) - (B27), one obtains c_m , c_r , c_θ , c_ϕ , and c_{rs} as function of the initial radius $r_{s0}(0)$ and the ratio

$$\lambda = \frac{c_r}{c_m}. \quad (\text{B33})$$

Then,

$$c_m = -\alpha \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} \lambda - 1 \right) + Q_1 \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B34})$$

$$c_r = -\beta \left[\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} \lambda - 1 \right) + Q_1 \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B35})$$

$$c_\theta = \frac{Q_1}{2+r_{s0}(0)} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B36})$$

$$c_\phi = -\frac{Q_1}{2+r_{s0}(0)} \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} \left[\lambda + \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} \right], \quad (\text{B37})$$

$$c_{rs} = \lambda, \quad (\text{B38})$$

where Q_1 is given by,

$$Q_1 = \frac{r_{s0}(0)}{2+r_{s0}(0)}. \quad (\text{B39})$$

One also obtains a quadratic equation for λ substituting eqns. (B34) and (B35) in eq. (B33),

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\alpha^2}{\beta} \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) - \left(\frac{r_{s0}(0)}{2} \right)^{1/2} Q_1 \right] \lambda^2 - 2 \left[\alpha \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) + Q_1 \right] \lambda \\ & + \beta \left(\frac{A+B}{A+B/(2n+1)} \right) - \left(\frac{2}{r_{s0}(0)} \right)^{1/2} Q_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B40})$$

Eqns. (B23) - (B27) are solved numerically for the coefficients b_{m1} , b_{r1} , $b_{\theta2}$, $b_{\phi2}$, and r_{s0} . The initial conditions are obtained from eqns. (B28) - (B32). The latter are evaluated at a very small non dimensional time, $\tau = 10^{-9}$. From the solution of these equations one finds BCs at the pole for the mass and momentum fluxes, and the shell radius as a function of time.

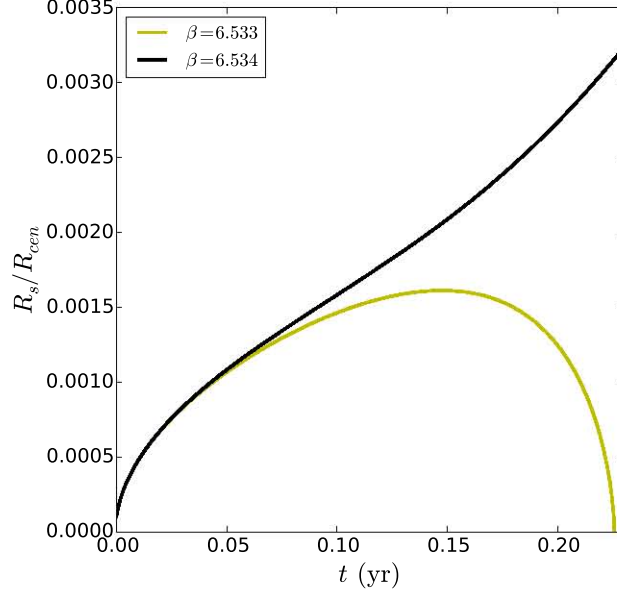
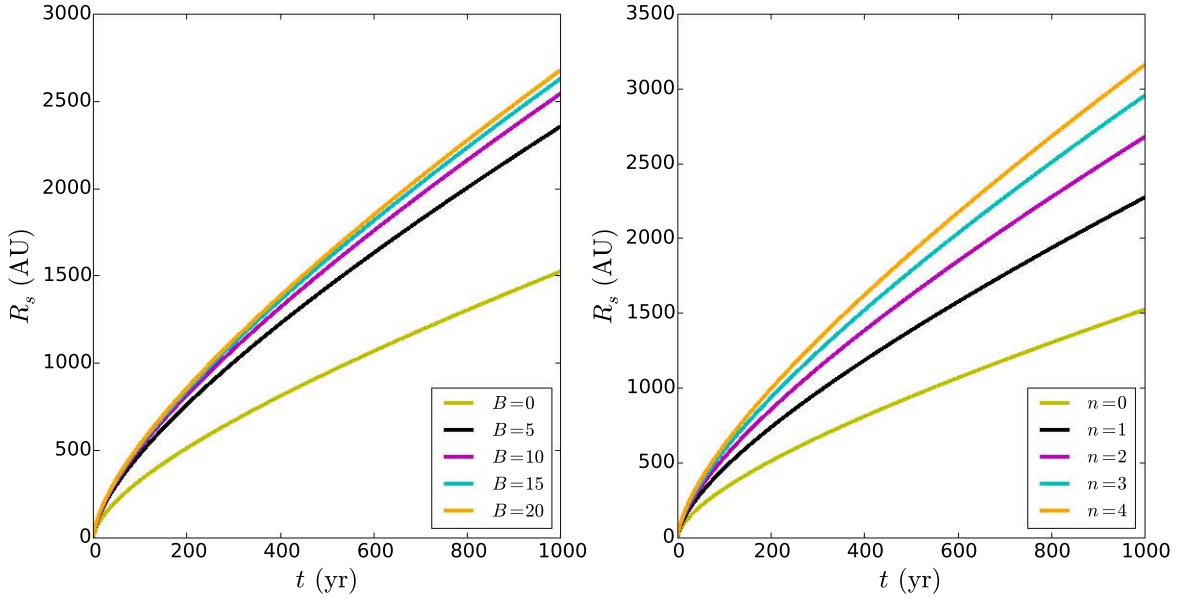
For the case of the isotropic stellar wind ($B = 0$ in eq. [16]), we explore the critical value of β required for the expansion of the shell. Table B1 shows the critical value β_{crit} , for different values of α and initial radius $r_{s0}(0)$. Figure B1 shows the shell radius at the pole for early times for a model with $\alpha = 0.1$, initial radius $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, and two cases: $\beta = \beta_{crit}$ and $\beta < \beta_{crit}$. In the former case, the shell always expands; in the latter case the shell collapses back onto the stellar surface.

To obtain β_{crit} , one takes into account the weight of the shell, the change of the radial momentum in the θ direction, and the momentum added to the shell by both the stellar wind and the accretion flow. If one neglects the weight of the shell for the models in Table B1, one obtains that a smaller value $\beta > 0.5$ is enough for the shell to expand.

Assuming $\alpha = 0.1$ and $\beta = 21$, Figure B2 shows the evolution of the shell radius for models with parameters $A = 1$ and $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter B (left panel), and models with parameters $A = 1$ and $B = 20$, and different values of the exponent n (right panel). This figure shows that the shell radius increases with the anisotropy parameter B and the exponent n . For the same models, Figure B3 shows the radial velocity at the pole (the shell expansion velocity). The radial velocity also increases with the anisotropy parameter B and the exponent n , and it tends to a constant value at large times. The θ and the azimuthal velocities at the pole are zero because $v_\theta = (b_{\theta2}/b_{m1})\theta$ and $v_\phi = (b_{\phi2}/b_{m1})\theta$ are linear functions of θ .

Table B1. Values of β_{crit} for different values of α and initial radius $r_{s0}(0)$.

α	$r_{s0}(0)$	10^{-5}	5×10^{-5}	10^{-4}
	0.01		2.061	0.972
0.10		20.084	9.140	6.534
0.50		99.732	45.085	32.023

**Figure B1.** Evolution of the shell radius R_s at the pole for an isotropic stellar wind ($B = 0$) and parameters $\alpha = 0.1$ and an initial radius $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. The shell expands for $\beta_{\text{crit}} = 6.534$ (black line) and the shell collapses for $\beta < \beta_{\text{crit}}$ (yellow line, see Table B1).**Figure B2.** Radius of the shell at the pole $\theta = 0$ as a function of time for the parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, and $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Left panel: stellar winds with $A = 1$, $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter $B = 0, 5, 10, 15,$ and 20 . Right panel: anisotropic stellar winds with $A = 1$, $B = 20$, and different exponents $n = 0, 1, 2, 3,$ and 4 .

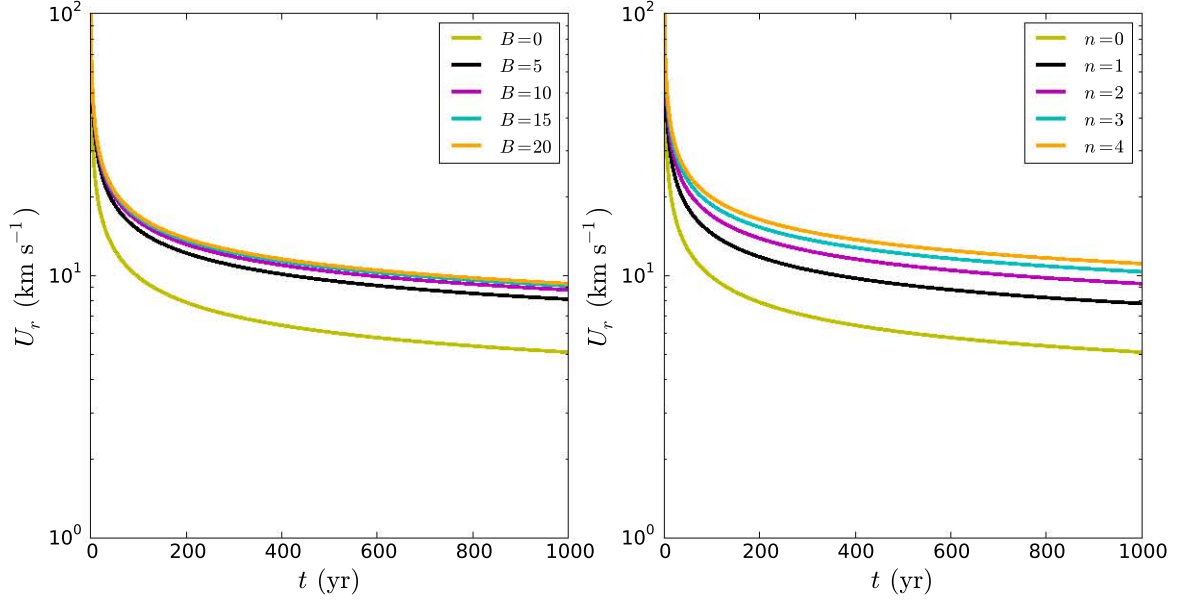


Figure B3. Radial velocity of the shell at the pole $\theta = 0$ as a function of time for the parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, and $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Left panel: stellar winds with $A = 1$, $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter $B = 0, 5, 10, 15$, and 20 . Right panel: anisotropic stellar winds with $A = 1$, $B = 20$, and different exponents $n = 0, 1, 2, 3$, and 4 .

C. RADIUS AND VELOCITIES AROUND THE EQUATOR

Around the equator the mass and the momentum fluxes and the radius are expanded as power series around the angle $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta$. These expansions are

$$p_m \approx q_{m0} + q_{m1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{C41})$$

$$p_r \approx q_{r0} + q_{r1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{C42})$$

$$p_\theta \approx q_{\theta0} + q_{\theta1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{C43})$$

$$p_\phi \approx q_{\phi0} + q_{\phi1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{C44})$$

and

$$r_s \approx q_{rs0} + q_{rs1} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) - \theta \right], \quad (\text{C45})$$

where $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta \ll 1$.

The expansion in Taylor's series to first order around the angle $(\frac{\pi}{2} - \eta) - \theta$ of the velocity field and the density of the accretion flow gives

$$u_{ar} \approx - \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{C46})$$

$$u_{a\theta} \approx \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_0 - \sin \eta}{\cos \eta} \right), \quad (\text{C47})$$

$$u_{a\phi} \approx - \left[\left(\frac{1}{q_{rs0}} \right) \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2} \left(\frac{\sin \theta_0}{\cos \eta} \right), \quad (\text{C48})$$

and

$$\rho'_a \approx \frac{1}{(q_{rs0} - 1 + 3 \cos^2 \theta_0) \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}} \left(\frac{1}{q_{rs0}}\right)^{1/2}, \quad (\text{C49})$$

where θ_0 is obtained from the eq. (14).

The wind density is

$$\rho'_w \approx \left[\frac{A + B \sin^{2n} \eta}{A + B/(2n + 1)} \right] \frac{\alpha^2}{q_{rs0}^2 u_{wr}}. \quad (\text{C50})$$

Substituting eqns. (C41) - (C45), the velocity field and the density of the accretion flow, and the density of the stellar wind given in eqns. (C46) - (C50), into eqns. (31) - (35), one obtains a set of differential equations for the coefficients

$$\frac{dq_{m0}}{d\tau} + f_{m0,1} = f_{m0,2}, \quad (\text{C51})$$

$$\frac{dq_{m1}}{d\tau} + f_{m1,1} = f_{m1,2}. \quad (\text{C52})$$

$$\frac{dq_{r0}}{d\tau} + f_{r0,1} = f_{r0,2}, \quad (\text{C53})$$

$$\frac{dq_{r1}}{d\tau} + f_{r1,1} = f_{r1,2}, \quad (\text{C54})$$

$$\frac{dq_{\theta 0}}{d\tau} + f_{\theta 0,1} = f_{\theta 0,2}, \quad (\text{C55})$$

$$\frac{dq_{\theta 1}}{d\tau} + f_{\theta 1,1} = f_{\theta 1,2}, \quad (\text{C56})$$

$$\frac{dq_{\phi 0}}{d\tau} + f_{\phi 0,1} = f_{\phi 0,2}, \quad (\text{C57})$$

$$\frac{dq_{\phi 1}}{d\tau} + f_{\phi 1,1} = f_{\phi 1,2}, \quad (\text{C58})$$

$$\frac{dq_{rs0}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} + \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (\text{C59})$$

and

$$\frac{dq_{rs1}}{d\tau} = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} \left(\frac{q_{r1}}{q_{r0}} - \frac{q_{m1}}{q_{m0}} \right) - \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \left(\frac{q_{m1}}{q_{m0}} - \frac{q_{\theta 1}}{q_{\theta 0}} + \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} \right), \quad (\text{C60})$$

where the functions $f_{ai,j}$ are given by

$$f_{m0,1} = P_2 T_3, \quad (\text{C61})$$

$$f_{m0,2} = -\cos \eta \left[\alpha \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n + 1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) - \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4}{\Gamma_2} \right], \quad (\text{C62})$$

$$f_{m1,1} = q_{rs0} P_4 \cos \eta \left[\frac{q_{rs0}^{1/2}}{\Gamma_2} \left(\frac{T_1 \Gamma_2}{2q_{rs0}^{1/2}} + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_1 \Gamma_2} \right) + \frac{P_3}{2\Gamma_2} \left(-q_{rs0}^{1/2} T_1 - \frac{q_{rs0}^{1/2}}{\Gamma_1 \Gamma_2^2} \left(\frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1} - \cos \eta \right) \right) \right], \quad (C63)$$

$$f_{m1,2} = -\cos \eta \left[\frac{\alpha}{A + B/(2n+1)} \left(B \cos \eta \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} P_1 T_4 (B \sin \eta + 1) \right) + \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4^2}{\Gamma_2} (T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4) \right] + 2P_2 T_1 T_3 + \sin \eta \left[\alpha \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n+1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) - \frac{q_{rs0}^{3/2} P_3 P_4}{\Gamma_2} \right], \quad (C64)$$

$$f_{r0,1} = \frac{q_{m0}}{q_{rs0}^2} - \frac{q_{\theta 0}^2 + q_{\phi 0}^2}{q_{m0} q_{rs0}} + P_1 P_2 (T_3 - T_4), \quad (C65)$$

$$f_{r0,2} = -\cos \eta \left[\beta \left(\frac{A + B \sin \eta}{A + B/(2n+1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \right], \quad (C66)$$

$$f_{r1,1} = \frac{q_{m0}}{q_{rs0}^2} (T_2 - 3T_1) + q_{r0} T_8 + 2P_1 P_2 T_3 T_5 + \frac{T_2 (q_{\theta 0}^2 + q_{\phi 0}^2) - 2(q_{\theta 0} q_{\theta 1} + q_{\phi 0} q_{\phi 1} + q_{r1} q_{\theta 1})}{q_{m0} q_{rs0}}, \quad (C67)$$

$$f_{r1,2} = \cos \eta \left[-\frac{\beta}{1 + A/(2n+1)} \left(A \cos \eta \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + \frac{\alpha}{\beta} P_1 T_4 (1 + A \sin \eta) \right) + q_{rs0} P_3 P_4^2 (T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4) \right] - \frac{q_{rs0}^{1/2} P_4 \cos \eta}{2} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) + \sin \eta \left[\beta \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} P_1 - 1 \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \right], \quad (C68)$$

$$f_{\theta 0,1} = P_2 \left(P_1 + \frac{q_{\theta 0}}{q_{m0}} T_2 \right) - \frac{2q_{\theta 0} q_{\theta 1} + q_{\phi 0}^2 \tan \eta}{q_{m0} q_{rs0}}, \quad (C69)$$

$$f_{\theta 0,2} = (\Gamma_1 - \sin \eta) q_{rs0} P_3 P_4, \quad (C70)$$

$$f_{\theta 1,1} = \frac{4q_{\theta 0} q_{\theta 1} T_2 - (2q_{\theta 1}^2 + q_{\phi 0}^2) + \tan \eta [q_{\phi 0}^2 (T_2 - \tan \eta) - 2q_{\phi 0} q_{\phi 1}]}{q_{m0} q_{rs0}} + q_{rs0} P_3 P_4^2 (\Gamma_1 - \sin \eta) [T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4], \quad (C71)$$

$$f_{\theta 1,2} = P_1 P_2 (T_2 - T_5) - q_{\theta 0} T_8 - q_{rs0} P_4 \left[P_3 (\cos \eta - \Gamma_4) + \frac{\Gamma_1 - \sin \eta}{2q_{rs0}^{1/2}} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) \right], \quad (C72)$$

$$f_{\phi 0,1} = q_{\phi 0} \left[\frac{P_1}{q_{rs0}} + \frac{P_2}{q_{m0}} (T_2 - T_7 + \tan \eta) \right], \quad (C73)$$

$$f_{\phi 0,2} = -\frac{q_{rs0} P_3 P_4 \Gamma_3 \sin \theta_0}{\Gamma_2}, \quad (C74)$$

$$f_{\phi 1,1} = q_{\phi 0} \left(T_8 + \frac{2P_2 T_2 T_7}{q_{m0}} \right) + \frac{q_{\theta 0} q_{\phi 0} - q_{r0} q_{\phi 0} (T_2 - T_6) - 2q_{\theta 1} q_{\phi 1}}{q_{m0} q_{rs0}} + \frac{q_{\phi 0} P_2 \tan \eta}{q_{m0}} (T_7 - T_2 + \tan \eta), \quad (C75)$$

and

$$f_{\phi 1,2} = \frac{q_{rs0} \sin \theta_0 P_3 P_4^2}{\Gamma_2} [T_1 (1 - 3\Gamma_1^2) + 6\Gamma_1 \Gamma_4] + \frac{q_{rs0} \sin \theta_0 P_4 \Gamma_3}{2q_{rs0}^{1/2} \Gamma_2} \left(T_1 \Gamma_2 + \frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1^2 \Gamma_2} - 2q_{rs0}^{1/2} P_1 T_4 - \frac{\cos \eta}{\Gamma_1 \Gamma_2} \right) + q_{rs0} P_3 P_4 \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_3 \Gamma_4}{\sin \theta_0 \Gamma_2} - \frac{\sin \theta_0}{2\Gamma_1 \Gamma_2} \left(\frac{\Gamma_3}{\Gamma_2^2} + \frac{1}{\Gamma_3} \right) \left(\frac{\sin \eta \Gamma_4}{\Gamma_1} - \cos \eta \right) \right]. \quad (C76)$$

In these equations the functions Γ_i are defined as

$$\Gamma_1 = \cos \theta_0, \quad (C77)$$

$$\Gamma_2 = \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (C78)$$

$$\Gamma_3 = \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (C79)$$

and

$$\Gamma_4 = q_{rs1} \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r} - \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial \theta}. \quad (C80)$$

In the above equation, the partial derivatives of $\cos \theta_0$ are obtained writing eq. (14) as

$$\cos^3 \theta_0 + \left(\frac{1}{\zeta} - 1 \right) \cos \theta_0 - \frac{1}{\zeta} \cos \theta = 0, \quad (C81)$$

where $\zeta = 1/r_s$, and are given by

$$\frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r_s} = \frac{\cos \theta - \cos \theta_0}{\cos^2 \theta_0 + r_s - 1}, \quad (C82)$$

$$\frac{\partial \cos \theta_0}{\partial \theta} = -\frac{r_s \sin \theta}{3 \cos^2 \theta_0 + r_s - 1}. \quad (C83)$$

The functions P_i are given by

$$P_1 = \frac{q_{r0}}{q_{m0}}, \quad (C84)$$

$$P_2 = \frac{q_{\theta 0}}{q_{rs0}}, \quad (C85)$$

$$P_3 = \frac{q_{r0}}{q_{m0}} + \frac{\Gamma_2}{q_{rs0}}, \quad (C86)$$

and

$$P_4 = \frac{1}{q_{rs0} - 1 + \Gamma_2}. \quad (C87)$$

Finally, the functions T_i can be written as

$$T_1 = \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (C88)$$

$$T_2 = \frac{q_{m1}}{q_{m0}} + \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}}, \quad (C89)$$

$$T_3 = \frac{q_{rs1}}{q_{rs0}} - \frac{q_{\theta 1}}{q_{\theta 0}}, \quad (C90)$$

$$T_4 = \frac{q_{r1}}{q_{r0}} - \frac{q_{m1}}{q_{m0}}, \quad (\text{C91})$$

$$T_5 = \frac{q_{r1}}{q_{r0}} + \frac{q_{\theta1}}{q_{\theta0}}, \quad (\text{C92})$$

$$T_6 = \frac{q_{r1}}{q_{r0}} + \frac{q_{\phi1}}{q_{\phi0}}, \quad (\text{C93})$$

$$T_7 = \frac{q_{\theta1}}{q_{\theta0}} + \frac{q_{\phi1}}{q_{\phi0}}, \quad (\text{C94})$$

$$T_8 = -\frac{2q_{\theta0}}{q_{m0}^3 q_{rs0}^3} (q_{m1}^2 q_{rs0}^2 + q_{m0} q_{m1} q_{rs0} q_{rs1} + q_{m1}^2 q_{rs1}^2). \quad (\text{C95})$$

The coefficients $q_{m0}(\tau)$, $q_{m1}(\tau)$, $q_{r0}(\tau)$, $q_{r1}(\tau)$, $q_{\theta0}(\tau)$, $q_{\theta1}(\tau)$, $q_{\phi0}(\tau)$, $q_{\phi1}(\tau)$, $q_{rs0}(\tau)$, and $q_{rs1}(\tau)$ are functions of the time (τ). The shell starts at an equatorial radius $q_{rs0}(0) = r_{s0}(0)$ close to the star. Initially the shell is massless, so $q_{m0}(0) = q_{m1}(0) = q_{r0}(0) = q_{r1}(0) = q_{\theta0}(0) = q_{\theta1}(0) = q_{\phi0}(0) = q_{\phi1}(0) = q_{rs1}(0) = 0$. Thus, to obtain the ratios between the coefficients q_{ai} , one expands them for early times $\tau \ll 1$,

$$q_{m0} \approx e_{m0}\tau, \quad (\text{C96})$$

$$q_{m1} \approx e_{m1}\tau, \quad (\text{C97})$$

$$q_{r0} \approx e_{r0}\tau, \quad (\text{C98})$$

$$q_{r1} \approx e_{r1}\tau, \quad (\text{C99})$$

$$q_{\theta0} \approx e_{\theta0}\tau, \quad (\text{C100})$$

$$q_{\theta1} \approx e_{\theta1}\tau, \quad (\text{C101})$$

$$q_{\phi0} \approx e_{\phi0}\tau, \quad (\text{C102})$$

$$q_{\phi1} \approx e_{\phi1}\tau, \quad (\text{C103})$$

$$q_{rs0} \approx r_{s0}(0) + e_{rs0}\tau, \quad (\text{C104})$$

and

$$q_{rs1} \approx e_{rs1}\tau. \quad (\text{C105})$$

Substituting these equations into eqns. (C51) - (C60), one obtains

$$e_{m0} = -\cos \eta \left[\alpha \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \Lambda - 1 \right) - \frac{r_{s0}(0)^{3/2} Q_2}{\gamma_2} (\Lambda + Q_1) \right], \quad (\text{C106})$$

$$e_{r0} = -\cos \eta \left[\beta \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \Lambda - 1 \right) + r_{s0}(0) Q_2 (\Lambda + Q_1) \right], \quad (\text{C107})$$

$$e_{\theta 0} = r_{s0}(0)Q_2 (\gamma_1 - \sin \eta) (\Lambda + Q_1), \quad (\text{C108})$$

$$e_{\phi 0} = -\frac{r_{s0}(0) \sin \theta_0 \gamma_3 Q_2 (\Lambda + Q_1)}{\gamma_2}, \quad (\text{C109})$$

$$e_{rs0} = \Lambda, \quad (\text{C110})$$

$$e_{m1} = -\frac{r_{s0}(0)e_{m0}^2}{e_{\theta 0}^2} \left[\frac{e_{\theta 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda - \frac{2e_{\theta 0}e_{\theta 1} + e_{\phi 0}^2 \tan \eta}{e_{m0}r_{s0}(0)} + \frac{r_0^{1/2}Q_2}{2} \Lambda (\gamma_1 - \sin \eta) \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \right] \\ + \Lambda Q_2 \left(\frac{r_{s0}(0)e_{m0}^2}{e_{\theta 0}^2} \right) (\Lambda + Q_1) [r_{s0}(0)\gamma_4 + Q_2 (\gamma_1 - \sin \eta) (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4)], \quad (\text{C111})$$

$$e_{r1} = \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \left[\frac{e_{\theta 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda - \frac{e_{\theta 0}^2 + e_{\phi 0}^2}{r_{s0}(0)e_{m0}} + \frac{e_{\theta 0}\Lambda}{r_{s0}(0)} \left(\frac{e_{m1}}{e_{m0}} - \frac{e_{\theta 1}}{e_{\theta 0}} \right) \right] \\ + \cos \eta Q_2 \Lambda \left(\frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \right) \left[Q_2 (\Lambda + Q_1) (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) - \frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{2} \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\sin \eta \gamma_4}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \right], \quad (\text{C112})$$

$$e_{\theta 1} = \frac{r_{s0}(0)Q_2\Lambda \cos \eta}{2} \left[1 + \frac{r_{s0}(0)\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \right. \\ \left. - (\Lambda + Q_1) \left(\frac{r_{s0}(0)^{3/2}\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + \frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{\gamma_2} + \frac{2r_{s0}(0)^{1/2}Q_2}{\gamma_2} (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) \right) \right], \quad (\text{C113})$$

$$e_{\phi 1} = \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \left[\frac{e_{\phi 0}}{r_{s0}(0)} \Lambda + \frac{e_{\theta 0}e_{\phi 0}}{r_{s0}(0)e_{m0}} \left(\frac{e_{m1}}{e_{m0}} - \frac{e_{\theta 1}}{e_{\theta 0}} \tan \eta \right) - \frac{r_{s0}(0)^{1/2}Q_2\gamma_3\Lambda \sin \theta_0}{2\gamma_2} \left(\frac{\gamma_2}{r_{s0}(0)} + \frac{\gamma_4 \sin \eta}{\gamma_1^2 \gamma_2} \right) \right] + \frac{r_{s0}(0)e_{m0}}{e_{\theta 0}} \\ \times (\Lambda + Q_1) \left[\frac{r_{s0}(0)Q_2\Lambda\gamma_4 \sin \theta_0 \sin \eta}{2\gamma_1^2 \gamma_3} + \frac{1}{\gamma_2} \left(Q_2 \sin \theta_0 (3\gamma_1^2 - 1 - 6r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4) - \frac{r_{s0}(0)\gamma_1\gamma_4}{\sin \theta_0} \right) \right], \quad (\text{C114})$$

$$e_{rs1} = \Lambda \left(\frac{e_{r1}}{e_{r0}} - \frac{e_{m1}}{e_{m0}} \right), \quad (\text{C115})$$

where

$$\Lambda \equiv \frac{e_{r0}}{e_{m0}}. \quad (\text{C116})$$

The functions Q_1 , Q_2 , and γ_i are given by

$$Q_1 = \frac{1}{r_{s0}(0)^{1/2}} \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{C117})$$

$$Q_2 = \frac{1}{r_{s0}(0) - 1 + 3 \cos^2 \theta_0}, \quad (\text{C118})$$

$$\gamma_1 = \cos \theta_0, \quad (\text{C119})$$

$$\gamma_2 = \left(1 + \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0} \right)^{1/2}, \quad (\text{C120})$$

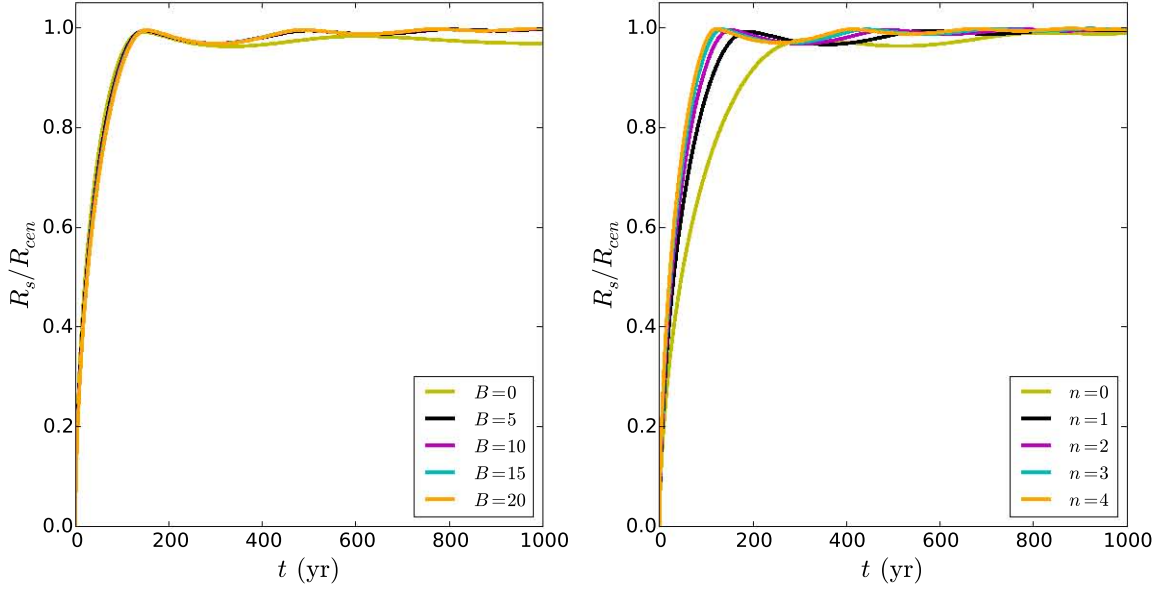


Figure C4. Normalized radius at the equator ($\eta = 0$) as a function of time for the parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, and $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Left panel: stellar winds with $A = 1$, $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter $B = 0, 5, 10, 15$, and 20 . Right panel: anisotropic stellar winds with $A = 1$, $B = 20$, and different exponents $n = 0, 1, 2, 3$, and 4 .

$$\gamma_3 = \left(1 - \frac{\sin \eta}{\cos \theta_0}\right)^{1/2}, \quad (\text{C121})$$

and

$$\gamma_4 = \frac{\partial \cos \theta_0}{\partial r_s}. \quad (\text{C122})$$

Substituting eqns. (C106) and (C107) in eq. (C116), one obtains a quadratic function for Λ

$$\left[\frac{\alpha^2}{\beta} \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right) - \frac{r_{s0}(0)^{3/2}}{\gamma_2} Q_2 \right] \Lambda^2 - \left[2\alpha \left(\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right) + r_{s0}(0) Q_2 \left(\frac{r_{s0}(0)^{1/2}}{\gamma_2} Q_1 + 1 \right) \right] \Lambda + \beta \left[\frac{1 + A \sin \eta}{1 + A/(2n+1)} \right] - r_{s0}(0) Q_1 Q_2 = 0. \quad (\text{C123})$$

Solving numerically eqns. (C51) - (C60) with initial conditions given by eqns. (C96) - (C105) for small τ ($\tau = 10^{-9}$), one finds the values of the coefficients q_{m0} , q_{m1} , q_{r0} , q_{r1} , $q_{\theta 0}$, $q_{\theta 1}$, $q_{\phi 0}$, $q_{\phi 1}$, q_{rs0} , and q_{rs1} . Thus, one obtains BCs at the equator for the mass and the momentum fluxes, and the radius as a function of time.

Assuming $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, and $r_{s0}(0) = 10^{-4}$, Figure C4 shows the evolution of the normalized shell radius for models with parameters $A = 1$ and $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter B (left panel), and models with parameters $A = 1$ and $B = 20$, and different values of exponent n (right panel). This figure shows that the normalized shell radius grows to a stagnation point at the centrifugal radius. For the same models, Figure C5 shows from left to right, the radial, the θ , and the azimuthal velocities at the equator. With small oscillations, the radial and θ velocities tend to be a constant value, while the azimuthal velocity decreases with time.

D. MODELS OF WILKIN & STAHLER

We compare our models with the outflow models of Wilkin & Stahler (2003) for an isotropic stellar wind ($B = 0$). The parameters of the model in their Figure 5 are as follows: a ratio of the wind mass loss rate and the accretion rate $\alpha = 1/3$, a wind velocity $v_w = 159 \text{ km s}^{-1}$, a stellar radius $R_* = 3 R_\odot$, an angular speed of the rotating envelope $\Omega = 2 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$, and a sound speed $a_0 = 0.2 \text{ km s}^{-1}$.

We recover the parameters we use in our model in the following way: from their eq. [1], the mass accretion rate is $\dot{M}_a = 1.85 \times 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Thus, the stellar mass, given by their eq. [9], is $M_* = 0.07 M_\odot$. From their eq. [2], the angular and sound speeds give a centrifugal radius $R_{cen} = 0.055 \text{ AU}$. The ratio of the wind and the accretion momentum

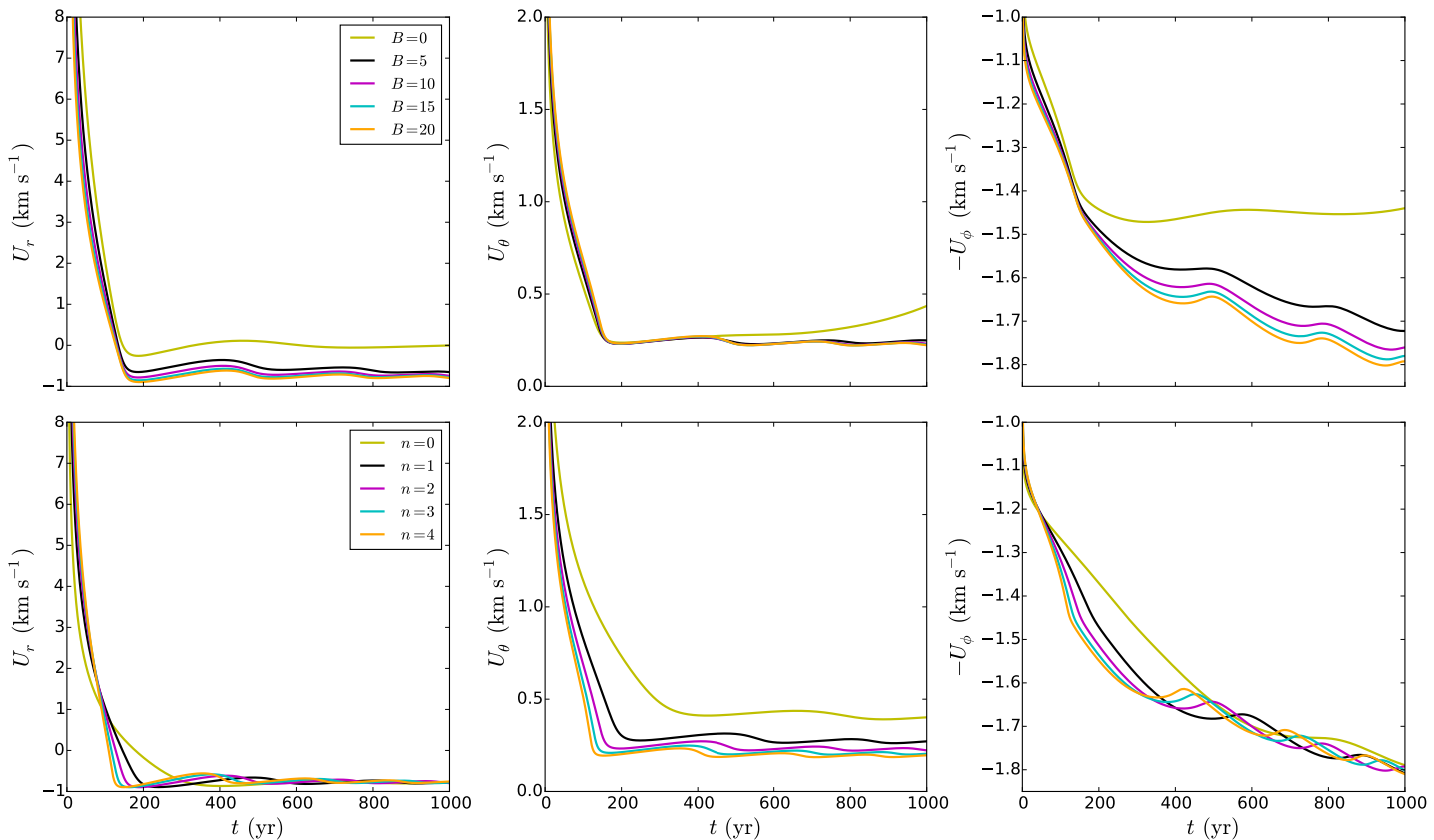


Figure C5. Velocity field of the shell at the equator ($\eta = 0$) as a function of time for the parameters $\alpha = 0.1$, $\beta = 21$, and $r_{s0}(0) = 10^{-4}$. Top panels: the radial (left panel), the θ (middle panel), and the azimuthal (right panel) velocities of the shell for stellar winds with $A = 1$, $n = 2$, and different values of the anisotropy parameter $B = 0, 5, 10, 15$, and 20 . Bottom panels: the radial (left panel), the θ (middle panel), and the azimuthal (right panel) velocities of the shell for anisotropic stellar winds with $A = 1$, $B = 20$, and different exponents $n = 0, 1, 2, 3$, and 4 .

rates β is given by $\beta = \alpha v_w / v_0 = 1.57$, where $v_0 = (GM_*/R_{\text{cen}})^{1/2} = 33.8 \text{ km s}^{-1}$. Finally, the nondimensional time (eq. [18]) is $\Delta\tau = 2.03(\Delta t/0.016 \text{ yr})$. We also assume a disk as a boundary condition in the equatorial region with an angle $\eta = 5^\circ$.

The results for this integration are plotted in figure D6. The shell sizes at the pole are the same as the models in Figure (5) of Wilkin & Stahler (2003). Nevertheless, the boundary conditions of both models at the disk surface are different. In our model, the BC is that the shell radius on the disk surface cannot be larger than the centrifugal radius R_{cen} . In their model, the shell expands continuously beyond the centrifugal radius.

REFERENCES

- Anderson, J. M., Li, Z.-Y., Krasnopolsky, R., & Blandford, R. D. 2003, *ApJL*, 590, L107
- Arce, H. G., Shepherd, D., Gueth, F., et al. 2007, *Protostars and Planets V*, 245
- Bally, J. 2016, *ARA&A*, 54, 491
- Bachiller, R. 1996, *ARA&A*, 34, 111
- Blandford, R. D., & Payne, D. G. 1982, *MNRAS*, 199, 883
- Bontemps, S., Andre, P., Terebey, S., & Cabrit, S. 1996, *A&A*, 311, 858
- Cantó, J., Raga, A. C., & Adame, L. 2006, *MNRAS*, 369, 860
- De Colle, F., Cerqueira, A. H., & Riera, A. 2016, *ApJ*, 832, 152
- Ellerbroek, L. E., Podio, L., Kaper, L., et al. 2013, *A&A*, 551, A5
- Hirota, T., Machida, M. N., Matsushita, Y., et al. 2017, *Nature Astronomy*, 1, 0146
- Hartigan, P., Raymond, J., & Hartmann, L. 1987, *ApJ*, 316, 323
- Königl, A., & Pudritz, R. E. 2000, *Protostars and Planets IV*, 759
- Launhardt, R., Pavlyuchenkov, Y., Gueth, F., et al. 2009, *A&A*, 494, 147
- Launhardt, R., & Sargent, A. I. 2001, *ApJL*, 562, L173
- Lee, C.-F., Hirano, N., Palau, A., et al. 2009, *ApJ*, 699, 1584
- Lee, C.-F., Ho, P. T. P., Li, Z.-Y., et al. 2017, *Nature Astronomy*, 1, 0152
- Lee, C.-F., Li, Z.-Y., Codella, C., et al. 2018, *ApJ*, 856, 14
- Louvet, F., Dougados, C., Cabrit, S., et al. 2018, *A&A*, 618, A120
- Matzner, C. D., & McKee, C. F. 1999, *ApJL*, 526, L109
- Mendoza, S., Cantó, J., & Raga, A. C. 2004, *RMxAA*, 40, 147
- Pech, G., Zapata, L. A., Loinard, L., & Rodríguez, L. F. 2012, *ApJ*, 751, 78

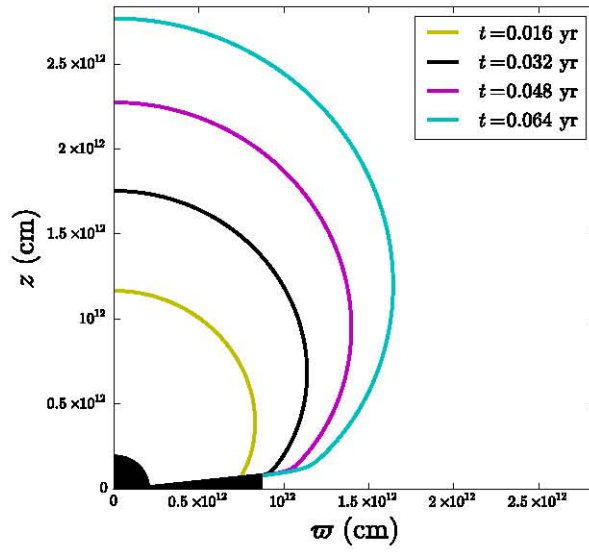


Figure D6. Shape of the shell for the same parameters of [Wilkin & Stahler \(2003\)](#) for different time steps.

Pudritz, R. E., & Norman, C. A. 1983, *ApJ*, 274, 677

Pudritz, R. E., & Norman, C. A. 1986, *ApJ*, 301, 571

Shu, F., Najita, J., Galli, D., Ostriker, E., & Lizano, S. 1993, *Protostars and Planets III*, 3

Shu, F., Najita, J., Ostriker, E., et al. 1994, *ApJ*, 429, 781

Shu, F. H., Najita, J. R., Shang, H., & Li, Z.-Y. 2000, *Protostars and Planets IV*, 789

Shu, F. H., Ruden, S. P., Lada, C. J., & Lizano, S. 1991, *ApJL*, 370, L31

Snell, R. L., Loren, R. B., & Plambeck, R. L. 1980, *ApJL*, 239, L17

Ulrich, R. K. 1976, *ApJ*, 210, 377

Wilkin, F. P., & Stahler, S. W. 2003, *ApJ*, 590, 917

Zapata, L. A., Lizano, S., Rodríguez, L. F., et al. 2015, *ApJ*, 798, 131

Zapata, L. A., Schmid-Burgk, J., Muders, D., et al. 2010, *A&A*, 510, A2

Zhang, Y., Higuchi, A. E., Sakai, N., et al. 2018, *ApJ*, 864, 76

Bibliografía

- Adams, F. C., Lada, C. J., & Shu, F. H. 1987, *ApJ*, 312, 788
- Anderson, J. M., Li, Z.-Y., Krasnopolsky, R., & Blandford, R. D. 2003, *ApJ*, 590, L107
- André, P., Ward-Thompson, D., & Barsony, M. 1993, *ApJ*, 406, 122
- Arce, H. G., & Goodman, A. A. 2002, *ApJ*, 575, 928
- Arce, H. G., Shepherd, D., Gueth, F., et al. 2007, *Protostars and Planets V*, 245
- Bachiller, R. 1996, *ARA&A*, 34, 111
- Bally, J. 2016, *ARA&A*, 54, 491
- Blandford, R. D., & Payne, D. G. 1982, *MNRAS*, 199, 883
- Bontemps, S., André, P., Terebey, S., & Cabrit, S. 1996, *A&A*, 311, 858
- Cantó, J., & Raga, A. C. 1991, *ApJ*, 372, 646
- Cantó, J., Raga, A. C., & Adame, L. 2006, *MNRAS*, 369, 860
- Cantó, J., Raga, A. C., & Wilkin, F. P. 1996, *ApJ*, 469, 729
- Carrasco-González, C., Rodríguez, L. F., Anglada, G., et al. 2010, *Science*, 330, 1209
- Cohen, M., & Kuhl, L. V. 1979, *ApJS*, 41, 743
- Davis, C. J., Berndsen, A., Smith, M. D., et al. 2000, *MNRAS*, 314, 241
- De Colle, F., Cerqueira, A. H., & Riera, A. 2016, *ApJ*, 832, 152
- Ellerbroek, L. E., Podio, L., Kaper, L., et al. 2013, *A&A*, 551, A5
- Estalella, R., López, R., Anglada, G., et al. 2012, *AJ*, 144, 61
- Garay, G., & Lizano, S. 1999, *PASP*, 111, 1049
- Ginsburg, A., Bally, J., Goddi, C., Plambeck, R., & Wright, M. 2018, *ApJ*, 860, 119
- Girard, T., & Willson, L. A. 1987, *A&A*, 183, 247
- Girart, J. M., Fernández-López, M., Li, Z.-Y., et al. 2018, *ApJ*, 856, L27
- Gomez, M., Whitney, B. A., & Kenyon, S. J. 1997, *AJ*, 114, 1138
- Greenhill, L. J., Goddi, C., Chandler, C. J., Matthews, L. D., & Humphreys, E. M. L. 2013, *ApJ*, 770, L32

- Greenhill, L. J., Gwinn, C. R., Schwartz, C., Moran, J. M., & Diamond, P. J. 1998, *Nature*, 396, 650
- Haro, G. 1952, *ApJ*, 115, 572
- Hartigan, P., Raymond, J., & Hartmann, L. 1987, *ApJ*, 316, 323
- Herbig, G. H. 1951, *ApJ*, 113, 697
- Hirota, T., Kim, M. K., & Honma, M. 2016, *ApJ*, 817, 168
- Hirota, T., Kim, M. K., Kurono, Y., & Honma, M. 2014, *ApJ*, 782, L28
- Hirota, T., Machida, M. N., Matsushita, Y., et al. 2017, *Nature Astronomy*, 1, 0146
- Huang, R. Q., & Weigert, A. 1982, *A&A*, 112, 281
- Kenyon, S. J., & Hartmann, L. 1995, *ApJS*, 101, 117
- Kim, M. K., Hirota, T., Honma, M., et al. 2008, *PASJ*, 60, 991
- Kraus, S., Hofmann, K.-H., Benisty, M., et al. 2008, *A&A*, 489, 1157
- Königl, A., & Pudritz, R. E. 2000, *Protostars and Planets IV*, 759
- Lada, C. J. 1987, *Star Forming Regions*, 115, 1
- Launhardt, R., Pavlyuchenkov, Y., Gueth, F., et al. 2009, *A&A*, 494, 147
- Launhardt, R., & Sargent, A. I. 2001, *ApJ*, 562, L173
- Lee, C.-F., Hirano, N., Palau, A., et al. 2009, *ApJ*, 699, 1584
- Lee, C.-F., Ho, P. T. P., Li, Z.-Y., et al. 2017, *Nature Astronomy*, 1, 0152
- Lee, C.-F., Li, Z.-Y., Codella, C., et al. 2018, *ApJ*, 856, 14
- Li, Y., Xu, Y., Sun, Y., et al. 2019, *ApJS*, 242, 19
- Louvet, F., Dougados, C., Cabrit, S., et al. 2018, *A&A*, 618, A120
- Masson, C. R., & Chernin, L. M. 1993, *ApJ*, 414, 230
- Matsushita, Y., Takahashi, S., Machida, M. N., et al. 2019, *ApJ*, 871, 221
- Matzner, C. D., & McKee, C. F. 1999, *ApJ*, 526, L109
- Maud, L. T., Moore, T. J. T., Lumsden, S. L., et al. 2015, *MNRAS*, 453, 645
- Mendoza, S., Cantó, J., & Raga, A. C. 2004, *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 40, 147
- Menten, K. M., & Reid, M. J. 1995, *ApJ*, 445, L157
- Mottram, J. C., Kristensen, L. E., van Dishoeck, E. F., et al. 2014, *A&A*, 572, A21
- Patel, N. A., Curiel, S., Sridharan, T. K., et al. 2005, *Nature*, 437, 109
- Pech, G., Zapata, L. A., Loinard, L., & Rodríguez, L. F. 2012, *ApJ*, 751, 78
- Plambeck, R. L., & Wright, M. C. H. 2016, *ApJ*, 833, 219

- Plambeck, R. L., Wright, M. C. H., Friedel, D. N., et al. 2009, *ApJ*, 704, L25
- Pudritz, R. E., & Norman, C. A. 1983, *ApJ*, 274, 677
- Pudritz, R. E., & Norman, C. A. 1986, *ApJ*, 301, 571
- Pudritz, R. E., Ouyed, R., Fendt, C., & Brandenburg, A. 2007, *Protostars and Planets V*, 277
- Raga, A., & Cabrit, S. 1993, *A&A*, 278, 267
- Raga, A. C., Cantó, J., Binette, L., & Calvet, N. 1990, *ApJ*, 364, 601
- Raga, A. C., Cantó, J., Calvet, N., Rodríguez, L. F., & Torrelles, J. M. 1993, *A&A*, 276, 539
- Reid, M. J., Menten, K. M., Greenhill, L. J., & Chandler, C. J. 2007, *ApJ*, 664, 950
- Reipurth, B., & Bally, J. 2001, *ARA&A*, 39, 403
- Rodríguez, L. F., Ho, P. T. P., & Moran, J. M. 1980, *ApJ*, 240, L149
- Shang, H., Li, Z.-Y., & Hirano, N. 2007, *Protostars and Planets V*, 261
- Shu, F. H. 1977, *ApJ*, 214, 488
- Shu, F. H., Adams, F. C., & Lizano, S. 1987, *ARA&A*, 25, 23
- Shu, F., Najita, J., Galli, D., Ostriker, E., & Lizano, S. 1993, *Protostars and Planets III*, 3
- Shu, F., Najita, J., Ostriker, E., et al. 1994, *ApJ*, 429, 781
- Shu, F. H., Najita, J. R., Shang, H., & Li, Z.-Y. 2000, *Protostars and Planets IV*, 789
- Shu, F. H., Ruden, S. P., Lada, C. J., & Lizano, S. 1991, *ApJ*, 370, L31
- Snell, R. L., Loren, R. B., & Plambeck, R. L. 1980, *ApJ*, 239, L17
- Stahler, S. W. 1994, *ApJ*, 422, 616
- Tafoya, D., Gómez, Y., & Rodríguez, L. F. 2004, *ApJ*, 610, 827
- Testi, L., Tan, J. C., & Palla, F. 2010, *A&A*, 522, A44
- Ulrich, R. K. 1976, *ApJ*, 210, 377
- Walter, F. M. 1986, *ApJ*, 306, 573
- Wilkin, F. P. 1996, *ApJ*, 459, L31
- Wilkin, F. P., & Stahler, S. W. 1998, *ApJ*, 502, 661
- Wilkin, F. P., & Stahler, S. W. 2003, *ApJ*, 590, 917
- Wu, Y., Wei, Y., Zhao, M., et al. 2004, *A&A*, 426, 503
- Zapata, L. A., Lizano, S., Rodríguez, L. F., et al. 2015, *ApJ*, 798, 131
- Zapata, L. A., Rodríguez, L. F., Schmid-Burgk, J., et al. 2012, *ApJ*, 754, L17
- Zapata, L. A., Schmid-Burgk, J., Muders, D., et al. 2010, *A&A*, 510, A2
- Zhang, Y., Higuchi, A. E., Sakai, N., et al. 2018, *ApJ*, 864, 76