



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS  
FÍSICA

CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO HADRÓNICAS DESDE UN ANÁLISIS  
GLOBAL

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:  
GUSTAVO ALEJANDRO AVALOS VALENTÍN

TUTOR PRINCIPAL  
DR. GENARO TOLEDO SÁNCHEZ  
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM  
COMITÉ TUTOR  
DR. ROELOF BIJKER  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM  
DR. ELEAZAR CUAUTLE FLORES  
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, CIUDAD DE MÉXICO, MÉXICO, JULIO, 2019



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Genaro Toledo Sánchez  
Secretario: Dra. María Catalina Espinoza Hernández  
Vocal: Dra. Aurore Marie Pascale Nicole Courtoy  
1er. Suplente: Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero  
2o. Suplente: Dr. Ángel Sánchez Cecilio

La tesis se realizó en el Instituto de Física, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Genaro Toledo Sánchez  
Instituto de Física, UNAM

---

*Esta tesis está dedicada a Martín, mi papá, que lo dejó todo en México.  
Es gracias a ustedes que es posible el presente trabajo.  
En verdad, gracias.  
Yo.*

# Índice general

---

<b>1. El Modelo Estándar</b>	<b>1</b>
1.1. Modelo Estándar . . . . .	2
1.1.1. Quarks . . . . .	5
1.1.1.1. Isoespín e Hipercarga . . . . .	6
1.1.1.2. Mesones . . . . .	7
1.1.1.3. Bariones . . . . .	10
1.1.2. Leptones . . . . .	12
1.1.3. Historia de la Teoría Electrodébil . . . . .	14
1.2. Simetrías Discretas . . . . .	15
<b>2. Simetrías de Norma</b>	<b>17</b>
2.1. Una breve repaso de Teoría de Grupos . . . . .	18
2.1.1. El grupo $U(1)$ . . . . .	19
2.1.2. El grupo $SU(2)$ de Isoespín . . . . .	20
2.1.3. El grupo $SU(3)$ de color . . . . .	21
2.2. Ecuación de Schrödinger . . . . .	22
2.3. Ecuación de Klein-Gordon . . . . .	23
2.4. Ecuación de Dirac (libre) . . . . .	25
2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	26
2.6. Teorema de Noether . . . . .	27
2.6.1. Simetría $U(1)$ electromagnética . . . . .	29
2.6.2. Simetría Quiral . . . . .	30
2.7. Anomalías en QFT . . . . .	32
2.7.1. El Lagrangiano de la Anomalía $VPPP$ . . . . .	35
<b>3. Procesos Hadrónicos y Leptónicos</b>	<b>37</b>
3.1. Modelo de Dominancia Vectorial . . . . .	37
3.2. Anchos de decaimiento y constantes de acoplamiento . . . . .	38
3.2.1. Proceso $V \rightarrow l^-l^+$ . . . . .	40

## ÍNDICE GENERAL

---

3.2.2. Proceso $V \rightarrow PP'$ . . . . .	41
3.2.3. Proceso $V \rightarrow P\gamma$ . . . . .	42
3.2.4. Proceso $P \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	44
3.2.5. Proceso $V \rightarrow 3P$ . . . . .	46
3.3. Sección Eficaz $e^+e^- \rightarrow 3P$ . . . . .	49
3.4. Resultados preliminares . . . . .	53
<b>4. Valores de las Constantes de Acoplamiento con <math>\chi^2</math></b> . . . . .	<b>55</b>
4.1. Método de $\chi^2$ . . . . .	55
4.2. Resultados basados en $\chi^2$ . . . . .	56
4.3. Rompimiento de simetría de las constantes de acoplamiento . . . . .	60
4.3.1. Ejemplos particulares . . . . .	62
<b>5. Conclusiones</b> . . . . .	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>73</b>

# El Modelo Estándar

---

## Motivación y Objetivo

Uno de los problemas más importantes dentro de la física nuclear es la descripción de los acoplamientos entre las partículas elementales; dentro de ellas están los quarks, que en particular forman estados ligados a los que se llama mesones. Los estados ligados se forman a través de las interacciones fundamentales; en concreto los quarks interactúan entre sí por medio de la interacción fuerte, el problema radica en que hay parámetros libres dentro de la descripción general a las que se conoce como *constantes de acoplamiento*. El Modelo Estándar, da una descripción general de las interacciones fundamentales entre las partículas elementales y dentro de esa descripción se busca encontrar valores que se adecúen a diversos procesos en distintos rangos de energía, de tal manera que el Modelo Estándar siga siendo consistente.

En el presente trabajo se da una descripción global de constantes de acoplamiento en procesos de interacción fuerte y electromagnética; para mesones vectoriales y pseudoescalares ligeros. Para comenzar con el objetivo del trabajo, primero será necesario calcular las constantes de acoplamiento en procesos individuales, esto es, se calcularán anchos de decaimiento teóricos donde sólo aparezca una de las constantes de acoplamiento de interés, *e.g.*  $\rho \rightarrow \pi\pi$  en donde está la constante  $g_{\rho\pi\pi}$ , se igualarán a los anchos experimentales reportados en el PDG y, mediante un *despeje* se determinarán una por una. Hecho lo anterior, se trabajará con la función  $\chi^2$ , la cual es una función de distribución de probabilidad para  $n$  variables Gaussianas que se suponen correlacionadas, para hacer un ajuste de dichas constantes. Esta función se construirá con diversos anchos de decaimiento en donde estén involucrados los mesones más ligeros, y con la sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ . Dada la dependencia de  $\chi^2$ , tanto en los anchos como en la sección eficaz, se hará

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---

la minimización de esta función respecto a las constantes de acoplamiento y así se tendrán los valores óptimos de estas constantes, de tal manera que sean consistentes a todos los procesos involucrados en  $\chi^2$ . Se pondrá un ejemplo de qué tan rota está la simetría isospín debido a la diferencia de masas que hay entre los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ ; lo cual se refleja en las constantes de acoplamiento. También se verá si hay correlación alguna entre las constantes cuando se toma en cuenta o no la sección eficaz mencionada.

Con base en los resultados de la minimización de  $\chi^2$  y la inclusión del término anómalo, donde se encuentra la constante de acoplamiento  $g_{3\pi}$  se analizará la relevancia de la anomalía que se da en el proceso  $\omega \rightarrow 3P$ , en la sección eficaz desde el punto de vista de la teoría cuántica de los campos. Es decir, se mostrarán las identidades de Ward y cómo es que son violadas cuando se incluye el Lagrangiano que describe el término anómalo del proceso antes mencionado. En este mismo contexto, se estudiará el caso cuando un mesón vectorial  $\omega$  decae espontáneamente a tres  $\pi$ ; el cual es un ejemplo claro de una anomalía, usando datos experimentales de SND de la sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ , con el estado intermedio  $\omega$  y se compararán directamente con resultados que se obtengan de la teoría.

Por último, se dará una perspectiva del estudio de las constantes de acoplamiento en mesones más pesados y de un posible rompimiento de la simetría quiral. Para darle contexto a lo que se quiere presentar aquí es necesario dar una breve descripción del Modelo Estándar.

### 1.1. Modelo Estándar

En la naturaleza existen cuatro interacciones fundamentales; electromagnética, fuerte, débil y gravitacional, las cuales están intercedidas por partículas con espín entero a las que se llamó bosones de norma. En la siguiente tabla se muestran las propiedades más importantes.



Bosón	Interacción mediada	Carga eléctrica	Masa	Espín
$\gamma$	Electromagnética	0	$m < 1 \times 10^{-18}$ eV	1
$g$	Fuerte	0	0	1
$W^\pm$	Débil	$\pm 1$	$80.385 \pm 0.015$ GeV	1
$Z^0$	Débil	0	$91.1876 \pm 0.0021$ GeV	1
Gravitón	Gravitacional	0	$m < 6 \times 10^{-32}$ eV	2

**Tabla 1.1:** Clasificación de bosones de norma.

De acuerdo con predicciones teóricas y algunos resultados experimentales se ha logrado determinar con qué intensidad interactúan las partículas con cada una de las interacciones mencionadas, valga la redundancia.

**Electromagnética:** Esta interacción la experimentan partículas con carga eléctrica por medio del intercambio de un fotón, por ejemplo electrones y protones. La intensidad de la interacción está dada por la constante de estructura (hiperfina):

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$$

**Fuerte:** Esta la sienten partículas que poseen carga de *color*, que a diferencia de la carga eléctrica exhibe en tres distintos tipos de carga: rojo, verde y azul; las partículas que se comunican a través de esta interacción son los quarks, antiquarks y los gluones. La intensidad de la interacción fuerte es:

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi} \simeq 1$$

donde  $g_s$  es la constante de acoplamiento fuerte.

Cabe mencionar que es aproximadamente 100 veces más grande que la interacción electromagnética, y que no se debe confundir con la interacción residual fuerte, la cual no es considerada una interacción fundamental, que es la causante de la cohesión de los núcleos atómicos. Debido a esta interacción es que se tienen en la naturaleza protones, neutrones y otras partículas hadrónicas como son *piones*, *kaones*, partículas  $\Lambda$ , entre muchas más.

**Débil:** La experimentan partículas con carga débil o carga de *sabor*, esta carga se presenta en quarks y leptones como es el caso de electrones y neutrinos. La intensidad se define:

$$\alpha_w \equiv \frac{g_w}{4\pi} \simeq 10^{-2}$$

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---

donde  $g_w$  es la constante de acoplamiento débil.

**Gravitacional:** Esta interacción es relevante a escalas macroscópicas, es la causante de que existan sistemas planetarios como el Solar, decae como el inverso del cuadrado de la distancia y es de alcance infinito. Aunque se han hecho muchos intentos de formular una teoría cuántica de esta interacción, aún no se han obtenido resultados satisfactorios experimentales, pero la predicción es que existe una partícula llamada *gravitón* que es la mediadora de esta interacción.

El bosón de Higgs fue propuesto por Peter Higgs en 1964, el cual es un campo de espín entero que al interactuar con los campos del resto de las partículas da masa a éstas, rompiendo las simetrías  $U(1)$  y  $SU(2)$  del Modelo Estándar. La existencia del bosón de Higgs fue confirmada por las colaboraciones de ATLAS y CMS basados en las colisiones en el LHC en CERN.

El rompimiento espontáneo de la simetría del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , está asociado con la interacción electrodébil lo que genera las masas de muchas partículas, además distingue entre las interacciones electromagnética y débil. Otra consecuencia del rompimiento espontáneo es que los mediadores de la interacción débil,  $W^\pm$  y  $Z^0$ , adquieren masa, mientras que, el fotón permanece sin masa.

El Modelo Estándar es una descripción, a nivel fundamental, de tres de las cuatro interacciones antes mencionadas; interacción electromagnética, interacción débil e interacción fuerte. En este modelo existen cinco tipos de partículas fundamentales; los quarks, los leptones, los gluones, los bosones de norma y el bosón de Higgs.

La interacción electromagnética surge cuando alguna partícula posee carga eléctrica; existen dos tipos de carga eléctrica positiva (+) y negativa (-). La manifestación de dicha interacción es a través del campo electromagnético, el cual puede ser medido y cuantificado. La partícula de intercambio en esta interacción es el fotón.

Por otro lado, la interacción débil se produce debido al *sabor* de las partículas, el cual es un número cuántico más para distinguir a las partículas como los quarks. Esta interacción se descubrió cuando se buscaba una respuesta al decaimiento beta, el cual consiste en el decaimiento de un neutrón yendo a un protón, un electrón y un antineutrino del electrón, en donde ocurre que un quark  $d$  cambia de sabor por un quark  $u$  tras la emisión de un bosón  $W^-$ . Las partículas que experimentan la interacción débil son los quarks y los leptones mientras que, las partículas de intercambio son;  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ . Dentro del marco del Modelo Estándar existe una teoría que unifica ambas interacciones mencionadas, esta se conoce como *Teoría Electrodébil*.

A diferencia de las interacciones ya mencionadas la interacción fuerte se divide en dos; una es la interacción fuerte fundamental y, la otra es la interacción fuerte residual. La primera es aquella que se genera cuando existe alguna partícula con carga de color y a diferencia de la carga eléctrica, esta tiene tres tipos de carga; azul, rojo y verde. Esta interacción la experimentan los quarks y los gluones y, los mismos gluones son las partículas mediadoras. La segunda, la interacción fuerte residual, es aquella que se produce entre los nucleones de un átomo y en general, la experimenta todo tipo de hadrón que existe, las partículas que se intercambian son los piones además de que se puede hacer una descripción en términos de la interacción fuerte fundamental.

Al momento no se ha construido una teoría consistente con el Modelo Estándar que dé una descripción cuántica de la interacción gravitacional.

### 1.1.1. Quarks

Los quarks son partículas fundamentales constituyentes de los hadrones tales como el protón, el neutrón, el pión, entre otros. Tienen carga eléctrica, carga de color y sabor, además de poseer número bariónico  $\frac{1}{3}$  y espín  $\frac{1}{2}$ . La interacción entre quarks, a nivel fundamental, se da a través de los gluones quienes son los encargados de formar estados ligados quark-antiquark, llamados *mesones*, y estados ligados de tres quarks, llamados *bariones*.

La carga eléctrica de los quarks es una parte fraccionaria de la carga del electrón, esta puede ser  $\frac{1}{3}$  o  $\frac{2}{3}$ , en valor absoluto. La carga de color de los quarks, como ya se mencionó, puede ser de tres distintos tipos; azul, rojo y verde y, de igual manera en los antiquarks la carga de color cambia de *signo*, es decir, cambia a; antiazul, antirrojo y antiverde. El sabor de los quarks se manifiesta en seis formas diferentes. En la siguiente tabla se muestran las propiedades antes mencionadas.

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---

Quark	Masa	Carga, $e$	Color	Núm. Bariónico	S	C	B	T
$u$	$2.2^{+0.5}_{-0.4}$ MeV	$\frac{2}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$d$	$4.7^{+0.5}_{-0.3}$ MeV	$-\frac{1}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0
$s$	$95^{+9}_{-3}$ MeV	$-\frac{1}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	-1	0	0	0
$c$	$1.275^{+0.025}_{-0.035}$ GeV	$\frac{2}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	0	+1	0	0
$b$	$4.18^{+0.04}_{-0.03}$ GeV	$-\frac{1}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	0	0	-1	0
$t$	$173.0 \pm 0.4$ GeV	$\frac{2}{3}$	RGB	$\frac{1}{3}$	0	0	0	+1

**Tabla 1.2:** Clasificación de quarks de acuerdo con el Modelo Estándar.

Es importante recalcar que, tanto los números cuánticos como las cargas de los antiquarks tienen signo contrario, excepto el espín el cual en todos los quarks (antiquarks) es  $\frac{1}{2}$ , lo que podría cambiar es la proyección; arriba o abajo.

### 1.1.1.1. Isoespín e Hipercarga

Gracias a los experimentos de Rutherford se logró determinar que GRAN parte de la masa de los átomos se encuentra en el núcleo, además se llegó a la conclusión de que el núcleo debía estar compuesto no sólo por protones sino que también por otras partículas neutras, de masa similar a los protones, a las que se llamó *neutrones*.

Tras estos resultados, en 1932, el físico alemán Werner Heisenber propuso a los nucleones, protón y neutrón, como la manifestación de un solo estado cuántico y que existía un operador de  $SU(2)$  del cual estas partículas son eigenestados con valores propios  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$ , respectivamente, a esta propuesta se le llamó *isoespín*. Esta idea se convirtió en teoría para luego aplicarse a todo tipo de partícula que interactúa fuertemente. El formalismo que describe al isoespín es análogo al de espín, lo que quiere decir que se acopla de la misma manera, aunque los orígenes sean distintos.

Por su parte, la hipercarga no es más que una propiedad que relaciona al isoespín con la carga eléctrica de una partícula cuando la interacción es fuerte. También es un parámetro para determinar cuánta extrañeza posee una partícula. La relación en términos de carga eléctrica e isoespín es:

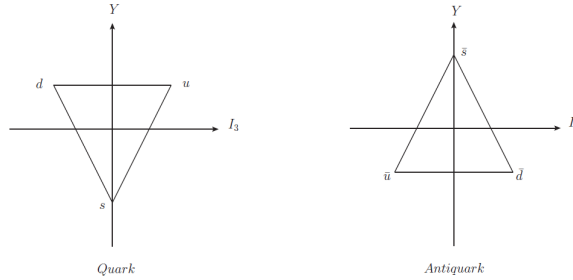
$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad (1.1)$$

donde  $I_3$  es la componente 3 de isospín y  $Q$  representa la carga eléctrica. Asimismo, la hipercarga se define:

$$Y = \mathcal{B} + S \tag{1.2}$$

siendo  $\mathcal{B}$  el número bariónico y  $S$  el número de extrañeza.

Con la introducción de estos números cuánticos y las simetrías detrás de ellos, se llegó a la convención de acomodar a las partículas en multipletes de acuerdo a isospín e hipercarga de cada una de éstas en un plano bidimensional  $Y-I_3$ , esta clasificación le valió el premio Nobel a Murray Gell-Mann en 1969. Como primer ejemplo, se verá el multiplete de quarks.



**Figura 1.1:** Multiplete de quarks ligeros.

en las figuras anteriores se muestra el multiplete de quarks (antiquarks), con isospín  $\pm\frac{1}{2}$  y hipercarga  $\frac{1}{3}$  y  $-\frac{2}{3}$ . Estos números cuánticos cambian de signo en el multiplete de antiquarks.

Hasta el momento no se ha logrado aislar un solo quark, sin embargo lo que se ha *observado* son estados ligados de ellos. Existen, básicamente, dos tipos de estados ligados de quarks; mesones y bariones. Se han encontrado más estados ligados, a los cuales se les llama exóticos; *e.g. tetraquarks*.

### 1.1.1.2. Mesones

Los mesones son estados ligados de quark-antiquark, los espines de estos pueden acomodarse de manera paralela  $\uparrow\uparrow$ , para dar lugar a un mesón con espín 1, o antiparalela  $\uparrow\downarrow$  para formar un mesón con espín 0, ambos siguiendo la estadística de Bose. A causa de las simetrías discretas, del momento angular total que posean y el tipo de quarks que los compongan, los mesones se subclasifican genéricamente

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---

en los siguientes grupos; mesón vectorial, mesón escalar, mesón pseudovectorial y mesón pseudoescalar. En la siguiente tabla se muestra dicha clasificación:

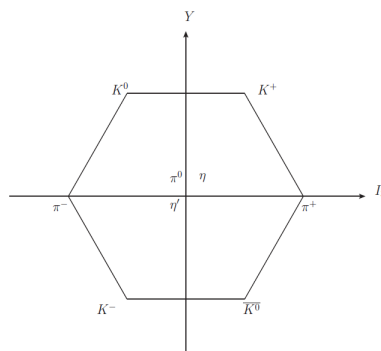
Tipo de Mesón	Momento Angular	Paridad	$J^P$
Escalar	0	+	$0^+$
Pseudoescalar	0	-	$0^-$
Vectorial	1	-	$1^-$
Pseudovectorial	1	+	$1^+$

**Tabla 1.3:** Tipos de mesones.

Los mesones además de ser producidos de forma natural debido a las interacciones de muy altas energías en la materia, también son formados en procesos tales como en las aniquilaciones  $e^+e^-$ . En la Tierra, se forman gracias a la interacción de los rayos cósmicos ultraenergéticos con la atmósfera y, artificialmente, en los grandes aceleradores de partículas con colisiones protón-antiprotón. Como primer ejemplo se mostrará el nonete de mesones pseudoescalares ligeros, los cuales están formados por quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ .

Mesón	Carga, $e$	Contenido de quarks	Isoespín	Masa, MeV
$\pi^+$ , $\pi^-$	1, -1	$u\bar{d}$ , $d\bar{u}$	1	$139.57061 \pm 0.00024$
$\pi^0$	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1	$134.9770 \pm 0.0005$
$K^+$ , $K^-$	1, -1	$u\bar{s}$ , $s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$493.677 \pm 0.013$
$K^0$ , $\bar{K}^0$	0	$d\bar{s}$ , $s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$497.611 \pm 0.013$
$\eta$	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})/\sqrt{6}$	0	$547.862 \pm 0.017$
$\eta'$	0	$(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})/\sqrt{3}$	0	$957.78 \pm 0.06$

**Tabla 1.4:** Mesones pseudoescalares ligeros.



**Figura 1.2:** Nonete de mesones pseudoescalares ligeros.

Las propiedades más relevantes de mesones vectoriales ligeros se muestran a continuación:

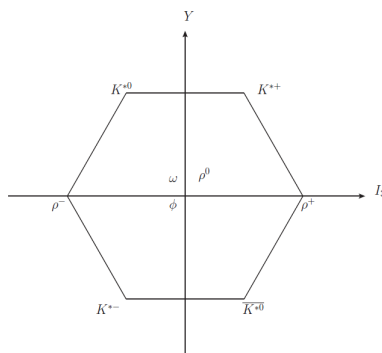
Mesón	Carga, $e$	Contenido de quarks	Isoespín	Masa, MeV
$\rho^+, \rho^-$	1, -1	$u\bar{d}, d\bar{u}$	1	$775.26 \pm 0.25$
$\rho^0$	0	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$	1	$775.11 \pm 0.34$
$\omega$	0	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$	0	$782.65 \pm 0.12$
$K^{*+}, K^{*-}$	1, -1	$u\bar{s}, s\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$891.76 \pm 0.25$
$K^{*0}, \bar{K}^{*0}$	0	$d\bar{s}, s\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$895.55 \pm 0.20$
$\phi$	0	$s\bar{s}$	0	$1019.461 \pm 0.016$

**Tabla 1.5:** Nonete de mesones vectoriales ‘ligeros’.

También existe una representación gráfica de los mesones vectoriales (los más ligeros) en forma de multiplete en el mismo plano  $I_3$ - $Y$ .

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---



**Figura 1.3:** Nonete de mesones vectoriales ligeros.

### 1.1.1.3. Bariones

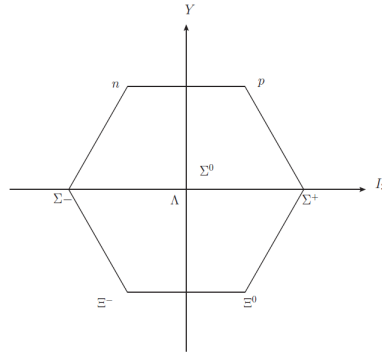
Por su parte, los bariones son estados ligados de tres quarks de tal manera que cada barión sea sin color, lo cual quiere decir que los quarks que estén *dentro* de cada barión deben tener carga de color distinta, *e.g.*  $p \sim (u, u, d)$ . Los bariones pueden experimentar la interacción electromagnética, la débil (recordemos el decaimiento  $n \rightarrow e^- p^+ \bar{\nu}_e$ ) y la interacción fuerte residual, a ésta última se le llama residual dado que no se considera fundamental, por ejemplo, los nucleones de los átomos se mantienen unidos gracias a la interacción fuerte residual. Dado que los bariones están formados por tres quarks, el espín total es siempre semientero, es por ello que todo barión sigue la estadística de Fermi.

Al igual que los mesones, los bariones están clasificados por multipletes, aquí algunos de ellos:

Barión	Carga, $e$	Contenido de quarks	Isospín	Masa, MeV
$p$	+1	$uud$	$\frac{1}{2}$	$938.272046 \pm 0.000021$
$n$	0	$udd$	$\frac{1}{2}$	$939.565379 \pm 0.000021$
$\Lambda$	0	$uds$	0	$1115.683 \pm 0.006$
$\Sigma^+$	+1	$uus$	1	$1189.37 \pm 0.07$
$\Sigma^0$	0	$uds$	1	$1192.642 \pm 0.024$
$\Sigma^-$	-1	$dds$	1	$1197.449 \pm 0.030$
$\Xi^0$	0	$uss$	$\frac{1}{2}$	$1314.86 \pm 0.20$
$\Xi^-$	-1	$dss$	$\frac{1}{2}$	$1321.71 \pm 0.07$

**Tabla 1.6:** Breve lista de bariones con espín  $\frac{1}{2}$ .

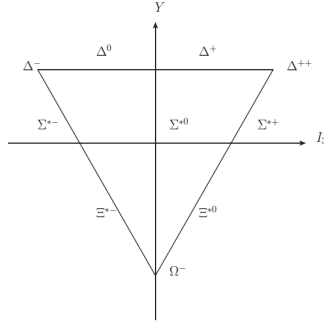




**Figura 1.4:** Octete de bariones con espín  $\frac{1}{2}$ .

Barión	Carga, $e$	Contenido de quarks	Isospín	Masa, MeV
$\Delta^{++}$	2	$uuu$	$\frac{3}{2}$	1232
$\Delta^+$	1	$uud$	$\frac{3}{2}$	1232
$\Delta^0$	0	$udd$	$\frac{3}{2}$	1232
$\Delta^-$	-1	$ddd$	$\frac{3}{2}$	1232
$\Sigma^{*+}$	1	$uus$	1	1385
$\Sigma^{*0}$	0	$uds$	1	1385
$\Sigma^{*-}$	-1	$dds$	1	1385
$\Xi^{*0}$	0	$uss$	$\frac{1}{2}$	1533
$\Xi^{*-}$	-1	$dss$	$\frac{1}{2}$	1533
$\Omega^-$	-1	$sss$	0	1672

**Tabla 1.7:** Breve lista de bariones con espín  $\frac{3}{2}$ .



**Figura 1.5:** Decuplete de bariones con espín  $\frac{3}{2}$ .

Algo importante de recalcar es que los bariones al experimentar la interacción fuerte residual se *comunican* entre sí por medio de los piones y mesones ligeros virtuales.

### 1.1.2. Leptones

Cuando se descubrió el decaimiento beta o decaimiento de un neutrón, se creyó que éste lo hacía únicamente en un protón y un electrón, sin embargo, al hacer los cálculos se llegó a la conclusión de que la energía y el momento angular total, antes y después del decaimiento, no se conservaban. Esta situación preocupó a los científicos de la época, dado que se estaba violando la conservación de la energía y del momento angular total. Entonces, en 1930, Wolfgang E. Pauli postuló que debía existir una partícula que se llevara parte de la energía del decaimiento y además poseyera espín  $\frac{1}{2}$ , de tal manera que tanto la conservación de la energía como del momento angular se cumplieren. Fue hasta el año 1956, cuando fue descubierto el neutrino del electrón en el famoso experimento de Cowan y Reines.

$$n \longrightarrow p + e^{-}, \quad \text{Incorrecto}$$

$$n \longrightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_{e^{-}}, \quad \text{Correcto}$$

Dentro del Modelo Estándar, los leptones son partículas elementales masivas con espín  $\frac{1}{2}$  (fermiones), pueden tener carga o no, experimentan las interacciones electromagnética y débil pero no la fuerte. Existen seis tipos de leptones, tres con carga eléctrica y tres sin carga eléctrica. De los leptones cargados, el electrón es el leptón más ligero y el único que no decae, luego le sigue el muón y, por último, está el tauón el cual es el más pesado. Dado que estas partículas tienen espín semientero, están catalogadas como fermiones y están sujetas al Principio

de exclusión de Pauli, es decir, dos leptones no pueden estar en el mismo estado cuántico al mismo tiempo.

Los leptones tienen una propiedad llamada quiralidad, la cual les permite distinguirse entre sí como; leptones izquierdos y derechos, aunque cada leptón posee una superposición cuántica de ambas partes. Como consecuencia de la quiralidad solamente la parte izquierda de un leptón es susceptible a la interacción débil, mientras que, ambas partes (izquierda y derecha) interactúan con los campos electromagnéticos.

Una de las preguntas más importantes en física es: ¿cómo es que las partículas fundamentales adquieren masa?. La respuesta vino con la propuesta de Peter Higgs en la década de los 60's, quien propuso que la simetría electrodébil está rota, provocando la interacción con un campo al que después se le llamaría campo de Higgs, de esta manera es como adquieren masa las partículas elementales; los leptones cargados no son la excepción, así es como obtienen una masa efectiva, la cual es la masa que se mide y se reporta en el laboratorio. Por otro lado, las predicciones teóricas concluyeron que los neutrinos carecían de masa, sin embargo, varios experimentos han dejado claro que los neutrinos oscilan, esto implica que tienen masa y que es muy pequeña incluso comparada con la masa del electrón. Hasta el momento no se ha logrado determinar la masa de ninguno de los neutrinos, aunque se tiene un estimado de la diferencia de los cuadrados de las masas.

Además de poseer números intrínsecos como; espín, masa, carga, también tienen número leptónico de familia el cual distingue cada una de las generaciones, este número es distinto al simple número leptónico. En la siguiente tabla se muestran las propiedades más importantes de los leptones.

Familia	Masa	Carga	$L_e$	$L_\mu$	$L_\tau$
$e^-$	$0.5109989461 \pm 0.0000000031 \text{ MeV}$	-1	1	0	0
$\nu_e$	$< 2 \text{ eV}$	0	1	0	0
$\mu^-$	$105.6583745 \pm 0.0000024 \text{ MeV}$	-1	0	1	0
$\nu_\mu$	$< 2 \text{ eV}$	0	0	1	0
$\tau^-$	$1776.86 \pm 0.12 \text{ MeV}$	-1	0	0	1
$\nu_\tau$	$< 2 \text{ eV}$	0	0	0	1

**Tabla 1.8:** Tabla de leptones.

En la tabla anterior  $L_i$ ,  $i = e, \mu, \tau$ , indica a qué generación pertenece cada leptón

que se presenta.

### 1.1.3. Historia de la Teoría Electrodébil

Alrededor de 1933, Enrico Fermi trató de dar una explicación al decaimiento beta como una colisión directa entre las partículas involucradas y por lo tanto, no había una partícula mediadora responsable de este decaimiento, el cual se da gracias a la interacción débil. El modelo que propuso Fermi no fue malo a bajas energías, ya que dio buenos resultados, cosa que no sucedió a altas energías, por lo que surgió la necesidad de una teoría que incluyera una partícula mediadora. Hideki Ogawa (Yukawa) por su parte, buscaba algo similar para la interacción fuerte, causante de la cohesión de los nucleones. Él enfrentó este problema estimando la masa de los piones (encargados de transmitir dicha interacción) en términos de la intensidad de esta fuerza, lo que no fue difícil porque el alcance de la interacción fuerte es comparable con el tamaño del núcleo. No obstante, en el caso de la interacción débil no podía proponerse algo parecido ya que el rango de la interacción débil es extremadamente corto como para producir estados ligados. El reto para los físicos teóricos fue predecir propiedades sobre esta(s) partícula(s) y para los experimentalistas encontrarlas en el laboratorio.

Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg fueron quienes resolvieron el problema gracias a sus contribuciones en una teoría que unificó dos interacciones: la electromagnética y la débil. Fue así como surgió la teoría electrodébil. Con esta teoría se pudo hacer la predicción de tres bosones vectoriales intermediarios, dos cargados (eléctricamente)  $W^\pm$  y uno neutro  $Z^0$ , encargados de transmitir la interacción débil. En 1979, los tres recibirían el Premio Nobel por la teoría. Las masas que se predijeron teóricamente con el rompimiento espontáneo de la simetría son:

$$M_{W^\pm} = 82 \pm 2 \text{ GeV}, \quad M_{Z^0} = 92 \pm 2 \text{ GeV}$$

Hacia finales de la década de los 70's CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) comenzó con la búsqueda de dichas partículas, esta colaboración es una organización europea que opera el laboratorio más grande de física de partículas en todo el mundo. Este *laboratorio*, comenzó la construcción del colisionador de protón-antiprotón con la intención de producir partículas pesadas a altas energías. No fue sino hasta 1983, cuando se dio la noticia de que habían sido descubiertos los bosones  $W^\pm$  y en ese mismo año, también se descubrió el bosón  $Z^0$  por el grupo experimental comandado por el físico italiano Carlo Rubbia, quien obtuvo

el Premio Nobel por estos hechos. Las masas medidas cuando se descubrieron fueron:

$$M_{W^\pm} = 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}, \quad M_{Z^0} = 91.188 \pm 0.002 \text{ GeV}$$

Estos descubrimientos fueron esenciales para la consolidación del Modelo Estándar.

## 1.2. Simetrías Discretas

Las simetrías discretas en el Modelo Estándar son tres; conjugación de carga  $C$ , paridad  $P$  e inversión temporal  $T$ . Asimismo, estas simetrías se pueden combinar para dar lugar a otras como; la simetría  $CP$  y la simetría  $CPT$ . La definición individual es la siguiente:

**Conjugación de Carga:** Esta transformación cambia todas las cargas involucradas en cada partícula. En pocas palabras, cambia partículas por antipartículas, las interacciones que preservan esta simetría son la electromagnética y la fuerte, mientras que, la interacción débil la viola.

**Paridad:** Esta simetría es tal que al aplicarla a la función de estado de una partícula cambia de signo las coordenadas espaciales de la función, esto es:

$$P\psi(t, x, y, z) = \psi(t, -x, -y, -z) \quad (1.3)$$

Las interacciones simétricas bajo esta transformación son la fuerte y la electromagnética pero la interacción débil no lo es.

**Inversión Temporal:** Esta simetría se refiere al cambio de signo en la coordenada temporal de las partículas, es decir:

$$T\psi(t, x, y, z) = \psi(-t, x, y, z) \quad (1.4)$$

La combinación de  $C$  y  $P$  da lugar a la simetría  $CP$ , de la cual las partículas que experimentan la interacción electromagnética y fuerte son eigenestados. Sin embargo, en 1964 se descubrió que había una ligera violación en interacciones débiles, gracias al estudio del decaimiento de los kaones neutros, hecho que les valió el premio Nobel a James Cronin y Val Fitch. Por otro lado, está la simetría  $CPT$  que hasta el momento es la única que se ha observado ser simetría exacta a nivel fundamental. Lo que se ha mostrado está basado en las referencias: [1], [2],

## 1. EL MODELO ESTÁNDAR

---

[3].

En el siguiente capítulo veremos un poco de simetrías de norma y las simetrías que conforman el Modelo Estándar e introduciremos las ecuaciones fundamentales de la Teoría Cuántica de Campos.

## Simetrías de Norma

---

En este capítulo se dará un breve repaso de lo básico de la teoría de grupos, simetrías de norma, y de uno de los resultados más importantes dentro del formalismo de la física matemática; el Teorema de Noether. También se presentan las ecuaciones que sentaron las bases de la Teoría Cuántica de Campos; la ecuación de Schrödinger, la ecuación de Klein-Gordon y la ecuación de Dirac. Por último, se da un panorama general de la quiralidad de las partículas y lo que significa una anomalía dentro del marco de la Teoría Cuántica de Campos.

Durante algún tiempo se creyó que la ecuación de Schrödinger (1925) era la ideal para describir los sistemas cuánticos, ya que fue la primera ecuación con la cual se obtuvo de manera muy precisa el espectro energético del hidrógeno que ya se conocía tiempo atrás. La ecuación de Schrödinger había pasado la primera prueba, sin embargo, al aplicar esta ecuación a sistemas (átomos) más complejos como el oro, la plata e incluso el carbón, la teoría (ecuación de Schrödinger) y el experimento no arrojaron los mismos resultados, y es que los científicos de la época se dieron cuenta que dicha ecuación no describía sistemas relativistas. Fue en 1926 cuando Klein y Gordon propusieron una nueva ecuación que pretendía describir a los electrones de los átomos a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, es decir, era la ecuación de Schrödinger en una versión relativista; sin embargo, tampoco ésta última ecuación describió de forma adecuada a los sistemas cuánticos relativistas. No fue si no hasta la propuesta de Dirac que se llegó a una mejor descripción de los sistemas cuánticos con espín  $\frac{1}{2}$ . Antes de presentar las ecuaciones que son la base de la teoría cuántica, primero veamos un poco de teoría de grupos.

## 2.1. Una breve repaso de Teoría de Grupos

Un grupo es un conjunto de objetos los cuales están dotados con una estructura interna que cumple ciertas propiedades, dicha estructura puede *actuar* de diferentes formas sobre los elementos del conjunto, por ejemplo; multiplicando o sumando a los elementos. Dicha estructura tiene propiedades específicas cuando actúa sobre los elementos de un conjunto, para ser más claro es necesario ver la definición formal de grupo:

**Grupo.** Sea  $G$  un conjunto arbitrario cuyos elementos son  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  y, una operación  $\clubsuit$  que actúa sobre ellos. Se dice que  $G$  es grupo bajo la operación  $\clubsuit$  si se cumplen las siguientes propiedades:

- (i) **Cerradura.** Si  $g_i$  y  $g_j \in G$  entonces,  $g_i \clubsuit g_j = g_k$  también pertenece a  $G$ .
- (ii) **Asociatividad.** Para cualesquiera  $g_i, g_j$  y  $g_k$ , se cumple que  $(g_i \clubsuit g_j) \clubsuit g_k = g_i \clubsuit (g_j \clubsuit g_k)$  y, por ende se puede prescindir de los paréntesis.
- (iii) **Identidad.** Existe un elemento  $g_0 \in G$  tal que,  $g_0 \clubsuit g_i = g_i \clubsuit g_0 = g_i$  para todo  $g_i \in G$ . A  $g_0$  se le suele llamar identidad del grupo.
- (iv) **Inverso.** Para todo  $g_i \in G$  existe un  $g_m \in G$  tal que,  $g_i \clubsuit g_m = g_m \clubsuit g_i = g_0$ . En ese caso a  $g_m$  se le denota como  $g_i^{-1}$ , es decir,  $g_m = g_i^{-1}$ .

Se dice que un grupo  $G$  es grupo *Abeliano* si cumple que  $g_i \clubsuit g_j = g_j \clubsuit g_i$  para todos  $g_i, g_j \in G$  y, es *no Abeliano* si  $g_i \clubsuit g_j \neq g_j \clubsuit g_i$  para algunos  $g_i, g_j \in G$ .

La notación usual de un grupo es:  $\{G, \clubsuit\}$ , lo cual quiere decir que, se está especificando el conjunto de trabajo y la operación que da la estructura de grupo. Algunos ejemplos sencillos de grupos son:

1.  $\{\mathbb{Z}, +\}$ . Los números enteros con la suma.
2.  $\{\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot\}$ . El conjunto de los números reales, menos el cero, con la multiplicación.
3.  $\{\mathbb{Z}_n, \circ\}$ . El grupo cíclico de orden  $n$  con la *multiplicación* entre los elementos del grupo.
4.  $\{\mathbb{R}_i, \circ\}$ . Las rotaciones en  $\mathbb{R}^2$  con el producto entre sus elementos.



Sin embargo, existen grupos más complejos que requieren mayor trabajo y cuidado para su estudio, y que han sido pilares para el desarrollo de modelos teóricos en física. Los grupos más recurridos en física son los grupos de Lie, una definición muy ingenua sería la siguiente:

**Grupo de Lie.** Un grupo de Lie es aquel que es un grupo continuo, es decir, que cualquier elemento del grupo se genera con uno que se encuentra *muy cercano* a la identidad del grupo y que además, cada elemento en cuestión está etiquetado con un parámetro continuo, por ejemplo; las rotaciones en el plano complejo  $\mathbb{C}$ . Los elementos de este grupo tienen la forma  $e^{i\theta}$ , claramente, cada elemento del grupo se puede generar con un ángulo  $\alpha$ , arbitrario e infinitesimalmente pequeño (muy cercano a la identidad), mediante la aplicación sucesiva de  $e^{i\alpha}$   $n$ -veces, esto quiere decir que se debe cumplir la relación  $\alpha = \theta/n$  y, cada elemento de este grupo tiene la etiqueta  $\theta$  que toma valores continuos en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Algunos grupos de Lie recurrentemente usados en física son:

1.  $\{O(n), \circ\}$  El grupo ortogonal.
2.  $\{SO(n), \circ\}$  El grupo especial ortogonal.
3.  $\{U(n), \circ\}$  El grupo unitario.
4.  $\{SU(n), \circ\}$  El grupo especial unitario.

Estos grupos tienen propiedades muy particulares que los hacen aún más interesantes y complejos. El ejemplo más claro y exitoso del uso y aplicación de grupos de Lie en el terreno de la física es la Teoría del Modelo Estándar, la cual está basada en  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

### 2.1.1. El grupo $U(1)$

El grupo unitario  $U(n)$  es el conjunto de matrices de  $n \times n$  tal que,  $\det(U) = \pm 1$  y  $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbf{1}$ , es decir,  $U^\dagger = U^{-1}$ . Este grupo, en general, es no-Abeliano pero para el caso de  $n = 1$  se tiene que este grupo sí es conmutativo sobre el campo de los complejos. El grupo  $U(1)$  es de particular interés, dado que es el grupo de norma sobre del cual está construida la electrodinámica cuántica como se verá más adelante y, es parte fundamental del Modelo Estándar. Un ejemplo común de este grupo, son las rotaciones en el espacio de tres dimensiones; el *objeto* que produce rotaciones alrededor del eje 3 o eje  $z$ , tiene la forma:

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

$$R_\theta^3 = \exp(-i\theta J_3) \quad (2.1)$$

de manera análoga se introducen las matrices que generan rotaciones en los ejes 1 y 2, éstas son;  $J_1$  y  $J_2$ , respectivamente. La definición formal de  $J_a$ , con  $a = 1, 2, 3$ , es:

$$J_a = \frac{1}{2}\sigma_a \quad (2.2)$$

cuya álgebra está dada por el conmutador de Lie:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k \quad (2.3)$$

donde  $\varepsilon_{ijk}$  es el símbolo totalmente antisimétrico de Levi-Civita es igual a 1 si las permutaciones entre sus índices son cíclicas,  $-1$  si las permutaciones son no-cíclicas y, cero en cualquier otro caso. Las constantes  $\varepsilon_{ijk}$  se conocen como constantes de estructura del grupo.

### 2.1.2. El grupo $SU(2)$ de Isoespín

Por otro lado, está el grupo  $SU(n)$  el cual se conforma por las matrices unitarias de  $n \times n$  con determinante igual a la unidad. Existen dos grupos de interés dentro del marco del Modelo Estándar, éstos son;  $SU(2)$  y  $SU(3)$ . El grupo  $SU(2)$ , en su versión no trivial de orden más bajo, es el grupo de matrices de  $2 \times 2$  con  $\det = 1$  el cual es un subgrupo de  $U(2)$ , que viene representado por:

$$R_{\theta_a} = \exp\left(-i\frac{\theta_a\sigma_a}{2}\right) \quad (2.4)$$

en donde  $\sigma_a$  son las matrices de Pauli y se le conocen como los generadores del grupo, explícitamente se escriben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Algo importante de recalcar de las matrices  $\sigma_a$  es que, son matrices con traza igual a cero y además son *Hermitianas*, es decir, cumplen que  $A = A^\dagger$ . El álgebra de estas matrices queda determinada por un conmutador de Lie análogo al de las matrices  $J_a$ .

Por ejemplo, si se tratase de una partícula con espín total  $j = \frac{1}{2}$  y quisiéramos representar sus estados de espín en una base, tendríamos que elegir los *eigenvectores* de una de las matrices de Pauli para dar el estado cuántico de la partícula. La base que comúnmente se usa para esta representación son los eigenvectores de la matriz  $\sigma_3$ , esto es:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de esta manera están considerados los dos posibles estados cuánticos de una partícula con espín total  $\frac{1}{2}$ , es decir,  $m = \frac{1}{2}$  (espín arriba) y  $m = -\frac{1}{2}$  (espín abajo).

El isoespín surgió en el Modelo Estándar debido al *gran parecido* entre el protón y el neutrón, dado que pueden ser vistos como un grado de libertad interno de una partícula con dos estados cuánticos permitidos. Por tanto, la simetría  $SU(2)$  de isoespín es aquella que tiene como representación fundamental a  $(p, n)$  y que es una copia matemática del espín, por lo que sus generadores satisfacen:

$$[I_j, I_k] = i\varepsilon_{ijl}I_l \tag{2.5}$$

donde  $I_j \equiv \frac{1}{2}\sigma_j$  y actúan sobre los estados:

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que son justo el doblete de isoespín de los nucleones; protón y neutrón.

### 2.1.3. El grupo $SU(3)$ de color

Asimismo está el grupo  $SU(3)$  en cual recaen todas las simetrías de color del Modelo Estándar, es decir, es la simetría que *rige* las interacciones fuertes de los quarks. Este grupo está formado por las matrices unitarias de  $3 \times 3$  con determinante igual a la unidad. Los generadores de este grupo son 8 matrices Hermitianas, linealmente independientes y con traza nula. El rango de este grupo es 2, dado que solo es posible diagonalizar simultáneamente dos de las matrices que lo conforman, por ende, este es el número de generadores que conmutan mutuamente.

En física de partículas la representación fundamental de  $SU(3)$  es un triplete y se liga con la carga de color de los quarks,  $R$  (rojo),  $G$  (verde) y  $B$  (azul). Los

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

generadores son matrices diagonales de  $3 \times 3$  denotados como  $\lambda_i$ , con  $i = 1, \dots, 8$ , las matrices de este grupo que conmutan mutuamente son:

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con vectores propios simultáneos:

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las  $\lambda_i$  son conocidas como las matrices de Gell-Mann que cumplen con el álgebra:

$$\left[ \frac{\lambda_j}{2}, \frac{\lambda_k}{2} \right] = i \sum_l f_{jkl} \frac{\lambda_l}{2} \quad (2.6)$$

Donde  $f_{jkl}$  son las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$  y que son totalmente antisimétricas bajo el intercambio de cualquier par de índices.

Para poner en contexto la simetría quiral y las anomalías en teoría cuántica de campos es necesario presentar cómo es que se llegó a la ecuación de Dirac, pasando por la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Klein-Gordon, siendo las dos últimas incorrectas para la descripción de partículas masivas con espín  $\frac{1}{2}$ , aunque por motivos distintos.

### 2.2. Ecuación de Schrödinger

Esta ecuación fue propuesta en 1925 por el físico austriaco Erwin Schrödinger. Misma que ayudó a resolver algunos problemas que hasta esa fecha estaban abiertos, el caso más famoso y exitoso, sin lugar a duda, fue el átomo de hidrógeno. Con esta ecuación se logró obtener todo el espectro electromagnético de dicho átomo, además de que describía cómo un estado cuántico de un sistema físico cambia con el tiempo. La ecuación, a groso modo, se obtiene de la siguiente manera:

Algo a lo que un físico siempre debe apelar es a la conservación de la energía mecánica, lo cual quiere decir que,  $E = T + V$  debe ser una constante en el tiempo. Por otro lado, lo que se hace es promover a operadores lineales tanto la energía cinética, como la energía potencial y asumir que ésta última no depende de

las velocidades de las partículas involucradas en el sistema de estudio. Asimismo,  $E$  también se cambia por *el operador de energía*, de esta manera los operadores quedan de la siguiente forma:

- $p \longrightarrow \hat{p} = -i \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$
- $V(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \hat{V}(t, \mathbf{x})$ , el potencial depende de cada situación o circunstancia en la que se encuentre el sistema de estudio.
- $E \longrightarrow \hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t}$

de esta manera la ecuación de Schrödinger es un operador el cual tiene que actuar sobre *algo*, que en este caso es una función,  $\psi(x)$  (*léase psi de x*), que representa al sistema de estudio

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x) \right] \psi(x) = \hat{H}\psi(x) \quad (2.7)$$

donde  $x$  es el cuadrivector que representa las coordenadas espacio-temporales del sistema. Así, la estructura clásica de la energía se traslada al terreno cuántico con operadores lineales.

## 2.3. Ecuación de Klein-Gordon

Por un tiempo breve la ecuación de Schrödinger fue todo un suceso al aplicarla al átomo de hidrógeno; y no porque dicho átomo no fuese relativista sino por la sencillez de su estructura, no obstante al aplicarla a sistemas cuánticos más complejos como el átomo de litio o el átomo de carbón no describía de manera precisa el espectro electromagnético de dichos átomos. Los científicos de la época se dieron cuenta de que la ecuación de Schrödinger era una ecuación no-relativista, por lo que en 1926 Oskar Klein y Walter Gordon propusieron su famosa ecuación, ellos partieron de la relación energía-momento-masa de la siguiente forma:

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (2.8)$$

al tener esta relación relativista lo que se hace es promover, de nueva cuenta, a operadores la energía y el momento; algo parecido a lo que se había hecho con la ecuación de Schrödinger. Por tanto, la ecuación de Klein-Gordon queda de la manera:

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

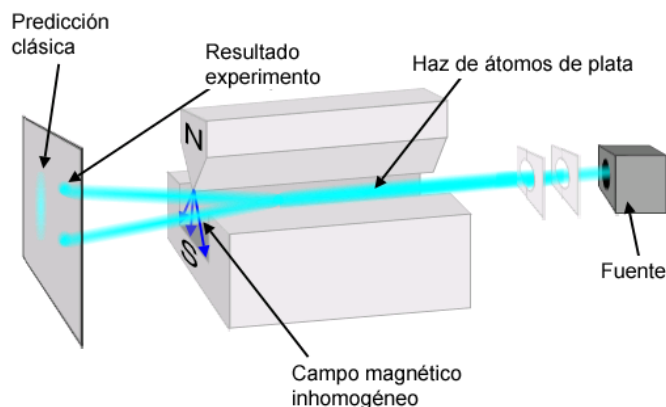
$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \quad (2.9)$$

ecuación que se ve modificada de la siguiente forma en caso de que haya un potencial externo al sistema:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = -\hat{V}\phi(x) \quad (2.10)$$

Es importante resaltar que el campo  $\phi(x)$  puede representar una de las dos opciones siguientes; un campo real, el cual es neutro y sin *espín* o, un campo complejo que es sinónimo de campo escalar con carga ( $\pm$ ), sin *espín* y con su correspondiente antipartícula.

Al hacer experimentos con átomos bajo la influencia de campos magnéticos no homogéneos se descubrió una nueva propiedad de las partículas (al menos de los electrones). El experimento de Stern-Gerlach, 1922, consistió en pasar un haz de electrones (átomos de plata) a través de un campo magnético no homogéneo y luego detectarlos en una pantalla que se ionizaba con la colisión de los electrones con el material de dicha pantalla. Los resultados fueron inesperados ya que se encontró que los electrones tenían dos direcciones preferenciales de colisión, en un lenguaje coloquial, se diría que estas direcciones eran *arriba* y *abajo*, lo cual dejó en claro que se había descubierto otra propiedad de las partículas.



**Figura 2.1:** Experimento de Stern-Gerlach.

Este hecho vino a poner en tela de juicio a la ecuación de Klein-Gordon, ya que de nueva cuenta teoría y experimento no concordaban, a esta *nueva* propiedad se le llamó espín. Dos años más tarde, en 1928, P. A. M. Dirac derivó una ecuación de estado relativista y, también describía aquella propiedad que se había descubierto

6 años atrás con los experimentos de Stern-Gerlach.

## 2.4. Ecuación de Dirac (libre)

Tras el *fracaso* de la ecuación de Klein-Gordon en la descripción de partículas relativistas con espín  $\frac{1}{2}$ , Dirac propuso una ecuación que describía a la perfección este tipo partículas. Lo que hizo fue linealizar la ecuación relativista de la energía con lo siguiente:

Ya que la energía relativista viene dada por la ecuación  $E^2 = p^2 + m^2$  en unidades naturales, lo que Dirac propuso fue escribirla como  $E = p + m$  cambiando a  $E$ ,  $p$  y  $m$  por operadores, de tal forma que al aplicar dos veces el operador de energía quedara exactamente una ecuación relativista de los campos. Es decir, hizo la sustitución  $E \rightarrow \hat{H} = i\frac{\partial}{\partial t}$ ,  $p \rightarrow \hat{p} = \gamma^0\gamma^k\hat{p}_k$  (con la definición usual de mecánica cuántica, *e.g.*  $\hat{p}_1 = -i\frac{\partial}{\partial x}$ ) y  $m \rightarrow \gamma^0m$ , con la introducción de las matrices *gamma* o de Dirac:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$$

definidas en términos de las matrices de Pauli  $\sigma^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con esta elección de operadores la ecuación lineal relativista para una partícula con espín se escribe:

$$i\frac{\partial}{\partial t} = \gamma^0\gamma^k\hat{p}_k + \gamma^0m \quad (2.11)$$

Para llegar a una ecuación relativista de un campo con espín  $\frac{1}{2}$  las matrices gamma o matrices de Dirac deben satisfacer:

1.  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ , relación de anticonmutación.
2.  $-(\gamma^i)^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbf{1}$ .
3.  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ .

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

Así, la ecuación de Dirac en su forma covariante queda:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \quad (2.12)$$

Por otro lado, la ecuación adjunta de Dirac queda:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (2.13)$$

donde  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ .

Estas son las ecuaciones que describen con detalle a las partículas (antipartículas) masivas con spin  $\pm\frac{1}{2}$  tales como electrones, protones, neutrones, positrones, etc; en ella se introdujeron las matrices  $\gamma$ , las cuales son matrices de  $4 \times 4$ , que están construidas con las matrices de Pauli, además obedecen el Álgebra de Clifford.

### 2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Estas ecuaciones fueron desarrolladas por Euler y Lagrange en la década de los 50's del siglo XVIII que tiempo después las aplicarían a la mecánica Newtoniana, dando lugar a la Mecánica Lagrangiana.

$$\partial^\mu \left( \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad (2.14)$$

Donde  $\phi$  puede ser cualquier tipo de campo que se quiera trabajar. Es importante notar que, el Lagrangiano arriba escrito es el Lagrangiano de un campo libre, es decir, el potencial es igual a cero. Existe un tratamiento para campos sometidos a potenciales diferentes de cero, pero el objetivo de este trabajo es dar un panorama lo más simple posible.

Las ecuaciones de Klein-Gordon y Dirac se derivan desde el formalismo Lagrangiano, a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, existe un Lagrangiano para cada una de ellas. Para el primer caso se tiene:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi)^*(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi \quad (2.15)$$

Mientras que el Lagrangiano de Dirac es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.16)$$



Las cuales representan partículas (antipartículas) bosónicas libres con spin 0 y masivas, en el primer caso y, fermiónicas libres con spin  $\frac{1}{2}$  y masivas, en el segundo caso. Es importante resaltar la diferencia entre los campos  $\phi$  y  $\psi$ ; el primero al evaluarlo en un punto del espacio-tiempo lo que se obtiene es un número, como la temperatura por ejemplo, mientras que, el segundo es un campo vectorial formado de cuatro componentes con cada entrada real o compleja, al cual se le conoce como *espinor*.

Desde el punto de vista Lagrangiano es interesante saber cuando un Lagrangiano tiene una simetría, es decir, cuando se aplica una transformación al campo de estudio (ya sea  $\phi$  o  $\psi$ ) y se inserta en el Lagrangiano correspondiente y éste a su vez permanece invariante, en este caso se dice que hay una simetría interna del campo y además, hay una cantidad conservada que generalmente es la corriente que está asociada al mismo campo. Este resultado se obtiene del Teorema de Noether.

## 2.6. Teorema de Noether

Este teorema fue probado por la matemática Emmy Noether en 1915, el cual a grandes rasgos estipula que toda simetría en un Lagrangiano viene acompañada con una corriente que se conserva en el tiempo. En términos de campos se ve de la siguiente manera.

Primero se aplica una transformación infinitesimal al campo de la siguiente forma:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \quad (2.17)$$

donde  $\alpha$  es parámetro pequeño que puede o no depender de las coordenadas espacio-temporales y que trae consigo la simetría interna del campo en cuestión. Se dice que esta transformación es una simetría si las ecuaciones de movimiento quedan invariantes así como el Lagrangiano (hasta una 4-divergencia).

Como  $\alpha$  es un parámetro pequeño, entonces se puede hacer la siguiente aproximación:

$$e^{i\alpha} \phi(x) \approx (1 + i\alpha) \phi(x) \quad (2.18)$$

La invariancia en el Lagrangiano requiere que suceda lo siguiente:

$$\delta\mathcal{L} = 0 \quad (2.19)$$

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

Explícitamente la variación en el Lagrangiano se escribe:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial^\mu\phi) \quad (2.20)$$

Como la variación en el campo se puede escribir como  $\delta\phi = i\alpha\phi$ , entonces, la variación en el Lagrangiano queda:

$$\delta\mathcal{L} = i\alpha\partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi\right) + i\alpha\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial^\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\phi \quad (2.21)$$

Nótese que el segundo término de la expresión anterior es cero ya que cumple con las ecuaciones de Euler-Lagrange, mientras que al primer término se le pide la condición de que sea idénticamente cero, esto es:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (2.22)$$

donde

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\phi \quad (2.23)$$

es decir,  $j_\mu$  es la cantidad conservada en el espacio-tiempo. A esta ecuación también se le conoce como ecuación de continuidad. Desde el punto de vista físico, una simetría en un sistema significa que existe al menos una cantidad que se conserva y que el número de grados de libertad se puede reducir. La componente cero de la corriente tiene un significado muy importante, ya que al integrarla sobre todo el espacio se obtiene la carga eléctrica total del campo  $\phi$ , esto es:

$$Q \equiv \int_V j_0 d^3x \quad (2.24)$$

Y si esta cantidad se conserva en el tiempo, entonces, la ley de conservación de la corriente se cumple.

Por otro lado, cuando el parámetro  $\alpha$  no depende de las coordenadas espacio-temporales se dice que la simetría es global y, si tiene dependencia en las coordenadas se le conoce como simetría local. En el último caso la transformación que deja invariante el Lagrangiano no es tan evidente, ya que no solo el campo es el que se debe transformar sino que, también se debe hacer una transformación a la derivada para llevarla a lo que se conoce como *derivada covariante*.

### 2.6.1. Simetría $U(1)$ electromagnética

Como ya se mencionó, cuando la transformación  $\alpha(x)$  aplicada al campo  $\phi(x)$  sea local debe haber una especie de compensación en la derivada de tal forma que el Lagrangiano que involucra al campo en cuestión permanezca invariante y, como consecuencia de ello será inevitable la introducción de nuevos términos tales como campos vectoriales y constantes de acoplamiento entre otros.

El siguiente ejemplo se enfocará en el caso cuando al campo de Dirac se le aplica una transformación del tipo  $\psi(x) \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ , que claramente es local. Dado que se busca invariancia del Lagrangiano, uno está obligado a hacer las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned}\partial_\mu &\rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}\tag{2.25}$$

En esta transformación se ha introducido un nuevo campo vectorial  $A_\mu$  llamado de norma o fase, éste se acopla con el campo  $\psi(x)$ , con carga  $-e$ , en el mismo modo en que lo hace el campo de un fotón con una partícula de Dirac. Por esta razón es *natural* decir que  $A_\mu$  es el campo asociado al fotón y que la constante de acoplamiento con los campos de Dirac es igual a  $e$ . Por tanto, el nuevo Lagrangiano queda:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi'\tag{2.26}$$

o explícitamente se tiene:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu\tag{2.27}$$

La cinemática del campo  $A_\mu$  está codificada en el tensor electromagnético  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  y, por tanto, se debe de añadir en el Lagrangiano con el término:

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\tag{2.28}$$

El lagrangiano completo queda:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\tag{2.29}$$

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento para el campo  $A_\mu$  son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\tag{2.30}$$

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

que son las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas con densidad de corriente  $j^\nu = \bar{\psi}\gamma^\nu\psi$ . Es así como queda totalmente descrita la interacción entre un campo de Dirac, que representa a una partícula masiva de espín  $\frac{1}{2}$ , con un campo vectorial no masivo que se identifica como el campo del fotón. Está claro que si se agrega un término de masa al campo del fotón, el lagrangiano dejaría de ser invariante.

Al aplicar la transformación al campo  $\psi(x)$  lo que se está haciendo es introducir una fase local, que es una especie de deformación del campo, esto provoca que el Lagrangiano se vea modificado y no permanezca invariante pero cuando se reemplaza la derivada por una derivada covariante se incluye al campo del fotón el cual corrige, de alguna manera, el cambio de fase que se metió al transformar el campo  $\psi(x)$  y de esta manera deja al Lagrangiano en cuestión invariante. Cuando esto sucede, se dice que hay *invariancia de norma* y como resultado se tiene el Lagrangiano de Electrodinámica Cuántica, teoría que describe la interacción de quarks, electrones, protones y neutrones con fotones a nivel de campos cuantizados.

### 2.6.2. Simetría Quiral

Cuando se construye una corriente con los espinores de Dirac se puede hacer de maneras diversas; una de ellas es añadiendo un factor  $\gamma^5$  a la transformación de los campos (el caso Abelian), es decir:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\beta\gamma^5}\psi(x)$$

donde  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ .

Para mayor claridad sobre la simetría quiral, debe tomarse en cuenta el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^\mu\mathcal{V}_\mu + \gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\gamma^5)\psi \quad (2.31)$$

en la ecuación anterior el factor  $\mathcal{V}_\mu$  representa a un campo vectorial y  $\mathcal{A}_\mu$  a un campo axial. El Lagrangiano anterior es invariante bajo una transformación local  $U_V(1)$  como se vio en la sección anterior, lo que no es evidente, es ver que también es invariante bajo la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow e^{i\beta(x)\gamma^5}\psi \\ \bar{\psi} &\longrightarrow \bar{\psi}e^{i\beta(x)\gamma^5} \\ \mathcal{A}_\mu &\longrightarrow \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu\beta(x) \end{aligned} \quad (2.32)$$

y por el teorema de Noether, la corriente axial  $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$  se conserva. A esto se le conoce como transformación local axial  $U_{\mathcal{A}}(1)$  y, cuando se junta con la transformación  $U_{\mathcal{V}}(1)$  se obtiene la simetría  $U_{\mathcal{V}}(1) \times U_{\mathcal{A}}(1)$ .

Usualmente, a los campos fermiónicos se les divide en dos componentes; parte izquierda ( $L$ ) y parte derecha ( $R$ ) con el operador de proyección, el cual se encarga de dar quiralidad positiva y negativa a cada campo, esto es:

$$P_{R,L} \equiv P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma^5) \quad (2.33)$$

por tanto,

$$\psi_R \equiv \psi_+ = P_+\psi, \quad \psi_L \equiv \psi_- = P_-\psi \quad (2.34)$$

de esta manera se tiene:

$$\gamma^5\psi_{\pm} = \pm\psi_{\pm} \quad (2.35)$$

a partir de esto se hace una distinción entre campos derechos y campos izquierdos, dependiendo de la quiralidad  $\pm 1$ , respectivamente.

El operador de proyección tiene las siguientes propiedades:

$$P_{\pm}^2 = P_{\pm}, \quad P_+P_- = 0, \quad P_+ + P_- = 1 \quad (2.36)$$

También el campo del fotón se puede dividir en dos componentes:

$$\begin{aligned} A_{\mu}^R &= \mathcal{V}_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu} \\ A_{\mu}^L &= \mathcal{V}_{\mu} - \mathcal{A}_{\mu} \end{aligned} \quad (2.37)$$

y con ello el Lagrangiano (2.31) se puede reescribir:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R(i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^\mu A_\mu^R)\psi_R + \bar{\psi}_L(i\gamma^\mu\partial_\mu + \gamma^\mu A_\mu^L)\psi_L \quad (2.38)$$

y así, se puede transformar cada campo por separado con una transformación de norma derecha  $U_R(1)$  o izquierda  $U_L(1)$ :

$$\begin{aligned} \psi_R &\longrightarrow e^{i\beta_R(x)}\psi_R \\ A_{\mu}^R &\longrightarrow A_{\mu}^R + \partial_{\mu}\beta_R(x) \end{aligned} \quad (2.39)$$

y

$$\begin{aligned}\psi_L &\longrightarrow e^{i\beta_L(x)}\psi_L \\ A_\mu^L &\longrightarrow A_\mu^L + \partial_\mu\beta_L(x)\end{aligned}\tag{2.40}$$

Juntando ambas transformaciones el Lagrangiano anterior tiene las simetrías  $U_R(1) \times U_L(1)$ .

Por último, si se consideran las corrientes derecha e izquierda:

$$\begin{aligned}j^{\mu,R} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5)\psi \\ j^{\mu,L} &= \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5)\psi\end{aligned}\tag{2.41}$$

se puede verificar que éstas se conservan por separado, es decir:

$$\partial_\mu j^{\mu,R} = \partial_\mu j^{\mu,L} = 0\tag{2.42}$$

Si al lagrangiano (2.32) se le agregase un término de masa como  $m\bar{\psi}\psi$ , entonces la divergencia de la corriente sería:

$$\partial_\mu j^{\mu,5} = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi\tag{2.43}$$

y en ese caso la corriente no sería conservada, por lo que habría una violación de la simetría quiral y conllevaría a incumplir las identidades de Ward, como se verá más adelante.

Un tratamiento análogo se puede hacer para transformaciones no-Abelianas para un estudio más general sobre la quiralidad de los campos. En este trabajo no se hace ese estudio debido a que no es el objetivo del mismo.

## 2.7. Anomalías en QFT

A cada simetría le corresponde una corriente conservada, y estas juegan un papel muy importante en la descripción de las interacciones fundamentales de la naturaleza, solo que, en algunas ocasiones ciertas leyes de conservación, que son válidas clásicamente, no lo son en el terreno cuántico. Algo parecido es lo que pasa con las anomalías en Teoría Cuántica de Campos.

Toda la Teoría Cuántica de Campos está cimentada sobre las simetrías de norma. Sin embargo, cuando hay una violación a dichas simetrías es porque existe una o más corrientes que no se conservan, entonces se dice que hay una anomalía en la teoría, lo cual trae consigo inconsistencias dentro de la misma. Uno puede pasar por alto las anomalías a cambio de poner más restricciones en el contenido físico de la teoría, pero si se toman en cuenta, las anomalías pueden ayudar a explicar ciertos resultados experimentales. Esto último hace que las anomalías sean fundamentales de entender en la física.

Una teoría cuántica, la que sea, para que sea consistente con el *formalismo* de la propia teoría cuántica de campos, debe satisfacer las identidades de Ward. Estas son relaciones entre varias funciones de Green inducidas a partir de la validez de las leyes de conservación clásicas. Para saber cómo funcionan las identidades de Ward, basta con saber qué es lo que pasa con una función de Green de tres puntos. Las identidades de Ward de forma general se escriben:

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \langle 0 | T j^\mu(x) O^1(y_1) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle = \\ \langle 0 | T \partial_\mu^x j^\mu(x) O^1(y_1) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle + \\ \sum_{i=1}^n \langle 0 | T [j^0(x), O^i(y_i)] \delta(x_0 - y_{i0}) O^1 \dots O^{i-1} O^{i+1} \dots O^n | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

para alguna corriente  $j^\mu(x)$  y ciertos operadores  $O^i(y_i)$ , siendo  $T$  el operador de ordenación temporal para que se satisfaga causalidad. Para el caso de una función de Green de tres puntos como;  $\tau^\mu(x, y, z) = \langle 0 | T j^\mu(z) \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ , se tiene lo siguiente:

$$\partial_\mu^z \tau^\mu(x, y, z) = -i S_F(z - y) \delta^4(z - x) + i S_F(x - z) \delta^4(z - y) \quad (2.45)$$

la ecuación anterior es la identidad de Ward en el espacio de coordenadas para una función de tres puntos, que reescribiéndola en el espacio de momentos, mediante una transformada de Fourier, queda:

$$(p_\mu - p'_\mu) \tau^\mu(p, p') = S_F(p) - S_F(p') \quad (2.46)$$

lo cual conduce a la identidad de Takahashi, quedándose únicamente con el vértice  $\Gamma^\mu$  de la función de tres puntos:

$$(p_\mu - p'_\mu) \Gamma^\mu(p, p') = S_F^{-1}(p) - S_F^{-1}(p') \quad (2.47)$$

ésta última ecuación es una forma alternativa de *ver* las identidades de Ward.

## 2. SIMETRÍAS DE NORMA

---

Ahora supóngase que se tienen las corrientes vectorial, axial y pseudoescalar, definidas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} j_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \\ j_\mu^5 &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi \\ P &= \bar{\psi}\gamma_5\psi \end{aligned} \quad (2.48)$$

con ellas es posible construir funciones de Green de tres puntos que violen las identidades de Ward, dichas funciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle \\ \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle \end{aligned} \quad (2.49)$$

para ver claramente qué es lo que se obtiene apartir de las identidades de Ward con estas funciones (de Green), lo que se tiene que hacer es aplicar transformadas de Fourier a cada una de ellas y hacer el cálculo en el espacio de momentos, por ejemplo:

$$\mathbb{T}_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) \equiv \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle \quad (2.50)$$

entonces,

$$\begin{aligned} q^\lambda \mathbb{T}_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) &= \partial_z^\lambda \left( \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle \right) \\ &= \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)\partial_z^\lambda j_\lambda^5(z)|0\rangle \\ &= 2mi \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle \\ &= 2m \mathbb{T}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.51)$$

En el último paso se usó la definición:

$$\mathbb{T}_{\mu\nu}(k_1, k_2) \equiv \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle \quad (2.52)$$

Un procedimiento análogo conduce a la identidad de Ward para la corriente vectorial.



Por consiguiente, las identidades de Ward tanto para la corriente axial como para la corriente vectorial son las siguientes:

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu} \quad (2.53)$$

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0 \quad (2.54)$$

Justo en este punto es donde la anomalía cobra relevancia, porque ambas ecuaciones (las anteriores) no se pueden cumplir simultáneamente, es decir, “Si la identidad de Ward de una corriente vectorial se cumple, entonces la identidad de Ward de una corriente axial es anómala y, viceversa.”

En el caso de la anomalía axial la identidad de Ward se reescribe:

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

con la anomalía:

$$A_{\mu\nu} = -\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta \quad (2.56)$$

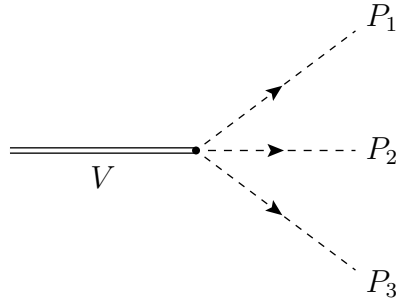
con  $k_1$  y  $k_2$  los cuadvectores de las corrientes vectoriales  $j_\mu(x)$  y  $j_\nu(y)$ , respectivamente. Este último término es una especie de corrección a la ley de conservación clásica de la corriente axial.

### 2.7.1. El Lagrangiano de la Anomalía $VPPP$

En esta pequeña sección se mostrará el Lagrangiano de una anomalía muy particular, cuando un mesón vectorial decae espontáneamente en tres mesones pseudoescalares, *e.g.*  $\omega \rightarrow 3\pi$ .

$$\mathcal{L}_{\text{anómalo}} = g_{3P} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \mathcal{V}_\mu \partial_\nu \phi^a \partial_\alpha \phi^b \partial_\beta \phi^c \quad (2.57)$$

el factor  $g_{3P} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  proviene del vértice del diagrama de Feynman con un acoplamiento igual a  $g_{3P}$ , los campos  $\phi^a$ ,  $\phi^b$  y  $\phi^c$  representan a los mesones pseudoescalares, el campo  $\mathcal{V}_\mu$  representa al mesón vectorial y, el símbolo  $\varepsilon_{abc}$  está para tomar en cuenta el intercambio de partículas. El diagrama de Feynman anómalo es el que se presenta a continuación:



**Figura 2.2:** Diagrama de Feynman anómalo.

Con esto se han mostrado los elementos necesarios para el desarrollo de este trabajo. En lo siguiente se hará una breve descripción de los procesos que se consideraron para el cálculo de algunas constantes de acoplamiento. Por otro lado, se mostrará el proceso en donde ocurre una anomalía, en concreto, la anomalía que surge en el proceso  $\omega \rightarrow 3\pi$  y se comparará con resultados experimentales. Las referencias para este capítulo se encuentran en: [3], [4], [1], [5].

## Procesos Hadrónicos y Leptónicos

---

En este capítulo se hará una descripción general de algunos procesos en donde están involucrados estados hadrónicos y leptónicos; en particular, en procesos donde aparecen los mesones vectoriales y pseudoescalares ligeros, tales como;  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $\omega$ . Por otro lado, se dará una descripción detallada de la sección eficaz de la aniquilación  $e^+e^-$  yendo a tres piones. Al final se presentarán resultados preliminares de las constantes de acoplamiento involucradas en dichos procesos.

Para comenzar a dar una descripción global de las constantes de acoplamiento, es necesario comenzar con procesos individuales o decaimientos de mesones vectoriales y pseudoescalares. Para poner en contexto lo dicho anteriormente, es necesario presentar el *Modelo de Dominancia Vectorial*.

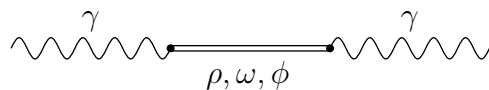
### 3.1. Modelo de Dominancia Vectorial

Este modelo fue desarrollado por Jun John Sakurai, en la década de los 60 del siglo pasado, para describir las interacciones de los fotones con los hadrones, es decir, es una teoría de interacción fuerte basada en la simetría local  $SU(2) \times U(1)$ .

En este modelo el fotón físico es una mezcla del campo del fotón con los campos de los mesones vectoriales más ligeros;  $\rho$ ,  $\omega$  y  $\phi$ . Esta teoría es una alternativa a QCD a bajas energías, en donde el fotón transmuta de forma espontánea en un mesón vectorial con una constante de acoplamiento, la cual depende del tipo de mesón involucrado.

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---



**Figura 3.1:** Esquema de dominancia vectorial.

En este modelo el fotón tiene la regla de Feynman usual:

$$\text{fotón} \longrightarrow -i \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \quad (3.1)$$

donde  $q$  es el momento del fotón, mientras que el propagador de los mesones vectoriales está dado por:

$$\text{mesón vectorial} \longrightarrow \frac{-ig_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_V^2}}{k^2 - M_V^2 + iM_V\Gamma_V} \quad (3.2)$$

donde  $k$  es el cuadrimomento del mesón vectorial,  $M_V$  es su masa y,  $\Gamma_V$  el ancho de decaimiento; cantidades que se determinan experimentalmente. El factor de acoplamiento entre el fotón y el mesón vectorial viene dado por:

$$\frac{eM_V^2}{g_{V\gamma}} \quad (3.3)$$

con  $e$  la carga del electrón en valor absoluto y,  $g_{V\gamma}$  una constante de acoplamiento por determinar.

El esquema de Dominancia Vectorial es de gran soporte para este trabajo y sobre de ello se basarán las secciones subsecuentes.

## 3.2. Anchos de decaimiento y constantes de acoplamiento

Cuando se tiene un decaimiento de una partícula inestable o una colisión entre partículas existe una manera, desde el punto de vista de la Teoría Cuántica de Campos, para describir los procesos mencionados, esta descripción se hace con la matriz de transición mejor conocida como la *amplitud de probabilidad*, la cual se puede escribir muy fácilmente con la ayuda de las reglas de Feynman. De esta forma es posible calcular el ancho de decaimiento o la sección eficaz de un proceso, estas cantidades se comparan con el experimento para determinar; constantes de

acoplamiento, vida media de las partículas, entre otros parámetros que pudieran ser relevantes para clasificar partículas elementales.

El ancho de decaimiento tiene la siguiente expresión en términos de la amplitud de transición (PDG):

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n) \quad (3.4)$$

donde  $M$  es la masa de la partícula que decae y  $d\Phi$  es el espacio fase, es decir, es la región energética permitida donde el proceso puede ocurrir. El espacio fase tiene la forma:

$$d\Phi(P; p_1, \dots, p_n) = \delta^4 \left( P - \sum_{i=1}^n p_i \right) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \quad (3.5)$$

Es importante mencionar que, aunque  $\mathcal{M}$  tiene una receta mediante las reglas de Feynman, esta cantidad depende del proceso al cual uno se esté refiriendo, es decir,  $\mathcal{M}$  no tiene la misma forma si se trata de un decaimiento  $\rho \rightarrow \pi\pi$  o uno  $\rho \rightarrow e^+e^-$ , en cada uno de estos procesos la amplitud de probabilidad tiene una expresión distinta.

En la ecuación (3.4) el elemento de matriz  $|\mathcal{M}|^2$  se interpreta de la siguiente manera:

$$\sum_s \sum_\lambda |\mathcal{M}|^2 \quad (3.6)$$

es decir, hay que sumar sobre polarizaciones de los espinores y sobre polarizaciones de los mesones vectoriales, dichas sumas son:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) &= \gamma^\mu p_\mu + m \\ \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) &= \gamma^\mu p_\mu - m \\ \sum_\lambda \varepsilon_\mu^{(\lambda)*} \varepsilon_\nu^{(\lambda)} &= -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde  $u$  y  $v$  son los espinores de los fermiones,  $m$  la masa de los mismos y  $p$  representa los distintos cuadrimentos. A su vez, se tiene que  $\varepsilon$  es la polarización del mesón vectorial,  $M$  su masa y  $\varepsilon$  es su polarización.

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---

Con las ecuaciones arriba mostradas, ya podemos comenzar con la descripción de los procesos individuales, es decir, los resultados que se presentarán a continuación se obtienen al aplicar directamente las ecuaciones, en particular las ecuaciones (3.4) y (3.5), arriba citadas y haciendo las simplificaciones pertinentes.

#### 3.2.1. Proceso $V \longrightarrow l^-l^+$

Este es un proceso en el cual un mesón vectorial decae a dos leptones que podrían ser  $e^-e^+$ ,  $\mu^-\mu^+$  o  $\tau^-\tau^+$ . La amplitud de probabilidad de este proceso está dada por la fórmula:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{q^2} \frac{e^2 m_V^2}{g_{V\gamma}} \bar{u} \gamma^\mu v \epsilon_\mu \quad (3.8)$$

mientras que la amplitud de probabilidad al cuadrado es:

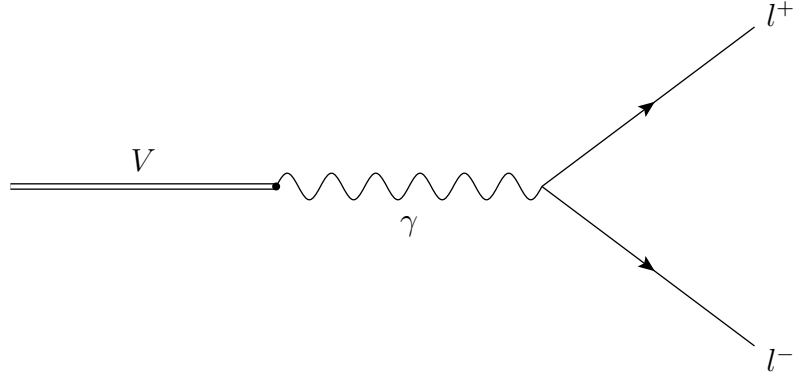
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16\alpha\pi}{3g_{V\gamma}^2} (m_V^2 + 2m_l^2) \quad (3.9)$$

así, el ancho de decaimiento queda de la siguiente manera:

$$\Gamma_{vu} = \frac{4}{3} \frac{\alpha^2 \pi}{g_{V\gamma}^2 m_V^2} (m_V^2 - 4m_l^2)^{1/2} (m_V^2 + 2m_l^2) \quad (3.10)$$

En las fórmulas anteriores,  $m_V$  y  $m_l$  son las masas del mesón vectorial y del leptón, respectivamente,  $g_{V\gamma}$  es la constante de acoplamiento entre el mesón vectorial y el fotón,  $q$  es el cuadrimomento que lleva el fotón,  $\epsilon$  es la polarización del mesón vectorial y  $\alpha$  es la constante de estructura fina.

La representación esquemática o diagrama de Feynman es la que sigue:



**Figura 3.2:** Proceso genérico  $V \longrightarrow l^+l^-$

### 3.2.2. Proceso $V \longrightarrow PP'$

Este proceso es el decaimiento de un mesón vectorial a dos mesones pseudoescalares (mesón-antimesón). A continuación se presenta la amplitud de probabilidad:

$$\mathcal{M} = -g_{Vp\bar{p}}(p_1 - p_2)^\mu \epsilon_\mu \quad (3.11)$$

a su vez, la amplitud de probabilidad al cuadrado tiene la siguiente forma:

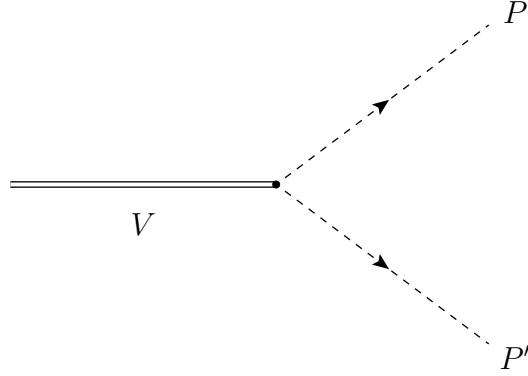
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_{VPP'}^2}{3} \frac{\left( m_V^4 - 2m_V^2 (m_P^2 + m_{P'}^2) + (m_P^2 - m_{P'}^2)^2 \right)}{m_V^2} \quad (3.12)$$

y, el ancho de decaimiento queda:

$$\Gamma_{VPP'} = \frac{g_{VPP'}^2}{48\pi} \frac{\left( m_V^4 - 2m_V^2 (m_P^2 + m_{P'}^2) + (m_P^2 - m_{P'}^2)^2 \right)^{3/2}}{m_V^5} \quad (3.13)$$

siendo  $p_1, p_2, m_P$  y  $m_{P'}$  los cuádrimomentos y las masas de los mesones pseudoescalares y,  $g_{VPP'}$  es la constante de acoplamiento entre el mesón vectorial y los dos mesones pseudoescalares.

El diagrama de Feynman del proceso antes descrito es el que a continuación se presenta:



**Figura 3.3:** Diagrama de Feynman del proceso  $V \longrightarrow PP'$

### 3.2.3. Proceso $V \longrightarrow P\gamma$

Este es un proceso en el que un mesón vectorial decae en un fotón y un mesón pseudoescalar, este proceso podría estar mediado por una resonancia del tipo mesón vectorial. La amplitud de transición, sin resonancia, está dada por el elemento de matriz:

$$\mathcal{M} = ig_{VP\gamma} \eta_\mu \varepsilon^{\beta\nu\alpha\mu} k_\beta q_\alpha \epsilon_\nu^* \quad (3.14)$$

La amplitud cuadrada es:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2g_{VP\gamma}^2}{3} \left( \frac{m_V^2 - m_P^2}{2} \right)^2 \quad (3.15)$$

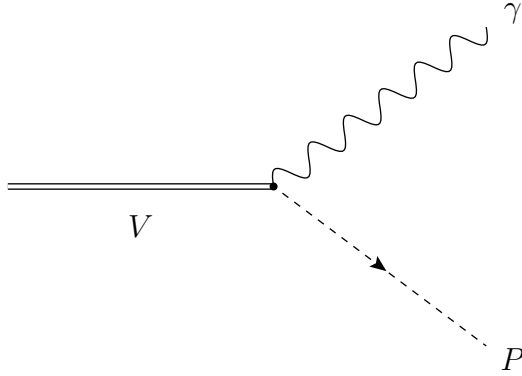
en la última ecuación  $m_V$  es la masa del mesón vectorial,  $m_P$  la masa del mesón pseudoescalar y  $g_{VP\gamma}$  es la constante de acoplamiento entre las tres partículas involucradas en el proceso.

El ancho de decaimiento queda:

$$\Gamma_{VP\gamma} = \frac{g_{VP\gamma}^2}{96\pi} \left( \frac{m_V^2 - m_P^2}{m_P} \right)^3 \quad (3.16)$$

Mientras que el diagrama de Feynman sin la resonancia es el siguiente:





**Figura 3.4:** Proceso general  $V \longrightarrow P\gamma$

Como se mencionó, este proceso podría estar mediado por una resonancia hadrónica, desde el punto de vista del Modelo de Dominancia Vectorial, lo cual se vería reflejado en la amplitud de probabilidad y el ancho de decaimiento. Siendo este el caso la amplitud se reescribe:

$$\mathcal{M} = ig_{VVP} \eta_\nu \varepsilon^{\alpha\nu\beta\mu} k_{1\alpha} k_{2\beta} \left( \frac{-g_{\mu\sigma} + \frac{k_{2\mu} k_{2\sigma}}{m_{V2}}}{k_2^2 - m_{V2} + i\epsilon} \right) \epsilon^{*\sigma} \frac{em_{V2}^2}{g_{V\gamma}} \quad (3.17)$$

así, la amplitud al cuadrado queda:

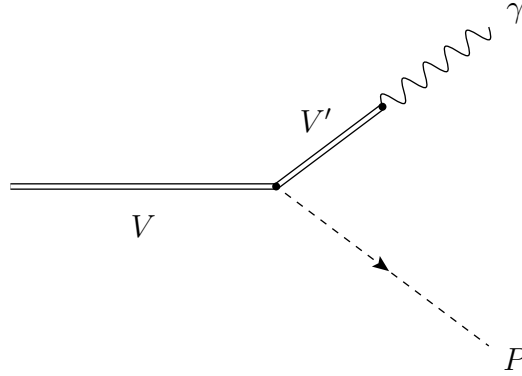
$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^2 g_{VVP}^2}{3g_{V\gamma}^2} \left( \frac{m_V^2 - m_P^2}{2} \right)^2 \quad (3.18)$$

el ancho de decaimiento es:

$$\Gamma_{VP\gamma} = \frac{g_{VVP}^2 \alpha}{24g_{V\gamma}^2} \left( \frac{m_V^2 - m_P^2}{m_V} \right)^3 \quad (3.19)$$

Aquí es necesario señalar algo importante, debido a la aparición de la resonancia hadrónica surgen dos constantes de acoplamiento;  $g_{VVP}$  y  $g_{V\gamma}$  las cuales podrían determinarse a partir de los experimentos que se llevan acabo en los grandes colisionadores de partículas.

Así como la amplitud y el ancho de decaimiento se vieron modificados debido a la resonancia intermedia, el diagrama de Feynman correspondiente también se modifica, éste queda de la siguiente forma:



**Figura 3.5:** Proceso general  $V \rightarrow P\gamma$ , con resonancia intermedia.

Es importante mencionar que una parte esencial en la que se basa este trabajo es el modelo de dominancia vectorial (VDM), modelo que nos permite incluir en el proceso  $V \rightarrow P\gamma$  una resonancia hadrónica, para ser precisos un mesón vectorial, que se acopla al fotón de manera directa. La regla de Feynman, en términos generales, nos dice que el acoplamiento fotón-mesón vectorial será inversamente proporcional a la constante  $g_{V\gamma}$ .

### 3.2.4. Proceso $P \rightarrow \gamma\gamma$

Este es un decaimiento de un mesón pseudoescalar en dos fotones, este proceso parecido al anterior, podría ser mediado por dos resonancias hadrónicas intermedias, por ejemplo; un par de mesones vectoriales. Sin resonancia alguna, la amplitud de probabilidad es:

$$\mathcal{M} = ig_{P\gamma\gamma} \varepsilon^{\alpha\mu\beta\nu} q_{1\beta} q_{2\alpha} \epsilon_{1\mu}^* \epsilon_{2\nu}^* \quad (3.20)$$

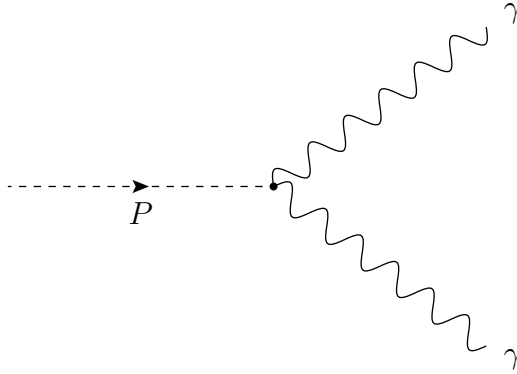
la amplitud al cuadrado queda:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_{P\gamma\gamma}^2}{2} m_P^4 \quad (3.21)$$

Por lo tanto, la expresión para el decaimiento es la siguiente:

$$\Gamma_{P\gamma\gamma} = \frac{1}{32\pi} g_{P\gamma\gamma}^2 m_P^3 \quad (3.22)$$

donde  $m_P$  es la masa del mesón pseudoescalar y  $g_{P\gamma\gamma}$  es la constante de acoplamiento entre el par de fotones y el pseudoescalar. El correspondiente diagrama de Feynman es el que se presenta a continuación:



**Figura 3.6:** Diagrama de Feynman del decaimiento  $P \rightarrow \gamma\gamma$

Basándose de nueva cuenta en el Modelo de Dominancia Vectorial, en este proceso podrían haber resonancias hadrónicas, por tal motivo es necesario incluirlas. Considerando lo anterior, las ecuaciones para la amplitud de probabilidad y el ancho de decaimiento se reescriben:

$$\mathcal{M} = ig_{VVP} \frac{4\pi\alpha m_{V1}^2 m_{V2}^2}{g_{V1\gamma} g_{V2\gamma}} \epsilon_1^{*\sigma} \epsilon_2^{*\lambda} \left( \frac{-g_{\sigma\mu} + \frac{k_{1\sigma} k_{1\mu}}{m_{V1}^2}}{k_1^2 - m_{V1}^2 + i\epsilon_1} \right) \left( \frac{-g_{\lambda\nu} + \frac{k_{2\lambda} k_{2\nu}}{m_{V2}^2}}{k_2^2 - m_{V2}^2 + i\epsilon_2} \right) \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} k_{1\alpha} k_{2\beta} \quad (3.23)$$

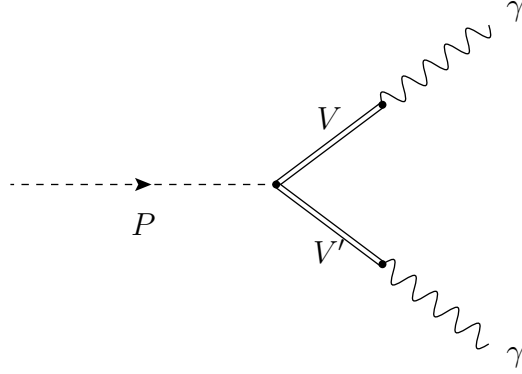
mientras que la amplitud al cuadrado es:

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16\alpha^2 \pi^2 g_{VVP}^2}{g_{V1\gamma}^2 g_{V2\gamma}^2} m_P^4 \quad (3.24)$$

y el ancho de decaimiento:

$$\Gamma_{P\gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 \pi g_{VVP}^2}{g_{V1\gamma}^2 g_{V2\gamma}^2} m_P^3 \quad (3.25)$$

Nótese que ahora se tienen tres constantes de acoplamiento por determinar;  $g_{VVP}$ ,  $g_{V1\gamma}$  y  $g_{V2\gamma}$ . Por otro lado, el diagrama de Feynman queda de la manera siguiente:



**Figura 3.7:** Diagrama de Feynman del proceso  $P \rightarrow \gamma\gamma$  con estados intermedios

### 3.2.5. Proceso $V \rightarrow 3P$

Este es un decaimiento de un mesón vectorial a tres mesones pseudoescalares, el cual puede ocurrir de dos formas; la primera es cuando el mesón vectorial decae en un par mesón vectorial virtual-mesón pseudoescalar, luego el mesón vectorial virtual decae en dos mesones pseudoescalares y, la segunda es cuando el mesón vectorial decae espontáneamente en los tres mesones pseudoescalares sin alguna partícula intermedia, este proceso es descrito por el término de la anomalía discutido en el capítulo anterior.

Basándonos en el artículo de Kumar[[6]], sabemos que el ancho de decaimiento de una partícula yendo a  $n$  partículas, viene dado por la ecuación:

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n) \quad (3.26)$$

Ahora, si se definen las siguientes variables  $p_{ij} = p_i + p_j$  y  $m_{ij}^2 = p_{ij}^2$ , entonces la ecuación para el ancho de decaimiento se reescribe como:

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M^3} |\overline{\mathcal{M}}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2 \quad (3.27)$$

una propiedad que se cumple de las definiciones anteriores es:

$$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \quad (3.28)$$

donde  $M$  es la masa del mesón vectorial que decae, mientras que,  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$  son las masas de los mesones pseudoescalares finales. En este caso, la amplitud de transición al cuadrado está dada por:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & \frac{4}{3}(p_1^2 p_2^2 p_3^2 - p_1^2(p_2 \cdot p_3)^2 - p_2^2(p_3 \cdot p_1)^2 - p_3^2(p_1 \cdot p_2)^2 \\
& + 2(p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3)(p_3 \cdot p_1)) \times \\
& \left[ \left( 4g_{v3\pi} + \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_1^2 - m_{v2}^2)}{(k_1^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} + \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_2^2 - m_{v2}^2)}{(k_2^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right. \right. \\
& + \left. \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_3^2 - m_{v2}^2)}{(k_3^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right)^2 + \left( -\frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_1^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} - \right. \\
& \left. \left. \frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_2^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} - \frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_3^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right)^2 \right] \tag{3.29}
\end{aligned}$$

donde  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  son los cuadrimomentos de los mesones pseudoescalares finales,  $m_{v2}$  es la masa del estado intermedio, en este caso  $\rho(770)$ ,  $\epsilon = m_{v2}\Gamma_{v2}$ , siendo  $\Gamma_{v2}$  el valor central del ancho de decaimiento del mesón vectorial intermedio y, los cuadrimomentos  $k$  están definidos por las relaciones:

$$\begin{aligned}
k_1^2 &= m_2^2 + m_3^2 + 2p_2 \cdot p_3 \\
k_2^2 &= m_1^2 + m_3^2 + 2p_1 \cdot p_3 \\
k_3^2 &= m_1^2 + m_2^2 + 2p_1 \cdot p_2
\end{aligned} \tag{3.30}$$

así, queda determinada toda la cinemática del cuadrado de la amplitud.

El caso antes descrito, involucra tres diagramas distintos con propagadores vectoriales asociados a posibles intercambios en las partículas finales, es decir, intercambios en los mesones pseudoescalares.

Es aquí, en el proceso  $\omega \rightarrow 3P$ , donde aparecen las constantes de acoplamiento mezcladas, es decir, la amplitud de probabilidad al cuadrado es una función multivaluada de ellas y, por ello fue de gran ayuda haber calculado previamente los procesos individuales. Nótese que aparece una nueva constante de acoplamiento, ésta es la que corresponde al término anómalo y es primordial estimar un valor que sea congruente tanto con los procesos anteriores como con el que se muestra en esta subsección.

Por otro lado, los límites de integración para obtener el ancho de decaimiento total, son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(m_{12}^2)_{\text{mín}} &= (m_1 + m_2)^2 \\
(m_{12}^2)_{\text{máx}} &= (M - m_3)^2
\end{aligned} \tag{3.31}$$

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---

y

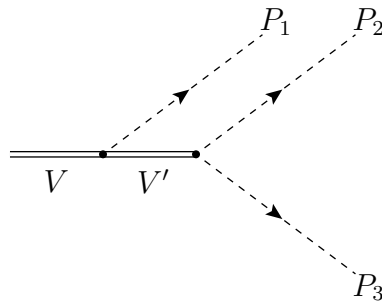
$$\begin{aligned} (m_{23}^2)_{\min} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - \left( \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2 \\ (m_{23}^2)_{\max} &= (E_2^* + E_3^*)^2 - \left( \sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

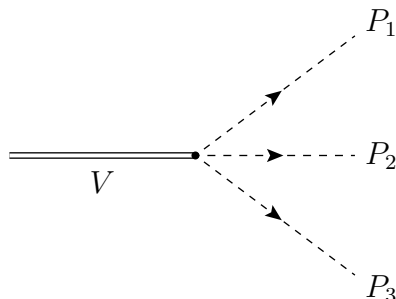
$$\begin{aligned} E_2^* &= \frac{m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_{12}} \\ E_3^* &= \frac{M^2 - m_{12}^2 - m_3^2}{2m_{12}} \end{aligned} \quad (3.33)$$

son las energías de las partículas 2 y 3 en el marco de referencia  $m_{12}$ .

Asimismo se presentan los dos diagramas de Feynman que corresponden a este proceso:



**Figura 3.8:** Diagrama de Feynman del proceso  $\omega \rightarrow 3P$



**Figura 3.9:** Diagrama de Feynman anómalo.

La anomalía también se puede dar en la aniquilación  $e^+e^-$  como se verá a continuación.

### 3.3. Sección Eficaz $e^+e^- \rightarrow 3P$

La sección eficaz, para cualquier tipo de proceso, se escribe de manera general como:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2}{4\sqrt{(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(q_1 + q_2; p_1, \dots, p_n) \quad (3.34)$$

donde  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $m_1$  y  $m_2$  son los cuádrimomentos y las masas de las partículas que colisionan, respectivamente. El espacio fase tiene la misma forma que en el ancho de decaimiento si se hace el cambio de variable  $P = q_1 + q_2$ .

En el caso particular de este trabajo las partículas finales son tres mesones pseudoescalares, por ello la asignación de momentos a estas partículas es  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  con sus respectivas masas  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . Como el desarrollo de este trabajo está basado en el Modelo de Dominancia Vectorial, es importante notar que, se considera que hay un estado hadrónico intermedio en el proceso, el cual es un mesón vectorial  $\omega$  y, por ende, sus variables cinemáticas también son parte de dicha parametrización. Con esta asignación, es relativamente fácil parametrizar el cuadrado de la amplitud de probabilidad en términos de productos escalares de los cuádrimomentos iniciales y finales, de masas y, de las constantes de acoplamiento incluyendo el término anómalo.

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---

La amplitud de probabilidad de que ocurra la colisión con tres mesones pseudo-escalares como resultado, es:

$$\mathcal{M} = ib\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} p_{3\mu} (v\gamma_\nu \bar{u}) \quad (3.35)$$

en donde  $v\gamma_\nu \bar{u}$  es la parte leptónica y  $b\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} p_{1\alpha} p_{2\beta} p_{3\mu}$  la parte hadrónica, mientras que, en la constante  $b$  están incluidos los propagadores y las constantes de acoplamiento, así como la constante de estructura fina y la energía a la que ocurre la dispersión  $e^+e^-$ .

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{4\pi^2 a^2 \alpha^2 m_{v1}^4}{g_{v\gamma}^2 s^2} (-8(p_2 \cdot q_1)(p_2 \cdot q_2)(p_1 \cdot p_3)^2 - 8(p_3 \cdot q_2)((p_3 \cdot q_1) \\ & ((p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2) + p_1^2(p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot q_1)) + 8(p_1 \cdot q_1)((p_1 \cdot q_2) \\ & (p_2^2 p_3^2 - (p_2 \cdot p_3)^2) + (p_2 \cdot q_2)((p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3) - p_3^2(p_1 \cdot p_2)) + \\ & (p_3 \cdot q_2)((p_1 \cdot p_2)(p_2 \cdot p_3) - p_2^2(p_1 \cdot p_3))) + 4(q_1 \cdot q_2)(p_2^2(p_1 \cdot p_3)^2 \\ & + p_3^2((p_1 \cdot p_2)^2 - p_1^2 p_2^2) - 2(p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_3)) + 8(p_1 \cdot p_3) \\ & ((p_1 \cdot q_2)((p_2 \cdot p_3)(p_2 \cdot q_1) - p_2^2(p_3 \cdot q_1)) + (p_1 \cdot p_2)((p_2 \cdot q_2) \\ & (p_3 \cdot q_1) + (p_2 \cdot q_1)(p_3 \cdot q_2))) - 8((p_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot q_2) - p_1^2(p_2 \cdot q_2)) \\ & (p_3^2(p_2 \cdot q_1) - (p_2 \cdot p_3)(p_3 \cdot q_1))) \times B \end{aligned} \quad (3.36)$$

en la ecuación de arriba  $B$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} B = & \left[ \left( 4g_{v3\pi} + \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_1^2 - m_{v2}^2)}{(k_1^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} + \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_2^2 - m_{v2}^2)}{(k_2^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{g_{VPP}g_{VVP}(k_3^2 - m_{v2}^2)}{(k_3^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right)^2 + \left( -\frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_1^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_2^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} - \frac{g_{VPP}g_{VVP}\epsilon}{(k_3^2 - m_{v2}^2)^2 + \epsilon^2} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

que es exactamente el mismo factor multiplicativo que aparece en el proceso  $\omega \rightarrow 3P$ .

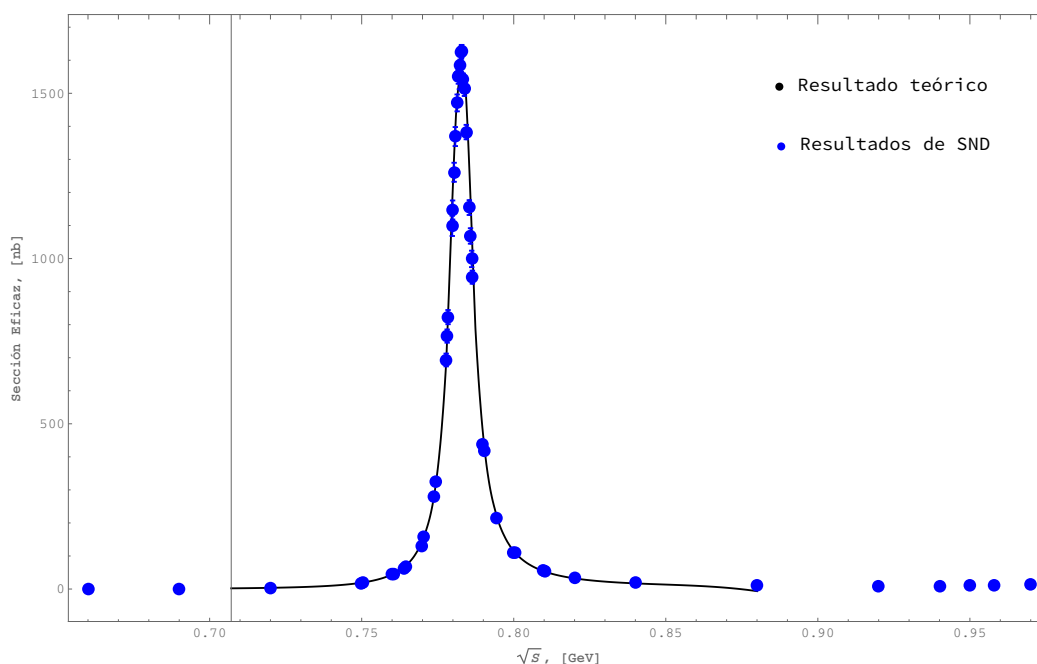
El cálculo anterior se hizo con Mathematica con la paquetería FeynCalc [11] es por ello que a diferencia con  $\mathcal{M}$ , las constantes y propagadores aparecen explícitamente, excepto el propagador del mesón vectorial  $m_{v1}$  que está incluido en  $a$ .

Cosas relevantes a notar en la expresión anterior:



1. Salvo masas, anchos de decaimiento y otras constantes, que en principio están fijos, el cuadrado de la amplitud quedó parametrizado en términos de las constantes de acoplamiento indeterminadas.
2. La energía de la dispersión queda como parámetro libre. Esto quiere decir que, uno puede asignar valores arbitrarios a esta variable y comparar directamente con el experimento.
3. Está incluido explícitamente el término anómalo, y así uno puede *medir* sus efectos sobre la sección eficaz total.

Una vez que se obtuvo la amplitud de probabilidad al cuadrado, lo siguiente fue incluirla en la sección eficaz diferencial y se procedió con la integración. Para ello se recurrió al artículo de Kumar [6] en donde viene cómo hacer la integración de espacio fase cuando hay una dispersión de dos partículas yendo a  $n$ -cuerpos. Ya hecho el cálculo completo, se compararon los resultados teóricos con resultados experimentales reportados por SND y, se obtuvo lo siguiente:



**Figura 3.10:** Sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ , sin tomar en cuenta el término anómalo.

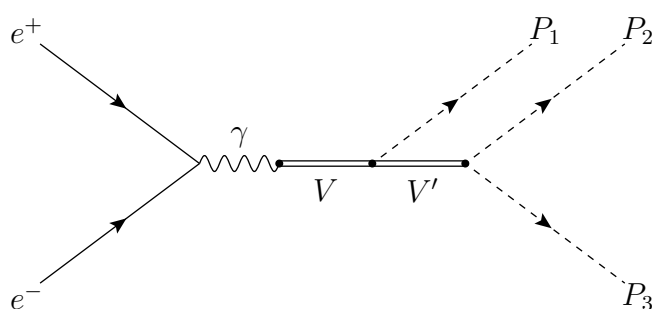
La gráfica anterior muestra una comparación directa de los datos tomados de SND y de lo que se hizo teóricamente con los resultados obtenidos de los procesos individuales, es decir, las constantes de acoplamiento que se usaron para

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---

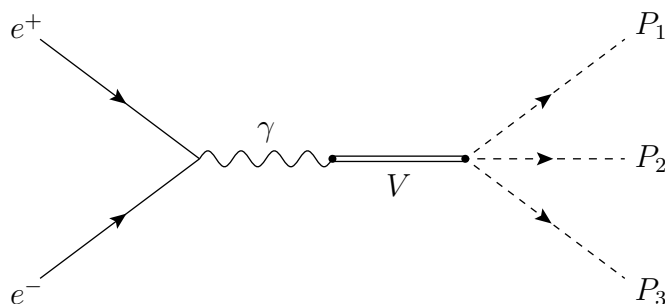
*completar* la sección eficaz teórica fueron las que se obtuvieron de los procesos de decaimiento, previamente presentados en este capítulo. Es preciso resaltar que, en la gráfica anterior, en el resultado teórico, no se tomó en cuenta la constante de acoplamiento de la anomalía, ésta se tomará en cuenta hasta que se haga el *ajuste* con la función  $\chi^2$ .

Para este caso existen dos diagramas de Feynman:



**Figura 3.11:** Producción de tres mesones vectoriales por medio de una aniquilación.

Es justo en este proceso donde aparece un término anómalo y es cuando el mesón vectorial intermedio repentinamente decae en los tres piones, la representación gráfica de ello es la siguiente:



**Figura 3.12:** Diagrama de Feynman del término anómalo en la producción de tres piones.

Es súmamente importante saber qué valor de la constante de acoplamiento de la anomalía,  $g_{V_{3P}}$ , es el que se adecua mejor tanto para el decaimiento como para la aniquilación, de manera tal que sea consistente con las otras constantes de acoplamiento que aparecen en dichos procesos y en los individuales.

### 3.4. Resultados preliminares

Antes de comenzar con el análisis de  $\chi^2$ , es conveniente mostrar los resultados que se obtuvieron para los procesos arriba mostrados. Se excluye a la sección eficaz porque la expresión que resulta es bastante complicada de *manejar* y, depende de cuatro constantes de acoplamiento, lo que sugiere que se deben fijar al menos tres para poder despejar alguna de ellas.

Proceso	Constante de acoplamiento	Valor	Observable
$\rho^0 \rightarrow e^+e^-$	$g_{\rho\gamma}$	$4.9574 \pm 0.0209$	$\Gamma_{\rho ee}$
$\rho^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$	$g_{\rho\gamma}$	$5.0447 \pm 0.1484$	$\Gamma_{\rho\mu\mu}$
$\omega \rightarrow e^+e^-$	$g_{\omega\gamma}$	$17.0621 \pm 0.2774$	$\Gamma_{\omega ee}$
$\omega \rightarrow \mu^+\mu^-$	$g_{\omega\gamma}$	$17.1262 \pm 2.8685$	$\Gamma_{\omega\mu\mu}$
$\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$	$g_{\rho\pi\pi}$	$5.9763 \pm 0.0160$	$\Gamma_{\rho\pi\pi}$
$\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^0$	$g_{\rho\pi\pi}$	$5.9548 \pm 0.0159$	$\Gamma_{\rho\pi\pi}$
$\omega \rightarrow \pi^0\gamma$	$g_{\rho\omega\pi}$	$11.4899 \pm 0.3872 \text{ GeV}^{-1}$	$\Gamma_{\omega\pi\gamma}$
$\rho^0 \rightarrow \pi^0\gamma$	$g_{\rho\omega\pi}^*$	$14.2235 \pm 2.2273 \text{ GeV}^{-1}$	$\Gamma_{\rho\pi\gamma}$
$\rho^\pm \rightarrow \pi^\pm\gamma$	$g_{\rho\omega\pi}^*$	$12.3581 \pm 1.8056 \text{ GeV}^{-1}$	$\Gamma_{\rho\pi\gamma}$
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$g_{\rho\omega\pi}^{**}$	$11.7120 \pm 1.3972 \text{ GeV}^{-1}$	$\Gamma_{\pi\gamma\gamma}$
$\omega \rightarrow 3\pi$	$g_{\rho\omega\pi}^{***}$	$15.6309 \pm 0.6121 \text{ GeV}^{-1}$	$\Gamma_{\omega 3\pi}$

**Tabla 3.1:** Constantes de acoplamiento en procesos individuales.

El hecho de que se estn usando asteriscos en *las constantes*  $g_{\omega\rho\pi}$ , sin importar el orden de los subíndices, no quiere decir que sean constantes distintas, simplemente es para distinguir los procesos de los cuales provienen y para denotar un orden en el cual aparecen las partículas en cada proceso.

Los valores que se muestran arriba se obtuvieron con datos experimentales reportados en el PDG [18] tales como; masas de partículas y anchos de decaimiento,

### 3. PROCESOS HADRÓNICOS Y LEPTÓNICOS

---

principalmente. Los pasos que se siguieron, para obtener los resultados anteriores fueron los que se muestran a continuación:

1. Se igualó el ancho de decaimiento teórico con el ancho de decaimiento experimental reportado.
2. Se asumió que los únicos parámetros libres que aparecen en el ancho de decaimiento teórico son las constantes de acoplamiento.
3. Con la hipótesis anterior, se despejó las constantes de acoplamiento para obtener un valor *bien definido*.

En este punto es preciso hacer un paréntesis y hablar de “promedios pesados”. El promedio pesado de una cantidad,  $x$ , de la cual se tienen  $n$  datos, se define de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^n w_i x_i}{\sum_i^n w_i} \quad (3.38)$$

donde  $x_i$  es el  $i$ -ésimo dato o *medición* y  $w_i$  es el  $i$ -ésimo peso asociado a dicha medición. En el caso particular de este trabajo  $x_i$  es la constante de acoplamiento y  $w_i$  es el error obtenido de la constante.

Una vez obtenidos los resultados *individuales*, se sacaron los promedios pesados para tener una especie de constantes globales preliminares. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Constante	Valor
$\bar{g}_{\rho\gamma}$	$4.968 \pm 0.018$
$\bar{g}_{\omega\gamma}$	$17.068 \pm 0.253$
$\bar{g}_{\rho\pi\pi}$	$5.966 \pm 0.008$
$\bar{g}_{\omega\rho\pi}$	$12.944 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-1}$

**Tabla 3.2:** Promedios pesados de las constantes de acoplamiento.

En el siguiente capítulo se dará una descripción más general de estas constantes de acoplamiento por medio del método de  $\chi^2$  y se verá si es que hay rompimiento de simetría debido a la diferencia de masas de los quarks. Para este capítulo las referencias se encuentran en: [7], [1], [6], [8], [9], [10], [11].

# Valores de las Constantes de Acoplamiento con $\chi^2$

---

En este capítulo se darán a conocer los resultados que se obtuvieron a través del método de  $\chi^2$  para los mesones más ligeros, además, se hará un análisis del posible rompimiento de simetría de isospín reflejado en las constantes de acoplamiento basado en un análisis teórico-experimental y, se mostrará una pequeña tabla con resultados de constantes de acoplamiento para mesones más pesados. Antes de exponer los resultados se dará un breve introducción al método de  $\chi^2$ .

## 4.1. Método de $\chi^2$

El estimador  $\chi^2$ , sirve para optimizar un conjunto de parámetros libres o no determinados dentro de una teoría, de tal forma que estos parámetros tengan un impacto general dentro de la teoría y sea consistente con cierto grado de error. El método consiste en comparar la teoría con el experimento, directamente, a través de la definición de una función multivaluada, donde los parámetros libres toman el papel de variables independientes. Se encuentra el mínimo de dicha función,  $\chi^2$ , y los valores para los cuales se minimiza se toman como los valores óptimos que se ajustan a los grados de libertad de la función  $\chi^2$ . La expresión de  $\chi^2$  es la siguiente:

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \mu(x_i; \boldsymbol{\theta}))^2}{E_i^2}$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  son los parámetros a estimar,  $y_i$  podrían ser los resultados de uno o varios experimentos y,  $\mu$  sería el equivalente a las ecuaciones que

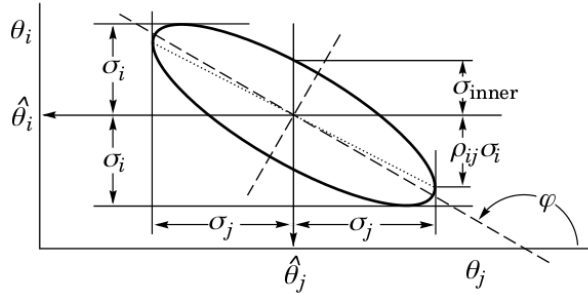
#### 4. VALORES DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO CON $\chi^2$

---

se obtienen de la teoría, por ejemplo; anchos de decaimiento y secciones eficaces, que a su vez, dependen de las cantidades  $x_i$  y de los parámetros indeterminados  $\theta_1, \dots, \theta_N$ . Para el caso de este trabajo,  $x_i$  son las masas de las partículas involucradas en los procesos del capítulo anterior y,  $y_i$  son los datos experimentales que se tienen de los anchos de decaimiento, así como de la sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ .

La función anterior es, básicamente, el método de mínimos cuadrados aunque la diferencia radica en que la distribución de las variables (experimento)  $y_i$  sean independientes y también que cada una de ellas sea no Gaussiana.

Para determinar la desviación estándar de cada uno de los parámetros que minimizan  $\chi^2$  es necesario hacerlo por pares. Es decir, supóngase que la función  $\chi^2$  se minimiza en el conjunto de parámetros  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N)$ , se escogen dos de esas variables; por ejemplo  $\hat{\theta}_i$  y  $\hat{\theta}_j$ , éstas dos variables escogidas se varían de tal manera que  $\chi^2(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_i + \delta\theta_i, \dots, \hat{\theta}_j + \delta\theta_j, \dots, \hat{\theta}_N) = \chi^2_{\min} + 1$ , mientras las demás permanecen fijas en los valores previamente encontrados. Esta ecuación define una elipse en el plano  $\theta_i$ - $\theta_j$  y las tangentes a la elipse son las desviaciones estándar  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$  de las variables antes elegidas. Geométricamente se vería de la siguiente forma:



**Figura 4.1:** Desviaciones estándar de los parámetros  $\hat{\theta}_i$  y  $\hat{\theta}_j$ .

## 4.2. Resultados basados en $\chi^2$

A continuación se muestran los resultados obtenidos minimizando la función  $\chi^2$ :

Para hacer la estimación de las constantes de acoplamiento primero se consideraron únicamente los procesos de decaimiento en donde están involucrados los mesones vectoriales y pseudoescalares más ligeros, sin considerar la dispersión  $e^+e^-$ . Lo que se obtuvo con  $\chi^2$  fue lo siguiente.

Constantes de acoplamiento con $\chi^2$
$g_{\rho\gamma} = 4.959 \pm 0.122$
$g_{\omega\gamma} = 17.062 \pm 0.346$
$g_{\rho\pi\pi} = 5.934 \pm 0.097$
$g_{\omega\rho\pi} = 11.394 \pm 0.289 \text{ GeV}^{-1}$
$g_{\omega 3\pi} = -51.868 \pm 1.507 \text{ GeV}^{-3}$

**Tabla 4.1:** Constantes de acoplamiento sin considerar sección eficaz.

Los resultados arriba expuestos se realizaron con las ecuaciones presentadas en el capítulo anterior, notamos que para el proceso de un mesón vectorial yendo a un par de leptones, en donde se encuentra la constante de acoplamiento  $g_{V\gamma}$ , la constante depende del mesón vectorial inicial; ya que en un caso  $g_{V\gamma} = g_{\rho\gamma} = 4.959$  mientras que, en el otro caso  $g_{V\gamma} = g_{\omega\gamma} = 17.062$ . Lo anterior tiene bastante sentido ya que no se está considerando energía adicional más que la energía que corresponde enteramente a la masa de los mesones vectoriales que decaen.

Nótese que aparece la constante de acoplamiento de la anomalía, sin embargo, ésta no se puede tomar tan en serio porque sólo aparece en el proceso  $\omega \rightarrow 3P$  y es como si tuviese únicamente un grado de libertad lo cual la hace poco fiable.

Constantes de acoplamiento con $\chi^2$
$g_{\rho\gamma} = 5.001 \pm 0.020$
$g_{\omega\gamma} = 18.086 \pm 0.031$
$g_{\rho\pi\pi} = 5.953 \pm 0.009$
$g_{\omega\rho\pi} = 12.678 \pm 0.020 \text{ GeV}^{-1}$
$g_{\omega 3\pi} = -35.860 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-3}$

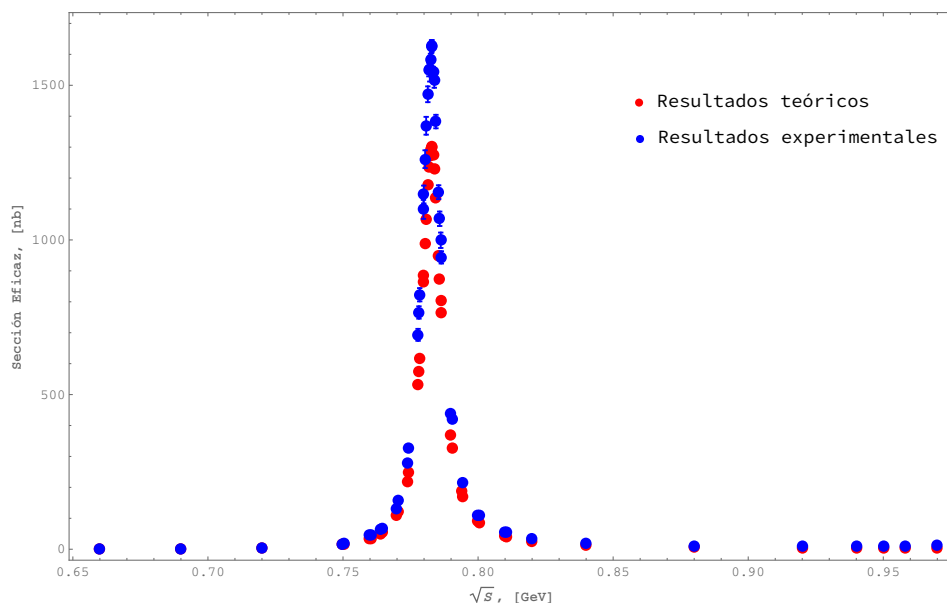
**Tabla 4.2:** Constantes de acoplamiento con sección eficaz incluida

En la tabla anterior también se incluye la constante de acoplamiento para la anomalía, de tal forma que este valor es compatible con el decaimiento de  $\omega \rightarrow 3\pi$  y con la sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$  dado que estos observables están incluidos en la función  $\chi^2$ . Aquí es importante resaltar que la forma de la sección eficaz que se *metió* a la función  $\chi^2$  no fue continua sino discreta, es decir, se obtuvieron *secciones eficaces* dentro de un intervalo de energía y se comparó con lo que reportó SND en 2013.

#### 4. VALORES DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO CON $\chi^2$

---

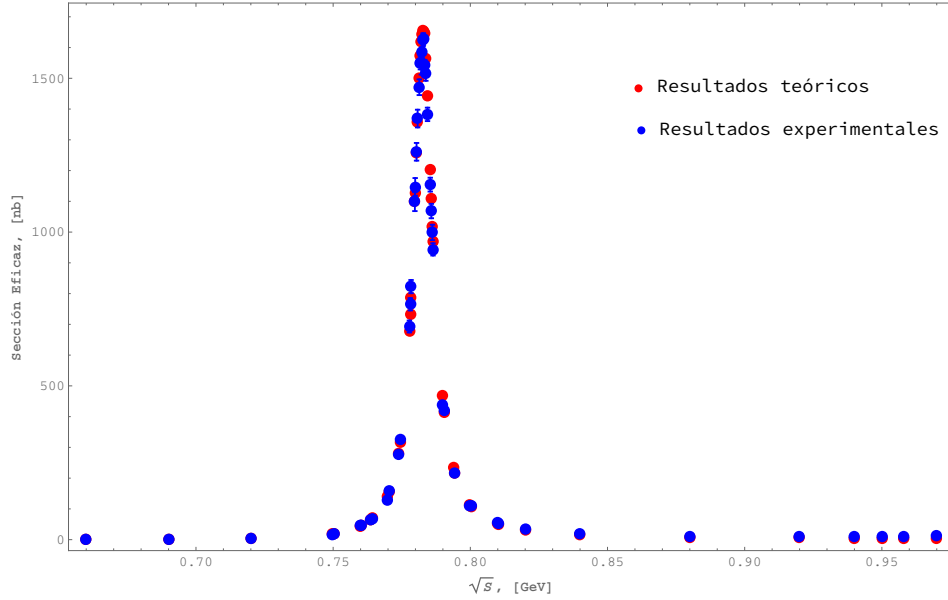
Hay que recordar que uno de los parámetros libres en la sección eficaz, además de las constantes de acoplamiento, es la energía y que se tomaron exactamente los mismos valores (que SND) dentro de la sección eficaz teórica para que la comparación fuese directa.



**Figura 4.2:** Sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ , sin tomar en cuenta el término anómalo.

En la gráfica anterior se muestra la sección eficaz teórica, los *puntos* rojos, usando los resultados de la función  $\chi^2$  sin tomar en cuenta la constante de acoplamiento de la anomalía y, los resultados experimentales de SND, los *puntos* azules. Es interesante notar que, se calcularon los máximos de cada una de las gráficas; para la parte teórica el máximo se encontró en  $\sigma_{\text{máx}} = 1301.71 \text{ nb}$  en el punto  $\sqrt{s} = 0.78277 \text{ GeV}$ , para los datos experimentales el máximo se localizó en  $\sigma_{\text{máx}} = 1627.56 \text{ nb}$  en el punto  $\sqrt{s} = 0.78290 \text{ GeV}$ . Nótese que la diferencia entre máximos está alrededor de los 320 nb, lo que figura que sí es considerable la anomalía para este proceso.





**Figura 4.3:** Sección eficaz  $e^+e^- \rightarrow 3\pi$ , tomando en cuenta el término anómalo.

A diferencia de la figura 1, en esta última se tomó en consideración la constante de acoplamiento de la anomalía,  $g_{3\pi} = -35.8602 \text{ GeV}^{-3}$  y, claramente se ve que tanto el experimento como la teoría son compatibles dentro de un margen de error. De nueva cuenta, se calcularon los máximos de ambas partes; el máximo de la teoría fue  $\sigma_{\text{máx}} = 1655.78 \text{ nb}$  y, evidentemente, para los datos de SND fue el mismo máximo que ya se mostró  $\sigma_{\text{máx}} = 1627.56 \text{ nb}$ . Tomando en cuenta la anomalía, la diferencia entre máximos se hace menor que  $30 \text{ nb}$ . Es importante mencionar que los puntos donde se encontraron los máximos teóricos son los mismos, como era de esperarse, ya que es donde se encuentra el polo del propagador del mesón vectorial  $\omega$ , que es cuando el propagador es evaluado justo en el valor de su masa,  $m = 0.78265 \pm 0.00012 \text{ GeV}$ .

En la literatura podemos encontrar algunos valores que se han calculado para la constante de acoplamiento de la anomalía, en la siguiente tabla se muestran algunos de ellos:

Referencia	$ g_{\omega 3\pi}  [\text{GeV}^{-3}]$
Rudaz, Cohen [12][13]	47
Dominguez [14]	$29 \pm 3$
Kuraev <i>et al.</i> [15][16]	123
Kaymakcalan <i>et al.</i> [17]	37
Gudiño, Toledo [10]	$65 \pm 7$

**Tabla 4.3:** Diversos valores de la constante  $g_{\omega 3\pi}$ .

En la siguiente sección se verá el caso del rompimiento de la simetría de isoespín y se pondrán algunos ejemplos donde sí ocurre y otros donde no.

### 4.3. Rompimiento de simetría de las constantes de acoplamiento

En esta sección se verán unos cuantos ejemplos del rompimiento de isoespín debido a la diferencia de masas de los quarks más ligeros ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) en el caso de procesos  $V \rightarrow PP'$ . Para ver esto, es necesario escribir los *kets* de las partículas de interés en la base de isoespín, esto se hace de la forma siguiente:

Considérense los estados  $|I^{(1)} I_3^{(1)}\rangle$  y  $|I^{(2)} I_3^{(2)}\rangle$  y, una base  $|I I_3\rangle$ , entonces el estado compuesto  $|I^{(1)} I_3^{(1)}\rangle \otimes |I^{(2)} I_3^{(2)}\rangle \equiv |I^{(1)} I^{(2)} I_3^{(1)} I_3^{(2)}\rangle$  se puede expresar en términos de la base formada por  $|I I_3\rangle$  de la forma:

$$|I^{(1)} I^{(2)} I_3^{(1)} I_3^{(2)}\rangle = \sum_{I_3} \langle I I_3 | I^{(1)} I^{(2)} I_3^{(1)} I_3^{(2)} \rangle |I I_3\rangle \quad (4.1)$$

donde  $\langle I I_3 | I^{(1)} I^{(2)} I_3^{(1)} I_3^{(2)} \rangle$  se les conoce como los coeficientes de Clebsch-Gordan. Además:

$$\begin{aligned} I &= I^{(1)} + I^{(2)} \\ I_3 &= I_3^{(1)} + I_3^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

es decir,  $I$  e  $I_3$  son el isoespín y la proyección del isoespín totales del sistema, respectivamente. En lo subsecuente únicamente se considerarán decaimientos.

Si ocurre un proceso del tipo  $A \rightarrow B_1 + \dots + B_n$  y es posible describirlo cuánticamente, es porque existe un Hamiltoniano de transición o interacción de tal manera que dicho Hamiltoniano cambia el estado  $A$  por los estados  $B$  acompañados de coeficientes. Sin embargo, cuando se hace un cambio de base los nuevos estados son eigenestados de ese Hamiltoniano, es decir, al hacer el cambio de base ocurre que;  $|B_1 \dots B_n\rangle \rightarrow \sum_j \alpha_j |B'_1 \dots B'_n\rangle$  y  $|A\rangle \rightarrow \sum_k \beta_k |B'_1 \dots B'_n\rangle$

$$\langle B_1 \dots B_n | \mathcal{H}_{\text{int}} | A \rangle = g_{AB} h_{\text{int}} \sum_{jk} \alpha_j^* \beta_k \langle B'_1 \dots B'_n | B'_1 \dots B'_n \rangle \quad (4.3)$$

en donde  $g_{AB}$  es la constante de acoplamiento entre la partícula  $A$  y las partículas  $B$ ,  $h_{\text{int}}$  es simplemente una constante, que para estos fines no es relevante y, el bracket  $\langle B'_1 \dots B'_n | B'_1 \dots B'_n \rangle$  está normalizado a la unidad. Lo realmente importante son los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  a quienes simplemente se llama coeficientes de Clebsch-Gordan. Por tal razón la ecuación anterior queda:

$$g_{AB} h_{\text{int}} \times (\text{Clebsch-Gordan}) \quad (4.4)$$

Por consiguiente, salvo constantes, el elemento de matriz de transición se puede escribir como:

$$\mathcal{M} \sim g_{AB} h_{\text{int}} \times (\text{Clebsch-Gordan}) \quad (4.5)$$

por lo tanto, el cuadrado de la amplitud es proporcional al módulo cuadrado del bracket, lo que significa:

$$|\mathcal{M}|^2 \sim g_{AB}^2 h_{\text{int}}^2 \times (\text{Clebsch-Gordan})^2 \quad (4.6)$$

A pesar de haber una integración en el espacio fase de por medio, cosa que es súmamente importante, se pueden aseverar dos cosas:

1. El ancho de decaimiento es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de transición y por tanto:

$$\Gamma_{AB} \sim f(s) g_{AB}^2 h_{\text{int}}^2 \times (\text{Clebsch-Gordan})^2 \quad (4.7)$$

2. Todos los procesos a considerar como ejemplos están mediados por la interacción fuerte y son del tipo  $V \rightarrow PP'$  y, por consiguiente, se puede decir que el Hamiltoniano de interacción es el mismo en todos los casos.

hay que notar que en la ecuación anterior, debido a la integración del espacio fase, aparece una función  $f(s)$  que depende de la energía, sin embargo como existe en todos los decaimientos, y sí se puede asegurar que la forma es exactamente la misma en todos los casos, no es relevante para los resultados que se presentarán a continuación.

### 4.3.1. Ejemplos particulares

Para *ver* explícitamente el rompimiento de las constantes de acoplamiento se pondrán algunos ejemplos del decaimiento  $V \rightarrow PP'$ , los cuales estarán expresados en la base de isoespín.

Para comenzar con el análisis es indispensable citar los valores obtenidos en este trabajo con las ecuaciones presentadas en el capítulo 3 para este tipo de procesos.

Proceso	Constante de acoplamiento	Valor
$\rho \rightarrow \pi\pi$	$g_{\rho\pi\pi}$	$5.966 \pm 0.008$
$\omega \rightarrow \pi\pi$	$g_{\omega\pi\pi}$	$0.175 \pm 0.006$
$\phi \rightarrow \pi\pi$	$g_{\phi\pi\pi}$	$0.0072 \pm 0.0006$
$\phi \rightarrow KK$	$g_{\phi KK}$	$4.476 \pm 0.023$
$K^*(892) \rightarrow (K\pi)^\pm$	$g_{K^*K\pi}$	$5.568 \pm 0.044$
$K^*(892) \rightarrow (K\pi)^0$	$g_{K^*K\pi}$	$5.508 \pm 0.029$
$D^{*0}(2007) \rightarrow D^0\pi^0$	$g_{D^*D\pi}$	$36.59 \pm 0.25$
$D^{*+}(2010) \rightarrow D^0\pi^+$	$g_{D^*D\pi}$	$8.409 \pm 0.031$
$D^{*+}(2010) \rightarrow D^+\pi^0$	$g_{D^*D\pi}$	$5.962 \pm 0.048$
$\psi(3770) \rightarrow D^+D^-$	$g_{\psi DD}$	$13.67 \pm 0.65$
$\Upsilon(4S) \rightarrow B^+B^-$	$g_{\Upsilon BB}$	$24.73 \pm 0.14$

**Tabla 4.4:** Constantes de acoplamiento de algunos procesos del tipo  $V \rightarrow PP'$ .

Es importante mencionar que como los estados iniciales corresponden a una sola partícula, entonces el ket de isoespín de la partícula en cuestión será directamente  $|II_3\rangle$  y, como los estados finales constan de dos partículas es necesario poner los kets correspondientes en la base de isoespín total, así como se presentó al principio de esta sección. Para mayor comodidad, únicamente se pondrán los términos tal que los brackets sean distintos de cero, por ejemplo:

Imagínese que se ha producido un decaimiento  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  y que las funciones de estado de las partículas involucradas se escriben en términos de la base de isoespín, es decir:

$$|\rho^0\rangle = |10\rangle \tag{4.8}$$

y

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |1\ 1\rangle \\ |\pi^-\rangle &= |1\ -1\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

sin embargo el estado final que es  $|\pi^+\pi^-\rangle$  se tiene que poner en la base de isoespín total  $|I\ I_3\rangle$ , esto es:

$$|\pi^+\pi^-\rangle = \sum_{I_3} \langle I\ I_3 | 1\ 1\ 1\ -1 \rangle |I\ I_3\rangle \quad (4.10)$$

entonces cuando ocurra el proceso que se ha puesto como ejemplo, el único término que contribuirá a la amplitud de transición, del estado final, será aquel que en la base de isoespín tenga al vector  $|1\ 0\rangle$ , así el coeficiente de Clebsch-Gordan de interés es:

$$\langle 1\ 0 | 1\ 1\ 1\ -1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4.11)$$

por consiguiente el elemento de matriz es:

$$\langle \pi^+\pi^- | \mathcal{H}_{\text{int}} | \rho^0 \rangle = \frac{g_{\rho\pi\pi} h_{\text{int}}}{\sqrt{2}} \quad (4.12)$$

entonces el ancho de decaimiento se puede expresar por:

$$\Gamma_{\rho\pi\pi} \sim f(s) \frac{g_{\rho\pi\pi}^2 h_{\text{int}}^2}{2} \quad (4.13)$$

De esta manera, al comparar dos procesos de la forma  $V \rightarrow PP'$  por medio de sus anchos de decaimiento, con las hipótesis arriba mencionadas, se tendrá una comparación directa entre las constantes de acoplamiento con sus correspondientes coeficientes de Clebsch-Gordan. Cabe resaltar que las  $g$ 's que se tomarán para hacer dichas comparaciones son aquellas que se calcularon en este trabajo con los anchos de decaimiento reportados en el PDG. Evidentemente, no se harán todas las comparaciones sino algunas.

Supóngase que se tienen dos procesos  $V_1 \rightarrow P_1 P'_1$  y  $V_2 \rightarrow P_2 P'_2$ , entonces los anchos de decaimiento estarán dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\sim f(s) g_1^2 h_{\text{int}}^2 \times (\text{Clebsch-Gordan}_1)^2 \\ \Gamma_2 &\sim f(s) g_2^2 h_{\text{int}}^2 \times (\text{Clebsch-Gordan}_2)^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

si además se asume que los procesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, se tendrá que:

#### 4. VALORES DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO CON $\chi^2$

---

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = 1 \implies g_1 = g_2 \times \left| \frac{\text{Clebsch-Gordan}_2}{\text{Clebsch-Gordan}_1} \right| \quad (4.15)$$

por otro lado, ya que la simetría de isoespín está rota la ecuación anterior no se cumple al cien por ciento, en realidad se tendrá algo del estilo:

$$g'_i = \left( \left| \frac{\text{Clebsch-Gordan}_j}{\text{Clebsch-Gordan}_i} \right| + \delta \right) g'_j \quad (4.16)$$

Para simplificar se hará el cambio:

$$c = \left| \frac{\text{Clebsch-Gordan}_j}{\text{Clebsch-Gordan}_i} \right| \quad (4.17)$$

por tanto, la ecuación queda:

$$g'_i = (c + \delta) g'_j \quad (4.18)$$

donde  $\delta$  representa la diferencia entre el experimento y la teoría (rompimiento de isoespín). Una manera análoga de escribir la ecuación anterior es la siguiente:

$$g'_i = c(1 + \Delta) g'_j \quad (4.19)$$

donde claramente  $\Delta = \frac{\delta}{c}$ , asumiendo que  $c \neq 0$ .

En las últimas dos ecuaciones se han puesto primas a las  $g$ 's para denotar que son las constantes de acoplamiento que se obtuvieron a partir de datos experimentales. En este caso únicamente nos fijaremos en el valor de  $\Delta$  haciendo un despeje de la ecuación anterior.

Empecemos por comparar los procesos  $\rho^0 \longrightarrow \pi^+ \pi^-$  con  $\phi \longrightarrow \pi^+ \pi^-$ , para estos se tiene que el ancho de cada uno va como:

$$\Gamma_{\rho\pi\pi} \sim f(s) \frac{g_{\rho\pi\pi}^2 h_{\text{int}}^2}{2} \quad (4.20)$$

y

$$\Gamma_{\phi\pi\pi} \sim f(s) \frac{g_{\phi\pi\pi}^2 h_{\text{int}}^2}{3} \quad (4.21)$$

entonces debería suceder que:

$$g_{\rho\pi\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{\phi\pi\pi} \quad (4.22)$$

sin embargo esto no pasa, ver última tabla. En este caso  $\Delta_{\rho\phi}$  es:

$$\Delta_{\rho\phi} = 1013.8 \quad (4.23)$$

por la cual se tendría que multiplicar al cociente de las constantes de Clebsch-Gordan para llegar de la constante  $g_{\phi\pi\pi}$  a la constante  $g_{\rho\pi\pi}$ . Por tanto, se ve que la diferencia de masas en los quarks que componen tanto al mesón vectorial  $\rho$  como al  $\phi$  sí es relevante y, como consecuencia de ello la simetría de isoespín está totalmente rota.

Ahora comparemos los procesos  $\rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$  y  $\phi \rightarrow K^+K^-$ , en estos casos los anchos vienen dados por:

$$\Gamma_{\rho\pi\pi} \sim f(s) \frac{g_{\rho\pi\pi}^2 h_{\text{int}}^2}{2} \quad (4.24)$$

y

$$\Gamma_{\phi KK} \sim f(s) \frac{g_{\phi KK}^2 h_{\text{int}}^2}{2} \quad (4.25)$$

entonces, teóricamente:

$$g_{\rho\pi\pi} = g_{\phi KK} \quad (4.26)$$

pero

$$g_{\rho\pi\pi} = 5.966 \pm 0.008, \quad g_{\phi KK} = 4.476 \pm 0.023 \quad (4.27)$$

entonces aplicando la fórmula para la  $\Delta$  se llega a que:

$$\Delta_{\rho\phi} = 0.3328 \quad (4.28)$$

en este caso vemos que la diferencia entre una constante y otra no es realmente significativa, lo cual significa que en este caso la simetría de isoespín está ligeramente rota.

Enseguida se presentará la comparación de las constantes de acoplamiento de los procesos  $\phi \rightarrow K^+K^-$  y  $K^*(892) \rightarrow K^0\pi^0$ . Los anchos de decaimiento se pueden escribir como:

$$\Gamma_{\phi KK} \sim f(s) \frac{g_{\phi KK}^2 h_{\text{int}}^2}{2} \quad (4.29)$$

y

$$\Gamma_{K^*K\pi} \sim f(s) \frac{g_{K^*K\pi}^2 h_{\text{int}}^2}{3} \quad (4.30)$$

---

#### 4. VALORES DE LAS CONSTANTES DE ACOPLAMIENTO CON $\chi^2$

---

por consiguiente

$$g_{\phi KK} = \sqrt{\frac{2}{3}} g_{K^* K \pi} \quad (4.31)$$

que de acuerdo con los valores de la última tabla, se tiene que  $\Delta_{\phi K^*}$ :

$$\Delta_{\phi K^*} = -0.0154 \quad (4.32)$$

en este caso el valor de la  $\Delta$  entra en las barras de error de ambas constantes de acoplamiento, por lo que se puede concluir con certeza que la simetría no está rota.

Por último, compararemos los procesos  $D^{*+}(2010) \rightarrow D^0 \pi^+$  y  $D^{*+}(2010) \rightarrow D^+ \pi^0$ , los cuales tienen anchos de decaimiento:

$$\Gamma_{D^* D \pi} = \frac{2}{3} f(s) g_{D^* D \pi}^2 h_{\text{int}}^2 \quad (4.33)$$

y

$$\Gamma'_{D^* D \pi} \sim f(s) \frac{g_{D^* D \pi}'^2 h_{\text{int}}^2}{3} \quad (4.34)$$

entonces, debería suceder que:

$$g_{D^* D \pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} g'_{D^* D \pi} \quad (4.35)$$

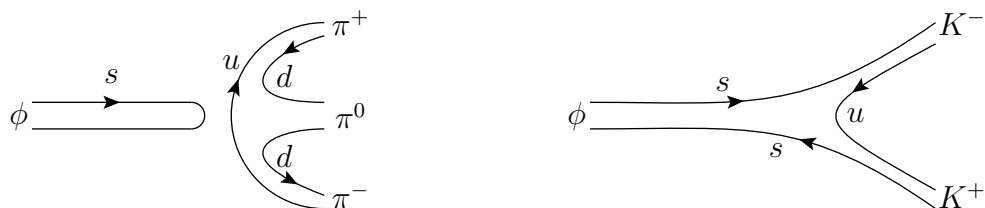
tomando las constantes que están reportadas en este trabajo se tiene:

$$\Delta_{D^* D^*} = 0.0027 \quad (4.36)$$

lo cual dice, así como en el caso anterior, que la simetría de isospín no está rota dado que  $\Delta_{g_{D^* D^*}}$  de nuevo está dentro de las barras de error de las constantes de acoplamiento.

Esto demuestra que aún falta mucho por entender y estudiar sobre el rompimiento de la simetría de isospín en los hadrones. Por otro lado, una posible explicación al rompimiento de dicha simetría está en la regla de *OZI* o mejor conocida como la regla de Zweig, la cual estipula que; “diagramas desconectados de quarks están altamente suprimidos respecto a los diagramas conectados”. Veamos los siguientes ejemplos:





**Figura 4.4:** Comparación entre diagramas conectados y no conectados, según la regla de Zweig.

Las figuras anteriores muestran gráficamente lo que estipula la regla de Zweig, sin embargo, a este nivel se requiere de la teoría de Cromodinámica Cuántica la cual está fuera del alcance de este trabajo. Únicamente se muestra como una posible explicación al rompimiento de la simetría de isospín debido a la diferencia de masas entre los quarks.

En lo que resta se hará una comparación directa de los resultados obtenidos y las conclusiones que se determinaron. Las referencias se encuentran en: [18], [9], [8], [10].

## Conclusiones

---

Tras haber calculado las constantes de acoplamiento de diversos procesos por medio ya sea haciendo un simple despeje o con la función  $\chi^2$ , se lograron obtener resultados satisfactorios, al menos dentro del contexto de este trabajo, ya que comparándolos con otros trabajos donde calculan los mismos parámetros, aunque por métodos diferentes, hay congruencia entre sí.

Veamos ahora la comparación de las constantes que se obtuvieron por los distintos *métodos*; comenzaremos con la constante  $g_{\rho\gamma}$ :

$$\begin{aligned}g_{\rho\gamma} &= 4.968 \pm 0.018 \longrightarrow \text{Despejando} \\g_{\rho\gamma} &= 4.959 \pm 0.122 \longrightarrow \text{sin sección eficaz } \chi^2 \\g_{\rho\gamma} &= 5.001 \pm 0.020 \longrightarrow \text{con sección eficaz } \chi^2\end{aligned}$$

En los resultados antes presentados notamos que la diferencia más grande está entre el método de *despeje* y método de  $\chi^2$  con sección eficaz, siendo de 0.033; dicha diferencia no entra en las barras de error de ninguna de las dos constantes. Sin embargo, entre los métodos de  $\chi^2$  sin sección eficaz y  $\chi^2$  con sección eficaz, la diferencia entre ellas es de 0.042, pero en este caso esa discrepancia sí entra en las barras de error de la constante que se calculó con  $\chi^2$  sin sección eficaz; esto tiene bastante sentido porque a fin de cuentas los cálculos que se están comparando se hicieron con el mismo método, simplemente en un caso se está omitiendo un grado de libertad.

A pesar de que todas las diferencias entre los distintos *métodos* que se usaron para calcular la constante  $g_{\rho\gamma}$  no están dentro de las barras de error de las constantes, no significa que los resultados no sean razonablemente buenos sino que el cálculo del error en cada uno de ellos pondera las variables de maneras distintas.

## 5. CONCLUSIONES

---

Ahora veamos la comparación de los cálculos que se hicieron para la constante  $g_{\omega\gamma}$ :

$$\begin{aligned}g_{\omega\gamma} &= 17.068 \pm 0.253 \longrightarrow \text{Despejando} \\g_{\omega\gamma} &= 17.062 \pm 0.346 \longrightarrow \text{sin sección eficaz } \chi^2 \\g_{\omega\gamma} &= 18.086 \pm 0.031 \longrightarrow \text{con sección eficaz } \chi^2\end{aligned}$$

En este caso vemos que los métodos con mejor acordancia son los dos primeros resultados, de hecho la diferencia es de 0.006 la cual entra perfectamente en las barras de error, de hecho, se puede decir que los resultados son *idénticos*. Por otro lado, el último resultado es el que está más alejado de los otros dos y esto es porque es el que mejor se ajusta a todos los procesos; tanto los individuales como en los que se incluye más de una constante.

Asimismo se presentan los resultados en conjunto de la constante de acoplamiento  $g_{\rho\pi\pi}$ :

$$\begin{aligned}g_{\rho\pi\pi} &= 5.966 \pm 0.008 \longrightarrow \text{Despejando} \\g_{\rho\pi\pi} &= 5.934 \pm 0.097 \longrightarrow \text{sin sección eficaz } \chi^2 \\g_{\rho\pi\pi} &= 5.953 \pm 0.009 \longrightarrow \text{con sección eficaz } \chi^2\end{aligned}$$

A diferencia de los casos anteriores notamos que los resultados concuerdan a la perfección, esto se puede concluir ya que las barras de error se intersectan entre sí. Se podría decir que en este caso la constante de acoplamiento  $g_{\rho\pi\pi}$  sí está bien definida.

Enseguida se presentan los resultados para la constante  $g_{\omega\rho\pi}$ :

$$\begin{aligned}g_{\omega\rho\pi} &= 12.944 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-1} \longrightarrow \text{Despejando} \\g_{\omega\rho\pi} &= 11.394 \pm 0.289 \text{ GeV}^{-1} \longrightarrow \text{sin sección eficaz } \chi^2 \\g_{\omega\rho\pi} &= 12.678 \pm 0.020 \text{ GeV}^{-1} \longrightarrow \text{con sección eficaz } \chi^2\end{aligned}$$

En este caso notamos que, los resultados obtenidos son ajenos entre sí, es decir, no se intersectan ni siquiera con la barras de error. Haciendo una comparación entre cada uno de los resultados obtenidos vemos que, los primeros dos valores tienen un 12% de discrepancia; mientras que el primero con el tercero tienen un 2% de diferencia. Por otro lado, lo que más sorprende es que los valores con un mismo método pero con diferentes grados de libertad difieran tanto, esto en referencia al segundo y tercer valor; su diferencia es aproximadamente del 10%,

---

algo que no se esperaba.

Por último se tienen los resultados obtenidos para la constante de acoplamiento de la anomalía,  $g_{\omega 3\pi}$ :

$$g_{\omega 3\pi} = -51.868 \pm 1.507 \text{ GeV}^{-3} \longrightarrow \text{sin sección eficaz } \chi^2$$

$$g_{\omega 3\pi} = -35.860 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-3} \longrightarrow \text{con sección eficaz } \chi^2$$

La diferencia en este caso es abismal dado que se alejan poco más de  $16 \text{ GeV}^{-3}$  es casi la mitad de una y casi la tercera parte de la otra, sin embargo, la que se considera que el valor óptimo es  $g_{\omega 3\pi} = -35.860 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-3}$  dado que es la que se obtuvo al considerar todos los procesos presentados en este trabajo.

A manera de resumen se presenta una tabla con lo que se presentó anteriormente:

Constantes de acoplamiento	<i>Despeje</i>	$\chi^2$ , sin sección eficaz	$\chi^2$ , con sección eficaz
$g_{\rho\gamma}$	$4.968 \pm 0.018$	$4.959 \pm 0.122$	$5.001 \pm 0.020$
$g_{\omega\gamma}$	$17.068 \pm 0.253$	$17.062 \pm 0.346$	$18.086 \pm 0.031$
$g_{\rho\pi\pi}$	$5.966 \pm 0.008$	$5.934 \pm 0.097$	$5.953 \pm 0.009$
$g_{\omega\rho\pi}$	$12.944 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-1}$	$11.394 \pm 0.289 \text{ GeV}^{-1}$	$12.678 \pm 0.020 \text{ GeV}^{-1}$
$g_{\omega 3\pi}$	—	$-51.868 \pm 1.507 \text{ GeV}^{-3}$	$-35.860 \pm 0.168 \text{ GeV}^{-3}$

**Tabla 5.1:** Constantes de acoplamiento con sección eficaz incluida.

En este trabajo se ha dado un breve panorama del comportamiento de algunas de las constantes de acoplamiento a bajas energías, entre 0.2 y 1 GeV, no obstante los resultados que se muestran en este trabajo dan indicios que aún falta mucho por explorar y estudiar sobre los mesones y sus decaimientos más elementales. Por otro lado, se mostró que el término anómalo sí contribuye a la sección eficaz del proceso de aniquilación  $e^+e^-$  de una manera significativa. Lo que resta, en un futuro no muy lejano, es seguir con el estudio de las constantes de acoplamiento a energías mayores y, por supuesto, con mesones más pesados que los que se muestran aquí.

## Bibliografía

---

- [1] Francis Halzen and Alan D. Martin. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley and Sons, 1984. [15](#), [36](#), [54](#)
- [2] David Griffiths. *Elementary Particle Physics*. Wiley-VCH Verlag GmbH and Co. KGaA, 2008. [15](#)
- [3] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995. [16](#), [36](#)
- [4] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 1984. [36](#)
- [5] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Clarendon Press, 1996. [36](#)
- [6] Rajendra Kumar. Covariant Phase-Space Calculations of  $n$ -Body Decay and Production Processes. *Physical Review*, 185:1865–1875, 1969. [46](#), [51](#), [54](#)
- [7] David C. Cheng and Gerard K. O'Neill. *Elementary Particle Physics, An Introduction*. Addison-Wesley, 1979. [54](#)
- [8] Luis Alberto Jiménez Pérez. *Tesis de Maestría: Efectos de la Estructura de los Mesones  $K^{*\pm}$  en el Proceso  $e^-e^+ \rightarrow K^{*-}K^{*+}$* . UNAM, 2015. [54](#), [67](#)
- [9] David Gudiño and Genaro Toledo. About the Inclusion of an Infinite Number of Resonances in Anomalous Decays. *Revista Mexicana de Física*, 60:123–128, 2014. [54](#), [67](#)
- [10] David Gudiño and Genaro Toledo. The  $\omega\rho\pi$  Coupling in the VDM Model Revisited. *World Scientific*, 27:11, 2012. [54](#), [60](#), [67](#)
- [11] Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, and Frederik Orellana. New Developments in FeynCalc 9.0. *Comput. Phys. Commun.*, 207:432–444, 2016. [50](#), [54](#)

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [12] S. Rudaz. *Physical Letters*, 45:281, 1984. [60](#)
- [13] T. D. Cohen. *Physical Letters*, 233:467, 1989. [60](#)
- [14] C. A. Dominguez. *Mod. Physical Letters*, 12:983, 1987. [60](#)
- [15] E. A. Kuraev and Z. Silagadze. *Phys. Atom. Nucl.*, 58:1589, 1995. [60](#)
- [16] E. A. Kuraev and Z. Silagadze. *Physical Letters*, 292:377, 1992. [60](#)
- [17] O. Kaymakcalan, S. Rajeev, and J. Schechter. *Physical Review*, 30:594, 1984. [60](#)
- [18] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev.*, D98(3):030001, 2018. [53](#), [67](#)
- [19] David García Gudiño. *Tesis de Doctorado: Efectos de Inestabilidad y Determinación del Momento Dipolar Magnético del Mesón  $\rho$* . UNAM, 2013.