



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estudio comparativo de las oscilaciones
de neutrinos y antineutrinos en materia,
para el caso de dos y tres generaciones

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO
DE:

Físico

PRESENTA:

Carlos Leonardo Juarez Mansilla



TUTOR

Dr. Juan Carlos D'Olivo Saez

Ciudad de México, 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del Jurado

1. Datos del alumno

Juárez

Mansilla

Carlos Leonardo

55 7331 8749

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencia

Física

305109822

2. Datos Del tutor

Doctor

Juan Carlos

D'Olivo

Saez

3. Datos Del Sinodal 1

Doctor

Nissim Illich

Fraija

Cabrera

4. Datos Del Sinodal 2

Doctor

Alexis Armando

Aguilar

Arévalo

5. Datos Del Suplente 1

Doctor

Eric

Vázquez

Jáuregui

6. Datos Del Suplente 2

Doctora

Gabriela

Murguía

Romero

7. Datos del trabajo escrito

Estudio comparativo de las oscilaciones de neutrinos y antineutrinos en materia, para el caso de dos y tres generaciones.

??? P

2019

*Dedicado a mis padres,
sin los cuales no estaría aquí hoy,
y a mi Hermana.*

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi asesor el Doctor Juan Carlos D'Olivo Saez, por todo el apoyo y la guía que me brindó en la elaboración del presente trabajo, por siempre exigirme más y corregir mis errores, que no fueron pocos.

También quiero agradecer a El Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por que mediante el programa proyecto *Investigación experimental y fenomenológica en torno a partículas que interaccionan débilmente* recibí el apoyo económico que me permitió dedicarme a las actividades relacionadas con esta tesis.

Un agradecimiento especial a Claudia Irene Limón Farías, por enseñarme a ver la vida con la perspectiva de quién no se queja aun que tenga algún motivo.

A Nadxieli Delgado Jiménez por siempre apoyarme y creer en mí, aun cuando yo no lo hacía.

A Benjamín Castro González por siempre darme sus opiniones de forma honesta y darme una perspectiva diferente.

A los ayudantes que posteriormente se hicieron amigos. Aitor, Armando Orozco, Diego Ortega, Pedro Trejo, Marisol Chávez, Guillermo Reyes, Joaquín Ramírez y tanto otros que siempre me ayudaron cuando tenía alguna duda.

A todos los profesores que me impartieron clase en la licenciatura, por que todos aprendí y sin ellos esto no sería posible.

A tantos y tantos que creyeron en mí, por darme el aliento para seguir adelante.

A todos los que no creyeron en mí, por darme una razón para no rendirme. y finalmente a tantas y tantas horas de esfuerzo, a tantos días sentado frente

VIII

a un papel pensando, a tantas tasas de café y a todo el esfuerzo que puse en esto.

Una agradecimiento especial a la memoria de Jorge Antonio Morales por haber sentado las bases del trabajo que hoy estoy presentando.

Índice general

Introducción	1
1. El Neutrino	5
1.1. Propiedades generales del neutrino	5
1.2. La naturaleza del neutrino	7
1.3. Fuentes de neutrinos	8
1.3.1. Neutrinos solares	9
2. Oscilaciones de neutrinos en el vacío	13
2.1. Teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos	13
2.2. La Matriz de Mezcla	17
2.3. Mezcla de dos sabores en el vacío	18
2.4. Mezcla de tres sabores en el vacío	19
3. Oscilaciones de neutrinos en materia	23
3.1. Efectos de la materia en la propagación de los neutrinos	23
3.2. Mezcla de dos sabores en materia	25
3.3. Mezcla de tres sabores en materia	33
4. Neutrino y antineutrino	47
4.1. Mezcla de dos sabores en materia para el antineutrino	47
4.2. Relaciones entre P_c y \bar{P}_c en el caso de dos sabores	52
4.3. Mezcla de tres sabores en materia para el antineutrino	60
5. Conclusiones	73
A. Operador de evolución de dos sabores	75
B. Factorización del Opr. de evolución	79
Bibliografía	80

Introducción

Las oscilaciones de neutrinos se refieren a las transformaciones periódicas entre los diferentes sabores de los neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ . El concepto de oscilaciones de neutrinos fue introducido por primera vez en 1958 por B. Pontecorvo para transiciones de neutrino/antineutrino. Con el descubrimiento del neutrino muónico en 1962 en el experimento realizado por Lederman, Schwartz y Steinberger, surge la posibilidad de las transiciones entre los distintos sabores del neutrino.

Por otro lado las primeras medidas experimentales del flujo de neutrinos solares predicho por el Modelo Estándar Solar se llevaron a cabo en la década de los 60's por Davies y sus colaboradores, dichas medidas arrojaron un déficit respecto al valor predicho, esta discrepancia fue posteriormente confirmada por varios experimentos realizados en diferentes laboratorios, este es el conocido “problema de los neutrinos solares”. Las oscilaciones de neutrinos son la mejor propuesta para resolver este problema, fue en 1978 cuando Wolfenstein discutió los efectos de la materia en la propagación de los neutrinos debido a las interacciones con las partículas del medio. Él concluyó que los neutrinos se encuentran sujetos a un potencial efectivo que es análogo al índice de refracción de la luz a través de la materia.

Por su parte, en 1985 Mikheyev y Smirnov descubrieron que las probabilidades de transición en las oscilaciones de neutrinos pueden ser sensiblemente modificadas cuando el neutrino se propaga en un medio con densidad variable, este es el efecto MSW, el cual se volvió famoso rápidamente debido a ser el mejor candidato para explicar el problema de los neutrinos solares.

Desafortunadamente la literatura disponible discute de manera somera el caso de los antineutrinos, el propósito del presente trabajo consiste en estudiar tanto las oscilaciones de neutrinos como las de los antineutrinos y encontrar las similitudes y diferencias que presentan cuando estos se propagan en materia bajo las mismas condiciones, así como las relaciones existentes entre ambos casos.

El objetivo principal de esta tesis fue dar la relación existente entre los operadores de evolución de las amplitudes de los eigenestados instantáneos de masa en materia, la idea surgió con la intención de extender los resul-

tados realizados anteriormente en otra tesis de licenciatura dirigida por el Doctor D'Olivo [15], al caso de tres generaciones. Al igual que en el trabajo previamente citado centraremos nuestra atención en los neutrinos solares.

A partir de las relaciones existente para las amplitudes de los estados de sabor del neutrino y el antineutrino fue posible dar la relación general entre los operadores de evolución, y en el límite en el que en el borde del medio la densidad presenta una súbita caída, de tal forma que la densidad en el borde se puede despreciar, encontramos que para el caso de dos sabores es posible establecer una relación general entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino y el antineutrino. Para el caso de tres generaciones, no es posibles establecer dichas relación ya que no podemos definir las probabilidades de cruzamiento en la zonas de densidades baja y alta, como se hizo en el caso del neutrino, sin embargo a partir de la relación aproximada de los operadores de evolución somos capaces de calcular las probabilidades de transición del antineutrino, en términos de los parámetros del neutrino, nuestro resultado permite encontrar dichas probabilidades sin la necesidad de hacer hipótesis adicionales que carezca de significado físico.

El presente trabajo se estructura de la siguiente forma; en el Capítulo 1 damos una breve introducción al neutrino así como a sus propiedades generales, discutimos las diferencias entre él y su antipartícula; hablamos de la naturaleza del neutrino y de las distintas fuentes de estos que existen en la naturaleza, centrando nuestra atención en los neutrinos solares.

En el Capítulo 2 y teniendo ya una idea de las propiedades generales de los neutrinos, nos disponemos introducir la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor en el vacío, nos percatamos que es conveniente trabajar en la base de masa, ya que en esta última el Hamiltoniano resulta ser diagonal. Las bases de sabor y masa relaciona por una transformación unitaria, dicha transformación queda representada por la matriz de mezcla, discutimos brevemente algunas de las propiedades de esta matriz y finalmente establecemos las probabilidades de transición para el caso de dos y tres generaciones, enfatizando las diferencias que se presentan en cada caso.

En el Capítulo 3, estudiamos los efectos de la materia en la propagación de neutrinos y sus consecuencia en el cálculo de las probabilidades de transición. Para el caso de dos sabores discutimos la aproximación adiabática y sus efectos en las oscilaciones de neutrinos. Nuestro principal interés se encuentra en poder calcular las probabilidades de transición cuando esta aproximación deja de ser válida, usando el formalismo del operador de evolución fuimos capaces de deducir la llamada formula de Parke.

Para el caso de tres sabores centramos nuestra atención en encontrar el operador de evolución de las amplitudes de los estados instantáneos de masa

en materia y las condiciones bajo las cuales este puede ser propuesto, como un problema efectivo de 2×2 cerca de los valores de las resonancia en las regiones de densidades bajas y altas respectivamente.

Finalmente en el Capítulo 4 nos dedicamos a estudiar el caso de los anti-neutrinos y las relaciones que existen con los neutrinos y sus consecuencias. Existe una relación entre las amplitudes de los estados de sabor al hacer el cambio de signo de las diferencias cuadráticas de masas; esta relaciones nos permiten establecer la relación general entre los operadores de evolución de las amplitudes de los estados instantáneos de masa en materia de los neutrinos y los antineutrino. A partir de este resultado pudimos establecer la relación entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino y el antineutrino, para el caso de dos sabores.

En el caso de tres sabores notamos que no podemos deducir el operador de evolución de las amplitudes de los estados instantáneos de masa en materia de las misma forma que se hizo para los neutrinos, ya que para el caso del los antineutrinos los ángulos de mezcla en materia ya no presentan el comportamiento resonante y ya no es posible factorizar el problema, en un problema efectivo de 2×2 cerca de valor cada resonancia, en vez de ello, usando las relaciones generales entre los operadores de evolución podemos calcular las probabilidades de transición del antineutrino en términos de las parámetros del neutrino, sin la necesidad de conocer la forma explícita del operador de evolución de las amplitudes de los estados instantáneos de masa en materia del antineutrino.

Presentamos este como resultado principal del presente trabajo, el cual también nos permite concluir que las soluciones del antineutrino no pueden obtener directamente de las soluciones del neutrino únicamente cambiando el signo del potencial efectivo en estas. De hecho concluimos que el caso del antineutrino debe ser tratado de forma separada y aunque presenta grandes e innegables similitudes con el caso del neutrino, las sutilezas que se presentan en cada caso nos llevan a conclusiones bastante diferentes.

Capítulo 1

El Neutrino

La existencia del neutrino electrónico fue propuesta por primera vez por W. Pauli en 1930, con la intención de entender el espectro de energía continuo del electrón generado en el decaimiento β . En la teoría existente en ese momento, el decaimiento β se consideraba un decaimiento de dos cuerpos, por lo tanto, la energía del electrón emitido debía ser única. Esto estaba en evidente discrepancia con los resultados experimentales, es decir, los experimentos estaban en contradicción con la conservación de la energía; la idea de la conservación de la energía, llevó a Pauli a proponer la existencia de una nueva partícula fermiónica, neutra y cuya masa debía ser del orden de la masa del electrón; la cual era responsable de llevarse la energía faltante; dando así una explicación satisfactoria del espectro de energía continuo del electrón.

En el modelo estándar de partículas, hoy es sabido que además del electrón, existen dos generaciones (sabores) más de leptones cargados (el muon μ^- y el tau τ^-) y que a cada una con su correspondiente neutrino, es decir existen 3 sabores (generaciones) de neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ .

1.1. Propiedades generales del neutrino

El neutrino es en muchas formas una partícula especial, la primera de ellas es que son, en varios órdenes de magnitud, más ligeros que todos los demás fermiones. El neutrino es también una partícula neutra, no siente la interacción fuerte, y interacciona únicamente por medio de interacciones débiles, de hecho extraordinariamente débiles, por ejemplo los neutrinos producidos en los reactores nucleares con energías de $E_\nu \sim 1$ MeV, tienen una probabilidad de $\sim 10^{-18}$ de interaccionar con un detector sólido de grosor de un metro, o una probabilidad de $\sim 10^{-11}$ de interaccionar en el interior de la tierra a lo largo de la trayectoria que pasa por su centro [11].

El neutrino tiene dos tipos de interacciones, estos se pueden acoplar con un boson Z^0 , cambiando su cuatro-momento, pero manteniendo su identidad (corriente neutra) o bien se pueden acoplar con bosones W^\pm “transformándose” en alguno de los leptones cargados e^\pm, μ^\pm, ν^\pm (corriente cargada) [11].

Debido a los procesos de corriente cargada es que se puede definir el concepto de estados de sabor; el sabor de neutrino es simplemente el tipo de leptón cargado con el que esta conectado en los procesos de corriente cargada. Por ejemplo en el decaimiento de un boson (virtual) W^\pm es convención escribir:

$$W^+ \rightarrow l^+ + \nu_l, \quad W^- \rightarrow l^- + \bar{\nu}_l, \quad (1.1)$$

donde la etiqueta $l = e, \mu, \tau$ del neutrino corresponde al tipo del leptón cargado, la distinción de ν y $\bar{\nu}$, para cada etiqueta dada tiene una clara justificación experimental, se ha encontrado que el estado ν_e definido de acuerdo a la convención escrita en (1.1) interactuando cerca del punto de creación solo puede producir e^- (y no μ^- o un e^+), mientras un estado $\bar{\nu}_e$ solo produce e^+ , y similar para otros tipos de neutrinos, en resumen, tanto la etiqueta de sabor como la notación de la barra, tienen un concreto significado fenomenológico [11].

También es sabido a partir de los datos recabados en los experimentos realizados hasta el momento que los estados de sabor del neutrino producidos por medio de interacciones débiles son predominante izquierdos (*left-handed*), esto es; que tienen spin antiparalelo a su momento, mientras que los antineutrinos son derechos (*right-handed*), es decir, su spin y momento son paralelos, este hecho abre las puertas a nuevas y fascinantes posibilidades, como por ejemplo que los estados ν y $\bar{\nu}$ sean dos estados de spin diferente de la misma partícula, es decir que el neutrino sea su propia antipartícula [11, 19], a las partículas con esta propiedad se le conoce como partículas de Majorana.

En las últimas décadas se han hecho remarcables descubrimientos en cuanto a la física de neutrinos se refiere, uno de ellos y quizás el más importante, es la existencia de las oscilaciones de neutrinos, Este fue sugerido por primera vez en 1958 por B. Pontecorvo [18]. El cual fue motivado por el fenómeno de mezcla de kaones neutros, $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$. Pontecorvo interpretó el rumor del aparente éxito en las observaciones de Raymond Davis, el cual resultó ser falso, en la reacción



como resultado de la transición $\bar{\nu} \rightarrow \nu$ y posteriormente la reacción $\nu + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$, sin embargo este proceso no sería posible, ya que aunque el neutrino oscilara con su antipartícula, los antineutrinos son derechos y dado que la helicidad se conserva, dichos neutrinos no podrían inducir esta reacción [3].

Los experimentos realizados hasta la fecha con neutrinos solares, atmosféricos acelerados y provenientes de reactores nucleares ha dado pruebas convincentes de la existencia de este fenómeno.

Esto puede explicarse si el neutrino tiene una masa no nula; bajo esta suposición, los estados de sabor ν_e, ν_μ y ν_τ acoplados con el correspondiente leptón cargado no tiene una masa bien definida, en vez de ello son una combinación lineal de otros tres (o más) estados con masas bien definidas; los estados de masa [12, 19].

Todos los datos experimentales recabados hasta la fecha, pueden describirse asumiendo tres estados de sabor. Asimismo se ha establecido firme en base a los datos experimentales que existen al menos tres estados de masa ligeros ν_1, ν_2, ν_3 con $m_{1,2,3} \lesssim 1$ eV y deben tener diferentes masas $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ [19].

La relación entre los estados de sabor y los estados de masa, así como las cantidades físicas relevantes para el caso de dos y tres generaciones son el objeto de estudio de los próximos capítulos, por lo cual pospondremos su estudio hasta entonces.

1.2. La naturaleza del neutrino

Los experimentos que estudian, las oscilaciones de sabor no pueden proveer información acerca de la naturaleza del neutrino, es decir, no es posible determinar si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana, la determinación de la naturaleza del neutrino es de importancia fundamental para entender tanto el origen de las masas, como la simetría subyacente de las interacciones. Si el neutrino resultara ser una partícula de Dirac, ciertas cantidades aditivas deben conservarse en la interacción entre partículas, como el número leptónico, en caso contrario el número leptónico ya no es una cantidad conservada [19].

La forma más prometedora de distinguir si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana son los experimentos que busca el doble decaimiento beta sin emisión de neutrinos.

El doble decaimiento beta es el proceso:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (2\nu\beta\beta), \quad (1.3)$$

este puede ocurrir cuando el decaimiento beta sencillo está cinemáticamente prohibido, por ejemplo el núcleo ${}^{76}_{32}\text{Ge}$ no puede decaer, a ${}^{76}_{33}\text{As}$ ya que este tiene un masa mayor en 0.4 MeV, sin embargo por medio de un doble decaimiento beta puede decaer a ${}^{76}_{34}\text{Se}$ que es 3.05 MeV más ligero; este

proceso es de segundo orden en el acoplamiento débil y por lo tanto corresponde a tasa de decaimiento bastante bajas con tiempos de vida del orden de $T \gtrsim 10^{19} - 10^{21}$ años. [11]

El proceso sin emisión de neutrinos:

$$(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + 2e^- \quad (0\nu\beta\beta) \quad (1.4)$$

puede ser representado como un decaimiento beta seguido de la absorción del antineutrino emitido por un neutrón diferente en el núcleo; para que este proceso sea factible tiene dos condiciones:

- El neutrino debe ser su propia antipartícula, es decir deber ser una partícula de Majorana.
- La masa del neutrino debe ser distinta de cero.

El primer caso se puede entender de la siguiente forma; si el neutrino y el antineutrino son idénticos, la absorción del neutrino tiene las mismas consecuencias que la absorción del antineutrino, de hecho esta reacción viola la conservación del número leptónico en dos unidades. La segunda condición se sigue del hecho de que el antineutrino emitido en el primer decaimiento tiene la quiralidad equivocada para ser absorbido, En este caso la absorción es posible sin violar la conservación del momento angular si y solo si la masa del neutrino es no nula, de hecho la amplitud para el doble decaimiento beta sin emisión de neutrinos, es proporcional a la masa del neutrino. [11]

Actualmente las limitaciones experimentales no han permitido llegar a un estado concluyente acerca de la naturaleza del neutrino siendo este uno de los principales retos de la física de neutrinos en la actualidad.

1.3. Fuentes de neutrinos

Al neutrino se le suele distinguir por el tipo de fuente que lo produce, por ejemplo tenemos neutrinos solares, atmosféricos, provenientes de reactores nucleares o aceleradores de partículas, y cada uno tiene espectro energético, composición de sabores y distribuciones diferentes. Los neutrinos solares y atmosféricos son producidos de manera natural, su flujo así como la distancia entre el punto de producción y punto de detección no pueden ser controlados experimentalmente. Los neutrinos atmosféricos pueden producir como $\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_e$ y $\bar{\nu}_e$, sin embargo, los neutrinos solares son producidos únicamente como neutrinos electrónicos debido a los procesos de fusión termo-nuclear de cuatro protones para producir núcleos de helio [19].

Los neutrinos provenientes de reactores nucleares o de aceleradores de partículas (neutrinos acelerados, por como se les conoce en la literatura) son creados de forma artificial y es posible en principio, elegir la distancia entre la fuente y el punto de detección. Los neutrinos acelerados son ampliamente usados en experimentos que estudian las oscilaciones de sabor, son producidos por el decaimiento de mesones secundarios (piones y kaones) creados por la colisión de un haz primario de protones con algún núcleo objetivo. El flujo de los neutrinos acelerados depende un gran número de factores, como lo es la energía e intensidad de haz primario de protones, el material y la geometría del blanco, el ángulo de producción de los mesones secundarios con respecto al haz primario, entre otros [19].

Los reactores nucleares, por su parte, son una intensa e isotrópica fuente de $\bar{\nu}_e$ creados en su centro como productos de los decaimientos- β ocasionados en los procesos de fisión nuclear. Gracias al conocimiento de la física nuclear es posible calcular a detalle las cadenas de desintegración generadas por los procesos de fisión nuclear y estimar el flujo y el espectro de energía del haz de antineutrinos $\bar{\nu}_e$. [11]

Para los experimentos de oscilaciones de neutrinos el conocimiento del flujo para cada sabor del neutrino y antineutrino es necesario para el planeamiento y diseño del experimento, el análisis de datos y la estimación de error sistemáticos [19], por esta razón los experimentos realizados con neutrinos provenientes de reactores nucleares son una excelente forma de estudiar las oscilaciones de neutrinos.

1.3.1. Neutrinos solares

El Sol es una intensa y bien definida fuente de neutrinos, éste proporciona una excelente oportunidad para estudiar los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos, debido a su amplio rango de densidades y la gran distancia entre el y la Tierra.

Los neutrinos solares son creados como consecuencia de las reacciones nucleares de las que el Sol obtiene su energía, adicionalmente de la captura electrónica en ^{13}N , ^{15}O y ^{17}F a estos últimos nos referimos como neutrinos ecCNO. El efecto combinado de estas reacciones se escribe como [19]:



En el Sol $\sim 98.5\%$ de su energía es producida en los ciclos pp y solo 1.5% en los ciclos CNO, las principales componentes del flujo de neutrinos solares se muestra en la Tabla 1.1 [11], cada una es el resultado de diferentes reacciones nucleares, todas ellas tiene el mismo efecto que el producido en la reacción (1.5), pero producen neutrinos con diferente energía.

Tabla 1.1: Reacciones por medio de las cuales se crean los neutrinos solares (segunda columna) y sus abreviaciones (primer columna). En la tercer columna se muestra la energía promedio de los neutrinos producidos en MeVs. El flujo predicho por el Modelo Estándar Solar se muestra en la última [19].

Fuente	Reacción	$\langle E_\nu \rangle_\odot$ (MeV)	Flujo (cm^2sec) ⁻¹
pp	$p + p \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e$	0.2668	5.95×10^{10}
pep	$p + e^- + p \rightarrow {}^2\text{H} + \nu_e$	1.445	1.44×10^8
hep	${}^3\text{He} + p \rightarrow {}^4\text{He} + e^+ + \nu_e$	9.628	7.98×10^3
${}^7\text{Be}$	${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$	0.814	4.93×10^9
${}^8\text{B}$	${}^8\text{B} \rightarrow {}^8\text{Be} + e^+ + \nu_e$	6.735	5.46×10^6
${}^{13}\text{N}$	${}^{13}\text{N} \rightarrow {}^{13}\text{C} + e^+ + \nu_e$	0.706	2.78×10^8
${}^{15}\text{O}$	${}^{15}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + e^+ + \nu_e$	0.996	2.05×10^8
${}^{17}\text{F}$	${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O} + e^+ + \nu_e$	0.999	5.29×10^6

El flujo de neutrinos solares es pedicho mediante el llamado Modelo Estándar Solar. (SSE por sus siglas en inglés), el cual describe la estructura interna solar así como su evolución desde su nacimiento hasta el día de hoy. Las primeras medidas experimentales de este flujo de neutrinos solares fueron realizadas por Raymond Davies y colaboradores en 1968. Los resultados de este experimento arrojaron un flujo de $2.55 \pm 0.17 \pm 0.18$ SNU, donde el primer error es estadístico y el segundo sistemático en SNU siendo esta la unidad de neutrinos solares (*Solar Neutrino Unit*). Esta medida esta muy por debajo del valor esperado de 7.3 ± 2.3 SNU. La discrepancia entre estos dos valores constituye el llamado “problema de los neutrinos solares”, estos resultados fueron confirmados posteriormente por un segundo experimento conocido como Kamiokande [12].

La reacción primaria que produce la energía del sol y constituye aproximadamente el 90 % del flujo de los neutrinos provenientes del sol es

$$p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e. \quad (1.6)$$

donde d representa el deuterón. La energía promedio de los neutrinos generados en esta reacción es de 0.26 MeV y dado que los experimentos anteriores a base de Cl son sensibles a neutrinos con energías por encima de 1 MeV, estos no pueden ser detectados en los experimentos anteriores; esta dificultad puede ser superada usando Ga en vez de Cl, sin embargo los resultados de estos experimentos llevados a cabo por SAGE (*Soviet–American Gallium Experiment*) y GALLEX (*Gallium Experiment*), confirmaron que el déficit de neutrinos electrónicos se encontraba entre el 60 % y 70 % del esperado.

Las oscilaciones de los neutrinos son la mejor propuesta para solucionar el problema de los neutrinos solares, esto fue comprobado experimentalmente por el SNO (*Sudbury Neutrino Observatory*) en Canadá en 2002. Este experimento no solo midió el flujo de neutrinos electrónicos, sino también el flujo total de neutrinos, el cual coincide con el valor predicho por el Modelo Estándar Solar, probando así su validez.

Asímismo se observó que el flujo de neutrinos electrónicos era sólo $1/3$ de lo esperado, implicando así que $2/3$ de flujo de los neutrinos electrónicos producidos se transformó en ν_μ y/o ν_τ durante su viaje a la tierra [12].

Con la finalidad de entrar en materia y preparar el terreno para los capítulos venideros, en la siguiente sección presentamos los aspectos teóricos generales de las oscilaciones en neutrinos en el vacío, así como las fórmulas para las respectivas probabilidades de transición y supervivencia de los neutrinos.

Capítulo 2

Oscilaciones de neutrinos en el vacío

Como se mencionó anteriormente fue en 1958 cuando Pontecorvo [18] sugirió por primera vez el fenómeno de las oscilaciones de neutrinos en analogía con la mezcla de kaones neutros, $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$, donde el número cuántico de la extrañeza oscila en el tiempo.

Con el descubrimiento del neutrino muónico en 1962, en el experimento realizado por Lederman, Schwartz y Steinberger en el Brookhaven National Laboratory; quedó claro que la oscilación entre diferentes sabores de neutrinos activos era posible. En 1962, Z. Maki, M. Nakagawa y S. Sakata consideraron por primera vez un modelo con la mezcla de neutrinos de diferente sabor; fue hasta 1967 cuando el mismo Pontecorvo presentó los primeros trabajos acerca de las oscilaciones entre dos sabores.

La teoría de las oscilaciones de neutrinos fue finalmente desarrollada en los años 1975-76 por S. Elizer, A.R. Swift, H. Fritzsch, P. Minkowski, S.M. Bilenky y B. Pontecorvo [3]

2.1. Teoría estándar de las oscilaciones de neutrinos

Si inicialmente, en algún punto del espacio-tiempo, es creado un neutrino de un dado sabor, después de recorrer una cierta distancia desde el punto de producción, este neutrino puede cambiar su sabor, es decir, la probabilidad de encontrarlo en el estado de sabor inicial o en cualquier otro varía periódicamente con el tiempo. Esto es lo que conocemos como oscilaciones de neutrinos

En general, los estados de sabor creados en las interacciones débiles no

tiene una masa definida; sino que son una combinación lineal de otros estados que sí tienen masas bien definidas, a los que se conoce como estados de masa. La relación que existe entre la base de sabor y la base de masa es

$$\Psi = U\Phi \quad (2.1)$$

en donde Ψ es la función de onda de los estados de sabor, Φ representa la función de onda de los estados de masa y U es una matriz unitaria conocida como *matriz de mezcla*.

La ecuación de Schrödinger es la que describe la evolución temporal de las amplitudes de sabor de los neutrinos, sin embargo, en la base de sabor el Hamiltoniano resulta ser no diagonal. Es más conveniente trabajar en la base de masa. En esta última, la ecuación de Schrödinger toma su forma más sencilla

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H_0 \Phi, \quad (2.2)$$

donde H_0 es una matriz diagonal de dimensión $n \times n$, con n el número de generaciones que participan en la mezcla.

Consideremos un neutrino de sabor α y momento \vec{p} creado en algún proceso de corriente cargada, junto con el correspondiente antileptón l_α^+ , el estado de sabor se puede escribir como una combinación de los estados de masa

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad (2.3)$$

donde usamos la convención habitual de utilizar índices latinos (i, j, k, \dots) para denotar los estados de masa, mientras que los índices griegos ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) se reservan para los estado de sabor. Por simplicidad, consideramos que tanto los estados de masa como los estados de sabor son ortonormales, es decir,

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle &= \delta_{\alpha\beta}, \\ \langle \nu_i | \nu_j \rangle &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Los estados de masa son eigenestados del Hamiltoniano

$$H_0 |\nu_k\rangle = E_k |\nu_k\rangle, \quad (2.5)$$

con eigenvalores de la energía

$$E_k = \sqrt{p_k^2 c^2 + m_k^2 c^4}. \quad (2.6)$$

La ecuación de Schrödinger para los estados de masa,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\nu_k(t)\rangle = H_0 |\nu_k(t)\rangle \quad (2.7)$$

implica que su evolución es dada por

$$|\nu_k(t)\rangle = e^{-i\hbar E_k t} |\nu_k\rangle. \quad (2.8)$$

Consideremos por un momento un estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle$ creado en algún lugar del espacio, al tiempo $t = 0$. De las ecuaciones (2.3) y (2.8) la evolución temporal de este estado es dada por

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-i\hbar E_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.9)$$

con

$$|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle. \quad (2.10)$$

Usando la relación de unitariedad de la matriz de mezcla

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} = \delta_{ij}, \quad (2.11)$$

los estados de masa se pueden expresar en términos de los estados de sabor invirtiendo (2.3). Así,

$$|\nu_i\rangle = \sum_\beta U_{\beta i} |\nu_\beta\rangle, \quad (2.12)$$

que sustituida en (2.9) nos da

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} \left(\sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-i\hbar E_k t} \right) |\nu_\beta\rangle \quad (2.13)$$

De esta forma, el estado que en el $t = 0$ es un estado de sabor puro $|\nu_\alpha\rangle$ a un tiempo $t > 0$ este se convierte en una superposición de los estados de sabor. Por la tanto, la amplitud de tener un estado de sabor $|\nu_\beta\rangle$ a un tiempo t es dada por

$$A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) \equiv \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-i\hbar E_i t} \quad (2.14)$$

Esta es la amplitud de transición de $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ como función del tiempo, la correspondiente probabilidad es

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= |A(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t)|^2 \\ &= \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i\hbar(E_i - E_j)t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En este punto resulta conveniente hacer algunas suposiciones adicionales [3]. De ahora en adelante usaremos la convención $\hbar = c = 1$.

Consideremos que el neutrino es una partícula ultrarelativista, es decir $p_i \gg m_i$, con lo cual la relación de dispersión en (2.6) se puede aproximar por

$$E_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2} \approx p_i + \frac{1}{2} \frac{m_i^2}{p_i}. \quad (2.16)$$

de esta forma

$$E_i - E_j \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta m_{ij}^2}{p_i} \quad (2.17)$$

donde Δm_{ij}^2 es la diferencia cuadrática de masas

$$\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2. \quad (2.18)$$

Además, supondremos que los distintos tipos de neutrinos tienen el mismo momento p . Por lo tanto, la probabilidad de transición (2.15) se puede expresar como

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; t) &= \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t\right) \\ &= \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2\Re \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t\right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como último paso en la derivación estándar, la probabilidad de transición esta basada en el hecho de que en los experimentos de oscilaciones de neutrinos el tiempo de propagación desde el punto de creación hasta el punto de detección t no es medido, lo que realmente se conoce es la distancia L entre la fuente y el detector. Como supusimos que el neutrino era una partícula ultrarelativista este viaja casi a la velocidad de la luz, y es posible aproximar $L = t$, para finalmente llegar a

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; E, L) = \sum_k \sum_j U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L\right). \quad (2.20)$$

Esta es conocida como la ecuación estándar de las probabilidades de transición del neutrino, existen muchas formas de derivar la ecuación (2.20), la que aquí presentamos es quizás la más común, suponiendo que el neutrino viaja como una onda plana, una forma un poco más rigurosa es el tratamiento desde la perspectiva de los paquetes de ondas, y finalmente es posible derivarla directamente de una Teoría Cuántica de Campos (*QFT*)

donde los neutrinos son tratados como un estado virtual intermedio. Los diferentes métodos son más o menos propensos de caer en paradojas, para un tratamiento más detallado se puede revisar la referencia [4], y las referencias allí citadas.

Para los antineutrinos es necesario hacer el cambio $U_{\alpha k}^* \rightarrow U_{\alpha k}$ en la ecuaciones (2.3) y (2.19) [3].

Por mera conveniencia preferimos trabajar con la ecuación (2.19) en vez de la ecuación (2.20), ya que consideramos un poco más cómodo trabajar con las derivadas temporales.

2.2. La Matriz de Mezcla

Ahora nos dedicaremos a estudiar, de forma forma breve, algunas propiedades generales de la matriz de mezcla definida en la ecuación (2.1). En general, una matriz unitaria de $N \times N$ depende de N^2 parámetros reales independientes. Nuestro interés principal es saber cómo están repartidos estos parámetros

La matriz U La podemos escribir como

$$U = FO \quad (2.21)$$

donde F es una matriz de fases y O es una matriz ortogonal real, que satisface $O^T O = O O^T = \mathbb{I}$. La condición de ortogonalidad impone N condiciones a la diagonal, más $(N^2 - N)/2$ condiciones fuera de la diagonal, así el número de condiciones impuesta a O es dado por $N + (N^2 - N)/2 = (N^2 + N)/2$. Por lo tanto, el número de parámetros independientes de O es:

$$\frac{N(N-1)}{2} \quad \text{ángulos de mezcla,} \quad (2.22)$$

y el número de parámetros independientes de F es:

$$\frac{N(N+1)}{2} \quad \text{fases físicas,} \quad (2.23)$$

Si el neutrino es una partícula de Dirac, $2N - 1$ fases pueden eliminarse con una redefinición de los campos leptónicos [11], tales fases no tienen significado físico. Por lo tanto el número de fases físicas esta dado por [3]

$$\frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad \text{fases físicas de Dirac,} \quad (2.24)$$

Durante el resto del presente trabajo supondremos que el neutrino es una partícula de Dirac, ya que como se menciona en el capítulo anterior no es

posible determinar si el neutrino es una partícula de Dirac o de Majorana mediante las oscilaciones de neutrino. Esta suposición nos permitirá trabajar con el menor número de parámetros físicos relevantes sin perder generalidad en los resultados.

2.3. Mezcla de dos sabores en el vacío

Consideraremos el caso más sencillo, esto es, la mezcla de solo dos sabores de neutrinos, en cuyo caso solo tendremos dos estados de masa (ν_1, ν_2), con sus respectivos eigenvalores (m_1, m_2). De las ecuaciones (2.22) y (2.23)

$$N = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 1 & \text{ángulos de mezcla} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 0 & \text{fases de Dirac} \end{cases} \quad (2.25)$$

de forma tal que por lo tanto, para el caso, de dos generaciones la matriz de mezcla depende solo de un parámetro físico, el ángulo de mezcla y puede escribirse como

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Es importante señalar que, para el caso de dos neutrinos, al no haber fase de violación de CP , la matriz de mezcla resulta ser real, lo cual implica

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \quad (2.27)$$

que se deduce directamente de la ecuación (2.15).

A partir (2.1) la relación entre los estados de sabor y los estados de masa puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Sea un neutrino electrónico creado en $t = 0$ con momento p , El estado inicial es

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos \theta |\nu_1\rangle + \sin \theta |\nu_2\rangle \quad (2.28)$$

y usando (2.8) podemos encontrar el estado del neutrino para cualquier tiempo posterior, el cual será

$$|\nu(t)\rangle = \cos \theta e^{-iE_1 t} |\nu_1\rangle + \sin \theta e^{-iE_2 t} |\nu_2\rangle. \quad (2.29)$$

Para encontrar las probabilidades de conversión y supervivencia aplicamos el mismo razonamiento que el utilizado para establecer la ecuación (2.15). De esta manera,

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) &= \|\langle \nu_e | \nu(t) \rangle\|^2 \\
 &= \|\cos \theta \langle \nu_1 | \nu(t) \rangle + \sin \theta \langle \nu_2 | \nu(t) \rangle\|^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \cos((E_2 - E_1)t) \quad (2.30) \\
 &= 1 - \sin^2 2\theta \left(1 - \cos^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4E} t\right]\right),
 \end{aligned}$$

donde usamos las aproximaciones dadas por (2.16) y la notación $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$. Para neutrinos que viajan una larga distancia el término oscilante, promedia a cero, por lo cual la probabilidad de supervivencia promedio queda como:

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) \rangle = 1 - \sin^2 2\theta.$$

De la misma forma se puede calcular la probabilidad de conversión

$$\begin{aligned}
 P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) &= \|\langle \nu_\mu | \nu(t) \rangle\|^2 \\
 &= \sin^2 2\theta \left(1 - \cos^2 \left[\frac{\Delta m^2}{4E} t\right]\right) \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

cuya probabilidad promedio es

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t) \rangle = \sin^2 2\theta.$$

Una de la por la cuales el caso de dos sabores tan sencillo es el poco número de parámetros físicos relevantes ya que para este caso solo se tiene un ángulo de mezcla y una diferencia cuadrática de masas.

2.4. Mezcla de tres sabores en el vacío

Ahora pasaremos a un cálculo más general en el cual se consideran los tres estados de sabor (ν_e, ν_μ, ν_τ) y los tres estados de masa (ν_1, ν_2, ν_3) con sus respectivos eigenvalores (m_1, m_2, m_3). Usando una vez más las ecuaciones (2.22) y (2.23)

$$N = 3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 3 & \text{ángulos de mezcla} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 & \text{fases de Dirac} \end{cases} \quad (2.32)$$

Tal y como se esperaba, para el caso de tres generaciones la matriz de mezcla adquiere una forma más complicada, dependiendo ahora de tres ángulos de mezcla y una fase de Dirac. La situación se complica aún más debido a que existen varias posibles parametrizaciones de la matriz de mezcla; para un panorama completo de la diferentes parametrizaciones de la matriz de mezcla, se pueden revisar las referencias [5, 6, 21]

En el desarrollo del presente trabajo usaremos la representación estándar¹ [3, 12]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{13}s_{23}e^{i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

donde hemos usado la notación compacta $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ y $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ con $i, j \in \{1, 2, 3\}$, mantendremos esta notación a menos que se indique lo contrario. Tanto los ángulos de mezcla como la fase responsable de la violación de la simetría CP se deben determinar experimentalmente.

Buscaremos una forma más conveniente de representar la matriz de mezcla (2.33), esto es logrado representando esta matriz en terminos de las matrices de rotación de Euler [8, 16, 17].

$$U = \mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}\Gamma^\dagger, \quad (2.34)$$

donde \mathcal{O}_{ij} son matrices ortogonales espresadas en terminos de los ángulos de mezcla en el vacío $\theta_{ij} \in [0, \pi/2)$, $i, j = 1, 2, 3$ y Γ es una matriz diagonal que contiene la fase de violación CP , de forma explícita

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{12} &= \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \mathcal{O}_{13} &= \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \\ \mathcal{O}_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, & \Gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Además de los tres ángulos de mezcla y de la fase de Dirac, para este caso contamos con tres masas de neutrinos m_1, m_2, m_3 dejándonos así con siete parámetros físicos relevantes. Para neutrinos ultrarelativistas existen solo dos diferencias cuadráticas de masas independientes ($\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$).

Vamos a numerar (solo conveniencia) la masa de los neutrinos de tal forma que $m_2 > m_1$, así $\Delta m_{21}^2 > 0$ con esta elección tenemos dos posibilidades

¹Una deducción formal de como llegar a esta expresión, se puede encontrar en [3], pag 111-115, para el caso de matriz de mezcla en el sector de los quarks.

ya sea $m_1 < m_2 < m_3$ (orden normal) ó $m_3 < m_1 < m_2$ (orden invertido) en cada caso mayor diferencia cuadrática de masas queda como Δm_{31}^2 ó Δm_{32}^2 respectivamente, además es sabido a partir de los datos experimentales que $\Delta m_{21}^2 \ll |\Delta m_{31(32)}^2|$ por un factor de casi 30. $\Delta m_{21}^2/\Delta m_{31(32)}^2 \cong 0.03$, esto implica que ambos casos tenemos $\Delta m_{21}^2 \approx \Delta m_{31(32)}^2$ con $|\Delta m_{31}^2 - \Delta m_{32}^2| = \Delta m_{21}^2 \ll \Delta m_{31(32)}^2$ [19].

La enorme cantidad de datos acumulados a lo largo de mucho años de investigación nos han permitido determinar los parámetros, que son responsables de las oscilaciones de los neutrinos solares. El elemento $U_{e3} \simeq \sin \theta_{13}$ de la matriz dada en (2.33) es relativamente pequeño lo cual nos permite identificar los ángulos θ_{12} y θ_{23} como los ángulos de mezcla relacionados con la componente dominante de las oscilaciones de los neutrinos solares y atmosférico respectivamente, mientras que Δm_{21}^2 y Δm_{31}^2 son frecuentemente nombradas como diferencia cuadrática de masas “solar” y “atmosférica” y se les denota como $\Delta m_{21}^2 \equiv \Delta m_{\odot}^2$, $\Delta m_{31}^2 \equiv \Delta m_{atm}^2$. Sin embargo, los datos experimentales no permiten determinar el signo de Δm_{31}^2 los dos posibles signos corresponden con los dos tipos de espectros de masas de los neutrinos y dependiendo del valor de la masa de neutrino más ligero el espectro puede ser [19]:

Jerarquía normal:

$$m_1 < m_2 \ll m_3 \quad (2.36)$$

Jerarquía invertida:

$$m_3 \ll m_1 < m_2 \quad (2.37)$$

Sin importar la representación de la matriz de mezcla, la ecuación (2.19) sigue siendo válida en forma general, teniendo en cuenta las aproximaciones mencionadas en la primera sección de este capítulo y junto con (2.33), podemos calcular la probabilidad de supervivencia para el neutrino electrónico

$$\begin{aligned} P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) = & c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4 + 2c_{13}^4 c_{12}^2 s_{12}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{21}^2 t}{2E}\right) \\ & + 2c_{13}^2 c_{12}^2 s_{13}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{31}^2 t}{2E}\right) + 2c_{13}^2 s_{12}^2 s_{13}^2 \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 t}{2E}\right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

donde $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$.

Para neutrinos que viajan una larga distancia desde el punto de producción, los términos oscilantes promedian a cero y la correspondiente probabilidad de supervivencia promedio, de modo que:

$$\langle P(\nu_e \rightarrow \nu_e; t) \rangle = c_{12}^4 c_{13}^4 + s_{12}^4 c_{13}^4 + s_{13}^4, \quad (2.39)$$

las diferencia entre la mezcla de dos sabores y de tres, empiezan a ser evidentes, no sólo la probabilidad de supervivencia, toma una forma más complicada, además las probabilidades de conversión $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu; t)$ y $P(\nu_e \rightarrow \nu_\tau; t)$ tiene un nuevo factor proporcional a δ , es decir, los efectos de la fase de violación de CP deben ser tomados en cuenta.

Otra importante diferencia es que para el caso de tres generaciones

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \neq P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} \quad (2.40)$$

pues en este caso U es una matriz compleja, y hacer el cambio $U_{\alpha k} \rightarrow U_{\alpha k}^*$, no deja las ecuaciones (2.15) invariantes, sin embargo de la estructura de estas mismas, el claro que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = P_{\bar{\nu}_\beta \rightarrow \bar{\nu}_\alpha} \quad (2.41)$$

esto no es más que una consecuencia del teorema CPT [5, 11].

A pesar de todas estas diferencias, las probabilidades de conversión o supervivencia de neutrinos en el vacío, queda completamente determinado por la ecuación (2.15), para el caso de los antineutrinos es necesario reemplazar $U_{\alpha k}^* \rightarrow U_{\alpha k}$.

El caso de oscilaciones de neutrinos en el vacío, es quizás el caso más estudiado en la literatura, y aún hoy a más de sesenta años, de que fuera propuesto sigue intrigando a los físicos de todo el mundo.

Capítulo 3

Oscilaciones de neutrinos en materia

En este capítulo tenemos como objetivo estudiar los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos así como dar una base firme a los resultados que se obtendrán en el siguiente capítulo. Revisaremos el llamado potencial efectivo que sienten los neutrinos al propagarse a través de la materia y como modifica las probabilidades de transición.

3.1. Efectos de la materia en la propagación de los neutrinos

Los neutrinos que se propagan a través de un medio interactúan con las partículas que lo constituyen y “sienten” un potencial efectivo, por lo cual la presencia de materia puede cambiar drásticamente el patrón de las oscilaciones de neutrinos. El Hamiltoniano del sistema en materia se puede escribir como

$$H_m(t) = UH_0U^\dagger + H_{int}(t), \quad (3.1)$$

donde H_0 es el Hamiltoniano del sistema en el vacío y $H_{int}(t)$ describe la interacción de los neutrinos con el medio [19].

Fue en 1978 cuando Wolfenstein [20] discutió por primera vez los efectos de la materia en la propagación de los neutrinos a través de un medio como consecuencia de las interacciones con las partículas (electrones y nucleones) en el mismo [3]. El efecto del potencial efectivo es análogo al índice de refracción de la luz a través de la materia. Sin embargo, este índice de refracción depende en general del sabor del neutrino [9]. Al principio de la década de los ochenta, Wolfenstein y otros autores estudiaron la propagación de

los neutrinos en un medio con densidad constante. En los primeros trabajos el signo del potencial efectivo era incorrecto, el correcto fue introducido posteriormente por Langacker, Leveille, y Sheiman en la referencia [10].

La materia ordinaria está compuesta de electrones, protones y neutrones y el potencial efectivo recibe contribuciones de todas estas partículas [11]. Las interacciones de los ν_e y de los ν_μ, ν_τ son diferentes, ya que estos últimos solo tienen interacciones de corriente neutra, mientras que para el neutrino electrónico además existe una componente de corriente cargada [14]. Las interacciones causadas por el acoplamiento con un bosón Z^0 resultan en los potenciales efectivos:

$$\begin{aligned} V_{e\nu_e}^Z(t) &= V_{e\nu_\mu}(t) = V_{e\nu_\tau}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_e(t), \\ V_{p\nu_e}(t) &= V_{p\nu_\mu}(t) = V_{p\nu_\tau}(t) = +\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_p(t), \\ V_{n\nu_e}(t) &= V_{n\nu_\mu}(t) = V_{n\nu_\tau}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_n(t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde G_F es la constante de Fermi y $N_{e,p,n}(t)$ es la densidad de electrones, protones y neutrones a lo largo del trayecto del neutrino, respectivamente. El potencial efectivo para el neutrino electrónico tiene una forma diferente ya que también cuenta con una contribución adicional debida al acoplamiento con el bosón W :

$$V_{e\nu_e}(t) = V_{e\nu_e}^Z(t) + V_{e\nu_e}^W(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_e + \sqrt{2}G_F N_e(t). \quad (3.3)$$

El potencial efectivo total para un sabor dado es la suma de las tres contribuciones; por ejemplo, $V_{\nu_e} = V_{e\nu_e} + V_{p\nu_e} + V_{n\nu_e}$ [11]. Para un tratamiento completo de los potenciales efectivos remitimos al lector a las referencias [3] y [5]. Para el antineutrino es necesario cambiar el signo del potencial efectivo $V \rightarrow -V$ [3, 5, 9].

Queremos enfatizar que estos cambios aplican a los estados de sabor ya que son estos los que interactúan con las partículas del medio. [5] esto implica que en la ecuación (3.1) el término H_{int} será diagonal en la base de sabor.

En 1985, Mikheyev y Smirnov descubrieron que las oscilaciones de neutrinos pueden ser dramáticamente aumentadas cuando el neutrino se propaga a través de un medio con densidad variable, inclusive si los valores de los ángulos de mezcla en el vacío son pequeños [13]. Este es el llamado efecto MSW, el cual se volvió famoso rápidamente debido a ser el mejor candidato para explicar el problema de los neutrinos solares [3].

Mientras el neutrino se propaga en el vacío las oscilaciones pueden reducir el flujo de neutrinos solares en 1/3, si el ángulo de mezcla entre los tres

sabores es máximo, esto en general representa un problema ya que se espera que los valores de los ángulos de mezcla en el vacío sean pequeños [9]. No obstante con la inclusión de los efectos de la materia en la propagación de los neutrinos y en particular el efecto MSW, grandes supresiones en el flujo de neutrinos son posibles aun para valores pequeños del ángulo de mezcla. Hoy es sabido que el ángulo de mezcla relevante en las oscilaciones de los neutrinos solares es grande, pero no máximo, y las transiciones de sabores son debidas al efecto MSW [3].

3.2. Mezcla de dos sabores en materia

Los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos han sido ampliamente estudiados en el caso de dos sabores [1] y es un tema que no podemos pasar por alto. En esta sección pretendemos dar un breve repaso de la mezcla de dos sabores en materia, y para ello consideraremos el caso en donde la mezcla se realiza entre el ν_e y cualquier otro de los estados de sabor activos ν_α con $\alpha \in \{\mu, \tau\}$.

De las ecuaciones (3.1), (2.1) y (2.2) la evolución de las amplitudes de los estados de sabor puede expresarse como

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_m(t)\Psi, \quad (3.4)$$

o de forma explícita

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ c & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_e(t) & 0 \\ 0 & V_\alpha(t) \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde hemos usado la notación compacta $c \equiv \cos\theta$, $s \equiv \sin\theta$. Vamos a reescribir la ecuación (3.5) de una forma más conveniente, para lo cual tebdremos en cuenta las siguiente igualdades:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_1 + E_2 & 0 \\ 0 & E_1 + E_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(E_2 - E_1) & 0 \\ 0 & E_2 - E_1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} V_e & 0 \\ 0 & V_\alpha \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_e + V_\alpha & 0 \\ 0 & V_e + V_\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_e - V_\alpha & 0 \\ 0 & -(V_e - V_\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones y las aproximaciones dadas en la ecuación (2.16); la ecuación (3.5) toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix} = \left\{ \left(\frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{V_e + V_\alpha}{2} \right) \mathbb{I} + \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Delta_0 & 0 \\ 0 & \Delta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ c & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\alpha \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

en donde hemos definido $\Delta_0 \equiv (m_2^2 - m_1^2)/4E$ y $V \equiv (V_e - V_\alpha)/2$. El termino proporcional a la identidad puede ser eliminado ya que corresponde a una fase global inobservable [5, 11], o en forma compacta

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \{U H_0 U^\dagger + V(t) Y\} \Psi \quad (3.7)$$

Después de un poco álgebra podemos reescribir el Hamiltoniano de la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor en materia como:

$$\begin{aligned} H_m(t) &= \begin{pmatrix} -\Delta_0 \cos 2\theta & \Delta_0 \sin 2\theta \\ \Delta_0 \sin 2\theta & \Delta_0 \cos 2\theta \end{pmatrix} + V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= (V(t) - \Delta_0 \cos 2\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \Delta_0 \sin 2\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (V(t) - \Delta_0 \cos 2\theta) \sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde σ_3, σ_1 son matrices de Pauli. Esta expresión tomará gran relevancia posteriormente. La ecuación de evolución de los estados de sabor con el Hamiltoniano dado por (3.8), puede ser resuelta analíticamente solamente para un número limitado de funciones de $V(t)$ [5], en particular, los casos correspondientes a una densidad constante y aquellas que cambian de forma lineal, exponencial y como una función escalonada a lo largo de la trayectoria del neutrino [9, 16].

El Hamiltoniano en materia puede ser diagonalizado por una transformación unitaria $U_m(t)$ con $U_m(t)^\dagger U_m(t) = U_m(t) U_m(t)^\dagger = \mathbb{I}$. Más aun, sabemos que para el caso de dos generaciones el Hamiltoniano en materia es simétrico, es decir, $H_m^T = H_m$ por lo tanto puede diagonalizar por medio de una transformación ortogonal

$$U_m(t)^T H_m(t) U_m(t) = H_D(t). \quad (3.9)$$

Aquí $U_m(t)$ es la matriz de mezcla en materia. que, por analogía con (2.26), se escribe como

$$U_m(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t) & \sin \theta_m(t) \\ -\sin \theta_m(t) & \cos \theta_m(t) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Por otro lado

$$H_D = \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

donde $\epsilon_i(t)$ con $i \in \{1, 2\}$ son los *eigenvalores instantáneos reducidos*, a los que llamamos de esta forma ya que para obtener el eigenvalor instantáneo en materia es necesario diagonalizar el Hamiltoniano completo que aparece en la ecuación (3.6), es decir, se debe reincorporar el termino proporcional a la identidad que acabamos de quitar. De esta forma, la relación de los eigenvalores completos $\mathcal{E}_i(t)$ con los reducidos esta dada por:

$$\mathcal{E}_i(t) = \left(\frac{m_1 + m_2}{4E} + \frac{V_e + V_\alpha}{2} \right) + \epsilon_i(t). \quad (3.12)$$

A partir de la diagonalización de Hamiltoniano en materia podemos obtener tanto los eigenvalores como los eigenestados instantáneos de materia. La relación entre la base de sabor y los eigenestados instantáneos de masa en materia es dada por

$$\Psi(t) = U_m(t)\Phi_m(t) \quad (3.13)$$

y, a partir de las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10), se tiene

$$\begin{pmatrix} \alpha \cos 2\theta_m - B \sin 2\theta_m & \alpha \sin 2\theta_m + B \cos 2\theta_m \\ \alpha \sin 2\theta_m + B \cos 2\theta_m & -\alpha \cos 2\theta_m + B \sin 2\theta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

con $\alpha = V(t) - A$, $A \equiv \Delta_0 \cos 2\theta$ y $B \equiv \Delta_0 \sin 2\theta$. De las condiciones fuera de la diagonal principal obtenemos

$$\tan 2\theta_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\Delta_0 \cos 2\theta - V(t)}. \quad (3.15)$$

Vemos que en los límites de bajas y altas densidades, respectivamente, el ángulo de mezcla en materia toma los valores

$$\begin{aligned} \lim_{V(t) \rightarrow 0} \tan 2\theta_m(t) &= \tan 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow \infty} \tan 2\theta_m(t) &= 0^-, \end{aligned} \quad (3.16)$$

es decir, en el límite en el que la densidad en el medio se hace cero se recupera el valor del ángulo de mezcla en el vacío, tal como esperábamos, mientras que en el límite de altas densidades ($V(t) \rightarrow \infty$), si tomamos el ángulo de mezcla en el vacío en el intervalo $\theta \in [0, \pi/2)$, entonces el $\sin 2\theta$ en la ecuación (3.15) es positivo y el denominador se hace infinitamente negativo, con lo

cual nos acercamos a cero por valores negativos, algo que sera retomado más adelante.

A partir de (3.15) y de identidades trigonométricas podemos determinar $\cos 2\theta_m$ y $\sin 2\theta_m$. La ambigüedad en el signo se resuelve al tomar en consideración el límite en bajas densidades dado en (3.16). De esta forma, resulta

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_m(t) &= \frac{\Delta_0 \cos 2\theta - V(t)}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}, \\ \sin 2\theta_m(t) &= \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}.\end{aligned}\tag{3.17}$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{V(t) \rightarrow 0} \cos 2\theta_m(t) &= \cos 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_m(t) &= \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{3.18}$$

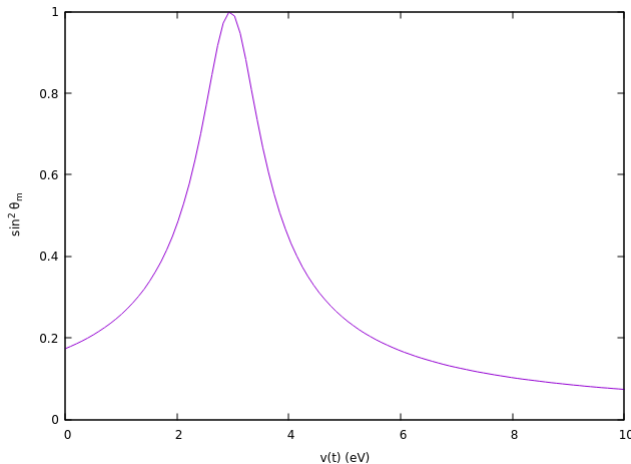


Figura 3.1: gráfica $\sin 2\theta_m$, donde θ_m es el ángulo de mezcla en materia como función de V , para ello tomamos $\Delta_0 = 3.0$ eV y $\sin^2 2\theta = 0.03$

Regresando a la ecuación (3.14), de las condiciones en la diagonal principal y usando las expresiones de los ángulos de mezcla en materia en la ecuación (3.17) podemos calcular los eigenvalores instantáneos reducidos:

$$\begin{aligned}\epsilon_1(t) &= -\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}, \\ \epsilon_2(t) &= \sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Es importante recalcar que la única dependencia en t en los eigenvalores instantáneos, así como en los ángulos de mezcla en materia es a través del potencial efectivo.

Antes de proseguir debemos contestar una cuestión fundamental: ¿cuál es la ecuación de evolución que obedecen los estados $\Phi_m(t)$?, para ello vamos a sustituir (3.13) directamente en (3.4)

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} (U_m(t) \Phi_m(t)) &= H_m(t) U_m(t) \Phi_m(t), \\ i U_m(t) \frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} &= \left[H_m(t) U_m(t) - i \frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right] \Phi_m(t), \end{aligned}$$

multiplicando por la izquierda por $U_m(t)^\dagger$ y usando la (3.9) nos queda

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(t) = \left\{ H_D - i U_m(t)^\dagger \frac{\partial U_m(t)}{\partial t} \right\} \Phi_m(t). \quad (3.20)$$

Esta ecuación es general e independiente del número de generaciones (sabores) que participen en la mezcla, es difícil exagerar la importancia de la misma en el desarrollo del presente trabajo. Para el caso de dos sabores y haciendo uso de las ecuaciones (3.10) y (3.11), obtenemos

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & \epsilon_2(t) \end{pmatrix} - i \dot{\theta}_m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Para encontrar la derivada del ángulo de mezcla en materia usamos la expresión del $\sin 2\theta_m(t)$ en la ecuación (3.17):

$$\dot{\theta}_m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_m(t)}{2 \Delta_0 \sin 2\theta} \dot{V}(t). \quad (3.22)$$

El Hamiltoniano dado en la ecuación (3.21) se denotara por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(t) &= \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & -\epsilon_1(t) \end{pmatrix} - i \dot{\theta}_m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \epsilon_1(t) \sigma_3 + \dot{\theta}_m(t) \sigma_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

para escribir esta última igualdad nos valimos del hecho de que $\epsilon_2 = -\epsilon_1$.

Vamos a considerar por un momento el caso en el cual $|d\theta_m/dt|$ es despreciable en comparación con los elementos de la diagonal principal, en este caso

$$\mathcal{H}_m(t) \simeq \begin{pmatrix} \epsilon_1(t) & 0 \\ 0 & -\epsilon_1(t) \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

y ϕ_1^m y ϕ_2^m hacen las veces de los estados en masa en el vacío ϕ_1 y ϕ_2 , pero con autovalores dependientes de t al igual que θ_m . Esta es la aproximación adiabática [9].

Del análisis de las ecuaciones (3.17) observamos que las definiciones de los ángulos de mezcla en materia presentan un comportamiento resonante como función de V , tal como se muestra en Figura 3.1 donde específicamente hemos gráficado $\sin 2\theta_m$ como función de $V(t)$. La resonancia ocurre cuando $\Delta_0 \cos 2\theta = V(t)$ en este punto $\sin 2\theta_m(t) = 1$ y la mezcla es máxima [9].

La propagación adiabática a través de la materia con densidad variable puede tener profundos efectos en las oscilaciones de neutrinos, por ejemplo consideremos un neutrino electrónico creado en el centro del sol o en una estrella colapsando, donde la densidad es muy alta y se satisface $V \gg \Delta_0$. Al momento de ser creado el neutrino se encuentra casi totalmente como un estado ν_2 , independientemente del valor del ángulo de mezcla. A medida que el neutrino se propaga en el medio el potencia efectivo decrece a conforme la densidad disminuye y el neutrino eventualmente atravesará la resonancia, en el punto $\Delta_0 \cos 2\theta = V(t)$ donde la diferencia entre los eigenvalores de la energía es mínima (Figura 3.2), posteriormente abandonará el medio y se propaga en el vacío. Si la densidad del medio cambia lo suficientemente lento como para que la propagación se adiabática, el neutrino permanecerá en el mismo eigenestado de masa ν_2 y existe en el sol como $\nu_2 = \sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\alpha$; si el ángulo de mezcla es pequeño esto ocasionaría un casi completa conversión $\nu_e \rightarrow \nu_\alpha$, este es el caso en el cual el efecto MSW es más efectivo [3, 9].

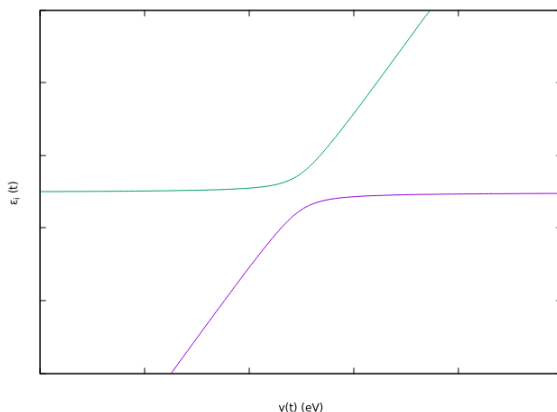


Figura 3.2: Gráfica de los eigenvalores instantáneos de masa en materia como función de V aquí hemos tomado $m_2^2 = 25m_1^2$, $\sin^2 2\theta = 1 \times 10^{-2}$

Consideremos ahora el caso en el cual la evolución no es adiabática, en este caso los elementos fuera de la diagonal principal en (3.23) toma importancia ocasionando la mezcla entre los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$ en este caso

nos vemos obligados a resolver la ecuación (3.21), sin embargo, aún es posible encontrar una expresión sencilla de las probabilidades de supervivencia/del neutrino.

Consideremos por un momento un neutrino de una sabor dado ν_α producido en el interior de algún objeto astrofísico al tiempo t_0 , si denotamos por t_\star el tiempo en el cual el neutrino abandona el medio, para todo tiempo $t > t_\star$ la evolución del neutrino se dará en el vacío y las probabilidades de conversión y/o supervivencia se podrán calcular de acuerdo al formalismo visto en el Capítulo 2

Para cualquier tiempo $\psi(t)$ será una combinación lineal de los estados de sabor, esto es cierto en particular para t_\star

$$\begin{aligned}
 |\psi(t_\star)\rangle &= \sum_{\beta} \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_{\beta}\rangle \\
 &= \sum_{\beta} \sum_i \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_i\rangle \langle \nu_i | \nu_{\beta}\rangle \\
 &= \sum_{\beta} \sum_i U_{\beta i}^* \psi_{\beta}(t_\star) |\nu_i\rangle \\
 &= \sum_i \phi_i(t_\star) |\nu_i\rangle
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde $\psi_{\beta}(t_\star)$ es la amplitud del estado de sabor ν_{β} y $\phi_i(t_\star)$ es la amplitud del estado de masa ν_i al tiempo t_\star , las amplitudes están relacionadas por

$$\phi_i(t_\star) = \sum_{\beta} U_{\beta i}^* \psi_{\beta}(t_\star).$$

Para tiempos $t > t_\star$ los estados de masa evolucionarán de acuerdo a la ecuación (2.8)

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i \phi_i(t_\star) e^{-iE_i(t-t_\star)} |\nu_i\rangle. \tag{3.26}$$

La probabilidad de transición al estado ν_{β} , esta dada por (supusimos que al tiempo t_0 se creó un estado de sabor puro)

$$\begin{aligned}
 P_{\alpha \rightarrow \beta} &= \left\| \langle \nu_{\beta} | \psi(t) \rangle \right\|^2 \\
 &= \left\| \sum_i \phi_i(t_\star) e^{-iE_i(t-t_\star)} \langle \nu_{\beta} | \nu_i \rangle \right\|^2 \\
 &= \left\| \sum_i U_{\beta i} \phi_i(t_\star) e^{-iE_i(t-t_\star)} \right\|^2
 \end{aligned}$$

De forma explícita

$$P_{\alpha \rightarrow \beta} = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \|\phi_i(t_\star)\|^2 + 2\text{Re} \left[\sum_{i>j} U_{\beta i} U_{\beta j}^* \phi_i(t_\star) \phi_j(t_\star)^* e^{-i\Delta_{ij}(t-t_\star)} \right] \quad (3.27)$$

normalmente el termino oscilante promedia cero para neutrinos que viajan una larga distancia, en esta circunstancias la probabilidades promedio estarán dadas por

$$\langle P_{\alpha \rightarrow \beta} \rangle = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \langle \|\phi_i(t_\star)\|^2 \rangle, \quad (3.28)$$

esta ecuación es general e independiente del número de generaciones que participen en la mezcla; ahora lo único que debemos hacer es encontrar la forma de obtener $\phi_i(t_\star)$ y el problema quedara completamente descaminado. Como punto de partida investiguemos la relación que existe entre los estados de masa Φ y los estados de masa en el materia Φ_m igualando las ecuaciones (2.1) y (3.13) y despejando Φ

$$\Phi(t) = U^\dagger U_m(t) \Phi_m(t), \quad (3.29)$$

permitamos asumir que la densidad en el borde del medio presenta una súbita caída de tal forma que el potencial efectivo tiene a cero $V(t_\star) = 0$, en este caso usando las ecuaciones (3.18) $U_m(t) \rightarrow U$ y por lo tanto

$$\Phi = \Phi_m(t_\star) \quad \text{si} \quad V(t_\star) = 0, \quad (3.30)$$

o en términos de sus componentes $\phi_i(t_\star) = \phi_i^m(t_\star)$, bajo estas condiciones podemos utilizar la ecuación de evolución de los estados de masa en materia para los tiempos $t_\star > t_0$, para obtener los estados de masa en el borde del medio.

$$\Phi_m(t_\star) = \mathcal{U}_m(t_\star, t_0) \Phi_m(t_0) \quad (3.31)$$

en este caso el operador de evolución obedecerá la ecuación

$$i \frac{\partial \mathcal{U}_m}{\partial t} = \mathcal{H}_m(t) \mathcal{U}_m, \quad (3.32)$$

con el Hamiltoniano de la ecuación (3.23), sujeto a la condición inicial $\mathcal{U}_m(t_0, t_0) = \mathbb{I}$.

Usando los resultados del Apéndice A y denotando por P_c la probabilidad de cruzamiento entre los estados de masa en materia $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$, donde por conveniencia hemos omitido las fases que aparecen en la ecuación (A.20), ya que esta no cobran relevancia al considerar las probabilidades clásicas, (3.28).

$$\begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_c} & \sqrt{P_c} \\ -\sqrt{P_c} & \sqrt{1-P_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

consideremos que al tiempo t_0 se crea un neutrino electrónico ν_e

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de las ecuaciones (3.10) y (3.13)

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_m(t_0) \\ \sin \theta_m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

y usando (3.28), (3.33) y (3.34) llegamos a

$$\langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta \cos 2\theta_m(t_0). \quad (3.35)$$

Esta es conocida como la fórmula de Parke [3], para la probabilidad promedio de supervivencia del neutrino electrónico, note que en el caso en el que P_c se anula se recupera el límite adiabático, tal como se esperaba.

3.3. Mezcla de tres sabores en materia

En la sección anterior presentamos el formalismo habitualmente empleado para el estudio de las oscilaciones neutrinos en materia cuando la mezcla es únicamente entre dos generaciones de neutrinos, introdujimos la matriz de mezcla en materia, revisamos brevemente el efecto MSW, mencionamos la aproximación adiabática y, por último, hicimos el cálculo de la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico cuando esta aproximación deja de ser válida. En esta sección nos damos a la tarea de extender estos resultados al caso de tres generaciones de neutrinos activos. Esto presenta nuevos retos, empezando por el hecho de que la matriz de mezcla ahora depende de cuatro parámetros físicos, a saber, tres ángulos de mezcla y una fase responsable de la violación de la simetría de CP . Sin más preámbulos demos paso al desarrollo de la presente sección.

La ecuación (3.4) es válida sin importar el número de generaciones que participan en la mezcla, usando la definición de la matriz de mezcla en el vacío (2.33)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \end{pmatrix} = \left\{ U \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{pmatrix} U^\dagger + \begin{pmatrix} V_e & 0 & 0 \\ 0 & V_\mu & 0 \\ 0 & 0 & V_\tau \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_\mu \\ \psi_\tau \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

Nuevamente sustraemos un término proporcional a la identidad que interpretamos como una fase global inobservable, para lo cual es importante notar que las ecuaciones (3.2) implican que $V \equiv V_e - V_\mu = V_e - V_\tau$ [11]. Después de despreciar el término proporcional a la identidad, la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor queda como

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \{UH_0U^\dagger + V(t)Y\}\Psi, \quad (3.37)$$

con

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{31} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

y $\Delta_{21} \equiv \Delta m_{21}^2/2E$ y $\Delta_{31} \equiv \Delta m_{31}^2/2E$, en donde $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ son las diferencias cuadráticas de masas.

A diferencia del caso de dos sabores el Hamiltoniano dado en la ecuación (3.36) resulta ser una matriz compleja, ya que la matriz de mezcla es en sí misma compleja e introduce una fase, la fase de violación de la simetría CP . Buscaremos una forma de reescribir el Hamiltoniano de forma más sencilla, usando las ecuaciones (2.34), (3.37) y (3.38):

$$\begin{aligned} H_m(t) &= UH_0U^\dagger + V(t)Y \\ &= \tilde{U}H_0\tilde{U}^\dagger + V(t)Y \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde hemos usando el hecho de que tanto H_0 y Γ son matrices diagonales, y por tanto, conmutan $[H_0, \Gamma] = 0$. También definimos

$$\tilde{U} = \mathcal{O}_{23}\Gamma\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}\Gamma^\dagger \quad (3.40)$$

tal que

$$U = \tilde{U}\Gamma^\dagger. \quad (3.41)$$

Antes de continuar probaremos otro par de relaciones que nos serán útiles. La primera de ellas es que los conmutadores de $[\Gamma, Y]$ y $[\mathcal{O}_{23}, Y]$ se anulan, es decir

$$\begin{aligned} [\Gamma, Y] &= 0 \\ [\mathcal{O}_{23}, Y] &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

lo cual se sigue directamente de las definiciones de Γ , \mathcal{O}_{23} , (2.35) y de la definición de Y , ecuación (3.38).

Usando las relaciones anteriores (3.42), se deduce que $\mathcal{O}_{23}\Gamma Y \Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T = Y$, y sustituyendo esta última igualdad en la ecuación en (3.39) podemos

reescribir la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor como:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathcal{O}_{23}\Gamma \{ \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y \} \Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T\Psi \quad (3.43)$$

multiplicando por la izquierda por $\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T$ y definiendo

$$\begin{aligned} \Psi' &\equiv \Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T\Psi \\ \tilde{H}_m(t) &\equiv \mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T + V(t)Y \end{aligned} \quad (3.44)$$

nos queda

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \tilde{H}_m(t)\Psi'.$$

Lo primero que debemos notar es que ya no nos encontramos en la base de sabor, ya que el nuevo vector Ψ' esta dado en términos de la mezcla entre los estados ψ_μ y ψ_τ ocasionada por el ángulo θ_{23} y además contiene la información de la fase de violación de CP :

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e \\ c_{23}\psi_\mu - s_{23}\psi_\tau \\ [s_{23}\psi_\mu + c_{23}\psi_\tau]e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Lo siguiente que debemos notar son las propiedades del nuevo Hamiltoniano $\tilde{H}_m(t)$:

- 1) Es real, es decir, $\tilde{H}_m^*(t) = \tilde{H}_m(t)$
- 2) Es simétrico, es decir, $\tilde{H}_m^T(t) = \tilde{H}_m(t)$
- 3) La relación entre \tilde{H}_m y $H_m(t)$ es dada por

$$H_m(t) = \mathcal{O}_{23}\Gamma\tilde{H}_m(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T \quad (3.46)$$

Teorema 3.3.1. $H_m(t)$ y $\tilde{H}_m(t)$ tienen los mismos eigenvalores.

Demostración. De la ecuación (3.46) y de la propiedad cíclica del determinante se tiene que

$$\begin{aligned} \det(H_m(t) - \lambda\mathbb{I}) &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma\tilde{H}_m(t)\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T - \lambda\mathbb{I}) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma(\tilde{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I})\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T) \\ &= \det(\mathcal{O}_{23}\Gamma\Gamma^\dagger\mathcal{O}_{23}^T(\tilde{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I})) \\ &= \det(\tilde{H}_m(t) - \lambda\mathbb{I}) \end{aligned}$$

como $H_m(t)$ y $\tilde{H}_m(t)$ tiene la misma ecuación característica, el teorema a quedado demostrado.

QED

Al igual que en el caso de dos sabores, existe una nueva base en la cual el Hamiltoniano (3.36) o equivalentemente (3.39), después de sustraer el término proporcional a la identidad, es diagonal. La relación entre base sabor y la de los eigenestados instantáneos de masa en materia está dada nuevamente por (3.13) donde ahora $U_m(t)$ es una matriz de 3×3 por determinar.

Denotemos momentáneamente por $\tilde{U}_m(t)$ (esta notación se aclarará más adelante) la matriz con la propiedad de

$$\tilde{U}_m^\dagger(t) H_m(t) \tilde{U}_m(t) = H_D(t), \quad (3.47)$$

con $H_D = \text{diag}(\mathcal{E}_1(t), \mathcal{E}_2(t), \mathcal{E}_3(t))$, estos son los eigenvalores instantáneos de la energía.

Por otro lado $\tilde{H}_m(t)$ es una matriz real y simétrica por lo cual nuevamente puede ser diagonalizada por una transformación ortogonal dependiente del tiempo

$$\mathcal{O}_m^T(t) \tilde{H}_m(t) \mathcal{O}_m(t) = H_D(t). \quad (3.48)$$

Por el Teorema 3.3.1 H_D en la ecuación (3.47) es la misma que aparece en (3.48), sustituyendo (3.46) en (3.47) y comparando con (3.48)

$$\tilde{U}_m(t) = \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_m(t), \quad (3.49)$$

donde las matrices Γ y \mathcal{O}_{23} son las misma que la definidas por la matriz de mezcla en el vacío. De esta forma hemos convertido el problema de determinar $\tilde{U}_m(t)$, la cual es una matriz compleja, en un problema equivalente de determinar la matriz ortogonal $\mathcal{O}_m(t)$.

Del Teorema 3.3.1 se deduce que los eigenvalores de $H_m(t)$ *no dependen* de θ_{23} ni de δ . Tampoco $\mathcal{O}_m(t)$ depende de estos parámetros.

Queremos recuperar la definición de la matriz de mezcla en el vacío al hacer tender $V(t) \rightarrow 0$. Esto implica que en este límite $\mathcal{O}_m(t) \rightarrow \mathcal{O}_{13} \mathcal{O}_{12}$, con lo cual, haciendo

$$U_m(t) = \tilde{U}_m(t) \Gamma^\dagger \quad (3.50)$$

garantizamos que $U_m(t) \rightarrow U$ cuando el potencial se desvanece, es fácil ver que esta definición no afecta la ecuación (3.47):

$$\begin{aligned} \Gamma \tilde{U}_m^\dagger(t) H_m(t) \tilde{U}_m(t) \Gamma^\dagger &= \Gamma H_D(t) \Gamma^\dagger, \\ U_m^\dagger(t) H_m(t) U_m(t) &= H_D(t), \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde nuevamente hemos usamos el hecho de que Γ y $H_D(t)$ son matrices diagonales, y por tanto, conmutan.

En este punto es importante recalcar que aun no conocemos la forma explícita de $U_m(t)$. Para ello debemos ser capaces de diagonalizar el Hamiltoniano dado en la ecuación (3.39). Aunque los eigenvalores exactos se puede obtener de forma analítica, debido la ecuación caracteriztica es de orden cúbico [22], la interpretación física está lejos de ser transparente, po lo cual en vez de ello, tomaremos ventaja de razón entre Δ_{21}/Δ_{31} es mucho menor que uno para derivar una expresión aproximada tanto de $\mathcal{E}_i(t)$ como de \mathcal{O}_m , la cual es validad en el rango completo de $V(t)$ [2].

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(t) &\simeq \frac{1}{2}[\Delta_{21} + V(t)c_{13}^2 - \Delta_l] \\ \mathcal{E}_2(t) &\simeq \frac{1}{2} \begin{cases} \Delta_{21} + V(t)c_{13}^2 + \Delta_l & V(t) \lesssim \Delta_{21} \\ \Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2 + V(t) - \Delta_h & V(t) \gtrsim \Delta_{31} \end{cases} \\ \mathcal{E}_3(t) &\simeq \frac{1}{2}[V(t) + \Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2 + \Delta_h]\end{aligned}\quad (3.52)$$

aquí hemos definido

$$\begin{aligned}\Delta_l(t) &\equiv c_{13}^2 \sqrt{(V(t) - V_l^R)^2 + B_l^2}, \\ \Delta_h(t) &\equiv \sqrt{(V(t) - V_h^R)^2 + B_h^2},\end{aligned}\quad (3.53)$$

en esta última igualdad $B_l = V_l^R \tan 2\theta_{12}$, $B_h = V_h^R \tan 2\theta_{13}$ con

$$\begin{aligned}V_l^R &= \Delta_{21} \cos 2\theta_{12}/c_{13}^2, \\ V_h^R &= (\Delta_{31} - \Delta_{21}s_{12}^2) \cos 2\theta_{13}.\end{aligned}\quad (3.54)$$

En esta aproximación

$$\mathcal{O}_m(t) \simeq \mathcal{O}_{13}^m(t)\mathcal{O}_{12}^m(t)\quad (3.55)$$

con

$$\mathcal{O}_{12}^m(t) = \begin{pmatrix} c_{12}^m(t) & s_{12}^m(t) & 0 \\ -s_{12}^m(t) & c_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_{13}^m(t) = \begin{pmatrix} c_{13}^m(t) & 0 & s_{13}^m(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}^m(t) & 0 & c_{13}^m(t) \end{pmatrix}.\quad (3.56)$$

En (3.56) usamos la notación $c_{ij}^m(t) = \cos \theta_{ij}^m(t)$ y $s_{ij}^m(t) = \sin \theta_{ij}^m(t)$. Las definiciones de los ángulos de mezcla en materia se dan de forma similar al caso de dos sabores. Para $\theta_{12}^m(t)$ tenemos:

$$\sin 2\theta_{12}^m(t) = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{c_{13}^2 \sqrt{(V(t) - V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}},\quad (3.57)$$

$$\cos 2\theta_{12}^m(t) = \frac{V_l^R - V(t)}{\sqrt{(V(t) - V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}}, \quad (3.58)$$

Mientras que para $\theta_{13}^m(t)$:

$$\sin 2\theta_{13}^m(t) = \frac{(\Delta_{31} - \Delta_{21}s_{12}^2) \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(V(t) - V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}, \quad (3.59)$$

$$\cos 2\theta_{13}^m(t) = \frac{V_h^R - V(t)}{\sqrt{(V(t) - V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}. \quad (3.60)$$

De las ecuaciones (3.53), (3.54) y (3.57) - (3.60) vemos que ahora los definiciones de los ángulos de mezcla en materia dependen tanto de θ_{12} y de θ_{13} , es decir, ya no es posible encontrar una relación uno a uno entre los ángulos de mezcla en materia $\theta_{ij}^m(t)$ y sus homólogos en el vacío θ_{ij} , en vez de ello en general tendremos que $\theta_{ij}^m = \theta_{ij}^m(\theta_{12}, \theta_{13})$. De todas formas en los límites donde la densidad se desvanece recuperamos el correspondiente ángulo de mezcla en el vacío, tal como deseábamos, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_{12}^m(t) &= \sin 2\theta_{12}, \\ \lim_{V(t) \rightarrow 0} \sin 2\theta_{13}^m(t) &= \sin 2\theta_{13}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

lo mismo para $\cos 2\theta_{ij}^m(t)$, Bajo estas aproximaciones la matriz de mezcla de los estados de masa en materia es

$$U_m(t) \simeq \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) \Gamma^\dagger, \quad (3.62)$$

donde \mathcal{O}_{23} , Γ son las misma que las dadas en el caso del vacío, (ecuación (2.35)) y $\mathcal{O}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t)$ están dadas por (3.56).

En la sección anterior mencionamos que los estados de masa en materia $\Phi_m(t)$ obedecen en general la ecuación (3.20), sin importar el número de generaciones (sabores) que participen en la mezcla. Vamos a volver a deducir esta ecuación y calcular $\mathcal{H}_m(t)$ para el caso de tres generaciones. Usando la forma aproximada de $U_m(t)$ en (3.37) y la relación entre los estados de sabor y los estados de masa en materia; $\Psi = U_m(t) \Phi_m(t)$.

A partir de

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U_m(t) \Phi_m(t) &= H_m(t) U_m(t) \Phi_m(t), \\ i \mathcal{O}_{23} \Gamma \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{O}^m(t) \Gamma^\dagger \Phi_m(t)) &= H_m(t) \mathcal{O}_{23} \Gamma \mathcal{O}^m(t) \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \end{aligned}$$

ya que \mathcal{O}_{23} y Γ no dependen de t se pueden sacar de la derivada temporal. Multiplicando la última ecuación por la izquierda por $\Gamma^\dagger \mathcal{O}_{23}^T$ y usando la ecuación (3.46)

$$i \mathcal{O}^m(t) \Gamma^\dagger \frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} = \left\{ \tilde{H}_m(t) - i \frac{\partial \mathcal{O}^m(t)}{\partial t} \right\} \mathcal{O}^m(t) \Gamma^\dagger \Phi_m(t),$$

multiplicando nuevamente por la izquierda por $\mathcal{O}_m^T(t)$ y usando la ecuación (3.48)

$$\begin{aligned} i \Gamma^\dagger \frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} &= \left\{ \mathcal{O}_m^T(t) \tilde{H}_m(t) \mathcal{O}^m(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}^m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \\ i \Gamma^\dagger \frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} &= \left\{ H_D(t) - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}^m(t)}{\partial t} \right\} \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \end{aligned}$$

en este punto y únicamente por conveniencia definimos

$$\Phi'_m(t) \equiv \Gamma^\dagger \Phi_m(t) \quad (3.63)$$

para finalmente llegar a la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi'_m(t) = \left\{ H_D - i \mathcal{O}_m^T(t) \frac{\partial \mathcal{O}^m(t)}{\partial t} \right\} \Phi'_m(t). \quad (3.64)$$

A el Hamiltoniano dado en la ecuación (3.64) lo denotaremos por $\mathcal{H}_m(t)$, nuestro siguiente paso consiste en dar la forma explícita de este Hamiltoniano bajo las aproximaciones consideradas hasta ahora.

De la ecuación (3.55)

$$\dot{\mathcal{O}}_m(t) = \dot{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) + \mathcal{O}_{13}^m(t) \dot{\mathcal{O}}_{12}^m(t), \quad (3.65)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m^T(t) \dot{\mathcal{O}}_m(t) &= \mathcal{O}_{12}^{mT}(t) \mathcal{O}_{13}^{mT}(t) (\dot{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) + \mathcal{O}_{13}^m(t) \dot{\mathcal{O}}_{12}^m(t)) \\ &= \mathcal{O}_{12}^{mT}(t) \mathcal{O}_{13}^{mT}(t) \dot{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) + \mathcal{O}_{12}^{mT}(t) \mathcal{O}_{13}^{mT}(t) \mathcal{O}_{13}^m(t) \dot{\mathcal{O}}_{12}^m(t) \\ &= \mathcal{O}_{12}^{mT}(t) \mathcal{O}_{13}^{mT}(t) \dot{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \mathcal{O}_{12}^m(t) + \mathcal{O}_{12}^{mT}(t) \dot{\mathcal{O}}_{12}^m(t) \end{aligned} \quad (3.66)$$

de las ecuaciones (3.56) - (3.60)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{O}}_{12}^m(t) &= \dot{\theta}_{12}^m(t) \begin{pmatrix} -s_{12}^m(t) & c_{12}^m(t) & 0 \\ -c_{12}^m(t) & -s_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathcal{O}}_{13}^m(t) &= \dot{\theta}_{13}^m(t) \begin{pmatrix} -s_{13}^m(t) & 0 & c_{13}^m(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_{13}^m(t) & 0 & -s_{13}^m(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

las derivadas de $\theta_{12}^m(t)$ y $\theta_{13}^m(t)$ las obtenemos de (3.57) y (3.59) respectivamente

$$\dot{\theta}_{12}^m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_{12}^m}{2V_l^R \tan 2\theta_{12}} \dot{V}(t), \quad \dot{\theta}_{13}^m(t) = \frac{\sin^2 2\theta_{13}^m}{2V_h^R \tan 2\theta_{13}} \dot{V}(t), \quad (3.68)$$

de las ecuaciones (3.66) y (3.67) y tras un poco de álgebra, podemos dar de forma explícita $\mathcal{H}_m(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m(t) = & \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(t) & 0 & \\ 0 & \mathcal{E}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{E}_3(t) \end{pmatrix} - i \left\{ \dot{\theta}_{12}^m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \dot{\theta}_{13}^m(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{12}^m(t) \\ 0 & 0 & s_{12}^m(t) \\ -c_{12}^m(t) & -s_{12}^m(t) & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (3.69) \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de dos generaciones, la aproximación adiabática consiste en despreciar los términos fuera de la diagonal principal, este caso es totalmente análogo al de resolver el problema en un medio con densidad constante y en el aspecto de que no habrá mezcla entre los estados de masa instantáneos $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$.

Nuestro principal interés de la aproximación adiabática consiste en dar el operador de evolución adiabático, denotemos por $\Phi_m^A(t)$ a las amplitudes de los estados instantáneos de masa en materia en la aproximación adiabática, su ecuación de evolución temporal esta dada únicamente por H_D y su operador de evolución $\Phi_m^A(t) = \mathcal{U}_m^A(t, t_0)\Phi_m^A(t_0)$, obedece la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_m^A(t, t_0) = H_D \mathcal{U}_m^A(t, t_0), \quad \mathcal{U}_m^A(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (3.70)$$

en este caso el operador de evolución toma la forma:

$$\mathcal{U}_m^A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

$$\alpha_i(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{E}_i(t') dt', \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.72)$$

Ya que este es el caso más simple posible a tratar cuando se consideran los efectos de la materia en las oscilaciones de neutrinos en donde toman parte las tres generaciones, queremos describir de forma cualitativa los eigenvalores de la energía para los estados instantáneos de masa en materia.

En la Figura 3.3 graficamos los eigenvalores aproximados de la energía como función de V , donde asumimos que el valor de los ángulos de mezcla es

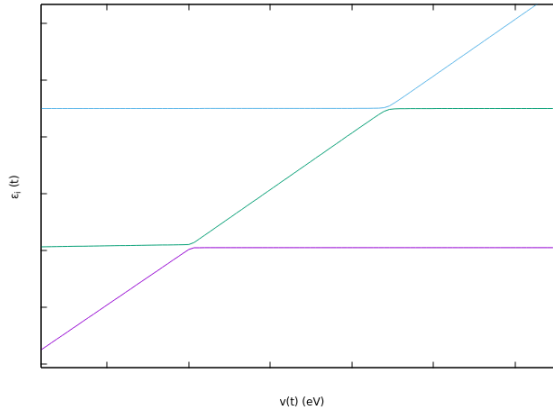


Figura 3.3: Gráfica de los eigenvalores instantáneos de masa en materia como función de V para el caso de tres generaciones, hemos tomado $\Delta m_{21}^2 = 7.37 \times 10^{-5}$ eV, $\Delta m_{31}^2 = 2.56 \times 10^{-3}$ eV, $\sin^2 \theta_{12} = 0.297$, $\sin^2 \theta_{13} = 0.0215$ los datos necesarios fueron obtenidos directamente de la referencia [19]

pequeño y la jerarquía normal de los estados de masa en el vacío. Vemos que hay dos regiones en los que los eigenvalores casi se cruzan. Por lo tanto hay dos resonancias. Las resonancias ocurren cuando la masa inducida del neutrino electrónico se acerca a una de las masas de neutrinos más pesadas. La resonancia baja (*lower*) ocurre cuando $V \simeq m_2^2$, mientras que la resonancia alta (*higher*) toma lugar en $V \simeq m_3^2$ [7, 9].

Este argumento es usado en la referencias [7–9] para desarrollar soluciones aproximadas cerca de cada resonancia para un densidad constante, este resultado nos parece interesante porque, aunque se trabaje con una densidad constante o que varíe muy lentamente, caso en el cual nos encontramos dentro de la aproximación adiabática, el Hamiltoniano en materia $H_m(t)$, ecuación (3.39), se puede separa en un neutrino desacoplado y una submatriz de 2×2 parecida a (3.8) para cada resonancia.

La aproximación adiabática recibe correcciones cerca de cada resonancia; cerca de la resonancia baja $V \simeq V_l^R$ el $\sin \theta_{12}^m$ presenta un pico muy agudo, esto al igual que el caso de dos generaciones, ocasiona la mezcla entre los estados $\phi_1^m(t) \leftrightarrow \phi_2^m(t)$. Por otro lado cuando el potencial se acerca al valor de la resonancia alta $V \simeq V_h^R$ el $\sin \theta_{13}^m$ presenta un pico muy agudo ocasionando la mezcla entre $\phi_2^m(t) \leftrightarrow \phi_3^m(t)$.

Queremos encontrar el operador de evolución de los eigenestados instantáneos de masa en materia para el caso de tres generaciones, este obedece la ecuación

$$i \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}_m(t, t_0) = \mathcal{H}_m(t) \mathcal{U}_m(t, t_0), \quad (3.73)$$

con $\mathcal{H}_m(t)$ dado por (3.69) y sujeto a la condición inicial

$$\mathcal{U}_m(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (3.74)$$

Como el Hamiltoniano (3.69) se puede escribir como una suma de Hamiltonianos a los que denotamos por $\mathcal{H}_m(t) = H_D + H_{NA}$, donde H_D se refiere a la parte adiabática (los elementos sobre la diagonal principal) y H_{NA} la parte no adiabática, más aun las soluciones de H_D son explícitamente conocidas, ecuación (3.70), podemos usar los resultados del Apéndice B. Proponemos el operador de evolución de $\mathcal{H}_m(t)$ como $\mathcal{U}_m(t, t_0) = \mathcal{U}_D(t, t_0)\mathcal{U}_{NA}(t, t_0)$, usando (B.8)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_{NA} &= -i(\mathcal{U}_D^\dagger \mathcal{O}_m^T \dot{\mathcal{O}}_m \mathcal{U}_D)\mathcal{U}_{NA} \\ &= (\mathcal{H}_l + \mathcal{H}_h)\mathcal{U}_{NA} \end{aligned} \quad (3.75)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_l &= \begin{pmatrix} 0 & \varrho_l(t) & 0 \\ \varrho_l^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{H}_h &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varrho'_h(t) \\ 0 & 0 & \varrho_h(t) \\ \varrho_h'^*(t) & \varrho_h^*(t) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

con

$$\begin{aligned} \varrho_l(t) &= -i\dot{\theta}_{12}^m e^{-i(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ \varrho_h(t) &= -i\dot{\theta}_{13}^m e^{-i(\alpha_3 - \alpha_2)}, \\ \varrho_h'(t) &= -i\dot{\theta}_{13}^m e^{-i(\alpha_3 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para encontrar \mathcal{U}_{NA} nos es útil tener en cuenta que las derivadas temporales de $\dot{\theta}_{12}^m$ y $\dot{\theta}_{13}^m$ son significativamente diferentes de cero solo en una estrecha región alrededor de sus respectivos máximos. Debido a pequeñez de la razón de Δ_{21}/Δ_{31} estos dos intervalos están bien separados lo cual nos permite escribir la solución de (3.75) en una forma factorizada

$$\mathcal{U}_{NA}(t, t_0) = \mathcal{U}_l(t, t_0)\mathcal{U}_h(t, t_0) \quad (3.78)$$

donde $\mathcal{U}_{l,h}$ es el operador de evolución de $\mathcal{H}_{l,h}$. Usando nuevamente los resultados del Apéndice B siempre es posible escribir $\mathcal{U}_{NA} = \mathcal{U}_l \tilde{\mathcal{U}}$, donde $\tilde{\mathcal{U}}$ obedece la ecuación de ecuación de Schrödinger con el Hamiltoniano $\mathcal{U}_l^\dagger \mathcal{H}_h \mathcal{U}_l$. Si $[\mathcal{U}_l(t, t_0), \mathcal{H}_h(t)] = 0$ para todo tiempo, entonces $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_h$ y la ecuación (3.78)

resulta ser exacta. En el presente caso para los puntos cerca de la region de altas densidades $\dot{\theta}_{12}^m \simeq 0$ y por lo tanto $\mathcal{H}_l \simeq 0$, esto implica $\mathcal{U}_l \simeq \mathbb{I}$, por otro lado para la región de bajas densidades $\dot{\theta}_{13}^m \simeq 0$ y ahora $\mathcal{H}_h \simeq 0$. Bajo estas condiciones $[\mathcal{U}_l(t, t_0), \mathcal{H}_h(t)] = 0$ se cumple en un amplio rango y la ecuación (3.78), esta suficientemente justificada.

En general no es posible conocer de forma exacta \mathcal{U}_l y \mathcal{U}_h , en vez de ello, si denotamos por P_h y P_l las probabilidades de cruzamiento en las resonacias altas y bajas respectivamente y en analogía con el caso de dos generaciones y usando la aproximación dada en [9]. tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_l &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} & \sqrt{P_l} & 0 \\ -\sqrt{P_l} & \sqrt{1-P_l} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_h &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-P_h} & \sqrt{P_h} \\ 0 & -\sqrt{P_h} & \sqrt{1-P_h} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ahora podemos determinar el los eigenestados instantáneos en materia de forma aproximada para cualquier tiempo t . Usando (3.63)

$$\begin{pmatrix} \phi_1^m(t) \\ \phi_2^m(t) \\ \phi_3^m(t) \end{pmatrix} = \Gamma \mathcal{U}_D(t, t_0) \mathcal{U}_l(t, t_0) \mathcal{U}_h(t, t_0) \Gamma^\dagger \begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \\ \phi_3^m(t_0) \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

donde

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{U}_D(t, t_0) \mathcal{U}_l(t, t_0) \mathcal{U}_h(t, t_0) \Gamma^\dagger &= \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1-P_l} e^{-i\alpha_1} & \sqrt{P_l} \sqrt{1-P_h} e^{-i\alpha_1} & \sqrt{P_h} \sqrt{P_l} e^{-i\alpha_1} e^{-i\delta} \\ -\sqrt{P_l} e^{-i\alpha_2} & \sqrt{1-P_l} \sqrt{1-P_h} e^{-i\alpha_2} & \sqrt{1-P_l} \sqrt{P_h} e^{-i\alpha_2} e^{-i\delta} \\ 0 & -\sqrt{P_h} e^{-i\alpha_3} e^{i\delta} & \sqrt{1-P_h} e^{-i\alpha_3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Nuestro objetivo es encontrar la probabilidad de transición del neutrino al propagarse a través de la materia y posteriormente desplazarse en el vacío la cual esta dada por la ecuación (3.28). Si al igual que antes suponemos que en el borde de medio el potencial se anula, es decir, para t_\star el tiempo en el que el neutrino abandona el medio $V(t_\star) = 0$

$$\phi_i(t_\star) = \phi_i^m(t_\star) \quad \text{si} \quad V(t_\star) = 0, \quad (3.82)$$

y podemos usar la evolución de los eigenestados instantáneos en materia para calcular las probabilidades de transición.

Usando (3.80) y (3.81) podemos calcular $\phi_i^m(t)$ tomando el cuadrado de esta cantidad y despreciando los términos de interferencia

$$\begin{aligned}
 \langle \|\phi_1^m(t)\|^2 \rangle &= (1 - P_l)\|\phi_1^m(t_0)\|^2 + P_l(1 - P_h)\|\phi_2^m(t_0)\|^2 + P_l P_h\|\phi_3^m(t_0)\|^2, \\
 \langle \|\phi_2^m(t)\|^2 \rangle &= P_l\|\phi_1^m(t_0)\|^2 + (1 - P_l)(1 - P_h)\|\phi_2^m(t_0)\|^2 \\
 &\quad + (1 - P_l)P_h\|\phi_3^m(t_0)\|^2, \\
 \langle \|\phi_3^m(t)\|^2 \rangle &= P_h\|\phi_2^m(t_0)\|^2 + (1 - P_h)\|\phi_3^m(t_0)\|^2,
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Para poder calcular estas probabilidades necesitamos conocer $\Phi_m(t_0)$, usando de relación entre las amplitudes de los estados de sabor y los eigenestados instantáneos de masa en materia (3.13), se deduce $\Phi_m(t) = U_m(t)^\dagger \Psi$, si el estado de sabor creado al tiempo t_0 es un neutrino electrónico ν_e

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \phi_1^m(t_0) \\ \phi_2^m(t_0) \\ \phi_3^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}^{m0} c_{13}^{m0} \\ s_{12}^{m0} c_{13}^{m0} \\ s_{13}^{m0} e^{i\delta} \end{pmatrix}, \tag{3.84}$$

donde el superíndice cero tiene como significado $c_{ij}^{m0} \equiv c_{ij}^m(t_0)$, $s_{ij}^{m0} \equiv s_{ij}^m(t_0)$

Finalmente podemos obtener la probabilidad de supervivencia del neutrino electrónico, usando la ecuación de las probabilidades promedio (3.28), la condición en el borde del medio $V(t_*) = 0$, lo cual implica la igualdad entre las amplitudes de los estados de masa y los estados de masa en materia, ecuación (3.82), además de las ecuaciones (3.83) evaluadas en t_* y las condiciones iniciales para el neutrino electrónico (3.84)

$$\begin{aligned}
 \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= \|U_{e1}\|^2 \{ (1 - P_l)(c_{12}^{m0} c_{13}^{m0})^2 + P_l(1 - P_h)(s_{12}^{m0} c_{13}^{m0})^2 + P_l P_h (s_{13}^{m0})^2 \} \\
 &\quad + \|U_{e2}\|^2 \{ P_l (c_{12}^{m0} c_{13}^{m0})^2 + (1 - P_l)(1 - P_h)(s_{12}^{m0} c_{13}^{m0})^2 + (1 - P_l)P_h (s_{13}^{m0})^2 \} \\
 &\quad + \|U_{e3}\|^2 \{ (1 - P_l)P_h (s_{12}^{m0} c_{13}^{m0})^2 + (1 - P_h)(s_{13}^{m0})^2 \}
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Este es el resultado al que se quería llegar, las diferencias con el caso de dos sabores se puede apreciar al comparar las ecuaciones (3.35) y (3.85) esta última no solo presenta una forma más complicada, además su deducción requirió de varios pasos intermedios y del plantiamiento de nuevas hipótesis, que el caso de dos sabores no heran necesarias, la principal suposición que se

hace en este caso es, que es posible factorización del operador de evolución de la parte no adiabática en un problema efectivo de 2×2 cerca del valor de cada resonancia, este hecho tomara relevancia en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

Relación entre las probabilidades de cruzamiento para el neutrino y el antineutrino

En el presente capítulo centraremos la atención en los antineutrinos y estudiaremos las relaciones que existen entre ellos y los neutrinos cuando se propagan en materia. Nuestro principal interés es poder contestar, en que casos se puede establecer una relación entre las probabilidades de cruzamiento de los neutrinos y el antineutrinos y cuál es dicha relación. Todo el trabajo previo ha tenido como objetivo sentar bases sólidas para los resultados presentados en las siguientes secciones.

4.1. Mezcla de dos sabores en materia para el antineutrino

Empezaremos con el caso más sencillo posible a tratar, es decir, el de dos generaciones. Como se menciona en la sección 3.1, cuando los antineutrinos se propagan en materia es necesario hacer el cambio del signo del potencial efectivo $V \rightarrow -V$, por lo cual la evolución de los estados de sabor para la antipartícula obedecerá una ecuación similar a (3.5). Sin embargo, para poder deducir las ecuaciones de los antineutrinos debemos recordar, que de acuerdo con lo mencionado al final de la sección 2.1, es necesario también hacer el cambio de $U \rightarrow U^*$.

La relación entre las amplitudes de los estados de sabor y los estados de

masa de los antineutrinos es:

$$\bar{\Psi} = U^* \bar{\Phi}, \quad (4.1)$$

donde la notación de la barra indica que nos referimos a las antipartículas. Para el caso de dos sabores la matriz de mezcla es real y, por lo tanto, la ecuación de evolución de $\bar{\Psi}$ es

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} &= \bar{H}_m(t) \bar{\Psi} \\ &= \{U H_0 U^\dagger - V(t) Y\} \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sustrayendo un factor proporcional a la identidad el Hamiltoniano viene dado por

$$\begin{aligned} \bar{H}_m(t) &= \begin{pmatrix} -\Delta_0 \cos 2\theta & \Delta_0 \sin 2\theta \\ \Delta_0 \sin 2\theta & \Delta_0 \cos 2\theta \end{pmatrix} - V(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -(V(t) + \Delta_0 \cos 2\theta) \sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde Δ_0 y $V(t)$ son dados por $\Delta_0 \equiv (m_2^2 - m_1^2)/(4E)$ y $V \equiv (V_e - V_\alpha)/2$.

Este Hamiltoniano resulta simétrico, lo cual implica que puede ser diagonalizado por una transformación ortogonal que denotamos por $\bar{U}_m(t)$:

$$\bar{U}_m(t) = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_m(t) & \sin \bar{\theta}_m(t) \\ -\sin \bar{\theta}_m(t) & \cos \bar{\theta}_m(t) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Esta es la matriz de mezcla en materia de los antineutrinos. De la diagonalización de (4.3) podemos obtener tanto los ángulos en materia como los eigenvalores de los estados instantáneos en materia. La relación entre las amplitudes de los estados de sabor y los estados instantáneos en materia, $\bar{\Phi}_m(t)$, es

$$\bar{\Psi}(t) = \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t). \quad (4.5)$$

en este caso el ángulo de mezcla en materia para los antineutrinos es dado por

$$\tan 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\Delta_0 \cos 2\theta + V(t)}. \quad (4.6)$$

De esta expresión vemos que los límites para bajas y altas densidades son:

$$\begin{aligned} \lim_{V(t) \rightarrow 0} \tan 2\bar{\theta}_m(t) &= \tan 2\theta, \\ \lim_{V(t) \rightarrow \infty} \tan 2\bar{\theta}_m(t) &= 0^+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Aquí encontramos la primer diferencia significativa con el comportamiento de los neutrinos al propagarse en materia. Cuando las densidades se hacen muy grandes el denominador en (4.6) se hace infinitamente positivo, mientras que, tomando el valor del ángulo de mezcla en vacío en el intervalo $[0, \pi/2)$, el $\sin 2\theta$ es positivo, por lo cual nos acercamos a cero mediante valores positivo. Del comentario realizado después de la ecuación (3.16) vemos que para el neutrino bajo las mismas condiciones, el límite de altas densidades tiende a cero por valores negativos. A partir de (4.6) e identidades trigonométricas obtenemos

$$\cos 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \cos 2\theta + V(t)}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}, \quad (4.8)$$

$$\sin 2\bar{\theta}_m(t) = \frac{\Delta_0 \sin 2\theta}{\sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}}. \quad (4.9)$$

Para resolver la ambigüedad en el signo en las expresiones anteriores, impusimos la condición de que en el límite donde $V \rightarrow 0$ se recuperen los ángulos de mezcla en el vacío.

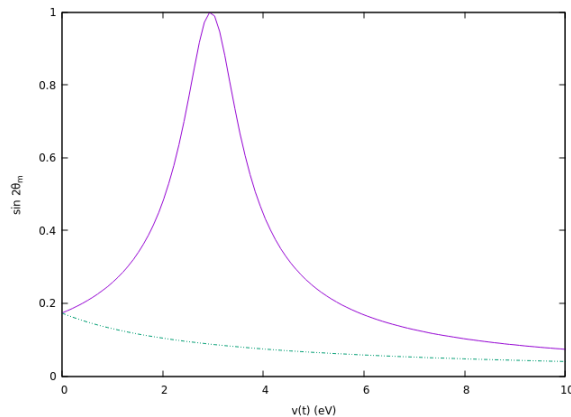


Figura 4.1: gráfica del $\sin 2\theta_m$, (línea sólida) y de $\sin 2\bar{\theta}_m$ (línea punteada), esta última tiene un comportamiento monótono decreciente, y ya no se presenta el comportamiento resonante. Hemos tomamos $\Delta_0 = 3.0$ eV y $\sin^2 2\theta = 0.03$

Notemos que el comportamiento resonante ya no se presenta en el primer cuadrante donde se encuentra el ángulo de mezcla en el vacío ($\theta \in [0, \pi/2)$), en la Figura 4.1 graficamos tanto $\sin 2\theta_m$ y $\sin 2\bar{\theta}_m$ como función de V , usando los mismos valores que en la Figura 3.1

Al resolver la ecuación característica de (4.3) obtenemos los eigenvalores instantáneos en materia reducidos para las antipartículas, donde posteriormente será necesario reincorporar el término proporcional a la identidad que despreciamos al deducir (4.3) a fin de conocer los eigenvalores completos $\bar{\mathcal{E}}_i$ $i = 1, 2$. Los eigenvalores reducidos en este caso son

$$\bar{\epsilon}_2(t) = -\bar{\epsilon}_1(t) = \sqrt{(\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta}. \quad (4.10)$$

Ahora debemos deducir la ecuación de evolución que obedecen las amplitudes de los estados instantáneos en materia, $\bar{\Phi}_m(t)$. Sustituyendo (4.5) en (4.2) y tras algunas manipulaciones algebraicas llegamos a

$$i \frac{\partial \bar{\Phi}_m(t)}{\partial t} = \left\{ \bar{H}_D - i \bar{U}_m(t)^\dagger \frac{\partial \bar{U}_m(t)}{\partial t} \right\} \bar{\Phi}_m(t), \quad (4.11)$$

donde $\bar{H}_D = \text{diag}(\bar{\epsilon}_1(t), \bar{\epsilon}_2(t))$. Usando la expresión de $\bar{U}_m(t)$ dada en (4.4) y

$$\bar{\Phi}_m(t) = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

la ecuación (4.11) toma la forma explícita

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}_1(t) & 0 \\ 0 & \bar{\epsilon}_2(t) \end{pmatrix} - i \dot{\bar{\theta}}_m(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

con

$$\dot{\bar{\theta}}_m(t) = -\frac{\sin^2 2\bar{\theta}_m(t)}{2 \Delta_0 \sin 2\theta} \dot{V}(t). \quad (4.14)$$

Para calcular $\dot{\bar{\theta}}_m$ derivamos la fórmula del $\sin 2\bar{\theta}_m$ dada en la ecuación (4.9).

La ecuación (4.13) puede reescribirse como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}_m(t) = \bar{\mathcal{H}}_m(t) \bar{\Phi}_m(t) \quad (4.15)$$

donde

$$\bar{\mathcal{H}}_m(t) = \bar{\epsilon}_1(t) \sigma_3 + \dot{\bar{\theta}}_m(t) \sigma_2 \quad (4.16)$$

La ecuación de Schrödinger con este Hamiltoniano nos permite conocer el operador de evolución para los estados instantáneos de masa en materia de los antineutrinos.

Nuevamente nos interesa calcular las probabilidades de transición para los estados de sabor de los antineutrinos, suponiendo que en, el centro de algún objeto astrofísico, se crea un estado de sabor puro. Sea t_* el tiempo

en el que estos abandonan el medio, entonces para $t > t_*$ se propagarán en el vacío y siguiendo el mismo procedimiento que el utilizado para la deducir la ecuación (3.28), resulta

$$\langle P_{\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}} \rangle = \sum_i \|U_{\beta i}\|^2 \langle \|\bar{\phi}_i(t_*)\|^2 \rangle, \quad (4.17)$$

que nos da la probabilidad promedio (clásica) de que el estado inicial $\bar{\nu}_\alpha$ se transforme en $\bar{\nu}_\beta$. Si somos capaces de determinar los estados de masa en el borde del medio $\bar{\phi}_i(t_*)$, entonces la probabilidad promedio de transición quedará completamente determinada.

Para lograrlo, suponemos que al tiempo t_* en el cual el neutrino alcanza el borde del medio la densidad se anula, de tal forma que $V \rightarrow 0$. Entonces los estados de masa en materia, se aproximan a los estados de masa en el vacío, es decir,

$$\bar{\Phi}_m \rightarrow \bar{\Phi}. \quad (4.18)$$

ó en términos de los componentes

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t_*) \\ \bar{\phi}_2^m(t_*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1(t_*) \\ \bar{\phi}_2(t_*) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Para encontrar $\bar{\Phi}_m(t_*)$ podemos usar la forma general del operador de evolución para el caso de dos sabores dado en el Apéndice A. Denotemos \bar{P}_c a la probabilidad de cruzamiento entre los estados de masa en materia, con lo cual

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t) \\ \bar{\phi}_2^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \bar{P}_c} & \sqrt{\bar{P}_c} \\ -\sqrt{\bar{P}_c} & \sqrt{1 - \bar{P}_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t_0) \\ \bar{\phi}_2^m(t_0) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Consideremos que al tiempo t_0 se crea un antineutrino electrónico $\bar{\nu}_e$, entonces

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e invirtiendo la ecuación (4.5)

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_1^m(t_0) \\ \bar{\phi}_2^m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_m(t_0) \\ \sin \bar{\theta}_m(t_0) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

usando las ecuaciones (4.20), (4.21), (4.17) y (4.19) obtenemos

$$\langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \bar{P}_c \right) \cos 2\theta \cos 2\bar{\theta}_m(t_0). \quad (4.22)$$

Así hemos podido deducir la probabilidades de transición para el anti-neutrino electrónico, cuando es creado en el seno de algún objeto astrofísico

y se propaga a través del mismo para posteriormente abandonar el medio y continuar propagándose en el vacío. Vemos que esta ecuación tiene la misma forma que la fórmula de Parke, ecuación (3.35), con $P_c \rightarrow \bar{P}_c$ y $\theta_m(t_0) \rightarrow \bar{\theta}_m(t_0)$.

4.2. Relaciones entre P_c y \bar{P}_c en el caso de dos sabores

Nuestro siguiente paso consiste en encontrar las relaciones que existen entre las probabilidades de cruzamiento para los neutrinos y los antineutrinos, para ello, antes necesitaremos establecer algunos resultados.

Teniendo en cuenta la forma del Hamiltoniano dado en (4.2) las soluciones de la ecuación (4.3) los podemos escribir como

$$\bar{\Psi} \equiv \bar{\Psi}(\Delta_0, \theta; t), \quad (4.23)$$

donde interpretamos a Δ_0 y θ como parámetros fijos dados de antemano, y la única variable independiente es t , lo mismo se puede decir para los neutrinos a partir de las ecuaciones (3.7) y (3.8)

$$\Psi \equiv \Psi(\Delta_0, \theta; t). \quad (4.24)$$

Queremos encontrar las relaciones que existen, entre las amplitudes de los estados de sabor para los neutrinos cuando se propagan en materia con respecto a los de los antineutrinos. Con este fin trabajaremos con las ecuaciones (3.7), (3.8), (4.2) y (4.3) lo cual no permitirá establecer el siguiente proposición:

Proposición 4.2.1. *Supongamos que $\Psi(\Delta_0, \theta; t)$ es solución de la ecuación (3.7), con condición inicial $\Psi(\Delta_0, \theta; t_0) = (1, 0)^T$ al hacer los cambios $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$ y $\Psi \rightarrow \Psi^*$ la nueva función es solución de (4.2), sujeto a la condición inicial $\bar{\Psi}(\Delta_0, \theta; t_0) = (1, 0)^T$, es decir*

$$\Psi^*(-\Delta_0, \theta; t) = \bar{\Psi}(\Delta_0, \theta; t). \quad (4.25)$$

Demostración. Tomemos el conjugado de la ecuación (3.7) y usemos la representación del Hamiltoniano en materia en términos de las matrices de Pauli (3.8)

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\Delta_0, \theta; t) = \{ (V(t) - \Delta_0 \cos 2\theta) \sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1 \} \Psi^*(\Delta_0, \theta; t),$$

ahora hagamos el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$ en esta última ecuación

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(-\Delta_0, \theta; t) = \{(V(t) + \Delta_0 \cos 2\theta)\sigma_3 - \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1\} \Psi^*(-\Delta_0, \theta; t)$$

de donde

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*(-\Delta_0, \theta; t) = \{-(V(t) + \Delta_0 \cos 2\theta)\sigma_3 + \Delta_0 \sin 2\theta \sigma_1\} \Psi^*(-\Delta_0, \theta; t).$$

Al comparar esta ecuación con el Hamiltoniano para los antineutrinos en (4.3) vemos que $\Psi^*(-\Delta_0, \theta; t)$ y $\bar{\Psi}(\Delta_0, \theta; t)$ obedecen exactamente la misma ecuación, con las misma condición inicial, con lo cual queda establecida la proposición. QED

El resultado de la proposición 4.2.1 es lo suficientemente fuerte para permitirnos encontrar la relación entre P_c y \bar{P}_c , relacionando directamente las amplitudes de los estados de masa de los neutrinos y los antineutrinos. Al intentar realizar este mismo procedimiento para el caso de tres generaciones se llegan a resultados divergentes, por lo tanto nosotros queremos optar por una deducción distinta la cual no sera útil aún el el caso de tres generaciones.

Como las P_c, \bar{P}_c describen la probabilidad de cruzamiento entre los estados $\phi_1^m(t)$ y $\phi_2^m(t)$ y $\bar{\phi}_1^m(t)$ y $\bar{\phi}_2^m(t)$, respectivamente, intentaremos deducir una relación entre $\Phi^m(t)$ y $\bar{\Phi}^m(t)$ y más importante aun una relación entre los respectivos operadores de evolución. Para ello vamos a trabaja con los Hamiltonianos dados en (3.23) y (4.16) y determinaremos la relación entre ellos.

Empecemos analizando la parte diagonal de ambos Hamiltonianos. Haciendo el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$ en $\epsilon_1(t)$, ecuación (3.19), vemos que

$$\begin{aligned} \epsilon_1(-\Delta_0; t) &= -\sqrt{(-\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + (-\Delta_0)^2 \sin^2 2\theta} \\ &= -\sqrt{((\Delta_0 \cos 2\theta + V(t))^2 + \Delta_0^2 \sin^2 2\theta)} \\ &= \bar{\epsilon}_1(\Delta_0; t) \end{aligned} \tag{4.26}$$

y, como $\epsilon_2(\Delta_0; t) = -\epsilon_1(\Delta_0; t)$, esto implica

$$\epsilon_2(-\Delta_0; t) = -\bar{\epsilon}_1(\Delta_0; t) = \bar{\epsilon}_2(\Delta_0; t). \tag{4.27}$$

De las ecuaciones (4.26) y (4.27) se concluye que

$$H_D(-\Delta_0; t) = \bar{H}_D(\Delta_0; t). \tag{4.28}$$

Hacemos hincapié en que tanto $H_D(-\Delta_0; t)$ como $\bar{H}_D(\Delta_0; t)$ hacen referencia a los eigenvalores reducidos, es decir, para encontrar la relación

entre los eigenvalores de $H_m(t)$ y de $\bar{H}_m(t)$ deberemos reincorporar la parte proporcional a la identidad que despreciamos al deducir los Hamiltonianos (3.23) y (4.16).

Investiguemos ahora las relaciones que existen entre los ángulos de mezcla en materia al hacer el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$. De las ecuaciones (3.17) se tiene que

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_m(-\Delta_0; t) &= \frac{-\Delta_0 \cos 2\theta - V(t)}{\sqrt{(-\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + (-\Delta_0)^2 \sin^2 2\theta}}, \\ \sin 2\theta_m(-\Delta_0; t) &= \frac{-\Delta_0 \sin 2\theta}{\sqrt{(-\Delta_0 \cos 2\theta - V(t))^2 + (-\Delta_0)^2 \sin^2 2\theta}},\end{aligned}\quad (4.29)$$

y, comparando con (4.9) y (4.8), podemos concluir que

$$\begin{aligned}\cos 2\theta_m(-\Delta_0; t) &= -\cos 2\bar{\theta}_m(\Delta_0; t), \\ \sin 2\theta_m(-\Delta_0; t) &= -\sin 2\bar{\theta}_m(\Delta_0; t).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Por lo tanto, hacer el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$ implica

$$\theta_m \rightarrow \bar{\theta}_m - \frac{\pi}{2} \quad (4.31)$$

y, en consecuencia

$$\dot{\theta}_m(-\Delta_0; t) = \dot{\bar{\theta}}_m(\Delta_0; t), \quad (4.32)$$

resultado que también se puede deducir de las ecuaciones (3.22) y (4.14).

Con estos resultados podemos dar la relación entre \mathcal{H}_m y $\bar{\mathcal{H}}_m$; de (4.28) y (4.32) y comparando con (4.16)

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m(-\Delta_0; t) &= H_D(-\Delta_0; t) + \dot{\theta}_m(-\Delta_0; t)\sigma_2 \\ &= \bar{H}_D(\Delta_0; t) + \dot{\bar{\theta}}_m(\Delta_0; t)\sigma_2 \\ &= \bar{\mathcal{H}}_m(\Delta_0; t)\end{aligned}\quad (4.33)$$

ya que la condición inicial para los neutrinos está dada en términos del ángulo de mezcla en materia, debemos averiguar como cambia al hacer $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_m(-\Delta_0; t) \\ \sin \theta_m(-\Delta_0; t) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \{\bar{\theta}_m(\Delta_0; t) - \pi/2\} \\ \sin \{\bar{\theta}_m(\Delta_0; t) - \pi/2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_m(\Delta_0; t) \\ -\cos \bar{\theta}_m(\Delta_0; t) \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

donde hemos usado la ecuación (4.31). Al comparar con (4.21) vemos que hacer el cambio Δ_0 por $-\Delta_0$ no nos permite recuperar la condición inicial de las amplitudes de los estados de masa en materia para los antineutrinos.

Con el objetivo de recuperar la condición inicial de los antineutrinos buscaremos una matriz unitaria σ de tal suerte que $\bar{\Phi}_m(\Delta_0; t_0) = \sigma \Phi_m(-\Delta_0; t_0)$.

Tal matriz esta definida de la siguiente forma:

$$\sigma \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

siendo sencillo probar que dicha matriz es unitaria y que tiene la propiedad que buscamos, es decir

$$\begin{pmatrix} \cos \bar{\theta}_m(t_0) \\ \sin \bar{\theta}_m(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_m(t) \\ -\cos \bar{\theta}_m(t) \end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Ahora estamos en condiciones de establecer la relación existente entre $\Phi_m(t)$ y $\bar{\Phi}_m(t)$; hagamos el cambio $\Delta_0 \rightarrow -\Delta_0$ en (3.21)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(-\Delta_0; t) = \mathcal{H}_m(-\Delta_0; t) \Phi_m(-\Delta_0; t), \tag{4.37}$$

usando (4.33)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Phi_m(-\Delta_0; t) = \bar{\mathcal{H}}_m(\Delta_0; t) \Phi_m(-\Delta_0; t).$$

Con el fin de recuperar la condición inicial de los antineutrinos multiplicamos esta expresión por la izquierda por σ y usamos la condición de unitariedad.

$$i \frac{\partial}{\partial t} \sigma \Phi_m(-\Delta_0; t) = \sigma \bar{\mathcal{H}}_m(\Delta_0; t) \sigma^T \sigma \Phi_m(-\Delta_0; t),$$

A partir de la definición de $\bar{\mathcal{H}}_m$ en términos de las matrices de Pauli, ecuación (4.16), tiene

$$\begin{aligned} \sigma \bar{\mathcal{H}}_m \sigma^T &= \sigma \left[\bar{\epsilon}_1(t) \sigma_3 + \dot{\bar{\theta}}_m(t) \sigma_2 \right] \sigma^T \\ &= -\bar{\epsilon}_1(t) \sigma_3 + \dot{\bar{\theta}}_m(t) \sigma_2 \end{aligned} \tag{4.38}$$

donde hemos usado los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \sigma \sigma_3 \sigma^T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\sigma_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma \sigma_2 \sigma^T &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2.\end{aligned}$$

Por la tanto,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}_m(-\Delta_0; t) = \left[-\bar{\epsilon}_1(t) \sigma_3 + \dot{\bar{\theta}}_m(t) \sigma_2 \right] \tilde{\Phi}_m(-\Delta_0; t), \quad (4.39)$$

con

$$\tilde{\Phi}_m(-\Delta_0; t) = \sigma \Phi_m(-\Delta_0; t). \quad (4.40)$$

conjugando esta última ecuación y teniendo en cuenta que $\sigma_2^* = -\sigma_2$, nos queda

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Phi}_m^*(-\Delta_0; t) = \left[\bar{\epsilon}_1(t) \sigma_3 + \dot{\bar{\theta}}_m(t) \sigma_2 \right] \tilde{\Phi}_m^*(-\Delta_0; t). \quad (4.41)$$

Al comparar (4.41) con (4.15) vemos que $\Phi_m^*(-\Delta_0; t)$ y $\bar{\Phi}_m(\Delta_0; t)$ satisfacen la misma ecuación y dado que por construcción, $\Phi_m^*(-\Delta_0; t)$ cumplen la misma condición inicial resulta:

$$\boxed{\sigma \Phi_m^*(-\Delta_0; t) = \bar{\Phi}_m(\Delta_0; t)} \quad (4.42)$$

Esta es la relación entre los estados de masa en materia de los neutrinos y los antineutrinos para el caso en donde solo participan dos generaciones en la mezcla.

Ahora nos interesa la relación existente entre los respectivos operadores de evolución (3.33) y (4.20). En este punto nos es conveniente definir Δ , como el conjunto de las diferencias cuadráticas de masa independientes, por ejemplo, en el caso de dos generaciones se tiene que

$$\Delta = \Delta_0 \equiv \frac{m_2^2 - m_1^2}{4E}, \quad (4.43)$$

mientras que para el caso de tres generaciones

$$\Delta = \begin{cases} \Delta_{21} \equiv (m_2^2 - m_1^2)/2E, \\ \Delta_{31} \equiv (m_3^2 - m_1^2)/2E, \end{cases} \quad (4.44)$$

de ahora en adelante usaremos esta notación.

También debemos notar es que la proposición 4.2.1 implica

$$\Phi^*(-\Delta; t) = \bar{\Phi}(\Delta; t), \quad (4.45)$$

donde Φ y $\bar{\Phi}$ se refieren a los estados de masa en el vacío del neutrino y el antineutrino respectivamente. La relación entre las amplitudes en la base

de sabor del neutrino y las amplitudes de los estados de masa en materia es dada por (3.13). Por su parte, para el antineutrino tenemos un relación enteramente similar dada por (4.5):

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= U_m(\Delta; t)\Phi_m(\Delta; t), \\ \bar{\Psi}(t) &= \bar{U}_m(\Delta; t)\bar{\Phi}_m(\Delta; t),\end{aligned}\tag{4.46}$$

para los estados de masa en el vacío se tiene

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= U \Phi(t), \\ \bar{\Psi}(t) &= \bar{U} \bar{\Phi}(t),\end{aligned}\tag{4.47}$$

igualando las ecuaciones (4.46) y (4.47); despejando Φ y $\bar{\Phi}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= U^\dagger U_m(\Delta; t)\Phi_m(\Delta; t), \\ \bar{\Phi}(t) &= U^T \bar{U}_m(\Delta; t)\bar{\Phi}_m(\Delta; t),\end{aligned}\tag{4.48}$$

la ecuación (4.45) es válida para todo t ya que la proposición 4.2.1 se prueba a partir de la ecuación diferencial, sujeta a las mismas condiciones iniciales. Sustituyendo (4.48) en (4.45)

$$U^T U_m^*(-\Delta; t)\Phi_m^*(-\Delta; t) = U^T \bar{U}_m(\Delta, t)\bar{\Phi}_m(\Delta, t),\tag{4.49}$$

y usando la condición de unitariedad de U resulta

$$\bar{\Phi}_m(\Delta; t) = \bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)U_m^*(-\Delta; t)\Phi_m^*(-\Delta; t).\tag{4.50}$$

Como primera prueba de que nuestro actual razonamiento es congruente con los resultados anteriormente obtenidos nos gustaría recuperar la ecuación (4.42), para ello debemos encontrar como cambia U_m al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$. Empezamos notando que U_m definida en (3.10) es real, por lo tanto $U_m^* = U_m$.

Usando (4.31) en la fórmula para U_m , ecuación (4.4), resulta

$$\begin{aligned}U_m(-\Delta; t) &= \begin{pmatrix} \bar{s}_m(\Delta) & -\bar{c}_m(\Delta) \\ \bar{c}_m(\Delta) & \bar{s}_m(\Delta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{c}_m(\Delta) & \bar{s}_m(\Delta) \\ -\bar{s}_m(\Delta) & \bar{c}_m(\Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \\ &= \bar{U}_m(\Delta; t) \sigma\end{aligned}\tag{4.51}$$

Donde usamos la notación compacta $\bar{s}_m(\Delta) \equiv \sin \bar{\theta}_m(\Delta; t)$, $\bar{c}_m(\Delta) \equiv \cos \bar{\theta}_m(\Delta; t)$, y la definición de la matriz σ . Sustituyendo en (4.50) y como, por construcción, \bar{U}_m es una matriz ortogonal

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_m(\Delta; t) &= \bar{U}_m^T(\Delta; t)\bar{U}_m(\Delta; t)\sigma\Phi_m^*(-\Delta; t) \\ &= \sigma\Phi_m^*(-\Delta; t)\end{aligned}$$

recuperando así (4.42), tal como se deseaba.

La ecuación (4.50), es en principio válida para todo t ; por lo tanto, podemos evolucionar los estados de masa en materia $\Phi_m(t)$ y $\bar{\Phi}_m(t)$ desde el tiempo inicial t_0 hasta un tiempo posterior arbitrario t , es decir:

$$\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0)\bar{\Phi}_m(\Delta; t_0) = \bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)U_m^*(-\Delta; t)\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)\Phi_m^*(-\Delta; t_0), \quad (4.52)$$

invirtiendo (4.48) y tras hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ y conjugar

$$\Phi_m^*(-\Delta; t_0) = U_m^{\dagger}(-\Delta, t_0)U^*\Phi^*(-\Delta; t_0),$$

sustituyendo en (4.52)

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0)\bar{\Phi}_m(\Delta; t_0) \\ = \bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)U_m^*(-\Delta; t)\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)U_m^{\dagger}(-\Delta, t_0)U^*\Phi^*(-\Delta; t_0). \end{aligned}$$

Usando las relaciones entre las amplitudes de los estados de masa en materia y los estados de sabor y sus análogos en el vacío, no queda

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0)\bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)\bar{\Psi}(\Delta; t_0) \\ = \bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)U_m^*(-\Delta; t)\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)U_m^{\dagger}(-\Delta, t_0)U^*U^{\mathcal{P}}\Psi^*(-\Delta; t_0) \end{aligned}$$

y finalmente usando el resultado de la proposición 4.2.1 $\bar{\Psi}(\Delta; t) = \Psi^*(-\Delta; t)$, obtenemos

$$\boxed{\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0) = \bar{U}_m^\dagger(\Delta; t)U_m^*(-\Delta; t)\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)U_m^T(-\Delta; t_0)\bar{U}_m(\Delta; t_0)} \quad (4.53)$$

Esta es la relación entre los operadores de evolución. La deducción de esta ecuación está fundamentada en el resultado de la proposición 4.2.1. Vemos que en $t = t_0$, $\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t_0, t_0) = \mathbb{I}$, debido a que $\mathcal{U}_m(-\Delta; t_0, t_0) = \mathbb{I}$ por ser operador de evolución y a la unitariedad de la matriz de mezcla en materia.

Más adelante se verá que la ecuación (4.53) es general e independiente del número de generaciones que participen en la mezcla.

Para obtener las probabilidades de transición de los estados de sabor de los neutrinos (antineutrinos) hemos hecho la suposición adicional de que al tiempo t_* en el que los neutrinos (antineutrinos) creado en el seno de algún objeto astrofísico alcanzan el borde del medio, donde la densidad y, por tanto, el potencial efectivo prácticamente se anulan, de tal suerte que $V(t_*) \simeq 0$.

Si en la ecuación (4.53) se evalúa en t_* y tomando primero el límite $V(t_*) \rightarrow 0$ y después haciendo el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, entonces

$$\boxed{\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t_*, t_0) = \mathcal{U}_m^*(-\Delta; t_*, t_0)U_m^T(-\Delta; t_0)\bar{U}_m(\Delta; t_0)} \quad (4.54)$$

es importante notar que es necesario primero tomar $V(t_\star) \rightarrow 0$, ya que en este caso

$$\Phi(\Delta; t_\star) = \Phi_m(\Delta; t_\star)$$

con lo cual, teniendo en cuenta (4.45), vemos que

$$\bar{\Phi}(\Delta; t_\star) = \Phi^*(-\Delta; t_\star) = \Phi_m^*(-\Delta; t_\star),$$

y finalmente usando la ecuación (4.19)

$$\bar{\Phi}_m(\Delta; t_\star) = \bar{\Phi}(\Delta; t_\star) = \Phi^*(-\Delta; t_\star) = \Phi_m^*(-\Delta; t_\star),$$

lo primero que notamos es que la relación entre los estados de masa en materia se ha modificado, siendo distinta de la dada con anterioridad por (4.42), bajo la suposición de que $V \rightarrow 0$ en el borde de medio, esta última se puede escribir aproximadamente como

$$\bar{\Phi}_m(\Delta; t_\star) \simeq \Phi_m^*(-\Delta; t_\star)$$

usando esta relación y realizando un proceso similar al necesario para deducir (4.53), obtenemos la ecuación (4.54).

Como esta fueron las condiciones usadas para deducir tanto la formula de Parke (3.35) como la probabilidad de transición del antineutrino (4.22) es mediante esta ecuación que podemos establecer una relación entre P_c y \bar{P}_c , para ello usemos la ecuación (4.51) en (4.54)

$$\bar{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0) = \mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)\sigma^T, \tag{4.55}$$

explícitamente,

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1 - \bar{P}_c(\Delta)} & \sqrt{\bar{P}_c(\Delta)} \\ -\sqrt{\bar{P}_c(\Delta)} & \sqrt{1 - \bar{P}_c(\Delta)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{P_c(-\Delta)} & \sqrt{1 - P_c(-\Delta)} \\ -\sqrt{1 - P_c(-\Delta)} & -\sqrt{P_c(-\Delta)} \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

donde la P_c la interpretamos como la probabilidad de cruzamiento de los estados de masa en materia, por otro lado para los antineutrinos no hay una probabilidad de cruzamiento, la \bar{P}_c la denotamos de esta forma en analogía con el caso del neutrino a fin de poder establecer una relación entre ellas. Estamos interesados en los módulos al cuadrado y comparando entrada por entrada llegamos a

$$\boxed{\bar{P}_c(\Delta) = 1 - P_c(-\Delta)} \tag{4.57}$$

este es el resultado principal de esta sección y es congruente con el resultado obtenido en [15]. En la siguiente sección investigaremos las relaciones que existen en el caso cuando las tres generaciones toman parte en la mezcla.

4.3. Mezcla de tres sabores en materia para el antineutrino

Ahora vamos a estudiar la evolución de los estados de masa en materia para el antineutrino cuando las tres generaciones participan en la mezcla, empecemos por deducir la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor en materia, debemos recordar que al tratar el caso del antineutrino se deben hacer los cambios $U \rightarrow U^*$ y $V \rightarrow -V$ en la ecuación (3.37).

Después de sustraer el factor proporcional a la identidad, la ecuación de evolución de las amplitudes de los estados de sabor de las antineutrinos queda como

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t} &= \bar{H}_m(t)\bar{\Psi} \\ &= \{U^*H_0U^T - V(t)Y\}\bar{\Psi}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

donde H_0 y Y esta definidas de las misma forma que en (3.38), usando la definición de U en términos de las matrices de Euler (3.41) y (3.42)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi} &= \bar{H}_m(t)\bar{\Psi} \\ &= \{\tilde{U}^*\Gamma H_0\Gamma^*\tilde{U}^T - V(t)Y\}\bar{\Psi} \\ &= \{\tilde{U}^*H_0\tilde{U}^T - V(t)Y\}\bar{\Psi} \\ &= \mathcal{O}_{23}\Gamma^*\{\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y\}\Gamma\mathcal{O}_{23}^T\bar{\Psi}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde nuevamente hemos usamos el hecho de que al ser Γ y H_0 ambas matrices diagonales conmutan, es decir, $[\Gamma, H_0] = 0$. Definiendo

$$\bar{\Psi}' = \Gamma\mathcal{O}_{23}^T\bar{\Psi}, \quad (4.60)$$

y multiplicando (4.59) por la izquierda por $\Gamma\mathcal{O}_{23}^T$, llegamos a

$$i\frac{\partial}{\partial t}\bar{\Psi}' = \{\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y\}\bar{\Psi}', \quad (4.61)$$

en este caso

$$\bar{\Psi}' = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_e \\ \bar{\psi}_a \\ \bar{\psi}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_e \\ c_{23}\bar{\psi}_\mu - s_{23}\bar{\psi}_\tau \\ [s_{23}\bar{\psi}_\mu + c_{23}\bar{\psi}_\tau]e^{i\delta} \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Si denotamos el Hamiltoniano de la ecuación (4.61) por

$$\bar{\tilde{H}}_m(t) = \{\mathcal{O}_{13}\mathcal{O}_{12}H_0\mathcal{O}_{12}^T\mathcal{O}_{13}^T - V(t)Y\} \quad (4.63)$$

repetiendo el mismo procedimientos que se uso para probar el teorema 3.3.1 y notando que $\widetilde{H}_m(t)$ es una matriz real y simétrica podemos deducir condiciones similares a las del neutrino, por lo cual en este sección solo nos limitaremos a mencionarlas.

- $\widetilde{H}_m(t)$ y $\overline{H}_m(t)$ tienen los mismo eigenvalores.
- Los eigenvalores de $\overline{H}_m(t)$ no depende de θ_{23} ni de δ .
- La relación entre ambos Hamiltonianos esta dada por

$$\overline{H}_m(t) = \mathcal{O}_{23}\Gamma^* \widetilde{H}_m(t) \Gamma \mathcal{O}_{23}^T. \quad (4.64)$$

- Al ser $\widetilde{H}_m(t)$ una matriz simétrica, esta es diagonalizable por una transformación ortogonal dependiente del tiempo que denotaremos por $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$, la cual no depende de los parámetros θ_{23} ni de δ .

$$\overline{\mathcal{O}}_m^T(t) \widetilde{H}_m(t) \overline{\mathcal{O}}_m(t) = \overline{H}_D(t), \quad (4.65)$$

con $\overline{H}_D(t) = \text{diag}(\overline{\mathcal{E}}_1(t), \overline{\mathcal{E}}_2(t), \overline{\mathcal{E}}_3(t))$, los eigenvalores instantáneos de la energía

- La matriz $\overline{U}_m(t)$ que diagonaliza a $\overline{H}_m(t)$ esta dada por

$$\overline{U}_m(t) = \mathcal{O}_{23}\Gamma^* \overline{\mathcal{O}}_m(t)\Gamma, \quad (4.66)$$

donde $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$ es la misma que aparece en la ecuación (4.65).

Aunque es posible encontrar los eigenvalores exactos de la energía y por tanto determinar $\overline{\mathcal{O}}_m(t)$ de forma analítica, este resultado sigue siendo poco práctico y de difícil interpretación, en vez de ello nos aprovecharemos de los resultados obtenidos para el neutrino y haremos el cambio $V \rightarrow -V$ en las ecuaciones de los eigenvalores y en las definiciones de los ángulos de mezcla en materia para el antineutrino

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{E}}_1(t) &\simeq \frac{1}{2}[\Delta_{21} - V(t)c_{13}^2 - \overline{\Delta}_l] \\ \overline{\mathcal{E}}_2(t) &\simeq \frac{1}{2} \begin{cases} \Delta_{21} - V(t)c_{13}^2 + \overline{\Delta}_l & V(t) \lesssim \Delta_{21} \\ \Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2 - V(t) - \overline{\Delta}_h & V(t) \gtrsim \Delta_{31} \end{cases} \\ \overline{\mathcal{E}}_3(t) &\simeq \frac{1}{2}[\Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2 - V(t) + \overline{\Delta}_h] \end{aligned} \quad (4.67)$$

donde definimos

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_l(t) &\equiv c_{13}^2 \sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + B_l^2}, \\ \overline{\Delta}_h(t) &\equiv \sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + B_h^2}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

En esta última igualdad $B_l = V_l^R \tan 2\theta_{12}$, $B_h = V_h^R \tan 2\theta_{13}$ quedan igual que en el caso del neutrino con

$$\begin{aligned} V_l^R &= \Delta_{21} \cos 2\theta_{12}/c_{13}^2, \\ V_h^R &= (\Delta_{31} - \Delta_{21}s_{12}^2) \cos 2\theta_{13}. \end{aligned}$$

En analogía con (3.55) vamos a aproximar $\bar{\mathcal{O}}_m(t)$ por

$$\bar{\mathcal{O}}_m(t) \simeq \bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t) \quad (4.69)$$

en donde ahora $\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t)$ y $\bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t)$ son dadas por

$$\bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t) = \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}^m(t) & \bar{s}_{12}^m(t) & 0 \\ -\bar{s}_{12}^m(t) & \bar{c}_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t) = \begin{pmatrix} \bar{c}_{13}^m(t) & 0 & \bar{s}_{13}^m(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{s}_{13}^m(t) & 0 & \bar{c}_{13}^m(t) \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

donde usamos la notación compacta $\bar{c}_{ij}^m(t) = \cos \bar{\theta}_{ij}^m(t)$ y $\bar{s}_{ij}^m(t) = \sin \bar{\theta}_{ij}^m(t)$. Los ángulos de mezcla de los antineutrinos en materia, $\bar{\theta}_{12}^m(t)$ y $\bar{\theta}_{13}^m(t)$ son dadas por las siguientes expresiones:

$$\sin 2\bar{\theta}_{12}^m(t) = \frac{\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{c_{13}^2 \sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}}, \quad (4.71)$$

$$\cos 2\bar{\theta}_{12}^m(t) = \frac{V_l^R + V(t)}{\sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}}, \quad (4.72)$$

$$\sin 2\bar{\theta}_{13}^m(t) = \frac{(\Delta_{31} - \Delta_{21}s_{12}^2) \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}, \quad (4.73)$$

$$\cos 2\bar{\theta}_{13}^m(t) = \frac{V_h^R + V(t)}{\sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}. \quad (4.74)$$

Sustituyendo la relación entre las amplitudes de los estados de sabor y de los estados de masa en materia para los antineutrinos (4.5) en la ecuación (4.58) con $\bar{U}_m(t)$ dada por:

$$\bar{U}_m(t) \simeq \mathcal{O}_{23} \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_{13}^m(t) \bar{\mathcal{O}}_{12}^m(t) \Gamma, \quad (4.75)$$

llegamos a

$$i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}'_m(t) = \left\{ \bar{H}_D - i \bar{\mathcal{O}}_m^T(t) \frac{\partial \bar{\mathcal{O}}^m(t)}{\partial t} \right\} \bar{\Phi}'_m(t) \quad (4.76)$$

donde hemos definido

$$\bar{\Phi}'_m(t) \equiv \Gamma \bar{\Phi}'_m(t). \quad (4.77)$$

En particular nos interesa encontrar el operador de evolución de las amplitudes de los estados de masa en materia de los antineutrinos. Denotando al Hamiltoniano de la ecuación (4.76) como $\bar{\mathcal{H}}_m(t)$,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0) = \bar{\mathcal{H}}_m(t) \bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0), \quad \text{con } \bar{\mathcal{U}}_m(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \quad (4.78)$$

En términos de $\bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0)$

$$\bar{\Phi}_m(t) = \Gamma^* \bar{\mathcal{U}}_m(t, t_0) \Gamma \bar{\Phi}_m(t_0). \quad (4.79)$$

Empecemos analizando el caso más sencillo posible de esta ecuación, el cual consiste en despreciar los términos fuera de la diagonal principal, es decir, queremos considerar la aproximación adiabática para el caso de tres sabores,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{U}}_A(t, t_0) = H_D(t) \bar{\mathcal{U}}_A(t, t_0), \quad \text{con } \bar{\mathcal{U}}_A(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

En este caso no habrá mezcla entre los estados instantáneos de masa en materia de los antineutrinos, y el operador de evolución, el cual denotamos por $\bar{\mathcal{U}}_A(t, t_0)$, es dado por

$$\bar{\mathcal{U}}_A(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\bar{\alpha}_1(t)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\bar{\alpha}_2(t)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\bar{\alpha}_3(t)} \end{pmatrix}, \quad (4.80)$$

$$\bar{\alpha}_i(t) = \int_{t_0}^t \bar{\mathcal{E}}_i(t') dt', \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.81)$$

Al considerar los elementos fuera de la diagonal principal, es decir, al abandonar la aproximación adiabática con los resultados del Apéndice B es aún posible proponer

$$\bar{\mathcal{U}}_m = \bar{\mathcal{U}}_A \bar{\mathcal{U}}_{NA}, \quad (4.82)$$

donde ahora queremos determinar $\bar{\mathcal{U}}_{NA}$. Hasta el momento los resultados obtenidos en la presente sección, daría la impresión de que el caso de los antineutrinos se puede tratar de forma análoga al caso de los neutrinos haciendo el cambio de $V \rightarrow -V$.

Empecemos analizando las condiciones bajo las cuales se dedujo \mathcal{U}_{NA} para los neutrinos. De las definiciones de los ángulos de mezcla (3.57) - (3.60),

vemos que cerca de los valores V_l^R y V_h^R estas presentaban un comportamiento resonante, sin embargo para los antineutrinos este comportamiento ya no se presenta, lo cual se ve directamente de las ecuaciones (4.71) - (4.74). Por lo tanto ya no es posible factorizar la parte no adiabática en una resonancia baja (*low*) y una resonancia alta (*high*), esto mismo ocurría en el caso de dos sabores, lo cual se puede apreciar en la Figura 4.1, sin embargo, en este caso nos aprovechamos del hecho de que conocemos la forma general del operador de evolución de 2×2 . Para el caso de 3×3 no nos fue posible encontrar una expresión general que nos permita escribir una expresión para \bar{U}_{NA} equivalente a la de 2×2 .

La cantidad física relevante que nos interesa calcular es la probabilidad de transición del antineutrino. Al igual que antes supongamos que en el tiempo t_* , este abandona el medio, y que la densidad en el borde $V \rightarrow 0$. De las definiciones de los ángulos de mezcla en materia

$$\begin{aligned} \sin 2\bar{\theta}_{ij}^m &\rightarrow \sin 2\theta_{ij} \\ \cos 2\bar{\theta}_{ij}^m &\rightarrow \cos 2\theta_{ij} \end{aligned} \quad \text{si } V \rightarrow 0. \quad (4.83)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (4.1) y (4.5), las cuales son válidas independientemente del número de generaciones que tomen parte en la mezcla,

$$\bar{\Phi}(t) = U^T \bar{U}_m(t) \bar{\Phi}_m(t). \quad (4.84)$$

Usando la ecuación (4.83) en la definición de la matriz de mezcla en materia para los antineutrinos, la ecuación (4.66) y aproximando $\bar{\mathcal{O}}_m(t)$ por (4.69) es inmediato ver que

$$\bar{U}_m \rightarrow U^* \quad \text{si } V \rightarrow 0,$$

y, por lo tanto, cuando el antineutrino alcanza el borde del medio

$$\bar{\Phi}(t_*) = \bar{\Phi}_m(t_*). \quad (4.85)$$

Bajo estas condiciones la ecuación (4.17) sigue siendo válida y debemos encontrar una forma de calcular $\bar{\phi}_i(t_*)$.

Buscaremos la forma de establecer una relación entre los estados de sabor del neutrino y su antipartícula, al igual que se hizo en el caso de dos generaciones. Del análisis de los Hamiltonianos (3.37) y (4.58) vemos que

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t), \\ \bar{\Psi} &= \bar{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t), \end{aligned} \quad (4.86)$$

aunque tanto Ψ como $\bar{\Psi}$ también dependen de los ángulos de mezcla θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} , no haremos ningún cambio en los ángulos de mezcla por lo cual los hemos omitido en la ecuación (4.86).

Empecemos por establecer la relación para Ψ y $\bar{\Psi}$ al considerar que las tres generaciones toma parte en la mezcla.

Proposición 4.3.1. *Supongamos que $\Psi(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t)$ es solución de la ecuación (3.37), con condición inicial $\Psi(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t_0) = (1, 0, 0)^T$ al hacer los cambios*

- $\Delta \rightarrow -\Delta,$
- $\Psi \rightarrow \Psi^*,$

donde ahora hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta,$ significa hacer los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}.$ La nueva función es solución de (4.58), sujeto a la condición inicial $\bar{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t_0) = (1, 0, 0)^T,$ es decir

$$\Psi^*(-\Delta_{21}, -\Delta_{31}; t) = \bar{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t) \quad (4.87)$$

Demostración. De la definición de $H_0,$ ecuación (3.38), hacer los cambios los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$ es equivalente a cambiar el signo de H_0

$$H_0(-\Delta_{21}, -\Delta_{31}) = -H_0(\Delta_{21}, \Delta_{31}),$$

por lo tanto al sustituir en (3.37) y conjugar

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(-\Delta) = \{U^* H_0 U^T - V(t) Y\} \Psi^*(-\Delta)$$

donde hemos tomado en cuenta que para el caso de tres generaciones la matriz de mezcla es una matriz compleja. Nótese que hacer los cambios $\Delta_{21} \rightarrow -\Delta_{21}$ y $\Delta_{31} \rightarrow -\Delta_{31}$ no afecta la condición inicial, y al comparar con (4.58) vemos que $\Psi^*(-\Delta_{21}, -\Delta_{31}; t)$ y $\bar{\Psi}(\Delta_{21}, \Delta_{31}; t)$ obedecen las misma ecuación diferencial, con la misma condición inicial, de donde se deduce la verdad de la proposición. QED

Un resultado similar en el caso de dos generaciones fue el que nos permitió establecer una relación entres lo operadores de evolución de los estados de masa en materia de los neutrinos y sus antipartículas. Al igual que antes, notemos que el resultado de la proposición 4.3.1, implica

$$\Phi^*(-\Delta; t) = \bar{\Phi}(\Delta; t). \quad (4.88)$$

En la deducción de la ecuación (4.53) no se hace referencia al número de generaciones que participan en la mezcla. Por lo tanto esta relación sigue siendo valida de manera general, de hecho siempre que sea posible establecer un resultado similar a las proposiciones 4.2.1 o 4.3.1, esta ecuación sera válida sin importa el número de generaciones que se consideren.

Usando las definiciones de U_m (3.62) y \bar{U}_m (4.75), podemos encontrar la forma explícita la ecuación (4.53) en el caso de tres generaciones.

$$\begin{aligned} \bar{U}_m(\Delta; t, t_0) = \\ \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_m^T(\Delta; t) \mathcal{O}_m(-\Delta; t) \Gamma U_m^*(-\Delta; t, t_0) \Gamma^* \mathcal{O}_m^T(-\Delta; t_0) \bar{\mathcal{O}}_m(\Delta; t_0) \Gamma \end{aligned} \quad (4.89)$$

Con la finalidad de dar la relación explícita entre los operadores de evolución debemos saber como se modifica \mathcal{O}_m al hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$, para lo cual debemos averiguar como cambian los ángulos de mezcla en materia para el neutrino al hacer dicho cambio. De las ecuaciones (3.54) y (3.53) resulta

$$\begin{aligned} V_l^R(-\Delta) &= -\Delta_{21} \cos 2\theta_{12}/c_{13}^2 = -V_l^R(\Delta), \\ V_h^R(-\Delta) &= (-\Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2) \cos 2\theta_{13} = -V_h^R(\Delta), \end{aligned} \quad (4.90)$$

mientras que para las $\Delta_{l,h}$ tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_l(-\Delta; t) &= c_{13}^2 \sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + (-B_l)^2} = \bar{\Delta}_l(\Delta; t), \\ \Delta_h(-\Delta; t) &= \sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + (-B_h)^2} = \bar{\Delta}_h(\Delta; t). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Usando estos resultados y haciendo el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ en las ecuaciones (3.57) - (3.60) llegamos a

$$\sin 2\theta_{12}^m(-\Delta; t) = \frac{-\Delta_{21} \sin 2\theta_{12}}{c_{13}^2 \sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}}, \quad (4.92)$$

$$\cos 2\theta_{12}^m(-\Delta; t) = \frac{-V_l^R - V(t)}{\sqrt{(V(t) + V_l^R)^2 + (V_l^R \tan 2\theta_{12})^2}}, \quad (4.93)$$

$$\sin 2\theta_{13}^m(-\Delta; t) = \frac{(-\Delta_{31} + \Delta_{21}s_{12}^2) \sin 2\theta_{13}}{\sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}, \quad (4.94)$$

$$\cos 2\theta_{13}^m(-\Delta; t) = \frac{-V_h^R - V(t)}{\sqrt{(V(t) + V_h^R)^2 + (V_h^R \tan 2\theta_{13})^2}}, \quad (4.95)$$

y comparando con (4.71) - (4.74)

$$\begin{aligned} \sin 2\theta_{12}^m(-\Delta; t) &= -\sin 2\bar{\theta}_{12}^m(t), \\ \cos 2\theta_{12}^m(-\Delta; t) &= -\cos 2\bar{\theta}_{12}^m(t), \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta_{13}^m(-\Delta; t) &= -\sin 2\bar{\theta}_{13}^m(t), \\ \cos 2\theta_{13}^m(-\Delta; t) &= -\cos 2\bar{\theta}_{13}^m(t),\end{aligned}\tag{4.97}$$

Esto implica que hacer el cambio $\Delta \rightarrow -\Delta$ implica hacer los cambios

$$\theta_{12}^m \rightarrow \bar{\theta}_{12}^m - \pi/2.\tag{4.98}$$

$$\theta_{13}^m \rightarrow \bar{\theta}_{13}^m - \pi/2.\tag{4.99}$$

Usando las ecuaciones (4.98) y (4.99) en (4.70), obtenemos las expresiones siguientes para $\mathcal{O}_{12}^m(-\Delta; t)$ y $\mathcal{O}_{13}^m(-\Delta; t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{12}^m(-\Delta; t) &= \begin{pmatrix} \bar{s}_{12}^m(t) & -\bar{c}_{12}^m(t) & 0 \\ \bar{c}_{12}^m(t) & \bar{s}_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{O}_{13}^m(-\Delta; t) &= \begin{pmatrix} \bar{s}_{13}^m(t) & 0 & -\bar{c}_{13}^m(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{c}_{13}^m(t) & 0 & \bar{s}_{13}^m(t) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.100}$$

Estas matrices también se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{12}^m(t) & -\bar{c}_{12}^m(t) & 0 \\ \bar{c}_{12}^m(t) & \bar{s}_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{c}_{12}^m(t) & \bar{s}_{12}^m(t) & 0 \\ -\bar{s}_{12}^m(t) & \bar{c}_{12}^m(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\tag{4.101}$$

donde definimos la matriz Σ_{12} como

$$\Sigma_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{4.102}$$

Por otro lado

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{13}^m(t) & 0 & -\bar{c}_{13}^m(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \bar{c}_{13}^m(t) & 0 & \bar{s}_{13}^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c}_{13}^m(t) & 0 & \bar{s}_{13}^m(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{s}_{13}^m(t) & 0 & \bar{c}_{13}^m(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\tag{4.103}$$

ahora definimos la matriz Σ_{13}

$$\Sigma_{13} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{4.104}$$

Usando estas expresiones

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_m^T(-\Delta)\overline{\mathcal{O}}_m(\Delta) &= [\mathcal{O}_{13}^m(-\Delta)\mathcal{O}_{12}^m(-\Delta)]^T\overline{\mathcal{O}}_{13}(\Delta)\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta) \\
 &= [\overline{\mathcal{O}}_{13}(\Delta)\Sigma_{13}\Sigma_{12}\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta)]^T\overline{\mathcal{O}}_{13}(\Delta)\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta) \\
 &= \overline{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta)\Sigma_{12}^T\Sigma_{13}^T\overline{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta)\overline{\mathcal{O}}_{13}(\Delta)\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta) \\
 &= \overline{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta)\Sigma_{12}^T\Sigma_{13}^T\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta)
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

definiendo Ω como el producto de las matrices Σ_{13} y Σ_{12}

$$\Omega = \Sigma_{13}\Sigma_{12} \tag{4.106}$$

sustituyendo (4.105) en (4.89)

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathcal{U}}_m(\Delta; t, t_0) &= \\
 &\Gamma^*\overline{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t)\Omega\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta; t)\Gamma\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0)\Gamma^*\overline{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0)\Omega^T\overline{\mathcal{O}}_{12}(\Delta; t_0)\Gamma.
 \end{aligned}$$

(4.107)

Esta es la relación general que existe entre los operadores de evolución del neutrino y el antineutrino, vemos que en si evaluamos el lado derecho en la ecuación anterior en t_0 esta se reduce correctamente a la identidad, tal como esperábamos. Otra característica que es llamativa es el hecho de que esta relación depende explícitamente del ángulo de mezcla en materia $\overline{\theta}_{12}$ pero no de $\overline{\theta}_{13}$. Al ser deducida a partir de los resultados de la proposición 4.3.1 es valida para todo t , esto nos acerca a poder conocer los estados de masa en el borde del medio $\overline{\phi}_i(t_*)$ y por lo tanto las probabilidades clásicas de transición para la antipartícula, sin embargo necesitamos un paso intermedio. La ecuación (4.107) fue deducida en el caso general y nos permite conocer el operador de evolución de los estados de masa en materia para antineutrino, suponiendo conocido el operador de evolución del neutrino.

A fin de que la lógica que hemos usado durante el desarrollo del presente trabajo sea congruente necesitamos considerar como se modifica esta relación al hacer la suposición de que en el borde del medio la densidad presenta una súbita caída, de tal forma que $V \rightarrow 0$ y la ecuación (4.85) es valida. De la ecuación (4.88), podemos establecer una relación entre las amplitudes de los estados de masa y los estados instantáneos para el antineutrino

$$\overline{\Phi}_m(\Delta; t) \simeq \Phi_m^*(-\Delta; t). \tag{4.108}$$

Usando esta relación y repitiendo el procedimiento usado para deducir la relación entre los operadores de evolución, tenemos que en t_* , la relación entre los operadores de evolución se pueda aproximar por

$$\boxed{\bar{U}_m(\Delta; t_*, t_0) \simeq \mathcal{U}_m^*(-\Delta; t_*, t_0) \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{12}(\Delta; t_0) \Gamma} \quad (4.109)$$

Es esta ecuación la que me permite calcular $\bar{\phi}(t_*)$ en el borde de medio, bajo la suposición de que en el borde potencial se anula.

Usemos la ecuación (4.109) para evolucionar los estados instantáneo de masa del antineutrino

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_m(t_*) &= \bar{U}_m(\Delta; t, t_0) \bar{\Phi}_m(t_0) \\ &\simeq \mathcal{U}_m^*(-\Delta; *, t_0) \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{12}(\Delta; t_0) \Gamma \bar{\Phi}_m(t_0), \end{aligned} \quad (4.110)$$

permitamos suponer que al tiempo t_0 es creado un esta de sabor puro, la condición inicial se puede obtener invirtiendo (4.5)

$$\bar{\Phi}_m(t_0) = \{ \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \bar{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta; t_0) \Gamma \mathcal{O}_{23}^T \} \bar{\Psi}, \quad (4.111)$$

sustituyamos esta igualdad en el lado derecho de la ecuación (4.110) y usemos la definición de $\bar{\Psi}'$, (ecuación (4.60))

$$\bar{U}_m(\Delta; t, t_0) \bar{\Phi}_m(t_0) = \mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0) \Gamma^* \bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta; t_0) \bar{\Psi}' \quad (4.112)$$

Calculemos el producto $\bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta; t_0)$ usando las ecuaciones (4.70) y la definición de Ω

$$\bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta; t_0) = \begin{pmatrix} \bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0} & \bar{c}_{12}^{m0} & \bar{c}_{13}^{m0} \bar{s}_{12}^{m0} \\ -\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0} & \bar{s}_{12}^{m0} & \bar{c}_{12}^{m0} \bar{c}_{13}^{m0} \\ -\bar{c}_{13}^{m0} & 0 & \bar{s}_{13}^{m0} \end{pmatrix}, \quad (4.113)$$

en este punto suponemos que el antineutrino creado en el tiempo t_0 es un esta puro $\bar{\nu}_e$. De la ecuación (4.60)

$$\bar{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

usando estos resultados podemos escribir

$$\Gamma \bar{\mathcal{O}}_{12}^T(\Delta; t_0) \Omega^T \bar{\mathcal{O}}_{13}^T(\Delta; t_0) \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0} \\ -\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0} \\ -\bar{c}_{13}^{m0} e^{-i\delta} \end{pmatrix}. \quad (4.115)$$

Para finalizar falta considerar el operador de evolución del neutrino evaluado en $-\Delta$ y conjugar, para ello nos valdremos de la ecuación (3.81) omitiendo la fase de violación de CP

$$\mathcal{U}_m^*(-\Delta; t, t_0) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_l^-} e^{i\alpha_1} & \sqrt{P_l^-} \sqrt{1 - P_h^-} e^{i\alpha_1} & \sqrt{P_h^-} \sqrt{P_l^-} e^{i\alpha_1} \\ -\sqrt{P_l^-} e^{i\alpha_2} & \sqrt{1 - P_l^-} \sqrt{1 - P_h^-} e^{i\alpha_2} & \sqrt{1 - P_l^-} \sqrt{P_h^-} e^{i\alpha_2} \\ 0 & -\sqrt{P_h^-} e^{i\alpha_3} & \sqrt{1 - P_h^-} e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}, \quad (4.116)$$

con $P_l^- \equiv P_l(-\Delta)$ y $P_h^- \equiv P_h(-\Delta)$. Finalmente usando las ecuaciones (4.115) y (4.116) podemos calcular los estados $\bar{\phi}_i^m(t_*)$

$$\begin{aligned} \langle \|\bar{\phi}_1^m\|^2 \rangle &= (1 - P_l^-)(\bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_l^-(1 - P_h^-)(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_h^- P_l^- (\bar{c}_{13}^{m0})^2, \\ \langle \|\bar{\phi}_2^m\|^2 \rangle &= P_l^-(\bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + (1 - P_l^-)(1 - P_h^-)(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_h^-(1 - P_l^-)(\bar{c}_{13}^{m0})^2, \\ \langle \|\bar{\phi}_3^m\|^2 \rangle &= P_h^-(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + (1 - P_h^-)(\bar{c}_{13}^{m0})^2, \end{aligned} \quad (4.117)$$

Usando esta ecuaciones y la ecuación (4.17) podemos calcular las probabilidades clásicas para el antineutrino en el caso cuando las tres generaciones toman parte en la mezcla.

$$\begin{aligned} \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle &= \\ & \|U_{e1}\|^2 \{ (1 - P_l^-)(\bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_l^-(1 - P_h^-)(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_h^- P_l^- (\bar{c}_{13}^{m0})^2 \} \\ & + \|U_{e2}\|^2 \{ P_l^-(\bar{s}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + (1 - P_l^-)(1 - P_h^-)(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + P_h^-(1 - P_l^-)(\bar{c}_{13}^{m0})^2 \} \\ & + \|U_{e3}\|^2 \{ P_h^-(\bar{c}_{12}^{m0} \bar{s}_{13}^{m0})^2 + (1 - P_h^-)(\bar{c}_{13}^{m0})^2 \} \end{aligned} \quad (4.118)$$

Esta es la probabilidad de supervivencia para el el antineurino, comparandola con (3.85) vemos que aunque estas presentan ciertas similitudes, una no puede ser deducida de la otra simplemente haciendo el cambio de signo en el potencial efectivo $V \rightarrow -V$, como se suele mencionar en la literatura.

Nos gustaría de alguna manera inspeccionar le valides de la ecuación (4.118). Para ello empecemos analizando la probabilidad de supervivencia de los neutrinos electrónicos (3.85), hagamos $\theta_{13} = 0$ es esta ecuación, con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} \langle P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} \rangle &= c_{12}^2 \{ (1 - P_l)(c_{12}^{m0})^2 + P_l(1 - P_h)(s_{12}^{m0})^2 \} \\ & + s_{12}^2 \{ P_l(c_{12}^{m0})^2 + (1 - P_l)(1 - P_h)(s_{12}^{m0})^2 \}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Vemos que para recuperar la ecuación (3.35), es necesario que $P_h \rightarrow 0$ cuando $\theta_{13} \rightarrow 0$. Como se menciono al principio de la Sección 4.2, tanto las

diferencias cuadráticas de masas, como los ángulos de mezcla en el vacío son parámetros fijos dados de antemano.

Como deseo averiguar como se modifica la ecuación (4.118) al tomar $\theta_{13} = 0$, debo de imponer esta condición antes de resolver la ecuación (4.58), con lo cual, en la deducción anterior no aparecieran $\mathcal{O}_{13}(\Delta; t)$ ni Σ_{13} , tras hacer un poco de álgebra la ecuación (4.118) queda como

$$\begin{aligned} \langle P_{\bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_e} \rangle = & c_{12}^2 \{ (1 - P_l^-) (\bar{s}_{12}^{m0})^2 + P_l^- (\bar{c}_{12}^{m0})^2 \} \\ & + s_{12}^2 \{ P_l^- (\bar{s}_{12}^{m0})^2 + (1 - P_l^-) (\bar{c}_{12}^{m0})^2 \} \end{aligned} \quad (4.120)$$

donde tomas $P_h(-\Delta) = 0$, como en este caso el problema se puede tratar como un problema efectivo de 2×2 , podemos usar el resultado deducido en la ecuación (4.57), que en este caso toma la forma

$$\bar{P}_l(\Delta) = 1 - P_l(-\Delta) \quad (4.121)$$

Usando la ecuación (4.121) en (4.120) se recupera la ecuación (4.22). Esto no da seguridad de que los resultados obtenidos en el presente trabajo son correctos.

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo encontramos las relaciones que existen entre las amplitudes de sabor del neutrino y su antipartícula haciendo un cambios en los signos de las diferencias cuadráticas de masa, en el caso de tres generaciones donde se tiene dos diferencia cuadráticas de masa independientes trabajamos con la jerarquía normal de masas, los resultados deducidos son validos en límite en el que se considera al neutrino como una partícula ultrarelativista, en el caso de dos sabores este resultados permiten encontrar directamente la relación que existe entre las probabilidades del cruzamiento del neutrino y su antipartícula, mediante el formalismo del operador de evolución.

En el caso de dos sabores la relaciones entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino y el antineutrino se establecen mediante la forma general del operador de evolución para cualquier sistema de 2×2 , es importante señalar que para el caso del antineutrino la forma general del operador de evolución nos permite denotar por \overline{P}_c a la probabilidad de cruzamiento entre $\overline{\phi}_1^m(t) \leftrightarrow \overline{\phi}_2^m(t)$ aún sin conocer su forma explícita ya que su conocimiento requiere las solución de la ecuación de evolución de los estados de masa en materia para cada potencial, que como se comento en el Capítulo 3, solo se conocen soluciones analíticas para un número limitado de funciones de la densidad.

Para el caso del neutrino cuando se considerar que las tres generaciones participan en la mezcla no es posible seguir la misma linea de pensamiento, ya que no fue posible dar una forma general del operador de evolución de 3×3 , esto no quiere decir que dichas forma no exista, sino que no actualmente conocida (al menos nosotros no la encontramos), por lo cual se opta por un razonamiento distinto, aprovechadonos de la pequeñez en el Δ_{31}/Δ_{21} para resolver de forma aproximada la ecuación de los egienvectores instantáneos de la energía de en materia con esta aproximación y al igual que se hizo en

el caso de dos sabores definir los ángulos de mezcla en materia.

De las definiciones de los ángulos de mezcla notamos que θ_{12}^m y θ_{13}^m presentan un comportamiento resonante. Si suponemos, como es habitual que el ángulo de mezcla en el vacío tiene un valor pequeño comprendido en el intervalos $\theta \in [0, \pi/2)$ las definiciones de los ángulos de mezcla en materia del neutrino presenta un pico muy agudo cerca de los valores V_l^R y V_h^R respectivamente y debido a la pequeñez de la razón Δ_{31}/Δ_{21} podemos suponer que estos valores están lo suficientemente separados, usando esta última suposición pudimos factorizar la parte no adiabática del operador de evolución y manejarlo como si se trata de un problema efectivo de 2×2 cerca de cada resonancia.

Al trabajar con la ecuación de evolución del antineutrino la definición de los ángulos de mezcla en materia del antineutrino ya no presentan el comportamiento resonante por lo cual no podemos factorizar la parte no adiabática como en el caso del neutrino, y aunque en el caso de dos generaciones, para el antineutrino, el comportamiento resonante tampoco se presenta al contar con una forma general del operador de evolución podemos encontrar una relación entre las probabilidades de cruzamiento del neutrino y la que denotamos como la probabilidad de cruzamiento del antineutrino.

Usando las relaciones entre las amplitudes de sabor del neutrino y su antipartícula, fuimos capaces de establecer una relación general entre los operadores de evolución de los estados instantáneos, este resultado nos permite calcular las probabilidades de transición del antineutrino trabajando bajo la aproximación de que en el borde del medio la densidad presenta una súbita caída, a partir de las soluciones del neutrino aún si conocer la forma general del operador de evolución.

Consideramos este el resultado principal de esta tesis, ya que no solo permite calcular las probabilidades de transición del antineutrino, sin la necesidad de introducir hipótesis adicionales, si no que además nos permite concluir que las soluciones para la antipartícula no pueden ser deducidas de manera inmediata a partir de simples manipulaciones algebraicas de las soluciones del neutrino y que el caso del antineutrino merece y debe ser tratado de una forma separada y con bastante cuidado en las sutilezas que se presentan.

Apéndice A

Forma general del operador de evolución en el caso de dos sabores

El propósito de este Apéndice es deducir la forma general de una matriz de 2×2 sujeta a la condición de ser unitaria. tomemos una matriz compleja arbitraria y expresemos sus entradas en forma polar

$$U = \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ Ce^{i\lambda} & De^{i\eta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

imponiendo la condición de unitariedad

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ Ce^{i\lambda} & De^{i\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^{-i\alpha} & Ce^{-i\lambda} \\ Be^{-i\beta} & De^{-i\eta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2 + B^2 & ACe^{-i(\lambda-\alpha)} + BDe^{-i(\eta-\beta)} \\ ACe^{-i(\alpha-\lambda)} + BDe^{-i(\beta-\eta)} & C^2 + D^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

de las condiciones de la diagonal principal

$$A^2 + B^2 = 1 \quad (\text{A.3})$$

$$C^2 + D^2 = 1 \quad (\text{A.4})$$

de la condición fuera de la diagonal principal

$$ACe^{-i(\lambda-\alpha)} + BDe^{-i(\eta-\beta)} = 0 \quad (\text{A.5})$$

la otra ecuación no proporciona nueva información. por otro lado

$$\begin{aligned}\det(UU^\dagger) &= \det(U) \det(U^\dagger) \\ &= \det(U) \det(U)^* = 1\end{aligned}\tag{A.6}$$

es decir

$$\det U = e^{i\varphi}\tag{A.7}$$

con φ una fase arbitraria,

$$ADe^{i(\alpha+\eta)} - CBe^{i(\beta+\lambda)} = e^{i\varphi}\tag{A.8}$$

de (A.5)

$$\begin{aligned}ACe^{-i\lambda}e^{i\alpha} &= -BDe^{-i\eta}e^{i\beta} \\ ACe^{i(\alpha+\eta)} &= -BDe^{i(\beta+\lambda)}\end{aligned}\tag{A.9}$$

multiplicando por $\frac{C}{D}$

$$\frac{AC^2}{D}e^{i(\alpha+\eta)} = -BCe^{i(\beta+\lambda)}\tag{A.10}$$

sustituyendo en (A.7)

$$\left(\frac{AC^2}{D} + AD\right)e^{i(\alpha+\eta)} = e^{i\varphi}\tag{A.11}$$

multiplicando por D y factorizando el termino común en lado izquierdo y usando (A.4)

$$A(\cancel{C^2} + D^2) \overset{1}{=} De^{i(\varphi-\alpha-\eta)}\tag{A.12}$$

por lo tanto

$$A = De^{i\varphi'}\tag{A.13}$$

con $\varphi' = \varphi - \alpha - \eta$, como A y D son reales $e^{i\varphi'} = \pm 1$, de donde

$$A = \pm D\tag{A.14}$$

sustituyendo nuevamente en (A.5) y conjugando

$$Ce^{i\lambda} = \mp Be^{-i(\beta-\alpha-\eta)}\tag{A.15}$$

Así

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} Ae^{i\alpha} & Be^{i\beta} \\ \mp Be^{-i(\beta-\alpha-\eta)} & \pm Ae^{i\alpha} \end{pmatrix} \\
&= e^{i\frac{\alpha+\eta}{2}} \begin{pmatrix} Ae^{i\frac{\alpha-\eta}{2}} & Be^{i(\beta-\frac{\alpha+\eta}{2})} \\ \mp Be^{i(\beta-\frac{\alpha+\eta}{2})} & \pm Ae^{i\frac{\eta-\alpha}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

por conveniencia definimos

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \frac{\eta - \alpha}{2} \\
\tilde{\beta} &= \beta - \frac{\alpha + \eta}{2}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

con lo cual y obviando la fase global irrelevante

$$U = \begin{pmatrix} Ae^{-i\tilde{\alpha}} & Be^{i\tilde{\beta}} \\ \mp Be^{-i\tilde{\beta}} & \pm Ae^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.18}$$

para resolver la ambigüedad en el signo, imponemos la condición de que en el límite de $B \rightarrow 0$

$$U \rightarrow \begin{pmatrix} Ae^{-i\tilde{\alpha}} & 0 \\ 0 & Ae^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.19}$$

Si denotamos $A = \sqrt{1 - P_c}$, usando la ecuación (A.3)

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - P_c} e^{-i\tilde{\alpha}} & \sqrt{P_c} e^{i\tilde{\beta}} \\ -\sqrt{P_c} e^{-i\tilde{\beta}} & \sqrt{1 - P_c} e^{i\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

Esta es la forma general del operador de evolución de 2×2 . Notemos que si $P_c = 0$ recuperamos el operador de evolución adiabático.

Apéndice B

Factorización del operador de evolución

En este apéndice tenemos como finalidad desarrollar la factorización del operador de evolución usada en el Capítulo 3

Queremos encontrar el operador de evolución del Hamiltoniano H , es decir, queremos saber cual es la solución de

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = H\mathcal{U}(t, t_0) \quad (\text{B.1})$$

con la condición inicial

$$\mathcal{U}(t_0, t_0) = \mathbb{I} \quad (\text{B.2})$$

para algún Hamiltoniano conocido. Supongamos que el Hamiltoniano H se puede escribir como

$$H = H_1 + H_2 \quad (\text{B.3})$$

con la solución del de evolución de H_1

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(t, t_0) = H_1\mathcal{U}_1(t, t_0) \quad (\text{B.4})$$

explícitamente conocida.

Sustituyendo (B.3) en (B.1)

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}(t, t_0) = (H_1 + H_2)\mathcal{U}(t, t_0) \quad (\text{B.5})$$

en este caso el operador de evolución de $\mathcal{U}(t, t_0)$ se puede factorizar como $\mathcal{U}(t, t_0) = \mathcal{U}_1(t, t_0)\mathcal{U}'(t, t_0)$, con $\mathcal{U}'(t, t_0)$ por determinar

$$i\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{U}_1(t, t_0)\mathcal{U}'(t, t_0) = i\frac{\partial\mathcal{U}_1(t, t_0)}{\partial t}\mathcal{U}'(t, t_0) + i\mathcal{U}_1(t, t_0)\frac{\partial\mathcal{U}'(t, t_0)}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

sustituyendo (B.6) en (B.5) y usando (B.4)

$$i \cancel{\frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial t}} \mathcal{U}' + i \mathcal{U}_1 \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = H_1 \cancel{\mathcal{U}_1} \mathcal{U}' + H_2 \mathcal{U}_1 \mathcal{U}' \quad (\text{B.7})$$

donde hemos omitido la dependencia temporal con la finalidad de evitar sobrecargar la notación; con lo cual

$$i \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = (\mathcal{U}_1^\dagger H_2 \mathcal{U}_1) \mathcal{U}' \quad (\text{B.8})$$

podemos interpretar $\mathcal{U}_1^\dagger H_2 \mathcal{U}_1$ como un Hamiltoniano efectivo, en el caso en que $[\mathcal{U}_1, H_2] = 0$

$$i \frac{\partial \mathcal{U}'}{\partial t} = H_2 \mathcal{U}' \quad (\text{B.9})$$

y \mathcal{U}' se convierte en el operador de evolución de H_2 .

Bibliografía

- [1] BETHE, H. A. Possible explanation of the solar-neutrino puzzle. *Physical Review Letters* 56, 12 (1986), 1305.
- [2] D'OLIVO, J., AND AGUILAR, A. Magnus approximation for neutrino oscillation with three flavors in matter. comunicación privada.
- [3] GIUNTI, C., AND KIM, C. W. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. Oxford university press, 2007.
- [4] HERNÁNDEZ, P. Ific, universidad de valència and csic, valencia, spain. *2008 European School of High-Energy Physics* (2009), 85–142.
- [5] KIM, C. W., AND PEVSNER, A. Neutrinos in physics and astrophysics.
- [6] KOBAYASHI, M., ET AL. M. kobayashi and t. maskawa, prog. theor. phys. 49, 652 (1973). *Prog. Theor. Phys.* 49 (1973), 652.
- [7] KUO, T.-K., AND PANTALEONE, J. Solar-neutrino problem and three-neutrino oscillations. *Physical review letters* 57, 14 (1986), 1805.
- [8] KUO, T.-K., AND PANTALEONE, J. Three-neutrino oscillations and the solar-neutrino experiments. *Physical Review D* 35, 11 (1987), 3432.
- [9] KUO, T.-K., AND PANTALEONE, J. Neutrino oscillations in matter. *Reviews of Modern Physics* 61, 4 (1989), 937.
- [10] LANGACKER, P., LEVEILLE, J. P., AND SHEIMAN, J. On the detection of cosmological neutrinos by coherent scattering. *Physical Review D* 27, 6 (1983), 1228.
- [11] LIPARI, P. Introduction to neutrino physics.
- [12] MARTIN, B. R., AND SHAW, G. *Particle physics*. John Wiley & Sons, 2017.

- [13] MIKHEYEV, S., AND SMIRNOV, A. Y. Resonant amplification of ν oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy. *Il Nuovo Cimento C* 9, 1 (1986), 17–26.
- [14] MOHAPATRA, R. N., AND PAL, P. B. *Massive neutrinos in physics and astrophysics*, vol. 72. World scientific, 2004.
- [15] MORALES, J. Estudio comparativo de las oscilaciones de neutrinos y antineutrinos en materia. Master's thesis, UNAM, 2013.
- [16] PETCOV, S. An analytic description of three-neutrino oscillations in matter with varying density. *Physics Letters B* 214, 2 (1988), 259–266.
- [17] PETCOV, S. T., AND TOSHEV, S. Three-neutrino oscillations in matter: Analytical results in the adiabatic approximation. *Physics Letters B* 187, 1-2 (1987), 120–126.
- [18] PONTECORVO, B. Sov. phys. jetp 26, 984 (1968). *Sov. Phys. JETP* 26 (1968), 984.
- [19] TANABASHI, M., HAGIWARA, K., HIKASA, K., NAKAMURA, K., SUMINO, Y., TAKAHASHI, F., TANAKA, J., AGASHE, K., AIELLI, G., AMSLER, C., ET AL. Review of particle physics. *Physical Review D* 98, 3 (2018), 251–286.
- [20] WOLFENSTEIN, L. Neutrino oscillations in matter. *Physical Review D* 17, 9 (1978), 2369.
- [21] WOLFENSTEIN, L. Parametrization of the kobayashi-maskawa matrix. *Physical Review Letters* 51, 21 (1983), 1945.
- [22] ZAGLAUER, H., AND SCHWARZER, K. The mixing angles in matter for three generations of neutrinos and the msw mechanism. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields* 40, 2 (1988), 273–282.