



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

GRAVITACIÓN, ASTROFÍSICA Y COSMOLOGÍA

**LÍMITE DE CAMPO DÉBIL PARA EL CAMPO ESCALAR
AUTOGRAVITANTE**

T E S I S

**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

PRESENTA:

VÍCTOR MANUEL JARAMILLO PÉREZ

TUTOR PRINCIPAL:

DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:

DR. YURI BONDER GRIMBERG
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES
DR. SERGIO MENDOZA RAMOS
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

CIUDAD DE MÉXICO, JUNIO 2019



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

LÍMITE DE CAMPO DÉBIL PARA EL CAMPO ESCALAR AUTOGRAVITANTE

*A la memoria de mi abuela
Simona Viguera Lázaro*

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	2
1.1. Gravitación	2
1.2. Campo Escalar en un Espacio-Tiempo plano	4
1.3. Configuraciones Gravitatorias de Campo Escalar	7
1.3.1. Materia Oscura Escalar	7
1.3.2. Estrellas de Bosones	8
1.3.3. Agujeros de Gusano	13
2. Ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon	17
2.1. Campo Escalar Complejo en Relatividad General	17
2.2. Soluciones Exactas	22
2.3. Ecuaciones en Simetría Esférica	26
2.4. Métodos Numéricos	31
3. Límite de Campo Débil	36
3.1. Método General para la obtención del sistema no-Relativista (Schrödinger-Poisson)	36
3.2. Tensor de Einstein	37
3.3. Tensor de Energía-Momento	40
3.4. Ecuación de Schrödinger	44
3.4.1. Comentarios Sobre la Función de Onda	47
4. Estrellas de Bosones	49
4.1. Estrellas de Bosones en Simetría Esférica	49
4.2. Límite no-Relativista	53
4.3. Escalamiento de las Soluciones	56
4.4. Integración	58
4.5. Comparación con las Estrellas de Bosones Newtonianas	62
4.6. Rangos no-Relativistas de Masa	64
4.7. Estrellas de Bosones Newtonianas en Astrofísica	71
5. ℓ-Estrellas de Bosones	74
5.1. Ecuaciones de Campo	74
5.2. Límite no-Relativista	77

5.3. Resultados	79
Conclusiones y Trabajo a Futuro	82
Bibliografía	87

Resumen

La hipótesis de materia oscura en cosmología, requisito para dar una descripción adecuada del universo dentro del marco de la relatividad general, tiene distintos candidatos a formarla de acuerdo a la física fundamental que explique su existencia. Uno de los candidatos más prometedores es la materia oscura escalar, formada por un campo escalar en acople mínimo con la gravedad.

En este trabajo se estudia el denominado límite de campo débil, para los campos escalares (reales y complejos) y las condiciones generales que llevan a esta aproximación. Nos hemos concentrado en establecer claramente las condiciones necesarias que debe satisfacer el campo escalar en este límite, derivando posteriormente las ecuaciones para el caso de las estrellas de bosones tomando en cuenta estas consideraciones. Mostramos con detalle para este caso, que si tomamos las ecuaciones de relatividad general para el campo escalar y procedemos a tomar su límite no-relativista, se llega a las mismas ecuaciones que describirían el problema en el contexto de la física prerrelativista.

Mostramos también que la descripción no-relativista de las estrellas de bosones falla en todo un rango de posibles configuraciones, de acuerdo al cociente entre la frecuencia de oscilación del campo escalar ω y el parámetro de masa μ del campo escalar. En particular mostramos que falla en predecir la existencia de una configuración con masa crítica. Para esto último hemos calculado las expresiones no-relativistas para la masa de la estrella de bosones como función de su radio y frecuencia ω .

Por último hemos tomado el límite de campo débil y obtenido sus soluciones para un nuevo tipo de estrella de bosones, llamadas ℓ -Estrellas de Bosones, las cuales tienen la propiedad de introducir un nuevo parámetro a la solución (ℓ), al estar formadas por un número impar $(2\ell + 1)$ de campos escalares sin simetría esférica.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo introduciremos los conceptos y la teoría sobre los cuales trabajaremos en esta tesis. Este material corresponde a los campos escalares en configuraciones gravitatorias, por ello hablaremos brevemente sobre la gravitación con la teoría de la relatividad general y su límite newtoniano, discutiremos el campo escalar desde el contexto de la teoría clásica de campos en el espacio plano y finalmente introduciremos (con palabras) tres ejemplos de configuraciones de campo escalar autogravitante, estas son: la materia oscura escalar, las estrellas de bosones y los agujeros de gusano.

1.1. Gravitación

Al día de hoy la teoría que describe con mayor precisión a la gravedad es la relatividad general. Ésta fue postulada por Albert Einstein en 1915, quien supuso que el espacio-tiempo forma una variedad diferenciable pseudoriemanniana de cuatro dimensiones. Esto quiere decir que es posible asignar un tensor métrico diferenciable de dos índices covariantes no degenerado en todo punto de la variedad. Las ecuaciones de Einstein describen la relación que debe cumplirse entre la materia-energía por un lado y la curvatura de la variedad por otro.

Por la parte matemática, si x^μ es la elección de coordenadas en alguna carta que describe a la variedad, la métrica \mathbf{g} se refiere entonces al campo tensorial $g_{\mu\nu}(x^\mu)$. A partir de aquí se puede definir el operador de derivada covariante ∇_μ , al cual se restringe a ser compatible con la métrica, esto es $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Una de las consecuencias de las identidades de Bianchi, las cuales involucran derivadas covariantes sobre el tensor de curvatura, es que la divergencia del tensor $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ compuesto por el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R , es cero.

Por la parte física, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ tiene su definición [1] en los flujos de las componentes del cuadrimomento. En el espacio no-curvo, la divergencia de esta cantidad (que equivale a la contracción de la derivada parcial con el $T_{\mu\nu}$ en el espacio plano) es igual a cero. Elevar una relación de proporcionalidad entre $G_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ a ecuación de campo de la

gravitación, significa que la ley de conservación de $T_{\mu\nu}$ se deduce de esta. Einstein encontró que estas ecuaciones son

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, y c es la velocidad de la luz en el vacío. Análogamente estas ecuaciones pueden ser obtenidas desde un principio variacional de acuerdo a la acción de Einstein-Hilbert definida por

$$S_g = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R. \quad (1.2)$$

En el capítulo 2 tomaremos su variación, mostraremos que al incluir una acción de materia y definir apropiadamente el tensor de energía-momento, en efecto se obtiene (1.1).

A lo largo de la historia han sido formuladas distintas teorías de la gravitación. Newton dio una de las primeras descripciones matemáticas de la gravedad en su llamada ley de gravitación universal.

En tanto no se descubrieron efectos gravitacionales no predichos por ésta, la teoría fue una descripción adecuada. Incluso antes del siglo XX, ya había filósofos que la encontraban una teoría incompleta. Por ejemplo Mach ya había pensado en la idea de que la materia determinara propiedades sobre el espacio, mientras que desde el lado opuesto de la filosofía, Engels [2] establecía que la gravitación de Newton violaba la ley dialéctica de unidad de los contrarios.

Entre las primeras discrepancias entre la teoría de la gravitación newtoniana y la observación se encuentra la anomalía en el avance del perihelio de Mercurio. Además existía una contradicción entre la velocidad máxima de interacción permitida por la relatividad especial, y la acción a distancia (instantánea) de la gravitación de Newton. Sin embargo comparada con las ecuaciones de campo de Einstein, que son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales (cuatro variables) no-lineales de segundo orden y acopladas, la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho, \quad (1.3)$$

que contiene a la ley de gravitación universal, es mucho más simple. V es el potencial gravitacional cuyo gradiente es el negativo de la aceleración que experimentaría un cuerpo puntual. ρ es la densidad de materia.

Por esto, siempre que el límite de gravedad débil se cumpla y las velocidades sean pequeñas respecto a la velocidad de la luz, se puede optar por utilizar la física newtoniana. En los próximos capítulos de este trabajo, mencionaremos las ventajas y desventajas que brinda esta aproximación en el estudio de estrellas de bosones.

Por mencionar algunos fenómenos naturales que predice la relatividad general (y no la gravedad newtoniana), se encuentran el corrimiento al rojo gravitacional, las lentes gravitacionales, el retraso de Shapiro. Además es dentro de esta teoría que hoy en día se entiende la dinámica

del cosmos y la física de los agujeros negros. Otros ejemplos son la descripción de la sombra producida por un agujero negro rotante de Kerr (recientemente se mostró su compatibilidad con las observaciones del horizonte de eventos del agujero negro M87* [3, 4], Figura 1.1), inestabilidades de superradianza [5] en agujeros negros rotantes, etc.

Figura 1.1: Primera imagen del horizonte de eventos de un agujero negro (M87*). Créditos: Event Horizon Telescope



1.2. Campo Escalar en un Espacio-Tiempo plano

En un primer momento, la abstracción hacia masas o cargas puntuales de ciertos problemas físicos, llevó a la elaboración de la ley de gravitación universal de Newton y la Ley de Coulomb. Esta abstracción permitió dar un primer paso hacia el entendimiento de las leyes que describen a la naturaleza, en concreto aquellas de la mecánica y electrodinámica clásicas.

El concepto de *campo* apareció después; en el siglo XVIII, con la introducción del campo gravitacional y en el siglo XIX por medio de Faraday con el concepto de campo eléctrico y campo magnético. Un campo representando una magnitud física, se define matemáticamente como una tensor definido sobre cada punto del espacio y tiempo que describe a dicha magnitud, por su forma matemática estos pueden ser escalares, vectoriales, tensoriales propiamente dichos o espinoriales. Sobre la existencia material de los campos en la naturaleza hay una controversia (física y filosófica), sin embargo no debería dudarse de su utilidad como herramientas matemáticas. Por ejemplo, gran cantidad de fenómenos físicos son descritos con las

ecuaciones de Maxwell y la ecuación de Poisson, mismas que tienen diversas aplicaciones en la ingeniería.

La variable dinámica de una teoría clásica de campos relativistas (relativistas en el sentido de relatividad especial) es el campo $f(\mathbf{x})$, que toma valores sobre cada punto del espacio. En el caso de que $f(\mathbf{x})$ se trate de un campo escalar, se le asignará un elemento del campo (matemático) \mathbb{K} , que bien podría ser el campo de los complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Las ecuaciones de movimiento sobre un campo están dadas por el principio de Hamilton como en mecánica clásica donde la coordenada $q(t)$ pasa a ser la variable $f(\mathbf{x}, t)$. Es decir que sobre el lagrangiano

$$L = \int d^3x \mathcal{L}[f(\mathbf{x}, t), \dot{f}(\mathbf{x}, t), \nabla f(\mathbf{x}, t)], \quad (1.4)$$

que define a la acción $S_f = \int dt L = \int d^4x \mathcal{L}$, se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Aquí $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$. A \mathcal{L} se le llama densidad lagrangiana. Definiendo $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ donde $x^\mu = (t, \mathbf{x})$:

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu f_r)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_r} = 0. \quad (1.5)$$

El subíndice r es una etiqueta sobre el campo que estamos considerando. Cada componente deberá satisfacer la ecuación de Euler-Lagrange. Como ejemplo tomamos primero el potencial electromagnético A^μ , que es un campo vectorial. Utilizando la notación tensorial de subir y bajar índices con la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$, podemos definir

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1.6)$$

Que resulta en las ecuaciones de Maxwell en el vacío, esto es $\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$ que bajo las definiciones¹ $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ y $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ implican $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Aquí los vectores \mathbf{E} y \mathbf{B} se refieren al campo eléctrico y a la inducción magnética, mientras que el escalar ϕ y el vector \mathbf{A} se refieren a los potenciales eléctrico y vectorial usuales de la electrodinámica.

Un campo escalar fundamental existe dentro del modelo estándar de partículas, esto es dentro de la teoría cuántica de campos: el bosón de Higgs. Tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la física están descritas bajo esta teoría. Dentro de esta teoría se promueven los campos a operadores, se postulan relaciones de conmutación entre los f_r y sus momentos canónicos conjugados.

No se ha podido enmarcar a la gravedad bajo la descripción de la teoría cuántica de campos. Existen varias propuestas de cuantización de la gravedad, las cuales a su vez permitirían incluir el estudio de campos cuánticos en la relatividad general, sin embargo éstas no están consolidadas como teorías físicas debido a que no existe evidencia en favor de ninguna. En este trabajo estudiaremos el campo escalar (complejo y real) dentro de la teoría clásica de

¹Que por si solas implican el par de ecuaciones: $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

campos relativistas, es decir aquella descrita por las ecuaciones (1.5), pero en un espacio curvo.

Un ejemplo de densidad lagrangiana de un campo escalar ϕ real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), en el espacio-tiempo de Minkowski (plano) es:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi). \quad (1.7)$$

Donde $U(\phi)$ es el potencial del campo escalar; una función que depende del campo escalar. Este es un ejemplo de una lagrangiana general, invariante de Lorentz que depende a lo más cuadráticamente de las derivadas del campo. Es general dada la arbitrariedad de $U(\phi)$ y que el término cinético $M(\phi)\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ puede convertirse a la forma en (1.7) bajo la transformación $\sqrt{|M|}d\phi \rightarrow d\phi$.

La ecuación de Euler-Lagrange (1.5) para esta lagrangiana implica la ecuación de Klein-Gordon

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi - \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (1.8)$$

Por otro lado si consideramos un campo escalar complejo Φ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$), con densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_\Phi = -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi - U(|\Phi|^2), \quad (1.9)$$

tiene por ecuación de movimiento

$$\partial^\mu\partial_\mu\Phi - \frac{dU}{d|\Phi|^2}\Phi = 0. \quad (1.10)$$

Es conocido que el uso de campos escalares con lagrangianas como las indicadas en ecuaciones anteriores, son utilizados ampliamente por los físicos en virtud de ser relativamente sencillos de manejar. Resultan tener un tensor de energía-momento algebraicamente más simple que aquel de un fluido perfecto o el electromagnético, sin embargo conceptualmente más difícil de interpretar.

A continuación podemos preguntarnos lo que sucede cuando tomamos en cuenta a la gravedad. Una manera natural de incluir al campo escalar en la relatividad general es añadir a la acción de Einstein Hilbert S_g una acción $S_\Phi = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Phi$ que surja de sustituir en (1.9) $\eta_{\mu\nu}$ por la métrica $g_{\mu\nu}$ de las ecuaciones de campo de Einstein (1.1). De tal forma que la acción total esté dada por

$$S = S_g + S_\Phi. \quad (1.11)$$

Si a la lagrangiana que define S_Φ no le agregamos ningún término que combine al escalar de curvatura con el campo², entonces se dice que el campo estará acoplado mínimamente con la gravedad.

En esta tesis trataremos únicamente el caso en el que la gravedad y el campo escalar estén *acoplados mínimamente*.

1.3. Configuraciones Gravitatorias de Campo Escalar

1.3.1. Materia Oscura Escalar

El modelo cosmológico Lambda Cold Dark Matter es el paradigma estándar en el cual está descrito el cosmos y su dinámica. Es un modelo exitoso pues sus predicciones coinciden en gran medida con las observaciones astrofísicas y cosmológicas. Entre sus partes, la materia oscura es esencial y se define como aquella materia que interactúa principalmente de manera gravitacional y cuyas otras interacciones son mínimas o inexistentes. La materia oscura es fundamental en la formación de estructura y constituye aproximadamente el 26 % del contenido energético del universo.

Dado que el candidato a formar la materia oscura del modelo estándar, parece no existir de acuerdo a los experimentos, distintos enfoques físicos alternativos se han buscado. Uno de ellos es el modelo de materia oscura escalar [6, 7] cuyas características son: la presencia de un campo escalar, en un potencial escalar cuya masa asociada sea del orden de $10^{-22}\text{eV}/c^2$. Modela el contenido de materia en el universo de acuerdo a una acción total que considera la relatividad general, una constante cosmológica el contenido de materia bariónica/radiación y el campo escalar de la materia oscura.

$$S = S_g + S_\Lambda + S_b + S_\Phi . \quad (1.12)$$

La materia oscura fría (del modelo Lambda Cold Dark Matter), describe de manera correcta la evolución de las perturbaciones en un fondo homogéneo e isotrópico del universo, sin embargo a escalas galácticas falla en sus predicciones, por ejemplo predice perfiles de densidad en las galaxias en cúspide siendo que las observaciones indican un perfil plano en el centro de la galaxia. En general no ha sido exitosa en describir escalas menores a 10kpc [7].

Simulaciones numéricas muestran que el modelo de materia oscura escalar evade estos problemas, y por ello esta alternativa a la materia oscura fría gana importancia. Hoy en día la materia oscura escalar constituye un campo de estudio en el cual se estudian distintos potenciales escalares, los resultantes perfiles de materia oscura en las galaxias, la formación de estructura a sus diferentes escalas así como la fenomenología que surge de considerar al campo escalar y comparar con las observaciones.

²Nótese que solamente términos así pueden ser incluidos, pues requerimos que la acción sea invariante ante transformaciones de coordenadas. Por este mismo motivo es que hemos sustituido d^4x por $\sqrt{-g}d^4x$ en S_Φ .

1.3.2. Estrellas de Bosones

La hipótesis de la existencia de materia oscura en el universo incentiva la búsqueda de configuraciones estables constituidas por ésta. Los campos escalares complejos acoplados a la gravedad, son candidatos a materia oscura y constituyen una clase de objetos compactos exóticos contruidos con éstos. El caso más prometedor son las denominadas Estrellas de Bosones [8, 9, 10].

En últimos años, el ya mencionado descubrimiento del boson de Higgs y el éxito de los modelos de inflación en cosmología apuntan hacia la existencia de otros campos bosónicos escalares en la naturaleza, por lo que las estrellas de bosones, inicialmente estudiadas en [11, 12] podrían formar parte del catálogo de estrellas existentes en el universo.

Dentro del marco de la relatividad general las estrellas de bosones son configuraciones auto-gravitantes que se obtienen al resolver las ecuaciones de Einstein en donde la parte asociada a la materia y la energía, es decir el tensor de energía-momento, sea el de un campo escalar complejo (y con autointeracción) con potencial $U(\Phi)$. Y dependiendo de la forma del potencial, las estrellas de bosones se dividen según distintas etiquetas. El artículo de revisión [13] discute 10 de estos. Sin embargo por ser las primeras estrellas de bosones en estudiarse y además ser las más simples, la gran mayoría de la literatura se ha enfocado en dos principales tipos de ellas; las *mini-estrellas de bosones* (bautizadas en [14]) cuyo potencial de campo escalar está dado por

$$U = \frac{m_{\Phi}c}{\hbar}|\Phi|^2. \quad (1.13)$$

Aquí m_{Φ} es la masa de las partículas (de espín cero) asociadas al campo escalar, llamada así por la interpretación que tiene en la teoría cuántica de campos, \hbar es la constante de Planck reducida.

Otro caso de suma importancia es el de las *estrellas de bosones* propiamente dichas y estudiadas por primera vez en [15], estas consisten en tomar como potencial a

$$U = \frac{m_{\Phi}c}{\hbar}|\Phi|^2 + \frac{\lambda}{2\hbar}|\Phi|^4, \quad (1.14)$$

la constante λ es el llamado parámetro de autointeracción.

Además de diferenciarse por sus potenciales, las estrellas de bosones también pueden tener carga al acoplar el campo bosónico con el campo electromagnético en la lagrangiana del campo escalar [16]. Mientras que por otro lado existen estudios sobre *estrellas de bosones rotantes* [17] que surgen de considerar las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon en simetría axial y considerar una dependencia periódica sobre el ángulo azimutal en el campo escalar.

Recientemente fue encontrado un nuevo tipo de estrellas de bosones que generaliza a las mini-estrellas de bosones en términos de un número de momento angular

$$\ell = \frac{(N-1)}{2};$$

en donde una estrella de bosones esféricamente simétrica es construida con N campos escalares, cada uno asociado a un armónico esférico con parámetros ℓ, m pero cuya configuración total (esto es, al sumar todas las contribuciones) es independiente de los ángulos θ y φ . Estas se denominan ℓ -estrellas de bosones y fueron presentadas en [18].

Por último; existen estrellas de bosones diferenciadas del resto por la forma de la gravedad que mantiene su configuración [19], siendo estas *estrellas de bosones newtonianas* en el contexto de la gravitación de Newton y *Q-balls* en el caso sin gravedad. Las estrellas de bosones newtonianas describen con relativa precisión aquella porción de estrellas de bosones poco compactas. Mientras que por otro lado las Q-balls son soluciones de tipo solitónico a la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar que no autogravita, es decir que existen en el espacio plano en ausencia de gravedad,

Masa Crítica: Una estrella como nuestro Sol previene su colapso gravitacional en virtud de la presión generada por las reacciones nucleares de fusión dentro de él. Cuando estas reacciones tienen su fin, otro mecanismo debe proveer con la presión necesaria para mantener la estructura de la estrella. Una enana blanca es una estrella que contrarresta la acción de la gravedad con la presión de degeneración de los electrones, es decir el principio de exclusión de Pauli. El límite de Chandrasekhar establece que cuando la masa de la estrella es mayor a $1.4M_{\odot}$ este último mecanismo no es capaz de detener el colapso gravitatorio. En este caso la presión de degeneración de los neutrones es la que toma el papel del combustible de la estrella. Por otro lado una masa mayor a $3M_{\odot}$ se verá sometida a un colapso gravitatorio total, formando un agujero negro.

Ahora, en una estrella de bosones ¿qué es lo que la mantiene “en contra” de la fuerza de la gravedad? Parece ser que una estrella de bosones en equilibrio se mantiene unida por el balance entre la fuerza gravitacional atractiva y una presión que puede verse como aquella que surge del principio de incertidumbre de Heisenberg.

Numéricamente se ha encontrado que para las mini-estrellas de bosones, la masa máxima permitida es $M = 0.633 \frac{m_{\text{pl}}^2}{m_{\Phi}}$, a este valor se le llama límite de Kaup [12]. Aquí m_{pl} se refiere a la masa de Planck $m_{\text{pl}} = \sqrt{\hbar c/G}$.

Las estrellas de bosones son objetos compactos que tienen ciertas analogías con las estrellas convencionales. En particular con las enanas blancas y las estrellas de neutrones, pues estas comparten la propiedad de tener una masa crítica. Es de especial interés en este trabajo ver hasta donde pueden llevarse a cabo estas analogías entre estos dos tipos cualitativamente distintos de configuraciones de equilibrio, ya que por ejemplo la teoría newtoniana predice condiciones sobre las masas máximas en las enanas blancas y estrellas de neutrones, así como cotas para su compactidad.

Las ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkoff describe la configuración en equilibrio hidrostático de la idealización de una estrella, es decir el de un material isotrópico y esféricamente simétrico, si satisface las condiciones de frontera en la superficie de la estrella que consisten en pegar con la solución de vacío de la relatividad general. Si $\rho(r)$ y $P(r)$ son la densidad y la presión del fluido definidas a una distancia de radio-área r del centro de la configuración, y resolvemos las ecuaciones de Einstein en la métrica

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.15)$$

obtenemos [20]

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{d\nu}{dr} &= - \left(\frac{2}{P + \rho c^2} \right) \frac{dP}{dr}, \\ \frac{dP}{dr} &= - \frac{Gm}{r^2} \rho \left(1 + \frac{P}{\rho c^2} \right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 P}{mc^2} \right) \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Este sistema de ecuaciones describen casi por completo a una estrella de fluido, sin embargo nos falta una ecuación. La termodinámica indica que la temperatura T , la densidad ρ y la presión P no son independientes entre sí ya que existe una ecuación de estado, por ejemplo para la temperatura $T = T(\rho, p)$. Si estamos interesados en el estudio de estrellas frías, entonces la condición $T = 0$ implica la existencia de una ecuación de estado barotrópica $P = P(\rho)$, que proporcionará la ecuación faltante, sin embargo no es la única aproximación que nos puede llevar a una ecuación de estado barotrópica.

Este es el equivalente en el caso de fluido perfecto, a las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon que describen al campo escalar y que serán obtenidas en el Capítulo 2.

Varios resultados sobre este sistema son ampliamente conocidos, uno de ellos es que su límite no-relativista, donde

$$P \ll \rho c^2 \quad m \ll \frac{rc^2}{G}. \quad (1.17)$$

El sistema de ecuaciones se reduce a uno más simple que contiene a la ecuación de Poisson al definir $\nu = 2\phi/c^2$, y a la ecuación de equilibrio hidrostático newtoniano:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{Gm}{r^2} \rho, \\ \frac{dP}{dr} &= - \frac{Gm}{r^2} \rho. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Si asumimos que estamos estudiando materia con densidad de masa positiva, y cuya presión sea una función monótonamente creciente de la densidad, entonces el Teorema de Buchdal asegura que en el contexto de la relatividad general (1.16), la compacidad de la estrella está acotada por arriba:

$$\frac{M}{R} < \frac{4c^2}{9G}. \quad (1.19)$$

Donde $M = m(R)$ y R es el valor del radio de las esferas que define la frontera entre el interior y exterior de la estrella. En cambio en la teoría newtoniana de la gravedad (1.18), límites a M independientes a la ecuación de estado $P = P(\rho)$ no existen (véase sección 6.2 en [21]).

Otro resultado conocido es que al integrar el sistema Tolman–Oppenheimer–Volkoff para distintos valores de la densidad central ρ_0 , con lo que la masa gravitacional es función de ρ_0 , el perfil de masa muestra un valor crítico máximo para un cierto valor de densidad central ρ_0^{crit} y parte las soluciones en dos ramas, la de la derecha ($\rho_0 > \rho_0^{\text{crit}}$), inestable y la de la izquierda ($\rho_0 < \rho_0^{\text{crit}}$) estable.

Si se consideran las ecuaciones de equilibrio hidrostático newtoniano (1.18) para un polítopo, es decir una solución a la ecuación Lane-Emden que no es otra cosa que la ecuación de Poisson al utilizar la expresión para equilibrio hidrostático con ecuación de estado $P \propto \rho^{1+\frac{1}{n}}$ [20], entonces la forma funcional de $M(\rho_0)$ es

$$M \propto \rho^{\frac{3-n}{2n}}. \quad (1.20)$$

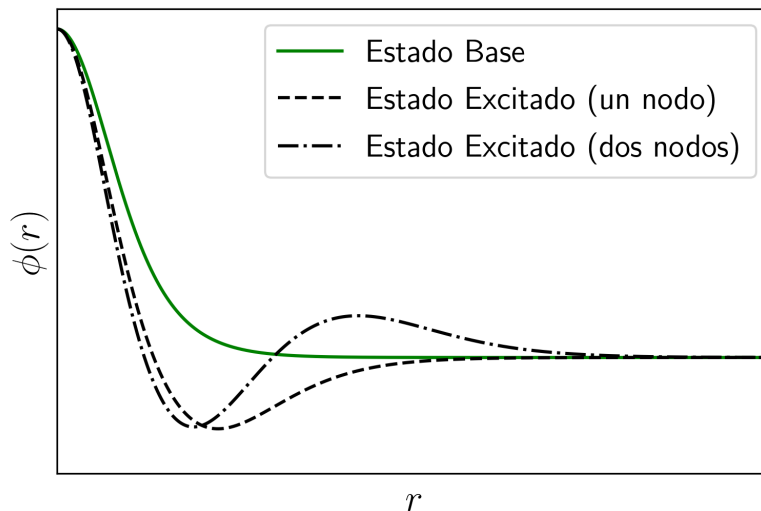
Donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; el llamado índice politrópico. Para $n < 3$ tendremos una estrella estable e inestable para $n \geq 3$. Esto quiere decir que dentro de la aproximación newtoniana las estrellas pueden reproducir el fenómeno de masa crítica, desde ambas ramas de $M(\rho_0)$, dada una ecuación de estado de tipo politrópica. Mencionamos que del mismo modo pueden obtenerse densidades críticas bajo la suposición del fluido politrópico para el caso de relatividad general, resultando en que tanto la gravitación de Newton como al de Einstein permiten obtener masas críticas de las estrellas.

Por otro lado, mostraremos que en las estrellas de bosones la aparición de una masa crítica es una propiedad que aparece únicamente al resolver el sistema Einstein-Klein-Gordon pero no al resolver su contraparte de campo débil. Esto será demostrado en el capítulo 4.

La existencia de una masa crítica para las estrellas de bosones existe, a continuación se expondrá sobre su estabilidad y la analogía con las estrellas de fluido en términos de las ramas estables e inestables.

Estabilidad Gravitacional de las Estrellas de Bosones: En el capítulo 4 discutiremos la forma que tienen las soluciones del sistema Einstein-Klein-Gordon para el caso de simetría esférica y con campo escalar Φ con dependencia armónica (determinada por un parámetro ω de frecuencia angular) en el tiempo. Veremos que ω juega el papel de un eigenvalor que toma de entre todas las soluciones posibles, aquella que satisface las condiciones de planitud asintótica, sin embargo obtendremos que existe un conjunto de valores discretos acotados por debajo, que satisfacen esta condición. A la solución con el valor mínimo de ω se le llama estado base y posee cero nodos (ver Figura 1.2) en el perfil del campo escalar $\Phi(r)$. Las frecuencias sucesivas poseen perfiles de campo escalar con uno, dos, etc. nodos, y se les denomina estados excitados.

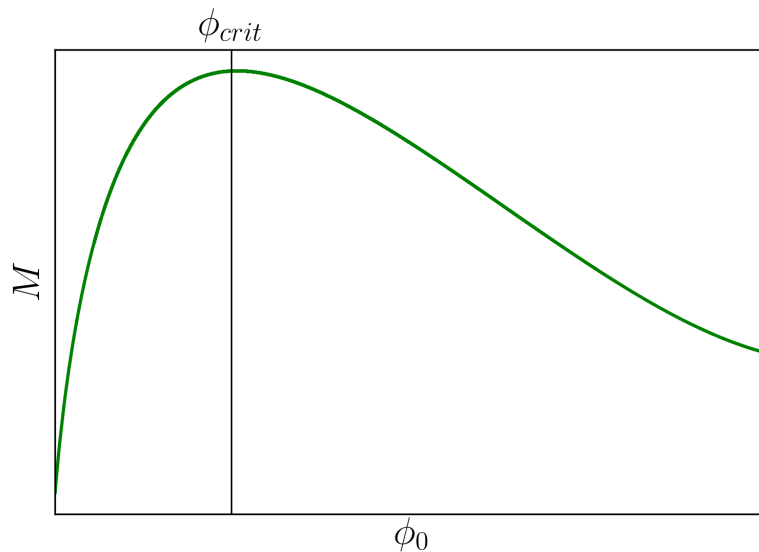
Figura 1.2: Estado base y estados excitados de la estrella de bosones.



Una estrella de bosones en su configuración estacionaria, está completamente determinada por el número de nodos y un valor³ “inicial”; por ejemplo el valor del campo en el centro de la estrella ϕ_0 . En principio cada solución tendrá una masa total asociada M , que análogamente a las estrellas frías, puede escribirse como función del campo central: $M(\phi_0)$.

En el primer trabajo que realizó un análisis no-lineal de estabilidad a las estrellas de bosones resolviendo el sistema Einstein-Klein-Gordon numéricamente [22], se encontró que el valor crítico ϕ_{crit} que maximiza M (ver figura 1.3) divide las soluciones en estables para $\phi_0 < \phi_{\text{crit}}$ e inestables para $\phi_0 > \phi_{\text{crit}}$, comprobando el análisis lineales de estabilidad que ya se habían realizado con anterioridad.

³Veremos que ω no tiene una relación uno-a-uno con las posibles soluciones, por lo que no es un buen parámetro para usar. Es decir existen frecuencias para las cuales existen dos o más soluciones posibles, que poseen diferentes masas totales, por ejemplo.

Figura 1.3: Masa de la estrella de bosones en función de ϕ_0 , en este caso para el estado base.

Posteriormente fue encontrado que las estrellas de bosones en estados excitados son inestables ante perturbaciones genéricas en todo el rango de soluciones [23]. Acerca de la dinámica posterior a la perturbación de las estrellas inestables se sabe que los estados excitados de menor masa transitan hacia un estado estable (base), mientras que los otros casos de inestabilidad, tanto para el caso base como para los excitados, las configuraciones colapsan hacia agujero negro, se dispersan hacia infinito o migran hacia estados estables, manteniéndose “oscilando” entre estados cercanos a estos.

Por el contexto de este trabajo, es importante mencionar que las soluciones estables al perturbarse, oscilan con una frecuencia característica ν que en el límite no-relativista tiene la expresión analítica [22]

$$\nu = \frac{\pi}{4m_{\Phi}R^2} - \frac{m_{\Phi}GM}{2\pi R}. \quad (1.21)$$

1.3.3. Agujeros de Gusano

A comienzo del capítulo hemos mencionado la motivación de describir configuraciones gravitatorias que involucren campo escalar: el objetivo de la tesis es proporcionar las ecuaciones y las condiciones necesarias en donde el límite no-relativista es aplicable y si bien en esta tesis no se construirá la versión newtoniana de ningún agujero de gusano, nos parece relevante por el trabajo a futuro, exponer aquí la existencia de agujeros de gusano constituidos por campo escalar.

La motivación física de la existencia de campos escalares que formen agujeros de gusano es muy diferente a aquella de la existencia de estrellas de bosones. El trabajo [24] indica que ciertas tensiones presentes en cosmología pueden ser interpretadas como evidencia de una energía oscura no-constante, esto es con una ecuación de estado $w(z)$ variable en el tiempo

(z se refiere al redshift). Los resultados que obtienen indican que existen periodos de tiempo en los cuales $w(z)$ es menor a menos uno. Una manera de modelar este comportamiento de la energía oscura es invocar un campo escalar fantasma en conjunto con un campo escalar canónico de quintaesencia, llamado quintom. Los campos fantasma constituyen material para la construcción de un agujero de gusano; dos ejemplos de esto se mencionarán en esta subsección.

Einstein y Rosen en un intento por construir una partícula elemental utilizando la relatividad general [25], utilizaron una solución extendida de Schwarzschild al pegar dos áreas de espacio. Hoy en día el puente de Einstein-Rosen, que es como se le denominó a esta solución desde entonces, se entiende en términos de la extensión de coordenadas de Kruskal-Szekeres y de la unión entre un agujero negro y un agujero blanco. La solución de Schwarzschild es la primer solución exacta de las ecuaciones de Einstein. Esta es una solución de vacío, exterior a un a un cuerpo estático y con simetría esférica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (1.22)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

La solución de Schwarzschild tomada como válida para todo $r > 0$, describe el espacio-tiempo completo resultante, con una singularidad inamovible en el centro. A esto se le conoce como agujero negro de Schwarzschild.

Considerar todas las geodésicas que no terminan en una singularidad inamovible permite construir la extensión analítica máxima de un espacio-tiempo. La variedad de Kruskal es la extensión analítica máxima de la solución de agujero negro de Schwarzschild.

Las coordenadas que permiten esta extensión son las coordenadas de Kruskal-Szekeres, de las que se habló antes:

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (1.23)$$

$$X = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (1.24)$$

para $r > 2GM$.

$$T = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (1.25)$$

$$X = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (1.26)$$

para $0 < r < 2GM$.

En estas coordenadas la métrica de Schwarzschild toma la forma

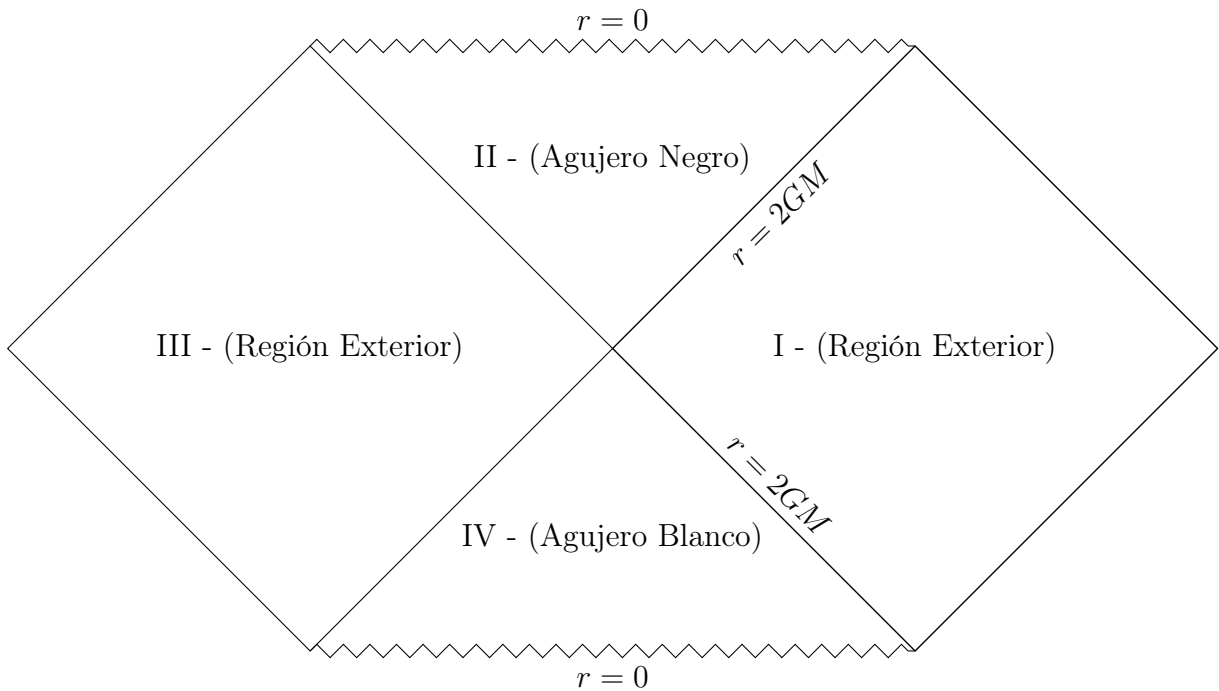
$$ds^2 = \frac{32G^3 M^3}{r} r^{-r/2GM} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (1.27)$$

para $r > 0$.

Usando las definiciones de X y T podemos encontrar que $T^2 - X^2 = (1 - r/2GM)e^{r/2GM}$, por lo que el horizonte de eventos $r = 2GM$ se encontrará dado por las rectas $X = \pm T$ y la singularidad $r = 0$ está dada por las hipérbolas $T^2 - X^2 = 1$. Esto último quiere decir que existen dos singularidades: $T = +\sqrt{1 + X^2}$ y $T = -\sqrt{1 + X^2}$. De la misma manera podemos darnos cuenta que existen dos regiones asintóticamente planas [26]. Este par de observaciones implican la existencia de otras regiones que el sistema de coordenadas T, X podrían cubrir. En total, la variedad de Kruskal se puede dividir en cuatro regiones separadas por horizontes de eventos.

Un nuevo cambio de coordenadas de la forma $T + X = \tan \frac{1}{2}(\psi + \xi)$ y $T - X = \tan \frac{1}{2}(\psi - \xi)$ permite la construcción de un diagrama conforme donde las cuatro regiones de la variedad de Kruskal pueden distinguirse en una sola figura. Por supuesto, una discusión sobre el significado y la utilidad de este tipo de diagrama es mucho más amplia, sin embargo aquí lo hemos utilizado para tener una visualización clara. La región I y II se refieren a la solución exterior y el agujero negro respectivamente, mientras que las regiones III y IV se refieren a la otra solución exterior y al agujero blanco.

Figura 1.4: Diagrama conforme del espacio-tiempo de Schwarzschild extendido



La superficie tipo espacio con $T = 0$ y a $t = 0$ encajada sobre el espacio euclídeo forma un paraboloides de revolución que “conecta” a las regiones asintóticamente planas I y III. Justo en la frontera entre estas dos regiones se forma la parte más angosta de esta superficie la cual se denomina garganta. A esta conexión se llama puente de Einstein-Rosen o bien agujero de

gusano de Schwarzschild. Cruzar el agujero de gusano de Schwarzschild es imposible, pues la única manera de pasar de cruzar de I a III o de III a I es golpeando la singularidad en el primer caso o entrando al agujero blanco (que por definición es imposible) en el segundo.

Morris y Thorne estudiaron la cuestión de la atravesabilidad de los agujeros de gusano [27], mostrando que para mantener abierta la garganta del agujero de gusano es necesario utilizar materia exótica (más precisamente, que viole la condición de energía nula).

La solución exacta de Ellis-Bronnikov, encontrada en 1973 independientemente por Kirill Bronnikov y Homer Ellis [28, 29] consiste en un agujero de gusano estático, con simetría esférica y que tiene la propiedad de ser atravesable, aunque inestable [30] ante pulsos de campo escalar exótico y normal. El material que constituye a este agujero de gusano es un campo escalar real sin término de masa ni potencial, acoplado a la gravedad y con polaridad opuesta a la común, es decir con un menos general en la lagrangiana de materia.

Los detalles sobre la obtención de esta solución exacta del campo escalar se encuentran en el siguiente capítulo. No obstante a este momento ya es notoria la aplicabilidad del campo escalar. Por ejemplo, agujeros de gusano de un campo escalar tanto real como complejo con un potencial con término de masa y autointeracción es obtenido en [31, 32]

Capítulo 2

Ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon

2.1. Campo Escalar Complejo en Relatividad General

En el capítulo anterior se mencionó que las ecuaciones que describen a un campo escalar complejo acoplado a la gravedad pueden ser obtenidas por medio del principio de mínima acción sobre la acción total $S = S_g + S_\Phi$, explícitamente:

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\Phi, \quad (2.1)$$

donde la lagrangiana del campo escalar es

$$\mathcal{L}_\Phi = -\frac{1}{2\kappa} [\nabla_\mu \Phi^* \nabla^\mu \Phi + U(|\Phi|^2)]. \quad (2.2)$$

A diferencia de la lagrangiana definida en la expresión (1.9), hemos añadido el factor $1/2\kappa$ para tener libertad en la elección de unidades y normalización del campo escalar. Más adelante se elegirá una κ .

La lagrangiana \mathcal{L} es función de ciertos campos tensoriales definidos sobre la variedad que conforma el espacio-tiempo. En particular el principio de mínima acción determina al campo tensorial $g^{\mu\nu}$ del cual es función la lagrangiana, tal que S sea extremizada. Esto es equivalente a pedir que la derivada variacional de S respecto a la métrica debe ser cero, es decir

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= \int d^4x \left[\frac{c^4}{16\pi G} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \left[\frac{c^4}{16\pi G} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Esto se satisface en general si

$$\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.4)$$

Para obtener el lado izquierdo de la ecuación necesitamos conocer las derivadas variacionales del escalar de Ricci y de la raíz cuadrada de menos el determinante de la métrica; $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}}$ y $\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}}$. Para el escalar de curvatura, la variación de R puede obtenerse de la variación del tensor de Ricci que a su vez son la variación del tensor de Riemann. Para ello nos vamos hasta los términos que son variaciones de los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ definidos por

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\sigma g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\nu\sigma}), \quad (2.5)$$

los cuales pierden su carácter no-tensorial [26, 33] una vez que actúa δ . Para mostrar esto, observamos que de acuerdo a la ecuación (2.5), $\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ transforma con la fórmula (de donde es notorio que no transforma como un tensor debido a la presencia del segundo término)

$$\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda'} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^m}{\partial x'^\nu} \Gamma_{km}^i - \frac{\partial x^d}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^f}{\partial x'^\nu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^d \partial x^f}, \quad (2.6)$$

ante una transformación de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu.$$

De esta manera, la diferencia $(\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ cancela los segundos términos de la ecuación anterior, y por lo tanto $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$ transforma como tensor.

Esto quiere decir que la derivada covariante puede actuar sobre $\delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda$, de la manera en la que está definida para un tensor $Q_{\sigma\nu}^\lambda$ de rango (2,1):

$$\nabla_\mu Q_{\sigma\nu}^\lambda = \partial_\mu Q_{\sigma\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \delta\Gamma_{\beta\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \delta\Gamma_{\sigma\gamma}^\lambda,$$

entonces

$$\nabla_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \partial_\mu \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \delta\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta\Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\gamma \delta\Gamma_{\nu\gamma}^\lambda. \quad (2.7)$$

Con lo cual la variación del tensor de Riemann definido por

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma$$

es

$$\begin{aligned} \delta R_{\beta\mu\nu}^\alpha &= \partial_\mu \delta\Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \delta\Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \delta\Gamma_{\beta\nu}^\sigma + \delta\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \delta\Gamma_{\beta\mu}^\sigma - \delta\Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\sigma \\ &= (\partial_\mu \delta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \delta\Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\beta}^\gamma \delta\Gamma_{\nu\gamma}^\alpha) - \\ &\quad - (\partial_\nu \delta\Gamma_{\mu\beta}^\alpha + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \delta\Gamma_{\mu\beta}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \delta\Gamma_{\sigma\beta}^\alpha - \Gamma_{\nu\beta}^\gamma \delta\Gamma_{\mu\gamma}^\alpha), \end{aligned} \quad (2.8)$$

en donde aparecen derivadas covariantes de la variación de los símbolos de Christoffel como en (2.7), por lo tanto

$$\delta R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} = \nabla_{\mu}\delta\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}. \quad (2.9)$$

Contrayendo para obtener el tensor de Ricci y luego contrayendo este para obtener el escalar de Ricci se obtiene

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

En el proceso se ha utilizado el teorema de Stokes sobre una derivada total que en principio aparece bajo el signo integral de la acción, por lo que las variaciones sobre la frontera al anularse, anularán a estos términos.

Por otro lado, la variación del determinante de la métrica, puede obtenerse con la fórmula de Jacobi del álgebra de matrices, la cual da la derivada del determinante de una matriz en términos de la matriz adjunta y la derivadas de esta. Lo cual lleva a que

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Por lo que

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Resumiendo, tendremos $\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}$ y $\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}$. Obtenemos al sustituir en (2.4):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} \left[-\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\Phi})}{\delta g^{\mu\nu}} \right]. \quad (2.13)$$

Por lo que definiendo

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\Phi})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.14)$$

obtenemos las *ecuaciones de Einstein*.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Estas son las ecuaciones de campo en relatividad general. Reconocemos el tensor de Bianchi-Einstein definido anteriormente y dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

el cual por construcción matemática tiene divergencia cero.

Calculamos (2.14) usando (2.12) para el caso que nos concierne, es decir el tensor de energía-momento para el campo Φ con un potencial escalar $U(|\Phi|^2)$ en la lagrangiana (2.2):

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= -2 \frac{\delta\mathcal{L}_\Phi}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\Phi \\ &= \frac{1}{\kappa} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Phi) - \frac{1}{2\kappa} g_{\mu\nu} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + U(|\Phi|^2)] . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ahora bien, el término $\delta g^{\alpha\beta}/\delta g^{\mu\nu}$ que hay que calcular en el primer término de la ecuación anterior, no es simplemente la multiplicación de dos deltas, si no que debe ser simetrizado:

$$\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\beta) . \quad (2.17)$$

Por lo tanto

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} [\partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^* \partial_\mu \Phi - g_{\mu\nu} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + U(|\Phi|^2))] . \quad (2.18)$$

La constante κ es una constante que se fija de acuerdo a las unidades que queramos para Φ , de tal manera que el tensor $T_{\mu\nu}$ tenga las unidades de presión requeridas. Si en este caso elegimos

$$[\Phi] = 1 ,$$

los términos de doble derivada, así como el término $m_\Phi^2 c^2/\hbar^2$ (en el caso de campo libre) tienen unidades de uno sobre distancia al cuadrado, entonces al comparar unidades en

$$[G_{\mu\nu}] = \left[\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right] , \quad (2.19)$$

se deduce que κ debe tener unidades inversas a $\frac{8\pi G}{c^4}$ de manera que por conveniencia elegiremos

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} . \quad (2.20)$$

Entonces

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \{ \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \partial_\nu \Phi^* \partial_\mu \Phi - g_{\mu\nu} [g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + U(|\Phi|^2)] \} , \quad (2.21)$$

o bien, con un índice contravariante y el otro covariante:

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \left\{ \partial^{\mu} \Phi^* \partial_{\nu} \Phi + \partial_{\nu} \Phi^* \partial^{\mu} \Phi - \delta^{\mu}_{\nu} [g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \Phi^* \partial_{\beta} \Phi + U(|\Phi|^2)] \right\}. \quad (2.22)$$

Si nuestro problema físico involucrara a un campo escalar con término de masa, entonces una distancia característica en el sistema quedaría definida por el inverso de μ

$$\mu = \frac{m_{\Phi} c}{\hbar}, \quad (2.23)$$

que tiene unidades de uno sobre distancia.

Es decir, el campo define una distancia característica. Pero supongamos que estamos resolviendo el problema del campo escalar autogravitante en el contexto de un agujero negro o por ejemplo en un fondo cosmológico, en este caso tendremos dos distancias características en nuestro problema. Llamemos R_0 a esta distancia característica del problema que podemos extraer del tensor de Einstein con el término $1/R_0^2$.

Consideremos que x^i (en donde seguimos la notación para índices latinos en relatividad general: $i = 1, 2, 3$) se refiere a las coordenadas cartesianas. Entonces podemos definir las coordenadas adimensionales (cartesianas)

$$\begin{aligned} ct &= R_0 \hat{x}^0, \\ x^i &= R_0 \hat{x}^i. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Podemos reescribir (2.21), en estas coordenadas:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{R_0^2} \frac{c^4}{8\pi G} \left\{ \frac{1}{2} (\partial_{\hat{\mu}} \Phi^* \partial_{\hat{\nu}} \Phi + \partial_{\hat{\nu}} \Phi^* \partial_{\hat{\mu}} \Phi) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} [g^{\alpha\beta} \partial_{\hat{\alpha}} \Phi^* \partial_{\hat{\beta}} \Phi + R_0^2 U(|\Phi|^2)] \right\}. \quad (2.25)$$

En donde las $\partial_{\hat{\mu}}$ se refieren a la derivada respecto a la coordenada \hat{x}^{μ} ($\mu = 0, 1, 2, 3$).

Definimos ahora el tensor de energía-momento adimensional $\hat{T}_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G R_0^2} \hat{T}_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

Y el tensor de Einstein adimensional

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{R_0^2} \hat{G}_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

A través de los cuales la ecuación (2.15) se lee

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \hat{T}_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Esto será útil más adelante cuando queramos olvidarnos de las constantes y definir en múltiplos de qué cantidades introduciremos las variables a los códigos de integración numérica.

Las ecuación de Klein-Gordon es la ecuación de movimiento para el campo escalar. Esta no es independiente a las ecuaciones de Einstein ya que puede ser obtenida de la expresión de conservación $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ o bien al variar la acción (2.1) respecto a Φ^* . El segundo camino es más directo [34], del cual obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta \Phi^*} &= \frac{1}{2} \int d^4x \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} \nabla^\nu \Phi) - \sqrt{-g} \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por lo tanto

$$\left(\square - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \right) \Phi = 0. \quad (2.30)$$

Si quisiéramos reescribir en las coordenadas \hat{x}^μ entonces el término $\frac{dU}{d|\Phi|^2}$ debe ser multiplicado por R_0^2 : $\left(\hat{\square} - R_0^2 \frac{dU}{d|\Phi|^2} \right) \Phi = 0$.

2.2. Soluciones Exactas

Usualmente a quienes es expuesta por primera vez la matemática detrás de la relatividad general, se les dice que dada la complejidad de las ecuaciones de Einstein, existen pocas soluciones exactas y que las que existen son resultado de un gran número de suposiciones y simetrías. Esto es cierto, siempre y cuando se contextualize que se está refiriendo a soluciones exactas que tengan relación con alguna situación física real, pues en el sentido estricto cualquier campo tensorial $g_{\mu\nu}$ es solución a las ecuaciones de campo, tomando como definición de $T_{\mu\nu}$ lo obtengamos del otro lado de la ecuación.

En el contexto de relatividad general en acople mínimo con el campo escalar, existen soluciones exactas no muy conocidas, o al menos no tanto como las soluciones de vacío de Schwarzschild o Kerr. En estas soluciones no solamente se imponen condiciones sobre el $T_{\mu\nu}$, o propiedades algebraicas sobre $R_{\mu\nu}$ o ciertas simetrías como habitualmente se hace en los métodos de generación de soluciones exactas [35], sino que se trabaja directamente sobre el tensor de energía-momento de un campo escalar.

Tres ejemplos de soluciones exactas serán dadas a continuación, para ilustrar la aplicación de las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon. Una solución exacta ya ha sido dada en el capítulo

1; nos referimos a el agujero de gusano de Ellis-Bronnikov que surge de considerar un campo escalar fantasma con potencial nulo en simetría esférica y espacio-tiempo estático.

Otro par, es de interés exponer en este trabajo. Éstas son encontradas para el caso de campo real, y corresponden a la solución no trivial de campo escalar con potencial nulo, estático, en simetría esférica de Janis-Nweman-Winicour-Wyman y la solución para un colapso de campo escalar de Husain-Marínez-Núñez.

La solución de Ellis-Bronnikov El tensor de energía-momento para el campo escalar real está dado por la expresión

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}\partial^{\sigma}\phi\partial_{\sigma}\phi + U(\phi) \right], \quad (2.31)$$

mientras que la ecuación de Klein-Gordon

$$\square\phi - \frac{dU}{d\phi} = 0, \quad (2.32)$$

donde $\square = \nabla^{\mu}\nabla_{\mu}$.

Sin imponer el potencial U , quisiéramos encontrar la solución más simple a las ecuaciones de Einstein, con la geometría de un agujero de gusano.

Tomemos el elemento de línea estático y con simetría esférica

$$ds^2 = -A(x)c^2dt^2 + \frac{dx^2}{A(x)} + R^2(x)d\Omega^2.$$

De tal manera que tomando la resta de las componentes tt y xx de las ecuaciones de Einstein que se obtienen al considerar este elemento de línea y el tensor de energía-momento para campo escalar (2.31), se obtiene al integrar una vez

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{A}{R^2} \right) = \frac{2(3m - x)}{R^4}. \quad (2.33)$$

Aquí m aparece como constante de integración.

La solución más simple se obtiene poniendo

$$R = (x^2 + a^2)^{1/2}. \quad (2.34)$$

Donde a es el radio de garganta.

Lo cual al incorporarlo al sistema completo de Einstein-Klein-Gordon se obtiene al integrar nuevamente que el coeficiente métrico $A(x)$ debe satisfacer:

$$\frac{A(x)}{R^2(x)} = \frac{c}{a^2} + \frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{3m}{a^3} \left(\frac{ax}{a^2 + x^2} + \arctan \frac{x}{a} \right), \quad (2.35)$$

donde m es una constante de integración. Por lo tanto el campo escalar es

$$\phi = \pm \arctan(x/a) + \phi_0, \quad (2.36)$$

y el potencial

$$U = -\frac{C}{a^2} \frac{R^2 + 2x^2}{R^2} - \frac{3m}{a^3} \left(\frac{3ax}{R^2} + \frac{R^2 + 2x^2}{R^2} \arctan \frac{x}{a} \right), \quad (2.37)$$

C otra constante de integración. Y bien, en términos de ϕ

$$U(\phi) = -\frac{C}{a^2} (3 - 2 \cos^2 \phi) - \frac{3m}{a^3} [3 \sin \phi \cos \phi + \phi (3 - 2 \cos^2 \phi)]. \quad (2.38)$$

Sin embargo el comportamiento asintótico de A implica condiciones sobre los valores de m y C .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{A(x)}{R^2(x)} = \frac{2aC \pm 3\pi m}{2a^3}.$$

Por ejemplo si queremos que la solución sea simétrica a ambos lados de la garganta, entonces $m = 0$. Y si pedimos que el espacio-tiempo sea asintóticamente plano en ambos universos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) = 1$ entonces debemos requerir $m = C = 0$.

A esta solución con $\phi = \arctan(x/a) + \phi_0$, $U = 0$ y

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + (x^2 + a^2) d\Omega^2 \quad (2.39)$$

se le conoce como agujero de gusano de Ellis-Bronnikov.

La solución de Janis-Newman-Winicour-Wyman Para un potencial de un campo escalar real $U(\phi) = 0$, existe una solución exacta (y única, en el sentido de que es la más general con estas características enlistadas a continuación) a las ecuaciones de Einstein con un campo escalar como componente de materia, que describe un espacio-tiempo con simetría esférica y estático. Esta solución además posee la propiedad de ser asintóticamente plano y estable ante perturbaciones escalares.

Esta solución fue descubierta por Janis, Newman y Winicour [36] e independientemente por Wyman [36]. Considerando $\Phi = \Phi^* = \Phi(r)$, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(r)$ para calcular el tensor de energía-momento (2.22) e introducir en las ecuaciones de Einstein. Se obtiene que el elemento de línea debe ser el siguiente

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{a_-}{R}}{1 + \frac{a_+}{R}} \right)^{1/\mu} c^2 dt^2 + \left(\frac{1 - \frac{a_-}{R}}{1 + \frac{a_+}{R}} \right)^{-1/\mu} dR^2 + \left(1 - \frac{a_-}{R} \right)^{1-1/\mu} \left(1 + \frac{a_+}{R} \right)^{1+1/\mu} R^2 d\Omega^2, \quad (2.40)$$

en donde

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} r_0 (\mu \pm 1) \quad \mu = \sqrt{1 + 2\sigma^2}. \quad (2.41)$$

Con parámetros libres σ y r_0 .

Teniendo como solución para el campo escalar

$$\Phi = \frac{\sigma}{\mu} \ln \left(\frac{1 - \frac{a_-}{R}}{1 + \frac{a_+}{R}} \right). \quad (2.42)$$

Nótese que aquí nuestra definición de campo escalar tiene un factor $\frac{c^2}{\sqrt{8\pi G}}$ extra que lo vuelve adimensional. Por lo que al comparar con la referencia, donde además utilizan unidades geometrizadas ($G = c = 1$), notaremos la modificación en la formula para el campo escalar.

Aquí los parámetros libres σ y r_0 al tomar los valores $r_0 = 0$ recuperamos el espacio-tiempo de Minkowski, y por otro lado $\sigma = 0$ nos lleva a la métrica de Schwarzschild [36]. En términos de otros parámetros m y q y de otro par de definiciones:

$$\gamma = \frac{2m}{b} \quad b = 2\sqrt{m^2 + q^2}. \quad (2.43)$$

La métrica en (2.41) y el campo escalar toman la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{\gamma} c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{-\gamma} dr^2 + \left(1 - \frac{b}{r} \right)^{1-\gamma} r^2 d\Omega^2, \quad (2.44)$$

$$\Phi = \frac{\sqrt{2}q}{b} \ln \left(1 - \frac{b}{r} \right). \quad (2.45)$$

La curvatura del espacio-tiempo y Φ son singulares en $r = b$.

La solución de Husain-Martínez-Núñez Husain, Martínez y Núñez encontraron en [37], una solución exacta no-estática para un campo escalar real sin potencial, que describe el colapso gravitacional de este.

$$ds^2 = (At + B) \left[-f^2(r)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f^2(r)} \right] + R^2(r, t) d\Omega^2, \quad (2.46)$$

donde

$$f^2(r) = \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^\alpha \quad R^2(r, t) = (At + B)r^2 \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^{1-\alpha}, \quad (2.47)$$

A, B, C son constantes y

$$\alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Teniendo como solución para el campo escalar

$$\Phi(r, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[(At + B)^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^{\alpha/\sqrt{3}} \right]. \quad (2.48)$$

Aquí de nuevo hemos utilizado como definición del $T_{\mu\nu}$ aquel que ya lleva un coeficiente multiplicativo $c^4/8\pi G$. El campo escalar al entrar únicamente derivadas de él en las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon, se puede redefinir sumando una constante.

Un punto a resaltar a cerca de esta solución es que existen singularidades dada la curvatura del espacio-tiempo, para $r = 2C$ y $t = -\frac{B}{A}$.

Los valores de los parámetros A y C determinan casos de métricas estáticas y no-estáticas, así como casos homogéneos e inhomogéneos, cada caso posee distintas propiedades cualitativas en términos de las singularidades y los horizontes aparentes presentes. El caso $A = 0, C \neq 0$, al reabsorber el parámetro B por un cambio de coordenadas, tenemos el elemento de línea

$$ds^2 = \left[- \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^\alpha c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2C}{r}\right)^\alpha} \right] + r^2 \left(1 - \frac{2C}{r}\right)^{1-\alpha} d\Omega^2, \quad (2.49)$$

que describe un espacio-tiempo estático. Esta métrica coincide con la solución de Janis-Newman-Winicour-Wyman, en particular con la forma de Wyman en (2.44), con γ fija e igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($= \pm\alpha$) y b igual a $2C$.

2.3. Ecuaciones en Simetría Esférica

A una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, se le pide que las funciones métricas y todo aquel componente del tensor de energía-momento, como en nuestro caso el campo escalar, estén dados a lo más en términos de funciones analíticas conocidas.

Si bien la simetría y las suposiciones sobre los ejemplos que abordaremos en este trabajo simplifican bastante el problema, las ecuaciones diferenciales que resultan no pueden ser integradas analíticamente, por ello es conveniente dejar expresadas las ecuaciones de una manera que pueda ser introducida por los métodos de integración numérica a algún lenguaje de programación, por ello hemos redactado este capítulo en el que obtenemos las ecuaciones diferenciales listas para ser integradas.

La integración numérica que deberemos realizar en estos casos se complica cuantimás queramos imponer condiciones al infinito sobre las soluciones, por ello en la sección 2.4 discutimos los métodos numéricos necesarios para ello.

Las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon en simetría esférica pueden presentarse en distintas coordenadas. Una elección de norma puede aplicarse para poder resolver un problema en concreto. Un ejemplo de elemento de línea general en simetría esférica es en términos de las variables Arnowitt-Deser-Misner (ADM), (las cuales serán α : función de lapso, β : componente radial del vector de corrimiento, γ : componente radial-radial de la tres-métrica). De las tres funciones métricas que contiene este elemento de línea, se mantienen la libertad de elegir coordenadas y establecer relaciones entre estas funciones, para simplificar las ecuaciones, esto es utilizado por ejemplo en [38].

Eligiendo coordenadas, la métrica tipo ADM con simetría esférica está dada por

$$ds^2 = -\alpha^2 c^2 dt^2 + \gamma^2 (dr + \beta c dt)^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.50)$$

Donde α , β y γ dependen únicamente del tiempo y del radio de área. En la referencia los autores definen un conjunto de variables las cuales resultan convenientes para sus propósitos. En particular tienen la propiedad de simplificar el tensor de Einstein, por lo cual las utilizaremos en este trabajo también:

$$\nu = \frac{\beta}{\alpha} \quad (2.51)$$

$$m = \frac{r}{2}(1 + \nu^2 - \gamma^{-2}). \quad (2.52)$$

Con las cuales el elemento de línea en (2.50) es

$$ds^2 = -\frac{\alpha^2}{\Delta} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 + 2\frac{\alpha\nu}{\Delta} c dt dr + \frac{dr^2}{\Delta} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.53)$$

donde $\Delta = 1 - \frac{2m}{r} + \nu^2$.

Usualmente la libertad de norma se encuentra en la elección de la función de lapso y el vector de corrimiento, sin embargo en términos de las nuevas funciones esta libertad queda en ν . En estas coordenadas podemos calcular las componentes del tensor de energía-momento por medio de la ecuación (2.22):

$$\begin{aligned}
T_t^t &= -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{\dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \Phi^{*'} \Phi' + U(|\Phi|) \right], \\
T_t^r &= \frac{c^4}{16\pi G} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (\dot{\Phi}^* \Phi' + \Phi^{*'} \dot{\Phi}) + 2\frac{\nu \dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha} \right], \\
T_r^t &= -\frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{\dot{\Phi}^* \Phi' + \Phi^{*'} \dot{\Phi}}{\alpha^2} - 2\frac{\nu \dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha} \right], \\
T_r^r &= \frac{c^4}{16\pi G} \left[\frac{\dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \Phi^{*'} \Phi' - U(|\Phi|) \right].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Aquí hemos acertado la notación con $\dot{} = \partial_{ct}$ y $' = \partial_r$. Además se puede realizar la siguiente abreviación: Las variables ADM definen un vector unitario con dirección hacia el futuro; este vector define una derivada normal (también llamado operador de evolución) $\mathcal{D} = n^\mu \partial_\mu$ que está dada por

$$\mathcal{D} = \frac{1}{c\alpha} \partial_t - \nu \partial_r. \tag{2.55}$$

Esta, a su vez, define una variable auxiliar, la derivada normal del campo escalar $\Pi = \mathcal{D}\Phi$. Esto es similar a la definición de los momentos conjugados de la teoría de campos, mencionados en el capítulo 1. En realidad son cuatro las componentes del momento canónico

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}. \tag{2.56}$$

Tomando la primer componente, que corresponde a la expresión más cercana a la definición de momento de la mecánica clásica

$$\pi = \pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}}. \tag{2.57}$$

Que al insertar la densidad lagrangiana para nuestro caso, definida en 2.2 y realizar el álgebra para la métrica definida en (2.50) la cual está escrita en las coordenadas $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{\partial}{\partial \dot{\Phi}} \left\{ \frac{c^4}{16\pi G} R + \frac{\kappa}{2} [\nabla_\mu \Phi \nabla^\mu \Phi^* + U(|\Phi|^2)] \right\} \\
&= \frac{\kappa}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_t \Phi)} (\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi^*) \\
&= \frac{\kappa}{2} g^{\mu\nu} \delta_\mu^t \partial_\nu \Phi^* = \frac{\kappa}{2} g^{t\nu} \partial_\nu \Phi^* \\
&= \frac{\kappa}{2} (g^{tt} \partial_t \Phi^* + g^{tr} \partial_r \Phi^*) .
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Calculamos las componentes del inverso de (2.50) obteniendo

$$g^{tt} = -\frac{1}{c^2 \alpha^2} \quad g^{tr} = g^{rt} = \frac{\nu}{c\alpha} \quad g^{rr} = 1 - \frac{2m}{r} . \tag{2.59}$$

Sustituyendo en π , vemos que el momento canónico define un operador de derivada que es proporcional a la derivada normal \mathcal{D} .

$$\pi = -\frac{\kappa}{2c\alpha} \mathcal{D}\Phi^* . \tag{2.60}$$

Esto decir que Π queda relacionado con el momento conjugado en la teoría de campos π por medio de la relación

$$\Pi = -\frac{2c\alpha}{\kappa} \pi^* . \tag{2.61}$$

Para el elemento de línea en (2.50) las componentes del tensor de Einstein están dadas por:

$$\begin{aligned}
G_t^t &= -\frac{2m'}{r^2} , \\
G_t^r &= \frac{2\dot{m}}{r^2} , \\
G_r^t &= -\frac{2(\mathcal{D}m - r\nu\mathcal{D}\nu + \frac{m\nu}{r})}{\alpha r^2 \Delta} + \frac{2\nu\alpha'}{r\alpha^2} , \\
G_r^r &= \frac{2[\nu\mathcal{D}m + (1 - \frac{2m}{r})(r\mathcal{D}\nu - \frac{m}{r})]}{r^2 \Delta} + 2\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\alpha'}{r\alpha} .
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Por otro lado la ecuación de Klein-Gordon (2.30) es:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi} = \alpha \left\{ \nu \Pi' + \Delta \Phi'' + \frac{1}{r \Delta} \left[\nu r \frac{\Delta \alpha'}{\alpha} - \mathcal{D}m + \frac{r \nu}{\alpha} \dot{\nu} + r \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \nu' + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(1 - \frac{5m}{2r} + \nu^2 \right) \right] \Pi + \left[\frac{\Delta \alpha'}{\alpha} - \frac{m'}{r} + \nu \nu' + \frac{2}{r} \left(1 - \frac{3m}{2r} + \nu^2 \right) \right] \Phi' - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Para ciertas aplicaciones sencillas como por ejemplo configuraciones estáticas u homogéneas, es más fácil proceder una vez que hemos elegido una norma. Sin embargo, es posible establecer un método, siguiendo el procedimiento que hacen en el trabajo en proceso en [39] en el que las ecuaciones de Einstein pueden comenzar a separarse en combinaciones que conforman ecuaciones de constricción o bien de evolución. Por ejemplo las ecuaciones que satisfacen G_t^t , $G_r^r - \alpha \nu G_r^t$ y G_t^r son de constricción para el primer caso y de evolución para el segundo y tercero:

$$m' = \frac{r^2}{4} \left[\frac{\dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha^2} + \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \Phi^* \Phi' + U(|\Phi|^2) \right], \quad (2.64)$$

$$\dot{m} = \frac{r^2}{4} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right) (\dot{\Phi}^* \Phi' + \Phi^* \dot{\Phi}) + 2 \frac{\nu \dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha} \right], \quad (2.65)$$

$$\dot{\nu} = -\Delta \alpha' + \alpha \left\{ \nu \nu' + \frac{m}{r^2} + \frac{r}{4} \left[\frac{\dot{\Phi}^* \dot{\Phi}}{\alpha^2} - \frac{\nu}{\alpha} \cdot (\dot{\Phi}^* \Phi' + \Phi^* \dot{\Phi}) + (\Delta + \nu^2) \Phi^* \Phi' - U(|\Phi|^2) \right] \right\} \quad (2.66)$$

Recapitulando: Se tienen 6 funciones $(\Phi, \Phi', \Pi, \alpha, \nu, m)$. Dadas las condiciones iniciales para el campo escalar y sus derivadas respecto a t y r , las ecuaciones de constricción para α , ν y m (de las cuales hasta el momento, de constricción sólo tenemos (2.64)) permiten calcular los valores iniciales de las respectivas funciones métricas, luego evolucionando el campo escalar junto con sus derivadas y las funciones métricas habremos resuelto las ecuaciones de Einstein. Es importante notar que las ecuaciones de evolución para la derivada temporal está dada en términos de la ecuación de Klein-Gordon mientras que la evolución para la derivada espacial está dada por $(\dot{\Phi}') = \frac{\partial}{\partial r} \alpha (\Pi + \nu \Phi')$.

Como ya se ha mencionado, la elección de norma es importante si queremos proceder con la obtención simple del resto de ecuaciones. En una elección de coordenadas donde $\nu = 0$ se resuelven las ecuaciones por ejemplo para las estrellas de bosones, el método aproximado en las pelucas escalares [38] y las ℓ -estrellas de bosones. Otras alternativas útiles son la norma $\nu = \frac{2m}{r} \left(1 + \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}$ que corresponde a las coordenadas de Eddington-Finkelstein. También es posible elegir ν tal que satisfaga las condiciones de continuidad en sus derivadas, que describan el espacio-tiempo de un universo de Friedmann perturbado [39].

2.4. Métodos Numéricos

Como se explicó en la Sección 2.3, la integración del sistema de ecuaciones diferenciales y la aplicación de las condiciones de frontera específicas nos hacen recurrir a métodos numéricos. Por ejemplo métodos de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias, métodos para encontrar las raíces de una función real de varias variables, y métodos para resolver problemas con dos condiciones de frontera serán necesarios.

La implementación de estos algoritmos forma parte de cualquiera de los textos clásicos de métodos numéricos (por ejemplo [40]). En particular aquí se repasarán el método de Runge-Kutta, el de Newton-Raphson y el shooting, para integración de ecuaciones diferenciales, raíces y problemas con dos condiciones de frontera, respectivamente.

Runge-Kutta El problema al que nos enfrentaremos con el sistema Einstein-Klein-Gordon, es a resolver N ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N). \quad (2.67)$$

Con N condiciones sobre las funciones y_i . Tomemos primero $N = 1$, pues su generalización es directa. La integración numérica de la ecuación diferencial para $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ debe empezar en algún lugar, digamos x_1 . La esencia de cualquier método de integración es generar por pasos, los valores siguientes de $y(x)$ utilizando como pendiente al valor de $f(x, y)$. En el sentido estricto esta es la definición del método de Euler, para el cual $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ en donde se ha utilizado la información en x_{n-1} para pasar al punto $x_n = x_{n-1} + h$. Donde $h > 0$.

En general la secuencia y_n estará dada por una función de incremento A de la siguiente forma:

$$y_n = y_{n-1} + hA(x_{n-1}, y_{n-1}, h, f). \quad (2.68)$$

Así, la integración numérica finalizará tras un cierto número de pasos, una vez alcanzado el punto final del dominio x_{fin} .

El error local de truncamiento τ_n se define como el error que la ecuación anterior induce en el cálculo de $y(x)$ para una sola iteración.

$$\tau_n = y(x_n) - y_{n-1} - hA(x_{n-1}, y_{n-1}, h, f). \quad (2.69)$$

Se dirá que el método es de orden p si el error de truncamiento es de orden $p+1$. Esto último quiere decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe una δ tal que

$$|\tau_n| < \varepsilon h^{p+1}$$

para todo $0 < h < \delta$. Esta definición de “orden” (o notación \mathcal{O}) será utilizada con frecuencia en el próximo capítulo fuera del contexto de análisis numérico.

Para calcular este error hay que notar que se asume que la iteración $n - 1$ corresponde al valor exacto ($y_{n-1} = y(x_{n-1})$), por otro lado el valor exacto de $y(x_n)$ puede ser expandido en serie de Taylor al rededor de x_{n-1} , esto nos permite dejar τ_n en términos de $\mathcal{O}(h^{p+1})$ únicamente. Por ejemplo en el método de Euler tenemos

$$\tau_n = y(x_n) - y_{n-1} - hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (2.70)$$

$$= y(x_{n-1}) + h \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{n-1}} + \mathcal{O}(h^2) - y_{n-1} - hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (2.71)$$

$$= y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + \mathcal{O}(h^2) - y(x_{n-1}) - hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \quad (2.72)$$

$$= \mathcal{O}(h^2). \quad (2.73)$$

Mostrando que el método de Euler es de primer orden.

Es posible construir combinaciones de coeficientes que permitan que errores más pequeños se eliminen, un ejemplo de ello es el método de Runge-Kutta. En particular existe por ejemplo, el Runge-Kutta de cuarto orden en donde la función de incremento está dada por

$$A = \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}, \quad (2.74)$$

donde

$$k_1 = hf(x_{n-1}, y_{n-1}), \quad (2.75)$$

$$k_2 = hf\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{k_1}{2}\right), \quad (2.76)$$

$$k_3 = hf\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{k_2}{2}\right), \quad (2.77)$$

$$k_4 = hf(x_{n-1} + h, y_{n-1} + k_3). \quad (2.78)$$

Puede mostrarse que en este caso $\tau_n = \mathcal{O}(h^5)$ por lo que efectivamente corresponde a un método de cuarto orden

Newton-Raphson El problema de encontrarle raíces a las N funciones

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad (2.79)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ es algo que el método de Newton-Raphson puede resolver. La exposición de este método y el de shooting están basados en la que hacen Press, Teukolsky, Vetterling y Flannery en Numerical Methods [40].

Sea \mathbf{x} el vector N -dimensional (columna) con los valores

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Dado un \mathbf{x} inicial arbitrario dado por nosotros, queremos dar un paso $\delta\mathbf{x}$ que me aproxime el vector \mathbf{x} a un valor cercano a la raíz donde tentativamente

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx 0.$$

Por ello hacemos una expansión de F_i alrededor de \mathbf{x} :

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N J_{ij} \delta x_j + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{x}|^2). \quad (2.81)$$

Donde J es la matriz jacobiana

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (2.82)$$

Quedándonos a orden $\mathbf{O}(|\delta\mathbf{x}|^2)$ y con $F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$ obtenemos en notación matricial con definiciones similares a (2.80):

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}, \quad (2.83)$$

por lo que despejando $\delta\mathbf{x}$ invirtiendo a matriz Jacobiana, la corrección sobre el vector \mathbf{x} está dada por la iteración:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}. \quad (2.84)$$

Etiquetando el paso actual con n y la iteración siguiente con $n + 1$:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_n) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_n). \quad (2.85)$$

En una dimensión la fórmula de iteración en Newton-Raphson es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.86)$$

donde $i = 1$, $F_1 = f$ y la prima significa derivada respecto a x . Sea r una raíz de $f(x)$. Dado un valor x_n cercano a r , la expansión en serie de Taylor de $f(r)$ alrededor de x_n y truncada a segundo orden es

$$f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(r - x_n)^2 = 0. \quad (2.87)$$

Sustituyendo (2.86) y reacomodando términos

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2. \quad (2.88)$$

El valor x_n difiere de la raíz r por una cantidad $\epsilon_n = r - x_n$, mientras que la siguiente iteración x_{n+1} difiere de r por una cantidad (en principio de menor magnitud), $\epsilon_{n+1} = r - x_{n+1}$. Tomando valores absolutos sobre (2.88), tenemos

$$|\epsilon_{n+1}| = -\left|\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\right|\epsilon_n^2. \quad (2.89)$$

Esto quiere decir que la convergencia del método iterativo de Newton-Raphson es cuadrática. Por lo tanto es un método de convergencia rápida, y lo convierte en una herramienta poderosa, incluso aplicable para cálculos de raíces rápidos hechos a mano.

A diferencia de algunos otros, el método de Newton requiere proporcionar los valores de las derivadas de las funciones en el punto \mathbf{x}_n . Si es el caso, estas derivadas tendrán que calcularse numéricamente, por ejemplo aquellas en la matriz jacobiana (2.83);

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{F_i(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots) - F_i(x_1, \dots, x_j, \dots)}{\Delta x_j}. \quad (2.90)$$

Shooting El método de integración a una ecuación diferencial dado en (2.68), es directo si condiciones sobre las funciones y_i en x_0 son indicadas. Estas pueden ser directamente el conjunto de N valores $f_i(x_0)$, o alguna relación entre estos mismos. Sin embargo las N condiciones de frontera sobre las funciones y_i podrían darse sobre puntos diferentes, digamos sobre x_0 y x_f .

Si existen n_0 condiciones en el punto x_0 y n_f sobre x_f , entonces debe suceder que $N = n_0 + n_f$. Por otro lado, estas condiciones de frontera en el caso más general pueden darse como relaciones entre las funciones y_i en cada uno de los puntos, por tanto supongamos que se satisface

$$B_j^0(x_0, y_1(x_0), \dots, y_N(x_0)) = 0 \quad j = 1, \dots, n_0, \quad (2.91)$$

$$B_j^f(x_f, y_1(x_f), \dots, y_N(x_f)) = 0 \quad k = 1, \dots, n_f. \quad (2.92)$$

La necesidad de N valores iniciales para proceder con la integración (por ejemplo con el Runge-Kutta), implica que un total de n_f condiciones sobre x_0 permanecen libres para ser variadas y recuperar $\mathbf{B}^0 = 0$ y $\mathbf{B}^f = 0$. Colocamos tales condiciones libres en un vector n_f -dimensional \mathbf{V} , que de nuevo podría incluir relaciones tan simples como especificaciones de las $y_k(x_0)$, o relaciones entre ellas.

Para un \mathbf{V} dado, podemos evolucionar las ecuaciones y obtener el conjunto de valores $y_i(x_f)$, siempre y cuando asumamos que la integración no terminó en algún punto singular o se enfrentó algún otro problema en el camino. Existirán por tanto N funciones de n_f incógnitas, dadas por los valores de y_i en el punto x_f tras cada integración

$$y_i(x_f; \mathbf{V}).$$

El problema de valores a la frontera en dos puntos estará resuelto cuando $B_j^f(x_f, y_i(x_f; \mathbf{V}))$ sea idéntico a cero, satisfaciendo (2.92).

Esto se traduce a encontrar los ceros para la función

$$F_k = B_k^f(x_f, y_i(x_f; \mathbf{V})). \quad (2.93)$$

En el espacio vectorial de n_f dimensiones, generado por \mathbf{V} . El método de Newton-Raphson indica

$$\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{V}_n) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{V}_n). \quad (2.94)$$

En donde \mathbf{J} es la matriz $J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j}$, calculada a partir de las derivadas numéricas (2.90). A este procedimiento se le denomina *shooting*, pues se entiende en términos de una estimación inicial en el método de Newton, que a nuestro caso se traduce en dar un conjunto de valores iniciales, luego “disparar” y ver si le hemos dado a las condiciones de frontera del otro lado.

En total un paso del shooting requiere la integración de N ecuaciones diferenciales $n_f + 1$ veces. Esto es así pues es necesario calcular las n_f derivadas

$$\frac{\partial F_i}{\partial V_j} = \frac{F_i(V_1, \dots, V_j + \Delta V_j, \dots) - F_i(V_1, \dots, V_j, \dots)}{\Delta V_j},$$

que requiere cada una, de una integración completa debido la existencia del término $F_i(V_1, \dots, V_j + \Delta V_j, \dots)$. Mientras que $F_i(V_1, \dots, V_j, \dots)$ requerirá de otra integración más. Si después de \mathcal{N} pasos de shooting se llega a la solución (salvo el error permitido por el método de Newton), entonces un total de

$$\mathcal{N}(n_f + 1)N \quad (2.95)$$

integraciones de ecuaciones diferenciales ordinarias serán requeridas, $\mathcal{N}(n_f + 1)$ veces más que integrar una ecuación diferencial con puros valores iniciales.

Capítulo 3

Límite de Campo Débil

3.1. Método General para la obtención del sistema no-Relativista (Schrödinger-Poisson)

Dentro del estudio de Estrellas de Bosones es conocido que las ecuaciones que rigen al campo escalar complejo autogravitante tienen su contraparte newtoniana. A aquellas configuraciones de equilibrio que son bien descritas por esta aproximación, se les denomina estrellas de bosones newtonianas. Existen criterios conocidos para saber si este límite de campo débil describe bien a la estrella, por ejemplo, un criterio usado en la práctica sobre la amplitud del campo escalar en el centro de la estrella indica que aquellas que tengan un valor muy pequeño de éste serán newtonianas. Un segundo ejemplo, que es en el que nos enfocaremos en este trabajo es la condición sobre la cercanía de la frecuencia ω de oscilación del campo a la frecuencia natural del campo escalar que impone el parámetro μ . Las estrellas de bosones rotantes requieren en algunas situaciones proponer una distribución del campo, que les permita hacer converger a la solución esperada, ésta distribución de prueba es usualmente obtenida de una estrella newtoniana, en la cual por ejemplo los autores en [41] utilizan el criterio mencionado sobre ω y μ . De manera similar uno de los primeros trabajos en estrellas de bosones rotantes [42], utiliza este criterio para demostrar que sus soluciones no caen en el régimen newtoniano.

En este capítulo construiremos las condiciones generales en las que esta reducción, denominada “de campo débil”¹ puede realizarse, así como la forma que toman las ecuaciones ahí. En el siguiente capítulo veremos que para campos escalares masivos (μ) cuya dependencia en el tiempo sea armónica (con frecuencia angular ω), estas condiciones se reducen a un sólo requisito:

$$\omega \sim \mu. \tag{3.1}$$

El límite de campo débil del sistema Einstein-Klein-Gordon se obtiene al asumir dos cosas:

¹aquí por campo nos referimos al campo gravitacional.

1. Las velocidades características son mucho menores a c .
2. El potencial gravitacional es débil. Es decir, mucho menor a c^2 .

En los textos de relatividad general [26, 43, 21] comúnmente se discute la reducción a las ecuaciones gravitacionales newtonianas a partir de una aproximación de las ecuaciones de Einstein. En donde el lado izquierdo de

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

se convierte en el laplaciano de una función métrica, que se asocia al potencial gravitacional de la ecuación de Poisson. Mientras que el lado derecho se argumenta que como la densidad de energía es mayor a la densidad de momento y a las componentes del tensor de esfuerzos, entonces la única ecuación que prevalece es la que involucra a T_{00} .

En el caso en el que el lado derecho de la ecuación esté representado por el tensor de energía-momento de un campo escalar, surgen dos preguntas: ¿A qué corresponde el término T_{00} ? y ¿Cuáles son las suposiciones que hay que hacer sobre el campo escalar (mejor dicho sus derivadas) para que el argumento del formalismo post-newtoniano sea válido y obtengamos la ecuación de Poisson para el caso de un campo escalar?

Para responder esto presentamos un cálculo detallado y subrayando las suposiciones de por medio de las ecuaciones de campo débil para el campo escalar, para ello tomamos como base el procedimiento estándar, aunque sintético en [44, 45], primero calculando la parte izquierda de la ecuación de Einstein $G_{\mu\nu}$ y posteriormente sobre $T_{\mu\nu}$, para este lado impondremos las condiciones del desarrollo postnewtoniano a un campo masivo y con dependencia armónica en el tiempo. La consecuencia directa de estas suposiciones, nos llevará a la ecuación de Poisson y en un segundo momento la ecuación de Shrödinger. Este último procedimiento para el lado derecho del campo luego podrá aplicarse a distintos problemas que involucren campos escalares, con distintos potenciales, con distintos signos frente al término cinético, etc.

3.2. Tensor de Einstein

Asumiendo un campo gravitacional débil, implica por medio de la relatividad general a una curvatura pequeña respecto a la plana, y por lo tanto una métrica cercana a la de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

donde

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\epsilon) \ll 1 \quad \text{y} \quad \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (3.4)$$

es decir, desviaciones alrededor de la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas.

Ahora bien, la física en el espacio de Minkowski está descrita en términos de cantidades tensoriales que transforman de acuerdo a las transformaciones de Lorentz Λ_{μ}^{ν} . La métrica

$g_{\mu\nu}$ puede interpretarse como una desviación entonces, de la relatividad especial debida a un campo tensorial $h_{\mu\nu}$, ya que este transforma también con Λ_{μ}^{ν} :

$$\begin{aligned} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\mu}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\nu}g_{\mu\nu} \\ &= \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\mu}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\nu}\eta_{\mu\nu} + \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\mu}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\nu}h_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Y como $\Lambda_{\bar{\alpha}}^{\mu}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\nu}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ por definición de transformada de Lorentz, entonces:

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \quad (3.5)$$

si

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda_{\bar{\alpha}}^{\mu}\Lambda_{\bar{\beta}}^{\nu}h_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

que es lo que queríamos ver. El resto de campos tensoriales se verán modificados por existencia de h no cero. Podemos interpretar entonces que tenemos un espacio-tiempo plano de fondo, y por tanto utilizando a η para subir y bajar índices. Entonces, por ejemplo se pueden definir $h_{\beta}^{\mu} = \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}$ y $h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}$. Donde $\eta^{\mu\nu}$ es directamente el inverso de $\eta_{\mu\nu}$ (no $g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\eta_{\alpha\beta}$).

Lo anterior es una justificación física a la convención de subir y bajar índices con η en lugar de con la métrica completa g , ambas consistentes entre sí hasta orden $\mathcal{O}(\epsilon)$, como se muestra algebraicamente:

$$\begin{aligned} (\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})(\eta_{\nu\alpha} + h_{\nu\alpha}) &= \delta_{\alpha}^{\mu} + \eta^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} - h^{\mu\nu}\eta_{\nu\alpha} - h^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} + (g^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})h_{\nu\alpha} - (g_{\nu\alpha} - h_{\nu\alpha})h^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} + h_{\alpha}^{\mu} - h_{\alpha}^{\mu} - h^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} + h^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} - h^{\mu\nu}h_{\nu\alpha} \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Identificamos

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.8)$$

Esto quiere decir que a campos de orden ϵ sobre los que se aplica η en lugar de g , solamente se obtienen correcciones de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (recordar que $h^{\mu\nu}$ es de orden $\mathcal{O}(\epsilon)$). Ahora podemos proceder a calcular el tensor de Einstein en esta aproximación, para ello, los símbolos de Christoffel estarán dados por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\mu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En donde hemos asumido que $\partial_{\gamma}h_{\alpha\beta} = \mathcal{O}(\epsilon)$, que es plausible dado el orden de $h_{\mu\nu}$.

El tensor de Riemann resulta en

$$\begin{aligned}
R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} &= \partial_{\mu}\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu}\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} \\
&= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}(\partial_{\beta}\partial_{\nu}h_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h_{\beta\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\beta\mu}) + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\rho\nu} + \\
&\quad + \partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\beta\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\beta\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\rho\nu} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}h_{\rho\mu} + \partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\beta\mu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Contrayéndolo

$$R_{\beta\nu} = R_{\beta\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(\partial_{\beta}\partial_{\mu}h_{\nu}^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\mu}h_{\beta\nu} - \partial_{\beta}\partial_{\nu}h_{\mu}^{\mu} + \partial^{\mu}\partial_{\nu}h_{\beta\mu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.11}$$

Y volviendo a contraer

$$R = R_{\nu}^{\nu} = (\partial^{\mu}\partial^{\nu}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\mu}h_{\nu}^{\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.12}$$

Finalmente

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R. \tag{3.13}$$

Definiendo la traza $h = h_{\alpha}^{\alpha}$ y expresado en términos del tensor

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{3.14}$$

tendremos

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^{\alpha}\partial_{\mu}\bar{h}_{\nu\alpha} + \partial^{\alpha}\partial_{\nu}\bar{h}_{\mu\alpha} - \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}\bar{h}_{\alpha\beta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.15}$$

Ahora, aprovechando la libertad de norma, este resultado puede simplificarse:

Considerando $|\partial_{\nu}\xi^{\mu}| = \mathcal{O}(\epsilon)$ y la transformación

$$x^{\bar{\mu}} = x^{\mu} + \xi^{\mu}, \tag{3.16}$$

cuya matriz jacobiana y su inversa están dadas por

$$\Lambda_{\nu}^{\bar{\mu}} = \delta_{\nu}^{\bar{\mu}} + \partial_{\nu}\xi^{\bar{\mu}} \quad \Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu} = \delta_{\bar{\mu}}^{\nu} - \partial_{\bar{\mu}}\xi^{\nu}. \tag{3.17}$$

La obtención de $\Lambda_{\bar{\mu}}^{\nu}$ es similar a la obtención de $g^{\mu\nu}$ en (3.7). Bajo Λ , la métrica se transforma en $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}}\xi_{\bar{\mu}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Es decir que $h_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = h_{\mu\nu} - \partial_{\bar{\mu}}\xi_{\bar{\nu}} - \partial_{\bar{\nu}}\xi_{\bar{\mu}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ o bien

$\bar{h}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. La libertad de norma aquí nos permite imponer la relación

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\beta = \partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta}. \quad (3.18)$$

Bajo esta elección particular de norma, llamada norma de Lorentz, la divergencia del inverso del tensor \bar{h} transforma de acuerdo a

$$\partial_\nu \bar{h}^{\bar{\nu}\bar{\mu}} = \partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu} - \partial_\nu \partial^\nu \xi^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.19)$$

Esto quiere decir que eligiendo (3.18) implica de acuerdo a (3.19) que al estar en las coordenadas transformadas (quito las barras sobre las coordenadas):

$$\partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu} = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.20)$$

Norma en la cual (3.15) toma la forma simple:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.21)$$

3.3. Tensor de Energía-Momento

Usualmente al momento de considerar el límite de campo débil, se hace referencia al tensor de energía-momento un fluido perfecto, donde se conoce que una configuración no-relativista corresponde a aquella en la que la velocidad media de las partículas que componen al fluido, es pequeña comparada con c . Esto equivale a pedir que la presión sea mucho menor que la densidad multiplicada por c^2 en el fluido.

Si no nos referimos a ningún tipo de materia en particular, entonces es usual pedir que las densidades de momento sean menores a las densidades de energía, y aún mucho más chicos los esfuerzos. Estas condiciones son equivalentes a las mencionadas en el párrafo anterior cuando se considera un fluido perfecto y también como veremos, son las que para el caso de un campo escalar, nos llevan a las ecuaciones no-relativistas que cabe esperar de esta clase de materia, es decir las ecuaciones de Schrödinger-Poisson.

Las partículas, los campos, los fluidos, etc. en relatividad general son descritos por el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. Y está definido de la siguiente forma:

Un observador con cuadrivelocidad

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (3.22)$$

medirá las siguientes cantidades [21]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}T_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta &= \text{densidad de energía (densidad de masa relativista} \times c^2), \\
-\frac{1}{c^2}T_{\alpha\beta}u^\alpha r^\beta &= \text{densidad de momento en la dirección de } r, \\
T_{\alpha\beta}r^\alpha s^\beta &= \text{componente } r - s \text{ del tensor de esfuerzos;}
\end{aligned}
\tag{3.23}$$

donde r^α y s^α son vectores ortogonales a la cuadrivelocidad. Un observador mediría (en el marco de referencia en el que se encuentra en reposo) las componentes del tensor dadas al sustituir $u^\alpha = \sqrt{-c^2/g_{00}}\delta_0^\alpha$ en las ecuaciones (3.23). La normalización de la cuadrivelocidad $u^\mu u_\mu = -c^2$ se ha utilizado junto con la elección de coordenadas $x^\alpha = (ct, x, y, z)$. Ahí elegimos a r y s como los vectores unitarios tipo espacio de la base, es decir $e_i^\alpha = \sqrt{1/g_{ii}}\delta_i^\alpha$. De manera que:

$$\rho = \frac{u^\alpha u^\beta}{c^4}T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c^2 g_{00}}T_{00}, \tag{3.24}$$

$$\Pi^i = -\frac{u^\alpha e_i^\beta}{c^2}T_{\alpha\beta} = -\sqrt{-\frac{1}{c^2 g_{00} g_{ii}}}T_{0i}, \tag{3.25}$$

$$\sigma_{ij} = e_i^\alpha e_j^\beta T_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{1}{g_{ii} g_{jj}}}T_{ij}; \tag{3.26}$$

no hay suma sobre i ni j . Donde ρ es la densidad de masa, Π^i es la componente i del vector de densidad de momento y σ_{ij} el tensor de esfuerzos.

Cuando la gravedad es débil, la densidad de momento será más pequeña comparada con la densidad de masa [21] y las componentes del tensor de esfuerzos aún más chicas que la densidad de masa. Cuantificamos el orden de estas aproximaciones en términos de un cierto parámetro ζ de la manera en la que se describe a continuación:

Recordando la definición de la notación \mathcal{O} que se dió en 2.4: Se dirá que una cantidad ϑ es de orden p si para cada $\varepsilon > 0$ existe una δ tal que

$$|\vartheta| < \varepsilon \zeta^p$$

para todo $0 < \zeta < \delta$.

Simbólicamente esto se escribirá

$$\vartheta = \mathcal{O}(\zeta^p). \tag{3.27}$$

Elegimos $\vartheta = \Pi^i/\rho c$ e imponemos que estas tres fracciones sean de orden $1/2$, $p = 1/2$. Es decir, elegimos los momentos lineales de orden $1/2$ más chicos que las densidades de energía. También elegimos las componentes del tensor de esfuerzos otro medio orden aún más chicos

$$\frac{\Pi^i}{\rho c} = \mathcal{O}(\zeta^{1/2}), \quad (3.28)$$

$$\frac{\sigma_{ij}}{\rho c^2} = \mathcal{O}(\zeta). \quad (3.29)$$

Estas son las condiciones utilizadas habitualmente en una aproximación no-relativista.

Sobre $T_{\mu\nu}$ estas condiciones implican por medio de (3.24-3.26)

$$\frac{T_{0i}}{T_{00}} = \sqrt{-\frac{g_{ii}}{g_{00}}} \mathcal{O}(\zeta^{1/2}) = \mathcal{O}(\zeta^{1/2}), \quad (3.30)$$

$$\frac{T_{ij}}{T_{00}} = \sqrt{\frac{g_{ii}g_{jj}}{g_{00}^2}} \mathcal{O}(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta). \quad (3.31)$$

Ahora, notemos que el orden $\mathcal{O}(\epsilon)$ de los términos $h_{\mu\nu}$ en (3.3) corresponde al mismo que el orden del cociente $\frac{v^2}{c^2}$, donde v es la velocidad de una partícula de prueba en el campo gravitacional. Esto se debe a que esperamos que el potencial newtoniano salga de $h_{\mu\nu}$, donde de acuerdo a la comparación con la gravitación newtoniana:

$$V \sim h_{\mu\nu} \rightarrow V = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.32)$$

Es decir que en este límite los órdenes de magnitud del potencial pueden tomarse de la ley de gravitación de Newton, en la cual el potencial es de orden $V \sim \frac{GM}{R} \sim v^2 \sim \mathcal{O}(\zeta)$. Cabe esperar que las velocidades de las fuentes no superen las velocidades de las partículas sujetas al campo gravitacional, por lo que

$$\mathcal{O}(\epsilon) = \mathcal{O}(\zeta). \quad (3.33)$$

Por lo tanto las ecuaciones (3.30) y (3.31) impondrán un orden de magnitud sobre (3.21) a través de las ecuaciones $-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$:

$$\frac{\bar{h}_{0i}}{\bar{h}_{00}} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (3.34)$$

$$\frac{\bar{h}_{ij}}{\bar{h}_{00}} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.35)$$

Por lo que la contribución más relevante vendrá de la ecuación para \bar{h}_{00} :

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00}. \quad (3.36)$$

Tomando la traza de (3.14) es directo probar que $\bar{h} = h$. A su vez dado que $\bar{h}_{ii} \sim \mathcal{O}(\epsilon)\bar{h}_{00}$, \bar{h} queda determinado a orden ϵ por \bar{h}_{00} :

$$\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = -\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.37)$$

Entonces, de la definición de $\bar{h}_{\mu\nu}$ se lee

$$\begin{aligned} h_{00} &= \bar{h}_{00} + \frac{1}{2}\eta_{00}h = \bar{h}_{00} + \frac{1}{2}\bar{h} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ h_{ii} &= \bar{h}_{ii} + \frac{1}{2}\eta_{ii}h = \bar{h}_{ii} - \frac{1}{2}\bar{h} = \bar{h}_{ii} + \frac{1}{2}\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.38)$$

sin suma en i . Del mismo modo puede mostrarse que $h_{ij} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ con $i \neq j$. y $h_{0i} = \mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$.

Se concluye entonces que los únicos elementos no cero a este orden son²

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{1}{2}\bar{h}_{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.39)$$

Hemos elegido la norma armónica, por lo que las ecuaciones (3.20) y (3.36) deben satisfacerse simultáneamente. En particular la primera toma la forma³

$$\begin{aligned} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) &= \partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = \partial_\nu h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu h \\ &= \frac{1}{2}\delta^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{h}^{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\nu \bar{h}^{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\nu \bar{h}^{00}(\delta^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \delta^{0\mu}\delta^{0\nu}\partial_\nu \bar{h}^{00} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.40)$$

La única ecuación no trivial ($\mu = 0$) da la condición

$$\partial_0 \bar{h}^{00} = 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.41)$$

Mientras que $\partial_i \bar{h}^{00} = \mathcal{O}(\epsilon)$, pues este es el orden de h . De aquí se obtiene que en la norma armónica se satisface:

²Esta igualdad formalmente debería escribirse de forma desplegada, pues $h_{00} \neq h_{11}$, sino $h_{00} = h_{11} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

³En este cálculo asumimos que $h_{0i} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Más adelante mantendremos solamente términos de orden ϵ en las ecuaciones por lo que es indiferente tomar o no en cuenta esta suposición. Para métricas que de antemano sepamos que sean diagonales, esta suposición es gratuita.

$$\frac{\partial_0^2 \bar{h}^{00}}{\partial_i \partial_j \bar{h}^{00}} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.42)$$

Esto implica que en el D'Alembertiano sobre \bar{h}^{00} solamente sobrevivirá el término de ∇^2 , esto reduce a las ecuaciones de Einstein al *despreciar* términos de orden mayor a $\mathcal{O}(\epsilon)$ en:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (3.43)$$

Al orden más bajo, la ecuación (3.24) implica que T_{00} podrá sustituirse por c^2 veces la densidad ρ . Luego definiendo

$$V = -\frac{c^2 \bar{h}_{00}}{4}. \quad (3.44)$$

Tenemos la ecuación que por su forma y por su analogía con la ley de gravitación de Newton es nombrada ecuación de Poisson:

$$\boxed{\nabla^2 V = 4\pi G \rho}. \quad (3.45)$$

A este orden la métrica (3.3) es

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (3.46)$$

3.4. Ecuación de Schrödinger

El campo escalar Φ satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\square - \frac{dU}{d|\Phi|^2}\right) \Phi = 0, \quad (3.47)$$

mientras que por otro lado el objeto matemático que aparece en la ecuación de Schrödinger es la función de onda Ψ . En el espacio plano la expresión para la energía $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ al realizar las sustituciones canónicas de la mecánica cuántica se transforma en la ecuación de Klein-Gordon. La energía también tiene su expresión relativista de la cual obviamente tras una sustitución canónica permite obtener la ecuación de Schrödinger; la relación existente entre el campo de la ecuación relativista y la función de onda es

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\mu ct} \Psi(t, \mathbf{x}). \quad (3.48)$$

Donde $\mu = \frac{mc}{\hbar}$ es el mismo μ que define el término cuadrático del potencial de campo escalar, es decir el término de masa.

Sustituyendo este ansatz en la ecuación de Klein-Gordon (en el espacio plano), se obtiene la ecuación de Schrödinger al despreciar el término de segunda derivada temporal de Ψ o bien:

$$\frac{\nabla^2 \Psi}{\mu^2 \Psi} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial_0 \Psi}{\mu \Psi} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial_0^2 \Psi}{\mu^2 \Psi} = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.51)$$

Extendiendo estas condiciones al espacio curvo y aplicando adicionalmente la aproximación de campo débil, se obtiene la ecuación de Schrödinger también.

En el límite de campo débil en donde $\sqrt{-g} = 1 - \frac{2V}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, la ecuación de Klein-Gordon es:

$$\begin{aligned} (\square - \mu^2)\Phi &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2V}{c^2}} \left[-\partial_0 \left(\partial_0 \Phi \frac{1 - \frac{2V}{c^2}}{1 + \frac{2V}{c^2}} \right) + \sum_{i=1}^3 \partial_i \left(\partial_i \Phi \frac{1 - \frac{2V}{c^2}}{1 - \frac{2V}{c^2}} \right) \right] - \frac{dV}{d|\Phi|^2} \Phi + \mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi) \\ &= -\frac{1 - \frac{4V}{c^2}}{1 - \frac{2V}{c^2}} \partial_0^2 \Phi - \frac{4\partial_0 V \partial_0 \Phi}{c^2 (1 - \frac{2V}{c^2})} + \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) \nabla^2 \Phi - \frac{dU}{d|\Phi|^2} \Phi + \mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (3.52)$$

El segundo término de la última igualdad también ya es de orden $\mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi)$, debido a la condición $\partial_0 V = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ como se mostró en la ecuación (3.41).

Tomemos la función de onda Ψ definida en (3.48), obteniendo

$$\left[-\left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (\partial_0^2 \Psi - \mu^2 \Psi - 2i\mu^2 \partial_0 \Psi) + \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) \nabla^2 \Psi - \frac{dU(|\Psi|^2)}{d|\Psi|^2} \Psi \right] e^{i\mu x^0} = \mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi). \quad (3.53)$$

Las condiciones de la aproximación newtoniana (3.49), (3.50) y (3.51) de Ψ aplicadas sobre la ecuación anterior y manteniendo solamente términos de orden $\mathcal{O}(\epsilon)$, obtenemos

$$2i\mu \partial_0 \Psi + \nabla^2 \Psi - 2\mu^2 \frac{V}{c^2} \Psi = \left[\frac{dU(|\Psi|^2)}{d|\Psi|^2} - \mu^2 \right] \Psi. \quad (3.54)$$

Ahora imponemos

$$\frac{dU(|\Psi|^2)}{d|\Psi|^2} - \mu^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (3.55)$$

lo cual será idénticamente cero para el caso de campo libre, $U = \mu^2|\Phi|^2$. Entonces sustituyendo μ y multiplicando por $\frac{\hbar^2}{2m}$ se obtiene de forma más sugestiva de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\partial_t\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + mV\Psi. \quad (3.56)$$

Es importante notar que las ecuaciones (3.50) y (3.51) podrían provenir de una misma condición, si el campo fuera armónico, es decir con dependencia temporal asociada a la función $e^{i\omega x^0}$. Mientras que (3.49) sería independiente de esta, sin embargo nótese que

$$\frac{\nabla^2\Psi}{\mu^2\Psi} = \frac{\nabla^2\Phi}{\mu^2\Phi}. \quad (3.57)$$

Resumiendo, tenemos que en el límite newtoniano se debe satisfacer las siguientes propiedades independientes:

$$h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\epsilon), \quad (3.58)$$

$$\partial_\gamma h_{\mu\nu} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.59)$$

Mientras que Φ debe ser tal que se cumpla

$$\frac{T_{0i}}{T_{00}} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (3.60)$$

$$\frac{T_{ij}}{T_{00}} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (3.61)$$

Estas cuatro condiciones son suficientes para obtener la ecuación de **Poisson**.

Ahora, si las condiciones (3.49), (3.50) y (3.51) no se siguen automáticamente, entonces habrá que imponerlas a parte para obtener una ecuación tipo **Schrödinger**. Adicionalmente habrá que revisar la condición

$$\frac{dU(|\Phi|^2)}{d|\Phi|^2} - \mu^2 = \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.62)$$

3.4.1. Comentarios Sobre la Función de Onda

Consideremos el caso de un campo escalar con término de masa μ^2 en el potencial y tomemos

$$\Phi(t, r) = e^{-i\varpi t} \Psi(t, r). \quad (3.63)$$

Cabe esperar que el campo oscile con una frecuencia inversa al tiempo característico del campo, el cual a su vez es función de la longitud de Compton r_ϕ . Mientras que la evolución del sistema mostrará su evolución en cantidades del orden del tiempo característico del sistema.

$$\varpi = \frac{1}{T_\phi} = \frac{c}{r_\phi} = c\mu. \quad (3.64)$$

Por otro lado, cambios apreciables a lo largo del tiempo en el sistema se darán en \hat{t} unidades del tiempo característico T_0 :

$$t = T_0 \hat{t} = \frac{R_0}{q_0} \hat{t}. \quad (3.65)$$

Donde R_0 y q_0 son la distancia y velocidad característica del sistema respectivamente.

Entonces

$$\varpi t = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_0}{r_\phi} \right) \hat{t} = A \hat{t},$$

con

$$A = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_0}{r_\phi} \right).$$

Con $\sigma = q_0/c$, y recordemos que esta cantidad se liga con el parámetro ϵ de las secciones anteriores de la manera $\sigma^2 \sim \epsilon$.

Al considerar la métrica en el caso de campo débil en simetría esférica $ds^2 = -(1 - h_{00})dx^{02} + (1 + h_{rr})dr^2 + r^2 d\Omega^2$ en la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square - \mu^2)\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi. \quad (3.66)$$

Al sustituir (3.63), realizar las derivadas respecto a \hat{t} y $\hat{r} = r/R_0$ y quedarse a orden $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$, la ecuación se reducirá a la ecuación de Schrödinger. En el proceso se eliminan el término de la segunda derivada temporal de la función de onda pues es de orden $\sigma^2 \sim \epsilon$.

Esto es un razonamiento alternativo para obtener la ecuación de Schrödinger, obtenida sin mirar las condiciones sobre $T_{\mu\nu}$ y aplicando directamente los requisitos presentados a principio de capítulo: gravedad débil y velocidades bajas.

Luego, regresando a las coordenadas no-adimensionalizadas llegaríamos al mismo resultado que se presenta en el capítulo 4, en donde se ha llegado a la ecuación (3.56) pero por medio del método general de la sección anterior.

Capítulo 4

Estrellas de Bosones

Como se ha descrito en la introducción, existen soluciones al sistema de Einstein-Klein-Gordon que poseen simetría esférica, son regulares en todo punto, asintóticamente planas, estables y que han adquirido importancia en los últimos 40 años [19]. Soluciones estáticas con estas propiedades no son permitidas de acuerdo al teorema de Derrick [46], sin embargo la ecuación de Klein-Gordon permite soluciones estacionarias, donde el campo escalar tiene una dependencia armónica en el tiempo, lo cual implica independencia del tiempo en las funciones métricas (a través de las ecuaciones de Einstein). Estos objetos en equilibrio son conocidas como Estrellas de Bosones [11, 12].

4.1. Estrellas de Bosones en Simetría Esférica

La métrica para un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático se puede escribir de la forma

$$ds^2 = -\alpha^2(r)c^2 dt^2 + \gamma^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.1)$$

lo cual es equivalente a escoger la norma $\nu = 0$ en el elemento de línea (2.53) y tener que las funciones métricas dependan únicamente del radio de área r con

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

Las componentes 00 y rr del tensor de Einstein adimensional (2.28) son

$$\begin{aligned} \hat{G}_{00} &= \frac{\alpha^2}{\hat{r}^2} + 2\frac{\alpha^2}{\hat{r}a^3} \frac{d\gamma}{d\hat{r}} - \frac{\alpha^2}{\hat{r}^2\gamma}, \\ \hat{G}_{rr} &= -\frac{\gamma^2}{\hat{r}^2} + 2\frac{1}{\alpha\hat{r}} \frac{d\alpha}{d\hat{r}} + \frac{1}{\hat{r}^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Consideraremos un potencial escalar de la forma $U = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 |\Phi|^2 = \mu^2 |\Phi|^2$, que define la longitud característica al campo r_ϕ

$$r_\phi = \frac{1}{\mu}. \quad (4.3)$$

De manera que el término

$$\Gamma = \frac{R_0}{r_\phi} \quad (4.4)$$

aparecerá en el tensor de energía-momento adimensional $\hat{T}_{\mu\nu}$ de (2.28):

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\hat{\mu}}\Phi^* \partial_{\hat{\nu}}\Phi + \partial_{\hat{\nu}}\Phi^* \partial_{\hat{\mu}}\Phi) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left[g^{\alpha\beta} \partial_{\hat{\alpha}}\Phi^* \partial_{\hat{\beta}}\Phi + \Gamma^2 |\Phi|^2 \right].$$

Y utilizamos una forma armónica (esféricamente simétrica) con frecuencia ω , justificada anteriormente. La frecuencia ω se denomina frecuencia de la estrella de bosones:

$$\Phi = \Phi(\hat{x}^0, \hat{r}) = e^{-i\omega\hat{x}^0} \phi(\hat{r}). \quad (4.5)$$

En ese caso las componentes 00 y rr del tensor de energía-momento adimensional toman la forma

$$\begin{aligned} \hat{T}_{00} &= \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{r}} \right)^2 + \Gamma^2 \frac{\alpha^2}{2}\phi^2, \\ \hat{T}_{rr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\hat{r}} \right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\phi^2 - \Gamma^2 \frac{\gamma^2}{2}\phi^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Insertando esto junto con (4.2) en las ecuaciones (2.28) tenemos las siguientes dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{\alpha^2}{\hat{r}^2} + 2\frac{\alpha^2}{\hat{r}\gamma^3}\gamma' - \frac{\alpha^2}{\hat{r}^2 a^2} = \frac{1}{2}\omega^2\phi^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\gamma^2}\phi'^2 + \Gamma^2 \frac{\alpha^2}{2}\phi^2. \quad (4.7)$$

$$-\frac{\gamma^2}{\hat{r}^2} + 2\frac{1}{\alpha\hat{r}}\alpha' + \frac{1}{\hat{r}^2} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\phi^2 - \Gamma^2 \frac{\gamma^2}{2}\phi^2. \quad (4.8)$$

En donde hemos escrito

$$\phi' = \frac{\partial\phi}{\partial\hat{r}} \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{d\hat{r}} \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{d\hat{r}}. \quad (4.9)$$

Reordenando al multiplicar por los factores necesarios para que en la primera quede el término γ'/γ y en la segunda α'/α quedan las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1-\gamma^2}{2\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{4} \left[\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right], \\ \frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2-1}{2\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{4} \left[\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 - \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right].\end{aligned}$$

La ecuación para α'/α se puede simplificar un poco más si la reescribimos al identificar el término γ'/γ en ella:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma^2-1}{2\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{4} \left[\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 - \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right] = \frac{\gamma^2-1}{2\hat{r}} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{1-\gamma^2}{2\hat{r}} - \frac{r}{2} \gamma^2 \phi^2 \Gamma^2.$$

Por lo tanto las ecuaciones de Einstein nos llevan a las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1-\gamma^2}{2\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{4} \left[\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right], \\ \frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2-1}{\hat{r}} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\hat{r}}{2} \gamma^2 \phi^2 \Gamma^2.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Mientras tanto, la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Phi = 0.\tag{4.11}$$

Donde el operador \square también es conocido como delambertiano, en la expresión concreta de las derivadas covariantes es

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$$

Ubicamos las componentes no nulas de la métrica (4.1) y su inversa

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -c^2 \alpha^2 & & & \\ & \gamma^2 & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2 \alpha^2} & & & \\ & \frac{1}{\gamma^2} & & \\ & & \frac{1}{r^2} & \\ & & & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.\tag{4.12}$$

Entonces

$$\sqrt{-g} = c\alpha\gamma r^2 \sin \theta.$$

Y asumiendo de una vez $\Phi = \Phi(t, r)$:

$$\begin{aligned} \square\Phi &= \frac{1}{\alpha\gamma r^2 \sin \theta} \left[\partial_t(\alpha\gamma r^2 \sin \theta g^{tt} \partial_t) + \partial_r(\alpha\gamma r^2 \sin \theta g^{rr} \partial_r) \right] \Phi \\ &= -\frac{1}{c^2\alpha^2} \partial_t^2 \Phi(r, t) + \frac{1}{\gamma^2} \partial_r^2 \Phi(r, t) + \frac{2\partial_r \Phi}{\gamma^2 r} + \frac{\partial_r \Phi}{\gamma^2 r} + \frac{\partial_r \Phi}{\gamma^2} \partial_r \alpha - \frac{\partial_r \Phi}{\gamma^3} \partial_r \gamma. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Proponemos el ansatz

$$\Phi(t, r) = e^{-i\Upsilon ct} \phi(r). \quad (4.14)$$

El cual es equivalente a (4.5) con

$$\Upsilon = \frac{\omega}{R_0}.$$

Introduciendo (4.14) en (4.13) la ecuación de Klein-Gordon es

$$\frac{\Upsilon^2}{\alpha^2} \phi + \frac{1}{\gamma^2} \partial_r^2 \phi + \frac{2\partial_r \phi}{\gamma^2 r} + \frac{\partial_r \phi}{\alpha\gamma^2} \partial_r \alpha - \frac{\partial_r \phi}{\gamma^3} \partial_r \gamma - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0. \quad (4.15)$$

Ahora expresemos (4.15) en términos de las coordenadas adimensionales y de ω tenemos

$$\frac{1}{R_0^2} \left\{ \frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi + \frac{1}{\gamma^2} \partial_{\hat{r}}^2 \phi + \frac{2\partial_{\hat{r}} \phi}{\gamma^2 \hat{r}} + \frac{\partial_{\hat{r}} \phi}{\alpha\gamma^2} \partial_{\hat{r}} \alpha - \frac{\partial_{\hat{r}} \phi}{\gamma^3} \partial_{\hat{r}} \gamma - \Gamma^2 \phi \right\} = 0.$$

Es decir tenemos la ecuación diferencial para $\phi = \phi(\hat{r})$

$$\frac{\omega^2}{\alpha^2} \phi + \frac{1}{\gamma^2} \partial_{\hat{r}}^2 \phi + \frac{2\partial_{\hat{r}} \phi}{\gamma^2 \hat{r}} + \frac{\partial_{\hat{r}} \phi}{\alpha\gamma^2} \partial_{\hat{r}} \alpha - \frac{\partial_{\hat{r}} \phi}{\gamma^3} \partial_{\hat{r}} \alpha - \Gamma^2 \phi = 0. \quad (4.16)$$

Despejamos la segunda derivada del ϕ y utilizando la notación para las derivadas en (4.9)

$$\phi'' = \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{\hat{r}} \right) - \omega^2 \phi \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \gamma^2 \phi \Gamma^2. \quad (4.17)$$

Por lo tanto el sistema completo “relativista” está conformado por las tres ecuaciones

$$\begin{aligned}
\phi'' &= \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{\hat{r}} \right) - \omega^2 \phi \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \gamma^2 \phi \Gamma^2, \\
\frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1 - \gamma^2}{2\hat{r}} + \frac{\hat{r}}{4} \left[\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right], \\
\frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2 - 1}{\hat{r}} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\hat{r}}{2} \gamma^2 \phi^2 \Gamma^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

4.2. Límite no-Relativista

El método general presentado en 3.1 para obtener el límite newtoniano del sistema Einstein-Klein-Gordon (EKG) tiene implicaciones sobre los órdenes de magnitud de las componentes del tensor de energía-momento (3.30) y (3.31), estas condiciones deben ser traducidas a requisitos que debe satisfacer el campo escalar en cuestión. Esta aproximación de las ecuaciones en el caso de Estrellas de Bosones se ha hecho en varios lugares [47, 22, 48, 49, 50, 44] de distintas maneras pero todas basadas en los mismos principios de campo débil discutidos en el capítulo anterior.

Calculando T_{00} y T_{ij} para el caso de campo escalar masivo armónico veremos cuales son estas condiciones.

Como fue mostrado en la sección 3.3, el elemento de línea en esta aproximación es

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) dx^\mu dx^\nu. \tag{4.19}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T_{00} &= \frac{\kappa}{2} \left[2\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{00} (g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi^* \partial_\beta \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi) \right] \\
&= \frac{\kappa}{2} \left[\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi - g_{00} \left(\sum_{i=1}^3 g^{ii} \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi^2) \\
&= \frac{\kappa}{2} \left[\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right)^2 \sum_{i=1}^3 \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi + \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) \mu^2 \Phi^* \Phi \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2 \Phi^2) \\
&= \frac{\kappa}{2} \left(\partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi + \sum_{i=1}^3 \partial_i \Phi^* \partial_i \Phi + \mu^2 \Phi^* \Phi \right) + \mathcal{O}(\epsilon \Phi^2).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Y calcando el procedimiento se obtiene

$$T_{ii} = \frac{\kappa}{2} \left(\partial_i \Phi^* \partial_i \Phi + \partial_0 \Phi^* \partial_0 \Phi - \sum_{j \neq 0, i} \partial_j \Phi^* \partial_j \Phi - \mu^2 \Phi^* \Phi \right), \tag{4.21}$$

recordando que no hay suma en i y que $\kappa = \frac{c^4}{8\pi G}$.

Si observamos las expresiones para T_{00} y T_{ii} , la única manera en la que las condiciones no-relativistas (3.30) y (3.31) se pueden satisfacer, de forma general es imponer que

$$\frac{\partial_i \Phi}{\partial_0 \Phi} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (4.22)$$

con lo cual

$$\frac{T_{ii}}{T_{00}} = \frac{|\partial_0 \Phi|^2 - \mu^2 |\Phi|^2 + \mathcal{O}(\epsilon \Phi^2)}{|\partial_0 \Phi|^2 + \mu^2 |\Phi|^2 + \mathcal{O}(\epsilon \Phi^2)}. \quad (4.23)$$

Pero como además tenemos que el campo está en un estado coherente de la forma $\Phi = \phi e^{-i\Upsilon x_0}$, entonces adicionalmente deberemos asumir que

$$\frac{\Upsilon}{\mu} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}), \quad (4.24)$$

con lo que

$$\frac{T_{ii}}{T_{00}} = \frac{\mu^2 \mathcal{O}(\epsilon \Phi^2)}{\mu^2 \mathcal{O}(\Phi^2)} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.25)$$

Por lo tanto en este límite de campo débil

$$T_{00} = \frac{\kappa}{2} (\Upsilon^2 + \mu^2) \Phi^* \Phi = \kappa \mu^2 \Phi^* \Phi. \quad (4.26)$$

Con lo cual la ecuación de Poisson (3.45) para estrellas de bosones queda

$$\nabla^2 V = \frac{c^2}{2} \mu^2 |\Phi|^2. \quad (4.27)$$

En el límite de campo débil en donde $\sqrt{-g} = 1 - \frac{2V}{c^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, la ecuación de Klein-Gordon es:

$$(\square - \mu^2)\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi. \quad (4.28)$$

Que ya hemos mostrado que se reduce a la ecuación

$$i\hbar \partial_t \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + mV \Psi. \quad (4.29)$$

para el potencial escalar $U = \mu^2 |\Phi|^2$.

Puede mostrarse que la condición (4.24) es equivalente a dos de las condiciones sobre Ψ (3.50) y (3.51). Mientras que (3.49) puede mostrarse que es la versión en segunda derivadas de (4.22), aunque en principio independiente de ella:

$$\frac{\partial_i^2 \Phi}{\partial_0^2 \Phi} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.30)$$

Asumimos dependencia armónica en el tiempo, pero sin asumir simetría esférica:

$$\Phi(t, \mathbf{r}) = e^{-i\Upsilon ct} \phi(\mathbf{r}), \quad (4.31)$$

implica que la función de onda también debe tener una dependencia armónica en el tiempo, de hecho de la forma

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-i(\Upsilon - \mu)ct} \phi(\mathbf{r}). \quad (4.32)$$

Esto es un estado estacionario en el sentido de la mecánica cuántica, con eigenvalor de energía definido por

$$E = c\hbar(\Upsilon - \mu). \quad (4.33)$$

De la ecuación (4.24) se puede mostrar que $E = \mathcal{O}(\epsilon)$.

Sustituyendo en (3.56) y dividiendo entre $e^{-i(\Upsilon - \mu)ct}$

$$E\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + mV\phi. \quad (4.34)$$

Que es la llamada ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

Por lo tanto el sistema completo no-relativista está conformado por las dos ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} E\phi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + mV\phi, \\ \nabla^2 V &= \frac{m^2 c^4}{2\hbar^2}\phi^2. \end{aligned}} \quad (4.35)$$

Como ya se dijo anteriormente, las Estrellas de Bosones son soluciones regulares en todo punto a las ecuaciones (4.17) y (4.10). Buscamos que sea un espacio-tiempo plano en infinito. Estas condiciones de frontera, así como las del sistema Schrödinger-Poisson se discutirán en la sección 4.4 y se explicará de qué manera son introducidas al código.

4.3. Escalamiento de las Soluciones

En simetría esférica y con coordenadas \hat{x}^μ , utilizando $\Phi(\hat{r}, \hat{x}^0) = \phi(\hat{r})e^{-i\omega\hat{x}^0}$ sobre la ecuación de Schrödinger (4.34) obtenemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) = \left(\Gamma^2 - \Gamma\omega + \Gamma^2 \frac{V}{c^2} \right) \phi. \quad (4.36)$$

Mientras que la de Poisson (4.27) queda simplemente

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{c^2}{2} \Gamma^2 \phi^2. \quad (4.37)$$

Por comodidad hemos quitado el símbolo de gorro sobre r .

A las ecuaciones (4.36) y (4.37) se le denomina sistema de Schrödinger-Poisson (SP), el cual es la aproximación no-relativista de las ecuaciones EKG (4.10) y (4.17):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1 - \gamma^2}{2r} + \frac{r}{4} \left(\omega^2 \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2 \Gamma^2 \phi^2 \right), \\ \frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2 - 1}{r} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r}{2} \gamma^2 \phi^2 \Gamma^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\phi'' = \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{r} \right) - \omega^2 \phi \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \gamma^2 \phi \Gamma^2. \quad (4.39)$$

Esto bajo la asociación

$$\alpha^2 = 1 + \frac{2V}{c^2}, \quad (4.40)$$

$$\gamma^2 = 1 - \frac{2V}{c^2}; \quad (4.41)$$

en donde hemos desechado los términos $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ que como mostramos en el capítulo 3 aparecen en las desviaciones a la métrica de Minkowski en los coeficientes $h_{\mu\nu} = -2\delta_{\mu\nu}V/c^2$.

Cada uno de los dos sistemas tiene la ventaja de que una vez realizada la integración numérica resultado de la cual obtengamos una solución de estrella de bosones, entonces mediante una transformación lineal en las funciones métricas, campos y coordenadas podemos obtener otras soluciones. Estas transformaciones de escala son útiles en este sentido, pero además son útiles al momento de integrar numéricamente, pues puede reducir uno o varios de los ciclos de iteración, como se explicará en la siguiente sección.

Tanto el sistema EKG como el SP permiten este tipo de reparametrización hacia otras soluciones dadas por las siguientes transformaciones de escala:

Tabla 4.1: Transformaciones de Escala **T1** y **T2**

Einstein-Klein-Gordon			Schrödinger-Poisson			
	Cantidad	Transformación	Parámetro	Cantidad	Transformación	Parámetros
T1	Γ	$a^2\Gamma$	a	Γ	$a^2\Gamma$	a, b
	r	$a^{-2}r$		r	$(ab)^{-1}r$	
	ω	$a^2\omega$		ω	$b^2\omega + \Gamma(a^2 - b^2)$	
				ϕ	$b^2a^{-2}\phi$	
			V	$b^2a^{-2}V$		
T2	α	$d\alpha$	d	V/c^2	$V/c^2 + d$	d
	ω	$d\omega$		ω	$\omega + d\Gamma$	

Aquí la importancia reside en que una vez teniendo alguna solución al sistema SP o EKG, puede mostrarse que estas soluciones al ser aplicadas las transformaciones, también son solución al sistema de SP o EKG. Esto se demuestra sustituyendo las cantidades por sus transformadas, y verificando que las ecuaciones que satisfacen tienen la misma forma:

Para mostrar **T1** en el sistema EKG sustituyo $(\Gamma, r, \omega) \rightarrow (a^2\Gamma, a^{-2}r, a^2\omega)$ en (4.39) y (4.38) extrayendo factores comunes que pueden ser eliminados, como muestran los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} \frac{a^2\gamma'}{\gamma} &= \frac{(1-\gamma^2)a^2}{2r} + \frac{r}{4a^2} \left(a^4\omega^2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\phi^2 + a^4\phi'^2 + \gamma^2a^4\Gamma^2\phi^2 \right) \\ \rightarrow \frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1-\gamma^2}{2r} + \frac{r}{4} \left(\omega^2\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\phi^2 + \phi'^2 + \gamma^2\Gamma^2\phi^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2\alpha'}{\alpha} &= \frac{(\gamma^2-1)a^2}{2r} + \frac{a^2\gamma'}{\gamma} - \frac{r}{2a^2}\gamma^2a^4\Gamma^2\phi^2 \\ \rightarrow \frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2-1}{r} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r}{2}\gamma^2\phi^2\Gamma^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^4\phi'' &= a^2\phi' \left(\frac{a^2\gamma'}{\gamma} - \frac{a^2\alpha'}{\alpha} - \frac{2a^2}{r} \right) - a^4\omega^2\phi\frac{\omega^2}{\alpha^2} + \gamma^2\phi a^4\Gamma^2 \\ \rightarrow \phi'' &= \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{r} \right) - \omega^2\phi\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \gamma^2\phi\Gamma^2. \end{aligned}$$

Mientras que para el sistema SP sustituyo $(\Gamma, r, \omega, \phi, V) \rightarrow (a^2\Gamma, (ab)^{-1}r, b^2\omega + \Gamma(a^2 - b^2), b^2a^{-2}\phi, b^2a^{-2}V)$ en las ecuaciones (4.36) y (4.37), los cálculos se simplifican notando que $\Gamma - \omega \rightarrow b^2(\Gamma - \omega)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[(ab)^2 \frac{d^2 b^2 a^{-2} \phi}{dr^2} + (ab)^2 \frac{2}{r} \frac{db^2 a^{-2} \phi}{dr} \right] &= [a^2 (b^2 (\Gamma^2 - \Gamma\omega)) + a^4 b^2 a^{-2} \Gamma^2 V] b^2 a^{-2} \phi \\
\longrightarrow b^4 \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} \right) &= b^4 \left(\Gamma - \Gamma\omega + \Gamma^2 \frac{V}{c^2} \right) \phi \\
\longrightarrow \phi'' &= \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{r} \right) - \omega^2 \phi \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \gamma^2 \phi \Gamma^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ab)^2 \frac{d^2 b^2 a^{-2} V}{dr^2} + (ab)^2 \frac{2}{r} \frac{db^2 a^{-2} V}{dr} &= \frac{c^2}{2} a^4 (b^2 a^{-2})^2 \Gamma^2 \phi^2 \\
\longrightarrow b^4 \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2b^4}{r} \frac{dV}{dr} &= \frac{c^2}{2} b^4 \Gamma^2 \phi^2 \\
\longrightarrow \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} &= \frac{c^2}{2} \Gamma^2 \phi^2.
\end{aligned}$$

Para demostrar **T2** en el sistema EKG sustituyo $(\alpha, \omega) \rightarrow (d\alpha, d\omega)$ en las ecuaciones (4.39) y (4.38), que por inspección puede verse como los cociente α'/α y ω^2/α^2 son las únicas maneras en las que ω y α entran, por lo que es trivial mostrar que las ecuaciones que satisfacen el nuevo conjunto de variables es también el sistema EKG.

Mientras que la sustitución $(V/c^2, \omega) \rightarrow (V/c^2 + d, \omega + d\Gamma)$ en el sistema SP de las ecuaciones (4.36) y (4.37) deja invariante la segunda de estas trivialmente mientras que en la primera la diferencia

$$-\Gamma\omega + \Gamma^2 \frac{V}{c^2},$$

es la única cantidad que se ve modificada, sin embargo la cancelación de los términos tras la sustitución:

$$(-\Gamma\omega - d\Gamma^2) + \left(\Gamma^2 \frac{V}{c^2} + d\Gamma^2 \right)$$

terminan de mostrar la validez de la transformación **T2**.

4.4. Integración

Para el sistema EKG, (4.17) y (4.10), tenemos que las condiciones a la frontera deben ser tales que las funciones métricas, el campo (γ, α, ϕ) y sus derivadas sean regulares en todo r . Particularmente si queremos que nada diverja en el centro de la estrella ($r = 0$), tendremos que imponer de acuerdo al desarrollo en serie de Taylor al rededor del origen de la ecuación $\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\gamma^2 - 1}{r} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{r}{2} \gamma^2 \phi^2 \Gamma^2$, que

$$\gamma(0) = 1, \quad (4.42)$$

dada la regularidad de las demás funciones.

Al sustituir esto en la expansión para la ecuación $\phi'' = \phi' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{\tilde{r}} \right) - \omega^2 \phi \frac{\gamma^2}{\alpha^2} + a^2 \phi \Gamma^2$ se puede determinar el valor de la derivada del campo en el origen:

$$\phi'(0) = 0. \quad (4.43)$$

Se definen:

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad (4.44)$$

$$\phi(0) = \phi_0. \quad (4.45)$$

La condición de planitud nos indica que debemos elegir la función α tal que a través de la transformación **T2** de la Tabla 4.1, obtengamos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha = 0. \quad (4.46)$$

Además para cumplir con la noción de estrella, esta solución debe ser tal que el campo se vaya a cero

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = 0. \quad (4.47)$$

Por otro lado, las condiciones a la frontera para el sistema SP: (4.37), (4.37), cambian pues en lugar de α y γ , tenemos el potencial newtoniano V con condición inicial

$$V(0) = V_0, \quad (4.48)$$

para el cual, por el mismo análisis se debe satisfacer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0. \quad (4.49)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales EKG o SP hemos utilizado Python. Aplicar las condiciones en infinito, implica un ciclo por cada condición. Por ejemplo para el sistema SP, dados Γ y ω entonces probamos valores iniciales V_0 y ϕ_0 hasta encontrar aquellas raras soluciones que satisfacen (4.49) y (4.47). La técnica para buscar estos valores iniciales es el método shooting descrito en la sección 2.4.

Existe un conjunto discreto de pares de estos valores, cada elemento corresponde a un cierto número de nodos (0, 1, 2, etc). Para entender esto hay que ver cualitativamente las ecuaciones

diferenciales (4.37), (4.37) como en lo hacen en [50, 49]. Para esto vemos que (4.37) es de la forma

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = k(r)\phi. \quad (4.50)$$

Con $k(r) = 2(\Gamma^2 - \Gamma\omega + \Gamma^2V(r))$. La ecuación diferencial con $k(r) = k$ tiene soluciones generales

$$\phi(r) = \begin{cases} A \frac{e^{\sqrt{k}r}}{r} + B \frac{e^{-\sqrt{k}r}}{r} & \text{si } k > 0 \\ A + \frac{B}{r} & \text{si } k = 0 \\ A \frac{\text{sen}(\sqrt{-k}r)}{r} + B \frac{\text{cos}(\sqrt{-k}r)}{r} & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

De manera que si V_0 es lo suficientemente negativo para satisfacer $k(0) < 0$, el comportamiento inicial será oscilatorio. Luego, conforme V se acerca a cero (lo cual está garantizado por la ecuación de poisson (4.37) debido a que cumple con la solución con $k \approx 0$ en la forma (4.51) para r grande), el valor de $k(r)$ crece hasta pasar a ser positivo, en donde ϕ queda suprimido exponencialmente. Sin embargo de las múltiples soluciones que pueden existir, el problema de eigenvalores aparece justo al escoger aquella solución para la cual $A = 0$.

Es importante resaltar que tanto aquí como en la $k(r)$ de la ecuación de Klein-Gordon completa, la condición de planitud asintótica, $k > 0$ para $r \rightarrow \infty$, implica

$$\omega < \Gamma. \quad (4.52)$$

El ajuste del shooting que se hace para V o para α , no se hace simplemente tomando el valor máximo de integración r_{max} , si no que se toma un segmento de estas curvas en su tramo final, y a este se les ajusta la función a la que debe tender asintóticamente V o α . Es hasta este momento donde lemos de los parámetros de la función que ajustó, y hacemos la transformación \mathbf{T}_2 que satisface (4.49) y (4.47).

Por ejemplo de la ecuación de poisson (4.37) vemos que en el tramo final

$$V(r) \approx C + \frac{D}{r}. \quad (4.53)$$

Y usaremos \mathbf{T}_2 para obtener $\tilde{V} = \frac{D}{r}$. En cuanto a α , asintóticamente se satisface $\alpha^2 \approx 1 + \frac{2V}{c^2}$, lo cual implica un comportamiento

$$\alpha \approx E \sqrt{1 + \frac{F}{r}}. \quad (4.54)$$

Usando \mathbf{T}_2 para obtener $\tilde{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{F}{r}}$.

Soluciones Si la frecuencia de oscilación del campo escalar en la estrella de bosones fuera fundamental en el sentido de que el sistema astrofísico que conforma esta estrella oscila en una frecuencia determinada, entonces tendríamos una sola secuencia de soluciones, es decir, soluciones únicas con $i = 0, 1, \dots$ nodos. Este frecuencia verdadera (medible) asociada al campo valdría $\frac{\omega}{\alpha(r)}$.

Aquí no hemos atacado así el problema, sino que consideramos fundamental ϕ_0 y en función a éste, resolvemos el problema de eigenvalores para cada nodo de manera que obtenemos un conjunto ω^i de frecuencias.

En la Figura 4.1 se muestran la solución para 0, 1 y 2 nodos para $\phi(r)$, $\gamma(r)$ y $\alpha(r)$ con densidad central y parámetro de escala

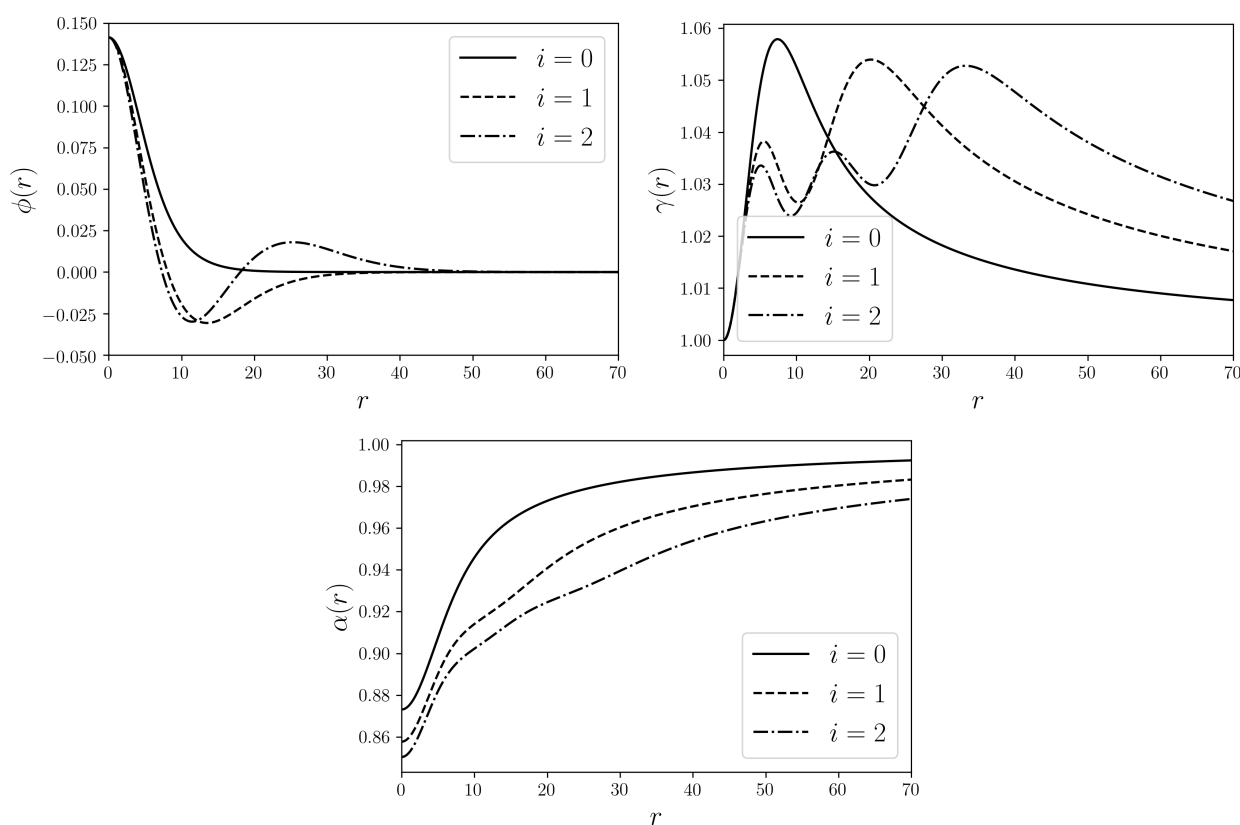
$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{50}}, \quad \Gamma = 1. \quad (4.55)$$

Obteniendo las frecuencias

$$\omega^0 = 0.9366, \quad \omega^1 = 0.9423, \quad \omega^2 = 0.9445. \quad (4.56)$$

Haber escogido $\Gamma = 1$, significa que hemos escogido que las longitudes en las cuales estamos graficando estén en unidades de r_ϕ .

Figura 4.1: Soluciones de $\phi(r)$, $\gamma(r)$ y $\alpha(r)$ con 0, 1 y 2 nodos



Recordar que aquí hemos quitado los gorros a la coordenada r , sin embargo la elección de la escala de distancia en tanto que el parámetro de masa del campo escalar $1/r_\phi$ no está especificado, sigue libre de escogerse.

Una vez que hemos encontrado soluciones para cada i , existe la libertad de cambiar de escala pero de manera limitada. Esto se logra con la transformación **T1** de la tabla 4.1. Por ejemplo al variar el parámetro $\Gamma = \frac{R_0}{r_\phi}$ implicaría un alargamiento o estrechamiento de la gráfica proporcional a éste. Sin embargo la amplitud del campo se mantiene, contrario a lo que sucede en el sistema SP como se verá en la siguiente sección.

4.5. Comparación con las Estrellas de Bosones Newtonianas

El sistema SP al ser una aproximación, debemos escoger un parámetro que permita realizar la comparación con el sistema EKG. Esto se consigue si resolvemos para la misma frecuencia en ambos casos. Esto quiere decir que para poder comparar una de las soluciones obtenidas en la sección anterior con su contraparte no-relativista, debemos obtener las ω^i al obtener los eigenvalores del sistema EKG, e imponerlas en el segundo caso.

La transformación **T2** nos permite escalar a todo el rango de soluciones en SP una vez obtenida alguna de ellas, es decir que una vez integradas las ecuaciones, cualquier otra estrella de bosones newtoniana puede ser construida por reescalamiento. Más específicamente variando los parámetros ω y Γ .

Por ejemplo obtengamos la comparativa con la solución obtenida en 4.1. Esto se logra obteniendo cualquier solución del sistema SP y reescalando posteriormente para obtener una $\Gamma = 1$ y las frecuencias del problema, presentadas en (4.56). Obtenemos la Figura 4.2 que es la comparativa entre el perfil del campo ϕ en la solución completa y la aproximación newtoniana.

Existe una diferencia apreciable en el cálculo del valor inicial del campo ϕ_0 , esta discrepancia nos dará una medida de la validez de la aproximación newtoniana.

Otro aspecto que se puede observar de las gráficas de la Figura 4.2 y que pudimos notar, es que la diferencia $\Delta\phi^2 = \sum(\phi_{\text{SP}} - \phi_{\text{EKG}})^2$, donde ϕ_{SP} es la solución al campo en la aproximación no-relativista, y ϕ_{EKG} su contraparte relativista, crece con el número de nodos. En particular la diferencia entre las dos soluciones en $r = 0$, $\phi_{\text{SP}} - \phi_{\text{EKG}}$ también se acentúa con el número de nodos. Por lo tanto ϕ_0 (ó ω) aunado a i son ambos criterios para establecer lo mucho o poco relativista que es una estrella de bosones.

Las funciones métricas están relacionadas por las ecuaciones (4.40) y (4.41). Por lo que generamos las siguientes gráficas, la primera relacionada a $\gamma(r)$ en la Figuras 4.3 y la otra a $\alpha(r)$ en la Figura 4.4.

Figura 4.2: Comparación con aproximación no-relativista (SP) de $\phi(r)$ para el sistema con las frecuencias de (4.56). Solución con cero y un nodo respectivamente

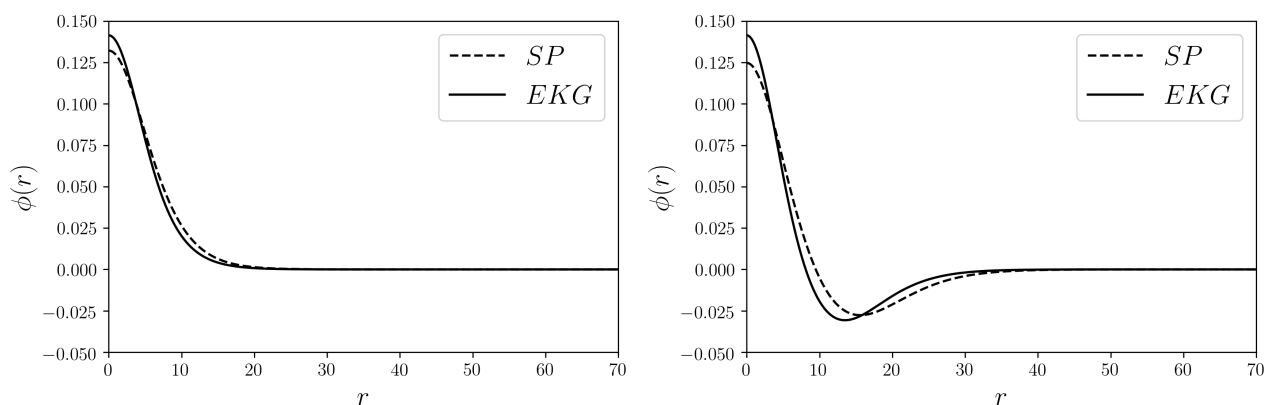


Figura 4.3: Comparación con aproximación no-relativista (SP) de $\gamma(r) \approx 1 - \frac{2V(r)}{c^2}$ para el sistema con las frecuencias de (4.56). Solución con cero y un nodo respectivamente

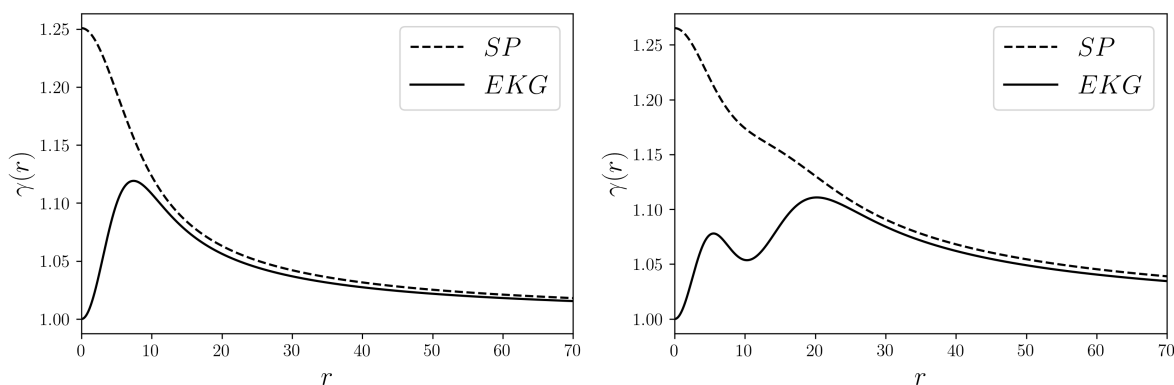
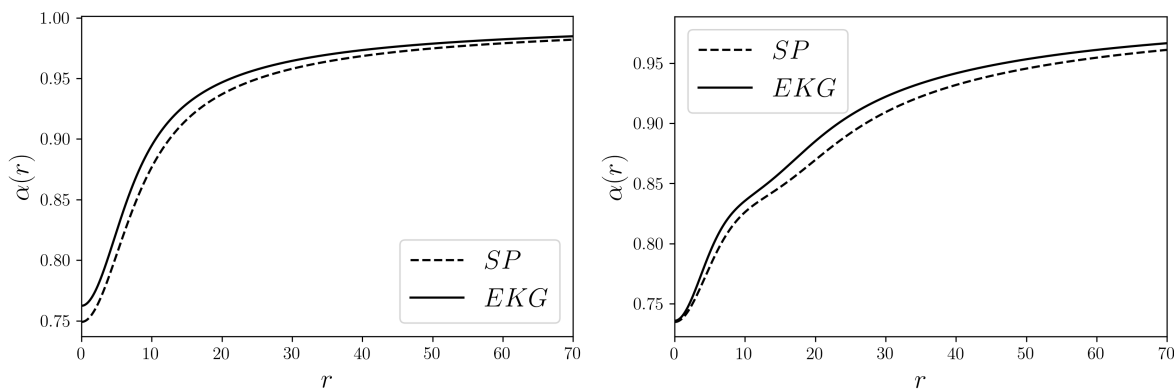


Figura 4.4: Comparación con aproximación no-relativista (SP) de $\alpha(r) \approx 1 + \frac{2V(r)}{c^2}$ para el sistema con las frecuencias de (4.56). Solución con cero y un nodo respectivamente



4.6. Rangos no-Relativistas de Masa

El espacio-tiempo que nos concierne es asintóticamente plano, esto quiere decir¹ que $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ cuando $r \rightarrow \infty$. A grandes rasgos, las simetrías en $r \rightarrow \infty$ implican la conservación de cantidades, las cuales por definición son invariantes de coordenadas. La masa ADM [51] es una de ellas. Por ejemplo en la solución exterior de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.57)$$

cuyo espacio-tiempo es asintóticamente plano, M coincide con la masa ADM, y es interpretada como la masa de aquel objeto esféricamente simétrico en estudio.

La función de masa de Misner-Sharp [52] es utilizada para caracterizar la masa de la estrella de bosones justo porque se aproxima a la masa ADM conforme $r \rightarrow \infty$,

$$M = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r). \quad (4.58)$$

Esta función podemos leerla de la comparación entre (4.1) y (4.57):

$$M(r) = \frac{c^2 r}{2G} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2(r)} \right). \quad (4.59)$$

La integración de las ecuaciones diferenciales que determinan γ es numérica y por tanto existe un valor finito máximo para r . Evaluando $M(r)$ en este punto nos dará el mejor estimado de la masa de la estrella de bosones, sin embargo este r máximo no nos dice nada acerca del radio de la estrella de bosones si es que lo quisiéramos definir. Para resolver esto habitualmente se define un R_{99} , que es aquel r para el cual $M(r)$ es $0.99M$.

En cambio en la referencia [50] prefieren definir un radio R_{oe} , que es el valor de r para el cual ϕ pasa del régimen oscilatorio al decaimiento exponencial, esto se entiende en términos del $k(r)^2$ de la ecuación de Klein-Gordon (o Schrödinger en el caso no-relativista) definido en la sección 4.4. En particular debe suceder que $k(R_{oe}) = 0$, por lo que las ecuaciones para R_{oe} son:

$$\begin{cases} \alpha(R_{oe}) = \frac{\omega}{\Gamma} & \text{(EKG),} \\ V(R_{oe}) = c^2 \left(\frac{\omega}{\Gamma} - 1 \right) & \text{(SP).} \end{cases} \quad (4.60)$$

De aquí en adelante tomaremos las distancias características del sistema como la longitud de Compton definida por el campo, $R_0 = r_\phi$, esto es

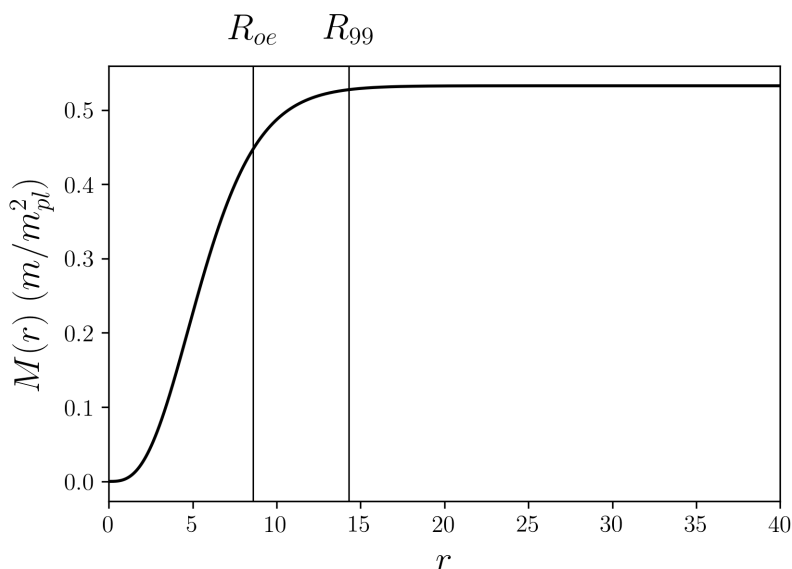
¹En realidad la planitud asintótica es más difícil de definir, e involucra un mayor cuidado que la definición que damos aquí, véase el capítulo 11 en [21].

²El coeficiente que acompaña a ϕ .

$$\Gamma = 1. \quad (4.61)$$

Como ejemplo graficamos $M(r)$ así como el R_e y R_{99} para la solución en el sistema EKG del estado base de la sección 4.4 ($\omega = 0.9366$)

Figura 4.5: $M(r)$ en masas solares para la configuración de cero nodos con $\omega = 0.9366$



Donde

$$m_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \quad (4.62)$$

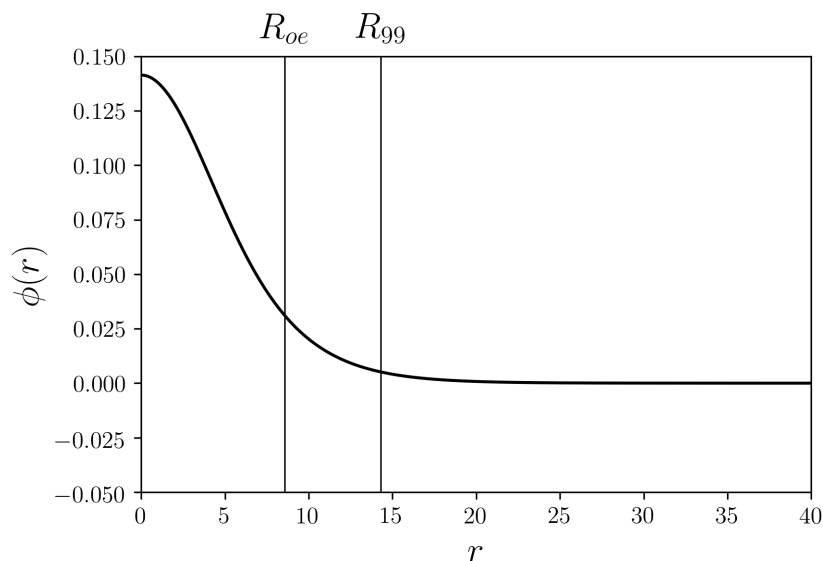
se refiere a la masa de Planck.

La masa ADM calculada se obtiene

$$M = 0.5326 \frac{m_{pl}^2}{m}. \quad (4.63)$$

Esta es una masa mucho más pequeña que la masa crítica de una estrella de fermiones, es decir el límite de Chandrasekhar [53] dado por $\frac{m_{pl}^3}{m^2}$ donde en el caso de estrellas fermiónicas m se referiría a la masa del fermión.

En la figura 4.6 está graficado el perfil del campo escalar para la misma configuración (con $\omega = 0.9366$) en conjunto con los valores R_{oe} y R_{99} , en ella se puede ver que R_{oe} es una cantidad más pequeña que R_{99} sin embargo se puede apreciar que esta es una manera razonable de definir el radio de la estrella. Mientras que R_{99} es una manera artificial de escoger el radio de la estrella, R_{oe} tiene una definición matemática concreta ligada al comportamiento del campo.

Figura 4.6: $\phi(r)$ para la configuración de cero nodos con $\omega = 0.9366$.

Para dar un ejemplo completo con unidades, elegimos un campo escalar con $mc^2 \sim 10^{-23} eV$, es decir una longitud de Compton de

$$r_\phi = R_0 = 0.6 \text{ pc}, \quad (4.64)$$

pc se refiere a la unidad pársec. Sustituyendo el valor de las constantes

$$G = 4.302 \times 10^{-3} \text{ pc } M_\odot^{-1} (\text{km/s})^2, \quad c = 299792 \text{ km/s},$$

la estrella de bosones en (4.63) tendría una masa ADM de

$$M = 7.1 \times 10^{12} M_\odot. \quad (4.65)$$

Mientras que $R_{oe} = r_\phi \hat{R}_{oe}$ es de

$$R_{oe} = 8.6 \text{ pc}. \quad (4.66)$$

Un estudio sobre la compacidad de las estrellas de bosones es realizado en [54] mientras que un estudio sobre los tamaños y masas en relación con el valor de m_Φ , es revisado en [13].

Definimos la compacidad por

$$C = \frac{M_{oe}}{R_{oe}}. \quad (4.67)$$

Donde $M_{oe} = M(R_{oe})$. En términos de las coordenadas adimensionales es $M(\hat{r}) = \frac{m_{pl}}{2m_\Phi} \hat{r} \left(1 - \frac{1}{\gamma(\hat{r})}\right)$, mientras que $R_{oe} = r_\phi \hat{R}_{oe}$ por lo que

$$C(\omega) = \frac{c^2}{2G} \left(1 - \frac{1}{\gamma(\hat{R}_e)} \right) \quad (4.68)$$

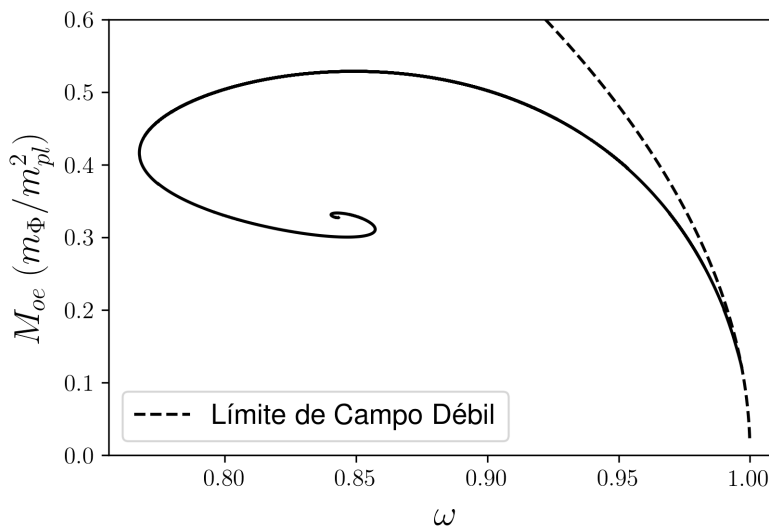
es una cantidad independiente de m_Φ . Aquí hemos puesto la dependencia en ω pues las estrellas de bosones constituyen una familia uniparamétrica de soluciones en términos de este parámetro ω . Aunque de igual manera pudimos haber escogido a ϕ_0 (a la manera de [54]) como parámetro que determine las soluciones, pues existe una relación uno a uno, como veremos más adelante, entre ϕ_0 y ω .

Únicamente las soluciones con cero nodos, es decir las del estado base son estables, por lo que tomaremos estas como las únicas de interés astrofísico y cosmológico.

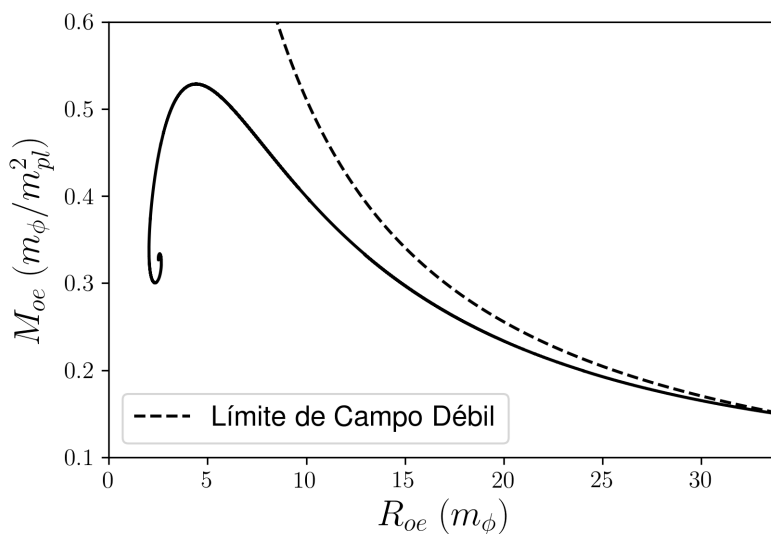
En este mismo sentido, podemos integrar el sistema de ecuaciones (EKG o bien SP) barriendo un cierto rango de ϕ_0 y construyendo curvas que representen las posibles masas, radios y compacidades. Para ello hemos implementado en el código de EKG un ciclo en el que para cada iteración, correspondiente a un shooting completo, el valor de los parámetros es variado lentamente. En las Figura 4.7 mostramos un conjunto de configuraciones de Estrellas de Bosones parametrizadas por ω , mostrando la masa que le corresponde a cada una de ellas, de igual manera en 4.8 graficamos una comparación del radio R_{oe} y M_{oe} .

La línea punteada en esta y en las figuras que le siguen, son los resultados del sistema SP para cada configuración. Es importante recalcar que para construir estas curvas, no fue necesario integrar cada configuración posible variando lentamente los parámetros, sino que las propiedades de reparametrización permiten obtener una sola solución y de ahí extender analíticamente la línea. Esto será explicado tres párrafos abajo.

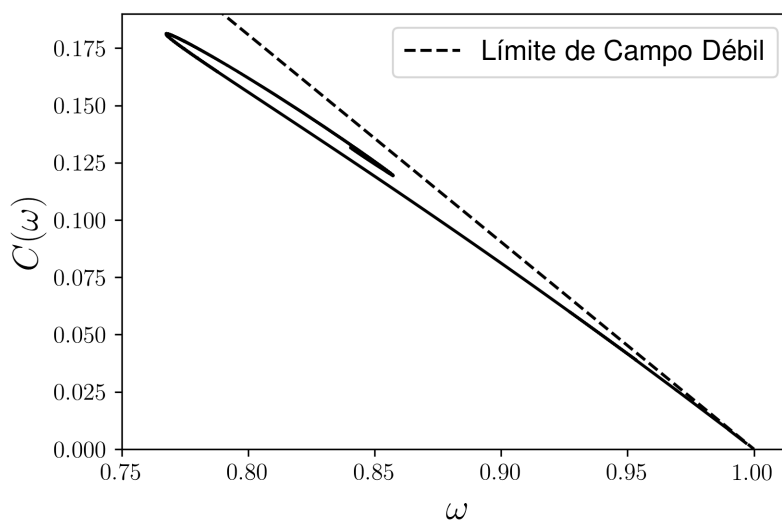
Figura 4.7: Masa M_{oe} como función de la frecuencia ω



En la Figura 4.9 mostramos una gráfica de compacidad en función de ω . Claramente vemos que existe una configuración que es más compacta al resto, esta sin embargo no corresponde a la configuración con masa máxima. El valor máximo es $C = 0.182$ en unidades de c^2/G , y corresponde a la configuración con menor frecuencia ω posible. Compárese a la compacidad

Figura 4.8: Masa M_{oe} como función del radio R_{oe} 

máxima de una estrella esférica ($C = 4/9$, ver (1.19)) y la de un agujero negro ($C = 1/2$), que representa el límite.

Figura 4.9: Compacidad C como función de la frecuencia ω 

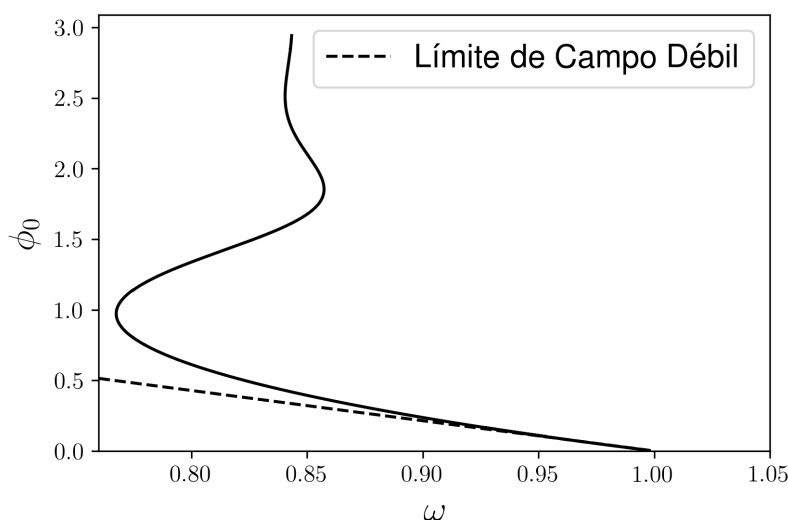
Por otro lado, en la Figura 4.10 es mostrada la relación entre ω y ϕ_0 para cada configuración de estrellas de bosones.

Es importante recalcar que el parámetro ϕ_0 define unívocamente las soluciones en todo el rango, mientras que ω no, pues hay ciertas frecuencias con dos o hasta más soluciones posibles.

Sin embargo, en el rango no-relativista ambos parámetros (ϕ_0 y ω) son buenos parámetros para determinar unívocamente la familia de soluciones.

En todas las gráficas presentadas en esta sección hemos incluido los resultados análogos de

Figura 4.10: Soluciones en el plano $(\omega/\Gamma, \rho)$ al sistema relativista y no-relativista describiendo a una Estrella de Bosones en el estado base



masas y radios obtenidos para el sistema Schrödinger-Poisson. Al margen mencionamos que es posible obtener las expresiones matemáticas de las curvas (recta para la Figura 4.10) para estos resultados no-relativistas.

Para obtenerlas utilizamos las transformaciones de escala dadas en la Tabla 4.1.

Primero observamos que la función de Misner-Sharp en términos del potencial quasi-newtoniano puede ser aproximada de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 M(r) &= \frac{c^2 r}{2G} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2(r)} \right) = -\frac{r}{G} \frac{V}{1 - \frac{2V}{c^2}} \\
 &\approx -\frac{r}{G} V \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) = -\frac{r}{G} \left(V + \frac{2V^2}{c^2} \right) \\
 &\approx -\frac{r}{G} V.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Al aplicar la transformación **T1** al sistema Schrödinger Poisson por medio de los parámetros a y b , $M(r)$ transformará de acuerdo a la siguiente regla

$$M(r) \rightarrow \frac{b}{a^3} M(r). \tag{4.70}$$

Para el mismo valor de la constante Γ , vemos que $a = 1$ (ver Tabla 4.1). Elegimos a una solución como la referencia a partir de la cual realizaremos las transformaciones: ω_{ref} , M_{ref} , R_{extref} . Las transformaciones de ω y M se reducen a las siguientes

$$\omega = b^2(\omega_{\text{ref}}) + \Gamma, \quad (4.71)$$

$$M = bM_{\text{ref}}. \quad (4.72)$$

Igualando b y despejando M , tenemos una expresión para M en función de ω :

$$M(\omega) = M_{\text{ref}} \sqrt{\frac{\omega - \Gamma}{\omega_{\text{ref}} - \Gamma}}. \quad (4.73)$$

Procediendo de la misma manera podemos obtener el resto de curvas $M(R)$, $\phi_0(\omega)$ y $C(\omega)$, cuyas expresiones son

$$M(R) = R_{\text{ref}} M_{\text{ref}} \frac{1}{R}, \quad (4.74)$$

$$\phi_0 = \frac{\phi_0^{\text{ref}}}{\frac{\omega_{\text{ref}}}{\Gamma_{\text{ref}}} - 1} \left(\frac{\omega}{\Gamma} - 1 \right), \quad (4.75)$$

$$C(\omega) = C_{\text{ref}} \frac{\omega - \Gamma}{\omega_{\text{ref}} - \Gamma}. \quad (4.76)$$

Esto quiere decir que basta con resolver un caso de referencia del sistema Schrödinger-Poisson para construir las curvas requeridas, a diferencia de el caso Einstein-Klein-Gordon en donde cada punto en las curvas $M(\omega)M(R)$, $\phi_0(\omega)$ y $C(\omega)$ corresponde a resolver el sistema ahí.

Distancias características (λ_C, λ) Obtenemos que la aproximación SP es adecuada al problema siempre y cuando $\omega \approx \Gamma$. Que es consistente con la ecuación (4.24) que obtuvimos de considerar el límite de campo débil sobre las componentes del tensor de energía-momento, pues

$$\frac{\Upsilon}{\mu} = \frac{\omega}{R_0 \mu} = \frac{\omega r_\phi}{R_0} = \frac{\omega}{\Gamma},$$

por lo tanto:

$$\frac{\omega}{\Gamma} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (4.77)$$

Esta ecuación tiene una interpretación en términos de la longitud de onda λ de la oscilación temporal del campo escalar y la longitud de Compton λ_C .

$$\lambda_C = \frac{2\pi\hbar}{m_\Phi c}. \quad (4.78)$$

Sea Ω la frecuencia real de oscilación del campo (recordando que ω es la frecuencia **adimensional** en términos de la coordenada \hat{x}^0).

$$\Omega = \frac{\omega c}{R_0}, \quad (4.79)$$

entonces

$$\frac{f\lambda_C}{c} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (4.80)$$

Donde $f = \frac{\Omega}{2\pi}$ es la frecuencia de oscilación.

Y si ocurre $\lambda f = c$, entonces

$$\frac{\lambda_C}{\lambda} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (4.81)$$

La condición $\omega < \Gamma$ de la que se habló en párrafos anteriores a (4.52) quiere decir que podremos distinguir únicamente dos casos en términos de λ y la longitud de Compton:

$$\begin{cases} \lambda_C \sim \lambda & \text{En donde la aproximación Newtoniana es válida} \\ \lambda_C \ll \lambda & \text{Estrellas de Bosones relativistas, inestables todas} \end{cases} \quad (4.82)$$

También en la Figura 4.10 puede verse como alejándose de la región newtoniana. el valor del campo escalar aumenta, saliéndose de la aproximación. Esto es consistente con la ecuación (3.43) ya que como $\bar{h}_{00} = h_{00} = \mathcal{O}(\epsilon)$, entonces

$$-\frac{1}{\kappa}\kappa\mu^2\phi^2 = \nabla^2\bar{h}_{00} = \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4.83)$$

4.7. Estrellas de Bosones Newtonianas en Astrofísica

Hemos estado resolviendo las ecuaciones de Einstein-Klein-Gordon en ausencia del término de autointeracción λ , es decir mini-estrellas de bosones [55]. Pues su masa crítica es de $M = 0.633\frac{m_{pl}^2}{m}$ (o bien $M_{oe} = 0.530\frac{m_{pl}^2}{m}$ de acuerdo a los resultados mostrados en la Figura 4.7). Existen tres razones de tipo astrofísicas para considerar a las mini-estrellas de bosones: 1) en el ajuste de curvas de rotación para galaxias, es decir, como halos de materia oscura, 2) en el contexto de relatividad numérica y ondas gravitacionales por su similitud con las estrellas de neutrones. [56] y 3) como imitadoras de agujeros negros. Aquí exploraremos la posibilidad de utilizar estrellas newtonianas en el caso 1) y 3).

Cosmología Por ajustar las curvas de rotación en las galaxias [57, 58], son consideradas masas en el rango

$$m_\Phi c^2 \sim 10^{-22} - 10^{-24} \text{eV} \quad (4.84)$$

para el bosón. En este par de referencias no se ajusta directamente la mini-estrella de bosones a los perfiles de densidad de materia oscura, si no que se debe considerar en las ecuaciones de Einstein la distribución de masa del disco luminoso en términos de una densidad ρ que entra en la ecuación $t - t$. Por lo tanto a pesar de que la configuración de cero nodos es la que utilizan para ajustar las curvas de rotación, la solución no es puramente de estrella de bosones. En particular las curvas de rotación de un halo formado únicamente por la estrella de bosones, tienen caídas típicamente keplerianas.

El hecho de que las velocidades típicas observadas en las galaxias sea de pocos cientos de kilómetros sobre segundo es de esperar que la aproximación de campo débil aplique para estas. Es decir los halos de materia oscura descritos por las masas del bosón en (4.84) serán bien descritos con las ecuaciones de Schrödinger-Poisson. Una estrella de bosones sin materia luminosa dentro de ella estaría descrita en términos newtonianos siempre y cuando:

$$0 < M_{\text{halo}} \lesssim 0.4 \frac{m_{pl}^2}{m_{\Phi}}. \quad (4.85)$$

Sustituyendo (4.84)

$$0 < M_{\text{halo}} \lesssim 5 \times 10^{12} M_{\odot}. \quad (4.86)$$

Aquí nos referimos por región newtoniana, a no llevar a una diferencia entre el cálculo newtoniano y relativista mayor al 10 % de ϕ_0 .

Agujero Negro Central Y por último, como imitadoras de agujeros negros. Esto se refiere a que las estrellas de bosones tienen la capacidad, dado su amplio espectro de soluciones y su reescalamiento una vez dado m_{Φ} . Restringir las características de la estrella de bosones que tendría que estar en el centro de una galaxia para hacer las veces de un agujero negro, es restringir el término de masa del campo escalar. En la literatura ya se ha realizado para sustituir el agujero negro central de la vía láctea, Sgr A* [59, 54].

En ésta referencia se pide que la masa ADM de la estrella de bosones sea la misma que la masa que el ajuste sobre las observaciones indica para del agujero negro

$$M = M_{\text{Sgr A}^*}. \quad (4.87)$$

Encuentran que la configuración de estrella de bosones con valor de campo central³ $\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{50}}$, describe bien la curva de dispersión de velocidades. Por lo tanto para una masa M igual a $2.5 \times 10^6 M_{\odot}$, el valor que debe tener la masa del campo de escalar es

$$m_{\Phi} c^2 = 2.81 \times 10^{-17} \text{eV}. \quad (4.88)$$

³Existe un factor de 2 en la definición de ϕ respecto a la dada en este trabajo.

Esta misma estrella de bosones fue la que estudiamos en la sección 4.6 la cual cae fuera del rango que ahí consideramos no-relativista pues $\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{50}}$ corresponde a una $\omega = 0.9366$, la cual puede verificarse en la Figura 4.7, que cae fuera de la región no relativista, es decir que existe una diferencia entre el cálculo newtoniano y relativista mayor al 10 % de ϕ_0

Sobre el radio R_{99} o bien R_{oe} de esta estrella de bosones, obtuvimos que ambas están alrededor de 10 (ver Figura 4.7). Por lo tanto

$$R \sim 10r_\phi = 10 \frac{\hbar c}{mc^2} \sim \times 10^{11} m \sim 1 \text{ UA} . \quad (4.89)$$

Habría que revisar si configuraciones menos compactas de estrellas de bosones ajustan las curvas de dispersión. En cuyo caso se podría afirmar también que una estrella de bosones newtoniana se encuentra en el centro de la galaxia.

Capítulo 5

ℓ –Estrellas de Bosones

5.1. Ecuaciones de Campo

En el capítulo 1 ya se ha hablado de la generalización con número angular ℓ de las mini-estrellas de bosones. Se dijo por ejemplo, que es una configuración esféricamente simétrica construida a partir de un número impar N de campos escalares, cada uno de ellos asociado a un par de parámetros ℓ y m . En concreto se asume que cada uno de los campos escalares Φ_i no interactúa con los demás, tiene parámetro de masa $\mu = \frac{m\Phi c}{\hbar}$ y que cada uno de ellos tendrá un armónico esférico asociado de la forma

$$\begin{aligned}\Phi_i(t, r, \theta, \varphi) &= \phi_\ell(r, t) Y^{\ell m}(\theta, \varphi) \\ &= [\psi_\ell(r) e^{-i\Upsilon ct}] Y^{\ell m}(\theta, \varphi).\end{aligned}\tag{5.1}$$

ℓ es un parámetro fijo y por lo tanto $N = 2\ell + 1$ pues

$$m = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, +\ell - 1, +\ell.$$

El lagrangiano total para esta colección particular de campos es

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G} R - \frac{1}{2\kappa} \sum_{i=1}^N [\nabla_\mu \Phi_i^* \nabla^\mu \Phi_i + \mu^2 |\Phi_i|^2].\tag{5.2}$$

En el apéndice del artículo [18] muestran que el $T_{\mu\nu}$ total es esféricamente simétrico. Dada la separabilidad del potencial escalar $U = \sum U_i(\Phi_i)$, el tensor de energía-momento cumple con la propiedad de ser lineal:

$$T_{\mu\nu} = \sum_i T_{\mu\nu}^{(i)},\tag{5.3}$$

donde $T_{\mu\nu}^{(i)}$ se refiere al tensor de energía-momento del campo escalar complejo Φ_i con potencial de término cuadrático.

Es justo la forma (5.1), la que genera un tensor de energía-momento esféricamente simétrico. De manera que sumando sobre $i = m + \ell + 1$ y tomando como base la identidad

$$\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} |Y^{\ell m}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2\ell + 1}{4\pi}, \quad (5.4)$$

muestran que

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \kappa \frac{(2\ell + 1)}{4\pi} \left[(\partial_a \phi_\ell)^* (\partial_b \phi_\ell) - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \left(\tilde{g}^{cd} (\partial_c \phi_\ell)^* (\partial_d \phi_\ell) + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} |\phi_\ell|^2 + \mu^2 |\phi_\ell|^2 \right) \right], \\ T_{aB} &= 0, \\ T_{AB} &= -\kappa \frac{(2\ell + 1)}{8\pi} r^2 \left[\tilde{g}^{cd} (\partial_c \phi_\ell)^* (\partial_d \phi_\ell) + \mu^2 |\phi_\ell|^2 \right] \tilde{g}_{AB}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

En donde las letras minúsculas a, b se refieren a las variables t ó r , mientras que las letras mayúsculas A, B se refieren a las variables angulares θ, φ . \tilde{g}_{ab} son componentes de la parte temporal-radial de la métrica $g_{\mu\nu}$. Y \tilde{g}_{AB} son las componentes de la métrica en una esfera de radio unitario $ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2$. κ se refiere de nuevo a la constante de acople gravitacional $\frac{c^4}{8\pi G}$.

Un poco al margen de la discusión principal de este trabajo se encuentra la pregunta: ¿Es posible incluir un término de autointeracción a las ℓ -estrellas de bosones? Como paréntesis en este trabajo proponemos una configuración de campos con lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{c^4}{16\pi G} R - \frac{1}{2\kappa} \sum_{i=1}^N \left[\nabla_\mu \Phi_i^* \nabla^\mu \Phi_i + \mu^2 |\Phi_i|^2 + \Lambda |\Phi_i|^2 \sum_{j=1}^N |\Phi_j|^2 \right]. \quad (5.6)$$

donde $\Lambda = \frac{\lambda}{2\hbar^2}$.

Aquí cada uno de los $2\ell + 1$ campos tiene un término de interacción Λ con cada uno del resto de campos incluido a sí mismo. Esta forma específica permite que las propiedades basadas en (5.4) puedan ser aplicadas sobre el término de autointeracción y darle simetría esférica a éste, ya que la generalización automática $\Lambda |\Phi_i|^4$ con una sola suma no tiene simetría esférica una vez hecha la suma.

El resultado es que en las componentes del $T_{\mu\nu}$ el término μ^2 se ve sustituido por la combinación

$$\mu^2 + \frac{2\ell + 1}{4\pi} \Lambda |\phi_\ell|^2.$$

Mientras que en la ecuación de Klein-Gordon, por involucrar derivadas para cada modo respecto a Φ_i , la sustitución que se debe realizar es μ^2 por

$$\mu^2 + \frac{2\ell + 1}{2\pi} \Lambda |\phi_\ell|^2.$$

Cerrando este breve paréntesis y regresando al caso del potencial sin término de autointeracción, tomamos el mismo elemento de línea que para las estrellas de bosones; se puede mostrar que el sistema de ecuaciones para ϕ_ℓ , α y γ es el similar al correspondiente en una estrellas de bosones estándar (4.18) pero haciendo la sustitución $\Gamma^2 \rightarrow \Gamma^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$. Recordando $\Gamma^2 = R_0^2 \mu^2$ y con la misma definición de frecuencia adimensional $\omega = R_0 \Upsilon$

$$\begin{aligned} \psi_\ell'' &= \psi_\ell' \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2}{\hat{r}} \right) + \gamma^2 \left[\Gamma^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}^2} \right] \psi_\ell, \\ \frac{\gamma'}{\gamma} &= \frac{1 - \gamma^2}{2\hat{r}} + \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{\hat{r}}{4} \gamma^2 \left\{ \frac{\psi_\ell'^2}{\gamma^2} + \left[\Gamma^2 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{\hat{r}^2} \right] \psi_\ell^2 \right\}, \\ \frac{\alpha'}{\alpha} &= \frac{\gamma^2 - 1}{\hat{r}} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{\hat{r}}{2} \gamma^2 \psi_\ell^2 \Gamma^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Los autores en [18] muestran que cerca de $r = 0$, existe la solución local para el campo: $\psi_\ell \sim r^\ell$. Razón por la cual un cambio de variable $u_\ell = \psi_\ell / r^\ell$ tiene que hacerse para poder dar condiciones iniciales adecuadas.

Por lo cual el procedimiento para resolver el sistema es el mismo que detallamos en el capítulo 4, con la excepción de que las ecuaciones que deberán ser ingresadas en el integrador son

$$\begin{aligned} u_\ell'' &= -2(\ell + 1) \frac{u_\ell'}{r} - \ell(\ell + 1) \frac{u_\ell}{r^2} + \left(u_\ell' + \ell \frac{u_\ell}{r} \right) \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \gamma^2 \left[\Gamma^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_\ell, \\ \gamma' &= \gamma \left\{ \frac{1 - \gamma^2}{2r} + \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{r}{4} \gamma^2 \left\{ \frac{(r^\ell u_\ell' + \ell r^{\ell-1} u_\ell)^2}{\gamma^2} + \left[\Gamma^2 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_\ell^2 r^{2\ell} \right\} \right\}, \\ \alpha' &= \alpha \left(\frac{\gamma^2 - 1}{r} + \frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{r}{2} \gamma^2 u_\ell^2 r^{2\ell} \Gamma^2 \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

sujetas a la condición inicial distinta $u_\ell(0) = u_0$.

Las soluciones a este sistema de ecuaciones tienen propiedades interesantes además del resultado $\psi_\ell = 0$ para $\ell > 0$. Por ejemplo, resulta que la densidad de energía definida en (3.24) para observadores estáticos con cuadrivelocidad

$$u^\alpha = \sqrt{-c^2/g_{00}} \delta_0^\alpha, \quad (5.9)$$

para lo cual asumimos la métrica diagonal que nos concierne (4.1). Obtenemos

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{u^\alpha u^\beta}{c^4} T_{\alpha\beta} = \frac{(u^t)^2}{c^4} T_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{c^2} T_0^0.\end{aligned}\tag{5.10}$$

tiene valor cero en $r = 0$ para $\ell > 1$. Además muestran que las masas (y las compactidades) de las estrellas de ℓ -bosones crecen con ℓ . Esto será consistente con el resultado que obtendremos en el siguiente capítulo sobre el papel de ℓ en la caracterización del límite no-relativista.

5.2. Límite no-Relativista

La derivación de las ecuaciones no-relativistas de la forma en la que aparecen en (4.35) para las estrellas de bosones, no asume simetría esférica. Es decir, las ecuaciones

$$\begin{aligned}E\phi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + mV\phi, \\ \nabla^2V &= \frac{m^2c^4}{2\hbar^2}\phi^2.\end{aligned}$$

Son la consecuencia directa de aplicar el método general de campo débil del capítulo 3 a un campo escalar complejo con término de masa y con dependencia armónica en el tiempo $\Phi = \phi(\mathbf{r})e^{-i\Upsilon ct}$.

Haciendo un recuento de las suposiciones (independientes) sobre la métrica y el campo que llevan a estas ecuaciones encontramos

- **Métrica cercana a Minkowski**
 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| = \mathcal{O}(\epsilon)$ y $|\partial_\gamma h_{\mu\nu}| = \mathcal{O}(\epsilon)$.
- **Derivadas temporales y radiales del campo escalar**
 $\frac{\partial_i \Phi}{\partial_0 \Phi} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$ y $\frac{\partial_i^2 \Phi}{\partial_0^2 \Phi} = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$
- **Condición sobre la frecuencia de oscilación**
 $\frac{\Upsilon}{\mu} = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$

El índice latino se refiere a las coordenadas cartesianas x, y, z .

Asumamos que las mismas condiciones de campo débil se satisfacen sobre cada uno de los campos Φ_i de las ℓ -estrellas de bosones. Definimos

$$\chi_{\ell m}(\mathbf{r}) = \psi_\ell(r)Y^{\ell m}(\theta, \varphi).\tag{5.11}$$

Entonces el análogo a las ecuaciones de campo débil (4.35) para cada uno de los campos en ℓ -estrellas de bosones es el sistema

$$E\chi_{\ell m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\chi_{\ell m} + mV\chi_{\ell m}, \quad (5.12)$$

$$\nabla^2 U_{\ell m} = \frac{m^2 c^4}{2\hbar^2} |\chi_{\ell m}|^2.$$

$U_{\ell m}$ se puede interpretar como el potencial gravitacional que se obtendría de la gravitación del campo escalar $\chi_{\ell m}$.

En la primera, utilizando la ecuación de eigenvalores para los armónicos esféricos $\nabla^2 Y^{\ell m} = -\ell(\ell+1)Y^{\ell m}$, dividiendo entre $Y^{\ell m}$, y en la segunda sumando sobre todos los campos $\sum_{m=-\ell}^{m=\ell}$, y utilizando la propiedad (5.4) se obtiene

$$E\psi_\ell = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_\ell + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi_\ell + mV\psi_\ell, \quad (5.13)$$

$$(5.14)$$

$$\sum_{m=-\ell}^{m=\ell} \nabla^2 U_{\ell m} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{m^2 c^4}{2\hbar^2} \psi_\ell^2. \quad (5.15)$$

El sistema de Einstein-Klein-Gordon afirma que el espacio-tiempo que resulta del sistema total es estático y esféricamente simétrico, por lo tanto

$$V(r) = \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} U_{\ell m}(t, \mathbf{r}). \quad (5.16)$$

Para alguna función $V(r)$. Por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned} E\psi_\ell &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi_\ell + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\psi_\ell + mV\psi_\ell, \\ \nabla^2 V &= \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{m^2 c^4}{2\hbar^2} \psi_\ell^2. \end{aligned}} \quad (5.17)$$

La ecuación de Klein-Gordon se reduce a la **ecuación radial** (de Schrödinger), la cual se obtiene de resolver en mecánica cuántica no-relativista la ecuación de Schrödinger para un potencial esféricamente simétrico, y asumir que la solución es separable. La ecuación que se obtiene para la función que depende de r es la ecuación radial.

Sustituyendo R , pasando a las coordenadas adimensionales y poniendo las funciones en simetría esférica explícita se tiene la ecuación de Schrödinger

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \frac{d\psi_\ell}{dr})}{dr} \right] = \left[\Gamma^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \Gamma\omega + \Gamma \frac{V}{c^2} \right] \psi_\ell. \quad (5.18)$$

Y la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \frac{dV}{dr})}{dr} = \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{c^2}{2} \Gamma^2 \psi_\ell^2. \quad (5.19)$$

De la misma manera que en [18] se muestra que las soluciones locales al rededor del centro de la estrella de bosones implican que el campo escalar para $\ell > 0$ debe irse a cero, se puede mostrar en el caso no-relativista que cerca de $r = 0$ la ecuación (5.18) se vuelve

$$\frac{d(r^2 \frac{d\psi_\ell}{dr})}{dr} - \ell(\ell+1)\psi_\ell \approx 0. \quad (5.20)$$

Que permite las mismas soluciones $\psi_\ell = Ar^\ell + Br^{-\ell-1}$ que en el caso relativista. Buscamos las soluciones regulares en esta región, por lo tanto

$$\psi_\ell \sim r^\ell \quad (5.21)$$

cerca de $r = 0$.

Por lo tanto el cambio de variable a $u_\ell = r^\ell \psi_\ell$ es vigente en la aproximación también. En términos de u_ℓ el sistema de ecuaciones Schrödinger-Poisson (5.18), (5.19), que forma la contraparte no-relativista (y notablemente más simple) de (5.8) es

$$\begin{aligned} u_\ell'' &= -2(\ell+1) \frac{u_\ell'}{r} - \ell(\ell+1) \frac{u_\ell}{r^2} + 2 \left[\Gamma^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \Gamma\omega + \Gamma \frac{V}{c^2} \right] u_\ell, \\ V'' &= -\frac{2}{r} V' + \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{c^2}{2} \Gamma^2 r^{2\ell} u_\ell^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.3. Resultados

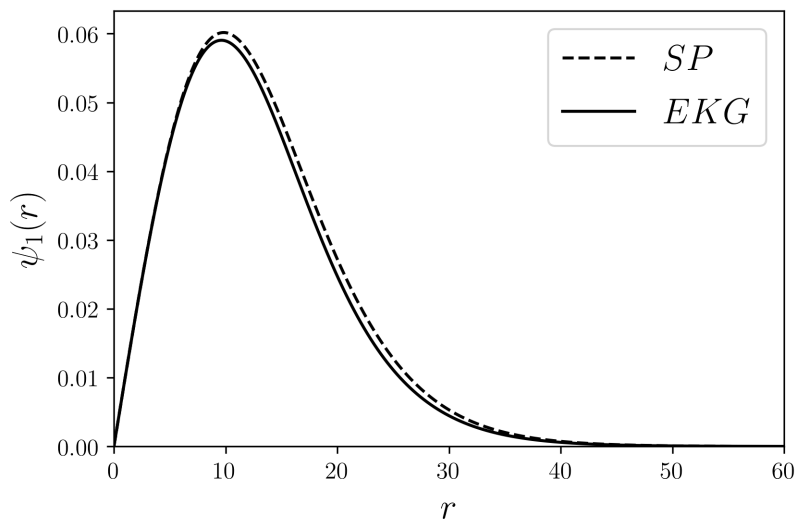
La diferencia relativa que se obtiene entre el sistema EKG y SP de una 1-estrella de bosones con un campo central de $u_\ell(0) = \frac{1}{100}$, que corresponde a la frecuencia

$$\omega = 0.9667, \quad (5.23)$$

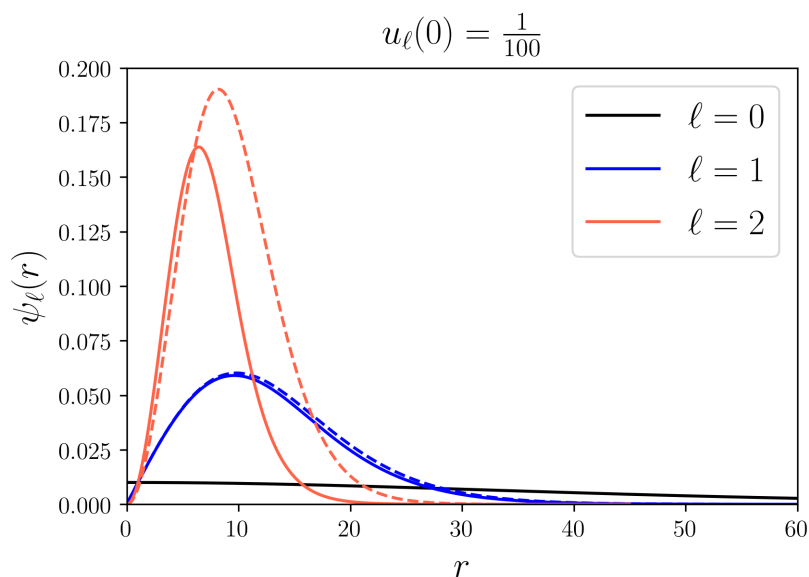
se muestra en la figura 5.1

Hemos elegido $\Gamma = 1$ igual que en las mini-estrellas de bosones.

Esto nos dice que el valor $\omega = 0.9667$ para el caso de la 1-estrella de bosones es no-relativista.

Figura 5.1: Ejemplo de 1-Estrella de Bosones no-relativista ($\omega = 0.9667$)

Ahora, podemos fijar el valor del campo u_ℓ en el centro de la estrella y encontrar las frecuencias ω^ℓ para cada caso de ℓ . Elegimos el mismo valor de campo central que en el caso anterior $u(0) = \frac{1}{100}$ generamos la Figura 5.2 en donde se encuentra el perfil del campo ψ_ℓ para $\ell = 0, 1, 2$.

Figura 5.2: ℓ -Estrellas de Bosones con valor del campo u_ℓ central fijo. Las líneas discontinuas corresponden a la aproximación de SP y las sólidas a la solución EKG.

Encontrando las frecuencias

$$\omega^{\ell=0} = 0.9986, \quad \omega^{\ell=1} = 0.9667, \quad \omega^{\ell=2} = 0.8499. \quad (5.24)$$

Vemos que para $u_\ell(0)$ fijo, al aumentar ℓ a aproximación no-relativista discrepa más de

la solución completamente relativista. En particular la solución con $\ell = 0$ es una estrella de bosones muy poco compacta, por lo que las soluciones EKG y SP se encuentran casi sobrepuestas.

Tenemos por lo tanto, que la aplicación del límite de campo débil discutido en el capítulo 3 ha sido aplicado correctamente al estudio de ℓ -estrellas de bosones, mostrándonos que el parámetro ℓ incrementa la diferencia entre los resultados obtenidos entre los sistemas EKG y SP, como cabía esperar dadas la compacidades de cada uno de los casos de ℓ reportadas en [18].

Conclusiones y Trabajo a Futuro

La tendencia en el área de gravitación a utilizar al campo escalar está creciendo; sea para modelar a la materia oscura y a la inflación en cosmología o para encontrar nuevas soluciones a la relatividad general con combinaciones de agujeros negro más campo escalar y la construcción de agujeros de gusano. Aunado a ello, los análisis de estabilidad de ciertas configuraciones de campo escalar autogravitante, tal como es el caso de las estrellas de bosones, muestran que al menos desde el punto de vista teórico es probable la existencia material de estos objetos.

La simplicidad de los cálculos o bien la experiencia acumulada en el estudio de física prerrelativista, llevan muchas veces a los investigadores a analizar ciertos problemas que involucran al campo escalar desde el sistema Schrödinger-Poisson. En este trabajo se han tratado con detalle las condiciones que debe satisfacer los sistemas gravitacionales constituidos por campo escalar, para que el límite de campo débil sea aplicable. Así mismo este conjunto de condiciones constituyen un método para revisar la aplicabilidad del límite no-relativista, una vez que los resultados ya se tienen.

Hemos dedicado un capítulo a estudiar el caso de las estrellas de bosones newtonianas, mostrando que el sistema de Einstein-Klein-Gordon puede ser sustituido adecuadamente por el sistema Schrödinger-Poisson siempre y cuando la longitud de onda λ asociada a la frecuencia de oscilación del campo escalar armónico sea cercana a la longitud de Compton λ_C que define el parámetro de masa. Integramos numéricamente las ecuaciones de campo EKG para obtener los perfiles de masa y compacidad para todo un rango de estrellas de bosones, mostrándonos que en el límite, el sistema SP es aplicable en solo un pequeño intervalo de las soluciones, pues una configuración en donde el cociente entre λ y λ_C es de 0.9366, ya induce una diferencia porcentual mayor al 10% entre los resultados entre EKG y SP para el campo escalar en el centro de la estrella. Desde el punto de vista contrario, dos de las posibles aplicaciones en astrofísica tanto en los modelos de halo galáctico como los de imitadoras de agujeros negros de las estrellas de bosones resultan caer cerca del límite no-relativista.

El sistema Schrödinger-Poisson para las nuevas ℓ -estrellas de bosones ha sido obtenido en este trabajo en base a las condiciones de campo débil que aquí mismo se presentan, obteniendo que el parámetro ℓ al ir aumentando, hace aún más pequeña la región newtoniana lo cual era lo esperado dado que las ℓ -estrellas de bosones son más masivas y compactas que el caso estándar $\ell = 0$.

Las perspectivas de esta tesis son la aplicación del límite de campo débil a problemas donde no ha sido estudiado con cuidado, o bien no existe del todo. Tal es el caso de las estrellas de bosones rotantes, donde el esfuerzo numérico se podría ver importantemente reducido al

utilizar las ecuaciones del SP. Actualmente ya nos encontramos trabajando en ello. De la misma manera una aplicación en cosmología a la materia oscura escalar puede resultar útil para llegar a una mejor comprensión sobre el papel que juega el sistema SP dado que una gran parte de las simulaciones de n -cuerpos y otras aplicaciones cosmológicas trabajan en este límite.

Bibliografía

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*, volume 2 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [2] Friedrich Engels. *Dialéctica de la Naturaleza*. Grijalbo, 1961.
- [3] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, 875(1):L1, 2019.
- [4] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring. *Astrophys. J.*, 875(1):L5, 2019.
- [5] Richard Brito, Vitor Cardoso, and Paolo Pani. Superradiance. *Lect. Notes Phys.*, 906:pp.1–237, 2015.
- [6] Juan Magana and Tonatiuh Matos. A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model. *J. Phys. Conf. Ser.*, 378:012012, 2012.
- [7] Lam Hui, Jeremiah P. Ostriker, Scott Tremaine, and Edward Witten. Ultralight scalars as cosmological dark matter. *Phys. Rev.*, D95(4):043541, 2017.
- [8] Philippe Jetzer. Boson stars. *Phys. Rept.*, 220:163–227, 1992.
- [9] Andrew R. Liddle and Mark S. Madsen. The Structure and formation of boson stars. *Int. J. Mod. Phys.*, D1:101–144, 1992.
- [10] Gian F. Giudice, Matthew McCullough, and Alfredo Urbano. Hunting for Dark Particles with Gravitational Waves. *JCAP*, 1610(10):001, 2016.
- [11] Remo Ruffini and Silvano Bonazzola. Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state. *Phys. Rev.*, 187:1767–1783, 1969.
- [12] David J. Kaup. Klein-Gordon Geon. *Phys. Rev.*, 172:1331–1342, 1968.
- [13] F. E. Schunck and E. W. Mielke. General relativistic boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 20:R301–R356, 2003.
- [14] T. D. Lee and Yang Pang. Stability of Mini - Boson Stars. *Nucl. Phys.*, B315:477, 1989. [129(1988)].
- [15] Monica Colpi, Stuart L. Shapiro, and Ira Wasserman. Boson stars: Gravitational equilibria of self-interacting scalar fields. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2485–2488, Nov 1986.

- [16] Ph. Jetzer and J.J. Van Der Bij. Charged boson stars. *Physics Letters B*, 227(3):341 – 346, 1989.
- [17] E. W. Mielke and F. E. Schunck. Rotating boson stars. pages 391–420, 1997.
- [18] Miguel Alcubierre, Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Dario Nunez, and Olivier Sarbach. ℓ -Boson stars. *Class. Quant. Grav.*, 35(19):19LT01, 2018.
- [19] Steven L. Liebling and Carlos Palenzuela. Dynamical Boson Stars. *Living Rev. Rel.*, 15:6, 2012. [Living Rev. Rel.20,no.1,5(2017)].
- [20] Valeria Ferrari and Leonardo Gualtieri. *General Relativity*. Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, 2013-2014.
- [21] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984.
- [22] Edward Seidel and Wai-Mo Suen. Dynamical Evolution of Boson Stars. 1. Perturbing the Ground State. *Phys. Rev.*, D42:384–403, 1990.
- [23] Jayashree Balakrishna, Edward Seidel, and Wai-Mo Suen. Dynamical evolution of boson stars. 2. Excited states and selfinteracting fields. *Phys. Rev.*, D58:104004, 1998.
- [24] Gong-Bo Zhao et al. Dynamical dark energy in light of the latest observations. *Nat. Astron.*, 1(9):627–632, 2017.
- [25] Albert Einstein and N. Rosen. The Particle Problem in the General Theory of Relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, 1935.
- [26] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [27] M. S. Morris and K. S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [28] H. G. Ellis. Ether flow through a drainhole - a particle model in general relativity. *J. Math. Phys.*, 14:104–118, 1973.
- [29] K. A. Bronnikov. Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon.*, B4:251–266, 1973.
- [30] Hisa-aki Shinkai and Sean A. Hayward. Fate of the first traversible wormhole: Black hole collapse or inflationary expansion. *Phys. Rev.*, D66:044005, 2002.
- [31] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Ratbay Myrzakulov, and Douglas Singleton. Non-singular solutions to Einstein-Klein-Gordon equations with a phantom scalar field. *JHEP*, 07:094, 2008.
- [32] Vladimir Dzhunushaliev, Vladimir Folomeev, Burkhard Kleihaus, and Jutta Kunz. Wormhole solutions with a complex ghost scalar field and their instability. *Phys. Rev.*, D97(2):024002, 2018.
- [33] Thanu Padmanabhan. *Gravitation: Foundations and frontiers*. Cambridge University Press, 2014.

- [34] Reid Larimore Guenther. A numerical study of the time dependent schrödinger equation coupled with newtonian gravity. 1995.
- [35] Hans Stephani, D. Kramer, Malcolm A. H. MacCallum, Cornelius Hoenselaers, and Eduard Herlt. *Exact solutions of Einstein's field equations*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [36] K. S. Virbhadra. Janis-Newman-Winicour and Wyman solutions are the same. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:4831–4836, 1997.
- [37] Viqar Husain, Erik A. Martinez, and Dario Nunez. Exact solution for scalar field collapse. *Phys. Rev.*, D50:3783–3786, 1994.
- [38] Juan Barranco, Argelia Bernal, Juan Carlos Degollado, Alberto Diez-Tejedor, Miguel Megevand, Dario Nunez, and Olivier Sarbach. Self-gravitating black hole scalar wigs. *Phys. Rev.*, D96(2):024049, 2017.
- [39] Juan Carlos Degollado, Juan Carlos Hidalgo, Tonatiuh Matos, Darío Núñez, and Olivier Sarbach. An hyperbolic description of the Cosmological perturbations. [*Artículo en proceso*].
- [40] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 edition, 2007.
- [41] Philippe Grandclement, Claire Somé, and Ericourgoulhon. Models of rotating boson stars and geodesics around them: new type of orbits. *Phys. Rev.*, D90(2):024068, 2014.
- [42] Shijun Yoshida and Yoshiharu Eriguchi. Rotating boson stars in general relativity. *Phys. Rev.*, D56:762–771, 1997.
- [43] Sean M. Carroll. Lecture notes on general relativity. 1997.
- [44] Chi-Wai Lai. *A Numerical study of boson stars*. PhD thesis, British Columbia U., 2004.
- [45] Miguel Alcubierre. Introduction to 3+1 numerical relativity. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, 04 2006.
- [46] G. H. Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *J. Math. Phys.*, 5:1252–1254, 1964.
- [47] Argelia Bernal Bautista. *Estudio Dinámico de Campos Escalares Autogravitantes*. PhD thesis, CINVESTAV, IPN, 2007.
- [48] F. Siddhartha Guzman and L. Arturo Urena-Lopez. Evolution of the Schrodinger-Newton system for a selfgravitating scalar field. *Phys. Rev.*, D69:124033, 2004.
- [49] Hubert L. Bray and Andrew S. Goetz. Wave Dark Matter and the Tully-Fisher Relation. 2014.
- [50] Andrew S. Goetz. *The Einstein-Klein-Gordon Equations, Wave Dark Matter, and the Tully-Fisher Relation*. PhD thesis, Duke U., Dept. Math., 2015.

- [51] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Canonical variables for general relativity. *Phys. Rev.*, 117:1595–1602, Mar 1960.
- [52] Charles W. Misner and David H. Sharp. Relativistic equations for adiabatic, spherically symmetric gravitational collapse. *Phys. Rev.*, 136:B571–B576, Oct 1964.
- [53] M. Colpi, S. L. Shapiro, and I. Wasserman. Boson Stars: Gravitational Equilibria of Selfinteracting Scalar Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2485–2488, 1986.
- [54] P. Amaro-Seoane, J. Barranco, A. Bernal, and L. Rezzolla. Constraining scalar fields with stellar kinematics and collisional dark matter. *jcap*, 11:002, November 2010.
- [55] Piotr Bizon and Arthur Wasserman. On existence of mini - boson stars. *Commun. Math. Phys.*, 215:357–373, 2000.
- [56] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. 1983.
- [57] Alexandre Arbey, Julien Lesgourgues, and Pierre Salati. Quintessential halos around galaxies. *Phys. Rev. D*, 64:123528, Nov 2001.
- [58] Alexandre Arbey, Julien Lesgourgues, and Pierre Salati. Cosmological constraints on quintessential halos. *Phys. Rev. D*, 65:083514, Apr 2002.
- [59] Diego F. Torres, S. Capozziello, and G. Lambiase. A Supermassive scalar star at the galactic center? *Phys. Rev.*, D62:104012, 2000.