UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Optimización de un portafolio de derivados energéticos mediante programación lineal estocástica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

Torrijos López Jazmín Alejandra

TUTORES

Dr. Sergio Iván López Ortega
Dra. Claudia Orquídea López Soto

Ciudad Universitaria, CD. MX., 2019

1. Datos del alumno	.
Apellido paterno	Torrijos
Apellido materno	López
Nombre(s)	Jazmín Alejandra
Teléfono	69 93 48 02
Universidad	Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad	Facultad de Ciencias
Carrera	Actuaría
Número de cuenta	309326713
2. Datos del tutor	
Grado	Dr
Nombre(s)	Sergio Iván
Apellido paterno	López
Apellido materno	Ortega
3. Datos de la cotutora	
Grado	Dra
Nombre(s)	Claudia Orquídea
Apellido paterno	López
Apellido materno	Ortega
4. Datos del sinodal 1	
Grado	M en I
Nombre(s)	Adrián
Apellido paterno	Girard
Apellido materno	Islas
5. Datos del sinodal 2	
Grado	Act
Nombre(s)	Germán
Apellido paterno	Valle
Apellido materno	Trujillo
6. Datos del sinodal 3	
Grado	Dr
Nombre(s)	Yuri
Apellido paterno	Salazar
Apellido materno	Flores
7. Datos del trabajo escrito	
Título	Optimización de un portafolio de derivados energéticos mediante programación lineal estocástica
Número de páginas	60 p
Año	2019

Agradecimientos

A mis padres, por siempre apoyarme he impulsarme a ser siempre algo mejor. A mi mamá, por enseñarme valores y fortaleza para salir adelante en esta vida.

A mis hermanos, Brenda, Camila, Christian y Julio, por ser mis amigos, mi hombro en momentos díficiles, apoyarme en mis decisiones y por escucharme siempre que lo he necesitado.

A Daniel, Norma, Angela y Agustín, porque aunque ya no están con nosotros, siempre intentaré hacer que se sientan orgullosos de mi donde quiera que estén.

A Karen, Alejandro, Wilfrido, Marco, Jesús, y todos aquellos que me apoyaron leyendo, aconsejando y motivando para concluir este trabajo. Les agradezco mucho su tiempo y sus palabras.

A mis amigos, por motivarme y apoyarme siempre.

Al Dr. Sergio López Ortega, infinitas gracias por toda la comprensión, apoyo, palabras, entusiasmo y apoyo. Nunca podré hacerle saber lo agradecida que estoy con usted por todo el tiempo y dedicación que invirtió en mi.

A la Dra. Claudia López Soto, por todo su apoyo, consejos, paciencia y conocimientos que me brindo para poder realizar este trabajo. No hay forma de agradecerles por tanto.

A mis sinodales, M. en I. Adrián Girard Islas, Act. Germán Valle Trujillo y Dr. Yuri Salazar Flores, por darse el tiempo para evaluar este trabajo y darme sus recomendaciones que sin duda ayudaron a pulir este trabajo.

A todos los profesores que han creído en mi a lo largo de mi vida escolar y que me brindaron su tiempo, dedicación y motivaciones.

Quiero agradecer por el apoyo que me brindo la DGAPA-UNAM, por medio del "Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza" de la Universidad Nacional Autónoma de México (PAPIME-UNAM) mediante por el proyecto PAPIME-PE100216, "Optimización de un portafolio de derivados energéticos mediante programación lineal estocástica".

A mi alma mater, la Universidad Nacional Autónoma de México. El lugar en el que he aprendido y crecido como ser humano y como profesional. Por tanto y más, siempre te llevaré en mi corazón UNAM.

Por mi raza, hablará el espiritú

Introducción

La siguiente tesis es una introducción breve de la teoría de la programación estocástica, y una aplicación de esta teoría en Finanzas. El objetivo específico es implementar la programación lineal estocástica en portafolios de inversión compuestos por derivados financieros basados en subyacentes energéticos. Con tal objetivo en mente, se dará por sentado los conocimientos básicos de Álgebra Lineal, Probabilidad, Procesos Estocásticos y Cálculo Diferencial e Integral.

Dividimos en dos secciones este trabajo. En la primera parte se desarrolla la teoría, considerando para ello tres capítulos. En el Capítulo 1 se presenta una breve introducción a la programación lineal estocástica ilustrada por un ejemplo. En el Capítulo 2 son desarrollados formalmente los principales resultados y supuestos que abarca esta teoría para fines del planteamiento del caso de estudio de este trabajo. En el Capítulo 3, se realiza una introducción breve a las medidas de riesgo, herramientas fundamentales en la administración de riesgos financieros, así como la especificación de cuáles son utilizadas en la programación estocástica y el porqué de ello.

Para la segunda parte, se presentará la aplicación de la teoría desarrollada en la primera parte. En el Capítulo 4, se desarrolla una breve introducción a los derivados financieros y particularmente a los llamados *derivados energéticos*. Por último, en el Capítulo 5 se plantea y muestra la implementación en la optimización de un portafolio de derivados energéticos, de mi propia autoría usando como herramienta principal el software libre R. Finalmente se presentan conclusiones sobre la aplicación desarrollada.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a la programación lineal estocástica

Muchos problemas de decisión pueden ser modelados mediante problemas lineales (a los cuales también se les denomina *programas lineales*), y que en general se escriben de la forma:

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & c^T x, \\ \text{s.a.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde $c_{n\times 1}$ es el vector que representa los costos, la matriz $A_{m\times n}$ contiene los costos de productividad y el vector $b_{m\times 1}$ es el vector de la demanda o capacidad. Todos estos arreglos contienen elementos que se asumen como conocidos con valores reales y el objetivo de dicho problema es encontrar los valores del vector $x_{n\times 1}$, que representa las variables de decisión.

Dichos modelos quedan sujetos a los coeficientes deterministas, produciendo buenas soluciones para determinados modelos de datos, pero posiblemente no dando una solución al problema de decisión de la vida real. Cuando se trabaja con decisiones que pueden ser afectadas por la incertidumbre nace la necesidad de utilizar programación lineal estocástica, siendo esa incertidumbre una representación que se acerca más al problema real.

Desde mediados del siglo XX, nació el concepto de programación lineal estocástica debido a la necesidad de hacer frente a dichos valores de incertidumbre en los coeficientes que se usan en las aplicaciones de la optimización. Los modelos de programación estocástica clásica tienen por objeto la cobertura contra las consecuencias de las posibles realizaciones de escenarios aleatorios dando así la mejor solución posible o la mejor posición.

Esta teoría ha sido aplicada en diversas áreas, principalmente en la planeación de la producción industrial, capacidad y generación eléctrica, administración del tráfico, inventarios, llegando hasta la problemas financieros como la selección de portafolios, modelos y planeación en macroeconomía y la gestión de activos y pasivos (ALM, por sus siglas en inglés), como los ejemplos que presentan Birge y Louveaux en [4], Kall y Wallace en [10] y Shapiro, Dentcheva y Ruszczyński en [11].

En lo que resta del capítulo, presentaré un ejemplo simple que sirva para dar una noción de como funciona la programación lineal estocástica. Además, mostraremos la solución para el ejemplo presentado. Será hasta el siguiente capítulo en el que desarrollaremos la teoría asociada a este planteamiento particular.

1.1. Un ejemplo simple

Supongamos que una empresa "X" tiene como giro la producción del producto P_1 y el producto P_2. A su vez, P_1 y P_2 son elaborados usando el material m_1 y m_2: P_1 usa 2 unidades de m_1 y 6 de m_2 mientras que P_2 usa 3 unidades de cada material. El costo por unidad de m_1 es de 2 unidades monetarias mientras que el costo del material m_2 equivale a 3 unidades monetarias. La demanda semanal, h, es de 180 unidades del P_1 y 162 del P_2, semanalmente. El almacén de la empresa cuenta con espacio para 100 unidades de materiales, m_1 y m_2. En el Cuadro 1.1 se muestra resumida esta información.

	P_1	P_2	c	b
m_1	2	3	2	1
m_2	6	3	3	1
h	180	162	z	100
	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$

Cuadro 1.1: Datos del Ejemplo 1

La empresa "X" tendrá como problema la optimización de los costos de producción de sus artículos, quedando entonces establecido el problema de minimización descrito a continuación.

Sea x_{m_i} el número de piezas del material i a producir semanalmente, donde $i = 1,2$. Entonces, el programa lineal a resolver es:

$$
\begin{array}{llcccl}
\text{mín} & z = 2x_{m_1} + 3x_{m_2} & & & & \\
\text{s.a.} & x_{m_1} & + & x_{m_2} & \leq & 100, \\
& 2x_{m_1} & + & 6x_{m_2} & \geq & 180, \\
& 3x_{m_1} & + & 3x_{m_2} & \geq & 162, \\
& x_{m_1} & & & \geq & 0, \\
& & & x_{m_2} & \geq & 0.
\end{array}
$$

Este tipo de problemas puede solucionarse mediante los típicos métodos de programación lineal. Para este ejemplo, lo resolveremos mediante el método álgebraico y gráfico. El espacio de factibilidad corresponde a la Figura 1.1 y la solución óptima y única de este problema de optimización es $\hat{x}_{m_1} = 36$ y $\hat{x}_{m_2} = 18$, dando esto un costo total mínimo de $z^* = 126$ unidades.

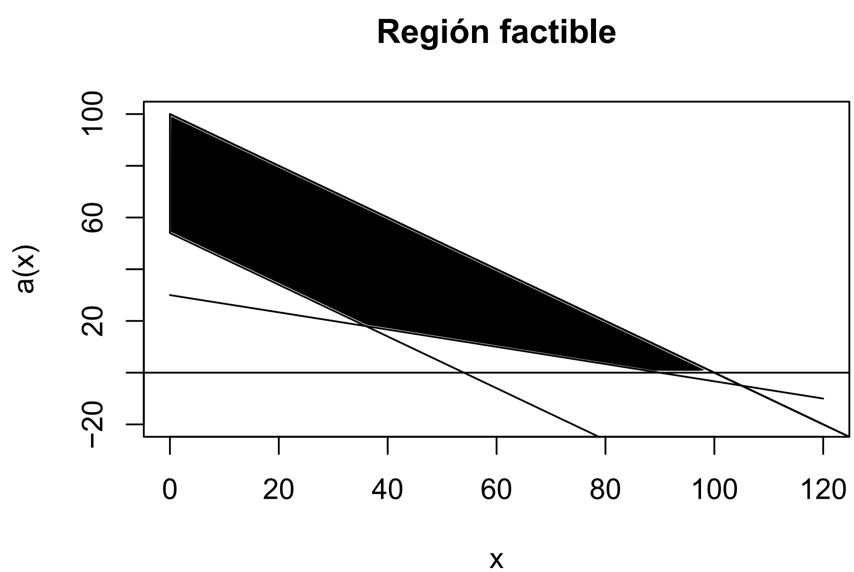

Figura 1.1: Espacio de factibilidad del ejemplo.

Supondremos ahora que la demanda semanal de los clientes puede modelarse por un vector aleatorio (x_{m_1}, x_{m_2}). Por otro lado, una vez establecido el plan de producción semanal (x_{m_1}, x_{m_2}), supondremos que no se modifica en el transcurso de la semana.

En principio, los clientes esperan la producción de la empresa para satisfacer sus demandas semanales. Sin embargo, es probable que no todo salga de acuerdo con el plan de producción y los acontecimientos imprevistos determinen cambios en las demandas de los clientes y/o productividad: las demandas de la empresa no pueden ser cubiertas por la producción, lo que equivaldrá a una *penalización* en los costos para la empresa.

Sabemos por los datos presentados al principio de esta sección que las demandas de cada producto son 180 y 162, respectivamente. Definiremos a las variables aleatorias η_1 y η_2 como las variables que representan a los cambios en las demandas de cada producto. Supondremos, para nuestro ejemplo, que dichas variables son discretas. Así, podemos expresar a las demandas como:

$$\begin{cases} h_{P_1} = 180 + \eta_1, \\ h_{P_2} = 162 + \eta_2. \end{cases}$$

Es razonable pensar que las distribuciones de probabilidad de dichas variables aleatorias pueden ser estimadas mediante la información estadística de la empresa. Supondremos aquí que η_1 toma solo dos valores, 0 y 10 con las probabilidades 3/5 y 2/5, respectivamente. Por otro lado, η_2, toma los valores 0, y 15 con probabilidad 1/2 para cada uno. Adicionalmente, supondremos que ambas variables aleatorias son independientes.

Denominaremos a $\xi = (\eta_1, \eta_2)$ como el vector que agrupará las componentes aleatorias del programa. Sabiendo que valores toma cada variable, podremos conocer que el vector tendrá cuatro posibles escenarios o realizaciones, producto de las combinaciones, como se puede ver a continuación, en la Figura 1.2.

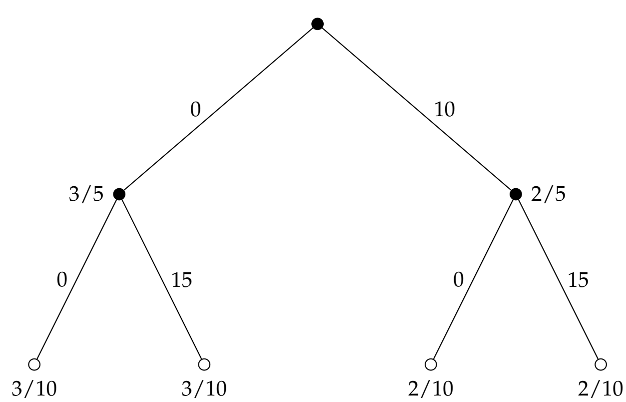

Figura 1.2: Árbol de escenarios del ejemplo.

Como objetivo tendremos la minimización del programa:

$$
\begin{array}{llcccl}
\text{mín} & z = 2x_{m_1} + 3x_{m_2} & & & & \\
\text{s.a.} & x_{m_1} & + & x_{m_2} & \leq & 100, \\
 & 2x_{m_1} & + & 6x_{m_2} & \geq & 180 + \eta_1, \\
 & 3x_{m_1} & + & 3x_{m_2} & \geq & 162 + \eta_2, \\
 & x_{m_1} & & & \geq & 0, \\
 & & & x_{m_2} & \geq & 0.
\end{array} \tag{1.1}
$$

Falta considerar que cuando existe un cambio en la planeación dada de la demanda, esto representará costos adicionales para la empresa, llamados *costos de corrección*. Para poder determinar este posible costo, que no es conocido hasta después de realizado el experimento, se determinará el nivel de violación de las restricciones iniciales que cada escenario implicaría. Para este ejemplo, supondremos que los costos de corrección son:

$$
\begin{cases}
q(P_1) & = & 7, \\
q(P_2) & = & 12,
\end{cases}
$$

donde $q(P_i)$ se puede interpretar como el costo total al que equivaldría elegir un determinado escenario bajo la posibilidad de ser diferente en la realización. Es decir, si tomaramos una decisión basada en el resultado de la optimización y en la realidad el resultado fuese diferente, tendríamos que pagar el costo de penalización por la desviación presentada (por ejemplo: costos de almacenamiento extra, compras de último momento con un sobrecargo, etcétera).

Además, se introduce para cada una de las dos restricciones estocásticas en (1.1) una variable de corrección $y_i(\xi)$, i = 1, 2, que mide simplemente la escasez correspondiente en la producción si hay alguna. La escasez depende de las realizaciones de nuestro vector aleatorio correspondiente a la variable de corrección, ocurre que, las y_i son variables por si mismas. Siguiendo el enfoque esbozado anteriormente, reemplazamos el programa no bien definido (por la aleatoriedad) de (1.1) por un programa lineal determinista (usando ahora la información relativa a las variables aleatorias que estamos involucrando) utilizando la función de corrección de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{llcccccccl}
\text{mín} & z + \mathbb{E}_{\xi}[7y_1(\xi) + 12y_2(\xi)] & & & & & & , & & \\
\text{s.a.} & x_{m_1} & + & x_{m_2} & & & & & \leq & 100, \\
 & 2x_{m_1} & + & 6x_{m_2} & + & y_1(\xi) & & & \geq & h_{P_1}, \\
 & 3x_{m_1} & + & 3x_{m_2} & & & + & y_2(\xi) & \geq & h_{P_2}, \\
 & x_{m_1} & & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_{m_2} & & & & & \geq & 0, \\
 & & & & & y_1(\xi) & & & \geq & 0, \\
 & & & & & & & y_2(\xi) & \geq & 0.
\end{array} \tag{1.2}
$$

En la expresión anterior, la esperanza representa el valor esperado suponiendo la distribución del vector aleatorio ξ. La formulación utilizando la esperanza representa el enfoque de optimizar minimizando el costo total promedio.

Resolviendo el problema en primera instancia, usaremos la distribución del vector aleatorio mostrada anteriormente en la Figura 1.2, por lo que usando dichos escenarios tendremos lo siguiente:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{mín} & \multicolumn{6}{l}{z + \sum_{i=1}^{4} p_i[7y_1(\xi) + 12y_2(\xi)]} & & , \\
\text{s.a.} & x_{m_1} & + & x_{m_2} & & & & \leq & 100, \\
 & 2x_{m_1} & + & 6x_{m_2} & + & y_1(\xi) & & \geq & h_{P_1}, \\
 & 3x_{m_1} & + & 3x_{m_2} & & & + \; y_2(\xi) & \geq & h_{P_2}, \\
 & x_{m_1} & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_{m_2} & & & & \geq & 0, \\
 & & & & & y_1(\xi) & & \geq & 0, \\
 & & & & & & y_2(\xi) & \geq & 0.
\end{array}
\tag{1.3}
$$

Ahora supondremos que después de una semana, nos dimos cuenta que en el transcurso de la semana se aumentó la demanda del producto 2 en 5 unidades, así que el nuevo problema a resolver es el siguiente:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{mín} & \multicolumn{6}{l}{2x_{m_1} + 3x_{m_2} + [7(0) + 12(5)]} & & \\
\text{s.a.} & x_{m_1} & + & x_{m_2} & & & & \leq & 100, \\
 & 2x_{m_1} & + & 6x_{m_2} & + & y_1(\xi) & & \geq & 180, \\
 & 3x_{m_1} & + & 3x_{m_2} & & & + \; y_2(\xi) & \geq & 162 + 5, \\
 & x_{m_1} & & & & & & \geq & 0, \\
 & & & x_{m_2} & & & & \geq & 0, \\
 & & & & & y_1(\xi) & & \geq & 0, \\
 & & & & & & y_2(\xi) & \geq & 0.
\end{array}
\tag{1.4}
$$

Realizando la optimización, obtendremos que las nuevas soluciones del problema serán $x_{m_1} = 38$ y $x_{m_2} = 17$, dando una función de costo total de 187. Todo el procedimiento anterior nos muestra cómo se modela y se soluciona un programa estocástico lineal, en líneas generales. En el siguiente capítulo presentaremos la teoría formalmente.

Capítulo 2

Programación lineal estocástica

La programación estocástica es el área de las matemáticas enfocada a la toma de decisiones bajo incertidumbre, la cual es un subcampo de la Programación Matemática. Los programas estocásticos son modelos de optimización con estructuras especiales.

Definiremos un programa estocástico lineal como un programa lineal en el que algunos datos del problema pueden ser considerados inciertos y por lo tanto representados por variables aleatorias.

El espacio de factibilidad en el que se buscarán las soluciones se verá afectado con estos posibles cambios en las restricciones, que pueden provocar transformaciones del espacio de soluciones para el problema determinista.

Sabemos que un programa lineal es de la forma:

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{x} & c^T x & & \\ \text{s.a.} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & 0 \quad , \end{array} \tag{2.1}$$

donde x es un vector de decisiones de dimensiones $n_1 \times 1$, c es un vector de costos de dimensiones $n_1 \times 1$, A es de $m_1 \times n_1$ y b es de $m_1 \times 1$. La función objetivo es $z = c^T x$. Así, definimos $D_1 = \{x | Ax = b, x \geq 0\}$ como el conjunto de soluciones factibles. Diremos entonces que una decisión óptima, x^*, es una solución factible tal que $c^T x \geq c^T x^*$, para toda x en el espacio de soluciones D_1.

2.1. Programas lineales estocásticos de Dos Estados con Corrección Fija

El problema estocástico de Dos Estados con Corrección Fija, se refiere a la formulación general del ejercicio que vimos en el primer capítulo, el cual fue introducido por Dantzig en [6].

Tomando como base un programa lineal como en (2.1), podemos definir el problema de dos estados como sigue:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{mín} & z = c^T x + \mathbb{E}_{\xi}[\text{mín}\, q^T y(\xi)] & & & & & \\ \text{s.a.} & & & Ax & = & b & , \\ & T(\xi)x & + & Wy(\xi) & = & h(\xi) & , \\ & & x, & y(\xi) & \geq & 0 & . \end{array} \tag{2.2}$$

Consideraremos que ξ es el vector de incertidumbre, y que será conocido hasta que se haya realizado el *experimento*. Llamaremos entonces decisiones de *"primer estado"*, representado por el vector x, al grupo de decisiones que deben ser tomadas antes del experimiento y al período en el que son tomadas como el *"primer estado"*. Después de conocerse el vector ξ resultante del experimento, se tomarán las decisiones de acciones correctivas llamadas de *"segundo estado"*, representado por el vector $y(\xi)$, en el período que a su vez será denominado como el *"segundo estado"*.

Los vectores y matrices de información del primer estado son c, b y A, de los cuales conocemos ya sus dimensiones. En el segundo estado, distintos escenarios o realizaciones $\omega \in \Omega$ pueden ocurrir, por lo que para una realización en particular ω, la información del segundo estado está compuesta por los vectores $q(\omega)$, $h(\omega)$ y $T(\omega)$ (los cuales se vuelven conocidos), y tienen las dimensiones $n_2 \times 1$, $m_2 \times 1$ y $m_2 \times n_1$ respectivamente. Definiremos a W como la matriz de *corrección*, que tiene valores fijos y dimensión finita, $m_2 \times n_2$. A $T(\xi)$ le llamaremos la matriz *aplicativa*, ya que son los componentes aleatorios de las restricciones originales.

Denotaremos a los $T_i(\omega)$ como el *i*ésimo renglón de la matriz $T(\omega)$. Si tomamos los vectores de información del segundo estado, q, h y T, y los conjuntamos en el vector $\xi^T = (q^T, h^T, T_1, ..., T_{m_2})$, obtenemos un vector aleatorio que puede tener hasta $N = n_2 + m_2 + (m_2 \times n_1)$ componentes. Por lo anterior, definiremos al conjunto $\Xi \subset \mathbb{R}^N$, como el soporte de ξ, es decir, es el subconjunto cerrado más pequeño tal que $\mathbb{P}[\xi \in \Xi] = 1$.

Una vez conocido lo que ocurre con el vector aleatorio, es decir, cuando ya tenemos la reali-

Primer período	Experimento	Segundo Período
Conocemos solo la distribución de las componentes aleatorias.	Se conoce como el escenario que toma el vector aleatorio.	Optimizamos los costos de corrección.
Buscamos el vector x^* que minimice la función objetivo z.	Se conoce ξ^*, la realización del vector aleatorio.	Se optimiza buscando $y(x^*, \xi^*)$.

Cuadro 2.1: Proceso de un programa lineal estocástico

zación ω, la información del segundo estado que teníamos como aleatoria, se volverá conocida y por lo tanto se procederá a realizar la optimización del segundo estado tomando la decisión $y(\omega)$ o $(y(\omega, x))$, a la cual denominaremos *función correctiva*. Se puede decir que se les permite tomar decisiones adicionales para evitar que las restricciones del problema se vuelvan inviables. En otras palabras, en la segunda etapa recurrimos a un mayor grado de flexibilidad para preservar la viabilidad (pero a un costo).

La relación que existe entre la función y y ω indica que las decisiones y no son normalmente iguales bajo diferentes realizaciones de ω, y se eligen de manera que las restricciones del segundo estado se cumplen casi seguramente, es decir, para todos $\omega \in \Omega$ excepto tal vez para los conjuntos con probabilidad cero.

Sea ω una realización dada del vector aleatorio. Denotaremos al valor óptimo del problema de segundo estado por

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_y \{q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x,\ y \geq 0\}. \tag{2.3}$$

Definiremos su esperanza como

$$\mathcal{Q}(x) = \mathbb{E}_\xi Q(x, \xi(\omega)). \tag{2.4}$$

Así, obtenemos el equivalente determinista de la forma

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_x & x = c^T x + \mathcal{Q}(x) & & , \\ \text{s.a.} & Ax & = & b, \\ & x & \geq & 0 \quad . \end{array} \tag{2.5}$$

Las decisiones de primera fase x se toman en presencia de incertidumbre sobre las futuras realizaciones de ξ. En la segunda etapa, el valor real de ξ se hace conocido y algunas acciones correctivas se pueden tomar. Las decisiones de primera etapa son, sin embargo, escogidas por sus efectos teniendo en cuenta lo que pueda ocurrir en el futuro. Estos efectos futuros son medidos por la función de valor, $\mathcal{Q}(x)$, que calcula el valor esperado de tomar la decisión x.

Una forma de pensar en este modelo de dos etapas es:

- acción, tomar una decisión (cantidad para producir),
- observación, observar una realización de los elementos estocásticos (demanda que ocurre),
- reacción (recurso), otras decisiones, dependiendo de la realización observada (producción adicional para satisfacer la demanda si es necesario).

Se debe tener en claro la secuencia que se aplica a medida que se avanza por el árbol para formular el problema correctamente.

Para resumir, a medida que avanzamos en el árbol de escenarios (para cualquier escenario) tenemos el siguiente orden de eventos: en la primera etapa, se tomará una decisión y en la segunda etapa una realización del elemento estocástico (demanda) y una decisión sobre los valores de las variables de recurso.

2.2. Factibilidad y Optimalidad

Para describir las propiedades de factibilidad en este contexto, comenzaremos suponiendo que el vector aleatorio ξ es discreto.

Basándonos en la construcción que hemos realizado en este capítulo a partir de un programa lineal básico determinaremos $D_1 = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$, que es un espacio determinado por constantes fijas y que a su vez, no depende de una realización particular del vector aleatorio. Por otro lado, cuando examinamos el espacio que corresponde a las componentes aleatorias, definimos al *espacio de factibilidad de segundo estado* para un determinado ω por

$$D_2(\omega) = \{x|\exists \;\; y \geq 0, tal\, que \; W(\omega)y = h(\omega) - T(\omega)x\}.$$

Considerando que ξ es un vector aleatorio discreto y que la anterior definición es válida para cada ω dada, el espacio de factibilidad del segundo estado se define como

$$D_2 = \bigcap_{\omega \in \Xi} D_2(\omega).$$

Recordaremos la definición de poliedro en la teoría de programación lineal.

Definición 2.1. *Un poliedro es la intersección de un número finito de subespacios, es decir, es el conjunto de x en $\mathbb{R}^n$ tal que $Ax \leq b$, al cual denotaremos con P.*

Por otro lado, usaremos el siguiente concepto de hiperplano.

Definición 2.2. *Un hiperplano es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que cumple que para a en $\mathbb{R}^n / \{0\}$ y β en $\mathbb{R}$:*

$$H(a, \beta) = \{x | a^T x = \beta\}.$$

Haciendo uso de estas definiciones, probaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Para una ω dada, $D_2(\omega)$ es un poliedro convexo.*

Demostración. Consideramos alguna $\hat{x}$ y ω tal que no existe y positiva que cumpla que $W(\omega)y(\omega) = h(\omega) - T(\omega)\hat{x}$.

Por lo tanto, tenemos un punto $h(\omega) - T(\omega)\hat{x}$, que no pertenece a $W(\omega)y(\omega)$, que representa el conjunto convexo.

Debe existir un espacio hiperplano que separe al punto $h(\omega) - T(\omega)\hat{x}$ de $W(\omega)y(\omega)$.

Denotaremos el conjunto H = {x | $\sigma^T x = 0$ }, el cual satisface que $\sigma^T t < 0$ para $W(\omega)y(\omega) = t$ y $\sigma^T(h(\omega) - T(\omega)\hat{x}) > 0$. Lo que significa que es un hiperplano que separa el punto y el conjunto convexo.

Dado esto, tenemos que

$$\sigma^T h(\omega) - \sigma^T T(\omega)\hat{x} > 0,$$
$$\sigma^T W(\omega)y(\omega) < 0.$$

Por lo que existe un α en $(0,1)$ tal que

$$\alpha(\sigma^T h(\omega) - \sigma^T T(\omega)\hat{x}) + (1 - \alpha)(\sigma^T W(\omega)\hat{y}(\omega)) = 0,$$

$$\sigma^T(\alpha(h(\omega) - T(\omega)\hat{x}) + (1 - \alpha)(W(\omega)\hat{y}(\omega))) = 0.$$

Por lo que

$$\alpha(h(\omega) - T(\omega)\hat{x}) + (1 - \alpha)(W(\omega)\hat{y}(\omega)) = 0,$$

$$h(\omega) - T(\omega)\hat{x} + W(\omega)\hat{y}(\omega)\tfrac{\alpha}{1-\alpha} = 0.$$

Esto genera una contradicción con nuestro primer supuesto, ya que $y(\omega) = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ es positiva.

Por lo tanto, $D_2(\omega)$ es convexo. □

Por lo anterior, D_2 cumple que es un poliedro convexo ya que es la intersección finita de subespacios lineales.

2.3. Programas multiestados

2.3.1. Cómo funcionan

En la programación lineal estocástica, decimos que no podemos anticipar cada posible resultado, por lo que las decisiones son no anticipadas de los resultados futuros.

Para mostrar cómo es el funcionamiento de un programa estocástico multiestados, tomaremos un ejemplo que es introducido en el libro de Shapiro en [11].

Consideraremos un manufacturero que planeará a un horizonte de T años. Dicho productor manufacturero produce n productos. Dichos productos tienen en total m partes que los componen. Una unidad del producto i requiere a_{ij} unidades de la parte j, donde $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$. La demanda será modelada como un proceso estocástico, D_t, $t = 1, ..., T$, donde cada $D_t = (D_{t_1}, ..., D_{t_n})$ es un vector aleatorio de las demandas para los n productos que contiene la cartera del productor en el tiempo t. Por simplicidad, para este ejercicio consideraremos que todos los costos y precios serán constantes a lo largo de todos los períodos. Las partes no usadas, podrán ser guardadas y usadas en el siguiente período, y se representarán por las variables h_j que contendrán las unidades en inventario.

Uno debe tomar decisiones sobre pedidos y producción en etapas sucesivas, dependiendo de la información disponible en la etapa actual. Es decir, tomaremos decisiones basándonos en la información pasada. Usamos el símbolo $D_{[t]} := (D_1, ..., D_t)$ para denotar la información del proceso de demanda en los periodos $1, ..., t$.

Denotaremos al vector $x_{t-1} = (x_{t-1,1}, ..., x_{t-1,n})$ como las cantidades ordenadas de productos al principio del estado t, antes de que conozcamos la información del vector D_t. El número de unidades producidas en el estado t estará denotado por z_t y el nivel de inventario de las partes al final de la etapa t por y_t para todo $t = 1, ..., T$. Usaremos el subíndice $t - 1$ para referirnos que puede depender de las realizaciones pasadas $D_{[t-1]}$ pero no en D_t, mientras que la producción y las variables de almacenamiento al estado t dependerán de $D_{[t]}$, que incluye D_t.

Teniendo esta formulación, es fácil ver que para el caso en el que $T = 1$ tendremos un problema de dos estados, la variable x_0 corresponde al vector de decisión del primer estado mientras que z_1 y y_1 serán los vectores de decisión del segundo estado. Dado esto, supondremos $T > 1$ y consideraremos el último estado $t = T$, después de que la demanda ha sido observada. En este punto, todos los niveles de inventario y_{T-1} de las partes así como las cantidades ordenadas x_{T-1} son conocidas. Tendremos así que la formulación al estado T es la siguiente

$$\begin{aligned} \min_{z_T, y_T} \quad & (l-q)^\top z_T - s^\top y_T \\ \text{s.a.} \quad & y_T = y_{T-1} + x_{T-1} - A^\top z_T, \\ & 0 \leq z_t \leq d_T,\ y_T \geq 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

donde d_t es la realización observada de D_T. Denotaremos al valor óptimo de la ecuación anterior como $Q_T(x_{T-1}, y_{T-1}, d_T)$. Este valor óptimo depende de los ultimos niveles de inventarios, órdenes y la demanda presente. En el estado $T-1$ conocemos la realización de $d_{[T-1]}$ y $D_{[T-1]}$, por lo que ahora nos preocupa el valor esperado condicional que tendrá el costo en el último estado, que es la función representada por:

$$\mathcal{Q}_T(x_{T-1}, y_{T-1}, d_{[T-1]}) := \mathbb{E}\{Q_T(x_{T-1}, y_{T-1}, D_T) | D_{[T-1]} = d_{[T-1]}\}. \tag{2.7}$$

Y en el estado $T-1$ resolveremos entonces el siguiente problema

$$\begin{aligned} \min_{z_{T-1}, y_{T-1}, x_{T-1}} \quad & (l-q)^\top z_{T-1} + h^\top y_{T-1} + c^\top x_{T-1} + \mathcal{Q}_T(x_{T-1}, y_{T-1}, d_{[T-1]}) \\ \text{s.a.} \quad & y_{T-1} = y_{T-2} + x_{T-2} - A^\top z_{T-1}, \\ & 0 \leq z_{t-1} \leq d_{T-1},\ y_{T-1} \geq 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

El valor óptimo esta denotado por $Q_{T-1}(x_{T-2}, y_{T-2}, d_{[T-1]})$. El problema para cada estado $t = T-1, \ldots, 1$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \min_{z_T, y_T, x_T} \quad & (l-q)^\top z_t + h^\top y_t + c^\top x_t + \mathcal{Q}_{t+1}(x_t, y_t, d_{[t]}) \\ \text{s.a.} \quad & y_t = y_{t-1} + x_{t-1} - A^\top z_t, \\ & 0 \leq z_t \leq d_t,\ y_t \geq 0, \end{aligned} \tag{2.9}$$

con

$$\mathcal{Q}_{t+1}(x_t, y_t, d_{[t]}) := \mathbb{E}\{Q_{t+1}(x_t, y_t, D_{[t+1]}) | D_{[t]} = d_{[t]}\}.$$

El valor óptimo del problema descrito en (2.9) es denotado por $Q_t(x_{t-1}, y_{t-1}, d_{[t]})$, y la recurrencia hacia atrás continua. En el estado $t = 1$, el símbolo y_0 representará el nivel inicial de inventarios de las partes, y el valor óptimo de la función $Q_1(x_0, d_1)$ depende solo del valor inicial de x_0 y la realización d_1 de la primera demanda D_1.

El problema inicial es determinar las primeras cantidades de x_0. Esto puede ser escrito como

$$\min_{x_0 \geq 0} \quad c^\top x_0 + \mathbb{E}[Q_1(x_0, D_1)] \ . \tag{2.10}$$

La relación entre el orden que especificamos antes y las variables es:

- en la primera etapa una decisión,
- en la segunda etapa una realización del elemento estocástico (demanda),
- una decisión sobre los valores de las variables de recurso,
- en la segunda etapa una decisión,
- en la tercera etapa una realización del elemento estocástico (demanda),
- una decisión sobre los valores de las variables de recurso.

En la siguiente parte consideraremos valores numéricos para poder visualizar lo que hemos mencionado anteriormente.

Ejemplo numérico

Para comenzar con este ejemplo tomaremos como base un problema de recurso que hemos definido de dos estados y trabajaremos en él para poder dar un ejemplo de tres estados. Este ejemplo fue tomado de la página del curso de Investigación de Operaciones que imparte el Dr. J. E. Beasley en la Universidad de Brunel, en Londres [3].

Como habíamos visto, tenemos dos etapas o estados: en la primera etapa tomamos una decisión y en la segunda etapa vemos una realización de los elementos estocásticos del problema donde las decisiones que tomemos dependerán de la realización particular de los elementos estocásticos observados.

Supongamos que tenemos que tomar una decisión sobre la cantidad de producto X que se debe producir. Cada unidad de X que hacemos nos cuesta 25 pesos. X está hecho para satisfacer la demanda de los clientes en el próximo período de tiempo. Sin embargo, la demanda es considerada estocástica y denotada por D_s para toda $s = 1, ..., S$ y con una distribución de probabilidad discreta donde cada D_s tendrá una probabilidad asignada p_s. Por simplicidad, trabajaremos con solo dos escenarios:

$$\begin{cases} D_1 & = & 500, & con & p_1 = 0.6 \\ D_2 & = & 700, & con & p_2 = 0.4 \end{cases}.$$

Tendremos la flexibilidad de comprar el producto de un proveedor externo para cumplir con la demanda observada de los clientes, pero esto nos cuesta 30 pesos por unidad (es decir, recurriremos a una fuente de suministro adicional si la demanda excede la producción). Si tuviéramos que producir 600 y la demanda es de 500, estaríamos excediendo la demanda por lo que el costo de recurso sería 0. Pero si la demanda es de 700, necesitamos recurrir a 100 unidades adicionales para satisfacerla.

Para los primeros dos estados consideraremos un árbol de escenarios de la siguiente forma:

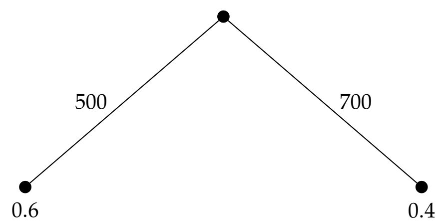

Figura 2.1: Escenarios elegibles.

El primer paso consistirá en simular como se comportará la demanda y decidir cuánto producir. Sea x_1 mayor o igual a 0 el número de unidades de X para producir ahora (en el primer estado). Como tenemos dos escenarios, asociamos un sub-subíndice de escenario a las variables de recurso en la segunda etapa, así que y_{2_s} será positiva y representará el número de unidades de X que se deberán comprar al proveedor externo en la segunda etapa en el escenario s cuando la realización estocástica de la demanda es D_s, con $s = 1,2$. El sub-subíndice de escenario se elimina si la variable es independiente del escenario.

Entonces, las restricciones para garantizar que la demanda siempre se satisfaga es $x_1 + y_{2_s} \geq Ds$, $s = 1,2$.

Nuestra función objetivo estará compuesta por el costo $25x_1$ el cual conocemos con certeza y dos costos que podemos denotar por $30y_{2_s}$, cada uno incurrido con probabilidad p_s con $s = 1,2$. En la práctica, solo se incurrirá en uno de estos costos S, una vez que se realice la demanda. Sin embargo, antes de que eso suceda, solo podemos considerar la distribución de probabilidad.

Lo que buscaríamos en este problema es minimizar el costo total esperado, que estará determinado por:

$$costo_{inicial} + \sum_{i-escenario} costo_{i-escenario} * \mathbb{P}[i - escenario] = 25x_1 + \sum_{s=1}^{2} 30y_{2_s}p_s$$
$$= 25x_1 + 30y_{2_1} * 0.6 + 30y_{2_2} * 0.4$$

Por lo que finalmente nuestra función objetivo será

$$25x_1 + 18y_{2_1} + 12y_{2_2}$$

Por lo tanto, nuestro programa estocástico con recurso se transforma en el siguiente problema determinista a resolver:

$$\begin{array}{llcccccl} \text{mín} & 25x_1 + 18y_{2_1} + 12y_{2_2} & & & & & & , \\ \text{s.a.} & x_1 & + & y_{2_1} & & & \geq & 500, \\ & x_1 & & & + & y_{2_2} & \geq & 700, \\ & x_1 & , & y_{2_1} & , & y_{2_2} & \geq & 0. \end{array} \tag{2.11}$$

Inicialmente tomamos una decisión sobre cuánto producir. Obtendremos un valor para x_1, que es la cantidad de producción que necesitamos, mientras que también obtenemos un conjunto de valores y_{2_s}, uno para cada uno de los dos escenarios de D_s de demanda del cliente, es decir, decidimos cuáles son las decisiones óptimas para todos los escenarios posibles, de los que solo uno de estos dos valores será relevante una vez que se conozca una realización de la demanda estocástica, los demás serán irrelevantes. Solucionando entonces el problema lineal (2.11) obtenemos que la producción que necesitamos realizar en este momento es igual a 500 que es el valor de x_1, mientras que la variable de recurso del primer escenario es igual a cero y la de segundo escenario es igual a 200. Con un valor de la función objetivo mínimo de $14,900$.

En la segunda etapa tenemos dos posibles realizaciones de la demanda estocástica: una demanda de 500 con probabilidad de 0.6 o una demanda de 700 con probabilidad de 0.4. Supongamos que la realización observada en esta etapa es de 500 piezas demandadas, las cuales son cubiertas en con la producción que vimos anteriormente sin ningún costo adicional.

Después de esta realización tomamos una decisión sobre cuánto producir para satisfacer la demanda en el próximo período. En la tercera etapa, nuevamente tenemos dos posibles realizaciones de la demanda estocástica, pero estas son diferentes dependiendo de la realización en la segunda etapa.

Para este ejemplo, si la demanda realizada en la segunda etapa fue de 500, las posibles realizaciones en la tercera etapa son: una demanda de 600 con probabilidad de 0.3 y una demanda de 700 con probabilidad de 0.7. Si la demanda realizada en la segunda etapa es de 700, las posibles realizaciones serían una demanda de 500 con probabilidad de 0.6 y de 800 con probabilidad de 0.4.

Podemos entonces considerar cuatro posibles escenarios:

- *Escenario 1:* Primer estado: 500. Segundo estado: 600. Probabilidad: 0.6(0.3) = 0.18.
- *Escenario 2:* Primer estado: 500. Segundo estado: 700. Probabilidad: 0.6(0.7) = 0.42.
- *Escenario 3:* Primer estado: 700. Segundo estado: 500. Probabilidad: 0.4(0.6) = 0.24.

- *Escenario 4:* Primer estado: 700. Segundo estado: 800. Probabilidad: 0.4(0.4) = 0.16.

Cabe destacar que la suma de todas las probabilidades es 1. Consideraremos entonces un árbol de escenarios de la siguiente forma:

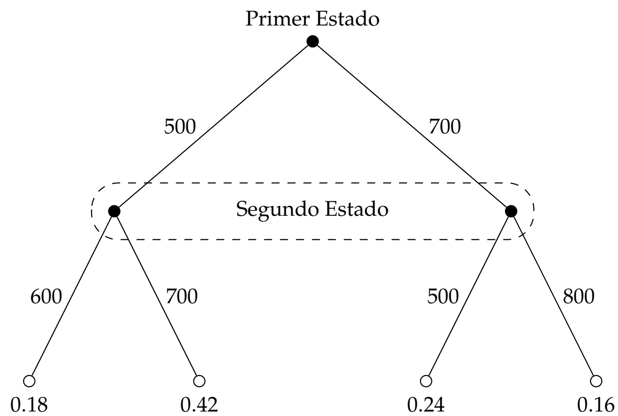

Figura 2.2: Árbol multiestados.

Sea entonces $x_1 \geq 0$ el número de unidades del producto X para producir ahora (en la primera etapa) y cubrir así el primer periodo de tiempo. Ahora el $y_{2_s} \geq 0$ es el número de unidades de x que se deben comprar al proveedor externo en la segunda etapa en el escenario s considerando que ahora tendremos 4 escenarios distintos, por lo que $s = 1, ..., 4$.

Sea $x_{2_s} \geq 0$, que representa el número de unidades de X para producir en la segunda etapa en el escenario s, con $s = 1, ..., 4$. Esta decisión de segunda etapa depende del escenario, es decir, depende de la realización observada de la demanda estocástica.

Denotaremos ahora a $y_{3_s} \geq 0$ como el número de unidades de X para comprar al proveedor externo en la tercera etapa en el escenario s (s = 1, ..., 4), por lo que serán llamadas las variables de recurso del tercer estado. Los costos se mantendrán constantes e iguales a los ya mencionados, con 25 pesos por cada unidad producida, 30 por cada unidad comprada al proveedor externo.

Consideraremos las siguientes restricciones para asegurar que la demanda del cliente esté satisfecha en la primera etapa:

$$x_1 + y_{2_s} \geq 500 \text{ , } s = 1, 2,$$
$$x_1 + y_{2_s} \geq 700 \text{ , } s = 3, 4.$$

Para la segunda etapa, tendremos unidades sobrantes que constituirán un inventario para ayudar a satisfacer la demanda futura. Este nivel de inventario será determinado de la siguiente forma:

$$x_1 + y_{2_s} - 500, s = 1,2,$$
$$x_1 + y_{2_s} - 700, s = 3,4.$$

Para garantizar el cumplimiento de la demanda en la tercera etapa, consideraremos que:

inventario + cantidad producida + cantidad comprada externamente será mayor o igual a la demanda

De esta forma tendremos:

$$x_1 + y_{2_s} - 500 + x_{2_s} + y_{3_s} \geq 600, s = 1,$$
$$x_1 + y_{2_s} - 500 + x_{2_s} + y_{3_s} \geq 700, s = 2,$$
$$x_1 + y_{2_s} - 700 + x_{2_s} + y_{3_s} \geq 500, s = 3,$$
$$x_1 + y_{2_s} - 700 + x_{2_s} + y_{3_s} \geq 800, s = 4.$$

Consideremos las variables de recurso y_{2_s} para $s = 1$ y $s = 2$. Estas son las cantidades compradas externamente en los escenarios 1 y 2 en la segunda etapa. Ambos escenarios tienen una historia común incluyendo la segunda etapa (una decisión x_1 en la primera etapa y una realización observada de la demanda en la segunda etapa de 500). No es hasta que tenemos una realización de la demanda en la tercera etapa que los escenarios 1 y 2 difieren. Simplemente no podemos tener diferentes variables de recurso porque no podemos distinguir entre estos escenarios. Podemos asegurar que y_{2_1} e y_{2_2} son iguales al agregar la restricción y_{2_1} = y_{2_2} al problema.En las restricciones del programa lineal que hacen cumplir tales condiciones se llaman restricciones de no-anticipación, lo que implica que no podemos anticipar el futuro.

Como se muestra en la primera parte de este ejemplo, los escenarios con un historial común deben tener el mismo conjunto de decisiones por lo que tendremos las restricciones de no-anticipación determinadas para el escenario 1 y 2 como y_{2_1} = y_{2_2} y x_{2_1} = x_{2_2}, mientras que los escenarios 3 y 4 tendrán a las restricciones y_{2_3} = y_{2_4} y x_{2_3} = x_{2_4}. Todos, para la segunda etapa.

Para la función de costo, sólo tenemos un costo incurrido con certeza, es decir, $2x_1$, todos los demás costos son probabilísticos, es decir, determinados por la distribución de los escenarios. La ponderación de cada costo de escenario por la probabilidad de escenario estará asociado al costo esperado. Por lo tanto, tenemos como objetivo minimizar el costo total esperado que esta dado por:

$$
\begin{aligned}
costo_{inicial} + \sum_{i-escenario} costo_{i-escenario} * \mathbb{P}[i - escenario] &= 25x_1 + \sum_{s=1}^{4}(25x_{2_s} + 30y_{2_s} + 30y_{3_s}) * p_s \\
&= 25x_1 + 0.18(25x_{2_1} + 30y_{2_1} + 30y_{3_1}) \\
&+ 0.42(25x_{2_2} + 30y_{2_2} + 30y_{3_2}) \\
&+ 0.24(25x_{2_3} + 30y_{2_3} + 30y_{3_3}) \\
&+ 0.16(25x_{2_4} + 30y_{2_4} + 30y_{3_4}) \\
&= 25x_1 + 4.5x_{2_1} + 5.4y_{2_1} + 5.4y_{3_1} \\
&+ 10.5x_{2_2} + 12.6y_{2_2} + 12.6y_{3_2} \\
&+ 6x_{2_3} + 7.2y_{2_3} + 7.2y_{3_3} \\
&+ 4x_{2_4} + 4.8y_{2_4} + 4.8y_{3_4}.
\end{aligned}
$$

Esto completa nuestra formulación de este programa estocástico de tres etapas en particular. Para concluir, damos la formulación completa a continuación.

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcr}
\text{mín} & 25x_1 & + & 4.5x_{2_1} & + & 5.4y_{2_1} & + & 5.4y_{3_1} & + & 10.5x_{2_2} & + & 12.6y_{2_2} & + & 12.6y_{3_2} \\
 & & + & 6x_{2_3} & + & 7.2y_{2_3} & + & 7.2y_{3_3} & + & 4x_{2_4} & + & 4.8y_{2_4} & + & 4.8y_{3_4}, \\
\text{s.a.} & x_1 & + & y_{2_1} & & & & & & & \geq & 500, \\
 & x_1 & & & + & y_{2_2} & & & & & \geq & 500, \\
 & x_1 & & & & & + & y_{2_3} & & & \geq & 700, \\
 & x_1 & & & & & & & + & y_{2_4} & \geq & 700, \\
 & x_1 & + & y_{2_1} & - & 500 & + & x_{2_1} & + & y_{3_1} & \geq & 600, \\
 & x_1 & + & y_{2_2} & - & 500 & + & x_{2_2} & + & y_{3_2} & \geq & 700, \\
 & x_1 & + & y_{2_3} & - & 500 & + & x_{2_3} & + & y_{3_3} & \geq & 500, \\
 & x_1 & + & y_{2_4} & - & 500 & + & x_{2_4} & + & y_{3_4} & \geq & 800, \\
 & x_{2_1} & = & x_{2_2} & & & & & & & & , \\
 & y_{2_1} & = & y_{2_2} & & & & & & & & , \\
 & x_{2_3} & = & x_{2_4} & & & & & & & & , \\
 & y_{2_3} & = & y_{2_4} & & & & & & & & , \\
 & x_1 & , & x_{2_1} & , & x_{2_2} & , & x_{2_3} & , & x_{2_4} & \geq & 0, \\
 & y_{2_1} & , & y_{2_2} & , & y_{2_3} & , & y_{2_4} & & & \geq & 0, \\
 & y_{3_1} & , & y_{3_2} & , & y_{3_3} & , & y_{3_4} & & & \geq & 0.
\end{array}
\tag{2.12}
$$

Simplificando la ecuación (2.12) obtenemos

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr}
\text{mín} & 25x_1 & + & 4.5x_{2_1} & + & 5.4y_{2_1} & + & 5.4y_{3_1} & + & 10.5x_{2_2} & + & 12.6y_{2_2} & + & 12.6y_{3_2} \\
 & & + & 6x_{2_3} & + & 7.2y_{2_3} & + & 7.2y_{3_3} & + & 4x_{2_4} & + & 4.8y_{2_4} & + & 4.8y_{3_4}, \\
\text{s.a.} & x_1 & + & y_{2_1} & & & & & & & \geq & 500, & & \\
 & x_1 & & & + & y_{2_2} & & & & & \geq & 500, & & \\
 & x_1 & & & & & + & y_{2_3} & & & \geq & 700, & & \\
 & x_1 & & & & & & & + & y_{2_4} & \geq & 700, & & \\
 & x_1 & + & y_{2_1} & + & x_{2_1} & + & y_{3_1} & & & \geq & 1100, & & \\
 & x_1 & + & y_{2_2} & + & x_{2_2} & + & y_{3_2} & & & \geq & 1200, & & \\
 & x_1 & + & y_{2_3} & + & x_{2_3} & + & y_{3_3} & & & \geq & 1000, & & \\
 & x_1 & + & y_{2_4} & + & x_{2_4} & + & y_{3_4} & & & \geq & 1300, & & \\
 & x_{2_1} & - & x_{2_2} & & & & & & & = & 0, & & \\
 & y_{2_1} & - & y_{2_2} & & & & & & & = & 0, & & \\
 & x_{2_3} & - & x_{2_4} & & & & & & & = & 0, & & \\
 & y_{2_3} & - & y_{2_4} & & & & & & & = & 0, & & \\
 & x_1 & , & x_{2_1} & , & x_{2_2} & , & x_{2_3} & , & x_{2_4} & \geq & 0, & & \\
 & y_{2_1} & , & y_{2_2} & , & y_{2_3} & , & y_{2_4} & & & \geq & 0, & & \\
 & y_{3_1} & , & y_{3_2} & , & y_{3_3} & , & y_{3_4} & & & \geq & 0. & &
\end{array}
\tag{2.13}
$$

A continuación mostramos el valor que tendrá cada variable después de la solución del problema (2.13):

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 700, \\
x_{2_1} &= 400, \\
y_{2_1} &= 0, \\
y_{3_1} &= 0, \\
x_{2_2} &= 400, \\
y_{2_2} &= 0, \\
y_{3_2} &= 100, \\
x_{2_3} &= 300, \\
y_{2_3} &= 0, \\
y_{3_3} &= 0, \\
x_{2_4} &= 300, \\
y_{2_4} &= 0, \\
y_{3_4} &= 300.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, obtendremos que la producción del primer estado debe ser de 700 unidades del producto. El costo óptimo es de 29,200.

2.3.2. Características principales de un programa multiestados

Formalizando el ejemplo anterior, podemos llegar a una definición más concreta de un programa multiestados.

Sea el tiempo de estados de un horizonte $t = 1, ..., H$. Para cada t, existe ξ_t de dimensión d, es decir, un vector fijo en $\mathbb{R}^d$. Suponiendo que se conoce ξ_1, se pedirá que para las variables aleatorias $\xi_2, ..., \xi_T$ existan sus esperanzas. Por tanto, $\xi = \xi_1, ..., \xi_T$ es un proceso aleatorio multivariado a tiempo discreto.

El modelo de problemas lineales estocásticos multiestados con recurso fijo toman la siguiente forma:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & z = c^1x^1 + \mathbb{E}_{\xi^2}[\text{mín}\, c^2(\omega)x^2(\omega^2) + ... + \mathbb{E}_{\xi^H}[\text{mín}\, c^H(\omega)x^H(\omega^H)]...] & & \\ \text{s.a.} & W^1x^1 & = & h^1, \\ & T^1(\omega^2)x^1 + W^2x^2(\omega^2) & = & h^2(\omega), \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ & T^{H-1}(\omega^H)x^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^Hx^H(\omega^H) & = & h^H(\omega), \\ & x^1, x^t(\omega^t) & \geq & 0, \;\; t = 2, ..., H. \end{array} \tag{2.14}$$

donde c^1 es un vector de $\mathbb{R}^{n_1}$, h^1 es un vector de $\mathbb{R}^{m_1}$ conocido.

El vector de recursos $q(\omega)$ pertenece a $\mathbb{R}^{n_2}$ y el vector de demandas $h(\omega)$ pertenece a $\mathbb{R}^{m_2}$ por lo que $T(\xi)$ es de dimensión m_2xn_1 y W es de m_2xn_2.

Tendremos que la variable aleatoria en cada tiempo t del proceso está dado como el siguiente vector

$$\xi^t(\omega)^T = (c^t(\omega)^T, h^t(\omega)^T, T_1{}^{t-1}(\omega), ..., T_{m_t}{}^{t-1}(\omega))$$

donde dependerá de cada ω.

De esta forma $\xi = (q, h, T, W)$ será el vector de información del segundo estado y es un vector de dimensión N_t para todo $t = 2, ..., H$. Supondremos además que Ξ^t es el soporte de ξ^t, donde Ξ^t es un subconjunto de $\mathbb{R}^{N_t}$, donde con probabilidad igual a 1 ocurre que ξ^t pertenece Ξ^t.

Las decisiones de x dependen de la historia hasta t, que se denota por ω^t. En la programación lineal estocástica se dice que no podemos anticipar cada posible resultado por lo que las decisiones son no anticipadas de los resultados futuros. Como las ocurrencias a cada paso las consideramos como si fueran *presente* y dependerán fuertemente de la historia que haya *ocurrido*.

Otras representaciones

Básicamente y de una forma más compacta podríamos ver el programa multiestados como

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & \mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T}\langle c_t(\xi_t), x_t\rangle] & & \\ \text{s.a.} & \sum_{\tau=0}^{t-1} W_{t,\tau}(\xi_t)x_{t-\tau} & = & h(\xi_t) \quad , \\ & x_t & \in & X_t \quad . \end{array} \tag{2.15}$$

donde x_t es $\mathcal{F}_t$-medible con $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1, ..., \xi_t)$, y $(\xi_t)_{t=1}^{T}$ será un proceso estocástico.

Los espacios X_t serán superficies poliédricas cerradas, c_t son los coeficientes de costo, $h_t(\xi_t)$ será la demanda. $W_{t,\tau}$ son las matrices que conllevan las propiedades apropiadas y posiblemente dependan de ξ_t, donde $t = 1, ..., T$ y $\tau = 0, ..., t-1$.

Estos programas son conocidos como programas estocásticos basados *en las expectativas* debido principalmente a su formulación que conlleva esperanza, la cual es un operador lineal y permite conocer mucho acerca de dichos programas, como la dualidad, optimalidad y métodos de descomposición, estabilidad y aproximaciones estadísticas.

Por último, existe una representación más general, que será usada más adelante

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & \mathbb{E}(f(x(\xi), \xi)) & & \\ \text{s.a.} & (x(\xi), \xi) & \in & X, \\ & x & \in & \mathcal{N} \quad . \end{array} \tag{2.16}$$

donde ξ denota un proceso estocástico multidimensional describiendo la incertidumbre futura. El conjunto de restricciones X contiene soluciones factibles (x, ξ) y el conjunto $\mathcal{N}$ de funciones $\xi \to x$ es necesario para asegurar que las decisiones x_t están solo basadas en realizaciones hasta el estado t $(\xi_0, ..., \xi_t)$.

La función de costos está determinada por $f(x(\xi), \xi)$.

Está representación nos será muy útil cuando queramos incluir medidas de riesgo en la función de costos.

Capítulo 3

Medidas de Riesgo Poliédricas

En este capítulo, definiremos a las medidas de riesgo. Estudiaremos su teoría básica y analizaremos cómo surge la idea de las medidas de riesgo poliédricas, que utilizaremos en el programa lineal estocástico para optimizar portafolios.

La teoría y práctica de la administración de riesgos fue desarrollada principalmente por el premio Nobel Markowitz en la década de los cincuentas. Podemos definir el riesgo financiero como la posible pérdida (o ganancia) financiera debido a los cambios imprevistos en los factores de riesgo; este es el principal objetivo de la administración de riesgos.

Cuando existe el riesgo de grandes pérdidas en resultados inciertos, estas puede cuantificarse mediante *medidas de riesgo*, i.e., mapeos o funciones que van de un espacio de variables aleatorias a los reales y que cumplen con ciertas propiedades. Entonces, una medida de riesgo puede interpretarse entonces como la posible cantidad de riesgo que representa un activo, portafolio o actividad.

Markowitz propuso medir el riesgo asociado con el rendimiento de cada inversión por medio de la desviación de la media de la distribución del rendimiento, conocida como varianza, y en el caso de que fuese un portafolio, este riesgo se podría medir a través de las covarianzas entre todos los pares de activos que lo conformarán. Principalmente, introdujo la idea de medir el riesgo de un portafolio a través de la distribución conjunta (multivariada) de los rendimientos de los activos.

Para definir el concepto de medida de riesgo rigurosamente, consideraremos un espacio $\mathcal{Z}$, cuyos elementos son variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que pueden representar estrategias, posiciones o utilidades (o pérdidas) de un conjunto de inversiones al que llamamos portafolio. Para fines de esta tesis, se considerará que representan los rendimientos de las inversiones de un portafolio.

Definición 3.1. *Diremos que $\rho \colon \mathcal{Z} \mapsto \mathbb{R}$ es una* ***medida de riesgo*** *si cumple que:*

i. ***Monotonicidad.*** *Para cada par de variables aleatorias* $\hat{z}, z \in \mathcal{Z}$ *tal que* $z \leq \hat{z}$, *entonces* $\rho(z) \leq \rho(\hat{z})$.

ii. ***Invarianza ante traslaciones.*** *Para cada* r *real y* $z \in \mathcal{Z}$ *ocurre que,* $\rho(z + r) = \rho(z) + r$.

Otra definición que nos será útil para este tema es la de medida de riesgo coherente. Este tipo de medidas son introducidas como propuesta a los problemas que pueden producirse al trabajar con una medida de riesgo como el VaR, que al ser no subaditiva y aumentar la diversificación de nuestro portafolio incrementa su riesgo.

Definición 3.2. *Una medida de riesgo es* ***coherente*** *si adicionalmente cumple con las siguientes condiciones:*

iii. ***Homegeneidad positiva.*** *Para toda variable aleatoria* z *y* $\lambda > 0$ *real, tendremos que* $\rho(\lambda z) = \lambda\rho(z)$.

iv. ***Subaditividad.*** *Para todo par de variables aleatorias* $\hat{z}$, z, *ocurre que* $\rho(\hat{z} + z) \leq \rho(z) + \rho(\hat{z})$.

3.1. Principales medidas de riesgo

La primera medida de riesgo fue implementada por Markowitz, como se mencionó al principio de este capítulo, en la cuál se analizaban las volatilidades de los activos financieros para poder establecer un "portafolio eficaz".

3.1.1. Value-at-Risk

Una de las medidas de riesgo más implementadas es el Valor en Riesgo (Value at Risk o VaR), el cuál intuitivamente describe la máxima pérdida esperada con un nivel de confianza dado. Se define formalmente a continuación:

Definición 3.3. *Sea* Z *una variable aleatoria de pérdida y sea* $0 < \alpha < 1$ *, el* ***Value at Risk o Valor en Riesgo*** *a nivel* α *se define como*

$$VaR_\alpha = \text{ínf}_{t \geq 0}\{\mathbb{P}[Z \leq t] \geq 1 - \alpha\}.$$

Una relación fácil de observar es que si $F_Z(z)$ es la función de distribución de Z, el $VaR_\alpha = {F_Z}^{-1}(\alpha)$ es la función inversa de la función de distribución (en el caso en que la variable aleatoria no es continua se puede demostrar la existencia de esta función inversa generalizada).

El VaR también puede ser interpretado como el peor escenario que se puede preveer en un horizonte de tiempo dado. Es una medida sencilla y que intenta resumir en un único número el riesgo de un activo. Sin embargo, no refleja el efecto de colas pesadas.

Proposición 3.1. *El mínimo de la función*

$$f(b) = b + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[Z-b]_+$$

es el $VaR_\alpha(Z)$.

Demostración. Sea $f(b) = b + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[Z-b]_+$. Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{df(b)}{db} &= 1 + \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{db}\mathbb{E}[Z-b]_+ \\ &= 1 + \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{db}\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]. \end{aligned}$$

Como es una función no negativa, podemos intercambiar la derivada con la esperanza, usando el teorema de Fubini. Tenemos que

$$\frac{d(Z-b)}{db}\mathbb{1}_{\{Z>b\}} = 0 + (-1)\mathbb{1}_{\{Z>b\}},$$

así que usando la regla del producto en la expresión de la derivada obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d(Z-b)}{db}\mathbb{1}_{\{Z>b\}} &= 1 + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[(-1)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}] \\ &= 1 - \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z>b\}}] \\ &= 1 - \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{P}[Z>b] \\ &= 1 - \frac{1}{1-\alpha}[1-\mathbb{P}[Z\leq b]] \\ &= 1 + \frac{1}{1-\alpha}[F(b)-1]. \end{aligned}$$

Igualando a 0, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \frac{1}{1-\alpha}[F(b)-1] \\ \iff \alpha &= F(b) \end{aligned}$$

por lo que $b = F^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha$ es un punto crítico.

Con el criterio de la segunda derivada,

$$f''(b) = 0 + \frac{1}{1-\alpha} f(b) \geq 0,$$

podemos concluir que es un mínimo.

□

3.1.2. Average Value-at-Risk

El Average Value-at-Risk es una medida de riesgo que representa la pérdida promedio una vez que se ha excedido el nivel de confianza dado. También es conocido con Expected-Shortfall o Conditional VaR por calcular el riesgo de la cola de una función de distribución.

Formalmente definimos al Average-VaR como:

Definición 3.4. *Sea Z una variable aleatoria con esperanza finita y sea* $0 < \alpha < 1$ *, el Average Value-at-Risk (AVaR) se define como*

$$AVaR_\alpha(Z) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_q(Z) dq.$$

En esta tesis usaremos una definición equivalente del AVaR que funciona adecuadamente para los problemas lineales estocásticos, expresada como solución de un problema de minimización, que demostraremos a continuación.

Teorema 3.1. *Sea Z una variable aleatoria con esperanza finita y* $F_Z(z)$ *la función de distribución de Z. El* $AVaR_\alpha$ *se puede definir como*

$$AVaR_\alpha(Z) = \text{ínf}_{t\in\mathbb{R}}\{t + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[Z-t]_+\}.$$

Demostración. Anteriormente, habíamos visto que VaR_α cumplía con $VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha) = b$ para algún b. En los cursos de probabilidad básica se prueba que $F(F^{-1}(\alpha)) = \alpha$. Entonces, ocurre que

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(Z) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_q(Z)dq \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F^{-1}(q)dq \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} udF(u). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Usando la definición de la integral de Riemman-Stieljies, la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z|Z > F^{-1}(Z)] = & \quad \mathbb{E}[Z|Z > VaR_\alpha(Z)] \\ = & \quad \frac{\mathbb{E}[Z\mathbb{1}_{Z>b}]}{\mathbb{P}[Z>b]} \\ = & \quad \frac{\mathbb{E}[(Z-b+b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]}{\mathbb{P}[Z>b]} \\ = & \quad \frac{\mathbb{E}[(b\mathbb{1}_{\{Z>b\}}+(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]}{\mathbb{P}[Z>b]} \\ = & \quad \frac{\mathbb{E}[b\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]}{\mathbb{P}[Z>b]}+\frac{\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]}{\mathbb{P}[Z>b]} \\ = & \quad b+\frac{\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]}{\mathbb{P}[Z>b]} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ya sabíamos que $F(b)=\alpha$, por lo que es $\mathbb{P}[Z>b]=1-\alpha$.

Por otro lado, si $Z>b$, $\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]=\mathbb{E}[Z-b]$, y será $\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]=0$ en cualquier otro caso. Por lo que podemos verlo como

$$\mathbb{E}[(Z-b)\mathbb{1}_{\{Z>b\}}]=\text{mín}(\mathbb{E}[Z-b],0)=\mathbb{E}[Z-b]_+.$$

Por lo tanto,

$$AVaR_\alpha = b+\frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[Z-b]_+.$$

Dado que $b=VaR_\alpha=\text{ínf}\{t:\mathbb{P}[Z\leq t]\geq 1-\alpha\}$ y usando lo que demostramos en la proposición 3.1, concluimos que

$$AVaR_\alpha = \text{ínf}_{t\in\mathbb{R}}\,\{t + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}[Z-t]_+\}.$$

□

Queremos hacer notar que, a partir de la demostración, otra definición posible es $AVaR_\alpha = \mathbb{E}[Z|Z > VaR_\alpha(Z)]$ que se puede interpretar como la pérdida esperada incurrida en los α por ciento peores casos de una posición.

Por lo tanto, ya contamos con una definición útil del AVaR para ser utilizada en una problema lineal.

Cabe mencionar que adicionalmente al AVaR, existen otras medidas coherentes como las medidas basadas en distorciones, entre otras que pueden ser construidas.

3.2. Funcionales Poliédricos

3.2.1. Medidas de riesgo poliédricas

Esta es una subclase de las medidas de riesgo convexas que cumplen con ciertas virtudes favorables para su implementación en la estructura de los programas estocásticos lineales.

Como ya hemos visto en las secciones anteriores, cuando se tiene una medida de riesgo se asume que se tiene un espacio de variables aleatorias definidas en un espacio común de probabilidad $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

Definición 3.5. *Llamaremos a ρ una* ***medida de riesgo poliédrica*** *si existen $k,l \in \mathbb{N}$, tales que $a,c \in \mathbb{R}^k$, y $q,w \in \mathbb{R}^l$, siendo un espacio poliédrico $X \subseteq \mathbb{R}^k$ y un cono poliédrico $Y \subseteq \mathbb{R}^l$, entonces*

$$\rho(z) = \text{ínf}\,\{\langle c,x\rangle + \mathbb{E}[\langle q,y\rangle] : \langle a,x\rangle + \langle w,y\rangle = z, x \in X, y \in Y\} \tag{3.3}$$

es visto como una función de los escenarios de z, si z es discreta.

Si analizamos los elementos que acabamos de utilizar para definir las medidas de riesgo con respecto a un programa de optimización lineal estocástico, el espacio poliédrico en $\mathbb{R}^l$ está constituido por las diferentes decisiones que deben ser tomadas. Es decir, el espacio de factibilidad del programa, el cono poliédrico en $\mathbb{R}^l$, está definido por las restricciones.

Esta definición es factible para los programas de dos estados. Sin embargo, si queremos considerar un horizonte de tiempo mayor a 2, tomaremos un proceso estocástico con el cuál necesitaremos una filtración $\mathcal{F}_t$ y supondremos además que el proceso estocástico es medible respecto a tal filtración. En la siguiente sección analizaremos a mayor detalle tal caso.

Medidas de riesgo multiperíodo

Supongamos que tenemos las variables aleatorias $z_1,...,z_T$ donde $z_t \in L^p(\omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ con $p \geq 1$. Cuando la información disponible es conocida a través del tiempo, puede ser necesario usar medidas de riesgo multiperíodo. Asumiremos que tenemos una filtración $\mathcal{F}_t$ dada, con $t = 1,...,T$.

Considerando entonces una noción multiperíodo de las características de una medida de riesgo tendremos la siguiente definición.

Definición 3.6. *Un funcional ρ definido para vectores $(z_1,...,z_T)$ donde cada z_i está en $L^p(\omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ será llamado una **medida de riesgo coherente multiperíodo** si cumple que:*

i. ***Monotonicidad.*** *Para cada par $\hat{z_t}$, z_t de vectores tal que $z_t \leq \hat{z_t}$, entonces $\rho(z_1,...,z_t) \leq \rho(\hat{z_1},...,\hat{z_t})$.*

ii. ***Invarianza ante traslaciones.*** *Para cada r real y z_t vector aleatorio, $\rho(z_1+r,...,z_t+r) = \rho(z_1,...,z_t) + r$.*

iii. ***Homegeneidad positiva.*** *Para toda z_t y $\mu > 0$ real, tendremos que $\rho(\mu z_1,...,\mu z_t) = \mu\rho(z_1,...,z_t)$.*

iv. ***Subaditividad.*** *Para todo par $\hat{z}$, z, ocurre que $\rho(\hat{z}+z) \leq \rho(z) + \rho(\hat{z})$.*

Definición 3.7. *Una medida de riesgo multiperíodo ρ definida para vectores $(z_1,...,z_T)$ donde cada z_i está en $L^p(\omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ con $p \geq 1$ es llamada multiperíodo políedrica si existen $k_t \in \mathbb{N}$, $c_t \in \mathbb{R}^{k_t}$, y $w_{t_\tau} \in \mathbb{R}^{k_{t-\tau}}$, donde $t = 1,...,T$ y $\tau = 0,...,t-1$ siendo un espacio poliédrico $Y_1 \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$ y conos poliédricos $Y_t \subseteq \mathbb{R}^{k_1}$, entonces*

$$\rho(z) =$$
$$\text{ínf}\{\mathbb{E}[\textstyle\sum_{t=1}^{T}\langle c_t,y_t\rangle]|y_t \in L_p(\omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P};\mathbb{R}^{k_t}); y_t \in Y_t \ c.s.\ (t=1,...,T); \textstyle\sum_{\tau=0}^{t-1}\langle w_{t,\tau},y_{t-\tau}\rangle = z_t \ c.s.\}$$

3.3. Programas Lineales estocásticos usando medidas de riesgo poliédricas

Como vimos anteriormente, un medida de riesgo multiperíodo puede ser representada como la solución de un determinado problema estocástico. Ahora veremos cómo se debe representar un problema lineal estocástico cuando se intercambia su función objetivo basada en la esperanza por medidas de riesgo poliédricas utilizando las características y propiedades vistas a lo largo del capítulo.

Supondremos entonces que la incertidumbre puede modelarse como un proceso estocástico $(\xi_t)_{t=1}^T$ y una sigma-álgebra $\mathcal{F}_t = \sigma(\xi_1,...\xi_T)$, $t = 1,...,T$. Consideremos un problema estocástico multiestado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{llcll} \text{mín} & \mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T}\langle b_t(\xi_t),x_t\rangle] & & & \\ \text{s.a.} & \sum_{\tau=0}^{t-1} A_{t,\tau}(\xi_t)x_{t-\tau} & = & h(\xi_t) & , \\ & B_t(\xi_t)x_t & \leq & d_t(\xi_t) & ,(t=1,...,T) \\ & H_t(x_t) & = & 0 & , \\ & x_t & \in & X_t & , \end{array} \tag{3.4}$$

con conjuntos cerrados X_t que tienen la propiedad de que su casco convexo es poliédrico, y con coeficientes de costo $b_t(.)$, lados derechos $d_t(.)$ y $h_t(.)$, y matrices A_t, $(.)$, $\tau = 0,...,t-1$ y $B_t(.)$ todos con dimensiones adecuadas y posiblemente dependientes afines linealmente en ξ_t para $t = 1,...,T$. Las restricciones consisten en cuatro grupos, donde la primera y segunda son las restricciones dinámicas y el acoplamiento, respectivamente. La tercera $H_t(z) := z - \mathbb{E}[z|\mathcal{F}_t] = 0$ asegura la no-anticipatividad de las decisiones x_t, la cuarta $x_t \in X_t$ modela restricciones fijas simples. Por $\mathcal{X}(\xi)$ denotamos el conjunto de decisiones que satisfacen todas las restricciones de (3.5).

Al reemplazar la expectativa de los costos generales estocásticos $\sum_{t=1}^{T}\langle b_t(\xi_t),x_t\rangle$ por alguna medida de riesgo multiperiodo poliédrica ρ aplicado al vector aleatorio de costos intermedios negativos, llegamos a la siguiente alternativa de problema con aversión al riesgo problema (3.5):

$$z(x,\xi) := (-\langle b_1(\xi_1),x_1\rangle, -\langle b_1(\xi_1),x_1\rangle, \langle b_2(\xi_2),x_2\rangle, ..., \textstyle\sum_{\tau=1}^{T}\langle b_\tau(\xi_\tau),x_\tau\rangle)$$

$$\text{mín}\{\rho(z(x,\xi))|x \in \mathcal{X}(\xi)\}. \tag{3.5}$$

La medida de riesgo poliédrico ρ se define por el problema de minimización

$$\rho(z) = \text{ínf}\,\{\mathbb{E}[\textstyle\sum_{t=1}^{T}\langle c_t,y_t\rangle]|H_t(y_t) = 0, y_t \in Y_t, (t=1,...,T); \sum_{\tau=0}^{t-1}\langle w_{t,\tau}, y_{t-\tau}\rangle = z_t\}\ .$$

Dado lo anterior surge la pregunta de si (3.5) es equivalente al programa

$$\begin{array}{llclcll} \text{mín} & \mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T}\langle c_t,y_t\rangle] & & & & & \\ \text{s.a.} & \sum_{\tau=0}^{t-1}\langle w_{t,\tau},y_{t-\tau}\rangle & + & \sum_{\tau=1}^{t}\langle b_\tau(\xi_\tau),x_\tau\rangle & = & 0 & , \\ & H_t(y_t) & = & 0 & & & , \\ & y_t & \in & Y_t & & & , \quad (t=1,...,T) \\ & x & \in & \mathcal{X}(\xi) & & & , \end{array} \tag{3.6}$$

donde la minimización con respecto a la decisión original x y la variable y que define ρ se lleva a cabo simultáneamente. La respuesta es positiva y lo probamos a continuación.

Proposición 3.2. *Minimizar (3.5) con respecto a x es equivalente a minimizar (3.6) con respecto a todos los pares (x, y) en el siguiente sentido: Los valores óptimos de (3.5) y (3.6) coinciden y un par (x*, y*) es* *una solución de (3.6) si y solo si x* resuelve (3.5) y y* es una solución del problema de minimización que define* $\rho(z(x*,\xi))$.

Demostración. La minimización con respecto a todos los pares factibles (x, y) de (3.6) se puede llevar a cabo minimizando con respecto a y y luego minimizando el último residuo con respecto a $x \in X(\xi)$. Por lo tanto, los valores óptimos coinciden y, si el par (x*, y*) resuelve (3.6), su primer componente x * es una solución de (3.5) así como y* es una solución del problema

$$\begin{array}{lrclcl} \text{mín} & \mathbb{E}[\sum_{t=1}^{T}\langle c_t, y_t\rangle] & & & & \\ \text{s.a.} & \sum_{\tau=0}^{t-1}\langle w_{t,\tau}, y_{t-\tau}\rangle & + & \sum_{\tau=1}^{t}\langle b_\tau(\xi_\tau), x*_\tau\rangle & = & 0 \quad , \\ & H_t(y_t) & = & 0 & & \quad , \\ & y_t & \in & Y_t & & \quad , \end{array} \tag{3.7}$$

cuyo valor óptimo es simplemente $\rho(z(x*,\xi))$. Por el contrario, si x* es una solución de (3.5) y y* una solución de (3.7), el par (x*, y*) tiene que ser una solución de (3.6). □

Por lo tanto, la minimización de un programa estocástico con una medida de riesgo poliédrico en el objetivo conduce a un programa estocástico "tradicional" con un objetivo lineal basado en la expectativa y con variables adicionales y y restricciones, respectivamente. Tanto las variables como las restricciones son convenientes para los programas estocásticos ya que las variables están muy bien restringidas por conjuntos poliédricos (sin requisitos enteros). Por lo tanto, si el programa estocástico basado en expectativas tiene propiedades convenientes, hay buenas razones para esperar que estas propiedades se mantengan cuando se usa una medida de riesgo poliédrico para la aversión al riesgo.

Reformulando el programa de (2.6) con el resultado del Teorema 3.5, obtenemos que un programa estocástico multiestado que incluya AVaR sería de la forma

$$\text{mín} \sum_{n\in\mathcal{N}^T} P_{s(n)}{c_n}^{(t)} + k(\gamma + \sum_{n\in\mathcal{N}^T} \frac{P_{s(n)}{c_n}^{(t)}}{1-\alpha}) \tag{3.8}$$

donde $P_{s(n)}$ representa la probabilidad del escenario en el nodo determinado (n), ξ_n es el proceso estocástico.

El retorno acumulado hasta el estado t está determinado por

$$\textstyle\sum_{n\in T} c_{R(n,t)} = {c_n}^{(t)}.$$

ya que $c_{R(n,t)}$ representa el retorno del nodo predecesor de los retornos al estado t.

Capítulo 4

Derivados energéticos

4.1. Introducción a los derivados financieros

Llamaremos **derivados** a los instrumentos financieros de los que su valor *deriva* de un activo **subyacente**. En otras palabras, un derivado puede ser descrito como un acuerdo o contrato que tiene un valor determinado por el precio de algo más. Muy a menudo dicho subyacente corresponde al precio de activos financieros como bonos, acciones, tasas de interés, commodities, etcétera.

Los productos derivados surgieron como instrumentos de cobertura ante fluctuaciones de precio en materias primas (commodities), en condiciones de elevada volatilidad. Los derivados pueden ser considerados como una apuesta para casi cualquier cosa. Dicha apuesta suele fungir como un seguro o una cobertura, es decir, buscando reducir el riesgo de la variabilidad (incremento/decremento) en el precio del activo seleccionado como subyacente.

Lo que ha permitido que los derivados hayan sido usado como herramientas cada vez más en las últimas decadas para reducir el riesgo o ser una forma de cobertura.

Los derivados pueden utilizarse para obtener el mismo resultado financiero que obtendríamos de la negociación directa del activo sin realmente tener que operarlo, con esto además se pueden reducir costos de transacción como honorarios y el diferencial de oferta y demanda. Se pueden usar para obtener efectivo de un activo sin tener que intercambiarlo inmediatamente, lo que permite además evitar el riesgo de cambio en el precio. También se pueden usar para evitar algunas restricciones regulatorias y reglas contables.

Sin embargo, operar demasiados instrumentos derivados pueden generar situaciones de alto riesgo como un aumento en el apalancamiento, entre otros.

De manera general, un derivado financiero provee una alternativa a una simple compra o venta, y así incrementar el conjunto de posibilidades para un inversor o administrador que busca lograr algún objetivo.

Los usuarios finales serán las corporaciones, administradores de inversión e inversionistas que entren a contratos de derivados con el objetivo de administrar el riesgo, especular, reducir costos o evitar alguna regulación, como ya mencionamos anteriormente. Por otro lado, se encuentran los creadores de mercado que son intermediarios, comerciantes que comprarán/venderán derivados a los clientes que así lo deseen. Por dicha operación, los creadores de mercado cobrarán un spread generado al comprar a bajo precio y venderlo a uno mayor. Después de negociar con los clientes, los creadores de mercado se quedan con todo el resultado generado por la posición tomada para cumplir con las demandas de los clientes. Los creadores de mercado típicamente cubren este riesgo y así están profundamente seguros acerca de los detalles matemáticos de precios y cobertura. Por último, existen los observadores económicos, que como actividad tienen observar el uso de los derivados, las actividades de los creadores de mercado, la organización de los mercados, así como la lógica de los modelos de precios y tratar de hacer con esto que todo haga sentido.

En los recientes años, se han desarrollado instrumentos derivados cuyos activos de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros. Los principales derivados financieros son futuros, opciones y swap, de los cuáles daremos más detalle a continuación:

Futuros

Contratos que permiten fijar hoy el precio de compra y/o venta de un ”bien” (p.e.: un dólar, una acción, una tasa de interés, etcétera) para ser pagados y entregados en una fecha futura. Son productos “estandarizados” en tamaño de contrato, fecha de vencimiento, forma de liquidación y negociación.

Opciones

Contrato estandarizado, en el cual el comprador, paga una prima y adquiere el derecho pero no la obligación, de comprar (call) o vender (put) un activo subyacente a un precio pactado en una fecha futura. El vendedor está obligado a cumplir el compromiso del contrato.

Se deberá pagar una prima, por lo que este tipo de contratos generan flujos.

El precio de ejercicio (o precio strike) es el precio previamente especificado al que se toma la posición del activo subyacente. El valor intrínseco de la opción es la diferencia entre el contrato de futuros subyacente y el precio de ejercicio. El valor intrínseco de una opción es una medida de la cantidad que vale una opción, el cual no puede ser negativo. Se dice que la opción call está “en el dinero" (*in-the-money*) si el strike es más alto que el del subyacente, y viceversa para las opciones put. Se dirá que una opción es *at-the-money* o "a la par", si el precio de la opción es el mismo que el pactado a la compra, de modo que de ejercerse no significaría ni una pérdida ni una ganancia para el tenedor de la opción. Una opción call estará fuera del dinero si el precio de ejercicio está más elevado que el del subyacente.

El valor de una opción se determina en función del valor intrínseco que representa, el vencimiento al cual se pacta y la volatilidad del precio en el mercado. Dicho esto, el valor de este tipo de instrumentos puede ser determinado como una función matemática de la siguiente forma:

$$Precio = f(V, T, S - K; [0])$$

donde V representa la volatilidad, T el tiempo que resta para vencimiento de la opción, S_t representa el strike mientras que S_p es el precio pactado al comprar el contrato.

Cabe destacar que existen diversos parámetros que también pueden ser incluidos, dependiendo del tipo de opción que se tenga.

Para las opciones call, se toma el mayor valor entre la diferencia de $S - K$ y cero, mientras que para las opciones put se toma el mayor valor entre $K - S$ y cero.

La pérdida potencial para un comprador de opciones no está limitada a la prima pagada ya que depende de como haya sido pactada la operación y la pérdida potencial para el vendedor puede ser mayor (aunque limitada al precio del activo subyacente).

Swaps

Es un instrumento derivado que permite el intercambio de flujos (por ejemplo; tasa fija por variable) o posiciones en distintos vencimientos y/o divisas.

Los productos derivados son instrumentos que contribuyen a la liquidez, estabilidad y profundidad de los mercados financieros; generando condiciones para diversificar las inversiones y administrar riesgos.

Los principales mercados son:

Mercados organizados

Las condiciones de los mercados de derivados se encuentran estandarizadas (tipo de activo, subyacente, tamaño del contrato, cantidad, etcétera). En estos mercados, el comprador y el vendedor no negocian directamente si no que por medio de una cámara de compensación que reduce el riesgo de liquidación. Se pueden operar en la bolsa financiera.

Mercados no organizados o Over The Counter

Las condiciones de los contratos son fijadas de manera bilateral, es decir, que los contratos no serán estandarizados. No existe la cámara de compensación.

Las cámaras de compensación de derivados reducen sus exposiciones de contraparte mediante acuerdos de márgenes iniciales y diarias.

4.2. Derivados sobre energéticos

Entre los principales productos que consideramos como *energéticos* tenemos la electricidad, biodisel, carbón, petróleo, bioetanol, gas, entre otros. Como su nombre lo dice, los *derivados financieros energéticos* tienen como subyacente alguna de estas materias primas mencionadas.

Para ellos, existen varias bolsas donde se pueden operar. Algunas de las más reconocidas internacionalmente son:

i. **NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation)**: electricidad, carbón, certificados de emisión de CO2.

ii. **NYMEX (New York Mercantile Exchange)**: Carbón, etanol, electricidad, gas natural, Productos refinados.

iii. **ICE (Intercontinental Exchange)**: Electricidad, petróleo, gas natural, certificados de emisión de CO2, productos refinados.

4.2.1. Mercado de petróleo

Existen diversos grados de petróleo crudo con diferentes densidades y contenidos de azufre. Este se refina para obtener productos como gasolina, aceite combustible, queroseno o aceite de calefacción, etcétera. Existe una variedad de usos más para este energético que convierten al mercado de petróleo en uno de los más grandes del mundo, con una demanda global alrededor de 80 millones de barriles por día.

Dos características importantes son la densidad (o grado de facilidad para proporcionar aceites ligeros de calidad) y el contenido de azufre (que señala el porcentaje de impureza) que afectan a la calidad de la destilación y de los productos obtenidos en las refinerías.

Existen dos principales precios de referencia o *benchmark*, a partir de los cuales se determina el precio de las demás variantes de petróleo de acuerdo a su densidad y cantidad de azufre, incluyendo el costo de transporte, entre otras variantes.

i. **Brent**. Funge como precios de referencia de los crudos del Mar del Norte. Abarca las producciones de Reino Unido y Noruega que aunque tienen una producción minoritaria, Londres sigue siendo una de las principales plazas comerciales del mundo.

ii. **WTI (West Texas Intermediate)**. Funge como precio de referencia dado que Estados Unidos importa más de la mitad del petróleo que consume, lo que equivale a una cuarta parte de la demanda mundial.

Algunos de los contratos a futuro se liquidan en efectivo y otros mediante la entrega física. Por ejemplo, en los contratos de futuros sobre Brent que se negocian en el Intercontinental Exchange (ICE) se tiene una opción de liquidación en efectivo, mientras que los contratos de futuros de petróleo crudo ligero y dulce que se negocia en el Chicago Mercantil Exchange (CME Group) se requiere una entrega física. Cada contrato ampara 1000 barriles, en ambos casos.

Generalmente el mercado de derivados financieros de petróleo funciona como un mercado organizado o bolsa, que como ya vimos anteriormente tiene estandarizados los instrumentos que se operan.

Para obtener el precio futuro esperado de una materia prima o commodity en un ambiente de riesgo neutral, asumiremos que la velocidad de crecimiento del precio del commodity dependerá únicamente del tiempo y la volatilidad del precio se mantendrá constante. Dado esto, se determinará como

$$F(t) = \mathbb{E}[S(t)] = S(0)e^{rt},$$

donde $F(t)$ es el precio futuro de un contrato con vencimiento t.

En general, es necesario tomar en cuenta una esperanza condicional en vez de una simple esperanza, pero esto dependerá del contrato.

En el caso de las opciones asiáticas, son opciones que su payoff depende del precio promedio del activo subyacente durante al menos una parte de la vida de la opción. Entonces, el payoff de un precio promedio de una opción call es el máximo entre cero y $S_{prom} - K$, así como el payoff de una opción put será el máximo entre $K - S_{prom}$. S_{prom} representa el valor promedio del activo subyacente calculado durante un determinado período.

El promedio puede estar en el precio del subyacente o de k mismo y puede ser un promedio aritmético o geométrico.

Capítulo 5

Optimización de un portafolio de derivados energéticos

En este capítulo utilizaremos lo ya presentado en los capítulos anteriores de la teoría de programación estocástica para poder desarrollar la implementación de dicha teoría en la optimización de portafolios, específicamente, usando como activos los derivados energéticos.

5.1. Planteamiento del problema

Supongamos que una empresa tiene la necesidad de crear un portafolio de inversión en el que tendrá únicamente derivados energéticos, específicamente opciones en petróleo, las cuales podrá ejercer o no en el momento del vencimiento.

En los mercados de materias primas (o *commodities*) existe una correlación considerable entre el precio del subyacente en el mercado spot con el precio que tienen los derivados de dicho subyacente. Por lo que el precio de las opciones será construido a partir del precio spot simulado.

La cartera estará conformada por futuros sobre WTI y futuros sobre el Brent con fecha de vencimiento en un año, es decir, que situándonos en Enero del 2018, el vencimiento de dichos futuros sera Enero 2019.

El objetivo será maximizar los ingresos totales esperados del derivado mientras al mismo tiempo intentaremos minimizar la medida de riesgo en el horizonte de tiempo, que será de un año. Dicha medida de riesgo corresponde a una ya presentada anteriormente, el AVaR.

La parte estocástica entrará en el programa debido a la incertidumbre en los precios y la demanda del petróleo.

5.2. Implementación

Para poder realizar la implementación es necesario conocer el comportamiento de los precios y la demanda como variables aleatorias, ya que, como mencionamos anteriormente, la incertidumbre del problema recae sobre ambos.

Utilizaremos como datos los precios históricos del Brent y del WTI. En la Figura 5.1 se muestran un poco de su comportamiento en los últimos años. Podemos ver que a pesar de que se encuentran en niveles relativamente similares, el Brent se ha mostrado por arriba del precio del WTI durante varios meses.

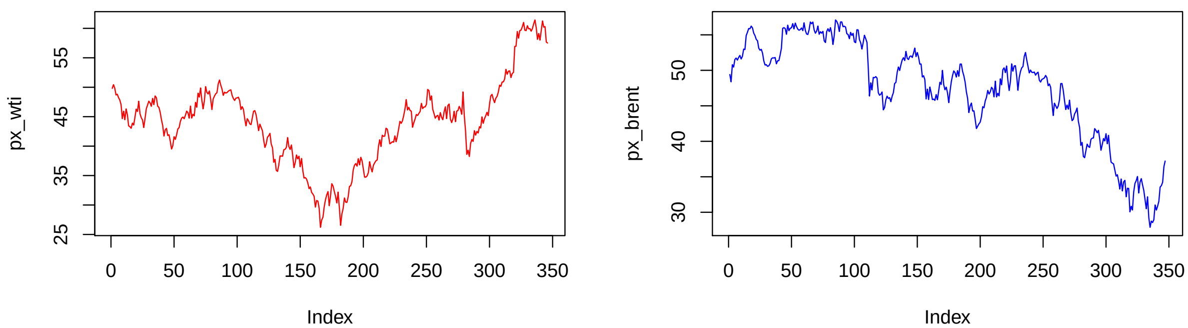

Figura 5.1: Serie de precios del WTI (Izq.) y Brent (Der.) en el período de Mayo 2015- Oct 2016.

En la Figura 5.2 podemos observar también parte del comportamiento que han tenido la demanda de los subyacentes. Dicha demanda corresponde al volumen de barriles que han sido comprado durante dicho periodo. Podemos observar también que la demanda es mucho mayor en el caso del WTI además de que es ligeramente más estacionaria mientras que en el caso del Brent se muestra mucho menor los niveles de demanda que tiene el energético además de que tiene un comportamiento más errático-vólatil.

Recordemos que un programa multiestados debe tener un horizonte de tiempo, por lo que seleccionamos un año, considerando la convención habitual en finanzas se ve como 242 días hábiles. En esta convención se esta considerando que no hay cotización los fines de semana porque los mercados se encuentran cerrados. Establecemos entonces la convención $T = 242$.

Definiremos la siguiente variable Z_t para que guarde el valor de la función objetivo de optimización para cada t, con $t \in \{0, ..., T\}$. Determinaremos entonces Z_0 como la inversión inicial, que en este caso, será de seis mil dólares, es decir, $Z = 6{,}000$ de dólares.

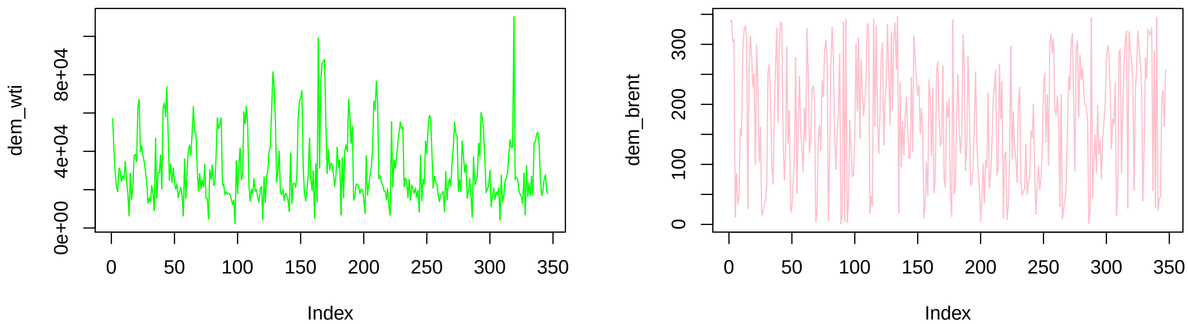

Figura 5.2: Comportamiento de la demanda del WTI (Izq.) y Brent (Der.) en el período de Mayo 2015- Oct 2016.

Las variables de decisión del programa lineal estocástico corresponden entonces a la composición de la cartera, es decir, cual será la posición que tendremos de cada activo en cada estado. Sea b_t la cantidad de contratos de futuros sobre el precio del Brent con fecha de vencimiento Enero 2019 a tiempo t. Definimos a c_t como la cantidad de contratos de futuros sobre el precio de WTI que tendremos pactados a tiempo t.

La demanda en el estado t, la cuál representaremos con d_t, deberá ser cubierta con los contratos comprados. Por lo tanto, una de las restricciones a cumplir es:

$$b_t + c_t \geq d_t. \tag{5.1}$$

Consideremos e_t, una variable que representará la exposición que realizamos en cada estado. Dicha exposición correponde a la valuación de cada uno de los contratos y para este caso, consideraremos que el costo de cada uno de los contratos que compraremos estará dado a cada tiempo por el valor de barril de cada tipo de mezcla. Dado esto, la variable e_t puede ser expresada en los siguientes términos:

$$e_t = B_t b_t + C_t c_t. \tag{5.2}$$

Donde B_t representa el costo de un barril de Brent y C_t representa el costo de un barril de WTI.

Para definir la función objetivo (también llamada de *costo*), recordemos que queremos minimizar el riesgo y como ya he mencionado, la medida de riesgo elegida a lo largo de esta tesis es el Average Value at Risk o AVaR por ser una medida de riesgo poliédrica que es la característica que la vuelve factible con respecto a su inclusión en los programas lineales estocásticos. Para dicha medida de riesgo determinaremos un nivel de confianza $\alpha = 95\%$.

Usando la representación de (3.8), nuestra función de costos ya incluirá el AVaR y los retornos. Mientras que en las restricciones tendremos la demanda que deberá ser cubierta y los costos que serán aplicados.

5.3. Resultados

El programa consiste en una optimización que tiene dos objetivos: mantener un riesgo bajo mientras se cumplen con los objetivos de satisfacción de la demanda. La Figura 5.3 muestra el comportamiento de la función objetivo a lo largo del programa multiestados donde podemos ver una tendencia clara a mantenerse alrededor de 6000, que fue la inversión inicial.

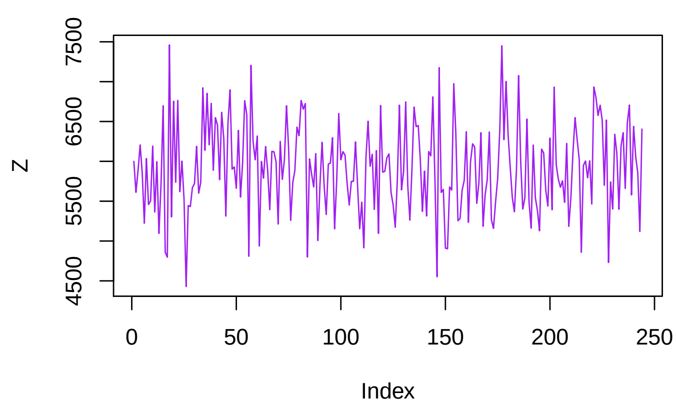

Figura 5.3: Evolución de la función objetivo a lo largo del período proyectado

.

A su vez, en la Figura 5.4 podemos ver el comportamiento que tiene la demanda aleatoria.

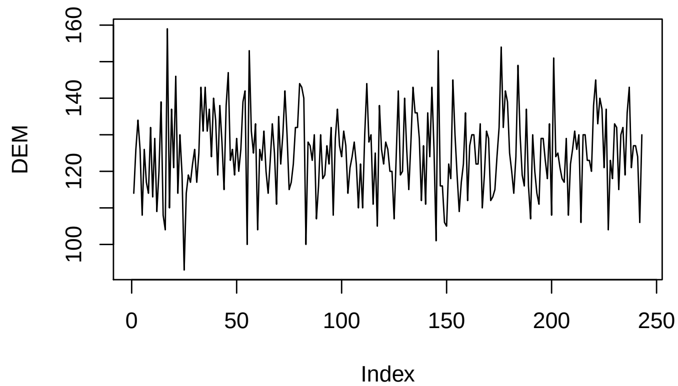

Figura 5.4: Evolución de la función objetivo a lo largo del período proyectado

.

Dicho comportamiento muestra que al ser la demanda una variable aleatoria a cada estado, la función objetivo también se comportará como una variable aleatoria. La tendencia o movimiento que presenta el programa objetivo tiene una correlación directa con la tendencia que muestra la demanda que podemos ver en la Figura 5.4. Esta demanda se cumplió con la compra de cierta cantidad de barriles, tanto de WTI como del Brent.

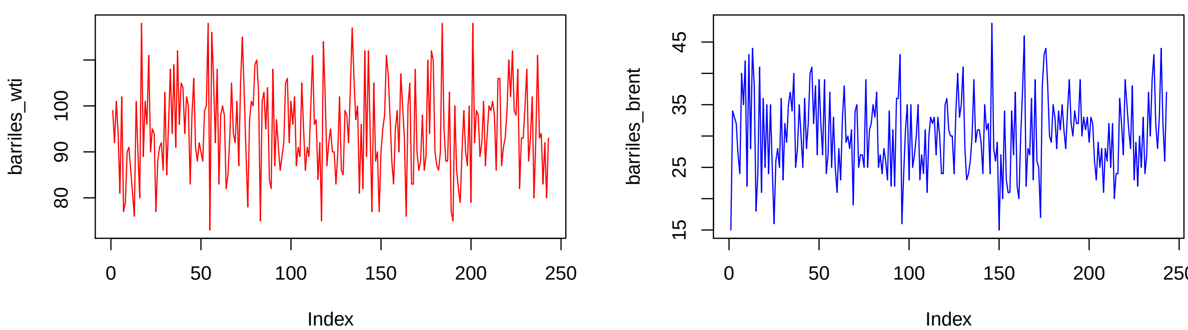

Figura 5.5: Comportamiento de las variables a optimizar: Compra de barriles de WTI (Izq.) y Compra de barriles de Brent (Der.) en el período simulado

La demanda de cada una de los energéticos usado a lo largo del periodo simulado puede ser visto en la Figura 5.5, donde se puede observar que dada la construcción del programa y de las estadísticas mostradas fue mayormente requerido el uso de barriles del West Texas. Cabe resaltar que anteriormente ya habíamos visto que mostraban diferencias en el precio, colándose siempre más caro el precio del Brent, por lo que es lógico pensar que para optimizar el programa se utilizarán mayormente los barriles más baratos.

Por otro lado, la solución deterministica para comparación, utilizó la proyección del precio en el transcurso del año y sacando un promedio de ellos, se tendría que en promedio el precio del WTI sería de 51.6 dólares y el del Brent 54.8 dólares, por lo que el posicionamiento resultante de la cartera sería de 42 y 29 contratos, que se mantendrían durante todo el año afrontando un posible resultado acumulado negativo para ambas posiciones al final del año.

5.4. Conclusiones

La optimización lineal por si sola es un método de toma de decisiones que ha sido usado y reconocido a lo largo de mucho tiempo en diversas áreas.

La programación lineal estocástica tiene como objetivo realizar optimizaciones de un programa lineal en un periodo de tiempo proyectado. Esto conlleva tener diferentes condiciones a lo largo de dicho periodo.

Con el problema anterior queríamos presentar esta teoría que ha sido trabajada a lo largo de muchos años y que puede resultar muy útil en entornos altamente volatiles como finanzas. La optimización que estamos presentando así como los resultados son sólo un ejemplo de uno de los usos que se pueden dar. Una vez determinado el problema y ajustadas las respectivas variables es fácil poder usar cualquier tipo de software para que se solucione rápidamente.

Tenemos las siguientes consideraciones computacionales. Observe que nuestro programa estocástico es en realidad un programa determinista (de hecho, un programa lineal en este caso particular). Aunque el problema original tenía elementos estocásticos, el uso de escenarios para representar explícitamente el conjunto de todos los futuros posibles nos ha permitido formular el problema de manera determinista.

Con respecto a la dificultad computacional para resolver este programa estocástico (determinista), tenga en cuenta que las restricciones de no anticipación se pueden eliminar mediante la sustitución algebraica de variables, esto reduce el número total de restricciones y variables en el problema.

La verdadera dificultad computacional surge debido a la cantidad de escenarios que a menudo pueden aparecer. Observe que, esencialmente, necesitamos un conjunto completo de variables / restricciones para cada escenario posible. Si bien, como se indicó anteriormente, las restricciones de no actividad reducen el número de variables / restricciones distintas, el tamaño del programa determinista aumenta rápidamente con el número de escenarios.

La generación de escenarios también es un problema en la programación estocástica. Por ejemplo, considere nuestro problema simple anterior donde tuvimos tres etapas correspondientes a 2 realizaciones de la demanda, que condujeron a 4 = 22 escenarios, si tenemos periodos de tiempo T (realizaciones de demanda) entonces necesitaremos escenarios 2T (suponiendo un árbol de escenarios binarios) como anteriormente. La demanda que ocurre en cada etapa de estos escenarios pretende ser realista, no un número generado aleatoriamente, por lo que de alguna manera debemos producir cifras de demanda de manera realista para un gran número de futuros posibles. Esta no es una tarea trivial.

Adicionalmente, cabe mencionar que en está tesis no se uso un enfoque bayesiano para determinar la distribución de las variables aleatorias que fueron usadas en la implementación, sin embargo, existe dicha posibilidad. Para mayor información, el libro de [7].

En cuanto a las aplicaciones, es probable que actualmente el uso predominante de programación estocástica de etapas múltiples con recurso se encuentre en el campo de las finanzas cuantitativas. Por ejemplo, el modelado de una cartera de inversiones para cumplir con los pasivos aleatorios.

Las compañías de seguros son un buen ejemplo de tales problemas. Una compañía de seguros recibe dinero en primas que puede invertir en diversos activos. Los rendimientos de inversión de estos activos pueden ser estocásticos o deterministas (según el activo). Claramente, las reclamaciones de seguro que recibe la compañía serán estocásticas (por ejemplo, en el seguro de edificios, un mal invierno aumentará las reclamaciones por daños por tormentas). Las variables de recurso representarían la liquidación (venta) de activos para cumplir con los pasivos. Entonces, ¿cómo debería una compañía estructurar sus decisiones de inversión a lo largo del tiempo para usar sus activos sabiamente y cumplir con sus obligaciones?

Otras áreas donde se usan SP de etapas múltiples incluyen: planificación de capacidad, modelado de inversiones en capacidad estratégica, por ejemplo, en grandes plantas de fabricación bajo diversos escenarios de demanda sistemas de energía eléctrica, para modelar el funcionamiento de los sistemas de suministro de energía eléctrica para satisfacer la demanda de electricidad del consumidor, donde tenemos diferentes escenarios de demanda, algunas variables representan la producción de carga básica y las variables de recurso representan instalaciones de producción más costosas que son capaces de generar electricidad rápidamente para satisfacer el exceso de demanda (por ejemplo, turbinas de gas).

Anexo 1

En este anexo, se incluye el código que use para generar los resultados presentados anteriormente.

```
###### Objetivo: Realizar la optimización de una inversión en derivados sobre precio
###### del petróleo mediante programación lineal.

###install.packages("lpSolve")
library(lpSolve) ### está paquetería es la utilizada

### paqueterías que serán muy útiles
require(scenario)
require(graphics)

wti <- read.csv("Serie_WTI.csv", header = TRUE, sep = ";",dec = ",")
brent <- read.csv("Serie_Brent.csv", header = TRUE, sep = ";",dec = ",")

px_wti <- as.numeric(wti$PX_LAST)
px_brent <- as.numeric(brent$PX_LAST)

### utilizaremos la demanda que muestra
dem_wti <- as.numeric(wti$PX_VOLUME)
dem_brent <- as.numeric(brent$PX_VOLUME)

plot(px_wti,type = "l", col = "red")
#par(new=TRUE)
plot(dem_wti, type = "l", col = "green")

plot(px_brent,type = "l", col = "blue")
plot(dem_brent, type = "l", col = "pink")
```

```
## Generamos la matriz de probabilides de cada una de las series
wti_PXChange <- NULL
for(i in 1:(length(px_brent)-2)){
  wti_PXChange <- c(wti_PXChange,px_wti[i]-px_wti[i+1])
}

brent_PXChange <- NULL
for(i in 1:(length(px_brent)-2)){
  brent_PXChange <- c(brent_PXChange,px_brent[i]-px_brent[i+1])
}

demanda <- NULL
for(i in 1:(length(dem_brent)-1)){
  demanda <- c(demanda,dem_brent[i]+dem_wti[i])
}
plot(demanda, type = "l", col = "grey")

## Analizamos cuales son los rangos de movimientos que han mostrado las cotizaciones
## para poder hacer una matriz más precisa.
max(wti_PXChange) ## 3.98 en el último año
min(wti_PXChange) ## -2.81 en el último año

max(brent_PXChange) ## 4.09
min(brent_PXChange) ## -2.81

## Recordemos que un programa multiestados debe tener un horizonte de tiempo, por lo que
## seleccionamos un año, que al discretizarlo se convierte en 242 días hábiles.
T = 242

## Definiremos la siguiente variable para que guarde el valor de la optimización,
## considerada como la inversión inicial, en este caso, será de quince mil dólares
Z <- 6000

## Este corresponde a un problema clásico de optimización de la cartera de riesgo-rendimiento
## donde se minimice el riesgo, maximice el rendimiento.
## En un escenario estocástico de varias etapas.
## Ejemplo: un gran consumidor satisface la demanda por:
#1 compra en el mercado spot incierto con día de anticipación,
#2 compra de futuros de energía (base o pico),
#3 contratos de compra para la entrega de energía por adelantado,
#4 (opcional) producción propia con alguna central eléctrica.
```

```
#Optimización estocástica:
# Tendremos Incertidumbrprecio spot y demanda.
# La decisión a tomar es cual será la composición de la cartera.

## Debemos definir un ciclo que vaya desde 0 hasta la cantidad de tiempo que
## queremos simular

DEM<- NULL
#Como parte del problema de minimización de riesgo, estipulamos una confianza de 95%.
alfa <- 0.95
wti_price_simulation <- NULL
brent_price_simulation <- NULL
barriles_brent <- NULL
barriles_wti <- NULL

for(t in 0:T){
  ## Primero, definamos los coeficientes de la función objetivo, que corresponde la
  ## función de costo que tendremos. Recordemos que queremos minimizar el riesgo
  ## En este punto estamos en el tiempo t=0, donde optimizamos con datos "conocidos"
  ## "Inicializamos" los precios a tiempo t
  a <- mean(px_brent)+rnorm(1,mean(brent_PXChange),var(brent_PXChange))
  b <- mean(px_wti)+rnorm(1,mean(wti_PXChange),var(wti_PXChange))

  brent_price_simulation <- c(brent_price_simulation, a)
  wti_price_simulation <- c(wti_price_simulation, b)

  problem.coef.obj <- c(a,b)/alfa
  n <- length(problem.coef.obj)
  dimnames <- list(1:n,1:T) ##debe ser una lista

  #Y ahora defino los signos de mis restricciones en un vector del tipo "character":
  problem.dir.restr <- c(">=", "<=", ">", ">")

## Es una función de tres variables. Supongamos que tenemos tres restricciones.
## La matriz de coeficientes es la siguiente.

  problem.coef.restr <- matrix (c(1, 1, a, b, 1, 0, 0, 1), nrow=4,byrow=TRUE)
  #Como vemos, el la primera restriccion corresponde a la demanda.
  #La segunda corresponde al costo, que conlleva tener cada contrato
  dem_t <- rpois(1,125)
  if(dem_t == 0 ){dem_t = 125}
```

```
  uso_brent <- rpois(1,dem_t/4)


  ## Seguimos con los términos independientes, que corresponderá a las demandas
  problem.term.restr <- c(dem_t, 8000, uso_brent, (dem_t - uso_brent))

  ## Minimicemos la función objetivo:
  mylp <- lp ("min", problem.coef.obj, problem.coef.restr, problem.dir.restr, problem.term.restr)

  # Guardamos el comportamiendo de la solución el respectivo vector
  for(i in 1:n){
    print(mylp$solution[i])
  }
  barriles_brent <- c(barriles_brent,mylp$solution[1])
  barriles_wti <- c(barriles_wti,mylp$solution[2])

  print(mylp$objval)
  # También el valor de Z alcanzado:
  Z <- c(Z,mylp$objval)
  DEM <- c(DEM,dem_t)
}

plot(Z,type = "l", col = "purple")
plot(DEM, type="l", col="black")

plot(wti_price_simulation,type = "l", col = "purple")
plot(brent_price_simulation, type="l", col="green")

plot(barriles_brent, type = "l", col = "blue")
plot(barriles_wti, type = "l", col = "red")
```

Bibliografía

[1] ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.M., HEATH, D. (1999). "Coherent Measures of Risk". *Mathematical Finance*: 203–228

[2] BAJRAM, N., CAN, M. (2012). "A Stochastic Programming Approach for Multi-Period Portfolio Optimization". *Southeast Europe Journal of Soft Computing*: 48–55

[3] BEASLEY, J.E. "Operational Research Notes". Brunel University London. http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/sp.html

[4] BIRGE, J., LOUVEAUX, F. (1997). "Introduction to Stochastic Programming." *Springer*.

[5] DANÍELSSON, J., JORGENSEN, B.J., SAMORODNITSKY, G., SARMA, M., DE VRIES, C.G. (2005). "Subadditivity Re-Examined: the Case for Value-at-Risk." *RiskResearch.org*.

[6] DANTZIG, G.B. (1955). "Linear programming under uncertainly." *Management Sci.*: 197–206.

[7] DAVARNIA, D., KOCUK, B., CORNUÉJOLS, G. (2018). " Bayesian Solution Estimators in Stochastic Optimization." http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2017/11/6318.html.

[8] ERICHHORN, A., HEITSCH, H., ROMISCH, W. (2010). "Stochastic Optimization of Electricity Portfolios: Scenario Tree Modeling and Risk Management." *SIAM Series on Optimization*: 405–432.

[9] HAUGH, M. (2010). "Risk Measures, Risk Aggregation and Capital Allocation." *Capítulo en "Quantitative Risk Management", Spring.*: 405–432.

[10] KALL, P., WALLACE, S.W. (1994). "Stochastic Programming." *John Wiley and Sons, UK.*.

[11] SHAPIRO, A., DENTCHEVA, D., RUSZCZYŃSKI, A. (2009). "Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory." *Capítulo en "Handbook of Power Systems II", Series Energy Systems, Springer*: 405–432.

[12] SZEGÖ, G. (2002). "Measures of Risk". *Journal of Banking and Finance*: 1253–1272.

[13] ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S. (2000). "Optimization of Conditional Value-at-Risk". *Artículo en "The Journal of Risk". Volumen 2, No. 3.*: 21–41.

[14] ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S. (2002). "Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions". *Artículo en "Journal of Banking and Finance.", No. 26*: 1443–1471.

[15] WALKUP, D., WETS, R.J-B. (1967). "Stochastic programs with recourse". *SIAM Journal on Applied Mathematics*: 1929–1314.

[16] WALKUP, D., WETS, R.J-B. (1969). "Stochastic programs with recourse II: on the continuity of the objective". *SIAM Journal on Applied Mathematics*: 98–103.